HAL
open science

Coloriage du plan discret par jeux de tuiles déterministes

Bastien Le Gloannec

To cite this version:

Bastien Le Gloannec. Coloriage du plan discret par jeux de tuiles déterministes. Autre [cs.OH]. Université d'Orléans, 2014. Français. NNT : 2014ORLE2069 . tel-01288501

HAL Id: tel-01288501

https://theses.hal.science/tel-01288501v1

Submitted on 15 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ÉCOLE DOCTORALE MIPTIS
MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, PHYSIQUE THÉORIQUE
ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES

Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans

THÈSE

présentée par :

Bastien Le Gloannec

soutenue le : **12 décembre 2014**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**

Discipline/Spécialité : **Informatique**

Coloriage du plan discret par jeux de tuiles déterministes

THÈSE dirigée par :

Nicolas Ollinger	Professeur des universités, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Bruno Durand	Professeur des universités, Université Montpellier 2
Fabien Durand	Professeur des universités, Université de Picardie Jules Verne

JURY :

Olivier Bournez	Professeur de l'École Polytechnique
Bruno Durand	Professeur des universités, Université Montpellier 2
Fabien Durand	Professeur des universités, Université de Picardie Jules Verne
Emmanuel Jeandel	Professeur des universités, Université de Lorraine
Ines Klimann	Maître de conférences HDR, Université Paris Diderot
Nicolas Ollinger	Professeur des universités, Université d'Orléans
Anne Siegel	Directrice de recherche CNRS, IRISA – Inria Rennes

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Nicolas Ollinger, pour sa patience, ses lumineuses intuitions et ses innombrables idées le plus souvent aussi fulgurantes qu'élégantes et astucieuses.

Je remercie grandement Bruno Durand et Fabien Durand d'avoir accepté le rôle de rapporteur sur ce travail. Leurs relectures approfondies ont significativement contribué à l'affinement de ce mémoire.

Je remercie également Olivier Bournez, Emmanuel Jeandel, Ines Klimann et Anne Siegel d'avoir accepté de prendre part au jury.

Je remercie les membres de l'équipe GAMoC, du LIFO et du pôle informatique de l'Université d'Orléans que j'ai côtoyés ces dernières années. Une pensée particulière pour les doctorants et jeunes docteurs que j'ai eu le plaisir de fréquenter au laboratoire ou en dehors, ainsi que pour mes deux géniaux co-bureaux.

Je ne saurais oublier tous ceux qui d'une manière ou d'une autre m'ont mis le pied à l'étrier ou ont contribué à élargir mes horizons. Le briquet lorientais et le luron nantais m'ont, il y a déjà fort longtemps, transmis leur goût des mathématiques. Merci encore à Emmanuel Jeandel et Jarkko Kari qui m'ont respectivement accueilli en stage à Marseille et à Turku, ainsi qu'à toute l'ancienne équipe Escape du LIF. Je remercie également Anahí Gajardo, ainsi que Marco Montalva et Guillaume Theyssier, pour leur chaleureux accueil lors d'un séjour au Chili. Sans oublier tous ceux avec qui j'ai eu la chance d'échanger, devant un tableau ou autour d'un verre, en conférence ou autre rencontre scientifique.

Merci enfin à ma famille et mes amis pour leur soutien tout au long de mon parcours.

Table des matières

Introduction **11**

1 Pavages et déterminisme **19**
1.1 Pavages et calcul 19
1.1.1 Tuiles de Wang 19
1.1.2 Topologie 22
1.1.3 Transformations 28
1.1.4 Dynamique symbolique 29
1.1.5 Décidabilité 33
1.2 Pavages et substitutions 40
1.2.1 Substitutions 40
1.2.2 Simulation 44
1.2.3 Constructions 45
1.3 Déterminisme 60
1.3.1 Définition 62
1.3.2 État de l'art 63
1.3.3 Lien avec d'autres modèles de calcul 65
1.4 Premiers résultats 69
1.4.1 Soficité directionnelle 69
1.4.2 Dénombrement 70
1.4.3 Un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe . . . 73

2 Le problème du pavage périodique **79**
2.1 Une transformation sur les jeux de tuiles 80
2.2 La construction déterministe 81
2.2.1 Première couche : grille de parité 82
2.2.2 Deuxième et troisième couches : jeu apériodique avec lignes miroirs 83
2.2.3 Quatrième couche : calcul Turing 85
2.2.4 Conclusion 89

3 Substitutions **93**
3.1 Soficité directionnelle des ensembles limites de substitutions 95
3.1.1 Imposer l'ensemble limite d'une substitution : le jeu de tuiles enrichi $\tau_{104}(s)$ 95
3.1.2 Le jeu de tuiles NE déterministe $\tau_{\text{NE}}(s)$ 97
3.2 4-way soficité des ensembles limites de substitutions 101
3.2.1 Le jeu de tuiles 4-way déterministe $\tau_{4w}(s)$ 101
3.2.2 Analyse du cas de deux directions opposées 102
3.2.3 Analyse du cas de deux directions orthogonales . . . 103
3.2.4 Grouper les tuiles 103
3.2.5 Résultats 107

4 Constructions de type point-fixe **109**
4.1 Simulation bi-déterministe de machine de Turing 110
4.2 Une technique de simulation réversible 110
4.3 Jeu de tuiles point-fixe bi-déterministe 115
4.3.1 Simulation d'un jeu de tuiles bi-déterministe 115
4.3.2 Point-fixe apériodique 117
4.4 Facteur d'échelle variable 120
4.4.1 Applications 122

5 Tuiles à cavaliers **125**
5.1 Des tuiles de Wang aux tuiles à cavaliers 126
5.1.1 Rayon de déterminisme 127
5.1.2 Tuiles à cavaliers 130
5.2 Le problème du pavage avec tuile initiale 134
5.3 Marquer une diagonale 138
5.3.1 Structure générale 139
5.3.2 Détour par la substitution de Thue-Morse 140
5.3.3 La construction 142

Bibliographie **153**

Table des figures

1.1 Une tuile de Wang t 19
1.2 Cellules du plan discret $\mathbb{Z}^2$ 20
1.3 Motif (valide) de taille 15×15 par un jeu de tuiles de Wang . 21
1.4 Motifs périodiques valides modulo rotations/symétries . . . 22
1.5 Exemple de jeu de tuiles de Wang 22
1.6 Pavages (à translation près) par le jeu exemple 23
1.7 Coloriage à trois couleurs 24
1.8 Groupage 3×2 29
1.9 Tuiles simulant une machine de Turing 37
1.10 Exemple de substitution 42
1.11 Tuiles de parité 46
1.12 Schémas de simulation 47
1.13 Quatre croix de parité pour la deuxième couche 47
1.14 Substitution associée aux décorations de la troisième couche 49
1.15 Tuiles de τ_{104} 50
1.16 Substitution s_{104} 50
1.17 Motif de $s_{104}^5(\tau_{104})$ 51
1.18 Deux premières couches de τ_{103} 53
1.19 Tuiles de τ_{103} 54
1.20 Substitution s_{103} 54
1.21 Motif de $s_{103}^5(\tau_{103})$ 55
1.22 Tuiles de τ_{56} 56
1.23 Substitution σ_{56} 57
1.24 Substitution régulière 2×2 σ'_{56} 58
1.25 Projection des tuiles de τ_{104} sur τ_{56} 58
1.26 Jeu géométrique apériodique A2, extrait de [AGS92] 60
1.27 24 tuiles de Wang apériodiques obtenues à partir de A2, extrait de [GS87] 61
1.28 16 tuiles de Wang apériodiques obtenues à partir de A2 [GS87] 61
1.29 NE déterminisme 62
1.30 Marquage diagonal 75
1.31 Encerclements des tuiles de parité SO 76
1.32 Motif d'un pavage par $\tau_{104}^{\bullet}$ 77

1.33 Tuiles portant les nouveaux fils dans $\tau^{\bullet}_{104}$ 77

2.1 Une tuile de τ et les tuiles correspondantes dans $\overline{\tau}^h$, $\overline{\tau}^v$ et $\overline{\tau}^c$ 81
2.2 Description du jeu de tuiles τ_g 82
2.3 Éléments de description du jeu de tuiles τ^h_a 83
2.4 Couche de calcul de τ_M 86
2.5 Jeu de tuiles $\mathcal{G}_M$ ($\forall a \in \mathcal{C}$, à l'exception des états de la machine dans les couleurs horizontales) 87
2.6 Restrictions alphabétiques sur la quatrième couche du jeu de tuiles groupé τ_4 88
2.7 Couche de calcul d'un pavage bi-périodique par τ_4 91

3.1 Arbre quaternaire (câbles NE) apparaissant dans tout pavage 96
3.2 Règles hiérarchiques pour les V 96
3.3 Règles hiérarchiques pour les X de fond NE 96
3.4 Règles de partage 97
3.5 Motif d'un pavage par $\tau_{\text{NE}}(s)$ 99
3.6 Tuiles portant les fils dans $\tau_{\text{NE}}(s)$ 99
3.7 Les quatre substitutions symétriques 102
3.8 Vues des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$ 104
3.9 Vues éclatées niveau par niveau des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$ (à gauche) et $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$ (à droite) 105
3.10 Vue des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$ 106
3.11 Vue standard des câbles de $\tau_{4w}(s')$ 108

4.1 Tuiles bi-déterministes simulant une machine de Turing réversible 111
4.2 Motif de simulation bi-déterministe 111
4.3 Schéma de calcul en temps uniforme 114
4.4 Compteur réversible avec état initial 114
4.5 Macro-tuiles du jeu de simulation 116

5.1 Directions d'expansivité limites pour le déterminisme à rayon r 128
5.2 Expansivité dans une direction $1 < \alpha < \frac{r}{r-1}$ 128
5.3 Voisinage d'une tuile à cavaliers 132
5.4 NE déterminisme 132
5.5 Construction déterministe d'une parabole 133
5.6 Jeu de tuiles à cavaliers 4-way déterministe simulant une machine de Turing réversible 135
5.7 Tuiles à cavaliers complémentaires pour initialiser le calcul Turing 136
5.8 Exemple de pavage simulant un calcul Turing 137
5.9 Schéma général de la structure 140
5.10 Marquer une diagonale 144

5.11 Couleurs des cavaliers du jeu de tuiles 145
5.12 41 types de tuiles de κ 149
5.13 Transformation symétrique opérée sur les tuiles 150
5.14 Marquer une diagonale (construction complète) 151

Introduction

Le formalisme des tuiles de Wang a été introduit au début des années 1960 par le logicien Hao Wang [Wan61] dans le cadre de l'étude de la décidabilité d'un fragment des formules $\forall\exists\forall$ de la logique du premier ordre. Au cours de ses recherches sur la décidabilité de cette classe de formules, Wang avait remarqué que l'on peut réduire cette question à un petit puzzle combinatoire (en anglais dans le texte).

> *Assume we are given a finite set of square plates of the same size with edges colored, each in a different manner. Suppose further there are infinitely many copies of each plate (plate type). We are not permitted to rotate or reflect a plate. The question is to find an effective procedure by which we can decide, for each given finite set of plates, whether we can cover up the whole plane (or, equivalently, an infinite quadrant thereof) with copies of the plates subject to the restriction that adjoining edges must have the same color.*

Wang espérait alors que cette question, plus connue sous le nom de *Domino Problem* et que nous appellerons ici *problème du pavage*, puisse être décidable. De cette façon il aurait obtenu immédiatement la décidabilité de la classe de formules étudiée. Cependant et comme l'a démontré Berger [Ber64] quelques années plus tard, le problème du pavage est indécidable. L'un des aspects singuliers de la preuve de Berger et de toutes les preuves connues de l'indécidabilité du problème du pavage est le passage nécessaire par une étape de construction d'un jeu de tuiles *apériodique*, c'est-à-dire pouvant paver le plan discret $\mathbb{Z}^2$ mais sans qu'aucun des pavages n'admette de vecteur de périodicité. L'existence d'un tel jeu de tuiles n'a *a priori* rien d'évident, si bien que Wang avait initialement conjecturé [Wan61] que tout jeu pouvant paver le plan admettait un pavage périodique, ce qui aurait impliqué la décidabilité du problème du pavage — lequel est corécursivement énumérable pour des raisons topologiques — grâce à la semi-décidabilité de la pavabilité périodique. Du reste, Berger construit un squelette apériodique bien hiérarchisé auquel il intègre une composante de calcul en y injectant les diagrammes espace-temps d'une machine de Turing, qui constituent des objets aisément localement vérifiables. Les pavages de Wang prennent alors la dimension d'un modèle de calcul en espace dis-

cret de dimension deux et dans lequel la temporalité n'est pas explicite. De nombreuses constructions, visant le plus souvent une plus grande concision et une moins grande technicité, ont par la suite contribué à simplifier ou synthétiser l'approche de Berger. Robinson [Rob71] propose ainsi dès le début des années 1970 une nouvelle preuve qui présente l'avantage d'être suffisamment simple, élégante et économique en nombre de tuiles pour permettre une bonne connaissance et compréhension de l'ensemble des pavages engendrés. Sa construction sera en conséquence par la suite très largement réutilisée dans la littérature sur les pavages. Les preuves de Berger et Robinson reposent sur des arguments de combinatoire établis par l'examen minutieux et la caractérisation partielle des motifs pouvant apparaître dans les pavages. Ces constructions sont en réalité intrinsèquement substitutives dans le sens où les ensembles de pavages formés par leurs jeux respectifs sont obtenus à la limite par l'action de substitutions sur les tuiles imposant en-soi l'apériodicité par la structure hiérarchique globale qu'elles engendrent. Ces constructions historiques rejoignent ainsi les constructions plus modernes [DLS05, Oll08b, DRS08] dans lesquelles l'auto-similarité devient l'argument central. On pourra observer au passage que le panorama des connaissances sur les preuves de l'indécidabilité du problème du pavage reste partiellement incomplet. On ne connaît en particulier pas de preuve de l'existence d'un jeu de tuiles apériodique qui ne procède pas par construction explicite d'un tel jeu. La méthode de Kari [Kar07], fondée sur une utilisation plus élaborée des techniques mises en œuvre par Kari et Culik [Kar96, CI96] pour la construction de petits jeux de tuiles apériodiques, fournit une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage par réduction du problème de l'immortalité des machines de Turing [Hoo66] ne reposant pas sur la construction explicite d'un jeu de tuiles apériodique [1]. On ne connaît en revanche [2] pas de preuve de l'indécidabilité du pavage exploitant uniquement l'existence d'un jeu de tuiles apériodique quelconque sans étudier l'ensemble de ses pavages de manière à pouvoir y injecter du calcul.

Mais si le formalisme des tuiles de Wang date du début des années 1960, un formalisme légèrement plus général et conduisant à la description des mêmes objets avait été introduit dès la fin des années 1930 par des mathématiciens spécialistes des systèmes dynamiques, en particulier Morse et Hedlund [MH38, Hed69], dans le but d'étudier de façon combinatoire le comportement de systèmes dynamiques réels, en espace continu, à travers un partitionnement de l'espace des phases en un nombre fini de zones conduisant à la définition d'un système symbolique discret associé. Cette branche

1. La construction d'un jeu de tuiles apériodique y est néanmoins implicite : l'indécidabilité de l'immortalité impliquant l'existence de machines de Turing apériodiques [BCN02, COT14] qui injectées dans la construction de Kari fournissent un jeu de tuiles apériodiques.

2. Et contrairement au cas du pavage périodique [Jea10], comme nous aurons l'occasion d'y revenir au chapitre 2.

de l'étude des systèmes dynamiques, appelée *dynamique symbolique*, fournit une définition des pavages par le biais des *sous-shifts de type fini*, c'est-à-dire les ensembles de coloriages de l'espace discret $\mathbb{Z}^d$ de dimension d desquels un ensemble fini de motifs (finis) est banni. Il devient alors également possible de tirer parti dans ce cadre de résultats de topologie, l'espace des coloriages constituant un espace topologique compact dans lequel les sous-shifts sont fermés. Cette seconde lecture des objets conduit à considérer les pavages de Wang comme systèmes dynamiques discrets de dimension deux soumis à l'action des translations du plan. Elle enrichit la théorie des pavages en y apportant son lot de notions, outils et questions de dynamique. Réciproquement, la dimension modèle de calcul des pavages de Wang a contribué à faire avancer jusqu'à encore récemment les connaissances en dynamique symbolique [Han74, Mye74, JV11, JV13].

La dimension calculatoire des pavages pose certaines questions quant au rapport entretenu par ce modèle avec d'autres modèles plus usuels en informatique fondamentale. La machine de Turing [Tur36], modèle qui a révolutionné la façon de concevoir les algorithmes et étudier leurs propriétés, introduit de façon explicite la distinction formelle entre l'espace utilisé par un calcul et le temps nécessaire à ce dernier. C'est aussi le cas de la plupart des modèles usuels en espace discret uni-dimensionnel, qui intègrent dès leur définition formelle une composante temporelle explicite. Les pavages sont en revanche des objets statiques, l'étude formelle de leur dynamique repose sur l'action élémentaire des translations, qui demeure artificielle quant aux aspects calculatoires. L'intégration du calcul au sein des pavages pose la question de la dimension temporelle de ce dernier dans ce modèle. Le plus souvent, c'est l'une des directions de l'espace qui joue le rôle du temps et assure la représentation de l'espace-temps du calcul dans l'espace du pavage.

Mais ce n'est pas toujours le cas. Une preuve méconnue de l'indécidabilité du problème du pavage par Aanderaa et Lewis [AL74] s'emploie à coder des pavages de Wang avec tuile initiale, destinés à contenir un calcul, au sein d'une variante relâchée des sous-shifts de type fini sur l'espace du double ruban $2\mathbb{Z}$ sur lequel l'application d'une contrainte globale assez élémentaire est de plus permise. Ces contraintes y autorisent le codage d'un système de coordonnées redondant décrivant les positions dans l'espace $\mathbb{Z}^2$ des tuiles du pavage initial ainsi que la vérification des contraintes de pavabilité de ce dernier. Ces double-shifts de dimension un peuvent alors être recodés aux sein de sous-shifts classiques de dimension deux — modulo une première étape travaillant sur un réseau hexagonal — le pavage initial étant alors dispersé de façon fortement redondante au sein du pavage issu de la construction où l'espace-temps du calcul initial semble désormais parfaitement diffus.

Les modèles de calcul usuels sont souvent déterministes. L'opportunité d'introduire du non-déterminisme dans leur définition relève alors d'une

généralisation du modèle, souvent très pertinente quant aux questions de complexité, mais qui ne confère pas nécessairement plus de puissance à ce dernier lorsque l'on ne s'intéresse qu'aux questions de pure calculabilité. Les pavages de Wang constituent en revanche un modèle radicalement non déterministe. Le déterminisme pour les tuiles de Wang consiste à introduire des contraintes syntaxiques sur les jeux de manière à y voir apparaître une notion locale de déterminisme imposant une tuile dans une direction diagonale donnée en fonction de ses voisines dans la direction opposée. Dans les pavages engendrés par un jeu déterministe dans une direction, toute diagonale détermine la suivante dans la direction de déterminisme considérée. Toute diagonale apparaissant dans un pavage détermine alors parfaitement un demi-plan de ce dernier, qui peut être localement reconstruit par application de la règle locale de déterminisme. Une dynamique de la prédictibilité, qui pourrait s'apparenter à une forme de temporalité, apparaît alors explicitement dans l'espace du pavage. Lorsque le jeu de tuiles est déterministe dans deux directions opposées, la diagonale détermine l'intégralité du pavage, forçant toute l'information de ce dernier à être contenue au sein d'un objet de dimension un, laissant entrevoir la possibilité de recours aux outils de dynamique symbolique uni-dimensionnelle, cadre dans lequel l'indecidabilité n'est plus nécessairement la règle. Et c'est précisément une telle forme de déterminisme qu'exhibent les pavages obtenus par la construction d'Aanderaa et Lewis.

La dynamique que nous venons d'esquisser n'est cependant pas nouvelle : il s'agit essentiellement de celle des automates cellulaires partiels, la règle locale de déterminisme s'interprétant naturellement comme la règle locale (partielle) d'un automate cellulaire agissant alors sur les diagonales d'un pavage. Le formalisme syntaxique des jeux de tuiles déterministes a d'ailleurs été introduit par Kari [Kar92] au début des années 1990 dans le but de traiter certaines questions de décidabilité portant sur les automates cellulaires uni-dimensionnels par réduction du problème du pavage dans le cadre déterministe. L'ensemble des pavages par un jeu de tuiles déterministe correspond en effet précisément à l'ensemble des diagrammes espace-temps de l'automate cellulaire partiel, agissant sur les diagonales, associé. Il en capture dès lors, en un certain sens, la dynamique. Cette approche fructueuse est confirmée par les résultats de dynamique sur les automates cellulaires uni-dimensionnels réversibles obtenus par Lukkarila [Luk09] à partir de l'étude des jeux de tuiles déterministes dans deux directions opposées. Tout cela conduit à s'intéresser aux jeux de tuiles déterministes en-soi, aux ensembles de pavages qu'ils engendrent, aux questions de décidabilité ou de dynamique ainsi qu'aux constructions qu'il est possible de mettre en œuvre dans ce cadre.

Dans ce mémoire, une place importante sera faite aux jeux de tuiles *4-way* déterministes, c'est-à-dire aux jeux de tuiles déterministes dans les quatre directions de l'espace simultanément. Dans un pavage par un tel

jeu de tuiles, la connaissance d'un chemin huit-connexe de tuiles croisant toute ligne et toute colonne du plan discret détermine de façon unique l'intégralité du pavage, qui peut être localement reconstruit par application des quatre règles locales de déterminisme. Nous illustrerons par diverses constructions — ancrées dans plusieurs enjeux majeurs de la théorie des pavages tels les problèmes de décidabilité, d'édification hiérarchique et substitutive et les systèmes de particules et de collisions — les vastes libertés que laisse un cadre en apparence si contraint.

Contenu de ce mémoire

Décidabilité et déterminisme

Ce n'est qu'assez récemment, et dix ans après la construction d'un jeu de tuiles 4-way déterministe apériodique par Kari et Papasoglu [KP99] dont nous proposons une construction alternative au chapitre 1, qu'il a été montré par Lukkarila [Luk10] que le problème du pavage restait indécidable dans le cadre 4-way déterministe. La question de la décidabilité du problème du pavage périodique avait été abordée dans le cadre déterministe dans une direction par Mazoyer et Rapaport [MR99] afin de montrer l'indécidabilité de la nilpotence des automates cellulaires uni-dimensionnels sur les configurations périodiques. La décidabilité de ce problème restait en revanche ouverte dans le cadre 4-way déterministe. En nous appuyant sur des méthodes récentes de Jeandel [Jea10] et des ingrédients de Lukkarila [Luk09], nous montrons l'indécidabilité de cette question dans le chapitre 2 tout en y illustrant au passage diverses techniques de transformation et manipulation des jeux de tuiles 4-way déterministes.

Hiérarchie et reconnaissance

La construction de structures globales hiérarchiques dans les pavages est souvent un enjeu important dans la mesure où nombre de constructions requièrent par exemple la répartition judicieuse d'un calcul dans l'espace, en particulier dans un cadre topologique compact où tout ce qui est isolé dans l'espace peut être éliminé par un procédé topologique d'extraction : typiquement, un jeu de tuiles permettant de décrire des calculs isolés dans l'espace au sein de ses pavages pourra également former des pavages ne contenant plus aucun calcul. Les substitutions constituent un outil très naturel et commode pour décrire une structure globale bien hiérarchisée. Comme nous l'avons déjà mentionné, bon nombre de constructions de jeu de tuiles apériodiques mettent en jeu, implicitement ou explicitement, un mécanisme substitutif. On peut alors s'intéresser à la reconnaissance par des règles des ensembles de coloriages engendrés par des substitutions. La notion formelle associée est la *soficité* des ensembles limites de

substitutions, c'est-à-dire l'engendrement de ces ensembles comme projection d'ensembles de pavages. Une construction générique pour des substitutions discrètes rectangulaires est proposée par Mozes [Moz89] à la fin des années 1980. Ce résultat a été par la suite étendu à des cadres plus larges, dans lesquels les considérations géométriques entrent en ligne de compte, par Goodman-Strauss [GS98] ou encore Fernique et Ollinger [FO10]. En enrichissant une construction de Ollinger [Oll08b], nous montrons dans le chapitre 3 qu'il est encore possible de reconnaître les ensembles limites de toutes les substitutions 2×2 dans le cadre 4-way déterministe.

Les structures hiérarchiques substitutives sont aussi le lieu de l'autosimilarité, argument privilégié par les constructions modernes [DLS05, Oll08b, DRS08] de jeux de tuiles apériodiques. Parmi ces dernières, la méthode de construction de jeux de tuiles points-fixes de Durand, Romashchenko et Shen [DRS08, DRS12], inspirée par l'idée du point-fixe de Kleene en calculabilité générale, autorise de très nombreuses applications et permet de couvrir à elle-seule un grand nombre de résultats, classiques ou nouveaux, de la théorie des pavages de Wang avec une impressionnante souplesse. Nous en revisitons les techniques au chapitre 4 dans le but de l'adapter au cadre bi-déterministe et en tirons quelques applications.

Particules, collisions et déterminisme

La construction de structures complexes dans le monde des pavages et des automates cellulaires fait très souvent intervenir des systèmes de particules/signaux et collisions [MT99, Ric08]. L'une des réalisations les plus spectaculaires de ce type est la solution de Mazoyer [Maz87] au problème de synchronisation dit du *firing squad*. L'élaboration de telles structures dans le cadre déterministe se voit contrainte par le grand nombre de directions d'expansivité des ensembles de pavages déterministes, ces dernières interdisant la construction locale (sans support par une structure globale) de particules dans la même direction. Ainsi un jeu de tuiles 4-way déterministe ne peut exhiber de particules construites localement que dans les directions horizontales et verticales, seules directions non expansives de l'ensemble de ses pavages. Élargir le rayon de la règle locale de déterminisme constitue une manière naturelle de restreindre de façon raisonnable les directions d'expansivité tout en rendant possible la construction locale de particules. C'est l'éventualité que nous proposons d'explorer dans le chapitre 5 en introduisant la notion de *rayon de déterminisme* afin de généraliser le déterminisme usuel des tuiles de Wang. Nous y introduisons ainsi le formalisme des *tuiles à cavalier* dans le but de travailler à rayon deux avec un objet syntaxiquement satisfaisant et nous revisitons dans ce cadre nouveau des problématiques de Lukkarila [Luk09] : le problème du pavage avec tuile initiale dans un cadre 4-way déterministe et le marquage d'une diagonale, originellement construit dans le but de décrire le zig-zag formé par

les déplacements de la tête d'une machine de Turing au cours de son calcul. Les constructions alternatives que nous en proposons sont à de nombreux égards significativement plus simples que les constructions originales.

Perspectives

Le présent mémoire propose plusieurs constructions dans le cadre des jeux de tuiles de Wang déterministes. Face à ces résultats constructifs positifs, apparaît naturellement la nécessité complémentaire d'outils apportant des résultats négatifs, par exemple des conditions nécessaires de soficité dans le cadre déterministe. Les travaux portant sur les langages de figures ou encore la complexité de communication suggèrent quelques pistes de ce point de vue, dont certaines sont seulement esquissées au chapitre 1. La richesse des outils existant dans ces cadres formels, ou développés très récemment [Jea14], laisse augurer la possibilité d'une exploitation plus fine en vue de l'obtention de résultats plus marquants.

Le lien avec d'autres modèles exhibant naturellement certaines formes de déterminisme, tels les automates de Mealy dont nous discutons au chapitre 1, mériterait également d'être considéré en profondeur. On pensera en particulier au lien récemment apparu [Gil14] entre le problème de la finitude des (semi-)groupes d'automates et le problème du pavage dans un cadre déterministe, laissant entrevoir la possibilité d'exploitation de résultats d'indécidabilité dans le monde des pavages déterministes (complets) pour traiter des questions de décidabilité dans ce modèle.

Les notions généralisées de déterminisme introduites au chapitre 5 pourraient être étendues par la définition de règles de déterminisme portant sur des voisinages dirigés quelconques, introduisant alors explicitement des directions locales de déterminisme rationnelles quelconques. Cela pourrait en particulier permettre d'affiner la compréhension du lien entre les directions de déterminisme local d'un jeu et les directions d'expansivité de l'ensemble de ses pavages.

Les constructions élaborées dans ce mémoire suggèrent que les possibilités de construction le cadre déterministe restent relativement riches. Les outils proposés pourraient en ce sens s'inscrire dans un processus de recherche dont l'horizon serait la question, en l'état ouverte, de la décidabilité de l'expansivité positive des automates cellulaires de dimension un.

Chapitre 1

Pavages et déterminisme

Ce chapitre introduit les objets qui seront étudiés tout au long de ce mémoire. Nous y rencontrons en particulier les diverses problématiques liées aux pavages par tuiles de Wang et leur déterminisme, les coloriages du plan discret et les notions de dynamique symbolique et de topologie associées, sans oublier les substitutions. Le chapitre se conclut par quelques premiers résultats d'ordre assez général : après quelques résultats de combinatoire et dénombrement, nous présentons la construction d'un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe.

1.1 Pavages et calcul

Nous proposons ici une introduction générale à la théorie des pavages de Wang. D'autres introductions au sujet peuvent également intéresser le lecteur curieux, par exemple dans l'ouvrage de référence Grünbaum et Shephard [GS87] (chapitres 10 et 11), les excellentes notes de cours de Kari [Kar09b] ou encore l'article de synthèse de Durand [Dur02].

1.1.1 Tuiles de Wang

Définissons formellement pour commencer les objets fondamentaux auxquels ce mémoire est essentiellement consacré. L'objet le plus élémentaire est la tuile de Wang, illustrée par la figure 1.1.

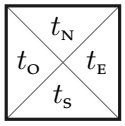


FIGURE 1.1 – Une tuile de Wang t

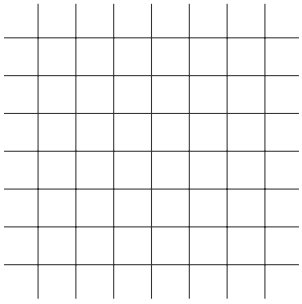


FIGURE 1.2 – Cellules du plan discret $\mathbb{Z}^2$

Définition 1 (Tuile de Wang)**.** Étant donné un ensemble fini de *couleurs* $\mathcal{C}$ (autrement dit, un alphabet quelconque), une *tuile de Wang* est une tuile carrée unité pourtant une couleur de $\mathcal{C}$ sur chacun de ses quatre côtés. Formellement, une tuile de Wang t est un quadruplet de couleurs $t = (t_{\text{O}}, t_{\text{S}}, t_{\text{E}}, t_{\text{N}}) \in \mathcal{C}^4$ dont les quatre composantes notées $t_{\text{O}}, t_{\text{S}}, t_{\text{E}}, t_{\text{N}}$ désignent les couleurs des côtés ouest, sud, est, nord respectivement.

On travaille toujours avec un ensemble fini de tuiles de Wang, c'est ce que l'on appelle le jeu de tuiles.

Définition 2 (Jeu de tuiles)**.** Un *jeu de tuiles* de Wang τ sur un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$ fini est un ensemble, *a fortiori* fini, de tuiles de Wang $\tau \subseteq \mathcal{C}^4$.

En imaginant que l'on dispose d'une infinité de copies de chacune des tuiles du jeu, on peut essayer de paver le plan discret $\mathbb{Z}^2$ avec ces tuiles, c'est-à-dire en placer une en chacun des points, souvent désignés sous le nom de *cellules* dans ce cadre (cf. figure 1.2), du plan discret de telle manière que deux tuiles voisines partagent toujours la même couleur le long de leur arête commune.

Définition 3 (Pavage)**.** Un *pavage* par un jeu de tuiles τ est une application $t : \mathbb{Z}^2 \to \tau$ associant à chaque point de $\mathbb{Z}^2$ une tuile de τ et vérifiant les *règles locales de compatibilité* suivantes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$t(x, y)_{\text{E}} = t(x + 1, y)_{\text{O}}$$
$$t(x, y)_{\text{N}} = t(x, y + 1)_{\text{S}}$$

L'ensemble de tous les pavages par un jeu de tuiles τ est noté $\mathcal{X}_\tau$.

Il est souvent utile de considérer non plus un pavage du plan discret tout entier mais seulement d'un domaine fini de $\mathbb{Z}^2$. Dans ce cas on parlera de motif valide.

Définition 4 (Motif)**.** Étant donné un ensemble fini $D \subseteq \mathbb{Z}^2$, un *motif* de *domaine* ou *support* D par un jeu de tuiles τ est une application $P : D \to \tau$. On note le support $\operatorname{supp} P = D$.

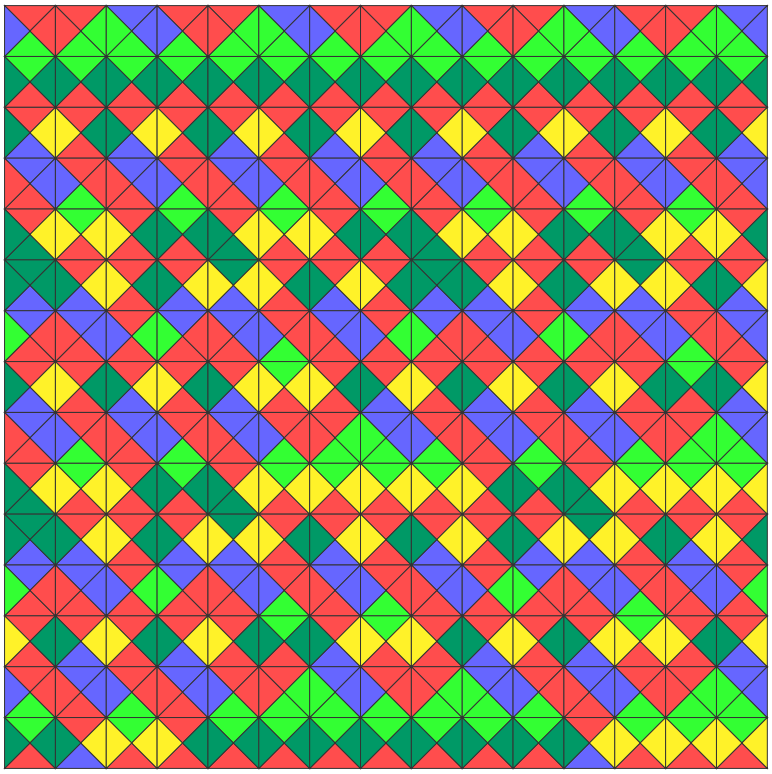


FIGURE 1.3 – Motif (valide) de taille 15×15 par un jeu de tuiles de Wang

Un motif P est *valide* s'il vérifie les règles locales de compatibilité des pavages le long de ses arêtes intérieures, c'est-à-dire séparant deux tuiles appartenant au motif.

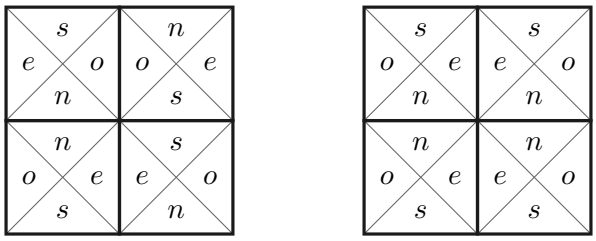
Un exemple de motif (valide) de pavage par tuiles de Wang est donné par la figure 1.3.

Comme Wang le souligne dans son énoncé du problème, les tuiles ne doivent subir ni rotation, ni symétrie. La raison à cela est évidente : tout jeu non vide admet toujours un pavage si l'on s'autorise ces transformations comme l'illustrent les motifs carrés 2×2 de la figure 1.4 qui peuvent être répétés périodiquement afin de paver le plan.

On notera également que les tuiles de Wang sont un modèle formel simple qui peut être utilisé afin de modéliser des tuiles géométriques — pourvu que ces dernières soient disposées selon un réseau suffisamment régulier et que leurs contraintes d'assemblage puissent s'exprimer de façon combinatoire — telles par exemple des pièces de puzzle.

Concluons cette section par un court exemple.

Exemple 1. On considère les tuiles de la figure 1.5. L'ensemble des pavages possibles (à translation près) par ce jeu est représenté sur la figure 1.6. Les



(a) Motif possible avec les rotations

(b) Motif possible avec les symétries

FIGURE 1.4 – Motifs périodiques valides modulo rotations/symétries

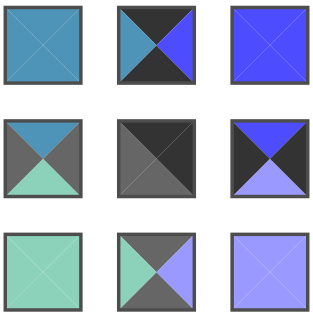


FIGURE 1.5 – Exemple de jeu de tuiles de Wang

pavages les plus typiques par ce jeu sont ceux qui contiennent une croix intégralement formée (pavages décrits par le motif central de la figure, les seuls contenant la tuile centrale de la figure 1.5). Mais on trouve également dans l'ensemble des pavages toutes les versions « dégénérées » de ces pavages : tous ceux ne contenant qu'un bras bi-infini horizontal ou vertical de la croix, ainsi que les quatre pavages uniformes (correspondant à chacun des quatre quadrants délimités par une croix bien formée).

Avant de revenir aux questions de décidabilité posées par Wang, nous ferons un détour par la topologie et la dynamique symbolique afin d'ancrer les objets que nous venons d'introduire dans un cadre formel plus général.

1.1.2 Topologie

Coloriages

L'objet fondamental qui nous intéresse ici est le coloriage du plan discret $\mathbb{Z}^2$.

Définition 5 (Coloriage)**.** Étant donné un alphabet fini Σ, un Σ-*coloriage* est une application $c : \mathbb{Z}^2 \to \Sigma$ décorant chaque cellule du plan discret par

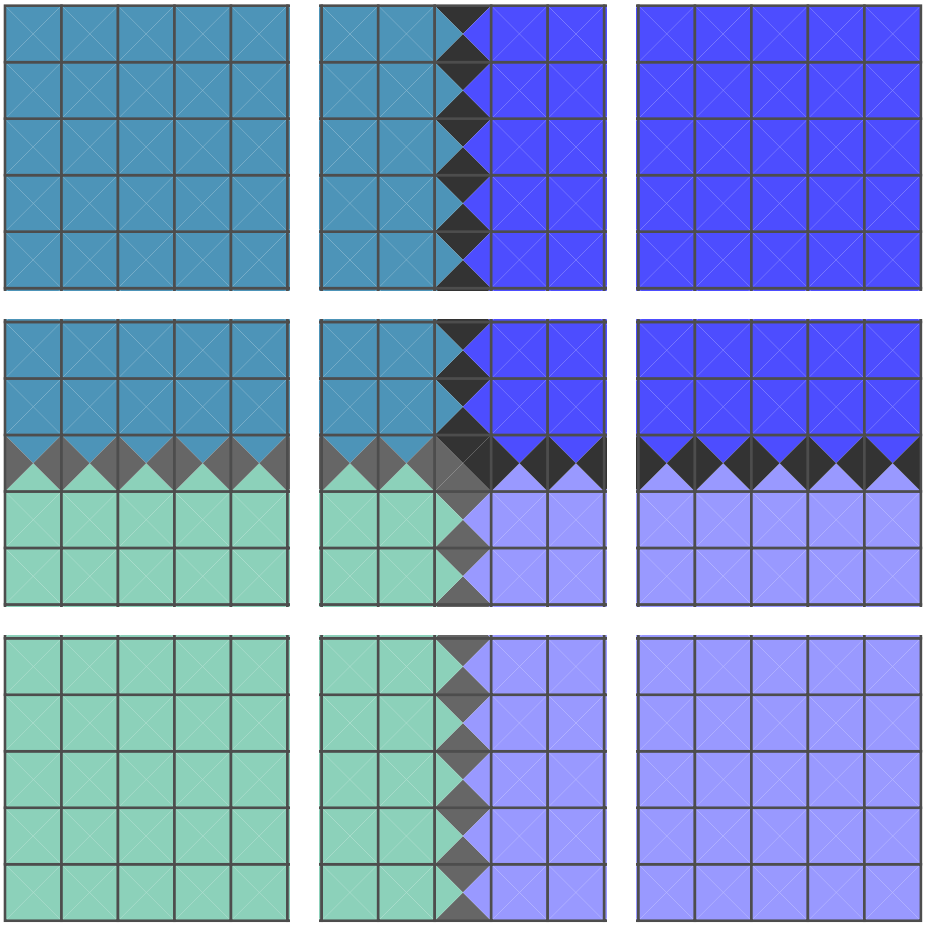


FIGURE 1.6 – Pavages (à translation près) par le jeu exemple

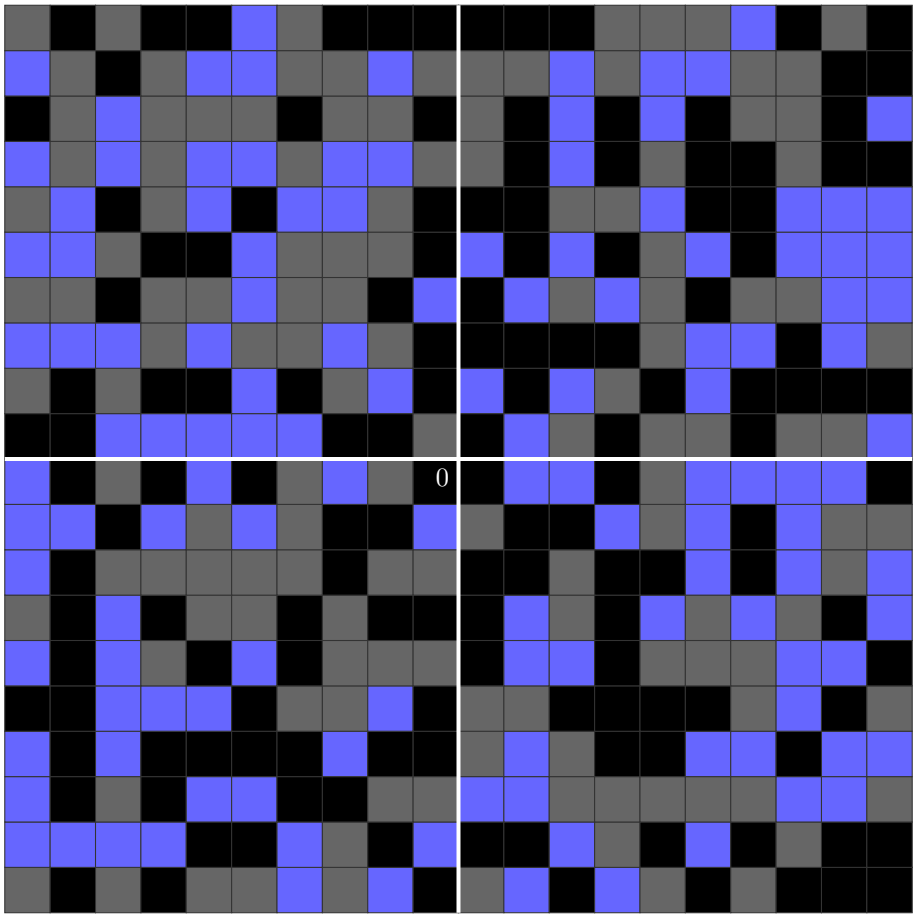


FIGURE 1.7 – Coloriage à trois couleurs

une lettre de Σ. En l'absence d'ambiguïté sur Σ, on parlera simplement de *coloriage*.

Un exemple de (motif de) coloriage est donné par la figure 1.7.

Remarque 1. Un pavage par un jeu de tuiles τ est un τ-coloriage vérifiant certaines contraintes supplémentaires (les règles locales de compatibilité).

Définition 6 (Translation)**.** Pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$, on définit la *translation* $\sigma_z : \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ par $\sigma_z(c)(x) = c(x - z)$, pour tous $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ et $x \in \mathbb{Z}^2$.

On pourra garder à l'esprit pour plus tard que les translations sont en particulier continues pour la topologie produit que nous allons introduire.

On s'autorisera à parler de *motif* (sans notion de validité associée) pour les coloriages comme nous l'avons défini pour les pavages. On dit qu'un Σ-coloriage contient un motif $P : D \to \Sigma$, et l'on note $P \sqsubset c$, lorsqu'il existe $z \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\sigma_z(c)|_D = P$.

Définition 7 (Périodicité)**.** Un coloriage $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est *périodique* de *période* $p \in \mathbb{Z}^2$, avec $p \neq 0$, si pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, $c(x+p) = c(x)$. Autrement dit, si $\sigma_p(c) = c$.

Comme les objets que nous considérons ici sont de dimension 2, la notion de bi-périodicité nous intéressera particulièrement.

Définition 8 (Bi-périodicité)**.** Un coloriage $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est *bi-périodique* s'il admet deux directions linéairement indépendantes de périodicité.

On observera que de façon équivalente, un coloriage est bi-périodique s'il admet une période horizontale et une période verticale.

Topologie produit

En munissant Σ de la topologie discrète (pour laquelle tout sous-ensemble est ouvert), on peut naturellement munir l'espace de fonctions $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ des Σ-coloriages de la topologie produit (selon $\mathbb{Z}^2$). Cette dernière est la topologie la « moins fine » rendant les projections $p_x : \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \to \Sigma$, $c \mapsto c(x)$ continues, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$. C'est donc exactement la topologie engendrée par les images inverses des ouverts de Σ par les p_x, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$. Autrement dit, c'est la topologie dont une pré-base est constituée des ensembles $p_x^{-1}(O)$ pour tous $x \in \mathbb{Z}^2$ et $O \subseteq \Sigma$. Les singletons formant une base de la topologie discrète, on peut se contenter de considérer comme pré-base les ensembles de la forme suivante, pour tous $x \in \mathbb{Z}^2$ et $a \in \Sigma$:

$$p_x^{-1}(\{a\}) = \left\{ c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \;\middle|\; c(x) = a \right\}$$

Une base (dénombrable) est alors obtenue en considérant toutes les intersections finies de ces ensembles, ce que formalise la définition suivante.

Définition 9 (Topologie produit)**.** La *topologie produit* sur l'ensemble des coloriages $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est la topologie dont une base (dénombrable) est constituée des ensembles de la forme, pour tous domaine fini $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ et motif $P \in \Sigma^D$:

$$O_P = \left\{ c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \;\middle|\; c|_{\operatorname{supp} P} = P \right\}$$

Une base d'ouverts de la topologie produit est ainsi constituée des ensembles de coloriages qui coïncident sur un domaine fini. On peut aussi remarquer dès maintenant que la notion de convergence induite par la topologie produit est la *convergence simple* : une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coloriages converge (au sens de la topologie produit) vers un coloriage c si et seulement si elle converge simplement, c'est-à-dire *point à point*, vers c. Formellement, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $c_n(x) = c(x)$ (l'ensemble Σ des valeurs possibles en un point étant fini).

Nous avons donné ici une définition générale de la topologie usuelle sur $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, mais il est souvent commode de voir cette topologie de façon métrique. La raison à cela est double. D'une part, cela permet d'utiliser des notations ainsi que des résultats propres aux espaces topologiques métriques. D'autre part, cela permet d'importer directement les définitions des propriétés dynamiques des systèmes dynamiques réels (équicontinuité, expansivité, *etc*) dans ce monde discret (quitte à les réinterpréter de façon combinatoire par la suite).

Définition 10 (Métrique)**.** On définit la *distance de Cantor* sur $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ en posant, pour tous $c, c' \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$:

$$d(c,c') = \begin{cases} 2^{-\min\{\|x\|_\infty,\, x\in\mathbb{Z}^2,\, c(x)\neq c'(x)\}} & \text{si } c \neq c' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $\mathbb{Z}^2$ définie par $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ (mais toute autre norme sur $\mathbb{Z}^2$ définirait une métrique équivalente).

La distance de Cantor ainsi définie est comprise entre 0 et 1 et est inversement exponentielle en la distance à l'origine du premier point de $\mathbb{Z}^2$ permettant de distinguer les deux configurations. Cette distance, qui n'est autre que la distance produit de la distance discrète sur Σ, bien que dépendante dans sa définition du choix de l'origine, définit en réalité exactement la même topologie et permet donc ici de voir la topologie produit de la topologie discrète comme une topologie métrique.

L'alphabet Σ muni de la topologie discrète formant un espace topologique compact, le théorème de Tychonoff sous sa forme dénombrable (le produit étant ici sur $\mathbb{Z}^2$), ne nécessitant pas l'utilisation de l'axiome du choix (via le lemme de Zorn), nous assure le résultat de compacité suivant sur le produit $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$.

Théorème 1. *L'ensemble des Σ-coloriages $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ muni de la topologie produit est un espace topologique compact.*

Le recours au théorème de Tychonoff peut apparaître ici comme un argument plus fort que nécessaire au regard du cadre combinatoire relativement simple qui nous préoccupe. On pourra cependant remarquer que la preuve directe classique du théorème de Tychonoff pour un produit dénombrable procède en réalité par un argument d'extraction diagonale, si bien que si l'on « dépliait » complètement cette preuve dans le cadre de l'espace $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, on obtiendrait essentiellement la même preuve que si l'on avait montré ce résultat de façon directe comme nous allons le faire maintenant afin d'illustrer la technique d'extraction diagonale.

Démonstration. Puisque nous avons souligné que notre espace topologique est métrisable, nous allons utiliser ici la caractérisation séquentielle de la

compacité : un espace topologique métrique est compact si et seulement si toute suite admet une sous-suite convergente. Ce choix aura pour avantage de limiter les considérations techniques au sein de la preuve au strict minimum, c'est-à-dire en l'occurrence au seul argument d'extraction diagonale que l'on souhaite illustrer.

Considérons alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ-coloriages de $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$. On note $B_n = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid \|x\|_\infty \leqslant n\}$ la boule de centre 0 et de rayon n sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire le domaine carré de taille $(2n+1) \times (2n+1)$ centré en 0. Les coloriages de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'exhibent qu'un nombre fini (majoré par $|\Sigma|$) de motifs sur le domaine B_0. On peut donc choisir un tel motif apparaissant un nombre infini de fois dans la suite et l'*extraction* (i.e. une application strictement croissante des entiers naturels sur eux-mêmes) correspondante $\alpha_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que tous les coloriages de la suite extraite $(c_{\alpha_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident avec ce motif sur le domaine B_0. Nous allons alors itérer cet argument sur les domaines B_n pour n croissant.

Supposons les extractions α_i successives (i.e. $\operatorname{Im}\alpha_i \subseteq \operatorname{Im}\alpha_{i-1}$) construites jusqu'au rang k et assurant que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$, les coloriages de la suite extraite $(c_{\alpha_i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident sur le domaine B_i. Les coloriages $(c_{\alpha_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'exhibent qu'un nombre fini de motifs sur le domaine B_{k+1} (majoré par $|\Sigma|^{(2(k+1)+1)^2}$, et même $|\Sigma|^{4(2(k+1)+1)-4}$ car ils coïncident déjà sur B_k). Il existe donc un motif de domaine B_{k+1} représenté une infinité de fois dans la suite et l'on peut considérer une extraction α_{k+1} (avec $\operatorname{Im}\alpha_{k+1} \subseteq \operatorname{Im}\alpha_k$) telle que les coloriages $(c_{\alpha_{k+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident sur B_{k+1}.

On construit ainsi la suite d'extractions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on considère l'extraction diagonale $(c_{\alpha_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'est pas difficile de constater que cette suite est bien une suite extraite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(n) \leqslant \alpha_{n+1}(n) < \alpha_{n+1}(n+1)$). De plus cette suite est convergente car pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, x est couvert par la boule $B_{\|x\|_\infty}$ et la suite $(c_{\alpha_n(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des valeurs au point x est par construction constante à partir du rang $\|x\|_\infty$. La suite de coloriages considérée converge donc simplement (i.e. pour la topologie produit). D'où le résultat. ■

De tels arguments de compacité sont fréquents en combinatoire. On les retrouve par exemple, pour leurs utilisations les plus classiques, en logique afin de montrer la compacité du calcul propositionnel (toute famille de formule finiment satisfaisable est satisfaisable), en théorie des graphes afin de montrer le théorème de De Bruijn–Erdős (un graphe infini admet une k-coloration si et seulement si tous ses sous-graphes finis admettent une k-coloration), ou encore en théorie de Ramsey.

Remarque 2. Il est possible de donner une définition purement combinatoire de cette topologie en s'appuyant sur les arbres de motifs tels qu'introduits par Durand [Dur99]. Avec une telle approche, la compacité s'exprime très naturellement à travers le lemme de König. Une description détaillée de cet

éclairage combinatoire de la topologie usuelle sur les pavages est développée par Ollinger [Oll08a].

