



HAL
open science

Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides

Matthias Rabatel

► **To cite this version:**

Matthias Rabatel. Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides. Modélisation et simulation. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAM050 . tel-01293341

HAL Id: tel-01293341

<https://theses.hal.science/tel-01293341>

Submitted on 24 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Matthias Rabatel

Thèse dirigée par **Stéphane Labbé**
et codirigée par **Jérôme Weiss**

préparée au sein **du laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'école doctorale MSTII : Mathématiques, Sciences et Techno-
logies de l'Information, Informatique**

Modélisation Dynamique d'un Assemblage de Floes Rigides

Thèse soutenue publiquement le **23 novembre 2015**,
devant le jury composé de :

M, Bertrand Maury

Professeur, Université Paris-Sud 11, Orsay, Président

M, Pierre Degond

Professeur, Imperial College London, Rapporteur

M, Sean McNamara

Assistant Professeur, Université de Rennes, Rapporteur

M, Philippe Ricoux

Direction Scientifique, Total S.A., Examineur

M, Kaj Riska

Ice Engineer, Total S.A., Examineur

M, Michel Tsamados

Lecturer, University College London, Examineur

M, Stéphane Labbé

Professeur, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

M, Jérôme Weiss

Directeur de recherche, CNRS, Co-Directeur de thèse



Modélisation Dynamique d'un Assemblage de Floes Rigides

Matthias Rabatel

23-11-2015

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier Pierre Degond et Sean McNamara pour le temps passé à la relecture de ce manuscrit et pour les différentes remarques et critiques constructives apportées. J'aimerais ensuite remercier Bertrand Maury, Philippe Ricoux, Kaj Riska et Michel Tsamados pour avoir accepté de composer mon jury et pour les nombreuses questions pertinentes posées lors de la soutenance.

Bien sûr, ce travail n'aurait pu aboutir sans la direction de Stéphane Labbé du laboratoire Jean Kuntzmann et de Jérôme Weiss de l'Institut des Sciences de la Terre. Je tiens à les remercier grandement pour leur management complémentaire et leur disponibilité tout au long de ces trois années. Les nombreux échanges et discussions, toujours dans la bonne humeur, ont créé une ambiance de travail agréable et sereine qui contribua grandement au plaisir ressenti lors de la thèse. Je suis très heureux d'avoir choisi votre projet et très reconnaissant pour la confiance accordée afin de le mener à bien.

Bien sûr, ce travail n'aurait pas eu la même valeur sans la collaboration avec TOTAL. Je tiens à remercier personnellement Annie Audibert-Hayet, Edmond Coche, Philippe Lattes, Kaj Riska et Philippe Ricoux pour leur soutien, leur implication et les nombreux commentaires et propositions apportés à ce projet. Ces trois années ont été pour moi très enrichissantes.

Bien sûr, ce travail n'aurait pu être une réussite pour moi sans l'environnement du laboratoire Jean Kuntzmann. Après la vision de l'austère tour IRMA, c'est bien un chaleureux accueil qui nous attend ! Un grand merci aux équipes administrative et moyens informatiques qui sont toujours prêtes à aider. Je tiens à remercier personnellement Aurore, Cathie, Delphine, Hélène et Laurence d'une part et Bruno, Caroline, Fred, Franck et Patrice d'autre part.

Dans un deuxième temps, j'aimerais remercier François Faure, Vincent Acary, Bernard Brogliato, Frédéric Dubois et Rémy Mozul pour avoir pris le temps de me rencontrer et pour m'avoir permis d'avancer dans les travaux de thèse. Nos différentes rencontres ont toujours été très enrichissantes pour moi.

J'aimerais aussi remercier Roland Denis, Quentin Jouet et Nicolas Jourdain qui ont grandement œuvré pour ce projet : Roland pour l'étude des **LCP** et la mise en route de l'écriture du code en **C++**, Quentin pour avoir pris la suite du travail de Roland et avoir mené à bien l'écriture jusqu'à une version dont nous avons pu tirer des simulations très prometteuses, et Nicolas pour l'aide apportée à la mise en place du couplage océan/glace et les nombreuses suggestions faites concernant des tests, des validations et des exploitations de ce couplage.

Les remerciements ne pourraient être complets sans citer les personnes que j'ai côtoyées tout au long de cette expérience. Je pense bien sûr à Ester, Julien, Léo, Pierre-Luc et Pierre-Olivier qui m'ont suivi depuis le Master, à Amin, Bertrand, Chloé, Euriell, Jean-Mathieu, Lukas, Madison, Roland, Thomas et Vincent, les *anciens* pour leur accueil et pour les différentes initiations : initiation aux cafés du 7^e, aux *RU* de 11h30, aux soirées *Family's*, aux soirées jeux et aux tournois

de foot inter-labos. Je pense bien sûr à Federico, Morgane, Pierre-Jean, Romain et Véronique mes *conscrits* de thèse, et à Adrien, Alexandre, Alexis, Charles, Jean-Baptiste, Kevin, Lionel, Margaux, Meriem, Nelson, Olivier, Rémi et Sefkan, les *nouveaux* avec qui j'ai passé de très bons moments : soirées, soirées Poker, sorties ski, sorties randos, etc.

Enfin, j'aimerais remercier en particulier, Chloé pour tout le soutien apporté lors de la thèse et ma famille pour m'avoir fait confiance et m'avoir soutenu au moment de me lancer dans ce projet.

Table des matières

Introduction	5
Notations	8
1 Modélisation Théorique de la Dynamique des Glaces de Mer	10
1.1 Le modèle du floe	11
1.1.1 La dynamique régulière : le formalisme de Newton-Euler	13
1.1.2 Les interactions entre les floes	17
1.1.3 Les conditions aux bords	42
1.2 Le modèle de l'environnement	46
1.2.1 Les forces extérieures	46
1.2.2 Le couplage océan/glace	48
1.3 La caractérisation des packs	52
1.3.1 La distribution des tailles et des géométries de floes	52
2 Méthodes Numériques et Algorithmiques Pour la Résolution de la Dynamique des Glaces de Mer	54
2.1 La gestion du mouvement et des collisions	55
2.1.1 La discrétisation des floes	55
2.1.2 La discrétisation temporelle	57
2.1.3 La détection des collisions en espace	65
2.1.4 Les événements collisions	80
2.1.5 La détection des contacts en temps	86
2.1.6 Les conditions aux bords	92
2.2 La gestion de l'environnement	96
2.2.1 Les forces extérieures	96
2.2.2 Les forces de traînée	96
2.2.3 Le couplage océan/glace	97
2.3 La génération des packs	99
2.3.1 L'algorithme de génération	99
3 Validations et Exploitations du Modèle	104
3.1 Les validations	105
3.1.1 Des scénarios simples pour les collisions	105
3.1.2 Des interactions avec l'environnement	115
3.1.3 Les tests en bassin	118
3.2 Les exploitations	123
3.2.1 La dérive dans un canal étroit	123
3.2.2 La dérive soumise à un vent et un courant variables	129

Conclusion	143
Bibliographie	145

Introduction

Un déclin spectaculaire de la glace de mer Arctique, que ce soit en termes d'étendues de glace (voir [CPGS08, SSH⁺12, SKB⁺12]) ou en en termes d'épaisseurs (voir [KR09, RWDC11]) a été noté au cours de ces dernières décennies. Ce déclin est considéré comme l'une des manifestations les plus saisissantes du changement climatique à l'échelle globale (voir [SKB⁺12]). Comme la glace de mer est le facteur principal contrôlant les échanges de chaleur par rayonnement et radiation et les échanges énergétiques entre l'océan Arctique et l'atmosphère, c'est un contributeur majeur au climat, à la température de l'océan et à la circulation atmosphérique dans les latitudes nord et au-delà. Par conséquent, il est essentiel pour les projections climatiques de modéliser précisément l'évolution de la glace de mer au cours du temps. En moyenne, il a été montré que les modèles climatiques sous-estimaient le déclin de la glace de mer Arctique (voir [RWDC11, SHM⁺07, SKB⁺12]). Cette sous-estimation pourrait partiellement être due à un cadre de travail mal adapté à la modélisation mécanique de la glace de mer (voir [RWDC11]). En effet, le déclin a été associé avec, et probablement exacerbé par, une accélération de la vitesse et de la déformation de la glace (voir [RWDC11, SKM11]) aussi bien qu'avec une fragilisation mécanique à l'échelle du bassin Arctique (voir [GJM⁺12]), avec des conséquences en termes de déplacement et d'équilibre des masses de glace (voir [Wei13]).

Lorsque nous considérons des grandes échelles ($> 10 \text{ km}^2$) et des concentrations de glace de mer importantes ($> 80\%$), il est raisonnable d'utiliser la mécanique des milieux continus pour décrire la glace de mer (voir [Fel08]), tant que la rhéologie de la glace utilisée est appropriée (voir [GBW⁺11]). De telles descriptions continues facilitent le couplage avec les modèles d'océan et d'atmosphère. Par contre, lorsque nous considérons des petites échelles ($\leq 10 \text{ km}^2$) et/ou des régions où la concentration de glace de mer est plus faible, comme par exemple la zone marginale des glaces (MIZ), la nature discontinue de la glace ne peut être ignorée dans la mécanique et la cinématique des glaces de mer.

Ces échelles et ces conditions sont importantes pour l'industrie, la navigation et les prévisions opérationnelles. En effet, le déclin de la couverture de l'océan Arctique par les glaces entraîne un intérêt croissant pour des territoires et des ressources. Si les conditions de glace de mer deviennent moins dangereuses, certaines routes navigables peuvent devenir plus fiables et plus rentables. De plus, l'Arctique est une des rares régions dans le monde où les réserves d'hydrocarbures sont quasiment intactes. Ainsi, le déclin des glaces peut aussi sécuriser et rentabiliser l'exploration et l'exploitation des ressources. Dans ce contexte, améliorer la précision des modèles mécaniques de glace de mer est essentiel, du point de vue des interactions entre la glace et des structures offshore jusqu'au point de vue de la gestion des routes navigables et/ou des prévisions opérationnelles. Dans ces conditions, une description de la banquise en termes d'assemblages de morceaux individuels de glace de mer en interactions mécanique devra être privilégiée pour une description précise des forces internes et de la structure à petite échelle de la dérive de la glace. Dans toute la suite de ce manuscrit nous utiliserons la terminologie *floes* pour nommer ces morceaux individuels de glace de mer.

Le coût numérique pour modéliser une telle approche et les défis posés par la modélisation des interactions entre les floes ou la manière de combiner ces modèles avec des modèles continus d’océan et d’atmosphère explique que, jusqu’à présent, ils soient moins développés que les modèles de mécanique des milieux continus. Les premières tentatives ont été proposées par Hopkins (voir [Hop96, HFT04]), et l’intérêt a été récemment renouvelé par Herman et Wilchinsky (voir [Her11, WFH10]). Ce type de méthode a été utilisé à très petite échelle ($< 100 \text{ m}^2$) pour simuler, par exemple, la formation de crêtes (voir [Hop98]), ou pour simuler les interactions entre la glace et des structures offshore (voir [PTP11]). Cependant, ces modèles granulaires de glace de mer considèrent les floes avec des géométries simples et sont basés sur des algorithmes de dynamique moléculaire (voir [McN11]). De plus, ces modèles estimant les forces de contact entre les floes sont basés sur un principe d’interpénétration (soit linéaire, soit Hertzien) qui représente une grande approximation si cela est appliqué à un large éventail de tailles et de géométries de floes. Par exemple, dans l’article [WDA10], les floes sont des carrés de même taille ; dans l’article [MLJK13], les floes sont des quadrilatères de différentes tailles ; dans l’article [Her13], les floes sont des disques de différentes tailles ; alors que dans l’article [HFT04], l’assemblage de glace est construit à partir d’une triangulation de Delaunay. Dans ce dernier cas, comme la surface totale est initialement pavée avec des polygones, l’introduction de forces cohésives entre les éléments discrets permet de décrire la fracturation et la fragmentation de la glace. La modélisation par éléments discrets est alors utilisée comme une représentation mathématique de l’assemblage de floes, et les floes de différentes tailles et de différentes géométries peuvent être représentés comme l’agrégation d’éléments discrets polygonaux (voir [HFT04]).

Concernant la description de la collision entre les floes, dans l’article [Her13], la force de contact normale est la somme d’une force de contact de Hertz et d’une force d’amortissement. Dans la mécanique de Hertz, la force normale est nulle quand la distance δ entre les bords de deux floes voisins est positive, et de l’ordre de $|\delta|^{3/2}$ quand les deux floes s’interpénètrent ($\delta \leq 0$). De manière similaire à la force normale, la force tangentielle est la somme d’une force de cisaillement et d’une force d’amortissement. Le modèle de contact de Hertz est bien adapté à des systèmes constitués de disques ou de sphères, mais n’est pas approprié à des géométries de contact arbitraires. L’article [WDA10] présente un modèle basé sur une méthode de pénalisation et considère les contacts entre les solides comme des contacts entre des systèmes de ressorts et d’amortisseurs. La force normale est nulle quand $\delta > 0$, et augmente de façon monotone quand l’interpénétration augmente ($\delta \leq 0$). Typiquement, la force normale est modélisée comme une force de rappel linéaire du ressort $-K\delta$, où K est la constante de raideur du ressort comme dans la méthode classique de la dynamique moléculaire. Bien qu’utilisée avec succès pour simuler les écoulements granulaires avec un grand nombre de contacts, cette méthode introduit des paramètres heuristiques et une raideur artificielle.

