



**HAL**  
open science

# Recherche de flots stables dans des réseaux de transport multi-agents

Nadia Chaabane

► **To cite this version:**

Nadia Chaabane. Recherche de flots stables dans des réseaux de transport multi-agents. Automatique. INSA de Toulouse, 2016. Français. NNT : 2016ISAT0028 . tel-01291878v2

**HAL Id: tel-01291878**

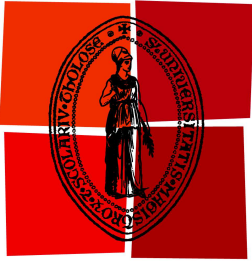
**<https://theses.hal.science/tel-01291878v2>**

Submitted on 21 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Nadia CHAABANE**

le mardi 19 janvier 2016

**Titre :**

Recherche de flots stables dans des réseaux de transport multi-agents

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

EDSYS : Génie Industriel 4200046

**Unité de recherche :**

LAAS-CNRS

**Directeur/trice(s) de Thèse :**

Cyril BRIAND, Professeur des Universités, Université Toulouse 3  
Marie-José HUGUET, Maître de Conférences HDR, INSA Toulouse

**Jury :**

Mourad BAIYOU, Chargé de Recherche CNRS, HDR, Clermont-Ferrand, Rapporteur  
Martine LABBE, Professeur, Université Libre de Bruxelles, Rapporteur  
Aziz MOUKRIM, Professeur des Universités, UT Compiègne, Examineur  
Dominique QUADRI, Maître de Conférences HDR, Université Paris-Sud, Examineur  
Ameur SOUKHAL, Professeur des Universités, Université de Tours, Examineur



*“À mes parents  
À mon mari  
À mon fils.”*

# *Abstract*

In this work, multi-agent network flow problems are addressed. Three types of agents are considered, namely the producer, transportation and customer agents and various network topologies are tackled. Every transportation agent controls the capacities of a set of elementary routes (arcs), each one having a capacity that can be increased up to a certain point at a given cost. The other agents (i.e., customers/producers) are interesting in maximizing their flow of products. For that aim, we assume that they offer to the transportation agents a reward that is proportional to the realized flow value. This particular multi-agent framework is referred to as a multi-agent network expansion game. The transportation agent's strategy consists in deciding upon the capacity of its arcs, an extra-cost being incurred for any capacity expansion. It receives in return a part of the total reward. It is interested in the maximization of its profit and behaves accordingly. Beside that, the producers/customers' strategies consist in deciding the sharing policy for their reward for maximizing their own flow of products. The total network flow value eventually depends on all agents' strategies. We take interest in characterizing and finding particular stable strategies (i.e., Nash Equilibria) that are of interest for this game under various assumptions. Based on this characterization, several cases are defined and studied. The analysis of the complexity of some decision problems is made. We particularly focus on the problem of finding a Nash Equilibrium that maximizes the value of the total flow. We prove that this problem is NP-hard in the strong sense and show how such a strategy can be characterized considering paths in specific reduced agent-networks. We also provide a mixed integer linear programming (MILP) formulation that solves the problem in the case of a single producer/customer agent and a set of transportation agents. Computational experiments are provided to prove the effectiveness of our approach.

**Key words :** Multi-Agent Network flow, Nash Equilibria, Complexity, Expansion Game, MILP.

## *Résumé*

Nous considérons dans ce travail, des problèmes d'optimisation dans des graphes de flot multi-agent. Trois types d'agents sont considérés : les agents producteurs, transporteurs et usagers et différentes variétés de topologies de réseaux sont abordées. Chaque agent transporteur contrôle la capacité d'un ensemble de routes élémentaires (arcs), ayant chacun une capacité qui peut être augmentée jusqu'à une valeur maximale moyennant un coût fixé. Les autres agents (i.e., usagers/producteurs) sont intéressés par la maximisation du flot qu'ils reçoivent. Dans ce but, ces derniers offrent une récompense aux agents transporteurs, cette récompense est proportionnelle à la valeur du flot reçu. Ce contexte multi-agent particulier est appelé jeu expansion de réseau multi-agent. La stratégie d'un agent transporteur consiste à décider de la capacité de ses arcs sachant qu'un coût supplémentaire est encouru pour toute expansion unitaire de capacité. Il reçoit en contrepartie une part de la récompense. Il est intéressé par la maximisation de son profit et se comporte en conséquence. En outre, la stratégie d'un agent producteur/usager consiste à décider de la politique de partage de sa récompense afin de maximiser le flot qu'il reçoit. Le flot total réalisé dépend finalement des stratégies de tous les agents. Dans ces jeux d'expansion de réseau multi-agent, nous nous intéressons à caractériser des stratégies stables (i.e., Equilibre de Nash) selon diverses hypothèses. En se basant sur cette caractérisation, différents cas sont définis et étudiés. L'analyse de la complexité de quelques problèmes de décision est présentée dans ce manuscrit. Nous nous intéressons particulièrement au problème de recherche d'un équilibre de Nash qui maximise la valeur du flot total circulant dans le réseau. Nous montrons que ce problème est NP-difficile au sens fort et nous montrons comment une telle stratégie peut être caractérisée par des chemins spécifiques dans des graphes résiduels. Nous proposons également un programme linéaire à variables mixtes (PLM) qui résout le problème dans le cas d'un seul agent producteur/usager et un ensemble d'agents transporteurs. Des résultats expérimentaux sont fournis pour prouver l'efficacité de notre approche.

**Mots clés :** Réseau de flot multi-agent, Equilibre de Nash, Complexité, Jeu d'expansion, PLM.

## *Remerciements*

Je souhaite remercier en premier lieu mes directeurs de thèse, M. Cyril BRIAND, Professeur des Universités à l'Université Paul Sabatier et Mme Marie-José HUGUET, Maître de Conférences à l'INSA de Toulouse, chercheurs dans l'équipe ROC au LAAS-CNRS pour m'avoir accueilli au sein de cette équipe. Je leur suis reconnaissante pour le temps conséquent qu'ils m'ont accordé, leurs qualités pédagogiques et scientifiques. Je les remercie également pour leurs conseils avisés et leur écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de sincères remerciements à M. Christian ARTIGUES, directeur de l'équipe de recherche ROC au LAAS-CNRS pour m'avoir accueilli chaleureusement au sein de son équipe, sans oublier les membres de l'équipe ROC. Je ne peux pas omettre de citer l'accueil chaleureux qui m'a été réservé au sein du Laboratoire de Méthodologie Décisionnelle, à l'Université de Sienna (Italie) et l'aide précieuse de M. Alessandro AGNETIS.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse M. Mourad BAIYOU, Chargé de Recherche CNRS à l'Université de Clermont-Ferrand et Mme Martine LABBE, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. J'associe à ces remerciements M. Aziz MOUKRIM, Mme Dominique QUADRI et M. Ameer SOUKHAL pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je souhaite remercier spécialement mes parents ainsi que ma petite famille, mes deux amours : mon mari et mon fils pour leurs soutiens et leurs patiences tout au long de la thèse sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui.

# Table des matières

<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vi</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Problèmes de décision multi-agents</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Approches issues de la théorie des jeux . . . . .	5
1.2.1 Théorie des jeux non coopératifs . . . . .	6
1.2.2 Équilibres et stabilité . . . . .	7
1.2.3 Autres jeux . . . . .	9
1.3 Approches issues de l'optimisation combinatoire . . . . .	10
1.3.1 Optimisation multi-objectif . . . . .	10
1.3.2 Optimisation bi-niveaux . . . . .	12
1.3.3 Optimisation distribuée . . . . .	13
1.3.3.1 Problèmes de satisfaction de contraintes distribuées . . .	13
1.3.3.2 Problèmes d'optimisation sous contraintes distribuées . .	14
1.4 Systèmes multi-agents . . . . .	14
1.5 Exemples de problèmes de décision multi-agents . . . . .	15
1.5.1 Planification de réunions . . . . .	15
1.5.2 Gestion de la chaîne logistique . . . . .	16
1.5.3 Jeux dans les réseaux sociaux . . . . .	17
1.5.4 Ordonnancement multi-agent . . . . .	18
1.5.5 Jeux de conception ou d'expansion de réseaux . . . . .	19
1.5.5.1 Conception de réseau . . . . .	19
1.5.5.2 Jeux d'expansion de réseau . . . . .	20
1.6 Positionnement de notre travail . . . . .	22



<b>2 Réseaux de transport multi-agents</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction	25
2.2 Problèmes considérés	25
2.2.1 Énoncé du problème	25
2.2.2 Topologie du réseau	27
2.3 Définitions	28
2.3.1 Définition du jeu d'expansion de réseau	28
2.3.2 Stratégies remarquables	32
2.3.3 Exemple	33
2.4 Le cas mono-producteur ou mono-usager	35
2.4.1 Profit des agents et stratégies pauvres	35
2.4.2 Propriétés basiques	36
2.5 Synthèse des jeux	37
<b>3 Problèmes 0/1/1 et 1/1/0</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction	41
3.2 Jeu d'expansion de réseau 0/1/1	42
3.2.1 Définition formelle du jeu 0/1/1	42
3.2.2 Exemple	44
3.3 Propriétés du jeu	45
3.3.1 Graphe résiduel	45
3.3.2 Variation du flot dans le réseau	46
3.3.3 Dualité	48
3.3.4 Augmenter le flot	49
3.3.5 Diminuer le flot	50
3.4 Jeu d'expansion de réseau 1/1/0	51
3.5 Exemple	51
3.6 Conclusion	52
<b>4 Problèmes 0/m/1 et 1/m/0</b>	<b>53</b>
4.1 Introduction	53
4.2 Jeu d'expansion de réseau 0/m/1	54
4.2.1 Définition formelle du jeu 0/m/1	54
4.2.2 Exemple d'une instance du jeu 0/m/1	55
4.3 Modèle mathématique	56
4.4 Exemple illustratif	57
4.5 Variation de flot	58
4.5.1 Graphe résiduel multi-agent	59
4.5.2 Augmenter le flot de manière profitable	61
4.5.3 Diminuer le flot de manière profitable	61
4.6 Stratégies stables	62
4.7 Conclusion	63
<b>5 Complexité</b>	<b>65</b>
5.1 Introduction	65
5.2 Complexité de trouver un équilibre de Nash	65
5.2.1 Décider si une stratégie est un équilibre de Nash pour le jeu 0/m/1	65

5.2.2	Trouver un équilibre de Nash dans le cas $0/m/1$ pour $w_x$ fixée . . .	66
5.3	Trouver un équilibre de Nash qui maximise le flot pour $0/m/1$ . . . . .	69
5.3.1	Cas d'une politique de partage égalitaire . . . . .	70
5.3.2	Cas d'une politique de partage variable . . . . .	72
5.4	Trouver une stratégie profitable pour $0/m/1$ pour $w_x$ fixée . . . . .	73
5.5	Cas particulier $ \mathcal{E}_x^T  = 1, \forall a_x^T$ . . . . .	75
5.6	Conclusion . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Premier pas vers une généralisation</b>	<b>79</b>
6.1	Introduction . . . . .	79
6.2	Jeu d'expansion de réseau $0/m/p$ . . . . .	80
6.2.1	Caractéristiques du jeu $0/m/p$ . . . . .	80
6.2.1.1	Propriétés basiques . . . . .	82
6.2.2	Variation de flot . . . . .	83
6.2.2.1	Graphe résiduel multi-agent . . . . .	84
6.2.2.2	Augmenter le flot . . . . .	84
6.2.2.3	Diminuer le flot . . . . .	85
6.2.3	Caractérisation d'un équilibre de Nash . . . . .	86
6.3	Jeu d'expansion de réseau $q/m/0$ . . . . .	86
6.4	Jeu d'expansion de réseau $q/m/p$ . . . . .	87
6.4.1	Modèle mathématique . . . . .	88
6.5	Conclusion . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Modèle linéaire à variables mixtes pour le jeu <math>0/m/1</math></b>	<b>91</b>
7.1	Introduction . . . . .	91
7.2	Formulation mathématique . . . . .	92
7.3	Linéarisation des contraintes . . . . .	93
7.3.1	Analyse des coûts résiduels . . . . .	93
7.3.2	Plus court chemin dans le graphe résiduel . . . . .	96
7.4	Modèle linéaire obtenu . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>101</b>
8.1	Introduction . . . . .	101
8.2	Contexte expérimental . . . . .	101
8.2.1	Familles d'instances . . . . .	101
8.2.2	Politique de partage de récompense . . . . .	103
8.3	Analyse des résultats . . . . .	103
8.3.1	Analyse du ratio de flot et des temps d'exécution . . . . .	104
8.3.2	Politiques de partages . . . . .	105
	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>



# Table des figures

1.1	Exemple de front de Pareto . . . . .	11
2.1	Principe du jeu général . . . . .	26
2.2	Topologie du réseau . . . . .	28
2.3	Exemple du jeu $1/m/1$ . . . . .	34
2.4	Exemple d'une stratégie profitable . . . . .	34
2.5	Autres scénarios du jeu $q/m/p$ . . . . .	38
3.1	Principe des jeux à 2 agents . . . . .	41
3.2	Topologie du réseau du jeu $1/1/0$ . . . . .	43
3.3	Jeu d'expansion de réseau avec un agent transporteur . . . . .	44
3.4	Exemple $0/1/1$ : variation de flot . . . . .	51
4.1	Principe des jeux $0/m/1$ et $1/m/0$ . . . . .	53
4.2	Exemple d'une instance du jeu $0/m/1$ . . . . .	56
4.3	Les stratégies pour $W^{(1)}$ . . . . .	57
4.4	Réseau de transport avec $W^{(2)}$ . . . . .	58
5.1	Contre-exemple de MinNash . . . . .	69
5.2	Stratégie de TrouverNash . . . . .	69
5.3	Stratégie de MinNash . . . . .	69
5.4	Exemple de réduction de 3-partition avec $k = 3$ et $w_x = \frac{1}{k}$ . . . . .	71
5.5	Réduction à partir du problème de 3-partition avec $k = 3$ et $w_x$ variable . . . . .	72
5.6	Réduction de 3-partition à MaxProfitable . . . . .	74
6.1	Principe des jeux généralisés . . . . .	80
6.2	Stratégie dans laquelle un agent usager peut améliorer son gain par lui-même . . . . .	81



# Liste des tableaux

2.1	Notation des jeux d'expansion . . . . .	38
4.1	Coûts résiduels des arcs avant . . . . .	59
4.2	Coûts résiduels des arcs arrière . . . . .	60
7.1	Différents scénarios pour les arcs avants . . . . .	95
7.2	Différents scénarios pour les arcs arrières . . . . .	95
8.1	Ratio de flot et temps CPU cumulé - 2 agents transporteurs . . . . .	104
8.2	Ratio de flot et temps CPU cumulé - 5 agents transporteurs . . . . .	105
8.3	Politique de partage optimale pour chaque agent transporteur . . . . .	106
8.4	Poids des agents transporteurs dans l'heuristique . . . . .	106
8.5	Profit de chaque agent transporteur - 2 agents transporteurs . . . . .	106
8.6	Profit de chaque agent transporteur - 5 agents transporteurs . . . . .	107
8.7	Profit de chaque agent transporteur - 5 agents transporteurs (suite) . . .	107
8.8	Profit global . . . . .	108



# Introduction

Dans de nombreuses situations concrètes, la réalisation d’objectifs individuels nécessite une coopération entre un ensemble d’acteurs, chacun négociant ses services dans son intérêt propre, en fonction de ses capacités. Le cas du transport est un exemple parmi d’autres, de telles situations. L’acheminement de produits ou de personnes d’un point à un autre nécessite parfois de négocier avec un ensemble d’acteurs de transport, chacun gérant des connexions entre un point et un autre du réseau, cela à un coût donné, dépendant éventuellement du moment où la négociation est initiée. Un exemple concret est celui du transport aérien civil : un individu souhaitant se rendre d’un point à un autre du territoire peut consulter les prix proposés par les compagnies aériennes pour établir son choix, l’objectif étant ici de trouver le meilleur compromis entre la longueur du voyage, le nombre de correspondances, son coût, la compatibilité des horaires d’arrivée ou de correspondance. Bien sûr, les stratégies de prix des compagnies fluctuent dans le temps en fonction de la demande et du taux de remplissage. Le covoiturage est un autre exemple intéressant de ces situations de coopération : un ensemble de personnes, souhaitant se déplacer d’un point à un autre d’un réseau routier est mis en contact, via une application, avec un ensemble de chauffeurs assurant des connexions d’un point à un autre du réseau, ces derniers monnayant les places non utilisées dans leur voiture ; l’objectif est d’affecter les personnes aux chauffeurs de façon à satisfaire les besoins des uns et les intérêts des autres, tout en respectant les contraintes du système (capacité limitée des voitures, limitation de la distance et du temps de détour imposés aux chauffeurs pour charger ou décharger une personne, heures limites de chargement / déchargement). D’autres situations similaires de transport multi-agent apparaissent dans d’autres domaines tels que la logistique (transport de marchandises), les réseaux de télécommunication, la gestion de “smart-grid”, etc.

Dans ces situations, la prise de décision est délicate car les besoins et intérêts de chacun des acteurs doivent être considérés et conciliés, ceux-ci pouvant être divergents. Il est donc souhaitable de trouver des solutions efficaces, satisfaisant au mieux les besoins des uns, et servant les intérêts des autres. De plus, la confiance que chaque acteur porte à l’autre étant primordiale dans ce type d’environnement, la solution doit aussi être sûre



dans le sens où aucun agent ne doit avoir intérêt à changer ses choix, cela au détriment des intérêts des autres. Dans le cas du covoiturage par exemple, il est clair qu'un chauffeur s'engageant à prendre un passager ne doit pas se soustraire à cette obligation parce qu'il aurait trouvé une autre course à faire plus lucrative. Enfin, d'autres besoins peuvent parfois être considérés pour la construction d'une solution comme, par exemple, le caractère instantané ou séquentiel d'un processus de décision, ou l'incertitude liée à certains paramètres de décision. Du fait de cette complexité, la prise de décision en environnement multi-agent a fait l'objet de nombreuses études dans des communautés scientifiques diverses comme les mathématiques, l'économie, le génie industriel ou l'informatique. Des concepts ont été proposés afin de caractériser les propriétés qu'une solution doit satisfaire et, pour certains problèmes de décision multi-agents, des algorithmes de recherche de solutions ont été conçus permettant de garantir ces bonnes propriétés.

Le travail développé dans ce manuscrit s'intéresse aux problèmes de décision émergents dans des systèmes de transport multi-agents. Nous supposons ici que le trafic de produits ou de passagers est assimilé à un flot dans un graphe modélisant le réseau de transport. Notre étude s'apparente donc aux travaux relevant de la théorie des flots dans les réseaux. Chaque arc du graphe modélise une connexion d'un point à un autre du réseau et est associé à un agent de transport qui contrôle sa capacité (une augmentation de capacité induisant un coût supplémentaire), un même agent de transport pouvant éventuellement contrôler plusieurs arcs. Nous distinguons également un ensemble de nœuds source sur lesquels sont localisés les produits (ou les personnes) à acheminer, et, symétriquement, un ensemble de nœuds puits, en attente de réception de produits (ou de personnes). Nous supposons également que chaque nœud source ou puits est affecté respectivement à un agent producteur ou usager, chacun étant capable de rémunérer les agents de transport pour la satisfaction de leurs besoins de transport. Sous ces hypothèses, nous nous intéressons au problème de détermination d'un flot qui satisfasse des "bonnes" propriétés et proposons une analyse de complexité ainsi que des méthodes de résolution. Nous nous intéressons en particulier à caractériser la stabilité d'une solution en termes de non-existence de certains chemins dans un graphe, la stabilité étant rattachée à la notion d'équilibre de Nash, bien connue dans la théorie des jeux non-coopératifs. La stabilité d'une solution est souhaitable car, sous les hypothèses retenues, elle garantit qu'aucun agent n'aura intérêt à dévier de sa stratégie et donc, que ceux-ci pourront se faire confiance.

Ce manuscrit comporte 9 chapitres. Le premier chapitre retrace les résultats essentiels de la littérature dans le domaine de la décision multi-agent. Nous nous intéressons en particulier aux concepts issus de disciplines relevant de la théorie des jeux non-coopératifs, de l'optimisation multi-objectif et de l'intelligence artificielle. Nous décrivons en particulier certains travaux relevant de ces disciplines, voisins du notre, et situons notre travail

et contributions par rapport à ces derniers. Le second chapitre définit formellement le contexte de notre étude, précise les notations utilisées, les problèmes de décision étudiés et certaines propriétés triviales. Le chapitre 3 s'intéresse à l'étude du cas particulier où le réseau de transport est contrôlé par un seul agent et où il n'existe qu'un seul agent client (producteur ou usager). Les propriétés établies dans ce chapitre sont ensuite généralisée au cas où  $m$  agents de transport contrôlent les capacités du réseau tout en supposant un seul agent client, cela faisant l'objet du chapitre 4. Le chapitre 5 focalise sur certains problèmes de décision mis en évidence par les problèmes considérés, et propose une étude de complexité. Le chapitre 6 initie une réflexion sur le cas général où le nombre d'agents de transport et d'agents producteur et usager n'est pas borné. Enfin, le chapitre 7 propose une méthode de résolution exacte fondée sur la programmation mathématique pour déterminer une solution stable pour le cas considéré au chapitre 4 (un seul agent producteur ou usager). Une évaluation de performance de cette méthode, fondée sur une étude expérimentale, est proposée au chapitre 8. L'analyse des résultats permet, outre d'apprécier l'efficacité de notre méthode, de déduire quelques règles de bon sens. Enfin le dernier chapitre résume les contributions principales de ce travail, précise les limites et propose des perspectives futures de recherche.

Les résultats présentés dans ce manuscrit ont fait l'objet de communications dans des conférences nationales [32], [30], [28] et [29] et internationales [27], [31], [33]. Un article a été soumis dans la revue *Networks Journal* [26].



# Chapitre 1

## Problèmes de décision multi-agents

### 1.1 Introduction

Dans de nombreux champs pratiques, les processus de décision mettent en jeu plusieurs *agents*, ou acteurs, chacun ayant son autonomie décisionnelle, ses contraintes et objectifs propres. Dans ce contexte, où les décisions des uns et des autres interagissent, élaborer une solution qui satisfasse l'ensemble des agents est difficile. Ces problèmes de décision ont suscité beaucoup d'attention dans la littérature et ont été étudiés selon diverses approches, utilisant des concepts différents. Nous distinguons dans ce qui suit trois catégories d'approches. La première, présentée dans la Section 1.2, s'intéresse aux travaux relevant de la théorie des jeux. La Section 1.3 présente les approches issues de l'optimisation, en particulier l'optimisation multi-objectif, multi-niveau et distribuée. Enfin, les approches relevant de l'intelligence artificielle font l'objet de la Section 1.4. La Section 1.5 présente des exemples de problèmes de décision multi-agents de la littérature et les méthodes utilisées pour les résoudre, en se concentrant en particulier sur ceux en relation avec notre étude. Finalement, la Section 1.6 situe notre travail par rapport à la littérature présentée.

### 1.2 Approches issues de la théorie des jeux

La théorie des jeux ([85], [104], [42], etc.) est l'étude mathématique des interactions entre des *agents*, ou joueurs supposés rationnels. Ces agents disposent d'un choix d'actions, ou *stratégies*, et doivent déterminer laquelle choisir dans le but de servir au mieux leur

intérêt propre. Naturellement, le comportement individuel d'un agent, étant guidé par la satisfaction de son intérêt personnel, peut éventuellement desservir celui des autres. Le résultat du choix d'un agent dépend donc de la stratégie globale.

La théorie des jeux constitue une discipline centrale dans diverses disciplines tels que l'économie (voir les travaux fondateurs de Von Neumann et O. Morgenstern [98]), la biologie (principalement avec les jeux évolutifs définis par M. Smith [92]), la finance [5], le transport routier (voir par exemple [102], [87], etc.), les sciences politiques [77] et bien d'autres.

La théorie des jeux est subdivisée en de nombreux domaines selon la nature du jeu, chaque domaine possédant ses concepts et propriétés propres. La nature d'un jeu dépend des règles du jeu. On distingue souvent :

- le cas où les agents peuvent faire des coalitions, de celui où cela est impossible ;
- le cas où les coûts/gains du jeu sont transférables d'un agent à un autre, de celui où un tel transfert est impossible ;
- le cas où chaque joueur possède une connaissance totale des stratégies et intérêts des autres joueurs, de celui où cette connaissance est partielle ou incertaine ;
- le cas où les stratégies des joueurs sont déterministes, de celui où elles sont associées à des distributions de probabilité ;
- le cas où le jeu se joue en un seul coup, de celui où il se répète ;
- le cas où les joueurs élaborent leur stratégie en même temps, de celui, où chacun joue en séquence.

Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur les concepts en lien avec les jeux considérés dans ce manuscrit. Il s'agit de jeux non coopératifs déterministes et simultanés. Nous supposons de plus que la connaissance des stratégies des agents est totale. D'autres types de jeux sont brièvement évoqués à la fin de ce chapitre et au fil des exemples développés dans la partie 1.5.

### 1.2.1 Théorie des jeux non coopératifs

Un **jeu** est constitué de trois éléments : les agents, leurs stratégies et l'ensemble des règles qui définissent les interactions. Les stratégies sont représentées comme un ensemble discret d'actions possibles. L'étude du jeu nécessite alors de considérer les gains résultant de la combinaison de toutes les stratégies possibles, cette énumération pouvant prendre la forme d'une matrice. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux stratégies choisies d'une manière déterministe par les agents. Ce type de décision est nommé stratégie pure.

**Définition 1.1.** *Jeu.*

Formellement, un jeu se déroule entre un ensemble de  $n$  agents  $\{1, \dots, n\}$ . Un agent  $i$  dispose d'un ensemble de stratégies possibles  $\mathcal{S}_i$ . Pour jouer, chaque agent choisit une stratégie  $S_i \in \mathcal{S}_i$  telle que  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_n)$ , le vecteur des stratégies, détermine le gain  $Z_i(\mathcal{S})$  de chaque agent  $i$ .

Le gain  $Z_i(\mathcal{S})$  est aussi appelé fonction utilité et associe à chaque stratégie globale, pour chaque agent, un profit (ou une perte), i.e. :  $Z_i : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ . Une autre notation importante en théorie des jeux est  $\mathcal{S}_{-i}$  qui désigne les stratégies des  $n - 1$  agents autres que  $i$ . Ainsi, le gain d'un agent  $i$ ,  $Z_i(\mathcal{S}) = Z_i(S_i, \mathcal{S}_{-i})$ , dépend de sa stratégie individuelle  $S_i$  et de celle des  $(n-1)$  autres agents.

**1.2.2 Équilibres et stabilité**

Les jeux non coopératifs s'intéressent à la détermination de situations d'équilibre où aucun agent n'aurait intérêt à dévier de sa stratégie courante. De nombreux travaux se sont intéressés à la caractérisation de tels équilibres car ils garantissent la stabilité du jeu, ces travaux ayant été récompensés par plusieurs prix Nobel d'Économie [56], [78], [57].

Commençons par définir la notion de dominance en théorie des jeux :

**Définition 1.2.** *Stratégie dominante.*

Formellement,  $\mathcal{S}$  est une stratégie dominante, si pour chaque acteur  $i$  et pour toute stratégie alternative  $\mathcal{S}'$ , on a :

$$Z_i(S_i, \mathcal{S}_{-i}) \geq Z_i(S'_i, \mathcal{S}_{-i})$$

En d'autres termes, une stratégie est dominante pour un joueur si elle lui donne toujours un gain supérieur ou égal au gain qu'il peut acquérir avec ses autres stratégies et cela, quelles que soient les stratégies des autres joueurs. Une stratégie dominante, si elle caractérise bien une situation stable, n'est pas synonyme de gains optimaux pour tous les agents, ainsi que l'illustre le célèbre exemple du *dilemme du prisonnier*.

Les jeux ayant des stratégies dominantes étant rares, un concept plus faible d'équilibre a été introduit par J. Nash en 1951 [79].

**Définition 1.3.** *Équilibre de Nash.*

$\mathcal{S}$  est un équilibre de Nash, si pour chaque acteur  $i$ , on a :

$$Z_i(S_i, \mathcal{S}_{-i}) \geq Z_i(S'_i, \mathcal{S}_{-i})$$

En d'autres termes, aucun joueur  $i$  n'a intérêt à modifier sa stratégie de  $S_i$  vers  $S'_i$ , étant donnée les stratégies des autres agents, supposées fixes. Il est clair qu'une stratégie dominante est un équilibre de Nash. Notons qu'il existe des jeux qui possèdent une multitude d'équilibres de Nash et d'autres qui n'en admettent aucun. De plus, cette notion d'équilibre de Nash s'applique aussi bien aux stratégies déterministes (pures) considérées dans ce travail, qu'à celles mixtes, où des densités de probabilité sont associées aux stratégies des agents.

Deux autres notions importantes dans la théorie des jeux sont celles du *prix de l'anarchie* et du *prix de la stabilité*. Ces notions interviennent lorsqu'un objectif social commun aux agents est considéré en plus des autres éléments déjà présents dans le jeu. Il est ici convenu que chacun souhaite contribuer à l'optimisation de cet objectif, dans la mesure où cela ne dessert par ses intérêts individuels. Concrètement, un objectif social peut correspondre à la minimisation d'un coût global lié à la stratégie (construction d'un réseau, mise en place d'un marché, etc.) ou à la maximisation d'un profit (volume d'affaires, quantité de produits échangés, etc.). Le prix de l'anarchie mesure en quelque sorte l'inefficacité d'une situation d'équilibre dans laquelle, bien que l'objectif social puisse être amélioré, aucun agent n'aurait intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie. Koutsoupias et Papadimitriou [63] ont introduit cette mesure définie comme le ratio entre la pire valeur de la fonction objectif globale (sociale) dans un équilibre de Nash et sa valeur optimale.

**Définition 1.4.** *Prix de l'anarchie.*

Soient  $\mathcal{S}^N$  l'ensemble de tous les équilibres de Nash et  $C : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction qui exprime le bien-être social du jeu (à minimiser), le prix de l'anarchie (PoA) est donné par :

$$PoA = \frac{\max_{\mathcal{S} \in \mathcal{S}^N} C(\mathcal{S})}{\min_{\mathcal{S}} C(\mathcal{S})}$$

D'une manière similaire, les théoriciens de la théorie des jeux ont défini le prix de la stabilité (PoS) [8] qui exprime le ratio entre la meilleure valeur de la fonction objectif d'un équilibre et celle de l'optimum.

**Définition 1.5.** *Prix de la stabilité.*

Soient  $\mathcal{S}^N$  l'ensemble de tous les équilibres de Nash et  $C : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction qui exprime le bien-être social du jeu, le prix de la stabilité (PoS) est défini par :

$$PoS = \frac{\min_{\mathcal{S} \in \mathcal{S}^N} C(\mathcal{S})}{\min_{\mathcal{S}} C(\mathcal{S})}$$

Le prix de la stabilité indique quel équilibre serait le meilleur pour la collectivité, s'il existait un tiers capable de guider les agents vers un équilibre. Il est alors intéressant de

mesurer l'écart entre le prix de la stabilité et celui de l'anarchie, cet écart pouvant être très important, mais aussi parfois nul, en fonction du jeu considéré.

La littérature de la théorie des jeux est de plus en plus riche de travaux qui s'intéressent à la conception d'algorithmes pour la recherche d'équilibres, le calcul du prix de l'anarchie ou de la stabilité, ou la définition de règles de négociation entre agents offrant de bonnes propriétés [81]. Ce type d'approche relève de la théorie des jeux algorithmique, branche à laquelle notre travail s'apparente.

### 1.2.3 Autres jeux

Les jeux que nous avons présentés jusqu'ici sont des jeux simultanés où les joueurs décident en même temps de leurs stratégies. Ce sont ceux qui nous intéressent dans le cadre de ce manuscrit. Notons qu'il existe d'autres types de jeux étudiés dans la littérature comme les jeux séquentiels ou les jeux répétés.

Dans un jeu séquentiel, on définit une relation d'importance entre les agents qui détermine l'ordre dans lequel les joueurs décident de leurs stratégies. L'agent meneur décide de sa stratégie en premier en incorporant les réactions possibles des autres agents, les agents suiveurs observent le choix du premier et décide de leurs stratégies en fonction de la stratégie de l'agent meneur. Le jeu séquentiel a été initialement introduit par Stackelberg [94] qui considère un jeu où deux firmes n'ont pas la même force sur le marché. Le premier joueur (le meneur) décide de sa stratégie et le deuxième (le suiveur) adapte sa stratégie en fonction, de manière à maximiser son profit. Le premier joueur pouvant anticiper la réaction du deuxième selon les fonctions de réponse définies dans le jeu, il peut l'incorporer dans sa prise de décision. La solution obtenue est un équilibre de Stackelberg [94].

Ce concept de jeu séquentiel s'applique également aux structures hiérarchiques, la compétition étant décrite sur plusieurs niveaux. Dans les réseaux de télécommunication par exemple, on peut considérer le cas d'un fournisseur de service qui propose des services de différentes qualités, destinés à satisfaire plusieurs catégories de clients. Par ailleurs, la qualité du service fournie dépend aussi de l'effet de congestion. Le gain résultant des stratégies des joueurs clients va déterminer le gain du fournisseur qui doit décider des services proposés et des prix de manière à garantir la stabilité entre les abonnés. Étant le meneur sur le marché, le fournisseur peut anticiper la réponse des clients et produire une stratégie qui maximise son gain tout en garantissant la stabilité du marché [6].

Un autre type de jeu considéré dans la littérature est le jeu répété [1], qui est un jeu ordinaire réitéré plusieurs fois de suite. Un jeu ordinaire est un jeu statique dans lequel



les joueurs choisissent simultanément leurs actions. Ces jeux peuvent être répétés sur un horizon fini ou infini. Les conditions de jeu ne se modifient pas d'une période à une autre : même nombre de joueurs, même ensemble de stratégies possibles, même fonction d'utilité, etc. La répétition de ce jeu permet aux joueurs de conditionner leurs choix présents et futurs par les choix passés. Une dépendance temporelle des stratégies due à l'apprentissage est ici prise en compte qui peuvent conduire à des solutions plus efficaces que celles obtenues dans un jeu statique. En effet, tout équilibre de Nash peut être atteint dans un jeu infiniment répété (théorème de Folk).

## 1.3 Approches issues de l'optimisation combinatoire

### 1.3.1 Optimisation multi-objectif

Il est facile d'associer un problème d'optimisation multi-agent à un jeu, l'intérêt de chaque agent étant associé à une fonction à optimiser. Ce problème d'optimisation multi-agent est donc un problème d'optimisation multi-objectif particulier. De ce fait, les concepts de l'optimisation multi-objectif s'appliquent.

**Définition 1.6.** *Optimisation multi-agent.*

Soit un jeu à  $m$  agents dans lequel chacun cherche à maximiser son gain  $Z_i(\mathcal{S})$  (sous la contrainte que  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  représente l'ensemble des alternatives réalisables), le problème d'optimisation multi-agent correspondant est défini par :

$$\max(Z_1(\mathcal{S}), \dots, Z_m(\mathcal{S})), \text{ sous contrainte que } \mathcal{S} \in \mathcal{E}$$

La qualité d'une solution d'un tel problème d'optimisation est évaluée par rapport aux objectifs de chaque agent qui peuvent être contradictoires.

Dans le cas de problème d'optimisation mono-objectif, deux solutions différentes peuvent être comparées aisément. En effet, l'ordre total induit par l'unique objectif est suffisant pour déterminer quelle est la meilleure solution, celle qui maximiserait par exemple un bien être social.

Dans des problèmes multi-objectifs, il n'existe généralement pas de solution unique qui optimise tous les objectifs à la fois, mais une multitude de solutions correspondant à différents compromis.

Afin de mesurer un compromis entre les différents objectifs, le concept de dominance au sens de Pareto a été introduit [99].

**Définition 1.7.** *Dominance de Pareto (faible).*

Étant données deux solutions  $s$  and  $s'$  d'un problème d'optimisation multi-objectif (en

maximisation) et étant donné un ensemble de fonctions objectif  $f_i$  définies pour chacun des agents :

$$s \text{ domine au sens de Pareto } s' \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(s) \geq f_i(s') \\ \text{et } \exists i \in \{1, \dots, m\}, f_i(s) > f_i(s') \end{cases}$$

L'idée est qu'une solution  $s$  domine au sens de Pareto une solution  $s'$  si  $s$  est au moins aussi bonne que  $s'$  pour tous les objectifs et strictement meilleure que  $s'$  pour au moins un objectif. On s'intéresse à déterminer l'ensemble, ou un sous-ensemble, des solutions dominantes au sens de Pareto. On parle de dominance forte si  $f_i(s) > f_i(s') \forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Définition 1.8.** *Optimalité de Pareto*

Une solution  $s$  est dite Pareto optimale si et seulement s'il n'existe aucune autre solution  $s' \neq s$  tel que  $s'$  domine  $s$  au sens de Pareto.

L'ensemble des solutions Pareto optimales représente les situations pour lesquelles il n'existe aucune autre solution qui améliore un objectif sans dégrader les autres. Le schéma de la Figure 1.1 représente un front de Pareto pour la maximisation de deux objectifs, chaque solution appartenant au front est une solution Pareto-optimale.

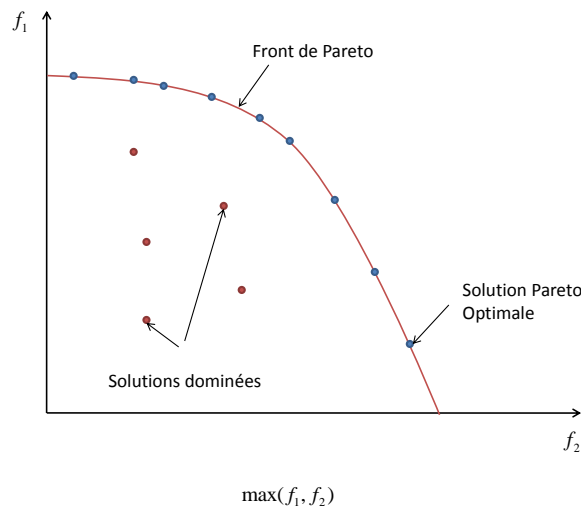


FIGURE 1.1 – Exemple de front de Pareto

Dans un contexte multi-agent, nous dirons qu'une stratégie est efficiente si elle correspond à un optimum de Pareto dans le problème d'optimisation multi-agent. La notion de front de Pareto est ici liée à une efficacité sociale [43] : une stratégie efficiente, dans un contexte multi-agent, est une stratégie qui n'est dominée par aucune autre stratégie. On peut par exemple s'intéresser à trouver une solution, si elle existe, qui soit à la fois stable au sens de Nash et optimale au sens de Pareto [86].

### 1.3.2 Optimisation bi-niveaux

Les problèmes d'optimisation bi-niveaux s'intéressent à des systèmes présentant une relation hiérarchique entre deux niveaux différents de décision. Ce concept a été introduit dans [19] et a connu de nombreuses applications dans l'industrie, les services ou les transports [22, 51].

Le modèle de décision est séquentiel : au plus haut niveau hiérarchique un acteur cherche à déterminer une décision optimale relativement à un environnement dont il a une représentation mais qu'il ne contrôle pas, sa décision entraîne à son tour une réaction de l'environnement, considéré ici comme le niveau hiérarchique inférieur. Par exemple, dans un problème de transport, un opérateur peut chercher à optimiser son offre de transport, le niveau bas correspondant aux utilisateurs qui, en fonction de l'offre, optimisent leur stratégie. Un autre exemple de ce problème apparaît dans les marchés, lorsqu'une entreprise cherche à établir le prix le meilleur pour les services ou les produits qu'elle propose sachant, qu'en fonction de ce prix, les utilisateurs peuvent éventuellement décider de ne pas acheter le produit ou d'aller à la concurrence [23].

