

Réponse élastodynamique d'une plaque stratifiée anisotrope : approches comparées. : Vers le développement de méthodes hybrides.

Pierric Mora

▶ **To cite this version:**

Pierric Mora. Réponse élastodynamique d'une plaque stratifiée anisotrope : approches comparées. : Vers le développement de méthodes hybrides.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0382 . tel-01290710

HAL Id: tel-01290710
https://theses.hal.science/tel-01290710

Submitted on 18 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université de BORDEAUX

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Pierric Mora**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mécanique**

Réponse élastodynamique d'une plaque stratifiée anisotrope : approches comparées

Vers le développement de méthodes hybrides

Thèse soutenue le 17 décembre 2015 devant le jury composé de :

Mme.	Hélène Barucq	Directrice de Recherche, INRIA	**Présidente**
M.	Mike Lowe	Professor, Imperial College	**Rapporteur**
M.	Vincent Pagneux	Directeur de Recherche, CNRS	**Rapporteur**
M.	Alain Lhémery	Expert Senior, CEA	**Examinateur**
M.	Marc Deschamps	Directeur de Recherche, CNRS	**Directeur de thèse**
M.	Éric Ducasse	Maître de Conférence, ENSAM	**Co-directeur de thèse**

- 2015 -

Remerciements

Ces travaux n'auraient pas eu lieu sans l'initiative et l'intuition d'Éric Ducasse et de Marc Deschamps, qui m'ont accompagné pendant ces trois ans et que je remercie chaleureusement pour leur soutien sans faille, ni sans le support du CEA par l'intermédiaire d'Alain Lhémery, que je remercie pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées.

Je remercie également les membres du jury Hélène Barucq, Vincent Pagneux et Mike Lowe, qui a accepté de s'acquitter de cette tâche en français, pour leur bienveillance, leur implication et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie les collègues acousticiens de l'I2M, et très particulièrement Samuel Rodriguez et Michel Castaings qui ont joué un rôle très important dans les discussions et dans l'utilisation des outils du laboratoire. Merci bien sûr également à tous les autres pour les discussions, les articles, les contacts, les astuces, la bonne humeur, la mauvaise foi, les cafés...

Enfin, je voudrais adresser des remerciements particuliers à deux personnes extérieures à l'équipe et à cette thèse mais qui ont néanmoins joué un rôle important : merci à Philippe Gatignol pour sa correspondance et sa bibliographie, et merci à Jean-Luc Charles pour son aide en programmation et aux outils informatiques associés.

Table des matières

Introduction générale **6**

I Tenseur de Green transitoire d'un milieu stratifié **9**

Introduction de la Partie I **10**

1 Approche par ondes partielles **14**

1.1 Tenseur de Green transitoire d'un milieu infini 15

1.1.1 Démonstration du tri des ondes planes montantes et descendantes 15

1.1.2 Méthode numérique pour obtenir les ondes de volumes 18

1.1.3 Champ rayonné par une source volumique 21

1.1.4 Tenseurs $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ et $\mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}$ 22

1.2 Tenseur de Green transitoire d'un milieu stratifié 23

1.3 Milieux solides dissipatifs 26

1.3.1 Loi de Kelvin-Voigt 26

1.3.2 Loi Hystérétique 26

1.4 Transformations inverses vers l'espace $(\mathbf{x}, z, t)$ 27

1.4.1 Retour en temps : transformation de Laplace inverse numérique 27

1.4.2 Retour en espace : transformation de Fourier inverse numérique 30

1.4.3 Théorème du changement d'origine inexploitable 31

1.5 Exemples d'applications 31

1.5.1 Inspection par ondes de volume de la qualité de l'adhésion dans un assemblage collé grâce à un transducteur multi-éléments en surface 32

1.5.2 Génération des modes de Lamb d'une plaque de Carbone-Epoxy par un transducteur de type « pastille piézoélectrique » : comparaison avec des signaux expérimentaux . . 35

1.5.3 Génération de modes propagatif, rétropropagatif et à vitesse d'énergie nulle dans une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau 36

1.5.4 Exemple d'un 8 couches anisotrope (2D) immergé et d'une source sphérique large bande à cheval sur plusieurs couches 39

2 Approche modale **42**

2.1 Plaque élastique dans le vide . . . 42

2.1.1 Une base modale orthogonale complète . . . 43

2.1.2 Obtention numérique de la base modale . . . 45

2.1.3 Décomposition modale du tenseur de Green transitoire . . . 51

2.1.4 Convergence et troncature de la série modale . . . 52

2.1.5 Utilisations dérivées de la base modale . . . 55

2.2 Plaque dissipative dans le vide : approche par perturbations . . . 59

2.2.1 Motivation de l'approche perturbative . . . 59

2.2.2 Base modale perturbée pour une loi Kelvin-Voigt . . . 60

2.2.3 Base modale perturbée pour une loi Hystérétique . . . 61

2.3 Difficultés du cas de la plaque enfouie . . . 62

2.3.1 Sens physiques des différentes formulations modales . . . 62

2.3.2 « Base » incomplète . . . 64

2.3.3 Pas de relations d'orthogonalité pour les modes rayonnant . . . 65

2.3.4 Difficultés pour poser un problème aux valeurs propres . . . 65

Conclusions de la Partie I **67**

II Diffraction par un objet **69**

Introduction de la Partie II **70**

3 Cas de défauts simples : élements finis de frontière **72**

3.1 Principe vulgarisé des éléments finis de frontière . . . 72

3.1.1 Potentiels de simple et double couche . . . 72

3.1.2 Discrétisation de la condition aux limites : méthode de collocation ou SGBEM . . . 74

3.2 Fissure plane . . . 75

3.2.1 Définition du problème et choix des fonctions de base . . . 76

3.2.2 Plaque d'aluminium épaisse dans le vide : validation par éléments finis . . . 80

3.2.3 Plaque multicouche composite dans l'eau insonifiée en régime d'ondes guidées . . . 81

3.3 Fissure verticale . . . 84

3.3.1 Définition du problème et choix des fonctions de base . . . 84

3.3.2 Plaque d'aluminium épaisse dans le vide . . . 88

3.4 Défaut à géométrie et conditions aux limites quelconques . . . 89

3.4.1 Condition de collage . . . 89

3.4.2 Incommodité d'utiliser un mailleur pour les géométries arbitraires . . . 91

4 Cas d'un objet quelconque : opérateur « Dirichlet to Neumann » numérique 93

4.1 Raidisseur en surface d'une plaque 93

4.1.1 Principe de la méthode hybride 93

4.1.2 Expression de l'opérateur DtN 94

4.2 Vers le cas général 96

Conclusions générales 99

Introduction générale

Cette thèse porte sur la simulation numérique de la propagation d'ondes élastiques dans une plaque, en régime transitoire. Le contexte applicatif visé est le contrôle non destructif (CND) par ultrasons de plaques composites.

En effet, certains secteurs industriels, dont les secteurs aéronautique et spatial, s'orientent vers une utilisation massive de matériaux composites carbone-époxy. Dans sa thèse [84], L. Taupin rapporte les proportions de 25% pour l'Airbus A380 et 53% pour l'Airbus A350-XWB. Ces matériaux présentent des propriétés de raideur et de tenue mécanique comparables aux alliages d'aluminium utilisés jusqu'ici mais leur plus faible densité permet d'espérer construire des appareils plus légers et, donc, d'augmenter la charge utile ou de diminuer la consommation de carburant. Ils sont fabriqués par empilement et collage de plis épais d'environ $0.1\,mm$, chaque pli étant à son tour constitué de fibres de carbone noyées dans une matrice d'époxy. Du fait de leur structure, ces matériaux sont très sensibles à l'usinage : un perçage ou une coupe peuvent décoller des plis, entrainant un fort endommagement. Il est attrayant d'assembler deux pièces de ces composites grâce à des colles à base d'époxy, plutôt que par rivetage, cependant le manque de développement de méthodes non destructives capables de quantifier la qualité du joint de colle freine encore cette pratique. Le processus de fabrication est également sensible, et des mauvaises températures de cuisson ou un dépot de poussières peuvent affaiblir l'adhésion entre deux couches. Enfin, un autre facteur de dégradations est bien sûr le vieillissement de ces matériaux au cours de leur utilisation. Il est donc crucial de disposer de méthodes de contrôle performantes et non intrusives pour vérifier l'état de santé des pièces mécaniques durant leur fabrication et leur utilisation. Lorsque ces pièces ont des géométries simples et confinées dans une ou deux dimensions (plaques, coques, tuyaux, rails, cables, *etc*), l'exploitation d'ondes élastiques guidées permet d'inspecter rapidement de grandes structures.

Cependant, les ondes guidées peuvent donner lieu à des signaux expérimentaux complexes, rendant leur interprétation parfois délicate. Plusieurs raisons concourent à celà. D'une part, à une fréquence donnée, plusieurs modes propagatifs peuvent coexister. Plus la fréquence augmente, plus ce nombre augmente aussi, et ceci limite les applications actuelles aux basses fréquences. Les ordres de grandeur sont en général le millimètre pour l'épaisseur de la plaque, et entre $100\,kHz$ et $1\,MHz$ pour la bande de fréquences. Un deuxième facteur de complexité est le fait que les modes sont dispersifs, c'est-à-dire que leur vitesse de propagation dépend de la fréquence. Enfin, dans notre cas, les matériaux composites ajoutent à ces difficultés l'anisotropie, c'est-à-dire le fait que les propriétés élastiques, et donc la vitesse des ondes, dépendent de la direction d'observation. Cette complexité rend indispensables les logiciels de simulation numérique dans la conception de situations de CND. Certaines méthodes d'imagerie émergentes, comme l'imagerie topologique par exemple [23], permettent de prendre en compte la complexité de la propagation grâce à deux calculs numériques directs. Une imagerie rapide nécessite des moyens de calculs performants. D'autre part, les questions récurrentes qui se posent sont celles de l'identification du ou des modes les plus sensibles aux défauts recherchés, des modes s'atténuant le moins, de la position et du nombre optimaux d'émetteurs/récepteurs pour éviter les zones d'ombre, *etc*. Il est donc important de disposer d'outils de simulation précis et rapides. C'est dans ce cadre que le CEA développe le logiciel CIVA. Ce logiciel, conçu au début autour des problématiques de CND par ondes ultrasonores « de volume », s'étend depuis la thèse de K. Jezzine [40] aux problématiques de CND par ondes guidées.

Cette thèse fait suite aux travaux de K. Jezzine [40], V. Baronian [7], L. Taupin [84] et A. Tonnoir [87]. K. Jezzine [40] a mis en œuvre une méthode semi-analytique modale formulée en régime harmonique capable de considérer des guides d'ondes à section quelconque. V. Baronian [7] a utilisé cette formulation modale harmonique pour dériver un opérateur « de frontières transparentes ». Ceci a permis de coupler un code modal avec un code éléments finis pour résoudre à coûts réduits un problème de diffraction par un objet général dans un guide d'ondes de type cylindre. L. Taupin [84] a étendu les travaux de V. Baronian aux cas de diffracteurs 2D (de type raidisseur collé en surface d'une plaque) insonifiés en incidence oblique

dans des plaques anisotropes. Cependant, la construction de l'opérateur de frontières transparentes qu'elle donne peut conduire à des mauvais conditionnements. Enfin, A. Tonnoir [87] a construit l'opérateur pour certains problèmes de diffraction 3D, notamment dans une membrane anisotrope, en utilisant une approche de décomposition de domaines. Toutefois, le cas du guide élastique anisotrope 3D reste à notre connaissance non résolu. Le point commun entre ces travaux, qui est partagé avec la majorité de la littérature, est d'adopter une formulation harmonique et de fixer une direction de phase, c'est-à-dire une direction du vecteur d'onde. La méthode modale ainsi formulée se révèle extrêmement puissante pour calculer le champ lointain dans des guides à une seule direction de propagation, ou dans des plaques isotropes dans le plan. Elle présente cependant les points faibles suivants, qui sont à l'origine du sujet de cette thèse : il est malaisé de calculer le champ 3D pour une anisotropie quelconque, le régime non-établi est très coûteux, et le guide ouvert (une plaque immergée ou collée sur un solide infini) pose des problèmes d'incomplétude et de construction d'une méthode numérique fiable et précise.

La Partie I étudie et décrit en détails l'implémentation numérique de deux formulations semi-analytiques alternatives à cette méthode modale harmonique. La Partie II ajoute brièvement à la discussion la possibilité d'exploiter ces deux méthodes semi-analytiques pour construire des méthodes numériques hybrides capables de résoudre les problèmes de diffraction que la méthode modale harmonique n'a pas encore permis de traiter.

Première partie

Tenseur de Green transitoire d'un milieu stratifié

Introduction de la Partie I

Cette partie décrit en détails comment le tenseur de Green transitoire d'un guide plan stratifié peut être évalué à partir de deux méthodes semi-analytiques. Les descriptions se feront dans un soucis d'implémentations numériques les plus générales possible. L'approche que nous qualifions de « classique » consiste à exprimer le tenseur de Green sur la base modale du guide d'ondes, que nous nommons $k_n(\omega, \theta)$, celle-ci étant calculée en régime harmonique et pour une direction de phase fixée (*cf.* [40]). Elle présente l'énorme avantage d'obtenir la solution analytique en espace, au prix, rarement contraignant en pratique, d'être numérique en temps (un signal se synthétise par transformation numérique inverse de Fourier). L'analyticité en espace est précieuse pour deux raisons. Premièrement, on cherche en général à calculer un signal temporel en un certain (petit) nombre de points de l'espace, ces signaux étant produits par une source ponctuelle à bande passante étroite : la solution $k_n(\omega, \theta)$ semble donc parfaitement adaptée à ces besoins. Deuxièmement, l'analyticité en espace permet de post-traiter la solution en rajoutant très naturellement des conditions aux limites spatiales (fissure verticale, bord de plaque, frontière transparente, *etc*), ce qui permet de construire une méthode numérique hybride couplant éléments finis et modes $k_n(\omega, \theta)$ (*cf.* [7]).

Cependant, cette approche « classique » a plusieurs points faibles.

- La périodisation temporelle imposée par la discrétisation de l'intégrale inverse sur ω requiert que la fenêtre temporelle d'intérêt soit d'une durée au moins égale à la durée du signal. Dans certains cas particuliers, le régime transitoire peut nécessiter d'être calculé avec un très grand nombre de points en fréquence, et donc coûter très cher, voire peut être inaccessible. C'est le cas pour les modes à vitesse de groupe nulle, ou pour les modes excités au voisinage de leur fréquence de coupure, car ils donnent lieu à des signaux pouvant durer infiniement dans le temps.
- Il est extrêmement lourd (mais pas impossible, *cf.* [90, 78]) de traiter le cas d'une anisotropie quelconque en 3D. Le paramétrage par θ est bien sûr le responsable. En effet, les directions de phase et de groupe sont en général différentes, et il faut en tenir compte pour calculer numériquement la transformation inverse angulaire. Faisons remarquer que ω a indirectement une part de responsabilité puisque choisir de transformer $t \to \omega$ impose que le second paramètre pour traiter la troisième dimension soit θ.
- La formulation est inefficace en champ proche, où une infinité de modes contribuent significativement (les modes évanescents). Ceci est dû au caractèrement modal de la formulation : les modes sont les solutions propres au régime libre, et ne sont donc pas adaptés pour décrire la région spatio-temporelle où le régime est forcé.
- Le cas d'un guide ouvert pose différents problèmes, encore une fois à cause du caractère modal de la formulation : incomplétude de la famille modale, relations d'orthogonalité non assurées, et problème pratique de construction d'une méthode numérique précise et fiable pour calculer la famille modale (*cf.* Chapitre 2).

Cette partie se propose d'étudier deux formulations alternatives dans le but de comparer leurs points forts et points faibles avec la formulation $k_n(\omega, \theta)$. La première, par ondes partielles, évite toutes ces difficultés (Chapitre 1), et la seconde, modale, en évite certaines (Chapitre 2). Le point commun de départ est d'utiliser une

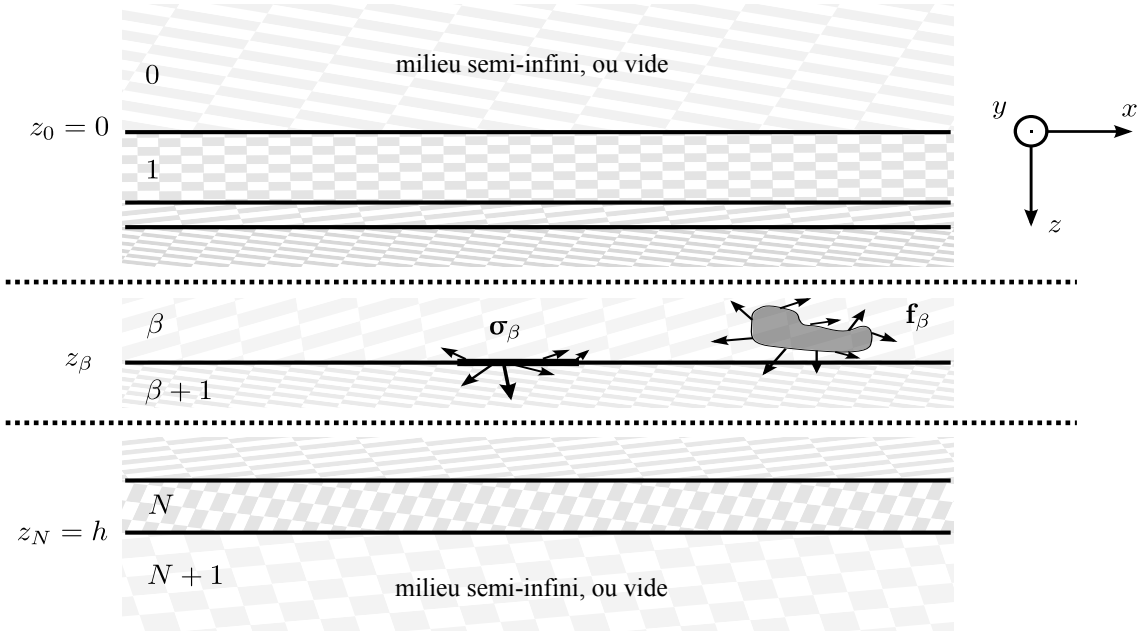


FIGURE 1 – Schéma en coupe du milieu stratifié. $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ sont respectivement les trois vecteurs unitaires selon les axes x, y et z.

transformation de Fourier sur les dimensions spatiales du plan de manière à traiter simplement l'anisotropie 3D, tout en conservant la causalité.

Description du problème : considérons un milieu stratifié constitué d'un assemblage de milieux homogènes, d'extention infinie dans le plan (xOy), et dont les interfaces sont toutes suivant ce même plan (xOy). On appelle $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ les vecteurs unitaires des axes x, y et z. Ce milieu stratifié est décrit en figure 1. Chaque couche peut être un milieu solide, éventuellement anisotrope et dissipatif, ou un fluide non dissipatif, ou encore le vide. Dans un souci de concision, les équations de propagation et de continuité dans chacun des milieux seront dans un premier temps celles de milieux solides non dissipatifs. Nous traiterons par la suite le cas de deux lois de dissipation courrament utilisées : la loi de Kelvin-Voigt et la loi Hystérétique [40, 41]. Le cas de milieux fluides sera traité dans le Chapitre 1.

Au sein du milieu β, l'équation d'onde [2] s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_\beta\, \partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},z,t) - (\boldsymbol{\nabla} \overset{\beta}{\diamond} \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{u}(\mathbf{x},z,t) = \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x},z,t), & \text{pour } t > 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},z,t) = 0, & \text{pour } t < 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_z(\mathbf{x},z,t) = (\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{u}(\mathbf{x},z,t), & \end{cases} \tag{1}$$

où ρ_β est la densité et $\overset{\beta}{\diamond}$ est un opérateur bilinéaire, défini dans les références [5, 6, 26, 45], qui dépend des constantes élastiques $c_{ijkm}^{(\beta)}$ et qui transforme deux vecteurs de taille 3 en une matrice de taille 3×3 :

$$(\mathbf{a} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{b})_{im} = c_{ijkm}^{(\beta)}\, a_j\, b_k. \tag{2}$$

Le champ $\mathbf{f}_\beta$ a la dimension d'une force volumique, et sera appelé source volumique. On appelle $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\sigma}_z^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ le vecteur d'état de taille 6 (*cf.* [75]). Les conditions de continuité à l'interface β, entre les

milieux β et $\beta+1$, s'écrivent, en présence d'un terme source d'interface $\boldsymbol{\sigma}_\beta$:

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, z_\beta^+, t) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, z_\beta^-, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_\beta(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Le champ $\boldsymbol{\sigma}_\beta$ a la dimension d'une force surfacique, c'est-à-dire d'une contrainte, et sera appelé source surfacique. Bien entendu, en l'absence de source, la relation (3) exprime la continuité de $\boldsymbol{\eta}$ au travers de l'interface β. Faisons remarquer que $\boldsymbol{\sigma}_\beta$ cache une définition, arbitraire, qui privilégie les cas d'interfaces solide / solide ou solide / vide au détriment des cas solide / fluide, fluide / fluide et fluide / vide. Ceci sera discuté dans le paragraphe 1.2.

Convention de notations dans les différents espaces duaux : les champs seront notés en minuscule dans l'espace physique. Les majuscules seront utilisées dans le domaine de Laplace $t \to s$ (ou, plus occasionnellement, dans le domaine de Fourier $t \to \omega$ dual au temps). Le symbole $\hat{}$ désignera une transformée de Fourier $(\mathbf{x}, z) \to \mathbf{K}$ sur les trois variables spatiales, et le symbole $\tilde{}$ désignera une transformée de Fourier $\mathbf{x} \to \mathbf{k}$ sur les variables spatiales du plan. Pour résumer, le vecteur d'état $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, z, t)$ sera noté dans les principaux espaces duaux : $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{K}, t)$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{k}, z, t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, z, s)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, z, s)$.

Tenseurs fondamentaux : $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}$ désigne le tenseur de Green de taille 3×3 tel que $\mathbf{u} = \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}} * \mathbf{f}_\beta$, $\mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\alpha} \diamond \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}$ le tenseur de contraintes associé, également de taille 3×3, tel que $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{u}} * \mathbf{f}_\beta$, et $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_z,\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ qui est le tenseur de taille 6×3 tel que $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{g} * \mathbf{f}_\beta$. On peut, de manière équivalente, définir le tenseur de Green par les continuités et discontinuités qu'il engendre au voisinage du point source. Dans le formalisme de la théorie des potentiels (*cf.* [13] par exemple), le tenseur $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}$ est également le « noyau de simple couche ». Considérons une frontière infiniement fine Γ. On notte $\boldsymbol{\xi}_\Gamma$ les points de cette frontière ($\boldsymbol{\xi}_\Gamma \equiv \boldsymbol{\xi} \in \Gamma$), $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_\Gamma)$ un vecteur unitaire normal à Γ, $\mathbf{f}_s(\boldsymbol{\xi}_\Gamma)$ un terme source (potentiel de simple couche) distribué sur cette frontière, et $\varepsilon > 0$ un scalaire infinitésimal. On note également $\boldsymbol{\xi}_\Gamma^\pm$ les points situés de part et d'autre de la frontière : $\boldsymbol{\xi}_\Gamma^+ = \boldsymbol{\xi}_\Gamma + \varepsilon\, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_\Gamma)$ et $\boldsymbol{\xi}_\Gamma^- = \boldsymbol{\xi}_\Gamma - \varepsilon\, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_\Gamma)$. Alors le champ $\mathbf{u}_s = \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}} * \mathbf{f}_s$ vérifie au travers de Γ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}_s\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^+\right) - \mathbf{u}_s\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^-\right) & = & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{s,\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^+\right) - \boldsymbol{\sigma}_{s,\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^-\right) & = & -\mathbf{f}_s\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma\right). \end{array} \right. \tag{4}$$

Suivant la théorie des potentiels, on définit également le tenseur « noyau de double couche » $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(\boldsymbol{\nabla} \diamond \boldsymbol{\alpha})$ et le tenseur des contraintes associé $\mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2}} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \diamond \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(\boldsymbol{\nabla} \diamond \boldsymbol{\alpha}_2)$. Ces tenseurs prendront tout leur sens dans la partie II. En reprenant les notations du paragraphe précédent et en appelant cette fois $\mathbf{f}_d(\boldsymbol{\xi}_\Gamma)$ le terme source (potentiel de double couche) distribué sur Γ, alors $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ est tel que le champ $\mathbf{u}_d = \mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}} * \mathbf{f}_d$ soit solution de l'équation d'onde (1,3) et vérifie au travers de Γ [13, 59, 60] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}_d\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^+\right) - \mathbf{u}_d\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^-\right) & = & \mathbf{f}_d\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma\right) \\ \boldsymbol{\sigma}_{d,\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^+\right) - \boldsymbol{\sigma}_{d,\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{\xi}_\Gamma^-\right) & = & \mathbf{0}. \end{array} \right. \tag{5}$$

Les continuités et discontinuités dans les relations (4) et (5) doivent se comprendre au sens de la partie régulière des champs de déplacement et de contrainte. En effet, ces champs contiennent également des parties singulières en $\varepsilon = 0$, qui seront rapidement discutées en partie II.

La convention utilisée concernant les variables des tenseurs $\mathbf{g}_{.,.}(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, t_r, t_e)$ est la suivante : les variables de droite, indicées « e » ($\boldsymbol{\xi}_e$ et t_e), se rapportent aux coordonnées d'émission, et que les variables de gauche, indicées « r » ($\boldsymbol{\xi}_r$ et t_r), se rapportent aux coordonnées de réception. Du fait de l'invariance selon $\mathbf{x}$, les tenseurs $\mathbf{g}_{.,.}$ vérifient $\mathbf{g}_{.,.}(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, t_r, t_e) = \mathbf{g}_{.,.}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_e, z_r, z_e, t_r, t_e)$.

Par commodité, l'indice β sera la plupart du temps omis et ne sera précisé que pour éviter les ambigüités.

Rappel des propriétés de l'opérateur $\diamond$: les symétries du tenseur des rigidités se traduisent par

$$(\mathbf{b} \diamond \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

$$(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})\ \mathbf{c} = (\mathbf{a} \diamond \mathbf{c})\ \mathbf{b}, \tag{7}$$

et

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\,,\ (\mathbf{a} \diamond \mathbf{a}) \text{ est symétrique définie positive.} \tag{8}$$

La propriété (8) sera largement utilisée, car la matrice $(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})$ et son inverse seront très présentes. Cette propriété se perd lorsque l'on considère un fluide, pour lequel les seuls coefficients élastiques non nuls sont $c_{ij} = \rho\, c^2$, $i, j = 1, 2, 3$. Par contre, $(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})$ avec $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ n'est pas inversible (elle est toujours de rang 2).

Donnons l'expression des trois matrices qui interviennent dans le calcul de la contrainte normale $\boldsymbol{\sigma}_z$:

$$\begin{array}{rccc} & \text{cas général} & \text{cas orthotrope } (xOy) & \text{cas isotrope} \\ (\mathbf{n} \diamond \mathbf{l}) = & \begin{pmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{55} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{n} \diamond \mathbf{m}) = & \begin{pmatrix} c_{56} & c_{25} & c_{45} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \\ 0 & c_{23} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) = & \begin{pmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\,\mu \end{pmatrix}. \end{array} \tag{9}$$

Enfin, donnons l'expression de trois matrices à partir desquelles, des matrices (9) et de la symétrie (6), n'importe quelle matrice $(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})$ peut être obtenue :

$$\begin{array}{rccc} & \text{cas général} & \text{cas orthotrope } (xOy) & \text{cas isotrope} \\ (\mathbf{l} \diamond \mathbf{l}) = & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{m} \diamond \mathbf{m}) = & \begin{pmatrix} c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\,\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{l} \diamond \mathbf{m}) = & \begin{pmatrix} c_{16} & c_{12} & c_{14} \\ c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{56} & c_{25} & c_{45} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{10}$$

Chapitre 1

Approche par ondes partielles

La méthode des ondes partielles consiste à appliquer des transformations intégrales au temps et aux dimensions spatiales du plan (xOy) de manière à transformer les systèmes (1, 3) en une infinité de systèmes d'équations différentielles ordinaires en z. Chacun des systèmes est indépendant des autres. A variables spectrales fixées, les équations sont résolues dans chacune des couches prise séparément des autres sur la base des ondes partielles (ou ondes de volume), puis les conditions de continuité aux interfaces entre les couches permettent de raccorder ces solutions partielles. Enfin, les transformations inverses sont effectuées numériquement pour obtenir la solution dans l'espace physique. Les travaux de Thomson [86] et Haskell [35] sont généralement considérés comme les premiers travaux s'intéressant à un milieu stratifié arbitraire et adoptant une stratégie de résolution entièrement numérique. Ces deux publications sont considérées comme fondatrices pour l'usage numérique de la matrice de transfert dans l'approche par ondes partielles. De nombreux travaux ont été menés par la suite dans le but de rendre ces méthodes numériques les plus stables et les plus rapides possibles (voir par exemple l'article de synthèse bibliographique [53]). Nous tenons [74] pour une référence concernant les détails de l'implémentation numérique. L'enjeu pour la plupart était de calculer et d'étudier les modes propres du milieu stratifié, en régime harmonique, et éventuellement de calculer, grâces à la base modale, le champ rayonné par une source donnée. Cependant, l'obtention et l'utilisation de la base modale n'est pas toujours facile - ceci fera l'objet du Chapitre 2 - et il est donc important de pouvoir résoudre l'équation d'onde sans se servir des modes propres. Avec l'approche par ondes partielles, ceci est malaisé à cause du régime harmonique. En effet, le contour d'intégration peut passer arbitrairement près des singularités de l'intégrande, ce qui a pour conséquence que le coût numérique n'est pas contrôlé. La solution à ce problème est de déformer le contour d'intégration dans le plan complexe, soit pour le nombre d'onde [30], soit pour la fréquence [66, 92]. Cela revient à prendre des fréquences complexes, c'est-à-dire à travailler avec des transformées de Laplace plutôt que des transformées de Fourier. Curieusement, à notre connaissance, ces techniques sont relativement peu utilisées par la communauté mécanicienne alors qu'elles permettent de résoudre le cas général tout en assurant un coût numérique parfaitement contrôlé et compétitif vis à vis des méthodes modales (quand ces dernières fonctionnent). Selon les communautés, la méthode porte également le nom de Fast Field Program [94] (acoustique sous-marine et atmosphérique), wavenumber integration technique, discrete wavenumber method [16] (en sismique).

Ce chapitre commence par la résolution de l'équation d'ondes en milieu infini dans l'espace dual $(\mathbf{k}, z, s)$, où $\mathbf{k}$ est la variable duale de $\mathbf{x}$ par transformation de Fourier et s la variable duale de t par transformation de Laplace. Le cas général de sources volumiques est détaillé. Une attention particulière est donnée à la démonstration du « tri » des ondes partielles existant dans chaque couche. Ce tri est rendu particulièrement simple par la transformée de Laplace, alors que la formulation classique « en ω » doit discriminer les ondes

partielles propagatives des ondes partielles hétérogènes et évanescentes. Dans un second temps le système prenant en compte les interactions entre les couches est construit. La « Matrice Globale » est choisie en raison de son caractère général et des optimisations qu'elle permet de réaliser pour la Partie II. Les transformations inverses sont commentées, en particulier la transformation numérique inverse de Laplace qui est peu couramment utilisée dans la communauté de CND et qui recèle quelques subtilités techniques. Le chapitre se termine par des exemples représentant diverses situations d'intérêt en CND de manière à mettre en valeur la polyvalence et la performance de la méthode. En particulier, nous soulignons la conséquence de la non causalité du modèle dissipatif hystérétique courramment employé.

1.1 Tenseur de Green transitoire d'un milieu infini

1.1.1 Démonstration du tri des ondes planes montantes et descendantes

Plaçons-nous dans la couche d'indice β en ignorant pour l'instant qu'elle est bornée par une ou deux interfaces. Par commodité, nous omettons pour le moment l'indice β. Appliquons une transformation de Fourier 3D aux variables spatiales : $(\mathbf{x}, z) \to \mathbf{K} = (\mathbf{k}, k_z)$:

$$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(\mathbf{x}, z, t) \exp\left(\mathbb{i}\,\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x} + \mathbb{i}\,k_z\,z\right) \mathbb{d}\mathbf{x}\,\mathbb{d}z. \tag{1.1}$$

L'équation de Green associée à l'équation d'onde (1) devient :

$$\rho\,\partial_t^2 \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) + (\mathbf{K} \diamond \mathbf{K})\,\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) = \delta(t)\,\mathbb{I}. \tag{1.2}$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ (mouvement de corps rigide), alors $\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) = \rho^{-1}\,\mathbb{r}(t)\,\mathbb{I}$, où $\mathbb{r}$ est la fonction rampe telle que $\mathbb{r}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathbb{r}(t) = t$ si $t \geqslant 0$. Si $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ alors $(\mathbf{K} \diamond \mathbf{K})$ est une matrice réelle symétrique définie positive et admet donc trois valeurs propres strictement positives $\omega_i^2 > 0$, dont les vecteurs propres associés sont notés $\mathbf{P}_i$, tels que :

$$(\mathbf{K} \diamond \mathbf{K}) = \rho\,\mathbf{P} \operatorname*{diag}_{1 \leqslant i \leqslant 3}\left(\omega_i^2\right) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}. \tag{1.3}$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3]$ est la matrice des polarisations et $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ est sa transposée. La solution de l'équation (1.2) est

$$\hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) = \mathbf{P} \operatorname*{diag}_{1 \leqslant i \leqslant 3}\left(\frac{\mathbb{h}(t)\,\sin(\omega_i\,t)}{\rho\,\omega_i}\right) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \tag{1.4}$$

où $\mathbb{h}$ est l'échelon unité de Heaviside. Maintenant que nous connaissons les solutions de l'équation (1.2), appliquons une transformation de Laplace : $t \to s$, avec $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \hat{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}}(t) \exp(-s\,t)\,\mathbb{d}t. \tag{1.5}$$

La fonction rampe et la fonction sinus ont pour transformées s^{-2} et $\left(1 + s^2\right)^{-1}$, qui sont holomorphes dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(s) > 0$ et qui possèdent des pôles situés sur l'axe imaginaire. La solution de l'équation d'onde dans l'espace dual $(\mathbf{k}, z, s)$ est :

$$\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}, \text{ avec } \hat{\mathbf{A}} = \rho\,s^2\,\mathbb{I} + (\mathbf{K} \diamond \mathbf{K}). \tag{1.6}$$

Cherchons à effectuer analytiquement la transformations de Fourier inverse suivant z :

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\mathbf{U}}}(z) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}(k_z)\,\exp\left(-\mathbb{i}\,k_z\,z\right)\,\mathbb{d}k_z. \tag{1.7}$$

D'après le théorème des résidus, ceci revient à trouver les zéros de $\det\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$ dans le plan complexe, en fonction de k_z. Nous nous proposons donc de trouver les racines de :

$$\det(\hat{\mathbf{A}}) = \det\left(\rho s^2\mathbb{I} + k_z^2\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{n}) + k_z\,((\mathbf{k}\diamond\mathbf{n}) + (\mathbf{n}\diamond\mathbf{k})) + (\mathbf{k}\diamond\mathbf{k})\right), \tag{1.8}$$

qui est une fonction polynomiale (polynôme de Christoffel) du troisième degré en s^2 et du sixième degré en k_z, à coefficients réels. Les variables, k_x, k_y et s étant fixées, $\det(\hat{\mathbf{A}})$ admet exactement 6 racines complexes, notées $k_{z,j}$ pour $j = 1..6$.

Démontrons dans un premier temps qu'une racine $k_{z,j}$ ne peut pas être réelle. Pour cela procédons par l'absurde : supposons que k_{z,j_0} est une racine réelle. Comme vu précédemment, $k_{z,j_0}^2\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{n}) + k_{z,j_0}\,((\mathbf{k}\diamond\mathbf{n}) + (\mathbf{n}\diamond\mathbf{k})) + (\mathbf{k}\diamond\mathbf{k})$ est une matrice symétrique réelle définie positive :

$$\det(\hat{\mathbf{A}}) = \det\left(\rho\,s^2\,\mathbb{I} + \rho\,\mathbf{P}\,\underset{1\leqslant j\leqslant 3}{\mathrm{diag}}\left(\omega_j^2\right)\,\mathbf{P}^T\right), \tag{1.9}$$

et donc encore :

$$\det(\hat{\mathbf{A}}) = \rho\left(\omega_1^2 + s^2\right)\left(\omega_2^2 + s^2\right)\left(\omega_3^2 + s^2\right). \tag{1.10}$$

La relation (1.10) nous montre que $\det(\hat{\mathbf{A}})$ ne s'annule alors que pour $s = \pm\mathbb{i}\,\omega_j$. Or, par hypothèse, nous nous plaçons dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, ce qui rend impossible $\det(\hat{\mathbf{A}}) = 0$. Nous venons donc de démontrer que toute racine $k_{z,j}$ de $\det(\hat{\mathbf{A}})$ est nécessairement à partie imaginaire non nulle.

Démontrons à présent qu'il y a toujours 3 racines à partie imaginaire strictement positive et 3 racines à partie imaginaire strictement négative. Comme $\det(\hat{\mathbf{A}})$ est une fonction continue de s dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, $k_{z,j}$ sont à leur tour six fonctions continues de s. Nous venons de démontrer que leur partie imaginaire ne s'annule jamais : il y a donc toujours le même nombre de racines à partie imaginaire positive ou négative. Prenons le cas particulier $\mathrm{Im}\,(s) = 0$: $\det(\hat{\mathbf{A}})$, tel que le montre la relation (1.8), est à coefficients réels. Ses racines sont donc complexes conjuguées : 3 sont à partie imaginaire strictement positive et 3 sont à partie imaginaire strictement négative, ce qui clôt la démonstration.

Nous pouvons à présent trier et nommer sans ambigüité les racines :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Im}\,(k_{z,j}) > 0, & j = 1,2,3 : \quad \text{ondes montantes} \\ \mathrm{Im}\,(k_{z,j}) < 0, & j = 4,5,6 : \quad \text{ondes descendantes.} \end{array} \tag{1.11}$$

Nous allons calculer la transformation inverse (1.7) en intégrant sur un demi-cercle de rayon tendant vers l'infini, comme décrit dans la figure 1.1. Supposons $z > 0$: nous choisissons le contour en trait continu rouge. Ce contour étant fermé, le théorème des résidus donne :

$$\int_{-R}^{+R} \hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}(k_z)\;e^{-\mathbb{i}\,k_z\,z}\,\mathbb{d}k_z + \int_0^{\pi} \hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}\left(R\,e^{\mathbb{i}\,\theta}\right)\;e^{-\mathbb{i}\,R\,e^{\mathbb{i}\,\theta}\,z}\,R\,\mathbb{i}\,\theta\,\mathbb{d}\theta = 2\,\mathbb{i}\,\pi\sum \text{Résidus}. \tag{1.12}$$

Les résidus sont la contribution des pôles. Notons que seuls 3 parmi les 6 sont à considérer, le choix se faisant suivant le signe de la partie imaginaire de $k_{z,j}$. Ceci justifie donc les dénominations « onde montante » et « onde descendante » introduites dans la définition (1.11). Dans l'équation (1.12), la première intégrale tend

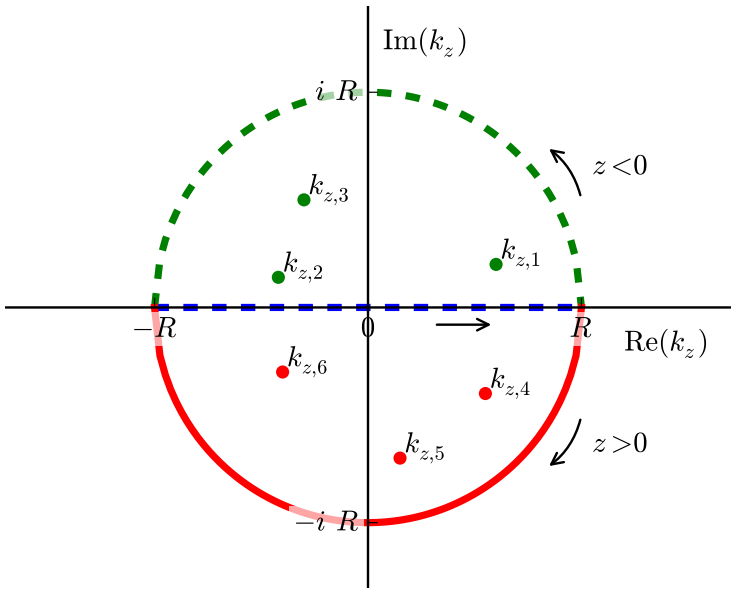


FIGURE 1.1 – Suivant le signe de z, le demi-cercle en trait continu rouge ou traits pointillés verts est choisi pour fermer le contour d'intégration (1.7). Trois pôles parmi les six contribuent. Ils correspondent aux ondes montantes ($z<0$, $j=1,2,3$) ou descendantes ($z>0$, $j=4,5,6$).

vers la transformée de Fourier inverse que nous cherchons à calculer. Montrons que la seconde intégrale tend vers $\mathbb{O}$.

D'après la relation (1.6), $\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}$ est équivalent à $k_z^{-2}\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{n})^{-1}$ lorsque $|k_z|\to\infty$. Donc, pour $|k_z|$ suffisamment grand, nous pouvons borner $\left|\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}\,(k_z)\right| < \left|\hat{\mathbf{G}}^{(0)}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}\right|\,|k_z|^{-2}$, avec $\hat{\mathbf{G}}^{(0)}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}$ un certain tenseur indépendant de k_z. D'autre part, grâce au choix du contour, nous pouvons borner l'exponentielle par 1. On a alors

$$\left|\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\pi}\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}\left(R\,e^{\mathbb{i}\,\theta}\right)\,e^{-\mathbb{i}\,R\,e^{\mathbb{i}\,\theta}\,z}\,R\,\mathbb{i}\,\theta\,\mathbb{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\,R}\left|\hat{\mathbf{G}}^{(0)}_{\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{U}}}\right|, \tag{1.13}$$

qui tend vers $\mathbb{O}$ lorsque le rayon du cercle tend vers l'infini. Si maintenant nous supposons $z<0$, nous pouvons utiliser le contour en traits pointillés verts pour borner l'exponentielle. Il ne nous reste plus qu'à calculer les résidus grâce aux $k_{z,j}$ trouvés précédemment.

En réalité, nous ne calculons ni les $k_{z,j}$ ni les résidus de la manière que cette démonstration laisse supposer. Ces détails techniques font l'objet du paragraphe suivant. Admettons pour le moment les résultats suivants :

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\mathbf{U}}}\,(z) = \begin{cases} \mathbf{H}^{+}\,\mathbf{E}^{+}\,(z)\,\mathbf{Q}^{+} & z<0 \\ -\mathbf{H}^{-}\,\mathbf{E}^{-}\,(z)\,\mathbf{Q}^{-} & z>0 \end{cases} \tag{1.14}$$

où l'on a introduit la matrice de polarisations, de taille 6x6 :

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{H}^{+} & \mathbf{H}^{-} \end{array}\right], \tag{1.15}$$

$$\mathbf{H}^{+} = \left[\boldsymbol{\xi}_j\right]_{j=1..3}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{H}^{-} = \left[\boldsymbol{\xi}_j\right]_{j=4..6}, \tag{1.17}$$

le propagateur, de taille 6x6 :

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+(z) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{E}^-(z) \end{bmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{E}^+(z) = \underset{1\leqslant j\leqslant 3}{\text{diag}} \left(\exp\left(-\mathbb{i}\, k_{z,j}\, z\right)\right), \tag{1.19}$$

$$\mathbf{E}^-(z) = \underset{4\leqslant j\leqslant 6}{\text{diag}} \left(\exp\left(-\mathbb{i}\, k_{z,j}\, z\right)\right), \tag{1.20}$$

et la matrice des coefficients sur la base des ondes de volume $\mathbf{Q} = [\ (\mathbf{Q}^+)^{\mathrm{T}} \quad (\mathbf{Q}^-)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, de taille 6x3, qui vérifie :

$$\mathbf{H}\,\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ -\mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Nous sommes à présent en mesure de traiter le cas d'une source ponctuelle selon z :

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}, z, t) \equiv \delta(z)\ \boldsymbol{\psi}_\beta(\mathbf{x}, t). \tag{1.22}$$

En effet, en introduisant le vecteur $\boldsymbol{\Phi} = (\ (\boldsymbol{\Phi}^+)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\Phi}^-)^{\mathrm{T}}\ )^{\mathrm{T}}$ des coefficients sur la base des ondes de volume :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^+ &= \mathbf{Q}^+\, \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_\beta \\ \boldsymbol{\Phi}^- &= \mathbf{Q}^-\, \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_\beta \end{aligned} \tag{1.23}$$

le vecteur d'état cherché prend la forme :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \begin{cases} \mathbf{H}^+\, \mathbf{E}^+(z)\ \boldsymbol{\Phi}^+ & z < 0 \\ -\mathbf{H}^-\, \mathbf{E}^-(z)\ \boldsymbol{\Phi}^- & z > 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

1.1.2 Méthode numérique pour obtenir les ondes de volumes

Les nombres d'ondes $k_{z,j}$ et la matrice des polarisations (1.15) peuvent être obtenus à partir des équations ci-dessus. Cependant il est numériquement beaucoup plus commode de les obtenir par diagonalisation de la matrice de Stroh [52, 79]. Celle-ci est définie en écrivant le système d'équations différentielles (1) dans l'espace $(\mathbf{k}, z, s)$ et en choisissant le tenseur d'état $\tilde{\mathbf{G}}$:

$$\partial_z \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{M}_{Stroh}\, \tilde{\mathbf{G}} - \delta(z) \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

$$\mathbf{M}_{Stroh} = \begin{bmatrix} \mathbb{i}\ (\mathbf{n}\diamond\mathbf{n})^{-1} & (\mathbf{n}\diamond\mathbf{n})^{-1} \\ \rho\, s^2\, \mathbb{I} + (\mathbf{k}\diamond\mathbf{k}) - (\mathbf{k}\diamond\mathbf{n})\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{n})^{-1}\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{k}) & \mathbb{i}\ (\mathbf{k}\diamond\mathbf{n})\,(\mathbf{n}\diamond\mathbf{n})^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

La matrice $\mathbf{M}_{Stroh}$ étant constante, les solutions de l'équation (1.25) s'expriment simplement si de plus $\mathbf{M}_{Stroh}$ est diagonalisable. D'après le paragraphe précédent, nous avons trouvé six solutions linéairement indépendantes à l'équation homogène associée. Chacune de ces solutions est un système propre de $\mathbb{i}\,\mathbf{M}_{Stroh}$. Par conséquent, et avec ces notations,

$$\mathbb{i}\,\mathbf{M}_{Stroh} = \mathbf{H}\ \underset{1\leqslant j\leqslant 6}{\text{diag}}\ (k_{z,j})\ \mathbf{H}^{-1}, \tag{1.27}$$

et nous retrouvons les formules (1.24-1.21). C'est cette relation (1.27) qui est exploitée dans la pratique pour obtenir $\mathbf{H}$ et $k_{z,j}$.