L’approche que nous présentons dans ce manuscrit est différente. Nous considérons la dynamique d’un assemblage de floes de tailles et de géométries quelconques, non sur la base de modèles classiques de dynamiques moléculaires, mais à partir d’un algorithme de gestion d’événements et avec une attention particulière sur les collisions entre les floes, tout en évitant les interpénétrations. La gestion d’événements (ou *Event-Driven*) consiste à séparer la dynamique régulière de la dynamique non régulière, comme les collisions.

Entre les collisions, le mouvement d’un floe individuel satisfait les équations de la conservation des moments linéaire et angulaire, avec les formulations classiques pour l’effet de Coriolis aussi bien que pour les forces de traînée océanique et atmosphérique. Afin de détecter les futures collisions, un algorithme de hiérarchisation de volume englobant a été adapté à notre cadre de travail, avec des disques approchant le contour des floes. Afin de traiter les collisions avant

qu'elles entraînent une interpénétration, un problème linéaire de complémentarité est écrit, basé sur une condition de Signorini et la loi de Coulomb pour le contact frottant. Dans ce cadre, les impulsions normales et tangentielles sont les inconnues plutôt que les forces de contact comme ce serait le cas dans la dynamique moléculaire. La nature des contacts est décrite à travers un coefficient de friction et un coefficient de restitution décrivant la perte d'énergie cinétique durant la collision. Cette perte est due à l'endommagement et à la fracturation au voisinage de la zone de contact des floes.

Chaque floe est maillé individuellement à partir d'éléments finis, permettant une description précise d'une quelconque géométrie et d'un quelconque scénario de collision. Cette gestion précise des contacts minimise ainsi la dispersion et la diffusion numérique durant les simulations. Nous mentionnons que le modèle présenté dans ce manuscrit ne considère pas de rhéologie de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique.

Le but de cette thèse est donc de construire un modèle granulaire afin de décrire la dérive des glaces de mer en zone marginale des glaces soumises à des courants atmosphérique et océanique et de décrire les interactions entre les floes dues aux collisions, tout en exigeant une représentation des glaces réaliste, c'est-à-dire avec des formes et des tailles de floes en accord avec les observations in-situ, et la prise en compte de lois de contact non régulières, c'est-à-dire avec une loi évitant les interpénétrations et la loi de Coulomb pour le contact frottant.

La présentation en détail de notre modèle dynamique d'un assemblage de floes est organisée en trois chapitres comme suit. Le chapitre 1 est consacré à l'étude théorique du modèle de la dynamique des glaces de mer. Cela comprend le formalisme de Newton-Euler pour la dynamique régulière, les lois de contact et la mise sous la forme de problèmes linéaires de complémentarité pour les interactions entre les floes et l'écriture des forces extérieures appliquées aux floes. Lors de ce chapitre, nous discutons également des choix théoriques pour construire un assemblage de floes. Le chapitre 2 est consacré à l'étude des méthodes numériques et des algorithmes pour notre modèle. Cela comprend la méthode de quadrature de Gauss-Legendre pour la discrétisation des floes, la méthode de volumes englobants pour la détection en espace des collisions et l'algorithme de gestion du pas de temps pour la détection en temps des collisions. Lors de ce chapitre, nous discutons également des méthodes numériques pour l'intégration de l'environnement à l'assemblage des floes et pour la construction d'un tel assemblage. Le chapitre 3 est consacré aux validations et aux exploitations de notre modèle. Cela comprend la confrontation de notre modèle à des scénarios de collision classiques comme, entre autres, le berceau de Newton, le problème de la balle rebondissante ou encore le problème de la boîte glissante. Cela comprend aussi la confrontation avec un environnement idéalisé permettant de valider des comportements connus comme, entre autres, la déviation des trajectoires de glace par rapport au vent ou encore la glace dérivant à la vitesse maximum de 2% de celle du vent. Lors de ce chapitre, nous donnons les résultats de la comparaison des données simulées par notre modèle avec des données tirées d'une expérience en bassin avec des floes en bois. Enfin, nous discutons des résultats obtenus après la simulation des deux scénarios suivants : un assemblage de floes dérivant vers un canal contenant un rétrécissement pouvant conduire à un embouteillage, et un assemblage de floes dérivant dans un océan libre avec des conditions réalistes de vent et de courant océanique.

Notations

\dot{a}	: dérivée première en temps de a		
\ddot{a}	: dérivée seconde en temps de a	\mathcal{H}_i	: vecteur des forces et des moments des forces appliquées à Ω_i
a^\perp	: ensemble de vecteur b tel que $b.a = 0$	I	: intervalle de temps $I = [0, T]$
\mathbf{A}^T	: transposée de la matrice \mathbf{A}	$T > 0$	
C_a	: coefficient de traînée du vent $C_a = 1.7.10^{-3}$	\mathcal{I}_i	: moment d'inertie associé à Ω_i
C_w	: coefficient de traînée de l'océan $C_w = 5.10^{-3}$	\mathcal{I}_{kj}	: impulsion appliquée à Ω_k due au contact en P_j
\mathbf{d}_{slip}	: direction de glissement $\mathbf{d}_{slip} \in \{\mathbf{T}, -\mathbf{T}\}$	J	: matrice contenant les données normales des contacts
$d(., .)$: distance usuelle de \mathbb{R}^p , $p > 0$	\mathbf{k}	: vecteur unité $(0, 0, 1)^T$ de \mathbb{R}^3
D	: matrice contenant les données tangentielles des contacts	m	: nombre de contacts
D_0	: disque de niveau 0 englobant le floe	\mathcal{M}	: matrice contenant les masses et moments d'inertie de S
\mathcal{D}_1	: ensemble des disques de niveau 1	\mathcal{M}_i	: matrice contenant les masses et moments d'inertie de Ω_i
E	: énergie cinétique du système S	M_i	: masse de Ω_i
E_i	: énergie cinétique du floe Ω_i	n	: nombre de floes de S
E^c	: énergie cinétique du système S après phase de décompression	\mathbf{N}_j	: normale à Ω en P_j
\mathfrak{E}_i	: ensemble des sommets du bord maillé de Ω_i	\mathcal{N}_{P_j}	: cône normal à Ω en P_j
F_{kj}	: force de contact appliquée en P_j au floe Ω_k	P_j	: j ^e point de contact
$\tilde{\mathfrak{F}}_c$: effet de Coriolis	$P_{c,i}$: ensemble des points de contact appartenant à Ω_i
\mathbf{g}	: accélération due à la gravité terrestre	\tilde{P}_c	: ensemble des points de contact dans S , associés avec au moins un repère de contact
G_i	: centre de masse du floe Ω_i	r	: nombre de floes obstacles
h_i	: épaisseur du floe Ω_i	\mathcal{R}_{abs}	: repère absolu
h_w	: hauteur de la couche limite océanique	\mathcal{R}_Ω	: repère du floe Ω
\mathcal{H}	: vecteur des forces et des moments des forces appliquées à S	\mathcal{R}_{P_j}	: repère de contact associé au point de contact P_j
		s_{min}	: la plus petite des tailles de floes de S
		s_{max}	: la plus grande des tailles de floes de S

S	: système de n floes	Δt	: pas de temps de la simulation de S
t^-	: instant avant le contact	Δt_i	: pas de temps associé à Ω_i
t^+	: instant après le contact	ε	: coefficient de restitution $\varepsilon \in [0, 1]$
T	: durée de la simulation	ζ	: distance de collision associée à S
\mathbf{T}_j	: tangente à Ω en P_j	η_i	: distance de collision associée à Ω_i
\mathbf{U}_a	: vitesse du vent	θ_i	: angle de rotation entre les axes de \mathcal{R}_{abs} et \mathcal{R}_{Ω_i}
\mathbf{U}_w	: vitesse du courant océanique	κ_i	: distance minimale entre un point de $\partial\Omega_i$ et $D_{0,i}$
V_j^{lk}	: vitesse relative de P_j comme point de Ω_l dans \mathcal{R}_{Ω_k} , $k < l$	λ	: normales des impulsions de contact
V	: ensemble des vitesses admissibles	λ_j	: composante normale de l'impulsion de contact appliquée en P_j
W	: vecteur des vitesses angulaires et des centres de masse de S	λ^c	: vecteur des composantes normales des impulsions de contact après phase de compression
W_i	: vecteur des vitesses angulaire et du centre de masse de Ω_i	μ	: coefficient de friction $\mu \in [0, 1]$
W^c	: vecteur des vitesses angulaires et des centres de masse de S après phase de compression	ρ	: masse volumique de la glace $\rho = 917 \text{ kg.m}^{-3}$
W^N	: combinaison linéaire de $W(t^-)$ et W^c	ρ_a	: masse volumique de l'air $\rho_a = 1.341 \text{ kg.m}^{-3}$
\mathbf{z}	: solution d'un problème linéaire de complémentarité	ρ_w	: masse volumique de l'océan $\rho_w = 1024.071 \text{ kg.m}^{-3}$
\mathcal{Z}_i	: zone de collision associée à Ω_i	τ_a	: force de traînée par unité d'aire due au vent
β	: vecteur des composantes tangentes des impulsions de contact	τ_w	: force de traînée par unité d'aire due à l'océan
β_j	: tangentielle des impulsions de contact	Ω	: région fermée du plan occupée par le floe
β_j^c	: composante tangentielle de l'impulsion de contact appliquée en P_j	$\partial\Omega$: frontière du floe Ω
β^c	: vecteur des composantes tangentes des impulsions de contact après phase de compression	$\ \cdot\ $: norme induite du produit scalaire (\cdot) usuel dans \mathbb{R}^p $p > 0$
$\tilde{\beta}$: tangentielle des impulsions de contact dans les deux directions de glissement	$\cdot \wedge \cdot$: produit vectoriel dans \mathbb{R}^3
$\tilde{\beta}_j$: composante tangentielle de l'impulsion de contact appliquée en P_j dans les deux directions de glissement		
δt^*	: intervalle de temps durant lequel au moins un contact est maintenu		

Chapitre 1

Modélisation Théorique de la Dynamique des Glaces de Mer

Nous considérons les glaces de mer à une échelle où la nature discontinue de la glace ne peut être négligée. La trajectoire, la vitesse et l'accélération des glaces, sous l'effet des interactions, ne sont plus différentiables. L'approche des milieux continus laisse place à une approche des milieux discrets. Les glaces de mer sont donc considérées comme un milieu granulaire. Les grains ou particules sont appelés les floes et les glaces de mer sont considérées comme un système de floes. La dynamique de tels systèmes peut devenir non lisse ou non régulière. Il peut se produire des changements brusques d'accélération, de vitesses et de trajectoires. Les modèles choisis et présentés dans ce manuscrit prennent en compte ces dynamiques non régulières.

Les grains ont certaines propriétés comme la masse, la taille et la forme. L'approche discrète est basée sur l'intégration des équations du mouvement simultanément pour chaque particule, en considérant des forces agissant sur les particules. Étant données les conditions aux bords et les interactions entre les particules, l'approche discrète nous permet de faire ressortir un mouvement relatif, un comportement hétérogène. Cela requiert les lois de la physique classique pour décrire le mouvement libre d'un côté et des lois de collision décrivant l'interaction entre les particules d'un autre côté.

Nous présenterons, dans un premier temps, le modèle classique de la dynamique régulière pour un floe rigide. Nous étudierons ensuite, les modèles théoriques développés dans le domaine des corps rigides en contact. Nous verrons comment adapter ces travaux à notre modèle des glaces de mer tout en conservant certaines propriétés physiques. Ces propriétés physiques proviennent d'une part des moments linéaire et angulaire et d'autre part des lois de contact choisies. Nous discuterons aussi de la consistance énergétique de notre modèle, c'est-à-dire, la capacité à ne pas augmenter l'énergie cinétique du système après la gestion des contacts. Puis, nous évoquerons les différents comportements de contact que nous sommes capables d'exhiber à partir de notre modèle, et les différences avec ceux décrits dans la littérature. Ces comportements et la comparaison avec ceux exhibés dans la littérature seront détaillés et illustrés dans le Chapitre 3. Ensuite, nous présenterons, l'environnement dans lequel évolue un système de floes. Cela correspond aux forces extérieures appliquées sur chaque floe. Nous détaillerons les forces en jeu et leur expression pour prendre correctement en compte leur action sur le floe. Enfin, nous consacrerons une partie à la caractérisation des packs de floes. En effet, nous verrons que le pack n'est pas juste un système constitué d'un nombre de floes de taille et de géométrie quelconques. La construction d'un pack doit répondre à certains critères de tailles et de géométries.

1.1 Le modèle du floe

Les particules considérées dans notre approche discrète sont des floes. Leurs propriétés associées proviennent des observations de la glace de mer dans les zones marginales. Dans ces zones, les glaces sont regroupées en fragments de tailles et de géométries très variées (*voir Figure 1.1*). Les formes sont grossièrement convexes, avec une rotondité rarement supérieure à 1.5 (*voir Chapitre 1.3*). Dans les zones marginales l'aire de la surface des floes peut atteindre plusieurs centaines de mètres voire plusieurs kilomètres carrés tandis que l'épaisseur dépasse rarement le mètre. Dans notre modèle, nous considérons des floes dont l'aire est supérieure à quelques mètres carrés et sans restrictions concernant leur géométrie. À cette échelle, l'épaisseur et les processus hors-plan peuvent être négligés en première approximation. Au cours de l'année, tout au long des périodes de débâcle et d'embâcle, la forme et la taille des floes varient. Ces variations sont produites par plusieurs phénomènes à des échelles temporelles différentes. Parmi ces phénomènes, nous pouvons citer, les processus thermodynamiques comme le gel et le dégel, et les processus mécaniques comme les interactions entre les floes ou entre un floe et un obstacle. Le dégel lors de la débâcle et le gel lors de l'embâcle, sont des processus à l'échelle de la journée ou de plusieurs jours. Tandis que les interactions sous la forme de collisions entre floes ou entre floes et obstacles (côtes, ports, structures offshore) sont des processus à l'échelle de la seconde ou de la minute. Dans cette thèse, les effets dus aux processus thermodynamiques sont négligés. Seuls les processus mécaniques sont pris en compte. La dynamique est donc étudiée sur des échelles temporelles ne dépassant pas quelques jours. Dans ce contexte, les changements de taille et de géométrie dus aux collisions, se font principalement par fractures. De plus, les déformations du floe sont principalement des petites déformations, localisées autour de la collision. Nous considérons donc les floes comme des objets rigides en première approximation. Néanmoins le modèle choisi reste évolutif et permettra d'intégrer le caractère déformable et cassant des floes. Ce caractère déformable n'est pas présent dans le modèle actuel et fait partie d'un futur travail.