Les décisions du premier niveau (meneur) influençant la stratégie du second (suiveur) et inversement, ce modèle bi-niveau est très proche du modèle de jeu séquentiel de Stackelberg [94].

Plus formellement,  $x$  et  $y$  étant deux vecteurs de décision,  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  deux fonctions objectifs, et  $X$  et  $Y$  deux ensembles de décisions réalisables associés à deux centres de décision, le meneur et le suiveur respectivement, le problème d'optimisation bi-niveau peut être défini comme suit :

$$\begin{array}{ll}
 \max_{x,y} & f(x, y) \\
 \text{sous contraintes que} & (x, y) \in X \\
 & y \in S(X) \\
 \text{où} & S(X) = \arg \min g(x, y) \\
 \text{sous contraintes que} & (x, y) \in Y
 \end{array} \tag{1.1}$$

Nous renvoyons le lecteur vers l'article [34] pour une discussion sur la modélisation de problèmes d'optimisation bi-niveaux et sur une étude de leurs techniques de résolution. Précisons que, même sous l'hypothèse que les fonctions objectifs et contraintes sont linéaires, le problème d'optimisation bi-niveau est NP-difficile.

### 1.3.3 Optimisation distribuée

Dans la continuité de la section précédente, nous discutons maintenant de problèmes où le modèle de décision est complètement distribué, le modèle précédent correspond donc à un cas particulier de ce contexte plus général. On suppose à présent que chaque acteur est maître de ses décisions et que celui ci interagit avec les autres de façon non nécessairement hiérarchique. Nous nous intéressons ici essentiellement aux deux modèles suivants :

- les problèmes de satisfaction de contraintes distribuées ou `DisCSP` (Distributed Constraint Satisfaction Problem) ;
- les problèmes d’optimisation sous contraintes distribuées ou `DCOP` (Distributed Constraint Optimization Problem).

#### 1.3.3.1 Problèmes de satisfaction de contraintes distribuées

Le problème de satisfaction de contraintes distribué a été initialement introduit par Yokoo [106] et [105]. Un `DisCSP` est un problème de satisfaction de contraintes (CSP) où les variables d’un CSP sont distribuées entre un ensemble d’agents. Un agent peut uniquement décider de la valeur des variables qu’il contrôle. Il peut connaître la valeur affectée à une variable d’un autre agent uniquement s’il est lié à cette variable par une contrainte. Cette classe de problèmes a fait l’objet de plusieurs travaux pour trouver des algorithmes génériques de résolution distribuée. Dans [106], les auteurs proposent un algorithme asynchrone nommé Asynchronous Backtracking (ABT) qui permet aux agents de décider de manière simultanée des valeurs affectées à leurs variables. Chaque agent prend une décision et en informe les autres agents, sans qu’aucun agent n’ait besoin d’attendre les décisions des autres. L’algorithme ABT calcule une solution globale consistante dans un temps fini. Plusieurs améliorations ont été apportées à cet algorithme pour former une famille d’algorithmes asynchrones qui diffèrent essentiellement par la façon de stocker les messages d’infaisabilité entre deux agents et par l’ajout de contraintes supplémentaires pour stocker les informations obsolètes [16]. Ces algorithmes peuvent s’appliquer aussi dans les problèmes multi-niveaux avec une hiérarchie entre les agents présentée par un arbre de décision.

D’autres algorithmes distribués intégrant des mécanismes de propagation de contraintes ont été également introduits. Dans [73], les auteurs proposent l’algorithme Asynchronous Forward Checking (AFC) dont le principe est de propager les instanciations vers les agents dont les variables ne sont pas encore instanciées. L’instanciation dans AFC est effectuée par un agent à la fois, tout en gardant l’instanciation partielle consistante.

### 1.3.3.2 Problèmes d'optimisation sous contraintes distribuées

Dans un DCOP, on cherche à optimiser un objectif global dans un contexte distribué contrairement aux DisCSP où les agents coopèrent entre eux afin de satisfaire toutes les contraintes. Plusieurs méthodes de résolution de DCOP sont apparues comme l'algorithme Synchronous Branch and Bound [75] qui adapte le principe de résolution des DisCSP en poursuivant l'exploration de l'arbre de recherche même si une solution réalisable a été mise en évidence, afin d'obtenir une garantie d'optimalité. L'algorithme Asynchronous Distributed Optimization (ADOPT) est une méthode asynchrone et complète pour le problème DCOP [75]. Il permet d'obtenir une garantie sur la qualité d'une solution trouvée, lorsque l'exécution de l'algorithme est interrompue avant la fin. Cette garantie prend la forme d'un écart relatif maximal entre la qualité de la solution obtenue et l'optimum puisque les agents calculent en tout instant une borne optimiste sur la qualité de la solution. Plusieurs auteurs ont fait des liens entre les DisCSP et DCOP et la théorie des jeux. Par exemple, dans [55], les auteurs modélisent un jeu graphique comme un problème DCOP incluant des agents, les variables et des relations asymétriques. Le jeu graphique, initialement décrit dans [61], est une forme alternative de représentation d'un jeu se basant sur un graphe d'interactions entre les agents. Il utilise une matrice qui combine les stratégies locales pour la détermination des gains des agents (i.e., dans chaque jeu local, uniquement des agents voisins peuvent influencer leurs utilités). Les auteurs modélisent le problème comme un jeu de satisfaction de contraintes distribuées dans lequel chaque agent possède une information partielle sur les contraintes qui l'unissent aux autres. Ils montrent qu'une solution satisfaisant les contraintes du problème résultant est un équilibre de Nash et développent un algorithme de backtracking asynchrone (Asynchronous Nash Backtracking algorithm, ANT). Cet algorithme (ANT) est une nouvelle variante de Asynchronous Backtracking (ABT) [106] qui permet aux agents de travailler de manière simultanée. Durant le déroulement de l'algorithme, si la réponse d'un agent n'est pas la meilleure réponse à l'affectation courante, l'agent le moins prioritaire est amené à faire une nouvelle proposition. On rejoint ici des travaux de la théorie des jeux identifiés sous le nom de *mechanism design* qui s'intéressent à définir des règles d'interactions entre agents dont l'application permet d'atteindre des stratégies remarquables en termes d'équilibre [80, 82].

## 1.4 Systèmes multi-agents

Les problèmes d'interaction entre plusieurs agents ont également reçu un grand intérêt de la part de la communauté d'Intelligence Artificielle (IA) pour traiter des systèmes complexes. Là encore, le principe retenu est de diviser les problèmes complexes en des

sous-problèmes plus simples à appréhender et qui sont en relation entre eux, la résolution de chaque sous problème étant contrôlé par un agent (Système Multi-Agent : SMA). Ici le sous problème n'est pas traité nécessairement comme un problème d'optimisation. Chaque agent a en général une mission spécifique et des compétences qu'il acquiert à travers ses interactions avec l'environnement. Une première définition d'un agent a été donnée dans [47] comme *"une entité réelle ou abstraite capable d'agir sur elle-même et son environnement sur lequel elle dispose d'information partielle, qui, dans un univers multi-agent peut communiquer avec d'autres agents, et dont le comportement est la conséquence de ses observations, de sa connaissance et des interactions avec des autres agents"*.

Cette communauté s'intéresse plus particulièrement à des agents cognitifs, autonomes et collaboratifs où un agent est représenté par un programme informatique. La communication entre les agents se base sur un langage commun caractérisé par une syntaxe prédéfinie (structure des symboles), une sémantique (définissant le sens de ces symboles) et une pragmatique (la manière dont ils devront être utilisés) [103]. Les interactions permettent aux agents de s'organiser afin de réaliser un but collectif comme la résolution de problèmes d'optimisation. Ces interactions mettent en jeu des mécanismes d'apprentissage [96] ou d'autres, empruntés à la théorie des jeux, comme des jeux d'enchères [83].

On peut citer par exemple, plusieurs travaux dans le domaine des transports [72] tels que le transport de marchandises [49], la recherche d'itinéraires, le covoiturage [93] et [62] ou la gestion de trafic [24].

## 1.5 Exemples de problèmes de décision multi-agents

### 1.5.1 Planification de réunions

Une application de la théorie des jeux algorithmiques est le problème de planification de réunions ou d'événements, appelé MSP pour Meeting Scheduling Problem. En effet, ce contexte peut être modélisé comme un jeu où des utilités sont introduites pour exprimer l'importance accordée par un agent à chaque événement.

Plusieurs articles ont traité ce problème dans un contexte distribué (voir par exemple [70], [74], [100], etc.). Dans ceux-ci, les auteurs modélisent les jeux MSP selon les approches DiCSP ou DCOP selon si on s'intéresse ou non à maximiser les utilités ou à trouver une solution réalisable.

Une approche alternative qui assimile explicitement le MSP à un jeu est proposée dans [54]. Les agents sont rationnels et s'intéressent à leur propre utilité. Un mécanisme de coopération est proposé par les auteurs basé sur des enchères, l'objectif étant de trouver une planification acceptée par tous les participants. Chaque joueur présente son offre pour une planification proposée en spécifiant ses préférences pour les différents créneaux. Une fois les propositions collectées, un créneau horaire est choisi selon divers mécanismes qui considèrent l'utilité totale ou l'utilité minimale. Dans [35], les auteurs considèrent le problème de sélection de groupes d'activités. Chaque agent participe au maximum à une activité et exprime ses préférences qui dépendent du nombre d'agents participant à cette activité. L'objectif étant d'affecter les agents aux activités en se basant sur leurs préférences et sur le nombre de participants souhaités pour chaque activité. Le jeu exploite un système de vote approuvé basé sur les jeux "hedonic" (voir [17]). Le principe de ces jeux est qu'un agent exprime ses préférences pour des coalitions anonymes auxquelles il peut participer (préférences qui dépendent de la cardinalité de la coalition) et dont le résultat est une partition des acteurs dans les coalitions. Ils montrent que décider si ce jeu admet une affectation individuellement rationnelle ou stable au sens de Nash est NP-complet.

### 1.5.2 Gestion de la chaîne logistique

Dans différents problèmes issus de situations réelles, tel que la gestion de chaînes logistiques, du fait de la nécessité de faire coopérer des acteurs appartenant à des entités juridique et financière différentes, voire même concurrentes, une approche de résolution centrale peut s'avérer totalement irréaliste [89]. Plusieurs chercheurs ont abordés ces problèmes en distinguant un ensemble de centres de décision, qui se coordonnent pour élaborer : des décisions stratégiques (telle que la politique budgétaire), tactiques (par exemple l'élaboration d'un plan de production à moyen terme) ou opérationnelles (comme l'ordonnancement de la production).

Dans un contexte centralisé, Fink [48] propose un cadre de négociation, supposant l'existence d'un médiateur indépendant, entre deux entreprises voulant coordonner leurs productions. Le problème considéré est un problème d'ordonnancement où le produit d'une entreprise constitue la matière première nécessaire pour la production de l'autre. Chaque entreprise souhaite améliorer ses performances, le médiateur essaie de trouver un compromis sous forme d'une séquence de tâches pour les deux entreprises. Le médiateur a ici une vision partielle des objectifs de chaque entreprise, il propose alors des solutions qui vont être acceptées ou refusées. Afin d'assurer que les entreprises coopèrent, la fonction d'acceptation est probabiliste et force les entreprises à accepter un pourcentage de détérioration de leur profit.

L'analyse de l'autonomie décisionnelle des acteurs d'une chaîne logistique a été au centre de travaux s'appuyant sur des approches distribuées pour tenir compte de leurs spécificités [15, 76]. Par exemple, dans [97], les acteurs d'une chaîne logistique sont assimilés à des centres de décision autonomes devant réaliser des actions. Ils peuvent accepter ou refuser les requêtes des autres entités et agir en conséquence. D'autres chercheurs se sont intéressés à des approches davantage hiérarchisées. Ils s'intéressent aux mécanismes d'agrégations et de désagrégations des décisions au sein d'une même entité décisionnelle. Dans [4] et [18], les auteurs présentent par exemple une caractérisation formelle de ces relations dans le cadre de relations coopératives et hiérarchiques. L'approche se base sur un modèle de décision générique dupliqué au niveau de chaque centre décisionnel. Dans [68], les auteurs proposent une vision globale du réseau décisionnel et proposent trois types de modélisations : hiérarchique, coordonné et hétérarchique. Le premier possède un système central qui coordonne et assure la consistance des décisions, le second possède des centres de décisions qui se coordonnent en utilisant des informations partielles et le dernier modélise des relations intra-unités de décision. Cette dernière approche garantit une réactivité des unités de décision sans passer par une unité centrale mais ne peut pas assurer la coordination des décisions.

### 1.5.3 Jeux dans les réseaux sociaux

Dans le domaine des réseaux sociaux, la prédiction du comportement des agents a intéressé de nombreux chercheurs. Plusieurs travaux ont mis l'accent sur les jeux associés à diverses formes de réseaux sociaux (voir [95] pour un aperçu). D'autres ont étudié les comportements sociaux des domaines applicatifs spécifiques.

Dans une étude récente, Apt et Markakis (2011) [11] ont étudié la complexité de trouver un équilibre de Nash pour un réseau social dans lequel on s'intéresse à la diffusion de produits multiples. S'inspirant du principe des réseaux sociaux (tels que Facebook ou Twitter), les auteurs considèrent qu'un agent est influencé par les préférences et choix de ses amis sur le réseau social. Les agents, représentés par des nœuds d'un graphe, sont influencés par leurs voisins et peuvent choisir une alternative de produits parmi plusieurs possibles. Dans ce graphe, la liaison entre deux agents est représentée par un arc pondéré qui représente le sens et le poids de cette influence. L'utilité d'un agent dépend uniquement du choix de ses voisins. Dans le jeu étudié, le gain de chaque agent augmente légèrement avec le nombre d'agents qui choisissent la même stratégie que lui, ce qui est exactement le contraire de l'effet de congestion. Ils montrent que décider si le jeu admet un équilibre de Nash est NP-complet.



Ultérieurement, dans [91] et [12] des variantes de ce problème ont été étudiées. En particulier, ces travaux caractérisent un réseau social dans lequel tous les agents choisissent les produits étant donnée une fonction de profit unique. Cette caractérisation permet de trouver un algorithme polynomial qui résout le problème. Ils montrent également que déterminer s'il existe un réseau social pour lequel tous les nœuds adoptent un même produit, est NP-complet. Ces problèmes deviennent faciles quand le jeu est composé uniquement de deux produits.

#### 1.5.4 Ordonnancement multi-agent

D'autres chercheurs ont porté une attention particulière au problème d'ordonnancement multi-agent. En effet, en particulier dans le domaine de l'ordonnancement de production, les environnements sont souvent multi-agents par essence, soit parce que les travaux à ordonnancer sont partagés entre plusieurs agents qui sont en compétition pour l'utilisation de ressources, soit parce que, plusieurs décideurs ayant des objectifs contradictoires sont concernés par l'ordonnancement d'un même ensemble travaux, soit encore parce que les activités à ordonnancer sont réalisées par des agents différents. Pour considérer ces problèmes, deux types d'approches sont distinguées ici : le premier aborde le problème sous l'angle de l'optimisation multi-objectif ; le second, davantage lié à ce travail, s'intéresse à l'ordonnancement de projet, appelé Multi-Agent Project Scheduling problem ou MAPS, abordé sous l'angle de la théorie des jeux.

Dans les recherches apparentées à l'ordonnancement multi-agent et multi-objectif, on distingue plusieurs classes de problèmes selon les relations ensemblistes existant entre les travaux associés aux agents [2]. Lorsque tous les agents considèrent le même ensemble de travaux, l'ordonnancement multi-agent s'apparente à un problème multi-objectif classique où chaque agent considère son propre objectif (différent de celui des autres). Si chaque agent possède ses travaux propres, on dit que les agents sont en compétition pour l'utilisation des machines. Si par contre, les ensembles de travaux ne sont pas disjoints mais qu'il existe une relation d'inclusion entre les ensembles pris deux à deux, on dit que les agents sont interférants. Le cas quelconque est désigné sous le nom de la classe des problèmes *non-disjoints*. Ces problèmes ont été très étudiés dans la littérature. Nous renvoyons le lecteur vers l'ouvrage collectif [2] pour un état de l'art très complet sur ces problèmes.

Dans le domaine de l'ordonnancement de projet, les ressources participant à l'exécution du projet n'étant pas considérées explicitement, plusieurs chercheurs se sont intéressés à un environnement où les activités du projet sont distribuées entre un ensemble d'agents [45]. C'est l'hypothèse utilisée dans les travaux de Estevez et Fernandez (2012)

[44] qui s'intéressent au partage des pénalités/récompenses entre les agents a posteriori, une fois le projet exécuté, selon si un agent a été source d'avance ou de retard pour le projet. D'autres travaux se sont intéressés au cas où la durée des activités est contrôlable comme dans [37], la réduction d'une durée opératoire induisant des coûts supplémentaires. Par exemple, Briand et al. [20] considèrent un jeu non coopératif représenté par un graphe où les activités sont sur les nœuds. Ce jeu implique un ensemble d'agents, chacun d'eux est responsable de l'exécution d'une partie du projet et contrôle les durées d'exécution de ses activités. Un agent client est prêt à récompenser les agents s'ils parviennent à minimiser la durée totale du projet. Ce prix est partagé entre les agents qui participent dans le projet. Pour ce contexte particulier, il est montré, dans [3], que trouver un équilibre de Nash minimisant la durée totale du projet est NP-difficile au sens fort. Par ailleurs, en utilisant les concepts de coupes augmentante et décroissante, comme définies dans [60], et la dualité entre les problèmes de flot maximum et de coupe minimale, les auteurs proposent une formulation à variables entières efficace pour résoudre le problème [21].

D'autres approches de résolution de l'ordonnancement multi-agent relève plutôt de l'Intelligence Artificielle. Dans [108], les auteurs modélisent un jeu d'ordonnancement de tâches dans un réseau de flot multi-agent en considérant des fonctions d'utilités. Chaque agent possède un ensemble de ressources nécessaires pour exécuter différentes tâches et doit décider de la répartition de ses ressources entre les tâches afin de maximiser son utilité. Dans [66] et [67], les auteurs considèrent un ordonnancement de projet distribué impliquant des agents autonomes et proposent une approche basée sur la négociation entre les agents afin de montrer l'intérêt du partage d'information entre les agents. Dans [101], les auteurs considèrent un problème d'ordonnancement de projet décentralisé et proposent un cadre général de résolution qui se focalise sur le respect des contraintes de ressources. Différentes possibilités d'organisation (bottom-up, to-down, équivalent) et de prise de décision sont considérées où chaque projet est contrôlé par un gestionnaire de projet. Une décision est associée à une activité, à une ressource ou à un coordinateur.

### **1.5.5 Jeux de conception ou d'expansion de réseaux**

#### **1.5.5.1 Conception de réseau**

Dans cette section, nous présentons certains jeux de conception de réseaux, qui se focalisent sur l'analyse de la perte d'efficacité due au fait que les agents rationnels se comportent d'une manière égoïste. D'une manière générale, dans un jeu de conception de réseau, le coût d'utilisation d'un arc est partagé entre les agents qui l'utilisent.

Dans ce domaine, les travaux développés s'intéressent essentiellement aux problèmes de conception de réseaux partagés où chaque agent veut à la fois, minimiser son coût pour créer/utiliser le réseau, et augmenter la qualité de service dans le réseau. L'intérêt est focalisé sur la prévision du comportement des agents. Plusieurs études se sont concentrées sur les jeux associés à différentes formes de réseaux. Nous regroupons ici une revue de quelques travaux.

Ce problème a été initialement introduit par [10] et [9] pour construire des réseaux partagés. Dans ces jeux de conception de réseaux partagés, un agent détient son ensemble propre de nœuds dans le réseau. Son objectif est d'augmenter la connectivité globale de ses nœuds à coût minimum. Il participe ainsi financièrement à créer un ensemble d'arcs dans le réseau, la connectivité du réseau étant la principale mesure de qualité. Les coûts sont définis par arc, et les agents qui utilisent un arc partagent son coût selon une politique de partage équitable. Un autre effort quantitatif d'analyse de la perte d'efficacité dans des réseaux stables a été réalisé par Fabrikant et al. (2003) [46]. Ici, les auteurs considèrent un jeu de conception locale de réseau. Chaque agent, représenté par un nœud, mesure la qualité du réseau comme la somme des distances vers tous les autres nœuds. L'objectif d'un agent est de minimiser une fonction combinant à la fois la qualité du réseau et le coût de construction. Cette fonction exprime le compromis entre la minimisation de la somme des coûts de construction et de la distance vers tous les autres agents. Dans [95], les auteurs considèrent un jeu d'implantation d'installations (Facility Location Game) où les agents payent un coût par arc et définissent un prix d'usage pour les agents usagers. Dans ce jeu, les acteurs placent des installations pour servir des clients contre un prix d'usage. Le profit des agents est la différence entre le prix d'usage et le coût supporté. Ils montrent qu'un réseau efficient socialement est stable. Leur objectif est de borner la perte d'efficacité résultante du comportement rationnel des agents (i.e., Prix de l'Anarchie (POA) et Prix de la Stabilité (POS)).

### 1.5.5.2 Jeux d'expansion de réseau

Une question naturelle dans plusieurs applications de problème de réseau concerne la détermination d'une augmentation de capacité à coût minimum. On parle alors de problèmes d'expansion de réseau. Plusieurs applications de ce problème ont eu lieu dans différents domaines, tels que la production de biens [107], les services publics d'électricité [71], les télécommunications [65], la gestion des stocks [58] et le transport [69], [52] et [84]. La plupart des approches considère un environnement mono-agent. Notre travail étant centré sur ces problèmes d'expansion, nous les passons rapidement en revue avant de nous focaliser sur la version multi-agent de ce problème.

Fulkerson [52] a été un des premiers à considérer le problème d'allocation de budget de ressources dans un réseau afin d'augmenter sa capacité de circulation de flot par rapport à une source et un puits donnés. L'auteur propose un algorithme d'étiquetage pour calculer l'allocation optimale étant donné un coût d'augmentation linéaire de la capacité sur les arcs.

Ordóñez et Zhao (2007) [84] considèrent le problème d'expansion des capacités dans un réseau soumis à une demande et à des temps de trajet incertains. Ils proposent une approche d'optimisation robuste pour trouver une solution d'expansion de réseau de transport minimisant les coûts. Dans [39], les auteurs considèrent un problème d'expansion de capacité d'un réseau en supposant que le coût d'augmentation de la capacité d'un arc dépend de ses caractéristiques physiques, notamment sa longueur. Ce travail est étendu dans [40] et [41], où les auteurs affinent l'algorithme déjà proposé pour tenir compte d'une structure de réseau plus complexe, à savoir avec plusieurs origines et destinations. Dans [41], les auteurs présentent un algorithme pour minimiser l'investissement consacré à augmenter la capacité d'un réseau de transport à plusieurs origines et destinations. L'algorithme prend en compte les demandes des destinations et les restrictions économiques ou techniques dans l'expansion de capacité. À chaque étape, l'algorithme choisit l'arc le moins coûteux, ce qui assure que la solution entière est à coût minimum. L'inconvénient de cet algorithme est qu'il utilise des appels répétitifs à l'algorithme de Ford-Fulkerson, ce qui affecte l'efficacité de l'algorithme pour les réseaux de grandes tailles. Dans [13], les auteurs considèrent le problème de planification de capacité dans des réseaux de télécommunication modélisés comme des problèmes de flot multimodaux avec un coût de capacité et une demande incertaine. Ils présentent une méthode d'optimisation robuste pour trouver un compromis entre la qualité de service exigée et le coût d'investissement.

Dans [7], une application concrète de ce travail est proposée dans le domaine de l'exploitation agricole. Une méthode basée sur la programmation dynamique est proposée pour optimiser le niveau d'investissement pour plusieurs investisseurs.

Nous nous intéressons à présent au contexte multi-agent. Dans [88], les auteurs considèrent un jeu coopératif défini dans des réseaux de flot, où les agents forment des coalitions pour faire circuler du flot. Les auteurs focalisent leur analyse sur le cœur du jeu coopératif, qui contient toutes les distributions stables de la coalition. Dans un contexte de jeu coopératif, une coalition est stable si elle vérifie à la fois la stabilité interne et externe selon D'Aspremont et al. (1983). La stabilité interne signifie qu'aucun agent coopérant n'a intérêt à quitter la coalition pour améliorer son propre profit. La stabilité externe signifie que toute répartition en dehors de l'ensemble est dominée par au moins un membre de l'ensemble [36]. Si le cœur du jeu est vide, c'est-à-dire s'il n'existe aucune coalition stable, alors les auteurs supposent qu'un organisme externe peut allouer un

paiement supplémentaire à la coalition, ce qui peut stabiliser le jeu si le paiement est suffisamment élevé. Les auteurs étudient dans ce cadre le Prix de la stabilité (PoS) pour les jeux de réseaux de flot avec seuil (Threshold Network Flow Game ou TNFG). Un jeu de réseau de flot avec seuil (TNFG) est un jeu coopératif où chaque agent contrôle un arc du réseau et forme des coalitions pour faire circuler du flot d'un nœud source vers un nœud puits, la coalition étant stable si le flot résultant est supérieur à un seuil donné. Dans ce cadre, il est prouvé que déterminer si une distribution donnée est stable est CoNP-complet.

Le TNFG a été aussi étudié par [59] et [14]. Les auteurs s'intéressent à calculer des indices de pouvoir pour chaque agent. Ces indices reflètent le poids réel d'un agent et sont estimés par un système de vote pondéré. Pour garantir que le réseau soit capable d'assurer le flot désiré, des ressources sont allouées en fonction de leur impact sur la valeur du flot (i.e., les ressources doivent être allouées sur des arcs dont la défaillance est davantage susceptible d'entraîner une baisse du flot). Ils montrent que le calcul de ces indices dans ce type de réseau est NP-difficile mais que le calcul du cœur du jeu peut être fait en temps polynomial.

## 1.6 Positionnement de notre travail

Notre travail s'intéresse à revisiter un problème particulier de réseau, le problème d'expansion de réseaux, dans un contexte multi-agent. La nature et la complexité des problèmes d'optimisation de réseaux varient considérablement quand on considère un contexte multi-agents.

Dans ce travail, nous considérons un réseau de transport modélisé par un graphe de flot, impliquant plusieurs agents, chacun d'eux étant en charge d'une partie des arcs du réseau. Chaque agent transporteur contrôle les capacités de ses arcs, le coût supporté par l'agent étant supposé proportionnel à l'augmentation de capacité.

Nous étudions principalement le problème de recherche de stratégie stable, i.e., équilibre de Nash, qui maximise le flot transporté dans le réseau que nous comparons au flot maximum accessible. Dans ce travail, nous nous situons dans un contexte de jeu non-coopératif et nous assimilons une stratégie stable à un équilibre de Nash. Comme pour le problème d'Ordonnancement de Projet multi-agent étudié dans [3, 20], nous supposons qu'il existe un agent client récompensant les agents en fonction du flot qu'il reçoit : le gain d'un agent de transport dépend donc de sa stratégie et de la satisfaction de l'agent client, qui est liée au flot circulant dans le réseau. La politique de partage sera tour à

tour considérée fixe ou, au contraire, libre. Nous présentons dans la partie expérimentale (cf. chapitre 8) une comparaison entre les deux approches.

Une application importante à ce problème est l'expansion de la capacité d'un réseau de transport (ferroviaire, routier, pipelines, etc.) pour couvrir des pics de demandes ou pour absorber des augmentations futures en présence de plusieurs opérateurs de transport, éventuellement concurrents. Nous supposons que les usagers du système de transport rémunèrent les opérateurs de transport librement, cela proportionnellement au flot offert. Dans un tel système, le bien-être social peut être assimilé au flot total véhiculé au sein du réseau.

Notre travail présente donc de fortes similitudes avec le problème MAPS décrit dans [3], bien que le problème étudié soit différent de celui de l'ordonnancement de projet. Nous nous situons également dans la mouvance des travaux développés par [59, 88] et [14] qui s'intéresse à des jeux coopératifs d'expansion de réseau. Cependant, nous faisons l'hypothèse ici d'un environnement non-coopératif, où les acteurs ne forment pas de coalition et ne partagent pas les coûts d'expansion. Les jeux de construction de réseau sont eux aussi relativement proches bien que, dans notre cas, les agents contrôlent la capacité des arcs.



## Chapitre 2

# Réseaux de transport multi-agents

### 2.1 Introduction

Ce chapitre formalise le contexte de notre étude, définit les notations utilisées dans la suite du manuscrit et établit quelques propriétés. Nous présentons dans ce chapitre les différents jeux considérés et leur formalisation. La Section 2.2 présente l'énoncé du problème et la topologie du réseau de transport considéré. Dans la Section 2.3 nous présentons une définition formelle du jeu d'expansion de réseau et de quelques stratégies remarquables, tout en illustrant le jeu par un exemple. La Section 2.4 est consacrée au cas particulier mono-agent producteur et/ou usager. Nous présentons dans cette partie les propriétés basiques qui caractérisent ce jeu. La Section 2.5 conclut ce chapitre en présentant une synthèse des jeux considérés dans cette thèse. Elle présente également d'autres scénarios possibles, et qui ne seront pas étudiés dans ce travail.

### 2.2 Problèmes considérés

#### 2.2.1 Énoncé du problème

Dans le cadre de cette thèse, nous considérons un jeu d'expansion de réseau multi-agent. D'une manière générale, nous considérons des jeux impliquant trois types d'agents rationnels : des *agents producteurs*, des *agents transporteurs* et des *agents usagers*. Les agents producteurs sont responsables de la mise à disposition de produits à acheminer à travers le réseau de transport. Leur objectif est de maximiser la quantité de leurs produits



circulant dans le réseau. Chaque agent transporteur détient son propre ensemble d'arcs dans le réseau et est capable d'augmenter la capacité de ses arcs à coût fixe moyennant des ressources supplémentaires. La capacité d'un arc de transport a une valeur *normale* (minimale) et peut être augmentée jusqu'à une valeur maximale. La valeur normale de la capacité est la valeur que l'on peut utiliser pour faire circuler des produits dans le réseau à coût nul. Les agents usagers, comme leur nom l'indique, sont des utilisateurs du réseau, ils veulent maximiser la quantité de produits reçus, pour satisfaire leur demande en produits. Nous supposons que les agents ne coopèrent pas et ne forment donc pas de coalition.

Selon le nombre d'agents de chaque type en interaction, nous considérerons différents scénarios possibles entre les agents comme le résume la Figure 2.1 dans laquelle  $T$  représente les agents de transport,  $U$  les agents usagers,  $P$  les agents producteurs et où  $F$  et  $\pi$  indiquent l'existence d'un flux de produits et d'un flux financier (une récompense), respectivement. Dans les différents scénarios du jeu, les agents transporteurs du réseau  $T$  jouent un rôle central du fait qu'ils reçoivent des récompenses pour faire circuler du flot. Contrairement à [25], où les auteurs supposent que la récompense est partagée entre les agents selon des ratios collectivement convenus durant la phase de conception du réseau, on suppose ici que la politique de partage peut être partie intégrante de la prise de décision des producteurs et usagers.

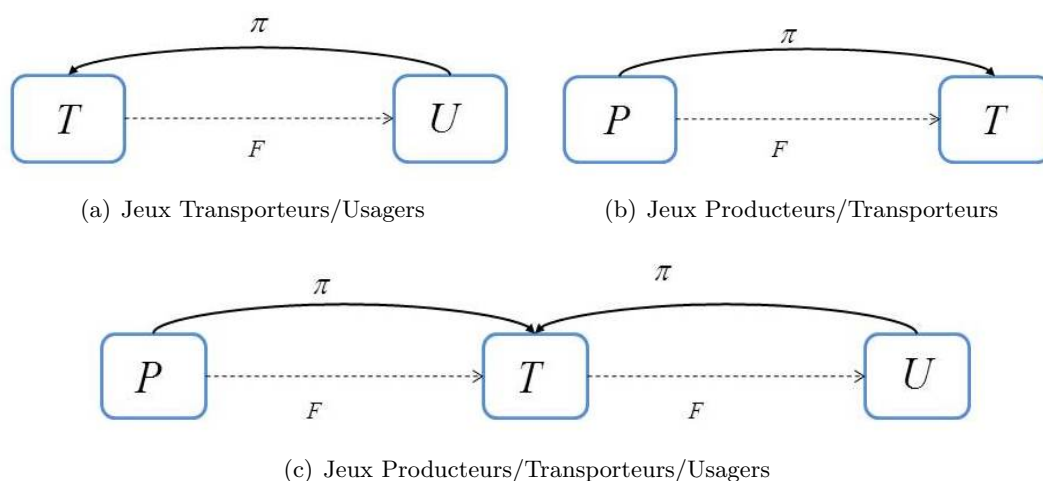


FIGURE 2.1 – Principe du jeu

La Figure 2.1(a) illustre le cas d'un jeu entre des agents usagers et des agents transporteurs exclusivement. Ce jeu se déroule comme suit : les agents usagers donnent une *récompense* aux agents transporteurs proportionnelle à leur quantité de produits circulant dans le réseau. Cette récompense a pour but de motiver ces derniers à augmenter

leurs capacités (cf. [3, 44]), les gains des agents transporteurs étant égaux à la récompense reçue moins les coûts d'expansion de leurs arcs. La stratégie d'un agent usager consiste à décider la politique de partage de sa récompense entre les agents transporteurs afin de maximiser la quantité de produits reçus. Le jeu décrit dans la Figure 2.1(b) est symétrique à celui considéré dans (a) : les agents producteurs donnent une récompense aux agents transporteurs pour les inciter à augmenter la capacité de leurs arcs et augmenter ainsi la quantité de marchandises circulant dans le réseau.

La Figure 2.1(c) considère un scénario de jeu d'expansion qui se déroule entre les trois types d'agents et mixe les deux cas précédents. Les agents transporteurs décident des capacités de leurs arcs et reçoivent une récompense de la part des agents usagers et/ou producteurs. Quant à eux, les agents usagers et producteurs décident du partage des récompenses entre les transporteurs, toujours afin de maximiser la quantité de produits qui circule dans le réseau.

### 2.2.2 Topologie du réseau

Nous considérons une topologie particulière du réseau multi-agent, représentée sur la Figure 2.2 où les agents sont affectés aux arcs du réseau.

Le réseau multi-agent peut être décomposé en trois parties séparées par deux coupes  $C_1$  et  $C_2$ .

La première coupe  $C_1$  contient tous les arcs des agents producteurs et la deuxième coupe  $C_2$  contient tous les arcs des agents usagers. Les arcs de la coupe  $C_1$  appartiennent chacun à un agent producteur. Ces arcs représentent le réseau des agents producteurs  $P$  et relient le nœud super-source  $S - s$  avec des agents transporteurs. Un arc (i.e., un centre de production) est caractérisé par un intervalle d'offre minimale et maximale  $[\underline{o}_{i,j}, \bar{o}_{i,j}]$  que l'on supposera égale à  $[0, +\infty]$  (la prise en compte d'offre minimale et maximale ne changeant pas fondamentalement la nature du problème).

La seconde partie est le réseau formé par les agents de transport  $T$  composé d'arcs qui assurent l'acheminement des produits des producteurs vers les clients. Chaque arc de transport est caractérisé par un intervalle de capacité minimale et maximale  $[\underline{q}_{i,j}, \bar{q}_{i,j}]$  et par un coût d'expansion unitaire  $c_{i,j}$ . Le réseau  $T$  ainsi défini permet la circulation d'un flot à travers des chemins dont les arcs sont distribués entre différents agents transporteurs.

De façon symétrique, la deuxième coupe  $C_2$  correspond aux agents usagers  $U$  qui relient le réseau de transport avec le super-puits  $S - t$ . Un arc appartenant à un agent usager est caractérisé par un intervalle de demande minimale et maximale  $[\underline{d}_{i,j}, \bar{d}_{i,j}]$  que l'on

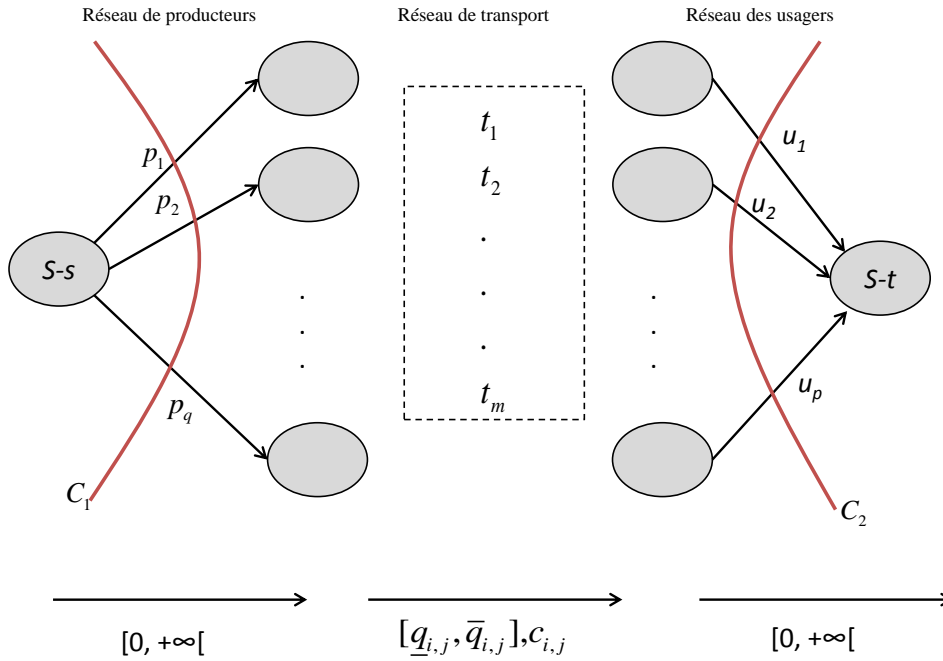


FIGURE 2.2 – Topologie du réseau

supposera aussi égale à  $[0, +\infty[$ .

Dans cette topologie, chaque chemin de la super-source vers le super puits commence obligatoirement par un arc appartenant à seul un agent producteur et finit nécessairement par un arc appartenant à un seul agent usager. Le modèle de graphe associé est un graphe de flot (aussi appelé réseau de transport).

## 2.3 Définitions

### 2.3.1 Définition du jeu d'expansion de réseau

Nous considérons un jeu non-coopératif d'expansion de réseau se déroulant simultanément entre un ensemble de  $q$  agents producteurs, de  $m$  agents transporteurs et de  $p$  agents usagers. Ce jeu consiste à étendre la capacité d'un réseau de transport multi-agent afin de faire circuler des produits depuis leurs centres de production vers les usagers via un réseau de transport central. Ce réseau multi-agent est assimilé à un graphe de flot où les arcs sont distribués entre des agents ayant différents rôles. Les agents usagers et/ou producteurs veulent maximiser leur flot circulant dans le réseau et donnent pour cela

une récompense fixée pour chaque unité de flot supplémentaire circulant sur l'un de leurs arcs. Chaque agent transporteur contrôle la capacité de ses arcs qui varie entre sa valeur normale et maximale. Simultanément, les agents usagers et/ou producteurs décident de leur politique de partage de récompense et les agents transporteurs décident la capacité de leurs arcs respectifs.

Nous considérons que maximiser le flot total circulant dans le réseau est l'objectif global (ou social) poursuivi par tous les agents. Cet objectif global est une conséquence directe des objectifs individuels des agents usagers ou producteurs. Les agents transporteurs coopèrent pour satisfaire cet objectif global, à condition bien sûr que leurs profits soient améliorés.