Cas d'un milieu solide isotrope non dissipatif : Donnons sans démonstration l'expression des nombres d'onde et des polarisations dans le cas d'un tel milieu caractérisé par sa densité ρ, la célérité de ses ondes longitudinales c_L et la célérité de ses ondes transversales c_T :

$$\begin{aligned} k_{z,1} &= \mathbb{i}\sqrt{s^2\,c_L^{-2}+k_x^2+k_y^2}, \quad k_{z,4} = -\%, \\ k_{z,2} &= \mathbb{i}\sqrt{s^2\,c_T^{-2}+k_x^2+k_y^2}, \quad k_{z,5} = -\%, \\ k_{z,3} &= \mathbb{i}\sqrt{s^2\,c_T^{-2}+k_x^2+k_y^2}, \quad k_{z,6} = -\%, \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{i}\,k_x\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ \mathbb{i}\,k_y\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ \mathbb{i}\,k_{z,1}\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ 2\,c_T^2\,s^{-2}\,k_{z,1}\,k_x \\ 2\,c_T^2\,s^{-2}\,k_{z,1}\,k_y \\ -1-2\,c_T^2\,s^{-2}\,\mathbf{k}^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_4 = \begin{pmatrix} \% \\ \% \\ -\% \\ -\% \\ -\% \\ \% \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{i}\,k_x\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ \mathbb{i}\,k_y\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ -\mathbb{i}\,\mathbf{k}^2\,k_{z,2}^{-1}\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ -\left(1+2\,c_T^2\,s^{-2}\,\mathbf{k}^2\right)\,k_x\,k_{z,2}^{-1} \\ -\left(1+2\,c_T^2\,s^{-2}\,\mathbf{k}^2\right)\,k_y\,k_{z,2}^{-1} \\ -2\,c_T^2\,s^{-2}\,\mathbf{k}^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_5 = \begin{pmatrix} \% \\ \% \\ -\% \\ -\% \\ -\% \\ \% \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{i}\,k_y\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ \mathbb{i}\,k_x\,\rho^{-1}\,s^{-2} \\ 0 \\ c_T^2\,s^{-2}\,k_{z,3}\,k_y \\ c_T^2\,s^{-2}\,k_{z,3}\,k_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_6 = \begin{pmatrix} \% \\ \% \\ 0 \\ -\% \\ -\% \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'indice 1 (et 4) correspond à l'onde de compression, les indices 2 et 3 (et 5, 6) correspondent aux deux ondes de cisaillement.

Cas d'un milieu fluide non visqueux : Dans le cas d'un milieu fluide caractérisé par une densité ρ et une célérité c_f les variables d'état sont généralement la pression et la vitesse particulaire. Cependant, afin d'adopter une notation unifiée et d'écrire par la suite les équations de continuités aux interfaces de manière simple, il est commode de continuer à utiliser le vecteur d'état $\tilde{\mathbf{H}}(z)$. Dans ce paragraphe nous résolvons l'équation d'onde vérifiée par la pression, puis nous en déduisons l'expression de $\tilde{\mathbf{H}}(z)$.

Dans l'espace physique, la pression p du fluide soumis à un champ volumique de forces $\mathbf{f}$ vérifie l'équation d'onde [18] :

$$\partial_t^2 p - c_f^2\,\triangle p = c_f^2\,\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{f}. \tag{1.30}$$

Ecrivons l'équation de Green associée à (1.30) dans l'espace $(\mathbf{k}, z, s)$:

$$s^2\,\tilde{P} + c_f^2\,\mathbf{k}^2\,\tilde{P} - c_f^2\,\partial_z^2\tilde{P} = c_f^2\,\delta(z). \tag{1.31}$$

Cette équation (1.31) a pour solution :

$$\tilde{P}(z) = \begin{cases} \frac{\mathbb{i}}{2\,k_{z,1}}\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,1}\,z} & z < 0 \\ \frac{\mathbb{i}}{2\,k_{z,1}}\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,2}\,z} & z > 0, \end{cases} \tag{1.32}$$

avec

$$\begin{aligned} k_{z,1} &= \mathbb{i}\,\sqrt{s^2\,c_f^{-2} + \mathbf{k}^2} \\ k_{z,2} &= -\mathbb{i}\,\sqrt{s^2\,c_f^{-2} + \mathbf{k}^2} \end{aligned} \tag{1.33}$$

les nombres d'ondes de l'onde montante (indice 1) et de l'onde descendante (indice 2). A présent, convoluons (1.32) par $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{f}$ pour obtenir la solution souhaitée :

$$\tilde{P}(z) = \begin{cases} \frac{k_x\,\tilde{\Psi}_x + k_y\,\tilde{\Psi}_y + k_{z,1}\,\tilde{\Psi}_z}{2\,k_{z,1}}\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,1}\,z} & z < 0 \\ \frac{k_x\,\tilde{\Psi}_x + k_y\,\tilde{\Psi}_y - k_{z,1}\,\tilde{\Psi}_z}{2\,k_{z,1}}\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,2}\,z} & z > 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Utilisons les relations $\rho\,\partial_t^2\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}p + \mathbf{f}$ et $\boldsymbol{\sigma}_z = (\mathbf{n} \diamond \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}$ pour obtenir les polarisations au sens de $\tilde{\mathbf{H}}(z)$. L'opérateur $\diamond$ est particulièrement simple pour un fluide, et les matrices $(\mathbf{n} \diamond \mathbf{k})$ et $(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})$ peuvent se calculer à partir de (9) moyennant les substitutions $\lambda \to \rho\,c_f^2$ et $\mu \to 0$:

$$(\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho\,c_f^2\,k_x & \rho\,c_f^2\,k_y & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

$$(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\,c_f^2 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Nous obtenons ainsi l'expression des vecteurs polarisations, valables à une constante multiplicative près :

$$\boldsymbol{\xi}_j = \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{i}\,k_x}{\rho\,s^2} \\ \frac{\mathbb{i}\,k_y}{\rho\,s^2} \\ \frac{\mathbb{i}\,k_{z,j}}{\rho\,s^2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Nous pouvons à présent définir une matrice des polarisations de taille 6x2, $\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \boldsymbol{\xi}_2 \end{bmatrix}$, un propagateur diagonal de taille 2x2, $\mathbf{E}_f(z) = \underset{1 \leqslant j \leqslant 2}{\text{diag}}\,(\exp(-\mathbb{i}\,k_{z,j}\,z))$, et un vecteur de coefficients de taille 2, $\boldsymbol{\Phi}_f = (\ \Phi_f^+ \quad \Phi_f^-\ )^{\mathrm{T}}$. Avec ces notations :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \begin{cases} \Phi_f^+\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,1}\,z}\,\boldsymbol{\xi}_1 & z < 0 \\ -\Phi_f^-\, e^{-\mathbb{i}\,k_{z,2}\,z}\,\boldsymbol{\xi}_2 & z > 0, \end{cases} \tag{1.38}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \Phi_f^+ \\ \Phi_f^- \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\,k_{z,1}} \begin{pmatrix} k_x/\xi_{1,6} & k_y/\xi_{1,6} & k_{z,1}/\xi_{1,6} \\ -k_x/\xi_{2,6} & -k_y/\xi_{2,6} & k_{z,1}/\xi_{2,6} \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_\beta. \tag{1.39}$$

Ces deux dernières relations (1.38-1.39) sont valables quels que soient les facteurs multiplicatifs avec lesquels

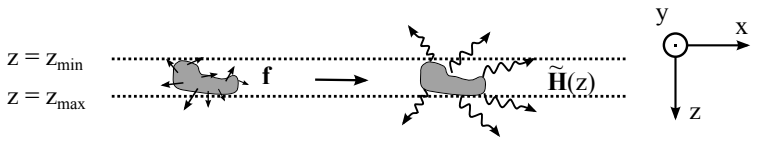


FIGURE 1.2 – Une source volumique délimite trois régions de l'espace : $z \leqslant z_{min}$, $z_{min} < z < z_{max}$ et $z_{max} \leqslant z$.

sont définies les polarisations $\boldsymbol{\xi}_1$ et $\boldsymbol{\xi}_2$. La présence du terme source produit en $z = 0$ une discontinuité de la contrainte normale et du déplacement. Ces sauts valent, pour $\tilde{U}_z$ et $\tilde{\Sigma}_{zz}$:

$$\tilde{U}_z\left(0^+\right) - \tilde{U}_z\left(0^-\right) = -\mathbb{i}\,\rho^{-1}\,s^{-2}\,\left(k_x\,\tilde{\Psi}_x + k_y\,\tilde{\Psi}_y\right), \tag{1.40}$$

$$\tilde{\Sigma}_{zz}\left(0^+\right) - \tilde{\Sigma}_{zz}\left(0^-\right) = \tilde{\Psi}_z. \tag{1.41}$$

1.1.3 Champ rayonné par une source volumique

Comme représenté sur la figure 1.2, la source délimite trois régions de l'espace : deux régions extérieures à la source, pour lesquelles le vecteur des coefficients $\boldsymbol{\Phi}$ est constant et la propagation est exponentielle, et une région intérieure, pour laquelle $\boldsymbol{\Phi}(z)$ dépend de l'altitude.

– Si $z \leqslant z_{min}$, $\boldsymbol{\Phi} = (\ (\boldsymbol{\Phi}^+)^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\ )^{\mathrm{T}}$ et seules les ondes montantes contribuent :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}^+\,\mathbf{E}^+(z - z_{min})\,\boldsymbol{\Phi}^+(z_{min}). \tag{1.42}$$

– Si $z \geqslant z_{max}$, $\boldsymbol{\Phi} = (\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\Phi}^-)^{\mathrm{T}}\ )^{\mathrm{T}}$ et seules les ondes descendantes contribuent :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = -\mathbf{H}^-\,\mathbf{E}^-(z - z_{max})\,\boldsymbol{\Phi}^-(z_{max}). \tag{1.43}$$

– Si $z_{min} < z < z_{max}$, toutes les ondes contribuent :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}^+\,\boldsymbol{\Phi}^+(z) - \mathbf{H}^-\,\boldsymbol{\Phi}^-(z), \tag{1.44}$$

avec

$$\boldsymbol{\Phi}^+(z) = -\int_{z_{max}}^{z} \mathbf{E}^+(z_{max} - \zeta)\,\mathbf{Q}^+\,\tilde{\mathbf{F}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^-(z) = \int_{z_{min}}^{z} \mathbf{E}^-(z_{min} - \zeta)\,\mathbf{Q}^-\,\tilde{\mathbf{F}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{1.46}$$

Il y a donc 18 convolutions à calculer. Dans cette thèse plusieurs cas ont été considérés, certains permettant une convolution analytique, comme le cas d'une source invariante le long d'un segment incliné (pour modéliser grossièrement un transducteur oblique), ou le cas d'une source invariante le long d'une porte triangulaire (pour construire un élément, *cf.* 3.3). Le cas général a également été traité et résolu par intégration numérique grâce à la méthode des trapèzes. La conclusion est que l'impact en temps de calcul est tout à fait acceptable, à condition de garder en mémoire $\boldsymbol{\Phi}^+(z_{min})$, $\boldsymbol{\Phi}^-(z_{max})$, ainsi que les étapes du calcul des convolutions (1.45-1.46) qui permettent ensuite de calculer $\tilde{\mathbf{H}}(z)$ à n'importe quelle altitude à coût très faible. Ces tests de performances ont été faits jusqu'à 1500 points de discrétisation des 18 convolutions, ce qui est en général largement suffisant.

1.1.4 Tenseurs $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ et $\mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}$

Rappelons que le tenseur $\mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}}$, appelé « noyau de double couche », est défini par les discontinuité et continuité des parties régulières des champs de déplacement et de contrainte au voisinage d'une source infiniement fine, définie sur une ligne de vecteur normal $\boldsymbol{\alpha}$ (voir la définition (5)). Dans le cas où $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n}$, c'est-à-dire dans le cas d'une ligne source horizontale, on peut simplement modifier la définition (1.21) de la matrice $\mathbf{Q}$ par :

$$\mathbf{H}\,\mathbf{Q}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_z} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Ceci permet de considérer non seulement un potentiel de double couche horizontal situé à l'intérieur d'une couche, mais également à l'interface entre deux couches.

Dans le cas général, l'expression du tenseur de Green étant établie, $\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}$ s'obtiennent par post-traitement de $\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\mathbf{U}}}$, en multipliant « à droite » par le transposé de l'opérateur de contrainte normale selon $\boldsymbol{\alpha}$ (voir par exemple les articles [13, 59, 60]). Si l'on appelle $\mathbf{q}_j^{\mathrm{T}}$ les 6 lignes de la matrice des coefficients $\mathbf{Q}$, alors on construit

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = -\mathbb{i}\,\mathbf{q}_j^{\mathrm{T}}\,\left[(\mathbf{k}\diamond\boldsymbol{\alpha}) + k_{z,j}\,(\mathbf{n}\diamond\boldsymbol{\alpha})\right] \tag{1.48}$$

et on définit les matrices

$$\mathbf{Q}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^+_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} \\ \mathbf{Q}^-_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} \end{bmatrix}, \tag{1.49}$$

$$\mathbf{Q}^+_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \left[\mathbf{q}^{\mathrm{T}}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}\right]_{j=1..3}, \tag{1.50}$$

$$\mathbf{Q}^-_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \left[\mathbf{q}^{\mathrm{T}}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}\right]_{j=4..6}. \tag{1.51}$$

D'une manière similaire, si l'on appelle

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+ & \mathbf{D}^- \end{bmatrix}, \tag{1.52}$$

$$\mathbf{D}^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \mathbf{H}^+, \tag{1.53}$$

$$\mathbf{D}^- = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \mathbf{H}^-, \tag{1.54}$$

et $\mathbf{d}_j$ les 6 colonnes de $\mathbf{D}$ (qui ne sont autres que les 3 composantes en déplacement de chacun des 6 vecteurs polarisation), alors on construit

$$\mathbf{d}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = -\mathbb{i}\,\left[(\boldsymbol{\alpha}\diamond\mathbf{k}) + k_{z,j}\,(\boldsymbol{\alpha}\diamond\mathbf{n})\right]\,\mathbf{d}_j \tag{1.55}$$

et on définit les matrices

$$\mathbf{D}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} & \mathbf{D}^-_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} \end{bmatrix}, \tag{1.56}$$

$$\mathbf{D}^+_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \left[\mathbf{d}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}\right]_{j=1..3}, \tag{1.57}$$

$$\mathbf{D}^-_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} = \left[\mathbf{d}_{j,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}\right]_{j=4..6}. \tag{1.58}$$

Avec ces notations,

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}^+\,\mathbf{E}^+(z)\,\mathbf{Q}^+_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} & z < 0 \\ -\mathbf{D}^-\,\mathbf{E}^-(z)\,\mathbf{Q}^-_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}} & z > 0, \end{cases} \tag{1.59}$$

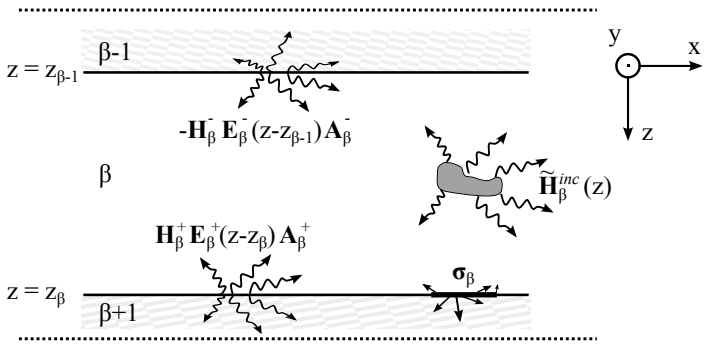


FIGURE 1.3 – Champs dans la couche β. Le terme source $\mathbf{f}_\beta$ produit un champ incident $\tilde{\mathbf{H}}_\beta^{inc}(z)$ et chaque interface est considérée comme une source secondaire qui produit à son tour un champ réfléchi $\mathbf{H}_\beta^+ \mathbf{E}_\beta^+(z - z_\beta)\ \mathbf{A}_\beta^+$ (interface du bas) ou $-\mathbf{H}_\beta^- \mathbf{E}_\beta^-(z - z_{\beta-1})\ \mathbf{A}_\beta^-$ (interface du haut).

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}^+_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1}}\ \mathbf{E}^+(z)\ \mathbf{Q}^+_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}} & z < 0 \\ -\mathbf{D}^-_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1}}\ \mathbf{E}^-(z)\ \mathbf{Q}^-_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}} & z > 0. \end{cases} \tag{1.60}$$

Dans la Partie II, il sera nécessaire de calculer le champ de déplacement ou de contrainte rayonné par une distribution volumique de « potentiels de double couche », notée $\mathbf{f}_d$. Ces champs s'obtiennent dans l'espace $(\mathbf{k}, z, s)$ par convolutions de l'opérateur $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{u},\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ (1.59) ou $\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}$ (1.60) avec $\tilde{\mathbf{F}}_d$. Les formules à évaluer sont similaires à celles établies dans le paragraphe 1.1.3 moyennant les substitutions $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ et $\mathbf{H} \to \mathbf{D}\text{ou}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$.

Pour clore ce paragraphe, notons que par linéarité, et en ignorant les lignes et colonnes redondantes, n'importe quelle composante du champ de déplacement ou de contrainte produit par un terme source mixte (constitué d'une combinaison linéaire de potentiel de simple et de double couche) peut s'obtenir en travaillant avec une matrice de polarisations de taille 9×6, que nous appellerons $\mathbf{H}_{(\tilde{\mathbf{U}}\,\tilde{\mathbf{\Sigma}})}$, et une matrice de coefficients d'ondes de volume de taille 6×9, que nous appellerons $\mathbf{Q}_{(\tilde{\mathbf{U}}\,\tilde{\mathbf{\Sigma}})}$.

1.2 Tenseur de Green transitoire d'un milieu stratifié

Prenons à présent en compte que la couche numéro β est bornée. Comme le décrit la figure 1.2, considérons les interfaces qui bornent cette couche comme des termes sources dont les amplitudes $\mathbf{A}_\beta^+$ et $\mathbf{A}_\beta^-$ sur la base des ondes de volume pouvant exister dans le milieu infini β restent à déterminer. Faisons de même dans toutes les autres couches. Nous pouvons écrire, pour $z_{\beta-1} < z < z_\beta$:

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}_\beta^+ \mathbf{E}_\beta^+(z - z_\beta)\ \mathbf{A}_\beta^+ - \mathbf{H}_\beta^- \mathbf{E}_\beta^-(z - z_{\beta-1})\ \mathbf{A}_\beta^- + \tilde{\mathbf{H}}_\beta^{inc}(z)\,. \tag{1.61}$$

Les cas $\beta = 0$ et $\beta = N + 1$ sont des cas particuliers. Ils correspondent au premier et au dernier milieux, qui sont semi-infinis. Dans ces cas :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}_0^+ \mathbf{E}_0^+(z)\ \mathbf{A}_0^+ + \tilde{\mathbf{H}}_0^{inc}(z) \quad \text{si}\, z < 0, \tag{1.62}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = -\mathbf{H}_{N+1}^- \mathbf{E}_{N+1}^-(z - z_N)\ \mathbf{A}_{N+1}^- + \tilde{\mathbf{H}}_{N+1}^{inc}(z) \quad \text{si}\, z > z_N. \tag{1.63}$$

Écrivons à présent les relations de continuité (3) à l'interface z_β. Selon la nature des milieux en contact, certaines des composantes de $\tilde{\mathbf{H}}(z)$ sont continues. Une manière d'adopter des notations unifiées est :

$$\mathbf{C}_\beta \left(\tilde{\mathbf{H}}\left(z_\beta^+\right) - \tilde{\mathbf{H}}\left(z_\beta^-\right) \right) = \mathbf{C}_\beta \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\beta \end{pmatrix}, \tag{1.64}$$

où $\tilde{\mathbf{H}}\left(z_\beta^+\right)$ est calculé dans la couche $\beta+1$, $\tilde{\mathbf{H}}\left(z_\beta^-\right)$ est calculé dans la couche β, et où $\mathbf{C}_\beta$ est une matrice de « masque » qui dépend de la nature de l'interface. Voici les différents cas considérés dans cette thèse :
– solide / solide : continuité de u_x, u_y, u_z, σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz},

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

– solide / fluide non visqueux : continuité de u_z, σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz},

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

– solide / vide : continuité de σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz},

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

– fluide non visqueux / fluide non visqueux : continuité de u_z, σ_{zz},

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

– fluide non visqueux / vide : continuité de σ_{zz},

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.69}$$

Rappelons à ce stade que la source d'interface (1.64) cache un choix de définition. En l'absence de modèle physique pour ce terme source, cette définition est arbitraire et privilégie certains cas limites au détriment d'autres. Le terme d'interface représente un terme volumique très fin, mais est-il réparti équitablement entre les deux milieux ? Est-il au contraire surtout dans l'un ou dans l'autre ? Dans cette thèse, ce choix a été d'identifier $\boldsymbol{\sigma}_\beta$ à un saut de contrainte normale, de manière à considérer dans les cas solide / fluide ou solide / vide qu'une source d'interface représente par exemple un transducteur collé sur le solide, et qui impose une contrainte normale égale à son vecteur force. Une conséquence « indésirable » est que dans le cas d'une interface fluide / fluide, une source d'interface correspond donc uniquement à un saut de pression, le déplacement normal étant supposé continu. D'après (1.40-1.41), dans ce cas fluide / fluide, nous n'avons

donc considéré que la composante normale du vecteur force d'interface. Dans le cas limite d'un milieu infini fluide uniforme dans lequel nous considérons une interface fictive, une source d'interface ne correspond donc pas à une source volumique en $\delta(z)$ si cette source contient une composante tangentielle.

Avec ces notations, l'ensemble des équations aux interfaces peut s'assembler sous forme d'un système linéaire de type « Matrice Globale » [53] dont le second membre est constitué par les différents termes sources :

$$\mathbf{M}_{Glob}\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}^-_{\beta-1} \\ \mathbf{A}^+_{\beta-1} \\ \mathbf{A}^-_{\beta} \\ \mathbf{A}^+_{\beta} \\ \mathbf{A}^-_{\beta+1} \\ \mathbf{A}^+_{\beta+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{C}_{\beta-1}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\beta-1} \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{H}}^{inc}_{\beta-1}(z_{\beta-1}) + \tilde{\mathbf{H}}^{inc}_{\beta}(z_{\beta-1})\right) \\ \mathbf{C}_{\beta}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\beta} \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{H}}^{inc}_{\beta}(z_{\beta}) + \tilde{\mathbf{H}}^{inc}_{\beta+1}(z_{\beta})\right) \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{1.70}$$

$$\mathbf{M}_{Glob} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \text{(zéros)} \\ & \mathbf{m}^{-,bas}_{\beta-1} & \mathbf{m}^{+,bas}_{\beta-1} & \mathbf{m}^{-,haut}_{\beta} & \mathbf{m}^{+,haut}_{\beta} & & & \\ & & & \mathbf{m}^{-,bas}_{\beta} & \mathbf{m}^{+,bas}_{\beta} & \mathbf{m}^{-,haut}_{\beta+1} & \mathbf{m}^{+,haut}_{\beta+1} & \\ \text{(zéros)} & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.71}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{m}^{-,bas}_{\beta-1} & = & -\mathbf{C}_{\beta-1}\,\mathbf{H}^-_{\beta-1}\,\mathbf{E}^-_{\beta-1}(z-z_{\beta-1}) \\ \mathbf{m}^{+,bas}_{\beta-1} & = & \mathbf{C}_{\beta-1}\,\mathbf{H}^+_{\beta-1} \\ \mathbf{m}^{-,haut}_{\beta} & = & \mathbf{C}_{\beta-1}\,\mathbf{H}^-_{\beta} \\ \mathbf{m}^{+,haut}_{\beta} & = & -\mathbf{C}_{\beta-1}\,\mathbf{H}^+_{\beta}\,\mathbf{E}^+_{\beta}(z-z_{\beta-1}) \\ \mathbf{m}^{-,bas}_{\beta} & = & -\mathbf{C}_{\beta}\,\mathbf{H}^-_{\beta}\,\mathbf{E}^-_{\beta}(z-z_{\beta}) \\ \mathbf{m}^{+,bas}_{\beta} & = & \mathbf{C}_{\beta}\,\mathbf{H}^+_{\beta} \\ \mathbf{m}^{-,haut}_{\beta+1} & = & \mathbf{C}_{\beta}\,\mathbf{H}^-_{\beta+1} \\ \mathbf{m}^{+,haut}_{\beta+1} & = & -\mathbf{C}_{\beta}\,\mathbf{H}^+_{\beta+1}\,\mathbf{E}^+_{\beta+1}(z-z_{\beta}). \end{array} \tag{1.72}$$

Notons que pour construire et résoudre le système il n'est nécessaire de calculer les champs incidents produits par les sources volumiques de chaque couche qu'aux altitudes des interfaces qui bornent cette couche. Ainsi, une source volumique complexe nécessitant une convolution numérique n'aura qu'un impact relativement limité sur le temps de calcul. Notons également que pour construire la matrice globale, seules des exponentielles décroissantes sont à calculer. Ceci est dû au fait que, grâce à l'écriture (1.61), les coefficients des ondes de volume sont définis dans chaque couche par rapport à l'interface supérieure pour les ondes descendantes, et à l'interface inférieure pour les ondes montantes. En conséquence, le calcul numérique est inconditionnellement stable, quel que soit le produit fréquence-épaisseur [74].

En dernier commentaire : on trouve dans la littérature [53] les approches par « Matrice de transfert », « Matrice d'impédance de couche », et d'autres variantes pour calculer les coefficients $\mathbf{A}^{\pm}_{\beta}$. Ces approches ont été développées dans le but de calculer des courbes de dispersion, en régime fréquentiel. Concernant le calcul de champ, elles peuvent permettre de gagner en temps de calcul lorsque le milieu stratifié contient un assez grand nombre de couches. Cependant, ce gain se fait au prix de restrictions sur la configuration des termes sources. De plus, à partir d'un certain nombre de couches, la structure par bandes de $\mathbf{M}_{Glob}$ la rend suffisamment creuse pour que les routines d'optimisation numérique en tirent parti. Cet aspect n'a pas été exploité dans cette thèse. L'approche « Matrice Globale » adoptée dans cette thèse est la seule approche

générale, permettant de traiter sans difficulté un nombre quelconque de sources situées à des emplacements arbitraires dans le milieu stratifié. C'est également la seule approche qui permet de traiter séparément à coût réduit un grand nombre de sources, en remplaçant le vecteur second membre du système (1.70) par une matrice multi-second membres. Cette optimisation sera indispensable dans la partie II.

1.3 Milieux solides dissipatifs

Les deux lois d'atténuation les plus courramment utilisées en CND ont été considérées : la loi de Kelvin-Voigt et la loi hystérétique. Comme on va le voir, le cas de la loi de Kelvin-Voigt ne pose aucun problème, alors que le cas de la loi hystérétique donne lieu à une difficulté théorique dont les conséquences pratiques seront soulignées aux paragraphes 1.3.2 et 1.5.4.

1.3.1 Loi de Kelvin-Voigt

Cette loi décrit bien les phénomènes d'absorption dans les polymères pour les bandes de fréquences utilisées en CND. L'atténuation dans l'espace est proportionnelle au carré de la fréquence. Dans le domaine temporel, l'opérateur de dissipation vaut $\blacklozenge\, \partial_t$, où l'on a introduit l'opérateur bilinéaire $\blacklozenge$ qui dépend des constantes viscoélastiques η_{ijkm} du matériau et qui est tel que $(\mathbf{a} \blacklozenge \mathbf{b})_{im} = \eta_{ijkm}\, a_j\, b_k$. Cet opérateur présente bien entendu les mêmes propriétés que $\diamond$. Du point de vue mathématique, il suffit donc d'utiliser les équations présentées précédemment moyennant la substitution

$$\diamond \to \diamond + \blacklozenge\, \partial_t \tag{1.73}$$

dans le domaine temporel, et

$$\diamond \to \diamond + s \blacklozenge \tag{1.74}$$

dans le domaine de Laplace. Notons que cette loi est une loi causale, et que l'opérateur de viscosité (1.74) est une fonction holomorphe de s. Par conséquent, $\tilde{\mathbf{H}}$ reste holomorphe dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

1.3.2 Loi Hystérétique

Cette loi décrit bien les phénomènes d'absorption dans les matériaux composites de type carbone-époxy pour des bandes de fréquences allant du kilohertz au mégahertz. L'atténuation dans l'espace est proportionnelle à la fréquence. Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à la thèse [41]. On introduit l'opérateur bilinéaire $\blacklozenge$ de la même manière qu'au paragraphe précédent, bien que les constantes η_{ijkm} portent une dimension physique différente. L'opérateur de dissipation (*cf.* [40, 41] par exemple) est classiquement défini directement dans le domaine fréquentiel $\omega > 0$ par :

$$\diamond \to \diamond + \mathbb{i} \blacklozenge . \tag{1.75}$$

La première propriété que l'on demande à un opérateur de vérifier est la parité par rapport à la variable fréquentielle. Par analogie, nous proposons cette définition pour le domaine de Laplace :

$$\diamond \to \begin{cases} \diamond + \mathbb{i}\, \mathrm{sign}\,(\mathrm{Im}\,(s)) \blacklozenge & \mathrm{Im}\,(s) \neq 0 \\ \diamond & \mathrm{Im}\,(s) = 0. \end{cases} \tag{1.76}$$

Contrairement à la loi de Kelvin-Voigt, la loi hystérétique n'est pas causale, et l'expression dans le domaine de Laplace (1.76) n'est pas holomorphe au voisinage de $\mathrm{Im}\,(s) = 0$. En conséquence, $\tilde{\mathbf{H}}$ n'est plus holomorphe dans cette région (cette hypothèse est importante pour la formule d'inversion de Bromwich-Mellin (1.77)). Comme nous le verrons dans l'exemple 1.5.2, ceci n'est d'aucune importance lorsque l'on considère une bande de fréquence suffisamment éloignée de la fréquence nulle. Un grand nombre de cas d'intérêt en CND peuvent ainsi être traités sans difficulté. Lorsque le signal d'entrée est au contraire large bande et a des amplitudes non négligeables aux basses fréquences la conséquence est l'apparition d'un signal artefact exponentiellement croissant dans le temps, qui vient polluer aux temps longs le signal recherché. Ceci sera mis en évidence et discuté dans le paragraphe 1.5.4, et un moyen de se défaire de cette mauvaise conséquence sera donné.

Bien entendu, une telle loi non causale a un caractère très empirique. Elle est postulée, et confirmée par l'accord avec l'expérience, c'est-à-dire qu'elle est validée dans une certaine bande de fréquences. En l'occurence, son comportement aux basses fréquences est connu pour être problématique. Trouver une loi au comportement aux hautes fréquences identique, et holomorphe pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, est un travail que nous n'avons pas entrepris.

1.4 Transformations inverses vers l'espace $(\mathbf{x}, z, t)$

1.4.1 Retour en temps : transformation de Laplace inverse numérique

La formule de transformation inverse de Laplace, encore appelée « formule de Bromwich-Mellin », est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}\,(z,t) = \frac{1}{2\,\mathbb{i}\,\pi}\int_{\gamma-\mathbb{i}\,\infty}^{\gamma+\mathbb{i}\,\infty} \tilde{\mathbf{H}}\,(z)\,\exp\,(s\,t)\;\mathbb{d}s, \tag{1.77}$$

où le choix du contour d'intégration reste à faire. Comme vu au paragraphe 1.1.1, $\tilde{\mathbf{H}}$ est une fonction holomorphe de s dans le demi-espace $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, et possède des singularités dans l'autre demi-plan (l'axe imaginaire étant inclu). Ces singularités (*cf.* figure 1.4) peuvent être des pôles, notés s_n, qui correspondent aux modes guidés non atténués si $\mathrm{Re}\,(s_n) = 0$ et aux modes guidés qui s'atténuent par viscoélasticité ou radiation si $\mathrm{Re}\,(s_n) < 0$, ainsi que des coupures et des points de branchements, qui correspondent dans le cas d'un guide ouvert aux ondes de tête et aux ondes guidées par les interfaces (type Rayleigh ou Scholte-Stoneley). Le contour le plus facile et le plus rapide à calculer est une droite verticale, à γ constant, et est connu sous le nom de contour de Bromwich. En effet, l'intégrale (1.77) se réécrit :

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}\,(z,t) = \frac{\exp\,(\gamma\,t)}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{H}}\,(z)\,\exp\,(\mathbb{i}\,\omega\,t)\;\mathbb{d}\omega, \tag{1.78}$$

et le terme intégral se calcule numériquement à l'aide de l'algorithme de FFT. Tout se passe donc comme si l'on résolvait dans l'espace de Fourier un problème qui n'est pas le problème physique, mais le problème physique multiplié par $\exp\,(-\gamma\,t)$. Appelons t_{max} la durée d'intérêt, qui définit la largeur de la fenêtre temporelle considérée. En fin de calcul, le résultat est multiplié par $\exp\,(\gamma\,t)$ pour revenir dans l'espace physique. En général [44], on définit γ à travers un nouveau paramètre m : $\gamma = m\,\log\,(10)\;t_{max}^{-1}$. γ peut donc s'interpréter comme un coefficient de fenêtre exponentielle, arbitraire, dont le rôle est de garantir aux temps courts que les effets de périodisation restent inférieurs à $\exp\,(-\gamma\,t_{max}) = 10^{-m}$, ce qui permet de calculer un transitoire correctement. Cette interprétation a donné dans la littérature le nom de Exponential Window Method [44] à la transformation de Laplace numérique faisant usage du contour de Bromwich (voir figure 1.5). Une brève synthèse bibliographique du calcul numérique de la transformation inverse de Laplace est faite dans [55]. En général, on choisit $2 \lesssim m \lesssim 5$. En particulier, dans cette thèse, $m = 3$. Il y a cependant une contrepartie

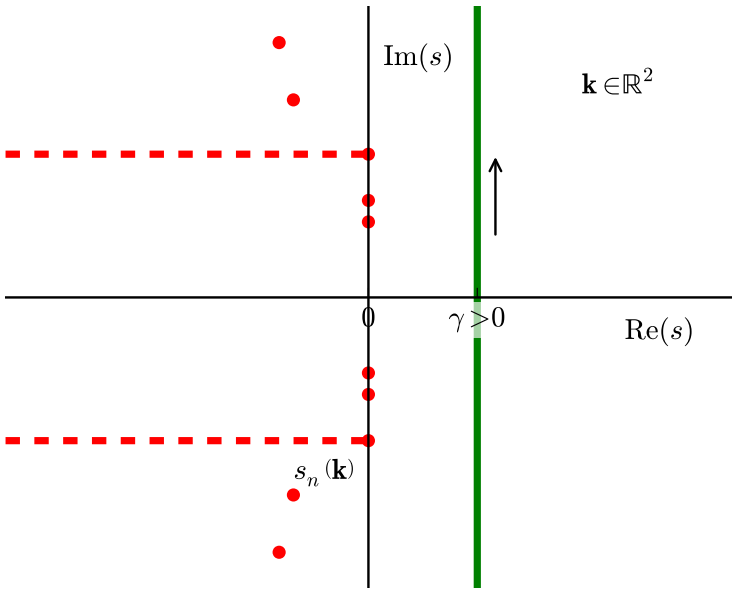


FIGURE 1.4 – Localisation des singularités de $\tilde{\mathbf{H}}$ dans le cas du guide d'ondes de Pekeris [1, 65] (couche de fluide sur un fluide infini dont la célérité des ondes est supérieure). Les pôles (points) correspondent aux modes guidés et aux modes guidés rayonnant et les coupures (lignes pointillées) et points de branchements aux ondes de tête et aux ondes guidées par les interfaces (type Rayleigh ou Scholte-Stoneley). Le contour d'intégration est représenté par la droite verticale continue. Dans le cas plus complexe de couches solides en surface d'un solide infini, cette cartographie de singularités se complexifie avec l'apparition de points de branchements et de coupures supplémentaires, mais le choix du contour n'en est pas influencé.

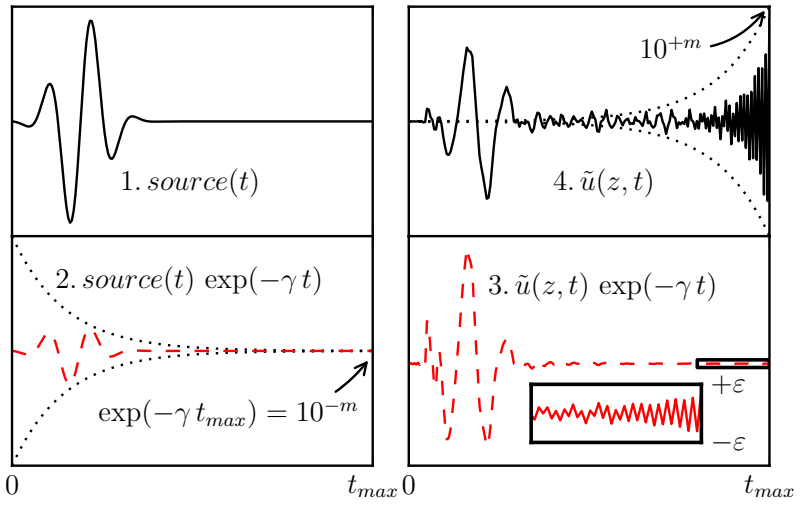


FIGURE 1.5 – L'Exponential Window Method, illustrée avec $m = 3$. $\tilde{u}$ désigne l'observable d'intérêt, par exemple une composante du champ de déplacement. Le passage de l'étape 2. à l'étape 3. se fait en appliquant une transformation de Fourier, puis pour chaque fréquence la fonction de transfert du système calculée à l'altitude z, puis enfin une transformation de Fourier inverse. Un échantillonnage grossier du signal $source\,(t)\,\exp(-\gamma\,t)$ entraine un phénomène de Gibbs suffisamment important pour que, après application de l'exponentielle croissante, il constitue un artefact gênant en fin de fenêtre temporelle (*cf.* figure 1.6).

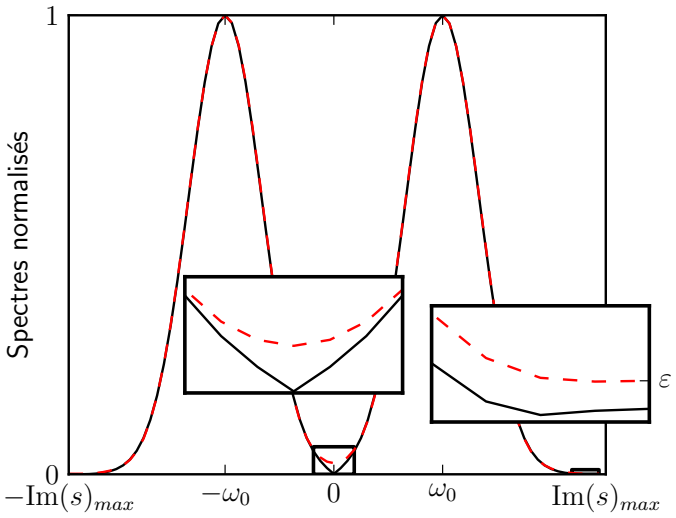


FIGURE 1.6 – Spectre du signal d'entrée $source\,(t) = \sin(\omega_0\ (t-t_0))\ \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2\,(t-t_0)^2}{3^2}\right)$ avant (trait continu) et après (trait pointillé) application de la fenêtre exponentielle décroissante. Pour éviter les artefacts exponentiellement croissants en fin de fenêtre temporelle, il faut choisir $\mathrm{Im}\,(s)_{max}$ telle que $\varepsilon \lesssim 10^{-2\,m}$ et $t_0 \geq \frac{6}{\omega_0}\sqrt{m\,\ln 10}$.

à choisir γ trop élevé : la moindre non-causalité donne un signal non nul à $t \lesssim 0$, disons d'une amplitude de l'ordre de ε, et donc par périodisation cet artefact se retrouve aux temps $t \lesssim t_{max}$. Après application de l'exponentielle croissante, cet artefact est amplifié par un facteur de l'ordre de $\exp(\gamma\,t_{max}) \equiv 10^m$ en fin de fenêtre temporelle. Pour que l'artefact reste inférieur à la précision 10^{-m} que l'on s'est fixée, il faut que $\varepsilon \lesssim 10^{-2\,m}$. Ces non-causalités peuvent venir par exemple d'un terme source non nul à $t \lesssim 0$, qui peut à son tour résulter d'un phénomène de Gibbs, inévitable à cause de la troncature du spectre du signal d'entrée. Il est donc crucial de maîtriser cette troncature. Ces précisions sont illustrées dans la figure 1.6. Comparé à une approche « en ω » pour laquelle on tronquerait à $\varepsilon \lesssim 10^{-m}$, il y a un surcoût en calcul. Celui-ci peut être très important si l'on souhaite considérer des signaux dont le spectre décroît lentement, type échelon unité, mais est tout à fait raisonnable si l'on se limite à des signaux dont le spectre décroît rapidement, type gaussienne. En revanche, une mauvaise conséquence de l'inversion numérique de la transformée de Laplace est que le théorème du changement d'origine (ou shift theorem for Fourier transforms en anglais) devient inexploitable. Cet aspect sera discuté au paragraphe 1.4.3.

Notons qu'une non-causalité peut également provenir du modèle, ce qui est le cas pour une loi d'atténuation hystérétique à basses fréquences. Dans ce cas, il n'est pas possible de minimiser les artefacts de fin de fenêtre, et la seule solution est de les repousser à des temps plus grands que les temps d'intérêt en augmentant t_{max} et en ignorant les derniers pas de temps.

On peut bien sûr se poser la question du choix du contour d'intégration. Un certain nombre de publications, principalement issues de la communauté mathématicienne, tiennent cette discussion [83, 93]. Cependant, elles se concentrent au cas d'une équation aux dérivées partielles parabolique (type équation de la chaleur) qui s'y prette bien car les singularités $s_n(\mathbf{k})$ sont à partie imaginaire nulle. Le contour peut être déformé en restant suffisamment loin des singularités jusqu'à croiser l'axe imaginaire, au delà duquel l'intégrande s'atténue exponentiellement et peut être tronqué plus rapidement. Le cas d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique (type équation d'ondes) est bien plus défavorable car les pôles $s_n(\mathbf{k})$ sont à partie imaginaire arbitrairement grandes. Dans notre cas, une déformation du contour d'intégration croisant l'axe imaginaire

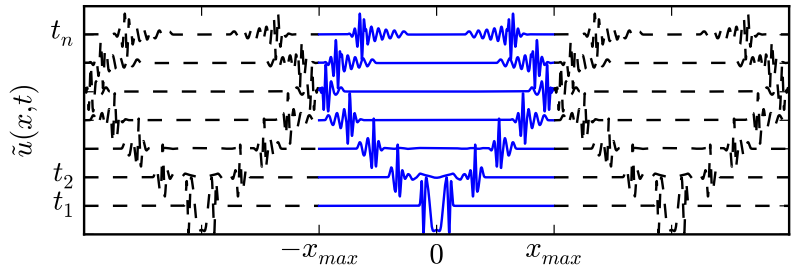


FIGURE 1.7 – Périodisation spatiale due à la discrétisation de l'intégrale de Fourier, illustrée ici sur un exemple 2D. Le calcul en un point M de l'espace est valable aux temps courts, tant que le champ rayonné par les sources fictives n'a pas atteint M.

est donc exclue, et une déformation du contour restant dans le demi plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ n'apporterait pas grand chose d'autre que de se priver des précieuses performances de l'algorithme de FFT.

1.4.2 Retour en espace : transformation de Fourier inverse numérique

Revenons dans l'espace spatial par transformation inverse de Fourier :

$$\boldsymbol{\eta}\,(\mathbf{x},z,t) = \frac{1}{4\,\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\boldsymbol{\eta}}\,(z,t)\,\exp\left(-\mathbb{i}\,\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}\right)\,\mathbb{d}\mathbf{k}, \tag{1.79}$$

qui est calculée numériquement. Bien entendu, si chacun des milieux est isotrope, alors l'intégrale (1.79) peut être paramétrée avec les coordonnées cylindriques k_r, θ, et l'intégration angulaire est calculable analytiquement. Ce cas de figure sera ignoré dans cette thèse.

Le domaine d'intégration spectral définit la taille et l'échantillonnage de la fenêtre spatiale d'observation, au delà de laquelle le champ est périodisé (voir figure 1.7) : $(\mathbf{k}_{max}, \mathbb{d}\mathbf{k}) \leftrightarrow (\mathbb{d}\mathbf{x}, \mathbf{x}_{max})$, avec $\mathbb{d}\mathbf{x} = \pi\,(\;k_{x,max}^{-1} \quad k_{y,max}^{-1}\;)$ et $\mathbf{x}_{max} = \pi\,(\;\mathbb{d}k_x^{-1} \quad \mathbb{d}k_y^{-1}\;)$. Tout se passe donc comme s'il y avait une infinité de termes sources, que nous appellerons fictifs, en plus du terme source considéré. En 2D, les sources fictives sont espacées de $2\,x_{max}$, alors qu'en 3D elles maillent l'espace. Cette périodisation a pour conséquence que le résultat du calcul est valable aux temps courts, tant que le champ rayonné par les sources fictives n'a pas atteint le point d'observation. La durée d'intérêt et la célérité des paquets d'onde permettent donc de fixer $\mathbf{x}_{max}$ (et donc aussi $\mathbb{d}\mathbf{k}$). Le coût numérique est ainsi proportionnel au carré (pour un calcul 2D) ou au cube (pour un calcul 3D) de la durée de simulation souhaitée. Concernant l'échantillonnage, $\mathbf{k}_{max}$ est majoré par l'étendue spectrale des termes sources. Ceci ne pose aucun problème si l'on considère des fonctions dont le spectre est à décroissance rapide, comme des Gaussiennes ou des portes à bords Gaussiens. En revanche, en l'absence d'autre indication, il est *a priori* extrêmement coûteux de considérer une fonction de type porte rectangulaire, et il est impossible de considérer une source ponctuelle. C'est là le prix à payer de cette méthode numérique exacte en champ proche ; une source produit en son voisinage un champ d'autant plus abrupt que la source l'est elle-même : si l'on veut calculer ce champ proche, on est pénalisé sur l'ensemble du domaine. Si l'on veut le négliger, alors il faut une information sur le champ en régime établi. Dans le cas d'un guide d'onde, les courbes de dispersion fournissent cette information. Une connaissance de ces courbes, même grossière, permet de traiter à coût minimal le rayonnement de sources ponctuelles en régime établi. Ceci sera justifié avec plus de détails dans le paragraphe 2.1.4.

1.4.3 Théorème du changement d'origine inexploitable

Bien évidemment les formules de changement d'origine, ou de translation, ou encore de « shift » en anglais,

$$f(t+t_0) \to \exp(s\,t_0)\; F(s) \text{ et} \tag{1.80}$$

$$f(x+x_0) \to \exp(-\mathbb{i}\,k\,x_0)\; \hat{f}(k)\,, \tag{1.81}$$

existent et sont exploitables dans le cas, par exemple, où l'on veut modéliser un transducteur multi-éléments constitué d'un certain nombre de sources identiques à une translation spatiale et temporelle près (voir paragraphe 1.5.1). On utilisera encore le théorème, sous sa forme spatiale, dans le cas d'une fissure horizontale discrétisée en plusieurs petits morceaux identiques portant des signaux différents (voir paragraphe 3.2).