1.1.3 Transformations

Dans cette section, on présente deux transformations simples sur les jeux de tuiles qui seront utiles par la suite.

Produit synchronisé

Définition 11 (Jeu de tuiles produit)**.** Étant donnés deux jeux de tuiles de Wang $\tau_1 \subseteq \mathcal{C}_1^4$ et $\tau_2 \subseteq \mathcal{C}_2^4$, le jeu de tuiles *produit* $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ est formellement défini comme le jeu de tuiles de Wang

$$\tau = \{((w_1, w_2), (s_1, s_2), (e_1, e_2), (n_1, n_2)),\ (w_i, s_i, e_i, n_i) \in \tau_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 2\}$$

d'ensemble de couleurs le produit cartésien $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

Bien que l'ensemble τ ne soit pas strictement parlant le produit cartésien des jeux de tuiles τ_1 et τ_2 (car on en « redécoupe » les tuiles), il est commode de l'interpréter comme tel en considérant un jeu de tuiles produit comme un jeu de tuiles à deux *couches* dont les tuiles portent une tuile de τ_1 sur la première couche et une tuile de τ_2 sur le seconde couche avec la règle locale de compatibilité consistant à s'assurer que les conditions de compatibilité soient vérifiées indépendemment sur les deux couches. L'ensemble des pavages $\mathcal{X}_{\tau_1 \times \tau_2}$ par le jeu produit est égal au produit cartésien $\mathcal{X}_{\tau_1} \times \mathcal{X}_{\tau_2}$ à une bijection alphabétique près entre les tuiles du jeu produit et les couples de tuiles des deux jeux de départ.

On utilise rarement un jeu produit de jeux de tuiles dans son intégralité, il est en revanche fréquent de considérer un sous-ensemble du produit sur lequel certaines contraintes alphabétiques sont imposées en retirant certaines tuiles du jeu de sorte à imposer une forme de synchronisation entre les deux couches.

Groupage

Le groupage $l \times h$ d'un jeu de tuiles τ est un simple recodage sous forme de tuiles de Wang des motifs $l \times h$ valides par τ avec la règle de compatibilité locale correspondant au fait que des motifs horizontalement (resp. verticalement) adjacents coïncident sur $l - 1$ colonnes (resp. $h - 1$ lignes).

Plus formellement, étant donné un jeu de tuiles τ, le *groupage* $l \times h$ de τ est le jeu de tuiles $\tau^{l \times h}$ sur l'ensemble de couleurs $\mathcal{C}^{\times} = \tau^{(l-1)\times h} \cup \tau^{l \times (h-1)}$ (où $\tau^{a \times b}$ désigne l'ensemble des motifs quelconques rectangulaires $a \times b$ sur l'alphabet τ) — le premier ensemble étant destiné aux couleurs horizontales

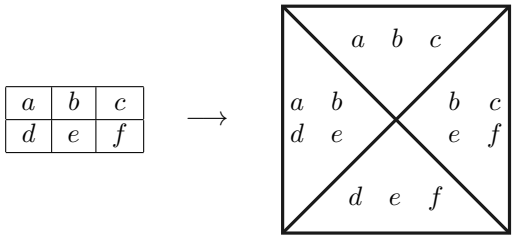


FIGURE 1.8 – Groupage 3×2

et le second aux couleurs verticales — défini par

$$\tau^{l\times h} = \{(M|_{[0,l-2]\times[0,h-1]}, M|_{[0,l-1]\times[0,h-2]}, M|_{[1,l-1]\times[0,h-1]}, M|_{[0,l-1]\times[1,h-1]}) \in (\mathcal{C}^{\times})^4 \mid M \text{ est un motif valide } h \times l \text{ par } \tau\}$$

Le principe du groupage est illustré par la figure 1.8.

1.1.4 Dynamique symbolique

La dynamique symbolique est l'étude de l'action d'une fonction continue sur un espace discret. Elle est historiquement issue de l'étude de modèles dynamiques discrets résultant du partitionnement de systèmes dynamiques topologiques continus. Les travaux fondateurs des aspects de dynamique symbolique qui nous préoccuperons sont ceux de Hedlund [Hed69], réalisés pour l'essentiel en collaboration avec Curtis et Lyndon. Une référence plus générale sur la question peut être trouvée dans Lind et Marcus [LM95] ou encore Kůrka [Kůr03].

Sous-shifts

Les coloriages peuvent être envisagés et étudiés sous l'angle des systèmes dynamiques discrets. Pour cela, la dynamique introduite est celle de la translation (*shift*). Les objets qui nous intéresserons particulièrement au sein de l'espace topologique considéré sont les sous-shifts (parfois appelés *sous-décalages*).

Définition 12 (Sous-shift)**.** Un *sous-shift* $\mathcal{X}$ de $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ en est un sous-ensemble fermé (pour la topologie) et stable par translation.

L'espace $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, aussi appelé *full shift*, étant compact, les sous-shifts sont en particulier des compacts.

Exemple 2. L'ensemble $\mathcal{X}_\tau$ des pavages par un jeu de tuiles τ est un sous-shift de $\tau^{\mathbb{Z}^2}$. En effet, la stabilité par translation est évidente. Il s'agit donc essentiellement de montrer la fermeture. En procédant par caractérisation

séquentielle, toute suite convergente de pavages converge bien vers un pavage car tout motif du τ-coloriage limite apparaît à partir d'un certain rang (convergence simple oblige) dans tous les pavages de la suite et ne saurait donc contenir d'erreur de pavage.

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, l'une des particularité des sous-shifts est qu'ils sont parfaitement caractérisés par leur langage. Si $\mathcal{X}$ est un sous-shift de $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ le *langage* de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire l'ensemble des motifs finis, considérés ici à translation près, apparaissant dans les coloriages de $\mathcal{X}$.

Définition 13. Pour tout ensemble de motifs finis *interdits* A sur un alphabet Σ, on définit $\mathcal{F}(A) = \{c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \mid \forall P \in A, P \not\sqsubset c\}$ l'ensemble de tous les coloriages ne contenant aucun motif interdit.

Il n'est pas difficile de remarquer que pour tout ensemble de motifs A, $\mathcal{F}(A)$ est un sous-shift, l'argument est exactement le même que celui que nous avons employé lors de l'exemple 2 pour le cas particulier des pavages (pour lequel les motifs interdits étaient les motifs non valides). La réciproque est vraie comme l'énonce le résultat à caractère élémentaire suivant. Ainsi les sous-shifts sont parfaitement caractérisés par leur langage (correspondant de fait ici à l'ensemble des motifs ne contenant aucun motif interdit).

Proposition 1. *Un ensemble de Σ-coloriages $\mathcal{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est un sous-shift si et seulement s'il existe un ensemble de motifs (finis) A tel que $\mathcal{X} = \mathcal{F}(A)$.*

Une classe particulière de sous-shifts est constituée par ceux qu'il est possible de caractériser par un ensemble fini de motifs interdits.

Définition 14 (Sous-shift de type fini)**.** Un sous-shift $\mathcal{X}$ de $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est *de type fini* s'il existe un ensemble fini A de motifs interdits tel que $\mathcal{X} = \mathcal{F}(A)$.

Les ensembles de pavages par tuiles de Wang sont naturellement de type fini (il est par exemple suffisant d'interdire les motifs de type domino 1×2 et 2×1 comportant une erreur de pavage entre les deux tuiles). Mais l'étude des tuiles de Wang permet réciproquement de parler des sous-shifts de type fini en toute généralité car il y a une correspondance entre ces deux structures qui se formalise par la notion de conjugaison.

Définition 15 (Conjugaison)**.** Deux sous-shifts $\mathcal{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ et $\mathcal{Y} \subseteq \Gamma^{\mathbb{Z}^2}$ sont *conjugués* s'il existe une application $\varphi : \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \to \Gamma^{\mathbb{Z}^2}$ continue, commutant avec les translations ($\forall z \in \mathbb{Z}^2, \varphi \circ \sigma_z = \sigma_z \circ \varphi$) et bijective telle que $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.

L'application de conjugaison φ est purement *locale*, c'est-à-dire que ce n'est rien d'autre qu'une forme d'*automate cellulaire* (réversible en l'occurrence) — objet qui sera défini en section 1.3.3 et dont la caractérisation topologique est donnée par le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon (théorème 18 de ce mémoire) — dont l'alphabet d'arrivée serait différent de l'alphabet de départ. Cette application admet donc une description finie et son

action se limite d'un point de vue calculatoire à un simple *recodage* local des configurations. La conjugaison est une relation d'équivalence. Elle préserve certaines propriétés, en particulier le type fini des sous-shifts.

Proposition 2. *Tout sous-shift de type fini est conjugué à un ensemble de pavages par tuiles de Wang.*

La preuve de ce résultat est essentiellement un groupage (cf section 1.1.3).

Étudier les ensembles de pavages par tuiles de Wang revient donc à étudier les sous-shifts de type fini en toute généralité (à un recodage près).

Soficité

Comme nous l'avons mis en évidence, les sous-shifts de type fini correspondent exactement aux pavages, c'est-à-dire aux coloriages précisément décrit par un ensemble fini de contraintes locales, exprimées formellement sous la forme d'un ensemble fini de motifs interdits. Cependant, la notion naturelle qui va nous intéresser plus particulièrement est la *reconnaissance* d'un ensemble de coloriages par un jeu de contraintes finies. On ne peut en effet pas toujours donner un ensemble fini de contraintes locales afin de décrire directement, c'est-à-dire sans changement d'alphabet, les coloriages d'un sous-shift. En revanche, il est parfois possible d'en enrichir l'alphabet, typiquement pour y faire apparaître des traits de construction utiles à la reconnaissance ; puis de décrire précisément, par des contraintes locales, les coloriages enrichis ; et enfin d'engendrer l'ensemble de coloriages qui nous intéresse par projection alphabétique de ces coloriages enrichis. Cela correspond à la notion de soficité.

Définition 16 (Soficité)**.** Un sous-shift $\mathcal{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est *sofique* s'il existe un alphabet Γ, un sous-shift de type fini $\mathcal{Y} \subseteq \Gamma^{\mathbb{Z}^2}$ et une projection alphabétique [1] $\pi : \Gamma \to \Sigma$ tels que $\pi(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}$.

Dans la définition précédente, $\pi : \Gamma \to \Sigma$ est supposée naturellement étendue aux coloriages $\pi : \Gamma^{\mathbb{Z}^2} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$.

Exemple 3. Nous considérons à nouveau ici le jeu de tuiles de l'exemple 1. Si l'on projette la tuile centrale de la figure 1.5 sur la lettre 1 et toutes les autres tuiles sur la lettre 0, le sous-shift engendré par projection de l'ensemble des pavages est exactement le sous-shift des coloriages de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ contenant au plus une occurrence de la lettre 1. Ce sous-shift est donc sofique.

En revanche, il n'est pas de type fini. En effet, supposons ce sous-shift caractérisé par un ensemble fini de motifs interdits. Considérons alors un coloriage contenant exactement deux occurrences de la lettre 1 suffisamment éloignées pour n'apparaître dans aucun des domaines de motifs interdits

1. Par projection *alphabétique* on désigne une projection *lettre-à-lettre* dans ce mémoire.

simultanément. Il n'est pas difficile d'observer que, par hypothèse, tous les motifs d'un tel coloriage doivent nécessairement être autorisés, alors même que ce dernier contient strictement plus d'une occurrence de la lettre 1.

Expansivité

L'expansivité [BL97] peut-être interprétée comme une forme générale (non syntaxique) de déterminisme dans les sous-shifts. Elle nous intéressera dès lors assez naturellement. Nous la considérerons plus précisément par la suite dans le cadre des ensembles de pavages par des jeux de tiules déterministes, en particulier dans le chapitre 5.

Pour toute *pente* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on note l_α la droite réelle de pente α passant par l'origine du plan euclidien. Pour tout *rayon* $\rho > 0$, on définit $L_\alpha(\rho) = (l_\alpha + \{\lambda\vec{u}, -\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho\}) \cap \mathbb{Z}^2$ pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unité orthogonal à l_α. $L_\alpha(\rho)$ est ainsi l'ensemble des points du plan discret situés à distance inférieure à ρ de la droite l_α.

Définition 17 (Expansivité)**.** Une pente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une *direction d'expansivité* d'un sous-shift $\mathcal{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ s'il existe un rayon $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{X}^2$, $x|_{L_\alpha(\rho)} = y|_{L_\alpha(\rho)} \Longrightarrow x = y$.

Exemple 4. L'ensemble des pavages par le jeu de tuiles de l'exemple 1 est expansif dans toutes les directions sauf l'horizontale (pente 0) et la verticale (pente ∞). En effet, pour toute pente α autre que ces deux dernières, la connaissance des tuiles d'une fenêtre d'expansivité $L_\alpha(1)$, selon qu'elle croise ou non l'un et/ou l'autre des signaux gris horizontaux et verticaux, suffit à déterminer de façon non ambiguë l'intégralité du pavage.

Dans les directions horizontale et verticale, quel que soit le rayon considéré, la fenêtre d'expansivité peut-être placée suffisamment loin de la croix pour qu'un seul signal gris y soit croisé. Il est dès lors impossible de distinguer un pavage contenant la croix d'un pavage contenant uniquement une ligne verticale/horizontale infinie.

Mentionnons pour finir les résultats généraux suivants sur les directions d'expansivité.

Proposition 3 ([BL97])**.** *L'ensemble des directions d'expansivité d'un sous-shift est ouvert.*

Proposition 4 ([BL97])**.** *Un sous-shift est expansif dans toutes les directions si et seulement si il est fini*[2]*.*

2. En tant qu'ensemble de coloriages, c'est-à-dire que tous les coloriages sont bi-périodiques de période bornée.

1.1.5 Décidabilité

Dans cette section, nous allons aborder plus formellement les questions de décision auxquelles nous sommes naturellement confrontés en théorie des pavages. Le lecteur est supposé familier avec la notion de modèle de calcul, de machine de Turing et les résultats élémentaires de calculabilité. En préambule, on rappelle simplement la définition formelle d'une machine de Turing afin de fixer les notations qui seront utilisées tout au long du mémoire.

Définition 18 (Machine de Turing [Tur36])**.** Une *machine de Turing* est un 5-uplet $(\Sigma, Q, q_i, F, \delta)$ où :

— Σ est l'alphabet fini du ruban ;
— Q est l'ensemble fini des états ;
— $q_i \in Q$ est l'état initial ;
— F est l'ensemble des états finaux ;
— $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est la fonction (partielle) de transition.

Par définition de la fonction de transition dans ce modèle, la tête se déplace à chaque transition.

Nous adopterons systématiquement la convention suivante : la fonction de transition n'est pas définie depuis les états finaux, les transitions sont en revanche toujours possibles depuis les autres états. De la sorte, un calcul de la machine ne s'arrête que sur un état final.

Nous aurons également besoin aux chapitres 4 et 5 de machines de Turing réversibles. Il est bien connu que tout calcul Turing peut être rendu réversible [Lec63, Ben73], nous travaillerons dès lors parfois directement avec des machines de Turing réversibles. Nous en donnons ici un modèle commode qui sera utile à nos constructions. Dans ce modèle, fusionnant le mouvement avec l'état, la machine inverse est parfaitement et directement décrite par la table de la machine réversible considérée.

Définition 19 (Machine de Turing réversible)**.** Une *machine de Turing réversible* est ici formellement un 5-uplet $(\Sigma, Q, \overleftrightarrow{q_i}, F, \delta)$ pour lequel :

— Σ désigne l'alphabet fini du ruban ;
— Q est l'ensemble fini des états.

Avant de définir les éléments restants, on précise que la tête sera en mouvement à chaque transition et l'on dénotera ses deux mouvements possibles (gauche, droite) par les symboles $\{\leftarrow, \rightarrow\}$. On définit alors $\overleftrightarrow{Q} = Q \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ l'ensemble d'états orientés, dont les éléments seront notés $\overrightarrow{q}$ (resp. $\overleftarrow{q}$) pour désigner $(q, \rightarrow)$ (resp. $(q, \leftarrow)$). Il est temps de poursuivre la description des constituants de notre machine :

— $\delta : \overleftrightarrow{Q} \times \Sigma \rightarrow \overleftrightarrow{Q} \times \Sigma$ est la fonction **partielle injective** de transition ;
— $\overleftrightarrow{q_i} \in \overleftrightarrow{Q}$ est l'état initial (orienté) et $F \subset \overleftrightarrow{Q}$ l'ensemble des états finaux (orientés).

On supposera que δ n'est pas définie depuis les états de F.

Pavages et décision

Revenons maintenant au problème initialement posé par Wang. Ce problème, généralement nommé *Domino Problem* dans la littérature, se formalise de la manière suivante.

Problème 1 (Problème du pavage, *Domino Problem* [Wan61])**.** *Un jeu de tuiles de Wang τ étant donné en entrée, décider s'il existe un pavage du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par τ.*

Il convient tout d'abord d'observer que ce problème est co-récursivement énumérable pour des raisons de compacité du fait du résultat suivant.

Proposition 5. *Si un jeu de tuiles τ pave des domaines carrés arbitrairement grands, alors il pave le plan.*

Naturellement, la réciproque de ce résultat est vraie et évidente.

Démonstration. Notons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de motifs carrés valides par τ de tailles strictement croissantes et considérons la suite de τ-coloriages $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que c_n contient le motif P_n centré en 0 et est complété arbitrairement en dehors du domaine de P_n. Par compacité, cette suite admet une suite extraite $(c_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite un τ-coloriage c. On prétend que c est un pavage du plan par τ. En effet, considérons $x \in \mathbb{Z}^2$ quelconque et montrons qu'il n'y a pas d'erreur de pavage dans c au voisinage de la tuile située au point x. Comme il existe un rang à partir duquel les domaines des motifs P_n centrés en 0 couvrent le point x et son voisinage, il existe un rang à partir duquel la suite $(c_\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante au point x et son voisinage et coïncide avec les valeurs des motifs $P_{\alpha(n)}$ en ces points. Ces motifs étant par hypothèse valides, il ne saurait y avoir d'erreur de pavage en x dans c. ■

Ce résultat peut être utile en soi afin de montrer qu'un jeu de tuiles pave le plan en donnant une méthode de construction de motifs valides arbitrairement grands (par exemple engendrés par une substitution, ou vérifiant une forme aisée à décrire). Mais il est également utile sous sa forme contraposée.

Corollaire 1 (Contraposée)**.** *Si un jeu de tuiles ne pave pas le plan, alors il existe un domaine fini de $\mathbb{Z}^2$ qu'il ne peut paver sans erreur.*

On en déduit immédiatement que le problème du pavage est co-récursivement énumérable. En effet, on peut décrire un semi-algorithme pour la non pavabilité en procédant de la façon suivante : l'algorithme considère des domaines carrés finis de plus en plus grands et essaye à chaque fois de paver le domaine sans erreur (il n'y a qu'un nombre fini de configurations à énumérer pour chaque domaine fini). Si le jeu ne pave pas le plan, le semi-algorithme est assuré de s'arrêter sur une taille de carré ne pouvant être

pavée. Sinon, il trouvera toujours un motif valide pour chaque domaine et ne s'arrêtera jamais.

Une autre observation aisée concernant le problème du pavage est la suivante.

Proposition 6. *Un jeu de tuiles τ admet un pavage périodique si et seulement s'il admet un pavage bi-périodique.*

Démonstration. Le sens droite-gauche est bien sûr trivial.

Pour ce qui est de l'autre sens, considérons un pavage c par τ périodique de période $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$. On peut, quitte à appliquer les symétries appropriées, supposer sans perte de généralité que $p_x \geqslant 0$ et $p_y > 0$ et considérer une bande horizontale $c|_{\mathbb{Z}\times[0,p_y-1]}$ de hauteur p_y apparaissant dans le pavage c. Par périodicité, la séquence de couleurs verticales apparaissant sur la bordure sud et la bordure nord de cette bande sont égales à un décalage p_x près. Le nombre de tuiles étant fini, il n'y a qu'un nombre fini de blocs rectangulaires de taille $p_x \times p_y$ dans cette bande. Il existe donc deux abscisses $a < b$ telles que les blocs dont les coins sud-ouest en positions $(a, 0)$ et $(b, 0)$ soient identiques. Le motif $c|_{[a,b-1]\times[0,p_y-1]}$ peut alors être répété horizontalement sans erreur de pavage pour former une bande horizontalement périodique de période $b - a$. De nouveau, les séquences de couleurs verticales apparaissant au nord et au sud de cette bande sont identiques à un décalage p_x près. La bande peut dont être répétée verticalement en lui appliquant à chaque fois un décalage a pour quelle soit correctement synchronisée avec la bande du dessous. On a ainsi formé un pavage c' bi-périodique de périodes (p_x, p_y), avec $p_y > 0$, et $(b - a, 0)$ linéairement indépendantes. ■

Cela conduit à considérer la variante suivante très naturelle du problème du pavage.

Problème 2 (Problème du pavage périodique)**.** *Un jeu de tuiles de Wang τ étant donné en entrée, décider s'il existe un pavage périodique du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par τ.*

D'après la proposition que nous venons de démontrer, ce problème est récursivement énumérable. En effet, un semi-algorithme pour la pavabilité périodique passe en revue des domaines carrés finis de plus en plus grands et essaye de les paver en les considérant comme des tores (i.e. la séquence de couleurs apparaissant le long de la bordure nord doit être exactement la même que celle apparaissant le long de la bordure sud, idem pour les bordures ouest et est). Si le jeu de tuiles admet un pavage périodique, le semi-algorithme s'arrête toujours sur une taille de carré décrivant un pavage bi-périodique. Sinon, il ne trouve jamais de telle taille et ne s'arrête pas.

Pavage avec tuile initiale

Les deux problèmes introduits précédemment sont, comme nous aurons l'occasion de l'illustrer par la suite, difficiles à aborder. En guise de premier pas dans l'étude des questions de décidabilité portant sur les pavages, Wang avait proposé une variante plus facile à traiter du problème du pavage : le problème du pavage avec tuile initiale.

Problème 3 (Pavage avec tuile initiale [KMW62, Wan63])**.** *Un jeu de tuiles de Wang τ et une tuile* initiale *identifiée $t_0 \in \tau$ étant donnés en entrée, décider si τ admet un pavage contenant la tuile initiale t_0.*

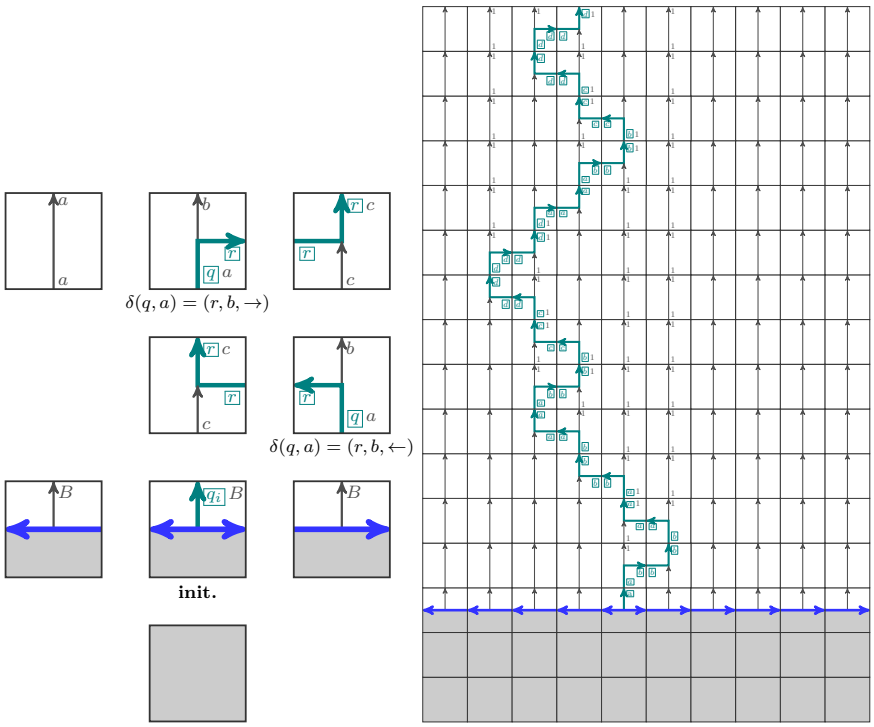
Il est très facile de remarquer que ce problème est indécidable par réduction du problème de l'arrêt des machines de Turing depuis l'entrée vide. La raison à cela est élémentaire : le diagramme espace-temps d'une machine de Turing est un objet parfaitement localement vérifiable et il n'est pas difficile de définir un jeu fini de contraintes locales afin de décrire un tel diagramme, pourvu que l'initialisation du calcul en soit correcte. Par ailleurs, la tuile initiale peut précisément permettre de forcer une initialisation convenable du calcul en imposant un ruban initial blanc comportant une unique tête de machine de Turing.

Théorème 2 ([Wan63])**.** *Le problème du pavage avec tuile initiale est indécidable (Π_1-complet).*

Démonstration. On procède par réduction du problème de l'arrêt des machines de Turing depuis l'entrée vide. Étant donnée une machine de Turing $M = (\Sigma, Q, q_i, F, \delta)$, on construit le jeu décrit par la figure 1.9(a) sur laquelle $a, b, c \in \Sigma$, $q, r \in Q$ et la tuile initiale est explicitement indiquée. On montre que ce jeu admet un pavage contenant la tuile initiale si et seulement si la machine de Turing simulée ne s'arrête pas depuis l'entrée vide.

L'implication droite-gauche est évidente dans la mesure où le jeu permet aisément de décrire le diagramme espace-temps d'une machine ne s'arrêtant pas sur l'entrée vide dans le pavage représenté sur la figure 1.9(b), où les lignes successives du diagramme espace-temps de la machine peuvent être lues aux frontières entre deux lignes du pavage (les tuiles servant à réaliser les transitions).

L'implication réciproque repose sur le fait que tout pavage contenant la tuile initiale est nécessairement (à translation près) le pavage que nous venons de décrire. En effet, la présence de la tuile initiale impose la description d'un ruban blanc de machine avec une unique tête de lecture présente directement sur la tuile initiale. Le demi-plan inférieur ne peut-être rempli que par la tuile blanche (grise sur la figure). Dans demi-plan supérieur, il est clair par construction du jeu que chaque ligne est uniquement déterminée par la précédente (celle du dessous) et les lignes successives simulent précisément les transitions de la machine. Si un état final était atteint, comme



(a) Jeu de tuiles (b) Pavage avec tuile initiale

FIGURE 1.9 – Tuiles simulant une machine de Turing

il n'existe pas de tuile dans le jeu portant un état final dans sa couleur sud (par convention, la fonction de transition de la machine n'est pas définie depuis les états finaux), la ligne suivante ne peut-être pavée sans erreur. Ainsi, s'il existe un pavage du plan contenant la tuile initiale, alors la machine ne s'arrête pas et ce pavage est exactement à translation près celui de la figure 1.9(b). ■

Remarque 3. Nous avons utilisé pour les tuiles de la figure 1.9(a) une convention très classique de notation des couleurs de Wang sous forme de flèches qui doivent être poursuivies sans interruption ni changement de direction de part et d'autre des arêtes. Nous réutiliserons cette convention chaque fois qu'elle s'avèrera plus commode que la représentation usuelle.

Indécidabilité

Ces différentes observations avaient conduit Wang à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 1 (*Fundamental conjecture*, Wang [Wan61]). *Un jeu de tuiles admet un pavage si et seulement s'il admet un pavage périodique.*

En d'autres termes, cette conjecture postule précisément la non existence des jeux de tuiles apériodiques au sens suivant.

Définition 20 (Apériodicité)**.** Un jeu de tuiles de Wang est *apériodique* s'il pave le plan mais jamais de façon périodique.

En l'absence de jeux de tuiles apériodiques, c'est-à-dire sous l'hypothèse de la conjecture de Wang, les problèmes du pavage et du pavage périodique deviennent parfaitement identiques et décidables (l'un étant corécursivement énumérable, l'autre récursivement énumérable). Wang aurait alors disposé d'un algorithme pour décider la classe de formules $\forall\exists\forall$ à laquelle il s'intéressait et qu'il avait réduit à cette petite question combinatoire que constitue le problème du pavage.

Wang a confié cette question à l'un de ses étudiants, Berger, qui est parvenu à construire un jeu de tuiles apériodique, réfutant ainsi la conjecture fondamentale.

Théorème 3 (Berger [Ber64])**.** *Il existe un jeu de tuiles apériodique (de 103 tuiles).*

Berger construit un squelette apériodique relativement complexe, devant servir de base à une construction plus ambitieuse, pour lequel il annonce la taille de 20 426 tuiles. Il en propose, dans l'annexe II de sa thèse [Ber64], une version réduite au strict minimum pour garantir l'apériodicité et pour laquelle il dénombre 104 tuiles. La description de ce jeu de tuiles comporte néanmoins plusieurs petites erreurs. Après correction, le jeu résultant comporte en réalité 103 tuiles. Sa construction sera revisitée dans la section 1.2.3.

L'existence de jeux de tuiles apériodiques met en échec la conjecture de Wang et ses possibles retombées mais ne suffit pas à trancher la question de la décidabilité du problème du pavage. Berger, s'appuyant sur le jeu de tuiles apériodique qu'il avait construit est parvenu à injecter du calcul Turing dans les pavages de façon à réduire le problème de l'arrêt des machines de Turing au problème du pavage.

Théorème 4 (Berger [Ber64, Ber66])**.** *Le problème du pavage est indécidable (Π_1-complet [3]).*

En modifiant très légèrement la construction de Berger, Gurevich et Koryakov ont par la suite montré que le problème du pavage périodique était également indécidable.

Théorème 5 (Gurevich et Koryakov [GK72])**.** *Le problème du pavage périodique est indécidable (Σ_1-complet [4]).*

3. Ce problème peut s'énoncer logiquement sous la forme « $\forall n$, $P_\tau(n)$ » où $P_\tau(n)$ est le prédicat récursif suivant : « le jeu de tuiles τ admet un motif carré valide de taille $n \times n$ ».

4. Ce problème peut s'énoncer logiquement sous la forme « $\exists n$, $P_\tau(n)$ » où $P_\tau(n)$ est le prédicat récursif suivant : « le jeu de tuiles τ pave le tore discret $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ ».

On rappelle que deux ensembles A et B sont *récursivement inséparables* s'il n'existe pas d'ensemble récursif les séparant, c'est-à-dire d'ensemble C récursif tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \varnothing$. Il n'est pas difficile de voir que le résultat précédent est équivalent à la récursive inséparabilité des ensembles de jeux de tuiles périodiques (i.e. admettant un pavage périodique) et apériodiques. On peut prolonger ce résultat en énonçant le théorème d'inséparabilité suivant.

Théorème 6 (Gurevich et Koryakov [GK72])**.** *Les ensembles de jeux de tuiles périodiques et non pavants sont récursivement inséparables.*

La preuve d'indécidabilité du problème du pavage par Berger (théorème 4) est l'un des résultats fondateurs de la théorie des pavages de Wang et ouvre la voie à l'interprétation des pavages comme modèles de calcul. Cependant la complexité certaine de la construction de Berger a incité de nombreux auteurs à proposer des constructions un peu moins techniques, que ce soit pour la seule élaboration d'un jeu de tuiles apériodique ou pour la preuve complète d'indécidabilité du problème du pavage. Grünbaum et Shephard [GS87] en retracent l'historique. Knuth [Knu68] réduit le nombre de tuiles d'un jeu apériodique à 92. Läuchli réduit à son tour ce nombre à 40 dans un jeu publié plus tard par Wang [Wan75] (avec une erreur corrigée par Grünbaum et Shephard [GS87]). Ces jeux resteront cependant peu étudiés dans la littérature sur les pavages par la suite. La construction de Robinson [Rob71] marque en revanche un tournant en proposant un jeu apériodique de 56 tuiles de Wang dont la structure des pavages apparaît relativement simple et suffisamment claire pour être aisément réutilisable. La preuve d'indécidabilité du problème du pavage associée est de plus très élégante et lisible. Ce jeu sert par conséquent de base à un très grand nombre de constructions de la littérature. Il est par exemple assez aisé d'en dériver, par de légères modifications de la construction, l'indécidabilité du problème du pavage périodique (théorème 5) ainsi que le résultat d'inséparabilité (théorème 6), comme le proposent Allauzen et Durand [AD01]. Nous reviendrons sur la construction de jeux apériodiques et les différentes manières de montrer l'indécidabilité du problème du pavage dans la section 1.2.3.

Avant cela, il n'est pas sans intérêt de mentionner le fait que Wang, qui avait initialement formulé le problème du pavage et la conjecture fondamentale dans l'espoir d'en déduire la décidabilité d'un certain fragment de la classe des formules $\forall\exists\forall$ (qu'il avait réduit au *Domino Problem*), n'a pas attendu les résultats de Berger pour en découvrir la nature en réalité indécidable. En effet, Kahr, Moore et Wang [KMW62] ont remarqué dès 1962 qu'ils pouvaient réduire un problème de pavage plus spécifique, le problème du pavage *à diagonale contrainte*, à la décision d'un fragment des formules $\forall\exists\forall$. En montrant que ce nouveau problème de pavage était en réalité indécidable, ils en ont déduit l'indécidabilité de la classe de formules considérée.

Problème 4 (Problème du pavage à diagonale contrainte [KMW62]). *Un jeu de tuiles de Wang τ et un certain sous-ensemble $D \subseteq \tau$ étant donnés en entrée, décider si τ admet un pavage du quart de plan $\mathbb{N}^2$ dans lequel les tuiles apparaissant sur la diagonale appartiennent toutes à D.*

Théorème 7 (Kahr, Moore et Wang [KMW62]). *Le problème du pavage à diagonale contrainte est indécidable (Π_1-complet).*

La preuve est élégante et passe par le problème du pavage *à ligne contrainte* (pour lequel les tuiles de la première ligne doivent appartenir à un certain sous-ensemble de tuiles).

Pour plus d'informations en ce qui concerne la décidabilité des fragments (classification suivant la séquence de quantificateurs préfixant les formules) de la logique du premier ordre — aujourd'hui parfaitement connue avec neuf classes minimales indécidables pour trois classes maximales décidables — le lecteur pourra consulter Börger, Grädel et Gurevich [BGG01]. Pour une entrée en matière concernant les liens entre pavages et théorie des modèles, prolongeant d'une certaine façon le lien entre pavages et logique amorcé par Wang, le lecteur on pourra consulter Ballier et Jeandel [BJ08], ainsi que Jeandel et Theyssier [JT09, JT13].

Par ailleurs, nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 2 sur le problème du pavage périodique.

1.2 Pavages et substitutions

Nous considérons dans cette section le lien entre pavages du plan et les substitutions, qui fournissent un outil formel particulièrement adapté à la description de structures globales bien hiérarchisées. Bien que les jeux de tuiles apériodiques de Berger [Ber64] et Robinson [Rob71] n'aient pas été, dans leurs publications originelles, présentés comme intrinsèquement liés à un procédé substitutif, ces jeux de tuiles reposent sur la construction d'une structure bien hiérarchisée dans les pavages, structure dont la nature est essentiellement substitutive. Nous décrivons, en fin de section, diverses constructions de jeux de tuiles apériodiques, toutes intrinsèquement liées à un procédé substitutif.

1.2.1 Substitutions

Étant donné un alphabet fini Σ, on note $\Sigma^{h\times l}$ l'ensemble des motifs rectangulaires $h \times l$ sur Σ et $\Sigma^{*\times *} = \bigcup_{h,l\geqslant 1} \Sigma^{h\times l}$. On identifiera par commodité Σ et $\Sigma^{1\times 1}$.

Définition 21 (Substitution). Une *substitution* $\mathfrak{s}$ sur l'alphabet Σ est une relation $\mathfrak{s} \subseteq \Sigma \times \Sigma^{*\times *}$.

Les éléments de $\Sigma \times \Sigma^{*\times *}$ appartenant à $\mathfrak{s}$ seront appelés *règles de dérivations*.

Si cette relation est fonctionnelle et totale, la substitution est dite *déterministe*. Dans ce cas, on préférera le plus souvent utiliser une notation fonctionnelle $s : \Sigma \to \Sigma^{*\times *}$.

Si l'ensemble d'arrivée est $\Sigma^{h\times l}$ avec h et l fixés, la substitution est dite *régulière*.

On étend la relation $\mathfrak{s}$ aux motifs de $\Sigma^{*\times *}$ en posant $M \ \mathfrak{s} \ M'$ lorsque M' s'obtient à partir de M en appliquant une règle de substitution par lettre de M à la condition d'avoir des tailles compatibles sur les lignes et colonnes (c'est pourquoi ces tailles sont choisies préalablement aux règles de dérivation appliquées dans la définition qui suit). Cette relation s'étend également aux coloriages de $\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ en définissant une relation globale $\mathfrak{s} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2} \times \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ vérifiant, pour tous coloriages $c, d \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, $c \ \mathfrak{s} \ d$ si et seulement s'il existe deux séquences bi-infinies d'entiers $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(l_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et une séquence double de règles de dérivations $(R_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, $R_{i,j} = (a, B) \in \Sigma \times \Sigma^{*\times *}$ est de taille $h_i \times l_j$ et dérive la lettre $a = c(i, j)$, et l'on a, pour tous $1 \leqslant x \leqslant h_i$, $1 \leqslant y \leqslant l_j$:

$$i \geqslant 0 \wedge j \geqslant 0 \Rightarrow d\left(\sum_{0\leqslant k<i} h_k + x, \sum_{0\leqslant k<j} l_k + y\right) = B(x, y)$$

$$i \geqslant 0 \wedge j < 0 \Rightarrow d\left(\sum_{0\leqslant k<i} h_k + x, -\sum_{j\leqslant k<0} l_k + y\right) = B(x, y)$$

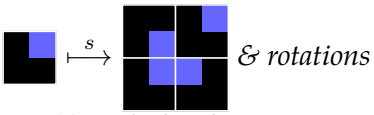
$$i < 0 \wedge j \geqslant 0 \Rightarrow d\left(-\sum_{i\leqslant k<0} h_k + x, \sum_{0\leqslant k<j} l_k + y\right) = B(x, y)$$

$$i < 0 \wedge j < 0 \Rightarrow d\left(-\sum_{i\leqslant k<0} h_k + x, -\sum_{j\leqslant k<0} l_k + y\right) = B(x, y)$$

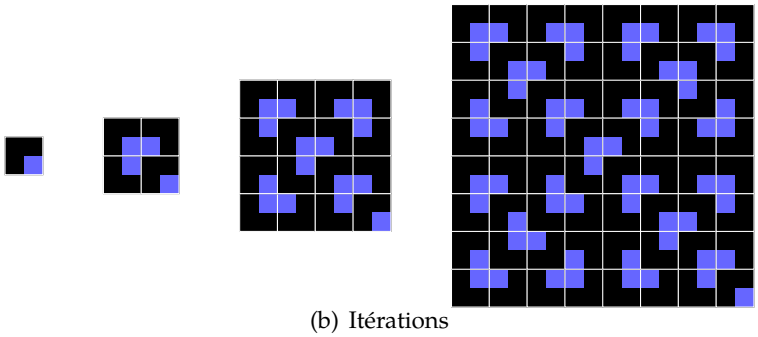
Cette définition n'est pas pleinement satisfaisante dans la mesure où elle force le coin inférieur gauche du bloc dérivé de la lettre en l'origine à être positionné en 0 tandis que l'on souhaiterait autoriser n'importe quelle cellule de ce bloc à prendre cette position. Cela conduit à une version légèrement relâchée, notée $\mathfrak{s}_\sigma$, de la relation de dérivation : pour toute dérivation $c \ \mathfrak{s} \ d$ où une règle R de taille $h \times w$ a été appliquée à la lettre $c(0, 0)$ et pour tout vecteur de translation $u \in \{0, \ldots, h-1\} \times \{0, \ldots, w-1\}$, on écrira $c \ \mathfrak{s}_\sigma \ \sigma_u(d)$.

Si E est un ensemble de motifs ou de coloriages, on note $\mathfrak{s}^n(E) = \{y, \exists x \in E, \ x \ \mathfrak{s}^n \ y\}$ et $\mathfrak{s}^*(E) = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathfrak{s}^n(E)$.

Cette définition est illustrée par la figure 1.10.



(a) Règle de substitution



(b) Itérations

FIGURE 1.10 – Exemple de substitution

Il existe dans la littérature deux façons de définir l'ensemble des coloriages engendrés par l'itération à l'infini d'une substitution.

La première notion, plutôt combinatoire, est celle d'ensemble engendré et cherche à caractériser les coloriages engendrés par les itérations de la substitution à partir d'une lettre.

Définition 22 (Ensemble engendré)**.** Étant donnée une substitution $\mathfrak{s}$, on définit l'*ensemble engendré* $\Omega_{\mathfrak{s}}$ comme l'ensemble des coloriages dont tout motif fini apparaît dans un motif de $\mathfrak{s}^*(\Sigma)$.

La seconde notion, venant des systèmes dynamiques, est celle d'ensemble limite et cherche à caractériser les coloriages obtenus à la limite partant d'un coloriage initial quelconque.

Définition 23 (Ensemble limite)**.** Étant donnée une substitution $\mathfrak{s}$, on définit l'*ensemble limite* $\Lambda_{\mathfrak{s}}$ par :

$$\Lambda_{\mathfrak{s}} = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{s}_{\sigma}^{n} \left(\Sigma^{\mathbb{Z}^2} \right)$$

Ces deux ensembles sont des sous-shifts : $\Omega_{\mathfrak{s}}$ est par définition même un sous-shift caractérisé par son langage tandis que $\Lambda_{\mathfrak{s}}$ est une intersection (décroissante) de sous-shifts. Ces sous-shifts, éventuellement vides dans le cas de substitutions non déterministes ou non régulières, sont pour des raisons de compacité toujours non vides dans le cadre des substitutions régulières déterministes. Le premier admet en effet dans le langage le décrivant des motifs arbitrairement grands, tandis que le second est une intersection décroissante de compacts non vides.

Définition 24 (Historique)**.** Un coloriage $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ admet un *historique* par une substitution $\mathfrak{s}$ sur Σ s'il existe une séquence infinie $(c_n)_{n \geqslant 0}$ de coloriages telle que $c_0 = c$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $c_{n+1} \; \mathfrak{s}_\sigma \; c_n$.

Informellement, c admet une séquence infinie de pré-images par $\mathfrak{s}$ à translation bornée près.

Proposition 7. *$\Lambda_{\mathfrak{s}}$ est exactement l'ensemble des coloriages admettant un historique par $\mathfrak{s}$.*

Démonstration. L'inclusion droite–gauche est claire car tout coloriage admettant un historique est dans $\mathfrak{s}^n\left(\Sigma^{\mathbb{Z}^2}\right)$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour la réciproque, pour chaque $n \geqslant 1$, il existe c_n tel que $c_n \; \mathfrak{s}_\sigma^n \; c$. Rappelons que, par définition de $\mathfrak{s}_\sigma$, les composantes du vecteur de translation associé à la dérivation sont plus petites que les dimensions du plus grand bloc de substitution de $\mathfrak{s}$: il n'y a donc qu'un nombre fini de vecteurs de translation à considérer. On peut alors immédiatement extraire, simultanément dans l'espace et le temps, un historique à partir des ensembles d'informations suivants, pour tout $n \geqslant 1$: les motifs $[-n, n]^2$ de chacune des configurations intermédiaires de la dérivation de longueur n entre c_n et c associés à la valeur (parmi un choix fini) du vecteur de translation correspondant. ■

Proposition 8. $\Omega_{\mathfrak{s}} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{s}}$.

Démonstration. Il est suffisant de montrer que tout élément de $c \in \Omega_{\mathfrak{s}}$ admet un antécédent par $\mathfrak{s}$ dans $\Omega_{\mathfrak{s}}$. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, le motif central $[-n, n]^2$ de c, que l'on note C_n, apparaît, par définition de $\Omega_{\mathfrak{s}}$, dans un motif engendré par $\mathfrak{s}$ en une séquence finie de substitutions successives à partir d'une lettre de Σ. Le motif C_n admet donc en particulier une décomposition en blocs permettant une désubstitution, opération inverse de la dernière substitution de la séquence évoquée précédemment. On peut alors attribuer à chaque cellule de C_n la règle qui l'engendre ainsi que la position de la cellule correspondante dans le rectangle de cette règle (parmi un choix fini de règles et positions). Il ne reste qu'à extraire des différentes décompositions des C_n une décomposition globale de c définissant alors un antécédent d : $d \; \mathfrak{s}_\sigma \; c$ (la translation servant à aligner des blocs de la décomposition avec les axes).

Justifions que $d \in \Omega_{\mathfrak{s}}$. Il est suffisant pour cela de vérifier que des motifs centraux arbitrairement grands de d sont engendrables par $\mathfrak{s}$ depuis une lettre de Σ. Par construction même, chaque motif central $[-n, n]^2$ de d, noté D_n, est apparu comme portion d'un antécédent d'un C_m pour $m \geqslant n$ (et même d'une infinité de tels C_m), dans une séquence de substitutions à partir d'une lettre. Il est donc *a fortiori* lui-même engendré depuis une lettre, d'où le résultat. ■

Exemple 5. Considérons la substitution régulière déterministe $s : \{0,1\} \to \{0,1\}^{2\times 2}$ définie par $s(0) = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$ et $s(1) = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$.

L'ensemble engendré Ω_s est le sous-shift ne contenant que le coloriage partout égal à 0.

L'ensemble limite Λ_s est le sous-shift des coloriages contenant au plus une droite verticale infinie de 1 ou une demi-droite infinie vers le haut ou le bas (et 0 partout ailleurs).

1.2.2 Simulation

Dans les constructions qui suivent, nous travaillerons avec des substitutions régulières déterministes 2×2. On notera $\boxplus$ l'ensemble fini $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Les résultats de cette section peuvent tout à fait s'étendre naturellement à des substitutions quelconques mais nous travaillerons par commodité dans le cadre régulier 2×2. La présentation adoptée est proche de celle de Ollinger [Oll08b].

Définition 25 (Substitution non ambiguë)**.** Une substitution s est *non ambiguë* si tout coloriage c de son ensemble limite Λ_s admet un unique antécédent par s : il existe un unique $c' \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ un unique vecteur de translation $z \in \boxplus$ tels que $\sigma_z \circ s(c') = c$.

Proposition 9 ([Oll08b])**.** *L'ensemble limite de toute substitution non ambiguë est apériodique (i.e. ne contient pas de coloriage périodique).*

Démonstration. Soit s une substitution non ambiguë. Supposons un instant que Λ_s contienne des coloriages périodiques. Soit alors $p \in \mathbb{Z}^2$ la plus petite période d'un tel coloriage et $c \in \Lambda_s$ un coloriage associé de période p. Il existe $c' \in \Lambda_s$ et $z \in \boxplus$ tels que $\sigma_z \circ s(c') = c$. Dès lors $\sigma_{p+z} \circ s(c') = c$. Par non ambiguïté, p est pair, $\sigma_z \circ s \circ \sigma_{\frac{p}{2}}(c') = c$ et $c' = \sigma_{\frac{p}{2}}(c')$. On a alors trouvé un coloriage périodique c' de l'ensemble limite de s de période strictement plus petite que la période minimale, ce qui est contradictoire. ■

Il existe une condition suffisante syntaxique simple à la non ambiguïté d'une substitution que l'on rapporte ici.

Proposition 10 (Durand, Levin, Shen [DLS05] et Ollinger [Oll08b])**.** *Si une substitution s est injective et que l'une de ses quatre projections associées, $s_i : \Sigma \to \Sigma$, $a \mapsto s(a)(i)$ pour $i \in \boxplus$, est d'image disjointe de celles des trois autres, alors s est non ambiguë.*

On peut exploiter cette apériodicité pour obtenir l'apériodicité de jeux de tuiles en introduisant une notion de simulation faisant intervenir un codage de nature substitutive. Pour d'autres présentations, sensiblement équivalentes sur le fond, de la notion de simulation de jeux de tuiles, on pourra consulter Durand, Levin et Shen [DLS05] ou Lafitte et Weiss [LW09].

Définition 26 (Simulation)**.** Un jeu de tuiles τ' *simule* un jeu de tuiles τ s'il existe un *codage* $\gamma : \tau \to \tau'^{\boxplus}$ injectif tel que $\mathcal{X}_{\tau'} = \{\sigma_z \circ \gamma(c) \mid c \in \mathcal{X}_\tau, z \in \boxplus\}$.

Définition 27 (Auto-simulation)**.** Un jeu de tuiles τ est *auto-simulant* s'il se simule lui-même. Le codage associé est alors une substitution régulière 2×2 sur τ.

Proposition 11 ([Oll08b])**.** *Un jeu de tuiles auto-simulant de substitution associée non ambiguë et admettant un pavage est apériodique.*

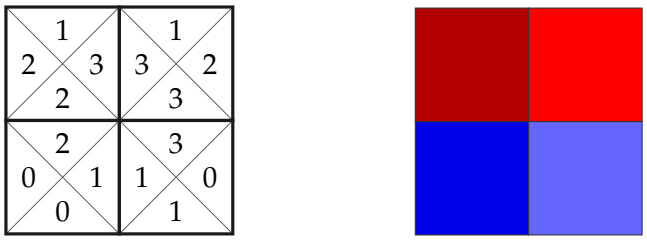
Démonstration. En notant s la substitution associée, on a clairement $\varnothing \subsetneq \mathcal{X}_\tau \subseteq \Lambda_s$. Λ_s étant apériodique d'après la proposition 9, le jeu τ est apériodique. ■

1.2.3 Constructions

Dans cette section, nous présentons une sélection de constructions classiques de jeux apériodiques, liées par leur caractère intrinsèquement substitutif, et les éléments des preuves associées de l'indécidabilité du problème du pavage le cas échéant. Toutes les constructions que nous allons évoquer ou auxquelles nous ferons simplement référence, y compris les plus concises comme celle de Durand, Levin et Shen [DLS05] ou la réinterprétation de Robinson [Rob71] par Levin [Lev05], impliquent une part de technicité et on recours à des outils formels. Pour une construction se limitant à un argumentaire le plus élémentaire possible, on pourra consulter Poupet [Pou10].

104 tuiles apériodiques

Le jeu de tuiles apériodiques comportant 104 tuiles proposé par Ollinger [Oll08b] est à la fois le jeu le plus récent et le jeu apériodique le plus « gros » parmi ceux que nous présentons dans cette section. Néanmoins, c'est avec la matière première de ce jeu que nous allons bâtir les constructions du chapitre 3. Ce jeu présente l'avantage d'avoir été directement conçu dans un esprit substitutif et même si ses liens avec les jeux de Robinson ou Berger sont en réalité très forts, la présentation initialement adoptée par Ollinger le rend naturellement adapté au traitement de problèmes de nature substitutive. Il est également possible de trouver une analyse détaillée de ce jeu dans Ballier [Bal09]. Il est à noter que ce type de construction peut-être vue comme une réduction au strict minimum pour garantir l'apériodicité avec un faible nombre de tuiles des arguments de point-fixe développés au même moment par Durand, Romashchenko et Shen [DRS08] ou sous une forme moins directe par Lafitte et Weiss [LW09]. Elle est encore plus proche dans la présentation, les arguments et la méthode de la construction de Durand, Levin et Shen [DLS05] mais sert un but différent : tandis que cette dernière construction vise à construire un jeu de tuiles apériodique de façon concise au prix d'un nombre de tuiles élevé, la construction de Ollinger



(a) Implémentation par tuiles de Wang

(b) Notation par des couleurs

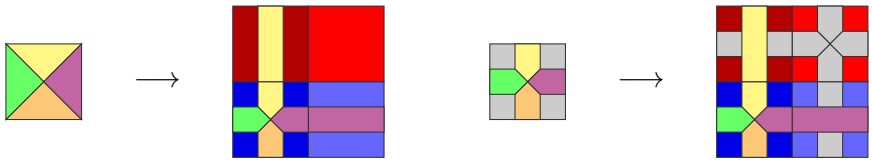
FIGURE 1.11 – Tuiles de parité

a pour objectif initial de maintenir un faible nombre de tuiles tout au long de la construction (quitte à se priver de décorations pouvant simplifier la compréhension ou les preuves).

L'idée générale est de concevoir le jeu comme point-fixe d'un schéma de substitution 2×2 afin d'exploiter les résultats de la section précédente. Commençons par définir 4 *tuiles de parité*, c'est-à-dire des tuiles qui comptent modulo 2 dans les 2 directions telle que celles représentées sur la figure 1.11(a). L'ensemble des pavages par un tel jeu ne comporte que 4 pavages bi-périodiques de périodes $(2,0)$ et $(0,2)$. Modulo translation, il n'y a qu'un seul pavage qui n'est qu'une grille de blocs 2×2. Ces tuiles seront par la suite utilisées comme première couche sur les tuiles du jeu que nous allons construire. Nous noterons ◪, ◨, ◩, ◧ (i.e. SO, SE, NO, NE) les quatre tuiles de parité qui seront représentées de façon abstraite en bleu foncé, bleu, rouge foncé et rouge respectivement, comme indiqué par la figure 1.11(b), dans toute la suite. Pour des raisons de commodité, nous identifierons également naturellement ces tuiles aux éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, nous autorisant par exemple à écrire ◪ $+ (1,0) =$ ◨ ou ◩ $+ (1,1) =$ ◪.