Le jeu, appelé Jeu d'Expansion de Réseau (NEG) (Network Expansion Game), décrit ci-dessus, se déroule dans un Réseau Multi-Agent (RMA), défini comme suit :

**Définition 2.1.** *Réseau Multi-Agent.*

Un RMA est décrit par un tuple  $\langle G, \mathcal{A}, \underline{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{I}}, \mathcal{C}, \Pi \rangle$  où :

- $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est un graphe de flot.  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des nœuds où  $S-s, S-t \in \mathcal{V}$  sont les nœuds super-source et super-puits du graphe  $G$ , respectivement. L'ensemble des arcs  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^P \cup \mathcal{E}^T \cup \mathcal{E}^U$  est réparti entre les producteurs  $\mathcal{E}^P$ , les transporteurs  $\mathcal{E}^T$  et les usagers  $\mathcal{E}^U$  selon la topologie décrite précédemment (cf. Section 2.2.2). Notons par  $e = (i, j)$  un arc  $e$  allant du nœud  $i$  au nœud  $j$ .
- $\mathcal{A} = \mathcal{A}^P \cup \mathcal{A}^T \cup \mathcal{A}^U$  est l'ensemble des agents qui composent le jeu, où :
  - $\mathcal{A}^T = \{a_1^T, \dots, a_x^T, \dots, a_m^T\}$  est l'ensemble des  $m$  agents transporteurs;
  - $\mathcal{A}^U = \{a_1^U, \dots, a_y^U, \dots, a_p^U\}$  est l'ensemble des  $p$  agents usagers.
  - $\mathcal{A}^P = \{a_1^P, \dots, a_z^P, \dots, a_q^P\}$  est l'ensemble des  $q$  agents producteurs;
- $\underline{\mathcal{I}} = (\underline{q}_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}^T}$  désigne le vecteur de capacité normale entière pour les arcs de l'ensemble  $\mathcal{E}^T$ . Ce vecteur représente la quantité de produits qu'un agent peut transporter sur ses arcs sans payer de coût supplémentaire;
- $\bar{\mathcal{I}} = (\bar{q}_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}^T}$  désigne le vecteur de capacité maximale entière pour les arcs de l'ensemble  $\mathcal{E}^T$  et représente la quantité maximale de produits qu'un agent peut transporter.
- $\mathcal{C} = (c_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{A}^T}$  désigne le vecteur de coûts unitaires d'expansion pour les transporteurs;
- $\Pi = (\pi_u)_{u \in \mathcal{A}^U \cup \mathcal{A}^P}$  est le vecteur de récompenses données par les agents usagers et/ou producteurs pour chaque unité additionnelle de flot qui circule sur un de leurs arcs.

Les arcs du réseau multi-agent sont définis comme suit :

- chaque agent transporteur  $a_x^T$  possède un ensemble de  $m_x^T$  arcs, que nous notons  $\mathcal{E}_x^T$ . Chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}^T$  appartient à exactement un et un seul agent

transporteur :  $\mathcal{E}_x^T \cap \mathcal{E}_{x'}^T = \emptyset, \forall (a_x^T, a_{x'}^T) \in \mathcal{A}^T \times \mathcal{A}^T$  tel que  $x \neq x'$ . Chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}^T$  est caractérisé par une valeur normale et maximale de la capacité  $\underline{q}_{i,j}$  et  $\bar{q}_{i,j}$ , respectivement. Un agent transporteur peut augmenter la capacité d'un arc  $(i, j) \in \mathcal{E}^T$  par une unité moyennant un coût  $c_{i,j}$ .

- chaque agent usager  $a_y^U$  possède un ensemble de  $m_y^U$  arcs, que nous notons  $\mathcal{E}_y^U$ . Chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}^U$  appartient à exactement un seul agent usager :  $\mathcal{E}_y^U \cap \mathcal{E}_{y'}^U = \emptyset$  pour chaque paire d'agents usagers  $(a_y^U, a_{y'}^U) \in \mathcal{A}^U \times \mathcal{A}^U$  tel que  $y \neq y'$ .
- chaque agent producteur  $a_z^P$  possède un ensemble de  $m_z^P$  arcs, que nous notons  $\mathcal{E}_z^P$ . Chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}^P$  appartient à exactement un seul agent usager :  $\mathcal{E}_z^U \cap \mathcal{E}_{z'}^U = \emptyset$  pour chaque paire d'agents usagers  $(a_z^P, a_{z'}^P) \in \mathcal{A}^P \times \mathcal{A}^P$  tel que  $z \neq z'$ .

**Définition 2.2.** *Jeu d'expansion de réseau.*

Un jeu d'expansion de réseau est caractérisé par un RMA et un vecteur de stratégies  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^T, \mathcal{S}^U, \mathcal{S}^P)$  composé :

- des stratégies des agents transporteurs :  $\mathcal{S}^T = (S_1^T, \dots, S_m^T)$  où  $S_x^T = (q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}_x^T}$  est la stratégie de l'agent transporteur  $a_x^T$ . La capacité  $q_{i,j}$  choisie par l'agent  $a_x^T$  est un entier qui vérifie  $q_{i,j} \in [\underline{q}_{i,j}, \bar{q}_{i,j}]$  pour tout arc  $(i, j) \in \mathcal{E}_x^T$  ;
- des stratégies des agents usagers :  $\mathcal{S}^U = (S_1^U, \dots, S_p^U)$  où  $S_y^U = w^y = (w_x^y)_{x=1, \dots, m}$  est la stratégie de l'agent usager  $a_y^U$  et représente sa politique de partage pour chaque unité de flot additionnelle circulant sur un de ses arcs  $(i, j) \in \mathcal{E}_y^U$ . Le partage de récompense  $w^y$  choisi par l'agent usager  $a_y^U$  est tel que :  $\sum_{x \in \mathcal{A}^T} w_x^y = 1$ .
- des stratégies des agents producteurs :  $\mathcal{S}^P = (S_1^P, \dots, S_q^P)$  où  $S_z^P = w^z = (w_x^z)_{x=1, \dots, m}$  est la stratégie de l'agent producteur  $a_z^P$  et représente sa politique de partage pour chaque unité de flot additionnelle circulant sur un de ses arcs  $(i, j) \in \mathcal{E}_z^P$ . Le partage de récompense  $w^z$  choisi par l'agent producteur  $a_z^P$  est tel que :  $\sum_{x \in \mathcal{A}^T} w_x^z = 1$ .

Concernant les agents transporteurs, deux stratégies particulières peuvent être caractérisées :

- $\underline{\mathcal{S}}^T$  représente la stratégie pour laquelle les stratégies individuelles des agents transporteurs sont minimales : les agents transporteurs fixent leurs capacités à leurs valeurs normales :  $q_{i,j} = \underline{q}_{i,j}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}^T$ , qu'elle que soit la stratégie des agents usagers et/ou producteurs ;
- $\bar{\mathcal{S}}^T$  représente la stratégie pour laquelle les stratégies individuelles des agents transporteurs sont maximales : les agents transporteurs fixent leurs capacités à leurs valeurs maximales :  $q_{i,j} = \bar{q}_{i,j}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}^T$ .

**Définition 2.3.** *Flot maximal.*

Étant donnée une stratégie  $\mathcal{S}$ , on note  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  un vecteur de flot **maximum** compatible avec les valeurs des capacités des arcs fixées par les agents de transport :  $0 \leq f_{i,j} \leq q_{i,j}$ ,

$\forall(i, j) \in \mathcal{E}^T$ . Il est supposé positif sur les arcs des agents producteurs (respectivement usagers) :  $0 \leq f_{i,j}, \forall(i, j) \in \mathcal{E}^P$  (respectivement  $0 \leq f_{i,j}, \forall(i, j) \in \mathcal{E}^U$ ).

La valeur du flot est notée  $F(\mathcal{S}) = \sum_{(s,j) \in \mathcal{E}} f_{s,j}$ , où  $s$  est un nœud fictif qui représente la source du réseau de transport.

Nous notons  $\underline{F}$  la valeur maximale du flot qui peut circuler dans le réseau pour la stratégie particulière  $\underline{\mathcal{S}}^T$  :  $\underline{F}$  représente la valeur maximale de flot à coût nul pour les agents de transport.

Remarquons que, pour une stratégie donnée  $\mathcal{S}$ , trouver un flot  $F(\mathcal{S})$  de valeur maximale dans le réseau de transport peut se faire en temps polynomial à l'aide de l'algorithme de Ford-Fulkerson [50]. De plus, les valeurs de  $q_{i,j}$  étant entières, le flot résultant est entier. Nous noterons par la suite  $F_y(\mathcal{S})$ , respectivement  $F_z(\mathcal{S})$ , le flot maximal reçu par l'agent usager  $a_y^U$ , respectivement par l'agent producteur  $a_z^P$ . Remarquons que ces valeurs dépendent entièrement du vecteur de flot maximum  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  choisi. Par définition  $F_y(\mathcal{S}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_y^U} (f_{i,j})$  et  $F_z(\mathcal{S}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_z^P} (f_{i,j})$ .

Nous notons aussi par  $\underline{F}_y$  (respectivement  $\underline{F}_z$ ), la valeur maximale de flot reçue par un agent usager  $a_y^U$  (respectivement par un agent producteur  $a_z^P$ ) à capacité minimale, i.e., à coût nul, pour les agents de transport en supposant que cet agent client (usager ou producteur) soit **seul** à recevoir le flot.

**Définition 2.4.** *Profit des agents.*

Les profits  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}^T, \mathcal{Z}^U, \mathcal{Z}^P)$  des différents agents sont définis par rapport à une stratégie  $\mathcal{S}$  de la manière suivante :

- pour tout agent de transport  $a_x^T$ , son profit  $Z_x^T(\mathcal{S})$  représente l'écart entre la part de récompense qu'il reçoit des agents usagers et/ou producteurs et les coûts qu'il supporte pour augmenter la capacité de ses arcs au delà de leurs valeurs normales :  $Z_x^T(\mathcal{S}) = \sum_{y \in \mathcal{A}^U} (w_x^y \times \pi_y) \times (F_y(\mathcal{S}) - \underline{F}_y) + \sum_{z \in \mathcal{A}^P} (w_x^z \times \pi_z) \times (F_z(\mathcal{S}) - \underline{F}_z) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^T} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$ .
- pour tout agent usager  $a_y^U$  et pour tout agent producteur  $a_z^P$ , les profits respectifs  $Z_y^U(\mathcal{S})$  et  $Z_z^P(\mathcal{S})$  correspondent à la valeur de flot qui circulent sur leurs arcs respectifs :  $Z_y^U(\mathcal{S}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_y^U} (f_{i,j})$  et  $Z_z^P(\mathcal{S}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_z^P} (f_{i,j})$ .

**Définition 2.5.** *Objectif social.*

En complément du profit des différents agents, on considère pour toute stratégie  $\mathcal{S}$ , un objectif global  $Z(\mathcal{S})$ , ou objectif social, correspondant au flot total circulant dans le réseau. Cet objectif social correspond à la somme des profits individuels des agents usagers (respectivement producteurs) :  $Z(\mathcal{S}) = \sum_{a_y^U \in \mathcal{A}^U} Z_y^U(\mathcal{S}) = \sum_{a_z^P \in \mathcal{A}^P} Z_z^P(\mathcal{S})$ .

### 2.3.2 Stratégies remarquables

Dans cette section, nous allons caractériser différentes stratégies remarquables.

**Définition 2.6.** *Stratégie profitable.*

Une stratégie  $\mathcal{S}$  est **profitable** si et seulement si les profits des agents sont tous non négatifs :  $Z_x^T \geq 0, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T, Z_y^U \geq 0, \forall a_y^U \in \mathcal{A}^U$  et  $Z_z^P \geq 0, \forall a_z^P \in \mathcal{A}^P$

Pour les agents de transport, la stratégie  $\underline{\mathcal{S}}^T$  est profitable dans la mesure où elle caractérise une circulation de flot à coût nul pour les agents de transport et pour laquelle aucune récompense n'est attribuée. Elle est également profitable pour les agents producteurs et usagers dans la mesure où elle correspond à un flot positif ou nul.

La résolution du problème **MaxProfitable** défini ci-dessous permet de caractériser des stratégies profitables maximisant le flot circulant dans le réseau.

**Définition 2.7.** *Problème MaxProfitable.*

Étant donnée une instance du jeu NEG, le problème **MaxProfitable** consiste à trouver une stratégie  $\mathcal{S}^*$  telle que :

$$F(\mathcal{S}^*) = \max\{F(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ est une stratégie profitable}\}.$$

Une stratégie est dite **stable** si aucun agent n'a intérêt à modifier sa stratégie afin d'améliorer son profit au détriment des autres agents. Cette notion de stabilité est liée à la notion d'équilibre de Nash dans les jeux non-coopératifs (cf. [78], [79], [82] et [90]). Par la suite, nous assimilons la notion de stratégie stable à celle d'équilibre de Nash.

La stabilité d'une stratégie est importante du fait qu'elle garantit que les agents peuvent se faire mutuellement confiance. Une stratégie idéale serait à la fois stable et efficiente au sens de Pareto. Désignons par  $\mathcal{S}_{-u}$  la stratégie globale de tous les agents, excepté celle de l'agent  $a_u$ . Nous distinguons trois cas possibles pour cette stratégie particulière  $\mathcal{S}_{-u}$  selon la nature de l'agent  $a_u$  :

- si  $a_x^T \in \mathcal{A}^T$ ,  $\mathcal{S}_{-x} = (\mathcal{S}^P, \mathcal{S}_{-x}^T, \mathcal{S}^U)$  avec  $\mathcal{S}_{-x}^T = (S_1^T, \dots, S_{x-1}^T, S_{x+1}^T, \dots, S_m^T)$ ;
- si  $a_y^U \in \mathcal{A}^U$ ,  $\mathcal{S}_{-y} = (\mathcal{S}^P, \mathcal{S}^T, \mathcal{S}_{-y}^U)$  avec  $\mathcal{S}_{-y}^U = (S_1^U, \dots, S_{y-1}^U, S_{y+1}^U, \dots, S_p^U)$ .
- si  $a_z^P \in \mathcal{A}^P$ ,  $\mathcal{S}_{-z} = (\mathcal{S}_{-z}^P, \mathcal{S}^T, \mathcal{S}^U)$  avec  $\mathcal{S}_{-z}^P = (S_1^P, \dots, S_{z-1}^P, S_{z+1}^P, \dots, S_p^P)$ ;

Une stratégie pour laquelle un seul agent quelconque  $a_u$  modifie sa stratégie  $S_u$  est désignée par  $\mathcal{S} = (S_u, \mathcal{S}_{-u})$ . Le profit résultant d'une telle stratégie est noté par  $Z_z^P(S_z^P, \mathcal{S}_{-z})$  pour un producteur  $a_z^P$ ,  $Z_x^T(S_x^T, \mathcal{S}_{-x})$  pour un transporteur  $a_x^T$  et par  $Z_y^U(S_y^U, \mathcal{S}_{-y})$  pour un usager  $a_y^U$ .

**Définition 2.8.** *Équilibre de Nash.*

Étant donnée une instance du jeu NEG, la stratégie  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^T, \mathcal{S}^U, \mathcal{S}^P)$  est un équilibre

de Nash si et seulement si pour tout agent quelconque  $a_u$  (transporteurs, usagers ou producteurs), ayant une stratégie donnée  $S_u$ , il n'est pas possible d'améliorer son profit en choisissant une autre stratégie  $S'_u$ . Ce qui signifie formellement que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall a_x^T \in \mathcal{A}^T, \forall S'_x \neq S_x^T, Z_x^T(S_x^T, \mathcal{S}_{-x}) \geq Z_x^T(S'_x, \mathcal{S}_{-x});$
- $\forall a_y^U \in \mathcal{A}^U, \forall S'_y \neq S_y^U, Z_y^U(S_y^U, \mathcal{S}_{-y}) \geq Z_y^U(S'_y, \mathcal{S}_{-y});$
- $\forall a_z^P \in \mathcal{A}^P, \forall S'_z \neq S_z^P, Z_z^P(S_z^P, \mathcal{S}_{-z}) \geq Z_z^P(S'_z, \mathcal{S}_{-z}).$

L'ensemble des stratégies équilibres de Nash est noté  $\mathcal{S}^N$ .

La résolution du problème **MinNash** défini ci-dessous permet de caractériser une stratégie stable minimisant le flot circulant dans le réseau.

**Définition 2.9.** *Problème MinNash.*

Étant donnée une instance du jeu **NEG**, le problème **MinNash** consiste à trouver une stratégie  $\mathcal{S}^*$  telle que :

$$F(\mathcal{S}^*) = \min\{F(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ est un équilibre de Nash}\}.$$

De façon symétrique, la résolution du problème **MaxNash** défini ci-dessous permet de caractériser des stratégies stables maximisant le flot circulant dans le réseau.

**Définition 2.10.** *Problème MaxNash.*

Étant donnée une instance du jeu **NEG**, le problème **MaxNash** consiste à trouver une stratégie  $\mathcal{S}^*$  telle que :

$$F(\mathcal{S}^*) = \max\{F(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ est un équilibre de Nash}\}.$$

Résoudre les problèmes **MinNash** et **MaxNash** est nécessaire pour pouvoir déterminer les prix de l'anarchie et de la stabilité, tels que définis au chapitre 1, dans le cas où l'objectif social est la valeur du flot total circulant dans le réseau de transport.

### 2.3.3 Exemple

Considérons le réseau dans la Figure 2.3 avec deux agents transporteurs  $a_1^T$  et  $a_2^T$  un agent usager et un agent producteur souhaitant transporter la plus grande valeur de flot de produit du nœud  $S - s$  vers le nœud  $S - t$  et offrant chacun une récompense



$\pi = 60$ , partagée selon la politique  $S_y^U = S_z^P = (w_1, w_2)$ . Le premier et le dernier arcs représentent l'agent producteur et l'agent usager, respectivement. Ils sont caractérisés par un intervalle de capacité non borné et une récompense égale à 60 pour chacun des deux agents. Le premier arc relie la super source  $S - s$  avec le nœud  $A$  (i.e., la source fictive du réseau  $T$ ) alors que le dernier arc relie le nœud  $D$  (i.e., le puits fictif du réseau  $T$ ) avec le super puits  $S - t$ . Les arcs appartenant à chaque agent transporteur dans le réseau  $T$  sont  $\mathcal{E}_1^T = \{b = (A, C), c = (B, C), d = (B, D)\}$  et  $\mathcal{E}_2^T = \{a = (A, B), e = (C, D)\}$ , représentés par les arcs simples et pointillés, respectivement. Les intervalles de capacités normales et maximales  $([\underline{q}_{i,j}, \bar{q}_{i,j}])$ , et les coûts d'expansion  $(c_{i,j})$  apparaissent sur chaque arc du graphe. Par exemple, considérons l'arc  $a$  allant de  $A$  vers  $B$ , l'intervalle de capacité est  $[0, 2]$  et le coût d'expansion unitaire est égal à 50.

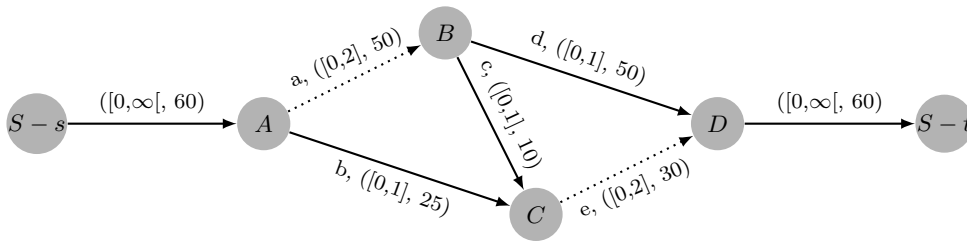


FIGURE 2.3 – Exemple d'une instance du jeu 1/m/1

Si les agents producteurs et usagers choisissent tous les deux une politique de partage égalitaire, la part de chaque agent de transport pour une augmentation du flot d'une unité est égale à 60 (30 en provenance de l'agent producteur et 30 en provenance de l'agent usager).

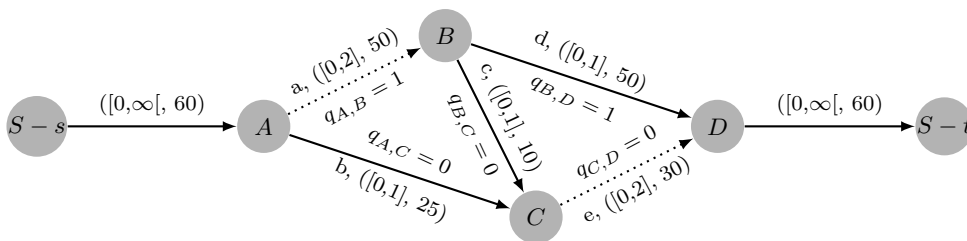


FIGURE 2.4 – Exemple d'une stratégie profitable

Dans la Figure 2.4, les deux agents transporteurs décident de fixer les capacités de leurs arcs respectifs  $(A, B)$  et  $(B, D)$  à la valeur 1. Ces décisions permettent de faire circuler une unité de flot dans le réseau. Cette stratégie est profitable puisque chaque agent transporteur aura un gain  $Z_1^T = Z_2^T = 10$  et que chaque agent producteur et usager aura une unité de flot :  $Z^P = Z^U = 1$ .

## 2.4 Le cas mono-producteur ou mono-usager

Dans cette section, nous présentons des propriétés spécifiques au cas où un seul agent, producteur ou usager, distribue une récompense aux agents de transport. Dans ce cas particulier, l'objectif social est donc confondu avec l'objectif de l'unique agent (producteur ou usager) fournissant la récompense. Ce cas mono-producteur ou mono-usager sera étudié en détails dans les chapitres suivants (chapitres 3, 4 et 5).

### 2.4.1 Profit des agents et stratégies pauvres

Pour une stratégie  $\mathcal{S}$ , lorsqu'un unique agent, usager  $a_y^U$  (respectivement producteur  $a_z^P$ ), délivre la récompense, son profit est égal au flot maximum circulant dans le réseau :  $Z_y^U(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S})$  (respectivement  $Z_z^P(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S})$ ).

Le profit d'un agent de transport  $a_x^T$  dépend alors de la valeur du flot maximal qui circule auquel il faut soustraire ses coûts d'expansion :  $Z_x^T(\mathcal{S}) = \sum_{u \in \mathcal{A}^U \cup \mathcal{A}^P} (w_x^u \times \pi_u) \times (F(\mathcal{S}) - \underline{F}) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^T} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$ .

Nous définissons alors la notion de stratégie pauvre. Ce concept sera utile pour caractériser plus précisément la notion d'équilibre de Nash.

**Définition 2.11.** *Stratégie pauvre.*

Une stratégie  $\mathcal{S}$  ayant une valeur de flot maximal  $F(\mathcal{S}) > \underline{F}$  est dite pauvre **s'il existe** un agent quelconque  $a_u$  ayant une stratégie alternative  $\mathcal{S}'_u$  produisant une valeur de flot maximale  $F(\mathcal{S}'_u, \mathcal{S}_{-u}) = F(\mathcal{S})$  tel que  $Z_u(\mathcal{S}'_u, \mathcal{S}_{-u}) > Z_u(\mathcal{S})$ .

En d'autres termes, puisqu'un agent usager et/ou producteur ne peut pas améliorer son profit étant donné que  $F(\mathcal{S}') = F(\mathcal{S})$ , une stratégie est pauvre quand un agent transporteur est capable de trouver une stratégie améliorant son profit à flot constant.

Nous notons l'ensemble des stratégies non pauvres par  $\mathcal{S}^{np}$ . Évidemment, une stratégie pauvre ne peut pas être un équilibre de Nash, i.e.,  $\mathcal{S}^N \subseteq \mathcal{S}^{np}$ .

Une stratégie pauvre  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_{-u})$  peut être transformée en une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_u, \mathcal{S}_{-u})$  en adaptant la stratégie  $\mathcal{S}_u$  de l'agent  $a_u$  tout en maintenant les stratégies  $\mathcal{S}_{-u}$  des autres agents fixées.

Étant donnée une valeur de flot  $F(\mathcal{S}')$  une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}'$  peut être la solution

du programme non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{a_x^T \in \mathcal{A}^T} Z_x(\mathcal{S}') \\
& \text{s.c.q.} \\
& (i) \quad Z_x(\mathcal{S}') \geq Z_x(\mathcal{S}), \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
& (ii) \quad F(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S}') \\
& (iii) \quad f'_{i,j} \leq q'_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (vi) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f'_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f'_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \quad (2.1) \\
& (v) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q'_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, (i,j) \in \mathcal{E}^T \\
& \quad \quad f'_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{E}^T
\end{aligned}$$

Le programme mathématique 2.1 peut être utilisé à la fois pour vérifier si une stratégie est pauvre et pour améliorer la stratégie afin de remédier à sa pauvreté. Dans le premier cas, si on fixe les stratégies de tous les agents sauf un seul et qu'il existe une solution au problème 2.1 alors  $\mathcal{S}$  est pauvre. Dans le deuxième cas, le programme mathématique 2.1 donne une solution non pauvre  $\mathcal{S}'$  si on l'applique pour tous les agents  $a_u \in \mathcal{A}$ .

**Proposition 2.12.** *Toute solution du programme mathématique 2.1 est non pauvre.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}^*$  une solution optimale du programme mathématique 2.1. Si un agent  $a_u$  était capable d'augmenter son profit en adoptant une nouvelle stratégie  $S_u$ , cela sans modifier la valeur du flot, alors la stratégie  $(S_u, \mathcal{S}'_{*-u})$  serait meilleure que  $\mathcal{S}^*$ , d'où une contradiction.  $\square$

### 2.4.2 Propriétés basiques

Dans cette section, nous montrons que l'agent usager  $a_y^U$  (resp. producteur  $a_z^P$ ) ne peut jamais améliorer unilatéralement son profit  $Z_y^U$  (resp.  $Z_z^P$ ).

**Proposition 2.13.** *Étant données une stratégie non pauvre  $\mathcal{S} \in S^{np}$  et une valeur de flot maximal  $F(\mathcal{S})$ , l'agent usager  $a_y^U$  et/ou producteur  $a_z^P$  ne peut pas seul améliorer unilatéralement son profit  $Z_y^U$  ou  $Z_z^P$ .*

*Démonstration.* Raisonnons pour un agent usager (le cas de l'agent producteur étant symétrique). Le seul moyen pour un agent usager  $a_y^U$  d'augmenter son profit  $Z_y^U$  est de trouver une stratégie alternative  $\mathcal{S}'_y$  tel que  $F(\mathcal{S}_{-y}, \mathcal{S}'_y) > F(\mathcal{S})$ . Supposons qu'une telle stratégie existe. Les stratégies des agents transporteurs étant inchangées, cela signifie

que, sous la stratégie  $\mathcal{S}$ , il existe au moins un arc  $(i, j)$  tel que  $f_{i,j} < q_{i,j}$  (i.e., le flot peut être augmenté). Par conséquent, l'agent transporteur qui possède l'arc  $(i, j)$  est capable d'augmenter unilatéralement son profit sous la stratégie  $\mathcal{S}$  et ce, en diminuant  $q_{i,j}$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{S}$  est une stratégie non pauvre.  $\square$

En conséquence, nous pouvons simplifier la Définition 2.8 d'un équilibre de Nash en considérant uniquement les agents transporteurs.

**Corollaire 2.14.** *Étant donnée une instance du jeu NEG, une stratégie  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^P, \mathcal{S}^T, \mathcal{S}^U)$  est un équilibre de Nash si et seulement si  $\mathcal{S} \in \mathcal{S}^{np}$  et, pour tout agent transporteur  $a_x^T \in \mathcal{A}^T$ , ayant une stratégie  $S_x^T$ , la condition suivante est vérifiée :*

$$Z_x^T(S_x^T, \mathcal{S}_{-x}) \geq Z_x(S_x^T, \mathcal{S}_{-x}), \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T, \forall S_x^T \neq S_x^T \quad (2.2)$$

*Démonstration.* D'une part, puisque  $\mathcal{S}^N \subseteq \mathcal{S}^{np}$ , seule une stratégie non pauvre peut être stable. D'autre part, la Proposition 2.13, stipule qu'un agent  $a_y^U$  ou  $a_z^P$  ne peut jamais améliorer seul son profit  $Z_y^U$  ou  $Z_z^P$ . Par conséquent, si  $\mathcal{S}$  est stable, alors aucun agent transporteur  $a_x^T$  n'est capable de modifier profitablement sa stratégie  $S_x^T$ . Ceci est exactement ce que l'Inéquation 2.2 implique.  $\square$

Ainsi, dans un NEG impliquant plusieurs agents, seuls les agents transporteurs  $a_x^T$  peuvent augmenter (ou diminuer) unilatéralement les capacités de leurs arcs pour améliorer leurs profits  $Z_x^T$ .

Ces agents jouent donc un rôle central dans les NEG étudiés dans cette thèse.

Remarquons également qu'en vertu de la propriété 2.13, l'hypothèse de simultanéité des jeux n'est pas indispensable. En effet, l'agent producteur ou usager pourrait fixer d'abord sa politique de partage, et les agents transporteurs pourraient ensuite définir leurs capacités.

## 2.5 Synthèse des jeux

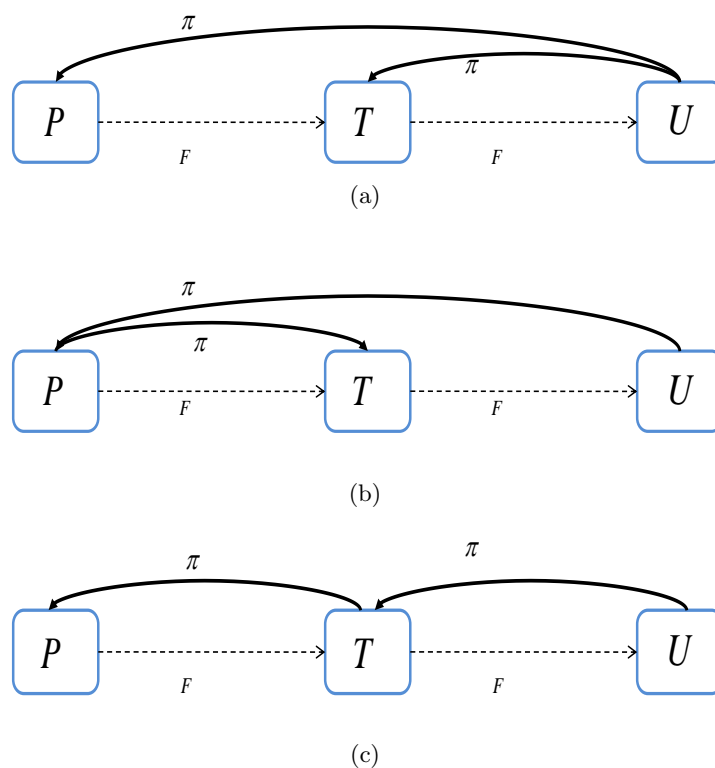
Dans cette section, nous présentons une synthèse des jeux d'expansion de réseaux considérés. Le tableau 2.1 résume les différents jeux et leurs notations respectives.

Les problèmes impliquant un unique agent transporteur et un unique agent usager ou producteur, notés respectivement 0/1/1 et 1/1/0 seront traités dans le chapitre 3.

Les jeux impliquant un ensemble d'agents transporteurs et un unique agent client (producteur ou usager), notés respectivement 1/m/0 et 0/m/1 ainsi que leurs complexités

	Producteurs	Transporteurs	Usagers
0/1/1	0	1	1
1/1/0	1	1	0
0/ $m$ /1	0	$m$	1
1/ $m$ /0	1	$m$	0
0/ $m$ / $p$	0	$m$	$p$
$q$ / $m$ /0	$q$	$m$	0
$q$ / $m$ / $p$	$q$	$m$	$p$

TABLE 2.1 – Notation des jeux d'expansion considérés

FIGURE 2.5 – Autres scénarios du jeu  $q/m/p$ 

seront discutés dans les chapitres 4 et 5. Puis, les chapitres 7 et 8 présentent une méthode de résolution du jeu  $0/m/1$  ainsi que les résultats expérimentaux. Les problèmes généralisés avec un réseau de transport et un réseau de producteurs et/ou transporteurs, notés  $q/m/0$ ,  $0/m/p$  et  $q/m/p$  seront à leur tour étudiés dans le chapitre 6.

Notons que le problème  $q/m/p$  peut couvrir d'autres scénarios de jeu, autres que ceux décrits par la Figure (2.1) et présentés dans ce chapitre.

Par exemple, dans le scénario de la Figure 2.5(a), les agents usagers donnent une récompense partagée entre les agents transporteurs et producteurs. Ici, l'objectif d'un agent

usager serait de récompenser les producteurs pour les inciter à augmenter la quantité de produits distribués à travers le réseau de transport. Selon le même principe, les agents usagers pourraient donner la totalité de la récompense aux agents producteurs, comme illustré dans le scénario de la Figure 2.5(b) pour augmenter la quantité produite. Dans le scénario de la Figure 2.5(c), un autre cas est illustré où un usager donne la récompense aux agents transporteurs, qui à leur tour la distribuent aux agents producteurs pour les inciter à produire plus.

Ces scénarios de jeu ne seront pas étudiés dans ce mémoire. Notre travail sera focalisé exclusivement sur les jeux représentés sur la Figure 2.1.



## Chapitre 3

# Problèmes 0/1/1 et 1/1/0

### 3.1 Introduction

Ce chapitre traite des problèmes d'expansion de réseau impliquant un unique agent transporteur et un unique agent usager ou producteur. Il définit les propriétés permettant de caractériser des stratégies profitables pour l'agent de transport et maximisant le flot total circulant dans le réseau. Nous nous intéressons particulièrement aux jeux :

- 0/1/1 qui se déroulent entre un agent transporteur et un agent usager ;
- 1/1/0 qui se déroulent entre un agent transporteur et un agent producteur.

Dans le jeu 0/1/1, l'agent transporteur fournit un flot à l'agent usager et reçoit en contrepartie une récompense comme l'illustre la Figure 3.1(a). Dans le jeu 1/1/0, l'agent de transport reçoit également une récompense de la part de l'agent producteur et distribue un flot de produits, comme représenté sur la Figure 3.1(b). On suppose ici que l'agent producteur / client peut fournir / recevoir une quantité infinie de produits.

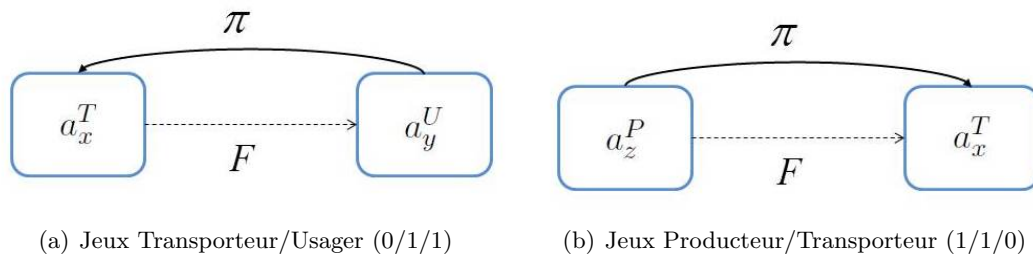


FIGURE 3.1 – Principe des jeux à 2 agents

Le chapitre sera organisé comme suit. La Section 3.2 donne une définition formelle du jeu d'expansion de réseau 0/1/1. Dans la Section 3.3 nous présentons les propriétés de ces jeux. Nous nous focalisons essentiellement sur la définition des mécanismes d'augmentation ou de diminution de flot dans le réseau afin de caractériser des stratégies profitables.



Les Sections 3.4 et 3.5 sont consacrées respectivement, au jeu symétrique 1/1/0 et à un exemple illustratif.

## 3.2 Jeu d'expansion de réseau 0/1/1

Cette section traite du jeu d'expansion particulier 0/1/1 qui se déroule de manière simultanée entre un agent usager et un agent transporteur. L'agent transporteur, qui possède tous les arcs du réseau de transport, décide d'étendre ou pas la capacité de ses arcs dans l'intervalle prédéfini de valeurs normale et maximale. Comme l'agent transporteur est unique, il reçoit la totalité de la récompense donnée par l'agent usager. Notons que, pour ce modèle avec un seul agent usager, l'objectif social correspond à l'objectif individuel de l'agent usager, à savoir maximiser le flot global.

Par ailleurs, la notion de stabilité n'a pas de sens dans ce contexte car l'agent transporteur est unique (cf corollaire 2.14). Par conséquent, nous nous intéressons à maximiser le flot de produits transportés dans le réseau de sorte que cela demeure profitable pour l'agent transporteur, i.e., que son profit ne soit pas négatif. Ce problème est donc proche des problèmes d'expansion de réseau évoqués au chapitre 1. La spécificité de notre travail réside dans le fait que, pour réaliser l'expansion d'un réseau, il existe un agent client (usager/producteur) fournissant une récompense proportionnelle à l'augmentation de flot dans le réseau. De ce fait, nous nous intéressons à la maximisation du flot dans le réseau de manière profitable pour l'unique agent de transport.

### 3.2.1 Définition formelle du jeu 0/1/1

Selon la topologie du graphe, décrite dans la Figure 3.2, le Réseau Multi-Agent (RMA) de ce jeu particulier se compose uniquement du réseau de transport  $T$  puisque tout le flot circulant dans le réseau appartient à l'unique agent usager auquel s'ajoute des nœuds fictifs source et puits de ce réseau de transport.

La définition du jeu d'expansion de réseau caractérisé dans la Section 2.3.1 se simplifie de la manière suivante dans le cas du jeu 0/1/1 :

**Définition 3.1.** *Réseau Multi-Agent 0/1/1.*

Un RMA 0/1/1 décrit par le tuple  $\langle G, \mathcal{A}, \underline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{I}}, \mathcal{C}, \pi \rangle$  tel que :

- $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est un graphe de flot où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des noeuds où  $s, t \in \mathcal{V}$  sont les noeuds source et puits du réseau de transport, respectivement. L'ensemble des arcs  $\mathcal{E}$  correspond uniquement aux arcs de l'agent transporteur  $\mathcal{E}^T$  ;

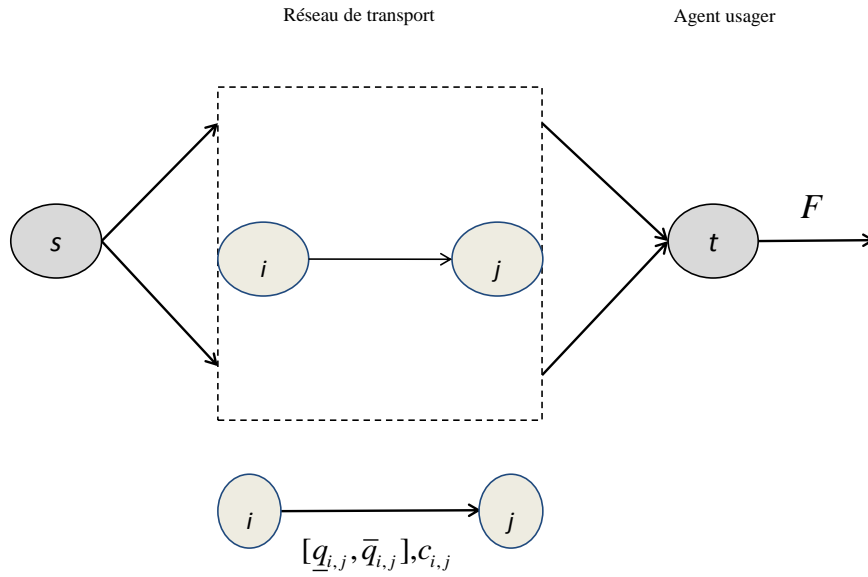


FIGURE 3.2 – Topologie du réseau du jeu 1/1/0

- l'ensemble des agents  $\mathcal{A}$  est composé seulement d'un agent transporteur et d'un agent usager  $\{a^T, a^U\}$  ;
- $\underline{I}$  (resp.  $\bar{I}$ ) désigne les vecteurs de capacités normales et maximales pour les arcs du réseau de transport :  $\underline{I} = (q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}^T}$  (resp.  $\bar{I} = (\bar{q}_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}^T}$ ) ;
- $\mathcal{C} = (c_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{A}^T}$  est le vecteur de coûts unitaires d'expansion de l'agent transporteur ;
- $\pi$  est la récompense que donne l'unique agent usager pour chaque unité additionnelle de flot traversant le réseau.