Dans cette thèse, la forme des floes sera représentée, au cours du temps t , par une région $\Omega(t)$, du plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. La région est considérée fermée, bornée, sans trous, de taille et de géométrie quelconque, en particulier, non forcément convexe. Il est à préciser que, concernant la forme et la taille, tout un travail a été effectué pour construire des floes réalistes (*voir Chapitre 1.3*). Nous notons $G(t)$, le centre de masse du floe, $\mathcal{R}_{\Omega(t)} = (G(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$, le repère propre au floe et $\theta(t)$ l'angle de rotation du floe (*voir Figure 1.2*). Nous notons h , l'épaisseur du floe qui peut varier sur la région Ω . À partir de la masse volumique ρ , de la glace de mer (*voir Table 1.1*), de l'aire de la surface du floe et de son épaisseur h , nous calculons la masse M , du floe. Afin d'étudier le passage des floes à travers un chenal ou un détroit, ou l'accumulation des floes dans un port, contre une structure offshore ou encore contre une île, nous avons besoin de modéliser ces différents éléments que nous appellerons des obstacles. Ces obstacles seront représentés comme des floes, caractérisés par une région du plan, un centre de masse, un repère propre, etc, à la différence qu'ils seront dotés d'une masse volumique très largement supérieure aux floes, tendant vers l'infini.

Les interactions entre les floes sont multiples. Nous les considérons comme des collisions localisées en des points du bord du floe. Les floes étant considérés comme rigides, nous considérons uniquement des collisions entre des floes différents. Les collisions sont traitées avant qu'elles entraînent une interpénétration. La dissipation d'énergie cinétique lors de ces collisions est prise en compte par un coefficient de restitution $\varepsilon \in [0, 1]$, qui déterminera le caractère élastique ou inélastique de la collision et un coefficient de friction μ . Nous parlerons de chocs parfaitement élastiques pour $\varepsilon = 1$ et de chocs inélastiques pour $\varepsilon < 1$. Ce paramètre est établi de manière

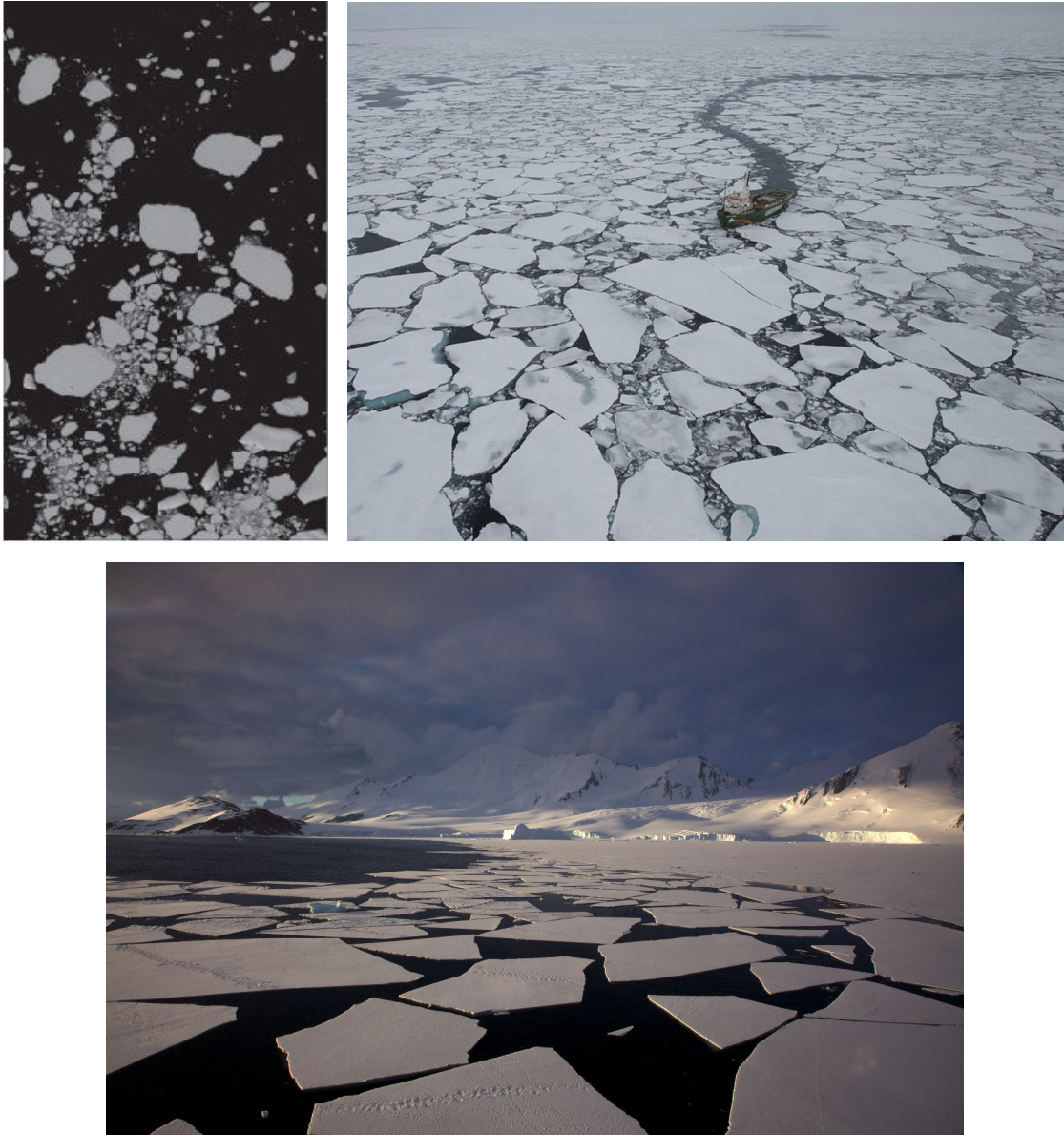


FIGURE 1.1 – Photos de la zone marginale. Sources [Unk, Unk12, Auc08].

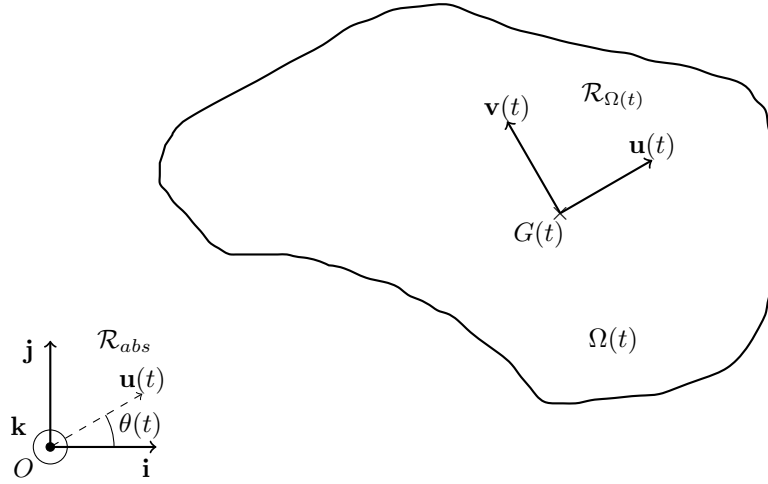


FIGURE 1.2 – La particule floe.

empirique. Sa valeur sera optimisée à la suite d'expériences en bassin (*voir Partie 3.14*). Cependant la perte d'énergie due à d'autres phénomènes en jeu lors des collisions, comme les effets thermiques, les effets de vibration ou encore les effets de propagation d'ondes de chocs, n'est pas prise en compte dans le modèle présenté ici. Un objectif futur sera de déterminer le coefficient de restitution en fonction de l'endommagement subi par le floe et des éventuelles fractures se propageant dans le floe à partir d'une situation de collision.

Une fois le floe et l'obstacle caractérisés, nous étudierons son mouvement dans l'espace euclidien défini par le repère $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. En effet, au vue de l'échelle d'espace considérée, la rotondité de la Terre ne sera pas prise en compte. Nous détaillerons le déplacement libre, sans interaction (*voir Partie 1.1.1*), puis nous nous intéresserons aux interactions entre des floes ou entre des floes et des obstacles (*voir Partie 1.1.2*).

1.1.1 La dynamique régulière : le formalisme de Newton-Euler

Entre deux collisions successives, la dynamique régulière est intégrée avec un algorithme adéquat. L'approche discrète consiste à étudier le mouvement de chaque floe, et pour chacun, leurs données cinématiques satisfont les équations du moment linéaire et du moment angulaire. Durant cette intégration, les collisions sont détectées et localisées. Nous choisissons d'écrire les équations du moment sous le formalisme de Newton-Euler qui privilégie l'expression des accélérations en fonction des forces extérieures.

Les variables globales

Nous commencerons par définir les données cinématiques liées aux floes. Nous définirons les coordonnées du centre de masse, la vitesse du floe, le moment d'inertie du floe à partir de la vitesse d'un point du floe et nous donnerons les équations du mouvement sous le formalisme de Newton-Euler. Nous exprimerons ensuite l'énergie cinétique du floe en fonction de la vitesse du centre de masse et de la vitesse angulaire. Enfin nous exprimerons ces données pour un système S , constitué de $n > r$ floes dont $r \geq 0$ obstacles avec une notation adaptée pour réduire les écritures.

Nous travaillons dans un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, de \mathbb{R}^3 muni de la distance $d(\cdot, \cdot)$, de la norme $\|\cdot\|$, induites par le produit scalaire (\cdot, \cdot) , usuel. Nous étudions l'évolution des floes sur un intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}^+$. Soit $t \in I$, nous considérons le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ dans lequel évoluera un ensemble de n floes rigides $\{\Omega_1(t), \dots, \Omega_n(t)\} \subset \mathcal{P}$, avec, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'épaisseur h_i , la masse M_i , le centre de masse $G_i(t) \in \mathcal{P}$, la vitesse du centre de masse $\dot{G}_i(t)$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_i(t)$. Pour simplifier les notations, nous étudierons le mouvement des floes dans le plan \mathcal{P} . Ainsi, pour P , un point de \mathcal{P} , nous associons a_p et b_p deux réels tels que : $\mathbf{OP} = a_p \mathbf{i} + b_p \mathbf{j} = (a_p, b_p)^T$. Nous définirons le produit vectoriel entre deux vecteurs $\mathbf{u} = (a, b)$ et $\mathbf{v} = (c, d)$ de l'espace vectoriel associé à \mathcal{P} par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, ad - bc)^T. \end{aligned}$$

L'angle θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, sont des éléments de l'ensemble engendré par \mathbf{k} , nous noterons :

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t) \mathbf{k} = (0, 0, \dot{\theta}(t))^T.$$

Je rappelle que nous considérons le floe comme rigide et nous négligeons les effets thermodynamiques, ainsi l'épaisseur h , et la masse M , ne varient pas au cours du temps. De même pour la surface du floe Ω , dans son repère propre, c'est-à-dire \mathbf{GP} ne varient pas au cours du temps. Cependant, h peut varier sur la surface, ainsi nous notons $h(P)$, l'épaisseur associée à l'élément de surface infinitésimale ds autour de P .

Nous exprimons la vitesse \dot{P} , d'un point P , d'un floe, dans le repère \mathcal{R}_{abs} à l'aide de la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}(t) + \mathbf{PG} \wedge \dot{\theta}(t).$$

Nous calculons la masse du floe à partir de la masse volumique ρ , de l'épaisseur h , et de l'élément de surface infinitésimale ds :

$$M = \rho \int_{\Omega(t)} h(P) ds.$$

À partir des éléments ci-dessus, nous définissons le moment cinétique et le moment dynamique en G par les définitions suivantes.