Le titre de ce paragraphe fait référence à l'astuce, abondamment exploitée avec l'approche modale-$k_n(\omega)$, qui permet de synthétiser un signal temporel en un point de l'espace éloigné de la source (disons, d'une distance d) sans avoir à calculer toute l'histoire du signal depuis la date $t=0$. En effet, si l'on sait à quelle vitesse (notée c) se déplace le paquet d'ondes, on sait que le signal sera nul pour $t < d/c$ et il suffit de multiplier dans le domaine fréquentiel par $\exp(\mathbb{i}\,\omega\,d/c)$ pour translater l'origine. On évite ainsi de calculer la partie du signal que l'on sait nulle, ce qui réduit le nombre de points en fréquence. Toutefois, la dispersion apporte une limitation, car le paquet d'onde doit avoir en chaque point d'intérêt une extention temporelle plus courte que la taille de la fenêtre. Cette astuce repose sur un pilier : la capacité de séparer, pour un même mode, un paquet « voyageant vers la gauche » d'un paquet « voyageant vers la droite » (ou dit plus généralement, de disposer d'une condition de Sommerfeld). Il est donc indispensable de disposer d'une notion de direction de propagation, ce qui peut être malaisé en 3D, pour une anisotropie quelconque et pour un guide ouvert.

Dans notre cas d'approche par ondes partielles, la condition de Sommerfeld n'est respectée qu'aux temps courts car nous n'avons pas la possibilité de séparer les paquets. Sauf à considérer un terme source qui rayonne seulement dans une direction privilégiée, on ne peut plus garantir qu'un point de l'espace n'est pas contaminé par une source fictive périodisée dès que le paquet atteint les limites du domaine spatial (voir figure 1.7) et il est vain d'effectuer une translation spatiale de la fenêtre. Il y a donc une barrière théorique à la translation spatiale. Nous verrons au paragraphe 2.1.5 comment l'approche modale temporelle peut permettre de retrouver une astuce similaire.

1.5 Exemples d'applications

Cette partie vise à illustrer la polyvalence et les performances de l'approche par ondes partielles décrite dans ce chapitre. Quatre situations d'intérêt en CND sont considérées. La première, en référence à la thèse d'E. Siryabe [76], modélise une étude de sensibilité d'une configuration expérimentale à l'évaluation d'un joint de colle entre deux plaques. La seconde, en référence à la thèse de G. Neau [58], modélise la génération d'ondes de Lamb par une pastille piézoélecrique quasi ponctuelle dans une plaque monocouche de carbone-époxy. La troisième, en référence aux travaux [4, 20, 21, 69], modélise la génération de modes « de la branche $S_1 - S_{-2}$ » d'une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau. Enfin, le quatrième exemple considère un assemblage composite immergé dans de l'eau et insonifié par une source sphérique large bande située en son sein. Cet exemple ne fait référence à aucun travail publié bien qu'il pourraît modéliser une situation d'émission acoustique. Son premier but est de montrer qu'un tel cas complexe et a priori coûteux en ressources de calcul peut être résolu en des temps tout à fait raisonnables, et son deuxième but est de mettre en évidence l'effet de la non causalité de l'opérateur dissipatif hystérétique (1.76) et comment s'en défaire.

Les temps de calcul qui seront donnés ont été obtenus à partir du code `C++` développé dans cette thèse (120

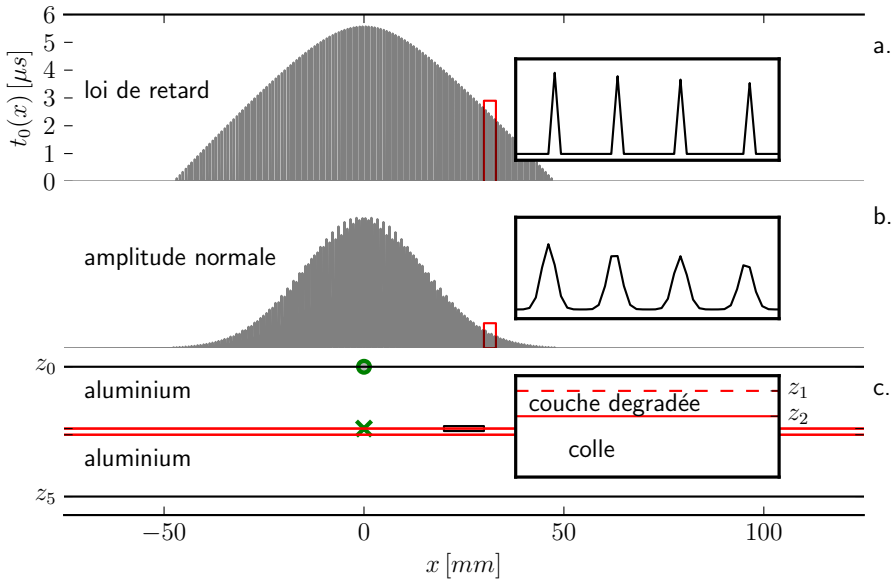


FIGURE 1.8 – Schéma de l'assemblage et du transducteur 128 éléments. L'échelle verticale sur la figure (c) est dilatée d'environ un facteur 2. La loi de retard est construite pour que les ondes longitudinales interfèrent constructivement au point focal $(0, z_1)$ qui est indiqué par une croix. Le point d'observation $(0, z_0)$ où est relevé le déplacement vertical $u_z(t)$ (voir figure 1.9) est indiqué par un cercle.

fichiers, 50000 lignes). Il est exécuté sur un ordinateur portable commercial de 2007, muni d'une mémoire vive de 2 Go et d'un processeur bi-cœur 64 bits 2x1.66 GHz. Il s'agit bien à l'heure actuelle d'un ordinateur peu performant, et mal adapté au calcul scientifique. Des tests sur des ordinateurs de bureau plus modernes donnent des temps de calcul environ 10 fois plus faibles. D'une manière générale, la méthode de calcul est hautement parallélisable et le temps de calcul est divisé par le nombre de processeurs (tests menés sur le cluster de calcul « avakas » de l'université de Bordeaux jusqu'à 12 processeurs avec une efficacité de 87%).

1.5.1 Inspection par ondes de volume de la qualité de l'adhésion dans un assemblage collé grâce à un transducteur multi-éléments en surface

Le système considéré est un assemblage de deux plaques d'aluminium collées, et placées dans le vide. L'épaisseur et les constantes élastiques du joint de colle sont prises en compte et forment ainsi une couche. De plus, l'adhésion entre le joint de colle et l'aluminium est à son tour modélisée par deux couches très fines. La couche entre l'aluminium « du bas » et la colle a des propriétés mécaniques nominales et la couche entre l'aluminium « du haut » et la colle peut avoir des propriétés mécaniques dégradées. Il y a donc 5 couches : aluminium / couche éventuellement dégradée / colle / couche nominale / aluminium (voir figure 1.8-c). Chaque couche d'aluminium est épaisse de $10\,mm$, a une densité de $2800\,kg\,m^{-3}$ et un tenseur de rigidité

$$[c_{ij}]^{(alu)}_{i,j=1..6} = \begin{pmatrix} 110 & 60 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ & 110 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ & & 110 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 25 & 0 & 0 \\ & & & & 25 & 0 \\ & & & & & 25 \end{pmatrix} GPa. \tag{1.82}$$

indice du signal en figure 1.9	α
(a)	100 %
(b)	2 %
(c)	0.67 %
(d)	0.1 %

TABLE 1.1 – Les quatre valeurs considérées pour le coefficient de dégradation α. $\alpha = 1$ correspond à une interface nominale et $\alpha \to 0$ correspond à une absence d'adhésion entre l'aluminium et la couche de colle.

La couche de colle est épaisse de $1\,mm$, a une densité de $1160\,kg\,m^{-3}$ et un tenseur de rigidité

$$[c_{ij}]^{(colle)}_{i,j=1..6} = \begin{pmatrix} 7.7 & 4.5 & 4.5 & 0 & 0 & 0 \\ & 7.7 & 4.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 7.7 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 1.6 & 0 & 0 \\ & & & & 1.6 & 0 \\ & & & & & 1.6 \end{pmatrix} GPa. \tag{1.83}$$

Chaque couche d'interface est épaisse de $1\,\mu m$, a une densité de $1100\,kg\,m^{-3}$ et un tenseur de rigidité paramétré par le coefficient α :

$$[c_{ij}]^{(\alpha)}_{i,j=1..6} = \alpha \begin{pmatrix} 3.75 & 0.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ & 3.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3.75 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 1.5 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0 \\ & & & & & 1.5 \end{pmatrix} GPa. \tag{1.84}$$

Pour l'interface nominale, $\alpha = 1$. Nous considérerons trois niveaux de dégradation de l'interface du haut. Les coefficients correspondant à ces trois cas sont donnés dans le tableau 1.1.

L'assemblage, d'une épaisseur totale de $21.002\,mm$, est insonnifié par un transducteur multi-éléments linéique posé sur la surface supérieure. Le transducteur est caractérisé par le nombre d'éléments N_e qu'il contient et son pitch Δ (distance inter-éléments, de centre à centre). Chaque élément est modélisé par une distribution Gaussienne, d'ouverture σ_e, et porte un vecteur force normal à la plaque. On applique une loi de retard aux éléments, choisie pour que les ondes de compression de l'aluminium interfèrent constructivement en un point focal situé à la verticale du centre du transducteur, à l'interface aluminium « du haut » / couche d'interface (voir figure 1.8-a). De plus, on applique à l'ensemble des éléments une fenêtre apodisante d'amplitude Gaussienne, d'ouverture σ_{glob} (voir figure 1.8-b). Le transducteur est supposé invariant suivant y (cas 2D) et est modélisé par la source surfacique

$$\boldsymbol{\sigma}_0(x,t) = \sum_{n=1}^{N_e} \exp\left(-\frac{(x - x_0(n))^2}{2\,\sigma_e^2} - \frac{x_0^2(n)}{2\,\sigma_{glob}^2}\right) \sin(\omega_0\,(t - t_0(n)))\, \exp\left(-\frac{\omega_0^2\,(t - t_0(n))^2}{2\,n_c^2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.85}$$

avec

$$x_0(n) = \left(n - \frac{N_e + 1}{2}\right) \Delta, \tag{1.86}$$

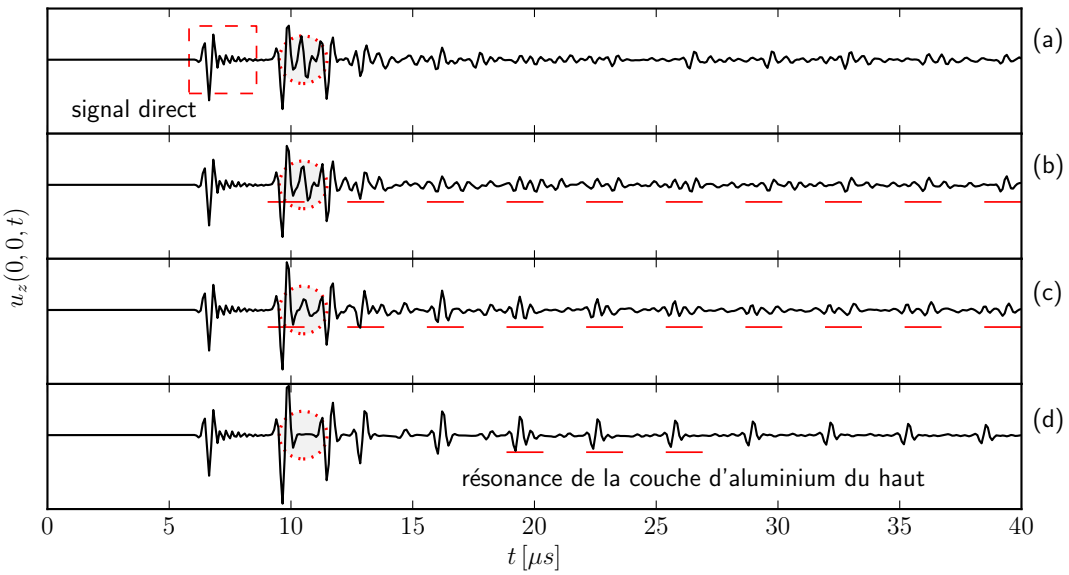


FIGURE 1.9 – Déplacement vertical en surface de l'assemblage pour les quatre valeurs du coefficient de dégradation (voir tableau 1.1). Le cas (a) correspond à une interface nominale, c'est-à-dire que l'adhésion est considérée parfaite. Le cas (d) est quasiment indiscernable du cas d'une plaque d'aluminium de $10\,mm$ dans le vide. Le cas (b) correspond à la limite de sensibilité de cette configuration expérimentale à α. La qualité de l'adhésion se traduit principalement par : l'amplitude du premier écho ($t \approx 10\,\mu s$) qui augmente, celle du fond de plaque ($t \approx 11\,\mu s$, entouré en pointillés) qui diminue, et la série résonnante (soulignée en rouge en (b), (c), (d)) qui gagne en proportion aux temps longs lorsque α diminue.

$$t_0\left(n\right) = \frac{d\left(N_e\right) - d\left(n\right)}{c_L^{(alu)}}, \tag{1.87}$$

$$d\left(n\right) = \sqrt{\left(x_0\left(n\right) - x_f\right)^2 + z_f^2}. \tag{1.88}$$

Les paramètres $(x_z, z_f) = (0, z_0)$ sont les coordonnées du point focal, $c_L^{(alu)} = \sqrt{c_{11}^{(alu)}/\rho}$ est la célérité des ondes longitudinales dans l'aluminium, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi}$ et n_c sont respectivement la fréquence centrale et le nombre de cycles du signal d'excitation. Les valeurs données à tous ces paramètres sont les suivantes : $N_e = 128$, $\Delta = 0.75\,mm$, $\sigma_e = 0.08\,mm$, $\sigma_{glob} = 15.13\,mm$, $f_0 = 2.25\,MHz$, $n_c = 3$.

Cet exemple fait référence à la thèse d'E. Siryabe [76] (en cours) dont le but est de quantifier expérimentalement la qualité de l'adhésion aux interfaces d'un joint de colle [77]. Nous nous intéressons au déplacement vertical $u_z\left(0,0,t\right)$ en surface de l'assemblage. Le domaine de calcul est le suivant : $x \in \left]-200\,..\,200\,mm,\,5584\right]$ et $t \in \left[0\,..\,40\,\mu s,\,480\right[$, où $\left]v_{min}\,..\,v_{max},\,n\right]$ désigne un intervalle semi fermé discrétisé en n points équitablement répartis entre v_{min} et v_{max}. Le temps de calcul est $1'\,40''$. Les résultats pour les quatre valeurs de α considérées sont donnés en figure 1.9. Voici l'interprétation que l'on peut en faire : le premier train d'ondes correspond à un signal direct porté par l'onde de compression pour les éléments proches du point d'observation et par l'onde de Rayleigh pour les éléments plus lointains. Ensuite, le premier pic ($t \approx 10\,\mu s$) est le premier écho des ondes de compression réfléchies par l'interface z_1 que l'on cherche à sonder. Son amplitude augmente avec la dégradation de l'adhésion. A partir de cet événement, une série d'échos (soulignés en rouge sur les figures 1.9-(b), (c), (d)) surviennent périodiquement et correspondent aux allers-retours de l'onde de compression entre la surface et l'interface z_1. Cet effet est peu visible lorsque l'adhésion est de bonne qualité $\alpha = 1$ et se fait plus important lorsque la qualité se dégrade, jusqu'à devenir l'unique signal lorsque $\alpha \to 0$

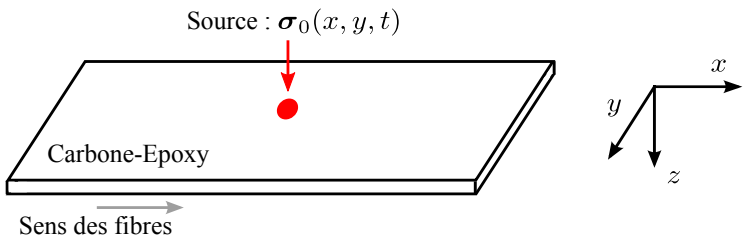


FIGURE 1.10 – Schéma de la plaque de carbone-époxy considérée, insonifiée par un transducteur en surface

(figure 1.9-(d)). L'amplitude des échos diminue avec le temps car l'incidence normale est petit à petit la seule à contribuer en $x = 0$. L'écho à $t \approx 12\,\mu s$ n'est pas un intrus de cette série mais correspond à la réflexion des ondes transverses à l'interface z_1. Cet écho n'est pas suivi d'une autre série résonnante car les ondes de cisaillement ne focalisent pas et arrivent au point d'observation principalement en incidence oblique. Les réflexions suivantes sont donc quasiment nulles. Enfin, le dernier effet notable de α est d'influer sur l'écho ($t \approx 11\,\mu s$, entouré en pointillés rouges) qui correspond à la réflexion des ondes de compression à l'interface inférieure de l'assemblage. Cet écho doit traverser deux fois l'interface dégradée. Pour résumer, la situation expérimentale proposée dans cet exemple est sensible à α à travers l'amplitude du premier écho ($t \approx 10\,\mu s$), l'amplitude de l'écho de fond de plaque ($t \approx 11\,\mu s$) et la série résonnante.

1.5.2 Génération des modes de Lamb d'une plaque de Carbone-Epoxy par un transducteur de type « pastille piézoélectrique » : comparaison avec des signaux expérimentaux

Le système considéré (fig. 1.10) est une plaque monocouche de carbone-époxy, d'épaisseur $3.6\,mm$, de densité $\rho = 1560\,kg\,m^{-3}$, et de constantes élastiques

$$[c_{ij}]_{i,j=1..6} = \begin{pmatrix} 86.65 & 7.50 & 7.50 & 0 & 0 & 0 \\ & 14.00 & 7.00 & 0 & 0 & 0 \\ & & 14.00 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 3.00 & 0 & 0 \\ & & & & 4.06 & 0 \\ & & & & & 4.70 \end{pmatrix} GPa. \tag{1.89}$$

Les axes cristalographiques #1, #2 et #3 correspondent respectivement aux axes x, y et z. La direction des fibres est selon l'axe x. La plaque est dans le vide et est insonifiée par un transducteur piézoélectrique collé sur la face supérieure (en $z = 0$), que nous modélisons par la source surfacique normale suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_0(x,y,t) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\,\sigma^2}\right)\,\sin(\omega_0\,t)\,\exp\left(-\frac{\omega_0^2\,t^2}{2\,n_c^2}\right)\,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.90}$$

Les sens des paramètres introduits ont été décrits dans l'exemple 1.5.1 et ont pour valeur $\sigma = 2.4\,mm$, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = 150\,kHz$ et $n_c = 6.5$. Toutes ces valeurs font référence aux expériences menées par G. Neau dans sa thèse [58], tableau 2.3. Nous nous intéressons au champ de déplacement vertical sur la surface supérieure, *i.e.* à $z = 0$, pour une fenêtre temporelle de $228\,\mu s$. Ceci correspond à environ 35 périodes de la fréquence d'excitation, au cours desquelles les modes guidés se propagent sur des distances relativement

grandes. Le domaine de calcul est le suivant : $x \in]-1.12\,..\,1.12\,m,\,1030]$, $y \in]-0.39\,..\,0.39\,m,\,360]$, et $t \in [-22\,..\,228\,\mu s,\,150[$. Pour ce problème 3D le temps de calcul est de $25'$, ce qui est tout à fait raisonnable compte tenu de la taille du domaine de calcul et de l'ordinateur utilisé. Les résultats de ce calcul sont présentés en figure 1.11-a. Ils sont en accord avec ceux publiés dans [27], obtenus par la méthode modale que nous décrivons au Chapitre 2. Dans la bande de fréquence d'intérêt seuls quatre modes propagatifs existent : les trois modes fondamentaux quasi-A_0 (flexion), quasi-SH_0 (cisaillement horizontal), quasi-S_0 (compression), ainsi que quasi-A_1 le premier mode quasi-antisymétrique. Par la suite, les modes seront notés abusivement A_0, SH_0, S_0 et A_1.

Ces résultats numériques sont comparés aux signaux expérimentaux publiés dans [58]. Deux points du calcul (trait rouge) sont reportés et superposés aux signaux expérimentaux (trait noir) : (15, 0, 0) cm en 1.11-a-2 et (21.05, 17.68, 0) cm en 1.11-a-3. Clairement, les temps d'arrivée des paquets d'ondes sont en excellent accord, mais les amplitudes diffèrent drastiquement. Ceci est dû à la dissipation, qui a été négligée, et qui est connue pour être forte dans de tels matériaux. Pour prendre en compte ces effets nous introduisons le tenseur viscoélastique

$$[\eta_{ij}]_{i,j=1..6} = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.13 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.30 & 0.106 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.30 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 0.085 & 0 & 0 \\ & & & & 0.085 & 0 \\ & & & & & 0.055 \end{pmatrix} GPa\,rad^{-1}, \tag{1.91}$$

et nous utilisons le modèle hystérétique tel que défini dans le paragraphe 1.3.2. Les résultats de ce nouveau calcul sont présentés en figure 1.11-b-1, 2, 3. Cette fois, l'accord avec l'expérience est meilleur.

Les tenseurs (1.89) et (1.91) ne correspondent pas tout à fait à ceux mesurés par G. Neau. (1.89) a été très légèrement modifié (quelques pourcents) pour obtenir un meilleur accord pour les temps de vol aux deux points d'intérêt, et (1.91) a été largement modifié (300%) de manière à obtenir un meilleur accord pour les amplitudes. En effet, l'expérience ne distinguait pas les effets de diffraction des effets d'atténuation et le tenseur (1.91) était donc largement surestimé. Dans un soucis de rigueur cette procédure d'optimisation des tenseurs (1.89) et (1.91) pourraît être améliorée en considérant un plus grand nombre d'angles et de points de comparaison. Pour ceci, un code numérique par ondes partielles tel qu'utilisé ici devient largement inefficace, et pourraît être substitué à profit par un code modal couplé à une approche perturbative, comme décrit dans le paragraphe 2.2. Ceci n'a pas été entrepris dans cette thèse.

1.5.3 Génération de modes propagatif, rétropropagatif et à vitesse d'énergie nulle dans une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau

Le système considéré est une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau (fig. 1.12). La plaque a une épaisseur de $1\,mm$, une densité de $2780\,kg\,m^{-3}$ et un tenseur d'élasticité isotrope

$$[c_{ij}]_{i,j=1..6} = \begin{pmatrix} 112 & 58 & 58 & 0 & 0 & 0 \\ & 112 & 58 & 0 & 0 & 0 \\ & & 112 & 0 & 0 & 0 \\ & \% & & 27 & 0 & 0 \\ & & & & 27 & 0 \\ & & & & & 27 \end{pmatrix} GPa. \tag{1.92}$$

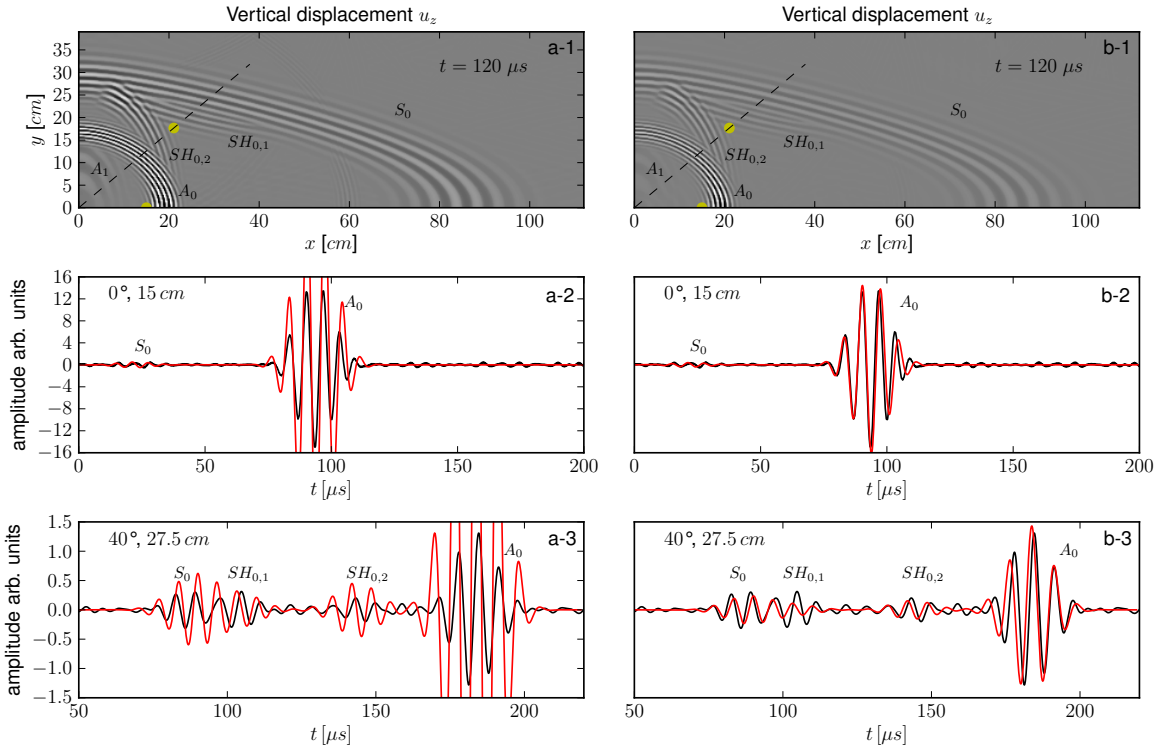


FIGURE 1.11 – Réponse d'une plaque de carbone-époxy à une source collée en surface. Les figures a-1, 2, 3 correspondent à un calcul dans un milieu non dissipatif, tandis que la dissipation est prise en compte avec un modèle hystérétique dans les figures b-1, 2, 3. Dans les figures a, b - 2, 3, la courbe en rouge correspond au calcul numérique et la courbe en noir au signal expérimental publié dans [58]. L'échelle de niveaux de gris en a-1 et b-1 est non linéaire et a été choisie pour mettre en valeur les paquets SH_0 et A_1 les moins excités. Dans la figure a-1, cette échelle non linéaire révèle légèrement les artefacts de périodisation temporelle, qui sont plus faibles d'un facteur de 10^{-3} du paquet A_0.

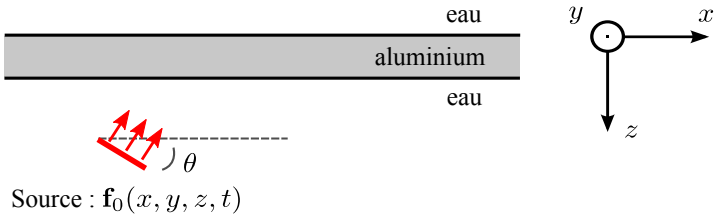


FIGURE 1.12 – Schéma de la plaque d'aluminium immergée, insonifiée par un faisceau en incidence oblique. L'angle d'incidence est choisi avec les lois de Snell-Descartes de manière à sélectionner un comportement modal particulier.

θ	f_0
2.6°	$3.0\,MHz$
6.0°	$2.87\,MHz$
12.7°	$3.0\,MHz$

TABLE 1.2 – Les trois couples (θ, f_0) utilisés dans (1.93) pour sélectionner les régimes rétropropagatif, à vitesse d'énergie nulle, et propagatif

L'eau a une densité de $1000\,kg\,m^{-3}$ et une célérité du son de $1500\,m\,s^{-1}$. Le système est insonifié par un transducteur placé dans l'eau et formant un angle θ avec le plan tangent à la plaque. Cet exemple fait référence aux récents travaux [4, 20, 21, 69] qui ont mis en évidence que l'on pouvait en CND tirer parti des modes appelés ZGV (zero group velocity, ou en français modes à vitesse de groupe nulle), pour mesurer de très fines variations d'épaisseur de la plaque ou encore mesurer avec une grande précision le coefficient de poisson du matériau constituant la plaque. Il peut être impropre de parler de ZGV dans notre cas puisqu'à cause du rayonnement la vitesse de groupe des paquets d'onde n'est plus définie sans ambigüité, comme pour un guide fermé. Cependant, les phénomènes de paquets propagatifs, rétropropagatifs ou stationnaires continuent à se manifester, et nous parlerons donc de modes à vitesse d'énergie nulle plutôt que de ZGV. Pour observer le phénomène, il est important de générer des ondes dans des plages de fréquences et de longueurs d'onde très étroites. Pour ceci, nous modélisons le transducteur, situé dans le milieu semi infini supérieur $\beta = 0$, par le champ suivant :

$$\mathbf{f}_0\left(x,y,z,t\right) = \Pi\left(\frac{2\,\left(z-z_f\right)}{l\,\sin\left(\theta\right)}\right)\,\exp\left(-\frac{\left[x-x_0(z)\right]^2}{2\,\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\,\sigma_y^2}\right)\,\sin\left(\omega_0\,t\right)\,\exp\left(-\frac{\omega_0^2\,t^2}{2\,n_c^2}\right)\,\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\0\\\cos(\theta)\end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

La fonction Π est la fonction porte, telle que $\Pi\left(\xi\right) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $\Pi\left(\xi\right) = 0$ sinon. La quantité $x_0(z,\theta) = \left(z-z_f\right)\,\cot\left(\theta\right) - z_f\,\tan\left(\theta\right)$ exprime la rotation du transducteur autour de son centre d'altitude z_f ainsi qu'une translation latérale telle que l'axe central du transducteur croise la plaque à l'origine du repère. Le paramètre l représente la longueur du transducteur, et les autres paramètres ont le même sens qu'expliqué précédemment (voir le paragraphe 1.5.1). Les valeurs des paramètres sont $l = 20\,mm$, $\sigma_x = 0.5\,mm$, $\sigma_y = 10\,mm$, $z_f = -6.0\,mm$ et $n_c = 30$. $\mathbf{f}_0\left(x,y,z,t\right)$ n'a pas une forme invariante en fonction de θ et ne modélise donc pas strictement un transducteur tourné d'un angle θ. Cependant cet aspect est d'importance secondaire et l'expression ci-dessus sera utilisée en raison de la simplicité des convolutions (1.45, 1.46) à laquelle elle conduit, qui seront calculées analytiquement. Les valeurs de θ et de f_0 des trois cas considérés sont données dans le tableau 1.2. A mesure que θ augmente les régimes rétropropagatif, à vitesse d'énergie nulle, et propagatif sont successivement sélectionnés. Dans tous les cas, le transducteur a une largeur d'environ $40\,\lambda_{eau}$, λ_{eau} désignant la longueur d'onde dans l'eau, et est donc quasiment plan. Le domaine de calcul est le suivant : $x \in \left]-60\,..\,60\,mm,\,270\right]$, $y \in \left]-60\,..\,60\,m,\,16\right]$, et $t \in \left[0\,..\,20\,\mu s,\,200\right[$. Pour ce problème quasi-2D le temps de calcul est $5''$. Les résultats sont présentés en figure 1.13.

Le champ de déplacement vertical en surface de la plaque et en fin de simulation $u_z\left(x,y,0,19\,\mu s\right)$ est représenté en niveau de gris en figure 1.13-a. Cette même composante $u_z\left(x,0,0,t\right)$ est représentée en figure 1.13-b en fonction de x à différents instants de manière à mettre en évidence le trajet parcouru par le paquet d'onde. Ces derniers graphes démarrent à $t = 12\,\mu s$ qui est approximativement l'instant de début du régime libre, et la courbe en trait gras correspond à la date $t = 19\,\mu s$ qui est représentée en figure 1.13-a. Comme prévu, on observe clairement pour l'angle correspondant à la condition de vitesse d'énergie nulle que l'onde guidée ne se propage pas le long de la plaque mais reste concentrée à l'endroit où le faisceau incident a transmis l'énergie (autour de $x = 0$). Pour les deux autres angles le paquet se déplace vers la gauche ou vers la droite.

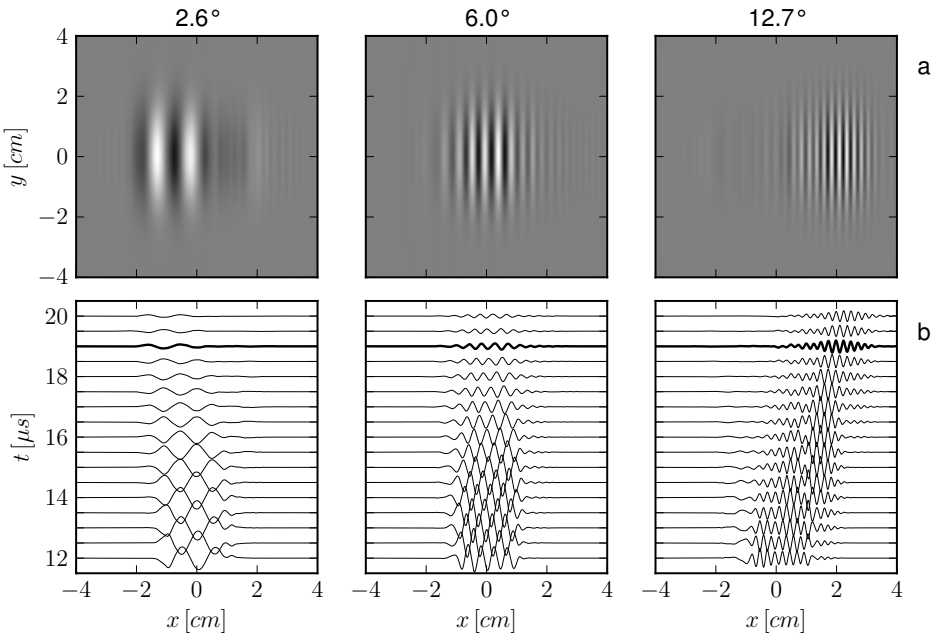


FIGURE 1.13 – Déplacement vertical en surface de la plaque d'aluminium, $u_z(x, y, 0, 19\,\mu s)$ (figure a) et $u_z(x, 0, 0, t)$ (figure b), pour trois valeurs de l'inclinaison du transducteur. La date $t = 19\,\mu s$ est en gras sur la figure b. De gauche à droite : régimes rétropropagatif, à vitesse d'énergie nulle, et propagatif.

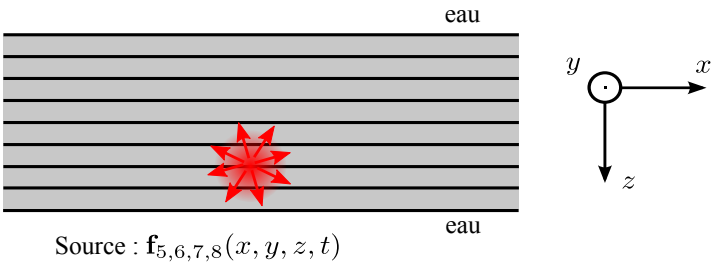


FIGURE 1.14 – Schéma de l'assemblage multicouche immergé. Le système est insonifié par une source volumique radiale qui s'étend sur plusieurs couches.

Bien sûr, en raison du rayonnement, l'amplitude du paquet décroît au cours du temps dans chacun des cas.

1.5.4 Exemple d'un 8 couches anisotrope (2D) immergé et d'une source sphérique large bande à cheval sur plusieurs couches

Le système considéré est une plaque faite d'un assemblage de huit couches de carbone-époxy, et immergée dans de l'eau (fig. 1.14). Chaque couche est épaisse de $3.6\,mm$ et présente les propriétés élastiques et viscoélastiques décrites dans le paragraphe 1.5.2, moyennant une rotation des axes cristalographiques dans le plan de la plaque. La séquence des rotations est [0°/ 135°/ 90°/ 45°/ 0°/ 135°/ 90°/ 45°]. Considérons une source Gaussienne radiale dans le plan (xOz), qui s'étend sur quatre couches, et qui est invariante suivant y. Bien que les ondes puissent avoir une composante non nulle suivant y en raison de l'anisotropie, le problème est réduit à un problème 2D. La source est centrée à la sixième interface $z_6 = 21.6\,mm$ et émet un signal impulsionnel Gaussien. Le signal a donc une amplitude maximale aux basses fréquences et en particulier au voisinage de $\mathrm{Im}(s) = 0$, région où le vecteur d'état $\tilde{\mathbf{H}}$ n'est pas holomorphe (voir paragraphe 1.3.2). L'un

des buts de cet exemple est de mettre en évidence la conséquence du non respect de cette hypothèse. Pour $\beta = 5, 6, 7, 8$ nous utilisons la formule suivante :

$$\mathbf{f}_\beta(x,y,z,t) = \exp\left(-\frac{x^2+(z-z_6)^2}{2\,\sigma^2}\right)\,\exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma_t^2}\right)\,\begin{pmatrix} x/\sigma \\ 0 \\ (z-z_6)/\sigma \end{pmatrix}. \tag{1.94}$$

Les paramètres ont pour valeur $\sigma = 1.5\,mm$ et $\sigma_t = 0.25\,\mu s$. La dépendance de (1.94) suivant z est suffisamment complexe pour donner lieu à des convolutions (1.45, 1.46) qu'il n'est pas possible de calculer analytiquement. Celles-ci seront donc calculées numériquement, suivant la méthode des trapèzes et avec l'échantillonnage $z \in [-15.6\,..\,27.6\,mm,\ 100]$. En réalité, ce nombre de points est largement surestimé pour mettre en évidence le faible impact en temps de calcul : 20 points donnent déjà un excellent résultat et 30 points une erreur numérique indiscernable de 100 points. Le domaine de calcul spatial est $x \in]-25\,..\,25\,cm,\ 370]$. Concernant le domaine de calcul temporel, nous nous intéressons à une durée de simulation de $40\,\mu s$. En utilisant la même règle que précédemment pour respecter de manière optimale le critère de Nyquist-Shannon, nous travaillons avec la grille $t \in [0\,..\,40\,\mu s,\ 240[$. Le résultat de ce calcul (composante u_z au voisinage de la source) est donné en figure 1.15-b-1 (traits pointillés mi-longs bleus) et comparé au cas non dissipatif (traits pointillés courts noirs) ainsi qu'au même cas dissipatif résolu avec la grille temporelle qui sera précisée par la suite (trait continu rouge, qui se superpose parfaitement à la courbe en traits pointillés courts noirs). Clairement, des grandes différences apparaissent aux temps longs. Un signal artefact exponentiellement croissant devient dominant dans le dernier tiers de la fenêtre. Ceci est la conséquence du fait que le modèle hystérétique est non causal à cause de son comportement aux basses fréquences (voir les paragraphes 1.3.2 et 1.4.1). La seule solution que nous avons pour obtenir un signal correct jusqu'à $40\,\mu s$ est d'augmenter la taille de la fenêtre de manière à repousser l'apparition de cet artefact au delà de $40\,\mu s$, puis d'ignorer les pas de temps $t > 40\,\mu s$. Considérons donc la nouvelle grille $t \in [0\,..\,60\,\mu s,\ 360[$. Les résultats de ce nouveau calcul sont donnés en niveaux de gris pour quelques dates d'observation en figure 1.15-a-1, 2, 3, 4 et en figure 1.15-b-1, 2, 3 (trait continu rouge) pour quelques points d'observation et comparés avec le cas non dissipatif (traits pointillés noirs). Les différences sont relativement faibles car le contenu spectral est en bonne partie porté par les basses fréquences, qui s'atténuent peu par viscoélasticité. Enfin, la figure 1.15-b-4 présente en niveaux de gris le champ u_z en fin de simulation calculé avec la première grille temporelle, et met en évidence que l'artefact se concentre au voisinage de la source.

Pour cet exemple 2D complexe le temps de calcul a été de $25''$ pour le cas non dissipatif (première grille temporelle) et de $38''$ pour le cas viscoélastique (seconde grille temporelle).

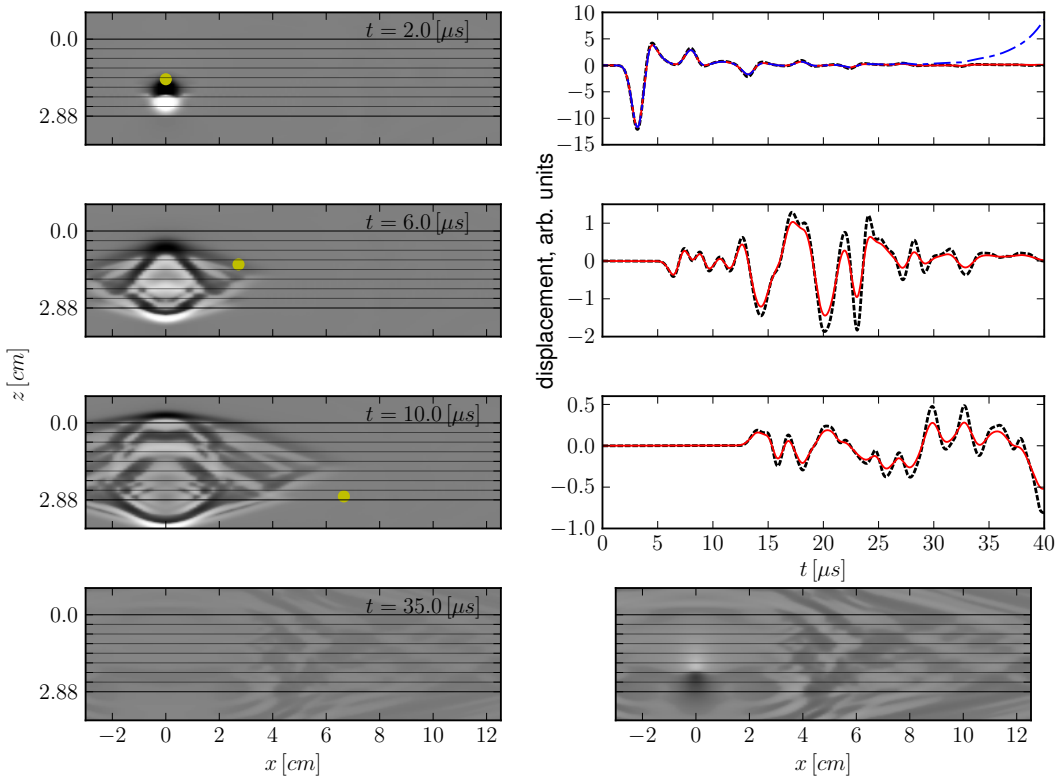


FIGURE 1.15 – À gauche : champ de déplacement vertical u_z à différents instants, en prenant en compte la viscoélasticité et en utilisant la grille temporelle « rallongée ». En bas à droite, $u_z(35\,\mu s)$ calculé avec la grille « non-rallongée » : l'artefact numérique dû au caractère non-holomorphe de la loi de dissipation hystérétique est prépondérant à l'endroit où se situait la source. À droite, les trois signaux sont calculés aux trois points représentés par des disques jaunes. Le signal en trait rouge continu correspond au cas viscoélastique, celui en trait pointillé noir correspond au cas non-viscoélastique. Pour le premier signal, la courbe en trait semi-pointillé bleu correspond au cas viscoélastique calculé avec la grille « non-rallongée » et met en évidence la croissance exponentielle dans le temps de l'artefact numérique.

Chapitre 2

Approche modale

Ce chapitre décrit comment une approche modale peut être formulée dans le domaine temporel. Du point de vue du chapitre précédent, il s'agit de résoudre analytiquement la transformation de Laplace inverse par le théorème des résidus. Il décrit également son implémentation par la méthode numérique dominante à l'heure actuelle, qui porte l'accronyme de SAFE (Semi Analytical Finite Elements) au sein de la communauté de CND. Cette méthode modale temporelle sera nommée $\omega_n(\mathbf{k})$. À notre connaissance, elle a été introduite par S.B. Dong et R.B. Nelson [24, 25]. Ce chapitre s'inspire beaucoup de la publication d'E. Kausel [43] que nous considérons comme l'une des fondatrices pour la méthode SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$ (dans cet article l'accronyme TLM, pour Thin Layer Method, est synonyme de SAFE) et de la thèse de J. Park [61] qui a comparé les points forts et points faibles des formulations $\omega_n(\mathbf{k})$ et $k_n(\omega, \theta)$. Ces deux travaux n'ont apparemment pas donné lieu à des suites en dehors de quelques très peu nombreux articles de la part de leurs propres auteurs. Nous supposons que la raison est que le principal intérêt de $\omega_n(\mathbf{k})$ sur $k_n(\omega, \theta)$ est la facilité avec laquelle se traite l'anisotropie en 3D, alors que E. Kausel et J. Park ne s'intéressaient qu'à des milieux (géophysiques) isotropes dans le plan. Nous reprenons et développons ici le formalisme de la publication d'E. Ducasse et M. Deschamps [27] qui est adapté aux milieux anisotropes. Mentionnons également l'article de X. Han *et al.* [34], postérieur à celui d'E. Kausel mais qui ne semble pas en avoir connaissance, et qui re-dérive la formulation modale temporelle. Cet article se situe dans un contexte de CND et considère en théorie des milieux anisotropes, cependant les exemples qu'il donne se limitent à des milieux isotropes et les questions de troncature de la série modale, pourtant cruciales, ne sont pas abordées. De notre lecture, il ne dégage aucune conclusion quant à l'intérêt de cette formulation modale temporelle par rapport à la formulation modale harmonique.

Dans un premier temps, le cas particulier d'un guide non dissipatif dans le vide est exposé en détails. Le cas d'un guide dissipatif dans le vide est ensuite traité, le choix étant fait d'adopter une approche perturbative. Ce choix est justifié dans le contexte CND qui fait usage de matériaux relativement peu atténuants. Enfin, les difficultés liées au cas du guide ouvert sont exposées. Celles-ci ont dans cette thèse mené à l'abandon de la formulation modale, au profit de la formulation par ondes partielles, pour traiter le guide ouvert.