Un schéma de simulation 2×2 trivial pour tout jeu de tuiles τ est représenté sur la figure 1.12(a). Les couleurs de la tuile de départ sont directement reproduites sur la seconde couche des tuiles du jeu d'arrivée. Tout bloc de parité du jeu d'arrivée code exactement pour une tuile du jeu de départ, celle qui apparaît sur la deuxième couche de tuile de parité ◪ du bloc. Cette tuile contenant toute l'information de la tuile simulée, le fait que les tuiles de parités ◨ et ◩ du bloc ne contiennent qu'une information partielle sur la tuile codée n'est pas ici dommageable. Il est évident que le jeu produit par ce schéma à partir d'un jeu d'entrée τ simule τ par un codage régulier 2×2. En revanche, le jeu produit contient toujours strictement plus de tuiles que τ et ne saurait convenir en vue d'une auto-simulation.

Une manière pragmatique d'adapter ce schéma à nos besoins consiste à envisager un schéma qui travaille directement sur des tuiles à deux couches dont la première est une couche de parité et la seconde est *a priori* quel-



(a) Schéma de simulation naïf

(b) Schéma de simulation à deux couches (parité en gris)

FIGURE 1.12 – Schémas de simulation

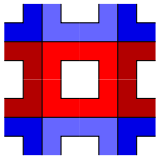


FIGURE 1.13 – Quatre croix de parité pour la deuxième couche

conque. Nous allons alors répercuter la première couche dans le bloc comme nous l'avons fait dans le premier schéma. L'important étant de limiter la croissance du nombre de tuiles et de couleurs lors de l'application du schéma de simulation, la seconde couche sera naturellement répercutée en utilisant les arêtes laissées libres sur la seconde couche par le premier schéma. On obtient ainsi le schéma de la figure 1.12(b). Une façon commode de représenter les tuiles de parité par des câbles de la deuxième couche est de définir des tuiles décrivant une grille de parité, c'est-à-dire une grille décrivant quatre type de carrés qui alternent suivant les parités horizontales et verticales. Les quatre croix associées sont représentées sur la figure 1.13. Les quatre types de carrés sont dès lors délimités par des câbles reprenant les quatre couleurs de la figure 1.11(b).

Avec ce second schéma, le nombre de tuiles n'augmente plus nécessairement. En revanche, les problèmes commencent à arriver. Contrairement au schéma précédent, il n'existe plus ici de tuile contenant toute l'information de la tuile simulée. Les couches 1 et 2 sont reportées respectivement sur les tuiles de parités ⊞ et ⊞ respectivement. La compatibilité entre ces deux couches n'est vérifiée que partiellement sur les tuiles de parités ⊞ et ⊞ du bloc : la tuile ⊞ assure la compatibilité entre la couleur est de la seconde couche de la tuile simulée et la couleur de fond (pour les tuiles de parité, la donnée de n'importe laquelle des couleurs suffit à identifier la tuile de manière unique) tandis que la tuile ⊞ assure la compatibilité entre la couleur nord de la seconde couche de la tuile simulée et la couleur de fond. Mais alors, typiquement, si une tuile de parité p et de seconde couche c apparaît dans le jeu de départ et que ses couleurs nord et est sont compatibles (i.e. apparaissent en même position) sur la seconde couche de tuiles du jeu de départ de parité $p' \neq p$, alors le jeu d'arrivée pourra former un bloc 2×2

simulant la tuile (p', c) qui pourtant n'existe pas nécessairement dans le jeu. Si de plus les couleurs ouest et sud apparaissent sur des tuiles des parités voisines $p' - (1, 0)$ et $p' - (0, 1)$, alors ce bloc pourra effectivement être utilisé dans un pavage. Cela constitue d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma proposé soit bien un schéma de simulation valide : si la tuile $(p, (o, s, e, n))$ apparaît dans le jeu et qu'il existe une parité $p' \neq p$ et des tuiles $(p' - (1, 0), (o, \_, \_, \_))$, $(p' - (0, 1), (\_, s, \_, \_))$, $(p', (\_, \_, e, \_))$, $(p', (\_, \_, \_, n))$ dans le jeu, alors la tuile $(p', (o, s, e, n))$ doit appartenir au jeu.

Le schéma introduit fait apparaître[5] trois *types* de décorations pour la deuxième couche des tuiles du jeu produit : les *croix* qui apparaissent sur les tuiles de parité ⊞ et ⊞ du jeu d'arrivée dans le schéma actuel et pour lesquelles nous utiliserons la notation X ; les *ponts horizontaux* apparaissant sur les tuiles de parité ⊞ du schéma actuel et que nous noterons H ; et enfin les *ponts verticaux* apparaissant sur les tuiles de parité ⊞ du schéma actuel et que nous noterons V. Les chemins de l'information de la deuxième couche seront appelés *câbles*. Un nouveau problème évident apparaît alors : si le jeu de tuiles formé vérifie bien la propriété que nous avons évoquée précédemment, ce n'est pas *a priori* le cas du jeu de tuiles obtenu après application du schéma. Le schéma ne peut en particulier être itéré. Le problème peut être analysé de la façon suivante : on perd trace du type de la deuxième couche lors de l'application du schéma car ce type n'est pas codé dans les couleurs alors que l'on souhaiterait coder ce type d'une manière ou d'une autre afin de pouvoir itérer le schéma. Une manière simple de régler ce problème est d'ajouter un bit d'information sur les câbles supérieurs des secondes couches de type H ou V. Ce bit sera représenté par un chevron pointant dans la direction droite ou gauche sur les tuiles H et haut ou bas sur les tuiles V et pointant dans la direction de la croix (pour un câble de même niveau) la plus proche. Les tuiles de type X porteront une décoration en croix sur la troisième couche. Le codage par des couleurs de Wang de ces décorations n'est pas visuellement explicite, mais se déduit aisément des figures. Les restrictions alphabétiques supplémentaires suivantes sont ajoutées sur les couplages entre les deuxièmes et troisièmes couches afin de résoudre les problèmes évoqués :

1. une tuile H dont le câble inférieur code pour une parité ⊞ porte toujours un chevron < (du point de vue du processus de désubstitution, cela force un X en ⊞, car il n'y a que des X sur fond ⊞, mais le jeu n'interdisait pas jusque là un tel codage de tuile invalide au sein d'un bloc) ;
2. une tuile H dont le câble inférieur code pour une parité ⊞ porte toujours un chevron > (afin de ne pas forcer un X en ⊞, car il n'y a que

5. Du moins « visuellement » pour le moment car cela n'est caractérisé pour l'instant dans le schéma que par la parité.

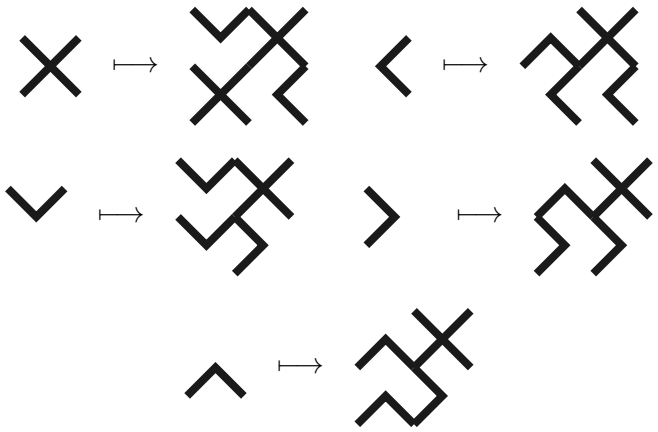


FIGURE 1.14 – Substitution associée aux décorations de la troisième couche

Type (couche 2)	Parité (couche 1)	Chevron (couche 3)
X	⬓ ou ⬒	X
H	⬓ ou ⬒	> ou <
V	⬓ ou ⬒	$\wedge$ ou $\vee$

TABLE 1.1 – Récapitulatif des combinaisons de couches possibles dans τ_{104}

des V sur fond ⬒).

Bien que, du point de vue des règles locales, le chevron soitt indissociable du câble auquel il se réfère, la substitution associée à cette nouvelle couche est indépendante et représentée sur la figure 1.14. Le type peut maintenant être retrouvé lors d'une dé-substitution et le schéma de simulation peut être itéré.

Il est possible de dériver un point fixe pour le schéma de simulation présenté en n'utilisant que les couleurs de parité sur la deuxième couche. Les différents types de tuiles sont exposés dans la table 1.1. Il y a $2 \times 4 \times 1 = 8$ tuiles X. Compter les tuiles H (ou V) nécessite bien sûr de prendre en compte les deux restrictions énoncées précédemment et qui n'apparaissent pas dans la table. On dénombre ainsi $2 \times 4 \times (2 \times 1 + 2 \times 2) = 48$ tuiles H. D'où $8 + 48 + 48 = 104$ tuiles au total. Ce jeu, noté τ_{104} et dont les 104 tuiles sont représentées sur la figure 1.15 est naturellement auto-simulant pour une certaine substitution 2×2 s_{104} sur τ_{104} représentée sur la figure 1.16 : les jeux de tuiles τ_{104} et $s_{104}(\tau_{104})$ (dont les tuiles sont des macro-tuiles 2×2 par τ_{104}) sont isomorphes et tout pavage par τ_{104} peut être uniquement décomposé en un pavage par $s(\tau_{104})$. La substitution s_{104} est non-ambiguë : tout coloriage de son ensemble limite $\Lambda_{s_{104}}$ admet une unique pré-image par s_{104}. Un motif de pavage est représenté sur le figure 1.17.

Théorème 8 (Ollinger [Oll08b]). *Le jeu de tuiles τ_{104} est un jeu apériodique (de*

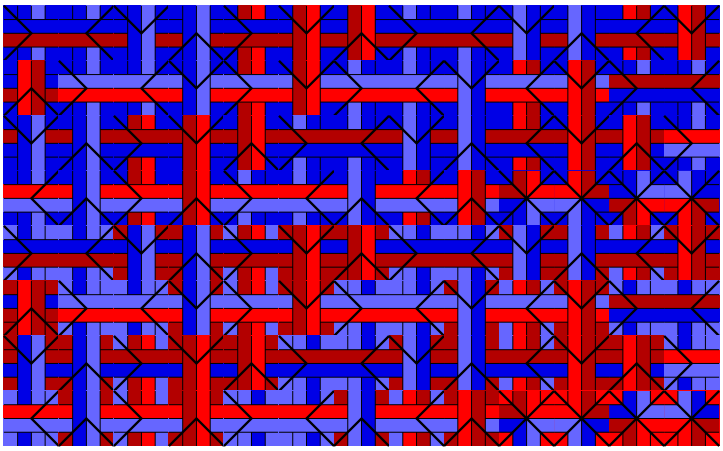


FIGURE 1.15 – Tuiles de τ_{104}

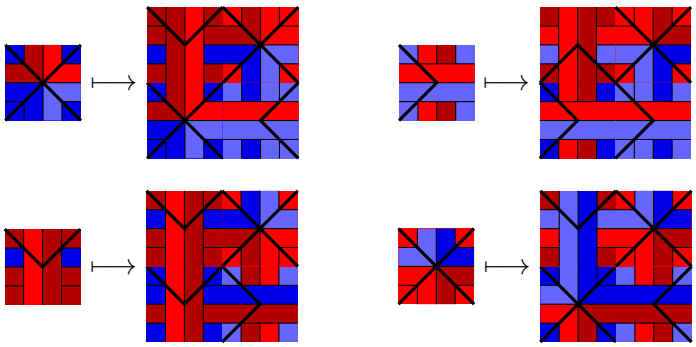


FIGURE 1.16 – Substitution s_{104}

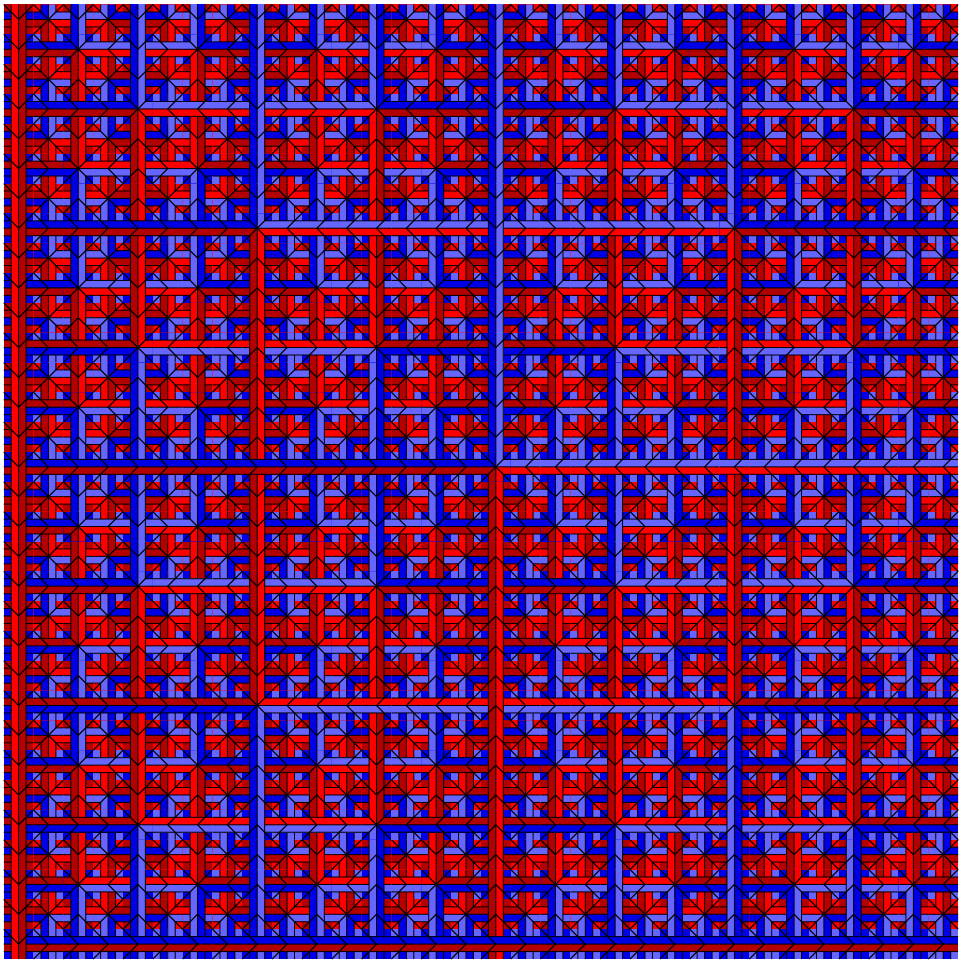


FIGURE 1.17 – Motif de $s_{104}^{5}(\tau_{104})$

104 tuiles).

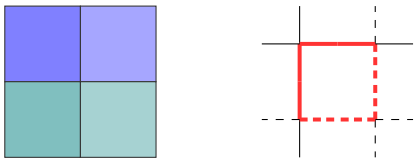
Schéma de preuve. Par un argument de compacité, le jeu de tuiles τ_{104} admet un pavage car les itérations de la substitution s_{104} engendrent des motifs valides arbitrairement grands. La substitution s_{104} est non-ambiguë par application directe de la proposition 10. Le point technique est de montrer que τ_{104} est auto-simulant, ce qui nécessite une analyse de cas afin de montrer que tout pavage se désubstitue de façon unique en un pavage par τ_{104}. La proposition 11 appliquée à τ_{104} conduit alors au résultat. ■

Remarque 4. On observera que s_{104} force la seconde couche (câbles) de tout pavage à décrire un empilement infini de *grilles de parité* carrées régulières (dont les couleurs des carrés alternent suivant la parité dans les directions horizontales et verticales) dont le n^{e} niveau est une grille de pas $2^n + 1$. On notera également que s_{104} force chaque niveau de la grille de parité à être translaté dans la direction so d'un demi-pas par rapport au niveau immédiatement inférieur.

Une façon moderne de dériver une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage de la construction de τ_{104} consiste à y coder l'ensemble limite d'une substitution bien choisie. Imposer l'ensemble limite d'une substitution 2×2 quelconque peut se faire aisément de façon générique, cette construction sera présentée en section 3.1.1. En construisant, ce qui n'est pas ici difficile, une substitution s dont les coloriages de l'ensemble limite contiennent tous des grilles carrées finies de tailles arbitrairement grandes, on obtient un jeu de tuiles $\tau_{104}(s)$ dont les pavages se projettent (au sens de la soficité) sur l'ensemble limite Λ_s. On peut alors enrichir ce jeu de tuiles d'une couche de calcul dont les tuiles présentes sur les intersections de la grille sont du type de celles construite en section 1.1.5 et celles présentes le long des arêtes de la grille transmettent les symboles et états inchangés d'une intersection de la grille à une autre. On impose par restriction alphabétique la tuile initiale forçant l'initialisation correcte de la machine dans le coin inférieur gauche de chaque grille. Le jeu de tuiles ainsi formé admettra un pavage si et seulement si le calcul simulé peut remplir (c'est-à-dire qu'il n'atteint pas d'état final sinon il est impossible de compléter le pavage) les grilles apparaissant dans un pavage, qui sont de tailles arbitrairement grandes, et par conséquent la machine ne s'arrête pas.

Berger

Nous revisitons ici brièvement la construction du jeu apériodique presenté dans l'annexe II de la thèse de Berger [Ber64]. Berger annonce 104 tuiles, mais la table de report des tuiles qu'il présente comporte plusieurs petites erreurs. Le jeu compte en réalité 103 tuiles. La présentation adoptée sera substitutive et similaire à celle que nous venons de proposer pour τ_{104}. Une présentation équivalente est également proposée par Ollinger [Oll11].



(a) Couleurs de parité (couche 1)

(b) Croix de la grille de parité (couche 2)

FIGURE 1.18 – Deux premières couches de τ_{103}

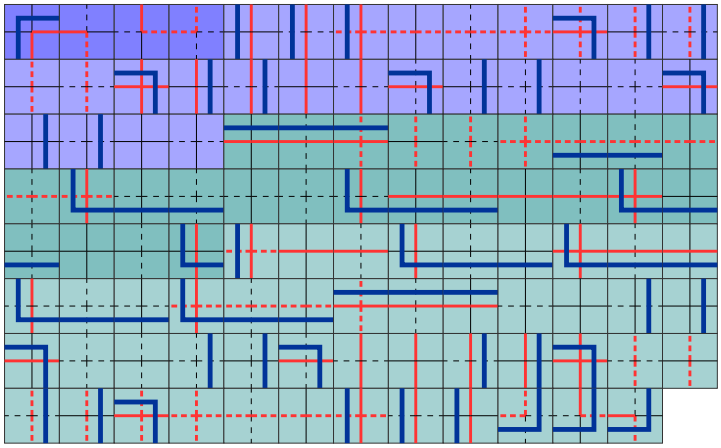


FIGURE 1.19 – Tuiles de τ_{103}

Le jeu de Berger, tout comme τ_{104} est un produit de trois couches. Les deux premières couches sont rigoureusement identiques à celles de τ_{104}. Seule la troisième couche diffère. Afin de nous approcher des choix de représentation originellement adoptés par Berger, nous utiliserons les représentations de la figure 1.18 pour les deux premières couches (parité et grille de parité) en lieu et place des choix de représentation proposés pour τ_{104}. Comme pour τ_{104}, les croisements entre câbles de la deuxième couches (tuiles de types H et V de τ_{104}) sont nécessaires (la deuxième couche n'est pas limitée aux croix de la figure 1.18(b)).

La troisième couche, en revanche, diffère de celle de s_{104}. Les 11 décorations associées apparaissent en bleu sur la figure 1.19. Sans entrer dans les détails, la substitution s_{103} associée au jeu τ_{103} de Berger a un comportement identique à s_{104} quant aux deux premières couches. En ce qui concerne la troisième couche, les règles de substitution peuvent être déduites de la figure 1.20 où, pour rester au plus proche de la définition originelle de Berger, l'information des deuxièmes et troisièmes couches est ici reportée sur la tuile située en position ⊞ du bloc de parité (contrairement à ⊞ dans le cas de s_{104}).

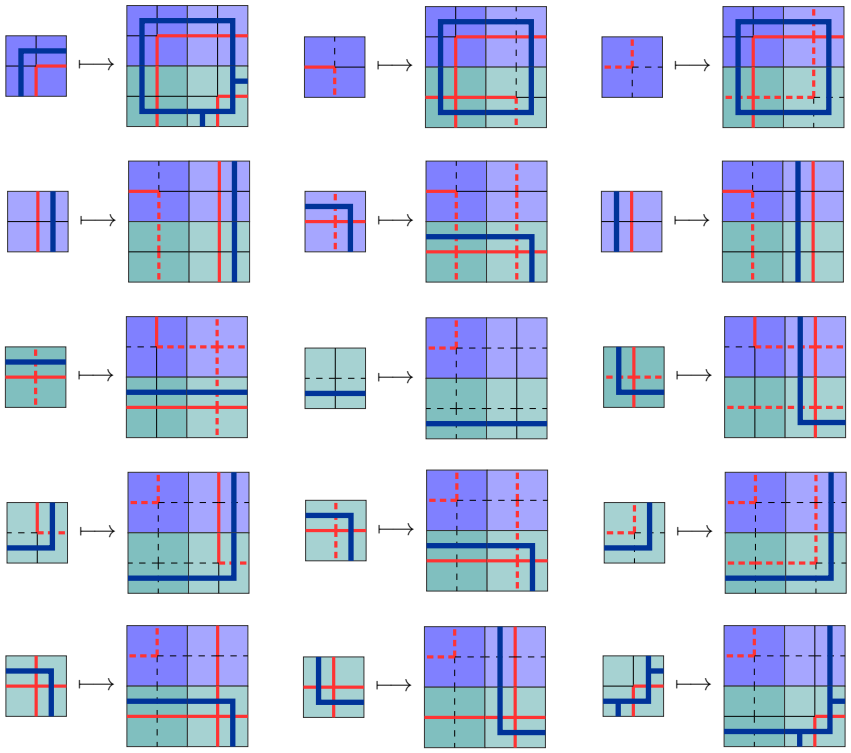


FIGURE 1.20 – Substitution s_{103}

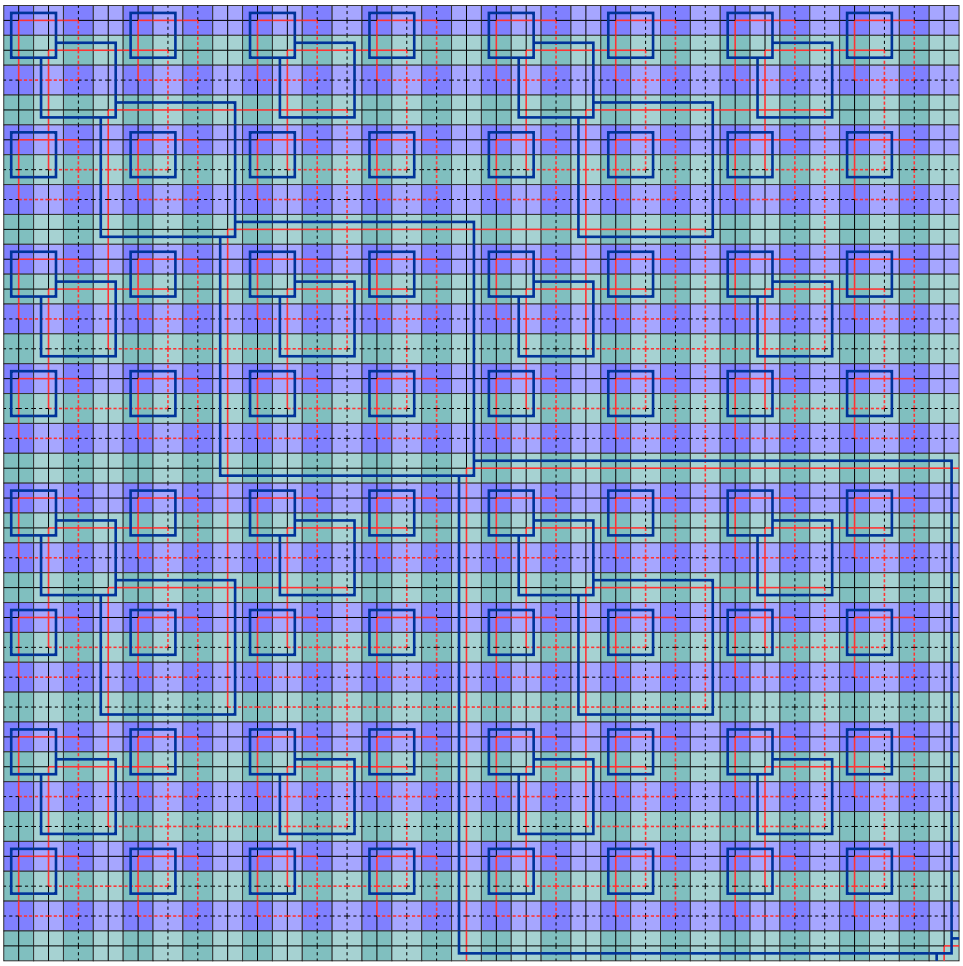


FIGURE 1.21 – Motif de $s_{103}^5(\tau_{103})$

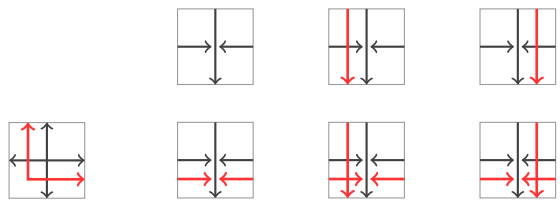
Un motif de pavage par le jeu τ_{103} est représenté sur la figure 1.21.

Le résultat d'apériodicité de ce jeu de tuiles peut être obtenu de la même façon que pour τ_{104} à partir des propriétés d'apériodicité et non ambiguïté de la substitution s_{103}.

Théorème 9 (Berger [Ber64])**.** *Le jeu de tuiles τ_{103} est apériodique.*

Robinson

Le jeu de Robinson [Rob71] est l'un des jeux apériodiques les plus « populaires » dans la littérature : dans la mesure où sa construction est simple et l'ensemble de ses pavages suffisamment aisé à décrire, enrichir ou modifier ce jeu limite les considérations techniques et il est dès lors utilisé comme base de travail dans de très nombreuses constructions. Nous en présentons ici brièvement la version tuiles de Wang de 56 tuiles en laissant de côté les



(a) Croix (b) Bras

FIGURE 1.22 – Tuiles de τ_{56}

autres versions et les discussions sur l'opportunité de réduire ce nombre. Une nouvelle fois, nous adopterons une approche substitutive. Ce jeu, qui sera noté τ_{56}, comporte deux grands types de tuiles : les *croix* (il y en a une et ses trois rotations, soit quatre au total) et les *bras* (il y en a 6 et leur quatre rotations, soit 24 au total). Ces tuiles sont représentées sur la figure 1.22 où l'on utilise de nouveau (cf. remarque 3) une notation commode sous forme de flèches pour les couleurs des tuiles de Wang.

On souhaite imposer des croix en chaque position « impaire–impaire » (à translation près) de tout pavage, c'est pourquoi on ajoute une couche de parité, dont les quatres tuiles sont comme précédemment notées , , et , et l'on impose :

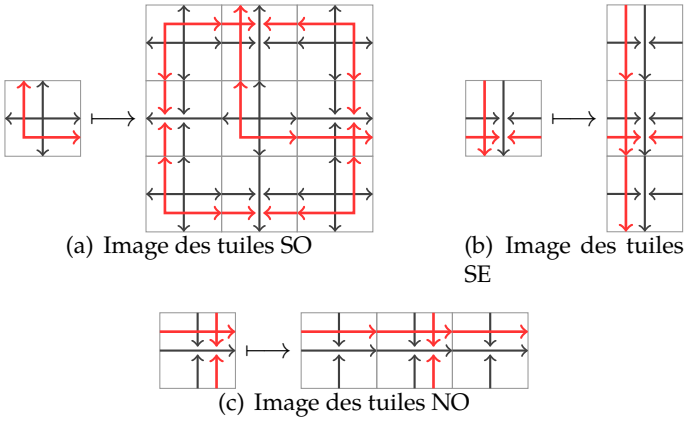
— en toute position , une croix ;
— en toute position , un bras vertical ;
— en toute position , un bras horizontal ;
— en toute position , n'importe quelle tuile.

Le jeu ainsi formé totalise donc $4 + 12 + 12 + 28 = 56$ tuiles. Ces contraintes laissant peu de place à l'ambiguïté, nous ne représenterons pas ici la couche de parité sur les figures.

Cette construction peut une nouvelle fois être interprétée de façon substitutive. Pour changer un peu, on peut envisager de considérer la substitution irrégulière σ_{56} sur les tuiles vérifiant :

— à toute tuile , qui est toujours une croix, σ_{56} associe l'unique $(2^2 - 1)$-bloc, de taille 3×3, comportant cette tuile en son centre (mais désormais placée sur une position) ;
— à toute tuile , qui est toujours un bras vertical, σ_{56} associe un bloc vertical 3×1 reproduisant la tuile en son centre (donc désormais en position) ;
— à toute tuile , qui est toujours un bras horizontal, σ_{56} associe un bloc horizontal 1×3 reproduisant la tuile en son centre (donc désormais en position) ;
— σ_{56} laisse les tuiles inchangées.

Ces règles de substitution sont représentées sur la figure 1.23. Avec cette présentation, la seconde couche de la tuile de départ est reportée sur la tuile



(a) Image des tuiles SO

(b) Image des tuiles SE

(c) Image des tuiles NO

FIGURE 1.23 – Substitution σ_{56}

centrale du bloc image. Cette présentation a le mérite d'illustrer de façon très lisible l'action de la substitution, l'image d'une tuile variant radicalement suivant sa parité.

Sans surprise, on peut également avoir recours à une substitution régulière 2×2 parfaitement équivalente pour décrire les pavages comme l'illustre la figure 1.24. On observera qu'ici la seconde couche de la tuile de départ est reportée sur la tuile en position ⊞ du bloc image (et non sur ⊞ comme nous l'avions fait pour τ_{104} ou sur ⊞ pour τ_{103}).

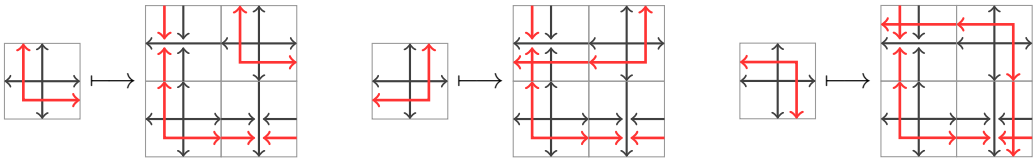
Théorème 10 (Robinson [Rob71]). *Le jeu de tuiles τ_{56} est apériodique.*

Contrairement aux cas de τ_{104} et τ_{103}, une preuve « substitutive » de ce résultat requiert de prendre quelques précautions car l'ensemble des pavages τ_{56} n'est pas ici inclus dans l'ensemble limite $\Lambda_{\sigma'_{56}}$. En effet, le jeu de Robinson autorise l'apparition dans les pavages de lignes de fractures horizontales ou verticales séparant deux demi-plans dans lesquels les hiérarchies des carrés formés par la construction ne sont pas bien alignées. Ce phénomène ne peut être décrit par la substitution σ'_{56} et n'apparaît pas dans les coloriages de l'ensemble limite qu'elle engendre. Néanmoins, tout pavage par τ_{56} contient toujours au moins un quart de plan inclus dans l'ensemble limite $\Lambda_{\sigma'_{56}}$, ce qui suffit à garantir l'apériodicité.

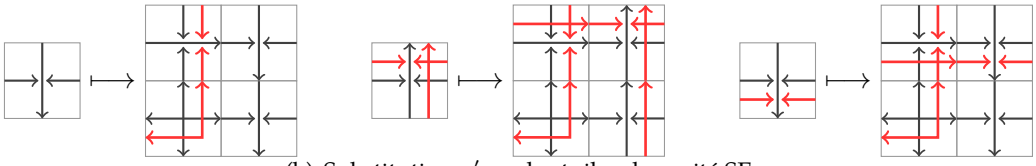
Remarque 5. On observera que le jeu de tuiles [6] τ_{56} peut-être obtenu par projection alphabétique des tuiles de τ_{104}, la projection consistant simplement à effacer les câbles de la deuxième couche des couleurs SO, SE et NE et à interpréter convenablement les chevrons en termes d'orientation des flèches. Cette projection est illustrée sur un motif par la figure 1.25.

Enfin, notons qu'une relecture sous un angle éclairant de la construction de Robinson pourra également être trouvée dans Levin [Lev05]. Des

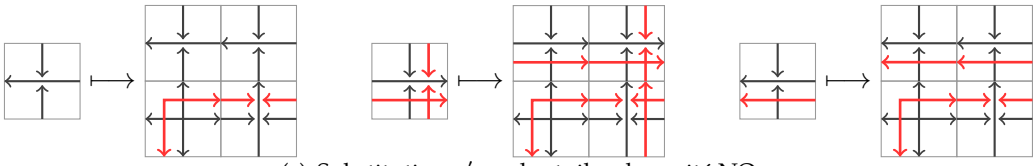
6. Mais pas ses pavages, comme d'ailleurs illustré par la discussion qui précède.



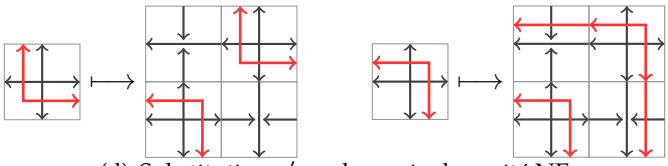
(a) Substitution σ' sur les tuiles de parité SO



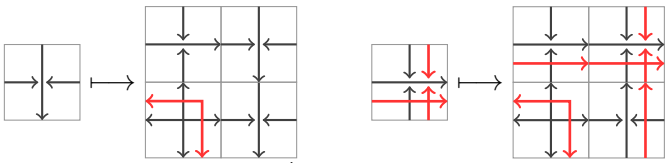
(b) Substitution σ' sur les tuiles de parité SE



(c) Substitution σ' sur les tuiles de parité NO



(d) Substitution σ' sur les croix de parité NE



(e) Substitution σ' sur les croix de parité NE

FIGURE 1.24 – Substitution régulière 2×2 σ'_{56}

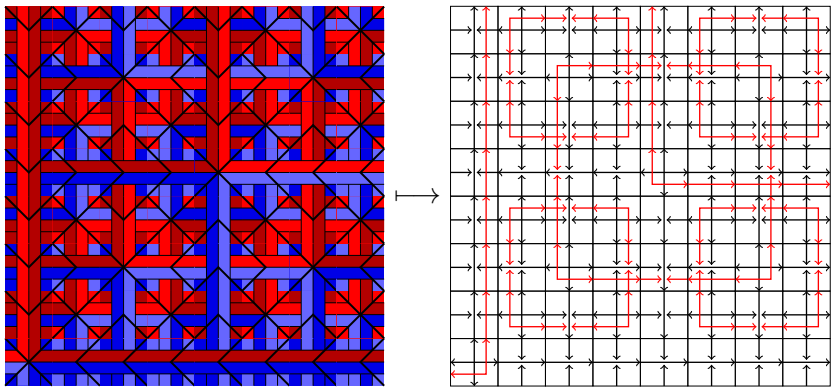


FIGURE 1.25 – Projection des tuiles de τ_{104} sur τ_{56}

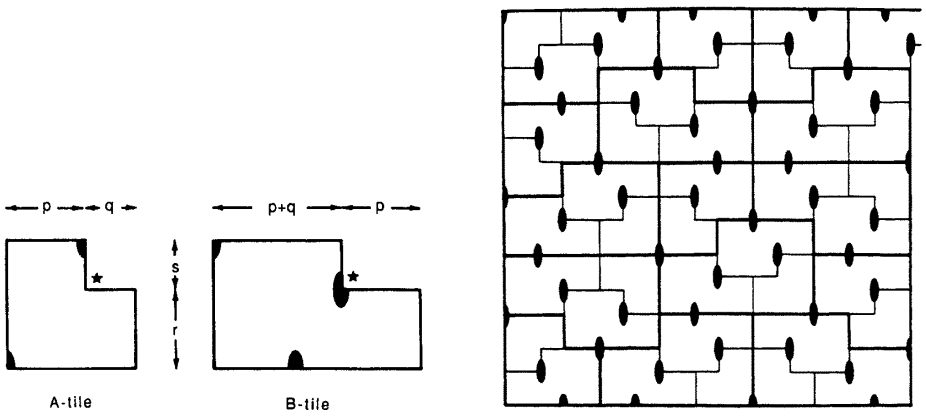
réécritures visant une plus grande clarté des arguments de la preuve en sont également proposées par Allauzen et Durand [AD01], ainsi que par Kari [Kar09b].

La manière élégante proposée par Robinson afin de dériver une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage à partir de ce jeu de tuiles apériodique consiste à observer que les carrés formés par les signaux rouges dessinés par le jeu (présents dans les pavages) forment une structure hiérarchique que l'on peut interpréter comme un arbre quaternaire infini identique à celui formé par τ_{104} et sur lequel nous reviendrons au chapitre 3, section 3.1.1 (figure 3.1). Les bordures de carrés des niveaux pairs croisent ceux des niveaux impairs mais ne se croisent pas entre-eux. Il est dès lors aisé d'ajouter un bit de parité, contrôlé aux intersections, sur les carrés afin de déterminer leur parité. On obtient alors une hiérarchie de carrés, imbriqués les uns dans les autres mais sans se recouper. L'idée est alors d'injecter une simulation de machine de Turing dans ces carrés en initialisant la machine de Turing sur la tuile située au coin inférieur gauche de chaque carré. Le problème est qu'un carré est partiellement recouvert par les carrés du niveau inférieur. Il est alors nécessaire de propager des signaux horizontaux et verticaux le long les lignes et colonnes de ces carrés de niveaux inférieur à l'intérieur du carré les contenant, comme si ces carrés projetaient leur ombre dans les quatre directions, de manière à marquer les positions non disponibles pour le calcul. Les tuiles qui ne sont couvertes par aucune ombre constituent les positions libres pour le calcul. En comptant ces tuiles, on vérifie que leur nombre augmente strictement lorsque l'on monte dans la hiérarchie et que l'on peut bien aménager des espace de calcul de plus en plus grands dans la hiérarchie. On aura alors un pavage si et seulement si la machine de Turing se s'arrête pas lorsqu'elle est simulée sur des espace-temps arbitrairement grands, c'est-à-dire que le calcul simulé ne s'arrête pas.

Ammann

Ammann construit dans [AGS92] un jeu de tuiles géométriques apériodique très simple dont l'apériodicité repose également sur un argument substitutif élémentaire en tout point similaire à ceux que nous avons illustrés jusque là. Ce jeu, généralement nommé A2, est constitué des deux tuiles géométriques décorées de la figure 1.26. Les quantités p, q, r, s peuvent être choisies arbitrairement. Choisir $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or est commode dans la mesure où les macro-tuiles formées par le jeu sont alors homothétiques aux tuiles du jeu. Une étude détaillée des pavages par ce type de jeu est proposée dans Durand, Shen et Vereshchagin [DSV11].

Il est possible de transformer ce jeu en un jeu de tuiles de Wang comme le font Grünbaum et Shephard [GS87]. Deux techniques sont employées dans la littérature pour cela. La première est une discrétisation directe des tuiles



(a) Tuiles de A2 (b) Motif par A2

FIGURE 1.26 – Jeu géométrique apériodique A2, extrait de [AGS92]

géométriques et donne naissance à un jeu de 24 tuiles de Wang, noté τ_{24}, comme illustré par la figure 1.27.

La seconde méthode est nettement plus sophistiquée et fait intervenir les *barres de Ammann*. Elle consiste à réinterpréter les décorations initiales du jeu de Ammann A2 sous une forme différente, celles des barres de la figure 1.28(a), et à remarquer que cela donne lieu à une nouvelle discrétisation plus subtile suivant les parallélogrammes délimités par les barres apparaissant en gras sur la figure. Cela constitue alors un jeu apériodique de 16 parallélogrammes décorés apériodiques, qui est alors directement converti en un jeu de tuiles de Wang à 16 tuiles, noté τ_{16}, représenté sur la figure 1.28.

Nous mentionnons ces jeux ici car τ_{16}, outre le fait qu'il est longtemps resté le plus petit jeu de tuiles de Wang apériodique connu avant l'apport par Kari [Kar96] d'une nouvelle technique, est *bi-déterministe*. Nous y reviendrons dans la section 1.3.

On ne connaît pas de moyen de dériver une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage à partir de ces jeux apériodiques de Ammann[7].

1.3 Déterminisme

Le déterminisme dans les jeux de tuiles de Wang a été initialement introduit par Kari [Kar92] afin de montrer l'indécidabilité de la nilpotence des automates cellulaires uni-dimensionnels. La plupart des résultats de la littérature portant sur les jeux de tuiles déterministes ont été obtenus par la suite par Kari et l'un de ses étudiants, Lukkarila.

7. Il n'est en revanche pas exclu que des techniques similaires à celles de Robinson [Rob71] s'adaptent à ce cadre.

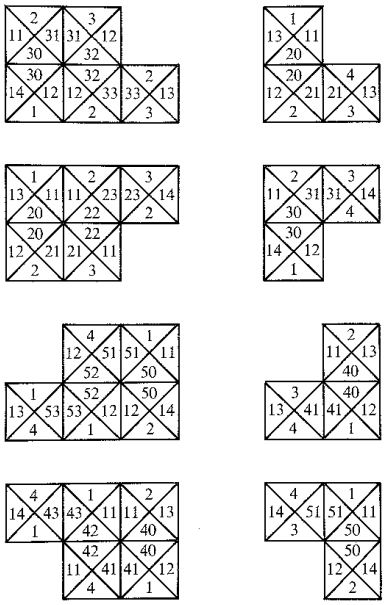
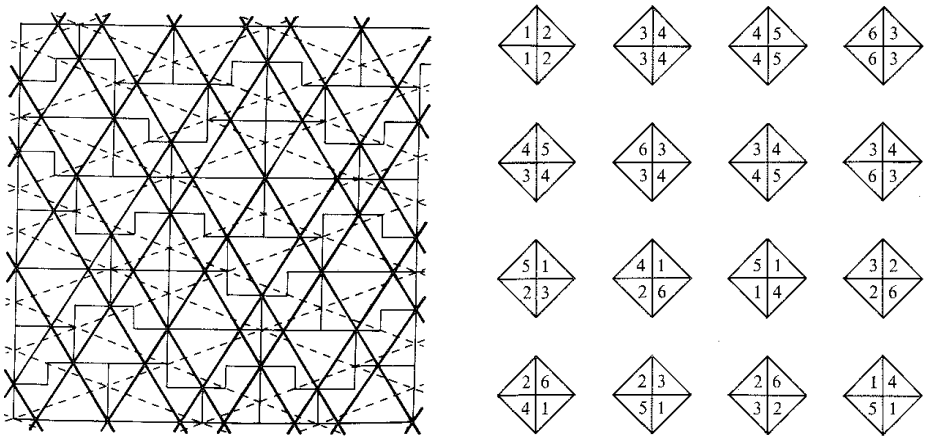


FIGURE 1.27 – 24 tuiles de Wang apériodiques obtenues à partir de A2, extrait de [GS87]



(a) Barres de Ammann

(b) 16 tuiles apériodiques correspondantes

FIGURE 1.28 – 16 tuiles de Wang apériodiques obtenues à partir de A2 [GS87]

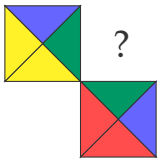


FIGURE 1.29 – NE déterminisme

De façon assez surprenante, certains des résultats obtenus par Kari étaient en réalité déjà présents dans les travaux antérieurs, restés peu connus, de Aanderea et Lewis [AL74, Lew79]. En revanche, la construction d'Aanderaa et Lewis est d'une grande complexité et l'intérêt des travaux bien plus accessibles et réutilisables de Kari ne saurait être remis en cause.

1.3.1 Définition

Définition 28 (Déterminisme)**.** Un jeu de tuiles τ est NE *déterministe* si pour tout couple de tuiles $(o, s) \in \tau^2$, il existe au plus une tuile $t \in \tau$ simultanément compatible à l'ouest avec o et au sud avec s : $o_{\text{E}} = t_{\text{O}}$ et $s_{\text{N}} = t_{\text{S}}$.

De façon équivalente (dans le cadre syntaxique des tuiles de Wang), un jeu τ est NE déterministe si toute tuile $t \in \tau$ est uniquement déterminée par son couple de couleurs $(t_{\text{O}}, t_{\text{S}})$.

Le déterminisme dans les trois autres directions diagonales SO,SE et NO est défini symétriquement.

Cette définition est illustrée par la figure 1.29 : il doit y avoir au plus une tuile du jeu apparaissant en la position de la tuile mystère « ? » sur la figure.

Remarque 6. Le déterminisme tel qu'initialement défini par Kari portait sur les triplets de tuiles du jeu (et non les couples), elle intégrait une tuile située en diagonale de la tuile à prédire à la définition. Cette définition est équivalente à celle que nous avons donné à un groupage 2×1 (ou 1×2) près. La définition choisie ici présente l'avantage de s'exprimer directement comme une contrainte sur les paires de couleurs portées par les tuiles du jeu.

Remarque 7. La définition initiale du déterminisme par Kari utilisait une convention opposée sur la direction de déterminisme : le NE déterminisme tel que défini ici correspondait à du SO déterminisme (idem pour SE et NO).

Définition 29 (Bi-déterminisme)**.** Un jeu de tuiles est *bi-déterministe* s'il est simultanément déterministe dans deux directions opposées : NE et SO, ou NO et SE.

L'un des intérêts du déterminisme est de rapprocher les objets de dimension 2 que sont les pavages par un jeu de tuiles d'objets de dimension 1. En effet, si l'on connaît une diagonale de direction NO–SE apparaissant dans un pavage par un jeu de tuiles NE déterministe (resp. bi-déterministe dans les

directions NE et SO), alors toute la partie supérieure du pavage (resp. tout le pavage) est parfaitement déterminée et peut être localement reconstruite par l'application de la règle locale de déterminisme.

Définition 30 (4-way déterminisme)**.** Un jeu de tuiles est *4-way déterministe* s'il est simultanément déterministe dans les quatre directions diagonales.

Lorsque le jeu de tuiles considéré est 4-way déterministe, la connaissance d'un chemin (8-connexe) de tuiles apparaissant dans un pavage et intersectant toute ligne et toute colonne du plan discret $\mathbb{Z}^2$ suffit à déterminer de façon unique l'intégralité du pavage, qui peut être localement reconstruit par application de la règle locale de déterminisme.

La proposition suivante caractérise les directions d'expansivité des jeux de tuiles 4-way déterministes. Elle sera généralisée eu chapitre 5 (proposition 19).

Proposition 12. *Si τ est un jeu de tuiles 4-way déterministe, alors l'ensemble $\mathcal{X}_\tau$ de ses pavages est expansif dans (au moins) toutes les directions de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

1.3.2 État de l'art

Par déterminisation du jeu de tuiles apériodique de Robinson [Rob71], Kari [Kar92] construit un jeu de tuiles apériodique déterministe dans une direction. Bien que cela ne soit pas le but initial, la technique employée par Kari rend en réalité également le jeu déterministe dans la direction opposée à la direction recherchée, raison pour laquelle nous énoncerons le résultat sous cette forme.

Théorème 11 (Kari [Kar92])**.** *Il existe un jeu de tuiles apériodique bi-déterministe.*

Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de la construction (très simple au demeurant) car nous la revisiterons sur la base du jeu apériodique τ_{104} de Ollinger [Oll08b] dans la section 1.4, les arguments et la méthode de construction restant rigoureusement les mêmes.

Il est intéressant de noter qu'un tel jeu était en réalité implicitement construit dès les années 1970 dans les travaux oubliés de Aanderaa et Lewis [AL74, Lew79]. Par ailleurs, un jeu apériodique bi-déterministe était déjà bien connu : il s'agit du jeu de tuiles apériodique à 16 tuiles dérivé des tuiles géométriques apériodiques de Ammann A2 présentées en section 1.2.3. On ne connaît en revanche pas de construction injectant directement du calcul Turing dans ce dernier, ce dont on a besoin pour en déduire l'indécidabilité du problème du pavage dans le cadre déterministe comme le fait Kari.

Théorème 12 (Kari [Kar92])**.** *Le problème du pavage reste indécidable lorsque l'on restreint l'entrée à la classe des jeux de tuiles* NE *déterministes.*

Là encore, ce théorème était en réalité déjà traité auparavant dans les travaux de Aanderaa et Lewis [AL74] (annexe I).

Ce dernier problème se réduit assez facilement à la nilpotence des automates cellulaires uni-dimensionnels (le cas de la dimension 2, et par conséquent des dimensions supérieures, se traite de manière plus simple et directe à partir du problème du pavage sans restriction supplémentaire), ce qui permet à Kari d'obtenir le résultat qui l'intéressait.

Théorème 13 (Kari [Kar92])**.** *Le problème de la nilpotence des automates cellulaires de dimension 1 est indécidable (Σ_1-complet).*

De nouveau, ce théorème apparaissait déjà dans les travaux de Aanderaa et Lewis [AL74] (annexe I).

Kari et Papasoglu [KP99] ont construit plus tard un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe par une déterminisation complète du jeu apériodique de Robinson [Rob71].

Théorème 14 (Kari et Papasoglu [KP99])**.** *Il existe un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe.*

Nous n'entrerons pas dans les détails de cette construction car nous procéderons à une déterminisation complète du jeu τ_{104} de Ollinger [Oll08b] dans la section 1.4. Le jeu 4-way déterministe obtenu s'avèrera isomorphe au jeu de Kari et Papasoglu.

Au même moment, Mazoyer et Rapaport [MR99] ont montré l'indécidabilité du problème du pavage périodique dans le cadre déterministe afin d'en dériver l'indécidabilité de la nilpotence sur les configurations périodiques des automates cellulaires uni-dimensionnels. Cette démarche est très naturelle car parfaitement analogue à l'utilisation par Kari du problème du pavage déterministe afin de montrer l'indécidabilité du problème de la nilpotence en dimension 1.

Théorème 15 (Mazoyer et Rapaport [MR99])**.** *Le problème du pavage périodique reste indécidable si l'on restreint l'entrée à la classe des jeux de tuiles* NE *déterministes.*

Ce problème n'a pas été traité sous de plus fortes conditions de déterminisme. Nous le traiterons dans le cadre 4-way déterministe dans le chapitre 2.

Théorème 16 (Mazoyer et Rapaport [MR99])**.** *Le problème de la nilpotence sur les configurations périodiques des automates cellulaires de dimension 1 est indécidable.*

La construction d'un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe ouvre la voie à la déterminisation complète de la preuve d'indécidabilité du problème du pavage de Robinson. Tandis qu'il n'était pas difficile de construire

une simulation de machine de Turing déterministe dans une direction, la réalisation de la simulation 4-way déterministe est un challenge beaucoup plus ardu qui sera relevé dix ans plus tard par Lukkarila [Luk09, Luk10].

Théorème 17 (Lukkarila [Luk09])**.** *Le problème du pavage reste indécidable lorsque l'on restreint l'entrée à la classe des jeux de tuiles 4-way déterministes.*

Nous aurons l'occasion de revenir sur différents ingrédients de cette preuve au cours des chapitres 2 et 5.

1.3.3 Lien avec d'autres modèles de calcul

Automates cellulaires partiels

Les automates cellulaires constituent un système dynamique discret et un modèle de calcul parallèle en temps et espace discret. Les pavages peuvent aisément être interprétés comme la version « contrainte » des automates cellulaires de dimension 2 : là où un automate cellulaire possède une règle locale de transition qui décide du nouvel état d'une cellule en considérant les états des cellules de son voisinage fini, un sous-shift de type fini est parfaitement caractérisé par un prédicat qui décide de la validité locale du pavage en une cellule en considérant les lettres portées par les cellules d'un certain voisinage fini.

Nous ne considérerons en revanche ici que des automates cellulaires uni-dimensionnels.

Définition 31 (Automate cellulaire partiel)**.** Formellement, un *automate cellulaire partiel* est un triplet $A = (S, N, f)$ où :

1. S est l'ensemble fini des *états* ;
2. $N = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$ est le *voisinage* (de taille m) ;
3. $f : S^m \to S$ est une fonction partielle appelée *fonction locale de transition*.