Définition 1.1.1.1 (Moment cinétique en G).

$$L_G(t) = \rho \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{P}(t) dv$$

Définition 1.1.1.2 (Moment dynamique en G).

$$\mathfrak{M}_i(t) = \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} \wedge F_P(t) dv, \tag{1.1.1}$$

avec $F_P(t)$ les forces extérieures appliquées en P et $dv = h(P) ds$ l'élément de volume infinitésimal. $F_P(t)$ vérifient :

$$\rho \ddot{P}(t) = F_P(t).$$

En remplaçant \dot{P} dans $L_G(t)$ par son expression en fonction de la vitesse du centre de masse et la vitesse angulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
L_G(t) &= \rho \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} \wedge \left(\dot{G}(t) + \mathbf{PG} \wedge \dot{\theta}(t) \right) dv \\
\Leftrightarrow L_G(t) &= \rho \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} \wedge \left(\mathbf{PG}(t) \wedge \dot{\theta}(t) \right) dv && \text{car } \underbrace{\left(\rho \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} dv \right)}_0 \wedge \dot{G}(t) = 0 \\
\Leftrightarrow L_G(t) &= \rho \int_{\Omega(t)} \dot{\theta}(t) \left(\underbrace{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{GP}) \mathbf{GP}}_0 + \|\mathbf{GP}\|^2 \mathbf{k} \right) dv \\
\Leftrightarrow L_G(t) &= \underbrace{\dot{\theta}(t) \rho \int_{\Omega(t)} \|\mathbf{GP}\|^2 dv}_{\mathcal{I}}.
\end{aligned}$$

Nous appelons l'intégrale \mathcal{I} , le moment d'inertie du floe. Comme le floe est rigide, nous remarquons que \mathcal{I} est constant au cours du temps. Ainsi en dérivant par rapport au temps, nous obtenons une nouvelle expression du moment dynamique :

$$\begin{aligned}
\frac{dL_G(t)}{dt} &= \mathcal{I} \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} \\
\Leftrightarrow \mathcal{I} \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} &= \int_{\Omega(t)} \mathbf{GP} \wedge F_P(t) dv.
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant les outils suffisants pour déterminer les équations de la dynamique des floes sous le formalisme de Newton-Euler. Chaque floe Ω_i , vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{G}_i(t)}{dt} = F_i(t) & \text{moment linéaire} \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i(t) & \text{moment angulaire} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

En utilisant la formule de Varignon, nous pouvons écrire l'énergie cinétique E_i , associée au floe Ω_i comme la somme de l'énergie cinétique due au mouvement de translation et l'énergie cinétique due au mouvement de rotation :

Proposition 1.1.1. *Énergie cinétique*

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{G}_i^2(t) + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i^2(t) \quad (1.1.3)$$

L'écriture sous cette forme est souvent associée au théorème de König sur le moment cinétique.

Démonstration. Soit P un point de masse ρdv , d'un floe Ω_i :

$$\begin{aligned}
E_i(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_i(t)} \rho \dot{\mathbf{P}}^2(t) dv \\
&= \int_{\Omega_i(t)} \rho \left(\dot{G}_i(t) + \mathbf{P} \mathbf{G}_i \wedge \dot{\theta}(t) \right)^2 dv && \text{formule Varignon} \\
&= \frac{1}{2} \left(M_i \dot{G}_i^2(t) + \dot{\theta}^2(t) \rho \int_{\Omega_i(t)} \|\mathbf{P} \mathbf{G}_i \wedge \mathbf{k}\|^2 dv \right) && \text{car } \int_{\Omega_i} \rho \mathbf{P} \mathbf{G}_i dv = \mathbf{0} \\
&= \frac{1}{2} M_i \dot{G}_i^2(t) + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}^2(t) && \text{car } \|\mathbf{P} \mathbf{G}_i \wedge \mathbf{k}\| = \|\mathbf{P} \mathbf{G}_i\|
\end{aligned}$$

□

Dans le cas d'un obstacle, nous faisons tendre la masse volumique vers l'infini. Regardons comment sont modifiées les équations de la dynamique. Pour $\rho > 0$, l'obstacle Ω_i vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{V}ol_i \frac{d\dot{G}_i(t)}{dt} = \frac{F_i(t)}{\rho} \\ \mathfrak{J}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \frac{\mathfrak{M}_i(t)}{\rho} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

avec :

$$\mathcal{V}ol_i = \int_{\Omega_i(t)} h_i(P) ds$$

et

$$\mathfrak{J}_i = \int_{\Omega_i(t)} \|\mathbf{G}_i \mathbf{P}\|^2 dv.$$

Or, $F_i(t)$ et $\mathfrak{M}_i(t)$ sont des quantités finies et ne dépendent pas de la masse volumique ρ . Alors,

$$\begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{V}ol_i \frac{d\dot{G}_i(t)}{dt} = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Or, à l'instant initial $t = 0$, nous considérons les obstacles ayant des vitesses nulles. Donc, nous pouvons conclure que dans notre modèle, les obstacles sont des floes de masse infinie avec des vitesses et accélérations nulles pour tout $t \in I$.

Les équations du mouvement de S sont l'ensemble des équations du mouvement des floes. Nous rassemblons maintenant les équations pour chaque floe sous une forme matricielle. Pour cela, nous avons besoin des notations suivantes pour les masses, vitesses et forces associées au floe Ω_i :

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{G}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} F_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système d'équations du mouvement pour S devient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) \quad (1.1.5)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad W(t) = (W_i(t))_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

Maintenant que nous avons écrit la dynamique entre les collisions pour le système S , de manière succincte, nous allons étudier les interactions entre les floes.

1.1.2 Les interactions entre les floes

La simulation d'objets interagissant entre eux soulève des problèmes de choix de modèles théoriques et numériques. Ces choix incluent l'essentiel du comportement des particules, du comportement des contacts, de la précision des contacts et donc de leur résolution.

Concernant les choix théoriques pour décrire les interactions entre les floes nous admettons les hypothèses suivantes :

1. Les déformations sont petites, c'est-à-dire localisées au voisinage du contact. Elles n'entraînent pas de changement de la forme globale du floe. Le floe est considéré comme rigide.
2. Les interactions sont des contacts localisés dans des zones petites par rapport à la taille des floes. Les contacts sont considérés comme ponctuels.
3. Un floe n'interagit pas avec lui-même. L'interaction est une relation symétrique et transitive.
4. Les interactions entre les floes n'entraînent pas d'interpénétrations.
5. Les interactions sont des collisions inélastiques avec friction. Lors d'un contact, la perte d'énergie cinétique due à des phénomènes physiques comme la déformation et des phénomènes thermiques comme la dissipation de chaleur, est modélisée par un coefficient de restitution et un coefficient de friction.

Ces hypothèses influenceront largement le choix des outils numériques (*voir Partie 2.1.4*).

L'état de l'art

De nombreux problèmes d'ingénierie impliquent des contacts avec ou sans friction entre des corps rigides ou déformables. Que se soient des problèmes d'usures (pneus, engrenages, etc) ou de dimensionnement de structures soumises à des contraintes (barrages, voies ferrées, piscines nucléaires, etc) ou plus récemment des problèmes liés à la robotique ou à la vision par ordinateur, connaître, comprendre et anticiper le comportement des corps en contact est primordial.

Depuis très longtemps les scientifiques ont tenté de décrire ce comportement. Nous pouvons citer dans l'ordre chronologique : Newton, Coulomb, Hertz, Delassus, Signorini, et plus récemment, Fichera, Cundall, Moreau, Klarbring, Lötstedt et encore bien d'autres que je ne citerai pas ici mais qui pourront être retrouvés dans les références tout au long du manuscrit. Le domaine de la mécanique des contacts s'est étoffé au fil des siècles de concepts, de notions, de principes, d'algorithmes, de théorèmes et de preuves qui ont permis aujourd'hui d'avoir un très grand nombre de possibilités pour traiter le problème du contact. Parmi tous ces concepts nous pouvons citer le principe d'action-réaction et la définition d'un coefficient de restitution comme le ratio entre la vitesse relative avant et après le choc que l'on doit à Newton [New86]. La friction de Coulomb [Cou85], écrite comme une fonction multivaluée dépendant de la norme de la composante normale de la force de contact. La loi de contact de Hertz [Her82], qui est efficace dans le cas de contacts centraux comme entre des sphères. Plus récemment, nous pouvons citer les travaux de

Delassus [Del17], parmi les premiers à théoriser les problèmes mécaniques en présence de liaisons unilatérales. Signorini et Fichera [Fic63], sont parmi les premiers à écrire la liaison unilatérale d'interpénétration comme une condition de complémentarité. Nous pouvons citer aussi le problème de Signorini [Sig59], demandant à la communauté scientifique si le problème d'équilibre d'une sphère en contact sur une surface plane est un problème bien posé, c'est-à-dire s'il existe une solution unique à ce problème. Fichera [Fic63], donna une réponse en prouvant l'existence et l'unicité. Le problème de Signorini est un problème à un contact sans friction. La prise en compte de la friction et d'un grand nombre de contacts augmente la complexité pour déterminer des preuves d'existence et d'unicité. Le plus célèbre problème de contact avec friction, et sûrement le plus discuté, est le paradoxe de Painlevé [Pai85], qui expose une configuration de contact avec un coefficient de friction élevé semblant ne pas avoir de solution (voir [Lot81, Bar94, GB99, Ste00]). Pour passer outre ces difficultés, les chercheurs ont développé différentes approches.

Je mettrai l'accent sur les deux principales : la dynamique non régulière et la régularisation des lois de contact. Ce sont deux approches fondamentalement différentes qui utilisent un cadre mathématique et des outils numériques différents. Je tenterai de donner les grandes lignes et de largement référencer mes propos afin que le lecteur puisse trouver les compléments nécessaires à la compréhension. Je ferai le choix de ne pas traiter les deux courants de manière égale mais je m'attarderai plus en détail sur la dynamique non régulière et les travaux de Moreau, Monteiro Marques et Stewart.

Les lois de contact écrites comme la condition unilatérale de Signorini et la friction de Coulomb ne sont pas régulières. Dans l'approche de régularisation, la première loi qui est une condition de non interpénétration, est remplacée par des lois de répulsion suffisamment abruptes. Parmi ces travaux nous pouvons citer en premier Hertz. Depuis, un grand nombre de lois ont été déclinées prenant plus ou moins en compte la déformation locale au contact (voir [GMS61, Joh87, Gol60, NW72, Whi77]). Nevins et Whitney [NW72, Whi77], ont développé des modèles masses-ressorts et des modèles d'amortissement où les forces de contact sont des forces de rappel ou des forces d'amortissement. Nous retrouvons l'idée d'associer la réponse d'un contact à la force de rappel d'un ressort dans les modèles développés pour la visualisation par ordinateur qui s'est accentuée depuis les années 80 (voir [CT71, MW88b]). Dans l'article de Moore [MW88b], la force de contact est linéairement reliée à la distance d'interpénétration. Depuis, ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90, VCMT95, BW98, RGF⁺04]).

Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non glissement a été traitée de différentes façons. Certains ont étendu la notion de coefficient de restitution sur la composante normale à des coefficients de restitution sur les composantes tangentielles (voir [Bra91, Smi91, CS96, Bra98]). D'autres ont étendu à la loi de Coulomb les modèles de masses-ressorts ou d'amortissement (voir [HK93, KFK97, VVSM00, SKKD01]).

L'approche non régulière a été développée à partir de concepts mathématiques tels que les inclusions différentielles, les fonctions multivaluées ou encore les fonctions à variations bornées. Nous notons $q \in \mathbb{R}^{3n}$, le point caractérisant la position du système S et $g : I = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$, la fonction décrivant le mouvement pour un temps $T > 0$.

$$g(t) = q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T = (G_i(t), \theta_i(t))_{i \in \{1, \dots, n\}}^T$$

Nous supposons que la vitesse des floes W , est une fonction à variations bornées, c'est-à-dire :

$$\text{var}(W, I) < +\infty$$

avec

$$\text{var}(W, I) = \sup_{r \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=1}^r d(W(t_i), W(t_{i-1}))$$

où $t_0 < t_1 < \dots < t_r$ points de I . Les fonctions à variations bornées peuvent être discontinues mais possèdent des limites à gauche $W(t^-) = \dot{q}(t^-)$, et à droite $W(t^+) = \dot{q}(t^+)$ en tout point t dans l'intérieur de I (voir [Mor88]). Nous définissons m contraintes unilatérales (f_1, \dots, f_m) , telles que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $f_j \in C^1(\mathbb{R}^{3n}, \mathbb{R})$ et :

$$f_j(q) \begin{cases} < 0 & \text{floes séparés} \\ = 0 & \text{floes en contact} \\ > 0 & \text{floes en interpénétration} \end{cases}$$

avec $\nabla f_j(q) \neq 0$ au voisinage de $f_j(q) = 0$ afin d'obtenir des résultats non réduits à des trivialisés. L'ensemble des positions admissibles, c'est-à-dire, sans interpénétrations, est représenté par la région fermée :

$$L = \{q \in \mathbb{R}^{3n} / \forall j \in \{1, \dots, m\}, f_j(q) \leq 0\}$$

En faisant le choix de non interpénétration, le contact est représenté comme un maximum local d'une des contraintes f_j . Ainsi en étudiant la dérivée par rapport à t de f_j en t^* tel que $f_j(q(t^*)) = 0$, nous pouvons écrire les inégalités suivantes :

$$\nabla f_j(q(t^*)) \cdot W(t^*) = 0, \quad \nabla f_j(q(t^-)) \cdot W(t^-) \geq 0 \quad \text{et} \quad \nabla f_j(q(t^+)) \cdot W(t^+) \leq 0 \quad (1.1.6)$$

avec le vecteur colonne :

$$\nabla f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_{i, \dots, n}$$

Nous notons $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, m\}$, l'ensemble tel que, pour tout $j \in \mathcal{J}$, $f_j(q) \geq 0$. Introduisons l'ensemble $V(q)$ défini par :

$$V(q) = \begin{cases} \left\{ w \in \mathbb{R}^{3n} / \forall j \in \mathcal{J}, \nabla f_j(q)^T w \leq 0 \right\} \\ \mathbb{R}^{3n} \quad \text{si } \mathcal{J} = \emptyset \end{cases} \quad (1.1.7)$$

$V(q)$ représente l'ensemble des vitesses admissibles à droite au point $q \in L$, appelé le cône tangent de L en q dans la littérature (voir [MM93, Mor99]). Ainsi les inégalités (1.1.6) sont réécrites :

$$W(t^+) \in V(q) \quad \text{et} \quad -W(t^-) \in V(q)$$

$V(q)$ est un ensemble convexe fermé pour tout $q \in L$. Introduisons ensuite $T_j(q)$, pour $f_j(q) = 0$:

$$T_j(q) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{3n} / \nabla f_j(q)^T w = 0 \right\}$$

$T_j(q)$ est appelé l'hyperplan tangent à $f_j(q) = 0$.