2.1 Plaque élastique dans le vide

Reprenons le système d'équations (1, 3) en considérant pour simplifier que chaque milieu est un milieu solide. Dans cette première section, nous nous limitons à des solides non dissipatifs. Considérons de plus que le milieu élastique stratifié est d'épaisseur finie, c'est-à-dire que sur la figure 1 les milieux $\beta = 0$ et $\beta = N + 1$ sont du vide. Cette dernière hypothèse revient à imposer une condition de Neumann aux interfaces inférieure

et supérieure de la plaque :

$$\left(\mathbf{n} \overset{1}{\diamond} \boldsymbol{\nabla}\right) \mathbf{u}\left(\mathbf{x}, 0^{+}, t\right) = \mathbf{0}, \quad \left(\mathbf{n} \overset{N}{\diamond} \boldsymbol{\nabla}\right) \mathbf{u}\left(\mathbf{x}, h^{-}, t\right) = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Appliquons une transformation de Fourier $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}$ aux dimensions du plan. Les équations (1, 3, 2.1) deviennent :

$$\partial_t^2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{Op_k} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{\rho}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{Op_k} \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\boldsymbol{\nabla} \diamond \boldsymbol{\nabla}\right) = \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{k} \diamond \mathbf{k}\right) + \frac{\mathbb{i}}{\rho} \left[\left(\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}\right) + \left(\mathbf{k} \diamond \mathbf{n}\right)\right] \partial_z - \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}\right) \partial_z^2, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \left[\left(\mathbf{n} \overset{1}{\diamond} \mathbf{n}\right) \partial_z - \mathbb{i} \left(\mathbf{n} \overset{1}{\diamond} \mathbf{k}\right)\right] \tilde{\mathbf{u}}\left(0^{+}, t\right) = \mathbf{0} \\ \left[\left(\mathbf{n} \overset{N}{\diamond} \mathbf{n}\right) \partial_z - \mathbb{i} \left(\mathbf{n} \overset{N}{\diamond} \mathbf{k}\right)\right] \tilde{\mathbf{u}}\left(h^{-}, t\right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}\left(z_\beta^{+}, t\right) = \tilde{\mathbf{u}}\left(z_\beta^{-}, t\right) \\ \left[\left(\mathbf{n} \overset{\beta+1}{\diamond} \mathbf{n}\right) \partial_z - \mathbb{i} \left(\mathbf{n} \overset{\beta+1}{\diamond} \mathbf{k}\right)\right] \tilde{\mathbf{u}}\left(z_\beta^{+}, t\right) = \left[\left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{n}\right) \partial_z - \mathbb{i} \left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{k}\right)\right] \tilde{\mathbf{u}}\left(z_\beta^{-}, t\right) \end{cases} \quad \forall \beta \in \{1, .., N-1\}. \tag{2.5}$$

Nous avons défini dans (2.3) $\mathbf{Op_k}$ l'opérateur différentiel spatial. Nous allons exprimer $\mathbf{Op_k}$ sur la base des modes de Lamb présents dans la plaque pour résoudre (2.2-2.5). Le paragraphe 2.1.1 discute quelques aspects généraux de cette décomposition. Le paragraphe 2.1.2 traite de la mise en œuvre numérique via la méthode SAFE pour obtenir la base modale. Dans le paragraphe 2.1.3 le système d'équations (2.2-2.5) est résolu grâce à la base modale. Enfin, le paragraphe 2.1.5 est consacré à diverses astuces numériques que l'on peut exploiter grâce à la base modale : le théorème du changement d'origine, et l'extraction de coefficients modaux pour la reconstruction du champ élastodynamique à partir de quelques « photos ».

2.1.1 Une base modale orthogonale complète

Commençons par introduire la notation suivante pour désigner le champ transposé conjugué d'un champ $\tilde{\mathbf{u}}_1$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^{\dagger} \equiv \left(\tilde{\mathbf{u}}_1^{\mathrm{T}}\right)^{*}, \tag{2.6}$$

ainsi que le produit scalaire suivant, que nous utiliserons tout au long de ce chapitre :

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle \equiv \int_0^h \rho\left(z\right) \tilde{\mathbf{u}}_1^{\dagger}\left(z\right) \tilde{\mathbf{u}}_2\left(z\right) \mathrm{d}z. \tag{2.7}$$

Au sens de (2.7), l'opérateur $\mathbf{Op_k}$ est autoadjoint et admet donc une décomposition modale (voir [27] pour la démonstration). Les valeurs propres de $\mathbf{Op_k}$, notées ω_j^2, sont réelles positives (strictement positives si $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$) et forment une suite croissante qui tend vers l'infini $0 \leqslant \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 ...$ Les vecteurs propres sont notés $\boldsymbol{\Phi}_j$ et forment une base (complète) orthogonale :

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j \rangle = \delta_{ij} \left\| \boldsymbol{\Phi}_i \right\| \left\| \boldsymbol{\Phi}_j \right\|, \tag{2.8}$$

que nous normerons en imposant

$$\left\| \boldsymbol{\Phi}_j \right\| \equiv 1. \tag{2.9}$$

La base modale ainsi formée sera désignée $\left(\omega_j \equiv \sqrt{\omega_j^2},\ \boldsymbol{\Phi}_j\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Notons que, contrairement à la formulation modale $k_n\left(\omega, \theta\right)$, nous avons ici un vrai produit scalaire pour lequel la base est orthonormale, et les constantes

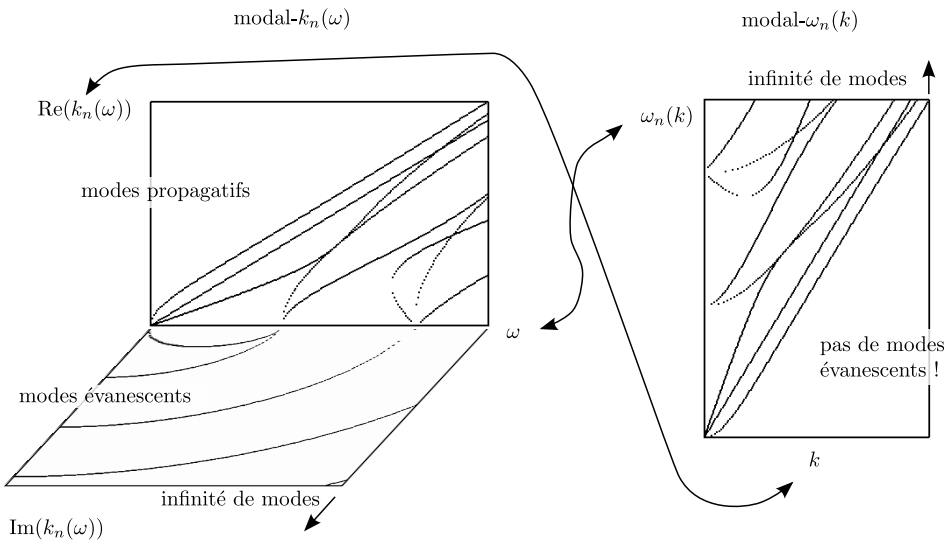


FIGURE 2.1 – Valeurs propres de l'opérateur différentiel pour les formulations modales $k_n(\omega, \theta)$ et $\omega_n(\mathbf{k})$.

de normalisations ne divergent pas aux basses fréquences. En conséquence, il est possible de considérer des excitations très large bande pouvant donner lieu à des mouvements de corps rigide. Du point de vue de la majorité des cas d'intérêt en CND cet avantage est surtout théorique car des excitations à bande étroite sont généralement utilisées.

Nous pourrions également choisir d'utiliser

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle_{\mathbf{Op_k}} \equiv \langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \mathbf{Op_k}\, \tilde{\mathbf{u}}_2 \rangle = -\int_0^h \tilde{\mathbf{u}}_1^\dagger(z)\, (\boldsymbol{\nabla} \diamond \boldsymbol{\nabla})\, \tilde{\mathbf{u}}_2(z)\, \mathrm{d}z, \tag{2.10}$$

qui permet de définir une autre normalisation de la base modale, au sens de l'énergie, puisque :

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j \rangle_{\mathbf{Op_k}} = \delta_{ij}\, \omega_j^2. \tag{2.11}$$

Cependant, outre le fait qu'il est légèrement moins pratique à calculer que (2.7), (2.10) n'est pas un vrai produit scalaire car la norme qu'il définit n'est qu'une semi-norme : les modes de corps rigide ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\omega_j = 0$) ont une norme nulle. Nous nous en tiendrons donc à (2.7).

L'interprétation physique d'un mode, c'est-à-dire la situation expérimentale limite qu'il représente, est différente entre les deux formulations. « En ω » on peut imaginer une source oscillante de dimensions très petites devant les longueurs d'onde qu'elle rayonne. Un mode propagatif est un train d'ondes qui s'étend dans tout le demi-espace à droite (ou à gauche) de la source et qui se propage avec une longueur d'onde $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$. Si le guide est dissipatif ou ouvert, k_n peut avoir une partie imaginaire non nulle qui représente l'atténuation du train d'ondes au cours de son déplacement dans l'espace. « En $\mathbf{k}$ » il faut s'imaginer une source impulsionnelle répartie sinusoïdalement sur toute la surface. On peut penser par exemple à un transducteur linéïque ou matriciel posé en surface de la plaque, qui émet une impulsion brève. Un mode est une résonnance de l'épaisseur de la plaque, à la fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Si le guide est dissipatif ou ouvert, f_n peut avoir une partie imaginaire non nulle qui représente l'atténuation de la résonance au fil du temps.

La différence la plus remarquable avec la formulation $k_n(\omega, \theta)$ est qu'il n'est ici nullement question de modes évanescents : le nombre d'onde $\mathbf{k}$ est par hypothèse réel, et les valeurs propres ω_j^2 sont également réelles. Lorsque le calcul est effectué « en ω », l'infinité de modes est à prendre en compte au voisinage du terme source, ce qui définit un champ proche (où la convergence de la série modale est mauvaise) et un champ lointain

(où seul un nombre fini de modes contribue). Dans cette formulation où le calcul est effectué « en **k** », la notion de proximité avec le terme source n'est plus spatiale, mais temporelle : au voisinage de l'excitation l'infinité de modes est à prendre, ce qui définit un régime forcé ou non établi (où la série modale converge mal), alors que, pour une source à spectre borné, une fois la source éteinte, le régime libre s'établit et seul un nombre fini de modes contribuent de manière significative. Ces aspects sont illustrés en figure 2.1 et seront discutés plus en détails par la suite, au paragraphe 2.1.4. En terme de convergence, le point commun entre les deux formulations et avec n'importe quelle autre formulation modale, est que la représentation modale est mal adaptée au voisinage spatio-temporel des sources, et performante en régime libre, en dehors de ce pavé.

2.1.2 Obtention numérique de la base modale

Il existe deux familles d'approches pour obtenir la base modale d'un guide d'onde. La première consiste à résoudre l'équation de Christoffel dans chaque couche pour des paramètres ω et $\mathbf{k}$ pouvant être complexes, à regrouper les conditions de continuité sous forme de matrice de transfert, globale, *etc*, et à chercher les zéros $k_n(\omega,\theta)$ ou $\omega_n(\mathbf{k})$ du déterminant de cette matrice. Une description détaillée de la méthode est présentée dans [63] et est à l'origine du logiciel Disperse développé par l'Imperial College [64]. Historiquement, il s'agit de la première famille d'approches développée. Cependant, le gros défaut est que la recherche de zéros du déterminant conduit à la recherche de zéros dans le plan complexe d'une fonction non-linéaire. Numériquement, il est encore impossible de garantir que les algorithmes ne ratent pas certains zéros, ce qui rend la méthode peu fiable, en particulier lorsqu'il s'agit de trouver des zéros complexes correspondant à des modes atténués par dissipation ou rayonnement. Cette difficulté a conduit à développer une autre famille d'approches, connues sous les noms « Strip Element Method » [51], « Thin Layer Method » [43] ou encore « Semi Analytical Finite Element » [40]. Dans cette thèse l'acronyme utilisé sera celui de SAFE, même si « Semi Analytical Finite Difference » [27] serait plus adéquat car la méthode numérique sera formulée avec des différences finies. Le parti pris de cette famille de méthodes est de ne pas exploiter les solutions analytiques en z dans chaque couche. À la place, la dimension z est discrétisée et l'opérateur de dérivation ∂_z est remplacé par une matrice de taille raisonnable que l'on multipliera par le vecteur des valeurs de la fonction aux points de discrétisation. L'équation d'onde et les équations de continuité sont intégrées dans cette matrice. Ceci formule la recherche de modes comme une recherche linéaire de valeurs propres, qui ne pose aucune difficulté numérique. Par conséquent, ces méthodes sont parfaitement fiables pour calculer une base modale. Dans le cas de guides unidirectionnels, de type cylindre, ces méthodes présentent également l'avantage considérable de pouvoir être appliquées à des géométries de sections quelconques. Leur défaut, cependant, est qu'il est difficile de formuler un problème aux valeurs propres pour un guide ouvert. Ces difficultés seront présentées dans le paragraphe 2.3.

Ce paragraphe décrit en détails la résolution numérique du problème aux valeurs propres

$$\mathbf{Op}_{\mathbf{k}}\mathbf{\Phi} = \omega^2\,\mathbf{\Phi}. \tag{2.12}$$

Quelques considérations générales sur la méthode des différences finies seront premièrement rappelées. Le système d'équations différentielles sera remplacé, dans chaque couche, par des équations aux différences qui seront regroupées dans une matrice. Enfin, les conditions de continuité entre les couches et de contrainte nulle aux interfaces externes seront utilisées pour assembler en une seule grosse matrice les matrices relatives aux différentes couches et supprimer les points de discrétisation redondants.

Opérateur de dérivation discrétisé : soit ϕ une fonction suffisamment régulière sur un intervalle. On discrétise cet intervalle avec un pas constant s. On peut montrer grâce à des développements limités qu'à

l'ordre r les $r+d$ premières dérivées de ϕ s'approximent en un point $c\,s$ comme la combinaison linéaire suivante impliquant les valeurs de ϕ en $r+d$ points voisins :

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(s) \\ \phi(2\,s) \\ \vdots \\ \phi((r+d-1)\;s) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{r,d,c}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \phi(c\,s) \\ s\,\phi'(c\,s) \\ \frac{s^2}{2}\,\phi''(c\,s) \\ \vdots \\ \frac{s^{r+d-1}}{(r+d-1)!}\,\phi^{[r+d-1]}(c\,s) \end{pmatrix} + O\left(s^{r+d}\right), \tag{2.13}$$

avec

$$\mathbf{K}_{r,d,c} = \left[(j-1-c)^{i-1}\right]_{1\leqslant i,\,j\leqslant r+d}. \tag{2.14}$$

En particulier, pour les dérivées première et seconde, il vient que

$$\begin{cases} \phi'(c\,s) = \frac{1}{s}\,\mathbf{d}_{1,c}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(s) \\ \vdots \\ \phi(r\,s) \end{pmatrix} + O(s^r) & \text{avec } \mathbf{d}_{1,c} = \mathbf{K}_{r,1,c}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi''(c\,s) = \frac{1}{s^2}\,\mathbf{d}_{2,c}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(s) \\ \vdots \\ \phi((r+1)\;s) \end{pmatrix} + O(s^r) & \text{avec } \mathbf{d}_{2,c} = \mathbf{K}_{r,2,c}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.15}$$

En pratique, les vecteurs de coefficients $\mathbf{d}_{1,c}$ et $\mathbf{d}_{2,c}$ sont calculés en résolvant $\mathbf{K}_{r,1,c}\mathbf{d}_{1,c} = (\;0\quad 1\quad 0\quad \dots\quad 0\;)^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{K}_{r,2,c}\mathbf{d}_{2,c} = (\;0\quad 0\quad 2\quad 0\quad \cdots\quad 0\;)^{\mathrm{T}}$. Pour des fonctions vectorielles de dimension 3 il suffit de remplacer les vecteurs $\mathbf{d}_{1,c}$ et $\mathbf{d}_{2,c}$ par les matrices

$$\mathbf{D}_{1,c} = \begin{bmatrix} d_{1,c,0}\,\mathbb{I} \\ d_{1,c,1}\,\mathbb{I} \\ \vdots \\ d_{1,c,r}\,\mathbb{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{2,c} = \begin{bmatrix} d_{2,c,0}\,\mathbb{I} \\ d_{2,c,1}\,\mathbb{I} \\ \vdots \\ d_{2,c,r+1}\,\mathbb{I} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Équation aux différences dans chaque couche : Appliquons les principes du paragraphe précédent pour remplacer l'équation différentielle (2.12) par une équation aux différences. Pour chaque couche β d'épaisseur h_β, nous discrétisons l'intervalle $[0, h_\beta]$ en n_β segments de longueurs identiques $s_\beta = h_\beta\,n_\beta^{-1}$. Nous appelons $\overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_i$ le vecteur de dimension 3 qui approche la valeur prise par le champ $\tilde{\mathbf{u}}$ au i-ème point de discrétisation ($0 \leqslant i \leqslant n_\beta$), $\boldsymbol{\Phi}_\beta$ le vecteur de l'ensemble des points de la couche et $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_\beta$ ce même vecteur privé des points

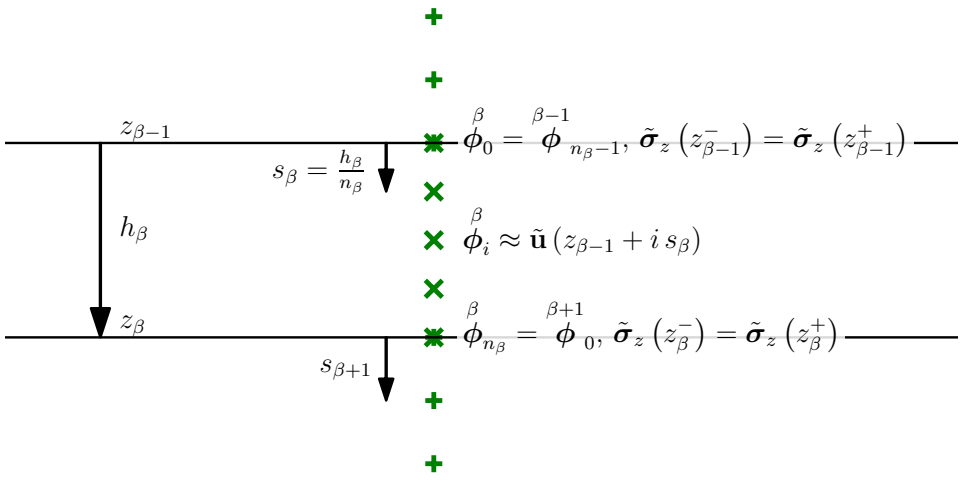


FIGURE 2.2 – Discrétisation du champ $\tilde{\mathbf{u}}$.

aux interfaces :

$$\boldsymbol{\Phi}_\beta = \begin{pmatrix} \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_0 \\ \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_1 \\ \vdots \\ \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_\beta = \begin{pmatrix} \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_1 \\ \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_2 \\ \vdots \\ \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta-1} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Introduisons les matrices 3×3 suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathbf{N}_\beta = \tfrac{-1}{\rho_\beta\, s_\beta^2}\left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{n}\right), \quad \mathbf{L}_\beta = \tfrac{\mathrm{i}}{\rho_\beta\, s_\beta}\left[\left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{k}\right) + \left(\mathbf{k} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{n}\right)\right], \quad \mathbf{K}_\beta = \tfrac{1}{\rho_\beta}\left(\mathbf{k} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{k}\right), \\ &\mathbf{A}_\beta = -\mathrm{i}\left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{k}\right), \qquad \mathbf{B}_\beta = \tfrac{1}{s_\beta}\left(\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{n}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

En nous limitant à un ordre r pair, l'équation (2.12) devient :

$$\mathbf{N}_\beta\, \mathbf{D}_{2,c(i)}^{\mathrm{T}}\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}(i) + \mathbf{L}_\beta\, \mathbf{D}_{1,c(i)}'^{\mathrm{T}}\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}(i) + \mathbf{K}_\beta\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_i \approx \omega^2\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_i, \tag{2.19}$$

où :

$$c(i) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant \frac{r}{2} \quad \text{(près de la face supérieure)} \\ \frac{r}{2} & \text{si } \frac{r}{2} \leqslant i \leqslant n - \frac{r}{2} \quad \text{(à l'intérieur de la couche)} \\ i + r + 1 - n & \text{si } n - \frac{r}{2} \leqslant i \leqslant n - 1 \quad \text{(près de la face inférieure)}, \end{cases} \tag{2.20}$$

où $\mathbf{D}'_{1,c(i)}$ est construite, similairement à (2.16), à partir du vecteur $\mathbf{d}'_{1,c(i)}$ « rallongé » (de dimension $r+2$) :

$$\mathbf{d}'_{1,c(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1,c(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ si } 1 \leqslant c \leqslant \frac{r}{2}, \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{1,c(i)-1} \end{bmatrix} \text{ si } \frac{r}{2} + 1 \leqslant c \leqslant r, \tag{2.21}$$

et où $\boldsymbol{\phi}(i)$ désigne le vecteur de taille $3\,(r+2)$:

$$\boldsymbol{\phi}(i) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{i-c(i)} \\ \boldsymbol{\phi}_{i+1-c(i)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{i+r+1-c(i)} \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

La valeur approchée de la contrainte normale sur la face « du haut » de la couche s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z\left(z^+_{\beta-1}\right) \approx \left(d_{1,0,0}\,\mathbf{B}_\beta + \mathbf{A}_\beta\right) \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_0 + \sum_{j=1}^{r} d_{1,0,j}\,\mathbf{B}_\beta\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_j\,, \tag{2.23}$$

et sur la face « du bas » (en exploitant la symétrie $d_{1,c,i} = -d_{1,r-c,r-i}$) :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z\left(z^-_{\beta}\right) \approx \left(-d_{1,0,0}\,\mathbf{B}_\beta + \mathbf{A}_\beta\right) \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta} - \sum_{j=1}^{r} d_{1,0,j}\,\mathbf{B}_\beta\, \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta - j}\,. \tag{2.24}$$

Nous sommes à présent en mesure de définir la matrice de discrétisation $\mathbf{M}_\beta$, creuse, telle que :

$$\mathbf{M}_\beta\,\boldsymbol{\Phi}_\beta = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z\left(z^+_{\beta-1}\right) \\ \omega^2\,\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_\beta \\ -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z\left(z^-_{\beta}\right) \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix}
\mathbf{A}+d_{1,0,0}\,\mathbf{B} & d_{1,0,1}\,\mathbf{B} & \cdots & \cdots & d_{1,0,r}\,\mathbf{B} & & & & \\
d_{1,1,0}\,\mathbf{L}+d_{2,1,0}\,\mathbf{N} & \mathbf{K}+d_{1,1,1}\,\mathbf{L}+d_{2,1,1}\,\mathbf{N} & d_{1,1,2}\,\mathbf{L}+d_{2,1,2}\,\mathbf{N} & \cdots & d_{1,1,r}\,\mathbf{L}+d_{2,1,r}\,\mathbf{N} & d_{2,1,r+1}\,\mathbf{N} & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & & & \\
d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} & \cdots & \mathbf{K}+0\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},\frac{r}{2}}\,\mathbf{N} & \cdots & \mathbf{K}+d_{1,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{N} & & & & \\
 & d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} & \ddots & \ddots & \ddots & d_{1,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{N} & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} & \cdots & \cdots & d_{1,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{N} & \\
 & & & & & d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} & \cdots & \cdots & d_{1,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{L}+d_{2,\frac{r}{2},r}\,\mathbf{N} \\
 & & & & & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & d_{2,1,r+1}\,\mathbf{N} & -d_{1,1,r}\,\mathbf{L}+d_{2,1,r}\,\mathbf{N} & \cdots & \mathbf{K}-d_{1,1,1}\,\mathbf{L}+d_{2,1,1}\,\mathbf{N} & -d_{1,1,0}\,\mathbf{L}+d_{2,1,0}\,\mathbf{N} \\
 & & & & & d_{1,0,r+1}\,\mathbf{B} & \cdots & d_{1,0,1}\,\mathbf{B} & d_{1,0,0}\,\mathbf{B}-\mathbf{A}
\end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Définissons également $\tilde{\mathbf{M}}_\beta$ « l'intérieur » de $\mathbf{M}_\beta$, c'est-à-dire la sous-matrice dont on a exclu les trois premières lignes, les trois premières colonnes, les trois dernières lignes et les trois dernières colonnes.

Construction de la matrice à diagonaliser par assemblage des matrices $\mathbf{M}_\beta$: La dernière étape pour formuler le problème aux valeurs propres est d'utiliser les conditions de contrainte normale nulle aux extrémités de la plaque et les conditions de continuité du champ et de la contrainte normale à chaque interface entre deux couches. Nous allons donc exprimer $\overset{1}{\boldsymbol{\phi}}_0$, le champ à l'extrémité « du haut » de la couche n°1, et $\overset{N}{\boldsymbol{\phi}}_{n_N}$, le champ à l'extrémité « du bas » de la couche n°N, en fonction du champ aux points voisins. Nous faisons de même pour le champ à chaque interface n°β où $\overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta} = \overset{\beta+1}{\boldsymbol{\phi}}_0$. On obtient, à l'extrémité « du haut » :

$$\overset{1}{\boldsymbol{\phi}}_0 = \sum_{j=1}^{r} \overset{1}{\mathbf{R}}{}^{top}_j\, \overset{1}{\boldsymbol{\phi}}_j, \quad \text{avec } \overset{1}{\mathbf{R}}{}^{top}_j = -d_{1,0,j}\,\left(d_{1,0,0}\,\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\right)^{-1}\,\mathbf{B}_1, \tag{2.27}$$

à l'extrémité « du bas » :

$$\overset{N}{\boldsymbol{\phi}}_{n_N} = \sum_{j=1}^{r} \overset{N}{\mathbf{R}}_j^{bot} \overset{N}{\boldsymbol{\phi}}_{n_N-j}, \quad \text{avec } \overset{N}{\mathbf{R}}_j^{bot} = d_{1,0,j}\ \left(-d_{1,0,0}\,\mathbf{B}_N + \mathbf{A}_N\right)^{-1}\,\mathbf{B}_N, \tag{2.28}$$

et à l'interface n°β :

$$\overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta} = \overset{\beta+1}{\boldsymbol{\phi}}_0 = \sum_{j=1}^{r} \overset{\beta}{\mathbf{R}}_j^{bot} \overset{\beta}{\boldsymbol{\phi}}_{n_\beta-j} + \sum_{j=1}^{r} \overset{\beta+1}{\mathbf{R}}_j^{top} \overset{\beta+1}{\boldsymbol{\phi}}_j\,, \tag{2.29}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} \overset{\beta}{\mathbf{R}}_j^{bot} & = & -d_{1,0,j}\ \left(d_{1,0,0}\ \left(\mathbf{B}_{\beta+1} + \mathbf{B}_\beta\right) + \mathbf{A}_{\beta+1} - \mathbf{A}_\beta\right)^{-1}\,\mathbf{B}_\beta \\ \overset{\beta+1}{\mathbf{R}}_j^{top} & = & -d_{1,0,j}\ \left(d_{1,0,0}\ \left(\mathbf{B}_{\beta+1} + \mathbf{B}_\beta\right) + \mathbf{A}_{\beta+1} - \mathbf{A}_\beta\right)^{-1}\,\mathbf{B}_{\beta+1}. \end{array} \tag{2.30}$$

On appellera par la suite $\overset{\beta}{\mathbf{R}}^{top}$ (resp. $\overset{\beta}{\mathbf{R}}^{bot}$) les matrices de taille $3 \times 3\,r$ formées par assemblages des blocs $\overset{\beta}{\mathbf{R}}_j^{top}$ (resp. $\overset{\beta}{\mathbf{R}}_j^{bot}$). Compte tenu du fait que ($\mathbf{n} \overset{\beta}{\diamond} \mathbf{n}$), et donc $\mathbf{B}_\beta$, sont réelles positives et toujours inversibles, et que $d_{i,j,k}$ est réel et $\mathbf{A}_\beta$ est imaginaire pure, alors $(\pm d_{1,0,0}\,\mathbf{B}_\beta + \mathbf{A}_\beta)$ et $(d_{1,0,0}\ \left(\mathbf{B}_{\beta+1} + \mathbf{B}_\beta\right) + \mathbf{A}_{\beta+1} - \mathbf{A}_\beta)$ sont toujours inversibles et les expressions (2.30) ne posent pas de problème.

Si l'on appelle $\boldsymbol{\Phi}$ le vecteur de l'ensemble des points et $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ le même vecteur privé des points aux interfaces et aux extrémités

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\boldsymbol{\phi}}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \\ \overset{2}{\boldsymbol{\phi}}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 \\ \vdots \\ \overset{N}{\boldsymbol{\phi}}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_N \\ \overset{N}{\boldsymbol{\phi}}_{n_N} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

et si l'on appelle également $\overset{\beta}{\mathbf{C}}^{top}$ (resp. $\overset{\beta}{\mathbf{C}}^{bot}$) la sous-matrice de taille $3\,r/2 \times 3$ des trois premières (resp. dernières) colonnes de $\mathbf{M}_\beta$,

$$\overset{\beta}{\mathbf{C}}^{top} = \begin{pmatrix} d_{1,1,0}\,\mathbf{L} + d_{2,1,0}\,\mathbf{N} \\ \vdots \\ d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L} + d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad \overset{\beta}{\mathbf{C}}^{bot} = \begin{pmatrix} -d_{1,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{L} + d_{2,\frac{r}{2},0}\,\mathbf{N} \\ \vdots \\ -d_{1,1,0}\,\mathbf{L} + d_{2,1,0}\,\mathbf{N} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

alors nous arrivons à la construction du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{M}\,\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \omega^2\,\tilde{\boldsymbol{\Phi}}, \tag{2.33}$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & & & \\ & \tilde{\mathbf{M}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{M}}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{1}_{top}\mathbf{C}\,{}^{1}_{top}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & & & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & {}^{1}_{bot}\mathbf{C}\,{}^{1}_{bot}\mathbf{R} & {}^{1}_{bot}\mathbf{C}\,{}^{2}_{top}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & {}^{2}_{top}\mathbf{C}\,{}^{1}_{bot}\mathbf{R} & {}^{2}_{top}\mathbf{C}\,{}^{2}_{top}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & & \cdots & \mathbf{0} & {}^{N}_{bot}\mathbf{C}\,{}^{N}_{bot}\mathbf{R} \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Les blocs dûs aux conditions aux limite sont de taille $3\,r \times 3\,r$ au niveau des interfaces internes et de taille $3\,r/2 \times 3\,r/2$ au niveau des interfaces externes. La matrice $\mathbf{M}$ est diagonalisée, et l'on obtient ainsi la base modale $(\omega_j^2,\, \tilde{\mathbf{\Phi}}_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ à $\mathbf{k}$ fixé. Il y a en théorie un nombre infini de modes à $\mathbf{k}$ fixé. Dans la pratique, $\mathbf{M}$ a bien évidemment un nombre fini de valeurs propres, nombre qui dépend de sa taille, et donc du nombre de points de discrétisation. Selon le spectre des signaux que l'on veut synthétiser, on tronque la base modale et on ne garde que les premiers modes tels que $\omega_j < \omega_{max}$, avec ω_{max} arbitraire. Enfin, on normalise les vecteurs propres comme indiqué dans (2.9).

Quelques détails sur la procédure numérique : La matrice $\mathbf{M}$ a une structure par bandes. A partir d'un certain seuil, des routines numériques tirant parti de ce caractère creux peuvent permettre de gagner en temps de calcul. Un ordre élevé fera gagner en précision mais densifiera $\mathbf{M}$, rendant moins intéressant, voire pénalisant, l'utilisation de telles optimisations. D'un autre côté un ordre faible permettra d'avoir une matrice très creuse, mais donnera une convergence lente. Dans cette thèse, les ordres 4 ou 8 ont la plupart du temps été utilisés, suivant si la rapidité ou la précision était privilégiée. Une étude de convergence a mis en évidence qu'à partir de l'ordre 12 les erreurs de troncature dûes à la représentation numérique des nombres réels (double précision) dégradaient les résultats, au point par exemple que l'ordre 16 donne des résultats plus mauvais que l'ordre 2, et que les ordres 18 et 20 donnent des résultats absurdes. Les ordres 8 et 10 ont donné les vitesses de convergence les meilleures.

Dans la formulation SAFE-$k_n\,(\omega, \theta)$, le problème aux valeurs propres est dit « quadratique » et doit pour être résolu faire usage d'un vecteur d'état rallongé, de type $(\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \quad -\mathrm{i}\,k_n\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\ )^{\mathrm{T}}$. La matrice à diagonaliser est cependant à coefficients réels si le guide n'est pas dissipatif. Dans notre cas de SAFE-$\omega_n\,(\mathbf{k})$, le vecteur d'état $(\mathbf{u})$ suffit si le guide n'est pas dissipatif et la matrice est ainsi quatre fois plus petite, bien qu'à coefficients complexes.

La recherche de valeurs propres donne le vecteur $\tilde{\mathbf{\Phi}}$. Pour obtenir $\mathbf{\Phi}$, il faut utiliser les relations (2.27-2.29). Il est possible de continuer à travailler avec ce vecteur discrétisé et d'obtenir la valeur du champ entre les points de discrétisation par interpolation, cependant l'approche adoptée dans cette thèse a été d'obtenir les coefficients des 6 ondes de volumes de chaque couche par un ajustement aux moindres carrés, puis d'obtenir analytiquement le champ en un point z voulu. Les deux approches sont bien entendu du même ordre d'approximation. L'approche choisie a été jugée plus pratique à utiliser dans les post-traitements, notamment pour le calcul d'un champ de contrainte modal ou l'obtention des opérateurs $\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ et $\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}_2}}$ qui se fait comme décrit dans le paragraphe 1.1.4. Par la suite nous confondons $\mathbf{\Phi}_j$ le vecteur propre (discret) obtenu par résolution de (2.34) avec $\mathbf{\Phi}_j\,(z)$ le vecteur propre (continu) obtenu par ajustement aux moindres

carrés ou par interpolation.

2.1.3 Décomposition modale du tenseur de Green transitoire

Exprimons à présent les champs de déplacement et de force réduite sur la base modale :

$$\tilde{\mathbf{u}}(z,\,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}u_j(t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z)\,,\quad\frac{\tilde{\mathbf{f}}(z,\,t)}{\rho(z)}=\sum_{j=1}^{+\infty}f_j(t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z)\,. \tag{2.35}$$

Les coefficients $u_j(t)$ restent à déterminer, et les coefficients $f_j(t)$ s'obtiennent par produit scalaire :

$$f_j(t)=\int_0^h\rho(z)\;\boldsymbol{\Phi}_j^{\dagger}(z)\;\frac{\tilde{\mathbf{f}}(z,\,t)}{\rho(z)}\,\mathbb{d}z. \tag{2.36}$$

En particulier, si $\tilde{\mathbf{f}}(z,\,t)=\delta(z)\,\boldsymbol{\psi}(t)$ (cas d'un transducteur collé en surface), alors :

$$f_j(t)=\boldsymbol{\Phi}_j^{\dagger}(0)\;\boldsymbol{\psi}(t)\,. \tag{2.37}$$

En injectant les décompositions modales (2.35) dans l'équation d'onde (2.2) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^2u_j(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\boldsymbol{\Phi}_j(z)+\sum_{j=1}^{+\infty}\omega_j^2\,u_j(t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}f_j(t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z)\,, \tag{2.38}$$

que l'on décompose en une nouvelle infinité d'équations de type masse-ressort par projection sur chacun des modes :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_j(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_j^2\,u_j(t)=f_j(t)\,. \tag{2.39}$$

L'équation (2.39) a pour solution :

$$u_j=\begin{cases}\left[\mathbb{h}(\bullet)\;\frac{\sin(\omega_j\,\bullet)}{\omega_j}\right]*f_j & \text{si }\omega_j\neq0\\ \mathbb{r}*f_j & \text{si }\omega_j=0.\end{cases} \tag{2.40}$$

Nous obtenons également la décomposition modale du tenseur de Green transitoire causal (en notant z_e, t_e l'altitude et l'instant d'émission et z_r, t_r l'altitude et l'instant de réception) :

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{u}}}(z_r,z_e,t_r,t_e)=\sum_{j=1}^{+\infty}g_j(t_r-t_e)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z_r)\;\boldsymbol{\Phi}_j^{\dagger}(z_e)\,, \tag{2.41}$$

$$g_j(t)=\begin{cases}\mathbb{h}(t)\;\frac{\sin(\omega_j\,t)}{\omega_j} & \text{si }\omega_j\neq0\\ \mathbb{r}(t) & \text{si }\omega_j=0.\end{cases} \tag{2.42}$$

Note 1 : la convolution (2.40) se calcule analytiquement pour des excitations simples (Gaussienne, N-cycles, ...), et peut se calculer par une transformée de Laplace numérique pour des excitations plus générales (*cf.* 1.4.1). En effet,

$$U_j(s)=\frac{F_j(s)}{\omega_j^2+s^2}. \tag{2.43}$$

Note 2 : le champ de déplacement a été calculé en (2.35, 2.40) sans avoir recours à la notion de direction de propagation de l'énergie. Ceci constitue une différence de taille avec la formulation classique « en (ω,θ) ».

Il est toutefois possible de retrouver une telle notion dans cette formulation « en **k** ». En effet, on peut également écrire

$$\tilde{\mathbf{u}}(z,\,t) = \sum_{j=1}^{+\infty} u_j^+(t)\,\exp(\mathbb{i}\,\omega_j\,t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z) + \sum_{j=1}^{+\infty} u_j^-(t)\,\exp(-\mathbb{i}\,\omega_j\,t)\;\boldsymbol{\Phi}_j(z)\,. \tag{2.44}$$

Nous utiliserons par la suite cette représentation dans les paragraphes 2.1.5 et 2.2. Cette écriture présente l'avantage que u_j^+ et u_j^-, qui seront dorénavant notés u_j et u_{-j}, sont des constantes en régime établi qui ont pour valeur (voir (2.46)) :

$$u_{\pm j} = \pm\frac{F_j(\pm\omega_j)}{2\,\mathbb{i}\,\omega_j}. \tag{2.45}$$

Vue de cette manière, la notion de mode change et ressemble plus à la notion de mode que l'on a dans l'approche classique $k_n(\omega,\theta)$: si le couple $(\omega_j,\,\boldsymbol{\Phi}_j)$ est un mode, alors $(-\omega_j,\,\boldsymbol{\Phi}_j)$ en est également un et sera dorénavant noté $(\omega_{-j},\,\boldsymbol{\Phi}_{-j})$. Il devient impropre de parler de base puisqu'il y a redondance des vecteurs de la base, et il n'y a plus orthogonalité mais bi-orthogonalité [29] des modes : $\langle\boldsymbol{\Phi}_i,\boldsymbol{\Phi}_j\rangle = \delta_{|i||j|}$. La base peut alors se partager en deux familles de modes se propageant dans des directions différentes dès lors que l'on est capable de définir une telle notion de direction de propagation. Cette notion de direction peut être définie au sens de la vitesse de groupe $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ pour une plaque isotrope en 2D, ou au sens du vecteur de Poynting pour tenter une approche plus générale, mais souffre des écueils classiques qui sont inévitables dans la formulation $k_n(\omega,\theta)$. Bien entendu, l'hypothèse de causalité relie u_j et u_{-j}. Si l'on abandonne cette hypothèse, il n'est plus suffisant d'appliquer un produit scalaire à (2.44) à un seul instant t pour extraire les coefficients modaux. Ceci sera discuté dans le paragraphe 2.1.5.

Par la suite, ces deux notions de mode seront utilisées indifféremment ; le discriminant sera l'utilisation d'indices $j \in \mathbb{N}^*$ ou $j \in \mathbb{Z}^*$.

2.1.4 Convergence et troncature de la série modale

Le vecteur d'onde **k** étant fixé, il y a une infinité de modes $\omega_j(\mathbf{k})$. La question de la convergence de la série modale se pose donc. Nous allons retrouver le résultat, classique pour le formalisme $k_j(\omega,\theta)$, que pour une excitation dont le spectre est négligeable au delà d'une certaine fréquence f_{max} le champ en régime établi s'exprime en fonction d'un nombre fini de modes, alors qu'en régime non établi la convergence de la série modale est mauvaise et nécessite de prendre en compte un très grand nombre de termes. Le propos sera illustré en considérant deux cas particuliers où la convolution (2.40) peut se calculer analytiquement : une excitation brève, de type Gaussienne (figure 2.3), ainsi qu'une une excitation plus longue et centrée autour d'une fréquence, de type N-cycles (figure 2.4).

Mauvaise convergence en régime non établi : un sinus causal $\mathbb{h}(t)\,\sin(\omega_j\,t)$ n'est pas monochromatique mais contient des fréquences autour de ω_j. Un mode de pulsation propre ω_j peut donc être excité par un signal de pulsation plus basse que ω_j. On peut voir, par développement limité du sinus dans (2.40), que pour les temps très courts $t \lesssim \frac{2\pi}{\omega_j}$, tous les modes de pulsation $\omega_n \lesssim \omega_j$ contribuent de manière quasi identique. Dans cette limite, un très grand nombre de modes est donc nécessaire pour assurer la convergence de la série, indépendamment du spectre de l'excitation. Contrairement à ce que l'on peut lire dans [27] l'approche modale n'est pas adaptée pour décrire ce régime.

Troncature en régime établi : la convolution (2.40) finit par tendre vers une fonction oscillatoire au bout d'un temps caractéristique $t_{max,\,j}(f_j,\,\omega_j)$ qui définit la fin du régime non établi du mode j. Appelons

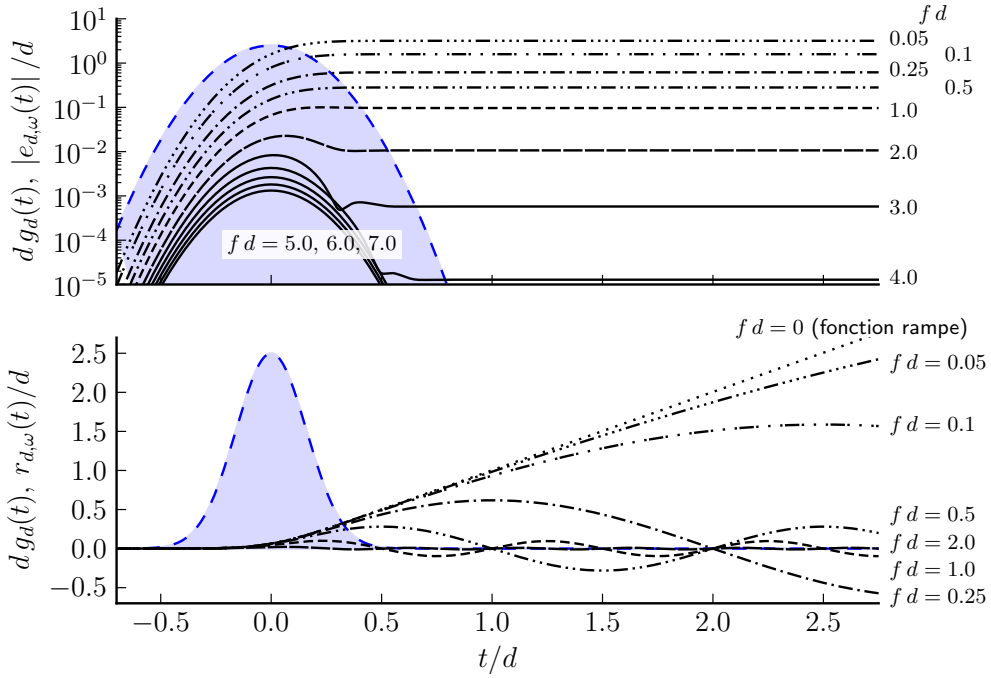


FIGURE 2.3 – Convolution d'une excitation Gaussienne par un sinus causal de fréquence f ($r_{d,\omega}(t)$, voir [27] figure B.1) et par une exponentielle causale ($e_{d,\omega}(t)$) pour différentes valeurs de f. La convergence de la série modale est très mauvaise durant le régime non établi $t/d \in [-0.5, 0.5]$ et excellente en régime établi $t/d > 0.5$.

t_{max} le plus grand de ces $t_{max,\,j}$: t_{max} sépare l'axe du temps en un régime non établi et un régime établi. Pour une source brève t_{max} correspond à l'extinction de la source et au début du régime libre. Appelons F_j la transformée de Fourier de f_j. Alors :

$$\mathbf{u}\,(z,\,t > t_{max}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{F_j\,(\omega_j)\,e^{\mathbb{i}\,\omega_j\,t} - F_j\,(-\omega_j)\,e^{-\mathbb{i}\,\omega_j\,t}}{2\,\mathbb{i}\,\omega_j}\,\mathbf{\Phi}_j\,(z)\,. \tag{2.46}$$

Si F_j est négligeable pour $\omega > \omega_{max} = 2\,\pi\,f_{max}$ alors on peut tronquer la série modale dès que $\omega_j > \omega_{max}$. Plus le terme source sera bref, plus son spectre sera large et plus il faudra inclure de modes pour la convergence de la série. Le coût numérique sera donc proportionnel à l'étendue spectrale du terme source, exactement comme pour le formalisme classique $k_j\,(\omega, \theta)$. Pour des cas d'application en CND, on se limite en général à des bandes fréquentielles où seuls les 3 à 10 premiers modes sont excités. Dans sa thèse, J. Park [61] a considéré des excitations large bande et a étudié la dégradation de la solution lorsque la série modale est tronquée en deçà du critère de Nyquist-Shannon. Comme attendu, cette dégradation se manifeste d'abord au voisinage des fronts d'ondes, qui sont des singularités spatio-temporelles.

Exemple d'une excitation Gaussienne : supposons que dans (2.40)

$$f_j\,(t) \equiv \frac{5}{2\,d}\exp\left(-\frac{25\,\pi\,t^2}{4\,d^2}\right). \tag{2.47}$$

En reprenant les notations utilisées dans [27], la convolution du terme source par un sinus causal a pour valeur

$$r_{d,\omega}\,(t) = \mathrm{Im}\,(e_{d,\omega}\,(t))\,, \tag{2.48}$$

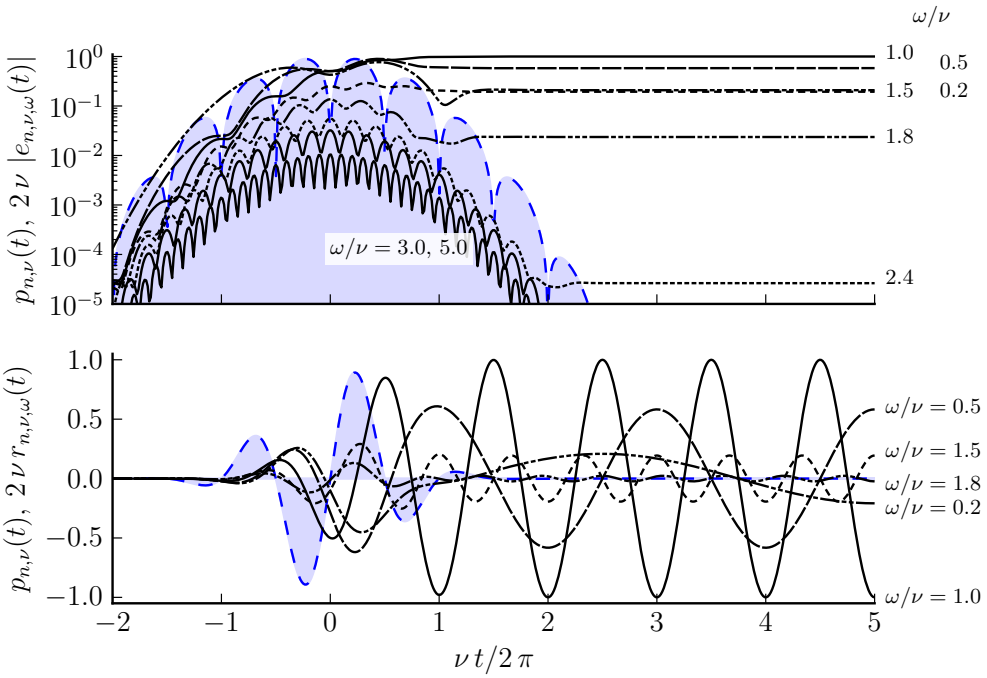


FIGURE 2.4 – Convolution d'une excitation 3-cycles de pulsation ν par un sinus causal de pulsation ω ($r_{n,\nu,\omega}(t)$, voir [27] figures B.2, 3) et par une exponentielle causale ($e_{n,\nu,\omega}(t)$) pour différentes valeurs de ω. La convergence de la série modale est très mauvaise durant le régime non établi $\nu\,t/2\,\pi \in [-2, 2]$ et excellente en régime établi $\nu\,t/2\,\pi > 2$.

où l'on a défini la convolution du terme source par une exponentielle causale

$$\begin{aligned} e_{d,\omega}(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_j(\tau)\,\frac{\exp(\mathbb{i}\,\omega\,(t-\tau))}{\omega}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\,\omega}\,\exp\left(\mathbb{i}\,\omega\,t - \frac{d^2\,\omega^2}{25\,\pi}\right)\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{2\,d}\,t + \mathbb{i}\,\frac{\omega\,d}{5\sqrt{\pi}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

$r_{d,\omega}(t/d)$ est tracé en figure 2.3 pour quelques valeurs de $f = \omega/2\,\pi$. Ceci fait référence à [27]-Fig.B.1. Par rapport à cette publication, la figure 2.3 est complétée d'une étude de $|e_{d,\omega}(t/d)|$ en échelle logarithmique et met en évidence la différence de convergence entre les régimes non établi et établi.