La fonction locale f étant partielle, on utilise la notation $f(\overline{v}) = \perp$ pour désigner une transition non définie.

Pour tous $c \in S^{\mathbb{Z}}$ et $z \in \mathbb{Z}$, on note $N_c(z) = (c(z + v_1), \ldots, c(z + v_m)) \in S^m$ le vecteur de voisinage de z dans c. L'ensemble des *configurations* d'un automate cellulaire est le full-shift $S^{\mathbb{Z}}$. Une configuration $c \in S^{\mathbb{Z}}$ est *morte* s'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $f(N_c(z)) = \perp$, sinon c est *vivante*. On note $V_A \subseteq S^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des configurations vivantes. V_A est sous-shift de type fini de $S^{\mathbb{Z}}$. L'automate A agit sur l'ensemble des configurations par l'intermédiaire de sa *fonction globale*, encore notée $A : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ et exclusivement définie sur l'ensemble des configurations vivantes V_A par, pour tous $c \in V_A$ et $z \in \mathbb{Z}$, $A(c)(z) = f(N_c(z))$.

Si c est morte, on note $A(c) = \perp$. Une configuration $c \in S^{\mathbb{Z}}$ est *mortelle* s'il existe $k \geqslant 1$ tel que $A^k(c) = \perp$. Une configuration est *immortelle* si elle n'est pas mortelle, auquel cas l'*orbite* $(A^n(c))_{n\geqslant 0}$ est bien définie. On note V_A^* l'ensemble des configurations immortelles, ce dernier est un sous-shift qui vérifie l'égalité $V^* = \bigcap_{n\geqslant 0} A^{-n}(S^{\mathbb{Z}})$: c'est en effet l'ensemble des configurations qui admettent une image par A après des temps arbitrairement longs.

Les automates cellulaires partiels disposent d'une caractérisation topologique parfaitement analogue à celle du théorème de Hedlund [Hed69] pour les automates cellulaires.

Théorème 18 (Curtis-Hedlund-Lyndon [Hed69]). *Une fonction $A : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ partielle définie sur un sous-shift de type fini V est un automate cellulaire partiel si et seulement si elle est continue (pour la topologie induite sur V) et commute avec les translations.*

De façon complémentaire, on définit l'*ensemble limite* Λ_A d'un automate cellulaire partiel A comme l'ensemble des configurations pouvant apparaître arbitrairement loin dans une orbite de l'automate cellulaire [8] : $\Lambda_A = \bigcap_{n\geqslant 0} A^n(S^{\mathbb{Z}})$. Λ_A est également un sous-shift. Tout comme nous l'avions souligné pour les substitutions, Λ_A est exactement l'ensemble des configurations qui admettent un historique, c'est-à-dire une séquence infinie de pré-images successives par A.

On peut enfin définir l'*ensemble limite immortel* $\Diamond_A$ d'un automate cellulaire partiel A par : $\Diamond_A = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A^n(S^{\mathbb{Z}}) = V^* \cap \Lambda_A$. $\Diamond_A$ est exactement l'ensemble des configurations immortelles de l'ensemble limite de A. $\Diamond_A$ est encore une fois un sous-shift.

Le lien de cet objet avec les jeux de tuiles déterministes est très naturel. On peut en effet associer à tout jeu de tuiles τ déterministe dans une direction, disons NE, une application partielle $f_\tau : \tau^2 \to \tau$ qui à toute paire $(t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{s}}) \in \tau^2$ associe la tuile t compatible, si elle existe. Cette application, que l'on désignera parfois comme *règle locale de déterminisme* du jeu de tuiles, définit naturellement un automate cellulaire partiel $A_\tau = (1, \tau, (0,1), f_\tau)$ dont f_τ est la fonction locale de transition.

L'étude d'un jeu de tuiles déterministe τ peut alors être envisagée comme l'étude de l'automate cellulaire partiel A_τ associé. Les diagonales apparaissant dans les pavages par τ sont exactement les configurations de l'ensemble $\Diamond_{A_\tau}$. Le jeu τ pave le plan si et seulement si $\Diamond_{A_\tau} \neq \varnothing$, ou encore par compacité si $V_{A_\tau}^* \neq \varnothing$ ou $\Lambda_{A_\tau} \neq \varnothing$.

8. Cette définition est parfaitement analogue à celle de l'ensemble limite d'une substitution, les considérations de clôture par translation en moins.

Automates de Mealy

Les automates de Mealy sont un modèle qui présente la particularité d'être proche des jeux de tuiles de Wang déterministes *complets* — c'est-à-dire que la règle locale de déterminisme est complète, ou encore que l'automate cellulaire associée à cette dernière n'est pas (strictement) partiel — dans une ou plusieurs directions. Nous ne proposons ici qu'une approche rapide de ce modèle. Le lecteur pourra consulter les travaux de Klimann *et al* [Kli13, AKL$^+$12, Kli14] pour plus de détails.

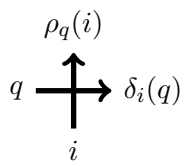
Définition 32 (Automate de Mealy)**.** Un *automate de Mealy* $\mathcal{A} = (A, \Sigma, \delta, \rho)$ est la donnée de :

— un ensemble fini d'états A ;
— un alphabet fini Σ ;
— une *fonction de transition* $\delta : \Sigma \times A \to A$, usuellement décomposée en une famille de fonctions $\delta_i : A \to A$ indexée par $i \in \Sigma$ telles que $\delta_i = \delta(i, \cdot)$, et d'une *fonction de production* $\rho : A \times \Sigma \to \Sigma$, usuellement décomposée en une famille de fonctions $\rho_a : \Sigma \to \Sigma$ indexée par $a \in \mathcal{A}$ telles que $\rho_a = \rho(a, \cdot)$.

On peut définir de façon équivalente δ et ρ comme les projections d'une *fonction de transition-production* $\Delta : A \times \Sigma \to A \times \Sigma$ vérifiant $\Delta(a, i) = (\delta_i(a), \rho_a(i))$.

Un automate de Mealy est donc exactement un transducteur lettre-à-lettre fini, déterministe et complet à même alphabet d'entrée que de sortie.

Les transitions de l'automate peuvent être représentées de façon commode de la manière suivante, pour tous $i \in \Sigma$, $a \in A$:



On retrouve alors exactement (c'est-à-dire qu'il s'agit précisément du même objet) avec cette représentation des transitions, qui définit intégralement l'automate, les jeux de tuiles déterministes complets dans la direction NE.

Un automate de Mealy est *inversible* si les fonctions de production ρ_a, pour tout $a \in \mathcal{A}$, sont bijectives (i.e. sont des permutations sur Σ). Les jeux de tuiles correspondants sont exactement les jeux de tuiles déterministes complets dans les directions NE et SE simultanément.

Un automate de Mealy est *réversible* si les fonctions de transitions δ_i, pour tout $i \in \Sigma$, sont bijectives (i.e. sont des permutations sur A). Les jeux de tuiles correspondants sont cette fois exactement les jeux de tuiles déterministes complets dans les directions NE et NO simultanément.

Un automate de Mealy est *inversible-réversible* s'il est simultanément inversible et réversible. On retrouve alors exactement les jeux de tuiles déterministes complets dans les directions NE, SE et NO simultanément.

Enfin, un automate de Mealy est *bi-réversible* s'il est simultanément inversible, réversible et que la fonction de transition-production Δ précédemment introduite est bijective[9] (i.e. est une permutation sur $A \times \Sigma$). On retrouve alors exactement les jeux de tuiles 4-way déterministes complets.

On étend naturellement les fonctions de production aux mots de Σ^* : $\rho_a : \Sigma^* \to \Sigma^*$ définie récursivement par $\rho_a(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\rho_a(iu) = \rho_a(i)\rho_{\delta_i(a)}(u)$, pour tous $i \in \Sigma$ et $u \in \Sigma^*$. On définit alors le semi-groupe $\langle \mathcal{A} \rangle_+$ engendré par $\mathcal{A}$ comme le sous-semi-groupe de $(\Sigma^{*\Sigma^*}, \circ)$ finiment engendré par les $\{\rho_a, a \in A\}$. Si $\mathcal{A}$ est de plus inversible, on peut définir le groupe $\langle \mathcal{A} \rangle$ comme le sous-groupe de $\mathfrak{S}(\Sigma^*)$ engendré par les $\{\rho_a,\ a \in A\}$.

On considère les problèmes suivants prenant en entrée un automate de Mealy $\mathcal{A}$ et consistant à déterminer si le (semi-)groupe engendré est fini. Comme on peut toujours voir le groupe engendré par un automate inversible $\mathcal{A}$ comme un semi-groupe (engendré par l'automate union disjointe $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}^{-1}$, où $\mathcal{A}^{-1}$ désigne l'inverse de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'automate obtenu en inversant la flèche verticale dans la représentation précédemment introduite des transitions[10]), le second problème se réduit au premier.

Problème 5 (Finitude des semi-groupes d'automates)**.** *Un automate de Mealy $\mathcal{A}$ étant donné en entrée, décider si le semi-groupe engendré $\langle \mathcal{A} \rangle_+$ est fini.*

Problème 6 (Finitude des groupes d'automates)**.** *Un automate de Mealy inversible $\mathcal{A}$ étant donné en entrée, décider si le groupe engendré $\langle \mathcal{A} \rangle$ est fini.*

En s'inspirant de la preuve de Kari [Kar92] pour l'indécidabilité de la nilpotence des automates cellulaires unidimensionnels par réduction du problème du pavage restreint aux jeux de tuiles déterministes dans une direction, Gillibert [Gil14] a récemment montré que le premier problème considéré est indécidable en procédant également par réduction de ce problème du pavage déterministe.

Théorème 19 (Gillibert [Gil14])**.** *Le problème de la finitude des semi-groupes d'automates est indécidable.*

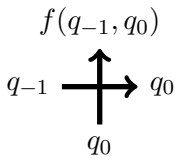
En réalité, la preuve de Kari [Kar92] implique plus précisément l'indécidabilité du problème de la nilpotence des automates cellulaires de voisinage de taille 2 (parfois appelé « rayon $\frac{1}{2}$ ») avec *état contaminant* (c'est-à-dire qu'il existe un état q tel que si le voisinage contient au moins une cellule dans cet état, la règle de transition locale produit toujours q). On donne ici une

9. Il ne s'agit pas ici de la définition « usuelle » de la bi-réversibilité dans la littérature, mais cette dernière nécessiterait de plus amples développements sur le dual et l'inverse d'un automate de Mealy. On se contentera donc ici de cette définition parfaitement équivalente.

10. Ce qui définit bien un automate de Mealy si et seulement si $\mathcal{A}$ est inversible.

preuve plus concise du résultat de Gillibert en réduisant ce problème à la finitude des semi-groupes d'automates.

Démonstration. On réduit le problème de la nilpotence des automates cellulaires de dimension 1 à voisinage de taille 2, disons $\{-1, 0\}$, et possédant un état contaminant. On convertit naturellement un tel automate cellulaire F d'ensemble d'états Q, d'état contaminant $c \in Q$ contaminant et de fonction locale $f : Q^2 \to Q$ en un automate de Mealy sur $A = \Sigma = Q$ en posant $\Delta(q_{-1}, q_0) = (q_0, f(q_{-1}, q_0))$:



Si F n'est pas nilpotent, alors, pour des raisons de compacité, il existe $u \in Q^{\mathbb{Z}}$ tel que pour tout $k \geqslant 0$, $u_k = F^k(u)$ ne contient pas l'état c. Alors, en notant $u_+ = u|_{\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$, on a, pour tout $k \geqslant 0$, $\rho_c^k(u_+) = c^k F^k(u_+)$. Tous les ρ_c^k avec $k \geqslant 0$ sont donc distincts (les suffixes $F^k(u_+)$ ne contenant pas c) : le sous-semi-groupe $\langle \rho_c \rangle_+ \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle_+$ est infini.

Réciproquement, si F est nilpotent, alors il existe n tel que $F^n = \tilde{c}$. Alors pour tout $u \in Q^{\mathbb{N}}$ et tout $x \in Q^{\geqslant n}$,

$$\rho_x(u) = \rho_x(u[1, n])c^\omega$$

car $\rho_{x[1,n]}(u) = \rho_{x[1,n]}(u[1, n])F^n(u) = \rho_{x[1,n]}(u[1, n])c^\omega$ par choix de n et c étant contaminant, le suffixe c^ω reste inaltéré par la suite. Pour tout $x \in Q^{\geqslant n}$, ρ_x est donc parfaitement déterminé par ses images sur les mots de taille n : il y a donc au plus $|(Q^n)^{Q^n}|$ telles applications. Comme il n'y a par ailleurs qu'un nombre fini de ρ_x pour $x \in Q^{<n}$, on en déduit que $\langle \mathcal{A} \rangle_+$ est fini. ■

Problème ouvert 1. *Le problème de la finitude des groupes d'automates est-il décidable ?*

1.4 Premiers résultats

Après l'introduction d'une notion dirigée de soficité appropriée au cadre des jeux de tuiles déterministes, nous discutons ici de premières propriétés de combinatoire et dénombrement et de l'opportunité d'en tirer des résultats négatifs de soficité directionnelle. Dans la veine des résultats plus constructifs qui constitueront l'essentiel des chapitres suivants de ce mémoire, nous concluons cette section par la construction d'un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe.

1.4.1 Soficité directionnelle

Nous introduisons ici une notion renforcée de soficité, que nous nommerons *soficité directionnelle*, et consistant à imposer des contraintes de déterminisme additionnelles au jeu de tuiles intervenant dans la définition de la soficité usuelle.

Définition 33 (Soficité directionnelle)**.** Un sous-shift $\mathcal{Y} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est NE *sofique* s'il existe un jeu de tuiles NE déterministe τ et une projection alphabétique $\pi : \tau \to \Sigma$ (naturellement étendue aux coloriages) tels que $\pi(\mathcal{X}_\tau) = \mathcal{Y}$.

La *soficité directionnelle* dans les directions $\{\text{NO}, \text{SO}, \text{SE}\}$ est définie symétriquement.

La notion qui nous intéressera particulièrement est la soficité directionnelle dans les quatre directions diagonales simultanément.

Définition 34 (4-way soficité)**.** Un sous-shift $\mathcal{Y} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est *4-way sofique* s'il existe un jeu de tuiles 4-way déterministe τ et une projection alphabétique $\pi : \tau \to \Sigma$ (naturellement étendue aux coloriages) tels que $\pi(\mathcal{X}_\tau) = \mathcal{Y}$.

1.4.2 Dénombrement

Étant donné un sous-shift $\mathcal{Y} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, on note $C_\mathcal{Y}(n)$ le nombre de motifs carrés $n \times n$ de son langage. Autrement dit, si $\mathcal{L}_\mathcal{Y}^{n\times n}$ désigne l'ensemble des motifs $n \times n$ du langage de $\mathcal{Y}$, on a $C_\mathcal{Y}(n) = |\mathcal{L}_\mathcal{Y}^{n\times n}|$. On a toujours $C_\mathcal{Y}(n) \leqslant |\Sigma|^{n^2}$.

Lemme 1. *Si $\mathcal{Y}$ est sofique bi-déterministe alors pour tout jeu de tuiles bi-déterministe τ associé, on a $C_\mathcal{Y}(n) \leqslant |\tau|^n$.*

Démonstration. Le jeu étant bi-déterministe, tout carré de tuiles apparaissant dans un pavage est parfaitement déterminé par les tuiles de sa diagonale, ainsi $C_{\mathcal{X}_\tau}(n) \leqslant |\tau|^n$. Or $\mathcal{L}_\mathcal{Y}^{n\times n} = \pi(\mathcal{L}_{\mathcal{X}_\tau}^{n\times n})$ d'où $C_\mathcal{Y}(n) \leqslant C_{\mathcal{X}_\tau}(n) \leqslant |\tau|^n$ ■

Remarque 8 (Contamination d'un plateau). L'exposant n est ici optimal car les règles de déterminisme (quelle que soit la direction) permettent de déterminer une nouvelle tuile à partir de deux tuiles situées sur la même ligne et colonne respectivement. Elles ne permettent en aucun cas d'obtenir une tuile située sur une ligne/colonne qui ne serait pas encore couverte. Il faut dont au moins n tuiles pour couvrir toutes les lignes/colonnes. Les n tuiles diagonales sont suffisantes pour déterminer tout le reste [11].

Lemme 2. *Si $\mathcal{Y}$ est sofique déterministe alors pour tout jeu de tuiles déterministe τ associé, on a $C_\mathcal{Y}(n) \leqslant |\tau|^{2n-1}$.*

11. Ce type d'argument et ses variantes sont bien connus des amateurs de petits puzzles combinatoires [Win04].

Démonstration. Le jeu étant déterministe, tout carré de tuiles apparaissant dans un pavage est parfaitement déterminé par les tuiles de ses deux bords orthogonaux opposés à la direction de déterminisme (si par exemple le jeu est NE-déterministe, le carré est détermininé par ses bords ouest et sud). Cela fait $2n-1$ tuiles (la tuile de l'angle étant commune), ainsi $C_{\mathcal{X}_\tau}(n) \leqslant |\tau|^{2n-1}$. Or $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^{n\times n} = \pi(\mathcal{L}_{\mathcal{X}_\tau}^{n\times n})$ d'où $C_{\mathcal{Y}}(n) \leqslant C_{\mathcal{X}_\tau}(n) \leqslant |\tau|^{2n-1}$ ■

Remarque 9. L'exposant $2n-1$ est ici optimal car les $2n-1$ tuiles des bords en question ne peuvent en aucun cas être obtenues par la règle de déterminisme à partir de la donnée d'autres tuiles du carré, il est donc nécessaire de disposer au moins de la donnée de ces tuiles pour déterminer le carré, et cette donnée est suffisante.

Corollaire 2. *Si $\mathcal{Y}$ est un sous-shift sofique (bi-)déterministe, alors $C_{\mathcal{Y}}(n) = 2^{O(n)}$.*

Le corollaire est immédiat. Sa contraposée donne un résultat de non soficité déterministe.

Exemple 6. Le *full shift* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, vérifiant $C(n) = 2^{n^2}$, n'est pas sofique déterministe. Les *odd shift* et *even shift* de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, respectivement caractérisés par les tailles impaires/paires des composantes 4-connexes de lettres 1, ne sont pas non plus sofiques (découper les carrés en blocs 3×3, resp. 4×4, et choisir $0/1$ pour la valeur centrale, resp. le bloc 2×2 central, donne une palette de motifs du langage de l'ordre de 2^{n^2}).

Une méthode par « réduction de la dimension »

Lorsque le sous-shift dont on interroge la reconnaissance est essentiellement caractérisé par une répartition uni-dimensionnelle de l'information dans l'espace, il est parfois possible de compter plus finement en exploitant une forme de « réduction de la dimension » comme le font Grandjean, Richard et Terrier [GRT12].

Soit F un automate cellulaire d'ensemble d'états Q, partitionné en deux sous-ensembles $Q = Q_0 \sqcup Q_1$. Un *triangle (de calcul)* est la donnée d'un motif initial de Q^* et des applications successives de F sur ce motif. Si le voisinage est de rayon $r \geqslant 1$, la largeur du triangle décroît de r cellules aux deux extémités à chaque nouvelle ligne. Un triangle est *zébré* si les états d'une même ligne appartiennent tous à la même composante Q_0 ou Q_1 de Q. Si h est la hauteur d'un triangle zébré, on appelle *mot de zébrage* le mot $u_1u_2\dots u_h$ où $u_i \in \{0,1\}$ satisfait l'assertion suivante : les états de la i^{e} ligne appartiennent tous à Q_{u_i}. Un automate cellulaire (avec partitionnement donné de ses états) admet un mot de zébrage u s'il existe un triangle de calcul pour cet automate de mot de zébrage u. On note que cette propriété est « stable par facteur » : tout facteur d'un mot de zébrage est encore un mot de zébrage.

Proposition 13 (Grandjean, Richard et Terrier [GRT12]). *Il n'existe pas d'automate cellulaire admettant pour mots de zébrage tous les mots de* $\{0,1\}^*$.

Démonstration. Du fait de la stabilité par facteur, il est suffisant d'examiner des triangles de tailles arbitrairement grandes. On appelle *triangle de rang* n un triangle de base 2^n. À groupage près, on peut supposer que le rayon du voisinage est 1. La hauteur d'un triangle de rang n est alors 2^{n-1}. Pour tout mot u de taille 2^{n-1}, on note $\Delta_n(u)$ le nombre de triangles zébrés de rang n de mot de zébrage u. Tout triangle zébré de rang $n+1$ et de mot de zébrage $u = vw$ avec $|v| = |w| = 2^{n-1}$ est composé à sa base de deux triangles zébrés de rang n et de même mot de zébrage v. Le choix de ces deux triangles de rang n détermine complètement le reste du triangle de rang $n+1$ (mais ce triangle n'est pas nécessairement toujours zébré). On a donc l'inégalité, pour tout u, $|u| = 2^{n-1}$:

$$\sum_{|v|=2^{n-1}} \Delta_{n+1}(uv) \leqslant \Delta_n(u)^2$$

En posant $\delta_n = \min_{|u|=2^{n-1}} \Delta_n(u)$, il existe u tel que :

$$2^{2^{n-1}}\delta_{n+1} \leqslant \sum_{|v|=2^{n-1}} \Delta_{n+1}(uv) \leqslant \Delta_n(u)^2 = \delta_n^2$$

D'où l'on tire :

$$\delta_{n+1} \leqslant \frac{\delta_n^2}{2^{2^{n-1}}}$$

Ce qui implique $\delta_n \to 0$ et donc qu'il existe un rang n pour lequel $\delta_n = 0$. Tout mot de zébrage u correspondant, i.e. tel que $\Delta_n(u) = \delta_n$, n'est donc pas réalisable par l'automate. ■

Cette méthode de dénombrement s'adapte aisément au cas de pavages déterministes. Elle peut également s'appliquer directement à l'automate cellulaire partiel correspondant à la règle locale du pavage.

Corollaire 3. *Le sous-shift sur* $\{0,1\}$ *des diagonales de pente* -1 *n'est pas* NE *sofique.*

Ensembles trompeurs

La notion d'ensemble trompeur (*fooling set*) provient de la complexité de communication [KN97] et est importée en dynamique symbolique par Jeandel [Jea11] afin d'en tirer des conditions nécessaires de soficité et ainsi d'en faire un outil permettant d'obtenir des résultats négatifs. Ces idées ne sont ici exploitées qu'*a minima* du fait du caractère infini des pavages qui pose problème à des outils usuellement utilisés dans le cadre de protocoles

de communication fini dans lesquels les quantités d'information échangées sont également finies [12].

Pour tout domaine $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ et tous coloriages $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, on note $x \ltimes_S y$ le coloriage coïncidant avec x sur S et avec y sur son complémentaire.

Définition 35 (Ensemble trompeur)**.** Pour tout sous-shift $\mathcal{Y}$, on appelle *ensemble trompeur* de domaine S pour $\mathcal{Y}$ toute partie $U \subseteq \mathcal{Y}$ telle que pour tous $x, y \in U$, soit $x \ltimes_S y \notin \mathcal{Y}$, soit $y \ltimes_S x \notin \mathcal{Y}$.

On notera que si U est un ensemble trompeur de support S, alors pour tout $u \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma_u(U)$ est un ensemble trompeur de support $\sigma_u(S)$.

Proposition 14 (Jeandel [Jea11])**.** *Si $\mathcal{Y}$ est un sous-shift sofique et U un ensemble trompeur de support $S = [0, n] \times [0, m]$, alors pour tout jeu de tuiles τ associé, on a $|U| \leqslant |\tau|^{2(n+m)}$.*

Démonstration. Soit $U = \{u_i\}_{i \in I}$ un tel ensemble trompeur et τ un tel jeu de tuiles. Pour tout $u_i \in U$, il existe (au moins) un $x_i \in \mathcal{X}_\tau$ tel que $\pi(x_i) = u_i$. On note B le bord de S, qui contient $2(n + m)$ cases. Si $x_i \neq x_j$ coïncident sur B, alors comme B isole complètement son intérieur de l'extérieur du point de vue des règles de voisinage des tuiles de Wang, on a $x_i \ltimes_S x_j \in \mathcal{X}_\tau$ et $x_j \ltimes x_i \in \mathcal{X}_\tau$. Or $\pi(x \ltimes y) = \pi(x) \ltimes \pi(y)$ et $\pi(\mathcal{X}_\tau) = \mathcal{Y}$, d'où l'on déduit que $u_i \ltimes_S u_j \in \mathcal{Y}$ et $u_j \ltimes_S u_i \in \mathcal{Y}$, ce qui contredit le fait que U soit trompeur. Donc tous les x_i sont distincts sur B, d'où l'on déduit $|U| = |\{x_i\}_{i \in I}| \leqslant |\tau|^{|B|} = |\tau|^{2(n+m)}$. ■

Corollaire 4. *Si $\mathcal{Y}$ est un sous-shift sofique, alors il existe une constante δ telle que pour tout $n \geqslant 1$ et tout ensemble trompeur U de support $[0, n]^2$, $|U| \leqslant \delta^n$.*

Dans le cadre déterministe, on obtient les variantes suivantes.

Proposition 15. *Si $\mathcal{Y}$ est un sous-shift sofique bi-déterministe et U un ensemble trompeur de support carré $n \times n$, alors pour tout jeu de tuiles bi-déterministe τ associé, on a $|U| \leqslant |\tau|^n$.*

Proposition 16. *Si $\mathcal{Y}$ est un sous-shift sofique déterministe et U un ensemble trompeur de support rectangle $n \times m$, alors pour tout jeu de tuiles déterministe τ associé, on a $|U| \leqslant |\tau|^{n+m-1}$.*

1.4.3 Un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe

Dans cette section, nous allons construire une version déterministe du jeu apériodique τ_{104} de Ollinger [Oll08b].

12. Jeandel a récemment exploité de façon plus fine les outils de complexité de communication dans [Jea14], on ignore l'apport éventuel de ces méthodes raffinées dans le cadre déterministe.

Bi-déterminisation

Il est très simple de déterminiser le jeu τ_{104} dans deux directions opposées et nous allons le faire afin d'illustrer cette technique qui est essentiellement la même que celle employée par Kari [Kar92] afin de rendre le jeu de Robinson déterministe. Cette construction ne sera néanmoins pas utile pour la déterminisation dans les quatre directions qui suivra.

On remarque que, quelle que soit la direction de déterminisme, la production de tuiles des types ◪, ◩ et ◪ est toujours déterministe. Seul le cas des tuiles ◪ pose problème. Sur une telle position ◪, une tuile X est bien forcée de manière déterministe par les chevrons. En revanche, dans les autres cas, on ne sait pas choisir entre une tuile H et une tuile V. Le lemme suivant va permettre de trancher.

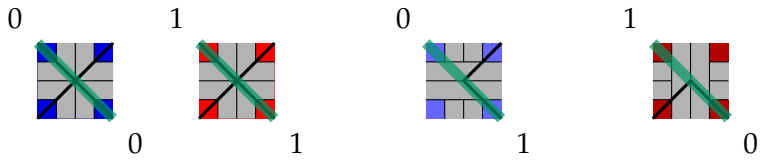
Lemme 3. *La séquence des H et V apparaissant sur toute diagonale (éventuellement séparés par des X) d'un pavage (en fait, de tout coloriage de l'ensemble limite de la substitution s_{104}, l'ensemble des pavages étant inclus dans cet ensemble) est alternée.*

Démonstration. Peu importe l'orientation des diagonales considérées (SO–NE ou NO–SE), on distingue deux types de diagonales : celles composées de tuiles des types ◪ et ◩ et celles composées de tuiles des types ◪ et ◪. Les premières sont, par définition de s_{104}, toujours constituées d'une alternance de H et V (sans X).

Dans le cas des diagonales de type ◪–◪, les positions ◪ sont toujours occupées par des X, les autres positions ◪ peuvent en revanche être occupées aussi bien par des X, H ou V. Il s'agit de montrer qu'il y a bien alternance de H et V à ces positions.

Remarquons tout d'abord que l'application de la substitution s_{104} sur une configuration vérifiant la propriété d'alternance préserve cette alternance. Dès lors, dans tout antécédent d'une configuration violant l'alternance, où l'on trouve par exemple deux H successifs sur une diagonale séparés par une séquence ◪,◪,◪,◪,...,◪,◪ (impaire de taille $2n+1$) de X, un (l'unique) antécédent de la configuration par s_{104} viole cette même alternance, mais comporte cette fois deux H successifs séparés par seulement n X. Appliquer cet argument à la configuration contenant le plus petit écart entre deux H ou V successifs conduit à une absurdité. L'ensemble limite de la substitution s_{104} (et *a fortiori* l'ensemble des pavages) ne contient donc que des configurations vérifiant la propriété d'alternance. ■

En utilisant un marquage diagonal sur les tuiles faisant passer un bit de 0 à 1 sur un H, de 1 à 0 sur un V et laissant le bit identique sur les X, comme représenté sur la figure 1.30, on obtient en appliquant un groupage 1×2 (ou 2×1 qui convient également) un jeu déterministe τ°_{104} dans les deux directions SE et NO.



(a) tuiles X (b) tuiles H (c) tuiles V

FIGURE 1.30 – Marquage diagonal

Proposition 17. *Le jeu τ_{104}° est* SE *et* NO *déterministe.*

Démonstration. Le bit sur la tuile voisine en diagonale (t_{SE} ou t_{NO} selon la direction de déterminisme choisie) force la décision entre une tuile V et une tuile H sur la parité ⊞. ■

De plus, le lemme 3 nous assure que, pour $\pi : \tau_{104}^{\circ} \to \tau_{104}$ la projection qui retire les marquages diagonaux des tuiles, on a $\mathcal{X}_{\tau_{104}} = \pi(\mathcal{X}_{\tau_{104}^{\circ}})$.

Remarque 10. Rien n'interdit *a priori* une diagonale ne comportant que des X dans un pavage. Sur une telle diagonale, le choix du marquage diagonal (0–0 ou 1–1) est libre. C'est pourquoi les deux ensembles $\mathcal{X}_{\tau_{104}}$ et $\mathcal{X}_{\tau_{104}^{\circ}}$ ne sont pas en bijection.

Remarque 11. En ajoutant le même marquage sur l'autre diagonale des tuiles, on obtient un jeu qui n'est absolument pas déterministe dans les quatre directions car on ne sait pas déterminer, dans le cas d'un X, le marquage, parmi 0–0 ou 1–1, de la diagonale orthogonale à la direction de déterminisme choisie.

4-way déterminisation

Le jeu de tuiles τ_{104} n'est déterministe dans aucune direction : la raison à cela est qu'il n'est pas possible de déterminer lequel des types de la deuxième couche parmi H ou V doit être choisi lorsque l'on produit une tuile de parité ⊞. Il est nécessaire d'enrichir la construction afin de disposer de cette information aux endroits où elle est requise.

Nous utiliserons de façon complémentaire les notations ¬, ⌜, ⌟, ⌞ afin de désigner les câbles en positions SO, SE, NO et NE respectivement sur une tuile dont la deuxième couche est une croix X.

On définit un alphabet d'*étiquettes* $\mathcal{L} = \{\mathsf{X}, \mathsf{H}, \mathsf{V}\}$ et l'on associe à chaque câble de la deuxième couche une étiquette de l'ensemble $\boxplus \times \mathcal{L}$ (et non plus seulement ⊞). La règle locale peut être étendue de façon à ce que les étiquettes de $\mathcal{L}$ soient préservées (tout comme les couleurs de ⊞ jusque là) tout le long d'un même câble. On observe que toute tuile t de parité ⊞ est directement entourée par un câble sur la deuxième couche de ses huit voisines comme l'illustre la figure 1.31. On peut alors facilement enrichir les règles

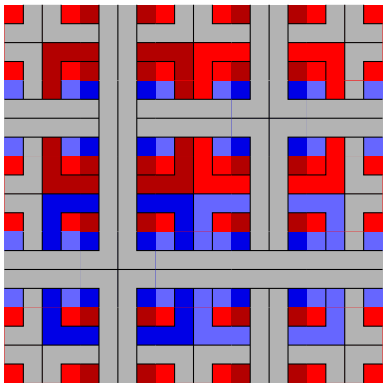


FIGURE 1.31 – Encerclements des tuiles de parité SO

locales relatives aux quatre voisines directes de manière à ce que cette étiquette corresponde au type de la tuile t :

— si t est une croix, l'étiquette doit être X ;
— si t est un pont horizontal, l'étiquette doit être H ;
— si t est un pont vertical, l'étiquette doit être V.

On remarquera pour commencer que la structure substitutive des pavages force déjà les tuiles de parité ⊞ directement encerclées par un câble de couleur ⊞, ⊞ et ⊞ à être un pont horizontal, un pont vertical et une croix respectivement. Ainsi l'étiquette ajoutée n'est en réalité nécessaire que pour les câbles de couleur ⊞ puisque les autres couples couleur-étiquette apparaissant dans un pavages ne peuvent qu'être (⊞, H), (⊞, V) et (⊞, X).

Ces nouvelles étiquettes et règles locales associées forcent le choix entre les types H et V sur la deuxième couche des tuiles de parité ⊞. Toutefois, la production des étiquettes sur les câbles de couleur ⊞ n'est malheureusement pas elle-même déterministe : par exemple, lorsque la direction de déterminisme considérée est NE, l'étiquette portée par le cable en position ⌞ d'une tuile de type X n'est pas déterminée lorsque ce câble est de couleur ⊞. Cette information peut uniquement être obtenue en remontant suffisamment en arrière dans l'historique du coloriage codé par le pavage. Dans ce but, on ajoute des *fils* tels que ceux représentés sur la figure 1.32, transportant une étiquette de $\mathcal{L}$. Ces nouveaux fils doivent partir de chaque coin d'un carré de couleur ⊞, comme le montre la figure 1.33(a), et suivre les câbles de couleur ⊞, comme sur les figures 1.33(c) et 1.33(d), jusqu'à atteindre un câble orthogonal de niveau supérieur, comme indiqué par les figures 1.33(b) et 1.33(d). Les tuiles recevant ces nouvelles décorations sont ainsi parfaitement identifiées. Les nouvelles règles locales associées peuvent s'exprimer ainsi :

— l'étiquette transportée par un fil doit être préservée tout du long de ce dernier ;
— aux deux extrémités d'un fil, l'étiquette doit correspondre à celles

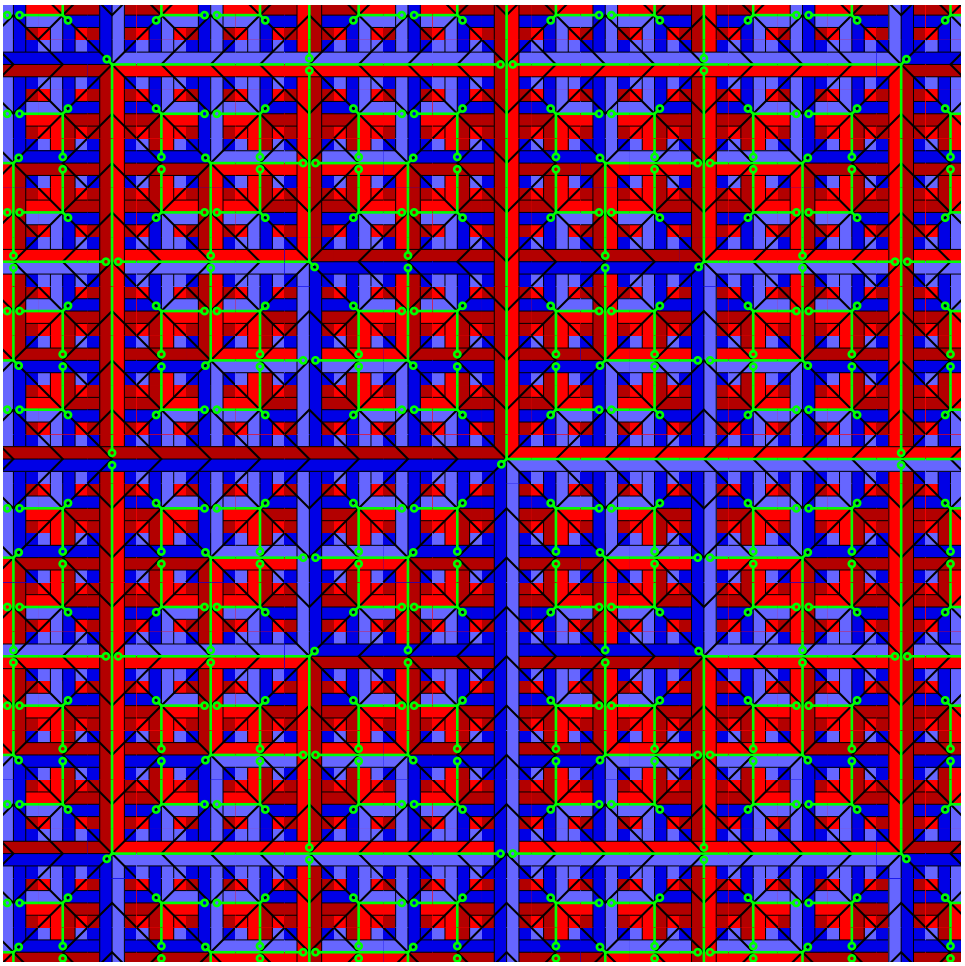


FIGURE 1.32 – Motif d'un pavage par $\tau^{\bullet}_{104}$

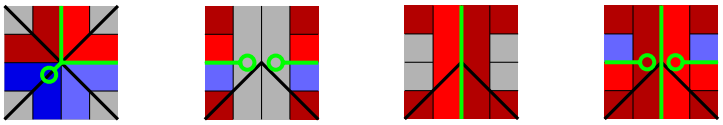
portées par les câbles auxquels ce dernier est connecté.

On dénote par $\tau^{\bullet}_{104}$ le jeu ainsi construit. Un motif de pavage par ce jeu est représenté sur la figure 1.32. La preuve du résultat suivant est essentiellement une vérification exhaustive sur le jeu de tuiles $\tau^{\bullet}_{104}$.

Théorème 20. *$\tau^{\bullet}_{104}$ est un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe.*

Schéma de preuve. $\tau^{\bullet}_{104}$ ne peut pas paver le plan de manière périodique car il n'est pas difficile de voir qu'il peut se projeter sur τ qui est apériodique. La substitution s_{104} peut naturellement être enrichie en une substitution sur $\tau^{\bullet}_{104}$ qui peut être itérée afin d'engendrer des motifs carrés valides de taille arbitrairement grande par $\tau^{\bullet}_{104}$, assurant ainsi par un argument de compacité l'existence d'un pavage du plan discret par $\tau^{\bullet}_{104}$.

Montrer que $\tau^{\bullet}_{104}$ est 4-way déterministe relève d'une vérification exhaustive du jeu de tuiles. Il devrait être clair que τ_{104} a été enrichi dans ce



(a) départ (b) fin (c) fil (d) fil & fin

FIGURE 1.33 – Tuiles portant les nouveaux fils dans $\tau_{104}^{\bullet}$

but. ■

Remarque 12. On peut observer que sur le jeu obtenu, la troisième couche (chevrons) de τ_{104} n'a plus d'utilité, l'information qu'elle véhicule étant en réalité superflue compte tenu des câbles ajoutés. Bien que conçu indépendamment et adoptant une présentation différente, la structure du jeu (sans sa troisième couche) peut être intégralement traduite (couche par couche, câble par câble, étiquette par étiquette) vers la construction de Kari et Papasoglu [KP99] et réciproquement. Les deux jeux se trouvent être isomorphes (ou du moins, à des détails dans les choix de construction près, on peut les rendre parfaitement isomorphes). Cela n'est en réalité pas particulièrement surprenant étant donné la proximité initiale des jeux de Robinson et Ollinger.

Chapitre 2

Le problème du pavage périodique

Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [LG14].

Les problème du pavage périodique, introduit au cours du chapitre 1, est l'une des variantes les plus naturelles et complémentaires du problème du pavage. La question de la décidabilité de ce problème, abordée par Mazoyer et Rapaport [MR99] dans le cadre déterministe dans une direction afin de traiter le problème de la nilpotence des automates cellulaires unidimensionnels, restait ouverte dans le cadre 4-way déterministe. Nous montrons ici que ce problème reste indécidable dans le cadre 4-way déterministe, complétant ainsi le résultat d'indécidabilité du problème du pavage établi dans ce cadre par Lukkarila [Luk09].

Au regard de la littérature, une stratégie pouvant apparaître naturelle dans l'espoir d'obtenir un tel résultat serait de modifier une construction existante pour le problème du pavage afin de l'adapter au problème du pavage périodique. C'est la méthode originellement adoptée par Gurevitch et Koryakov [GK72] dans le but de démontrer l'indécidabilité du problème du pavage périodique dans le cadre général des tuiles de Wang (sans déterminisme) par quelques variations légères de la construction de Berger [Ber64] pour le problème du pavage. C'est aussi la technique utilisée par Allauzen et Durand [AD01] en se basant cette fois sur la construction de Robinson [Rob71]. Néanmoins, le déterminisme est une propriété de très « bas niveau », c'est-à-dire essentiellement syntaxique, des jeux de tuiles et le processus de déterminisation d'un jeu en requiert de fait une connaissance exhaustive et une compréhension parfaite au niveau des tuiles elles-mêmes afin de pouvoir traiter avec la précaution nécessaire les différents problèmes de non déterminisme auquel on peut être confronté. En lieu et place d'une

modification attendue de la construction de Lukkarila, on s'inspirera plutôt ici de l'idée générale d'une nouvelle technique de preuve introduite récemment par Jeandel [Jea10] qui permet de montrer l'indécidabilité du problème du pavage périodique de façon assez élémentaire et extrêmement élégante [1]. La particularité de cette nouvelle technique, qui ne repose plus sur une construction pour le problème du pavage, est de ne nécessiter au préalable que la simple existence d'un jeu de tuiles apériodique, sans aucune connaissance sur la construction de ce jeu ou la structure des pavages qu'il engendre. L'utilisation de cette technique de preuve nous assurera ici une présentation d'assez « haut niveau » et nous préservera d'un grand nombre de considérations techniques ennuyeuses, en particulier en permettant une construction segmentée par couches dont la structure est élémentaire. Certains aspects techniques sont en réalité cachés au sein de la simulation 4-way déterministe de machine de Turing de Lukkarila [Luk09] que nous utiliserons comme ingrédient pour notre construction mais seules quelques connaissances techniques superficielles sur ce jeu seront en réalité nécessaires afin de mener la preuve à son terme.

Précisons que la technique de preuve introduite par Jeandel avait initialement pour but de permettre, modulo une construction un peu plus élaborée, l'obtention d'un résultat précis de caractérisation des ensembles de périodes des pavages par un jeu de tuiles. Ce résultat de Jeandel et Vanier [JV10] semble techniquement plus complexe à adapter dans le cadre 4-way déterministe. En relâchant certaines des contraintes de la construction que nous présentons ici afin de rendre la structure faisant office de squelette de calcul plus souple tout en conservant le 4-way déterministes, certaines hypothèses additionnelles restent nécessaires sur les machines de Turing simulées et rendent problématique la caractérisation précise des périodes des pavages par les jeux de tuiles 4-way déterministes.

Dans ce chapitre, tous les jeux de tuiles considérés sont 4-way déterministes. Nous utiliserons le fait suivant parfois sans même le mentionner : il est clair (cela découle des définitions) que tout sous-ensemble d'un jeu de tuiles 4-way déterministe est lui-même 4-way déterministe.

2.1 Une transformation sur les jeux de tuiles

Au cours de la construction qui suit, nous allons utiliser plusieurs transformations ou opérations sur les jeux de tuiles, ces transformations devant toutes préserver le 4-way déterminisme. Les groupages et produits ont déjà

1. Ceci étant dit, certaines des techniques que nous introduisons dans ce chapitre, en particulier les lignes miroir, semblent tout à fait pouvoir s'injecter dans la construction de Lukkarila afin d'en dériver une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage périodique. La technicité d'une telle construction reste cependant nettement plus importante que celle de la preuve que nous présentons ici.

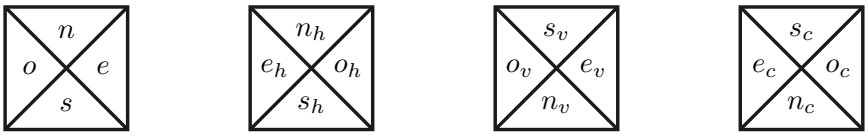


FIGURE 2.1 – Une tuile de τ et les tuiles correspondantes dans $\overline{\tau}^h$, $\overline{\tau}^v$ et $\overline{\tau}^c$

été introduits lors du chapitre précédent. Il n'est pas difficile d'observer que ces deux transformations préservent le 4-way déterminisme. Dans cette section préliminaire et afin de fixer les notations, nous définissons simplement une nouvelle transformation syntaxique extrêmement simple sur les jeux de tuiles qui a pour propriété de préserver le déterminisme. Cette transformation sera très utile au cours de notre construction.

Miroir disjoint Étant donné un jeu de tuiles τ d'ensemble de couleurs $\mathcal{C}$, le jeu de tuiles *miroir horizontal disjoint* de τ est le jeu $\overline{\tau}^h$ obtenu en dupliquant toutes les couleurs et en échangeant les couleurs ouest et est des tuiles de τ. Plus formellement, on créé une copie disjointe $\mathcal{C}_h$ of $\mathcal{C}$, dont les couleurs sont notées a_h pour chaque $a \in \mathcal{C}$, et l'on pose $\overline{\tau}^h = \{(e_h, s_h, o_h, n_h) \in \mathcal{C}_h^4,\ (o, s, e, n) \in \tau\}$. On définit symétriquement le *miroir vertical disjoint* $\overline{\tau_a}^v$ d'ensemble de couleurs une copie disjointe $\mathcal{C}_v$ de $\mathcal{C}$ (dont les couleurs sont notées a_v pour chaque $a \in \mathcal{C}$) en posant $\overline{\tau}^v = \{(o_v, n_v, e_v, s_v) \in \mathcal{C}_v^4, (o, s, e, n) \in \tau\}$. On définit enfin le *miroir central disjoint* $\overline{\tau}^c$ d'ensemble de couleurs une copie disjointe $\mathcal{C}_c$ de $\mathcal{C}$ (dont les couleurs sont notées a_c pour chaque $a \in \mathcal{C}$) par $\overline{\tau}^c = \{(e_c, n_c, o_c, s_c) \in \mathcal{C}_v^4,\ (o, s, e, n) \in \tau\}$. Cette dernière transformation correspond à la composition des deux précédentes (et ainsi à une symétrie centrale sur les tuiles). Ces trois définitions sont illustrées par la figure 2.1.

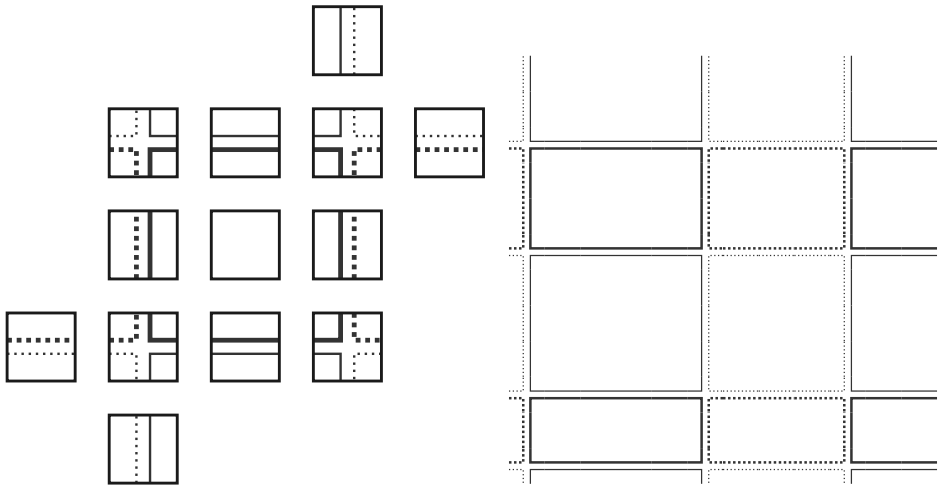
Il est clair que si un jeu τ est 4-way déterministe, chacun de ses miroirs disjoints l'est également (bien que certaines directions de déterminisme soient échangées par la transformation). Leurs ensembles de couleurs respectifs étant disjoints, toute union (disjointe) d'un jeu de tuiles 4-way déterministe avec un certain nombre de ses miroirs disjoints est 4-way déterministe. En particulier $\tau \sqcup \overline{\tau}^h \sqcup \overline{\tau}^v \sqcup \overline{\tau}^c$ est 4-way déterministe.

2.2 La construction déterministe

Dans cette section, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 21. *Le problème du pavage périodique restreint aux jeux de tuiles 4-way déterministes est indécidable.*

On procède par réduction du problème de l'arrêt des machines de Turing depuis l'entrée vide. Les deux problèmes considérés sont récursivement énumérables. Étant donnée une machine de Turing M, on construit



(a) Jeu de tuiles τ_g (b) Un pavage typique par τ_g

FIGURE 2.2 – Description du jeu de tuiles τ_g

un jeu de tuiles 4-way déterministe qui admettra toujours des pavages non périodiques (dont certains ne contiennent même pas de calcul Turing) mais n'admettra en revanche de pavages périodiques qu'exactement lorsque la machine M s'arrête depuis l'entrée vide.

Le jeu de tuiles construit est un produit synchronisé de plusieurs couches, chacune étant 4-way déterministe.

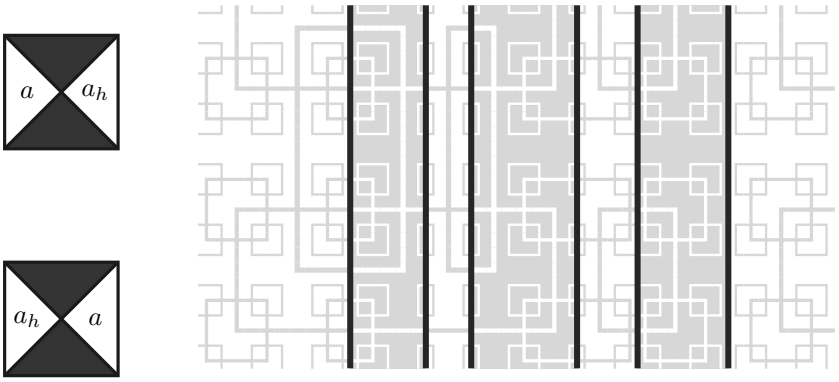
2.2.1 Première couche : grille de parité

La première couche que l'on considère est un jeu de tuiles τ_g qui permet de dessiner une grille (sans aucune contrainte de régularité). Les tuiles en sont représentées sur la figure 2.2(a). Le jeu dessine quatre types de rectangles sur la grille selon les parités horizontales et verticales. Il y a ainsi 4 tuiles en croix, 4 tuiles de lignes horizontales, 4 tuiles de lignes verticales et une tuile blanche, toutes aisément identifiables sur la figure 2.2(a). Un pavage typique par le jeu τ_g est représenté sur la figure 2.2(b). On notera qu'un pavage par τ_g peut dessiner une grille contenant des rectangles arbitrairement grands, éventuellement infinis dans les cas dégénérés, ou même pas de rectangle du tout dans le cas particulier du pavage intégralement blanc.

Un simple examen des tuiles nous assure ce qui suit.

Lemme 4. *Le jeu de tuiles τ_g est 4-way déterministe.*

La parité nous sera utile plus tard lors de l'intégration de la simulation de machine de Turing au jeu. Lors de la prochaine étape de la construction, nous ne tiendrons pas compte de cet aspect du jeu de tuiles de la première couche.



(a) Tuiles de lignes miroirs verticales de $\mathcal{M}_v$ ($\forall a \in \mathcal{C}$)

(b) Un pavage typique par τ_a^h

FIGURE 2.3 – Éléments de description du jeu de tuiles τ_a^h

2.2.2 Deuxième et troisième couches : jeu apériodique avec lignes miroirs

On ajoute ici quelques contraintes sur les tuiles de τ_g de façon à contrôler la structures de pavages périodiques qu'il sera possible de former. Considérons tous d'abord un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe τ_a d'ensemble de couleurs $\mathcal{C}$. Nous avons présenté de tels jeux dans le chapitre 1. Il est important de remarquer que nous n'aurons besoin ici d'aucune connaissance sur la façon dont ce jeu est construit ni sur la structure de l'ensemble de ses pavages, les seules propriétés requises sont le 4-way déterminisme et l'apériodicité. Considérons le miroir horizontal disjoint $\overline{\tau_a}^h$ du jeu de tuiles τ_a d'ensemble de couleurs $\mathcal{C}_h$ une copie disjointe de $\mathcal{C}$. Il est clair par construction que $\overline{\tau_a}^h$ est apériodique. Introduisons également un jeu de tuiles afin de former des lignes miroirs verticales en introduisant une nouvelle couleur $\# \notin \mathcal{C} \sqcup \mathcal{C}_h$ et en posant $\mathcal{M}_v = \{(a, \#, a_h, \#)$ et $(a_h, \#, a, \#), a \in \mathcal{C}\}$ comme décrit sur la figure 2.3(a) (où la couleur $\#$ apparaît en noir). On définit alors le jeu de tuiles τ_h comme l'union disjointe des trois jeux de tuiles considérés jusqu'alors : $\tau_h = \tau_a \sqcup \overline{\tau_a}^h \sqcup \mathcal{M}_v$.