Ces notions ont d'abord été utilisées dans le cas des corps rigides en contact sans friction dans un processus de rafle appelé *sweeping process* (voir [Mor76, Mor77, Sch78, Mor83]). Ce processus consiste à décrire l'évolution d'une quantité, ici la réaction de contact, dans un ensemble convexe, ici le cône normal au contact (voir l'équation (1.1.9)). Ainsi, pour toute configuration q , telle que $\mathcal{J} \neq \emptyset$, nous faisons l'hypothèse que la réaction de contact \mathcal{R} , est une impulsion (voir

Partie 1.1.2), n'agissant pas uniquement sur les vitesses tangentielles au contact, c'est-à-dire appartenant à $T_j(q)$ pour tout $j \in \mathcal{J}$. Cela peut se traduire par :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathcal{J}, \forall w \in T_j(q), \nabla f_j(q) \cdot w = 0 &\Rightarrow \mathcal{R} \cdot w = 0 \\ \Leftrightarrow \exists (\lambda_j)_{j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{+|\mathcal{J}|} / \mathcal{R} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j \nabla f_j(q) &\end{aligned} \quad (1.1.8)$$

En introduisant l'ensemble $N(q)$ défini par :

$$N(q) = \{s \in \mathbb{R}^{3n} / \forall w \in V(q), w^T s \leq 0\}$$

L'équation (1.1.8) est équivalente à :

$$\mathcal{R} \in N(q)$$

$N(q)$ est appelé le cône convexe normal à L en q (voir Figure 1.3). Le choix $f(q) \leq 0$ permet de diriger $N(q)$, vers l'extérieur de L (voir [Mor85b, MP88]).

A partir des notions d'inclusions différentielles, Moreau [Mor79, Mor87, Mor88] a ramené le problème du contact dynamique à la recherche des vitesses $W(t) \in V(q(t))$ solutions de l'inclusion différentielle :

$$MdW(t) - \mathcal{H}(t)dt = \mathcal{R}(t) \in N(q(t)) \quad \text{pour tout } t \in I \quad (1.1.9)$$

Nous remarquons que l'écriture du problème sous cette forme permet de trouver des vitesses solutions sans avoir besoin de déterminer les réactions de contact qui sont inconnues.

Le problème du contact frottant, en appliquant une friction provenant de la loi de Coulomb, a d'abord été étudié pour un seul contact, c'est-à-dire, une seule contrainte unilatérale f . La réaction \mathcal{R} , devient la somme d'une réaction normale $\mathcal{R}_N \in N(q)$, et d'une réaction tangentielle $\mathcal{R}_T \in T(q)$ (voir [MP88]). Pour une friction de Coulomb isotrope avec un coefficient de friction μ , nous définissons l'ensemble $C(q)$, appelé le cône de Coulomb, par :

$$C(q) = \{w \in \mathbb{R}^{3n} / \nabla f(q(t)) \cdot w \geq \|\nabla f(q(t))\| \|w\| \cos(\alpha)\}$$

avec $\mu = \tan(\alpha)$ et $\alpha \in]0, \pi/2[$. Pour $\mathcal{R}_T \neq 0$ et $\nabla f \neq 0$, nous avons la propriété suivante :

Proposition 1.1.2. *Friction de Coulomb*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_N + \mathcal{R}_T \in C(q) \\ \Leftrightarrow \|\mathcal{R}_T\| \leq \mu \|\mathcal{R}_N\| \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\mathcal{R} \in C(q) \\ \Leftrightarrow &\|\mathcal{R}_N\| \|\nabla f(q)\| \geq \|\mathcal{R}\| \|\nabla f(q)\| \cos(\alpha) \quad \text{car } \mathcal{R}_T \in T(q) \text{ et } \mathcal{R}_N = \lambda \nabla f \\ \Leftrightarrow &\|\mathcal{R}_N\| \|\mathcal{R}_T\| \geq \|\mathcal{R}\| \|\mathcal{R}_T\| \cos(\alpha) \quad \text{multiplication par } \frac{\|\mathcal{R}_T\|}{\|\nabla f(q)\|} \\ \Leftrightarrow &\|\mathcal{R}_N\| \frac{\|\mathcal{R}_T\|}{\|\mathcal{R}\| \cos(\alpha)} \geq \|\mathcal{R}_T\| \\ \Leftrightarrow &\|\mathcal{R}_T\| \leq \mu \|\mathcal{R}_N\| \quad \text{car } \tan(\alpha) = \frac{\|\mathcal{R}_T\|}{\|\mathcal{R}\| \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

□

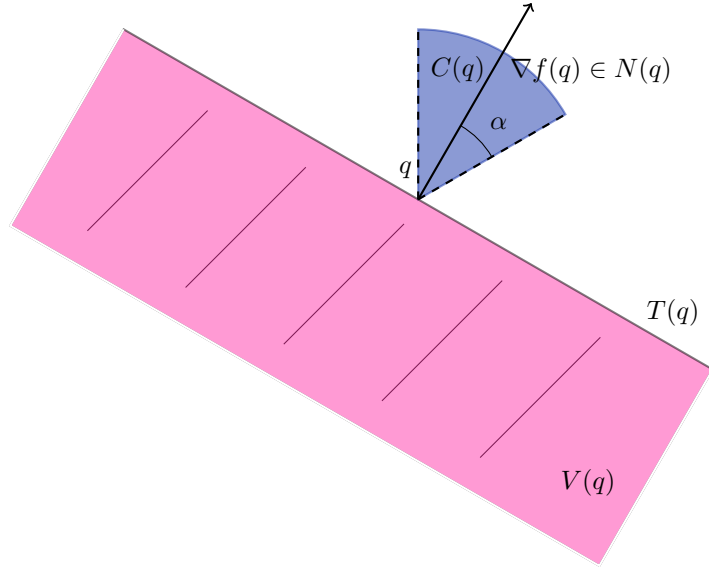


FIGURE 1.3 – Représentation de $\nabla f(q)$, $V(q)$, $T(q)$, $N(q)$ et $C(q)$ pour $q \in \mathbb{R}^2$ et une condition unilatérale f , tel que $f(q) = 0$.

Sous certaines hypothèses, comme l'intérieur de $V(q)$ est non vide, pour tout $q \in L$, les auteurs Moreau [Mor85b], Aubin [AC84] et Monteiro Marques [MM85], ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions de (1.1.9) sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor85a, MM88, Pan85, JP85, MM94]). Plus tard, Monteiro Marques [MM93], Benabdellah [Ben00], ou encore Stewart [Ste01] ont étendu ces résultats à des hypothèses sur L et sur W moins restrictives.

Ces premiers résultats d'existence de solutions pour les problèmes de contact avec ou sans friction ont utilisé les inclusions différentielles malgré la difficulté à manipuler ces notions mathématiques. Néanmoins, le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il faudra attendre les travaux sur les **Problèmes Linéaires de Complémentarité (LCP)** qui se révèlent bien adaptés à la dynamique non régulière, pour obtenir des résultats plus pointus.

Au début des années 80, le problème du contact a pris un nouvel essor avec les travaux sur les **LCP**. Bien que ce type de problème avait été étudié depuis les années 60 [KT51, LH64, CD70], il a fallu attendre Lötstedt, un des pionniers à intégrer des **LCP** pour établir des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Lot81, Lot82b, Lot82a]). Cette voie a été suivie par Klarbring et Pang, entre autres, qui ont apporté des méthodes de programmation efficaces pour trouver des solutions dans le cas de corps déformables (voir [Kla86, Kla92]). De plus, la notion de **LCP** présente l'avantage de faciliter la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). Nous discuterons plus spécifiquement de ces algorithmes dans la Partie 2.1.4. Parmi ces méthodes de programmation, les preuves d'existence et d'unicité ont d'abord été formulées pour des contacts sans frottement car le problème peut se ramener à un problème quadratique avec des conditions de **Karush, Kuhn et Tucker (KKT)** (voir [Bar94, Lot82a]). Dans l'article [Bar93], Baraff écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. Il définit une matrice A contenant la géométrie des contacts. La matrice A est connue, symétrique et définie positive (voir partie 1.1.2). Il définit un vecteur a^- contenant les accélérations relatives aux points de contact dues aux forces extérieures connues. Le vecteur des

accélération a^+ , après ajout des réactions de contact s'écrit : $a^+ = A\mathcal{R}_N + a^-$. La condition de Signorini ou d'interpénétration peut s'écrire comme une condition de complémentarité :

$$a^+ = A\mathcal{R}_N + a^- \geq 0, \quad \mathcal{R}_N \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_N \cdot a^+ = 0, \quad (1.1.10)$$

s'interprétant comme le fait que l'accélération relative doit être positive ou nulle pour éviter une interpénétration et la réaction normale doit être positive car nous faisons l'hypothèse de non adhésion. S'il y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.

Le problème qui consiste à trouver \mathcal{R}_N , vérifiant (1.1.10) est équivalent au problème quadratique suivant :

$$\min_x (x^T Ax - b^T x) \quad \text{sous les conditions} \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Qui est équivalent au problème suivant (voir [Mur88]) :

$$\min_{x \geq 0} (x^T Ax - b^T x) \quad \text{sous les conditions} \quad \mathbf{KKT} \quad \begin{cases} Ax - b \geq 0 \\ x^T (Ax - b) \geq 0 \end{cases}$$

Dans [Bar93], Baraff conserve cette approche en force et accélération et étudie le problème de la friction de Coulomb. Il exhibe des configurations où aucune solution \mathcal{R}_N ne peut être trouvée, appelées situations inconsistantes, et des configurations où l'accélération déterminée par la résolution des **LCP** n'est pas unique, appelées situations indéterminées. En effet, le caractère symétrique, défini positif de A n'est plus nécessairement vérifié, ainsi l'existence et l'unicité des solutions de (1.1.10) ne sont plus assurées. Nous pouvons retrouver des exemples de configurations à seulement un point de contact qui montrent des situations d'indétermination et d'inconsistance quand le problème est formulé en accélération (voir [MW88a]).

Finalement, il a été montré qu'il existe des frictions non nulles pour lesquelles l'existence et l'unicité sont assurées (voir [Lot81, Bar94, TPSL97]). L'idée principale des preuves dans ces articles, est d'assurer que la matrice A est une P -matrice. Cela est possible avec un coefficient de friction *assez petit*. Ce type de matrice est très usité lors de l'étude des **LCP**. Une matrice est dite P -matrice si tous ses mineurs principaux sont positifs, c'est-à-dire si les déterminants de toutes les sous-matrices carrées de mêmes indices sur les lignes et les colonnes sont positifs. L'ensemble des matrices définies positives est inclus dans l'ensemble des P -matrices (voir [CPS92]). Nous verrons que certaines classes de matrices jouent un rôle important dans la résolution des **LCP**. Pour notre modèle nous utiliserons la classe des matrices co-positives, dont l'appartenance à cette classe est plus facile à vérifier que pour les P -matrices (voir partie 1.1.2).

En utilisant des formulations en vitesse et impulsion (voir partie 1.1.2), les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction (voir [ST95, ST96, AP97, APS99]). Ces résultats se sont même étendus aux solides déformables (voir [SP99]). Dans [Ste00], Stewart propose une extension au résultat fondamental de Marques [MM93] pour des contacts inélastiques avec friction. Dans [Ste98], Stewart donne la preuve d'existence de solutions d'un problème de Painlevé à un point de contact avec friction 1D à partir du formalisme de Moreau et des méthodes de **LCP**. Pour l'instant la plupart des résultats d'existence et d'unicité ont été montrés pour des frictions de Coulomb isotrope. Néanmoins, nous pouvons trouver des études concernant des frictions statiques et dynamiques avec des coefficients différents (voir [Bar93, Ste00]). Ces modèles soulèvent des difficultés théoriques, par exemple la non unicité des vitesses pour certaines configurations dans [Ste00], (voir [Rui85]).

Il y a un dernier aspect primordial dans l'étude de la dynamique des corps en contact qui est la consistance énergétique, c'est-à-dire qu'un modèle, décrivant le comportement des corps en contact, ne doit pas entraîner une augmentation de l'énergie totale du système. Nous dirons que le choc est inélastique ou, au pire, parfaitement élastique, c'est-à-dire, l'énergie totale du système est conservée. La plupart des lois de contact que nous pouvons trouver dans la littérature décrivent l'inélasticité du contact par un coefficient ε , compris entre 0 et 1. Ce coefficient est appelé, coefficient de restitution. Pour la plupart de ces lois, nous pouvons exhiber une configuration entraînant une augmentation d'énergie (*voir Partie 1.1.2*). Dans [Ste00], Stewart donne une formulation qui permet de traiter l'unique contact inélastique avec existence de solutions qui dissipent l'énergie du système. Mais l'extension aux multiples contacts ne conserve pas cette propriété. Malgré ce qui est annoncé dans [GP95], nous pouvons trouver dans [AP97] un contre exemple. Finalement, je n'ai pas trouvé dans la littérature un modèle, contenant une loi de contact décrivant la dynamique des corps rigides ou déformables en contact avec friction et qui dissipe l'énergie totale du système pour toutes les configurations de contact. Ainsi, quel que soit le modèle choisi, dans une telle configuration où une ou plusieurs lois de contact ne sont pas vérifiées, nous le compléterons en introduisant une solution satisfaisant le plus de caractéristiques du contact inélastique avec friction possibles, en privilégiant la non augmentation d'énergie cinétique après contact. Afin de compléter la documentation sur la dynamique des corps en contact, j'invite le lecteur à parcourir les articles et les livres suivants [Kal77, Mas81, Ste00, GS02, PG96, Bro96, Bro00, LZB08, Glo01].