Exemple d'une excitation N-cycles : supposons que dans (2.40)

$$f_j(t) \equiv \sin(\nu\,t)\,\exp\left(-\frac{9\,\nu^2\,t^2}{2\,\pi^2\,n^2}\right). \tag{2.50}$$

En reprenant les notations utilisées dans [27], la convolution du terme source par un sinus causal a pour valeur

$$r_{n,\nu,\omega}(t) = \mathrm{Im}\left(e_{n,\nu,\omega}(t)\right), \tag{2.51}$$

où l'on a défini la convolution du terme source par une exponentielle causale

$$\begin{aligned} e_{n,\nu,\omega}(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_j(\tau)\, \tfrac{\exp(\mathbb{i}\,\omega\,(t-\tau))}{\omega}\, \mathbb{d}\tau \\ &= \tfrac{\mathbb{i}}{4\,\omega}\, \exp(\mathbb{i}\,\omega\,t)\, \left[\exp\left(-\tfrac{\pi^2\,n^2\,(\nu+\omega)^2}{18\,\nu^2}\right)\, \left(1+\operatorname{erf}\left(\tfrac{3\,\nu}{n\,\pi\,\sqrt{2}}\,t+\mathbb{i}\,\tfrac{n\,\pi\,(\nu+\omega)}{3\,\sqrt{2}\,\nu}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. -\exp\left(-\tfrac{\pi^2\,n^2\,(\nu-\omega)^2}{18\,\nu^2}\right)\, \left(1+\operatorname{erf}\left(\tfrac{3\,\nu}{n\,\pi\,\sqrt{2}}\,t+\mathbb{i}\,\tfrac{n\,\pi\,(\nu-\omega)}{3\,\sqrt{2}\,\nu}\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.52}$$

$r_{n,\nu,\omega}(\nu\,t/2\,\pi)$ est tracé en figure 2.4 pour quelques valeurs de $f = \omega/2\,\pi$. Comme pour le paragraphe précédent, ceci fait référence à [27]-Fig.B.2, 3. Par rapport à cette publication, la figure 2.4 est complétée d'une étude de $|e_{n,\nu,\omega}(\nu\,t/2\,\pi)|$ en échelle logarithmique et met en évidence la différence de convergence entre les régimes non établi et établi.

Modélisation exacte d'une source ponctuelle $\mathbf{f}(x,z,t) = \delta(\mathbf{x},z)\, g(t)\, \mathbf{f}_0$ en régime établi : l'approche à $\mathbf{k}$ fixé adoptée dans cette thèse décompose le terme-source en ondes planes spatiales et impose de respecter le critère de Nyquist-Shannon pour la transformation numérique inverse $\mathbf{k} \to \mathbf{x}$. Il est donc *a priori* impossible de considérer une source ponctuelle, dont le spectre spatial n'est pas borné, et il est *a priori* extrêmement coûteux de considérer une forme spatiale discontinue de type porte rectangulaire. Ceci est vrai pour le régime non établi. Cependant, en régime établi, la plaque agit comme un filtre passe bas spatial qui permet de considérer une source ponctuelle sans difficulté. Cette remarque vaut également pour l'approche par ondes partielles décrite dans le Chapitre 1. En effet, on constate systématiquement que les modes tendent à avoir une vitesse de phase indépendante de $\mathbf{k}$ lorsque $\|\mathbf{k}\,h\|$ devient grand. Ceci peut se démontrer facilement pour des plaques isotropes homogènes, pour lesquelles une expression analytique de l'équation de dispersion peut être obtenue. Nous ne savons pas démontrer cette propriété dans le cas d'un milieu stratifié quelconque (d'épaisseur finie) ; nous la supposerons vraie. Alors, étant données une fréquence maximale f_{max} et une direction de phase θ, il existe nécessairement un $k_{max}(f_{max},\theta)$ tel qu'au delà duquel toutes les fréquences de résonnance $f_n(k > k_{max},\theta)$ sont supérieures à f_{max}. Ainsi, si l'on se limite à des sources dont le spectre temporel est négligeable au delà de f_{max}, les nombres d'onde $k > k_{max}$ ne contribuent pas au régime établi, et le champ peut donc être échantillonné spatialement sans problème.

La figure 2.1.4 donne deux exemples. La partie de gauche présente les courbes de dispersion de la plaque d'aluminium d'épaisseur $1\,mm$ (voir le paragraphe 1.5.3) dont les fréquences de résonances sont inférieures à $4\,MHz$. Le mode de plus basse fréquence est toujours le mode A_0, dont la vitesse de phase tend vers la célérité des ondes transversales, ce qui constitue un moyen très commode d'estimer le nombre d'onde optimal $k_{max}(f_{max})$ qui permet d'échantillonner de manière exacte le régime établi d'une source ponctuelle dès lors que la fréquence épaisseur est suffisante (disons $f\,h \geqslant 1\,MHz\,mm$). La partie de droite présente le nombre de modes de la plaque de carbone-époxy considérée en paragraphe 1.5.2 dont la fréquence de résonnance est inférieure à $500\,kHz$, en fonction du vecteur d'onde. En raison de l'anisotropie, les modes ont une vitesse de phase qui dépend de la direction de phase, mais là encore, au delà d'un certain $k_{max}(\theta, f_{max})$, aucun mode n'existe.

2.1.5 Utilisations dérivées de la base modale

Employer une approche modale pour calculer le champ permet certaines optimisations et certains post-traitements qui sont inaccessibles dans une approche par ondes partielles. En voici deux exemples.

Théorème du changement d'origine : cette fois-ci (*cf.* 1.4.3), l'expression modale va nous permettre de trier les paquets d'onde en fonction de leur direction de propagation. Ainsi, il sera possible, dans certains

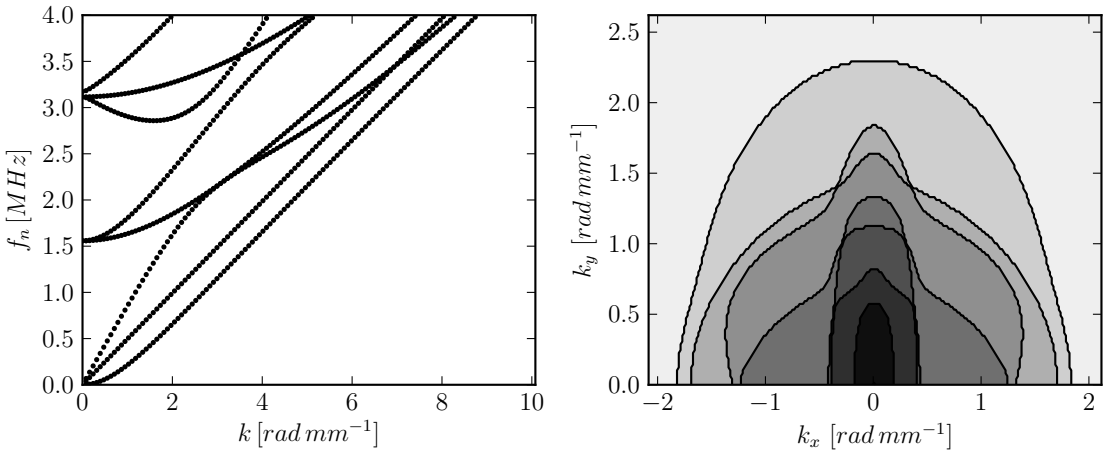


FIGURE 2.5 – A gauche : courbes de dispersion $f_n\,(k)$ d'une plaque d'aluminium dans le vide d'épaisseur $1\,mm$. Si $f_{max} = 4\,MHz$ alors le régime établi peut être échantillonné de manière exacte avec $k_{max} \approx 8.8\,rad\,mm^{-1}$. A droite : nombre de modes ($f_n < 500\,kHz$) en fonction de $\mathbf{k}$ pour la plaque de carbone-époxy décrite en 1.5.2 (la zone la plus claire correspond à 0 modes, la plus sombre à 7 modes). Si $f_{max} = 500\,kHz$ alors le régime établi peut être échantillonné de manière exacte avec $k_{x,max} \approx 2,\ k_{y,max} \approx 2.5\,rad\,mm^{-1}$.

cas particuliers, de prolonger grandement la validité de la solution sans avoir à agrandir la taille du domaine spatial. Les limitations sont exactement les mêmes que pour le modal-$k_n\,(\omega)$, à savoir la dispersion, qui élargit petit à petit l'extention spatio-temporelle des paquets d'ondes, et la difficulté dans certains cas (3D anisotrope, guide ouvert) de définir simplement une notion de direction de propagation. Pour simplifier, nous considérons seulement ici un cas 2D.

Utilisons la représentation (2.44). k étant fixé, à chaque déformée modale correspondent deux pulsations propres ω_j et $\omega_{-j} = -\omega_j$, de signes opposés. Chacune de ces pulsations correspond à la propagation temporelle d'un paquet d'onde. Si l'un est à vitesse de groupe positive $c_j \equiv \frac{\partial \omega_j}{\partial k} > 0$, alors l'autre est à vitesse de groupe négative $c_{-j} = -c_j < 0$. Bien entendu, ces deux paquets sont indiscociables l'un de l'autre car leur interférence en régime non-établi est nécessaire pour assurer la causalité. Cependant, si nous abandonnons l'hypothèse de causalité et que nous nous intéressons seulement au champ établi situé à droite de la source, nous pouvons choisir de calculer u_j grâce à la formule (2.45) et d'imposer $u_{-j} = 0$. Le calcul à droite de la source est exact, tandis que le calcul à gauche est faux. Le calcul en régime non-établi n'a bien sûr aucun sens. L'avantage est que les sources fictives n'émettent à présent que des trains d'onde se propageant vers la droite. Il est ainsi à présent possible d'exploiter le théorème de changement d'origine pour n'utiliser qu'un domaine spatial réduit. Ceci est illustré en figure 2.6.

Extraction des coefficients modaux et reconstruction du champ : imaginons que nous connaissons le champ $\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, z_1, t_i)$ pour tous les points $\mathbf{x}$ d'une grille d'échantillonnage donnée, à une altitude z_1 donnée, et pour un certain (petit) nombre d'instants $t_i,\ i = 1..2\,n$. Nous disposons donc de plusieurs « photos » du champ $\mathbf{u}$ tout en ignorant quelles sources ont pû en être à l'origine. Sous certaines conditions, il est possible d'utiliser la base modale pour extraire les coefficients modaux du champ $\mathbf{u}$ et ainsi obtenir ce champ, ou un champ de contraintes associé, à d'autres altitudes et d'autres instants. Ce point de départ peut par exemple représenter la sortie d'un calcul numérique indépendant, et on peut en imaginer diverses applications : couplage entre deux codes numériques, post-traitement de mesures expérimentales, sauvegardes à bas coût de résultats de calculs, *etc.*

La première hypothèse à faire est celle d'un régime établi. Sous la représentation (2.44), les coefficients u_j

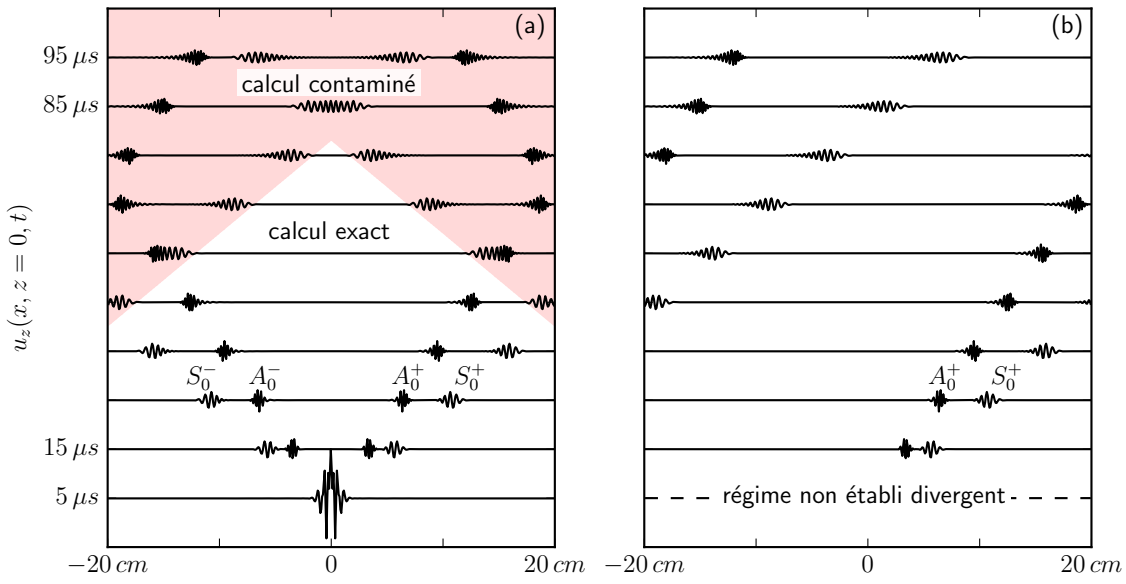


FIGURE 2.6 – Champ 2D calculé à partir des représentations (2.35) (a) et (2.44) (b). Dans le cas (b), les paquets d'ondes se propageant vers la gauche ont été forcés à zéro, ce qui permet d'exploiter le théorème du changement d'origine pour prolonger la validité de la solution sans agrandir le domaine spatial.

sont donc constants dans le temps. De plus, notre ignorance quant aux sources nous force à abandonner l'hypothèse de causalité : nous ne connaissons pas la relation entre u_j et u_{-j}. Enfin, supposons que z_1 ne correspond à aucun nœud de déformée modale (pour en être certain, on peut choisir $z_1 = 0$ ou h) et que le champ peut être décrit par un maximum de n modes. Cette dernière hypothèse se résume en « un mode, deux photos ». Appliquons une transformation de Fourier $\mathbf{x} \to \mathbf{k} : \mathbf{u} \to \tilde{\mathbf{u}}$. Pour chaque $\mathbf{k}$, nous cherchons à minimiser la quantité $\mathbf{M}\,\mathbf{U}_{mod} - \mathbf{U}_{photo}$, avec :

$$\mathbf{U}_{mod} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{-1} \\ \vdots \\ u_n \\ u_{-n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{photo} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}\,(t_1) \\ \tilde{\mathbf{u}}\,(t_2) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}\,(t_{2\,n}) \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_1\,t_1} & \boldsymbol{\Phi}_{-1}\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_{-1}\,t_1} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_n\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_n\,t_1} & \boldsymbol{\Phi}_{-n}\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_{-n}\,t_1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_1\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_1\,t_{2\,n}} & \boldsymbol{\Phi}_{-1}\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_{-1}\,t_{2\,n}} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_n\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_n\,t_{2\,n}} & \boldsymbol{\Phi}_{-n}\,(z_1)\,e^{\mathrm{i}\,\omega_{-n}\,t_{2\,n}} \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Ce système linéaire est surdimensionné et doit être résolu au sens des moindres carrés. Il est bien entendu crucial que $\mathbf{M}^\dagger\,\mathbf{M}$ soit bien conditionnée. Les sources de mauvais conditionnement peuvent venir d'une sélection d'une ou deux composantes seulement du champ $\mathbf{u}$, d'un mauvais choix de z_1 tel qu'une déformée modale y ait un nœud, ou d'un mauvais choix de t_i, par exemple identiquement espacés de $2\,\pi\,\omega_j^{-1}$, ou d'espacement disproportionné par rapport aux pulsations (par exemple $|t_{2\,n} - t_1| \lll 2\,\pi\,\omega_j^{-1}$).

Cette procédure a été testée en 2D et en 3D sur des cas isotropes (plaque d'aluminium) et fortement anisotrope (plaque de carbone-époxy monocouche du paragraphe 1.5.2), et pour des champs produits par des excitations à bande étroite. Elle est illustrée en figure 2.7. L'altitude des photos a été choisie à $z_1 = 0$. Les instants t_i ont

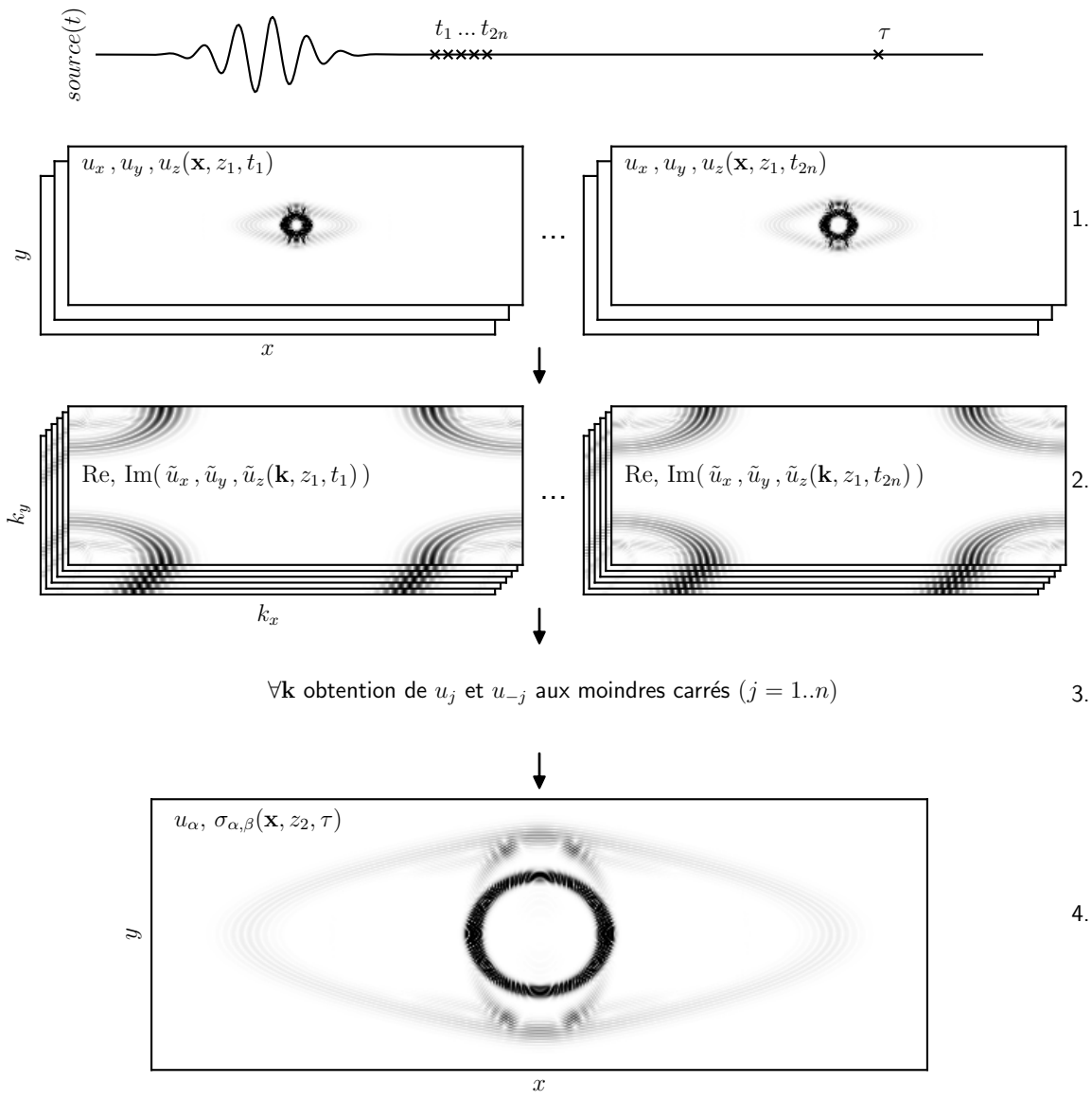


FIGURE 2.7 – Extraction des coefficients modaux d'un champ **u** connu en régime établi à une altitude z_1 et quelques instants $t_1 ... t_{2\,n}$. Le champ de déplacement ou de contrainte peut ensuite être reconstruit à d'autres altitudes z_2 et instants τ.

été très naturellement choisis espacés d'un pas constant δt tel que δt respecte le critère de Nyquist-Shannon. Sous cette condition, il a été constaté empiriquement que la sensibilité du système par rapport au choix des instants t_i n'est absolument pas critique. Le seul ingrédient critique relevé a été d'utiliser les trois composantes u_x, u_y et u_z du champ, faute de quoi certaines directions donnaient lieu à des mauvais conditionnements.

2.2 Plaque dissipative dans le vide : approche par perturbations

Considérons à présent que les milieux solides peuvent être dissipatifs. Si la loi de dissipation est de type Kelvin-Voigt, l'équation d'onde (1) se réécrit avec la transformation

$$\diamond \to \diamond + \blacklozenge\, \partial_t. \tag{2.55}$$

Plus généralement, introduisons un opérateur différentiel temporel de dissipation :

$$\diamond \to \diamond + \blacklozenge\, \mathrm{Op}_t, \tag{2.56}$$

que nous préférons caractériser par son action dans le domaine fréquentiel, par sa transformée de Fourier $H(\omega)$. En théorie, il est fondamental que l'opérateur Op_t soit causal, de manière à ce que H soit holomorphe pour $\{\omega \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\omega) > 0\}$. Dans la pratique, et de façon non rigoureuse, nous tenterons d'utiliser une loi de dissipation hystérétique, qui est connue pour sa non causalité à cause de son comportement aux basses fréquences (voir 1.3.2). Dans le régime fréquentiel, nous avons :

$$\begin{array}{ll} \diamond \to \diamond + \mathbb{i}\,\omega\, \blacklozenge & \text{loi de Kelvin} - \text{Voigt} \\ \diamond \to \diamond + \mathbb{i}\,\mathrm{sign}(\omega)\, \blacklozenge & \text{loi Hystérétique} \\ \diamond \to \diamond + H(\omega)\, \blacklozenge & \text{loi arbitraire.} \end{array} \tag{2.57}$$

La démonstration du paragraphe (2.1.1) ne tient évidemment plus car l'opérateur différentiel ne se sépare plus en une partie purement spatiale autoadjointe et une partie purement temporelle. Nous supposerons cependant, comme classiquement pour les guides fermés, qu'une décomposition modale est toujours valide. Par contre, les fréquences propres cherchées auront une partie imaginaire non nulle qui représentera l'atténuation modale au cours du temps. Concernant l'orthogonalité de la base modale, celle-ci n'est plus garantie non plus, ce qui en rend l'utilisation moins pratique. Il devient donc indispensable d'utiliser la représentation (2.44) au détriment de (2.35). Contrairement au guide non dissipatif, $\boldsymbol{\Phi}_{-j} \neq \boldsymbol{\Phi}_j$. Nous conservons cependant la symétrie : « $(\omega_j,\, \boldsymbol{\Phi}_j)$ est un mode » implique « $(-\omega_j^*,\, \boldsymbol{\Phi}_j^*) = (\omega_{-j},\, \boldsymbol{\Phi}_{-j})$ est également un mode ».

2.2.1 Motivation de l'approche perturbative

Pour la loi causale de Kelvin-Voigt il est possible de continuer à formuler un problème aux valeurs propres suivant l'approche décrite au paragraphe (2.1.2) à condition d'augmenter la taille du vecteur d'état pour réduire le problème aux valeurs propres « non linéaire » à un vrai problème aux valeurs propres, ce qui permet de résoudre le problème de manière exacte au prix d'une augmentation du temps de calcul. Il faut par exemple choisir de travailler avec le vecteur d'état $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} & \mathbb{i}\,\omega_j\,\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ de taille 6.

En revanche, la loi hystérétique pose clairement problème pour établir une formulation aux valeurs propres. Il est plausible que continuer à travailler avec $(\tilde{\mathbf{u}})$ et introduire $\diamond \to \diamond + \mathbb{i}\, \blacklozenge$ donne des valeurs propres $\omega_j^2 \in \mathbb{C}$ desquelles on puisse extraire correctement $\omega_j = \sqrt{\omega_j^2}$ si $\mathrm{Re}(\omega_j) > 0$, c'est à dire un demi-spectre correct, et

que l'autre demi-spectre $\mathrm{Re}\,(\omega_j) < 0$ soit reconstruit grâce à la symmétrie $\omega_j \to -\omega_j^*$. Cette possibilité n'a pas été étudiée.

L'approche retenue a été une approche par la théorie des perturbations. En effet, pour les cas d'application CND, les matériaux considérés comme fortement dissipatifs tels que les composites carbone-époxy sont décrits par des tenseurs $\eta_{ij} \leq 5\%\, c_{ij}$. Il est donc très légitime de raisonner par perturbations. L'avantage est que l'on garde un algorithme de recherche de modes relativement rapide et sans mauvaise surprise, dont on post-traite la sortie pour obtenir la base modale du guide dissipatif. L'autre avantage, si l'on veut « jouer » avec les paramètres des matériaux, est que l'on peut faire varier le tenseur η_{ij} avec un très faible impact de calcul, même en 3D. Cet aspect n'a pas été exploité mais pourraît être à la base d'une procédure d'optimisation des coefficients η_{ij}, et en particulier pourraît permettre de terminer de caractériser proprement les coefficients de la plaque de G. Neau [58] à partir de l'ensemble de ses signaux mesurés (voir 1.5.2).

2.2.2 Base modale perturbée pour une loi Kelvin-Voigt

On pose :

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_j\,(z,t) = e^{\mathbb{i}\,\tilde{\omega}_j\,t}\,\tilde{\mathbf{\Phi}}_j\,(z,0) \tag{2.58}$$

le mode j perturbé, avec la pulsation propre perturbée $\tilde{\omega}_j$:

$$\tilde{\omega}_j \equiv \omega_j + \mathbb{i}\,\gamma_j \tag{2.59}$$

et le vecteur propre perturbé $\tilde{\mathbf{\Phi}}_j$ projeté sur la base du guide non dissipatif :

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_j\,(z,0) \equiv \sum_p \alpha_{jp}\,\mathbf{\Phi}_p\,(z)\,, \quad \alpha_{jj} \equiv 1. \tag{2.60}$$

L'équation d'onde (2.2) conduit aux relations

$$\left(\omega_n^2 - \tilde{\omega}_j^2\right)\,\alpha_{jn} + \mathbb{i}\,\tilde{\omega}_j \sum_p \alpha_{jp}\,(\eta)_{np} = 0, \tag{2.61}$$

où l'on a défini

$$(\eta)_{np} \equiv \left\langle \mathbf{\Phi}_n, -\rho^{-1}\,\left(\boldsymbol{\nabla}\blacklozenge\boldsymbol{\nabla}\right)\,\mathbf{\Phi}_p \right\rangle = (\eta)_{pn}^* \tag{2.62}$$

qui caractérise l'action de l'opérateur de dissipation sur le mode p. $(\eta)_{np}$ a la dimension de l'inverse d'un temps. Comme nous le verrons par la suite, $(\eta)_{nn}$ définit un temps de demi-vie pour le mode n. La propriété $(\eta)_{np} = (\eta)_{pn}^*$ est due au fait que l'opérateur $\blacklozenge$ jouit des mêmes propriétés que l'opérateur $\diamond$ et que $-\rho^{-1}\,\left(\boldsymbol{\nabla}\blacklozenge\boldsymbol{\nabla}\right)$ est par conséquent également autoadjoint pour le produit scalaire (2.7). Bien entendu, si le tenseur de dissipation est proportionnel au tenseur élastique $\eta_{ij} = \beta\, c_{ij}$, alors $(\eta)_{jj} = \beta\,\omega_j$ et $(\eta)_{jn} = 0$ si $n \neq j$, ce qui mène à la relation utilisée par Kausel [43]. Par la suite, nous considèrerons le cas plus général où le tenseur de dissipation n'est pas nécessairement proportionnel au tenseur élastique. Nous faisons les hypothèses de perturbations suivantes : $\gamma_j\,\omega_j^{-1}$, α_{jn} pour $n \neq j$, et $(\eta)_{jn}\,\omega_j^{-1}$ sont d'ordre 1, et le mode j n'est pas dégénéré. On obtient alors, au premier ordre, en prenant $n = j$:

$$\gamma_j \approx \frac{(\eta)_{jj}}{2} \tag{2.63}$$

qui est toujours un nombre réel positif. La dissipation donne donc toujours lieu à un amortissement modal exponentiel dans le temps, ce qui est rassurant. En prenant cette fois $n \neq j$, on obtient au premier ordre :

$$\alpha_{jn} \approx \mathbb{i}\, \omega_j \, \frac{(\eta)_{nj}}{\omega_j^2 - \omega_n^2}, \tag{2.64}$$

et donc :

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j (z,t) \approx e^{-\frac{(\eta)_{jj}}{2} t} \, e^{\mathbb{i}\, \omega_j \, t} \left[\boldsymbol{\Phi}_j (z) + \sum_{p \neq j} \mathbb{i}\, \frac{\omega_j \, (\eta)_{nj}}{\omega_j^2 - \omega_n^2} \, \boldsymbol{\Phi}_p (z) \right]. \tag{2.65}$$

Pour des matériaux isotropes, ou isotropes transverses dans une direction principale, il arrive qu'en certains points deux courbes de dispersions se croisent (les cas de croisement triple ou plus sont très exceptionnels, mais se traitent de la même manière). Si le mode j est dégénéré avec le mode n, c'est-à-dire si $\omega_j = \omega_n$ et $j \neq n$, alors les relations (2.63-2.65) doivent être reconsidérées. Dans ce cas, les vecteurs $\boldsymbol{\Phi}_j$ et $\boldsymbol{\Phi}_n$ sont relativement arbitraires puisqu'ils ne sont plus définis seulement à une phase près, mais à un vecteur du plan $(\boldsymbol{\Phi}_j, \boldsymbol{\Phi}_n)$ près. On peut donc les redéfinir de manière à ce que le tenseur de dissipation soit diagonal dans ce sous-espace, c'est à dire $(\eta)_{nj} = 0$. Cette transformation n'est pas explicitée dans cette thèse.

Les modes perturbés sont-ils normés ? Oui, au premier ordre :

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_j, \, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_j \right\rangle = 1 + \sum_p |\alpha_{jp}|^2 \approx 1. \tag{2.66}$$

Les modes perturbés sont-ils orthogonaux ? Non :

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_n, \, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_j \right\rangle_{n \neq j} \approx \mathbb{i}\, \frac{(\eta)_{nj}}{\omega_j - \omega_n}, \tag{2.67}$$

il faut donc inverser une matrice de Gram pour utiliser la base dans un calcul de champ. Cette matrice est à diagonale principale et est donc bien conditionnée. De plus, elle est hermitienne. Cette partie n'est pas explicitée dans cette thèse.

2.2.3 Base modale perturbée pour une loi Hystérétique

Reprenons les définitions (2.58-2.60). La relation (2.61) devient :

$$\left(\omega_n^2 - \tilde{\omega}_j^2\right) \, \alpha_{jn} + \mathbb{i}\, \mathrm{sign}\,(\omega_j) \sum_p \alpha_{jp} \, (\eta)_{np} = 0, \tag{2.68}$$

et donc

$$\gamma_j \approx \mathrm{sign}\,(\omega_j) \, \frac{(\eta)_{jj}}{2\,\omega_j}, \tag{2.69}$$

$$\alpha_{jn} \approx \mathbb{i}\, \mathrm{sign}\,(\omega_j) \, \frac{(\eta)_{nj}}{\omega_j^2 - \omega_n^2}. \tag{2.70}$$

Notons que le problème non physique du comportement de la loi aux basses fréquences se manifeste dans l'équation (2.69) par une atténuation modale infinie.

Plus généralement, si nous considérons l'opérateur de dissipation caractérisé par sa transformée de Fourier H :

$$\diamond \to \diamond + H\,(\omega) \;\blacklozenge, \tag{2.71}$$

nous obtenons au premier ordre les formules de perturbations

$$\gamma_j \approx -\mathbb{i}\, H(\omega_j)\, \frac{(\eta)_{jj}}{2\,\omega_j}, \tag{2.72}$$

$$\alpha_{jn} \approx H(\omega_j)\, \frac{(\eta)_{nj}}{\omega_j^2 - \omega_n^2}. \tag{2.73}$$

2.3 Difficultés du cas de la plaque enfouie

Le but de cette section est de donner un aperçu des difficultés théoriques et pratiques que les méthodes modales rencontrent lorsque le guide d'onde est ouvert. Au cours de cette thèse ces difficultés ont motivé l'approche par ondes partielles décrite dans le Chapitre 1 et l'approche modale a été abandonnée pour traiter ce cas.

Citons toutefois les travaux de J. Park et E. Kausel [61, 62] qui ont montré qu'il était possible de continuer à utiliser la base modale du guide dans le vide comme intermédiaire de calcul, tout en prétendant à un résultat exact, en ayant recours à ce qu'ils appellent la « méthode de la sous-structure » (substructure method en anglais). Ceci consiste à considérer le milieu semi-infini comme un terme source secondaire, qui agit en permanence sur toute la surface de la plaque, et dont l'amplitude est à déterminer en résolvant une équation intégrale de Volterra du premier type. L'équation de Volterra fait intervenir la série modale de la sous-structure, connue numériquement, le tenseur de Green du milieu semi-infini, connu analytiquement, et les termes sources. J. Park et E. Kausel résolvent numériquement cette équation directement dans le domaine temporel et discutent de la précision et des problèmes d'instabilités de la méthode. Pour améliorer la stabilité, ils proposent de créer une interface fictive au sein du milieu semi-infini et de raisonner avec la base modale de ce système « rallongé », considéré dans le vide, plutôt qu'avec la base modale de la plaque. Notons que cette équation de Volterra pourraît être résolue bien plus simplement dans le domaine de Laplace. Cette approche n'a pas été retenue car le problème de fond, qui explique certainement le problème d'instabilité, est que cette approche par sous-structure place le guide dans un régime forcé (non établi) sur l'ensemble du domaine spatial et pendant toute la durée du signal. Par conséquent, la série modale converge mal partout et tout le temps (voir 2.1.4), et cette approche ne présente que des inconvénients par rapport à l'approche par ondes partielles. Il est donc important de disposer des « vrais » modes du guide ouvert si l'on veut espérer calculer le champ de manière modale.

En premier lieu, le paragraphe 2.3.1 rappelle que le sens physique donné aux modes qui s'atténuent dépend de la formulation modale, contrairement au cas du guide dans le vide non dissipatif. Ensuite, les paragraphes 2.3.2 et 2.3.3 décrivent les deux écueils théoriques auxquels se heurte le raisonnement modal appliqué au guide ouvert. Enfin, le paragraphe 2.3.4 décrit les difficultés pratiques rencontrées par les méthodes de type SAFE pour l'obtention numérique des modes propres.

2.3.1 Sens physiques des différentes formulations modales

Onde hétérogène à fréquence complexe : considérons une onde modale de déformée modale $f(z)$. L'amplitude du champ associé est de la forme $f(z)\,\exp(\mathbb{i}(\omega\,t - \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}))$, c'est-à-dire qu'elle est décrite temporellement par une pulsation ω et spatialement, dans le plan de la plaque, par un vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Selon la formulation modale considérée, ces deux dernières quantités peuvent être complexes. On notera alors $\omega = \omega' + \mathbb{i}\,\omega''$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbb{i}\,\mathbf{k}''$ sera appelé bivecteur d'onde. Il est la projection dans le plan de chacun des six bivecteurs vérifiant l'équation de Christoffel dans chaque couche. $\mathbf{k}'$ décrit les plans

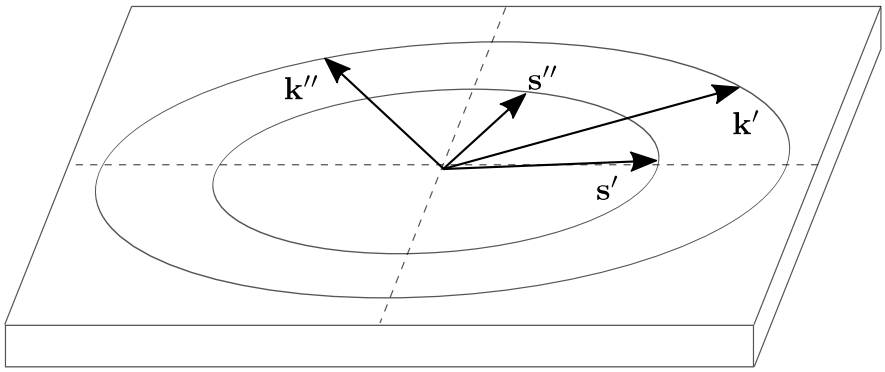


FIGURE 2.8 – Relation entre le bivecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbb{i}\,\mathbf{k}''$ et le bivecteur lenteur de phase $\mathbf{s} = \mathbf{s}' - \mathbb{i}\,\mathbf{s}''$ (courtoisie d'O. Poncelet [67]).

de phase et $\mathbf{k}''$ indique la direction et l'ampleur de la décroissance spatiale exponentielle. Introduisons le bivecteur lenteur de phase $\mathbf{s} = \mathbf{s}' - \mathbb{i}\,\mathbf{s}''$ [1], projection sur l'interface de chaque lenteur de phase, défini par la relation

$$\mathbf{k} = \omega\,\mathbf{s}. \tag{2.74}$$

On observe qu'à travers cette relation, le bivecteur $\mathbf{k}$ couple les effets spatiaux et temporels, qui sont respectivement décrits par $\mathbf{s}$ et ω. Cette relation est illustrée en figure 2.8. Bien entendu, ces trois quantités sont liées par l'équation de dispersion de la plaque, laquelle admet pour solutions une infinité de nappes. Selon la formulation modale adoptée, seule une « tranche » de ces nappes nous intéresse : le cas le plus fréquent est de fixer une fréquence réelle ($\omega'' = 0$) et une direction de phase θ pour obtenir $\mathbf{k}_n(\omega, \theta)$. On peut cependant parfois rechercher la « tranche » $\omega_n(\mathbf{s})$ définie par $\mathbf{s}'' = \mathbf{0}$, ou ici dans cette thèse la « tranche » $\omega_n(\mathbf{k})$ définie par $\mathbf{k}'' = \mathbf{0}$. Lorsque la plaque est viscoélastique, ou est enfouie, la partie imaginaire non nulle de la valeur propre donne à chaque représentation un sens différent.

Onde de Lamb à fréquence réelle : pour la formulation « classique », qui correspond à une somme d'ondes harmoniques, *i. e.* $\omega'' = 0$, les pôles $\mathbf{k}_n(\omega, \theta)$ sont complexes et la quantité $\mathbf{k}_n''$ quantifie l'atténuation d'un train d'ondes « de Lamb » au cours de sa propagation spatiale. Les modes dissipent leur énergie par radiation dans le milieu environnant.

Onde à lenteur réelle : une alternative consiste à chercher les pôles $\omega_n(\mathbf{s})$ en s'imposant une lenteur de phase réelle, *i. e.* $\mathbf{s}'' = \mathbf{0}$. Ce type de pôles est totalement différent dans leur interprétation physique de ceux obtenus pour $\omega'' = 0$. Ainsi dans le premier cas, ils correspondent à une observation spatiale du champs ultrasonore loin de la source et le long du guide, alors que dans ce second cas, les observations sont faites, par exemple, dans la réflexion spéculaire et ils traduisent la décroissance temporelle liée à un résonance de plaque (*cf.* figure 2.9). Il s'agit de deux phénomènes complètement différents. En effet, dans certaines régions les courbes de dispersion sont drastiquement différentes. On trouvera dans la thèse d'A. Bernard [11] le lien détaillé entre une expérimentation donnée et les pôles décrivant le phénomène physique associé.

Onde à vecteur d'onde réel : dans ce travail, le vecteur $\mathbf{k}$ est réel, *i. e.* $\mathbf{k}'' = \mathbf{0}$. Par conséquent, si les pôles cherchés en fréquence ($\omega_n(\mathbf{k})$) sont complexes, alors $\mathbf{s}_n = \mathbf{k}/\omega_n$ l'est aussi. Nous n'avons pas connaissance de travaux faisant le lien entre ces courbes de dispersion et une situation expérimentale ; l'interprétation physique

1. ne doit pas être confondu avec le paramètre de Laplace utilisé au Chapitre 1

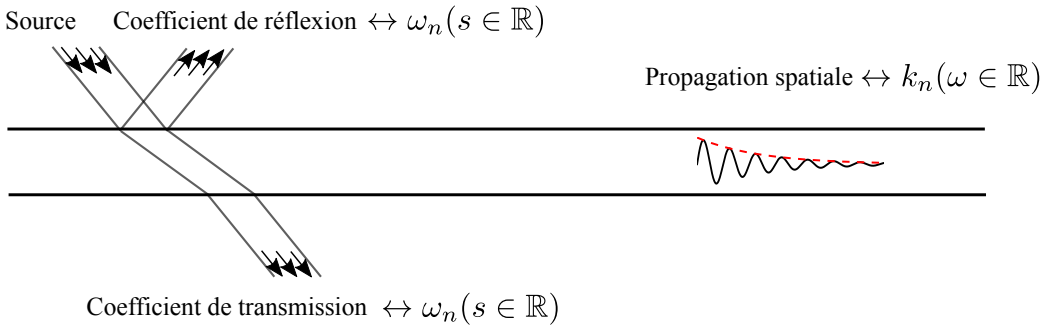


FIGURE 2.9 – Pour un guide enfoui, le lien entre une expérience et un jeu de relations de dispersions dépend de la situation expérimentale. Les coefficients de réflexion/transmission sont reliés aux courbes $\omega_n(s \in \mathbb{R})$, alors que l'atténuation sur des longues distances est reliée aux courbes $k_n(\omega \in \mathbb{R})$. À notre connaissance, les relations de dispersion $\omega_n(k \in \mathbb{R})$ qui nous concernent n'ont pas été reliées à une situation expérimentale et sont considérées dans cette thèse comme simple intermédiaire de calcul.

de ces modes reste donc à faire. Nous supposons cependant que ω_n'' quantifie la décroissance temporelle du train d'ondes mesuré dans le référentiel lié au train d'ondes.

Cas limite du guide dans le vide non dissipatif : dans ce cas particulier, pour une direction de phase θ fixée, que l'on cherche les nombres d'ondes harmoniques propagatives $\mathbf{k}_n(\omega, \theta)$, qui sont réels, ou les pulsations $\omega_n(\mathbf{s})$ en se fixant la lenteur de phase réelle, qui sont également réelles, nous obtenons les mêmes courbes qu'en cherchant les pulsations $\omega_n(\mathbf{k})$ en fonction du nombre d'onde réel. Ceci a été illustré en figure 2.1 pour introduire la formulation modale $\omega_n(\mathbf{k})$ décrite dans ce chapitre. Ce cas limite permet ainsi une relative équivalence des différentes interprétations modales, même s'il ne faut pas oublier que pour synthétiser un signal physique en régime non-établi il faut, dans le cas harmonique, inclure la contribution de l'infinité de modes évanescents, et dans l'autre cas, sommer une infinité de contributions de fréquences modales réelles.

2.3.2 « Base » incomplète

La première difficulté théorique est que les modes propres ne forment plus une famille complète de solutions. L'opérateur différentiel spatial $\mathbf{Op_k}$, défini par l'équation (2.3), admet en effet à présent un spectre continu, appelé continuum de radiation, en plus de son spectre discret (les modes propres). Ceci est illustré sur la figure 1.4 du Chapitre 1 : la contribution du continuum de radiation correspond à l'intégrale le long de la coupure qui se somme à la contribution des pôles lorsque le théorème des résidus est utilisé pour calculer analytiquement la transformation inverse de Laplace. L'incomplétude de la famille modale signifie que les modes propres ne peuvent plus décrire seuls la totalité de la solution cherchée. Bien entendu, les cas d'intérêt en CND par ondes guidées correspondent à des cas où la contribution des modes est largement dominante, et où négliger la contribution de la coupure est en principe une approximation tout à fait résonnable. Toutefois, ce problème d'incomplétude, principalement théorique dans les cas qui nous intéressent, a un fort lien avec le problème, à la fois théorique et pratique, des relations d'orthogonalité et de la normalisation des modes que nous développons dans le paragraphe suivant.

2.3.3 Pas de relations d'orthogonalité pour les modes rayonnant

Pour un guide fermé, les relations d'orthogonalité entre les modes s'expriment par :

$$\langle \mathbf{\Phi}_i, \mathbf{\Phi}_j \rangle = \int_0^h \rho(z)\ \mathbf{\Phi}_i^\dagger(z)\ \mathbf{\Phi}_j(z)\ \mathrm{d}z = \delta_{|i||j|}. \tag{2.75}$$

Peuvent-elles convenir au cas du guide ouvert ? La définition

$$\langle \mathbf{\Phi}_i, \mathbf{\Phi}_j \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(z)\ \mathbf{\Phi}_i^\dagger(z)\ \mathbf{\Phi}_j(z)\ \mathrm{d}z < \infty\,? \tag{2.76}$$

a un sens pour des modes guidés, dont l'amplitude décroit exponentiellement au sein du milieu environnant. V.V. Shevchenko [73, 89] a montré dans un cas scalaire qu'elle pouvait également être étendue au cas de deux modes dont l'amplitude au sein du milieu environnant varie en $\exp(-\mathrm{i}\, k_z\, z)$, $k_z \in \mathbb{R}$. En revanche, (2.76) n'a aucune chance de pouvoir être conservée pour le cas où $\mathbf{\Phi}_i$ (ou $\mathbf{\Phi}_j$, ou les deux) est radiatif (leaky modes en anglais), et présente donc une croissance exponentielle dans le milieu environnant. Comment alors normaliser les modes ? Comment extraire les coefficients modaux d'un champ élastodynamique $\tilde{\mathbf{u}}(z,t)$ donné ? A notre connaissance, ces questions sont encore ouvertes. On peut imaginer chercher un poids $p(z)$ « intelligent » à la place de $\rho(z)$ pour que l'intégrale (2.76) ait un sens, ou bien on peut chercher à poser un problème de minimisation de type

$$\mathrm{Inf}_{u_n} \left\| p(z) \left[\tilde{\mathbf{u}}(z,t) - \sum_n u_n\ \exp(\mathrm{i}\,\omega_n\, t)\ \mathbf{\Phi}_n(z) \right] \right\|, \tag{2.77}$$

en se résignant au fait que si le continuum de radiation est négligé, cette borne inférieure n'a aucune chance d'être nulle, et que s'il n'est pas négligé, alors la description modale devient lourde et ne présente plus d'avantage sur la description par ondes partielles. Ces possibilités n'ont pas été étudiées dans cette thèse.