**Définition 3.2.** *Stratégies et profits des agents.*

Pour le jeu 0/1/1, la stratégie individuelle de l'agent usager  $S^U$  n'a plus de sens vu qu'il n'existe pas de politique de partage et que l'agent transporteur reçoit la totalité de la récompense. La stratégie globale  $\mathcal{S}$  se réduit donc à la stratégie individuelle de l'unique agent transporteur que nous notons  $\mathcal{S} = S^T$ . Cette stratégie  $S^T$  représente les capacités fixées par l'agent transporteur :  $S^T = (q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}^T}$  avec  $q_{i,j} \in [q_{i,j}, \bar{q}_{i,j}]$ .

Pour une stratégie  $S^T$ , les profits s'écrivent alors :

- pour l'agent transporteur :  $Z^T(S^T)$  qui est égal à la différence entre sa récompense et ses dépenses ;

$$Z^T(S^T) = \pi \times (F(S^T) - \underline{F}) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^T} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j}) \quad (3.1)$$

- pour l'agent usager :  $Z^U(S^T)$  qui est égal à la valeur du flot circulant dans le réseau :

$$Z^U(S^T) = F(S^T) \quad (3.2)$$

Étant donnée une stratégie  $S^T$ , le flot maximal  $F(S^T)$  peut-être calculé en temps polynomial avec l'algorithme Ford-Fulkerson [50]. On détermine ainsi le flot maximum qui peut circuler pour des capacités  $q_{i,j}$  fixés.

Pour le jeu 0/1/1, nous nous intéressons à trouver la stratégie qui maximise le flot (i.e., profit de l'unique agent usager) et qui soit profitable pour l'unique agent transporteur. Nous cherchons alors à résoudre le problème **MaxProfitable** défini dans la partie 2.3.2 pour déterminer une stratégie profitable maximisant le flot. Pour cela, nous allons exposer dans la suite de ce chapitre comment caractériser de telles stratégies.

### 3.2.2 Exemple

Considérons le réseau de transport représenté par un graphe  $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , illustré dans la Figure 3.3, composé d'un ensemble de noeuds  $\mathcal{V} = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$  et d'un ensemble d'arcs  $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  appartenant à l'unique agent transporteur. Chaque arc est valué par un intervalle de capacité  $[\underline{q}_{i,j}, \bar{q}_{i,j}]$  et par un coût d'expansion  $c_{i,j}$  : notamment l'arc  $(s, 1)$  allant du noeud  $s$  vers le noeud 1 a un intervalle de capacité  $[1, 5]$  et un coût 100.

L'agent usager donne une récompense égale à  $\pi = 215$ .

Ainsi, pour que l'agent transporteur ait un profit positif, il devra faire circuler un flot pour un cout inférieur à 215.

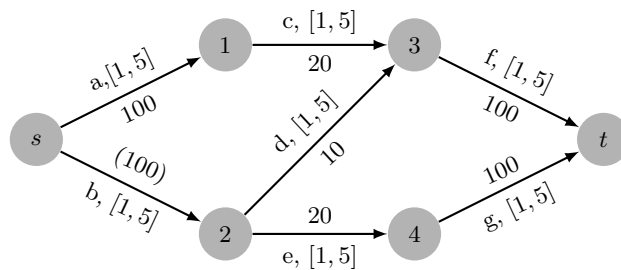


FIGURE 3.3 – Jeu d'expansion de réseau avec un agent transporteur

Dans cet exemple, la stratégie  $\underline{\mathcal{S}}$  (dans laquelle toutes les capacités sont à leurs valeurs normales) permet un flot maximal de 2, elle a un cout nul pour l'agent de transport et l'agent usager ne fournit pas de récompense (car le flot maximal qu'il peut recevoir à cout nul pour les agents de transport  $\underline{F} = 2$ ). La stratégie  $\bar{\mathcal{S}}$  (dans laquelle toutes les capacités sont à leurs valeurs maximales) correspond à un flot maximal de 10. Pour cette stratégie, la récompense reçue par l'agent transporteur est égale à  $8 \times 215 = 1720$  et les couts qu'il supporte sont égaux à  $4 \times 220$  le long du chemin  $(a, c, f)$  et  $4 \times 220$  le long

du chemin  $(b, e, g)$ , son profit est alors égal à  $1720 - 1760 = -40$ . La stratégie  $\bar{S}$  n'est donc pas profitable pour l'agent transporteur.

### 3.3 Propriétés du jeu

Cette section met l'accent sur les mécanismes d'augmentation ou de diminution de flot en utilisant des chemins croissants ou décroissants définis en termes de capacités résiduelles. A l'aide de ces mécanismes, nous allons caractériser la notion de stratégie profitable pour un agent de transport.

Les mécanismes exposés seront utilisés dans la généralisation de ce jeu présentée dans le chapitre suivant.

#### 3.3.1 Graphe résiduel

Afin de caractériser la variation de flot, nous allons définir la notion de graphe résiduel dans un jeu 0/1/1.

**Définition 3.3.** *Graphe Résiduel pour le jeu 0/1/1.*

Étant données une instance du NEG 0/1/1 définie par un RMA  $\langle G, \mathcal{A}, \underline{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{I}}, \mathcal{C}, \pi \rangle$  et une stratégie  $S^T$  non pauvre, le graphe résiduel correspondant  $G_r(\mathcal{F}(S^T)) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_F, \mathcal{E}_B)$  est défini comme suit : chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}$  dans  $G$  de capacité  $q_{i,j}$ , traversé par un flot  $f_{i,j}$ , est remplacé par deux arcs dans le graphe résiduel : un arc avant  $(i, j) \in \mathcal{E}_F$  et un arc arrière  $(j, i) \in \mathcal{E}_B$ .

- L'arc avant  $(i, j)$  a un coût  $d_F^{i,j}$  et une capacité résiduelle  $r_F^{i,j} = \bar{q}_{i,j} - q_{i,j}$  si  $f_{i,j} = q_{i,j} (\geq \underline{q}_{i,j})$  et  $r_F^{i,j} = \underline{q}_{i,j} - f_{i,j}$  si  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ .
- L'arc arrière  $(j, i)$  a un coût  $d_B^{j,i}$  et une capacité résiduelle  $r_B^{j,i} = q_{i,j} - \underline{q}_{i,j}$  si  $f_{i,j} = q_{i,j} (\geq \underline{q}_{i,j})$  ou  $r_B^{j,i} = f_{i,j}$  si  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ .

Le coût des arcs avant et arrière du graphe résiduel  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$ ,  $d_F^{i,j}$  et  $d_B^{j,i}$  respectivement, sont définis par :

$$d_F^{i,j} = \begin{cases} +\infty & \text{si } f_{i,j} = q_{i,j} = \bar{q}_{i,j} \\ c_{i,j} & \text{si } f_{i,j} = q_{i,j} < \bar{q}_{i,j} \\ 0 & \text{si } f_{i,j} < q_{i,j} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$d_B^{j,i} = \begin{cases} +\infty & \text{si } f_{i,j} = 0 \\ -c_{i,j} & \text{si } f_{i,j} \leq q_{i,j} \text{ et } q_{i,j} > \underline{q}_{i,j} \\ 0 & \text{si } 0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j} \end{cases} \quad (3.4)$$

Les coûts résiduels reflètent la possibilité d'augmenter ou de baisser la valeur de la capacité sur l'arc correspondant pour faire varier le flot.

Un arc avant avec un coût  $d_F^{i,j} = c_{i,j}$  signifie qu'il est possible d'augmenter le flot sur l'arc en augmentant  $q_{i,j}$ , et ce moyennant le coût  $c_{i,j}$  (i.e.,  $q_{i,j} < \bar{q}_{i,j}$ ). Un coût  $+\infty$  pour un arc avant signifie que l'arc  $(i, j)$  est saturé (i.e.,  $f_{i,j} = q_{i,j}$ ) et qu'il est à sa capacité maximale (i.e.,  $q_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$ ). Un arc avant ayant un coût nul modélise la possibilité d'augmenter le flot sur cet arc à coût nul. Cela se produit si l'arc  $(i, j)$  n'est pas saturé (i.e.  $f_{i,j} < q_{i,j}$ ). Pour une stratégie non pauvre, cela ne peut avoir lieu que lorsque  $q_{i,j} = \underline{q}_{i,j}$ . Un arc retour ayant un coût nul indique que le flot sur l'arc correspondant de  $G$  peut être baissé sans générer de profit. Ceci arrive uniquement si  $0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$ . Un coût  $-c_{i,j}$  reflète le fait que l'agent transporteur peut avoir un gain local  $c_{i,j}$  en diminuant  $q_{i,j}$ . Ceci est possible quand l'arc arrière  $(i, j)$  est saturé (i.e.,  $f_{i,j} = q_{i,j}$ ) et la capacité peut être diminuée sur cet arc (i.e.,  $q_{i,j} > \underline{q}_{i,j}$ ). Finalement, fixer le coût à  $+\infty$  implique l'impossibilité d'utiliser cet arc pour baisser le flot (i.e.,  $f_{i,j} = 0$ ).

Un arc, avant ou de retour, ayant un coût résiduel égal à  $+\infty$  peut être éliminé du graphe résiduel puisqu'il est trop coûteux pour être utilisé pour augmenter ou diminuer le flot.

### 3.3.2 Variation du flot dans le réseau

Dans cette section, nous nous intéressons à trouver la manière la plus profitable pour obtenir une variation minimale du flot dans le réseau. Plus précisément, étant donnée une stratégie  $\mathcal{S} = S^T$ , nous cherchons la manière la plus profitable de faire varier la capacité afin d'augmenter ou de baisser le flot d'une unité. En effet, les capacités  $q_{i,j}$  étant entières, la variation minimale de flot est égale à  $\pm 1$ .

Étant donné le graphe résiduel  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$  et les coût résiduels des arcs avant et arrière,  $d_F^{i,j}$  et  $d_B^{j,i}$ , trouver une variation unitaire du flot dans le réseau de coût minimal peut être formulé par le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{i,j} \times d_F^{i,j} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} b_{i,j} \times d_B^{j,i} \\
 & t.q. \\
 (i) \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \phi_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \phi_{j,i} = \pm \begin{cases} 0 \quad \forall i \neq s, t \\ 1, \quad i = s \\ -1, \quad i = t \end{cases} \\
 (ii) \quad & \phi_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \\
 & a_{i,j} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \\
 & b_{i,j} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les variables  $\phi_{i,j}$  représentent, pour tout arc  $(i,j) \in \mathcal{E}$  dans le graphe  $G$ , la variation de flot, liée à la valeur courante du flot. Les valeurs  $a_{i,j}$  et  $b_{i,j}$  représentent les valeurs d'augmentation et de diminution de la capacité de l'arc  $(i,j)$  par rapport à sa valeur actuelle  $q_{i,j}$ , respectivement.

La fonction objectif exprime le coût d'augmentation (si "+" est choisi dans la contrainte (i)) ou de diminution (si "-" est choisi dans la contrainte (i)) du flot du réseau par une unité. Notons que les informations liées à la stratégie  $S^T$  sont mémorisées dans les paramètres  $d_F^{i,j}$  et  $d_B^{i,j}$ .

Les contraintes (i) expriment la conservation de flot dans le réseau quand on augmente ou diminue le flot d'une unité. Les contraintes (ii) exigent que la variation de flot dans le réseau soit inférieure ou égale à la variation totale de capacité effectuée sur chaque arc. Quand le signe "+" est sélectionné, une solution admissible du problème 3.5 définit un ensemble d'arcs tels que, en modifiant leurs capacités de  $a_{i,j}$  et  $b_{i,j}$ , le flot total dans le réseau est augmenté de 1 unité. D'une manière similaire, quand le signe "-" est sélectionné, une solution admissible du problème 3.5 définit un ensemble d'arcs tel que, la modification des capacités de ses arcs par  $a_{i,j}$  et  $b_{i,j}$  engendre une diminution du flot total.

**Proposition 3.4.** *Étant donnée une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$ , le programme linéaire 3.5 admet une solution optimale finie.*

*Démonstration.* Nous détaillons la preuve pour le cas où "+" est choisi dans le PL 3.5, l'autre cas étant complètement symétrique.

Notons que le problème 3.5 n'a de sens que lorsqu'il est borné, et par conséquent une solution optimale existe. Deux cas se présentent, soit le problème 3.5 admet une solution optimale finie, soit il est non borné. Supposons que le problème 3.5 soit non borné, il existe alors un ensemble d'arcs  $\bar{E}$  tel que soit  $a_{i,j}$  ou  $b_{i,j}$  ait une valeur infinie. Sans perte de généralité, nous exprimons ces valeurs par  $a_{i,j} = \bar{a}_{i,j}M$  et  $b_{i,j} = \bar{b}_{i,j}M$ , où  $M$  est une grande valeur quelconque. Si le problème est non borné, cela signifie que :

$$\sum_{(i,j) \in \bar{E}} \bar{a}_{i,j} d_F^{i,j} + \sum_{(i,j) \in \bar{E}} \bar{b}_{i,j} d_B^{j,i} < 0. \quad (3.6)$$

Toutefois, même si quelques variables sont infinies, l'augmentation totale du flot de  $s$  vers  $t$  est 1, due à la contrainte (i) quand elle est exprimée pour  $s$  et  $t$ . Par conséquent, étant donnés  $\mathcal{S}$  et  $F(\mathcal{S})$  dans  $G$ , si on augmente le flot de  $\varepsilon$  sur tous les arcs  $(i,j) \in G$  tel que  $(i,j) \in \mathcal{E}_F \cap \bar{E}$  dans  $G_r$ , et diminue le flot de  $\varepsilon$  sur tous les arcs  $(i,j) \in G$  tel que  $(j,i) \in \mathcal{E}_B \cap \bar{E}$  dans  $G_r$ , alors grâce à l'Équation 3.6 on obtient un nouveau

flot ayant la même valeur  $F(\mathcal{S})$  mais permettant à l'agent transporteur d'améliorer son profit. Cependant, cela ne peut arriver que si  $\mathcal{S}$  est une stratégie pauvre.  $\square$

### 3.3.3 Dualité

Le programme mathématique 3.5 de recherche de variation unitaire de flot à coût minimal à travers la variation minimale de capacités des arcs, peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \phi_{i,j} \times d_F^{i,j} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \phi_{j,i} \times d_B^{j,i} \\
 & t.q. \\
 & (i) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \phi_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \phi_{j,i} = \pm \begin{cases} 0 \forall i \neq s, t \\ 1, i = s \\ -1, i = t \end{cases} \quad (3.7) \\
 & \phi_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}
 \end{aligned}$$

Le programme mathématique 3.7 est équivalent au programme mathématique 3.5, pour lequel nous caractérisons la variation unitaire de flot dans le graphe. Le dual du problème 3.7 de recherche de la variation unitaire optimale du flot à coût minimum est exprimé par le programme mathématique 3.8 :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \pm(\tau_t - \tau_s) \\
 & s.t. \\
 & (i) \quad \tau_j - \tau_i \leq d_F^{i,j}, \forall (i, j) \in \mathcal{E} \\
 & (ii) \quad \tau_i - \tau_j \leq d_B^{j,i}, \forall (i, j) \in \mathcal{E} \\
 & \tau_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{V}
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'expression  $\tau_j - \tau_i$  représente le potentiel d'un arc  $(i, j)$ . Notons que le problème dual 3.8 correspond à un problème de plus court chemin dans le graphe résiduel. En effet, pour tout arc  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , il y a une paire de contraintes (i) – (ii). Nous associons à tout arc  $(i, j) \in \mathcal{E}$  un arc avant  $(i, j) \in \mathcal{E}_F$  et un arc arrière  $(j, i) \in \mathcal{E}_B$ , ayant les poids  $d_F^{i,j}$  et  $d_B^{j,i}$ , respectivement.

Précisément, si nous nous intéressons à l'augmentation du flot à coût minimum dans le graphe de flot, la fonction objectif du problème dual est  $+(\tau_t - \tau_s)$ , et par conséquent le problème est de trouver un plus court chemin de  $s$  vers  $t$  dans le graphe résiduel. En contrepartie, si nous nous intéressons au problème de diminution du flot dans le graphe de flot à gain maximum, alors la fonction objectif du dual est  $-(\tau_t - \tau_s)$ , i.e., le problème est de trouver un plus long chemin en termes de gain de  $t$  vers  $s$  (ou un plus court chemin en termes de coût) dans le graphe résiduel.

Si le problème primal 3.5 est non borné, cela signifie que  $\mathcal{S}$  est une stratégie pauvre, alors le problème dual 3.8 est non réalisable en raison de l'existence de circuits de longueur négative atteignables par le chemin. Cependant, si la stratégie  $\mathcal{S}$  est non pauvre, alors le problème dual admet une solution et le plus court chemin peut être trouvé en temps polynomial étant données les valeurs des couts  $d_F^{i,j}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F$  et  $d_B^{i,j}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_B$ .

A partir de la Proposition 3.4 et des propriétés de dualité résultantes, la proposition suivante est évidente :

**Proposition 3.5.** *Si la stratégie  $\mathcal{S}$  est non-pauvre alors on peut faire varier le flot à travers des chemins augmentant et/ou décroissant, qui peuvent être calculés en temps polynomial.*

Ainsi, la solution optimale du problème 3.5 est caractérisée par un chemin, de plus la longueur de ce chemin dans le graphe résiduel correspond au coût de variation pour une unité de flot dans le graphe de flots.

### 3.3.4 Augmenter le flot

Etant donnée une stratégie non-pauvre  $\mathcal{S} = S^T$  correspondant à un flot maximal  $F(\mathcal{S})$ , nous nous intéressons dans cette section à augmenter le flot à coût minimum. Compte tenu de la Proposition 3.5, cela consiste à trouver un chemin augmentant à coût minimum.

**Définition 3.6.** *Chemin augmentant.*

Un chemin augmentant est un chemin  $P$  dans le graphe résiduel  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$ , allant **du noeud source  $s$  vers le noeud puits  $t$**  et permettant d'augmenter le flot  $F(\mathcal{S})$  en variant la capacité des arcs définis par le chemin  $P$  dans le graphe  $G$ .

Considérons une stratégie  $\mathcal{S}$  et le vecteur de flot maximum correspondant  $F(\mathcal{S})$ . Soit un chemin augmentant  $P$  dans le graphe résiduel  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$ , si on augmente de  $q$  le flot sur les arcs de  $G$  correspondant à des arcs avant du graphe résiduel, et si on diminue de la même valeur  $q$  le flot sur les arcs de  $G$  correspondant à des arcs arrière du graphe résiduel, on obtient une nouvelle stratégie  $\mathcal{S}'$  tel que  $F(\mathcal{S}') = F(\mathcal{S}) + q$ . La plus grande augmentation qui peut être réalisée en utilisant un chemin augmentant  $P$  est  $\theta = \min\{r_F^{i,j}, r_B^{i,j} : (i, j) \in P\}$ .

Les ensembles des arcs avant et arrière, du chemin augmentant  $P$ , sont notés respectivement  $P^+$  et  $P^-$ , et nous notons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des chemins augmentants.

Le coût unitaire d'augmentation du flot en utilisant le chemin augmentant  $P \in \mathcal{P}$  est



noté par  $cost(P)$  et correspond à :

$$cost(P) = \sum_{(i,j) \in P^+} d_F^{i,j} + \sum_{(i,j) \in P^-} d_B^{i,j} \quad (3.9)$$

Notons qu'une telle opération d'augmentation implique l'ajustement des capacités des arcs de manière à ce que la stratégie résultante soit non pauvre. Naturellement, si  $t$  n'est pas joignable par  $s$  dans  $G_r$ , alors il n'existe aucun chemin augmentant, et donc aucune augmentation de flot ne peut être réalisée.

### 3.3.5 Diminuer le flot

Pour le problème de diminution du flot à coût minimum, nous introduisons le concept de *chemin décroissant*.

**Définition 3.7.** *Chemin décroissant.*

Un chemin décroissant  $\bar{P}$  est un chemin dans  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$  allant **du noeud puits  $t$  vers le noeud source  $s$**  et permettant de diminuer le flot  $F(\mathcal{S})$  en variant la capacité des arcs définis par le chemin  $\bar{P}$  dans le graphe  $G$

De manière symétrique, diminuer le flot de  $q$  sur les arcs de  $G$  correspondant à des arcs arrière dans  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$ , et augmenter le flot de la même valeur  $q$  dans les arcs de  $G$  correspondant à des arcs avant dans  $G_r(\mathcal{F}(S^T))$ , permet d'obtenir une nouvelle stratégie  $\mathcal{S}'$  tel que  $F(\mathcal{S}') = F(\mathcal{S}) - q$ . La plus grande diminution de flot qui peut être réalisée en utilisant un chemin  $\bar{P}$  est à nouveau donnée par  $\bar{\theta} = \min\{r_F^{i,j}, r_B^{i,j} : (i,j) \in \bar{P}\}$ .

Un chemin décroissant  $\bar{P}$  est formé d'arcs avant et arrière que nous notons respectivement  $\bar{P}^+$  and  $\bar{P}^-$ . Nous notons par  $\bar{\mathcal{P}}$  l'ensemble des chemins décroissants.

Le gain résultant de la diminution du flot d'une unité à travers le chemin  $\bar{P}$  est exprimé par :

$$sav(\bar{P}) = - \left[ \sum_{(i,j) \in \bar{P}^+} d_F^{i,j} + \sum_{(i,j) \in \bar{P}^-} d_B^{i,j} \right] \quad (3.10)$$

Dans ce cas également, l'opération de diminution implique évidemment l'ajustement des capacités des arcs de manière à ce que la stratégie résultante soit encore non pauvre. Si  $s$  ne peut être joignable par  $t$  dans le graphe résiduel  $G_r$ , alors il n'existe aucun chemin décroissant, et donc aucune diminution du flot n'est possible, ce qui n'arrive clairement que lorsque  $F(\mathcal{S}) = 0$ .

### 3.4 Jeu d'expansion de réseau 1/1/0

On considère dans cette section le jeu d'expansion de réseau du type 1/1/0 impliquant un *agent producteur* et un *agent transporteur*. De manière similaire que pour le problème 0/1/1, l'agent transporteur contrôle le réseau  $T$  afin d'augmenter la capacité du réseau jusqu'à une valeur maximale moyennant un coût d'expansion. L'agent producteur donne une récompense au transporteur pour faire circuler ses produits à travers le réseau. Ce problème est totalement symétrique au jeu 1/1/0. En effet, l'agent transporteur joue le rôle principal dans la circulation du flot dans le réseau et reçoit en contrepartie une récompense du producteur. Le jeu ainsi défini est symétrique de celui 0/1/1.

Toutes les propriétés et définitions établies dans la Section 3.2 restent donc valables pour ce jeu. Ainsi, il est possible de déterminer une stratégie profitable pour l'agent transporteur maximisant le flot circulant dans le réseau via la détermination de chemins augmentant et décroissant.

### 3.5 Exemple

Reprenons l'exemple vu dans la Section 3.2.2 et considérons la stratégie initiale  $\mathcal{S}_0$  dans laquelle les capacités sont à leurs valeurs normales ( $\mathcal{S}_0 = \underline{\mathcal{S}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ). Pour cette stratégie  $\mathcal{S}_0$ , décrite dans la Figure 3.4(a), le flot maximum pouvant circuler dans le réseau à coût zéro pour l'agent de transport est  $F(\mathcal{S}_0) = 2$ . L'agent usager donne une récompense égale à  $\pi = 215$ , nous allons donc chercher des chemins augmentants dont le coût est inférieur à 215.

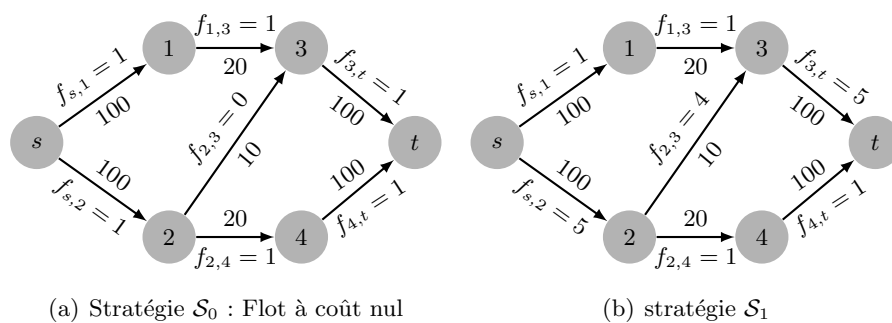


FIGURE 3.4 – Variation de flot

Dans cet exemple, la seule façon profitable pour accroître le flot, est d'utiliser le chemin augmentant  $P = ((s, 2), (2, 3), (3, t))$  ayant un coût  $cost(P)$  égal à 210. Le long de ce chemin  $P$ , les capacités des arcs  $(s, 2)$ ,  $(2, 3)$  et  $(3, t)$  sont augmentées successivement de 4 unités. Notons que pour l'arc  $(2, 3)$  l'augmentation de la première unité de flot est à coût nul (puisque  $q_{2,3} = 1$ ). Ces variations mènent à la nouvelle stratégie  $\mathcal{S}_1 =$

$(1, 5, 1, 4, 1, 5, 1)$  (cf. Figure 3.4(b)) avec  $F(\mathcal{S}_1) = 6$ , elle correspond à un coût de  $830 = 100 \cdot 4$  (arc(s,2)) +  $10 \cdot 3$  (arc (2,3) dont la 1ere unite seulement est gratuite) +  $100 \cdot 4$  (arc (3,t)) pour l'agent de transport dont le profit est alors égale à  $4 \times 215 - 830 = 30$ . La stratégie  $\mathcal{S}_1$  est donc profitable.

Dans cet exemple, les autres chemins augmentants ont tous des couts supérieurs à la récompense offerte.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié deux jeux d'expansion de réseau symétriques : le jeu 0/1/1 impliquant un unique agent transporteur et un unique agent usager et le jeu 1/1/0 impliquant un unique agent transporteur et un unique agent producteur. Nous avons montré comment utiliser des chemins augmentants et décroissants, dans un graphe résiduel proprement défini, pour faire varier le flot en augmentant la capacité des arcs du réseau et obtenir ainsi des stratégies profitables de flot maximal. Cette notion est importante du fait qu'elle va nous permettre de caractériser des stratégies profitables. Les mécanismes exposés dans ce chapitre seront utilisés dans le chapitre suivant pour un jeu d'expansion avec plusieurs agents de transport.

## Chapitre 4

# Problèmes $0/m/1$ et $1/m/0$

### 4.1 Introduction

Ce chapitre considère des problèmes d'expansion de réseau impliquant un ensemble d'agents transporteurs et un unique agent client (producteur ou usager). Il définit les propriétés permettant de caractériser des stratégies stables pour les agents de transport et maximisant le flot total circulant dans le réseau.

Nous considérons deux jeux d'expansion de réseau particuliers :

- le jeu  $0/m/1$  qui se déroule entre un ensemble d'agents transporteurs et un agent usager. Ce jeu est un cas particulier du jeu  $0/m/p$  où les agents transporteurs fournissent un flot à l'agent usager et reçoivent en contrepartie une récompense comme l'illustre la Figure 4.1(a).
- le jeu  $1/m/0$  qui se déroule entre un ensemble d'agents transporteurs et un agent producteur. Ce jeu est un cas particulier du jeu  $q/m/0$  pour lequel les agents transporteurs reçoivent une récompense de la part de l'agent producteur et distribuent un flot de produit comme représenté sur la Figure 4.1(b).



FIGURE 4.1 – Principe des jeux  $0/m/1$  et  $1/m/0$

Dans les deux jeux considérés dans ce chapitre, chaque agent transporteur possède une partie des arcs du réseau de transport. Les capacités de ses arcs peuvent être étendues à coûts fixes en utilisant des ressources supplémentaires. Le flot résultant dépend de la

combinaison des stratégies de tous les agents transporteurs. L'agent usager/producteur veut maximiser le flot circulant dans le réseau. Comme facteur incitatif, il offre une récompense dont le montant est proportionnel au flot obtenu. La stratégie de cet agent usager/producteur réside dans le partage entre les agents transporteurs de la récompense qu'il fournit. La stratégie d'un agent transporteur consiste à affecter une valeur de capacité spécifique à tous ses arcs.

Le profit d'un agent transporteur est égal à sa part de récompense moins le coût total d'expansion qu'il supporte. Dans ce chapitre, nous étendons les propriétés prouvées dans le chapitre 3 pour les jeux 0/1/1 et 1/1/0, en particulier les notions de chemins augmentant et décroissant. Nous présentons ensuite comment caractériser un équilibre de Nash en termes de chemins.

Les deux jeux considérés dans ce chapitre, 0/m/1 et 1/m/0, sont symétriques. Nous nous focalisons dans ce qui suit sur le jeu 0/m/1, les résultats obtenus étant directement applicables au jeu 1/m/0.

Le chapitre est organisé comme suit. La Section 4.2 donne une définition formelle du jeu d'expansion de réseau 0/m/1. Dans la Section 4.3, nous présentons un modèle mathématique pour résoudre le problème MaxNash. La Section 4.4 fournit un exemple illustratif du jeu 0/m/1. La Section 4.5 est consacrée à définir les mécanismes d'augmentation ou de diminution de flot dans le cas multi-agent. Dans la Section 4.6 nous caractérisons les stratégies stables en utilisant la notion de chemin augmentant et décroissant.

## 4.2 Jeu d'expansion de réseau 0/m/1

### 4.2.1 Définition formelle du jeu 0/m/1

Pour le jeu 0/m/1, le RMA se compose uniquement du réseau de transport  $T$  et le flot résultant dans le réseau sera égal au flot reçu par l'unique agent usager. De nouveau, l'objectif social se confond avec l'objectif individuel de cet agent. Le jeu d'expansion de réseau caractérisé dans la partie 2.3.1 se simplifie donc de la manière suivante :

**Définition 4.1.** *Réseau Multi-Agent 0/m/1.*

Un RMA 0/m/1 décrit par le tuple  $\langle G, \mathcal{A}, \underline{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{I}}, \mathcal{C}, \pi \rangle$  tels que :

- $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est un réseau de transport dans lequel l'agent usager est affecté au sommet puits. Les arcs se répartissent entre les différents agents transporteurs :  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^T$  ;
- $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^T \cup \{a_{m+1}^U\}\}$  est composé d'un ensemble de  $m$  transporteurs  $\{a_1^T, \dots, a_u^T, \dots, a_m^T\}$  et d'un unique agent usager  $a_{m+1}^U$  ;
- $\underline{\mathcal{I}}$  (resp.  $\bar{\mathcal{I}}$ ) est le vecteur des capacités minimales (resp. maximales) pour le réseau des agents transporteurs  $T$  ;

- $\mathcal{C} = (c_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{A}^T}$  désigne le vecteur de coûts unitaires d'expansion pour les agents transporteurs ;
- $\pi$  est la récompense totale donnée par l'agent usager pour chaque unité additionnelle de flot qui circule dans le réseau.

**Définition 4.2.** *Stratégies et profits des agents.*

Dans le jeu 0/m/1, la stratégie  $\mathcal{S}$  recouvre les stratégies des agents de transport et la stratégie de l'agent usager :  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^T, \mathcal{S}^U)$ .

- les stratégies des agents de transport sont :  $\mathcal{S}^T = (S_1^T, \dots, S_m^T)$  où  $S_x^T = (q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}_x^T}$ ,  $\forall x \in \mathcal{A}^T$  ;
- la stratégie de l'agent usager est :  $S_{m+1}^U = (w_x)_{x=1, \dots, m}$ .

Les profits des agents pour une stratégie  $\mathcal{S}$  associée à un flot maximal  $F(\mathcal{S})$ , s'écrivent alors :

- pour chaque agent transporteur  $a_x^T$  :  $Z_x^T(\mathcal{S}) = w_x \times \pi \times (F(\mathcal{S}) - \underline{F}) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x^T} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$ .
- pour l'agent usager :  $Z_{m+1}^U(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S})$ .

Rappelons que  $\underline{\mathcal{S}}$  représente la stratégie particulière pour laquelle les capacités des transporteurs sont à leurs valeurs minimales.

Dans un jeu 0/m/1, chaque agent transporteur  $a_x^T$  est libre d'augmenter (ou de diminuer) unilatéralement les capacités de ses arcs afin d'améliorer son profit  $Z_x^T$ . La stabilité d'une stratégie  $\mathcal{S}$  n'est donc pas assurée a priori. Le problème qui nous intéresse est alors le problème **MaxNash** défini dans la partie 2.3.2 pour lequel nous allons chercher une stratégie équilibre de Nash maximisant le flot total.

#### 4.2.2 Exemple d'une instance du jeu 0/m/1

Dans l'exemple suivant, nous allons introduire un jeu qui se déroule entre deux agents de transport. Le déroulement du jeu va être présenté en détails dans la Section 4.4. Considérons le réseau donné dans la Figure 4.2. Ce réseau est composé de deux agents transporteurs  $a_1^T$  et  $a_2^T$  ainsi que d'un agent usager souhaitant transporter la plus grande valeur possible de flot du noeud  $A$  vers le noeud  $D$  et offrant pour cela une récompense  $\pi = 120$ , partagée selon une politique  $S_{m+1}^U = (w_1, w_2)$ .

La répartition des arcs entre les agents transporteurs est :  $\mathcal{E}_1^T = \{b = (A, C), c = (B, C), d = (B, D)\}$  et  $\mathcal{E}_2^T = \{a = (A, B), e = (C, D)\}$ , représentés par les arcs simples et pointillés, respectivement. Les intervalles de capacités normales et maximales ( $[\underline{q}_{i,j}, \bar{q}_{i,j}]$ ), et les coûts d'expansion  $(c_{i,j})$  apparaissent sur chaque arc du graphe.

Considérons en particulier, l'arc  $a$  allant de  $A$  vers  $B$ , cet arc a comme intervalle de capacité est  $[0, 2]$  et son coût d'expansion unitaire est égal à 50.

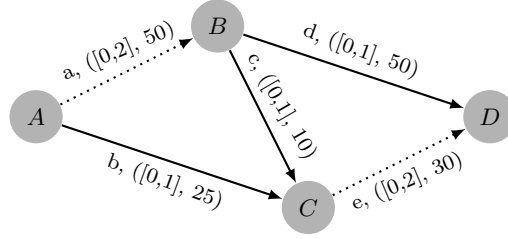


FIGURE 4.2 – Exemple d’une instance du jeu 0/m/1

### 4.3 Modèle mathématique

Considérons une instance de NEG 0/m/1, la résolution du problème MaxNash peut être formalisée par le programme mathématique 4.1 :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad F \\
 & t.q. \\
 & (i) \quad 0 \leq f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
 & (ii) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
 & (iii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0, & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \\
 & (iv) \quad \sum_{a_x \in \mathcal{AT}} (w_x) = 1 \\
 & (v) \quad \mathcal{S} = ((q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}}, (w_x)_{x=1, \dots, m}) \text{ est un équilibre de Nash} \\
 & (vi) \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbb{N}, f_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\ w_x \in \mathbb{R}, \forall a_x \in \mathcal{A} \\ F \in \mathbb{N} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les contraintes (i) et (ii) représentent les contraintes sur les valeurs de flot et de capacité. Les contraintes (iii) imposent la conservation de flot. Les contraintes (iv) assurent que  $w_x$  soit une politique de partage. Toutes ces contraintes de (i) à (iv) sont linéaires. Finalement, la contrainte complexe et non explicite (v) impose qu’une stratégie  $\mathcal{S}$  soit un équilibre de Nash et donc, par définition, une stratégie non pauvre.

### 4.4 Exemple illustratif

Revenons à l'exemple précédent de la Figure 4.2 et considérons deux politiques de partage différentes  $W^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $W^{(2)} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ .

Dans ce réseau, étant données les valeurs des capacités normales considérées  $\underline{q}_{i,j} = 0$ , le flot maximum qui peut circuler à coût zéro pour les agents transporteurs est égal à 0, il correspond à la stratégie  $\underline{\mathcal{S}}$ . Le flot maximum correspondant à la stratégie  $\bar{\mathcal{S}}$  est égal à 3.

Considérons la première politique de partage  $W^{(1)}$  et supposons que la stratégie initiale corresponde à la stratégie  $\mathcal{S}_0 = \underline{\mathcal{S}}$  (cf. Figure 4.3(a)). Pour cette politique de partage, la récompense totale étant  $\pi = 120$ , pour chaque augmentation unitaire de flot dans le réseau, la part de récompense offerte à chaque agent transporteur est égale à 60. Il est possible d'augmenter la capacité sur les arcs le long du chemin  $\{(A, C), (C, D)\}$ , ce qui permet d'aboutir à la stratégie  $\mathcal{S}_1 = (0, 1, 0, 0, 1, W^{(1)})$  (cf. Figure 4.3(b)), ce qui conduit à un flot  $F(\mathcal{S}_1) = 1$ , les profits des agents de transport prennent alors comme valeur  $Z_1(\mathcal{S}_1) = 35$  et  $Z_2(\mathcal{S}_1) = 30$ . À partir de cette stratégie  $\mathcal{S}_1$ , il est encore possible d'augmenter la capacité des arcs, et donc le flot, le long du chemin  $\{(A, B), (B, D)\}$ , pour obtenir la nouvelle stratégie  $\mathcal{S}_2 = (1, 1, 0, 1, 1, W^{(1)})$  (cf. Figure 4.3(c)), ce qui conduit à un flot maximum  $F(\mathcal{S}_2) = 2$  et à de nouveaux profits  $Z_1(\mathcal{S}_2) = 45$  et  $Z_2(\mathcal{S}_2) = 40$  pour les agents de transport.