Un pavage typique par τ_h est représenté sur la figure 2.3(b). Du fait de l'ajout des lignes miroirs, ce jeu n'est plus apériodique.

Puisque τ_a est 4-way déterministe, $\overline{\tau_a}^h$ l'est également. Leurs ensembles de couleurs étant disjoints, $\tau_a \sqcup \overline{\tau_a}^h$ est 4-way déterministe. Le jeu de tuiles $\mathcal{M}_v$ est aussi 4-way déterministe car les couleurs apparaissant de part et d'autre d'une ligne miroir sont exactement déterminées l'une par l'autre. La couleur $\#$ introduite dans $\mathcal{M}_v$ étant nouvelle, τ_h est à son tour 4-way déterministe.

Définissons maintenant le jeu de tuiles à deux couches τ_1 comme le sous-ensemble de $\tau_g \times \tau_h$ vérifiant les restrictions suivantes sur les tuiles : une ligne miroir de $\mathcal{M}_v$ apparaît sur la deuxième couche si et seulement si elle est couplée avec une ligne verticale ou une croix de la grille de la première couche (tuiles de τ_g).

Lemme 5. *τ_1 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *τ_1 est 4-way déterministe.*
2. *Tout pavage par τ_1 horizontalement périodique contient une ligne miroir verticale. Dès lors, par périodicité, il en contient une infinité (et la distance séparant deux lignes consécutives est bornée).*

Démonstration. Le premier point est clair car τ_1 est un sous-ensemble d'un produit de jeux de tuiles 4-way déterministes.

Pour le second point, si un tel pavage ne contient aucune ligne miroir verticale, alors sa seconde couche doit être un pavage par l'un des jeux de tuiles apériodiques τ_a ou $\overline{\tau_a}^h$. Il ne saurait dès lors être périodique, ce qui constitue une contradiction. ■

On enrichit maintenant le jeu de tuiles précédent en construisant, de manière parfaitement symétrique à ce que nous venons de faire [2], la contrepartie verticale τ_v de τ_h et l'on définit le jeu de tuiles à trois couches τ_2 comme le sous-ensemble de $\tau_1 \times \tau_v$ (τ_1 comportant deux couches, on considèrera ici les tuiles de τ_v comme une troisième couche) vérifiant les restrictions suivantes sur les tuiles : une ligne miroir horizontale apparaît sur la troisième couche si et seulement si elle est couplée avec une ligne horizontales ou une croix de la grille de la première couche (tuiles de τ_g). On observera qu'en conséquence, une ligne miroir verticale de la deuxième couche est couplées avec une ligne miroir horizontale de la troisième couche si et seulement si la première couche porte une croix de la grille.

Lemme 6. *τ_2 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *τ_2 est 4-way déterministe.*
2. *Tout pavage bi-périodique par τ_2 porte une grille, dont la taille des rectangles est bornée, sur sa première couche.*

Démonstration. Le premier point est clair car τ_2 est un sous-ensemble d'un produit de jeux de tuiles 4-way déterministes.

Le second point est une conséquence directe de l'argument du lemme 5 (point 2) appliqué à la fois horizontalement (comme sur τ_1, du fait de τ_h) et verticalement (du fait de τ_v), ainsi que des restrictions sur les tuiles dans les produits (lignes miroirs verticales/horizontales couplées avec les lignes verticales/horizontales de la grille de la première couche). ■

2. Les deux étapes auraient aussi bien pu être réalisées simultanément en combinant directement les quatre jeux miroirs de τ_a. Nous pensons néanmoins que la présentation choisie en deux étapes est à la fois plus légère et agréable.

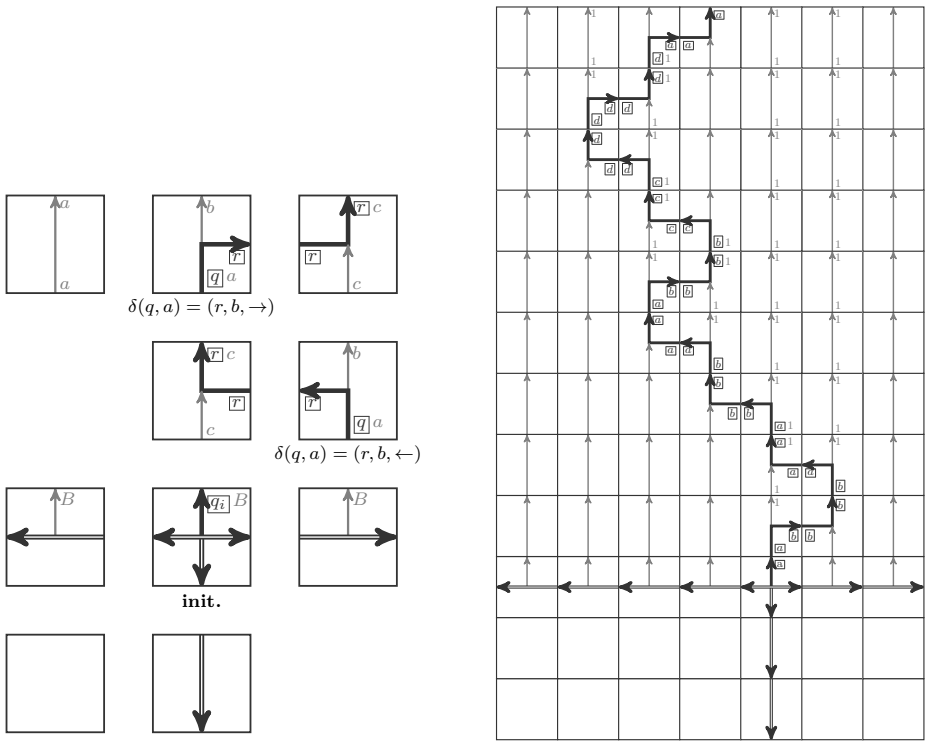
2.2.3 Quatrième couche : calcul Turing

Nous considérons ici le jeu de tuiles 4-way déterministe construit par Lukkarila dans [Luk09] (section 5, théorème 6) afin de simuler de façon 4-way déterministe n'importe quelle machine de Turing dans les pavages. Ce jeu de tuiles est utilisé afin de démontrer l'indécidabilité du problème du pavage avec tuile initiale dans le cadre 4-way déterministe, problème dont il a été question dans le chapitre précédent. Il est essentiellement plus simple de traiter ce problème que le problème du pavage en toute généralité car la tuile initiale peut être utilisée afin d'initialiser convenablement un ruban vide de machine de Turing contenant exactement une tête de lecture. On rappelle que ce jeu de tuiles est un sous-ensemble d'un produit de plusieurs couches, l'une d'entre-elles (la première dans [Luk09], section 5.2) étant une simulation classique de machine de Turing (dont la tête bouge à chaque transition) sous forme de tuiles de Wang. Les tuiles de cette couche sont représentées sur la figure 2.4(a) (où q_i désigne l'état initial et B la lettre blanche de l'alphabet du ruban). Un tel jeu de tuiles n'est bien sûr pas 4-way déterministe en soi : l'une des difficultés surmontées dans [Luk09] est sa déterminisation complète en le couplant avec une structure particulière (et complexe) sur les autres couches). Le jeu de tuiles construit dessine le diagramme espace-temps de la machine dans les pavages contenant la tuile initiale, comme cela est illustré par la figure 2.4(b). Les lignes du pavages réalisent les transitions, chaque ligne du diagramme de la machine doit être lue à la frontière entre deux lignes consécutives du pavage.

Considérons une machine de Turing M et le jeu de simulation 4-way déterministe associé τ_M dont l'unique tuile initiale sera notée t_0 (la couche de simulation de cette tuile porte la tuile initiale indiquée sur la figure 2.4(a)). On notera $F \subseteq \tau_M$ l'ensemble des tuiles de τ_M dont la couche de simulation transmet un état final de M de sa couleur est ou ouest vers sa couleur nord [3]. Les tuiles de F marquent exactement la fin de la simulation du calcul Turing. On observera qu'un pavage du plan discret ne peut contenir à la fois la tuile initiale t_0 et une tuile de F. En effet, supposons qu'aucune transition partant d'un état final ne soit définie dans la table de transition de la machine (ce qui est la convention usuelle), alors il n'existe pas de tuile de transition dans le jeu portant un état final dans sa couleur sud. Ainsi la ligne située directement au-dessus de la ligne contenant une tuile de F ne peut être pavée sans faire apparaître d'erreur.

Posons $\mathcal{C}$ l'ensemble de couleurs de τ_M et considérons maintenant les trois jeux miroirs disjoint de τ_M, notés $\overline{\tau_M}^h$, $\overline{\tau_M}^v$, $\overline{\tau_M}^c$, d'ensembles de couleurs respectifs $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}_v$, $\mathcal{C}_c$ (trois copies disjointes de $\mathcal{C}$). On assemble ces quatre jeux en introduisant une modification $\mathcal{G}_M$ de la grille τ_g de la pre-

3. En réalité, nous imposerons en fin de construction des contraintes sur les machines simulées ne rendant utiles dans F que les tuiles transmettant l'état final de la couleur ouest vers la couleur nord.



(a) Jeu de tuiles (b) Pavage avec la tuile initiale

FIGURE 2.4 – Couche de calcul de τ_M

mière couche dont les tuiles sont décrites par la figure 2.5. La contrainte suivante sur $\mathcal{G}_M$ est cruciale pour le résultat final et ne peut être lue sur la figure : toute couleur de τ_M (et ses miroirs) peut apparaît le long des lignes de la grille de τ_M **à l'exception des** couleurs horizontales contenant un état de la machine, ces dernières ne pouvant pas apparaître le long des lignes verticales de la grille. Le but de cette restriction alphabétique est d'interdire à une tête de machine de Turing de quitter son rectangle et du même coup d'interdire à toute autre tête de machine de Turing d'apparaître de façon inattendue (en cours de calcul) au sein d'un rectangle. Les lignes de la grille de $\mathcal{G}_M$ jouant le rôle de lignes miroir pour les couleurs des quatre jeux de tuiles miroirs de τ_M, $\mathcal{G}_M$ est clairement 4-way déterministe. On définit alors $\tau'_M = \tau_M \sqcup \overline{\tau_M}^h \sqcup \overline{\tau_M}^v \sqcup \overline{\tau_M}^c \sqcup \mathcal{G}_M$. Comme les couleurs associées aux lignes de la grille de $\mathcal{G}_M$ n'apparaissent dans aucun des quatre jeux de tuiles miroirs de τ_M, il n'est pas difficile de voir que τ'_M est 4-way déterministe. Les pavages par τ'_M sont de simples grilles, similaires à celles de τ_g, contenant des motifs par chacun des quatre miroirs considérés de τ_M dans chacun des quatre types de rectangles, avec synchronisation des couleurs de bordure de ces motifs de part et d'autre des lignes miroir.

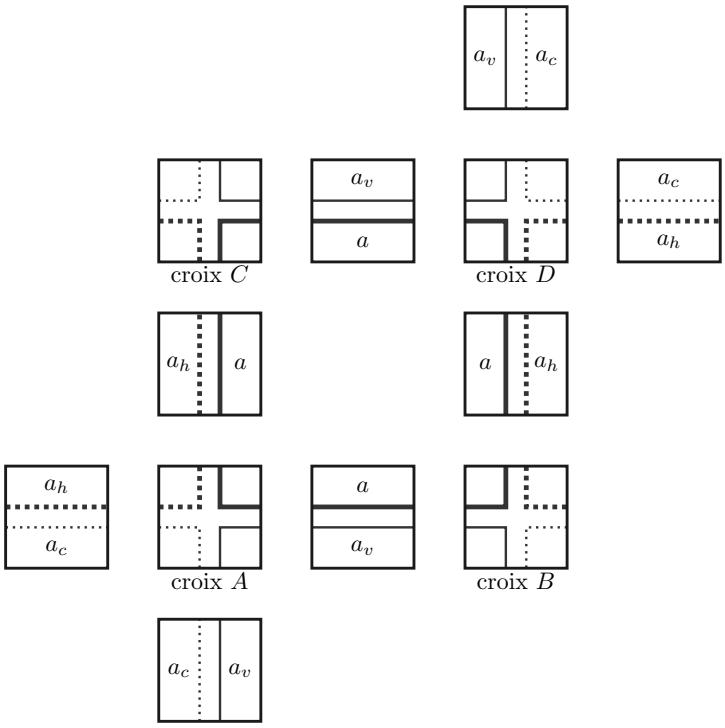


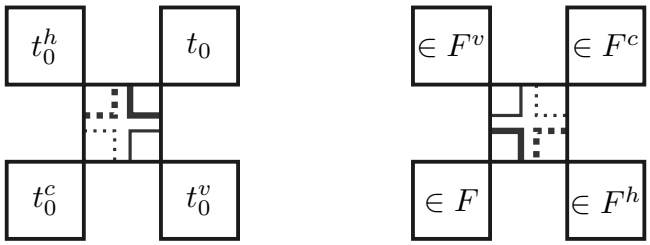
FIGURE 2.5 – Jeu de tuiles $\mathcal{G}_M$ ($\forall a \in \mathcal{C}$, à l'exception des états de la machine dans les couleurs horizontales)

Il est temps d'intégrer le jeu τ'_M à notre construction précédente τ_2 en définissant le jeu de tuiles à quatre couches τ_3 comme le sous-ensemble de $\tau_2 \times \tau'_M$ vérifiant les restrictions suivantes sur les tuiles [4] : une tuile de $\mathcal{G}_M$ apparaît sur la quatrième couche d'une tuile de τ_3 si et seulement si la tuile correspondante de τ_g (i.e. la tuile obtenue en remplaçant toutes les couleurs de $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{C}_h \sqcup \mathcal{C}_v \sqcup \mathcal{C}_c$ par la couleur blanche de τ_g) apparaît sur la première couche. Il en découle qu'une tuile de $\tau_M \sqcup \overline{\tau_M}^h \sqcup \overline{\tau_M}^v \sqcup \overline{\tau_M}^c$ apparaît sur la quatrième couche si et seulement si elle est couplée avec la tuile blanche de τ_g sur la première couche.

Lemme 7. *τ_3 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *τ_3 est 4-way déterministe.*
2. *Tout pavage bi-périodique par τ_3 contient une grille sur sa quatrième couche dont les quatre types de rectangles contiennent des motifs finis par chacun des quatre jeux miroir de τ_M.*

4. On observera que l'on aurait aussi bien pu remplacer la première couche τ_g par cette quatrième couche τ'_M, mais on estime ici qu'il est plus simple et plus clair de poursuivre la présentation de la construction de façon incrémentale.



(a) croix A (b) croix D

FIGURE 2.6 – Restrictions alphabétiques sur la quatrième couche du jeu de tuiles groupé τ_4

Démonstration. τ_3 est 4-way déterministe en tant que sous-ensemble du produit des jeux de tuiles 4-way déterministes τ_2 et τ'_M.

D'après le lemme 6 (point 2), la première couche de tout pavage bipériodique par τ_3 est une grille de rectangles finis. Cette grille étant couplée avec celle de la quatrième couche de τ_3, cette couche contient une grille de rectangles finis. Par construction de τ'_M, chacun des quatre types de rectangles contient un motif fini par le jeu de tuiles miroir de τ_M associé. On notera cependant que presque tous les motifs peuvent apparaître pourvu qu'ils soient correctement symétrisés le long des lignes de la grille (et qu'aucun état de la machine de Turing ne figure parmi les couleurs horizontales apparaissant le long des bordures verticales du motif, du fait de la restriction alphabétique imposée à $\mathcal{G}_M$). ■

Il ne reste plus qu'à forcer la simulation d'un calcul Turing correctement initialisé et terminant au sein des rectangles de la quatrième couche de τ_3. On note t_0^h, t_0^v, t_0^c et F^h, F^v, F^c les différentes versions miroirs de la tuile initiale $t_0 \in \tau_M$ et de l'ensemble final $F \subset \tau_M$ dans les trois jeux de tuiles miroirs τ_M^h, τ_M^v, τ_M^c respectivement. On définit alors τ_4 comme le sous-ensemble du groupage 2×2 de τ_3 respectant les restrictions suivantes sur la quatrième couche des tuiles groupées 2×2 :

— si la tuile ⊞ est la croix A, alors la tuile ◪ doit être t_0 ;
— si la tuile ◪ est la croix D, alors la tuile ⊞ doit être dans F ;
— si la tuile ◩ est la croix A, alors la tuile ◧ doit être t_0^h ;
— si la tuile ◧ est la croix D, alors la tuile ◩ doit être dans F^h ;
— si la tuile ◧ est la croix A, alors la tuile ◩ doit être t_0^v ;
— si la tuile ◩ est la croix D, alors la tuile ◧ doit être dans F^v ;
— si la tuile ◪ est la croix A, alors la tuile ⊞ doit être t_0^c ;
— si la tuile ⊞ est la croix D, alors la tuile ◪ doit être dans F^c.

Ces contraintes sont toutes illustrées par la figure 2.6.

Lemme 8. *τ_4 est 4-way déterministe.*

Démonstration. Clair dans la mesure où τ_4 est un sous-ensemble de $\tau_3^{2\times 2}$ qui lui-même est 4-way déterministe car τ_3 l'est. ■

2.2.4 Conclusion

Pour les besoins du résultat suivant, la machine de Turing M devra vérifier les propriétés additionnelles suivantes :

— au cours du calcul, la tête ne se déplace jamais sur une case située à gauche de sa position initiale ;

— lorsque le calcul s'arrête (s'il s'arrête), la tête de lecture est exactement positionnée sur la cellule la plus à droite atteinte lors du calcul.

Ces contraintes peuvent être supposées vérifiées sans perte de généralité dans la mesure où toute machine de Turing peut-être simulée par une machine vérifiant ces contraintes qui peut être obtenue récursivement à partir de la machine à simuler.

Le jeu de tuiles τ_M admet toujours des pavages qui ne contiennent aucun calcul Turing (typiquement lorsque la couche de calcul est intégralement blanche), de ce fait τ_4 admet des pavages non périodiques qui ne contiennent pas de calcul Turing sur leur quatrième couche.

Proposition 18. *τ_4 admet des pavages périodiques si et seulement si la machine de Turing M s'arrête depuis l'entrée vide.*

Démonstration. Si la machine s'arrête, alors il n'est pas difficile de décrire un pavage bi-périodique par τ_4. En effet, il existe un motif rectangulaire P par τ_M qui décrit complètement le diagramme espace-temps du calcul de M depuis l'entrée vide et qui porte la tuile initiale t_0 en son coin inférieur gauche et une tuile de F en son coin supérieur droit (et ce du fait des précédentes hypothèses additionnelles sur M). Dès lors ce motif peut-être inséré dans un rectangle de la grille de la quatrième couche de τ_4 et les trois motifs miroirs par τ_M^h, τ_M^v et τ_M^c peuvent s'insérer dans les trois rectangles voisins (est, nord et nord-est) de la grille. La motif obtenu est un motif valide par τ_4 et peut directement être répété bi-périodiquement afin de former un pavage bi-périodique du plan discret. Un tel pavage est représenté sur la figure 2.7.

Réciproquement, si τ_4 admet des pavages périodiques, alors il admet des pavages bi-périodiques d'après la proposition 6. Par le lemme 7 (point 2), la quatrième couche d'un tel pavage dessine une grille dont les rectangles contiennent des motifs finis par τ_M et ses trois jeux miroirs disjoints. Considérons le cas d'un tel motif par τ_M (on pourra observer que les autres cas auraient été parfaitement symétriques). Du fait des restrictions imposées sur le groupage, la tuile au coin inférieur gauche de ce motif est la tuile initiale t_0. Cette tuile force la première ligne (celle du bas) du motif à décrire un ruban vide de machine de Turing contenant une unique tête de lecture située sur la première cellule (la plus à gauche). Rappelons que, du fait des restrictions sur les tuiles de la grille $\mathcal{G}_M$, aucune autre tête de machine ne

peut apparaître dans le rectangle et que la tête présente ne peut quitter le motif. Dès lors, les règles locales du jeu de tuiles τ_M (dont la couche de calcul est décrite par la figure 2.4) forcent les lignes suivantes (de bas en haut) à décrire exactement les configurations successives du ruban de la machine de Turing. Puisqu'une tête ne peut quitter le motif sans erreur de pavage, la largeur du motif est nécessairement suffisamment grande pour que la tête ne quitte pas le motif sur son bord droit au cours du calcul simulé. Du fait des contraintes additionnelles sur la machine, son calcul peut être simulé sans que la tête n'ait besoin de quitter le motif sur son bord droit. Ainsi, le calcul de la machine depuis le ruban vide est correctement simulé au sein du motif. Un état final étant requis dans le coin supérieur droit, le calcul doit s'arrêter. La machine simulée M s'arrête donc depuis l'entrée vide, ce qui était le résultat attendu.

Il est possible de pousser le raisonnement légèrement plus loin en observant que la hauteur du motif est exactement le temps d'arrêt de la machine et sa largeur est exactement la distance entre la cellule de départ et la cellule sur laquelle la tête s'arrête, ce qui correspond exactement à l'espace utilisé lors du calcul (du fait des hypothèses complémentaires sur la machine). Ainsi, la quatrième couche d'un pavage bi-périodique est nécessairement de la forme décrite par la figure 2.7. ■

Cela conclut la réduction et la preuve du théorème 21.

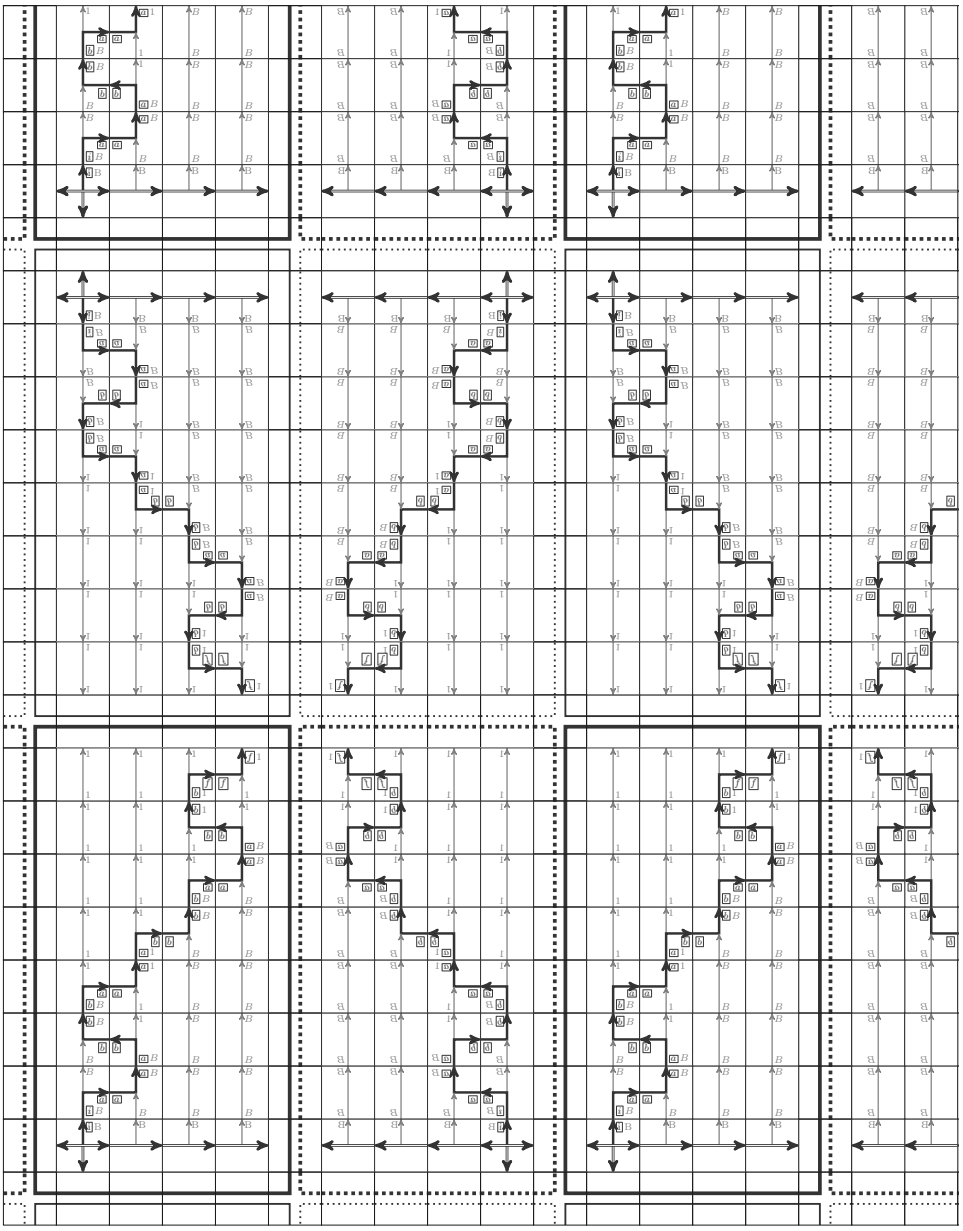


FIGURE 2.7 – Couche de calcul d'un pavage bi-périodique par τ_4

Chapitre 3

Substitutions

Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [LGO12].

Une part non négligeable des constructions existantes dans la littérature sur les les pavages, en particulier les constructions de jeux de tuiles apériodiques telles que celles de Berger [Ber64, Ber66], Robinson [Rob71] et Ollinger[Oll08b] que nous avons décrites au chapitre 1, ou celle de Durand, Romashchenko et Shen [DRS08, DRS12] que nous illustrerons au chapitre 4, procèdent, directement ou indirectement, par construction de l'ensemble limite de certaines substitutions, dont l'ensemble limite est par exemple lui-même apériodique, à l'aide de règles locales de compatibilité. Les substitutions fournissent en effet un outil commode afin d'organiser des zones dans l'espace de manière bien hiérarchisée, par exemple construire le squelette d'un schéma de calcul. Il est dès lors assez naturel de chercher à proposer une méthode automatique et générique admettant en entrée une substitution quelconque et produisant un jeu de tuiles forçant l'ensemble des coloriages engendrés par la substitution dans ses pavages.

Plusieurs constructions de ce type ont été proposées dans la littérature afin de construire les ensembles limites de différentes formes de substitutions par l'intégration d'un codage localement vérifiable à l'intérieur des pavages, c'est-à-dire plus formellement. La première construction générique permettant de construire l'ensemble limite d'une substitution discrète rectangulaire (non régulière, non déterministe) est celle de Mozes [Moz89].Une construction significativement plus simple a été récemment proposée par Ollinger [Oll08b] pour les substitutions 2×2, nous y revenons dans ce chapitre en section 3.1.1. Dans le cadre des substitutions géométriques homothétiques (c'est-à-dire que la macro-tuile est un assemblage de tuiles auxquelles elle est géométriquement semblable), Goodman-Strauss [GS98] a proposé une construction générique décrivant le découpage et la décoration des tuiles de manière à forcer la construction de l'ensemble limite par des

règles locales. Les idées de base de cette construction, régissant la manière dont l'information hiérarchique doit être codée et répartie dans l'espace, sont essentiellement les mêmes que celles de la construction de Mozes, mais la technicité en est en revanche significativement plus importante de pouvoir gérer toutes les contraintes géométriques d'un cadre plus complexe. Dans le cadre des substitutions combinatoires et sous certaines hypothèses additionnelles dont le rôle est d'assurer le bon comportement géométrique des substitutions considérées, Fernique et Ollinger [FO10] ont eux-aussi proposé une construction générique. Pour de plus amples discussions sur la classification des substitutions suivant leur nature et les enjeux associés, on pourra également consulter Priebe-Frank [PF08].

C'est ici un cadre déterministe qui nous intéresse et l'on propose dans ce chapitre une méthode effective afin d'associer à toute substitution 2×2 un jeu de tuiles 4-way déterministe tel que l'ensemble limite de la substitution soit égal à une projection lettre-à-lettre de l'ensemble des pavages. Il s'agit formellement de montrer la 4-way soficité des ensembles limites des substitutions 2×2. Cette approche est basée sur des enrichissements et considérations géométriques sur le jeu de tuiles $\tau^{\bullet}_{104}$ apériodique et 4-way déterministe construit au chapitre 1. Étant donnée une substitution, des décorations sont ajoutées à ce jeu de tuiles de manière à le rendre déterministe dans une direction tout en forçant l'ensemble limite de la substitution dans l'ensemble de ses pavages. Quatre copies de ce jeu sont finalement synchronisées de manière à obtenir un jeu 4-way déterministe.

En conséquence, des techniques de Ollinger [Oll08b] peuvent être combinées à celles de Lukkarila [Luk09] afin de simplifier l'intégration d'une simulation de machine de Turing à l'intérieur des pavages de un jeu de tuiles 4-way déterministe et démontrer l'indécidabilité du problème du pavage, ou encore transférer des résultats plus généraux sur les pavages dans le cadre 4-way déterministe. À titre d'exemple, le marquage d'une diagonale de façon 4-way déterministe, qui constitue le point technique de la simulation de machine de Turing 4-way déterministe de Lukkarila, peut être réalisé en décrivant une substitution très simple engendrant l'ensemble des coloriages contenant au plus une diagonale et en appliquant les résultats de ce chapitre à cette substitution. La technique moderne de preuve de l'indécidabilité du problème du pavage reposant sur l'utilisation d'une substitution simple engendrant un squelette de calcul approprié – comme le propose Ollinger pour dériver l'indécidabilité du problème du pavage de la construction de τ_{104} et comme nous l'avons décrit lors de cette construction au chapitre 1, peut alors être adaptée au cadre 4-way déterministe par application des résultats de ce chapitre. Les deux principales étapes techniques d'une preuve de l'indécidabilité du problème du pavage dans le cadre 4-way sont ainsi réalisées sans effort modulo l'utilisation de ce résultat de reconnaissance déterministe des ensembles limites des substitutions (derrière lequel est alors cachée la technicité).

Nous utiliserons tout au long de ce chapitre les notations introduites pour la construction, au chapitre 1, de τ_{104} (section 1.2.3) et $\tau_{104}^{\bullet}$ (section 1.4.3).

3.1 Soficité directionnelle des ensembles limites de substitutions

3.1.1 Imposer l'ensemble limite d'une substitution : le jeu de tuiles enrichi $\tau_{104}(s)$

Étant donnée une substitution 2×2 s sur un alphabet Σ, on utilise la structure d'arbre quaternaire infini, formée par les câbles de couleur ⊞, mise en évidence sur la figure 3.1, et contenue dans tout pavage, afin de porter l'historique d'une configuration de l'ensemble limite de s. La méthode que nous allons employer ici pour traiter ce problème est essentiellement la même que cette employée par Ollinger [Oll08b] dans le cadre du jeu τ. Dans cette perspective, chaque câble de couleur ⊞ doit porter une lettre de Σ. Ces câbles seront désormais étiquetés par des éléments de $\boxplus \times \mathcal{L} \times \Sigma$ (en lieu et place de $\boxplus \times \mathcal{L}$). Ces étiquettes additionnelles doivent vérifier certaines règles afin de contraindre l'arbre à porter la hiérarchie imposée par la substitution s :

— sur les tuiles V où deux câbles de couleur ⊞ se croisent, les lettres $a \in \Sigma$ transportée par le câble vertical supérieur et $b \in \Sigma$ transportée par le câble horizontal inférieur doivent vérifier $b = s(a)(x, y)$ où $x = 0$ (resp. $x = 1$) si le câble supérieur ⊞ est en position droite (resp. gauche) et $y = 0$ (resp. $y = 1$) si le câble inférieur ⊞ est en position basse (resp. haute) ; ces contraintes sont illustrées par la figure 3.2 ;

— symétriquement, sur les tuiles H où deux câbles de couleur ⊞ se croisent, les lettres a transportée par le câble horizontal supérieur et b transportée par le câble vertical inférieur doivent vérifier $b = s(a)(x, y)$ où $y = 0$ (resp. $y = 1$) si le câble supérieur ⊞ est en position haute (resp. basse) et $x = 0$ (resp. $x = 1$) si le câble inférieur ⊞ est en position gauche (resp. droite) ;

— enfin, sur chaque croix X en position ⊞, les lettres a transportée par câble ⊞ de la deuxième couche et b transportée par la première couche doivent vérifier $b = s(a)(u)$ où $u =$ ⊞ (resp. ⊞,⊞,⊞) si le câble ⊞ est en position ∟ (resp. ⌟,⌜,⌝) dans la croix, comme illustré par la figure 3.3.

On enrichit également les règles locales afin de forcer les quatre tuiles d'un même bloc de parité 2×2 à partager la même lettre de Σ.

On définit enfin la projection $\pi : \tau_{104}(s)^{\mathbb{Z}^2} \leftarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ en posant, pour toute tuile $t \in \tau_{104}(s)$ de première couche $(u, a) \in \boxplus \times \Sigma$, $\pi(t) = s(a)(u)$.

Théorème 22 ([Oll08b]). *Pour toute substitution 2×2 s, $\pi\left(\mathcal{X}_{\tau_{104}(s)}\right) = \Lambda_s$, ainsi les ensembles limites des substitutions 2×2 sont sofiques.*

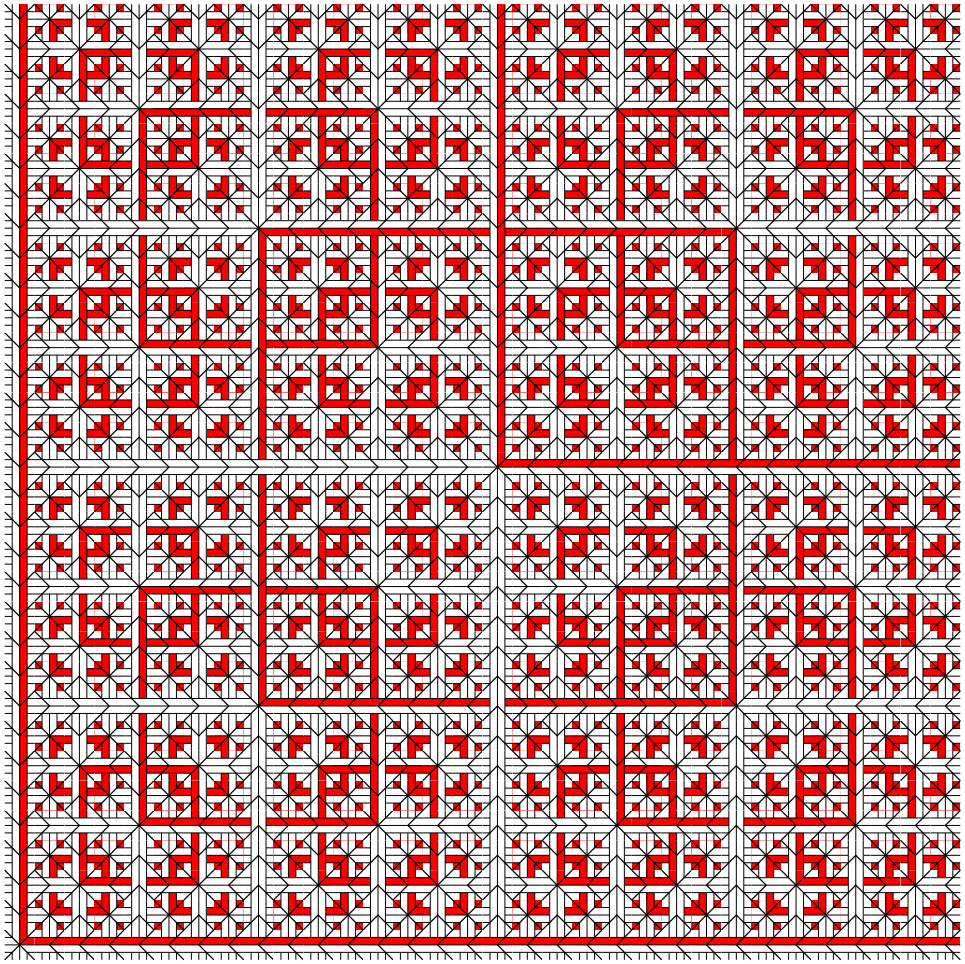


FIGURE 3.1 – Arbre quaternaire (câbles NE) apparaissant dans tout pavage

(a) $b = s'(a)(0,0)$ (b) $b = s'(a)(1,0)$ (c) $b = s'(a)(0,1)$ (d) $b = s'(a)(1,1)$

FIGURE 3.2 – Règles hiérarchiques pour les V

(a) $b = s'(a)(0,0)$ (b) $b = s'(a)(1,0)$ (c) $b = s'(a)(0,1)$ (d) $b = s'(a)(1,1)$

FIGURE 3.3 – Règles hiérarchiques pour les X de fond NE

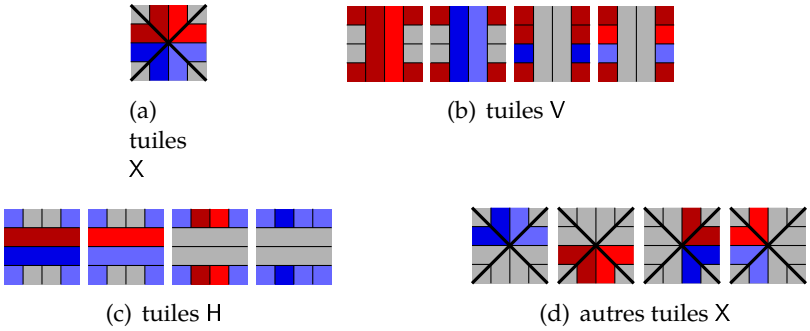


FIGURE 3.4 – Règles de partage

Schéma de preuve. On montre que $\pi\left(\mathcal{X}_{\tau_{104}(s)}\right) \supseteq \Lambda_s$ (inclusion facile) en codant simplement l'historique d'un coloriage de Λ_s dans l'arbre quaternaire d'un pavage. pour $\pi\left(\mathcal{X}_{\tau_{104}(s)}\right) \subseteq \Lambda_s$, on montre que tout pavage t contient l'historique d'un coloriage $\pi(t)$, qui est dès lors dans Λ_s. ■

Pour qu'à chaque niveau d'un pavage tous les câbles portent symétriquement l'information hiérarchique (et pas seulement les câbles ⊞ formant l'arbre quaternaire infini), on enrichit finalement $\tau_{104}(s)$ en ajoutant des lettres de Σ sur les câbles de couleurs ⊞, ⊞ et ⊞ et en forçant tout câble ⊞ à partager sa lettre avec les trois autres câbles de son bloc de parité. Cette contrainte peut être imposée par une simple restriction alphabétique sur les tuiles du jeu :

— sur toute tuile (y compris X) où un câble de couleur ⊞ (resp. ⊞) apparaît à gauche d'un câble de couleur ⊞ (resp. ⊞), ces derniers doivent partager la même lettre de Σ ;
— de façon similaire, sur toute tuile où un câble de couleur ⊞ (resp. ⊞) apparaît au dessus d'un câble de couleur ⊞ (resp. ⊞), ces derniers doivent partager la même lettre de Σ.

Dans la suite, on se référera à ces règles sous le nom de *règles de partage*, illustrées par la figure 3.4. De cette manière, tout niveau de la grille de parité de tout pavage t par $\tau'(s')$ code un coloriage de l'historique de $\pi(t)$ où chaque lettre est portée par un bloc de parité entier.

3.1.2 Le jeu de tuiles NE déterministe $\tau_{\text{NE}}(s)$

Le jeu de tuiles $\tau_{104}(s)$ n'est bien sûr déterministe dans aucune direction. Afin de rendre la structure de base déterministe, on construit $\tau^{\bullet}_{104}(s)$ très exactement de la même façon que $\tau_{104}(s)$ (mêmes enrichissements) mais sur la base sur jeu 4-way déterministe $\tau^{\bullet}_{104}$ construit au chapitre 1, section 1.4.3. Le jeu $\tau^{\bullet}_{104}$ n'est déterministe dans aucune direction, mais le problème ne vient plus que de la prédictibilité des lettres des coloriages associés à la

substitution portées par les câbles du jeu de tuiles. La raison à ce non déterministe est que la lettre de Σ portée par le coin d'un câble sur une tuile X ne peut pas systématiquement être déterminée de manière déterministe lorsque sa position correspond à la direction de déterminisme considérée et qu'aucune règle de partage n'impose cette lettre : par exemple, pour la direction de déterminisme NE, les lettres des câbles ◪ en position ⌞ sur les tuiles X ne sont pas déterminés. On notera que ce problème se pose également dans le cas particulier du niveau 0 de la construction : par exemple, de nouveau pour la direction de déterminisme NE, la lettre de Σ portée par la couche de parité de toute tuile de parité ◪ ne peut être obtenue de façon déterministe. Cette information peut être obtenue au niveau supérieur de l'historique qui se trouve être, d'après la remarque 4, translaté dans la direction SO. On se fonde principalement sur cette simple observation dans ce qui suit afin de construire un jeu de tuiles NE déterministe.

Construction

Dans le but de résoudre les problèmes soulevés de non déterminisme, il convient d'ajouter une couleur de $\boxplus$ ainsi qu'une lettre de Σ sur certains des fils ajoutés à la section précédente : précisément ceux qui relient le coin SO d'un câble ◪ au plus proche câble de niveau supérieur dans la direction sud ou ouest, par exemple les fils verticaux partant vers le sud représentés sur la figure 3.5 (on aurait pu de façon équivalent construire les fils horizontaux correspondant partant vers l'ouest). Ces fils sont alors étiquetés par des éléments de $\mathcal{L} \times \boxplus \times \Sigma$ (et non plus de $\mathcal{L}$). Les tuiles portant un fil sont représentées sur la figure 3.6. Sur les tuiles portant l'extrémité finale d'un tel fil (figure 3.6(b)), la couleur et la lettre du fil doivent être les mêmes que celles du câble auquel il est connecté. Sur les tuiles portant l'extrémité de départ d'un tel fil (figure 3.6(a)), la couleur $u \in \boxplus$ et la lettre $a \in \Sigma$ transportées par le fil et la lettre $b \in \Sigma$ transportée par le câble ◪ doivent vérifier $b = s(a)(u)$. Ces contraintes sont aisément vérifiées par une simple restriction alphabétiques. Les règles locales associées sont les suivantes : les étiquettes portées par un fil doivent être préservées tout le long de sa propagation.

Il s'agit maintenant de résoudre le même problème dans le cas particulier du niveau 0, c'est-à-dire prédire la lettre de la couche de parité des tuiles ◪. Les choses sont ici plus simples. On se rappelle que toute tuile ◪ est directement encerclée par un câble sur ses huit voisines directes et diagonales. On ajoute alors simplement les règles locales de compatibilité suivantes : les lettres $b \in \Sigma$ de la couche de parité de toute tuile ◪ et $a \in \Sigma$ du câble entourant directement la tuile, de couleur $u \in \boxplus$, doivent vérifier $b = s(a)(u)$. Cette containte peut aisément être codée dans les couleurs des tuiles de Wang.

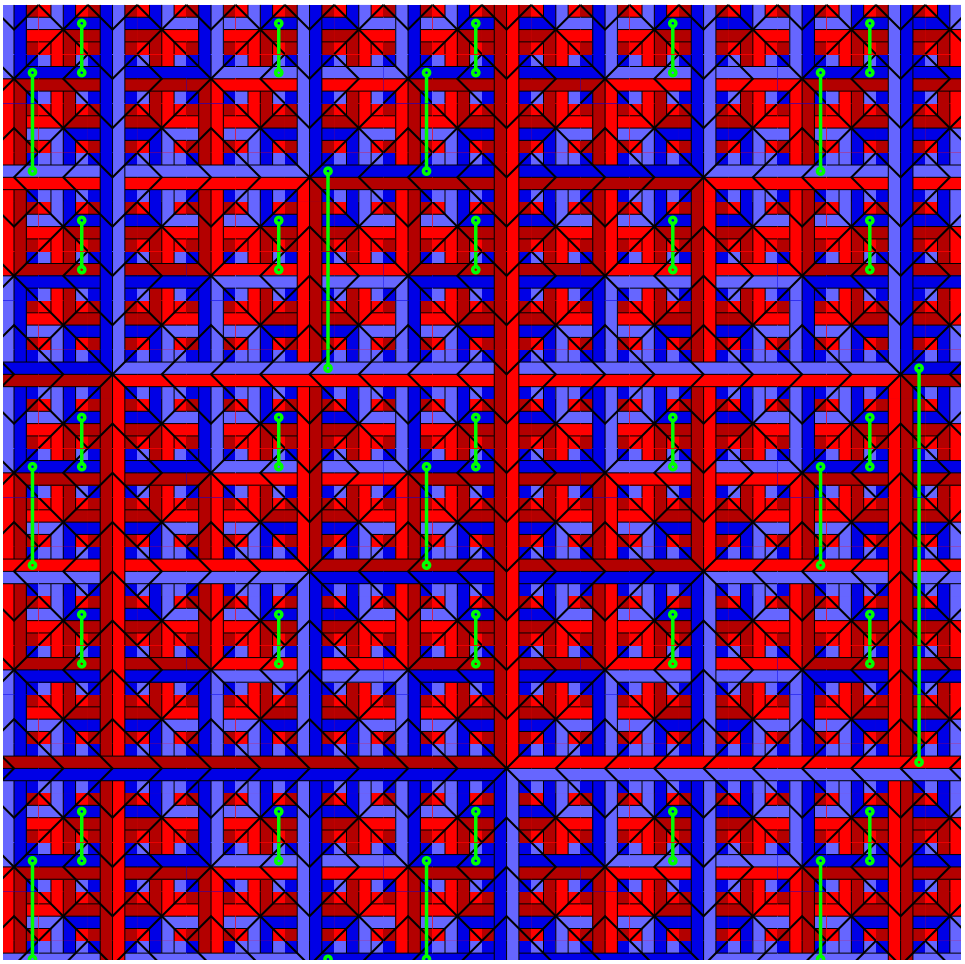
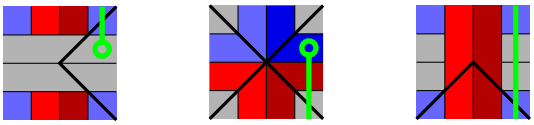


FIGURE 3.5 – Motif d'un pavage par $\tau_{\text{NE}}(s)$



(a) départ (b) fin (c) fil

FIGURE 3.6 – Tuiles portant les fils dans $\tau_{\text{NE}}(s)$

Résultats

Le jeu $\tau_{\text{NE}}(s)$ ainsi construit est un jeu de tuiles NE déterministe. La preuve de ce résultat relève essentiellement d'une vérification exhaustive du jeu de tuiles. Il devrait être assez clair que les derniers enrichissements du jeu ont été apportés dans ce but.

Théorème 23. *Pour toute substitution 2×2 s, $\tau_{\text{NE}}(s)$ est un jeu de tuiles* NE *déterministe.*

Démonstration. On prouve que pour tout couple $(t_{\text{O}}, t_{\text{S}}) \in \tau_{\text{NE}}(s)$, toute tuile $t \in \tau_{\text{NE}}(s)$ compatible à l'ouest avec t_{O} et au sud avec t_{S} est déterminée de façon unique par les informations portées par ces deux tuiles.

Clairement, la couleur de parité (parmi ⊞, ⊞, ⊞ et ⊞), le type de la deuxième couche (parmi X, H et V), ainsi que la couleur des câbles (mais pas nécessairement les lettres de Σ qu'ils transportent) de t sont imposés respectivement par la couche de parité, et les couleurs des câbles de t_{O} et t_{S} (en supposant qu'ils imposent des données non contradictoires, sinon il n'y a pas de tuile t compatible). Toutefois, la déduction non ambiguë des lettres de Σ n'est pas aussi simple.

Déduire les lettres de la première couche (parité). La lettre transportées par la couche de parité de t est directement contenue par t_{S} si t est de parité ⊞ et par t_{O} si t est de parité ⊞. La lettre peut aisément être dérivée de la lettre transportée par la câble de couleur ⊞ si t est une tuile X de parité ⊞. Le seul cas problématique concerne les tuiles de parité ⊞. Rappelons qu'une tuile de parité ⊞ est nécessairement directement encerclée dans un pavage par un câble duquel la lettre désirée peut facilement être dérivée. Si bien que dans ce cas, la lettre recherchée peut être obtenue des câbles de t_{S} (ou indifféremment de t_{O}, en supposant de nouveau, qu'ils procurent des informations compatibles). Dans ce but, les enrichissements des règles discutés à la fin de la deuxième sous-section de la section 3.1 imposent sans ambiguïté la lettre de la couche de parité de la tuile t.

Déduire les lettres des câbles de la deuxième couche. Commençons par remarquer que la production de cette information pour une tuile de type H (parité ⊞ ou ⊞) ou V (parité ⊞ ou ⊞) est toujours déterministe puisque les couleurs et lettres des câbles sont directement imposées par la deuxième couche de t_{O} et t_{S} (où elles se propagent). Seule la production des lettres des tuiles de type X (parité ⊞ ou ⊞) est problématique. On observe également que les lettres des câbles en positions ⌉, ⌈ et ⌋ de la tuile t sont toujours imposées par t_{O} et t_{S} (où, de nouveau, ils se propagent). Tandis que les câbles en position ⌊ de la tuile t n'est pas de couleur ⊞, les règles de partage (cf. la fin de la première sous-section de la section 3.1) imposent toujours la lettre transportée par le câble en position ⌊ (car elle est alors partagée avec le câble en position ⌈ ou ⌉). Si, d'autre part, le câble en position ⌊ de la tuile t est de couleur ⊞, alors l'information portée par la deuxième couche de t_{O} et t_{S}

ne suffit pas à déterminer la lettre transportée par ce câble. Dans ce cas, t contient néanmoins une extrémité finale de fil sur ce câble et t_{S} contient un fil (ou le départ d'un fil, cf. figure 3.6) qui impose alors la lettre désirée.

Déduire les autres couches. La production de la troisième couche et des fils est directe et peut aisément être constatée déterministe, ce qui conclut la preuve. ■

Le résultat de soficité est évidemment encore valide (pour une projection naturellement étendue π retirant simplement toutes les décorations additionnelles) : on a $\pi\left(\mathcal{X}_{\tau_{\text{NE}}(s)}\right) = \Lambda_s$. Tout cela mène au résultat suivant.

Théorème 24. *Les ensembles limites des substitutions* 2×2 *sont* NE*-sofiques.*

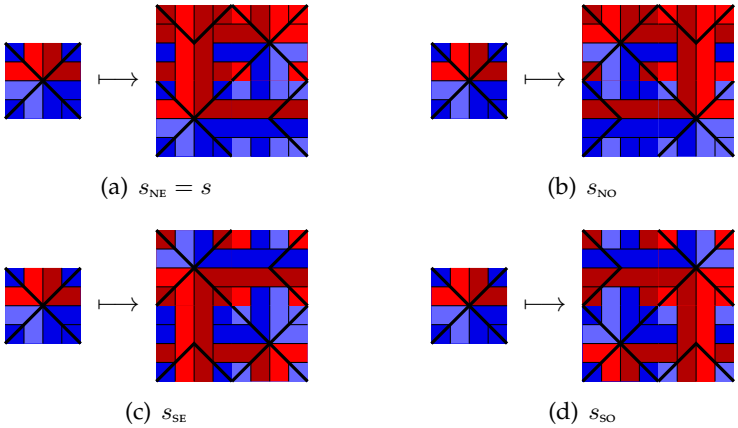
3.2 4-way soficité des ensembles limites de substitutions

Il s'agit à présent de décrire un jeu de tuiles 4-way déterministe $\tau_{4w}(s)$ par construction d'un produit synchronisé du jeu $\tau_{\text{NE}}(s)$ et de variations autour de sa construction.