2.3.4 Difficultés pour poser un problème aux valeurs propres

Malgré les difficultés théoriques exposées ci-dessus il est bien sûr d'un grand intérêt de savoir obtenir les relations de dispersion du système, pour, à défaut de les utiliser comme intermédiaire de calcul de champ, pouvoir prédire les principaux phénomènes à l'œuvre dans une situation de CND donnée. Il est bien sûr possible d'obtenir ces relations de dispersion de manière exacte en recherchant les zéros du déterminant du système, mais nous avons déjà expliqué que cette méthode de résolution pouvait conduire à des mauvaises surprises numériques, et c'est ce qui avait motivé l'introduction de la méthode SAFE pour le cas du guide dans le vide. Toutefois, nous allons voir que le cas du guide ouvert pose en général problème, et la seule méthode exacte reste souvent la méthode du déterminant nul.

Supposons pour simplifier que le guide ouvert est constitué d'une plaque solide et d'un milieu fluide semi infini, situé au dessus (pour $z \in]-\infty, 0[$). A l'inferface, $\tilde{u}_z$, $\tilde{\sigma}_{xz}$, $\tilde{\sigma}_{yz}$ et $\tilde{\sigma}_{zz}$ sont continues ($\tilde{\sigma}_{xz}$, $\tilde{\sigma}_{yz}$ s'annulent continûment). Il y a deux approches pour tenter de traiter ce cas.

1. La première consiste à utiliser une description analytique du champ dans le milieu non borné. En effet, $\mathbf{k}$ étant fixé et $\omega_n(\mathbf{k})$ étant supposé connu pour l'instant, l'équation de Christoffel $k_z(\mathbf{k}, \omega_n)$ (1.33) est satisfaite et le champ dans le fluide s'écrit

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(0)\ \exp(-\mathrm{i}\, k_z\, z). \tag{2.78}$$

A l'interface, on a donc d'après (1.37) :

$$\frac{\tilde{u}_z(0)}{\tilde{\sigma}_{zz}(0)} = \frac{\tilde{\eta}_3(0)}{\tilde{\eta}_6(0)} = \frac{\mathrm{i}\, k_z}{\rho_f\, \omega_n^2}. \tag{2.79}$$

Dans (2.78, 2.79) k_z est tel que l'onde plane ainsi décrite soit sortante. Il faut donc distinguer un certain nombre de cas suivant que ω_n est réel et plus petit, ou plus grand, que $c_f \|\mathbf{k}\|$, ou si ω_n a une partie imaginaire positive non nulle auquel cas $\mathrm{Im}(k_z) < 0$ et $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z)$ est à croissance exponentielle. Cette disjonction de cas est pénible même dans le cas « simple » d'un milieu extérieur fluide, mais la principale difficulté réside dans le fait que k_z est une fonction non polynomiale de ω_n, et qu'il faut donc trouver une astuce pour transformer (2.79) en un problème aux valeurs propres sur ω_n. On peut raisonner par développement de Taylor en puissances de $\omega_n\, c^{-1}\, \|\mathbf{k}\|^{-1}$ ou $c\, \|\mathbf{k}\|\, \omega_n^{-1}$, qui donnera de bons résultats pour des modes à vitesse de phase proche du point de développement, et on peut augmenter l'ordre du développement au prix d'une augmentation de la taille du vecteur d'état, ou garder un ordre faible et faire varier le point développement pour obtenir des courbes de dispersions valables par régions. Mentionnons à ce stade l'astuce remarquable exposée par T. Hayashi et D. Inoue dans [36] qui permet une résolution exacte, mais qui n'est malheureusement valable que si les deux milieux environnants sont fluides et de même célérité et si les déformées modales sont (anti)symétriques. Ces deux auteurs décrivent également dans [39] une manière non standard d'aboutir à un calcul de champ. Le problème de formuler un SAFE pour un guide enfoui reste donc à l'heure actuelle un problème ouvert, aussi bien pour ce SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$ que pour un SAFE « classique » $k_n(\omega, \theta)$. Avant de clore cette partie, remarquons que ce problème ne se pose pas si l'on cherche les valeurs propres en fonction du vecteur lenteur de phase $\omega_n(\mathbf{s})$ (ou $k_n(\mathbf{s})$). En effet, d'après (1.33) pour un milieu infini fluide et (1.28) pour un milieu infini solide isotrope, si l'on factorise l'expression de $k_z(\mathbf{s}, \omega_n)$ par ω_n (ou $k_z(\mathbf{s}, k_n)$ par k_n) alors la non-linéarité dûe à la racine carrée complexe est portée entièrement par le paramètre $\mathbf{s}$, et non par l'inconnue. Il est donc facile de formuler une recherche de valeurs propres exacte, que nous appellerons SAFE-$\omega_n(\mathbf{s})$ et SAFE-$k_n(\mathbf{s})$. Ces dernières courbes de dispersions sont discutées dans [67, 68, 22, 11]. Elles ne sont cependant exploitables dans un calcul de champ que pour certaines situations favorables, car l'intégration en lenteur $\mathbf{s}$ ne peut pas se faire par FFT, ce qui rend malaisé de traiter le cas d'une source générale de cette manière.

2. La deuxième approche, décrite par exemple dans [14], consiste à traiter le milieu non borné comme une nouvelle couche que l'on discrétise, en rajoutant des couches absorbantes ou des PML de manière à forcer la décroissance des solutions quand $|z| \to \infty$. Après une certaine distance que l'on espère suffisante pour éviter les réflexions parasites, une condition de Dirichlet ou de Neumann est appliquée et le guide ouvert est ainsi considéré comme un guide fermé. Si les PML sont convenablement choisies, les valeurs propres ainsi obtenues sont une bonne approximation des valeurs propres recherchées, et les déformées modales sont correctes à l'intérieur de la plaque. Le champ à l'extérieur de la plaque peut être reconstruit grâce à une déscription semi-analytique type (2.78). Bien entendu, il y a un caractère arbitraire dans la taille des PML, et donc dans la taille de la matrice à diagonaliser, et donc dans le nombre de valeurs propres calculées. Le résultat remarquable décrit dans [14] est que le spectre ainsi obtenu correspond au spectre discret recherché, complété d'un certain nombre de « modes » situés dans le continuum de radiation. Ces « modes de continuum » se trient facilement des « vrais » modes car leur déformée modale a une amplitude quasiment nulle à l'intérieur de la plaque.

Conclusions de la Partie I

Au cours de cette thèse, deux codes numériques `C++` ont été écrits. L'un, de 120 fichiers et 50000 lignes, basé sur l'approche par ondes partielles décrite au Chapitre 1, est capable de traiter un milieu stratifié arbitraire insonifié par un nombre quelconque de sources, pouvant être volumiques où situées à l'interface de deux couches. Plusieurs types de sources ont été considérées pour pouvoir modéliser différents transducteurs d'usage courant en CND. Le cas d'une source quelconque a également été traité, en convoluant numériquement le tenseur de Green avec la variable verticale z. Ce cas a été implémenté en prenant soin de minimiser les coûts numériques. L'impact en temps de calcul a été mesuré en comparant avec des sources traitées analytiquement, et jugé tout à fait acceptable.

L'autre code numérique, de 100 fichiers et 40000 lignes, met en œuvre plusieurs formulations de la méthode modale « SAFE » décrite au Chapitre 2 (SAFE-$k_n(\omega,\theta)$, SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$, SAFE-$k_n(\mathbf{s})$ ou $\omega_n(\mathbf{s})$) et est capable de traiter un guide anisotrope stratifié dans le vide, chaque couche étant solide. Seule la formulation SAFE-$k_n(\mathbf{s})$ ou $\omega_n(\mathbf{s})$ a été écrite pour un guide ouvert immergé dans un fluide infini. Les deux formulations SAFE-$k_n(\omega,\theta)$ et SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$ ont été utilisées pour calculer le champ rayonné par une source ponctuelle 2D située en surface. Le calcul de champ a été implémenté en 3D pour la seule formulation SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$, qui était à l'origine du sujet de cette thèse.

L'écriture de ces deux codes de calcul a permis de comparer les performances et les contraintes d'utilisation des deux approches développées dans cette première partie, l'une vis-à-vis de l'autre, ou vis à vis de l'approche « classique » SAFE-$k_n(\omega,\theta)$. Pour rappel, nous nous étions fixés comme but d'obtenir, d'une part, le champ proche et intermédiaire de manière performante, y compris en 3D pour une anisotropie quelconque, et, d'autre part, le champ rayonné dans le cas d'un guide ouvert. L'approche par ondes partielles est la seule qui réponde à tous ces points. Contrairement à ce qui est parfois considéré, cette approche est tout à fait compétitive avec une approche modale en régime établi. Ceci ajoute toutefois une contrainte d'utilisation : il est fondamental de respecter le critère de Nyquist-Shannon de manière optimale grâce aux informations de dispersion du guide d'ondes, ce que les méthodes modales font « automatiquement ». Ces informations doivent être spécifiées par l'utilisateur au code de calcul par ondes partielles, même si l'on peut imaginer que ce dernier fasse premièrement et très rapidement appel à un code modal en utilisant un ordre faible, un pas très grossier et une implémentation approximative des conditions de rayonnement pour les guides enfouis.

On peut légitimement à ce stade s'interroger sur l'intérêt de l'approche modale SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$ décrite dans le Chapitre 2. Du point de vue interprétatif, les informations fournies par la formulation SAFE-$k_n(\omega,\theta)$ sont celles qui sont recherchées pour les cas d'intérêt pratique où les modes guidés sont utilisés pour sonder de grandes distances : les concepts de modes propagatifs et évanescents sont précieux, et les informations d'atténuation modale sont en général préférées en termes de distances d'atténuation plutôt que de temps de vie. Ce sont ces informations que nous avons naturellement mobilisées pour discuter de l'exemple du paragraphe 1.5.2, qui traite du champ rayonné par un transducteur de type pastille piezoélectrique en surface d'une plaque de carbone-époxy. Cet exemple a pourtant été calculé par l'intermédiaire d'une méthode « à

k fixé » (par ondes partielles, mais le même calcul aurait pu également être fait par le code modal). Les informations fournies par les modes $\omega_n(\mathbf{k})$ ne sont indispensables que lorsque des modes étudiés se propagent très lentement (ou ne se propagent pas, comme les ZGV) (*cf.* [72]). Du point de vue historique, on peut constater que l'approche modale-$\omega_n(\mathbf{k})$ ne s'est pas (ou très peu) développée, alors que la communauté géophysicienne l'a étudiée et comparée à l'approche $k_n(\omega, \theta)$: les travaux d'E. Kausel et J. Park [43, 62, 61] n'ont apparemment pas eu de suite. Dans son article de 1994 [43] que nous considérons comme fondateur pour la formulation SAFE-$\omega_n(\mathbf{k})$, E. Kausel ne trouve comme autre intérêt que d'effectuer le calcul de champ directement dans le domaine temporel et en utilisant des nombres réels (*This strategy permits avoiding the use of complex algebra and allows obtaining the Green's functions directly in the time domain, even when the system has little or no damping*). Face à la contrainte de devoir obtenir le résultat sur l'ensemble de la grille numérique spatiale, cet avantage peut sembler bien maigre.

À nos yeux, le seul vrai avantage pratique de la formulation $\omega_n(\mathbf{k})$ face à la formulation $k_n(\omega, \theta)$ est la facilité avec laquelle l'anisotropie est traitée en 3D. Nous supposons qu'E. Kausel et J. Park ne l'ont pas vu ou n'ont pas cru bon de le relever car les milieux qu'ils considèrent sont isotropes dans le plan des interfaces. Il est à ce stade du manuscrit prématuré de défendre que la formulation $\omega_n(\mathbf{k})$ peut garder toute sa place par rapport à l'approche par ondes partielles pour traiter le cas du guide dans le vide, puisque cette dernière semble, au pire, un peu moins performante, tout en étant bien plus polyvalente. Re-soulignons qu'il est envisageable d'utiliser une formulation perturbative $\omega_n(\mathbf{k})$ pour optimiser la mesure des coefficients viscoélastiques homogénéïsés de la plaque à partir de signaux 3D. Toutefois, l'argument principal justifiant la formulation $\omega_n(\mathbf{k})$ sera donné au Chapitre 4 et laisse entrevoir la perspective de cette thèse qui, à nos yeux, est la plus intéressante : la possibilité de formuler des conditions aux frontières transparentes pour traiter des problèmes d'interactions d'ondes de Lamb avec des objets diffractants dans des guides anisotropes 3D.

Cette première partie se conclut donc en défendant deux alternatives plus adaptées que la méthode modale $k_n(\omega, \theta)$ pour traiter les cas de guides anisotropes 3D. Cependant, elles forcent à abandonner, d'une part, le régime harmonique, qui n'est parfois (mais pas toujours) qu'un intermédiaire de calcul visant à obtenir un signal temporel, et, d'autre part, le fait que la solution soit analytique en espace, ce qui est bien pratique pour formuler des méthodes hybrides. On peut ainsi se demander si ces deux méthodes directes peuvent se coupler facilement ou pas avec d'autres méthodes numériques. Ceci fait l'objet de la Partie II.

Deuxième partie

Diffraction par un objet

Introduction de la Partie II

Cette partie est consacrée à la possibilité d'utiliser les approches développées en partie I, valables pour un guide d'onde supposé invariant dans le plan, pour modéliser l'interaction d'une onde guidée avec un objet diffractant. Cet objet diffractant peut être un défaut du guide, par exemple un point de corrosion, un délaminage, *etc*, ou un rajout au guide, par exemple un raidisseur collé en surface, une inclusion élastique, un raccord entre deux plaques, *etc*. On considère que la taille de l'objet diffractant est relativement petite par rapport au domaine d'intérêt, ce qui motive le fait de vouloir utiliser une méthode semi-analytique pour traiter la propagation des ondes en dehors de la région d'interaction. Deux des principales méthodes numériques capables de traiter ces cas complexes sont la méthode des Éléments Finis et la méthode des Éléments Finis de Frontière.

Le Chapitre 3 présente comment une méthode de type Éléments Finis de Frontière (ou BEM pour son acronyme en anglais) peut être construite à partir du tenseur de Green du milieu stratifié tel que calculé dans le Chapitre 1. Il doit être considéré comme une ébauche dont l'intérêt, plus que de résoudre des problèmes d'interactions avec quelques défauts canoniques, est de mettre en évidence certains des ingrédients qui seront nécessaires à la construction optimale d'une méthode numérique couplant FEM et BEM. Ce qui fait la particularité de ce travail en regard de la très grande majorité de la littérature est que le tenseur de Green utilisé ici est calculé semi-numériquement par transformation de Fourier, et non analytiquement. La conséquence est que d'un point de vue numérique, les positions horizontale $\mathbf{x}$ et verticale z ne jouent pas du tout le même rôle. De ce fait, les contraintes techniques changent radicalement. Par exemple, en général, les fonctions de base utilisées sont polynomiales par morceaux et sont nulles en dehors d'un petit volume borné de manière à être facilement utilisables. *A contrario*, il sera question ici de fonctions de bases selon $\mathbf{x}$ à spectre le moins étendu possible, car le coût calculatoire est dominé par l'évaluation du tenseur de Green et la construction du (petit) système linéaire.

Certains travaux antérieurs à cette thèse ont déjà envisagé d'utiliser un tenseur de Green calculé par ondes partielles pour construire une BEM. La plupart se limitent à des défauts contenus dans le plan des interfaces, pour lesquels la formulation par ondes partielles est particulièrement adaptée (et performante). Ces références seront citées le moment venu. Cependant, très peu tendent à traiter des défauts plus généraux. Mentionnons les références [81, 82] auxquelles le présent travail s'apparente le plus, bien que les guides considérés soient acoustiques et non élastiques. Ces références ont plus de 15 ans, et aucune suite n'en semble avoir été donnée. Nous supposons que leurs conclusions ont été jugées décevantes par leurs auteurs. Ceci pousse E. Premat, au début de sa thèse [70], à considérer que la formulation par ondes partielles est mal adaptée et bien trop coûteuse pour mettre en œuvre une BEM, et ainsi à ne pas l'envisager comme candidate pour son travail. Le Chapitre 3 peut donc être vu comme une reprise des travaux de S. Taherzadeh, K.M. Li et K. Attenborough [81, 82] dans un contexte de CND par ondes guidées. Nous arrivons à des conclusions plus optimistes que ce que E. Premat [70] laisse entrevoir dans son étude bibliographique. Nous concluons que, certes, l'approche par ondes partielles est trop contraignante, et assez vite coûteuse, pour prétendre être la brique de base

d'une BEM générale, mais pensons en revanche que, du moins pour notre communauté mécanicienne, cette approche constitue probablement la meilleure candidate pour formuler un couplage BEM/FEM pour des guides anisotropes et enfouis, et ainsi pouvoir traiter à moindre coût un problème d'interaction extrêmement général dans l'espace de Laplace.

Concernant la méthode des Éléments Finis, méthode reine qui permet de traiter un milieu de propagation quelconque, la question qui se pose est celle de borner le domaine de calcul. Le Chapitre 4 prétend prendre part à cette discussion en donnant des perspectives à cette thèse. Plusieurs possibilités existent ; des études bibliographiques peuvent être trouvées dans les thèses [7, 84, 87]. Pour résumer, on peut ajouter des couches absorbantes ou des Perfectly Matched Layers (PML) en bords de domaine pour absorber les réflexions parasites. Ces approches ont un coût, principalement pour les faibles longueurs d'ondes, car la taille de la zone à mailler additionnelle peut parfois dépasser la taille de la zone d'intérêt. Les PML sont à ce sujet plus performantes que les couches absorbantes, mais peuvent donner lieu à des instabilités dans le cas de matériaux anisotropes ou de modes guidés rétropropagatifs. L'autre famille de possibilités est d'utiliser un opérateur d'impédance reliant $\mathbf{u}$ à $\boldsymbol{\sigma_\nu}$ sur la frontière, appelé « de frontière transparente », ou encore « Dirichlet to Neumann (DtN) ». Un tel opérateur est en général non-local, c'est-à-dire qu'il couple tous les nœuds proches de la frontière et densifie la matrice d'éléments finis. Il est également possible, en régime harmonique, qu'il conduise à un problème mal posé pour quelques fréquences particulières, qui sont des résonances locales du domaine considéré. La difficulté réside souvent dans la construction d'un tel opérateur. La thèse [7] en a donné une expression semi-analytique modale (les modes étant obtenus numériquement), dans le cas d'un guide d'onde unidirectionnel (cylindre ou plaque 2D), en utilisant les relations de bi-orthogonalité de Fraser. Le grand intérêt de cette expression est d'être capable de raisonner directement avec des coefficients modaux entrants et sortants. La sortie du calcul par éléments finis s'interprête alors en termes de coefficients modaux de transmission, réflexion, et conversion. La thèse [84] a étendu l'expression de l'opérateur aux cas 2D anisotropes, pour lesquelles les modes ne vérifient plus de relation de bi-orthogonalité, et a pu ainsi traiter le cas d'une interaction par un défaut 2D en incidence oblique (un raidisseur en surface d'une plaque d'aluminium ou de composite). Pour ce faire, une matrice de Gram a été introduite. Cependant, pour certaines fréquences et directions d'incidence, la matrice de Gram est mal conditionnée, voire non inversible, et l'approche ne permet pas de contrôler l'erreur numérique. Enfin, la thèse [87] a traité, entre autres, de cas de diffractions 3D pour des membranes anisotropes. À notre connaissance, la construction d'un opérateur DtN dans les cas complexes d'une interaction 3D dans une plaque anisotrope ou dans une plaque enfouie restent des problèmes non résolus. Le Chapitre 4 plaide pour une poursuite des travaux de cette thèse dans le but de construire des opérateurs DtN dans le domaine de Laplace et non de Fourier, et soutient que les approches modale $\omega_n(\mathbf{k})$ pour un guide anisotrope 3D dans le vide, ou par ondes partielles pour le cas général d'un guide 3D anisotrope et enfoui, sont probablement les meilleurs candidats dont nous disposons. L'approche modale $\omega_n(\mathbf{k})$ pourraît de plus permettre de constuire un opérateur DtN directement dans le domaine temporel, ce qui permettrait de considérer un défaut non-linéaire.

Chapitre 3

Cas de défauts simples : élements finis de frontière

Le but de ce chapitre est de montrer comment l'approche par ondes partielles décrite au Chapitre 1 peut être utilisée pour formuler une méthode d'éléments finis de frontières (BEM), et ainsi permettre de traiter des problèmes d'interactions avec des objets diffractants. Dans un premier temps, le principe de la méthode des éléments finis de frontière est rappelé. La méthode est ensuite implémentée en détails dans deux cas de défauts canoniques : une fissure horizontale, et une fissure verticale. Ceci permet d'estimer à quel point il est intéressant ou contraignant d'étendre l'implémentation au cas d'un défaut de géométrie plus arbitraire.

3.1 Principe vulgarisé des éléments finis de frontière

Les paragraphes qui suivent sont largement inspirés de [12, 70, 80]. Les notations et termes techniques leur sont empruntés. Le lecteur non averti pourra trouver dans la thèse [70] une introduction et une mise en œuvre très détaillées de la méthode des éléments finis de frontières, suivant la méthode de collocation, à partir de plusieurs fonctions de Green analytiques de l'acoustique. Une autre introduction pourra être trouvée dans la thèse [9], cette fois dans le domaine de l'élasticité, pour le tenseur de Green d'un milieu homogène infini. Dans ce dernier manuscrit, les terminologies « solution élémentaire de première / seconde espèce » sont employées pour « noyau de simple / double couche ». Le livre [80] est dédié à la SGBEM (Symmetric Galerkin Boundary Element Method) et traite de problèmes de mécanique, bien qu'il soit plus consacré à l'équation de la chaleur qu'à l'équation d'ondes. L'article de synthèse bibliographique donne un panorama plus complet des éléments finis de frontière et de la SGBEM que les références précédentes, notamment en ce qui concerne la régularisation des intégrales singulières et hypersingulières. Enfin, les articles [59, 60] traitent de la résolution de cas de défauts de Neumann par la théorie des potentiels.

3.1.1 Potentiels de simple et double couche

Selon le principe de Huygens-Fresnel, un objet diffractant de frontière Γ peut être vu comme une source secondaire dont l'amplitude est fonction du champ incident et telle que le champ total vérifie la condition aux limites imposée sur Γ. Cette condition aux limites fait intervenir les champs de déplacement et de contrainte normale de part et d'autre de la frontière. Il suffit donc de savoir calculer le champ rayonné par une source élémentaire dans le milieu privé de l'objet diffractant, c'est à dire le tenseur de Green du « milieu sain » ainsi

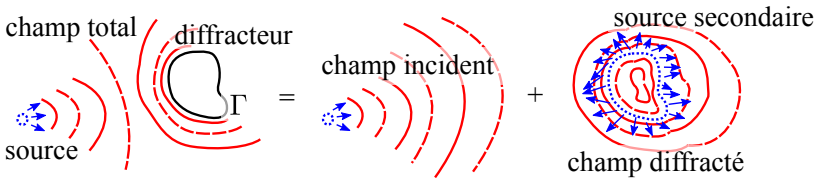


FIGURE 3.1 – Principe de Huygens-Fresnel : un défaut est remplacé par une distribution de potentiels de simple couche $\mathbf{f}_s$ et de double couche $\mathbf{f}_d$ rayonnant dans le milieu sans défaut.

que ses dérivées, pour inverser le problème et obtenir la distribution de sources secondaires en fonction du champ incident. Cette première étape réalisée, le champ secondaire est obtenu par un calcul direct et sommé au champ incident de manière à reconstruire le champ total. Deux formulations se distinguent [13, 70] : la formulation dite « directe », dans laquelle les inconnues sont la valeur du champ de déplacement et de contrainte de chaque côté de la frontière, et la formulation (équivalente) dite « indirecte » dans laquelle les inconnues sont les discontinuités de ces mêmes champs à travers la frontière. Dans la formulation dite « indirecte », ou « théorie des potentiels », que nous adoptons ici, on distingue deux types de sources secondaires : une contribution dite de potentiel de simple couche, notée $\mathbf{f}_s$, et une contribution dite de potentiel de double couche, notée $\mathbf{f}_d$. Ces potentiels et leurs noyaux ont été définis dans les équations (4, 5), en introduction de la partie I ; leur définition est rappelée ici. Notons $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_e)$ le vecteur normal à Γ au point $\boldsymbol{\xi}_e \in \Gamma$. Les distributions $\mathbf{f}_s$ et $\mathbf{f}_d$ rayonnent les champs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s(\boldsymbol{\xi}_r, t_r) &= \int_0^t \int_\Gamma \mathbf{g}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, t_r - t_e)\, \mathbf{f}_s(\boldsymbol{\xi}_e, t_e)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_e\, \mathrm{d}t_e, \\ \mathbf{u}_d(\boldsymbol{\xi}_r, t_r) &= \int_0^t \int_\Gamma \mathbf{g}_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_e)}}(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, t_r - t_e)\, \mathbf{f}_d(\boldsymbol{\xi}_e, t_e)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_e\, \mathrm{d}t_e, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ces champs vérifient l'équation d'onde de part et d'autre de la frontière et se distinguent par les singularités qu'ils présentent au travers de la frontière. En effet, au sens de la partie régulière, $\mathbf{f}_s$ produit un déplacement continu et un saut de contrainte normale au travers de Γ (discontinuités « statiques », voir figure 3.6) :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_s(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}_s(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}),s}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}),s}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\varepsilon}) &= -\mathbf{f}_s \end{aligned} \right. \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma,\ \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \perp \Gamma(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.2}$$

alors que, toujours au sens de la partie régulière, $\mathbf{f}_d$ produit un saut de déplacement et une contrainte normale continue au travers de Γ (discontinuités « cinématiques », voir figure 3.7) :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_d(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}_d(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{f}_d \\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}),d}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}),d}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right. \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma,\ \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \perp \Gamma(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.3}$$

De plus, $\mathbf{f}_s$ conduit à des termes $\mathbf{u}_s$ faiblement singuliers (intégrables) et $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu},s}$ singuliers (intégrales à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy), alors que $\mathbf{f}_d$ conduit à des termes $\mathbf{u}_d$ singuliers et $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu},d}$ hypersinguliers (intégrales à prendre au sens de la partie finie d'Hadamard). Le grand intérêt de raisonner avec $\mathbf{f}_s$ et $\mathbf{f}_d$ est que dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet (déplacement nul), $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$ alors que dans le cas d'une condition aux limites de Neumann (contrainte normale nulle) $\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$. Par la suite nous ne considérerons que des conditions aux limites de Neumann et notre seule inconnue sera la distribution dipolaire $\mathbf{f}_d$.

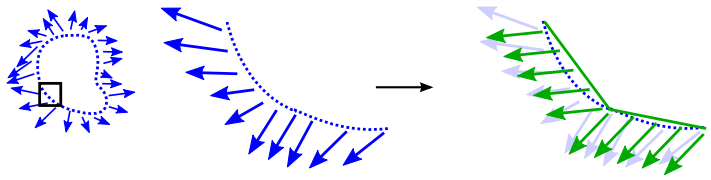


FIGURE 3.2 – Exemple d'approximation de $\mathbf{F}_d$ par des fonctions de bases de type segments

3.1.2 Discrétisation de la condition aux limites : méthode de collocation ou SGBEM

Pour une condition de Neumann, le champ de contrainte total normal à Γ doit être nul en tout point de la frontière $\boldsymbol{\xi}_r \in \Gamma$. L'équation intégrale à résoudre pour obtenir $\mathbf{f}_d$ en fonction du champ de contrainte incident $\boldsymbol{\sigma}^{inc}$ est :

$$\int_0^t \int_\Gamma \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_r)},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_e)}} \left(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, t_r - t_e\right) \mathbf{f}_d \left(\boldsymbol{\xi}_e, t_e\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_e \, \mathrm{d}t_e = -\boldsymbol{\sigma}^{inc}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_r)} \left(\boldsymbol{\xi}_r, t_r\right), \ \forall t_r > 0, \ \forall \boldsymbol{\xi}_r \in \Gamma. \tag{3.4}$$

La convolution temporelle peut être ôtée par transformation de Laplace $t \to s$ (ou de Fourier), et ainsi remplacée par une infinité d'équations intégrales spatiales à résoudre indépendamment les unes des autres :

$$\int_\Gamma \mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_r)},\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_e)}} \left(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, s\right) \mathbf{F}_d \left(\boldsymbol{\xi}_e, s\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_e = -\boldsymbol{\Sigma}^{inc}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_r)} \left(\boldsymbol{\xi}_r, s\right), \ \forall \boldsymbol{\xi}_r \in \Gamma, \forall s. \tag{3.5}$$

Quant à l'équation intégrale spatiale, le principe des éléments finis de frontière est d'approcher $\mathbf{F}_d$ sur un espace vectoriel de dimension finie formé de fonctions de base judicieusement choisies :

$$\mathbf{F}_d \left(\boldsymbol{\xi}, s\right) \approx \sum_{n=1}^{N} F_{d,n} \left(s\right) \boldsymbol{\psi}_n \left(\boldsymbol{\xi}\right). \tag{3.6}$$

Les inconnues sont à présent les coordonnées $F_{d,n}$. On note $\boldsymbol{\Sigma}^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\boldsymbol{\xi}, s\right)$ le champ de contrainte suivant $\boldsymbol{\alpha}$ produit par la n^{ieme} source de base :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\boldsymbol{\xi}_r, s\right) = \int_\Gamma \mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}_e)}} \left(\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_e, s\right) \boldsymbol{\psi}_n \left(\boldsymbol{\xi}_e\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_e. \tag{3.7}$$

L'équation (3.5) peut être, naïvement, échantillonnée en (au moins) N points $\boldsymbol{\xi}_n$ dits « de collocation » de manière à former un système linéaire ou aux moindres carrés de taille suffisante pour obtenir les N inconnues :

$$\sum_{j=1}^{N} F_{d,j} \left(s\right) \boldsymbol{\Sigma}^{(j)}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\boldsymbol{\xi}_n, s\right) = -\boldsymbol{\Sigma}^{inc}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\boldsymbol{\xi}_n, s\right), \ \forall n = 1..N. \tag{3.8}$$

Cette approche porte le nom de méthode de collocation. Une autre possibilité est d'imposer que (3.5) soit vérifiée en moyenne sur N intervalles. Lorsque ces intervalles sont les supports des fonctions de base et que les conditions intégrales imposées sont pondérées par ces mêmes fonctions de bases, l'approche porte le nom, en anglais, de Symmetric Galerkin Boundary Element Method (SGBEM). Elle est connue pour donner lieu à un système linéaire symétrique, plus favorable à la résolution numérique, et à une erreur orthogonale à l'espace d'approximation. En conséquence, la convergence est meilleure que pour la méthode de collocation.

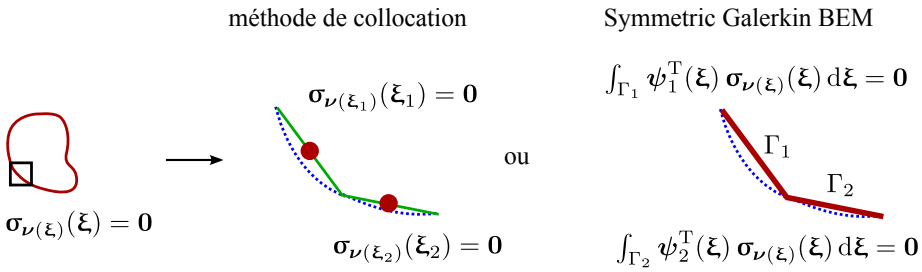


FIGURE 3.3 – La condition aux limites peut être discrétisée par la méthode de collocation ou par la SGBEM (Symmetric Galerkin Boundary Element Method)

Voici comment elle se traduit mathématiquement :

$$\sum_{j=1}^{N} F_{d,j} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = -\int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{inc}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\ \forall n = 1..N. \tag{3.9}$$

Dans tous les cas, on se ramène à la construction d'un système linéaire $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Nous adopterons par la suite l'une ou l'autre des formulations ; ceci sera reprécisé le moment venu. Pour se fixer les idées, du point de vue du Chapitre 1, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}(\boldsymbol{\xi}, s)$ est la sortie numérique du code de calcul ayant pris pour entrée la source $\boldsymbol{\psi}_n(\boldsymbol{\xi})$. Bien entendu, il n'est pas question de calculer séquentiellement $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, s)$, puis $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, s)$, *etc* : la première optimisation à faire est de modifier (1.70) pour travailler avec un système « multi-second membre » et n'effectuer qu'une seule fois la décomposition LU de la matrice globale (1.71).

Deux remarques, avant de poursuivre :

1. l'approche employée pour calculer $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}(\boldsymbol{\xi}, s)$ doit impérativement être performante en régime non-établi, faute de quoi les termes $\int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ seront erronés, et en particulier les termes diagonaux (hypersinguliers) $\int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ qui sont dominants. C'est pourquoi l'approche par ondes partielles du Chapitre 1 sera utilisée, et non l'approche modale du Chapitre 2, même dans le cas d'un guide fermé à basse fréquence-épaisseur.
2. Le cas d'un défaut horizontal est un cas particulier très favorable au cas général d'un défaut orienté, car dans ce dernier cas, à cause de la discrétisation de l'intégrale de Fourier spatiale, la localité spatiale est impossible et une frontière a une épaisseur non nulle à l'intérieur de laquelle les champs sont (quasi) singuliers.

3.2 Fissure plane

En guise d'introduction aux paragraphes suivants, faisons référence aux nombreux travaux ([28, 46, 47, 91] par exemple) qui ont étudié le problème bidimensionnel de l'interaction d'un faisceau monochromatique avec une ou plusieurs fissures planes au sein d'un milieu semi-infini ou stratifié. Ces travaux se servent du caractère canonique du défaut pour utiliser une décomposition de $\mathbf{f}_d$ sur une base de polynômes orthogonaux, et se servent du caractère plan pour résoudre l'équation intégrale hypersingulière directement dans l'espace de Fourier $(\mathbf{k}, z, \omega)$. Selon les travaux, des milieux plus ou moins complexes sont considérés où le tenseur de Green est connu analytiquement ou numériquement. D'autres références peuvent être trouvées dans l'article de synthèse bibliographique [15].

Citons également les travaux de N. Bedrici, P. Gatignol, C. Potel, B. Vacossin et J.F. de Belleval qui ont utilisé l'approximation de Kirchhoff [88] pour résoudre facilement le cas d'une fissure plane. Ils ont mis en

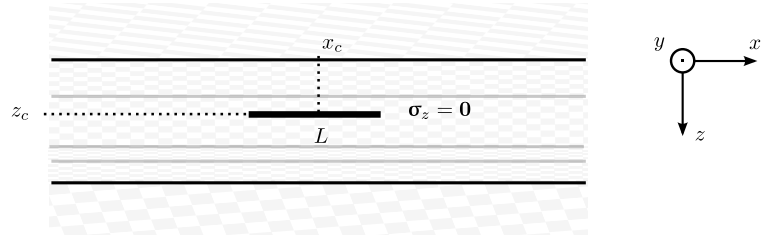


FIGURE 3.4 – Schéma d'une fissure plane de longueur L centrée en (x_c, z_c). Une condition de Neumann est imposée le long de ses lèvres. La fissure peut être située à l'intérieur d'une couche ou à l'interface entre deux couches.

œuvre dans [10, 9] un processus itératif pour dépasser le cadre de l'approximation. Le principe du processus itératif est similaire aux séries de Debye, c'est-à-dire que dans un premier temps, seul le champ incident est considéré pour l'interaction avec le diffracteur, le champ réfracté par les interfaces de la plaque étant négligé puis réinjecté à l'étape suivante comme champ incident, et ainsi de suite. Enfin, ils ont dans [9] étendu leur processus itératif en implémentant un couplage entre un code de calcul par ondes partielles et un code d'éléments finis de frontières (utilisant le noyau de double couche analytique d'un milieu homogène dans l'espace $(\mathbf{x}, z, \omega)$) pour considérer des défauts de forme arbitraire. L'inconvénient de leur approche est que la convergence du processus itératif dépend de manière cruciale de la rupture d'impédance entre le milieu stratifié et le milieu semi-infini l'environnant. Plus celle-ci est grande, plus il est nécessaire d'itérer, et le coût numérique peut diverger pour un guide dans le vide lorsqu'une résonance de défaut est excitée.

Citons enfin plus particulièrement les travaux de E. Glushkov, N.V. Glushkova, A. Ekhlakov et E. Shapar [31, 32], inspirés de [17], desquels l'approche mise en œuvre dans cette section se rapproche plus. Ces auteurs considèrent un défaut 3D plan, de forme quelconque dans le plan, et définissent un maillage sur une base de splines bidimensionnels. Ils se limitent à des milieux isotropes canoniques : un milieu élastique homogène dans [31] et avec une interface plane avec du vide dans [32]. Dans les deux cas, le noyau utilisé est le noyau de double couche du milieu élastique homogène, dont l'orientation est définie par le plan du défaut, et est calculé via les ondes partielles. Pour tenir compte de l'interface plane dans [32], ces auteurs mettent en œuvre un processus itératif basé sur la même idée que N. Bedrici *et al.* dans [88, 10, 9]. Par conséquent, cette approche peut se révéler problématique à cause de sa convergence.

3.2.1 Définition du problème et choix des fonctions de base

Considérons une fissure de longueur L, parallèle aux interfaces de la plaque (voir figure 3.4). Le centre de la fissure est noté (x_c, z_c). Nous imposons une condition de Neumann le long de ses lèvres, c'est-à-dire qu'en dehors du voisinage des pointes la contrainte normale $\boldsymbol{\sigma}_z$ s'annule continûment. Nous calculerons donc (3.7) en utilisant $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_z, \boldsymbol{\Sigma}_z}$. Les pointes devraient faire l'objet d'un traitement spécial. Celui-ci n'a pas été entrepris dans cette thèse, ce qui est un facteur limitant. À ce sujet, plusieurs possibilités sont présentées dans [31], celle retenue faisant usage du comportement asymptotique connu près des pointes pour ne chercher que la partie régulière de $\mathbf{F}_d$, accélérant ainsi la convergence.

En général, on choisit des fonctions interpolantes qui sont polynomiales par morceaux sur un intervalle et nulles en dehors, pour leur simplicité d'utilisation. On peut privilégier des fonctions peu régulières (C^0 ou C^1 par morceaux) et utiliser de nombreux points de discrétisation, ou au contraire privilégier des fonctions plus régulières pour considérer un maillage moins dense. L'avantage non négligeable de cette seconde stratégie est que les fonctions de base suffisamment régulières ont un effet de « régularisation [12] » des intégrales à calculer, ce qui a pour conséquence que la partie principale de Cauchy pour les intégrales singulières (fonctions

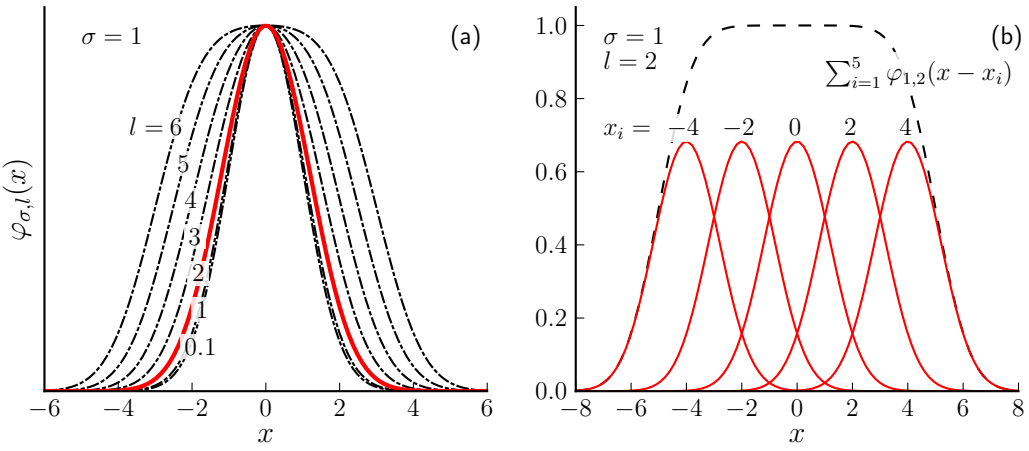


FIGURE 3.5 – (a) fonction $\varphi_{\sigma,l}$ pour différentes valeurs du quotient l/σ. Le support de $\varphi_{\sigma,l}$ tronquée à 10^{-m} est environ $[-l/2 - 2\sqrt{m}\,\sigma, l/2 + 2\sqrt{m}\,\sigma]$. La courbe correspondant au quotient $l/\sigma = 2$ est tracée en trait continu rouge. (b) plusieurs fonctions $\varphi_{1,2}$ translatées par des multiples de l. La somme de ces fonctions, tracée en traits pointillés, est quasiment une porte rectangulaire.

de base au moins C^1) et la partie finie d'Hadamard pour les intégrales hypersingulières (fonctions de base au moins C^2) peuvent se calculer numériquement.

Dans notre cas, notre contrainte est surtout le coût calculatoire (en régime non-établi) qu'implique l'utilisation de telle ou telle fonction de base. Nous allons nous restreindre pour la dimension x à des fonctions dont le spectre est le moins étendu possible. Il n'est donc pas question d'utiliser des portes rectangulaires, dont le spectre décroît en $1/x$, ni même des splines cubiques, dont le spectre décroît en $1/x^3$. On utilisera ainsi les fonctions de bases élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_x(x,z) &= \delta(z)\,\varphi_{\sigma,l}(x)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\psi}_y(x,z) &= \delta(z)\,\varphi_{\sigma,l}(x)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\psi}_z(x,z) &= \delta(z)\,\varphi_{\sigma,l}(x)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où nous avons introduit $\varphi_{\sigma,l}$ la fonction

$$\varphi_{\sigma,l} = \exp\left(-\frac{\bullet^2}{2\,\sigma^2}\right) * \Pi\left(\frac{\bullet}{l}\right) \propto \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{l/2+\bullet}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{l/2-\bullet}{\sqrt{2}\,\sigma}\right), \tag{3.11}$$

qui est une porte rectangulaire de largeur l convoluée par une Gaussienne d'ouverture σ, et dont la transformée de Fourier vaut

$$\hat{\varphi}_{\sigma,l}(k) \propto \exp\left(-\frac{k^2\,\sigma^2}{2}\right)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\,l}{2}\right). \tag{3.12}$$

Pour se fixer les idées, le champ rayonné par un potentiel de simple ou de double couche ayant pour forme $\boldsymbol{\psi}_x$ ou $\boldsymbol{\psi}_z$ est tracé en figures 3.6 et 3.7. Le paramètre σ contrôle le coût numérique du calcul de (3.7) et sera choisi de l'ordre d'une fraction de la plus petite longueur d'onde. σ contrôle également le niveau d'approximation

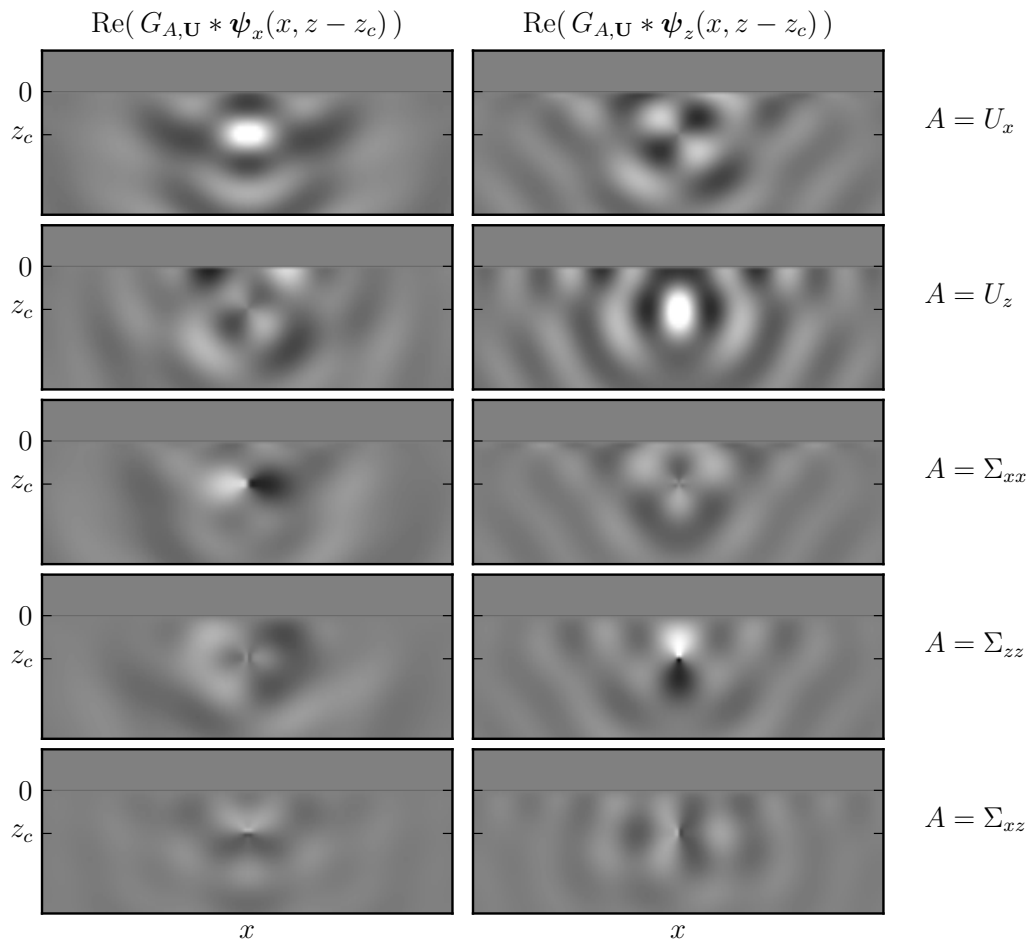


FIGURE 3.6 – Champ rayonné par un potentiel de simple couche de forme $\boldsymbol{\psi}_x$ (figures de gauche) ou $\boldsymbol{\psi}_z$ (figures de droite) situé près d'une interface vide/aluminium, pour le paramètre de Laplace $s = 1.0 + 13.5\,\mathrm{i}\,rad\,MHz$. Au travers de la source le champ de déplacement est continu et le champ de contrainte est discontinu. Un potentiel de simple couche intervient dans une condition aux limites de Dirichlet.

au voisinage des pointes de la fissure, car plus σ est faible, plus l'addition de fonctions de base translatées tend vers une porte rectangulaire abrupte. Le paramètre l contrôle la densité de degrés de liberté et sera choisi de l'ordre de $l \approx \sigma$. Le prix à payer pour ces fonctions dont le spectre est à décroissance rapide est qu'elles sont à support non borné et non-interpolantes. Néanmoins, leur décroissance exponentielle permet de les considérer comme nulles en dehors d'un support relativement modeste $[-l/2 - 2\sqrt{m}\,\sigma, l/2 + 2\sqrt{m}\,\sigma]$. La conséquence heureuse est que ces fonctions sont extrêmement régulières (C^∞) et qu'elles régulariseront les termes hypersinguliers (3.9), qui ne seront donc pas discutés dans cette section. La fonction $\varphi_{\sigma,l}$ est illustrée en figure 3.5 pour quelques valeurs de l/σ. L'avantage que $\varphi_{\sigma,l}$ présente par rapport à d'autres fonctions à spectre à décroissance rapide est que grâce à la linéarité du produit de convolution, il est facile de construire par translation différentes fonctions de base dont la somme vaut (quasiment) 1 sur tout un plateau.