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes concentrés sur la littérature mathématique et mécanique. Nous observons que les travaux cités ci-dessus peuvent s'appliquer à un grand nombre de situations. Regardons de plus près comment les glaciologues ont traité le problème du contact pour la dérive des glaces de mer. Les premières tentatives pour prendre en compte la collision entre les floes se retrouvent dans les modèles de milieux continus. Parmi celles-ci nous pouvons citer les travaux de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [HI79] et ceux de Bratchie [Bra84]. Dans ces articles, la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. A partir des développements de la théorie des flux de particules, un nouveau cadre de travail a été fourni pour ces contraintes internes générées par les collisions (*voir [SA82, LSJC84]*). Par exemple, dans [SHL86, Hop85], les collisions ne sont pas détectées précisément et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. La loi de collision est construite comme le contact unique entre deux sphères ou disques de tailles comparables en utilisant des coefficients de restitution de type coefficient de Newton sur les composantes normales et tangentielles. Les deux modèles, celui basé sur la rhéologie plastique de Hibler [HI79] et celui basé sur une rhéologie de collision [SHL86], sont comparés. Il s'avère que les forces internes issues d'un modèle de collision sont plus petites que celles issues du modèle plastique, et cela, en accord avec les observations (*voir [SHL87, LLT89]*). Jusque dans le milieu des années 90, les travaux pour intégrer les interactions entre les floes se faisaient dans les modèles continus. Les premières tentatives sur des modèles discrets ont été proposées par Hopkins [Hop96], et l'intérêt a été récemment renouvelé par Herman et Wilchinsky [Her11, WFH10]. Elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Hopkins développe un modèle basé sur une loi de contact de Hertz ou sur un système masses-ressorts (*voir [Hop96, HFT04]*). Herman [Her11, Her12], utilise un modèle de sphères dures développé dans [AW59] et utilisé pour modéliser les interactions entre les molécules d'un liquide (*voir [AT89]*). La loi de contact découle du contact unique entre deux sphères en utilisant un coefficient de restitution de type Newton sur la composante normale. Dans [WDA10, MLJK13], les forces de contact sont des forces de rappel du ressort pour décrire l'interaction entre la glace et un navire. À ma connaissance, encore personne n'a essayé d'écrire un modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Devant ce challenge et après analyse des compromis à faire entre la robustesse, le fait que le modèle doit être capable de trouver une solution pour toutes les configurations de contact entre les floes, l'efficacité de mise en place, le fait que les solutions doivent être déterminées avec un coût de ressources informatiques raisonnable, l'adéquation avec la réalité, et le fait que le modèle doit pouvoir reproduire le plus fidèlement possible le comportement de la glace de mer, nous avons choisi de construire un modèle issu des travaux sur la dynamique non régulière sous la forme de problèmes linéaires de complémentarité pour décrire le comportement des interactions entre les floes. Je n'ai pas encore parlé de l'efficacité du modèle, ces questions se poseront dans la partie (2.1.4).

Les variables locales

Nous avons fait le choix d'interactions localisées en des points appelés points de contact. C'est-à-dire que nous appliquons les forces de contact en ces points. Les variables cinématiques comme la vitesse et l'accélération d'un point de contact sont appelées les variables locales. Les variables locales, comme les variables globales, décrivent le comportement physique du système. Cependant, pour les variables locales, la description se fait au niveau des points de contact par l'expression des vitesses relatives et des forces d'interactions dans un repère local appelé repère de contact.

Supposons qu'il existe $\delta t^* \subset I = [0, T]$ non vide tel que, pour tout $t \in \delta t^*$, il existe $m > 0$ contraintes $f(q(t)) = (f_1(q(t)), \dots, f_m(q(t))) = 0$. Nous associons à chaque contrainte, un point de contact $\{P_1, \dots, P_m\} \subset \mathbb{R}^{2m}$. Nous faisons l'hypothèse que la collision est un événement court, c'est-à-dire, la longueur de l'intervalle δt^* est très inférieure à la longueur de l'intervalle I . De plus, nous supposons que pour tout $t \in \delta t^*$, la position du système S , ne varie pas. Cela implique, que la position des points de contact ne varie pas non plus. Soit P_j un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l . Nous notons $F_{kj}(t)$ la force de contact du floe Ω_l au floe Ω_k appliquée en P_j . La force de contact, quant à elle, peut éventuellement varier au cours de la collision. Nous avons, $F_{kj}(t) \neq 0$ si $t \in \delta t^*$ et $F_{kj}(t) = 0$ si $t \in I \setminus \delta t^*$. Par convention nous définissons une matrice de contact M_c telle que :

Définition 1.1.2.1 (Matrice de contact). *Nous notons M_c la matrice de dimension $n \times m$ telle que le coefficient c_{kj} de la ligne k et de la colonne j vaut :*

- * 0 si le point de contact P_j n'est pas un point de contact du floe Ω_k ,
- * -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$,
- * 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

Nous utilisons ces coefficients pour porter l'information du sens de la direction de la force. Ainsi $F_{kj}(t) = F_{lj}(t)$ et le principe d'action-réaction en chaque point de contact, s'écrit : $c_{lj}F_{lj}(t) = -c_{kj}F_{kj}(t)$.

Nous supposons qu'un point de contact est en contact avec exactement deux floes. Cela se traduit par la propriété suivante sur M_c :

Proposition 1.1.3. *La somme des coefficients de chaque colonne de M_c est nulle.*

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \sum_{i=1}^n c_{ij} = 0$$

avec

$$\psi_{kj} = \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_{kj} = \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix}.$$

Le raisonnement effectué sur le floe Ω_k peut être reconduit pour tous les floes du système S . En regroupant sous forme matricielle les équations de la forme (1.1.13) nous obtenons le système suivant :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + B \mathbf{f}^t(t) + J \mathbf{f}^n(t), \quad (1.1.14)$$

avec

$$\mathbf{f}^t(t) = (f_j^t(t))_{1 \leq j \leq m}, \quad \mathbf{f}^n(t) = (f_j^n(t))_{1 \leq j \leq m}$$

et

$$B = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathbb{R}^{3n \times m} \quad / \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \phi_{kj} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}$$

$$J = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathbb{R}^{3n \times m} \quad / \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \psi_{kj} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}$$

Pour l'instant, je n'ai pas différencié les contacts impliquant des floes non obstacles des contacts impliquant des floes obstacles. Étudions comment est modifiée l'équation (1.1.14) en tenant compte des floes obstacles. Pour cela, nous procédons comme précédemment, en prenant la limite de ρ à l'infini. En partant de l'équation (1.1.13) pour un floe obstacle $\Omega_k(t)$, nous obtenons :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \text{Vol}_k \frac{d\dot{G}_k(t)}{dt} \\ \mathfrak{I}_k \frac{d\dot{\theta}_k(t)}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{H}_k(t)}{\rho} + \frac{\sum_{j \in E_k} (\phi_{kj} f_j^t(t)) + \sum_{j \in E_k} (\psi_{kj} f_j^n(t))}{\rho}. \quad (1.1.15)$$

Nous retrouvons le même résultat que précédemment, c'est-à-dire, que les accélérations du floe sont nulles. Ce qui est important ici, c'est de privilégier l'écriture :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\psi_{kj}}{\rho},$$

à l'écriture :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{f_j^n}{\rho},$$

car nous faisons porter sur la force de contact qui est commune à deux floes, l'information de la masse infinie qui est intrinsèque à un floe. En procédant de la même manière pour f_j^t et ϕ_{kj} , nous laissons la possibilité à une force de contact entre deux floes, dont au moins un est un obstacle, d'être non nulle. Ainsi nous pouvons établir la propriété suivante :

Proposition 1.1.4. *Soit S un système contenant $n-r > 0$ floes non obstacles et $r \geq 0$ obstacles. Au temps $t > 0$, le système S contient $m > 0$ points de contact dont $p \geq 0$ points de contact entre floes dont au moins un est un obstacle. Alors le système de $3n$ équations (1.1.14) se ramène à un système S' de $3 \times (n-r)$ équations contenant uniquement les équations pour les floes non obstacles.*

Démonstration. Pour démontrer cela, nous commençons par ordonner les floes du système S en deux groupes distincts. Les $n - r > 0$ premiers floes sont dans le groupe \mathcal{NO} des non obstacles et les $r \geq 0$ derniers sont dans le groupe \mathcal{O} des obstacles. Nous adoptons des notations différentes pour les deux groupes. Pour $i \in \{1, \dots, n - r\}$, c'est-à-dire, pour des floes non obstacles, nous notons :

$$\mathcal{NO}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{HNO}_i(t) = \begin{pmatrix} F_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour $j \in \{n - r + 1, \dots, n\}$, c'est-à-dire, pour des floes obstacles, nous notons :

$$\mathcal{O}_j = \begin{pmatrix} \mathcal{V}ol_j & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}ol_j & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{HO}_j(t) = \begin{pmatrix} \frac{F_j(t)}{\rho} \\ \frac{\mathfrak{M}_j(t)}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Nous réorganisons et adaptons aussi les données géométriques des contacts dans les matrices B et J par rapport à ces deux groupes en notant :

$$B = \begin{pmatrix} d_{ik} \\ \frac{d_{jk}}{\rho} \\ \rho \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ n-r+1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} s_{ik} \\ \frac{s_{jk}}{\rho} \\ \rho \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ n-r+1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}.$$

Ainsi nous pouvons réécrire l'équation (1.1.14) avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{NO}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_j \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ n-r+1 \leq j \leq n}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{HNO}_i(t) \\ \mathcal{HO}_j(t) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ n-r+1 \leq j \leq n}}.$$

En passant à la limite $\rho \rightarrow \infty$, pour les floes obstacles, nous obtenons une nouvelle équation :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}_\infty(t) + B_\infty \beta + J_\infty \lambda, \quad (1.1.16)$$

avec

$$\mathcal{H}_\infty(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{HNO}_i(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n-r}, \quad B_\infty = \begin{pmatrix} d_{ik} \\ 0 \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ 1 \leq k \leq m}} \quad \text{et} \quad J_\infty = \begin{pmatrix} s_{ik} \\ 0 \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ 1 \leq k \leq m}},$$

réduisant le système à $3 \times (n - r)$ équations à $3 \times (n - r) + 2 \times m$ inconnues prenant bien en compte les impulsions de contact de l'obstacle appliquées sur le floe non obstacle contenues dans les d_{ik} et les s_{ik} pour $i \in \{1, \dots, n - r\}$ et $k \in \{1, \dots, m\}$. \square

Dans la suite, nous conservons ce regroupement en $n - r$ floes non obstacles et r floes obstacles, et, quand nous écrirons la dynamique de ce système à n floes, nous écrirons les $n - r$ premières équations correspondantes aux $n - r$ floes non obstacles seulement. Cette propriété se révélera très importante lors de l'écriture du problème du contact sous la forme d'un problème linéaire de complémentarité. En effet à ce moment, nous aurons besoin que la matrice \mathcal{M} , soit définie positive pour assurer l'existence de solutions. Et il se trouve que \mathcal{M} de taille $3(n - r) \times 3(n - r)$, ne contenant que les masses des floes non obstacles est bien définie positive.

Concentrons nous, maintenant, au rapprochement que nous pouvons faire entre les contraintes f_j , $j \in \mathcal{J}$, sur les variables globales q , et les contraintes au niveau local, dans les repères de contact. D'abord, notons $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ l'application qui à toute configuration q , associe

l'ensemble des vitesses W , dans le repère absolu, à l'ensemble des vitesses relatives aux points de contact W_{rel} , dans les repères de contact associés. Les matrices B et J représentent les applications linéaires reliant les variables locales aux variables globales. Ainsi nous pouvons établir la propriété suivante :

Proposition 1.1.5. *L'application \mathcal{G} est représentée par la matrice $(B, J)^T$.*

Démonstration. Les points de contact jouent un rôle identique. Concentrons nous sur le point de contact P_j entre les floes Ω_k et Ω_l . Le produit matriciel $J^T W$ donne, à la ligne j , $\psi_{kj} \cdot W_k + \psi_{lj} \cdot W_l$. En développant nous obtenons :

$$\psi_{kj} \cdot W_k + \psi_{lj} \cdot W_l = c_{kj} \left[\mathbf{N}_j^T \dot{G}_k + (\mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j)^T \dot{\theta}_k \right] + c_{lj} \left[\mathbf{N}_j^T \dot{G}_l + (\mathbf{P}_j \mathbf{G}_l \wedge \mathbf{N}_j)^T \dot{\theta}_l \right],$$

$$\text{or, } (\mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j)^T \dot{\theta}_k = \mathbf{N}_j^T \begin{pmatrix} -b_{kj} \\ a_{kj} \end{pmatrix} \dot{\theta}_k,$$

$$\text{avec, } \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k = (a_{kj}, b_{kj})^T,$$

$$\text{d'où } \psi_{kj} \cdot W_k + \psi_{lj} \cdot W_l = \mathbf{N}_j^T \left[c_{kj} \dot{G}_k + c_{lj} \dot{G}_l + c_{kj} \begin{pmatrix} -b_{kj} \\ a_{kj} \end{pmatrix} \dot{\theta}_k + c_{lj} \begin{pmatrix} -b_{lj} \\ a_{lj} \end{pmatrix} \dot{\theta}_l \right],$$

$$\text{or, } \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \dot{\theta}_k = \begin{pmatrix} -b_{kj} \\ a_{kj} \end{pmatrix} \dot{\theta}_k,$$

$$\text{d'où } \psi_{kj} \cdot W_k + \psi_{lj} \cdot W_l = \mathbf{N}_j^T V_j^{lk}.$$

L'étude du produit matriciel $B^T W$ est similaire à celle de $J^T W$. Ils correspondent à l'expression des vitesses relatives dans les repères de contact. Ainsi nous avons : $(B, J)^T W = W_{rel}$. \square

Ensuite, comme dans les travaux de Moreau (*voir [MP88]*), nous considérons que pour une situation de contact $\mathcal{J} \neq \emptyset$, la condition d'admissibilité implique au niveau global : $\nabla f(q) \cdot W \leq 0$ pour tout $W \in \mathbb{R}^{3n}$, avec $\nabla f = (\nabla f_j)_{j \in \mathcal{J}}$. Cela peut aussi se traduire au niveau local par le fait que la composante normale de la vitesse relative soit positive, c'est-à-dire, pour tout $W \in \mathbb{R}^{3n}$, $J^T W \geq 0$. Ainsi nous pouvons rapprocher les deux éléments $\nabla f(q)$ et J avec $c \in \mathbb{R}^-$, tel que :

$$J = c \nabla f,$$

et déterminer les ensembles $T(q)$ et $N(q)$ à partir des matrices B et J .