3.2.1 Le jeu de tuiles 4-way déterministe $\tau_{4w}(s)$

Nous avons souligné par la remarque 4 le fait que la substitution s_{104} translate les niveaux supérieurs de la grille de parité dans la direction so. Il est dès lors possible de considérer les trois autres choix symétriques possibles pour cette substitution, représentés sur la figure 3.7, afin de réaliser ces translations dans les trois autres directions diagonales. On peut alors de façon similaire à ce que nous avons fait pour $\tau_{\text{NE}}(s')$ construire les jeux de tuiles $\tau_{\text{NO}}(s')$, $\tau_{\text{SE}}(s')$ $\tau_{\text{SO}}(s')$ qui sont NO, SE et SO déterministes respectivement. Pour construire un jeu de tuiles $\tau_{4w}(s')$ 4-way déterministe, on considère le jeu de tuiles produit $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s') \times \tau_{\text{SE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$ dont les couleurs sont les quadruplets de couleurs de chacune des composantes du produit.

Pour toute tuile $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, on impose de plus aux quatre composantes t_1,..., t_4 de partager la même première couche, c'est-à-dire la même parité et la même lettre de Σ. De cette manière, le coloriage codé par chacune des composantes d'un pavage $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ est le même : $\pi_1(T_1) = \pi_2(T_2) = \pi_3(T_3) = \pi_4(T_4)$ avec π_i pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ les projections associées. Chacune des composantes du jeu de tuiles produit est déterministe dans une direction diagonale. L'idée est maintenant d'utiliser chaque composant pour rendre les trois autres déterministes dans sa direction. On doit pour cela *synchroniser* l'ensemble des historiques codés par les quatre composantes d'un pavage de telle façon qu'ils codent le même coloriage à tous



(a) $s_{\text{NE}} = s$ (b) s_{NO}

(c) s_{SE} (d) s_{SO}

FIGURE 3.7 – Les quatre substitutions symétriques

les niveaux. Le jeu de tuiles synchronisé devrait alors être 4-way déterministe.

Rappelons avant toute chose que l'obstacle au déterminisme est que la lettre de Σ transportée par le coin d'un câble sur une tuile X ne peut pas toujours être déterminée de façon déterministe lorsque sa position correspond à la direction de déterminisme considérée et qu'aucune règle de partage n'impose cette lettre.

3.2.2 Analyse du cas de deux directions opposées

Commençons par examiner le cas de deux composantes de directions de déterminisme opposées. Sans perte de généralité, on considère le cas des directions SO et NE et, dans cette section seulement, le jeu de tuiles produit associé $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$ (i.e. les composantes 1 et 4 du jeu de tuiles produit précédemment introduit) pour lequel un motif de pavage est représenté sur la figure 3.8 (où sur chaque tuile, les première et seconde composantes sont représentées dans les angles SO et NE respectivement, et les couleurs de la seconde composante sont vert foncé, vert, orange et jaune pour ◪,◪,◪ et ◪ respectivement). Dans tout pavage, seules les couches de parité des deux composantes sont effectivement synchronisées si bien qu'elles codent toutes deux le même coloriage au niveau 0. Supposons un instant que nous avons synchronisé les deux composantes à tous les niveaux de la hiérarchie si bien que les deux composantes codent le même historique complet. Considérons la direction de déterminisme SO, et tentons d'analyser la manière dont la première composante peut être rendue SO déterministe en utilisant la seconde composante. Par symétrie, la même analyse ferait sens pour l'autre composante dans la direction de déterminisme opposée. Dans notre choix, pour la direction de déterminisme SO sur la première composante, les lettres

des câbles ◪ de position ¬ sur les tuiles X ne sont pas déterminées. Comme illustré par les représentation éclatées des figures 3.9(a), 3.9(c) et 3.9(e), on peut remarquer, lorsque le pavage est intégralement synchronisé, que les lettres de ces câbles sont précisément cette transportées par les câbles correspondant ◪ (en jaune) de la seconde composante au même niveau de la hiérarchie et qui apparaissent sur les tuiles voisines pointées par le vecteur $(-1, -1)$, i.e. à un pas de translation diagonal dans la direction SO de là. Il n'est pas commode que cette information soit disponible à une translation dans la direction de déterminisme considérée : l'information requise arrive précisément « un instant trop tard » à la position où l'on en a besoin. Remarquons néanmoins qu'à tous les niveaux de la hiérarchie, ce décalage est constant égal à $(-1, -1)$.

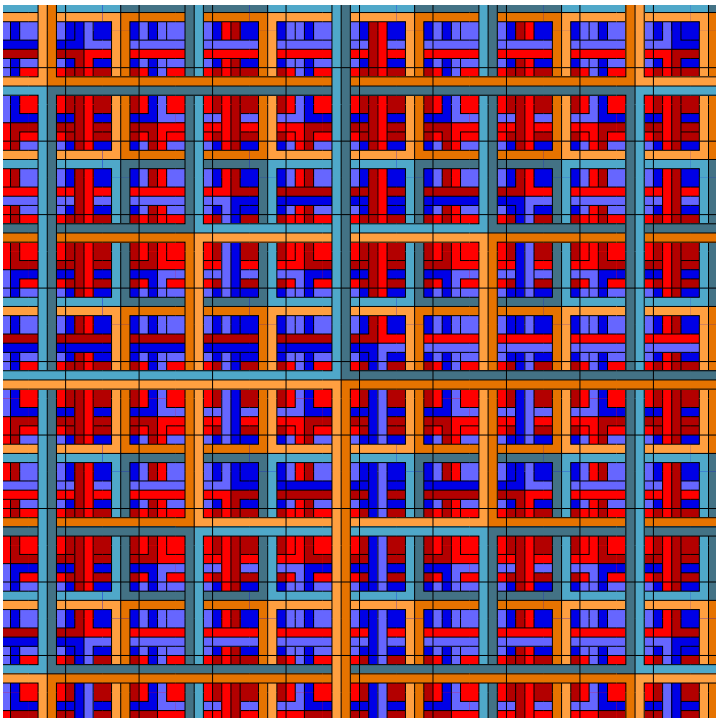
3.2.3 Analyse du cas de deux directions orthogonales

Considérons maintenant le cas de deux composantes de directions de déterminisme orthogonales en considérant cette fois le produit $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$ pour lequel un motif de pavage est représenté sur la figure 3.10 (avec les mêmes conventions que précédemment). En supposant que l'on a synchronisé les deux composantes à tous les niveaux de la hiérarchie, considérons, sans perte de généralité, la direction de déterminisme NO. Pour cette direction sur la première composante, les lettres des câbles ◪ en position ⌟ sur les tuiles X ne sont pas déterminées. Dans ce cadre, comme illustré par les représentations éclatées des figures 3.9(a), 3.9(c) et 3.9(e), les lettres de ces câbles sont précisément celles transportées par les câbles ◪ correspondant (en vert) de la seconde composante au même niveau de la hiérarchie qui apparaissent sur les tuiles voisines pointées par le vecteur $(0, 1)$, i.e. située à une unité de translation verticale dans la direction de déterminisme de là.

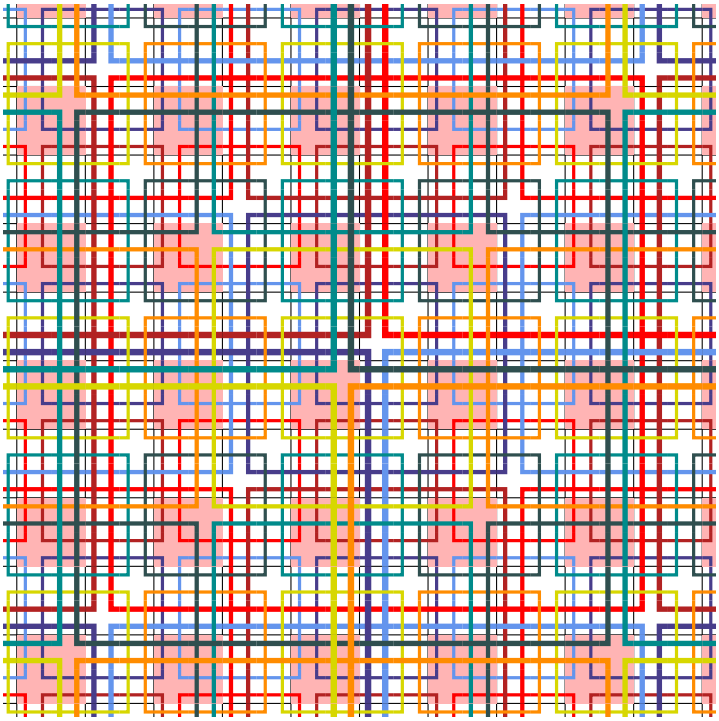
3.2.4 Grouper les tuiles

Les analyses menées précédemment révèlent que les informations requises afin de synchroniser les historiques des quatre composantes et par ce moyen rendre le jeu de tuiles 4-way déterministe sont toujours disponibles à une distance d'une unité dans la direction de déterminisme considérée de la tuile à prédire.

Remarque 13. Bien sûr, dans les deux cas l'information requise est également disponible de l'autre côté du carré la portant et donc loin de là dans la direction opposée à la direction de déterminisme considérée. On pourrait alors ajouter de nouveaux fils afin de transmettre cette information jusqu'à l'endroit requis de la même manière que ce que nous avons fait au cours des étapes précédentes de notre construction (les fils étant de plus en plus longs à mesure que l'on monte dans les niveaux de la hiérarchie). Une telle

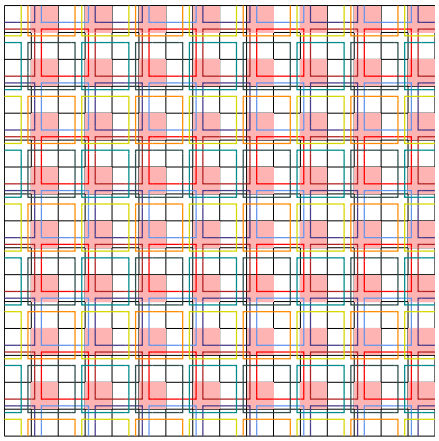


(a) Vue standard

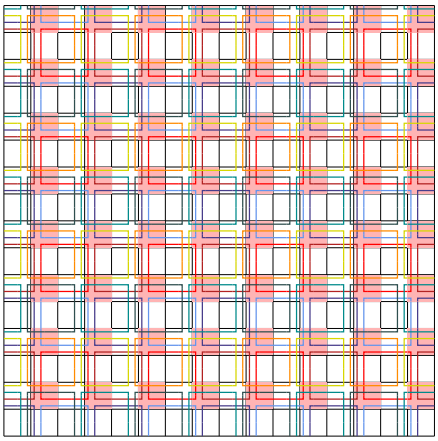


(b) Vue éclatée

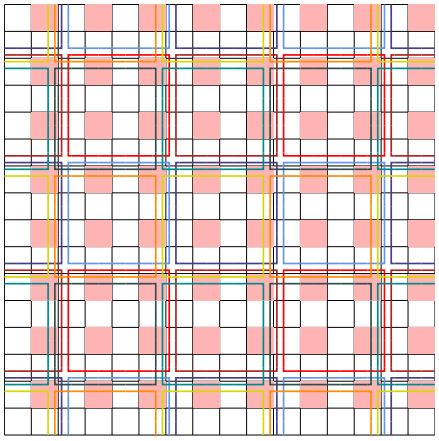
FIGURE 3.8 – Vues des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$



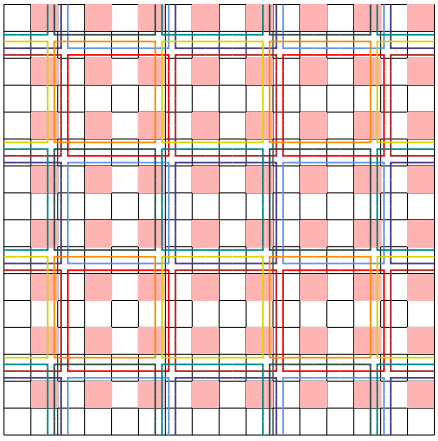
(a) Câbles de niveau 1 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$



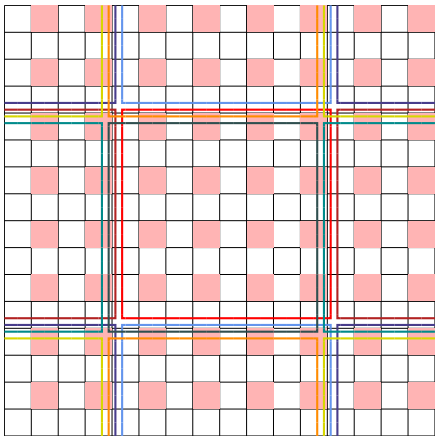
(b) Câbles de niveau 1 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$



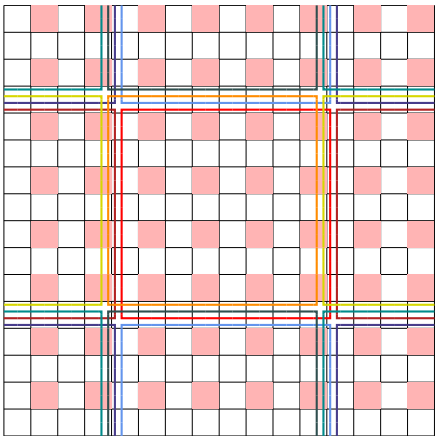
(c) Câbles de niveau 2 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$



(d) Câbles de niveau 2 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$



(e) Câbles de niveau 3 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$



(f) Câbles de niveau 3 de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$

FIGURE 3.9 – Vues éclatées niveau par niveau des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{SO}}(s')$ (à gauche) et $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$ (à droite)

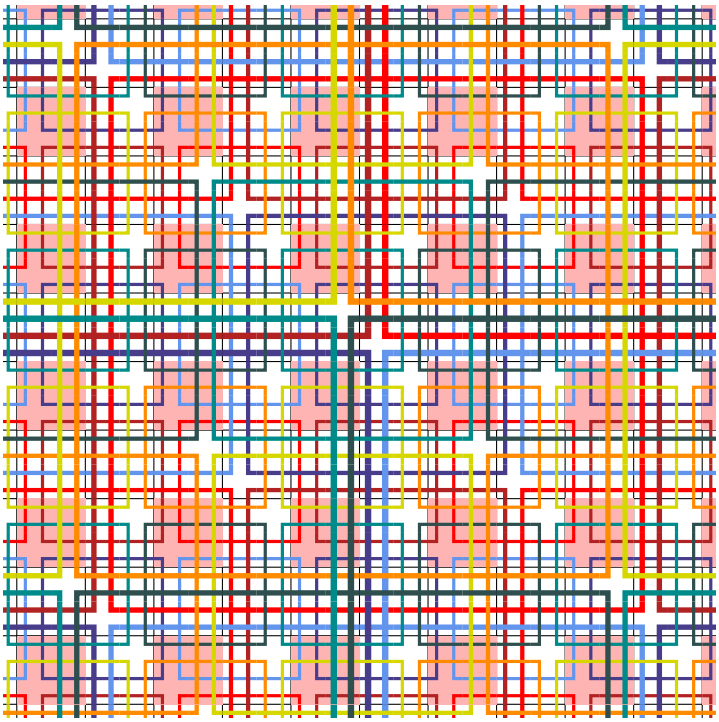


FIGURE 3.10 – Vue des câbles de $\tau_{\text{NE}}(s') \times \tau_{\text{NO}}(s')$

solution est parfaitement envisageable dans la mesure où les tuiles devant porter ces fils sont parfaitement identifiables et que les règles locales à ajouter pour gérer ces fils sont élémentaires. La prédiction de l'information des fils ne pose pas de problème particulier, si bien que le jeu résultant serait aisément 4-way déterministe. Cependant, considérant le fait que le décalage est ici constant, grouper les tuiles semble être une solution plus simple.

Une solution simple à ce problème de décalage constant est un groupage 3×3 des tuiles du jeu de tuiles produit. Posons τ_0 le jeu de tuiles produit précédemment défini et considérons le jeu de tuiles groupé $\tau_0^{3\times 3}$ dont les tuiles correspondent aux motifs carrés de taille 3×3 valides au regard des règles locales de τ_0. On construit alors $\tau_{4w}(s')$ depuis $\tau_0^{3\times 3}$ en ajoutant des contraintes de synchronisation sur les tuiles issues des analyses menées. Retournons par exemple au cas de deux directions de déterminisme opposées : sur toute tuile t pour laquelle la sous-tuile centrale $t_{1,1}$ comporte une première composante de type X avec un câble ◪ en position ¬ étiqueté par une lettre $a \in \Sigma$, il doit y avoir, puisque t forme un motif carré 3×3 valide par τ_0, un câble ◪ (jaune) traversant la quatrième composante des sous-tuiles $t_{0,2}$, $t_{0,1}$, $t_{0,0}$, $t_{1,0}$, $t_{2,0}$ et, toujours pour des raisons de validité, transportant une même lettre $b \in \Sigma$. On requiert dans ce cas, sur la base de l'analyse précédente, que $a = b$. Considérer toutes les autres contraintes symétriques

et les contraintes analogues pour le cas orthogonal, permet de former le jeu de tuiles $\tau_{4w}(s')$.

3.2.5 Résultats

$\tau_{4w}(s')$ est un jeu de tuiles 4-way déterministe. La preuve de ce résultat repose sur une vérification exhaustive du jeu de tuile. Les cas examinés précédemment devrait convaincre le lecteur de sa validité.

Théorème 25. *$\tau_{4w}(s')$ est 4-way déterministe.*

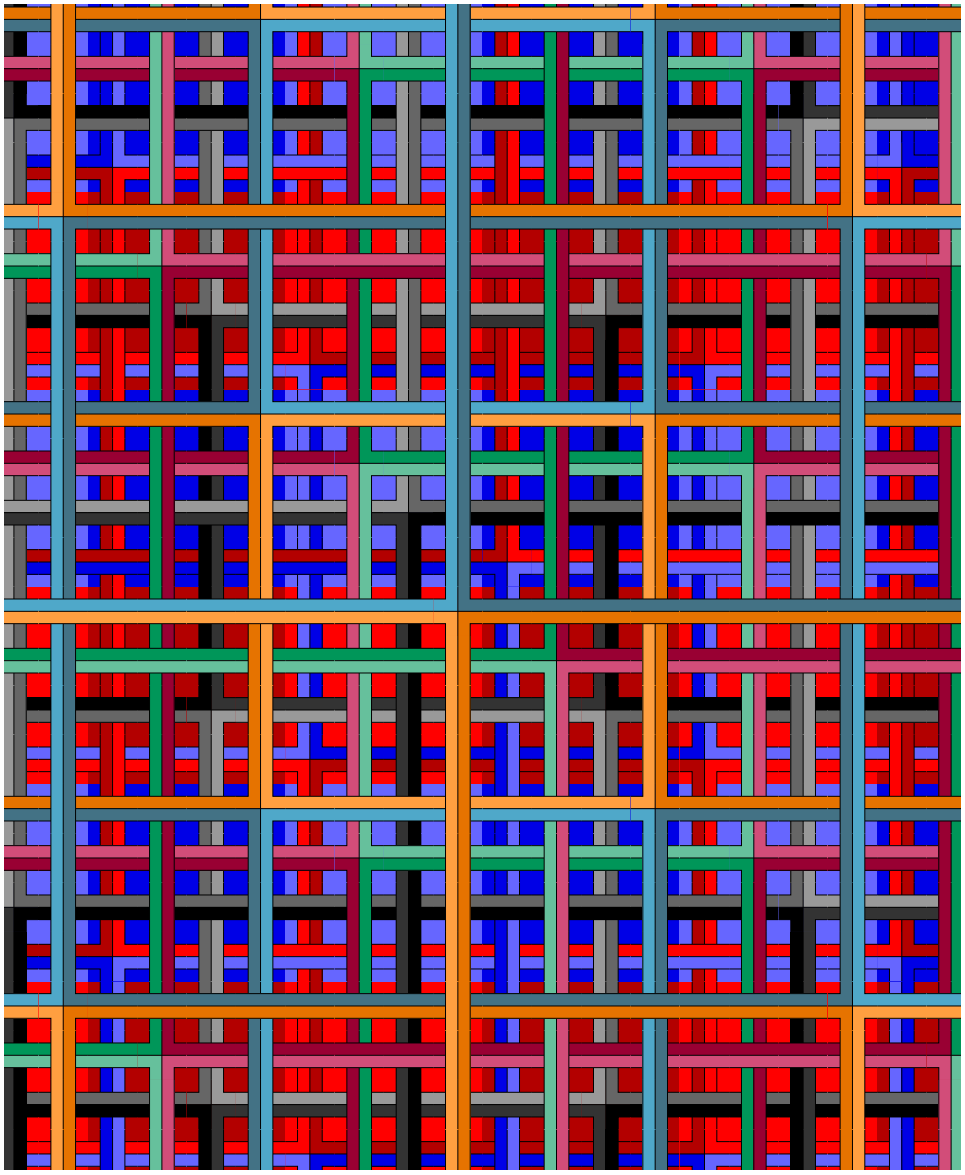
De nouveau, le résultat de soficité reste parfaitement valide (pour une projection π naturellement étendue π retirant simplement toutes les décorations additionnelles) : $\pi\left(\mathcal{X}_{\tau_{4w}(s')}\right) = \Lambda_{s'}$. Cela conduit au résultat final.

Théorème 26. *Les ensembles limites des substitutions 2×2 sont 4-way sofiques.*

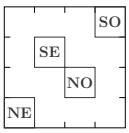
Pour finir, la figure 3.11 propose une représentation standard des câbles $\tau_{4w}(s')$ (sans en représenter le groupage 3×3), où les quatre composantes sont situées sur chaque tuiles aux positions indiquées par le schéma de la figure 3.11(b) et où les couleurs des composantes nouvellement représentées sont :

— les nuances de gris du noir au gris clair pour les câbles , , , dans cet ordre en ce qui concerne la composante NO déterministe ;

— les vert, rose foncé, vert clair et rose pour les câbles , , , respectivement en ce qui concerne la composante SE déterministe.



(a) Vue standard



(b) Positions des couches

FIGURE 3.11 – Vue standard des câbles de $\tau_{4w}(s')$

Chapitre 4

Constructions de type point-fixe

Ces dernières années, sont apparues dans la littérature un certain nombre de constructions de jeux de tuiles apériodiques [DLS05, Oll08b, DRS08, LW09] cherchant à adopter une approche moderne du problème, dans laquelle les considérations géométriques ainsi que les arguments combinatoires portant sur les motifs susceptibles d'apparaître dans les pavages, sont remplacés par des arguments qui cherchent à pointer plus précisément ce qui garantit l'apériodicité — et qui la garantissait déjà dans les constructions historiques de Berger [Ber64] et Robinson [Rob71] comme nous l'avons illustré au chapitre 1 — à savoir le caractère auto-similaire des pavages engendrés. L'approche adoptée consiste alors à construire explicitement un jeu de tuiles auto-simulant.

Toutes ces constructions modernes exhibent ainsi une structure bien hiérarchisée dans leurs pavages. Nous avons illustré au cours du chapitre 3 l'utilisation d'une telle structure issue de [Oll08b] dans le but d'obtenir des résultats de soficité. Parmi les constructions précedemment évoquées, celle de Durand, Romashchenko et Shen [DRS08, DRS12], atteint l'auto-simulation par la concrétisation d'idées au plus proche du théorème de point-fixe de Kleene en calculabilité générale et présente l'avantage de disposer d'une très grande souplesse qui a permis aux auteurs d'en tirer de nombreuses applications : indécidabilité des problèmes de pavages classiques, résultats d'inséparabilité, soficité des ensembles limites de substitutions, réalisation en dimension deux des sous-shifts effectifs (résultat obtenu simultanément par Aubrun et Sablik [AS13]), réalisation d'ensembles de pavages complexes au sens de Durand, Levin et Shen [DLS01] (dans lesquels la complexité de Kolmogorov de tout motif carré $n \times n$ est $\Omega(n)$), réalisation d'ensembles de pavages complexes robustes aux erreurs au sens de Gács [Gá01].

Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre la construction de Durand, Levin et Shen dans un cadre bi-déterministe. Nous construisons dans un

premier temps un jeu de tuiles permettant de simuler une machine de Turing réversible de manière bi-déterministe, ce dont nous aurons besoin dans la construction. Puis nous présentons un schéma de calcul réversible assurant l'adaptation du temps de calcul à des zones de calcul de taille variable, ce qui sera indispensable aux constructions à facteur d'échelle variable dans lesquelles la taille de la zone de calcul augmente avec le niveau de la hiérarchie. Nous présentons ensuite les constructions de type point-fixe bi-déterministes. Nous en tirons enfin quelques applications et retrouvons par cette méthode des résultats de Guillon et Zinoviadis [GZ13] obtenus originellement par la construction, inspirée par les techniques de Gács [Gá01], d'automates cellulaires partiels incorporant un mécanisme d'auto-simulation déjà esquissé dans [GZ12].

4.1 Simulation bi-déterministe de machine de Turing

Contrairement au cas d'une simulation 4-way déterministe, il n'est pas difficile de construire une simulation bi-déterministe de machine de Turing. Une raison à cela, par analogie, est que l'on sait facilement construire un automate cellulaire réversible simulant une machine de Turing et que ce faisant on construit implicitement un jeu de tuiles bi-déterministe simulant une machine de Turing. Pour de plus amples discussions autour de ce type de simulation par automate cellulaire, on pourra par exemple consulter [Kar09a].

Nous proposons ici une construction *ad-hoc* directe et simple d'un jeu de tuiles bi-déterministe simulant une machine de Turing réversible au sens de la définition 19 du chapitre 1. La construction est proche de la simulation proposée par Lukkarila [Luk06, Luk10] pour montrer l'indécidabilité du problème du pavage dans le cadre bi-déterministe.

Les tuiles de notre simulation NE et SO déterministe sont représentées sur la figure 4.1. Le diagramme espace-temps de la machine simulée doit être lu selon les diagonales NO–SE du pavage. Une diagonale sur deux correspond à une étape de transition sans déplacement de la tête (tuiles sur fond blanc de la figure) tandis que l'autre correspond à une étape de déplacement de la tête (tuiles sur fond bleu clair de la figure). Des contraintes portant sur les couleurs dans le but de forcer l'alternance entre ces deux étapes sont nécessaires et n'apparaissent pas explicitement sur les tuiles de la figure, mais cet aspect ne présente aucune difficulté formelle. Un motif de calcul est illustré par la figure 4.2.

4.2 Une technique de simulation réversible

Tout jeu de tuiles τ bi-déterministe, dans les directions NE et SO, d'ensemble de couleurs $\mathcal{C}$, est caractérisé par une fonction partielle injective f_τ :

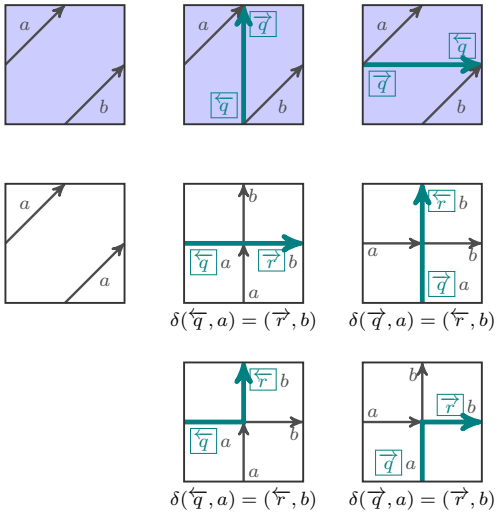


FIGURE 4.1 – Tuiles bi-déterministes simulant une machine de Turing réversible

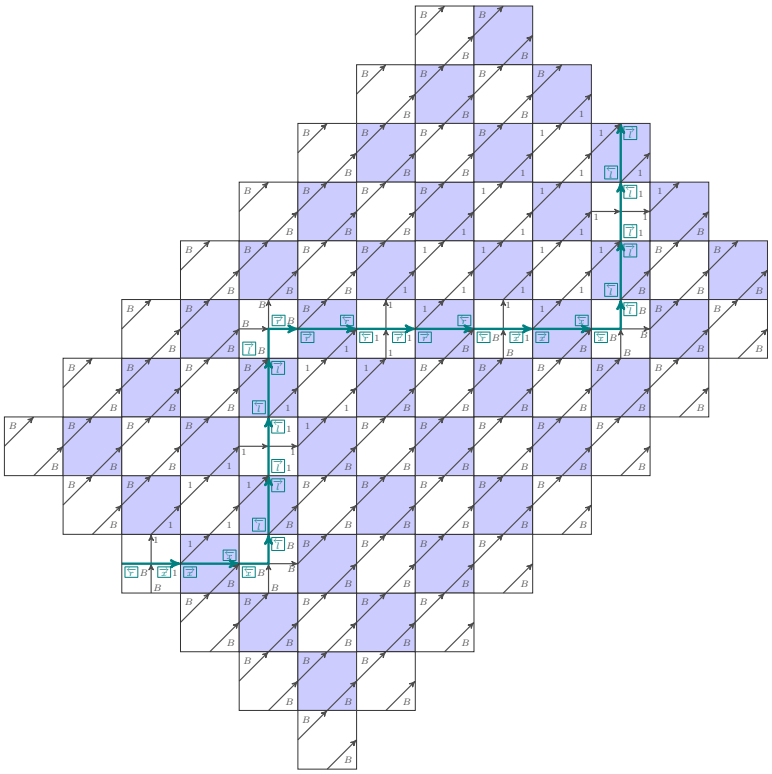


FIGURE 4.2 – Motif de simulation bi-déterministe

$\mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}^2$ telle que $f_\tau(o,s) = (e,n)$ si et seulement si $(o,s,e,n) \in \tau$, c'est-à-dire associant à tout couple (o,s) de couleurs ouest et sud l'unique couple (e,n), s'il existe, de couleurs est et nord permettant de former une tuile du jeu. On identifiera ici les couleurs de $\mathcal{C}$ à leur codage binaire $c \in \{0,1\}^k$ avec $k = \lceil \log_2 |\mathcal{C}| \rceil$. Nous avons besoin dans la construction de ce chapitre de simuler une machine de Turing M_τ réalisant le calcul de la fonction partielle f_τ. On suppose que M_τ atteint un état final rejetant lorsque f_τ n'est pas définie sur l'entrée. Il sera nécessaire pour la construction que ce calcul se fasse en temps constant en la taille de l'entrée. Cela ne semble pas un problème majeur si k est fixé car la taille de l'entrée est alors toujours $2k$. La fonction à calculer est alors une simple fonction booléenne dont le calcul peut aisément être simulé par une machine de Turing en le même temps sur toutes les entrées de taille $2k$. Toutefois, nous aurons également besoin en lieu et place de M_τ d'une machine M réalisant les calculs d'une famille infinie de machines $(M_{\tau_n})_{n \geqslant 0}$ pour une famille infinie $(\tau_n)_{n \geqslant 0}$ de jeux de tuiles dont l'indice n est supposé apparaître explicitement dans le codage binaire des couleurs. La taille de l'entrée est alors variable, égale à $2k_n$ pour les tuiles de τ_n d'ensemble de couleurs $\mathcal{C}_n$, où $k_n = \lceil \log_2 |\mathcal{C}| \rceil + \lceil \log_2 n \rceil$, le second terme servant à coder explicitement le rang n. La taille de la zone de calcul sera elle aussi variable. Le schéma doit pouvoir être suffisamment flexible pour opérer quelle que soit la taille de cette zone (pourvu qu'elle soit suffisamment grande en temps et en espace pour permettre les calculs) et assurer un temps d'exécution identique et exactement égal à la taille de la zone (l'information portée par le ruban géométrique de la machine réalisant le schéma de calcul est nécessaire pour cela) sur toutes les entrées de même taille. Le schéma réversible doit au passage ne laisser aucun « déchet » sur le ruban final car les configurations d'entrée comme de sortie devront pouvoir être prédites par des tuiles déterministes dans les directions NE et SO respectivement alors qu'elles marquent les bords de la zone de calcul.

Les méthodes mises en œuvre ici relèvent essentiellement du domaine du calcul réversible [Lec63, Ben73, Tof80]. La zone de calcul est cependant supposée finie $s \times t$ où s est la dimension spatiale du diagramme et t sa dimension temporelle, mais inconnue de la machine (elle sera calculable connaissant le rang n, mais nous n'utilisons pas ce fait ici). La seule considération géométrique utilisée est la connaissance supposée du milieu géométrique de la zone de calcul : t est supposé pair et l'on pourra considérer que la machine de Turing dispose d'un ruban en lecture seule, que nous appellerons *ruban géométrique*, sur lequel est uniformément écrit 0 dans la portion située entre les temps 0 et $\frac{t}{2} - 1$ de la zone de calcul, et 1 dans la portion située entre les temps $\frac{t}{2}$ et $t - 1$. Comme le contenu de ce ruban est supposé uniforme, la tête de lecture ne s'y déplace pas [1].

1. Les tuiles de simulation bi-réversible présentées en section 4.1 travaillant avec un modèle de machine de Turing réversible dans lequel la tête de la machine se déplace à chaque

On désigne par δ une machine qui duplique son entrée (copie réversible) et par d une machine réalisant un simple un déplacement de k cases (fonction de l'entrée du schéma) du ruban vers la droite. On se donne également un second ruban, initialement rempli de 0, sur lequel travaille un compteur binaire I qui incrémente un nombre en binaire. La simulation procède comme suit (on suppose ici la zone de calcul suffisamment grande) :

— le ruban contient initialement le couple de couleurs ouest et sud $\langle o, s\rangle$ qui est dans un premier temps dupliqué par la machine δ ; la tête est supposée positionnée au milieu du ruban au début du calcul, puis devant la sortie à la fin du calcul de δ ;
— la tête est déplacée de k cases vers la droite pour se positionner devant le second couple $\langle o, s\rangle$;
— la machine M_τ calcule le couple de couleurs $\langle n, e\rangle$ tel que $f(o, s) = (n, e)$ à partir du second couple $\langle o, s\rangle$ du ruban ; on suppose que la tête est de retour à sa position initiale après le calcul de M_τ ;
— le calcul est alors branché sur la machine I qui incrémente un compteur sur un second ruban jusqu'à atteindre le milieu de la zone de calcul ;
— lorsque le milieu de la zone est atteint, I^{-1} prend le relais et décrémente le compteur jusqu'à revenir à son état initial ;
— le déplacement d^{-1}, de k cases vers la gauche, est exécuté pour positionner la tête devant le premier couple de couleurs écrit sur le ruban ;
— M_τ calcule un second couple $\langle n, e\rangle$ à partir des couleurs $\langle o, s\rangle$ présentes sur le ruban de travail ;
— δ^{-1} efface alors l'un des deux couples (identiques), le ruban final ne contient qu'un couple $\langle n, e\rangle$; à la fin du calcul la tête est au milieu du ruban.

Ce schéma de calcul est décrit par la figure 4.3 où le ruban de travail est celui du bas et le ruban du compteur celui du haut. La position de la tête de lecture sur chaque ruban est indiquée par un triangle.

Il est important de disposer d'un compteur réversible pour la portion centrale dont l'état initial n'est pas utilisé au cours du calcul afin de pouvoir effectuer les branchement entre le calcul en attente et le compteur de façon réversible. Un tel compteur binaire sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, [,]\}$ (où le symbole] joue à la fois le rôle de délimiteur droit et du 1 le plus à droite) est fourni par la machine de la figure 4.4.

Nous désignerons par $\mathbb{S}(M_\tau)$ la machine de Turing réalisant le schéma de calcul précédemment présenté sur la machine M_τ caractérisant un jeu de tuiles bi-déterministe τ, ou une famille $\tau = (\tau_n)_{n\geqslant 0}$ de tels jeux. Ce schéma garantit un temps de calcul constant à taille d'entrée fixée et toujours adapté

transition, les transitions présentées ici comme laissant la tête immobile sont supposées dupliquées afin de réaliser un mouvement directement suivi du mouvement inverse.

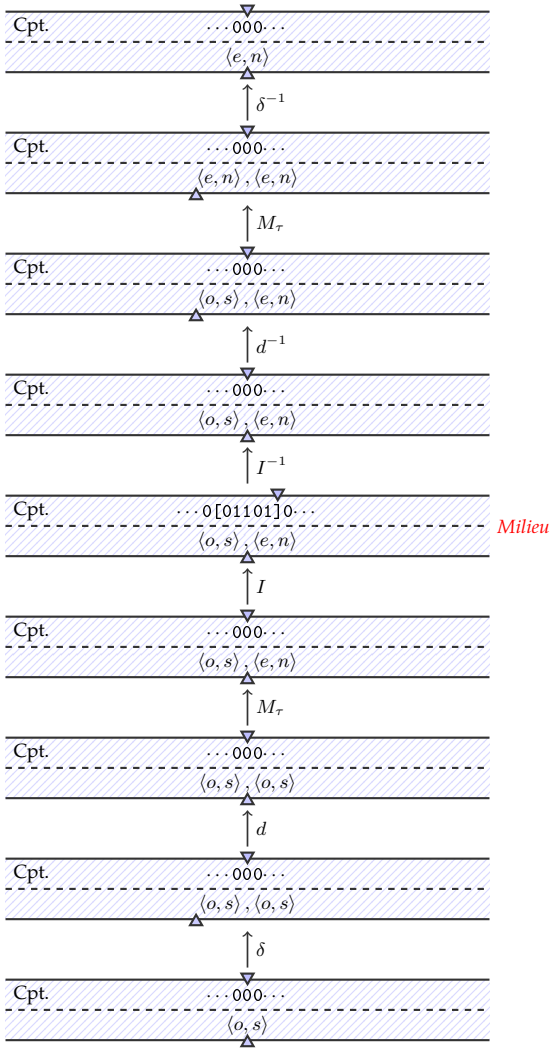


FIGURE 4.3 – Schéma de calcul en temps uniforme

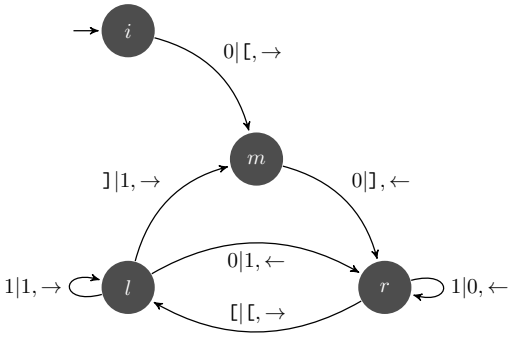


FIGURE 4.4 – Compteur réversible avec état initial

à la zone de calcul pourvu que les bits sur le ruban géométrique soient correctement renseignés. En effet, les étapes de calcul réalisées avant le milieu de la zone (c'est-à-dire l'inversion du compteur binaire) demandent, par construction même, exactement le même temps que les étapes de la seconde partie. Du fait de l'espace nécessaire au compteur, on observera enfin que pour que le schéma soit opérationnel, s doit être plus grand qu'un certain $O(\log t)$ (plus précisément, $s > \lceil \log t \rceil + \mathrm{C}$, où C est une constante, convient ici, le calcul du compteur étant réalisé sur la portion du ruban située à droite de la position de départ de la tête).

4.3 Jeu de tuiles point-fixe bi-déterministe

4.3.1 Simulation d'un jeu de tuiles bi-déterministe

On cherche ici à proposer un schéma de simulation générique afin de simuler de façon bi-déterministe dans ces mêmes directions un jeu τ bi-déterministe quelconque. Dans la construction de Durand, Romashchenko et Shen [DRS08, DRS12], cette simulation est assurée en fabriquant un jeu de tuiles forçant l'assemblage de *macro-tuiles* carrées $n \times n$ au sein desquelles des câbles portant chacun 1 bit apportent les codages des quatre couleurs de la macro-tuile au niveau du ruban initial d'une zone centrale de calcul Turing qui vérifie l'appartenance de la tuile simulée au jeu τ. La dimension n des macro-tuiles doit être choisie suffisamment grande pour que ce calcul ait toujours le temps de terminer.

Dans le cadre bi-déterministe, nous allons procéder de la même façon en déformant les macro-tuiles et en procédant au calcul de la fonction f_τ dans la zone de calcul suivant le schéma proposé en section 4.2. Les macro-tuiles du jeu construit seront organisées comme cela est représenté sur la figure 4.5. Le jeu produit par ce schéma de simulation sera noté $\zeta_{s\times t}(\tau)$ où s désigne la largeur de la zone de calcul (l'espace disponible pour le calcul dans une macro-tuile) et t sa hauteur (le temps disponible pour le calcul). Une première couche de $\zeta_{s\times t}(\tau)$ est utilisée afin de coder le système positionnel au sein des macro-tuiles et à forcer la décomposition de tout pavage en macro-tuiles de cette forme. Il est clair qu'une telle couche peut-être réalisée de façon bi-déterministe : il est naturel d'utiliser des couleurs uniques afin d'identifier chaque position au sein d'une telle construction, on a alors aisément une couche 4-way déterministe avec $N_{s\times t} = \Theta(s^2 + s \times t)$ couleurs.

Sur une seconde couche du jeu $\zeta_{s\times t}(\tau)$, nous allons procéder au calcul de f_τ et à l'acheminement de l'information des couleurs vers la zone de calcul. Au sein de la macro-tuile, quatre situations sont possibles pour les tuiles :

— certaines positions correspondent à une tuile qui ne joue aucun rôle (en vert clair sur la figure) ;

— certaines positions correspondent à l'un des $4k$ câbles (horizontaux ou verticaux) qui transportent chacun un bit de couleur entre l'un

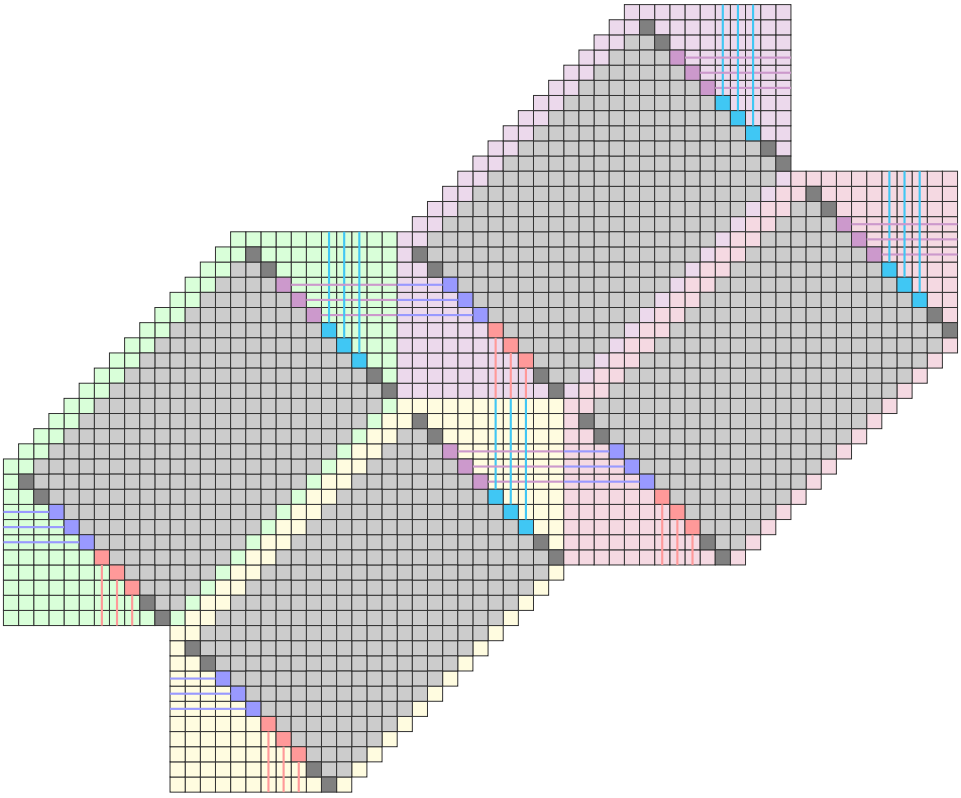


FIGURE 4.5 – Macro-tuiles du jeu de simulation

des bords et la zone de calcul ;
— certaines positions correspondent à une case du ruban initial/final de la zone de calcul ;
— certaines positions correspondent à une tuile de la zone de calcul (en gris sur la figure).

Chaque tuile joue un rôle uniquement identifié par sa position au sein de la macro-tuile. Pour les tuiles de la simulation de machine de Turing, on utilise un jeu bi-déterministe de la forme de celui construit en section 4.1 en y codant $\mathbb{S}(M_\tau)$ pour M_τ une machine de Turing réversible calculant la fonction f_τ suivant le schéma de la section 4.2. Le ruban initial (en bas à gauche) est blanc à l'exception des tuiles situées de part et d'autre de la cellule centrale qui contiennent les codages binaires des couleurs ouest et sud acheminés par les câbles. Comme le ruban d'arrivée de la machine doit être déterminé de façon déterministe dans la direction so, il doit ne contenir que des tuiles codant le symbole blanc à l'exception des tuiles portant le codage des couleurs nord et sud (et aucune autre trace du calcul). C'est aisément le cas grâce au schéma de calcul $\mathbb{S}(M_\tau)$. Le codage de $\mathbb{S}(M_\tau)$ dans les tuiles doit assurer la propriété suivante : lorsque M_τ atteint l'état final rejetant

(signifiant qu'il n'y a pas de tuile du jeu correspondant à l'entrée), il n'est plus possible de compléter le pavage de la macro-tuile. Il ne reste plus qu'à choisir s et t suffisamment grands pour que sur toute entrée de taille $2k$ la machine M_τ calculant f_τ au sein du schéma $\mathbb{S}(M_\tau)$ ait assez d'espace et de temps pour effectuer son calcul. La valeur portée par les cellules du ruban géométrique de la machine $\mathbb{S}(M_\tau)$ est fixée « en dur » suivant la position des tuiles au sein de la macro-tuile (valeur 0 pour les tuiles de la première moitié, 1 pour les tuiles de la seconde moitié).

Il est clair que pour tout jeu de tuiles τ bi-déterministe, le jeu $\zeta_{s\times t}(\tau)$ construit comme précédemment avec les bons choix de paramètres s et t est bi-déterministe et *simule* le jeu initial τ.

Remarque 14. On notera que le jeu ne dépend en réalité qu'indirectement de τ. Sa construction explicite requiert plus précisément la donnée du nombre de câbles k et d'une machine de Turing réversible M_τ calculant f_τ, si bien que la notation $\zeta_{s\times t}(\tau)$ détermine bien k mais cache le choix de la machine (et qu'une notation $\zeta_{s\times t}(k, M)$ serait ici plus rigoureuse).

Remarque 15. Dans la situation présente, on aurait pu supposer que la machine simulée calculant f_τ sur une entrée (o, s) de taille $2k$ termine toujours en écrivant $(e, n) = f_\tau(o, s)$ (lorsque cela existe) en exactement T étapes, et atteint un état final rejetant strictement avant le temps T si $f_\tau(o, s)$ n'est pas définie. Dans ce dernier cas, le pavage de la zone de calcul ne pourra être intégralement complété. De cette façon, il ne reste plus qu'à choisir s suffisamment grand pour que sur toute entrée de taille $2k$ la machine M_τ calculant f_τ au sein du schéma ait assez d'espace pour effectuer son calcul et à ajuster t de façon à ce que la hauteur de la zone de calcul corresponde exactement à T étapes de la machine. On préfère cependant présenter dès à présent une construction utilisant $\mathbb{S}$ pour préparer ce qui va suivre.

4.3.2 Point-fixe apériodique

L'objectif est maintenant de construire un jeu auto-simulant afin d'obtenir l'apériodicité. Le problème évident, déjà rencontré lors de la construction de τ_{104} en section 1.2.3, est que le jeu de tuiles $\zeta_{s\times t}(\tau)$ issu du schéma précédemment proposé augmente *a priori* le nombre de couleurs du jeu initial τ. Le nombre de couleurs de $\zeta_{s\times t}(\tau)$ dépend en effet de q le nombre d'états de la machine M_τ calculant f_τ choisie. Ce dernier paramètre q peut être maîtrisé en remplaçant la machine utilisée par une machine universelle réversible U qui pourra être utilisée afin de simuler le calcul suivant le schéma $\mathbb{S}$ de n'importe quelle machine.

Il convient de considérer le coût de la simulation universelle afin de s'assurer que cela reste sans conséquence. Le choix de la machine universelle peut garantir la simulation de toute machine M de fonctions de temps T et d'espace S en un temps $O(T \log T)$ et un espace $O(S)$ (les constantes inter-

venant sous les O dépendant néanmoins de la machine M simulée). Néanmoins, le temps uniforme du schéma devant être impérativement préservé, la simulation est supposée réalisée plus « naïvement » en $O(S \times T)$ (et donc $O(T^2)$).

On ajoute alors en parallèle du ruban de la machine un ruban en lecture seule contenant un programme P pour une machine réversible M_τ calculant f_τ dans la machine universelle réversible U et l'on note $\xi_{s\times t}(\tau)$ le jeu associé correspondant à $\zeta_{s\times t}(\tau)$ dans lequel la machine est remplacée par une machine universelle « patchée », que l'on notera $\mathbb{S}_U$, pour intégrer $\mathbb{S}$ dans son fonctionnement et simulant $\mathbb{S}(P)$ où le programme P est fixé « en dur » sur le ruban de programme de la machine $\mathbb{S}_U$ (pourvu que $s \geqslant |P| + O(1)$ où la constante correspond à l'écart entre l'espace de la zone de calcul et les bords de la macro-tuile).

Afin de ne pas perturber ce qui a été mis en place, la machine universelle réversible doit réaliser son calcul sans laisser de « déchet » de simulation sur le ruban à la fin du calcul. Il est toujours possible de calculer une fonction injective de façon réversible sans laisser de déchet (et le déchet laissé lorsque la fonction n'est pas injective est le plus souvent l'entrée). En ce qui nous concerne, il existe bien une machine universelle réversible capable de simuler toute machine réversible sans laisser de déchet. C'est une telle machine U que l'on doit utiliser dans la construction.

Afin de rendre le jeu auto-simulant, on peut être tenté d'appliquer une variante du théorème du point fixe de Kleene, comme le font Lafitte et Weiss [LW08] dans leur construction, mais cela ne saurait être pertinent ici dans la mesure où rien ne pourrait nous assurer l'existence d'un pavage par le jeu obtenu (et la question de la pavabilité étant indécidable, il n'y a *a priori* aucun espoir de contourner ce problème). Le programme réalisant le point fixe doit donc être décrit explicitement en s'inspirant des idées de la preuve du théorème de Kleene.

Le plupart des éléments de construction de $\xi_{s\times t}(\tau)$ ne dépend plus de τ et du programme pour f_τ : il s'agit en effet d'éléments de construction de la structure, de la propagation de l'information le long des câbles, de la simulation de la machine fixée $\mathbb{S}_U$ et de la préservation du programme sur le ruban en lecture seule au cours du calcul. Toutes ces règles locales requièrent $\log(N_{s\times t}) + O(1)$ couleurs : $\log(N_{s\times t})$ pour le codage des positions dans la macro-tuile et $O(1)$ pour le bit à transmettre le long des câbles (qui n'est utilisé que si une tuile est positionnée sur un câble) et les états, lettres et bits de programme (sur la seconde couche en lecture seule) du ruban de la machine de Turing (pour les tuiles positionnées dans la zone de calcul). Ces règles peuvent dès lors être directement intégrées au jeu τ en choisissant la valeur de $k = \log(N_{s\times t}) + O(1)$ appropriée. Ce faisant, on décrit un jeu $\tau_{s\times t}$ correspondant à la structure décrite pour un espace-temps $s \times t$ de la machine universelle associé à un programme fixé P sur le ruban en lecture seule de la machine universelle. Essentiellement, le programme P doit

effectuer les calculs structurels suivants :

— il vérifie que les bits correspondant au système de positionnement dans les couleurs ouest et sud sont cohérents entre-eux et, le cas échéant, en déduit sa position dans une macro-tuile ainsi que le type de tuile simulée au sein de la structure et produit les bits de positionnement des couleurs est et nord adéquats en sortie ;

— si cette position correspond à la position d'un câble, il transmet le bit correspondant dans la couleur est ou nord ; cette partie du calcul requiert que les câbles utilisés soient compatibles avec les directions de déterminisme considérées : un bit ne peut être transmis de la couleur ouest à la couleur sud ou de la couleur nord à la couleur est ; les câbles introduits dans la construction étant tous horizontaux ou verticaux, ce problème n'apparaît pas ici ;

— si cette position correspond à la zone de calcul de la machine, il vérifie la cohérence des bits correspondants des couleurs ouest et sud et calcule en sortie les couleurs est et nord de la couche bi-déterministe de simulation de la machine universelle, il transmet sans modification le bit de programme sur le ruban de programme en lecture seule et vérifie que le bit du ruban géométrique de $\mathbb{S}_U$ est bien cohérent avec la position de la tuile simulée dans la macro-tuile (connue et vérifiée au premier point).