Les fonctions de base $\boldsymbol{\psi}_{n,\alpha}$ sont ensuite construites par translation ($\alpha = x, y, z$). Les premières et dernières fonctions sont centrées de manière à ce que les extrémitées de la fissure correspondent aux extrémités de la porte rectangulaire :

$$\boldsymbol{\psi}_{1,\alpha}(x, z) = \boldsymbol{\psi}_\alpha \left(x - x_c + \frac{L - l}{2}, z - z_c \right), \tag{3.13}$$

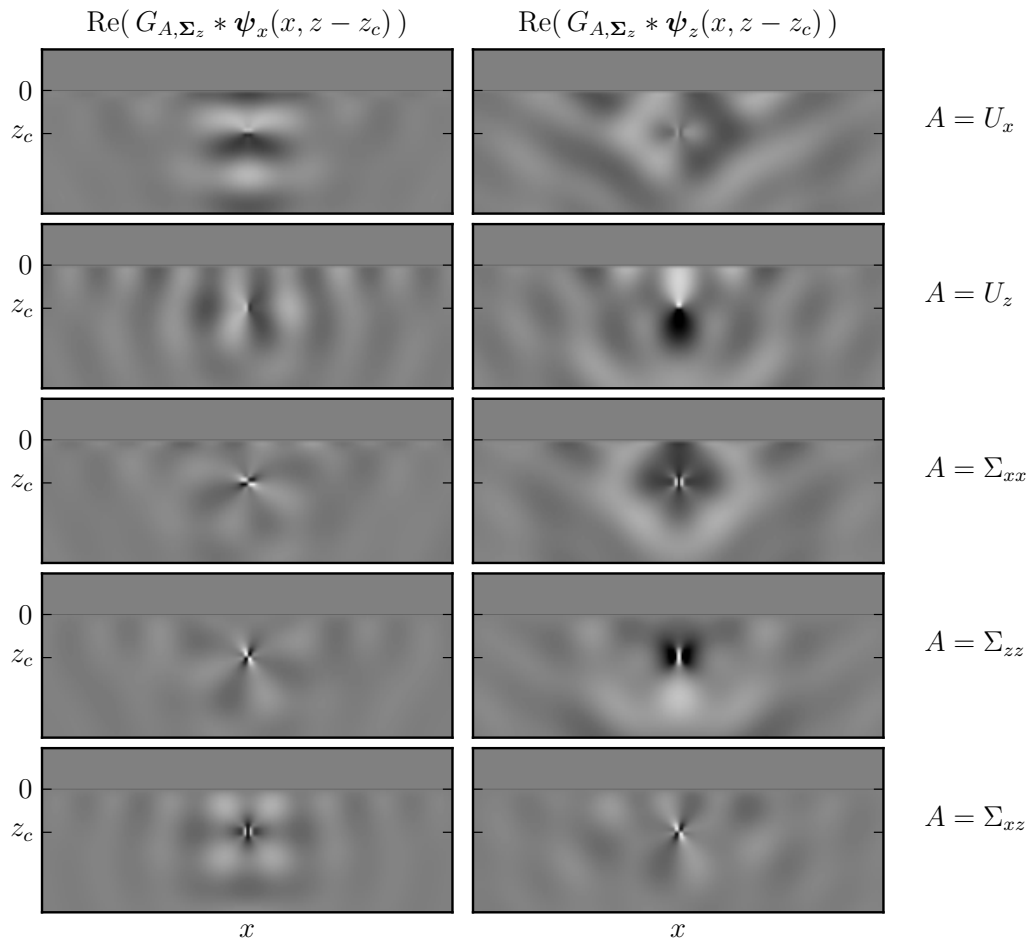


FIGURE 3.7 – Champ rayonné par un potentiel de double couche de forme $\boldsymbol{\psi}_x$ (figures de gauche) ou $\boldsymbol{\psi}_z$ (figures de droite) situé près d'une interface vide/aluminium, pour le paramètre de Laplace $s = 1.0 + 13.5\,\mathrm{i}\,rad\,MHz$. Au travers de la source le champ de déplacement est discontinu et le champ de contrainte normale $\mathbf{\Sigma}_z$ varie fortement tout en ayant une partie principale continue. Un potentiel de double couche intervient dans une condition aux limites de Neumann.

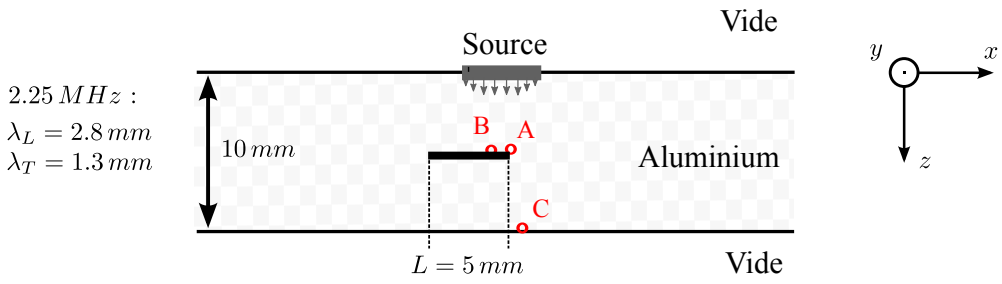


FIGURE 3.8 – Schéma de la plaque d'aluminium endommagée par une fissure horizontale. La fissure est centrée en $(x_c, z_c) = (0, 5.1\,mm)$. Les signaux aux trois points A $(2.498, 5.052\,mm)$, B $(0.998, 5.095\,mm)$ et C $(3.0, 10.0\,mm)$ sont relevés et comparés en figure 3.10 à un calcul effectué avec un code Éléments Finis.

$$\boldsymbol{\psi}_{N,\alpha}(x,z) = \boldsymbol{\psi}_{\alpha}\left(x - x_c - \frac{L-l}{2}, z - z_c\right), \tag{3.14}$$

et les fonctions voisines sont translatées de $l = L/N$:

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1,\alpha}(x,z) = \boldsymbol{\psi}_{n,\alpha}(x-l,z). \tag{3.15}$$

L'échantillonnage (quasi) optimal utilisé, qui assure de respecter le critère de Nyquist-Shannon à une précision de 10^{-m}, est $k_{max} = \sqrt{2\,m}/\sigma$. Tous les calculs ont été effectués avec $m = 3$. Les termes $\boldsymbol{\Sigma}^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}}(x, z_c, s)$ sont obtenus numériquement à l'altitude z_c pour toutes les valeurs de x de la grille d'échantillonnage. Les termes de la matrice du sytème linéaire à résoudre sont :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}_{n,\alpha}(\boldsymbol{\xi})\ \boldsymbol{\Sigma}^{(j)}_{z}(\boldsymbol{\xi})\ \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\sigma,l}(x - x_n)\ \Sigma^{(j)}_{\alpha z}(x, z_c)\ \mathrm{d}x \\ &\approx \int_{-l/2-2\sqrt{m}\,\sigma}^{l/2+2\sqrt{m}\,\sigma} \varphi_{\sigma,l}(x)\ \Sigma^{(j)}_{\alpha z}(x + x_n, z_c)\ \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où x_n désigne le centre de la fonction de base $\boldsymbol{\psi}_{n,\alpha}$. Une interpolation par splines cubiques est effectuée entre les points de la grille d'échantillonnage de manière à calculer numériquement ces quantités en utilisant la règle des 3/8 de Simpson, en général sur 13 points.

3.2.2 Plaque d'aluminium épaisse dans le vide : validation par éléments finis

Prenons pour premier exemple un cas simple ; nous effectuerons également le calcul avec un code Éléments Finis. Le calcul par Éléments Finis sera réalisé via une transformée de Laplace, ce qui évite de devoir utiliser des conditions d'impédance ou d'absorption aux bords du domaine si ceux-ci sont suffisament éloignés de la zone d'intérêt. Soit une plaque d'aluminium dans le vide, d'épaisseur $10\,mm$ (voir figure 3.8), et de constantes élastiques identiques à l'aluminium décrit dans le paragraphe 1.5.3. Nous y plaçons une fissure de longueur $L = 5\,mm$, centrée en $(x_c, z_c) = (0, 5.1\,mm)$. La plaque est insonifiée par un transducteur situé en surface, et décrit par la source suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_0(x,y,t) = \varphi_{\sigma_s,l_s}(x - x_0)\ \sin(\omega_0\,t)\ \exp\left(-\frac{\omega_0^2\,t^2}{2\,n_c^2}\right)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = 2.25\,MHz$, $n_c = 5$, $x_0 = 2\,mm$, $\sigma_s = 0.5\,mm$, $l_s = 4\,mm$. Notons que la fréquence-épaisseur est de l'ordre de $22.5\,MHz\,mm$, c'est-à-dire beaucoup trop pour pouvoir envisager une approche modale. La dynamique sera principalement une dynamique d'ondes de

volume. À $2.25\,MHz$, les longueurs d'onde des ondes longitudinales λ_L et transversales λ_T dans l'aluminium valent $\lambda_L = 2.8\,mm$ et $\lambda_T = 1.3\,mm$. Ce problème est relativement académique mais peut aussi représenter une situation industrielle : lorsque des rouleaux métaliques (aluminium ou acier par exemple) sont, durant le processus de fabrication, aplatis dans des laminoirs, des fissures horizontales peuvent être induites. Les ondes élastiques guidées peuvent permettre de contrôler in situ et en temps réel la présence de ces fissures.

Le problème étant plan, et le milieu étant isotrope, la composante y du champ sera nulle, et seules les fonctions de base $\boldsymbol{\psi}_{n,x}$ et $\boldsymbol{\psi}_{n,z}$ seront nécessaires. Nous maillons la fissure en utilisant les paramètres $\sigma = 0.025\,mm \approx \lambda_T/52$ et $N = 200$ (et donc $l = 0.025\,mm = \sigma$). La grille de calcul est la suivante : $x \in]-20\,..\,20\,mm,\ 1766]$ et $t \in [0\,..\,7\,\mu s,\ 62[$. Le temps de calcul est de $8''$ ($10'$ par Éléments Finis). Les résultats sont présentés en figure 3.9 et comparés à un calcul effectué dans une plaque sans fissure. Trois points particuliers (A, B et C, *cf.* figure 3.8) sont choisis pour mesurer l'accord avec un calcul effectué par Éléments Finis. Ces comparaisons sont présentées en figure 3.10. Comme attendu, le désaccord est le plus grand pour le point A, choisi en extrémité de fissure. Cependant, ce désaccord ne dépasse pas 6%. Pour les deux autres points, le désaccord est de 1% (point B, situé sur la fissure) et 0.1% (point C, situé loin de la fissure), ce qui nous permet de valider l'approche.

3.2.3 Plaque multicouche composite dans l'eau insonifiée en régime d'ondes guidées

Prenons pour second exemple un cas plus complexe et plus à même de représenter une situation d'intérêt en CND. Soit une plaque constituée de 8 plis de carbone-époxy immergée dans de l'eau, d'épaisseur $4\,mm$ (voir figure 3.11). Mise à part l'épaisseur des plis, cette plaque est identique à la plaque (dissipative) décrite au paragraphe 1.5.4. Nous y plaçons une fissure de longueur $L = 1\,cm$, centrée en $(x_c, z_c = z_6) = (10, 0.3\,cm)$, à l'interface des couches #6 et #7. La plaque est insonifiée par un transducteur situé dans l'eau et incliné par rapport au plan de la plaque. Le transducteur est décrit par la source suivante (*cf.* paragraphe 1.5.3 pour une explication des paramètres) :

$$\mathbf{f}_0\,(x,z,t) = \Pi\left(\frac{2\,(z-z_f)}{d\,\sin(\theta)}\right)\,\exp\left(-\frac{[x-x_0(z)]^2}{2\,\sigma_x^2}\right)\,\sin(\omega_0\,t)\,\exp\left(-\frac{\omega_0^2\,t^2}{2\,n_c^2}\right)\,\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\0\\\cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = 150\,kHz$, $n_c = 5$, $\sigma_x = 0.35\,cm$, $z_f = -2\,cm$, $d = 3\,cm$, $\theta = 25$. La fréquence-épaisseur est de l'ordre de $0.6\,MHz\,mm$; la dynamique sera principalement une dynamique modale limitée aux trois modes fondamentaux. À $150\,kHz$, les longueurs d'onde des trois modes quasi-symétrique λ_{S_0}, quasi-transverse λ_{SH_0} et quasi-antisymétrique λ_{A_0} de la plaque dans le vide valent $\lambda_{S_0} = 3\,cm$, $\lambda_{SH_0} = 2\,cm$ et $\lambda_{A_0} = 1\,cm$. L'inclinaison est choisie pour sélectionner principalement le mode quasi-symétrique S_0, qui est celui qui se propage en s'atténuant le moins. Cependant, l'excitation produit également un paquet incident quasi-transverse SH_0, de moindre amplitude.

Le problème est invariant suivant y, mais à cause de l'anisotropie la composante y du champ ne sera pas nulle, et les trois jeux de fonctions de base $\boldsymbol{\psi}_{n,x}$, $\boldsymbol{\psi}_{n,y}$ et $\boldsymbol{\psi}_{n,z}$ seront nécessaires. Nous maillons la fissure en utilisant les paramètres $\sigma = 0.25\,mm \approx \lambda_{A_0}/40$ et $N = 44$ (et donc $l \approx 0.23\,mm \approx \sigma$). La grille de calcul est la suivante : $x \in]-35\,..\,35\,cm,\ 3088]$ et $t \in [0\,..\,100\,\mu s,\ 60[$. Le temps de calcul est de $1'$. Les résultats sont présentés en figure 3.12 et comparés à un calcul effectué dans la plaque sans fissure, pour un instant choisi en fin de simulation. L'effet de l'interaction avec la fissure est de produire principalement des paquets modaux A_0 et SH_0, ainsi qu'une résonance de fissure. Le mode A_0 rayonne efficacement son énergie dans l'eau et peut être détecté par un récepteur situé dans l'eau. Ces résultats peuvent être qualitativement rapprochés de ceux

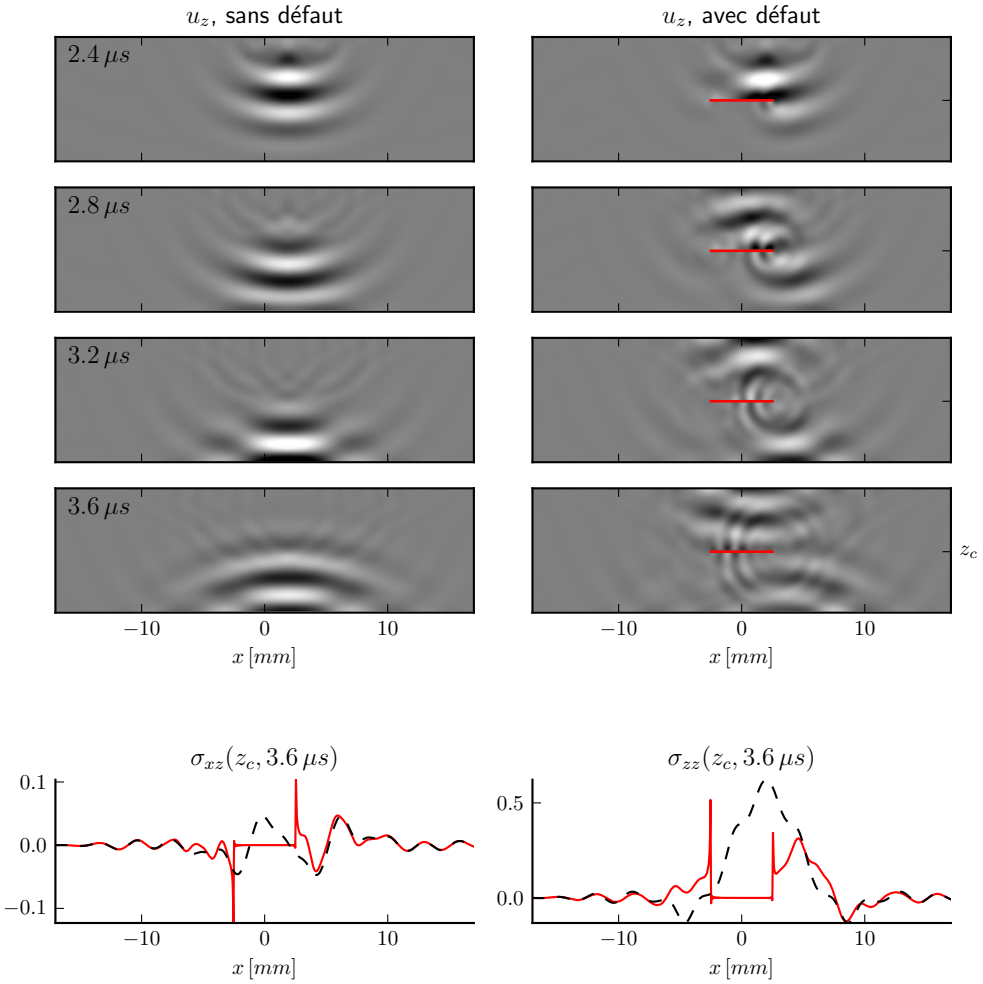


FIGURE 3.9 – En haut : champ de déplacement u_z pour quelques instants choisis. La fissure est représentée par un trait horizontal rouge. En bas : champ de contrainte normale à la fissure $\boldsymbol{\sigma}_z$ en fonction de x, à l'altitude de la fissure z_c et pour un instant choisi. Le cas de la plaque fissurée est en trait continu rouge et le cas de la plaque saine est en trait noir pointillé. Comme attendu, ce champ est (quasiment) nul le long de la fissure et diverge près des pointes.

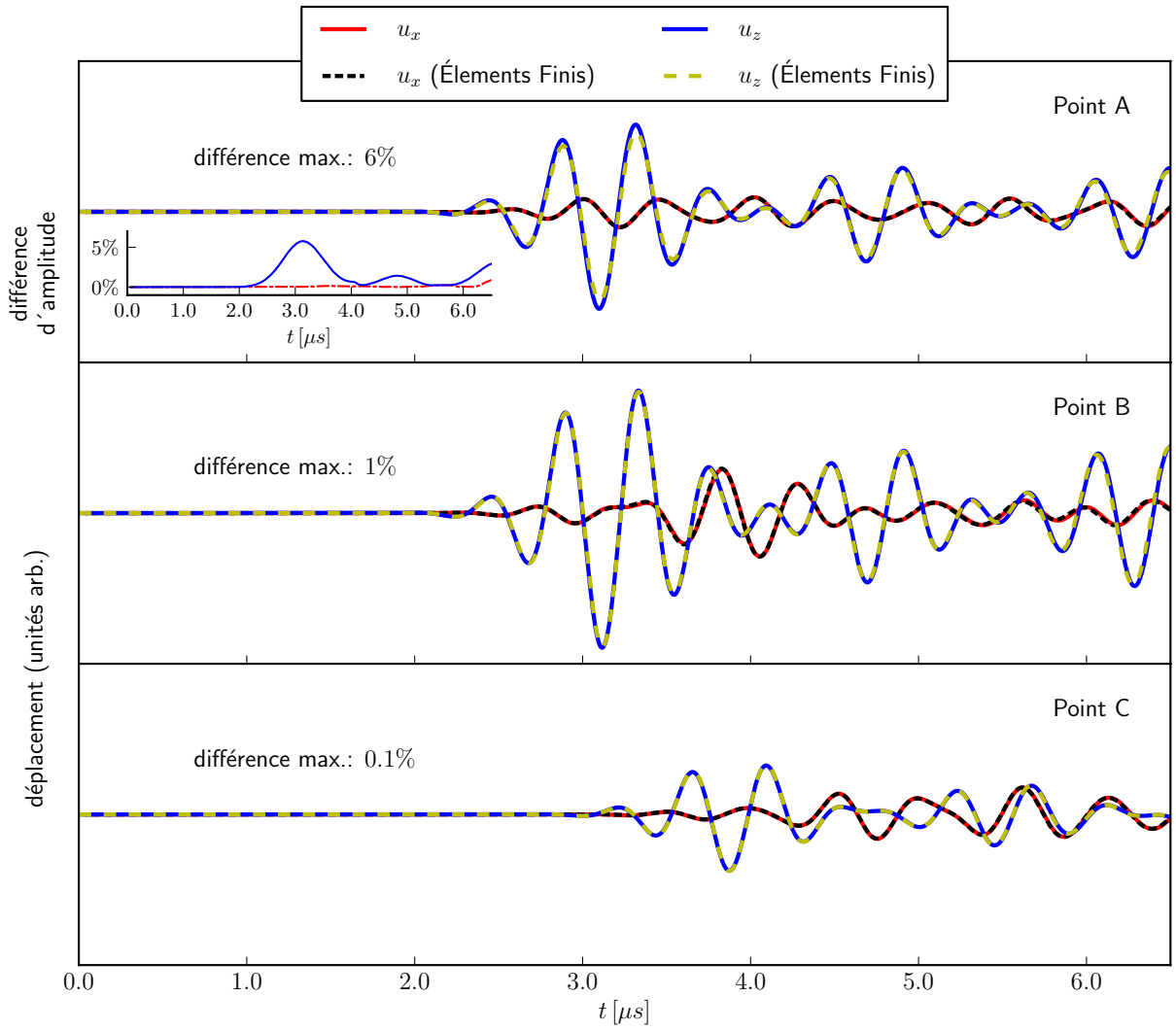


FIGURE 3.10 – Signaux temporels aux points A, B et C (*cf.* figure 3.8) : comparaison avec un calcul par Éléments Finis. L'écart est mesuré par la différence relative des signaux analytiques et est tracé en fonction du temps pour le point A (écart suivant u_x en trait pointillé rouge et suivant u_z en trait continu bleu). Comme attendu, l'écart est maximal près des pointes (point A), et est moindre ailleurs.

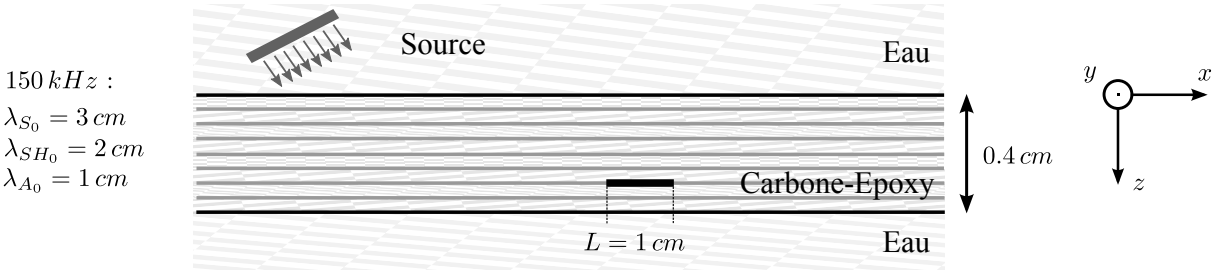


FIGURE 3.11 – Schéma de la plaque de carbone-époxy endommagée par une fissure horizontale. La fissure est centrée en $(x_c, z_c = z_6) = (10, 0.3\,cm)$.

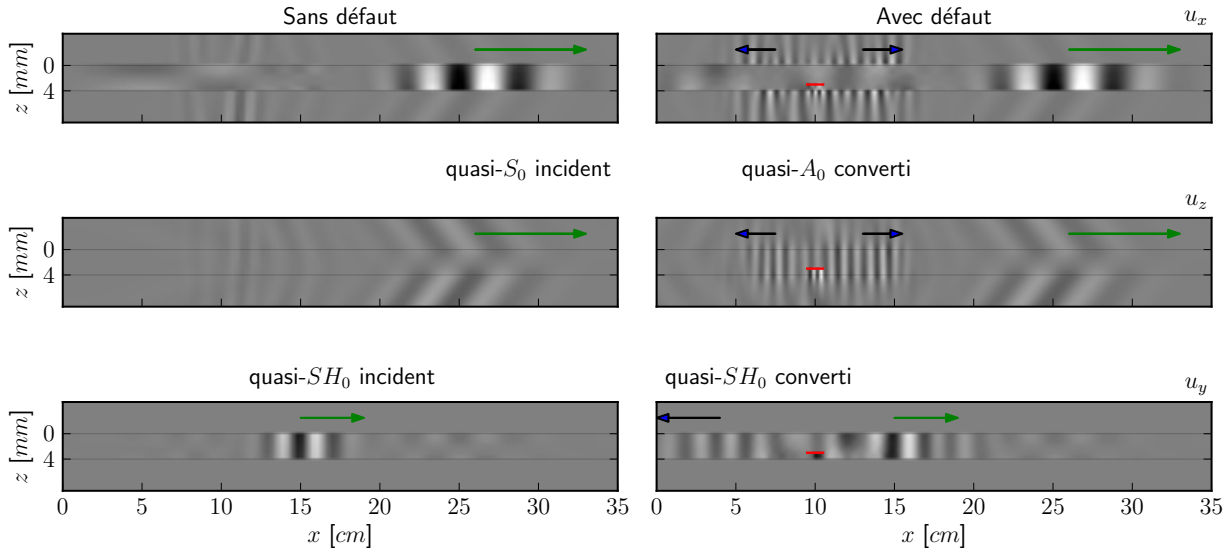


FIGURE 3.12 – Plaque de carbone-époxy endommagée par un défaut d'adhésion entre les couches #6 et #7 : les trois composantes du champ de déplacement après interaction des paquets incidents avec la fissure. La fissure est représentée par un trait horizontal rouge. L'effet de l'interaction avec la fissure est de produire principalement des paquets modaux A_0 et SH_0, ainsi qu'une résonance de fissure. Le mode A_0 rayonne efficacement son énergie dans l'eau et peut être détecté par un récepteur situé dans l'eau.

publiés dans [38].

3.3 Fissure verticale

Comme pour la fissure horizontale, il y a pour la fissure verticale toute une littérature qui montre comment le problème peut être résolu en tirant parti du caractère canonique et en utilisant les familles de polynômes orthogonaux ([19, 28, 54] par exemple). Nous nous attachons cependant à garder une formulation généralisable. Rappelons que les approches du type [32] qui consistent à utiliser le noyau de double couche du milieu homogène tourné dans le repère de la fissure dans l'espace $\mathbf{k}, z, s$, ou du type [9] qui consistent à utiliser le noyau de double couche analytique dans l'espace $\mathbf{x}, z, s$ du milieu homogène, puis à mettre en œuvre un processus itératif pour tenir compte des interfaces, posent des problèmes de convergence et ne sont pas retenues ici.

3.3.1 Définition du problème et choix des fonctions de base

Considérons à présent que la fissure est verticale (*cf.* figure 3.13). Pour simplifier, nous supposerons qu'elle est contenue dans une seule couche et qu'elle ne touche aucune interface, de manière à ne former aucun coin. En effet, un point anguleux pourraît nécessiter un traitement particulier (voir [33] par exemple). Nous calculerons (3.7) en utilisant $\mathbf{G}_{\mathbf{\Sigma}_x,\mathbf{\Sigma}_x}$.

La grande différence avec le cas horizontal est que l'on ne profite plus de l'analyticité selon z du tenseur de Green pour poser la condition aux limites. À cause de la discrétisation de l'intégrale de Fourier spatiale, les notions de localité et de ponctualité en x sont perdues. Il faut se résoudre à ce que le potentiel de double couche $\mathbf{F}_d$ ait une épaisseur non-nulle à l'intérieur de laquelle le champ ne vérifie pas l'équation d'onde mais est singulier, et que la condition de Neumann ne soit pas imposée à la seule valeur x_c de la position latérale,

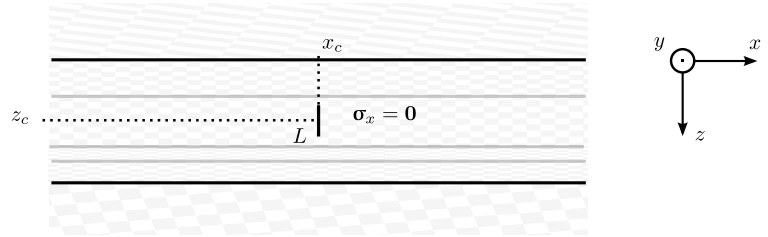


FIGURE 3.13 – Schéma d'une fissure verticale. Une condition de Neumann est imposée le long de ses lèvres. Pour simplifier, la fissure est supposée contenue dans une seule couche et ne touche pas d'interface, de manière à ne pas former de coin.

mais en moyenne sur toute l'épaisseur de la fissure. Il y a donc un passage à la limite supplémentaire pour espérer converger vers la solution. Ce passage à la limite coûte bien entendu très cher et le but sera de s'en tenir le plus loin possible. Ceci conduira à traiter les intégrales selon x différemment de la section précédente. En revanche, il est à présent possible d'utiliser des fonctions de base polynomiales et interpolantes. Voici les fonctions de base élémentaires qui seront utilisées :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_x(x,z) &= \Lambda_{a,b,c}(z)\ \varphi_\sigma(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\psi}_y(x,z) &= \Lambda_{a,b,c}(z)\ \varphi_\sigma(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\psi}_z(x,z) &= \Lambda_{a,b,c}(z)\ \varphi_\sigma(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où φ_σ désigne la fonction $\varphi_{\sigma,l}$ définie précédemment dans (3.11) dans le cas limite où $l \to 0$, c'est-à-dire une fonction gaussienne d'ouverture σ, et $\Lambda_{a,b,c}$ la fonction porte triangulaire

$$\Lambda_{a,b,c}(z) = \begin{cases} 0 & z \leqslant a \\ \frac{z-a}{b-a} & a \leqslant z \leqslant b \\ \frac{c-z}{c-b} & b \leqslant z \leqslant c \\ 0 & z \geqslant c. \end{cases} \tag{3.20}$$

Par abus de notation nous nous autorisons à désigner par $\Lambda_{a,a,c}$ et $\Lambda_{a,c,c}$ les fonctions demi-porte triangulaire obtenues en faisant tendre $a \to b$ ou $b \to c$. Ces fonctions sont utilisées aux extrémités de la fissure (*cf.* figure 3.14). À l'intérieur, deux fonctions voisines se chevauchent de manière à ce que leur somme vaille 1. Un maillage uniforme est utilisé, avec un espacement constant égal à $L/(N-1)$.

Les termes $\boldsymbol{\Sigma}^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,z,s)$ sont obtenus numériquement à toutes les altitudes z_j des centres des fonctions de base, pour toutes les valeurs de x de la grille d'échantillonnage. Les termes de la matrice du système linéaire sont cette fois définis de manière intermédiaire : la variable z est traitée par colocation, c'est-à-dire que la condition aux limites sera discrétisée en un certain nombre d'altitudes (choisies comme étant les centres z_j des éléments), alors que la variable x, qui ne devrait normalement pas intervenir pour une fissure parfaitement fine, sera traitée de manière intégrale sur l'épaisseur de la fissure. La mise en œuvre complète d'une SGBEM constituerait bien entendu une amélioration immédiate et permettrait de réduire significativement les coûts.

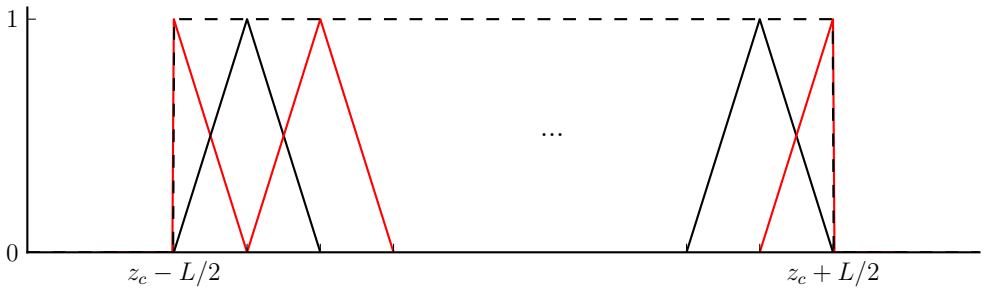


FIGURE 3.14 – Dépendance selon z du maillage uniforme utilisé. Deux éléments sont espacés de $L/(N-1)$. La somme des portes triangulaires (en trait pointillé) est une porte rectangulaire.

Ceci sera rediscuté par la suite.

On pourraît bien sûr parler de filtrage passe-bas plutôt que de fonction de base pour φ_σ, cependant la construction du système linéaire sera faite pour la variable x comme précédemment par produit scalaire, ce qui justifie l'emploi du terme de fonction de base pour φ_σ. Le champ rayonné par un potentiel de double couche ayant pour forme $\boldsymbol{\psi}_x$ est tracé en figure 3.15. Par rapport aux figures précédentes 3.6 et 3.7, cette figure montre que la singularité du champ de contrainte devient prédominante pour la partie réelle du champ, ce qui appelle un traitement particulier. Dans cette thèse, la partie réelle du champ a été forcée à zéro dans la construction du système linéaire. Ce traitement empirique, très criticable, se justifie *a posteriori* par le fait que des résultats très similaires (mais de moins bonne qualité car bien moins stables) sont obtenus lorsqu'une formulation de colocation est adoptée en x, en prenant des points de part et d'autre de la frontière et en conservant la partie réelle du champ. Un traitement mieux justifié serait évidemment souhaitable. Il est possible qu'un traitement intégral de la variable z, en plus de fonctions de bases plus régulières, solutionne le problème, car les fonctions de base présentées ci-dessus ne respectent pas la condition de régularité C^2 requise pour régularisé les termes hypersinguliers. En tous cas, avec ces fonctions de base et une formulation par colocation, une absence de traitement particulier mène à un résultat complètement faux : les termes hypersinguliers sont surévalués, les termes sources secondaires $F_{d,j}$ sont alors bien trop faibles, et la fissure devient quasiment transparente.

Comme précédemment, une interpolation par splines cubiques est effectuée de manière à calculer numériquement les intégrales selon x en utilisant la règle des 3/8 de Simpson, dont nous ne conservons, nous le rappelons, que la partie imaginaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\psi}_{n,\alpha}^{\mathrm{T}}(x,z_n)\, \mathbb{i}\,\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{\Sigma}_x^{(j)}(x,z_n)\right) \mathbb{d}x \quad \approx \quad \int_{-2\sqrt{m}\,\sigma}^{2\sqrt{m}\,\sigma} \varphi_\sigma(x)\, \mathbb{i}\,\mathrm{Im}\left(\Sigma_{x\alpha}^{(j)}(x+x_c,z_n)\right) \mathbb{d}x. \tag{3.21}$$

Le coût de calcul de $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}(x,z,s)$, en mémoire et en temps de calcul, augmente donc à présent comme N^2, alors que dans le cas de la fissure horizontale il est indépendant de N. Ce coût dû aux nombreuses altitudes pourraît être réduit de plusieurs manières. Par manque de temps, ces optimisations importantes n'ont toutefois pas été mises en œuvre dans cette thèse, mais seraient à considérer dès le début de la conception d'un code informatique. Voici cinq possibilités complémentaires. Les optimisations 2 et 3 proposent, à précision constante, de diminuer le nombre de points, tandis que les optimisations 1, 4 et 5 proposent, à nombre de points constant, de diminuer les coûts.

1. Dès que le nombre m_β de points dans la couche est supérieur à 2, il devient plus intéressant dans (1.70)

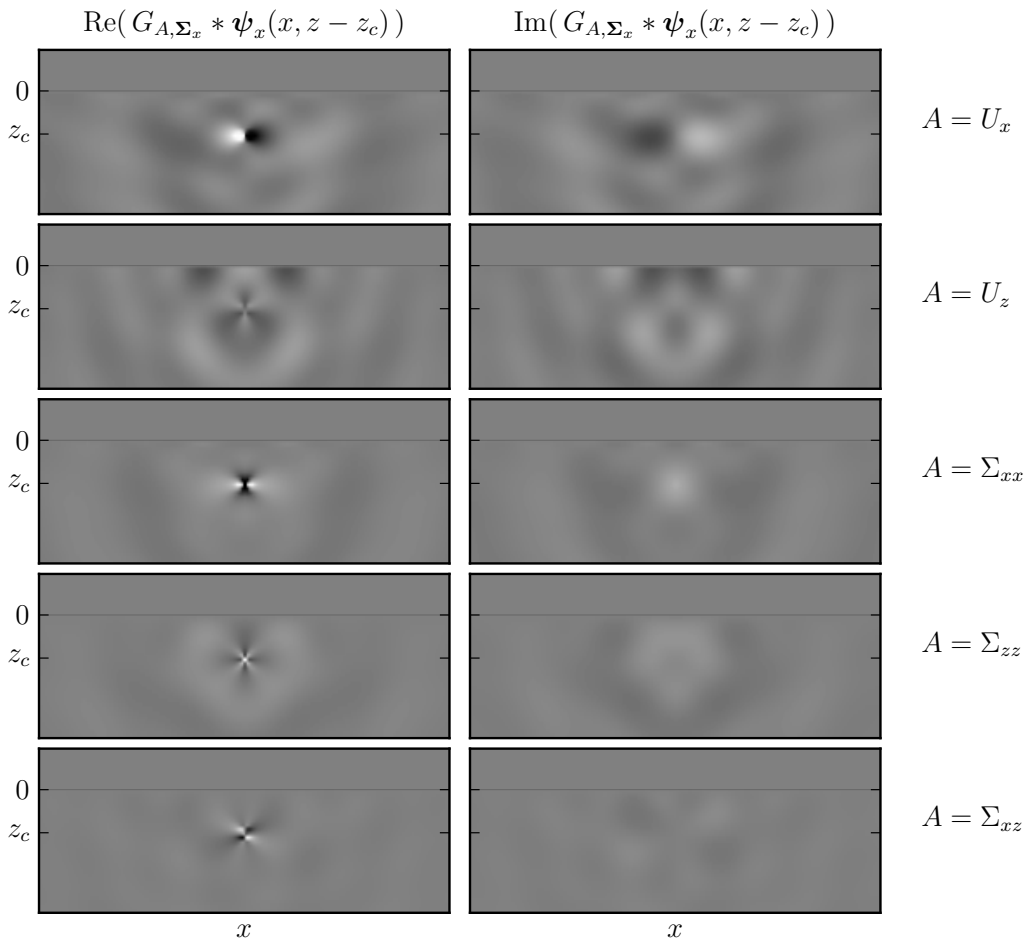


FIGURE 3.15 – Champ rayonné par un potentiel de double couche de forme $\boldsymbol{\psi}_x$ situé près d'une interface vide/aluminium, pour le paramètre de Laplace $s = 1.0 + 13.5\,\mathrm{i}\,rad\,MHz$. L'échelle de niveaux de gris de la contrainte a été forcée d'un facteur 2 par rapport aux figures 3.6 et 3.7. Cette fois, la singularité au voisinage de la source domine nettement la partie réelle du champ. L'équation d'onde n'est pas valable sur le domaine où s'étend la source, ce qui constitue une frontière non infiniement fine, et appelle un traitement particulier. Dans cette thèse, ce traitement consiste à mettre à zéro la partie réelle. Sa justification n'est qu'empirique.

de remplacer le « multi-second membre » de $3\,m_\beta$ colonnes

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \cdots & \mathbf{C}_{\beta-1}\tilde{\mathbf{H}}_\beta^{(n)}\left(z_{\beta-1}\right) & \mathbf{C}_{\beta-1}\tilde{\mathbf{H}}_\beta^{(n+1)}\left(z_{\beta-1}\right) & \cdots \\ \cdots & -\mathbf{C}_\beta\tilde{\mathbf{H}}_\beta^{(n)}\left(z_\beta\right) & -\mathbf{C}_\beta\tilde{\mathbf{H}}_\beta^{(n+1)}\left(z_\beta\right) & \cdots \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

par celui-ci, de 6 colonnes :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\beta-1}\mathbf{H}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_\beta\mathbf{H}^- \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

En effet, ce dernier permet par linéarité d'obtenir les (nombreux) champs $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}\left(k, z_j, s\right)$ à partir d'un (faible) nombre de coefficients d'ondes de volumes. Si plusieurs éléments ont la même dépendance selon z, la plupart des convolutions (*cf.* 1.1.3) peuvent être obtenues par post-traitement d'un jeu de convolutions de référence, économisant ainsi un temps de calcul précieux.

2. La méthode de collocation adoptée pour la variable z donne lieu à une convergence moins rapide que la SGBEM, et donc, à précision égale, pousse à augmenter le nombre de points. Il vaudrait donc mieux implémenter une formulation intégrale selon z. La lourdeur technique est qu'à cause du fait que le nombre de points en z est critique pour le coût en calcul, une intégration numérique sera contre-productive et il faut donc implémenter une intégration analytique dans l'espace $(\mathbf{k}, z, s)$. Tant que les fonctions de base sont choisies polynomiales par morceaux ces formules ne sont pas compliquées à obtenir, mais elles doivent distinguer un certain nombre de régions de l'espace, ce qui les rend pénibles à implémenter et à déboguer...
3. À la place des fonctions $\Lambda_{a,b,c}$ il vaudrait mieux utiliser des fonctions un peu plus régulières, comme des splines cubiques, sur un maillage un peu plus grossier.
4. Grâce à la SGBEM, la matrice du système linéaire est symétrique et il n'est pas nécessaire de calculer tous les termes croisés $\int \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}\left(x, z_j, s\right) \mathrm{d}z_j,\ j = 1..N$, mais seulement $j = 1..n$, ce qui permet de réduire quasiment de moitié le coût en mémoire et en calcul.
5. La précision du calcul des termes $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}\left(x, z_j, s\right)$ est critique lorsque z_j est proche de z_n. Si z_j est plus éloigné, le champ varie beaucoup moins rapidement, et il est très probable que l'on puisse calculer ce champ « lointain » à une bonne précision par interpolation (dans l'espace $\mathbf{x}, z, s$) à partir d'une grille plus grossière.

3.3.2 Plaque d'aluminium épaisse dans le vide

Considérons la même plaque qu'au paragraphe 3.2.2. La fissure est cette fois verticale, de longueur $L = 2\,mm$, et est centrée en $(x_c, z_c) = (5, 3.5\,mm)$. La plaque est insonifiée par un transducteur multi-éléments linéique posé en surface (*cf.* 1.5.1 pour un cas similaire). On applique une loi de retard aux éléments de manière à favoriser la construction d'un front plan d'ondes transversales formant un angle θ avec la verticale. Ainsi, la

fissure sera insonifiée par un paquet d'ondes ayant une incidence non rasante de $90^\circ - \theta$. La source est décrite par

$$\boldsymbol{\sigma}_0(x,t) = \sum_{n=1}^{N_e} \exp\left(-\frac{(x - x_0(n))^2}{2\,\sigma_e^2}\right) \sin(\omega_0\ (t - t_0(n)))\ \exp\left(-\frac{\omega_0^2\ (t - t_0(n))^2}{2\,n_c^2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

avec

$$x_0(n) = \left(n - \frac{N_e + 1}{2}\right) \Delta, \tag{3.25}$$

$$t_0(n) = \frac{x_0(N_e) - x_0(n)}{c_T^{(alu)}}, \tag{3.26}$$

et $c_T^{(alu)} = \sqrt{c_{44}^{(alu)}/\rho} \approx 3115\,m\,s^{-1}$ la célérité des ondes transversales dans l'aluminium. Les valeurs données à tous ces paramètres sont les suivantes : $N_e = 8$ éléments, le pitch vaut $\Delta = 0.75\,mm$, $\sigma_e = 0.08\,mm$, $f_0 = 2.25\,MHz$, $n_c = 5$, $\theta = 35^\circ$.

Nous maillons la fissure avec les paramètres suivants : $\sigma = 0.025\,mm \approx \lambda_T/52$ (comme précédemment) et $N = 20$. La grille de calcul est identique à celle utilisée pour le cas horizontal. Les résultats de la simulation sont présentés en figure 3.16 et comparés à une simulation dans la même plaque, sans fissure.

Le temps de calcul est de $1'\,20''$, soit, à grille identique, 10 fois plus que pour la fissure horizontale. Étant donné que les nombreuses optimisations mentionnées plus haut n'ont pas été implémentées et que le code n'a pas été développé dans un premier temps pour pouvoir considérer de nombreux points selon z ($20^2 = 400$ dans le cas présent), il est un peu prématuré de parler de temps de calcul. Nous sommes confiants qu'une fois les optimisations nécessaires apportées, ce même temps de calcul pourra correspondre à une cinquantaine de points de discrétisation. Toutefois, ceci met clairement en évidence que, s'il est relativement facile grâce aux invariances d'écrire un code performant pour traiter le cas d'une fissure horizontale, le cas plus général exige un savoir faire plus conséquent en programmation bas niveau.

3.4 Défaut à géométrie et conditions aux limites quelconques

Cette section présente succintement une extention qu'il serait intéressant (et facile) de réaliser, pour considérer des conditions aux limites plus générales. Elle présente également, et surtout, deux arguments dissuadant de persévérer à utiliser sur des géométries quelconques l'approche par éléments finis de frontière décrite dans ce chapitre, tout en encourageant, au contraire, à construire une méthode hybride avec les éléments finis, capable de résoudre à coût réduit le problème de l'interaction avec un défaut arbitraire. Cette section doit donc être vue comme une introduction au Chapitre 4.