La mise sous la forme vitesse impulsion

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact : sous la forme accélération force (*voir [Kla92, Bar93, TP95, WP96, TPSL97]*), et sous la forme vitesse impulsion (*voir [Mor85a, MP88, ST96, APS99]*). Nous avons déjà étudié deux exemples de ces formulations : celui décrit dans [Bar93], et celui décrit dans [Mor85a]. La principale différence entre ces deux formulations est la façon d'exprimer la loi de Coulomb. Cette loi impose une force de friction directement opposée à la vitesse de glissement mais rien n'est spécifié concernant l'accélération. En effet, lors d'une transition d'une phase de glissement vers une phase d'accroche, l'accélération relative tangentielle est dirigée dans le même sens que la force de friction et lors d'une transition d'une phase d'accroche vers une phase de glissement, l'accélération relative tangentielle est dirigée dans le sens opposé à la force de friction. Pour déterminer la friction en fonction de

l'accélération, il faut pouvoir connaître la nature du contact (glissant ou accrochant). Certains auteurs ont donc proposé d'exprimer Coulomb en accélération en étudiant le comportement du contact tout au long de la collision (voir [HWY, TPSL97, Bar94]).

L'approche en vitesse impulsion apporte donc l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Cet avantage conséquent, est déterminant dans le choix de cette formulation pour notre modèle.

Nous allons donc écrire les équations du moment linéaire et du moment angulaire en vitesse impulsion. Commençons par définir ce que nous appelons une impulsion. Une impulsion a la grandeur physique d'une quantité de mouvement.

Définition 1.1.2.3 (impulsion ponctuelle et impulsion totale). *Sur un intervalle de temps δt^* , s'il y a un contact au point P_j , entre les floes Ω_k et Ω_l , nous dirons que le floe Ω_k a subi un choc provenant du floe Ω_l au point de contact P_j caractérisé par l'impulsion :*

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} F_{kj}(t) dt.$$

Si E_k est l'ensemble des points de contact appartenant à Ω_k , l'impulsion totale sur ce floe est définie par :

$$\mathcal{I}_k = \sum_{j \in E_k} \int_{\delta t^*} c_{kj} F_{kj}(t) dt.$$

Nous faisons apparaître les impulsions dans les équations des moments (1.1.12) pour le floe Ω_k sur l'intervalle temporel δt^* , en intervertissant les symboles somme et intégral). Comme les floes sont rigides, alors $\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j$ est invariant au cours du temps. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}_k(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathcal{I}_{kj} \right).$$

L'hypothèse que les axes des repères de contact sont invariants au cours de la collision, nous permet de décomposer les impulsions dans les repères de contact de la même manière que pour les forces de contact. Ainsi, nous définissons $(\beta, \lambda) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que :

$$\mathcal{M} \int_{\delta t^*} \dot{W}(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + B\beta + J\lambda. \quad (1.1.17)$$

En utilisant l'hypothèse intégrable sur $\delta t^* = [t^-, t^+]$, de l'accélération \dot{W} , nous écrivons finalement, le problème du contact sous la forme vitesse impulsion ci-dessous :

$$\mathcal{M} (W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + B\beta + J\lambda. \quad (1.1.18)$$

Étudions maintenant plus particulièrement ces impulsions de contact. Elles s'expriment au niveau des repères de contact à travers des lois, que nous appelons lois de contact.

Les lois de contact

Lors d'un contact entre les floes, une force de contact apparaît. Son rôle est, à la fois, d'empêcher l'interpénétration et de dissiper une partie de l'énergie du système. Cette dissipation provient de nombreux phénomènes physiques complexes apparaissant lors du contact. Des lois

de contact, définies grossièrement comme des relations entre les variables locales, la distance entre deux floes, la vitesse relative ou l'accélération relative, et l'impulsion locale ou la force locale, ont été établies pour décrire ces phénomènes. La plupart des lois rencontrées dans la littérature expriment un lien entre ce qui se passe à la fin du contact, en t^+ , et ce qui se passe au début, en t^- . Ces lois peuvent être explicites ou implicites. C'est-à-dire qu'on les déclare explicites quand les réactions sont connues et calculées en fonction de données comme la distance entre les floes et implicites quand les forces ou les réactions sont inconnues. Exprimer le problème de la dynamique du contact avec des lois de contact implicites, peut revenir à trouver des vitesses ou accélérations, solutions du problème, sans avoir besoin de déterminer les forces ou les réactions de contact (*voir Problème 1.1.9*). Les premières lois de collision ont été construites à partir d'expériences. Nous pouvons citer entre autres, la loi de Hertz [Her82], la loi de Hooke [Hoo31] ou encore la loi de Coulomb [Cou85]. Ces lois sont des lois explicites. La loi de Hertz décrit la force normale de contact entre deux floes Ω_i et Ω_j , en fonction de la taille de la zone d'interpénétration, c'est-à-dire la distance d_{ij} négative entre les deux floes, par la relation $|d_{ij}|^{3/2}$. La force de contact est nulle si d_{ij} est positive. Cette loi est bien adaptée pour des systèmes constitués de sphères ou de disques. Herman, dans [Her13], utilise un modèle qui est basé sur la loi de contact de Hertz étendue au cas visco-élastique sur la composante normale (*voir [Pao55, HT06]*), et qui est combiné avec un modèle de friction reproduisant la loi de Coulomb dans le cas de glissement, décomposant la force tangentielle de contact en une force de cisaillement et une force d'amortissement (*voir [BSHP96, PH93]*).

La loi de Hooke décrit aussi le comportement d'un objet en petites déformations. Contrairement à la loi de Hertz, elle est linéaire et élastique. C'est une loi qui convient aux systèmes masses-ressorts. Dans [WDA10], les auteurs présentent un modèle de contact basé sur un système masses-ressorts où la force de contact est la force de rappel du ressort : Kd_{ij} avec K , la raideur constante du ressort. De la même manière que pour la loi de Hertz, si d_{ij} est positive, alors la force est nulle.

Comme nous l'avons vu précédemment, la loi de Coulomb relie directement la force de friction et la vitesse de glissement. Cette loi est non régulière. Elle a la particularité de comprendre deux coefficients différents : un coefficient de friction statique et un coefficient de friction dynamique. La plupart des modèles que j'ai étudiés jusqu'à présent utilisent une loi de Coulomb isotrope, c'est-à-dire, avec les coefficients statique et dynamique égaux. Néanmoins, nous avons pu citer quelques travaux pour prendre en compte cette différence. Dans le domaine des glaces de mer, la plupart des modèles que j'ai pu étudier, utilisent une version régularisée de la loi de Coulomb. Dans [Hop96, Her13], la force tangentielle de contact est une force de rappel de ressort tronquée quand cela atteint la limite de Coulomb : $\|\mathcal{R}_T\| \leq \mu\|\mathcal{R}_N\|$. Un modèle de rupture peut être intégré au modèle discret, la loi de Coulomb est écrite sous la forme d'un critère de cassure reliant les forces internes normales et tangentielles. Ce critère est connu sous le nom de critère de Mohr-Coulomb. La rupture apparaissant lorsque la composante tangentielle de la force atteint la limite de Coulomb (*voir [HFT04, WFH10]*). Une similitude entre le coefficient utilisé pour la rupture et le coefficient de friction statique de la glace μ , est montrée dans [SFIR06, WSS07], avec des valeurs autour de 0.7.

Les lois explicites décrites ci-dessus sont formulées en force accélération et sont fonctions de la zone d'interpénétration des floes. Afin de chercher une formulation en vitesse impulsion et conserver une physique réaliste du contact, nous regardons du côté des lois implicites.

Nous appliquons les impulsions aux points de contact et associons un rôle particulier à chaque composante dans le repère de contact. La composante normale de l'impulsion de contact suit une loi empêchant l'interpénétration. Il existe plusieurs manières d'écrire une loi implicite. Précédemment nous avons choisi la forme d'une condition de complémentarité en vitesse impulsion pour

garantir l'existence de solutions au problème du contact. Nous pouvons trouver la formulation suivante [Lot81] :

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \mathbf{N}_j^T V_j^{lk}(t^+) \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j \mathbf{N}_j^T V_j^{lk}(t^+) = 0,$$

que nous pouvons écrire sous la forme matricielle pour tous les contacts :

$$\mathbf{w} = J^T W(t^+) \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mathbf{w}^T \lambda = 0. \quad (1.1.19)$$

La convention de signe utilisée permet de dire que, dans une situation de contact, les floes se séparent pour $J^T W > 0$ donc le contact disparaît et $\lambda = 0$. En imposant $\lambda \geq 0$, nous nous assurons que l'impulsion normale est dirigée dans le même sens que la normale du repère de contact, ainsi l'impulsion n'est pas cohésive. Cette loi est appelée condition unilatérale car elle permet aux floes de se séparer $J^T W > 0$, mais interdit l'interpénétration $J^T W < 0$.

Cependant, le rôle de la composante normale ne se limite pas à empêcher l'interpénétration, il doit dissiper de l'énergie. Une manière simple est d'utiliser un coefficient de restitution ε . Il peut être utilisé pour écrire une relation entre des vitesses (*voir [New86]*), ou entre des impulsions, comme la loi de Poisson (*voir [Poi33, KR66]*). La loi de Newton relie la composante normale des vitesses relatives avant et après le contact par :

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \mathbf{N}_j^T V_j^{lk}(t^+) = -\varepsilon_j \mathbf{N}_j^T V_j^{lk}(t^-),$$

que l'on peut écrire de manière condensée pour tous les contacts :

$$J^T W(t^+) = -\varepsilon J^T W(t^-), \quad (1.1.20)$$

avec ε la matrice $m \times m$, diagonale, de diagonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$.

La loi de Poisson suppose que le contact se divise en deux phases. Une phase de compression et une phase de décompression. La phase de compression modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. À la fin de cette phase, la dissipation d'énergie est donc maximale, et l'impulsion calculée, notée λ^c , correspond à l'impulsion résultante d'un contact inélastique avec $\varepsilon = 0$. La phase de décompression correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée λ^d , est déterminée par :

$$\lambda^d = \varepsilon \lambda^c,$$

avec les notations condensées précédentes. Il s'avère que ces lois remplissent mal leur rôle car il est possible d'exhiber des configurations pour lesquelles l'énergie cinétique augmente après le contact (*voir [Str90]*). Nous pouvons néanmoins citer les travaux de Moreau [Mor85b, MP88] présentant une adaptation de la loi de Newton :

$$u = \frac{W(t^+) + \varepsilon W(t^-)}{1 + \varepsilon},$$

qui est prouvée toujours dissiper de l'énergie (*voir [Mab98]*), mais la preuve se limite au cas sans friction. Nous pouvons citer aussi l'article [AP97], dans lequel les auteurs adaptent la loi de Poisson pour déterminer des solutions entraînant une dissipation d'énergie.