Les niveaux 0 (tuiles) et 1 (macro-tuiles) du jeu ainsi construit se comportent comme attendu. En revanche, à partir du niveau 2 (macro-macro-tuiles formées par l'assemblage des macro-tuiles), si la structure décrite est bien respectée, le programme de la machine universelle contenue au sein des tuiles de ce niveau devient parfaitement arbitraire car rien ne le contraint dans la construction. Le pavage par $\tau_{s\times t}$ censé être simulé à ce niveau n'est donc *a priori* pas correct et à partir du niveau supérieur, la structure est *a priori* intégralement perdue. Autrement dit, si l'on prenait une pré-image des macro-macro-tuiles de ce niveau par le schéma de simulation, on obtiendrait bien un pavage de Wang (car le codage des couleurs est forcé d'être identique de part et d'autre d'une frontière du fait de la structure imposée) mais par un jeu de tuiles arbitraire (le programme n'étant pas le même dans toutes les tuiles, il est possible de simuler de façon valide n'importe quelle tuile) sans rapport avec le jeu $\tau_{s\times t}$ que l'on voudrait imposer.

Pour résoudre ce problème, il faut compléter le programme P en imposant une contrainte supplémentaire afin d'assurer la préservation du programme entre les niveaux de la hiérarchie (une forme de *self sanity check*) : si la position calculée de la tuile simulée correspond à la i^{e} position du ruban d'entrée de la machine, le programme vérifie que le bit de programme qu'il porte est bien égal au i^{e} bit de son propre programme (que la machine peut aller lire sur sa couche en lecture seule). Ainsi, le programme est bien préservé à tous les niveaux de la simulation.

Il reste à justifier que l'on peut bien choisir des paramètres s et t de façon à ce que le programme dispose du temps et de l'espace nécessaire à sa simulation dans le schéma $\mathbb{S}$. Le programme P ne fait que de simples calculs et vérifications prenant un temps polynomial sur une entrée en $\Theta(\log(N_{s\times t}))$. Il a donc besoin d'un espace-temps $O(\text{polylog}(N_{s\times t}))$. La simulation universelle en temps uniforme $\mathbb{S}_U(P)$ est alors elle-aussi en $O(\text{polylog}(N_{s\times t}))$. Or on dispose d'un espace-temps $\Theta(N_{s\times t})$, donc quitte à prendre s et t assez grands, cela ne pose aucun problème.

Le jeu de tuiles $\tau_{s\times t}$ ainsi construit est apériodique par les mêmes arguments d'auto-simulation que ceux utilisés en section 1.2.3.

4.4 Facteur d'échelle variable

L'intérêt majeur des constructions de type point-fixe est l'importante variété de leurs applications. Mais pour ce que type de construction soit utilisable comme squelette de calcul, il est nécessaire d'aménager un espace de calcul utilisable au sein des macro-tuiles de tout niveau de la hiérarchie. Or en l'état, la taille de cet espace de calcul est maintenue constante par auto-similarité à tous les niveaux. Il s'agit dès lors de mettre en place un facteur d'échelle variable allant croissant lorsque l'on monte dans la hiérarchie. En l'état, le facteur d'échelle est fixé (et même codé « en dur » dans le jeu) : chaque macro-tuile (de niveau 1) contient $N_{s\times t}$ tuiles, chaque macro-tuile de niveau 2 contient $N_{s\times t}$ macro-tuiles de niveau 1, etc. On considère ici une suite $(s_n, t_n)_{n\geqslant 0}$ de facteurs d'échelle et l'on veut que les macro-tuiles de niveau 1 soient constituées de $N_{s_0\times t_0}$ tuiles, que les macro-tuiles de niveau 2 soient constituées de $N_{s_1\times t_1}$ macro-tuiles de niveau 1, etc. Dans une telle construction, le programme P sera partagé par toutes les tuiles, il doit donc être générique pour permettre un facteur d'échelle $s \times t$ variable (qui n'est plus codé « en dur » dans le programme). Dès lors, le schéma de calcul $\mathbb{S}_U(P)$ sera véritablement amené à travailler sur des entrées et des zones de calculs de taille variable. Les contraintes d'uniformité qu'il garantit sont alors essentielles à la construction : le schéma assure que le temps mis par le calcul au niveau i de la hiérarchie est exactement le même sur toutes les entrées et est exactement égal à t_i, dimension « temporelle » de la zone de calcul.

Chaque macro-tuile de niveau k doit pouvoir vérifier ses coordonnées parmi les $N_{s_k\times t_k}$ tuiles au sein de son père de niveau $k+1$. Elle doit donc connaître explicitement son propre niveau k et être capable dans l'espace-temps disponible, de calculer s_k et t_k. Pour cela, on ajoute le codage du niveau k dans les câbles (ce qui nécessite $\log(k)$ câbles) afin de s'assurer que toutes les macro-tuiles voisines partagent bien le même niveau [2]. Cette in-

2. Typiquement, un ruban en lecture seule, comme pour le programme, peut être réservé au sein de la machine de Turing pour recevoir k.

formation étant partagée dans tout le niveau (sans rupture le long des bordures des macro-tuiles de niveau $k+1$), cet ajout ne pose pas de problème de déterminisme.

Il faut impérativement ici avoir l'espace au niveau k de disposer les $\log(k)$ câbles ajoutés. On doit pour s'en assurer avoir s_k suffisamment grand devant $\log(k)$. Ainsi la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ doit croître strictement plus vite qu'un certain $\Theta(\log(k))$.

Par ailleurs, le programme doit être adapté de la façon décrite dans les paragraphes suivants.

Il doit désormais être générique vis-à-vis du facteur d'échelle $s \times t$. Ce facteur est, dans ce paragraphe, supposé connu, mais il devra être calculé en fonction du niveau, nous y reviendrons détaillons dans ce qui suit. Cette généricité ne pose pas de problème particulier : on se donne un aménagement récursif de la structure, générique en fonction de s et t, et le programme doit simplement être capable de calculer rapidement, en fonction de s et t ($O(\text{polylog}(s \times t))$ convient), les positions des câbles et de la zone de calcul dans la macro-tuile de taille N et faire les calculs des règles habituelles correspondantes. Cela comprend tout d'abord la vérification de la cohérence des bits de positionnement, après quoi la tuile déduit sa position dans la macro-tuile (et produit les positionnements adéquats en sortie). Elle tire de cette information le rôle qu'elle joue dans la macro-tuile et assure les transmissions d'information appropriées selon qu'il s'agit d'une position portant un câble ou d'une position de la zone de calcul.

Aux vérifications décrites dans le paragraphe précédente s'ajoutent en particulier, et de la même manière qu'auparavant, la déduction pour les tuiles de la zone de calcul du bit porté par le ruban géométrique suivant la position de la tuile simulée dans sa macro-tuile (selon qu'elle se situe dans la première ou la seconde moitié de la zone de calcul).

Le programme doit assurer la cohérence des $4 \times \log(k)$ câbles portant son niveau k en vérifiant l'égalité des valeurs de k portées par les couleurs ouest et sud et les transmettre pour les câbles nord et est.

Le programme doit calculer s_k et t_k à partir de son niveau k et vérifier la cohérence des coordonnées ainsi que du reste des éléments de la construction : câbles et diagramme, comme mentionné précédemment, en fonction de ses coordonnées et donc du type de tuile auquel il correspond. Il faut pour cela pouvoir calculer s_k et t_k dans l'espace-temps imparti, en particulier avoir au moins la place pour ne serait-ce qu'écrire le codage de s_k et t_k en $\Theta(s_{k-1})$ ($\log(s_k) + \log(t_k)$ suffisamment petit devant s_{k-1}). Ainsi la suite $(s_n, t_n)_{n\geqslant 0}$ ne doit pas croître trop vite (en particulier $s_k = 2^{s_{k-1}}$ est trop rapide).

Enfin, le programme doit s'assurer que le niveau augmente bien d'une unité à chaque étape de simulation. On utilise pour cela toujours la même technique pour « transmettre » une information entre les niveaux : lorsque la macro-tuile est à une position correspondant au i^{e} bit de la zone réservée

au codage du niveau sur le ruban d'entrée de la machine de Turing, le programme vérifie que ce bit est bien égal au i^{e} bit du codage de $k+1$ (qu'il calcule aisément, connaissant son propre niveau k).

Comme dans la section précédente, le schéma de calcul de la section 4.2 assure un même temps de calcul à la machine simulée sur toutes les entrées de la même taille à tous les niveaux de la hiérarchie. Grâce au schéma, ce temps est exactement égal au niveau k à la dimension temporelle t_k de la zone de calcul. Et ce malgré un facteur d'échelle variable et par conséquent la taille variable de ces zones de calcul.

La construction ainsi enrichie décrit un jeu de tuiles bi-déterministe qui force bien une structure hiérarchique à facteur d'échelle variable dans ses pavages et dont tous les niveaux (tuiles, macro-tuiles, macro-macro-tuiles, *etc*) décrivent des jeux bi-déterministes. Le schéma de calcul $\mathbb{S}$, dont on aurait pu se passer plus tôt, comme souligné par la remarque 15, est ici indispensable à la réalisation réversible des calculs en temps uniforme dans des zones de dimensions variables.

4.4.1 Applications

Il est maintenant possible d'illustrer quelques applications de cette construction en y injectant un calcul Turing quelconque.

Théorème 27 (Lukkarila [Luk06])**.** *Le problème du pavage bi-déterministe est indécidable.*

Démonstration. On ajoute un nouveau calcul Turing en parallèle qui simule une machine M réversible quelconque depuis l'entrée vide, interdit le pavage si un état final est atteint avant la moitié du temps imparti par la zone de calcul et sinon inverse le calcul lorsque l'on arrive à la moitié de la zone de calcul (qui est identifiée dans notre construction). Ainsi les rubans initial et final de cette machine sont intégralement blancs et sont ainsi constructibles de manière déterministe. Une séquence $(s_n, t_n)_{n\geqslant 0}$ de facteurs d'échelle choisis strictement croissants (pour $(s_n)_{n\geqslant 0}$ comme pour $(t_n)_{n\geqslant 0}$) assure que la machine sera simulée sur des temps arbitrairement longs au sein du pavage. Ainsi il existe un pavage si et seulement si la machine simulée ne s'arrête pas. ■

Cette preuve peut en réalité être combinée à une technique de Hochman [Hoc11] exploitant la structure hiérarchique au sein des pavages afin de rendre l'ensemble des pavages par le jeu de tuiles résultant expansif dans toutes les directions [3]. On retrouve ainsi un résultat de Guillon et Zinoviadis [GZ13] sur les automates cellulaires partiels.

3. Le bi-déterminisme ne garantit l'expansivité que dans les directions $]-\infty, 0[$, cf. chapitre 5.

Théorème 28 (Guillon et Zinoviadis [GZ13])**.** *Le problème de la non-vacuité de l'ensemble limite immortel $\Diamond$ des automates cellulaires partiels (cf. chapitre 1, section 1.3.3) est indécidable.*

Interprété en termes de pavages déterministes, ce résultat est équivalent au suivant.

Théorème 29. *Le problème du pavage reste indécidable pour les jeux de tuiles bi-déterministes (NE et SO) dont l'ensemble des pavages est expansif dans toutes les directions sauf la pente* 1.

Schéma de preuve. Une preuve parfaitement formalisée nécessiterait le recours aux notions de Hochman [Hoc11] (en particulier la *prediction shape*, définition 1.2). L'idée générale est de réaliser la construction de la preuve du théorème 27 en choisissant des facteurs d'échelle $(s_n, t_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissants et tels que $t_n > 2s_n$. L'analyse de Hochman [Hoc11] (conduisant au théorème 5.3) s'applique alors et l'ensemble des pavages, non vide si et seulement si la machine de Turing simulée s'arrête, est expansif dans toutes les directions sauf la pente 1. ■

Chapitre 5

Tuiles à cavaliers

Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [LGO14].

Comme nous l'avons déjà souligné et illustré au cours des chapitres précédents, le déterminisme tel que défini de manière syntaxique sur les tuiles de Wang présente l'inconvénient de ne pouvoir exhiber de particules autres que celles de directions horizontales et verticales. En effet, la contrainte syntaxique forte du déterminisme implique l'expansivité de l'ensemble des pavages dans toutes les directions sauf ces deux dernières, ce qui interdit toute construction locale de particules comme nous l'illustrerons au cours de ce chapitre. Lukkarila est particulièrement confronté à cette difficulté dans sa preuve de l'indécidabilité du problème du pavage (avec tuile initiale) car la réalisation 4-way déterministe d'une simulation de machine de Turing requiert typiquement la construction du zigzag des mouvements de la tête de lecture de façon déterministe dans toutes les directions. La construction d'un zigzag de manière déterministe n'est, à une petite astuce de transformation du jeu de tuiles près, en réalité pas plus difficile que celle d'une diagonale. Mais la construction d'une diagonale, parfaitement anodine dans un cadre non déterministe, représente la principale difficulté de la construction de Lukkarila. Ce marquage d'une diagonale fait appel au jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe de Kari et Papasoglu [KP99] et requiert une subtile étude de ses pavages afin de s'appuyer sur leur structure et d'y édifier l'échafaudage nécessaire à l'identification d'au plus une diagonale dans les pavages résultants.

Dans ce chapitre, inspirés par les automates cellulaires partitionnés introduits par Morita [Mor95], nous proposons une généralisation des tuiles de Wang par des *tuiles à cavaliers* tout en conservant une condition syntaxique simple au déterminisme mais en retrouvant, dans une certaine mesure, la possibilité de construire localement des particules et collisions non triviales. De façon analogue aux tuiles de Wang, une tuile à cavalier est une

tuile carrée unité partageant une couleur avec chacune de ses quatre voisines directes, mais également avec chacune des huit tuiles distantes d'un déplacement de cavalier aux échecs. Le déterminisme selon une direction diagonale s'exprime alors simplement comme une condition syntaxique sur les uplets de couleurs formant le jeu. Grâce à ce nouveau formalisme, on conserve l'expansivité sur de larges intervales de directions tout en s'autorisant certains intervales de pentes pour la construction locale de particules. Nous illustrerons l'intérêt de cette famille de jeux de tuiles à l'aide de deux problèmes qui requièrent un traitement complexe par Lukkarila [Luk09].

La première construction est l'ingrédient clef des preuve de l'indécidabilité du problème du pavage : la résolution du problème du pavage avec tuile initiale grâce à la construction d'une simulation de machine de Turing de façon déterministe dans toutes les directions pour des tuiles à cavaliers. Alors que la résolution de ce problème par Lukkarila est une construction élaborée dont le point crucial est le marquage d'une diagonale, nous montrerons qu'il en est autrement dans le cadres des tuiles à cavaliers déterministes où le problème peut être traité directement sans trop de difficulté.

La seconde construction est celle d'une diagonale, c'est-à-dire une droite de pente 1 ou -1 qui ne peut être construite localement, c'est-à-dire comme une particule, à l'aide de tuiles à cavaliers et qui requiert donc la mise en place d'une structure globale. Contrairement au cadre des tuiles de Wang 4-way déterministes, la construction d'une diagonale n'est pas une étape indispensable à la démonstration de l'indécidabilité du problème du pavage avec tuile initiale dans le cadre des tuiles à cavaliers : ce problème est traité de manière plus élémentaire dans la première construction évoquée précédemment. Néanmoins, Lukkarila [Luk09] pose la question suivante : « *Could there be a significantly simpler tile set for drawing a single diagonal line* 4*-way deterministically ?* » La construction que nous allons proposer dans ce chapitre à l'aide des tuiles à cavaliers est significativement plus simple, combinant des techniques de symétrie temporelle (*time-symmetry*) et la mise en place d'une ligne de fusiliers infinie (*firing squad* infini à la manière de Kari [Kar94]) avec des propriétés de la substitution de Thue-Morse pour le obtenir le 4-way déterminisme.

5.1 Des tuiles de Wang aux tuiles à cavaliers

La notion de 4-way déterminisme impose de très fortes contraintes sur le jeu de tuiles. En effet, elle limite de façon considérable les capacités de construction locale de particules. Afin de permettre des constructions déterministes de particules, il est indispensable de relâcher les contraintes en généralisant la notion de déterminisme local, par exemple en considérant de plus larges *rayons* $r \geqslant 1$ pour la règle locale de déterminisme.

5.1.1 Rayon de déterminisme

Définition 36 (Déterminisme à rayon r)**.** Un jeu de tuiles τ est NE *déterministe à rayon* r si pour tout motif *valide* (i.e. ne contenant aucune erreur de pavage le long de ses arêtes intérieures) carré de taille $(2r+1) \times (2r+1)$ par τ, la tuile centrale est parfaitement déterminée par la sous-diagonale formée par les $2r$ tuiles en positions $(1, 2r)$, $(2, 2r-1)$, $\ldots$, $(2r-1, 1)$.

On observera que cette notion reste purement *locale* dans la mesure où les motifs carrés considérés sont tous les motifs valides et pas seulement ceux susceptibles d'apparaître effectivement dans un pavage.

Le déterminisme à rayon r dans les trois autres directions diagonales $\{$SO, SE, NO$\}$ est défini de façon symétrique.

Définition 37 (4-way déterminisme à rayon r)**.** Un jeu de tuiles est *4-way déterministe à rayon* r s'il est simultanément déterministe à rayon r (comprendre du moins au plus r) dans les quatre directions diagonales.

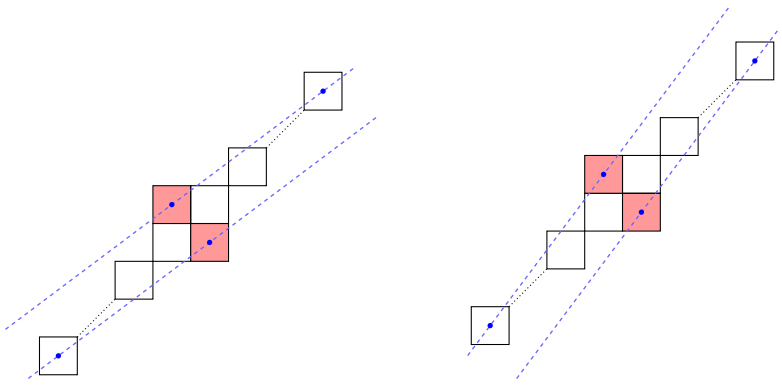
Les différents rayons de déterminisme peuvent être comparés à la lumière de la notion d'expansivité de leurs pavages comme le montre la proposition suivante.

Proposition 19. *Si τ est un jeu de tuiles 4-way déterministe à rayon r, alors l'ensemble de ses pavages $\mathcal{X}_\tau$ est (au moins) expansif dans les directions* $\left]-\frac{r}{r-1}, -\frac{r-1}{r}\right[\cup \left]\frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}\right[$.

Une preuve parfaitement formalisée de ce résultat nécessite la définition de quelques outils formels complémentaires afin de manipuler précisément les objets que l'on considère ici, telle par exemple la *coding relation* de Boyle et Lind [BL97] (définition 3.1). Pour des raisons de lisibilité, on donnera ici une preuve légèrement moins formelle ayant l'avantage de présenter de façon concise et néanmoins convaincante nos arguments.

Schéma de preuve. Observons tout d'abord que, pour $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, s'il existe $\rho, \varepsilon > 0$ tel que $L_\alpha(\rho) \subsetneq L_\alpha(\rho+\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathcal{X}_\tau$, $x|_{L_\alpha(\rho)}$ détermine parfaitement $x|_{L_\alpha(\rho+\varepsilon)}$, alors $\mathcal{X}_\tau$ est expansif dans la direction α (car, en « itérant » l'argument, $x|_{L_\alpha(\rho)}$ détermine exactement x). On pourra se référer au lemme 3.3 de [BL97] pour plus de détails.

Pour un jeu de tuiles SE et NE déterministe à rayon r, les deux cellules rouges des sous-figures de la figure 5.1 sont parfaitement déterminées, par définition même, par les $2r$ cellules blanches. Pour toute pente $\alpha \in \left]\frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}\right[$, c'est-à-dire strictement comprise entre les deux pentes limites en bleu sur les figures, il existe un $\rho_0 > 0$ tel que, à translation près, les cellules rouges (i.e. leurs centres respectifs) soient en dehors de la fenêtre d'expansivité $L_\alpha(\rho_0)$ tandis que les (centres des) cellules blanches sont tous à l'intérieur de cette



(a) Pente limite $\frac{r-1}{r}$ (b) Pente limite $\frac{r}{r-1}$

FIGURE 5.1 – Directions d'expansivité limites pour le déterminisme à rayon r

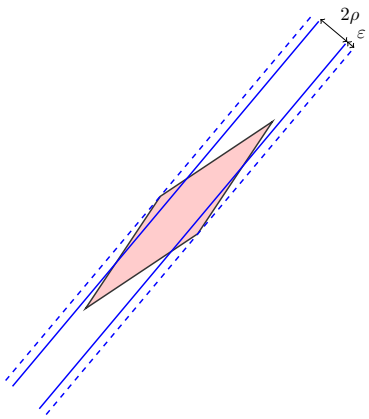


FIGURE 5.2 – Expansivité dans une direction $1 < \alpha < \frac{r}{r-1}$

dernière. Cet argument appliqué le long de toute fenêtre d'expansivité de rayon $\rho \geqslant \rho_0$ assure que cette dernière peut être étendue localement des deux côtés en appliquant la règle locale de déterminisme. Autrement dit et comme illustré par la figure 5.2 où la règle de déterminisme est représentée par le losange rouge aligné sur la droite de pente 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L_\alpha(\rho) \subsetneq L_\alpha(\rho + \varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathcal{X}_\tau$, $x|_{L_\alpha(\rho)}$ détermine parfaitement $x|_{L_\alpha(\rho+\varepsilon)}$ ce qui implique l'expansivité dans la direction α.

L'autre intervale de directions d'expansivité est obtenu symétriquement en considérant les deux autres directions orthogonales de déterminisme à rayon r. ■

Les directions d'expansivité sont en réalité étroitement reliées aux *particules* qui peuvent être localement réalisées. Quelques considérations tech-

niques méritent cependant d'être soulignées. Il est relativement clair que l'expansivité est, à un changement près du rayon d'expansivité ρ, parfaitement indépendante du profil choisi pour la pente (c'est-à-dire du profil de pente utiliser pour dessiner la fenêtre d'expansivité dans $\mathbb{Z}^2$). En revanche, à rayon de déterminisme fixé, la capacité à marquer une ligne dépend de son profil. Avant toute chose, afin de fixer quelques notations, posons $\vec{e_1} = (1, 0)$ et $\vec{e_2} = (0, 1)$ les vecteurs unités respectivement horizontal et vertical de $\mathbb{Z}^2$.

Définition 38 (Profil)**.** Pour toute pente $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, un *profil (périodique)* pour α est une séquence finie $(u_0, \ldots, u_{k-1}) \in \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}^k$ telle que :

$$\alpha = \frac{\sum_i u_i \cdot \vec{e_2}}{\sum_i u_i \cdot \vec{e_1}}$$

Étant donné un profil $P = (u_0, \ldots, u_{k-1})$ pour α, on définit le sous-shift associé $\mathcal{L}_P \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ comme le sous-shift engendré par (i.e. le plus petit sous-shift contenant) la configuration c_P coloriant exactement une ligne de pente α 4-connectée suivant le profil P, i.e. formellement définie par $c_P(x) = 1$ si $x = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} u_{i \bmod k}$ ou $x = -\sum_{-n \leqslant i < 0} u_{i \bmod k}$ pour $n \geqslant 0$, et $c_P(x) = 0$ pour tout autre $x \in \mathbb{Z}^2$. On pourra noter que $\mathcal{L}_P$ contient exactement toutes les versions translatées de c_P, ainsi que le coloriage blanc (toutes les cellules à 0) pour des raisons de compacité.

Définition 39 (Particule)**.** Un coloriage $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, où Σ contient une couleur blanche identifiée c_0, est une *particule* de direction $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ s'il est périodique dans la direction α (i.e. c admet un vecteur de périodicité $(p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha = \frac{p_y}{p_x}$) et ultimement constant égal à c_0 dans toute autre direction.

On notera que tous les résultats que nous allons présenter restent en réalité valides si l'on remplace *ultimement constant* par *ultimement périodique* dans la définition d'une particule. Cette définition signifie de façon équivalente que toutes les cellules non blanches de c sont contenues $L_\alpha(\rho) + \Delta$ pour un certain $\rho > 0$ et $\Delta \in \mathbb{Z}^2$.

Définition 40 (Pente réalisée)**.** Une pente $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ est *réalisée localement* par un jeu de tuiles τ s'il existe une projection alphabétique $\pi : \tau \to \{0, 1\}$ (naturellement prolongée aux coloriages $\pi : \tau^{\mathbb{Z}^2} \to \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$) telle qu'il existe un profil P pour la pente α tel que $\pi(\mathcal{X}_\tau) = \mathcal{L}_P$ et tout pavage de $\mathcal{X}_\tau$ est une particule.

Cette définition introduit en définitive une notion renforcée de soficité pour $\mathcal{L}_P$. On s'intéressera dans la suite aux pentes qu'il es possible de réaliser avec différentes classes de jeux de tuiles déterministes.

Définition 41 (Pente réalisable)**.** Une pente α est *réalisable localement* par une classe de jeu de tuiles C s'il existe un jeu de tuiles $\tau \in C$ qui réalise localement α.

Les résultats suivants concluent nos remarques sur les rayons de déterminisme.

Proposition 20. *Si une pente α est réalisée localement par un jeu de tuiles τ alors α n'est pas une direction d'expansivité pour $\mathcal{X}_\tau$.*

Démonstration. Pour $\rho > 0$ quelconque, considérons un premier pavage projeté sur le coloriage intégralement blanc (tout à 0) et un second pavage qui se projette sur une droite de pente α suffisamment éloignée de l'origine de façon à ce que seules des tuiles blanches en soient visibles dans la fenêtre d'expansivité $L_\alpha(\rho)$. Les deux pavages coincident sur $L_\alpha(\rho)$ mais sont distincts, ainsi $\mathcal{X}_\tau$ ne saurait être expansif dans la direction α. ■

La proposition précédente est en particulier intéressante sous sa forme contraposée. Ainsi, si une classe de jeux de tuiles, typiquement déterministes, garantit certaines directions d'expansivité aux ensembles de pavages de ses jeux, typement du fait de la règle locale de déterminisme, alors les pentes correspondant à ces directions ne sont pas réalisables localement par la classe.

Proposition 21. *Les pentes localement réalisables par les jeux de tuiles 4-way déterministes à rayon r sont exactement*

$$\mathbb{Q} \cap \left(\left[-\infty, -\frac{r}{r-1} \right] \cup \left[-\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r} \right] \cup \left[\frac{r}{r-1}, +\infty \right] \right).$$

Démonstration. La partie « réalisabilité » sera prouvée en détails dans le cadre plus restrictif des tuiles à cavaliers, à rayon 2 (il suffit de conserver le même profil, et de simplement retirer les couleurs additionnelles des cavaliers qui ne sont plus requis dans la mesure où la règle locale de déterminisme peut déjà « voir » les cellules « émettant » ces couleurs) dans la preuve de la proposition 22. Cela se généralise directement et sans difficulté au cas des tuiles de Wang déterministes pour un rayon arbitraire.

La partie « exactement » est une conséquence des propositions 19 et 20. ■

5.1.2 Tuiles à cavaliers

Tandis que le 4-way determinisme classique des tuiles de Wang est une propriété purement syntaxique du jeu de tuiles, vérifier le déterminisme à rayon r implique de considérer tous les motifs carrés valides de taille $(2r+1) \times (2r+1)$. On introduit ici des tuiles à cavaliers déterministes comme une notion commode et purement syntaxique de déterminisme à rayon 2 qui peut être lue et vérifiée directement sur les tuiles.

L'objet

Définition 42 (Tuile à cavaliers)**.** Étant donné un alphabet fini $\mathcal{C}$ de couleurs, une *tuile à cavaliers* est formellement un 12-uplet de $\mathcal{C}^{12}$.

Pour des raisons de lisibilité, chacune des douze composantes d'une tuiles à cavaliers sera identifiée par une direction parmi

$$\{\text{O}, \text{S}, \text{E}, \text{N}, \text{OS}, \text{SO}, \text{SE}, \text{ES}, \text{EN}, \text{NE}, \text{NO}, \text{ON}\}$$

et pour une tuile à cavaliers $t \in \mathcal{C}^{12}$, on désignera par exemple par $t_{\text{O}} \in \mathcal{C}$ la couleur correspondant à la direction O.

Les définitions suivantes sont parfaitement analogues à celle du cadre des tuiles de Wang.

Définition 43 (Jeu de tuiles à cavaliers)**.** Un *jeu de tuiles à cavaliers* est un ensemble fini de tuiles à cavaliers.

Définition 44 (Pavage par tuiles à cavaliers)**.** Un *pavage* du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par un jeu de tuiles à cavaliers τ est une application $t : \mathbb{Z}^2 \to \tau$ associant à chacune des cellules du plan une tuile à cavaliers du jeu et vérifiant les contraintes suivantes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}
t(x,y)_{\text{O}} &= t(x-1,y)_{\text{E}} & t(x,y)_{\text{S}} &= t(x,y-1)_{\text{N}} \\
t(x,y)_{\text{E}} &= t(x+1,y)_{\text{O}} & t(x,y)_{\text{N}} &= t(x,y+1)_{\text{S}} \\
t(x,y)_{\text{OS}} &= t(x-2,y-1)_{\text{EN}} & t(x,y)_{\text{SO}} &= t(x-1,y-2)_{\text{NE}} \\
t(x,y)_{\text{SE}} &= t(x+1,y-2)_{\text{NO}} & t(x,y)_{\text{ES}} &= t(x+2,y-1)_{\text{ON}} \\
t(x,y)_{\text{EN}} &= t(x+2,y+1)_{\text{OS}} & t(x,y)_{\text{NE}} &= t(x+1,y+2)_{\text{SO}} \\
t(x,y)_{\text{NO}} &= t(x-1,y+2)_{\text{SE}} & t(x,y)_{\text{ON}} &= t(x-2,y+1)_{\text{ES}}
\end{aligned}$$

Ces contraintes expriment simplement le fait que chaque tuile à cavaliers d'un pavage partage chacune des couleurs de ses différentes composantes avec l'une de ses douze tuiles voisines représentées sur la figure 5.3.

Définition 45 (Déterminisme à cavaliers)**.** Un jeu de tuiles à cavaliers τ est NE *déterministe* si chacune de ses tuiles $t \in \tau$ est uniquement identifiée par son quadruplet de couleurs $(t_{\text{ON}}, t_{\text{O}}, t_{\text{S}}, t_{\text{SE}})$,

Cette définition exprime le fait qu'il existe au plus une tuile dans le jeu qui soit compatible avec les quatre couleurs désignées par la figure 5.4.

Le déterminisme dans les trois autres directions diagonales (SO, SE et NO) est défini symétriquement.

Définition 46 (4-way déterminisme à cavaliers)**.** Un jeu de tuiles à cavaliers est *4-way déterministe* s'il est simultanément déterministe dans les quatre directions diagonales SO, SE, NE et NO.

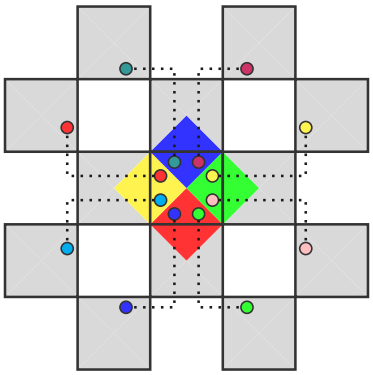


FIGURE 5.3 – Voisinage d'une tuile à cavaliers

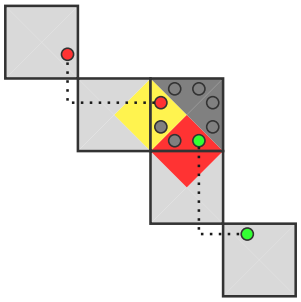


FIGURE 5.4 – NE déterminisme

Une première construction illustrative

On donne ici sans entrer dans les détails un exemple de réalisation d'un système de particules et collisions non trivial : la construction d'une parabole représentée sur la figure 5.5. Cette construction de parabole par signaux s'articule sur le même principe que les constructions de signaux et fonctions dans les automates cellulaires uni-dimensionnels à la manière par exemple de Mazoyer et Terrier [MT99]. Un tel système serait techniquement très complexe à mettre en œuvre dans le cadre des tuiles de Wang 4-way déterministes au sens classique. Il est en revanche relativement simple à développer dans le cadre des tuiles à cavaliers 4-way déterministes. Seuls les cavaliers de directions {SO, SE, NE, NO} sont utilisés ici. Ainsi il n'y a pas d'ambiguïté sur les directions des cavaliers apparaissant sur la figure, et les tuiles peuvent dès lors être directement déduites de cette dernière. Les quelques détails techniques relatifs à la gestion des collisions par des tuiles à cavaliers, à défaut d'une caractérisation plus précise des collisions réalisables dans ce cadre, sont ici laissés à l'appréciation du lecteur : essentiellement les collisions doivent être réalisées suffisamment lentement pour rester à portée de cavalier.

Le reste de ce chapitre est consacré à l'illustration de cette nouvelle no-

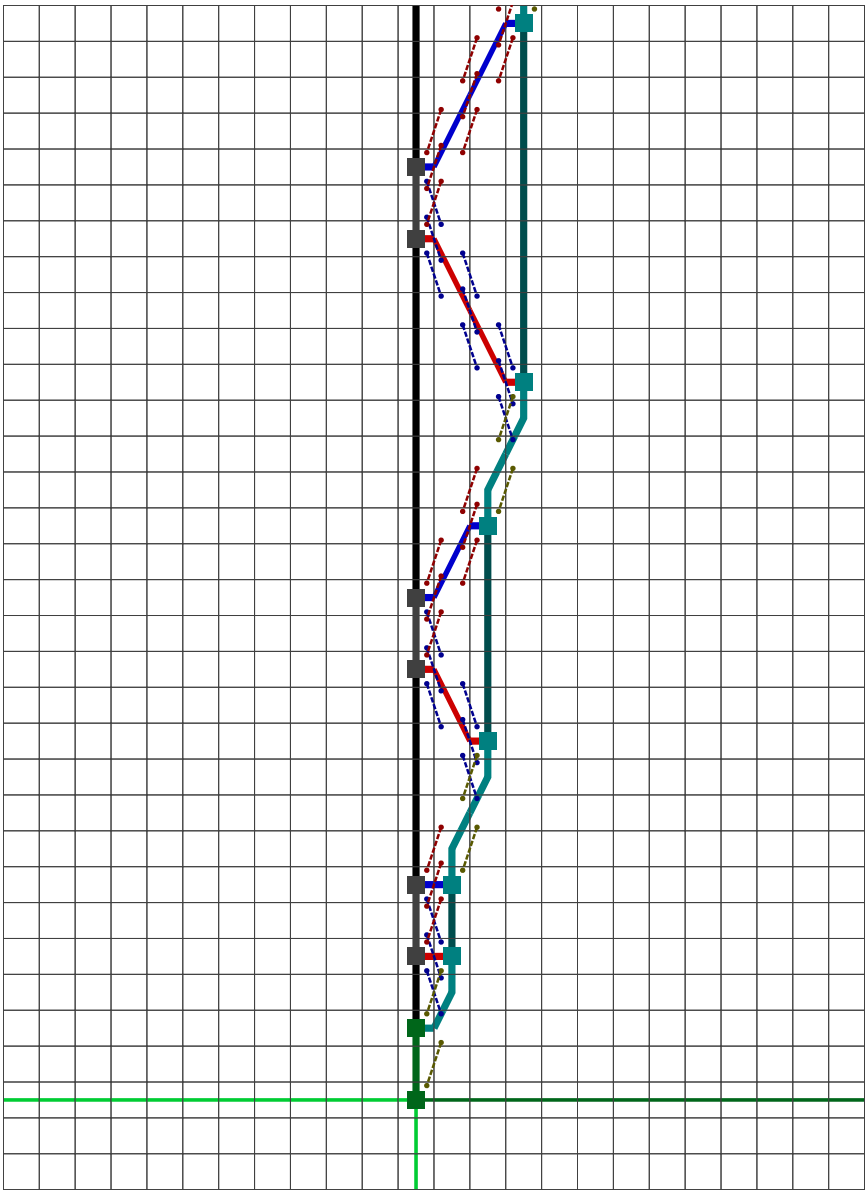


FIGURE 5.5 – Construction déterministe d'une parabole

tion syntaxique de déterminisme à rayon 2. Nous montrerons en particulier que des réalisations qui sont très délicates à obtenir dans le cadre 4-way déterministe classique peuvent être traitées de façon plus élémentaire, notamment grâce au recours possible dans une certaine mesure aux particules et collisions, dans le cadre 4-way déterministe à cavaliers.

5.2 Le problème du pavage avec tuile initiale

Simuler une machine de Turing dans le cadre 4-way classique comme le fait Lukkarila [Luk09] requiert un arsenal complexe d'ingrédients parmi lesquels en particulier un jeu de tuiles apériodique et un grand nombre de considérations techniques sur la structure de ses pavages. Les directions des cavaliers procurent suffisamment de flexibilité pour permettre le traitement de ce problème directement et démontrer l'indécidabilité du problème du pavage avec tuile initiale de la façon standard et sans artifice particulier, hormis quelques détails légèrement techniques.

Nous allons ici simuler une machine réversible au sens de la définition 19 du chapitre 1 qui constitue un modèle formel particulièrement adapté à notre cadre de simulation dans les pavages.

Le jeu de tuiles à cavaliers décrit par la figure 5.6 est 4-way déterministe et simule une machine de Turing réversible $(\Sigma, Q, \overleftrightarrow{q_i}, F, \delta)$. Signalons pour commencer que seuls les cavaliers de directions $\{\text{SO}, \text{SE}, \text{NE}, \text{NO}\}$ sont utilisés par cette simulation, dès lors il n'y a pas d'ambiguïté sur les directions des cavaliers représentés sur la figure 5.6. Afin de pouvoir utiliser efficacement les cavaliers dans le but de garantir le déterminisme, il est nécessaire de ralentir la simulation. Dans ce but, chaque transition de la machine de Turing est décomposée en trois étapes dans cet ordre :

1. une étape de transition où la transition est effectuée mais sans que la tête ne soit encore déplacée, bien que son mouvement futur soit déjà contenu dans l'état de $\overleftrightarrow{Q}$ (les tuiles correspondantes sont représentées sur la ligne du bas de la figure) ;
2. une étape d'attente où rien ne se passe (tuiles de la ligne intermédiaire de la figure) ;
3. une étape de déplacement lors de laquelle la tête est enfin déplacée (ligne du haut de la figure).

Les contraintes de Wang afin de forcer cet ordre dans les étapes du processus de simulation ne sont pas explicitement représentées sur les tuiles de la figure 5.6, mais un simple compteur modulo 3 codé dans les couleurs verticales des tuiles suffit à régler cette question. En supposant qu'un calcul Turing est correctement initialisé dans un pavage, alors chaque ligne du diagramme espace-temps de la machine de Turing peut être lue dans le pavage en considérant une ligne sur trois.

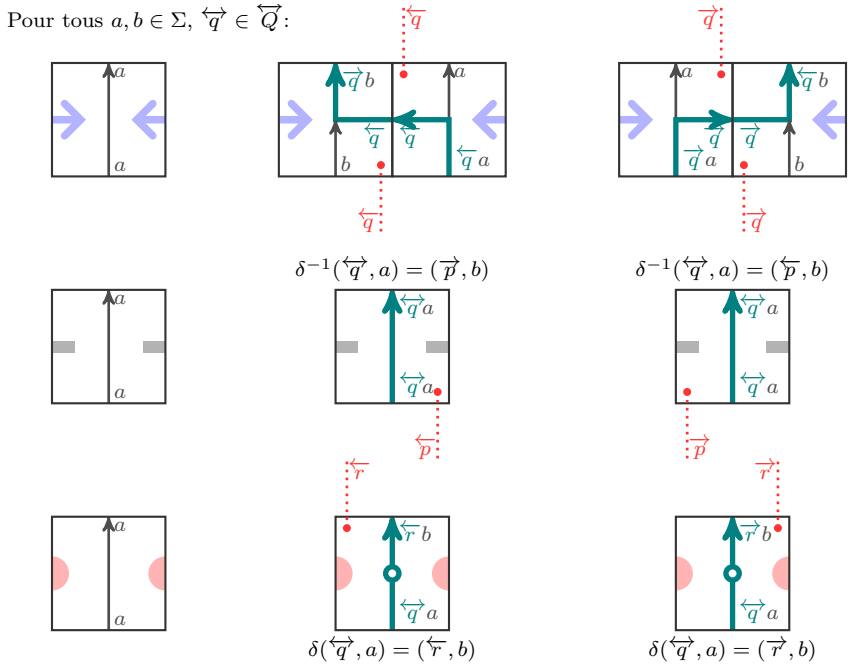
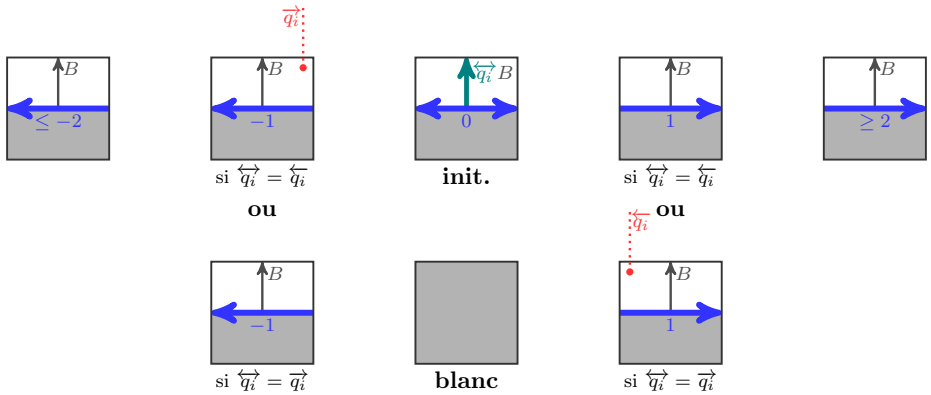
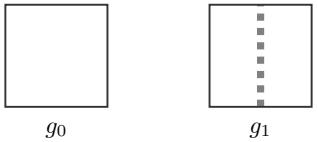


FIGURE 5.6 – Jeu de tuiles à cavaliers 4-way déterministe simulant une machine de Turing réversible

Il reste à assurer l'initialisation du calcul Turing. Pour ce faire, on a recours à la tuile initiale et aux autres tuiles de la figure 5.7(a) qui permettent de forcer un ruban intégralement blanc (entrée vide) contenant une unique tête de lecture de la machine de Turing à apparaître dans les pavages. Les étiquettes « $\leqslant -2$ », « -1 », « 0 », « 1 » et « $\geqslant 2$ » apparaissant sur les tuiles désignent certaines contraintes additionnelles sur les couleurs horizontales : la tuile d'indice 0 n'est compatible à la gauche (resp. droite) qu'avec la tuile d'indice -1 (resp. 1). De la même manière, à la gauche (resp. droite) la tuile d'indice -1 (resp. 1), seule la tuile « $\leqslant -2$ » (resp. « $\geqslant 2$ ») ne peut apparaître. Cependant, ces tuiles ne peuvent être ajoutées au jeu de tuiles de simulation précédente sans perdre le 4-way déterminisme. En effet, il n'est pas difficile de remarquer qu'en l'état, prédire les tuiles d'indices -1 ou 1 n'est pas possible dans toutes les directions. Afin de résoudre ce problème, on peut ajouter une couche très simple d'information représentée par les tuiles de Wang (sans cavaliers) de la figure 5.7(b) : une tuile blanche g_0 et une tuile g_1 transportant un signal « fantôme » (qui doit être préservé verticalement tout au long d'une colonne dans un pavage). En posant τ_T le jeu de tuiles à cavaliers de simulation de machine de Turing de la figure 5.6, τ_i^1 les trois tuiles d'initialisation d'indices $\{-1, 0, 1\}$ de la figure 5.7(a), τ_i^2 les deux tuiles d'initialisation d'étiquettes « $\leqslant -2$ » et « $\geqslant 2$ » de la figure 5.7(a) et b la tuile blanche de la figure 5.7(a), on définit le jeu de tuiles à cavaliers



(a) Tuiles à cavaliers d'initialisation



(b) Signaux fantômes

FIGURE 5.7 – Tuiles à cavaliers complémentaires pour initialiser le calcul Turing

à deux couches $\tau = ((\tau_T \cup \{b\}) \times \{g_0, g_1\}) \cup (\tau_i^1 \times \{g_1\}) \cup (\tau_i^2 \times \{g_0\})$, qui peut, comme nous l'avons déjà souligné au cours des chapitres précédents, être interprété comme un jeu de tuiles à cavaliers standard sur les couples de couleurs de chaque couche. Dans un pavage, les trois colonnes consécutives contenant les tuiles d'initialisation d'indices $\{-1, 0, 1\}$ sont les seules portant un signal fantôme (tuile g_1) sur leur seconde couche. Cela permet simplement de prédire ces tuiles dans toutes les directions, ainsi le jeu de tuiles à cavaliers τ est 4-way déterministe. Dans la mesure où les tuiles réalisant les transitions de la machine ne sont pas définies sur les états finaux, τ pave le plan si et seulement si la machine de Turing simulée ne s'arrête pas partant du ruban vide. On en dérive alors de façon immédiate le résultat suivant.

Théorème 30. *Le problème du pavage avec tuile initiale est indécidable pour les jeux de tuiles à cavaliers 4-way déterministes.*

Un exemple de pavage complet pour cette construction est fourni par la figure 5.8.

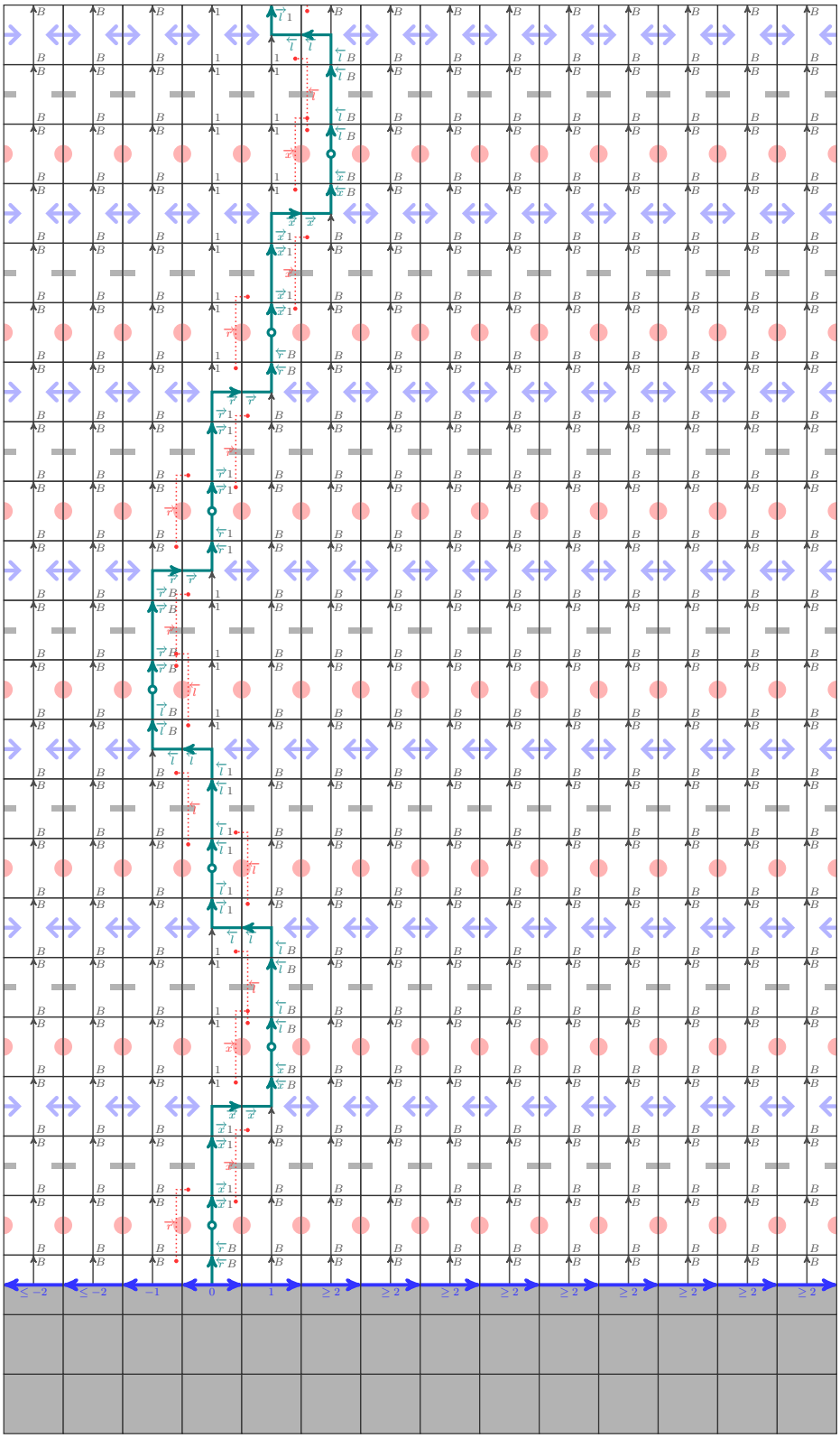


FIGURE 5.8 – Exemple de pavage simulant un calcul Turing

5.3 Marquer une diagonale

Considérer des tuiles à cavaliers déterministes autorise la construction aisée de particules qui ne sont pas réalisables dans le cadre usuel des tuiles de Wang déterministes (cadre dans lequel pour mémoire les seules pentes réalisables sont 0 et ∞ d'après la proposition 21), ce qu'illustre le résultat suivant.

Proposition 22. *Les pentes locallement réalisables en utilisant des tuiles à cavaliers 4-way déterministes sont exactement* $\mathbb{Q} \cap \left([-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty]\right)$.

Démonstration. Rappelons tout d'abord que la partie « exactement » est conséquence des propositions 19 et 20. On remarque également que les cas des pentes 0 et ∞ sont triviaux, que le cas de l'intervale $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ est équivalent au cas de l'intervale $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ à une symétrie horizontale près sur les tuiles et que le cas de l'intervale $[2, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 2]$) est équivalent à celui de l'intervale $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ (resp. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$) à une symétrie le long de la diagonale SO–NE (resp. NO–SE) des tuiles. Il est ainsi suffisant de considérer le cas d'une pente $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pour une telle pente, le déterminisme dans les directions NE et SO peut être obtenu sans effort (car on voit directement les tuiles de la pente dans ces directions), dès lors seules les couleurs portées par les cavaliers de directions $\{\text{OS}, \text{SO}, \text{EN}, \text{NE}\}$ peuvent être utiles ici, et nous n'utiliserons de fait que ceux de directions $\{\text{OS}, \text{EN}\}$ dans ce qui suit. La difficulté est d'être capable de prédire l'apparition des angles du profil de la pente dans les directions NO et SE directions. Tout ce dont nous avons besoin est d'exhiber un profil (considéré cycliquement) pour α dont les angles (c'est-à-dire les transitions $\vec{e_1}/\vec{e_2}$) peuvent être prédits à rayon 2 grâce aux couleurs des cavaliers. Il n'est pas difficile d'observer que tant que le profil ne contient pas de sous-séquence (consécutive) de la forme $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (resp. $(\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1})$), il est toujours possible de « voir » la ligne avec les couleurs des cavaliers de directions $\{\text{SO}, \text{EN}\}$ (resp. $\{\text{OS}, \text{NE}\}$) lorsque l'on se déplace dans la direction NO (resp. SE). Si l'on se limite à la seule direction de cavalier EN (resp. OS), c'est le profil plus restrictif suivant $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (resp. $(\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1})$) qui est interdit. Notons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \geqslant 2p > 0$ et considérons le profil $P = (\underbrace{\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2}}_{p \text{ fois}}, \underbrace{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_1}}_{q-2p \text{ fois}})$. Il satisfait la propriété requise et en utilisant une couleur de cavalier spéciale afin de marquer chacun des angles de la ligne, on construit de façon assez directe un jeu de tuiles à cavaliers 4-way déterministe afin de réaliser localement la droite de pente α. ■

Notre construction principale va reposer sur ces pentes réalisables en marquant une diagonale d'une manière bien plus légère que la construction de Lukkarila [Luk09] dans le cadre des tuiles de Wang. L'idée générale est d'avoir recours à une structure hiérarchique essentiellement uni-

dimensionnelle constituée de signaux s'organisant de manière similaire à une version infinie de la solution classique de Minsky [Min67] au problème de synchronisation du *Firing Squad* [Maz87, Yun93] pour les automates cellulaires, dans le même esprit que la construction de Kari [Kar94] pour les ensembles limites d'automates cellulaires. Cette structure devra de plus être « réversible » de manière à ce que le jeu de tuiles puisse être rendu déterministe dans deux directions opposées, disons NE et SO. La structure devra également être compatible avec le déterminisme à rayon 2 des tuiles à cavaliers dans les deux directions orthogonales NO et SE. Le lecteur pourra garder à l'esprit le fait que seules les cavaliers de directions $\{\text{OS}, \text{SO}, \text{EN}, \text{NE}\}$ seront utilisés dans ce qui suit. Ainsi, le jeu de tuiles sera déterministe à rayon 1 (déterminisme classique des tuiles de Wang) dans les directions NE et SO, tandis qu'il sera déterministe à rayon 2 (en utilisant les cavaliers) dans les directions NO et SE.