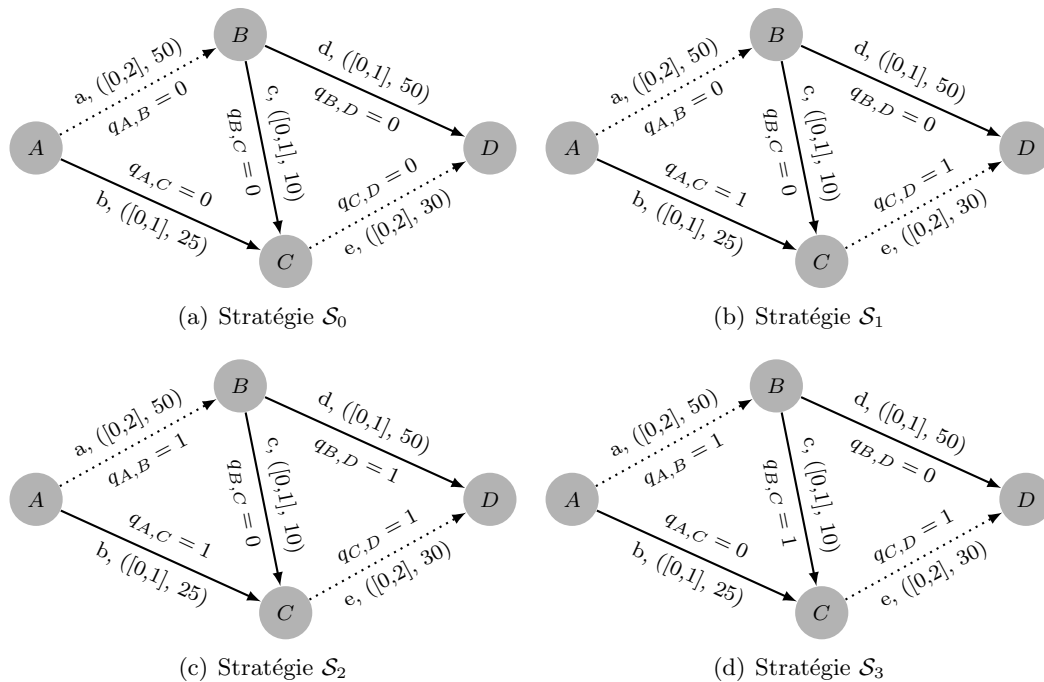


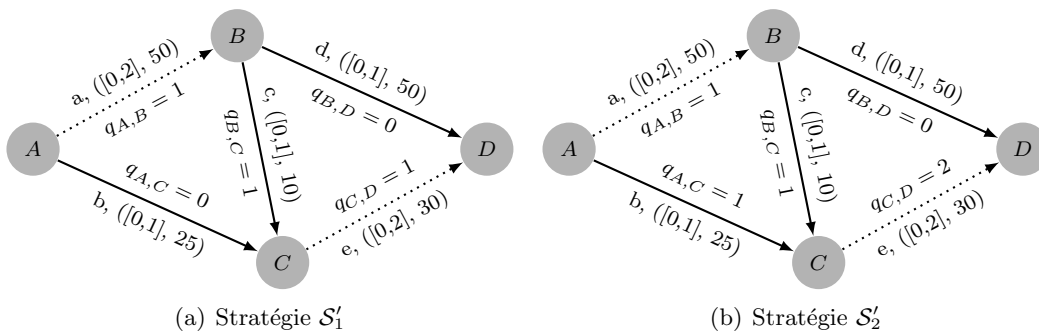
FIGURE 4.3 – Les stratégies pour  $W^{(1)}$



Néanmoins, nous observons que la stratégie  $\mathcal{S}_2$  n'est pas stable puisque les capacités peuvent être diminuées, unilatéralement par l'agent  $a_1^T$ , le long du chemin  $\{(D, B), (B, C), (C, A)\}$ . Cette diminution de flot donne lieu à la stratégie  $\mathcal{S}_3 = (1, 0, 1, 0, 1, W^{(1)})$  (cf. Figure 4.3(d)), elle correspond à un flot maximal  $F(\mathcal{S}_3) = 1$ , ce qui améliore le profit de l'agent  $a_1$  (i.e.,  $Z_1(\mathcal{S}_3) = 50 > Z_1(\mathcal{S}_2)$ ), au détriment de l'agent  $a_2^T$  ( $Z_2(\mathcal{S}_3) = -20$ ). Par conséquent, bien que la stratégie  $\mathcal{S}_2$  apparaisse meilleure que la stratégie  $\mathcal{S}_1$ , puisqu'elle correspond à une plus grande valeur de flot, elle ne correspond pas à un équilibre de Nash. Dans cet exemple, seule la stratégie  $\mathcal{S}_1$  est un équilibre de Nash.

Considérons maintenant la politique de partage  $W^{(2)}$  et la stratégie initiale  $\mathcal{S}_0$ . Il est possible d'augmenter le flot par deux unités le long des deux chemins  $\{(A, C), (C, D)\}$  puis  $\{(A, B), (B, C), (C, D)\}$ , respectivement. Ces deux augmentations successives permettent d'obtenir deux nouvelles stratégies  $\mathcal{S}'_1 = (0, 1, 0, 0, 1, W^{(2)})$  (cf. Figure 4.4(a)) et  $\mathcal{S}'_2 = (1, 1, 1, 0, 2, W^{(2)})$  (cf. Figure 4.4(b)), respectivement. Après les deux augmentations, les profits des agents transporteurs sont égaux à  $Z_1(\mathcal{S}'_2) = 25$  et  $Z_2(\mathcal{S}'_2) = 70$ . Remarquons que la stratégie  $\mathcal{S}'_2$  est stable puisque aucun agent ne peut modifier unilatéralement la capacité de ses arcs de manière à améliorer son profit. Sur cet exemple, c'est le meilleur équilibre de Nash par rapport à la valeur du flot avec la politique de partage  $W^{(2)}$ .

Ainsi, la politique de partage  $W^{(2)}$  conduit à une valeur de flot supérieure à celle obtenue avec la politique de partage  $W^{(1)}$  tout en garantissant la stabilité des stratégies mises en oeuvre. De plus, dans cet exemple, les valeurs des profits des agents transporteurs ont également été améliorés.

FIGURE 4.4 – Réseau de transport avec  $W^{(2)}$ 

## 4.5 Variation de flot

Dans cette section, nous introduisons la notion de graphe résiduel multi-agent que nous utilisons ensuite pour définir les notions de chemins augmentants et décroissants par agents. A l'aide de ces notions, nous caractérisons enfin les stratégies équilibres de Nash.

Dans un NEG impliquant plusieurs agents transporteurs, tout agent de transport  $a_x^T$  peut faire croître ou décroître les capacités des arcs qui lui appartiennent de manière unilatérale dans la mesure où il augmente son profit  $Z_x$ . Comme l'agent usager  $a_{m+1}^U$  ne peut jamais améliorer seul son profit  $Z_{m+1}^U$  (cf. Proposition 2.13), nous nous focalisons dans cette partie sur les agents de transport.

#### 4.5.1 Graphe résiduel multi-agent

Pour le cas d'un ensemble d'agents de transport, nous définissons un graphe résiduel multi-agent dont les arcs ont la même capacité résiduelle que celle définie dans le cas d'un seul agent de transport. En revanche, les coûts de ces arcs varient en fonction de l'agent de transport  $a_x^T$  considéré.

**Définition 4.3.** *Graphe résiduel multi-agent.*

Étant donné une instance du NEG 0/m/1 définie par un RMA 0/m/1  $\langle G, \mathcal{A}, \underline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{I}}, \mathcal{C}, \pi \rangle$ , une stratégie non pauvre  $\mathcal{S} \in \mathcal{S}^{np}$ , un vecteur de flot  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(\mathcal{F}(\mathcal{S})) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_F^A, \mathcal{E}_B^A)$  correspondant au graphe  $G$  est défini comme suit : chaque arc  $(i, j) \in \mathcal{E}$  est représenté par deux arcs dans le graphe résiduel : un arc avant  $(i, j) \in \mathcal{E}_F^A$  et un arc arrière  $(j, i) \in \mathcal{E}_B^A$ . A tout arc avant  $(i, j)$  (respectivement tout arc en arrière  $(j, i)$ ) est associé un vecteur de coût  $\Delta_F^{i,j} = (\delta_F^{i,j,x})_{x=1,\dots,m}$  (respectivement  $\Delta_B^{j,i} = (\delta_B^{j,i,x})_{x=1,\dots,m}$ ) ainsi qu'une capacité résiduelle  $r_F^{i,j}$  (respectivement  $r_B^{j,i}$ ).

Les capacités résiduelles des arcs avant et arrières ont les mêmes valeurs que dans le cas avec un seul agent de transport, i.e. :

- $r_F^{i,j} = \bar{q}_{i,j} - q_{i,j}$  si  $f_{i,j} = q_{i,j} (\geq \underline{q}_{i,j})$  ou  $r_F^{i,j} = \underline{q}_{i,j} - f_{i,j}$  if  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$  ;
- $r_B^{j,i} = q_{i,j} - \underline{q}_{i,j}$  si  $f_{i,j} = q_{i,j} (\geq \underline{q}_{i,j})$  ou  $r_B^{j,i} = f_{i,j}$  if  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ .

Les tableaux ci-dessous résument les différents cas possibles des vecteurs de coût  $\Delta_F^{i,j}$  et  $\Delta_B^{j,i}$  pour le cas d'un arc  $(i, j) \in \mathcal{E}_x^T$  dans le réseau de transport. Les coûts résiduels obtenus dépendent des agents considérés  $a_x^T$  et  $a_{x'}^T$  où  $x'$  représente tout autre agent non propriétaire de l'arc. Le tableau 4.1 donne les valeurs des coûts des arcs avant et le tableau 4.2 donne les valeurs des coûts des arcs arrière.

$\Delta_F^{i,j}$	$\delta_F^{i,j,x}$	$\delta_F^{i,j,x'}$
$0 \leq f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$	0	0
$\underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} = f_{i,j} < \bar{q}_{i,j}$	$c_{i,j}$	$+\infty$
$f_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$	$+\infty$	$+\infty$

TABLE 4.1 – Coûts résiduels des arcs avant

$\Delta_B^{i,j}$	$\delta_B^{i,j,x}$	$\delta_B^{i,j,x'}$
$f_{i,j} = 0$	$+\infty$	$+\infty$
$0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$	0	0
$\underline{q}_{i,j} < q_{i,j} = f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$	$-c_{i,j}$	$+\infty$

TABLE 4.2 – Coûts résiduels des arcs arrière

Ces coûts résiduels reflètent la possibilité d'utiliser les arcs avant et/ou arrière afin d'augmenter et/ou diminuer le flot. Un arc, avant ou arrière, ayant un coût résiduel égal à  $+\infty$  peut être éliminé du graphe résiduel puisque il est trop coûteux.

Pour les arcs avants un coût  $\delta_F^{i,j,x} = c_{i,j}$  reflète le fait que l'arc appartient à l'agent  $a_x^T$  et que le flot peut être augmenté à coût  $c_{i,j}$  en augmentant  $q_{i,j}$  (i.e.,  $q_{i,j} < \bar{q}_{i,j}$ ).

un arc avant avec un coût  $\delta_F^{i,j,x} = +\infty$  correspond à deux situations : soit l'arc du graphe de flot correspondant appartient à l'agent  $a_x^T$  et il n'est plus possible d'augmenter le flot (i.e.,  $f_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$ ) soit l'arc n'appartient pas à l'agent  $a_x^T$  et il n'est plus possible d'augmenter le flot à coût zéro (i.e.,  $\underline{q}_{i,j} \leq f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$ ).

Un arc avant avec un coût  $\delta_F^{i,j,x} = 0$  modélise le fait que l'agent  $a_x^T$  peut augmenter le flot à coût nul puisque l'arc  $(i, j)$  n'est pas saturé (i.e.,  $0 \leq f_{i,j} < q_{i,j}$ ) que cet arc appartienne ou non à l'agent  $a_x^T$ . Pour une stratégie non pauvre, cela ne peut avoir lieu que lorsque  $q_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ .

D'une manière similaire, pour les arcs arrières, un coût  $\delta_B^{j,i,x} = 0$  indique que le flot dans le graphe correspondant  $G$  peut être diminué sans générer un bénéfice. Si l'arc appartient à l'agent  $a_x^T$ , cela a lieu si on peut diminuer le flot ( $f_{i,j} \neq 0$ ) à coût nul (i.e.,  $0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$ ). Si l'arc n'appartient pas à l'agent  $a_x^T$ , ce scénario arrive autant que nous pouvons diminuer le flot ( $f_{i,j} \neq 0$ ).

Un coût  $\delta_B^{j,i,x} = -c_{i,j}$  signifie que  $a_x^T$  peut localement faire un profit  $c_{i,j}$  en diminuant  $q_{i,j}$ . Cela a lieu si l'arc  $(i, j)$  appartenant à l'agent est saturé (i.e.  $f_{i,j} = q_{i,j}$ ) et si la capacité peut encore être diminuée (i.e.,  $q_{i,j} > \underline{q}_{i,j}$ ).

Enfin, fixer le coût à  $\delta_B^{j,i,x} = +\infty$  modélise l'impossibilité d'utiliser l'arc pour diminuer le flot (i.e.,  $f_{i,j} = 0$ ).

Comme les définitions des capacités résiduelles dans  $G_r^A(\mathcal{F}(S))$  restent inchangées par rapport à celles définies pour  $G_r(\mathcal{F}(S))$  dans le NEG 0/1/1, les notions de chemins augmentant et décroissant restent valables (voir les Définitions 3.6 et 3.7). Un chemin augmentant ou décroissant reflètent toujours une manière d'augmenter (respectivement diminuer) le flot en modifiant la capacité des arcs du chemin. Cependant, comme les arcs du chemin peuvent appartenir à des agents différents, son coût varie selon l'agent considéré.

### 4.5.2 Augmenter le flot de manière profitable

Nous allons réutiliser la notion de *chemin augmentant*, vue dans la Section 3.3.4. Un chemin augmentant dans un graphe résiduel est composé par un ensemble d'arcs avant et arrière  $P = \{P^+, P^-\}$  tels que, en augmentant simultanément  $q_{i,j}$  d'une unité  $\forall (i, j) \in P^+$  et en diminuer  $q_{i,j}$  par une unité  $\forall (i, j) \in P^-$ , permet d'augmenter le flot total par une unité. Ce chemin est composé de différents agents du réseau de transport, soit  $\mathcal{A}_P$  l'ensemble de ces agents.

La variation totale de flot qui peut être faite le long de ce chemin augmentant pour un agent de transport  $a_x^T$  est notée  $\Delta F_x(P)$ , elle correspond au minimum des capacités résiduelles des arcs composant le chemin :  $\Delta F_x(P) = \min_{(i,j) \in P} (|r_F^{i,j}|, |r_B^{i,j}|)$ .

Notons que pour le jeu avec un unique agent usager/producteur, cette variation de flot est identique pour les agents puisque la capacité résiduelle ne varie pas d'un agent à un autre. Le coût du chemin  $P$  peut être évalué pour chacun des agents qui le compose. Pour un agent  $a_x^T$ , l'augmentation unitaire du flot peut être faite à un coût  $cost_x^T(P)$  égal à :

$$cost_x^T(P) = \sum_{(i,j) \in P^+} \delta_F^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in P^-} \delta_B^{i,j,x} \quad (4.2)$$

Pour une augmentation du flot de  $\Delta F_x(P)$ , le coût d'expansion de capacité supporté par l'agent est  $cost_x^T(P) \times \Delta F_x(P)$  et sa récompense est  $w_x \times \pi \times \Delta F_x(P)$ . Nous introduisons à présent la notion de chemin augmentant profitable.

**Définition 4.4.** *Chemin augmentant profitable.*

Étant donné une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$  et un vecteur de flot  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , un chemin augmentant  $P$  dans le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(\mathcal{F}(\mathcal{S}))$  allant **du noeud source**  $s$  **vers le noeud puits**  $t$  est profitable si, pour chaque agent transporteur  $a_x^T$  impliqué dans  $P$ , le coût du chemin augmentant est inférieur à la part de récompense qu'il reçoit :  $cost_x^T(P) < w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}_P$ .

### 4.5.3 Diminuer le flot de manière profitable

Un chemin décroissant  $\bar{P} = \{\bar{P}^+, \bar{P}^-\}$  est composé d'arcs avant et arrière. Si on diminue  $q_{i,j}$  d'une unité,  $\forall (i, j) \in \bar{P}^+$ , et si on l'augmente d'une unité,  $\forall (i, j) \in \bar{P}^-$ , alors on diminue le flot total d'une unité. Ce chemin est composé de différents agents du réseau de transport, soit  $\mathcal{A}_{\bar{P}}$  l'ensemble de ces agents.

Considérons un agent transporteur  $a_x^T \in \mathcal{A}_{\bar{P}}$ , le gain  $sav_x^T(\bar{P})$  généré par la diminution

du flot d'une unité à travers un chemin décroissant  $\bar{P}$  est défini comme suit :

$$sav_x^T(\bar{P}) = - \left[ \sum_{(i,j) \in \bar{P}^+} \delta_F^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in \bar{P}^-} \delta_B^{i,j,x} \right] \quad (4.3)$$

Pour une diminution du flot de  $\Delta F_x(\bar{P}) = \min_{(i,j) \in \bar{P}} (|r_F^{i,j}|, |r_B^{i,j}|)$ , le gain de l'agent résultant de la diminution de capacité est  $sav_x^T(\bar{P}) \times \Delta F_x(\bar{P})$  et sa perte de récompense est  $w_x \times \pi \times \Delta F_x(\bar{P})$ .

**Définition 4.5.** *Chemin décroissant profitable.*

Étant donné une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$  et un vecteur de flot  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , un chemin décroissant  $\bar{P}$  dans le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(\mathcal{F}(\mathcal{S}))$  allant **du noeud puits**  $t$  **vers le noeud source**  $s$  est profitable si, pour chaque agent transporteur  $a_x^T$  impliqué dans  $\bar{P}$ , le gain apporté par le chemin décroissant est supérieur ou égal à la part de récompense qu'il perd :  $sav_x^T(\bar{P}) \geq w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}_{\bar{P}}$ .

Notons que l'inégalité au sens large  $\geq$  impose à un agent qui ne ferait aucun profit (dont la part de récompense compenserait exactement le coût d'expansion) de décroître le flot. Il s'agit d'une convention : avec une inégalité stricte  $>$  on exigerait un gain strictement positif pour garantir la profitabilité d'un chemin décroissant, mais cela semble moins réaliste.

## 4.6 Stratégies stables

La recherche d'un flot maximal préservant la stabilité des stratégies nécessite de caractériser pour tout agent de transport des chemins tels qu'il puisse **seul** obtenir une récompense supérieure à son coût (dans le cas d'une augmentation de flot) ou obtenir une récompense inférieure à ses pertes (dans le cas d'une diminution de flot).

Pour cela, pour un agent transporteur  $a_x^T$ , parmi les chemins augmentant et décroissant dans lesquels il est impliqués, on s'intéresse soit aux chemins ne mettant pas en jeu d'autres agents, soit aux chemins concernant d'autres agents  $a_{x'}^T$  mais ayant tous des coûts (ou gains) nuls sur ces chemins. Notons par  $\mathcal{P}^A$  (respectivement  $\bar{\mathcal{P}}^A$ ) l'ensemble de ces chemins augmentants (respectivement décroissants) dans le graphe résiduel  $G_r^A(\mathcal{F}(\mathcal{S}))$  résultant d'une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$  et de son flot  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ .

Dans la suite de ce travail, par abus de langage, on appellera chemins augmentant ou décroissant de tels chemins.

**Proposition 4.6.** Caractérisation d'un équilibre de Nash.

Étant donnée une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$ , et le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(\mathcal{F}(\mathcal{S}))$ , la stratégie  $\mathcal{S}$  est un équilibre de Nash si et seulement si :

—  $\forall P \in \mathcal{P}^A$  :

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } cost_x^T(P) < w_x \times \pi; \quad (4.4)$$

— et,  $\forall \bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}^A$  :

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } sav_x^T(\bar{P}) \geq \pi \quad (4.5)$$

*Démonstration.* Selon la Proposition 2.13 et le corollaire 2.14, l'agent usager  $a_{m+1}^U$  ne peut jamais augmenter le flot seul. Par conséquent, une stratégie  $\mathcal{S}$  est stable si aucun agent transporteur  $a_x^T$  n'est capable de modifier profitablement sa stratégie  $S_x$ . La caractérisation d'un équilibre de Nash est donc restreinte aux agents transporteurs.

Considérons une stratégie  $\mathcal{S}$  et un agent transporteur  $a_x^T$ .

Par définition, si la stratégie  $\mathcal{S}$  est pauvre, alors ce n'est pas un équilibre de Nash.

Si  $\mathcal{S}$  est non pauvre, alors l'agent  $a_x^T$  peut améliorer sa situation uniquement en augmentant ou en diminuant le flot. Dans le premier cas, pour une unité additionnelle de flot, l'agent  $a_x^T$  reçoit  $w_x \times \pi$ . Une augmentation de flot sur un chemin augmentant, quelle que soit sa valeur, est profitable pour  $a_x^T$  si et seulement si le chemin augmentant  $P$  vérifie que  $cost_x^T(P) < w_x \times \pi$ , ce qui contredit l'Equation 4.4. Dans le second cas, le raisonnement est symétrique, une diminution de flot sur le chemin  $\bar{P}$  est profitable pour l'agent  $a_x^T$  si et seulement s'il existe un chemin décroissant  $\bar{P}$  tel que  $sav_x^T(\bar{P}) \geq w_x \times \pi$ , ce qui contredit l'Equation 4.5. En conclusion, si aucune de ces conditions n'est vérifiée, aucun agent  $a_x^T$  ne peut améliorer unilatéralement son profit, et  $\mathcal{S}$  est un équilibre de Nash.  $\square$

Sur la base de la Proposition 4.6, le modèle mathématique proposé dans la Section 4.3, pour caractériser des stratégies stables maximisant le flot, pourra être re-formulé. Ceci sera présenté dans le chapitre 7 où nous exposerons comment la contrainte non explicite ( $v$ ) peut se traduire en termes de chemins profitables pour aboutir à un modèle linéaire.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le jeu d'expansion de réseau 0/m/1, le jeu 1/m/0 étant symétrique. Nous avons exploité les propriétés du chapitre 3 pour caractériser les notions de chemins (augmentants et décroissants) profitables en nous basant sur un graphe résiduel multi-agent. Ces notions ont été exploitées pour caractériser la stabilité d'une stratégie pour le jeu 0/m/1. Dans le chapitre suivant, nous proposons une étude

---

de la complexité d'une famille de problèmes en se focalisant principalement sur le jeu d'expansion 0/m/1 ou 1/m/0.

# Chapitre 5

## Complexité

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions la complexité de différents problèmes en se focalisant principalement sur le jeu d'expansion  $0/m/1$  ou  $1/m/0$ .

Nous étudions tout d'abord, dans la Section 5.2, la complexité de trouver un équilibre de Nash. Dans la Section 5.3, nous montrons que le problème de recherche d'équilibre de Nash qui maximise le flot dans ce jeu (i.e., `MaxNash`) est NP-difficile au sens fort. Par la suite, nous étudions dans la Section 5.4 la complexité du problème de recherche de flot maximum profitable (i.e., `MaxProfitable`). Enfin, la dernière partie de ce chapitre 5.5 s'intéresse à une configuration particulière de jeux d'expansion dans laquelle les agents de transport possèdent chacun un seul arc.

### 5.2 Complexité de trouver un équilibre de Nash

#### 5.2.1 Décider si une stratégie est un équilibre de Nash pour le jeu $0/m/1$

Rappelons que si une stratégie  $\mathcal{S}$  est pauvre, alors  $\mathcal{S}$  n'est pas un équilibre de Nash. Afin de décider si une stratégie  $\mathcal{S}$  est un équilibre de Nash d'un jeu  $0/m/1$ , nous exploitons dans ce qui suit le résultat de la Proposition 4.6 qui stipule que, dans une stratégie stable il n'existe pas de chemin augmentant ou décroissant profitable qui permette à un agent de modifier unilatéralement sa stratégie pour améliorer son profit.

**Lemma 5.1.** *Décider si une stratégie est un équilibre de Nash est dans la classe NP.*



*Démonstration.* La condition pour qu'une solution soit un équilibre de Nash, donnée par la Proposition 4.6, peut être vérifiée en temps polynomial. En effet, comme montré pour le jeu 0/1/1 dans la Section 3.3.2, les coût et gain respectifs d'un chemin (i.e.,  $cost_x(P)$  et  $sav_x(\overline{P})$ ) peuvent être calculés en utilisant un algorithme de plus court chemin classique. (voir Proposition 3.5 du jeu 0/1/1).  $\square$

Une alternative pour vérifier la stabilité d'une stratégie consiste à considérer le cout de chaque agent  $Z_u^T(\mathcal{S}_{-u}, S_u^T)$  individuellement et d'essayer de trouver une nouvelle stratégie  $S'_{-u}$  telle que  $Z_u^T(\mathcal{S}_{-u}, S'_{-u}) > Z_u^T(\mathcal{S}_{-u}, S_u^T)$ . Ce problème peut facilement être modélisé par un programme linéaire et solutionné par l'algorithme du Simplexe. S'il existe un agent capable, seul, d'améliorer son gain, alors la stratégie n'est pas stable.

### 5.2.2 Trouver un équilibre de Nash dans le cas 0/m/1 pour $w_x$ fixée

Pour le jeu 0/m/1, nous montrons dans cette partie que trouver un équilibre de Nash est facile étant donnée une politique de partage quelconque  $w_x$ . Nous partons de la stratégie  $\underline{\mathcal{S}}$ , pour laquelle tous les arcs ont une capacité normale (i.e.,  $q_{i,j} = \underline{q}_{i,j}$ ,  $\forall (i,j) \in \mathcal{E}$ ). Dans un premier temps, le premier agent  $a_1^T$  décide de la capacité de ses arcs afin de maximiser son profit, alors que les capacités des arcs des agents  $a_2^T, \dots, a_m^T$  reste inchangées. Ceci peut être fait en résolvant le programme linéaire  $\text{OPT}(Z_1^T | \mathcal{S}_{-1})$  (5.1) ayant pour objectif de maximiser  $Z_1^T(\underline{\mathcal{S}}_{-1}, S_1^T)$  sous contrainte que  $q_{i,j} = q_{i,j}(S_x^T) \forall (i,j) \notin \mathcal{E}_1^T, \forall a_x^T \neq a_1^T$ , où  $q_{i,j}(S_x^T)$  représente la valeur de capacité fixée par l'agent  $a_x^T$ , initialement  $q_{i,j}(S_x^T) = \underline{q}_{i,j}$ . La stratégie individuelle résultante de ce modèle mathématique, notée  $S_1^{T*}$ , est la meilleure réponse de l'agent  $a_1^T$  sous la contrainte que  $\underline{\mathcal{S}}_{-1} = \{S_2^T, \dots, S_m^T\}$ . Notons que la stratégie globale  $\mathcal{S}_1 = (S_1^{T*}, \underline{S}_2^T, \dots, \underline{S}_m^T)$  vérifie que  $F(\mathcal{S}_1) \geq F(\underline{\mathcal{S}})$ . En effet, du fait qu'on part de la stratégie  $\underline{\mathcal{S}}$ , les capacités des arcs de  $a_1^T$  ne peuvent qu'augmenter, conduisant à une éventuelle augmentation de flot.

$$\begin{aligned}
& \text{OPT}(Z_x^T | \mathcal{S}_{-x}) \\
& t.q. \\
& (i) \quad f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (ii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ F & , i = s \\ -F & , i = t \end{cases} \quad (5.1) \\
& (iii) \quad q_{i,j} = q_{i,j}(S_y^T), \forall (i,j) \notin \mathcal{E}_x^T, \forall a_y^T \neq a_x^T \\
& (iv) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \overline{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_x^T \\
& \quad \quad q_{i,j}, f_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Ensuite, c'est au tour de l'agent  $a_2^T$  de décider de sa stratégie individuelle  $S_2^{T*}$ , en résolvant le programme linéaire  $\text{OPT}(Z_2^T | \mathcal{S}_{-2})$  étant donné que les stratégies des autres agents sont inchangées (i.e.,  $S_1^T = S_1^{T*}$  et  $(S_3^T, \dots, S_m^T) = (\underline{S_3^T}, \dots, \underline{S_m^T})$ ). On obtient une nouvelle stratégie  $\mathcal{S}_2 = (S_1^{T*}, S_2^{T*}, \underline{S_3^T}, \dots, \underline{S_m^T})$ . De la même manière, les capacités des arcs de l'agent  $a_2^T$  ne peuvent qu'augmenter, conduisant à une augmentation éventuelle du flot.

Il est possible qu'en modifiant la stratégie de l'agent  $a_2^T$ , on se retrouve dans une situation où des unités de capacité déjà ouvertes dans l'étape précédente pour des arcs de l'agent  $a_1^T$  ne sont plus utilisées (i.e., la stratégie est pauvre). Dans ce cas, l'agent  $a_1^T$  peut améliorer son profit en réduisant ses capacités en conséquence. On re-utilise donc de nouveau le programme linéaire  $\text{OPT}$  pour optimiser la stratégie de  $a_1^T$ , ce qui ne peut conduire ni à une augmentation, ni à une diminution du flot.

En réitérant ce raisonnement sur l'ensemble des agents, on obtient, l'algorithme 1, noté **TrouverNash**. Cet algorithme utilise en sous programme la procédure  $\text{OPT}(Z_x^T | \mathcal{S}_{-x})$  basé sur le programme linéaire 5.1 pour calculer la stratégie individuelle  $S_x^T$  qui maximise le profit  $Z_x^T$  de l'agent  $a_x^T$ , étant données les stratégies (fixes) des autres agent.

---

**Algorithm 1** TrouverNash
 

---

```

 $(S_1^T, S_2^T, \dots, S_m^T) \leftarrow (\underline{S_1^T}, \underline{S_2^T}, \dots, \underline{S_m^T})$ 
for  $x = 1 \dots m$  do
  // Phase d'expansion des capacités
  Calculer  $S_x^{T*} = \text{OPT}(Z_x^T | S_1^T, \dots, S_{x-1}^T, S_{x+1}^T, \dots, S_m^T)$ ;
   $(S_1^T, S_2^T, \dots, S_x^T, \dots, S_m^T) \leftarrow (S_1^T, S_2^T, \dots, S_x^{T*}, \dots, S_m^T)$ ;
  for  $v = 1 \dots x - 1$  do
    //Phase de réajustement des capacités
     $S_v^{T*} \leftarrow \text{OPT}(Z_v^T | S_1^T, \dots, S_{v-1}^T, S_{v+1}^T, \dots, S_m^T)$ ;
     $(S_1^T, S_2^T, \dots, S_v^T, \dots, S_m^T) \leftarrow (S_1^T, S_2^T, \dots, S_v^{T*}, \dots, S_m^T)$ ;
  end for
end for
return  $\mathcal{S}^N = (S_1^T, S_2^T, \dots, S_m^T)$ 

```

---

Les agents sont considérés dans l'ordre croissant de leurs indices. Dans la première phase d'expansion, quand on fait appel à la procédure  $\text{OPT}$  avec comme objectif la maximisation de  $Z_x^T$ , le flot circulant dans le réseau peut augmenter grâce à  $a_x^T$ . Comme indiqué précédemment, suite à cette phase d'expansion, certaines capacités des premiers  $x - 1$  agents peuvent avoir été ouvertes inutilement (i.e.,  $q_{i,j} \leq f_{i,j} < q_{i,j}$ ), la stratégie étant alors pauvre. Une phase de réajustement est donc nécessaire, ce qui est l'objet de la deuxième boucle de l'algorithme. Notons que ce réajustement n'influence pas la valeur du flot, ni donc la récompense allouée aux agents.

En effet, la valeur du flot n'est pas imposée mais reste limitée par les capacités ouvertes sur les arcs. Ces dernières étant ouvertes par chaque agent à tour de rôle, il n'est pas possible d'augmenter davantage le flot lors de la phase 2 car cela imposerait qu'un agent tiers ait ouvert auparavant une unité de capacité qu'il n'utiliserait pas (ce qui n'est pas possible). Le flot ne peut pas non plus baisser car il s'agit de celui obtenu lors de la phase 1 (qui circulent en exploitant uniquement les chemins profitables pour l'agent).

**Proposition 5.2.** *Dans le cas  $0/m/1$ , un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial pour une politique de partage fixée.*

*Démonstration.* Considérons la stratégie  $\mathcal{S}^N$  renvoyée par l'algorithme 1. Tout d'abord, cette stratégie est non pauvre, puisque la phase de réajustement assure qu'aucun agent ne peut réaliser un meilleur profit sans changer la valeur du flot. Par ailleurs, dans le graphe résiduel, il n'y aura aucun chemin décroissant profitable pour un agent  $a_x^T$ , puisque la capacité des arcs arrières d'un tel chemin a déjà forcément été diminuée durant l'appel de *OPT* avec l'objectif  $Z_v^T$ . De même, un chemin augmentant profitable pour  $a_x^T$  dans le graphe résiduel aurait déjà été utilisé pour augmenter le flot lors de l'appel de *OPT* avec un objectif  $Z_x^T$ . Si ce chemin n'a pas été profitable lors de l'appel de *OPT*, il ne peut pas l'être maintenant. Par conséquent, et tenant compte de la Proposition 4.6,  $\mathcal{S}^N$  est un équilibre de Nash.

Notons que, l'algorithme *OPT* porte sur le profit d'un seul agent à la fois. Par conséquent, il peut être implémenté en temps polynomial, en utilisant la programmation linéaire par exemple. La phase de réajustement peut être déroulée en temps linéaire, par rapport au nombre d'agents. Pour conclure, l'algorithme *TrouverNash* s'exécute en temps polynomial puisqu'il implique la résolution de  $\frac{1}{2}m(m+1)$  programmes linéaires. Notons que, étant donné que l'algorithme 1 donne toujours une stratégie, il existe toujours au moins un équilibre de Nash. Cet équilibre de Nash peut être arbitrairement mauvais en termes de valeur de flot.  $\square$

L'algorithme *TrouverNash* ne résout pas le problème *MinNash*. Nous donnons ci-après un contre exemple dans lequel la solution de l'algorithme *TrouverNash* est différente de la solution du problème *MinNash*.

Considérons le réseau donné dans la Figure 5.1. Ce réseau est composé de deux agents transporteurs  $a_1^T$  et  $a_2^T$ . La répartition des arcs entre les agents transporteurs est :  $\mathcal{E}_1^T = \{a = (A, B), c = (B, C), d = (B, D)\}$  et  $\mathcal{E}_2^T = \{b = (A, C), e = (C, D)\}$ ; ces arcs sont représentés par les arcs simples et pointillés, respectivement. Chaque agent peut augmenter la capacité de son arc d'une unité (i.e., dans l'intervalle  $[0, 1]$ ). La solution obtenue par l'algorithme *TrouverNash* pour cet exemple est  $\mathcal{S}_1 = (1, 1, 0, 1, 1, W)$  avec un flot  $F(\mathcal{S}_1) = 2$  où chaque agent augmente le flot par une unité sur un chemin qui lui appartient.

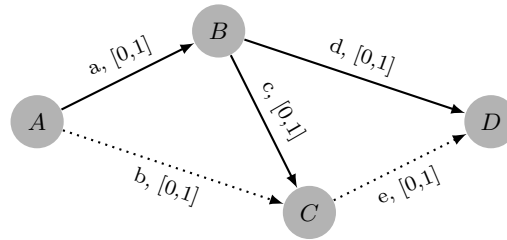


FIGURE 5.1 – Contre-exemple de MinNash

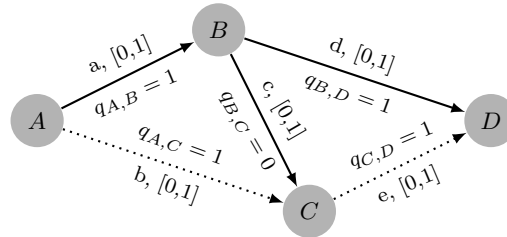


FIGURE 5.2 – Stratégie  $\mathcal{S}_1$  de TrouverNash

Pour cet exemple, la stratégie obtenue par MinNash est  $\mathcal{S}_2 = (1, 0, 1, 0, 1, W)$  donnée par la Figure 5.3. À travers cet exemple, nous notons que la solution obtenue par l'algorithme

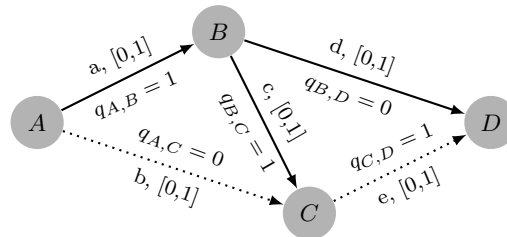


FIGURE 5.3 – Stratégie de MinNash

TrouverNash (i.e.,  $\mathcal{S}_1$ ) est différente de la solution MinNash (i.e.,  $\mathcal{S}_2$ ). La stratégie  $\mathcal{S}_1$  de TrouverNash étant stable, il n'existe pas de chemin décroissant profitable pour un agent pour diminuer la valeur du flot. La complexité du problème MinNash ne peut donc pas se ramener à celle du problème TrouverNash et reste ouverte.

### 5.3 Trouver un équilibre de Nash qui maximise le flot pour $0/m/1$

Dans cette section, nous étudions la complexité du problème MaxNash qui consiste à trouver un équilibre de Nash maximisant le flot. Nous nous focalisons sur le cas  $0/m/1$  avec partage variable.

Considérons la variante décisionnelle du problème consistant à déterminer s'il existe une stratégie stable dont le flot résultant est supérieur à une certaine valeur. Ce problème est défini comme suit :

### Équilibre de Nash à flot borné

Étant donné un NEG de type  $0/m/1$  et un entier  $\phi$ , est-il possible de trouver une stratégie stable  $\mathcal{S}$  tel que  $F(\mathcal{S}) > \phi$  ?

**Proposition 5.3.** *Le problème de recherche d'un équilibre de Nash à flot borné est NP-complet au sens fort.*

Nous proposons ici une généralisation de la preuve présentée dans Chaabane et al. (2015) ([31]) pour le jeu  $0/m/1$  avec partage égalitaire.

*Démonstration.* La démonstration de cette propriété se base sur une réduction du problème 3-Partition, connu pour être NP-complet au sens fort (voir [53]). La logique de la preuve se déroule comme suit : nous montrons dans un premier temps que le problème considéré est NP-complet au sens fort dans le cas d'une politique de partage fixé, supposée ici égalitaire. Dans un deuxième temps, nous étendons cette preuve au cas d'un partage optimal de la récompense.

Tout d'abord, NEG  $0/m/1$  est dans la classe NP. En effet, étant donnée une stratégie  $\mathcal{S}$ , on sait que :

1. On peut vérifier en temps polynomial que le flot résultant est supérieur à  $\phi$ . En effet, les capacités  $q_{i,j}$  étant fixées dans  $\mathcal{S}$ , on peut calculer le flot maximum en temps polynomial en utilisant les algorithmes classiques de recherche de flot maximum.
2. Si  $\mathcal{S}$  est non pauvre, on peut vérifier en temps polynomial que  $\mathcal{S}$  est stable (cf. corollaire 5.1).

Le problème 3-Partition consiste à décider si un ensemble  $\zeta = \{a_0, \dots, a_{K-1}\}$  de  $K = 3k$  entiers positifs, qui vérifie  $\sum_{l=0}^{K-1} a_l = k \times B$  et  $a_l \in [B/4, B/2[$ , peut être divisé en  $k$  sous-ensembles  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  et la somme des entiers dans chaque sous-ensemble est égale à  $B$  (en fait, la restriction sur les valeurs de  $a_l$  impose que  $|\zeta_i| = 3$ ).