3.4.1 Condition de collage

On pourraît facilement étendre les deux sections précédentes à des conditions aux limites plus riches, pouvant modéliser des défauts partiels de collage. J-M. Baik et R.B. Thompson [3] ont proposé un modèle de distribution de ressorts élémentaires pour modéliser un joint de colle. Ce modèle se traduit par la continuité de la contrainte normale et une discontinuité du déplacement proportionnelle à la valeur de la contrainte :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon}) & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon}) & = & \mathbf{K}_c^{-1}(\boldsymbol{\xi})\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi}), \end{array}\right. \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma,\ \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \perp \Gamma(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.27}$$

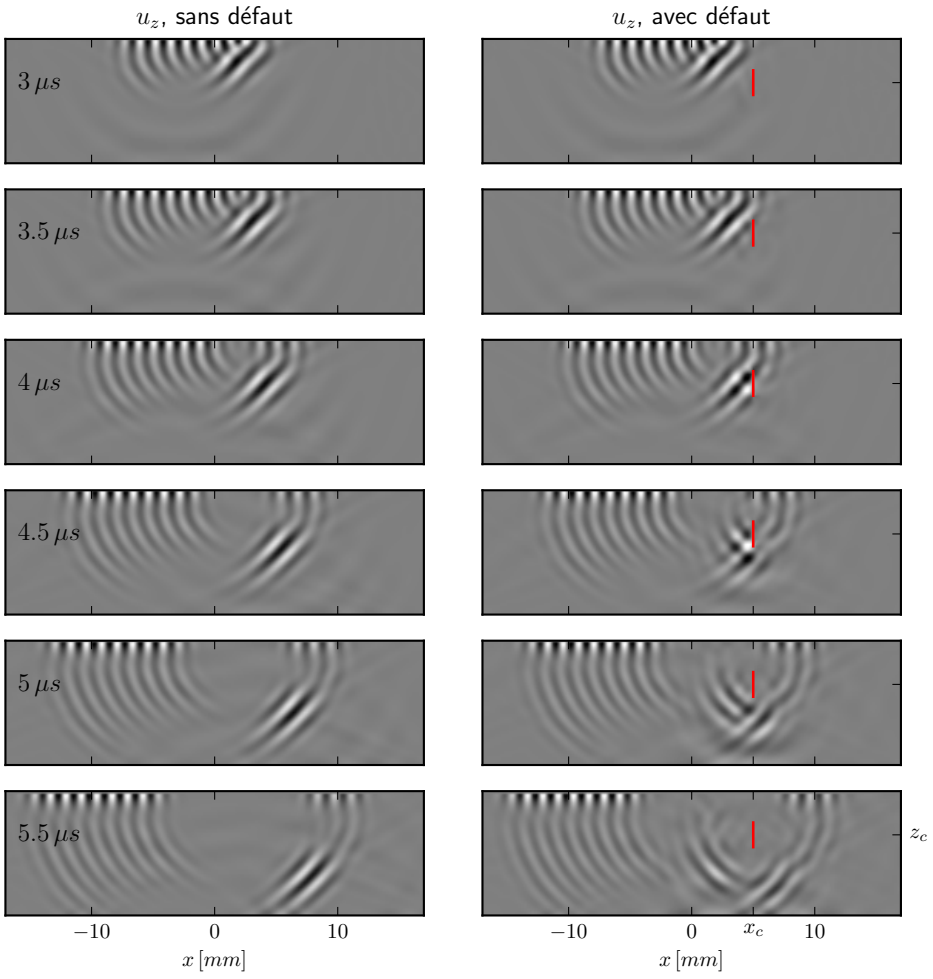


FIGURE 3.16 – Champ de déplacement vertical u_z pour quelques instants choisis. La fissure est représentée par un trait vertical rouge. Par construction, le champ incident privilégie un front plan oblique d'ondes transversales, ce qui a pour conséquence qu'un train d'onde de Rayleigh se propageant vers la gauche soit également généré avec une amplitude relativement importante.

où $\mathbf{K}_c(\boldsymbol{\xi})$ est une matrice de rigidités qui contient les raideurs $[K_c]_{i,j}$ des ressorts élémentaires. Une condition d'adhésion parfaite correspond à des coefficients très élevés $[K_c]_{i,j} \to \infty$, une condition de décollement total correspond au cas limite $[K_c]_{i,j} \to 0$. Une condition de contact parfait avec glissement sans frottement peut aussi être obtenue comme cas limite, ainsi qu'une condition d'adhésion tangentielle sans contact normal. Ce modèle est encore largement utilisé : par exemple par N. Bedrici dans sa thèse [9], dans le cas d'un joint de colle horizontal, ou par N. Mori [56, 57] dans le cas d'un joint vertical entre deux plaques d'aluminium.

Comme la contrainte est continue, seul un potentiel de double couche $\mathbf{f}_d(\boldsymbol{\xi}, t) \equiv \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon})$ est nécessaire pour résoudre le problème. Il suffit de remplacer le noyau $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}_r}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}_e}}$ par $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}_r}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\nu}_e}} - \mathbf{K}_c\, \delta$, c'est-à-dire que la formulation variationnelle du problème de Neumann

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{inc} + \sum_{j=1}^{N} F_{d,j}\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} \right) (\boldsymbol{\xi}, s)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = 0,\ \forall n = 1..N, \tag{3.28}$$

est remplacée par :

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{inc} + \sum_{j=1}^{N} F_{d,j}\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} - F_{d,j}\, \mathbf{K}_c\, \boldsymbol{\psi}_j \right) (\boldsymbol{\xi}, s)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = 0,\ \forall n = 1..N. \tag{3.29}$$

Cette extention n'a pas été entreprise dans cette thèse mais serait d'un grand intérêt, dans le cas d'un défaut horizontal, pour modéliser un défaut d'adhésion localisé entre deux plis de matériau composite.

3.4.2 Incommodité d'utiliser un mailleur pour les géométries arbitraires

On pourraît imaginer de s'appuyer sur un programme de maillage déjà existant pour considérer des géométries de fissures moins canoniques. Il est aussi possible de considérer non pas une fissure, mais une inclusion élastique homogène. En effet, le milieu (sain) de propagation extérieur à l'inclusion est la plaque stratifiée, le milieu (sain) intérieur est un milieu élastique homogène et non borné dont on connaît analytiquement le tenseur de Green dans l'espace $(\mathbf{x}, z, s)$, et il suffit, pour formuler la condition aux limites de continuité du déplacement et de la contrainte normale à la frontière de l'inclusion, d'utiliser les tenseurs de Green des deux milieux sains. Ces possibilités se heurtent toutefois à deux fortes contraintes techniques qui les rendent, d'une part, fort compliquées à mettre en œuvre, et, d'autre part, contre-productives dès que la taille du défaut dépasse quelques longueurs d'onde. Voici ces deux contraintes.

1. Les coordonnées $\mathbf{x}$ et z ne jouent pas le même rôle dans le calcul par ondes partielles, et le supposé mailleur devrait tenir compte de ces différences. Il est important d'avoir des fonctions de base à spectre selon $\mathbf{k}$ le moins étendu possible, alors qu'il est au contraire préférable pour z d'utiliser des fonctions de base simples à convoluer par des exponentielles, commes des polynômes par exemple. De plus, il ne sert à rien de raffiner un maillage en $\mathbf{x}$ localement car ceci requiert d'augmenter l'échantillonnage de l'ensemble de la grille. En revanche, le raffinement local selon z peut être intéressant.
2. Le coût en calcul des termes $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(n)}(x, z, s)$ dépend de manière critique du nombre d'altitudes différentes à considérer, à tel point qu'au delà d'un certain nombre (relativement faible) d'altitudes à discrétiser, l'approche devient plus coûteuse qu'une approche par éléments finis, ce qui la rend donc inintéressante. Dans l'exemple du paragraphe 3.3.2, nous sommes confiants qu'en ayant effectué les optimisations mentionnées, le calcul sera plus rapide d'au moins un ordre de grandeur qu'un calcul par éléments finis jusqu'à une cinquaine de points de discrétisation. Pour ce cas, on peut donc se donner comme seuil arbitraire 50 points : si le défaut considéré requiert moins de points en z alors l'approche décrite dans

ce chapitre est pertinente et réduit significativement les coûts, alors que si l'on a besoin de plus de points on considère que les gains sont trop faibles pour remplacer une approche par éléments finis. 50 points sont une faible marge de manœuvre pour discrétiser un défaut comme une fissure, qui produit un champ proche intense au niveau des pointes et nécessite donc un maillage relativement dense. On peut espérer tout au plus considérer une fissure mesurant environ 2 à 3 longueurs d'onde minimale. En revanche, 50 points sont une marge de manœuvre tout à fait acceptable si la frontière où s'écrit la condition aux limites est légèrement éloignée des zones où le champ varie très vite où la règle classique d'environ 6 points par longueur d'onde pourraît être appliquée (ce qui, d'ailleurs, permettrait de réduire l'échantillonnage et de tolérer plus que 50 points). On peut dans ce cas espérer traiter une frontière d'une dizaine de longueurs d'onde minimale à coût nettement réduit.

Ce chapitre se conclut donc sur les perspectives suivantes : il sera toujours très intéressant d'employer une approche par éléments finis de frontière pour traiter le cas de défauts plans. En l'état, on gagne environ deux ordres de grandeurs par rapport à un calcul par éléments finis. Il est important d'améliorer le traitement des pointes de fissure par rapport à ce qui a été fait dans cette thèse, ainsi que de mieux maîtriser les paramètres de maillage optimaux, de manière à réduire les coûts au minimum et à envisager un défaut plan 3D dans un guide anisotrope. Il reste peu d'obstacles pratiques pour y arriver. Insistons sur le traitement des pointes, qui est de loin le facteur limitant et pourraît permettre de gagner un facteur 2 à 5 en coût calculatoire, car l'intérieur de la fissure n'a pas besoin d'être discrétisé avec une ouverture de gaussienne aussi fine. Il est également très important d'améliorer le traitement du défaut vertical, non pas pour, à terme, l'utiliser comme défaut vertical, mais pour maîtriser pour la suite les ingrédients de la construction d'une frontière transparente verticale. Cette idée sera développée dans le Chapitre 4.

Chapitre 4

Cas d'un objet quelconque : opérateur « Dirichlet to Neumann » numérique

Ce chapitre ne fait pas vraiment état de travaux réalisés dans cette thèse, mais en développe les perspectives qui nous semblent les plus intéressantes. Il doit être considéré comme une pré-conclusion. Nous voulons ici nous placer dans le contexte des travaux de thèse de V. Baronian [7], L. Taupin [84] et A. Tonnoir [87], qui ont été discutés en introduction de cette seconde partie. Pour rappel, ceux-ci avaient pour but de construire un opérateur dit de « frontières transparentes », ou « Dirichlet to Neumann », permettant de coupler un code de calcul par éléments finis à un code de calcul semi-analytique modélisant efficacement la propagation d'ondes au sein d'un guide d'ondes élastique. Cependant, à notre connaissance, le cas d'un guide anisotrope 3D n'est toujours pas traité.

Nous pensons qu'il est probablement trop ambitieux de chercher une expression semi-analytique de l'opérateur de frontières transparentes pour le cas, complexe, d'un guide anisotrope 3D. Nous proposons à la place d'utiliser une formulation BEM/FEM plus « classique » (*cf.* [12] pour une synthèse bibliographique), c'est-à-dire de construire un opérateur de couplage de manière purement numérique à partir d'un code de calcul semi-analytique. Les deux approches décrites dans la première partie de cette thèse sont à nos yeux les meilleures candidates car elles permettent de traiter l'anisotropie bien plus facilement qu'une approche modale classique $k_n(\omega, \theta)$. Cependant, elles forcent à abandonner le régime harmonique pour le régime de Laplace ou le régime temporel.

La section 4.1 développe le principe du couplage BEM/FEM dans un cas particulier où l'opérateur DtN a une expression relativement simple. La frontière artificielle est située dans une région de régime non-établi, ce qui force à utiliser une approche par ondes partielles. Par manque de temps, son implémentation dans un code commercial d'éléments finis n'a pas été réalisée. La section 4.2 discute des atouts des approches par ondes partielles et modale $\omega_n(\mathbf{k})$ pour résoudre le cas général.

4.1 Raidisseur en surface d'une plaque

4.1.1 Principe de la méthode hybride

Le cas particulier d'un problème d'interaction de type raidisseur, où l'objet diffractant est rajouté par collage en surface du guide, est choisi pour introduire ce chapitre. Ce choix est motivé par le fait qu'il s'agit à nos yeux du problème non-canonique mettant en jeu l'opérateur DtN le plus simple possible construit à partir

de l'expression par ondes partielles du tenseur de Green. Ce cas est, de plus, d'intérêt pratique en CND ; il a été traité par L. Taupin dans sa thèse [84] via une expression modale de l'opérateur DtN.

Le principe de la méthode hybride est le suivant (*cf.* figure 4.1). Le domaine est divisé en deux régions, l'une étant une plaque parfaite, l'autre étant seulement le raidisseur. La région de la plaque parfaite est traitée par ondes partielles ; le champ incident est défini comme étant le champ rayonné par un terme source situé en dehors du raidisseur et se propageant dans la plaque parfaite. Il est donc parfaitement calculable. Du point de vue de la plaque parfaite, le raidisseur peut être vu comme un terme source surfacique réagissant au champ incident, dont la localité est connue mais dont l'amplitude reste à déterminer.

La région du raidisseur est traitée par éléments finis : la géométrie est définie, ainsi qu'un maillage, et une condition de Neumann est appliquée aux frontières qui ne sont pas en contact avec la plaque. Sur la frontière en contact avec la plaque, que nous appelons $\Gamma_{R/P}$, la condition aux limites est donnée par l'opérateur DtN. Ce dernier sera détaillé au paragraphe suivant (*cf.* Eq. (4.5)). Il est construit à partir du tenseur de Green de la plaque parfaite convolué par les fonctions de base (selon la variable horizontale x) des éléments de la frontière. Donc, une fois le maillage défini, ces quantités sont calculables par l'expression par ondes partielles. Pour simplifier et pour profiter de l'invariance de la plaque parfaite, il est préférable d'imposer un maillage uniforme le long de $\Gamma_{R/P}$.

Enfin, une fois résolu le calcul par éléments finis, on obtient l'amplitude du terme source surfacique recherché grâce à la valeur du champ au voisinage de $\Gamma_{R/P}$ (*cf.* Eq. (4.4)) et l'on peut ainsi obtenir le champ total en tout point de l'espace par un dernier calcul direct par ondes partielles.

4.1.2 Expression de l'opérateur DtN

On fait l'hypothèse que la surface supérieure du guide est libre, en dehors de la frontière avec le raidisseur. En effet, ce cas particulier est simple en ce sens que du point de vue du guide, l'objet diffractant peut être considéré comme une distribution de sources secondaires située sur une zone où la contrainte normale devrait être nulle en l'absence d'objet. Un potentiel de double couche selon $\mathbf{\Sigma}_z$ situé en surface de la plaque rayonnerait un champ nul. On a alors, pour $z_e = 0$, quelle que soit la composante d'observation,

$$\mathbf{G}_{\ldots,\mathbf{\Sigma}_z}\left(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_e, z_r, 0\right) = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Notre seule inconnue est donc la distribution surfacique de potentiels de simple couche, que nous appelons $\mathbf{\Sigma}_s$. À l'intérieur de la plaque le champ de déplacement total s'écrit donc

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}_{\mathbf{U},\mathbf{U}} * \mathbf{\Sigma}_s + \mathbf{U}^{(inc)}, \tag{4.2}$$

où $\mathbf{U}^{(inc)}$ désigne un champ incident. Par définition du tenseur de Green, en l'absence de raidisseur, le champ de contrainte verticale est nul en surface de la plaque :

$$\mathbf{\Sigma}_z^{(inc)}(\mathbf{x}, 0^+) = \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

Par définition du potentiel de simple couche, dans ce cas particulier la valeur du potentiel de simple couche inconnu est égale à la contrainte verticale à la frontière $\Gamma_{R/P}$ entre le raidisseur et la plaque :

$$\mathbf{\Sigma}_s(\mathbf{x}) = -\mathbf{\Sigma}_z(\mathbf{x}, 0^+). \tag{4.4}$$

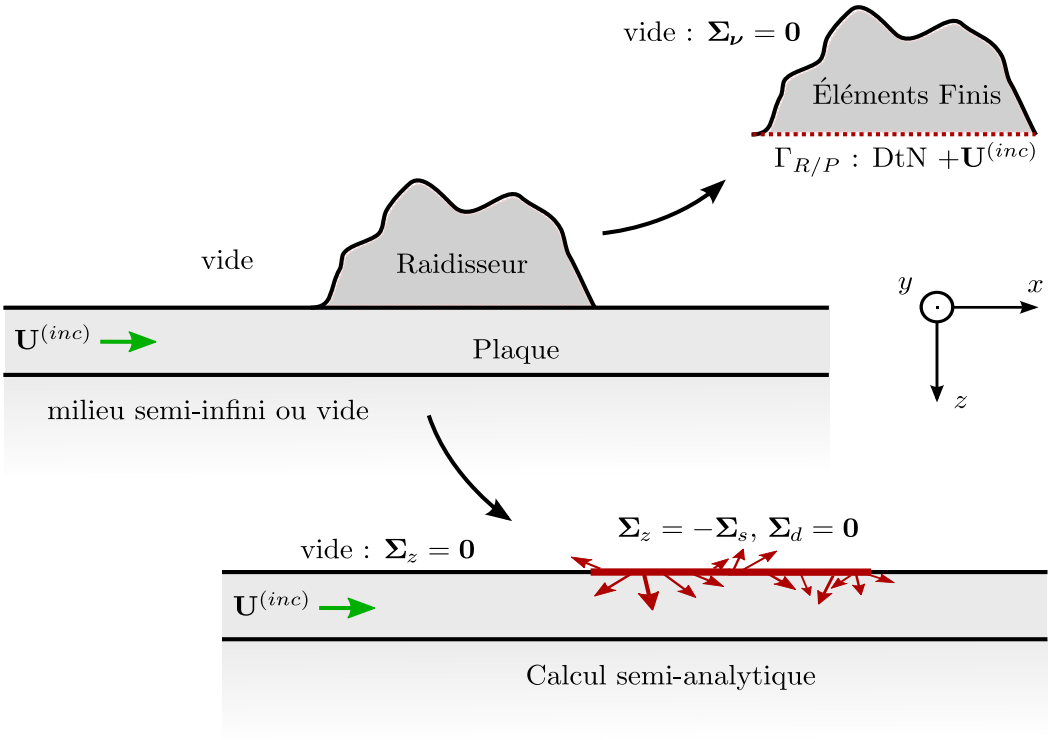


FIGURE 4.1 – Schéma d'un raidisseur collé en surface d'une plaque. Le problème est traité par éléments finis dans le raidisseur et par ondes partielles dans le guide. L'opérateur DtN nécessaire pour borner le domaine d'éléments finis est construit à partir du tenseur de Green du guide sain (*cf.* équation (4.5)). Du point de vue de la plaque, le raidisseur peut être considéré un terme source surfacique secondaire de simple couche $\mathbf{\Sigma}_s$ (voir Chapitre 3). Pour ce cas particulier, aucune contribution surfacique de double couche $\mathbf{\Sigma}_d$ n'est à considérer.

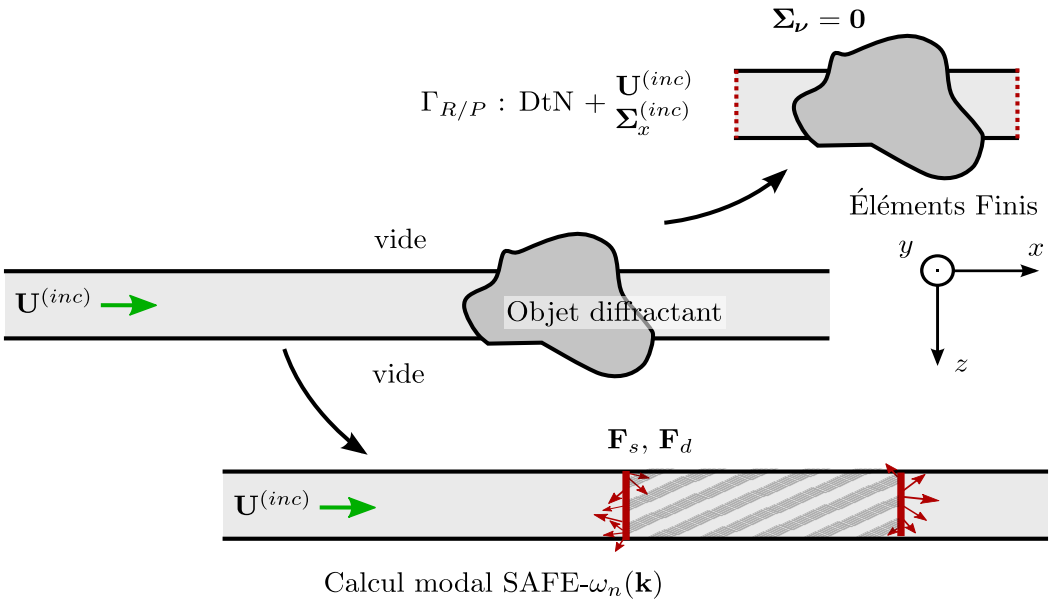


FIGURE 4.2 – Schéma d'un objet diffractant quelconque situé dans une plaque. La plaque est dans le vide, ce qui permet un calcul modal pour la partie saine. Les frontières artificielles doivent être définies suffisamment loin de l'objet pour qu'un régime libre modal soit bien établi. L'opérateur DtN nécessaire pour borner le domaine d'éléments finis présentera l'avantage d'être utilisable, au choix, dans le domaine de Laplace ou dans le domaine temporel.

Ceci nous amène à l'équation intégrale reliant $\mathbf{U}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_z$ sur la surface de la plaque, à la frontière $\Gamma_{R/P}$ avec le raidisseur :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_r, 0^+) = \mathbf{U}^{(inc)}(\mathbf{x}_r, 0^+) - \int_{\Gamma_{R/P}} \mathbf{G}_{\mathbf{U},\mathbf{U}}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_e, 0^+, 0^+)\, \boldsymbol{\Sigma}_z(\mathbf{x}_e, 0^+)\, \mathrm{d}\mathbf{x}_e, \qquad \mathbf{x}_r \in \Gamma_{R/P}. \tag{4.5}$$

La dernière étape consiste simplement à exprimer la continuité des champs de déplacement et de contrainte normale entre la plaque et le raidisseur : les champs $\mathbf{U}(\mathbf{x} \in \Gamma_{R/P}, 0^-)$ et $\boldsymbol{\Sigma}_z(\mathbf{x} \in \Gamma_{R/P}, 0^-)$ vérifient également l'équation intégrale (4.5), ce qui termine la construction de l'opérateur DtN recherché.

4.2 Vers le cas général

Dans le cas général (*cf.* figures 4.2 et 4.3) où la frontière transparente n'est pas sur une zone de contrainte ou de déplacement nul, l'opérateur de couplage est plus complexe et fait intervenir les quatre tenseurs $\mathbf{G}_{\mathbf{U},\mathbf{U}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{U},\boldsymbol{\Sigma}_\nu}$, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_\nu,\mathbf{U}}$ et $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\Sigma}_\nu,\boldsymbol{\Sigma}_\nu}$. Il est donné dans [12] mais n'est pas retranscrit dans cette thèse.

Le paragraphe 3.3 du chapitre précédent met en garde sur la non-localité et l'attention qu'il faut accorder aux singularités que des frontières verticales engendrent. Cette dernière remarque n'est valable que pour la formulation par ondes partielles et rend la formulation modale $\omega_n(\mathbf{k})$ plus attrayante pour traiter le guide 3D anisotrope dans le vide : l'approche modale sera la plus simple des deux à implémenter car elle permet naturellement de filtrer le régime non-établi, qui est la cause des singularités. Elle permettra de rendre la frontière parfaitement fine (*cf.* paragraphe 2.1.4) et évitera l'utilisation d'un paramètre d'épaisseur, noté σ dans le Chapitre 3 et qui est resté mal maîtrisé dans cette thèse. La frontière ainsi construite pourra, de plus, être valable au choix dans le domaine de Laplace ou dans le domaine temporel, et permettra donc au code éléments finis de considérer un défaut non-linéaire. Si le milieu sain est un guide ouvert ou un guide fermé en régime de très haute fréquence-épaisseur, seule la formulation par ondes partielles sera disponible et seul

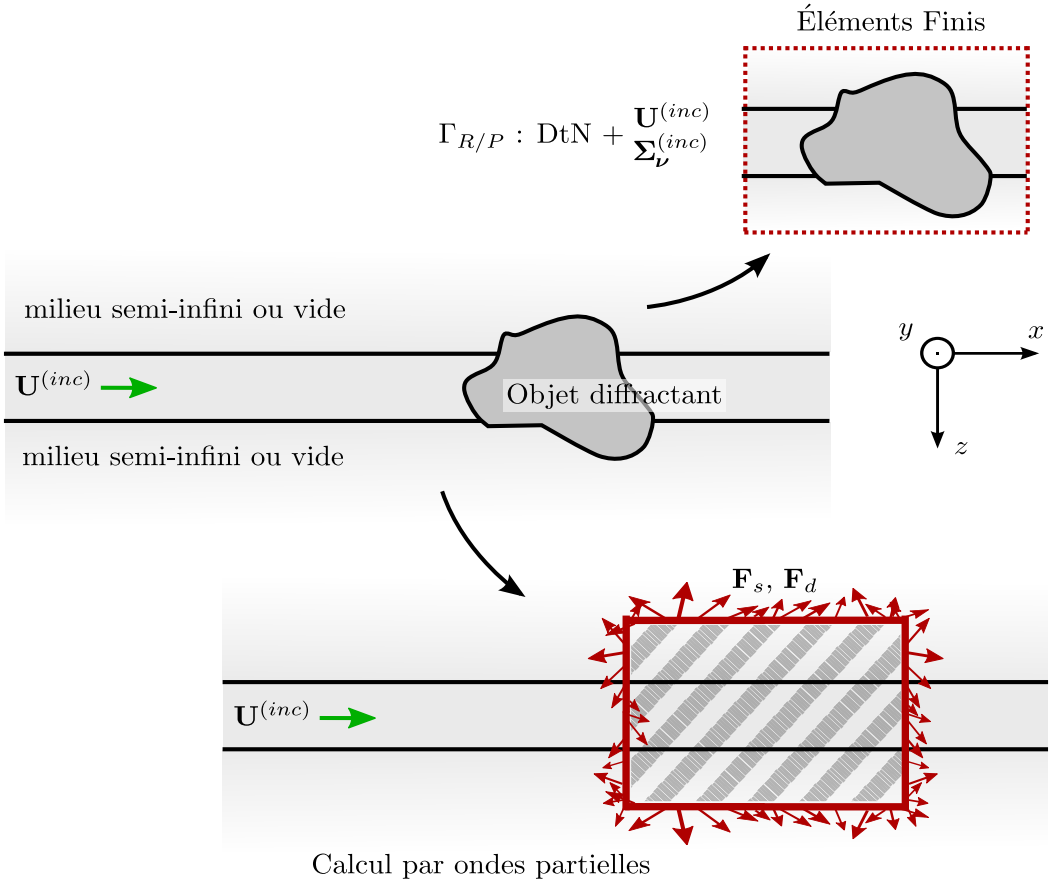


FIGURE 4.3 – Schéma d'un objet diffractant quelconque situé dans un milieu stratifié général. Le calcul dans la partie saine s'effectue par ondes partielles, dans le domaine de Laplace.

le domaine de Laplace pourra être considéré.

Le paragraphe 3.3 met également en garde sur le coût numérique que des frontières verticales peuvent avoir, et ce aussi bien pour la formulation par ondes partielles que pour la formulation modale $\omega_n(\mathbf{k})$. Ce coût dépend presque exclusivement du nombre de points selon la verticale z, et est donc moindre si la frontière n'est pas située trop près d'une singularité de géométrie qui requiert un maillage dense, comme une pointe de fissure par exemple. C'est une des raisons qui motivent le fait que l'approche par ondes partielles sera plus pertinente dans une approche hybride BEM/FEM que dans une approche exclusivement BEM. Concernant les perspectives en 3D, il sera probablement important d'utiliser les invariances du guide sain en définissant une frontière parallélépipédique de manière à minimiser les coûts de construction.

Conclusions générales

Au cours de cette thèse, deux expressions du tenseur de Green transitoire d'une plaque élastique ont été utilisées et comparées avec l'approche « classique » modale $k_n(\omega, \theta)$.

Dans la Partie I, cette comparaison s'est faite en considérant le problème direct de rayonnement d'une source dans un guide sain. Dans le contexte de CND par ondes guidées qui nous intéresse, la formulation modale $\omega_n(\mathbf{k})$ exposée au Chapitre 2 n'a de réelle pertinence que lorsqu'un calcul 3D est requis et que le guide est anisotrope dans le plan. De plus, elle se limite aux guides dans le vide. La formulation par ondes partielles dans le domaine de Laplace, exposée au Chapitre 1, est quant à elle bien plus polyvalente. Elle permet de traiter le cas d'un guide quelconque, ouvert ou dans le vide, de manière très efficace, au point que nous affirmons qu'il n'est pas nécessaire pour un guide ouvert de chercher à recourir à une méthode modale pour synthétiser un signal. De plus, l'approche par ondes partielles permet, au choix, d'être performant pour calculer le régime non-établi ou pour calculer le régime établi. Lorsque le régime non-établi est souhaité, l'intégrale de Fourier spatiale inverse doit être tronquée selon le spectre du terme source, alors que si seul le régime établi importe, les informations de dispersion permettent de minimiser l'échantillonnage. Cette grande polyvalence se fait donc au prix d'une information supplémentaire à fournir par l'utilisateur pour respecter de manière optimale le critère de Nyquist-Shannon. À l'avantage d'une méthode modale, cette information de dispersion peut être grossière.

La Partie II a ajouté à la discussion la perspective d'exploiter les deux approches mentionnées pour résoudre des problèmes de diffraction d'ondes modales par des objets arbitraires. Le Chapitre 3 présente une mise en œuvre d'une méthode d'éléments finis de frontières (BEM) basée sur l'expression par ondes partielles. Elle profite de la performance de cette expression en régime non-établi. Grâce à l'invariance dans le plan du tenseur de Green, le cas particulier d'un défaut plan a pu être traité de manière très efficace. Compte tenu de l'importance de ce type de défauts dans le contexte du CND des plaques composites, ce cas particulier n'est pas à négliger. Concernant d'autres défauts, il a été jugé trop contraignant et possiblement contre-productif de tenter d'étendre l'approche à des géométries moins canoniques. Nous sommes cependant relativement convaincus qu'il peut être très intéressant (mais, certes, lourd) de mettre à profit l'approche par ondes partielles pour construire une méthode hybride BEM/FEM dans le cas d'un guide ouvert, ce qui est très brièvement exposé au Chapitre 4. Il y a de notre point de vue une étape intermédiaire bien plus simple : utiliser la formulation modale $\omega_n(\mathbf{k})$ pour construire une méthode hybride BEM/FEM valable pour un guide 3D anisotrope, au choix, dans le domaine de Laplace ou dans le domaine temporel. Cette dernière perspective nous semble être la plus intéressante, et redonne toute sa place à la formulation $\omega_n(\mathbf{k})$. D'une manière plus générale, cette thèse questionne le choix du régime harmonique comme intermédiaire de calcul pour résoudre les problèmes de propagation et de diffraction 3D dans des guides plans anisotropes et/ou ouverts.

Bibliographie

[1] K. Aki, P.G. Richards, Quantitative seismology (Vol. 1). (2002)

[2] B.A. Auld, Acoustic fields and waves in solids, vol. 1 (R.E. Krierger Publ. Cie, Malabar, Florida, 1990)

[3] J-M. Baik, R.B. Thompson, Ultrasonic Scattering from Imperfect Interfaces : A Quasi-Static Model, Journal of Nondestructive Evaluation, Vol. 4, Nos. 3/4, 1984

[4] O. Balogun , T. W. Murray , C. Prada, Simulation and measurement of the optical excitation of the S1 zero group velocity Lamb wave resonance in plates, J. Appl. Phys. 102 (2007)

[5] D.M. Barnett, J.Lothe, Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, greens function and surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic solids. Phys. Norv. 7, pp. 13-19

[6] D.M. Barnett, J.Lothe, Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals, J. Phys. F : Metal Phys. 4 (1974) 671–686

[7] V. Baronian, Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées : application au contrôle non destructif, Thèse de Doctorat, Palaiseau, École Polytechnique X (2009)

[8] V. Baronian, A.S. Bonnet-Ben Dhia, E. Lunéville, Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (6) (2010)

[9] N. Bedrici-Frai, Méthode hybride « intégrales de Fourier / éléments finis de frontière » pour l'étude de l'interaction d'un faisceau ultrasonore avec un défaut situé dans un multicouche, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne (2008)

[10] N. Bedrici, P. Gatignol, C. Potel, An Iterative Method for the Interaction Between a Bounded Beam and an Interface Defect in Solids, Under Kirchhoff Approximation, Acta Acustica United With Acustica, Vol. 95 (2009) 189 – 202

[11] A. Bernard, Ondes de plaques guidées : approche temporelle et spatiale, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 (2000)

[12] M. Bonnet, G. Maier, C. Polizzotto, Symmetric Galerkin Boundary Element Method, Appl Mech Rev, 51 (11) (1998), pp. 669–704

[13] M. Bonnet, Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity, Engng. Anal. with Bound. Elem., 15, 93-102

[14] A.S. Bonnet-Ben Dhia, B. Goursaud, C. Hazard, A. Prieto, Finite element computation of leaky modes in stratified waveguides, In : Leger A, Deschamps M (eds) Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media. Springer proceedings in physics, vol 128. Springer, Berlin, pp 73–86 (2009)

[15] A. Boström, Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation, Applied Mechanics Reviews, 56 (2003), pp. 383–405

[16] M. Bouchon, A review of the discrete wavenumber method. Pure and applied Geophysics, 160(3-4), 445-465 (2003)

[17] D.E. Budreck, J.D. Achenbach, Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method, J. Appl. Mech. 55 (1988) 405–412

[18] M. Bruneau, Introduction aux théories de l'acoustique, Université du Maine (1983)

[19] Y. Cho, J.L. Rose, An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interactions with a surface breaking defect, International Journal of Solids and Structures 37 (2000) 4103-4124

[20] Clorennec D., Prada C., Royer D., Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shells using zero group velocity Lamb modes. J. Appl. Phys. 101 (2007)

[21] Clorennec D., Prada C., Royer D., Laser ultrasonic inspection of plates using zero-group velocity Lamb modes. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 57(5), 1125- 1132 (2010)

[22] M. Deschamps, O. Poncelet, Transient Lamb waves : Comparison between theory and experiment, J. Acoust. Soc. Am. 107, 3120 (2000)

[23] N. Dominguez, V. Gibiat, Y. Esquerre, Time domain topological gradient and time reversal analogy : an inverse method for ultrasonic target detection. Wave Motion, 42(1), 31-52 (2005)

[24] S.B. Dong, R.B. Nelson, On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, J. Appl. Mech, 39 (1972)

[25] S.B. Dong, R.B. Nelson, High frequency vibrations and waves in laminated orthotropic plates, J. Sound. Vib., 30, pp. 33–34, (1973)

[26] E. Ducasse, M. Deschamps, A nonstandard wave decomposition to ensure the convergence of Debye series for modeling wave propagation in an immersed anisotropic elastic plate, Wave Motion 49 (2012)

[27] E. Ducasse, M. Deschamps, Time-domain computation of the response of composite layered anisotropic plates to a localized source, Wave Motion (2014)

[28] F. Erdogan, G.D. Gupta, T.S. Cook, Numerical solution of singular integral equations, in : G.C. Sih (Ed.), Mechanics of fracture 1, methods of analysis and solutions of crack problems (1973), pp. 368–425

[29] W. B. Fraser, Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate, J. Acoust. Soc. Am., 59, pp. 215–216, (1976)

[30] P. Gatignol, C. Potel, N. Bedrici, Improvement of the computation of Fourier integrals using the complex plane : Application to acoustic fields, Applied Physics Letters, 2010

[31] Ye.V. Glushkov, N.V. Glushkova, Diffraction of elastic waves by three-dimensional of arbitrary shape in a plane, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 60, No. 2, pp. 277-283, 1996

[32] E. Glushkov, N.V. Glushkova, A. Ekhlakov, E. Shapar, An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection, Wave Motion, Volume 43, pp. 458–473 (2006)

[33] L.J. Gray, L.L. Manne, Hypersingular integrals at a corner, Engineering Analysis with Boundary Elements 11 (1993) 327-334

[34] X. Han, G.R. Liu, K.Y. Lam, Transient waves in plates of functionally graded materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52(8), 851-865 (2001)

[35] N. A. Haskell, Dispersion of surface waves on multilayered media, Bull. Seism. Soc. Am., vol. 43, pp. 17–34, 1953

[36] T. Hayashi, D. Inoue, Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method, Ultrasonics 54 (2014)

[37] H.K. Hong and J.T. Chen, Derivations of Integral Equations of Elasticity, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol.114, No.6, pp.1028-1044, 1988

[38] B. Hosten, M. Castaings, FE modeling of Lamb mode diffraction by defects in anisotropic viscoelastic plates, NDT&E International 39 (2006) 195–204

[39] D. Inoue, T. Hayashi, Transient analysis of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method, Ultrasonics 62 (2015)

[40] K. Jezzine, Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1 (2006)

[41] S. Jourdain-Baudouin, Mesure et modélisation de l'atténuation ultrasonore anisotrope dans les matériaux composites, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 1 (1996)

[42] A. Karmazin, E. Kirillova, W. Seemann, P. Syromyatnikov, Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's matrix, Ultrasonics 51 (1) (2011)

[43] E. Kausel, Thin-layer method : formulation in the time domain, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994)

[44] E. Kausel E., J. Roesset, Frequency Domain Analysis of Undamped Systems, J. Eng. Mech., 118(4), 721–734 (1992)

[45] M. Koabaz, Contribution à l'étude des ondes de Lamb dans une plaque anisotrope : théorie et expérience, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 (2010)

[46] T. Kundu, Transient response between two interface cracks at the interface of a layered half space, International Journal of Engineering Science, 25 (1987), pp. 1427–1439

[47] T. Kundu, Dynamic interaction between two interface cracks in a three-layered plate, International Journal of Solids and Structures, 24 (1988), pp. 27–39

[48] E. Le Clézio, Diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 (2001)

[49] H.S. Lee, Y.Y. Kim, Multipole expansion of Green's function for guided waves in a transversely isotropic plate, Journal of Mechanical Science and Technology 29 (5) (2015) 1899˜1906

[50] S.S. Lih, A.K. Mal, Response of multilayered composite laminates to dynamic surface loads, Composite Part B 27, 633–641 (1996)

[51] G.R. Liu, J.D. Achenbach, A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids, J. Appl. Mech., 62 (1994)

[52] J. Lothe, D.M. Barnett, On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, J. Appl. Phys. 704 (2) (1976) 428–433

[53] M.J.S. Lowe, Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 42 (1995)

[54] D.A. Mendelsohn, J.D. Achenbach, L.M. Keer, Scattering of elastic waves by a surface-breaking crack, Wave Motion 2, 277-292 (1980)

[55] P. Moreno, A. Ramirez, Implementation of the numerical laplace transform : a review, IEEE Trans. Power Deliv., 23(4) (2008)

[56] N. Mori, S. Biwa, T. Hayashi, Reflection and transmission of Lamb waves at an imperfect joint of plates. Journal of Applied Physics, 113(7), 074901 (2013)

[57] N. Mori, S. Biwa, Resonance of an imperfect joint of plates by the lowest-order symmetric Lamb mode. The Journal of the Acoustical Society of America, 137(6), 3139-3148 (2015)

[58] G. Neau, Lamb waves in anisotropic viscoelastic plates. Study of the wave fronts and attenuation, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 (2003)

[59] J.C. Nedelec, Integral equations with non integrable kernels, Integral equation and operator theory, vol. 5, 562-572, 1982

[60] N. Nishimura, S. Kobayashi, A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems, Comp. Mech. 4, 319-328, 1989

[61] J. Park, Wave motion in finite and infinite media using the Thin-Layer Method, Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology (2002)

[62] J. Park, E. Kausel, Response of layered half-space obtained directly in the time domain, part 1 : SH sources, Bull. Seismol. Soc. Am. 96 (2006)

[63] B.N. Pavlakovic, Leaky guided ultrasonic waves in NDT, Thèse de Doctorat, Imperial College London (University of London) (1998)

[64] B. Pavlakovic, M. Lowe, D. Alleyne, P. Cawley, Disperse : A General Purpose Program for Creating Dispersion Curves, in Review of Progress in QNDE, Vol. 16A, eds. D.O. Thompson and D. E. Chimenti (Plenum, New York, 1997), pp. 185-192.

[65] C.L. Pekeris, Theory of propagation of explosive sound in shallow water, in Propagation of Sound in the Ocean, Geological Society of America, Memoir 27 (Geological Society of America, New York, 1948) pp. 1–117

[66] R.A. Phinney, Theoretical calculation of the spectrum of first arrivals in layered elastic mediums, J. Geophys. Res., 70(20), 5107–5123 (1965)

[67] O. Poncelet, Ondes planes hétérogènes à fréquence complexe : modes propres de plaques immergées, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 (1996)

[68] O. Poncelet, M. Deschamps, Lamb waves generated by complex harmonic inhomogeneous plane waves, J. Acoust. Soc. Am. 102, 292 (1997)

[69] C. Prada, D. Clorennec, D. Royer, Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes, J. Acoust. Soc. Am. 124 (2008)

[70] E. Premat, Prise en compte d'effets météorologiques dans une méthode d'éléments finis de frontière, Thèse de Doctorat, Villeurbanne, INSA (2000)

[71] S.I. Rokhlin, L. Wang, Ultrasonic waves in layered anisotropic media : characterization of multidirectional composites, Int. J. Solids Struct., 39 (2002)

[72] J.H. Rosenbaum, The long-time response of a layered elastic medium to explosive sound. Journal of Geophysical Research, 65(5), 1577-1613 (1960)

[73] V.V. Schevchenko, The expansion of the fields of open waveguides in proper and improper modes, Radiophys. Quant. Electron. 14 (1974)

[74] H. Schmidt, C. Tango, Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 84 (1986)

[75] A.L. Shuvalov, A sextic formalism for three-dimensional elastodynamics of cylindrically anisotropic radially inhomogeneous materials, Proc. R. Soc. Lond. A, 459 (2003), pp. 1611–1639

[76] E. Siryabe, Evaluation non destructive par ultrasons de l'adhésion aux interfaces de joins collés, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux (en cours)

[77] E. Siryabe, M. Renier, A. Meziane, J. Galy, M. Castaings, Characterization of cohesive and adhesive properties of adhesive bonds using transmitted ultrasonic waves. In Review of Progress in Quant. NDE Evaluation, Ed. Thompson D.O. and Chimenti D.E., Plenum Press, New York, Minneapolis, USA, 2015

[78] M. Stévenin, Modélisation du rayonnement des ondes ultrasonores guidées dans une structure mince en vue de son contrôle non-destructif, Thèse de Doctorat, (en cours)

[79] A.N.Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, J. Math. Phys. 41 (1962) 77–103

[80] A. Sutradhar, J. Reeder, L.J. Gray, Symmetric Galerkin Boundary Element Method, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2008)

[81] S. Taherzadeh, K.M. Li, K. Attenborough, Some practical considerations for predicting outdoor sound propagation in the presence of wind and temperature gradients. Applied Acoustics, 54(1), 27-44 (1998)

[82] S. Taherzadeh, K.M. Li, K. Attenborough, An innovative approach to predict sound field in a complex outdoor environment. In 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America (pp. 475-447) (1998, May)

[83] A. Talbot, The Accurate Numerical Inversion of Laplace Transforms, J. Inst. Maths Applies (1979) 23, 97-120

[84] L. Taupin, Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation, Thèse de Doctorat, École Polytechnique X (2011)

[85] L. Taupin, A. Lhémery, V. Baronian, A.S. Bonnet-Ben Dhia, B. Petitjean, Hybrid SAFE/FE model for the scattering of guided waves in a stiffened multilayered anisotropic plate, in : Rev. Prog. QNDE, vol. 31, D.O. Thompson and D.E. Chimenti, 2012.

[86] W. T. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, J. Appl. Phys., vol. 21, pp. 89–93, 1950

[87] A. Tonnoir, Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope. Thèse de Doctorat, Palaiseau, École nationale supérieure de techniques avancées (2015)

[88] B. Vacossin, C. Potel, P. Gatignol, J.F. de Belleval, Interaction of a monochromatic ultrasonic beam with a finite length defect at the interface between two anisotropic layers - Kirchhoff approximation and Fourier representation, IEEE Trans. Ultrasonics Ferroel. Freq. Contr. 56, 2251–2267

[89] C. Vassallo, Optical Waveguide Concepts, Elsevier, Amsterdam, 1991

[90] A. Velichko, P.D. Wilcox, Modeling the excitation of guided waves in generally anisotropic multilayered media, J. Acoust. Soc. Am. 121 (1) (2007)

[91] Y.S. Wang, D. Gross, Transfer Matrix Method of Wave Propagation in a Layered Medium With Multiple Interface Cracks : Antiplane Case, J. Appl. Mech., 68 , pp. 499–503

[92] R.L. Weaver, W. Sachse, L. Niu, Transient ultrasonic waves in a viscoelastic plate : Theory, J. Acoust. Soc. Am. 85 (6), 2255-2261 (1989)

[93] J.A.C. Weideman, Optimizing Talbot's contours for the inversion of the Laplace transform, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 44 (2006)

[94] M. West, R.A. Sack, F. Walden, The Fast Field Program (FFP). A second tutorial : application to long range sound propagation in the atmosphere. Applied Acoustics, 33(3), 199-228 (1991)

Titre : Réponse élastodynamique d'une plaque stratifiée anisotrope : approches comparées. Vers le développement de méthodes hybrides

Résumé : Cette thèse traite de la résolution du problème direct de propagation d'un champ élastodynamique rayonné par une source dans un milieu stratifié anisotrope. Le contexte applicatif visé est le contrôle non destructif par ondes ultrasonores guidées de plaques de matériaux composites. Aux basses fréquences, ces matériaux sont assimilables à des milieux homogènes, anisotropes et dissipatifs. Deux approches causales sont étudiées et mises en oeuvre pour résoudre l'équation d'onde, et leur intérêt vis-à-vis de la méthode modale harmonique - la plus courramment employée dans ce domaine applicatif - est discuté. L'une des méthodes est modale et est formulée directement dans le domaine temporel. Elle permet de traiter facilement l'anisotropie, y compris en 3D, mais souffre des écueils classiques concernant le régime non-établi ou le cas du guide ouvert. L'autre approche est une formulation dans le domaine de Laplace de la méthode dite par *ondes partielles*. Elle présente l'intérêt d'être extrêmement polyvalente tout en conduisant à des coûts numériques tout à fait raisonnables. Dans un second temps, la possibilité d'exploiter ces deux méthodes pour résoudre des problèmes de diffraction par des défauts est étudiée. Une approche par éléments finis de frontière basée sur la méthode par ondes partielles est considérée. Elle permet de traiter efficacement le cas de défauts plans. L'extention à des défauts plus généraux est brièvement discutée.

Mots clé : plaque stratifiée, anisotropie, mode de Lamb, onde ultrasonore guidée, domaine temporel, régime non établi, transformée de Laplace, guide ouvert, ondes partielles, éléments finis de frontière, fissure

---

Title : Elastodynamic response of a layered anisotropic plate : comparative approaches. Towards the development of hybrid methods

Abstract : This work adresses the direct problem of the propagation of an elastodynamic field radiated by a source in an anisotropic layered medium. Applications concern non destructive evaluation of composite plates by ultrasonic guided waves. In the lower frequencies, these materials can be modeled as homogeneous, anisotropic and dissipative media. Two causal approaches are studied and developped to solve the wave equation, and their interest is discussed regarding to the widely used harmonic modal method. One of these methods is modal, and is formulated directly in the time domain. It allows to deal easily with anisotropy, even in 3D ; however it also suffers classical shortcomings such as the high cost of the unestablished regime or the difficulty to deal with open waveguides. The other method is a formulation of the so-called *partial-waves method* in the Laplace domain. Its attractiveness relies in its versatility and in the fact that computational costs can be very acceptable. In a second time, we consider using both methods to solve problems of diffraction by defects. A boundary element method based on the partial-waves approach is developped and leads to solve very efficiently the case of a planar defect. The possibility of treating more general defects is briefly discussed.

Keywords : layered plate, anisotropy, Lamb mode, ultrasonic guided wave, time domain, unestablished regime, Laplace transform, open waveguide, partial waves, boundary element method, crack

Unité de recherche : UMR 5295
I2M, dept. APY - Bat. A4
351 cours de la Libération F-33400 Talence