5.3.1 Structure générale

La structure générale est décrite sur la figure 5.9 où les points rouges représentent la diagonale à marquer, à laquelle on fera référence sous le terme de *ligne de feu*. Pour des raisons de commodité, les quatre types de signaux seront appelés H, H', V et V' comme indiqué par la figure. Leurs pentes respectives sont 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et ∞. Une structure hiérarchique binaire est utilisée afin de marquer certains points le long des *lignes de front* successives jusqu'à ce que la granularité de l'espace permette à tous les points marqués sur un même front d'être suffisamment proches les uns des autres pour décider via la règle locale de *tirer* à un certain point (et ainsi de marquer la diagonale). Nous énumérerons les lignes de front par leur *rang* commençant à 0 pour la ligne de feu et allant croissant lorsque l'on s'éloigne de cette dernière. Les points du front de rang k sont régulièrement espacés sur ce dernier et deux points consécutifs sont séparés par exactement $2^k - 1$ positions non marquées. Les points marqués du front de rang k seront appelés :

— soit *piliers* lorsqu'ils correspondent aux points marqués sur le front de rang $k + 1$ (c'est-à-dire aux points qui étaient déjà marqués jusqu'alors, si l'on regarde la structure comme un *firing squad* d'automate cellulaire uni-dimensionnel dont le temps s'écoulerait lorsque l'on se déplace dans la direction NE) ;

— soit *milieux* lorsqu'ils correspondent exactement à la position du milieu entre deux piliers.

Si l'on se réfère à la figure 5.9 pour l'orientation, construire une règle locale assurant à la construction d'être déterministe dans la direction NE n'est pas particulièrement difficile et peut être réalisé de manière assez directe en utilisant les signaux considérés. En revanche, rendre la construction déterministe dans la direction opposée SO est plus ardu car il est nécessaire pour cela d'être capable de distinguer de façon parfaitement locale et dé-

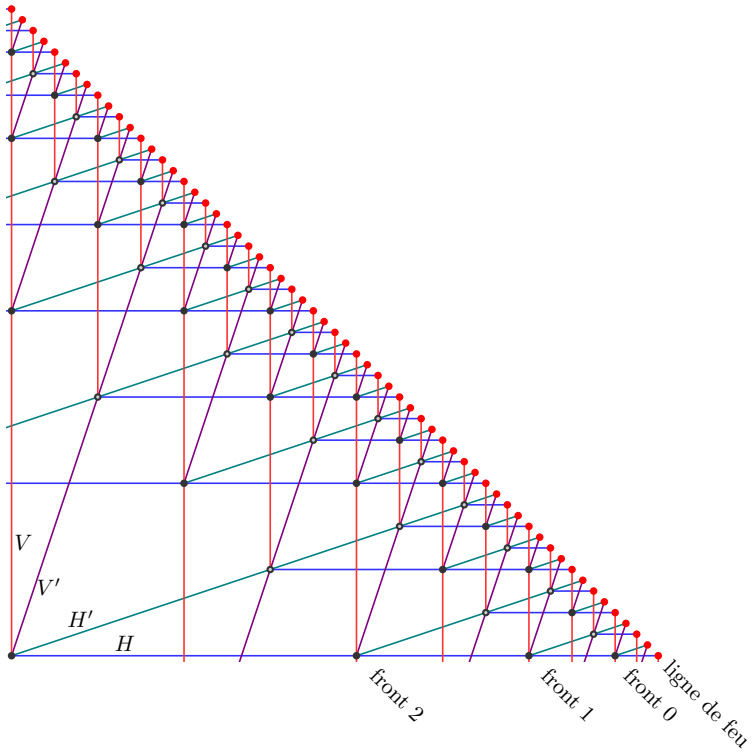


FIGURE 5.9 – Schéma général de la structure

terministe entre les piliers et les milieux alors que, se déplaçant dans la direction so, on vient de quitter précisément d'un front de rang inférieur sur lequel cette information n'est *a priori* pas disponible. Pour ce faire, nous avons besoin d'une source de séquences infinies bien structurées de bits alternants. Une façon de construire une telle information pourrait être de recourir à une séquence qui serait le point fixe d'une substitution bien choisie.

5.3.2 Détour par la substitution de Thue-Morse

Dans cette section, nous introduisons la substitution de Thue-Morse et expliquer les raisons pour lesquelles son utilisation peut être utile à notre construction. Au sujet de cette substitution extrêmement classique en combinatoire sur les mots, on pourra consulter par exemple les écrits du collectif Pytheas Fogg [PF02].

Définition 47 (Substitution de Thue-Morse)**.** On définit la *substitution de Thue-Morse* $s : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ par $s(0) = 01$ et $s(1) = 10$.

Cette définition s'étend naturellement aux mots finis de $\{0,1\}^*$ (resp.

aux mots infinis de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) en posant, pour tout $u \in \{0,1\}^*$ (resp. $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$), $s(u)_{2i+k} = s(u_i)_k$ pour tout $i \in \{0,\ldots,|u|-1\}$ (resp. $i \in \mathbb{N}$) et $k \in \{0,1\}$. Le *mot de Thue-Morse* $\mathcal{T} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est l'unique point fixe de s commençant par la lettre 0 : $\mathcal{T} = \lim_{n\to+\infty} s^n(0)$ qui est bien défini car $s(0)_1 = 0$ et est infini car $|s(0)| > 1$. Comme le mot de Thue-Morse est un point fixe de s, il peut être désubstitué en lui-même par s en plaçant des barres toutes les deux lettres en commençant avec une barre en position 0.

Définition 48 (Facteur pair/impair)**.** Un facteur donné v du mot de Thue-Morse est dit *pair* s'il existe une position paire $p \in \mathbb{N}$ à laquelle il apparaît dans le mot, c'est-à-dire telle que $\mathcal{T}_p \cdots \mathcal{T}_{p+|v|} = v$, ce qui implique qu'il y a une barre juste devant la première lettre v_0 du facteur v (i.e. entre $\mathcal{T}_{p-1}$ et $\mathcal{T}_p$ dans le mot de Thue-Morse) dans l'une des possible décompositions de v.

De façon complémentaire, un facteur est dit *impair* s'il apparaît à une position p impaire dans le mot de Thue-Morse, ce qui signifie que la barre est située entre v_0 and v_1 dans une décomposition possible de v.

Un facteur peut être simultanément pair et impair s'il apparaît dans le mot de Thue-Morse en des positions paires et impaires : par exemple 101 apparaît en positions 2 et 11. Cependant, le lemme suivant met en évidence le fait qu'un facteur suffisamment grand ne peut être simultanément pair et impair.

Lemme 9. *Tout facteur de $\mathcal{T}$ de longueur au moins quatre est soit pair, soit impair, ce qui signifie qu'il admet une unique décomposition.*

Énonçons avant toute démonstration un résultat classique au sujet du mot de Thue-Morse.

Proposition 23 (folklore)**.** *$\mathcal{T}$ ne contient aucun facteur triple www avec $w \in \{0,1\}^*$.*

Pour une preuve de ce résultat, on pourra une nouvelle fois consulter Pytheas Fogg [PF02] (chapitre 5, proposition 5.1.6 qui énonce un résultat un peu plus fort).

Preuve du lemme 9. Comme l'indique la proposition 23, $\mathcal{T}$ ne contient aucun facteur triple. On observe également que si 00 ou 11 apparaît, alors la barre est nécessairement placée au milieu ($0|0$ ou $1|1$) car ces deux facteurs n'appartiennent pas à $s(\{0,1\}) = \{01, 10\}$ (et cette observation n'est pas problématique puisque les triples facteurs 000 et 111 n'apparaissent pas). Parmi les 16 mots de $\{0,1\}^4$, seuls 10 ne contiennent pas de triple facteur et ces derniers apparaissent tous dans le mot de Thue-Morse. Tous contiennent 00 ou 11 (et donc leur décomposition n'est pas ambiguë) à l'exception de 0101 et 1010. Ces deux derniers facteurs étant symétriques, on ne considérera dans la suite que le cas de 0101. S'il était impair, i.e. $0|10|1$,

alors on aurait nécessairement $10|10|10$ en considérant les deux lettres précédant et suivant directement ce facteur dans $\mathcal{T}$, ce qui serait contradictoire car cela donnerait naissance à un triple facteur $10.\ 0101$ est donc pair et uniquement pair. Par soucis de complétude, les quatre facteurs suivants sont pairs $\{0101, 1001, 1010, 0110\}$, tandis que les six autres sont impairs $\{1011, 0010, 1100, 0011, 0100, 1101\}$. Le résultat reste vrai pour tout facteur de taille plus grande que quatre car il contient en particulier un facteur de taille quatre. ■

Ce lemme est une version renforcée du lemme 5.1.8 de Pytheas Fogg [PF02] (chapitre 5) qui porte sur les facteurs de taille 5 du mot de Thue-Morse. Essentiellement, les ingrédients de la preuve sont les mêmes. La construction présentée dans cette section avait dans une première version été intégralement réalisée avec des facteurs de taille 5, avant de remarquer qu'il était possible de réduire ce nombre à 4. La construction en résultant, outre qu'elle comporte moins de tuiles, est plus symétrique quant à la description des tuiles des points marqués ou de la ligne de feu.

Remarque 16. Le lemme précédent exprime une forme faible de *reconnaissabilité* de la substitution de Thue-Morse. Ce type de question est notamment abordé pour le cadre général des substitutions par Pytheas Fogg [PF02] et Mossé [Mos92, Mos96].

Dès lors, il suffit d'examiner les facteurs de taille quatre afin d'être capable de déterminer sans ambiguïté leur alignement. On observera en particulier que si l'on déplace lettre à lettre une fenêtre de taille quatre le long du mot de Thue-Morse, on voit précisément une séquence de facteurs pairs et impair en alternance. Cela constituera la séquence alternante de bits dont nous avons besoin pour notre construction.

5.3.3 La construction

Réalisation générale

Maintenant que tous les objets requis ont été définis, chaque signal de la construction portera dorénavant un facteur de taille quatre du mot de Thue-Morse. Les signaux de types H et V ne porteront que des facteurs pairs, tandis que ceux de types H' et V' ne porteront que des facteurs impairs. Quand deux signaux se rencontrent en un point marqué, on requiert qu'ils portent tous les deux le même facteur u ($|u| = 4$) et l'on substitue ce facteur par s ($|s(u)| = 8$) afin de dériver les quatre facteurs qui seront transportés par les quatre signaux « sortants » de la collision (en considérant le temps croissant lorsque l'on se déplace dans la direction NE) :

— le signal produit de type V doit porter le mot $s(u)_0 \cdots s(u)_3$;
— celui de type V' doit porter le mot $s(u)_1 \cdots s(u)_4$;
— celui de type H' doit porter $s(u)_3 \cdots s(u)_6$;

— enfin, le signal de type H doit porter $s(u)_4 \cdots s(u)_7$.

Observons tout d'abord que la connaissance de $s(u)$ permet aisément d'en déduire u de façon unique. Bien qu'il n'y ait pas de « signal médian » susceptible de porter le facteur manquant $s(u)_2 \cdots s(u)_5$, ce dernier peut facilement être déduit des quatre autres mots dérivés dont on dispose (car il est intégralement recouvert par ces derniers).

Cela définit une structure cohérente. En effet, considérons tout mot U bi-infini de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dont tout facteur apparaît dans le mot de Thue-Morse. Pour des raisons topologiques, un tel mot existe. L'ensemble de tous ces mots est exactement l'ensemble Ω_s engendré par s et est un sous-shift non vide de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Tous ces mots fournissent des séquences bi-infinies alternées en le sens évoqué précédemment. Supposons que U est « écrit » le long d'une ligne de front de rang $k > 1$ dans le sens suivant : deux points marqués consécutifs de la ligne portent des facteurs consécutifs de taille quatre de U avec un décalage d'une lettre seulement entre-eux. Les mécanismes locaux de substitution/désubstitution précédemment décrits en les points marqués forcent un mot de ce sous-shift à apparaître le long de chaque autre ligne de front afin d'être utilisé comme une source de bits permettant d'alterner convenablement entre les milieux et les piliers d'une ligne de front, de façon cohérente avec les autres lignes de manière à ce qu'une structure hiérarchique binaire globale appropriée soit édifiée.

Une réalisation de cette structure à l'aide de tuiles à cavaliers est présentée sur la figure 5.10 où les couleurs sont symbolisées par des notations de types signaux plus commodes et lisibles. Les couleurs des cavaliers sont ne sont pas présentes sur cette figure mais sont toutes illustrées sur les vignettes de la figure 5.11. Les signaux de types H et V, de pentes respectives 0 et ∞, portent des facteurs pairs et se rencontrent en des piliers (carrés noirs pleins sur les figures). Les tuiles des piliers forcent leur deux signaux entrant de types H et V à transporter le même facteur u. Les quatre facteurs sortants étant dérivés de ce mot commun, une tuile de pilier est parfaitement déterminée par u, qui est explicitement écrit à côté de chaque pilier sur la figure 5.10. De manière similaire, les signaux de types H' et V', de pentes respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ réalisées en utilisant des profils particuliers (pour des raisons qui seront exposées plus tard) et deux couleurs différentes de cavaliers afin de distinguer les deux différents types d'angles apparaissant dans ces profils, sont illustrés par les figures 5.11(a) et 5.11(b) et portent des facteurs impairs. Ces signaux se rencontrent en les milieux, représentés par des carrés gris sur les figures. Les tuiles des milieux forcent leurs deux signaux entrants de types H' et V' à transporter le même facteur u. Les quatre facteurs sortants étant dérivés de ce mot commun, une tuile de milieu est parfaitement déterminée par u, qui est explicitement écrit à côté de chaque milieu sur la figure 5.10.

Ce jeu de tuiles est en majeure partie une traduction assez directe du schéma de construction précédemment exposé (figure 5.9 (et de son symé-

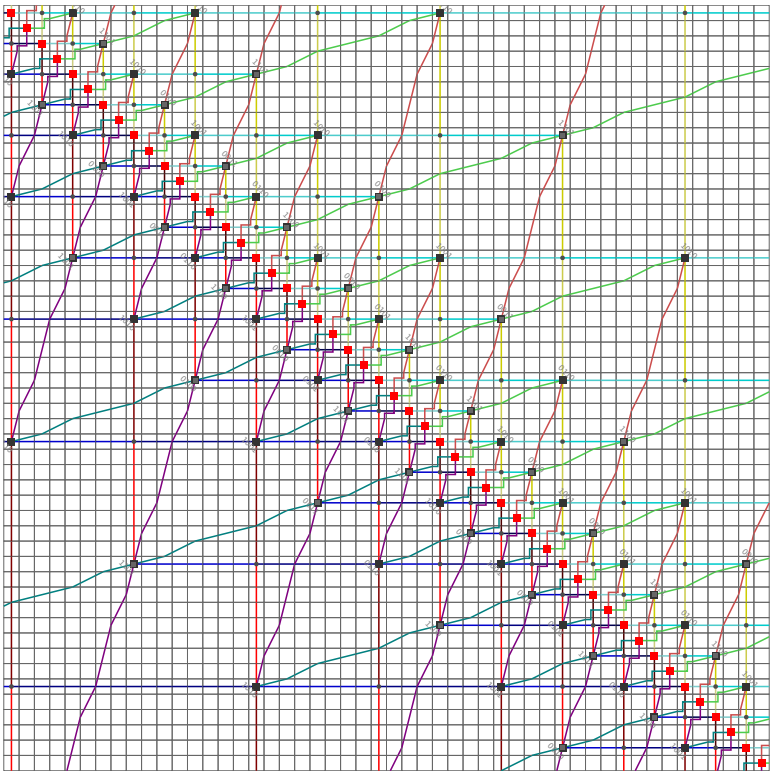
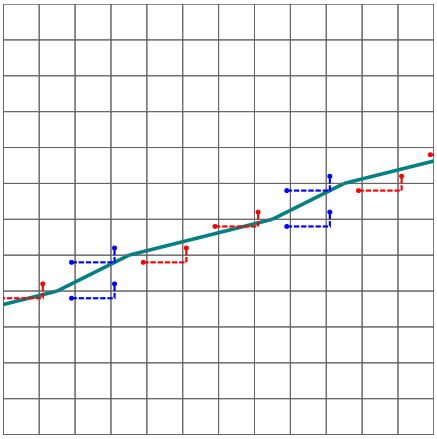


FIGURE 5.10 – Marquer une diagonale

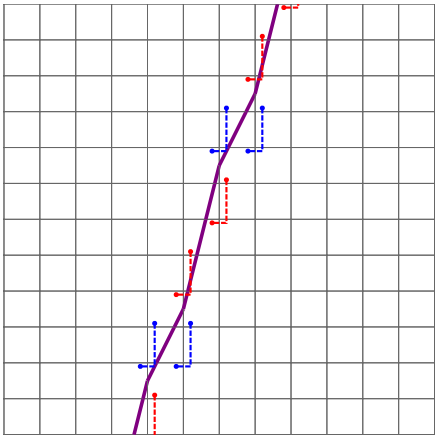
trique par rapport à la ligne de feu) sous formes de tuiles. Certains points nécessitent cependant quelques explications supplémentaires. C'est ce à quoi seront consacrées les sous-sections suivantes.

Signaux de types H et V

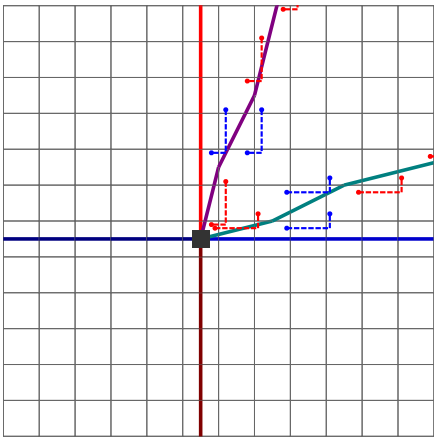
Tout d'abord, quand un signal de type H rencontre un signal de type V, ces derniers ne se croisent pas sans conséquence : une *collision* a en réalité lieu (point gris sur les figures) et il y a en conséquence deux types distincts de signaux H/V. Quand deux signaux du premier type se rencontrent, il se croisent et sont changés au passage en le second type (identifié par une couleur plus sombre sur les figures). Quand deux signaux du second type se rencontrent, ils produisent cette fois un pilier qui produit à son tour deux signaux du premier type. Cette collision entre signaux du premier type doit être traitée de façon particulière lorsqu'il s'agit de la dernière collision avant la ligne de feu, ce qui peut être correctement détecté car dans cette situation la tuile correspondante doit nécessairement également contenir des signaux de types H'/V' puisque l'on est à proximité de la ligne de feu, comme l'illustre la figure 5.11(e). Dans ce cas, le premier type de signal H/V est



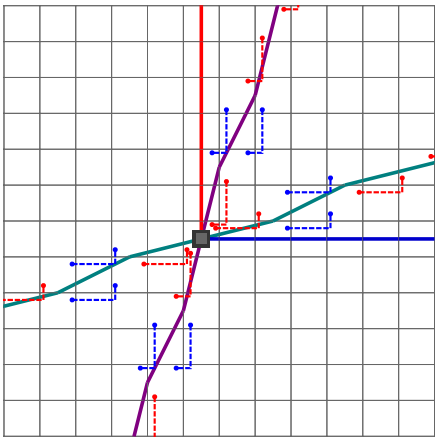
(a) Signaux H'



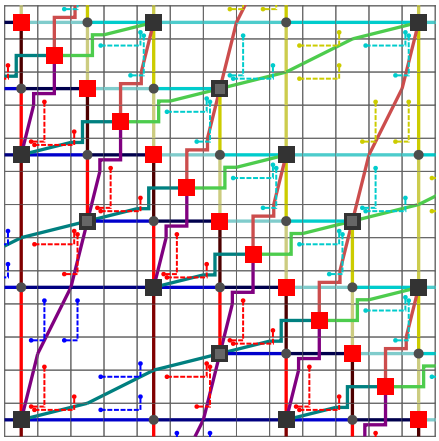
(b) Signaux V'



(c) Pilier



(d) Milieu



(e) Feu

FIGURE 5.11 – Couleurs des cavaliers du jeu de tuiles

transformé en un troisième type spécial qui produira une tuile de feu (en non un pilier) à sa rencontre du troisième type.

Signaux de types H' et V'

Le cas des signaux de types H' et V' requiert également une attention particulière. Il est en effet nécessaire d'utiliser des cavaliers afin de rendre ces signaux déterministes dans les directions NO et SE. Les couleurs des cavaliers utilisés contiennent essentiellement le type de signal et le facteur de taille quatre qu'il porte. Toutefois, il y a une contrainte sur les positions acceptables pour un cavalier dans la structure : il est primordial qu'un cavalier ne traverse pas de ligne de front, sans quoi le déterminisme dans l'une des deux directions orthogonales serait perdu. En effet, considérant la flèche du temps pointant dans la direction NE, cela pourrait se produire dans les deux situations suivantes :

1. À proximité d'un point marqué, un cavalier relie une tuile d'un signal entrant de type H' ou V' à une tuile situé du côté NE de la ligne de front. Alors le facteur transporté par la couleur de ce cavalier ne serait pas prédictible dans la direction SO puisque les quatre facteurs dérivés ne sauraient tous être simultanément « visibles » par la règle locale de déterminisme.
2. À proximité d'un point marqué, un cavalier relie une tuile d'un signal sortant de type H' ou V' à une tuile située du côté SO de la ligne de front. Alors cette tuile ne serait pas prédictible dans la direction NE.

La principale difficulté technique rencontrée ici est que l'utilisation du profil naturel $(\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (trois pas horizontaux pour chaque pas vertical) afin de réaliser la pente $\frac{1}{3}$ des signaux de type H' nous ferait invariablement tomber dans l'une de ces situations problématiques. Il faut dès lors envisager une autre méthode de construction de ces signaux. Il est envisageable d'étirer la construction afin de se ramener à des signaux de pentes différentes mais cela conduit de façon générale à devoir traiter des situations encore plus compliquées et aucune situation non problématique n'a été découverte en procédant ainsi. La solution retenue ici consiste plutôt à utiliser le profil $(\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (alternant entre deux et quatre pas horizontaux pour chaque pas vertical) réalisant également une pente $\frac{1}{3}$. De cette manière, il y a exactement trois tuiles dans le signal qui ne portent pas de cavalier : la tuile située au milieu des trois tuiles correspondant aux deux pas horizontaux et les deux tuiles entourant la tuile située au milieu des cinq tuiles correspondant aux quatre pas horizontaux. On utilise le profil symétrique pour les signaux de type V'. Les deux cas sont illustrés par les figures 5.11(a) et 5.11(b). De plus, en choisissant la bonne tuile de départ pour l'émission d'un signal depuis un pilier/milieu, on peut s'assurer que

lorsque deux signaux de types H' et V' se rencontrent et donne naissance à un milieu, il viennent juste d'utiliser une tuile ne portant pas de cavalier, c'est-à-dire que les voisins ouest et sud d'un milieu sont toujours deux tuiles sans cavalier des signaux de types H' et V' respectivement. Autrement dit et de façon plus précise, pour les signaux de type H' (le cas des signaux de type V' étant symétrique), les points marqués apparaissent toujours à la position usuellement occupée par la tuile du milieu des cinq tuiles correspondant aux quatre pas horizontaux du profil, ainsi ils sont directement entourés dans le signal par des tuiles ne portant pas de cavalier. On se préserve ainsi de la première situation problématique comme l'illustre la figure 5.11(d) : les cavaliers provenant des signaux entrants ne traversent pas la ligne de front. Le choix effectué nous prémunit également de la seconde situation problématique comme l'illustrent les figures 5.11(c) et 5.11(d) : les cavaliers émis par les signaux sortants ne traversent pas la ligne de front.

Ligne de feu et symétrie

La ligne de feu doit apparaître lorsque les points marqués sont suffisamment proches (et tout comme pour les lignes de front, aucun cavalier ne doit idéalement franchir la ligne de feu, encore que cela soit discutable car du fait de la symétrie de l'information apparaissant de part et d'autre de la ligne de feu, qui joue le rôle de miroir dans la construction, un tel franchissement pourrait être acceptable). On a recours pour cela à différentes tuiles *ad-hoc* qui n'apparaissent qu'à proximité de la ligne de feu, comme cela a déjà été mentionné pour ce qui concerne le troisième type de signaux H/V. Cela est de nouveau illustré par la figure 5.11(e).

De l'autre côté de la ligne de feu, disons du côté NE, la structure hiérarchique mise en place est symétriquement démantelée. Cette déconstruction est naturellement réalisée en dupliquant toutes les couleurs utilisées du côté SO et en définissant une tuile NE pour chaque tuile SO en appliquant une symétrie le long de la diagonale NO–SO des tuiles et en remplaçant chaque couleur SO par sa version dupliquée pour le côté NE. Seules les tuiles de la ligne de feu, qui réalisent la jonction entre les deux côtés, portent simultanément des couleurs SO et NE. De cette façon, le jeu de tuiles résultant est d'une certaine manière *time-symmetric* : il est son propre « inverse » à un échange des couleurs près.

Description complète du jeu de tuiles

Avant de conclure, appelons κ le jeu de tuiles à cavaliers que nous avons décrit précédemment. Le jeu de tuiles κ contient 1151 tuiles qui entrent toutes dans l'une des 41 catégories de la figure 5.12. Comme souvent, les couleurs sont représentées par des lignes dessinées sur les tuiles et qui doivent se poursuivre sans discontinuité au franchissement d'une arête, à l'ex-

ception des signaux de types H' et V' pour lesquels, du fait de leurs profils particuliers, des discontinuités apparaissent le long des arêtes marquées par les couleurs spéciales $\#_1$ et $\#_2$ indiquées par la figure. Les signaux de types H et V peuvent porter n'importe lequel des quatre facteurs $\{0101, 1001, 1010, 0110\}$. Les signaux de types H' et V' peuvent porter n'importe lequel des six facteurs $\{1011, 0010, 1100, 0011, 0100, 1101\}$. Les couleurs des cavaliers n'apparaissent que sur les tuiles composant un signal de type H' ou V' et portent le même facteur impair que le signal associé. Sur les tuiles contenant plusieurs signaux de types H' et V', la direction de chaque cavalier permet aisément d'identifier sans ambiguïté le signal de type H' ou V' auquel est associé chacun des cavaliers. Les tuiles de piliers et milieux ont déjà été précisément décrites dans les sections précédentes (les deux signaux entrants portent le même facteur, les quatre signaux sortant sont dérivés par substitution de ce facteur).

Seules les tuiles du demi-plan SO délimité par la ligne de feu sont représentées sur la figure 5.12. Les tuiles NE apparaissant de l'autre côté de la ligne de feu sont obtenues à partir des tuiles SO en appliquant la transformation représentée sur la figure 5.13 (duplication des couleurs et symétrie le long de la diagonale NO–SO des tuiles), où, pour chaque couleur SO c, on appelle c' sa couleur dupliquée pour le jeu de tuiles du côté NE. La même notation est utilisée sur la figure 5.12 pour les tuiles de la ligne de feu, qui doivent elles-mêmes satisfaire cette symétrie, c'est-à-dire être leur propre image par la transformation, dans la mesure où elle assurent la jonction entre les deux jeux de tuiles symétriques. La transformation est ainsi appliquée à toutes les tuiles pour obtenir leur version symétrisée, à l'exception des tuiles de la ligne de feu.

Conclusion

Le résultat suivant met en évidence les propriétés pour lesquelles ce jeu κ a été construit. Le lecteur devrait être convaincu que κ a été spécifiquement conçu pour satisfaire ces assertions.

Théorème 31. *κ est un jeu de tuiles à cavalier 4-way déterministe dont l'ensemble des pavages se projette sur le sous-shift diagonal, c'est-à-dire les $\{0,1\}$-coloriages contenant au plus une diagonale de 1 et 0 partout ailleurs.*

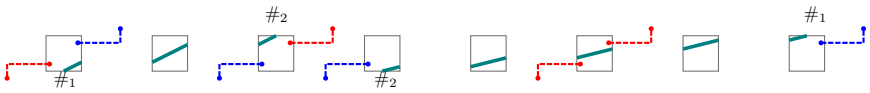
Schéma de preuve. Le 4-way déterminisme est assuré par une simple vérification syntaxique exhaustive du jeu de tuiles. On rappelle que κ est même déterministe à rayon 1 (déterminisme de tuiles de Wang standard) dans les directions NE et SO (les directions de cavaliers utilisées au cours de la construction ne jouant aucun rôle quant à ces directions de déterminisme).

D'autre part, κ pave le plan (pavage blanc) et il existe une projection $\pi : \kappa \to \{0,1\}$ (naturellement étendue aux coloriages $\pi : \kappa^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$)

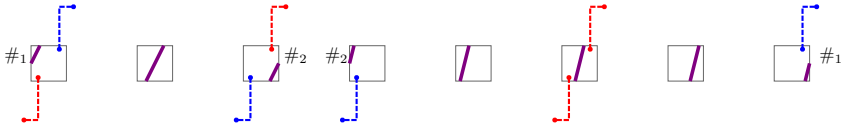
Tuile blanche :

Signaux de types H et V et collision :

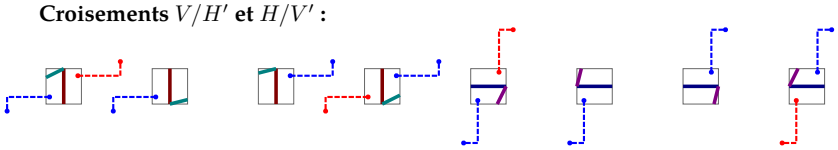
Signal de type H' :



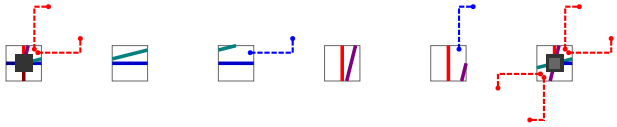
Signal de type V' :



Croisements V/H' et H/V' :



Pilier, tuiles d'émission de signal et milieu :



Collisions et croisement spécifiques à proximité de la ligne de feu :

Feu :

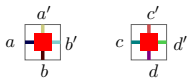


FIGURE 5.12 – 41 types de tuiles de κ

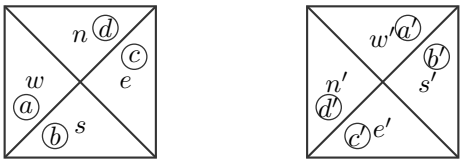


FIGURE 5.13 – Transformation symétrique opérée sur les tuiles

telle que $\pi(\mathcal{X}_\kappa) = \mathcal{L}_{-1}$, où $\mathcal{L}_{-1}$ désigne le sous-shift engendré par le $\{0,1\}$-coloriage c tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $c(x,y) = 1$ si $x+y = 0$ et $c(x,y) = 0$ sinon. En effet, considérant un facteur arbitrairement long du mot de Thue-Morse et en l'écrivant avec les tuiles de feu sur la diagonale d'un domaine carré vide, comme sur la figure 5.10, on observe aisément que les déterminismes locaux NE and SO peuvent être appliqués afin de remplir entièrement le carré en un motif valide. Ainsi, il existe des motifs carrés valides arbitrairement grands marquant leur diagonale finie. Pour des raisons de compacité, il doit exister un pavage du plan complet contenant une diagonale marquée bi-infinie. Cela implique l'inclusion gauche-droite par invariance par translation. Pour montrer la réciproque, il suffit d'observer qu'un pavage contenant une tuile de feu contient nécessairement une ligne de feu complète et toute la structure associée, ainsi tout les pavages « dégénérés » sont projetés sur le coloriage blanc. ■

Une version complète (intégrant les cavaliers) de la figure de la construction est fournie par la figure 5.14.

Observons pour finir que l'ensemble des pavages par κ est au moins expansif dans les directions $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, 2[$.

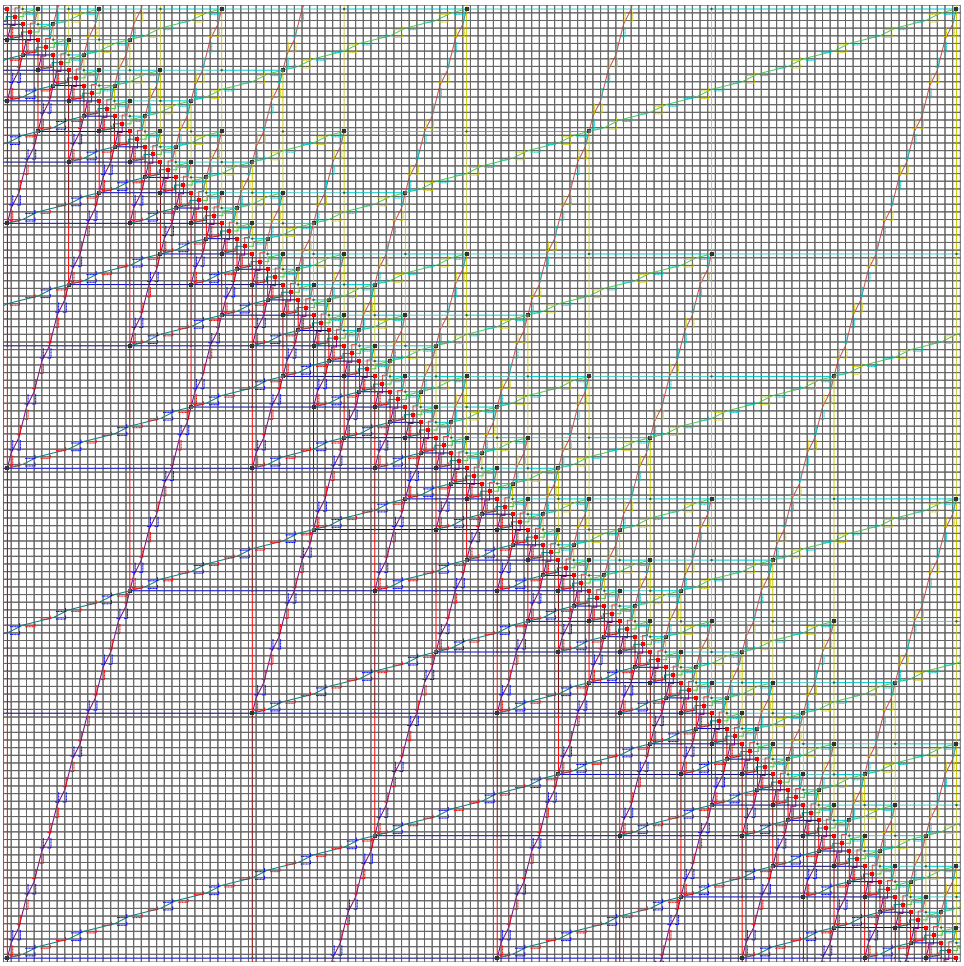


FIGURE 5.14 – Marquer une diagonale (construction complète)

Bibliographie

[AD01] Cyril Allauzen and Bruno Durand. Tiling Problems. In Egon Börger, Erich Grädel, and Yuri Gurevich, editors, *The Classical Decision Problem*, Perspectives in Mathematical Logic, chapter A, pages 407–420. Springer, 2001.

[AGS92] Robert Ammann, Branko Grünbaum, and Geoffrey Colin Shephard. Aperiodic tiles. *Discrete and Computational Geometry*, 8(1) :1–25, 1992.

[AKL+12] Ali Akhavi, Ines Klimann, Sylvain Lombardy, Jean Mairesse, and Matthieu Picantin. On the finiteness problem for automaton (semi)groups. *IJAC*, 22(6), 2012.

[AL74] Stål O. Aanderaa and Harry R. Lewis. Linear Sampling and the $\forall\exists\forall$ Case of the Decision Problem. *Journal of Symbolic Logic*, 39(3) :519–548, September 1974.

[AS13] Nathalie Aubrun and Mathieu Sablik. Simulation of effective subshifts by two-dimensional subshifts of finite type. *Acta Applicandae Mathematicae*, 126(1) :35–63, 2013.

[Bal09] Alexis Ballier. *Propriétés structurelles, combinatoires et logiques des pavages*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2009.

[BCN02] Vincent D. Blondel, Julien Cassaigne, and Codrin M. Nichitiu. On the presence of periodic configurations in turing machines and in counter machines. *Theor. Comput. Sci.*, 289(1) :573–590, 2002.

[Ben73] Charles Henry Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. Dev.*, 17(6) :525–532, November 1973.

[Ber64] Robert Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*. PhD thesis, Harvard University, 1964.

[Ber66] Robert Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*. Number 66. American Mathematical Soc., 1966.

[BGG01] Egon Börger, Erich Grädel, and Yuri Gurevich. *The Classical Decision Problem*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 2001.

[BJ08] Alexis Ballier and Emmanuel Jeandel. Tilings and model theory. In Bruno Durand, editor, *JAC*, pages 29–39. MCCME Publishing House, Moscow, 2008.

[BL97] Mike Boyle and Douglas Lind. Expansive subdynamics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(1) :55–102, 1997.

[CI96] Karel Culik II. An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 :245–251, 1996.

[COT14] Julien Cassaigne, Nicolas Ollinger, and Rodrigo Torres. A Small Minimal Aperiodic Reversible Turing Machine. April 2014.

[DLS01] Bruno Durand, Leonid A. Levin, and Alexander Shen. Complex tilings. In Jeffrey Scott Vitter, Paul G. Spirakis, and Mihalis Yannakakis, editors, *Proceedings on 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, July 6-8, 2001, Heraklion, Crete, Greece*, pages 732–739. ACM, 2001.

[DLS05] Bruno Durand, Leonid A. Levin, and Alexander Shen. Local rules and global order, or aperiodic tilings. *Mathematical Intelligencer*, 27(1) :64–68, 2005.

[DRS08] Bruno Durand, Andrei E. Romashchenko, and Alexander Shen. Fixed point and aperiodic tilings. In Masami Ito and Masafumi Toyama, editors, *Developments in Language Theory*, volume 5257 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–288. Springer, 2008.

[DRS12] Bruno Durand, Andrei E. Romashchenko, and Alexander Shen. Fixed-point tile sets and their applications. *J. Comput. Syst. Sci.*, 78(3) :731–764, 2012.

[DSV11] Bruno Durand, Alexander Shen, and Nikolai Vereshchagin. Ammann tilings : a classification and an application. *ArXiv e-prints*, December 2011.

[Dur99] Bruno Durand. Tilings and quasiperiodicity. *Theor. Comput. Sci.*, 221(1-2) :61–75, 1999.

[Dur02] Bruno Durand. De la logique aux pavages. *Theoretical Computer Science*, 281 :311–324, 2002.

[FO10] Thomas Fernique and Nicolas Ollinger. Combinatorial Substitutions and Sofic Tilings. In TUCS, editor, *Proceedings of JAC 2010 Journées Automates Cellulaires 2010*, pages 100–110, Turku Finland, 12 2010. F.1.1.

[Gil14] Pierre Gillibert. The finiteness problem for automaton semigroups is undecidable. *IJAC*, 24(1) :1–10, 2014.

[GK72] Yuri Sh. Gurevich and I.O. Koryakov. Remarks on Berger's paper on the domino problem. *Siberian Mathematical Journal*, 13(2) :319–321, 1972.

[GRT12] Anaël Grandjean, Gaétan Richard, and Véronique Terrier. Linear functional classes over cellular automata. In Enrico Formenti, editor, *AUTOMATA & JAC*, volume 90 of *EPTCS*, pages 177–193, 2012.

[GS87] Branko Grünbaum and Gustav Colin Shephard. *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman, 1987.

[GS98] Chaim Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, 147(1) :181–223, 1998.

[GZ12] Pierre Guillon and Charalampos Zinoviadis. Densities and entropies in cellular automata. In S.Barry Cooper, Anuj Dawar, and Benedikt Löwe, editors, *How the World Computes*, volume 7318 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–263. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[GZ13] Pierre Guillon and Charalampos Zinoviadis. Hierarchy and expansiveness. DySyCo 2013, 2013.

[Gá01] Peter Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *Journal of Statistical Physics*, 103(1-2) :45–267, 2001.

[Han74] William P. Hanf. Nonrecursive tilings of the plane. I. *J. Symb. Log.*, 39(2) :283–285, 1974.

[Hed69] Gustav Arnold Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical systems theory*, 3(4) :320–375, 1969.

[Hoc11] Michael Hochman. Non-expansive directions for $\mathbb{Z}^2$ actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 31 :91–112, 1 2011.

[Hoo66] Philip K. Hooper. The Undecidability of the Turing Machine Immortality Problem. *Journal of Symbolic Logic*, 31(2) :219–234, June 1966.

[Jea10] Emmanuel Jeandel. The periodic domino problem revisited. *Theor. Comput. Sci.*, 411(44-46) :4010–4016, 2010.

[Jea11] Emmanuel Jeandel. *Propriétés structurelles et calculatoires des pavages*. Habilitation thesis, Université Montpellier II – Sciences et Techniques du Languedoc, December 2011.

[Jea14] Emmanuel Jeandel. Infinite communication complexity. Frac/SDA2 2014, 2014.

[JT09] Emmanuel Jeandel and Guillaume Theyssier. Subshifts, languages and logic. In Volker Diekert and Dirk Nowotka, editors, *Developments in Language Theory*, volume 5583 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 288–299. Springer, 2009.

[JT13] Emmanuel Jeandel and Guillaume Theyssier. Subshifts as models for mso logic. *Inf. Comput.*, 225 :1–15, 2013.

[JV10] Emmanuel Jeandel and Pascal Vanier. Periodicity in tilings. In Yuan Gao, Hanlin Lu, Shinnosuke Seki, and Sheng Yu, editors, *Developments in Language Theory, 14th International Conference, DLT 2010, London, ON, Canada, August 17-20, 2010. Proceedings*, volume 6224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 243–254. Springer, 2010.

[JV11] Emmanuel Jeandel and Pascal Vanier. Π_1^0 Sets and Tilings. In Mitsunori Ogihara and Jun Tarui, editors, *Theory and Applications of Models of Computation*, volume 6648 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–239. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[JV13] Emmanuel Jeandel and Pascal Vanier. Hardness of conjugacy, embedding and factorization of multidimensional subshifts of finite type. In Natacha Portier and Thomas Wilke, editors, *30th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2013, February 27 - March 2, 2013, Kiel, Germany*, volume 20 of *LIPIcs*, pages 490–501. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013.

[Kar92] Jarkko Kari. The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM J. Comput.*, 21(3) :571–586, 1992.

[Kar94] Jarkko Kari. Rice's theorem for the limit sets of cellular automata. *Theor. Comput. Sci.*, 127(2) :229–254, 1994.

[Kar96] Jarkko Kari. A small aperiodic set of wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3) :259–264, 1996.

[Kar07] Jarkko Kari. The tiling problem revisited. In Jérôme Olivier Durand-Lose and Maurice Margenstern, editors, *MCU*, volume 4664 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 72–79. Springer, 2007.

[Kar09a] Jarkko Kari. *Lecture notes on Cellular Automata*. University of Turku, 2009.

[Kar09b] Jarkko Kari. *Lecture notes on Tilings and Patterns*. University of Turku, 2009.

[Kli13] Ines Klimann. *Une introduction aux (semi-)groupes d'automate. Lecture notes*. MPRI, 2013.

[Kli14] Ines Klimann. *Autour de divers problèmes de décision sur les automates*. Habilitation thesis, Université Paris Diderot – Paris 7, January 2014.

[KMW62] A.S. Kahr, Edward F. Moore, and Hao Wang. Entscheidungsproblem reduced to the $\forall\exists\forall$ case. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 48(3) :365–377, March 1962.

[KN97] Eyal Kushilevitz and Noam Nisan. *Communication Complexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Knu68] Donald Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*, section 2.3.4.3 The infinity lemma, pages 382–385. Addison-Wesley, first edition, 1968.

[KP99] Jarkko Kari and Panos Papasoglu. Deterministic aperiodic tile sets. *Geometric And Functional Analysis*, 9 :353–369, 1999.

[Kůr03] Petr Kůrka. *Topological and symbolic dynamics*, volume 11. SMF, 2003.

[Lec63] Yves Lecerf. Machines de Turing réversibles. *Comptes rendus de l'Académie française des Sciences*, 257 :2597–2600, October 1963.

[Lev05] Leonid A. Levin. Aperiodic tilings : Breaking translational symmetry. *Comput. J.*, 48(6) :642–645, 2005.

[Lew79] Harry R. Lewis. *Unsolvable Classes of Quantificational Formulas*. Addison-Wesley, 1979.

[LG14] Bastien Le Gloannec. The 4-way deterministic Periodic Domino Problem is undecidable. Submitted to *Theoretical Computer Science*, 2014.

[LGO12] Bastien Le Gloannec and Nicolas Ollinger. Substitutions and strongly deterministic tilesets. In S.Barry Cooper, Anuj Dawar, and Benedikt Löwe, editors, *How the World Computes, CiE*, volume 7318 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 462–471. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[LGO14] Bastien Le Gloannec and Nicolas Ollinger. Knight tiles : particles and collisions in the realm of 4-way deterministic tilings. In *Proceedings of the 18th International Conference on Developments in Language Theory*, volume 8633 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 227–238, Ekaterinburg, Russie, Fédération De, 2014. Springer.

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.

[Luk06] Ville Lukkarila. On the Tiling Problem and Reversible Cellular Automata. Technical Report 788, Turku Centre for Computer Science, 2006.

[Luk09] Ville Lukkarila. The 4-way deterministic tiling problem is undecidable. *Theor. Comput. Sci.*, 410(16) :1516–1533, 2009.

[Luk10] Ville Lukkarila. *On Undecidable Dynamical Properties of Reversible One-Dimensional Cellular Automata*. PhD thesis, University of Turku, 2010.

[LW08] Grégory Lafitte and Michael Weiss. Computability of tilings. In Giorgio Ausiello, Juhani Karhumäki, Giancarlo Mauri, and C.-H. Luke Ong, editors, *IFIP TCS*, volume 273 of *IFIP*, pages 187–201. Springer, 2008.

[LW09] Grégory Lafitte and Michael Weiss. Constructing new aperiodic self-simulating tile sets. In Klaus Ambos-Spies, Benedikt Löwe, and Wolfgang Merkle, editors, *CiE*, volume 5635 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 300–309. Springer, 2009.

[Maz87] Jacques Mazoyer. A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theor. Comput. Sci.*, 50 :183–238, 1987.

[MH38] Marston Morse and Gustav A. Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, pages 815–866, 1938.

[Min67] Marvin L. Minsky. *Computation : Finite and Infinite Machines*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1967.

[Mor95] Kenichi Morita. Reversible simulation of one-dimensional irreversible cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 148(1) :157 – 163, 1995.

[Mos92] Brigitte Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des point fixes d'une substitution. *Theor. Comput. Sci.*, 99(2) :327–334, 1992.

[Mos96] Brigitte Mossé. Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 124(2) :329–346, 1996.

[Moz89] Shahar Mozes. Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'Analyse Mathématique*, 53(1) :139–186, 1989.

[MR99] Jacques Mazoyer and Ivan Rapaport. Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane : Undecidability results. *Discrete Mathematics*, 199(1-3) :103–122, 1999.

[MT99] Jacques Mazoyer and Véronique Terrier. Signals in one-dimensional cellular automata. *Theor. Comput. Sci.*, 217(1) :53–80, 1999.

[Mye74] Dale Myers. Nonrecursive tilings of the plane. II. *J. Symb. Log.*, 39(2) :286–294, 1974.

[Oll08a] Nicolas Ollinger. *Programmation et indécidabilités dans les systèmes complexes*. Habilitation thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, December 2008.

[Oll08b] Nicolas Ollinger. Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem. In Arnold Beckmann, Costas Dimitracopoulos, and Benedikt Löwe, editors, *CiE*, volume

5028 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 476–485. Springer, 2008.

[Oll11] Nicolas Ollinger. Two-by-two substitution systems and tilings. DISCO 2011, 2011.

[PF02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2002.

[PF08] Nathalie Priebe Frank. A primer of substitution tilings of the Euclidean plane. *Expositiones Mathematicae*, 26(4) :295–326, 2008.

[Pou10] Victor Poupet. Yet another aperiodic tile set. In Jarkko Kari, editor, *JAC*, pages 191–202. Turku Center for Computer Science, 2010.

[Ric08] Gaétan Richard. *Systèmes de particules et collisions discrètes dans les automates cellulaires*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2008.

[Rob71] Raphael M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3) :177–209, 1971.

[Tof80] Tommaso Toffoli. Reversible computing. In Jaco de Bakker and Jan van Leeuwen, editors, *Automata, Languages and Programming*, volume 85 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 632–644. Springer Berlin Heidelberg, 1980.

[Tur36] Alan Mathison Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *J. of Math*, 58 :345–363, 1936.

[Wan61] Hao Wang. Proving theorems by Pattern Recognition II. *Bell Systems technical journal*, 40 :1–41, 1961.

[Wan63] Hao Wang. Dominoes and the $\forall\exists\forall$ case of the decision problem. *Mathematical Theory of Automata*, pages 23–55, 1963.

[Wan75] Hao Wang. Notes on a class of tiling problems. *Fundamenta Mathematicae*, 82 :295–305, 1975.

[Win04] Peter Winkler. Five algorithmic puzzles. *Tribute to a Mathemagician*, page 109, 2004.

[Yun93] Jean-Baptiste Yunès. *Synchronisation et Automates Cellulaires : La Ligne de Fusiliers*. PhD thesis, Université Paris-Diderot – Paris VII, 1993.

Bastien Le Gloannec

Coloriage du plan discret par jeux de tuiles déterministes

Résumé. Nous étudions dans ce mémoire les propriétés des ensembles de pavages engendrés par des jeux de tuiles de Wang exhibant une ou plusieurs directions de déterminisme local, en accordant une importance toute particulière aux jeux déterministes dans les quatre directions diagonales simultanément, dits 4-way déterministes. Après avoir proposé une construction alternative d'un jeu de tuiles apériodique 4-way déterministe, nous étudions plusieurs problèmes de décision sur ces objets et complétons en particulier le résultat d'indécidabilité du problème du pavage dans le cadre 4-way déterministe établi par Lukkarila en montrant l'indécidabilité du problème du pavage périodique 4-way déterministe. Nous montrons également que des familles complexes de coloriages du plan telles que celles engendrées par les substitutions restent sofiques dans un cadre 4-way déterministe. Nous proposons une bi-déterminisation des constructions de jeux de tuiles point-fixe de Durand, Romashchenko et Shen et en tirons quelques premières applications. Enfin, nous considérons l'opportunité d'élargir le rayon de la règle locale de déterminisme afin de limiter les directions d'expansivité et ainsi de permettre la construction localement déterministe de systèmes de particules et collisions non triviaux. Nous introduisons un nouveau modèle syntaxique commode afin de travailler à rayon deux et revisitons des problématiques de Lukkarila dans ce cadre.

Mots clés. tuiles de wang, jeux de tuiles déterministes, problème du pavage, indécidabilité, substitutions, soficité, particules et collisions

Coloring the discrete plane using deterministic tilesets

Abstract. In this thesis, we study some properties of the sets of tilings generated by Wang tilesets that exhibit one or more directions of local determinism, focusing in particular on tilesets that are simultaneously deterministic in the four diagonal directions, referred to as 4-way deterministic. After having exposed an alternative construction of a 4-way deterministic aperiodic tileset, we study several decision problems on these objects and complete in particular Lukkarila's result of undecidability of the Domino Problem in the 4-way deterministic setting proving the undecidability of the 4-way deterministic periodic Domino Problem. We also prove that some complex families of colorings of the plane such that those generated by substitutions remain sofic in the 4-way deterministic setting. We propose a bi-determinization of the constructions by Durand, Romashchenko and Shen of fixed-point tilesets and give some first applications. Finally, we investigate the idea of extending the radius of the local rule of determinism in order to reduce the set of directions of expansiveness and thus allow the local realization of non-trivial particles and collisions systems. We introduce a new and convenient syntactic model to deal with radius two and revisit some of Lukkarila's problems in this setting.

Keywords. Wang tiles, deterministic tilesets, Domino Problem, undecidability, substitutions, soficity, particles and collisions

Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans
Bâtiment IIIA, 6 rue Léonard de Vinci, B.P. 6759,
45067 ORLÉANS cedex 2, France