#### 5.3.1 Cas d'une politique de partage égalitaire

Commençons par le cas du partage égalitaire de la récompense entre les agents transporteurs. Dans ce cas, une instance du problème 3-Partition se réduit de manière polynomiale à une instance de NEG avec une politique de partage fixée en construisant un RMA qui relie un noeud super-source  $V_0 = s$  à un noeud super-puits  $V_K = t$  (voir

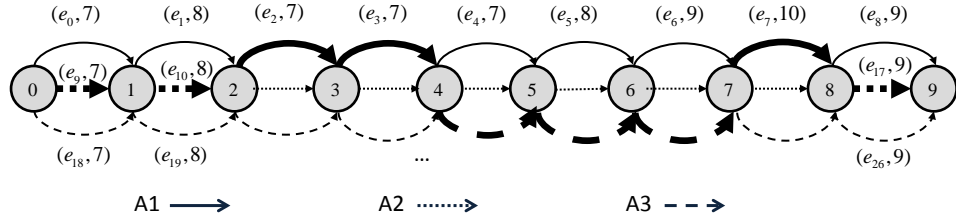
FIGURE 5.4 – Exemple de réduction de 3-partition avec  $k = 3$  et  $w_x = \frac{1}{k}$ 

Figure 5.4 pour un exemple de réduction d'une instance 3-Partition) :

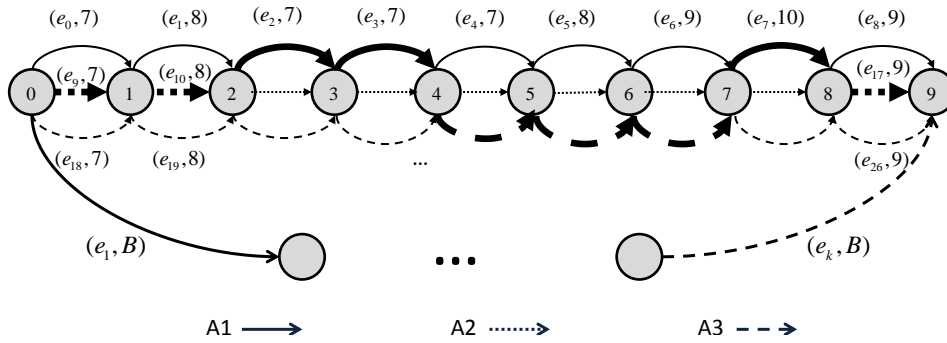
À partir d'une instance du problème 3-Partition, nous construisons un réseau  $G$  composé de  $k \times K$  arcs et  $K + 1$  noeuds. Le réseau considère  $k$  agents. Un agent  $a_x^T \in \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  possède  $K$  arcs. La destination d'un arc  $e_i$  est  $V_{i \text{ div } K}$ , l'origine est  $V_{i \text{ div } K + 1}$ . Entre deux noeuds  $V_{i \text{ div } K}$  et  $V_{i \text{ div } K + 1}$ , il existe  $k$  arcs parallèles, indexés de  $i$  à  $(i + K)$  avec un pas de  $k$ . L'arc  $e_i$  appartient à l'agent  $a_{i \text{ div } K}^T$ . Le coût de l'arc  $e_i$  est  $c_{e_i} = a_{i \text{ mod } K}$ , sa capacité minimale étant supposée nulle et sa capacité maximale étant fixée à  $\bar{q}_{e_i} = 1$ . En d'autres termes, pour chaque entier positif  $a_l \in \zeta$  sont associés  $k$  arcs parallèles ayant la même origine et la même destination et un coût d'expansion  $a_l$ , chacun d'eux appartenant à un agent spécifique. La récompense totale est fixée à  $\pi = (B + \epsilon)k$ ,  $\epsilon$  étant une valeur positive arbitrairement petite.

Le problème est de trouver, si elle existe, une stratégie stable tel que le flot est strictement supérieur à 0.

Par exemple, la Figure 5.4 illustre le réseau multi-agent résultant de la réduction d'une instance définie par  $k = 3$ ,  $\zeta = \{7, 8, 7, 7, 7, 8, 9, 10, 9\}$  et  $B = 24$ . Le réseau construit est composé de  $k = 3$  agents et  $K * k = 27$  arcs. Entre deux noeuds  $i$  et  $i + 1$ , on a  $k = 3$  arcs parallèles de coût  $a_{i+1}$ . Utiliser le chemin composé d'arcs en trait gras permet d'obtenir un flot total d'une unité. Nous verrons que cette stratégie est un équilibre de Nash puisque chaque agent ne paie jamais plus que sa part de récompense ( $w_x \pi = B + \epsilon = 24 + \epsilon$ ). De plus ; il existe  $k = 3$  chemins stables équivalents aussi solutions du problème 3-Partition initial.

Dans le cas général, étant donnée la politique de partage prédéfinie, la part de récompense d'un agent  $w_x \pi = B + \epsilon$  est identique pour tous les agents. L'objectif est de déterminer s'il existe un équilibre de Nash tel que  $F(\mathcal{S}) > 0$ .

Partons de la stratégie  $\underline{S}$  où tous les arcs ont une capacité normale i.e.,  $q_{i,j} = 0$ . Le flot résultant est égal à  $F(\underline{S}) = 0$ . À partir de cette stratégie, nous observons qu'un agent transporteur peut augmenter le flot de la valeur  $\delta \in ]0, 1]$ , en augmentant la capacité de tous ses arcs de  $\delta$ . Cependant, en faisant cette action, l'agent paye  $k \times B \times \delta$  et gagne uniquement  $(B + \epsilon) \times \delta$ . Par conséquent, la nouvelle stratégie n'est pas profitable et ne peut pas être un équilibre de Nash. Afin d'obtenir un équilibre de Nash, le total des

FIGURE 5.5 – Réduction à partir du problème de 3-partition avec  $k = 3$  et  $w_x$  variable

coûts engagés par chaque agent pour augmenter les capacités de ses arcs ne doit pas dépasser  $B$ , sinon il y aura au moins un agent qui aura intérêt à diminuer ses capacités (i.e., le graphe résiduel contient un chemin décroissant profitable). Toute solution de 3-Partition est une solution de notre problème.

Du fait de la topologie du réseau, pour augmenter le flot, il y a exactement  $K = 3k$  arcs impliqués dans le chemin augmentant. Dans une stratégie stable avec une flot strictement supérieur à 0, le chemin augmentant devant être profitable pour tous les agents, est composé exactement de trois arcs par agent. Le coût total pour chaque agent est exactement  $B$ . Toute solution de notre problème est donc solution de 3-Partition.

### 5.3.2 Cas d'une politique de partage variable

Dans le cas où la politique de partage n'est pas prédéfinie, une stratégie tient compte à la fois du choix des capacités des arcs et de la politique de partage. La réduction précédente, imposant un partage égalitaire, il est nécessaire de la modifier pour montrer que ce problème est également NP-complet. Pour cela, la réduction d'une instance 3-Partition doit considérer un réseau étendu, comme illustré sur la Figure 5.5, qui intègre un chemin supplémentaire de la source  $V_0$  vers le puits  $V_K$ . Ce chemin est composé de  $k$  arcs, chacun appartenant à un agent  $a_x^T$  spécifique. Ces arcs ont une capacité  $q_{i,j} \in [0, 1]$  et un coût d'expansion  $c_{i,j} = B$ . Comme indiqué dans la suite du texte, l'objectif de ce chemin additionnel est d'imposer une politique de partage  $w_x$ . Nous exigeons ici que la borne inférieure du flot recherché soit désormais égale à  $k + 1$ . En d'autres termes, nous cherchons une stratégie stable  $\mathcal{S}$  tel que  $F(\mathcal{S}) > k$ . Cette condition va imposer au réseau d'utiliser, non seulement les  $k$  chemins stables du réseau antérieur mais aussi le chemin supplémentaire. Or, la récompense pour une unité de flot étant  $\pi = (B + \epsilon) \times k$ , ce chemin est profitable si et seulement si  $w_x = 1/k, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$ . Il n'y a pas d'autre chemin augmentant possible. Évidemment, s'il existe une stratégie  $\mathcal{S}^*$  tel que le  $F(\mathcal{S}^*) = k + 1$ ,

l'instance initiale du problème 3-Partition est une instance positive. Sinon, on aura  $F(\mathcal{S}^*) \leq k$  et l'instance initiale du problème 3-Partition est négative.  $\square$

Enfin, le problème MaxNash étant NP-difficile dans le cas  $0/m/1$ , sa généralisation au cas  $q/m/p$  l'est aussi.

## 5.4 Trouver une stratégie profitable pour $0/m/1$ pour $w_x$ fixée

Dans cette section, nous remplaçons la contrainte de stabilité par une contrainte plus faible imposant seulement que les profits de tous les agents soient non-négatifs (i.e.,  $Z_x^T(S) \geq 0, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$ ). En effet, on remarque que lors de la recherche d'un flot maximum, étant donnée une stratégie  $\mathcal{S}$ , on omet généralement de considérer le profit des agents transporteurs. Or, il se peut que la solution proposée soit non profitable pour certains, ce qui serait alors équivalent à dire que ceux-ci seraient prêts à payer pour satisfaire au mieux le client. C'est pourquoi nous nous plaçons à présent sous l'hypothèse plus réaliste que seules les stratégies profitables sont acceptables.

Nous considérons donc le problème MaxProfitable qui consiste à trouver un flot maximum sous la contrainte que chaque agent reçoit un profit positif ou nul, les capacités minimum et maximum des arcs étant entières et la politique de partage  $w_x$ , étant fixée.

Ce problème peut être modélisé par le programme linéaire en nombres entiers 5.2 où les contraintes (iii) imposent que le profit de chaque agent soit positif ou nul.

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \quad F \\
& \text{t.q.} \\
& (i) \quad f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (ii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \quad (5.2) \\
& (iii) \quad w_x \times \pi \times (F - \underline{F}) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j}) \geq 0, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
& (iv) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (v) \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbb{N}, f_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\ F \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}$$

**Proposition 5.4.** *Pour un jeu  $0/m/1$  à partage fixe, MaxProfitable est NP-difficile au sens fort.*



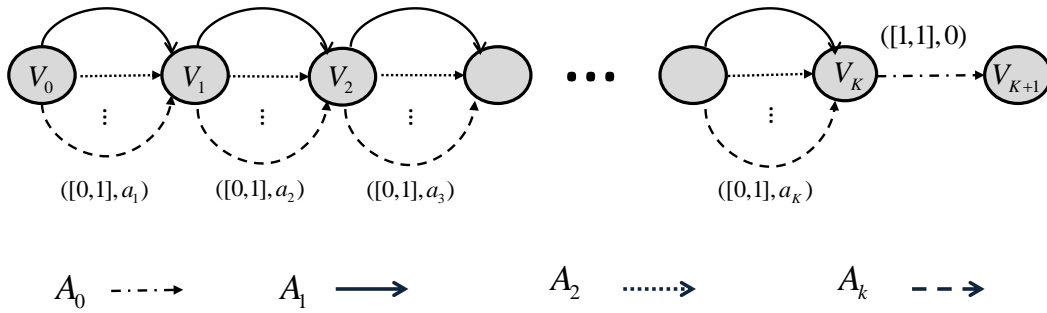


FIGURE 5.6 – Réduction de 3-partition à MaxProfitable

*Démonstration.* Comme dans la Section 5.3, nous considérons la version décisionnelle de ce problème où on souhaite savoir s'il existe une stratégie  $\mathcal{S}$  profitable telle que  $F(\mathcal{S}) \geq \phi$ . La preuve reste basée sur une réduction de 3-Partition.

Une instance du problème 3-Partition se réduit à une instance du problème MaxProfitable comme suit (cf. Figure 5.6). Le réseau complet  $G$  est composé de  $K + 2$  noeuds dont un noeud virtuel et de  $k \times K + 1$  arcs répartis entre  $k + 1$  agents. Le graphe relie un noeud source  $V_0$  à un noeud super-puits  $V_{K+1}$  de la manière suivante. La première partie du réseau, qui va du noeud source  $V_0$  au noeud puits  $V_K$  est identique à celle de la preuve de la Proposition 5.3 avec  $w_x$  fixé (voir Figure 5.4). Dans la deuxième partie du réseau, on ajoute un arc entre le noeud  $V_K$  et  $V_{K+1}$  appartenant à un agent fictif noté  $a_0$ . Cet arc a un intervalle de capacité  $[1, 1]$  et un coût d'expansion nul. Il permet de limiter à 1 le flot circulant dans le réseau. La récompense est telle que  $w_x \pi = B$ , la politique de partage étant égalitaire (i.e.,  $w_x = 1/k, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$ ).

Il n'existe que deux valeurs possibles de flot  $F \in \{0, 1\}$  pour le réseau ainsi défini. On veut savoir s'il existe une stratégie profitable  $\mathcal{S}$  tel que  $F(\mathcal{S}) > 0$ .

Si  $F(\mathcal{S}) = 1$ , il est évident qu'il existe exactement un chemin allant de  $V_0$  à  $V_{K+1}$  composé d'arcs ayant une capacité  $q_{i,j} = 1$  tandis que les autres chemins restent avec des capacités normales. S'il existe un arc n'appartenant pas à ce chemin ayant une capacité  $q_{i,j} = 1$  alors la stratégie est pauvre. Chaque contrainte (iii) du PL refforPNash se transforme en  $B \geq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$ . Ce qui signifie que la somme des coûts d'expansion des arcs appartenant à un agent  $a_x^T$  doit être inférieure ou égale à  $B$ . Puisque cette condition est valable pour tous les agents dans  $a_1^T, a_2^T, \dots, a_k^T$  et  $\sum_{l=0}^{K-1} a_l = k \times B$ , alors on a  $B = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$ . Ainsi, pour chaque agent, les coûts d'expansion sont exactement égaux à la récompense et la stratégie est profitable. De plus, du fait que  $B/4 \leq a_l < B/2$ , exactement 3 arcs impliqués dans ce chemin ayant  $q_{i,j} = 1$  appartiennent à un agent  $a_x^T$ . Par conséquent, la stratégie correspondante est une solution de 3-Partition, tel que quand un arc  $(i, j)$  appartient à un agent  $a_x^T$  a une capacité

$q_{i,j} = 1$ , alors le nombre  $a_l$  correspondant au coût de l'arc appartient au sous ensemble  $\zeta_u$ .

Si  $F(\mathcal{S}) = 0$ , cela signifie qu'il n'existe aucune stratégie  $\mathcal{S}'$  avec un flot  $F(\mathcal{S}') = 1$ . Par conséquent, il n'existe aucune stratégie  $\mathcal{S}'$  tel que  $B = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$  pour tout agent  $a_x^T$  et le problème de 3-partition initial n'a pas de solution.  $\square$

La difficulté du problème de recherche d'une stratégie stable provient donc essentiellement de la difficulté à trouver une stratégie profitable, ce qui est un pré-requis.

## 5.5 Cas particulier $|\mathcal{E}_x^T| = 1, \forall a_x^T$

Dans cette section, nous considérons le cas particulier d'un jeu 0/m/1 où chaque agent transporteur gère un seul arc. Pour ce cas, nous montrons que trouver un équilibre de Nash maximisant le flot peut être réalisé en temps polynomial. Par souci de simplification, nous notons par  $x$  l'unique arc de l'agent  $a_x^T$ . Dans ce contexte, augmenter le flot d'une unité rapporte la récompense  $w_x \times \pi$  à l'agent  $a_x^T$ . Étant donné qu'un agent gère un seul arc  $x$ , il est facile de comparer sa part de récompense avec son coût d'expansion. Il est alors possible de diviser l'ensemble des agents  $\mathcal{A}^T$  en deux sous-ensembles  $\mathcal{A}^+$  et  $\mathcal{A}^-$  comme suit :

$$\mathcal{A}^+ = \{a_x^T, 1 \leq x \leq m \mid c_x < w_x \times \pi\}$$

$$\mathcal{A}^- = \{a_x^T, 1 \leq x \leq m \mid c_x \geq w_x \times \pi\}$$

Pour chaque agent appartenant au groupe  $\mathcal{A}^+$ , il est profitable d'augmenter la capacité de son arc (i.e.,  $w_x \times \pi - c_x > 0$ ) si cela augmente la valeur totale du flot (i.e., son arc appartient à un chemin augmentant). Inversement, il n'est jamais profitable pour un agent appartenant au groupe  $\mathcal{A}^-$  d'augmenter la capacité de son arc puisque  $w_x \times \pi - c_x \leq 0$ .

Considérons la stratégie initiale  $\mathcal{S} = (S_1^T, \dots, S_m^T)$  telle que :

$$S_x^T = (\bar{q}_x), \forall a_x^T \in \mathcal{A}^+$$

$$S_x^T = (\underline{q}_x), \forall a_x^T \in \mathcal{A}^-$$

Nous soulignons le fait que la stratégie  $\mathcal{S}$  ainsi obtenue peut être pauvre puisque des arcs appartenant à des agents du groupe  $\mathcal{A}^+$  peuvent avoir une capacité maximale ouverte supérieure à la valeur de flot traversant leurs arcs (i.e.,  $f_{i,j} < q_{i,j}$ ). Néanmoins, en utilisant la formulation de programmation linéaire (2.1) du chapitre 2, trouver une stratégie non pauvre  $\hat{\mathcal{S}}$  à partir de  $\mathcal{S}$  est facile. Ce qui nous mène à la stratégie non pauvre  $\hat{\mathcal{S}}$

ayant la même valeur de flot  $F(\hat{\mathcal{S}}) = F(\mathcal{S})$ . Notons que  $\hat{\mathcal{S}}$  peut ne pas être unique. Nous allons dans ce qui suit prouver la propriété suivante :

**Proposition 5.5.** *La stratégie  $\hat{\mathcal{S}}$  est un équilibre de Nash, et il n'existe pas d'autre équilibre de Nash ayant une meilleure valeur du flot.*

*Démonstration.* La preuve est organisée en deux parties :

— *Preuve que  $\hat{\mathcal{S}}$  est un équilibre de Nash :*

Considérons les arcs des agents  $a_x^T \in \mathcal{A}^-$ . La seule façon d'augmenter le flot consiste à augmenter la capacité d'au moins un agent  $a_x^T \in \mathcal{A}^-$  et créer ainsi un chemin augmentant. Étant donné que  $c_x > w_x \times \pi$  pour les agents dans  $\mathcal{A}^-$ , aucun agent dans  $\mathcal{A}^-$  n'a intérêt à augmenter la capacité de son arc.

Considérons maintenant les agents  $a_x^T \in \mathcal{A}^+$ . Si, dans  $\hat{\mathcal{S}}$ , on a  $q_x = \bar{q}_x$  alors  $a_x^T$  ne peut améliorer son profit qu'en diminuant la capacité de son arc dans un chemin décroissant. Puisque, pour les agents dans  $\mathcal{A}^+$ ,  $c_x \leq w_x \times \pi$ , aucun agent n'aura intérêt à diminuer sa capacité. Si dans  $\hat{\mathcal{S}}$ ,  $q_x < \bar{q}_x$ , un agent  $a_x^T$  pourrait augmenter la capacité de son arc à travers un chemin augmentant tel que tous les arcs avant lui appartiennent (sinon il n'est pas possible d'augmenter la valeur du flot). Une telle situation ne peut pas avoir lieu, puisque chaque agent possède exactement un seul arc.

Pour conclure, puisqu'aucun agent ne peut améliorer son profit par lui-même,  $\hat{\mathcal{S}}$  est un équilibre de Nash.

— *Preuve que  $\hat{\mathcal{S}}$  est le meilleur équilibre de Nash :*

Supposons qu'il existe une stratégie  $\mathcal{S}'$  tel que  $F(\mathcal{S}') > F(\hat{\mathcal{S}})$ . Cette stratégie nécessite que la capacité d'au moins un arc d'un agent  $a_x^T \in \mathcal{A}^-$  ait été augmentée par rapport à la stratégie  $\hat{\mathcal{S}}$ . Mais étant donné que  $c_x > w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^-$ ,  $\mathcal{S}'$  n'est pas un équilibre de Nash (cf. Proposition 4.6).

□

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la complexité d'une famille de problèmes d'expansion de réseau  $0/m/1$ . Nous avons tout d'abord prouvé que déterminer un équilibre de Nash pour le jeu  $0/m/1$  peut être réalisé en temps polynomial. Puis, à partir de l'algorithme proposé dans cette preuve, nous avons pu déduire que le problème **MinNash** est également polynomial.

Nous avons également étudié la complexité du problème **MaxNash** consistant à trouver un équilibre de Nash maximisant le flot pour le jeu  $0/m/1$  avec partage variable. Nous

avons montré que le problème équivalent de recherche d'un équilibre de Nash à flot borné est NP-complet au sens fort dans le cas d'une politique de partage égalitaire ou variable. Nous nous intéressons dans le chapitre 7 à la résolution du problème **MaxNash** pour le jeu  $0/m/1$ .

Nous avons ensuite étudié le problème **MaxProfitable** qui consiste à trouver un flot maximum sous la contrainte que chaque agent reçoit un profit positif ou nul et que la politique de partage est fixée pour le jeu  $0/m/1$ . Nous avons montré que ce problème **MaxProfitable** est NP-difficile au sens fort.

Nous nous sommes intéressés également à étudier un cas particulier du jeu  $0/m/1$  dans lequel chaque agent transporteur ne gère qu'un seul arc et nous avons montré que, dans ce cas, trouver un équilibre de Nash maximisant le flot peut être réalisé en temps polynomial.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les premiers pas vers une généralisation du jeu d'expansion  $0/m/1$  au cas impliquant plusieurs agents producteurs et/ou usagers.



## Chapitre 6

# Premier pas vers une généralisation

### 6.1 Introduction

Ce chapitre traite des problèmes d'expansion de réseau généralisés dans lesquels est impliqué un ensemble d'agents clients (usagers et/ou producteurs) en complément de l'ensemble des agents transporteurs. Nous montrons comment étendre les résultats du chapitre 4, dans le cas de capacités minimales nulles, afin de déterminer des stratégies stables maximisant le flot total.

Nous considérons une généralisation des jeux d'expansion  $0/1/1$  et  $0/m/1$  présentés dans les chapitres précédents. Nous nous intéressons en particulier aux jeux :

- $0/m/p$  entre un ensemble de  $m$  agents transporteurs et un ensemble de  $p$  agents usagers ;
- $q/m/0$  entre un ensemble de  $m$  agents transporteurs et un ensemble de  $q$  agents producteurs ;
- $q/m/p$  entre un ensemble de  $m$  agents transporteurs, un ensemble de  $q$  agents producteurs et un ensemble de  $p$  agents usagers. Dans ce dernier jeu, l'agent transporteur augmente la capacité de ses arcs pour faire passer du flot et reçoit en contrepartie une récompense des agents producteurs et usagers.

Dans le jeu  $0/m/p$ , le réseau de transport  $T$  fournit un flot au réseau des usagers  $U$  et reçoit en contrepartie une récompense comme l'illustre la Figure 6.1(a). D'une manière symétrique, dans le jeu  $q/m/0$ , les agents de transport reçoivent une récompense de la part des agents producteurs  $P$ . Avec cette récompense, ils distribuent un flot de produits comme le représente la Figure 6.1(b).

Dans le jeu plus général  $q/m/p$ , les agents de transport reçoivent une récompense de

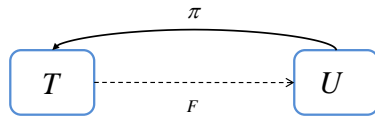
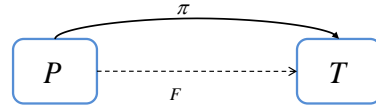
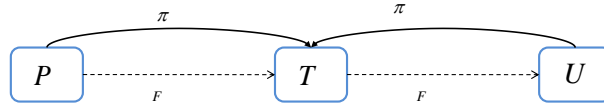
(a) Jeux Transporteurs/Usagers  $0/m/p$ (b) Jeux Producteurs/Transporteurs  $q/m/0$ (c) Jeux Producteurs/Transporteurs/Usagers  $q/m/p$ 

FIGURE 6.1 – Principe des jeux généralisés

la part des agents producteurs  $P$  et des agents usagers  $U$  afin de distribuer un flot de produits comme l'illustre la Figure 6.1(c). Comme auparavant, notre analyse porte sur la recherche de stratégies dite *stables* telles qu'aucun agent n'a intérêt individuellement à dévier de sa stratégie.

Le chapitre se déroule comme suit. Nous nous intéressons dans la Section 6.2, à une généralisation au cas de plusieurs agents usagers  $0/m/p$  et nous exposons les raisons des hypothèses sur les valeurs des capacités minimales. Le jeu  $q/m/0$  étant symétrique, nous le présentons brièvement dans la Section 6.3. La Section 6.4 est consacrée au jeu d'expansion  $q/m/p$ .

## 6.2 Jeu d'expansion de réseau $0/m/p$

Le jeu  $0/m/p$  a été formellement défini dans le chapitre 2 en Section 2.3. Nous allons dans ce qui suit caractériser les propriétés spécifiques de ce jeu.

### 6.2.1 Caractéristiques du jeu $0/m/p$

Rappelons la définition des profits individuels des différents agents pour une stratégie  $\mathcal{S}$  associée à un vecteur de flot maximum  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  de valeur  $F(\mathcal{S})$  :

- pour un agent transporteur  $a_x^T \in \mathcal{A}^T$ , le profit  $Z_x^T(\mathcal{S})$  représente la différence entre sa part de récompense qu'il reçoit des agents usagers et ses dépenses :

$$Z_x^T(\mathcal{S}) = \sum_{y \in \mathcal{A}^U} (w_x^y \times \pi_y) \times (F_y(\mathcal{S}) - \underline{F}_y) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^T} c_{i,j} \times (q_{i,j} - \underline{q}_{i,j})$$

- pour un agent usager  $a_y^U$ , le profit  $Z_y^U(\mathcal{S})$  correspond à la valeur de flot qui circulent sur ses arcs :  $Z_y^U(\mathcal{S}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_y^U} (f_{i,j})$ .

L'objectif social est la maximisation du flot total circulant dans le réseau et correspond donc à la somme des profits individuels des agents usagers.

Nous nous intéressons dans ce qui suit à la résolution du problème **MaxNash**, à savoir déterminer un flot stable de valeur maximale. Le problème **MinNash** n'est pas discuté dans ce chapitre.

Dans la Section 2.4, nous avons caractérisé la notion de stratégie pauvre dans le cas où un seul agent distribue la récompense. Nous considérons ici le cas où plusieurs agents distribuent une récompense.

À flot maximal constant, nous montrons à présent qu'un agent usager quelconque  $a_y^U$  peut maintenant améliorer son profit individuel en jouant sur sa stratégie individuelle, i.e., sur la distribution de sa récompense. Remarquons que cela n'est pas possible si l'agent usager ou producteur est unique (comme discuté dans la Section 2.4).

Cette situation est illustrée par la Figure 6.2 comportant 2 agents usagers ( $a_1^U$  et  $a_2^U$ ), 1 agent producteur ( $a_1^P$ ) et 2 agents de transport. Le premier agent de transport possède les arcs en trait plein (de 2 vers 3 et de 2 vers 4) et le second possède l'arc de 1 vers 2 en trait pointillé. Dans la situation (à coût d'expansion nul) où les agents de transport fixent tous leurs capacités au minimum, les agent usager  $a_1^U$  et  $a_2^U$  reçoivent un flot nul : ils récompensent donc les agents de transport dès que le flot qu'ils perçoivent devient positif.

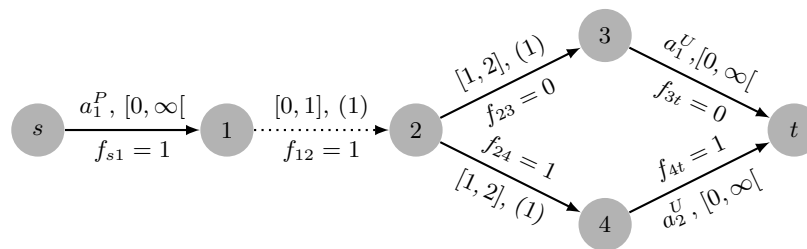


FIGURE 6.2 – Stratégie dans laquelle un agent usager peut améliorer son gain par lui même

Nous considérons dans la figure 6.2, la stratégie non-pauvre des agents transporteur  $S^T$  où l'agent de transport en pointillé a ouvert (profitablement) une unité de capacité alors que celui en trait plein a gardé ses capacités à leurs valeurs normales (les valeurs de capacité sont notées entre parenthèses sur les arcs de chaque agent, à la suite des intervalles de valeurs possibles). Un flot d'une unité peut alors partir de l'agent producteur et aller vers un des agents usagers, cela à coût nul pour l'agent de transport en trait plein, et les agents de transport sont tous deux récompensés. Il est clair ici que l'agent



en trait plein a le choix d'envoyer le flot vers  $a_1^U$  ou  $a_2^U$  et qu'il choisira celui offrant la meilleure récompense ( $a_2^U$  pour l'exemple de la Figure 6.2). L'autre agent ( $a_1^U$  dans l'exemple) pourrait alors détourner l'unité de flot à son profit, au détriment de  $a_2^U$ , en décidant unilatéralement d'augmenter la part de récompense qu'il alloue à l'agent en trait plein.

De façon générale, étant donnée une stratégie  $\mathcal{S}$ , pour qu'un agent usager  $a_y^U$  reçoive du flot en plus (au détriment d'un autre agent usager), il faut qu'il existe :

- soit un chemin  $P$  ayant comme puits un arc de  $a_y^U$  et tel que  $\forall (i, j) \in P \cap \mathcal{E}^T$ , le flot  $f_{i,j}$  est inférieur à la capacité  $q_{i,j}$  ouverte. Sur un tel chemin, on pourrait donc faire circuler une unité de plus ;
- soit un chemin  $P$  sur lequel circule un flot à destination d'un autre agent usager  $a_{y'}^U$  et qui pourrait être détourné, via un ensemble d'arc non saturé, à destination de  $a_y^U$  (cette situation étant illustrée sur la Figure 6.2).

Dans les deux cas, nous observons que l'existence d'un arc non saturé chez un agent de transport est nécessaire. Cela n'est possible que si l'agent a ouvert de la capacité sans l'utiliser (i.e.,  $f_{i,j} < q_{i,j}$  et  $q_{i,j} > \underline{q}_{i,j}$ ) ou si un arc, dont la capacité normale est strictement positive, n'est pas exploité pleinement (i.e.,  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ ). Si on suppose que  $\mathcal{S}$  est une stratégie non-pauvre, la première situation ne peut clairement pas se produire. Par contre, comme illustré dans l'exemple de la Figure 6.2, une stratégie non pauvre ne permet pas d'éviter le second cas.

Les résultats présentés aux chapitres précédents, supposant que seuls les agents de transport peuvent influencer la stabilité d'une stratégie ne se généralisent donc pas directement. En particulier, la condition nécessaire et suffisante 4.6, utilisée pour caractériser un équilibre de Nash, n'est plus suffisante mais uniquement nécessaire.

Nous analysons dans la suite de ce chapitre le cas où les capacités normales des agents de transport sont toutes nulles (i.e.,  $\underline{q}_{i,j} = 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E}^T$ ). Dans cette situation, le cas exposé ci-dessus ne peut pas se produire. Le cas général, avec des capacités minimales quelconques, fait partie des perspectives de recherche ouvertes pour cette thèse.

### 6.2.1.1 Propriétés basiques

Dans le cas où les capacités normales des agents de transport sont toutes nulles (i.e.,  $\underline{q}_{i,j} = 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E}^T$ ), un flot ne peut plus être détourné à coût nul d'un agent usager vers un autre. La propriété suivante est alors vérifiée.

**Proposition 6.1.** *Étant donné un jeu  $0/m/p$  à capacités normales nulles et une stratégie  $\mathcal{S}$  non pauvre pour les agents de transport et un flot maximal  $F(\mathcal{S})$ , un agent usager ne peut jamais améliorer seul son profit.*

*Démonstration.* Comme discuté plus haut, un agent usager peut éventuellement améliorer son profit s'il existe un arc de transport  $(i, j)$  tel que : i)  $f_{i,j} < q_{i,j}$  et  $q_{i,j} > \underline{q}_{i,j}$  ou ii)  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ . Comme  $\underline{q}_{i,j} = 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E}^T$ , supposer que  $\mathcal{S}$  est non pauvre permet d'éviter ces deux situations.  $\square$

La Proposition 6.1 permet de restreindre la Définition 2.8 d'un équilibre de Nash comme suit :

**Corollaire 6.2. Équilibre de Nash  $0/m/p$ .** *Étant donnée un jeu  $0/m/p$  à capacités normales nulles, une stratégie  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^T, \mathcal{S}^R)$  est un équilibre de Nash si et seulement si :  $\mathcal{S}^T$  est non pauvre pour les agents transporteurs, et, pour tout agent transporteur  $a_x^T$ , ayant une stratégie  $S_x^T$ , la condition suivante est vérifiée :*

$$Z_x^T(S_x^T, \mathcal{S}_{-x}) \geq Z_x^T(S_x'^T, \mathcal{S}_{-x}), \forall S_x'^T \neq S_x^T \quad (6.1)$$

*Démonstration.* Sachant que seule une stratégie non-pauvre peut être stable et que la Proposition 6.1 stipule qu'un agent usager  $a_y^U$  ne peut jamais seul améliorer son profit, la stratégie  $\mathcal{S}$  est stable si et seulement si aucun agent transporteur  $a_x^T$  n'est capable de modifier sa stratégie  $S_x$  d'une manière profitable. C'est exactement ce que la condition 6.1 impose.  $\square$

### 6.2.2 Variation de flot

Pour le jeu  $0/m/p$ , nous nous intéressons, comme dans les chapitres 3 et 4, à la maximisation de l'objectif social, c'est à dire à la maximisation du flot total dans le réseau et plus précisément à l'obtention d'un équilibre de Nash maximisant l'objectif social.

Pour cela, nous utilisons la notion de graphe résiduel multi-agent définie dans 4.3 pour le jeu  $0/m/1$  qui nous permet de caractériser les chemins augmentants et décroissants pour les agents transporteurs. En effet, en raison de la topologie des réseaux considérés (cf. Section 2.2), un chemin dans le NEG  $0/m/p$  finit nécessairement par un et un seul arc appartenant à un agent usager. L'agent usager qui possède l'arc sur lequel passe la nouvelle unité de flot donne une récompense et décide de son partage entre les agents transporteurs. De ce fait, nous pouvons réutiliser la notion de graphe résiduel, telle que définie dans 4.3, afin de trouver les chemins augmentant et décroissant profitables

(individuellement). La différence de ce jeu par rapport au jeu  $0/m/1$  réside dans la définition des profits individuels des agents.

En effet, deux équilibres de Nash offrant le même flot total peuvent engendrer des profits très différents pour les agents usagers puisque l'objectif d'un agent usager est de maximiser le flot qui circule sur les arcs qu'il détient.

### 6.2.2.1 Graphe résiduel multi-agent

Étant donnée la topologie du réseau de transport considéré, chaque chemin intègre à sa fin un seul arc appartenant à un agent usager. D'après la propriété 6.1, ce dernier ne peut pas seul augmenter le flot qui lui parvient via le réseau. En revanche, les agents transporteurs contrôlent les arcs dans le réseau de transport et peuvent décider d'augmenter ou de baisser le flot, en jouant sur leurs capacités, en fonction de leur part de récompense, cela afin d'améliorer leur profit.

En définitive, la recherche de chemins augmentants ou décroissants reste basée sur les graphes résiduels par agents transporteurs. Par conséquent, la définition de graphe résiduel pour le jeu  $0/m/p$  reste similaire à celle proposée pour le jeu  $0/m/1$ . Les capacités résiduelles ( $r_F^{i,j}$  et  $r_F^{i,j}$ ) et les couts résiduels par agents de transport  $a_x^T$  ( $\delta_B^{i,j,x}$  et  $\delta_B^{i,j,x}$ ) sont définis comme dans le cas du jeu  $0/m/1$  (cf. Définition 4.3). Les capacités résiduelles des arcs reliant un agent usager au sommet super-puits sont infinies dans le sens des arcs en avant (il est toujours possible de faire circuler plus de flot vers un agent usager) et sont égales au flot circulant sur le graphe de flot dans le sens des arcs de retour. Les couts résiduels des arcs avant et arrière appartenant à des agents usagers sont nuls car cette potentielle variation de flot n'entraîne aucun coût pour l'agent usager.

### 6.2.2.2 Augmenter le flot

La notion de *chemin augmentant profitable* doit être re-ajustée pour un jeu avec plusieurs agents usagers. Dans ce contexte, un chemin augmentant dans un graphe résiduel est composé d'un ensemble d'arcs avant et arrière  $P = \{P^+, P^-\}$  appartenant à des agents transporteurs et un seul arc à la fin appartenant à un agent usager.

Les arcs appartenant aux agents transporteurs sont tels qu'en augmentant  $q_{i,j}$  d'une unité  $\forall (i,j) \in P^+$  et en diminuant  $q_{i,j}$  d'une unité  $\forall (i,j) \in P^-$  de manière simultanée, il est possible d'augmenter le flot qui circule dans le réseau d'une unité pour un des agents usagers.

La variation totale de flot  $\Delta F_x(P)$  qui peut être faite le long de ce chemin augmentant

pour l'agent de transport  $a_x^T$  vaut :  $\Delta F_x(P) = \min_{(i,j) \in P} (|r_F^{i,j}|, |r_B^{i,j}|)$ . Pour un agent usager  $a_y^U$ , deux situations se présentent, soit  $a_y^U$  ne détient pas le dernier arc du chemin augmentant (i.e., l'arc arrivant au sommet super-puits) et dans ce cas la variation de flot est nulle,  $\Delta F_y(P) = 0$ , pour cet agent ; soit  $a_y^U$  détient ce dernier arc pour lequel la variation de flot possible est infinie, la variation de flot de l'agent usager est donc borné par la valeur de la variation de flot des agents de transport  $\Delta F_y(P) = \Delta F_x(P)$ . Le coût d'un chemin augmentant pour un agent de transport  $a_x^T$ , s'exprime de la façon suivante :

$$cost_x^T(P) = \sum_{(i,j) \in P^+} \delta_F^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in P^-} \delta_B^{i,j,x} \quad (6.2)$$

Pour un agent usager, le coût d'un chemin augmentant est considéré comme nul.

**Définition 6.3.** *Chemin augmentant profitable.*

Un chemin augmentant  $P \in \mathcal{P}$ , allant du nœud super-source  $S_s$  vers le nœud super-puits  $S_t$ , est dit profitable pour les agents de transport si, pour chaque agent  $a_x^T$  impliqué dans  $P$ , le cout du chemin augmentant est inférieur à la part de récompense qu'il reçoit :  $cost_x^T(P) < \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y$ .

Pour l'unique agent usager impliqué dans un chemin augmentant, le chemin est également profitable dans la mesure où il correspond à une augmentation d'une unité de flot sans entrainer de coût.

### 6.2.2.3 Diminuer le flot

De manière symétrique, un chemin décroissant pour des agents transporteurs  $\bar{P} = \{\bar{P}^+, \bar{P}^-\}$  est composé d'arcs avant et arrière. Si  $q_{i,j}$  est diminué d'une unité  $\forall (i,j) \in \bar{P}^+$  et augmenté d'une unité  $\forall (i,j) \in \bar{P}^-$ , la valeur globale du flot est diminuée d'une unité. Le gain pour un agent transporteur  $a_x^T$  résultant d'une diminution de la capacité de ses arcs appartenant à un chemin décroissant, qu'on note par  $sav_x^T(\bar{P})$ , est donné par l'expression suivante :

$$sav_x^T(\bar{P}) = - \left[ \sum_{(i,j) \in \bar{P}^+} \delta_F^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in \bar{P}^-} \delta_B^{i,j,x} \right] \quad (6.3)$$

**Définition 6.4.** *Chemin décroissant profitable.*

Un chemin décroissant  $\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}$ , allant du nœud puits  $t$  au nœud source  $s$  est profitable si pour chaque agent  $a_x^T$  impliqué dans  $\bar{P}$ , le gain induit par le chemin décroissant est supérieur ou égal à la part de récompense qu'il perd :

$$sav_x^T(\bar{P}) \geq \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y.$$

Pour l'unique agent usager impliqué, le chemin décroissant est considéré comme profitable dans la mesure où il correspond à une diminution de flot de coût nul.

En d'autres termes, à travers un chemin décroissant profitable, diminuer le flot par une unité est profitable pour un agent aux détriments des autres agents.

### 6.2.3 Caractérisation d'un équilibre de Nash

Dans le contexte de jeux multi-agents, il est important de pouvoir caractériser les stratégies pour lesquelles certains agents peuvent agir **seuls** pour diminuer ou augmenter le flot. Par conséquent, il est toujours intéressant de trouver des chemins augmentant profitables individuellement pour certains agents afin d'augmenter la valeur du flot, et satisfaire la demande des agents usagers, sans pour autant créer des chemins retours profitables individuellement pour certains agents, et donc préserver la stabilité.

En tenant compte de la Proposition 6.1 et du Corollaire 6.2, la caractérisation des stratégies équilibres de Nash peut s'exprimer par la Proposition 6.5 suivante :

**Proposition 6.5. Équilibre de Nash 0/m/p.** *Étant donné un jeu 0/m/p à capacités normales nulles, une stratégie non pauvre  $\mathcal{S}$  est un équilibre de Nash si et seulement si :*

—  $\forall P \in \mathcal{P}^A :$

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } cost_x^T(P) < \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y \quad (6.4)$$

— et,  $\forall \bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}^A$

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } sav_x^T(\bar{P}) \geq \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y \quad (6.5)$$

## 6.3 Jeu d'expansion de réseau q/m/0

On considère dans cette section, le jeu d'expansion de réseau du type q/m/0 impliquant  $q$  agents producteurs et  $m$  agents transporteurs. De manière similaire au problème précédent, chaque agent transporteur détient un ensemble d'arcs dans le réseau de transport et il est capable d'augmenter la capacité de ses arcs jusqu'à une valeur maximale moyennant un coût d'expansion. De manière symétrique, les agents producteurs donnent une récompense aux agents transporteurs pour faire acheminer leurs produits à travers le

réseau de transport selon la topologie du graphe définie dans la Section 2.2.2 (cf. Figure 2.2). Pour un agent producteur, l'objectif est de maximiser le flot sortant de ses arcs et il donne une récompense en contrepartie. Sa stratégie individuelle consiste à décider du partage de la récompense entre les agents transporteurs.

Le jeu ainsi défini est symétrique de celui  $0/m/p$ . Toutes les propriétés et définitions établies dans la Section 6.2 restent donc valables pour ce jeu, sous réserve des restrictions émises (capacités normales nulles). On explicite dans ce qui suit la propriété la plus importante pour ce jeu permettant de caractériser un équilibre de Nash.

**Proposition 6.6. Équilibre de Nash  $q/m/0$ .** *Étant donné un jeu  $q/m/0$  à capacités normales nulles, une stratégie  $\mathcal{S}$ , non pauvre pour les agents de transport, est un équilibre de Nash si et seulement si :*

—  $\forall P \in \mathcal{P}^A$

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } \text{cost}_x^T(P) < \sum_{z \in \mathcal{A}^P} w_x^z \times \pi_z \quad (6.6)$$

— et,  $\forall \bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}^A$

$$\nexists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } \text{sav}_x^T(\bar{P}) \geq \sum_{z \in \mathcal{A}^P} w_x^z \times \pi_z \quad (6.7)$$

## 6.4 Jeu d'expansion de réseau $q/m/p$

Dans cette section, nous considérons une généralisation des deux jeux précédents, notée  $q/m/p$ .

Ce jeu implique les trois types d'agents tels que définis dans le chapitre 2, à savoir les agents de transport  $T$ , les agents producteurs  $P$  et les agents usagers  $U$ . La topologie du NEG  $q/m/p$  est donnée par la Figure 2.2. Rappelons que dans ce réseau généralisé un chemin commence par un seul arc appartenant à un agent producteur et finit par un seul arc appartenant à un agent usager. Encore une fois, la partie centrale de ce jeu est consacrée au réseau de transport, qui décide ou non de faire passer des unités de flot supplémentaires dans le réseau. Chaque agent usager ou producteur s'intéresse à maximiser le flot qu'il reçoit ou émet, et donne pour cela une récompense aux agents transporteurs du réseau  $T$ . Comme dans les jeux précédents, les agents transporteurs décident de la capacité de leurs arcs et les agents producteurs et usagers décident de la politique de partage de leur récompense. La particularité de ce jeu est que, un agent transporteur reçoit une récompense à la fois de la part des agents usagers et une récompense de la part des producteurs pour toute augmentation éventuelle d'une unité de flot allant de la super source  $S_s$  vers le super puits  $S_t$ .

Les profits des différents agents pour une stratégie  $\mathcal{S}$  associée à un flot maximal  $F(\mathcal{S})$  ont été définis, dans ce cas général, au chapitre 2.

Le jeu  $q/m/p$  regroupe les propriétés des jeux  $0/m/p$  et  $q/m/0$ . Toutes les propriétés et définitions établies dans les Sections 6.2 et 6.3 restent donc valables. En particulier, lorsque les capacités minimales sont nulles, un agent usager ou producteur ne peut améliorer seul son profit dans la mesure où les stratégies des agents de transport ne sont pas pauvres. On présente dans ce qui suit la propriété la plus importante afin de caractériser un équilibre de Nash.

**Proposition 6.7. Équilibre de Nash  $q/m/p$ .** *Étant donné un jeu  $q/m/p$  à capacités normales nulles, une stratégie  $\mathcal{S}$ , non pauvre pour les agents de transport, est un équilibre de Nash si et seulement si :*

—  $\forall P \in \mathcal{P}^A$

$$\exists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } \text{cost}_x^T(P) < \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y + \sum_{z \in \mathcal{A}^P} w_x^z \times \pi_z \quad (6.8)$$

— et,  $\forall \bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}^A$

$$\exists a_x^T \in \mathcal{A}^T \text{ tel que } \text{sav}_x^T(\bar{P}) \geq \sum_{y \in \mathcal{A}^U} w_x^y \times \pi_y + \sum_{z \in \mathcal{A}^P} w_x^z \times \pi_z \quad (6.9)$$

#### 6.4.1 Modèle mathématique

Considérons une instance du NEG  $q/m/p$  à capacités minimales nulles, le problème Max-Nash pour le jeu généralisé peut être modélisé par le programme mathématique suivant 6.10 :

$$\begin{aligned}
& \max F \\
& t.q. \\
& (i) \quad 0 \leq f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (ii) \quad 0 \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (iii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0, & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \\
& (iv) \quad \sum_{a_x \in \mathcal{A}^T} (w_x^y) = 1, \forall a_y^U \in \mathcal{A}^U \\
& (v) \quad \sum_{a_x \in \mathcal{A}^T} (w_x^z) = 1, \forall a_z^P \in \mathcal{A}^P \\
& (vi) \quad \mathcal{S} = ((q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}}, (w_x^y, w_x^z)_{x=1, \dots, m}) \text{ est un équilibre de Nash (et non pauvre)} \\
& (vii) \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbb{N}, f_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\ w_x^y, w_x^z \in \mathbb{R}, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\ F \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Les contraintes du modèle sont celles du modèle 4.1 adaptés dans le cas généralisé. Pour résoudre ce problème, on doit linéariser la contrainte non linéaire (vi) ce qui peut être fait en utilisant un nombre fini de contraintes primales-duales.

## 6.5 Conclusion

Une première piste de généralisation du jeu 0/m/1 a été proposée dans ce chapitre. En particulier, nous nous sommes intéressés aux jeux d'expansion de réseau impliquant plusieurs agents clients (usagers et/ou producteurs). Plusieurs caractéristiques du jeu 0/m/1 peuvent changer en présence de plusieurs agents clients. La première constatation concerne l'objectif social qui, dans ce cas, ne sera plus confondu avec l'objectif individuel d'un agent usager ou producteur. Rappelons que l'objectif social est la maximisation du flot total circulant dans le réseau alors que l'objectif individuel d'un agent usager ou producteur est de maximiser la valeur du flot reçu sur ses arcs.

Nous avons exploité les résultats présentés dans les chapitres précédents, dans le cas particulier où les capacités normales des agents de transport sont toutes nulles, pour caractériser une stratégie stable à travers des chemins augmentants et décroissants. Une caractérisation fine des stratégies stables dans le cas général, avec des capacités minimales quelconques, fait partie des perspectives de recherche ouvertes pour cette thèse, i.e., lorsque la stabilité dépend aussi du comportement des agents producteurs et usagers.





## Chapitre 7

# Modèle linéaire à variables mixtes pour le jeu $0/m/1$

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une formulation mathématique pour résoudre le jeu d'expansion de réseau  $0/m/1$  (et donc le jeu  $0/m/1$ ) avec pour objectif de trouver un équilibre de Nash qui maximise  $F(\mathcal{S})$  en se basant sur les notions de chemins augmentants et décroissants profitables.

Nous exposons ensuite comment ce modèle mathématique peut être transformé en un Programme Linéaire à Variables Mixtes (PLM).

## 7.2 Formulation mathématique

La résolution du problème **MaxNash** pour le jeu 0/ $m$ /1 a été formulée dans le chapitre 4 et nous rappelons le modèle mathématique 4.1 donné :

$$\begin{aligned}
& \max F \\
& t.q. \\
& (i) \quad 0 \leq f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (ii) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (iii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0, & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \quad (7.1) \\
& (iv) \quad \sum_{a_x \in \mathcal{A}} w_x = 1 \\
& (v) \quad \mathcal{S} = ((q_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{E}}, (w_x)_{x=1, \dots, m}) \text{ est un équilibre de Nash} \\
& (vi) \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbb{N}, f_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\ w_x \in \mathbb{R}, \forall a_x \in \mathcal{A} \\ F \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans ce modèle, la contrainte (v) exprime la stabilité des stratégies. Nous la reformulons en exploitant la Proposition 4.6 basée sur les coûts des chemins croissants et décroissants du graphe résiduel multi-agent. Nous obtenons alors le programme mathématique équivalent 7.2 que nous notons  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$ .

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{\text{NEG}} \\
& \max F - \frac{\sum_{\forall (i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j} (\bar{q}_{i,j} - q_{i,j})}{1 + \sum_{\forall (i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j} (\bar{q}_{i,j} - \underline{q}_{i,j})} \\
& t.q. \\
& (i) \quad 0 \leq f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (ii) \quad \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
& (iii) \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0 \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases} \quad (7.2) \\
& (iv) \quad \sum_{a_x \in \mathcal{A}} w_x = 1 \\
& (v) \quad \text{sav}_x^T(\bar{P}) < w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}, \forall \bar{P} \in G_r^{\mathcal{A}}(F(\mathcal{S})) \\
& (vi) \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbb{N}, f_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\ w_u \in \mathbb{R}, \forall a_u \in \mathcal{A} \\ F \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}$$

Les contraintes (i), (ii) et (iii) sont identiques à celle de la formulation mathématique initiale (4.1). Elles traduisent (i) les limites de capacité, (ii) les limites de flot et (iii) la conservation de flot. Les contraintes non explicites (v) imposent qu'il n'existe pas de chemin décroissant profitable  $\bar{P}$  dans le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(F(\mathcal{S}))$ . Ces contraintes représentent la seconde condition (4.5) de la Proposition 4.6 définissant un équilibre de Nash.

Remarquons que le modèle proposé n'intègre pas explicitement la première condition 4.4 de la Proposition 4.6. En effet, cela n'est pas nécessaire car dans la mesure où on cherche à maximiser le flot étant maximisé, les chemins croissants profitables seront sélectionnés.

Dans la fonction objectif, le second terme est positif et il est toujours plus petit que 1. Il impose que les stratégies ne soient pas pauvres car il conduit à minimiser le coût associés à l'ouverture de capacité. Ainsi, dans cette nouvelle formulation, toutes les conditions traduisant le fait qu'une stratégie  $\mathcal{S}$  soit stable sont vérifiées.

Une non-linéarité peut être notée puisque le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A$  dépend de la stratégie choisie (la recherche de chemins décroissants dépend donc de la stratégie).

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à la linéarisation de ces contraintes (iv). Nous proposons comment calculer  $sav_x^T(\bar{P})$  en utilisant un nombre fini de contraintes primales-duales

### 7.3 Linéarisation des contraintes

Nous nous intéressons dans cette section à la linéarisation du modèle mathématique  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$  de la Section 7.2 pour résoudre le NEG 0/m/1. Plus particulièrement, on s'intéresse à la linéarisation des contraintes (v) et nous proposons de déterminer  $\bar{P}$  en utilisant un nombre fini de contraintes primales-duales. L'explication de cette approche se base essentiellement sur l'analyse des coûts pour le graphe résiduels de chaque agent transporteur (cf. Définition 4.3) et sur les contraintes primales-duales.

Nous signalons qu'après avoir utilisé cette technique de linéarisation en se basant sur un nombre fini de contraintes primales-duales, nous avons découvert qu'elle avait déjà été utilisée par Labbé et al.[64].

#### 7.3.1 Analyse des coûts résiduels

Étant donné le graphe résiduel multi-agent, les coûts des arcs avant/arrière définis pour chaque agent transporteur (cf. Définition 4.3) sont rappelés ci-dessous :

- $\Delta_F^{i,j}$ 
  - si  $0 \leq f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ , alors  $\delta_F^{i,j,x} = 0$ , pour tout agent  $a_x^T$  ;
  - si  $\underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} = f_{i,j} < \bar{q}_{i,j}$ , alors  $\delta_F^{i,j,x} = c_{i,j}$  lorsque  $(i,j) \in \mathcal{E}_x^T$ , sinon  $\delta_F^{i,j,x} = +\infty$  ;
  - si  $f_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$ , alors  $\delta_F^{i,j,x} = +\infty$ , pour tout agent  $a_x^T$ .
- $\Delta_B^{j,i}$  :
  - si  $f_{i,j} = 0$ , alors  $\delta_B^{j,i,x} = +\infty$ , pour tout agent  $a_x^T$  ;
  - si  $0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$ , alors  $\delta_B^{j,i,x} = 0$ , pour tout agent  $a_x^T$  ;
  - si  $\underline{q}_{i,j} < q_{i,j} = f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$ , alors  $\delta_B^{j,i,x} = -c_{i,j}$  si  $(i,j) \in \mathcal{E}_x^T$ , sinon  $\delta_B^{j,i,x} = 0$ .

Afin de déterminer si une stratégie est stable, on introduit de nouvelles variables binaires  $x_{i,j} \in \{0,1\}$ ,  $\alpha_{i,j} \in \{0,1\}$ ,  $y_{i,j} \in \{0,1\}$  et  $\beta_{i,j} \in \{0,1\}$  pour recherche les arcs formant un chemin décroissant. Ces variables sont définies comme suit :

*Pour les arcs avant :*

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si on peut augmenter la capacité } q_{i,j} \text{ (} q_{i,j} < \bar{q}_{i,j} \text{)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A \quad (7.3)$$

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si on peut augmenter le flot } f_{i,j} \text{ à coût nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A \quad (7.4)$$

*Pour les arcs arrière :*

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si on peut diminuer la capacité } q_{i,j} \text{ (} q_{i,j} > \underline{q}_{i,j} \text{)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A \quad (7.5)$$

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la diminution de flot } f_{i,j} \text{ engendre un gain nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A \quad (7.6)$$

Les contraintes suivantes permettent de relier les variables  $x_{i,j}$  et  $y_{i,j}$  aux capacités des arcs. Elles sont ajoutées dans le modèle mathématique  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$ .

$$x_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j} - q_{i,j} \leq x_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - \underline{q}_{i,j}), \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A \quad (7.7)$$

$$y_{i,j} \leq q_{i,j} - \underline{q}_{i,j} \leq y_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - \underline{q}_{i,j}), \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A \quad (7.8)$$

Selon si l'arc  $(i,j)$  appartient ou non à un agent  $a_x^T$  et selon la valeur du flot circulant sur cet arc par rapport aux valeurs de capacité, on obtient différents coûts  $\delta_F^{i,j,x}$  et  $\delta_B^{i,j,x}$

sur le graphe résiduel multi-agent. Pour chacune de ces situations, on peut associer des valeurs pour les variables  $x_{i,j}/\alpha_{i,j}$  et pour les variables  $y_{i,j}$  et  $\beta_{i,j}$ . Les tableaux 7.1 et 7.2 résument chacun de ces cas de figure.

$\alpha_{i,j}$	$x_{i,j}$	$f_{i,j}$	$\delta_F^{i,j,x}$	
			$(i,j) \in \mathcal{E}_x^T$	$(i,j) \notin \mathcal{E}_x^T$
0	0	$f_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	Interdit	—	—
0	1	$\underline{q}_{i,j} \leq f_{i,j} < \bar{q}_{i,j}$	$c_{i,j}$	$+\infty$
1	1	$0 \leq f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$	0	0

TABLE 7.1 – Différents scénarios pour les arcs avant

$\beta_{i,j}$	$y_{i,j}$	$f_{i,j}$	$\delta_B^{j,i,x}$	
			$(j,i) \in \mathcal{E}_x^T$	$(j,i) \notin \mathcal{E}_x^T$
0	0	$f_{i,j} = 0$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	$0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$	0	0
0	1	$\underline{q}_{i,j} < f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$	$-c_{i,j}$	0
1	1	Interdit	—	—

TABLE 7.2 – Différents scénarios pour les arcs arrières

Nous nous intéressons uniquement au cas de stratégies non pauvres. Pour cette raison, on interdit les scénarios susceptibles d'aboutir à des stratégies pauvres, et correspondant à  $\alpha_{i,j} = 1$  et  $x_{i,j} = 0$  (ligne 2 du tableau 7.1) ou à  $y_{i,j} = 1$  et  $\beta_{i,j}$  (ligne 4 du tableau 7.2). On introduit alors les contraintes suivante dans le modèle mathématique  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$  :

- L'Équation 7.9 interdit le scénario qui résulte de la combinaison de  $\alpha_{i,j} = 1$  et  $x_{i,j} = 0$ . Cette combinaison correspond au cas où  $0 \leq f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$  et  $q_{i,j} = \bar{q}_{i,j}$  qui est une stratégie pauvre puisque l'arc  $(i,j)$  n'est pas saturé (i.e.,  $f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$ ) tandis que la capacité est à sa valeur maximale.

$$\alpha_{i,j} \leq x_{i,j} \quad (7.9)$$

- De la même manière, l'Équation 7.10 interdit le scénario résultant de la combinaison de  $\beta_{i,j} = 1$  et  $y_{i,j} = 1$ . Ce cas correspond à  $0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$  et  $q_{i,j} > \underline{q}_{i,j}$  qui signifie que l'arc  $(i,j)$  n'est pas saturé alors que la capacité est supérieure à sa valeur normale. Cette combinaison représente une stratégie pauvre puisqu'on ouvre une unité de capacité inutile moyennant un coût supplémentaire sur un arc non saturé.

$$y_{i,j} + \beta_{i,j} \leq 1 \quad (7.10)$$

Pour lier les variables  $x_{i,j}$ ,  $\alpha_{i,j}$  (respectivement  $y_{i,j}$  et  $\beta_{i,j}$ ) entre elles, on introduit alors les contraintes 7.11 et 7.12 dans le modèle  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$ .

Pour les arcs avant :  $\alpha_{i,j} = 1$  s'il est possible d'augmenter le flot à coût zéro sur l'arc  $(i, j)$ . Cela arrive dans les deux cas suivants (lignes 1, 3 et 4 du tableau 7.1) :

$$\alpha_{i,j} = 1 \Rightarrow 0 \leq f_{i,j} < \underline{q}_{i,j}$$

$$\alpha_{i,j} = 0 \Rightarrow \underline{q}_{i,j} \leq f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$$

Ces deux cas sont exprimés par les inéquations suivantes :

$$(x_{i,j} - \alpha_{i,j}) \times \underline{q}_{i,j} + (1 - x_{i,j}) \times \bar{q}_{i,j} \leq f_{i,j} \leq (1 - x_{i,j}) \times \bar{q}_{i,j} + (\bar{q}_{i,j} - \epsilon) \times (x_{i,j} - \alpha_{i,j}) + (\underline{q}_{i,j} - \epsilon) \times \alpha_{i,j} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A \quad (7.11)$$

De la même manière, pour les arcs arrières  $\beta_{i,j} = 1$  si on peut diminuer le flot de l'arc  $(i, j)$  à coût nul. Cela correspond à (lignes 1, 2 et 3 du tableau 7.2) :

$$\beta_{i,j} = 1 \Rightarrow 0 < f_{i,j} \leq \underline{q}_{i,j}$$

$$\beta_{i,j} = 0 \Rightarrow \underline{q}_{i,j} < f_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}$$

Ces contraintes peuvent être exprimées par les inéquations suivantes :

$$\beta_{i,j} \times \epsilon + (\underline{q}_{i,j} + \epsilon) \times y_{i,j} \leq f_{i,j} \leq \beta_{i,j} \times \underline{q}_{i,j} + y_{i,j} \times \bar{q}_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}_B^A \quad (7.12)$$

Les formules des coûts résiduels linéarisés sont alors les suivantes :

$$\delta_F^{i,j,x} = c_{i,j} - (c_{i,j} - M) \times (1 - x_{i,j}) - c_{i,j} \times \alpha_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.13)$$

$$\delta_F^{j,i,x} = M \times (2 - x_{i,j} - \alpha_{i,j}), \quad \forall (i, j) \notin \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.14)$$

$$\delta_B^{j,i,x} = (1 - \beta_{i,j} - y_{i,j}) \times M - c_{i,j} \times y_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.15)$$

$$\delta_B^{j,i,x} = (1 - \beta_{i,j} - y_{i,j}) \times M, \quad \forall (i, j) \notin \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.16)$$

### 7.3.2 Plus court chemin dans le graphe résiduel

L'idée centrale de notre approche se base sur le calcul de  $\text{sav}_x^T(\bar{P})$  dans les contraintes  $(v)$ , cela en calculant le plus court chemin dans le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(F(\mathcal{S}))$

en termes de coûts. Notre approche pour calculer  $sav_x(\bar{P})$  utilise les contraintes primales-duales. Étant donné le graphe résiduel multi-agent  $G_r^A(F(\mathcal{S}))$ , les Équations ci-dessous 7.17-7.18 définissent les contraintes primales du problème du plus court chemin et les Équations 7.19 définissent les contraintes duales du problème de variation unitaire de flot à coût minimum dans le graphe de flot où  $\varphi_{i,j} \in \{0, 1\}$  et l'expression  $t_j - t_i$  représente la valeur de l'arc  $(i, j)$ . La définition du problème dual, qui est le problème de variation unitaire de flot à **coût minimum**, nécessite une variable de décision binaire  $\varphi_{i,j}$ . Cette variable  $\varphi_{i,j} = 1$  si une unité de flot circule dans le réseau de  $t$  vers  $s$ , sinon  $\varphi_{i,j} = 0$ .

$$t_j - t_i \leq \delta_F^{i,j,x}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.17)$$

$$t_i - t_j \leq \delta_B^{j,i,x}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.18)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \varphi_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \varphi_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ -1, & i = s \\ 1, & i = t \end{cases}, \forall i \in \mathcal{V} \quad (7.19)$$

En se référant au Théorème de la dualité (TD) qui impose qu'à l'optimalité la valeur du chemin dans le graphe résiduel soit égale à la somme des **profits** de la variation unitaire de flot circulant dans le réseau, on obtient la condition suivante :

$$t_{n+1} \geq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_F^A} \varphi_{i,j} \times \delta_F^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_B^A} \varphi_{i,j} \times \delta_B^{i,j,x}, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \quad (7.20)$$

La partie droite de l'Équation 7.20 contient une multiplication de deux variables, à savoir  $\varphi_{i,j} \times \delta_F^{i,j,x}$  et  $\varphi_{j,i} \times \delta_B^{j,i,x}$ . Puisque la variable  $\varphi_{i,j}$  est binaire, les deux multiplications peuvent être facilement linéarisées en introduisant de nouvelles variables. Pour la première multiplication, on pose  $\psi_1^{i,j,x} = \varphi_{i,j} \times \delta_F^{i,j,x}$  et l'ensemble d'inégalités (i) – (iv) ci-dessous assure la linéarisation.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \psi_1^{i,j,x} \geq 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\ (ii) \quad & \psi_1^{i,j,x} \leq \varphi_{i,j} \times M, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\ (iii) \quad & \psi_1^{i,j,x} \leq \delta_F^{i,j,x}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\ (iv) \quad & \psi_1^{i,j,x} \geq M(\varphi_{i,j} - 1) + \delta_F^{i,j,x}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \end{aligned} \quad (7.21)$$

Pour la deuxième multiplication, on pose  $\psi_2^{i,j,x} = \varphi_{i,j} \times \delta_B^{i,j,x}$ . Comme  $\delta_B^{i,j,x} \in [-c_{i,j}, +\infty[$ , on introduit une nouvelle variable de translation pour pouvoir linéariser une expression



qui est toujours supérieure ou égale à 0. On pose  $\delta_B^{i,j,x} = \Lambda_B^{i,j,x} - c_{i,j}$  où  $\Lambda_B^{i,j,x} \in [0, +\infty[$ . De cette manière, nous linéarisons la seconde multiplication par rapport à  $\Lambda_B^{j,i,x}$  :

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \psi_2^{i,j,x} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
(ii) \quad & \psi_2^{i,j,x} \leq \varphi_{i,j} \times M, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
(iii) \quad & \psi_2^{i,j,x} \leq \Lambda_B^{i,j,x}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
(iv) \quad & \psi_2^{i,j,x} \geq M(\varphi_{i,j} - 1) + \Lambda_B^{i,j,x}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Par conséquent, l'Équation 7.20 peut être linéarisée comme suit :

$$t_{n+1} \geq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_F^A} \psi_1^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_B^A} \psi_2^{j,i,x} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_B^A} \varphi_{i,j} \times c_{i,j}, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \tag{7.23}$$

Au final,  $t_{n+1}$  est égal à  $sav_x(\overline{P})$  et par conséquent les contraintes (v) du modèle mathématique  $\mathcal{P}_{\text{NEG}}$  peuvent être remplacées par :

$$-t_{n+1} < w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \tag{7.24}$$

## 7.4 Modèle linéaire obtenu

Le modèle linéaire à variables mixtes complet est détaillé ci-dessous. Il implique un nombre polynomial de variables et de contraintes par rapport à la taille du problème. En effet, pour chaque contrainte du modèle, le nombre d'équations s'exprime en fonction de  $|\mathcal{E}|$ , (ou de de  $|\mathcal{E}^A|$ ), de  $|\mathcal{A}^T|$  ou du produit  $|\mathcal{E}| \times |\mathcal{A}^T|$ . Le nombre de variables dépend quand à lui de  $|\mathcal{V}|$ , de  $|\mathcal{E}|$ , (ou de de  $|\mathcal{E}^A|$ ) ou du produit  $|\mathcal{E}| \times |\mathcal{A}^T|$ .

$$\begin{aligned} \max \quad & F - \frac{\sum_{\forall(i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j}(\bar{q}_{i,j} - q_{i,j})}{1 + \sum_{\forall(i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j}(\bar{q}_{i,j} - q_{i,j})} \\ t.q. \quad & \\ (1) \quad & f_{i,j} \leq q_{i,j}, \forall(i,j) \in \mathcal{E} \\ (2) \quad & \underline{q}_{i,j} \leq q_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j}, \forall(i,j) \in \mathcal{E} \\ (3) \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} f_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ F, & i = s \\ -F, & i = t \end{cases}, \forall i \in \mathcal{V} \\ (4) \quad & \sum_{a_x^T \in \mathcal{AT}} w_x = 1 \end{aligned}$$

Caractérisation des chemins décroissants

$$\begin{aligned} (5) \quad & x_{i,j} \leq \bar{q}_{i,j} - q_{i,j} \leq x_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - \underline{q}_{i,j}), \forall(i,j) \in \mathcal{E}_F^A \\ (6) \quad & y_{i,j} \leq q_{i,j} - \underline{q}_{i,j} \leq y_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - \underline{q}_{i,j}), \forall(i,j) \in \mathcal{E}_B^A \\ (7) \quad & (x_{i,j} - \alpha_{i,j}) \times \underline{q}_{i,j} + (1 - x_{i,j}) \times \bar{q}_{i,j} \leq f_{i,j} \leq (1 - x_{i,j}) \times \bar{q}_{i,j} \\ & + (\bar{q}_{i,j} - \epsilon) \times (x_{i,j} - \alpha_{i,j}) + (\underline{q}_{i,j} - \epsilon) \times \alpha_{i,j}, \forall(i,j) \in \mathcal{E}_F^A \\ (8) \quad & \alpha_{i,j} \leq x_{j,i}, \forall(i,j) \in \mathcal{E}_F^A \\ (9) \quad & \beta_{i,j} \times \epsilon + (\underline{q}_{i,j} + \epsilon) \times y_{i,j} \leq f_{i,j} \leq \beta_{i,j} \times \underline{q}_{i,j} + y_{i,j} \times \bar{q}_{i,j}, \forall(i,j) \in \mathcal{E}_B^A \\ (10) \quad & y_{i,j} + \beta_{i,j} \leq 1, \forall(i,j) \in \mathcal{E}_B^A \end{aligned}$$

Coûts résiduels

- (11)  $\delta_F^{i,j,x} = c_{i,j} - (c_{i,j} - M) \times (1 - x_{i,j}) - c_{i,j} \times \alpha_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (12)  $\delta_F^{i,j,x} = M \times (2 - x_{i,j} - \alpha_{i,j}), \forall (i,j) \notin \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (13)  $\Lambda_B^{j,i,x} - c_{i,j} = (1 - \beta_{i,j} - y_{i,j}) \times M - c_{i,j} \times y_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (14)  $\Lambda_B^{j,i,x} - c_{i,j} = (1 - \beta_{i,j} - y_{i,j}) \times M, \forall (i,j) \notin \mathcal{E}_x^T, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$

Plus court chemin

- (15)  $t_j - t_i \leq \delta_F^{i,j,x}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (16)  $t_i - t_j \leq \Lambda_B^{j,i,x} - c_{i,j}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (17)  $\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \varphi_{i,j} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \varphi_{j,i} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq s, t \\ -1, & i = s, \\ 1, & i = t \end{cases}, \forall i \in \mathcal{V}$
- (18)  $t_{n+1} \geq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_F^A} \psi_1^{i,j,x} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_B^A} \psi_2^{i,j,x} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_B^A} \varphi_{i,j} \times c_{i,j}, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (19)  $-t_{n+1} < w_x \times \pi, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (20)  $\psi_1^{i,j,x} \leq \varphi_{i,j} \times M, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (21)  $\psi_1^{i,j,x} \leq \delta_F^{i,j,x}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (22)  $\psi_1^{i,j,x} \geq M(\varphi_{i,j} - 1) + \delta_F^{i,j,x}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (23)  $\psi_2^{i,j,x} \leq \varphi_{i,j} \times M, \forall (j,i) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (24)  $\psi_2^{i,j,x} \leq \Lambda_B^{i,j,x}, \forall (j,i) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$
- (25)  $\psi_2^{i,j,x} \geq M(\varphi_{i,j} - 1) + \Lambda_B^{i,j,x}, \forall (j,i) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$

où

- $$\begin{aligned}
 & f_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
 & q_{i,j} \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{E} \\
 & w_x \in [0, 1], \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
 & x_{i,j}, y_{i,j}, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}^A \\
 & \varphi_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall (i,j) \in \mathcal{E}^A \\
 & \delta_F^{i,j,x}, \Lambda_B^{i,j,x} \in \mathbb{R}^+, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_F^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
 & \psi_1^{i,j,x}, \psi_2^{i,j,x} \in \mathbb{R}^+, \forall (i,j) \in \mathcal{E}_B^A, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T \\
 & t_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{V}
 \end{aligned}$$

## Chapitre 8

# Résultats expérimentaux

### 8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus avec le programme linéaire à variables mixtes proposé dans le chapitre 7 pour la résolution du problème MaxNash dans le contexte  $0/m/1$  ou  $1/m/0$ . Afin de valider l'efficacité de notre modèle, nous considérons un benchmark de familles d'instances. Nous testons le modèle proposé pour différents jeux dans lesquels le partage de la récompense peut être soit variable, soit égalitaire, soit calculé d'une manière heuristique. Ce modèle a été implémenté en utilisant l'API C++ de GUROBI Optimization 6.0.0. Les performances de l'algorithme ont été évaluées sur un ordinateur sous Linux Ubuntu server 12.04 avec processeur Xeon E5-1650 et 8 Go de RAM.

Le chapitre s'organise comme suit. Dans la Section 8.2 nous présentons les caractéristiques des instances considérées. Dans la Section 8.3, nous présentons une analyse des différents résultats expérimentaux obtenus.

### 8.2 Contexte expérimental

#### 8.2.1 Familles d'instances

Comme il n'existe pas d'instances dans la littérature correspondant à notre problème, nous avons construit des instances à l'aide du générateur RanGen1 [38], permettant de créer des instances d'ordonnancement de projet. Le générateur RanGen1 construit des graphes acycliques de types potentiels-tâches (i.e., avec activités sur les nœuds). Puisque nous nous intéressons à construire des graphes de flot, nous ignorons les durées des activités générées lors de la phase de construction. Le premier et le dernier nœud du

graphe généré représentent dans notre cas les nœuds source et puits, respectivement. Pour obtenir les graphes, nous choisissons le nombre de nœuds  $n$  parmi  $\{10, 50, 70\}$ , le nombre d'arcs obtenus dépend de la valeur du paramètre Order Strength (OS) du générateur. Ce paramètre représente le nombre de relations de précédence divisé par la nombre théorique maximum de relations de précédence dans le graphe (i.e.,  $n \times (n-1)/2$ , où  $n$  est le nombre de nœuds du graphe). Le nombre d'arcs du graphe de flot résultant varie significativement d'une instance à une autre et il est naturellement beaucoup plus grand que le nombre de nœuds (de 20 jusqu'à 450 arcs dans les instances générées, dépendant du nombre de nœuds).

Pour toute valeur de  $n$ , 10 instances sont générées avec un  $OS = 0.5$ .

Les arcs de chaque réseau généré sont répartis entre les différents agents transporteurs d'une manière aléatoire. Pour nos instances, nous considérons un nombre variable d'agents de transport :  $m \in \{2, 5\}$ .

De plus, pour chaque arc  $(i, j)$ , nous fixons les valeurs des capacités normale et maximale et le coût d'expansion. Les capacités normales sont fixées à 0 et les capacités maximales sont générées de la manière suivante :  $\bar{q}_{i,j} = \underline{q}_{i,j} + rand(20)$ , où  $rand(20)$  est un nombre entier aléatoire compris entre 0 et 20. Le coût d'expansion  $c_{i,j}$  est généré aléatoirement dans l'intervalle  $[5, 30]$ .

Pour déterminer la récompense totale  $\pi$ , donnée par l'agent usager, nous considérons qu'elle correspond à un pourcentage  $\alpha$  de la valeur du plus long chemin allant de  $s$  vers  $t$  dans le graphe. En effet, le plus long chemin représente le chemin théorique le plus coûteux qui puisse être utilisé pour augmenter le flot (lorsque tous les arcs du chemin appartiennent à un même agent).

En résumé, nous obtenons 6 familles de problèmes en combinant le nombre de nœuds  $n \in \{10, 50, 70\}$  et le nombre d'agents transporteurs  $m \in \{2, 5\}$ , chaque famille comporte dix instances. De plus, nous considérons pour chaque instance cinq valeurs différentes de récompense, et ce en variant  $\alpha$  dans  $\{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ .

Nous pouvons remarquer que la solution obtenue pour une valeur donnée de  $\alpha$  (c'est à dire une stratégie stable de flot maximal) reste réalisable pour des valeurs supérieures de ce paramètre (car la récompense totale augmente lorsque  $\alpha$  augmente). Par conséquent, pour chaque instance, afin d'accélérer les expérimentations, nous considérons plusieurs étapes successives de résolution au cours desquelles nous augmentons progressivement la valeur de  $\alpha$ . À l'étape courante, nous utilisons comme solution initiale, la solution

obtenue lors de l'étape précédente. De plus, les capacités normales étant fixées à 0, la solution de flot nul est une solution initiale réalisable pour la première étape de résolution.

Par ailleurs, à chaque étape de résolution de chaque instance, nous fixons une limite au temps d'exécution égale à 1800 secondes pour le processus d'optimisation.

### 8.2.2 Politique de partage de récompense

Le partage de récompense, correspondant au vecteur  $w_x, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$ , est une décision importante dans les jeux d'expansion de réseau considérés. Cette politique de partage précise comment la récompense donnée par l'agent usager doit être distribuée entre les agents de transport. Dans cette thèse, nous avons focalisé notre étude sur le cas où la politique de partage fait partie de la décision. Le programme mathématique proposé dans le chapitre 7 permet de trouver une politique de partage optimale. Bien évidemment, il peut également traiter le cas particulier où la politique de partage est fixée dans la phase de construction du RMA, i.e., le pourcentage reçu par chaque agent transporteur est prédéfini et non modifiable.

Dans l'étude expérimentale, deux politiques de partage fixes seront analysées afin de comparer les résultats avec la politique de partage optimale. La première politique divise la récompense d'une manière égalitaire entre les agents de transport alors que la deuxième considère une heuristique pour le calcul de la récompense basée sur les poids des agents dans le réseau. La politique de partage égalitaire distribue la récompense entre les  $m$  agents tel que  $w_x = 1/m$ . La politique de partage heuristique, prend en compte l'importance proportionnelle de chaque agent transporteur tel que  $w_x = \frac{\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_x^T} c_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - q_{i,j})}{\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j} \times (\bar{q}_{i,j} - q_{i,j})}$ . Cela donne la priorité aux agents de transport qui ont à la fois les arcs avec les coûts d'expansion les plus élevés et les arcs avec des intervalles d'expansion de plus grande taille.

## 8.3 Analyse des résultats

Dans un premier temps, nous étudions les résultats obtenus en termes de valeur de flot obtenu,  $F(\mathcal{S})$  (problème **MaxNash**) en comparaison avec le flot maximum possible,  $F_{max}$ . Le ratio  $F(\mathcal{S})/F_{max}$  est calculé pour chaque famille et pour chaque valeur de récompense, en moyenne sur toutes les instances, il caractérise le prix de la stabilité. Plus ce ratio est élevé, plus il y a de flot qui circule à travers le réseau avec une stratégie stable.

Nous reportons également la valeur moyenne pour chaque famille d'instances, du temps CPU cumulé sur les différentes valeurs de récompense. Pour une instance donnée, le

temps CPU cumulé est le temps nécessaire pour résoudre l'instance avec les cinq différentes valeurs de la récompense prises successivement.

### 8.3.1 Analyse du ratio de flot et des temps d'exécution

Les résultats obtenus pour 2 et 5 agents transporteurs sont résumés dans les tableaux 8.1 et 8.2, respectivement. Pour chacun des cas, les trois politiques de partage sont considérées : le partage égalitaire (colonnes *Equ.*), le partage heuristique (colonnes *Heur.*) et le partage optimal (colonnes *Var.*). Chaque ligne, correspond à des instances ayant  $n$  sommets et  $m$  agents de transport recevant un pourcentage  $\alpha$  de récompense.

Instances			<i>Equ.</i>		<i>Heur.</i>		<i>Var.</i>	
$n$	$m$	$\alpha$	$F/F_{max}$	Cumul CPU	$F/F_{max}$	Cumul CPU	$F/F_{max}$	Cumul CPU
10	2	0.1	0.000	0.28	0.000	0.22	0.000	0.33
		0.3	0.025	0.52	0.220	0.38	0.478	0.87
		0.5	0.623	0.67	0.683	0.56	0.888	0.97
		0.7	0.837	0.75	0.861	0.65	0.968	1.01
		0.9	0.946	0.82	0.928	0.72	0.986	1.07
50	2	0.1	0.011	93.48	0.019	228.28	0.034	883.82
		0.3	0.607	1231.83	0.631	1447.04	0.767	1977.52
		0.5	0.869	1800.07	0.989	2293.33	0.991	2805.71
		0.7	0.899	2167.24	0.993	2621.11	0.998	3135.31
		0.9	0.998	2339.22	0.993	2816.74	0.999	3299.27
70	2	0.1	0.000	87.09	0.000	98.27	0.000	1046.80
		0.3	0.029	1009.95	0.341	1056.75	0.540	2846.81
		0.5	0.397	1986.36	0.599	1964.17	0.872	4113.68
		0.7	0.400	2499.54	0.724	2567.12	0.998	5104.31
		0.9	0.772	3127.01	0.808	3295.96	0.999	5163.11

TABLE 8.1 – Ratio de flot et temps CPU cumulé - 2 agents transporteurs

Pour les problèmes à 2 agents de transport, on peut noter que même en donnant une récompense importante, le flot Nash n'atteint pas le flot maximal. La stratégie de partage optimale se rapproche le plus, et à partir de valeurs moindres de récompense, de cette valeur maximale de flot. Pour la stratégie optimale, le flot Nash est à plus de 80% du flot maximal dès que le pourcentage de récompense atteint 50% de la valeur maximale ( $\alpha = 0.5$ ). En termes de temps CPU cumulé, on constate qu'à partir de  $\alpha > 0.5$ , le temps nécessaire lors de chaque étape de résolution devient plus faible, pour toutes les stratégies de partage.

Les problèmes à 5 agents de transport, s'avèrent plus simples à résoudre dans le sens où il est plus facile d'arriver à des ratios de flot importants (i.e., avec une moindre récompense) et dans le sens où le temps cumulé est plus vite amorti entre les différentes étapes. Contrairement aux problèmes à 2 agents de transport, dans le cas de 5 agents de transport, la stratégie de partage optimale est globalement celle ayant les meilleurs temps cumulés.

Instances			Equ.		Heur.		Var.	
$n$	$m$	$\alpha$	$F/F_{max}$	Cumul CPU	$F/F_{max}$	Cumul CPU	$F/F_{max}$	Cumul CPU
10	5	0.1	0.000	0.13	0.000	0.26	0.286	0.14
		0.3	0.386	0.26	0.588	0.5	0.942	0.26
		0.5	0.885	0.34	0.928	0.59	1.000	0.33
		0.7	0.934	0.40	0.928	0.62	1.000	0.41
		0.9	1.000	0.43	0.949	0.65	1.000	0.48
50	5	0.1	0.007	922.40	0.001	1012.53	0.123	1395.50
		0.3	0.759	2229.88	0.737	2467.51	0.984	2195.99
		0.5	0.995	2708.25	0.920	2840.55	1.000	2206.38
		0.7	0.998	2934.40	0.997	2892.73	1.000	2206.69
		0.9	0.998	3159.71	1.000	2937.28	1.000	2207.01
70	5	0.1	0.000	1652.41	0.000	1296.60	0.056	1461.89
		0.3	0.292	3245.49	0.340	2698.96	0.577	2872.53
		0.5	0.609	4187.90	0.690	3473.13	0.999	3349.28
		0.7	0.723	4578.43	0.855	3949.06	1.000	3350.34
		0.9	0.800	4905.73	0.999	4087.26	1.000	3350.86

TABLE 8.2 – Ratio de flot et temps CPU cumulé - 5 agents transporteurs

Une première conclusion que l'on peut tirer de ces résultats est qu'il n'est pas nécessaire de donner la plus forte récompense pour atteindre une valeur de flot élevée. Selon les familles d'instances et selon la politique de partage, entre 50% et 70% de la récompense maximale suffit pour obtenir une valeur de flot maximal supérieure à 80% du flot maximal. Une seconde conclusion est que pour une même valeur de récompense, la politique optimale conduit à un meilleur ratio de flot par rapport aux politiques de partage fixe ; c'est à dire que la récompense nécessaire pour atteindre le meilleur flot possible est moins élevée avec la politique optimale. Enfin, les politiques de partage équitables ou heuristiques, ont des comportements assez proches l'une de l'autre en terme de ratio de flot et de temps cumulé.

### 8.3.2 Politiques de partages

Nous nous intéressons dans cette section au partage de récompense entre les différents agents de transport. Le tableau 8.3 présente les valeurs obtenues pour les coefficients  $w_x, \forall a_x^T \in \mathcal{A}^T$ , pour la politique optimale.

Dans le tableau 8.3 donnant le partage optimal obtenu, on constate une grande variabilité de la répartition de la récompense en fonction du pourcentage de la récompense maximale allouée. Dans le cas de 5 agents de transport, un agent domine l'ensemble du réseau et reçoit la plus grande partie de la récompense.

Le tableau 8.4 donne les coefficients de partage obtenus par la politique heuristique. Rappelons que ce partage est calculé moyennant un poids attribué aux agents, et que ce poids dépend des capacités d'expansion des arcs de chaque agent et des coûts associés.



Instances		$m = 2$		$m = 5$				
$n$	$\alpha$	$w_1$	$w_2$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$
10	0.1	0.50	0.50	0.31	0.36	0.19	0.03	0.11
	0.3	0.70	0.30	0.15	0.20	0.34	0.12	0.19
	0.5	0.57	0.43	0.08	0.10	0.42	0.19	0.22
	0.7	0.61	0.39	0.12	0.10	0.13	0.18	0.47
	0.9	0.53	0.47	0.04	0.17	0.22	0.06	0.51
50	0.1	0.50	0.50	0.14	0.17	0.18	0.15	0.36
	0.3	0.50	0.50	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22
	0.5	0.59	0.41	0.11	0.11	0.12	0.12	0.54
	0.7	0.61	0.39	0.08	0.08	0.08	0.09	0.67
	0.9	0.63	0.37	0.06	0.06	0.07	0.07	0.74
70	0.1	0.50	0.50	0.08	0.16	0.14	0.10	0.53
	0.3	0.50	0.50	0.14	0.16	0.13	0.13	0.44
	0.5	0.44	0.56	0.16	0.13	0.16	0.13	0.43
	0.7	0.67	0.33	0.09	0.09	0.12	0.09	0.61
	0.9	0.61	0.39	0.07	0.07	0.06	0.07	0.73

TABLE 8.3 – Politique de partage optimale pour chaque agent transporteur

Sur les instances générées, les coefficients de partage calculé par l'heuristique, se rapprochent du partage égalitaire. Nous remarquons que contrairement au partage optimal, essentiellement pour les jeux à 5 agents, que le partage heuristique de la récompense ne présente pas d'agents dominants.

Instances		$m = 2$		$m = 5$				
$n$		$w_1$	$w_2$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$
10		0.51	0.49	0.13	0.22	0.32	0.16	0.17
50		0.49	0.51	0.17	0.21	0.23	0.19	0.20
70		0.52	0.48	0.21	0.20	0.20	0.19	0.20

TABLE 8.4 – Poids des agents transporteurs dans l'heuristique

Pour analyser l'impact de ces coefficients de partage de la récompense nous rapportons le profit  $Z_u$  des différents agents de transport, dans les tableaux 8.5, 8.6 et 8.7.

Instances			<i>Equ.</i>		<i>Heur.</i>		<i>Var.</i>	
$n$	$m$	$\alpha$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_1$	$Z_2$
10	2	0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		0.3	0.32	3.32	17.68	12.20	29.48	7.68
		0.5	56.70	124.70	91.80	118.40	89.60	132.00
		0.7	220.06	223.46	223.63	271.13	279.72	209.60
		0.9	346.06	407.26	345.09	393.95	339.44	420.48
moyenne			124.63	151.75	135.64	159.14	147.65	153.95
50	2	0.1	9.18	1.91	9.80	6.04	7.64	13.55
		0.3	780.06	815.70	722.99	906.49	1066.65	1067.48
		0.5	2824.73	3133.00	3089.69	3667.77	4040.24	2660.94
		0.7	4720.82	5044.27	5083.15	5807.36	6526.39	4371.54
		0.9	7391.15	7649.42	7097.62	7932.76	9567.16	5511.55
moyenne			3145.19	3328.86	3200.65	3664.08	4241.62	2725.01
70	2	0.1	0.00	18.97	0.00	0.00	0.00	0.00
		0.3	115.20	98.40	1014.08	891.04	1407.17	1770.15
		0.5	2320.20	2348.20	3483.35	3849.05	5386.21	6538.59
		0.7	3830.04	3757.04	7783.32	7494.16	15327.64	6107.58
		0.9	10655.20	10380.20	12225.89	11481.83	17862.46	11612.59
moyenne			3384.13	3320.56	4901.33	4743.22	7996.70	5205.78

TABLE 8.5 – Profit de chaque agent transporteur - 2 agents transporteurs

Quelque soit la valeur de la récompense, le partage égalitaire permet d'obtenir des profits équitables entre les différents agents pour les différentes instances, ce qui signifie que

Instances			Equ.					Heur.				
$n$	$m$	$\alpha$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$
10	5	0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		0.3	99.73	48.07	75.57	84.90	93.40	33.09	134.77	115.92	126.13	124.76
		0.5	342.58	286.25	232.25	299.58	317.25	140.42	389.05	356.39	311.62	319.18
		0.7	505.43	465.93	390.77	460.60	482.10	209.09	575.17	556.61	470.87	469.59
		0.9	693.20	640.37	567.20	643.37	656.37	299.40	767.20	775.45	631.55	626.82
moyenne			328.19	288.12	253.16	297.69	309.82	136.40	373.24	360.87	308.03	308.07
50	5	0.1	9.79	9.98	4.48	9.92	0.98	0.48	0.81	0.51	0.59	0.52
		0.3	1800.35	1682.16	1773.23	1843.48	1828.10	1589.63	1834.58	1998.44	1752.38	1978.87
		0.5	4798.03	4558.28	4589.16	4792.84	4776.03	3970.04	4473.32	5269.87	4168.14	4552.98
		0.7	7030.65	6787.34	6823.65	7028.90	7002.96	6138.99	6972.11	8109.51	6448.53	6941.37
		0.9	9257.68	9014.11	9050.68	9255.93	9228.30	8116.75	9274.63	10725.51	8523.51	9217.83
moyenne			4579.30	4410.37	4448.24	4586.21	4567.27	3963.18	4511.09	5220.77	4178.63	4538.31
70	5	0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		0.3	1486.33	1469.64	1381.64	1453.64	1356.27	1687.25	1506.92	1724.20	1487.50	1515.72
		0.5	5280.88	5255.94	5223.94	5289.75	5218.63	6042.48	5717.23	5935.65	5886.89	5872.26
		0.7	9192.34	9315.03	9239.16	9248.22	9069.91	11299.30	10748.55	11097.83	10459.34	11198.483
		0.9	13536.21	13623.59	13506.34	13493.96	13401.28	17621.20	16646.34	17046.19	15772.50	17011.10
moyenne			5899.15	5932.84	5870.22	5897.11	5809.22	7330.05	6923.81	7160.77	6721.25	7119.51

TABLE 8.6 – Profit de chaque agent transporteur - 5 agents transporteurs

Instances			Var.				
$n$	$m$	$\alpha$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$
10	5	0.1	6.00	3.83	17.75	0.00	6.67
		0.3	129.67	138.33	190.67	105.83	189.33
		0.5	99.33	102.83	780.33	262.50	353.17
		0.7	265.33	162.17	152.00	342.17	1485.00
		0.9	94.33	451.83	430.00	150.17	2098.33
moyenne			118.93	171.80	314.15	172.13	826.50
50	5	0.1	49.50	51.78	67.66	49.69	49.25
		0.3	2207.79	2166.01	2293.47	2677.69	2790.61
		0.5	2431.57	2106.51	2291.57	2589.88	14077.93
		0.7	2431.57	2106.51	2291.57	2589.88	25228.13
		0.9	2431.57	2106.51	2291.57	2589.88	36378.31
moyenne			1910.40	1707.46	1847.17	2099.40	15704.85
70	5	0.1	38.28	49.44	74.22	28.81	63.28
		0.3	2154.03	2853.02	2487.96	2544.76	3085.81
		0.5	6356.00	4992.08	6725.31	4925.33	20405.25
		0.7	4972.02	4961.27	6315.26	4904.77	42695.98
		0.9	4972.02	4961.27	4204.77	4904.77	65228.47
moyenne			3698.47	3563.42	3961.50	3461.69	26295.76

TABLE 8.7 – Profit de chaque agent transporteur - 5 agents transporteurs (suite)

le coût d'expansion pour chaque agent transporteur, pour augmenter la capacité de ses arcs, est inférieur à la récompense moyenne par agent. Inversement, à l'exception du cas 10 nœuds et 2 agents, avec le partage optimal on obtient des profits non équitables entre les agents, où le profit varie d'un agent à un autre. Pour le partage heuristique, on retrouve de nouveau des profits non équitables entre les agents mais avec des écarts plus faibles qu'avec le partage optimal.

Dans le dernier tableau 8.8, nous donnons la somme des profits des agents de transport pour chaque politique de partage. Bien que nous n'ayons pas considéré la maximisation des profits des agents, nous remarquons que dans les expérimentations, le modèle utilisant la politique de partage optimale conduit en moyenne à un meilleur profit global sommé sur tous les agents, par rapport aux autres politique de partage.

Instances			Equ.		Heur.		Var.	
<i>n</i>	<i>m</i>	$\alpha$	$F/F_{max}$	<i>Z</i>	$F/F_{max}$	<i>Z</i>	$F/F_{max}$	<i>Z</i>
10	2	0.1	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
		0.3	0.025	3.64	0.220	29.88	0.478	37.16
		0.5	0.623	181.40	0.683	210.20	0.888	221.60
		0.7	0.837	443.52	0.861	494.76	0.968	489.32
		0.9	0.946	753.32	0.928	739.04	0.986	759.92
moyenne				276.38		294.78		301.60
50	2	0.1	0.011	11.09	0.019	15.84	0.034	21.18
		0.3	0.607	1595.76	0.631	1629.47	0.767	2134.13
		0.5	0.869	5957.73	0.989	6757.45	0.991	6701.18
		0.7	0.899	9765.09	0.993	10890.51	0.998	10897.93
		0.9	0.998	15040.56	0.993	15030.39	0.999	15078.72
moyenne			6474.05		6864.73		6966.63	
70	2	0.1	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
		0.3	0.029	213.60	0.341	1905.12	0.540	3177.32
		0.5	0.397	4668.40	0.599	7332.40	0.872	11924.80
		0.7	0.400	7587.08	0.724	15277.48	0.998	21435.22
		0.9	0.772	21035.40	0.808	23707.72	0.999	29475.05
moyenne			6700.90		9644.54		13202.48	
10	5	0.1	0.000	0.00	0.000	0.00	0.286	34.25
		0.3	0.386	401.67	0.588	534.67	0.942	753.83
		0.5	0.885	1477.92	0.928	1516.67	1.000	1598.17
		0.7	0.934	2304.83	0.928	2281.33	1.000	2406.67
		0.9	1.000	3200.50	0.949	3100.42	1.000	3224.67
moyenne			1476.98		1486.62		1603.52	
50	5	0.1	0.007	35.16	0.001	2.91	0.123	267.88
		0.3	0.759	8927.31	0.737	9153.91	0.984	12135.56
		0.5	0.995	23514.34	0.920	22434.35	1.000	23497.47
		0.7	0.998	34673.50	0.997	34610.50	1.000	34647.66
		0.9	0.998	45806.69	1.000	45858.22	1.000	45797.85
moyenne			22591.40		22411.98		23269.28	
70	5	0.1	0.000	0.00	0.000	0.00	0.056	254.03
		0.3	0.292	7147.53	0.340	7921.59	0.577	13125.59
		0.5	0.609	26269.13	0.690	29454.50	0.999	43403.97
		0.7	0.723	46064.66	0.855	54803.50	1.000	63849.28
		0.9	0.800	67561.38	0.999	84097.32	1.000	84271.28
moyenne			29408.54		35255.38		40980.83	

TABLE 8.8 – Profit global

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons révisité un problème d'expansion de réseau dans un contexte multi-agent. Plus particulièrement, nous avons étudié un jeu non-coopératif qui se déroule dans un réseau de transport multi-agent. Les jeux considérés impliquent différents types d'agents producteurs, transporteurs et usagers, chacun ayant son propre objectif, ses contraintes et souhaitant contribuer à l'optimisation d'un objectif social (ou global). Dans un tel contexte, il est nécessaire de trouver un compromis entre les différents agents rationnels afin de satisfaire de façon acceptable l'objectif global, en tenant compte des objectifs et contraintes individuels, parfois contradictoires, de chaque agent. Nous avons proposé différents scénarios de jeu qui impliquent soit un ensemble d'agents producteurs et un ensemble d'agents transporteurs ou symétriquement un ensemble d'agents usagers et un ensemble d'agents transporteurs ou les trois types d'agents à la fois. Pour ces différents scénarios, nous avons défini un cadre formel du jeu, une topologie de réseau, la nature des relations et les objectifs individuels. Dans ces trois scénarios, le réseau de transport joue un rôle primordial dans la circulation d'un flot de produits dans le réseau. Nous supposons que les arcs du réseau de transport sont distribués entre les agents de transport et possèdent des capacités contrôlables, variant entre une valeur normale et une valeur maximale, moyennant un coût fixe. Chaque agent transporteur, gère ainsi une partie du réseau de transport et doit décider de la capacité de ses arcs de manière à maximiser son profit qui est égal à la différence entre son gain et ses coûts d'expansion. Les agents producteurs et/ou usagers s'intéressent à maximiser le flot circulant sur leurs arcs respectifs, ce qui engendre une augmentation du flot global du réseau. Dans le but d'encourager les agents de transport à ouvrir des capacités supplémentaires sur leurs arcs, afin d'augmenter la valeur du flot, les agents producteurs et/ou usagers donnent des récompenses aux agents de transport pour chaque unité supplémentaire de flot circulant dans le réseau (i.e., au-delà de la valeur du flot pouvant circuler à coût nul). La récompense totale allouée par chaque agent client (producteurs et/ou usagers) pour chaque unité de flot supplémentaire est fixée au préalable, les agents clients décident du partage de cette récompense entre les agents transporteurs.

Nous nous sommes intéressés à déterminer des stratégies qui réalisent un compromis entre l'objectif global et les objectifs individuels des agents. D'où notre motivation pour solutionner le problème **MaxNash** dans lequel nous cherchons une stratégie qui maximise le flot total et qui soit stable pour les agents au sens de Nash.

Pour ces différents jeux, nous avons montré que l'augmentation et la diminution du flot dans le réseau peut se faire à travers des chemins particuliers dans le graphe de flot appelés chemins augmentant et décroissant, respectivement. Nous avons ainsi pu caractériser un équilibre de Nash à travers la caractérisation de ces chemins dans des graphes résiduels multi-agents. Nous avons étudié également la complexité du problème **MaxNash** ainsi que d'une famille de problèmes adjacents. En particulier, nous avons montré, en se basant sur une réduction du problème 3-Partition, que le problème **MaxNash** pour le jeu  $0/m/1$  est NP-complet au sens fort alors que, paradoxalement, déterminer un flot stable de valeur minimum (**MinNash**) est polynomial.

Nous avons focalisé plus particulièrement notre travail sur le jeu impliquant un ensemble d'agents transporteurs et un unique agent usager (ou un unique agent producteur). Nous avons proposé une caractérisation d'un équilibre de Nash en termes de chemins dans un graphe résiduel qui permet de développer un modèle de programmation linéaire à variables mixtes pour le jeu  $0/m/1$ , qui utilise une linéarisation mettant en jeu un nombre fini de contraintes primales-duales. Cet algorithme de résolution exacte a été testé sur un benchmark d'instances pour tester son efficacité et l'intérêt de notre démarche.

Le travail réalisé ouvre différentes perspectives. La première perspective concerne la partie expérimentale qui pourrait considérer des instances de plus grande taille, avec une plus grande variabilité sur le nombre d'agents de transport impliqués et sur la typologie du réseau de transport. De plus, une étude pourrait être menée pour comparer les résultats du modèle proposé avec une approche heuristique consistant à déterminer un flot stable. Enfin, il serait intéressant de comparer systématiquement les solutions **MinNash** et **MaxNash** pour mieux appréhender le gain potentiel que l'on pourrait obtenir si un tiers avait le pouvoir de guider les agents vers un meilleur équilibre social, où si le jeu pouvait être infiniment répété.

Une seconde perspective serait de poursuivre l'étude des jeux  $q/m/p$  et d'étendre les résultats de complexité. En effet, la caractérisation de stratégie stable proposée pour les jeux  $q/m/p$  n'est valide que sous l'hypothèse où les capacités normales des agents de transport sont nulles. Il serait pertinent de lever cette hypothèse et d'analyser plus finement comment caractériser un équilibre de Nash lorsque la stabilité dépend aussi du comportement des agents producteurs et usagers. Pour la complexité, certains résultats n'ont été établis que pour des politiques de partage fixes et des jeux simples, il serait donc

intéressant d'étudier leur généralisation au cas multi-agent avec une politique de partage optimale, voire d'étudier d'autres problèmes de décision en lien avec l'optimisation multi-objectif.

Une troisième perspective concerne le développement de méthodes exactes plus efficaces pour la recherche du meilleur flot profitable pour l'ensemble des agents ou pour la résolution des jeux d'expansion considérés au cas où plusieurs agents (usagers ou producteurs) allouent une récompense. L'utilisation de chemins augmentants dans le graphe résiduel pourrait certainement être avantageusement exploitée pour mettre au point des algorithmes ad-hoc (branch-and-bound, programmation dynamique, etc.).

Il serait aussi intéressant pour les jeux  $q/m/p$ , d'étudier le développement d'une approche multi-objectif considérant explicitement les objectifs des différents agents clients du réseau de transport. L'objectif serait alors de déterminer un front d'équilibres de Nash non dominés au sens de Pareto.

Enfin, un autre aspect concerne la conception de mécanismes de coopération distribués afin de résoudre cette famille de jeux de réseaux. En effet, certaines règles de comportement pourraient s'avérer intéressantes pour obtenir des stratégies stables de bonne qualité, comparativement à une stratégie optimale obtenue grâce à une approche centralisée, telle que la nôtre.



# Bibliographie

- [1] D. Abreu. On the theory of infinitely repeated games with discounting. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 383–396, 1988.
- [2] A. Agnetis, J.-C. Billaut, S. Gawiejnowicz, D. Pacciarelli, and A. Soukhal. *Multiagent Scheduling, Models and Algorithms*. Springer, 2014.
- [3] A. Agnetis, C. Briand, J.C. Billaut, and P. Sucha. Nash equilibria for the multi-agent project scheduling problem with controllable processing times. *Journal of Scheduling*, 18(1) :15–27, 2015.
- [4] T. Alix. *Un cadre formel de décision pour la planification multi-niveau des systèmes de production réticulaires*. Thèse de doctorat de l’Université Bordeaux I, 2001.
- [5] F. Allen and S. Morris. Finance applications of game theory. *Advances in Business Applications of Game Theory*, Kluwer Academic Publishers, page 17–48, 2001.
- [6] E. Altman and R. El-Azouzi. Non-cooperative game theory applied to telecommunication networks. *Annales des Télécommunications*, 62(7-8) :827–846, 2007.
- [7] J. Andrei, J. Subic, and D. Dusmanescu. Using dynamic programming for optimizing the investment strategy for an agricultural sheep holding : an investment case simulation. *Academic Journal Actual Problems of Economics*, 142(4) :252–261, 2013.
- [8] E. Angel, E. Bampis, and F. Pascual. The price of approximate stability for scheduling selfish tasks on two links. In *Euro-Par 2006 Parallel Processing*, pages 157–166. Springer, 2006.
- [9] E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. Kleinberg, E. Tardos, T. Wexler, and T. Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. In *In Proceedings of IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, page 295–304, 2004.



- [10] E. Anshelevich, A. Dasgupta, E. Tardos, and T. Wexler. Near-optimal network design with selfish agents. In *In Proceedings of ACM Symposium on Theory of Computing*, page 511–520, 2003.
- [11] K.R. Apt and E. Markakis. Diffusion in social networks with competing products. In *In Proceedings of the 4th international conference on Algorithmic game theory*, pages 212–223. IEEE Press, Springer-Verlag, 2011.
- [12] K.R. Apt and E. Markakis. Social Networks with Competing Products. *Journal Fundamenta Informaticae*, 129(3) :225–250, 2014.
- [13] F. Babonneau, O. Klopenstein, A. Ouorou, and J.P. Vial. Robust capacity expansion solutions for telecommunication networks with uncertain demands. *Networks*, 2010.
- [14] Y. Bachrach and J.S. Rosenschein. Power in threshold network flow games. *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 18(1) :106–132, 2009.
- [15] I. Bazet, J.P. Camalot, V. Galvagnon, J.B. Cavaille, D. Dubois, J. Erschler, P. Esquirol, H. Fargier, P. Lopez, C. Merce, H. Prade, G. De Terssac, and C. Thierry. Planification par réparation et coopération : une approche plus réaliste de la gestion multi-projet. In *2nd Conference on Management and Control of Production and Logistics (MCPL'2000)*, pages –13, Jul 2000.
- [16] C. Bessiere, A. Maestre, and P. Messeguer. La famille ABT. In *Journées Nationales sur la Résolution Pratique de Problèmes NP-Complets*, pages 57–67, Nice, France, Apr 2008.
- [17] A. Bogomolnaia and O.J. Matthew. The Stability of Hedonic Coalition Structures. *Games and Economic Behavior*, 38(2) :201 – 230, 2002.
- [18] J.P. Bourrières, T. Lecompte, J.C. Deschamps, and R. Alami. Un cadre formel de décision pour la planification multiniveaux des systèmes de production distribués. *APII-JESA*, 35(859-883) :827–846, 2001.
- [19] J. Bracken and J. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, page 37–44, 1973.
- [20] C. Briand, A. Agnetis, and J.C. Billaut. The multiagent project scheduling problem : complexity of finding an optimal Nash equilibrium. In *Proceedings of PMS conference*, pages 106–109. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2012.

- [21] C. Briand, S.U. Ngueveu, and P. Sucha. Solving a cooperative project scheduling with controllable processing times, self-interested agents and equal profit sharing. In *Multidisciplinary International Scheduling Conference : Theory & Applications*, pages –8, Aug 2013.
- [22] L. Brotcorne, M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard. A bilevel model and solution algorithm for a freight tariff-setting problem. *Transportation Science*, 34(3) :289–302, 2000.
- [23] L. Brotcorne, M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard. Joint design and pricing on a network. *Operations research*, 56(5) :1104–1115, 2008.
- [24] B. Burmeister, A. Haddadi, and G. Matylys. Application of multi-agent systems in traffic and transportation. In *Software Engineering. IEE Proceedings*, volume 144(1), pages 51–60. IET, 1997.
- [25] G.P. Cachon and M.A. Lariviere. Supply Chain Coordination with Revenue-Sharing Contracts : Strengths and Limitations. *International Journal of Management Science*, 51(1) :30–44, 2005.
- [26] N. Chaabane-Fakhfakh, A. Agnetis, C. Briand, and M.J. Huguet. Finding a Nash Equilibrium and an optimal sharing policy for multi-agent network expansion game. *Networks journal, Elsevier (submitted)*, 2015.
- [27] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. A Multi-Agent Min-Cost Flow problem with Controllable Capacities - Complexity of Finding a Maximum-flow Nash Equilibrium. In *Proceedings of International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2014)*, pages 27–34, 2014.
- [28] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Finding a Maximum Stable Flow in a Multi-agent Network with Controllable Capacities. In *ROADEF'14, Bordeaux, France*, 2014.
- [29] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Finding a Maximum Stable Flow in a Multi-agent Network with Controllable Capacities. In *EDSYS'14, Toulouse, France*, 2014.
- [30] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Seeking Stable Flows in a Multi-Agent Network with Controllable Capacities. In *IFORS 2014, Barcelone, Espagne*, May 2014.
- [31] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Finding Stable flows in multi-agent Networks under an equal-sharing policy. In *International Network Optimization Conference (INOC)*, Warsaw, Poland, May 2015.

- [32] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Nash Equilibria for multi-agent network flow with controllable capacities. In *ROADEF'15, Marseille, France*, 2015.
- [33] N. Chaabane-Fakhfakh, C. Briand, and M.J. Huguet. Nash Equilibria for Multi-agent Network Flow with Controllable Capacities. *Lecture notes in Communications in Computer and Information Science (CCIS)*, Springer-Verlag, 509 :47–62, 2015.
- [34] B. Colson, P. Marcotte, and G. Savard. An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research*, page 235–256, 2007.
- [35] A. Darmann, E. Elkind, S. Kurz, J. Lang, J. Schauer, and G. Woeginger. Group Activity Selection Problem. In *Proceedings of the 8th International Conference on Internet and Network Economics*, WINE'12, pages 156–169, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer-Verlag.
- [36] C.A. D'Aspremont, A. Jacquemin, J.J. Gabszewicz, and J. Weymark. On the Stability of Collusive Price Leadership. *Canadian Journal of Economics*, 16 :17–25, 1983.
- [37] P. De, E.J. Dunne, J.B. Ghosh, and C.E. Wells. Complexity of the Discrete Time-Cost Tradeoff Problem for Project Networks. *European Journal of Operations Research*,, 45(2) :302–306, 1997.
- [38] E. Demeulemeester, M. Vanhoucke, and W. Herroelen. Rangen : A random network generator for activity on-the-node networks. *Journal of Scheduling*, 6 :17–38, 2003.
- [39] D. Dusmanescu. Algorithm for Increase the Transportation Network Capacity with Minimum Cost. In *Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Data Networks, Communications and Computers*, DNCOCO'06, pages 47–50. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2006.
- [40] D. Dusmanescu. Optimal increase for the transportation network capacity. *WSEAS Transactions on Business and Economics*, 3(6) :473–478, 2006.
- [41] D. Dusmanescu, D. Enachescu, and M. Matei. Optimal investment level for increase the capacity of an transportation network. *Communications of the IBIMA*, 10(22) :168–173, 2009.
- [42] P.K. Dutta. *Strategies and games : theory and practice*. MIT press, 1999.
- [43] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer, Berlin, Second edition, 2005.

- [44] M.A. Estevez Fernandez. A game theoretical approach to sharing penalties and rewards in projects. *European Journal of Operational Research*, 216(3)(12) :647–657, 2012.
- [45] R. Evaristo and P.C. Van Fenema. A typology of project management : emergence and evolution of new forms. *International Journal of Project Management*, 17(5) :275–281, 1999.
- [46] A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. Papadimitriou, and C. Shenker. On a network creation game. In *In Proceedings of ACM Symposium on Principles of Distributed Systems*, page 247–351, 2003.
- [47] J. Ferber. Des objets aux agents : une architecture stratifiée. In *6ème Congrès Afcet de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, volume 1, pages 275–286, 1987.
- [48] A. Fink. Supply Chain Coordination by Means of Automated Negotiations. In *37th Hawaii International Conference on System Sciences, Big Island, Hawaii*, pages 5–8, 2004.
- [49] K. Fischer, J.P. Muller, M. Pischel, and D. Schier. A model for cooperative transportation scheduling. In *ICMAS*, pages 109–116. The MIT Press, 1995.
- [50] L.R. Ford and D.R. Fulkerson. *Flow in Networks*. Princeton University Press, New Jersey, 1958.
- [51] J. Francois. *Planification des chaînes logistiques : modélisation du système décisionnel et performance*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007.
- [52] D.R. Fulkerson. Increasing the Capacity of a Network : The Parametric Budget Problem. *Management Science*, 5(4) :472–483, 1959.
- [53] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Co. New York, USA, 1979.
- [54] A. Grubshtein and A. Meisels. Cost of cooperation for scheduling meetings. In *Intelligent Distributed Computing III*, pages 227–236. Springer, 2009.
- [55] A. Grubshtein and A. Meisels. Finding a Nash Equilibrium by Asynchronous Backtracking. In *Proceeding in 18th International Conference, Quebec City, Canada*, pages 925–940, 2012.
- [56] J.C. Harsanyi. Utilities, preferences, and substantive goods. *Social choice and welfare*, 14(1) :129–145, 1996.

- [57] J.C. Harsanyi and R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, volume 1. MIT Press Books, 1988.
- [58] V.N. Hsu. Dynamic capacity expansion problem with deferred expansion and age-dependent shortage cost. *Management Science*, 4(1) :44–54, 2002.
- [59] E. Kalai and E. Zemel. On totally balanced games and games of flow. *Discussion Papers 413, Northwestern University*, 1980.
- [60] J. Kamburowski. On the minimum cost project schedule. *International Journal of Management Science*, 22(4) :401–407, 1994.
- [61] M.J. Kearns, M.L. Littman, and S.P. Singh. Graphical models for game theory. In *In Proceedings of the 17th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence, San Francisco, CA, USA*, page 253–260, 2001.
- [62] A.B. Kothari. Genghis-a multiagent carpooling system. *The University of Bath, B. Sc. Dissertation work in Computer Science, UK*, 2004.
- [63] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. Worst-Case Equilibria. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 1563, page 404–413. Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg, Springer, 1999.
- [64] M. Labbé and A. Violin. Bilevel programming and price setting problems. *4OR*, 11(1) :1–30, March 2013.
- [65] M. Laguna. Applying robust optimization to capacity expansion of one location in telecommunications with demand uncertainty. *Management Science*, 44(11) :101–110, 1998.
- [66] J.S.K. Lau, G.Q. Huang, K.L. Mak, and L. Liang. Distributed project scheduling with information sharing in supply chains : part I an agent-based negotiation model. *International Journal of Production Research*, 43(22) :4813–4838, 2005.
- [67] J.S.K. Lau, G.Q. Huang, K.L. Mak, and L. Liang. Distributed project scheduling with information sharing in supply chains : part II theoretical analysis and computational study. *International Journal of Production Research*, 43(23) :4899–4927, 2005.
- [68] Y. Le Quéré, M. Sevaux, C. Tahon, and D. Trentesaux. Reactive Scheduling of Complex System Maintenance in a Cooperative Environment with Communications Times. In *IEEE Transactions on Systems*, volume 33(2), pages 225–234, 2003.

- [69] T. Magnanti and R. Wong. Network design and transportation planning : Models and Algorithms. *Transportation Science*, 18(1) :1–55, 1984.
- [70] R.T. Maheswaran, M. Tambe, E. Bowring, J.P. Pearce, and P. Varakantham. Taking dcop to the real world : Efficient complete solutions for distributed multi-event scheduling. In *In Proceeding of the Third International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 310–317, 2004.
- [71] S. Malcolm and S. Zenios. Robust optimization for power systems capacity expansion under uncertainty. *Journal of the Operational Research Society*, 45(9) :1040–1049, 1994.
- [72] R. Mandiau, E. Grislin-Le Strugeon, and A. Péninou. *Organisation et applications des SMA*. Hermès - Lavoisier, 2002.
- [73] A. Meisels and R. Zivan. Asynchronous Forward-checking for DisCSPs. *Constraints*, 12(1) :131–150, 2007.
- [74] J. Modi and M. Veloso. Multiagent meeting scheduling with rescheduling. In *In Proceeding 5Th workshop on distributed constraints reasoning*, pages 310–317, 2004.
- [75] P.J. Modi. *Distributed constraint optimization for multiagent systems*. PhD thesis, University of Southern California, 2003.
- [76] E. Monsarrat-Despontin, C. Briand, and P. Esquirol. Aide à la décision pour une coopération inter-entreprises : une approche par contraintes. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39(7) :799–818, Dec 2005.
- [77] J.D. Morrow. *The traffic assignment problem : models and methods*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [78] J. Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, volume 36(1), pages 48–49, 1950.
- [79] J. Nash. Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics*, 54(2) :286–295, 1951.
- [80] N. Nisan and A. Ronen. Algorithmic Mechanism Design (Extended Abstract). In *Proceedings of the Thirty-first Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '99*, pages 129–140, New York, NY, USA, 1999. ACM.
- [81] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V.V Vazirani. *Algorithmic game theory*, volume 1. Cambridge University Press Cambridge, 2007.

- [82] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V.V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [83] J. Niu, K. Cai, S. Parsons, and E. Sklar. Reducing Price Fluctuation in Continuous Double Auctions Through Pricing Policy and Shout Improvement. In *Proceedings of the Fifth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS '06*, pages 1143–1150, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [84] F. Ordonez and J. Zhao. Robust Capacity Expansion of Network Flows. *Networks*, 50(2) :136–145, 2007.
- [85] M.J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. Cambridge, MA, USA : MIT press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [86] P.M. Pardalos, A. Migdalas, and L. Pitsoulis. *Pareto optimality, game theory and equilibria*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2008.
- [87] P Patriksson. *The traffic assignment problem : models and methods*. Courier Dover Publications, 1994.
- [88] E. Resnick, Y. Bachrach, R. Meir, and J.S. Rosenschein. The Cost of Stability in Network Flow Games. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2009*, volume 5734 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 636–650. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [89] C. Schneeweiss. *Distributed decision making*, volume 2. Springer, 2003.
- [90] Y. Shoham and K. Leyton-Brown. *Multiagent Systems : Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. New York : Cambridge University Press, 2009.
- [91] S. Simon and K.R. Apt. Choosing Products in Social Networks. *Internet and Network Economics, Lecture Notes in Computer Science*, 7695 :100–113, 2012.
- [92] M. Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [93] F. Sottini, S. Abdel-Naby, and P. Giorgini. Andiamo : A multiagent system to provide a mobile-based rideshare service. *University of Toronto Press*, 2006.
- [94] H. Stackelberg. *The theory of market economy*. Oxford University Press, Oxford, 1952.
- [95] E. Tardos and T. Wexler. Network formation games and the potential function method. *Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press*, pages 487–516, 2007.

- [96] G. Tesauro and J.O. Kephart. Pricing in Agent Economies Using Multi-Agent Q-Learning. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 5(3) :289–304, September 2002.
- [97] D. Trentesaux, N. Moray, and C. Tahon. Integration of the human operator into responsive discrete production management system. *European Journal of Operational Research*, 109(859-883) :342–361, 1998.
- [98] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [99] M. Voorneveld. Characterization of Pareto Dominance. *Operations Research Letters*, 31(1) :7–11, 2003.
- [100] R.J. Wallace and E. Freuder. Constraint-based multi-agent meeting scheduling : effects of agent heterogeneity on performance and privacy loss. In *In Proceeding 3rd workshop on distributed constraint reasoning, DCR-02*, pages 176–182, 2002.
- [101] L. Wang, D. Zhan, L. Nie, and X. Xu. Research framework for decentralized multi-project scheduling problem. In *Proceedings of the International Conference on Information Science and Technology (ICIST'11)*, pages 802–806, 2011.
- [102] JG Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research. In *Inst Civil Engineers Proc London/UK/*, 1900.
- [103] M. Wooldridge. *An introduction to multiagent systems*. John Wiley & Sons, 2009.
- [104] M. Yildizoglu. *Introduction à la théorie des jeux*. Collection Éco Sup : Manuel et exercices corrigés. Dunod, 2003.
- [105] M. Yokoo. *Distributed constraint satisfaction : foundations of cooperation in multi-agent systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [106] M. Yokoo, T. Ishida, E.H. Durfee, and K. Kuwabara. Distributed constraint satisfaction for formalizing distributed problem solving. In *International Conference on Distributed Computing Systems*, pages 614–621, 1992.
- [107] F. Zhang, R. Roundy, M.C. Akanyildirim, and W.T. Huh. Optimal capacity expansion for multi-product, multi-machine manufacturing systems with stochastic demand. *IIE Transactions*, 36(1) :23–26, 2004.
- [108] X. Zhang, J. Wu, and J. Zhu. Task schedulable problem and maximum scheduling problem in a multi-agent system. *Journal of Software*, 6(11) :2225–2231, 2011.