La composante tangentielle de l'impulsion de contact prend en compte la friction. La loi de Coulomb semble la loi la plus précise pour modéliser cette friction. Mais elle est aussi l'une des plus difficiles à introduire dans un problème de contact par sa non linéarité et par la commutation

entre les conditions de glissement et de roulement (ou d'accroche). Ce qui amène des techniques de régularisation comme nous l'avons vu précédemment. Des détails supplémentaires pourront être trouvés dans [RD82, GDJB94]. Lors d'un contact frottant entre deux objets, il est difficile de prédire si l'un des objets va glisser ou non par rapport à l'autre. La difficulté est décuplée quand nous étudions le multi-contact et que nous supposons qu'il peut exister plusieurs phases de glissement et de roulement durant un même contact. L'avantage d'écrire une loi implicite est de se décharger de l'étude du glissement ou non. Pour écrire la friction de Coulomb en problème de complémentarité, des travaux de Stewart et Trinkle [ST96], puis de Anistescu et Potra [AP97], proposent une approximation du cône de Coulomb par une pyramide, à partir des travaux de Klarbring [Kla90], (voir Figure 1.5). Le problème est que le nombre de composantes tangentielles est lié au nombre de côtés de la base de cette pyramide, et pour espérer se rapprocher du modèle de Coulomb, le nombre de côtés peut vite croître et ainsi augmenter la difficulté de résolution des problèmes linéaires de complémentarité. Pour éviter cette approximation, certains auteurs [MP88, Ste00] ont privilégié une formulation dite du principe de dissipation maximale :

$$\min_{\beta} \beta^T B^T W(t^+) \quad \text{sous les conditions } \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad |\beta_j| \leq \mu_j |\lambda_j|,$$

avec μ_j le coefficient de friction de la glace au point de contact P_j . Cette formulation provient d'une loi de résistance qui peut être transcrite en inégalité variationnelle (voir [Mor74, DL72]). Notons que dans le cas 2D, l'approximation du cône de Coulomb reproduit exactement le modèle de Coulomb. En effet, pour un contact en $P_j \in \mathbb{R}^2$, le sous-espace tangent se réduit à la droite portée par le vecteur tangent \mathbf{T}_j . Ainsi il existe exactement deux directions de glissement possibles : \mathbf{T}_j et $-\mathbf{T}_j$. Soit P_j un point de contact entre Ω_k et Ω_l , soit $\mathcal{R} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$ le repère de contact associé. Par convention, nous prenons $\beta_j > 0$, ainsi l'impulsion tangentielle est définie par $\beta_j^1 \mathbf{T}_j$ ou $-\beta_j^2 \mathbf{T}_j$, avec le vecteur $\tilde{\beta}_j = (\beta_j^1, \beta_j^2)$ valant soit $(0, \beta_j)$, soit $(\beta_j, 0)$. Des travaux de Stewart et Trinkle [ST96], nous présentons la condition de complémentarité suivante :

$$\begin{cases} \gamma_j = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_j \cdot V_j^{lk} \\ -\mathbf{T}_j \cdot V_j^{lk} \end{pmatrix} + \alpha_j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0, & \tilde{\beta}_j \geq 0, & \gamma_j \cdot \tilde{\beta}_j = 0 \\ \sigma_j = \mu_j \lambda_j - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \tilde{\beta}_j \geq 0, & \alpha_j \geq 0, & \sigma_j \cdot \alpha_j = 0 \end{cases}$$

où α_j peut être vu comme une approximation de la norme de la vitesse relative au point de contact. Cette contrainte reproduit bien le modèle de friction de Coulomb. En effet, si $\mu_j \lambda_j - (1, 1) \tilde{\beta}_j > 0$; c'est-à-dire, l'impulsion de contact est à l'intérieur du cône de Coulomb, alors $\alpha_j = 0$ et, par conséquent, $(\mathbf{T}_j \cdot V_j^{lk}, -\mathbf{T}_j \cdot V_j^{lk})^T \geq 0$. Donc, la vitesse relative tangentielle V_j^{lk} est nulle.

Au contraire, quand $\mu_j \lambda_j - (1, 1) \tilde{\beta}_j = 0$, alors il existe une direction $\mathbf{d}_{slip} \in \{\mathbf{T}_j, -\mathbf{T}_j\}$, telle que la composante tangentielle de l'impulsion de contact associée avec cette direction est strictement positive, par convention notons $\beta_j^{slip} > 0$. Alors $\alpha_j + \mathbf{d}_{slip} \cdot V_j^{lk}$ est nulle. Pour $\alpha_j \neq 0$, nous avons $\beta_j^{slip} \mathbf{d}_{slip} \cdot V_j^{lk} < 0$, causant le comportement de résistance de la force au mouvement, comme attendu. De plus, dans l'autre direction $-\mathbf{d}_{slip}$, nous avons $\alpha_j - \mathbf{d}_{slip} \cdot V_j^{lk} > 0$, c'est-à-dire, la composante tangentielle de l'impulsion de contact associée avec cette direction est nulle.

Nous pouvons écrire ce type de condition de friction pour chaque point de contact. Ainsi, nous pouvons générer une condition de complémentarité globale :

$$\begin{cases} \gamma = D^T W(t^+) + H\alpha \geq 0, & \tilde{\beta} \geq 0, & \gamma \cdot \tilde{\beta} = 0 \\ \sigma = \mu\lambda - H^T \tilde{\beta} \geq 0, & \alpha \geq 0, & \sigma \cdot \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.1.21)$$

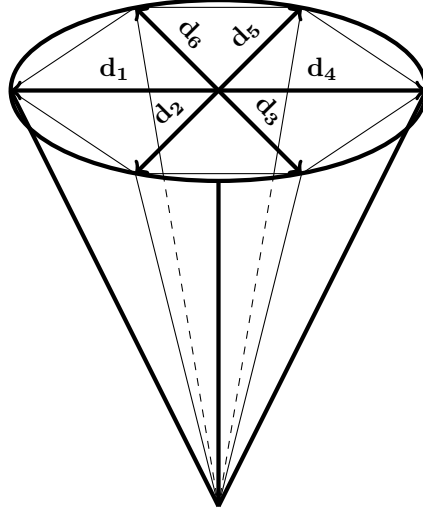


FIGURE 1.5 – Le cône de Coulomb approché par une pyramide dont la base est engendrée par $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_6)$.

avec

$$H^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

μ matrice diagonale $m \times m$, de diagonale (μ_1, \dots, μ_m) ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1) + 1 \text{ or } j = 2(i-1) + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$D = (\mathbf{B}_1| - \mathbf{B}_1| \dots | \mathbf{B}_m| - \mathbf{B}_m)$$

avec \mathbf{B}_j le vecteur contenant la colonne j de B .

Nous avons vu que ces lois ne jouaient pas toujours leurs rôles et qu'elles pouvaient donner des solutions non physiques, mais qu'en est-il des solutions physiques ? Ces lois peuvent-elles couvrir l'ensemble de la région des vitesses admissibles, c'est-à-dire appartenant à V (1.1.7) ? Une étude des articles [WK94, CR98], montre que la plupart du temps, les lois de contact ne donnent qu'une partie de l'ensemble possible des solutions. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer. Rien que l'étude du problème de multiples contacts dans une chaîne constituée de sphères a donné lieu à un livre entier (voir [NB14]) !

Dans [WK94], l'auteur exhibe des configurations dans lesquelles la loi de Newton et la loi de Poisson ne déterminent pas de solutions conservant l'énergie pour $\varepsilon = 1$. Néanmoins, la loi de Stronge [Str90], construite comme combinaison de la loi de Newton et la loi de Poisson, permet d'exhiber une solution qui conserve l'énergie après contact dans le cas parfaitement élastique. En formulant comme Stronge, il faut être capable de découper le contact en deux périodes : avant et après les éventuels arrêts de glissement durant le contact.

Dans [CR98], l'auteur expose et critique plusieurs lois de collision. Des lois comme celle de Brach [Bra91], permettent de couvrir la région entière mais, comme nous l'avons vu précédemment, cela implique de déterminer un ensemble de paramètres qui n'ont pas d'interprétation physique et qui n'ont pas de raison d'être constants sur un panel de contact. D'autres, comme celles

de [PG96, AP97], sont basées sur des coefficients ayant une interprétation physique et étant constants sur une gamme de contact. Cependant avec uniquement un coefficient de restitution et un coefficient de friction, il n'est pas envisageable de couvrir la région entière des vitesses admissibles (voir [CR98]). En particulier, il n'est pas possible de prendre en compte les effets de dispersion de l'énergie dans les objets en contact, durant le contact (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.

Après analyse des lois de contact trouvées dans la littérature et en privilégiant des lois qui peuvent s'interpréter physiquement et qui sont formulées en condition de complémentarité en vitesse impulsion, nous choisissons une combinaison de lois comme celle proposée dans [AP97]. Dans cet article, un modèle complet pour décrire le contact inélastique avec friction est construit en intégrant une condition de complémentarité de non interpénétration (1.1.19), une condition de complémentarité de friction (1.1.21), et une approche du type Poisson, scindant le contact en une phase de compression et une phase de décompression. De plus, les auteurs proposent une correction de la vitesse dans le cas où la solution créerait une augmentation d'énergie après le contact. Néanmoins la vitesse corrigée ne vérifie plus à coup sûr le modèle de friction de Coulomb.

La formulation en problème linéaire de complémentarité

Nous nous plaçons sur l'intervalle $\delta t^* = [t^-, t^+] \subset I$, pour lequel le système S contient m points de contact $\{P_1, \dots, P_m\} \subset \mathbb{R}^{2m}$. Je vais maintenant présenter en détail la mise sous la forme d'un problème linéaire de complémentarité à partir des lois de contact choisies. Nous verrons comment on peut construire un **LCP** qui admet des solutions pour toutes les configurations de contact possibles. Nous présenterons les théorèmes et les preuves qui nous assurent l'existence de solutions. En regroupant l'équation (1.1.18) et les conditions de complémentarité (1.1.19) et (1.1.21), nous pouvons décrire le problème du contact inélastique avec friction comme un problème linéaire mixte de complémentarité (voir définition 12.22 [AB08]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -J & -D & 0 \\ J^T & 0 & 0 & 0 \\ D^T & 0 & 0 & H \\ 0 & \mu & -H^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathfrak{H} - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1.22)$$

avec

$$\mathfrak{H} = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt.$$

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact $W(t^+)$, à l'aide des composantes tangentielle et normale des impulsions de contact dans les repères de contact $(\tilde{\beta}, \lambda)$, elles-mêmes inconnues du système (1.1.22), et à partir des seules données disponibles, c'est-à-dire les positions, les repères de contact et les vitesses avant contact. Sous cette forme, la résolution n'a pas pour ambition de déterminer précisément ce qui se passe durant la collision, mais simplement d'exhiber les conséquences du contact à partir des données connues à l'instant juste avant. Nous l'avons vu précédemment, cette formulation a l'avantage d'assurer l'existence de solutions dans toutes configurations et de faciliter la construction de ces solutions à l'aide d'algorithmes comme

ceux de Lemke (voir Partie 2.1.4). Ainsi, nous présentons et développons la preuve du théorème ci-dessous qui est proche du théorème 2.1 de l'article [AP97] dans le cas où il n'y a pas de liaisons bilatérales, appelées articulations ou joints et qui repose sur le théorème 3.8.6 du livre [CPS92].

Théorème 1.1.6 (existence de solutions pour (1.1.22)). *En notant N la matrice définie par :*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H \\ \mu & -H^T & 0 \end{pmatrix},$$

si M est une matrice symétrique définie positive et N est une matrice co-positive (voir définition 3.8.1 [CPS92]), alors il existe toujours au moins une solution au problème (1.1.22).

Avant de développer, je me permets de rappeler quelques notions et propriétés sur l'algèbre des pivots, facilitant la compréhension de la preuve.

Définition 1.1.2.4 (le problème linéaire de complémentarité). *Soit $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$. Nous notons $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ le problème linéaire de complémentarité suivant : Trouver les vecteurs $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ tels que*

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= A\mathbf{z} + \mathbf{v} \\ \mathbf{w} &\geq 0, \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \end{aligned} .$$

Nous commençons par donner un résultat de factorisation d'une matrice par pivot. Ce résultat nous permet d'écrire le problème $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ en un problème équivalent $\mathbf{LCP}(A', \mathbf{v}')$. Ce problème équivalent nous servira, un peu plus loin, dans la démonstration d'un résultat d'existence de solutions.

Définition 1.1.2.5 (sous matrice principale d'ordre k). *Soit $(p, r, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $k \leq p$ et $k \leq r$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times r}$, avec $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$. A_{11} est appelée sous matrice principale d'ordre k .*

Nous supposons que la matrice A du problème $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ a une sous matrice principale d'ordre k , noté A_{11} , inversible.

Proposition 1.1.7. *Le problème $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ peut s'écrire comme le problème linéaire de complémentarité équivalent $\mathbf{LCP}(A', \mathbf{v}')$ avec :*

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Le problème $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ revient à trouver $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^T$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^T$ tels que :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{w}_1 &= A_{11}\mathbf{z}_1 + A_{12}\mathbf{z}_2 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= A_{21}\mathbf{z}_1 + A_{22}\mathbf{z}_2 + \mathbf{v}_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathbf{z}_1 &= A_{11}^{-1}\mathbf{w}_1 - A_{11}^{-1}A_{12}\mathbf{z}_2 - A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{w}_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\mathbf{z}_2 + \mathbf{v}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}'} \end{aligned}$$

□

À partir des notions ci-dessus, nous établissons la preuve du théorème (1.1.6) :

Démonstration. Commençons par montrer que N est co-positive. Soit $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq 4m}$ un vecteur de \mathbb{R}^{4m} avec tous ses coefficients positifs.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T N \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^m 0 + \sum_{i=1}^m x_{3m+i} (x_{m+2i-1} + x_{m+2i}) + \sum_{i=1}^m x_{3m+i} (\mu_i x_i - x_{m+2i-1} - x_{m+2i}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i x_{3m+i} x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Donc N est co-positive.

Afin de simplifier les écritures, nous introduisons la matrice notée B et les vecteurs notés \mathbf{s} et \mathbf{z} tels que : $B = \begin{pmatrix} J & D & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix}$ et $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Alors le système (1.1.22) peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -B \\ B^T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathfrak{H} - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{s} \geq 0, \quad \mathbf{z} \geq 0, \quad \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{z} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1.23)$$

Nous écrivons $W(t^+)$ en fonction de \mathbf{z} : $W(t^+) = \mathcal{M}^{-1}B\mathbf{z} + \mathcal{M}^{-1}\mathfrak{H} + W(t^-)$. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= B^T \mathcal{M}^{-1}B\mathbf{z} + B^T \mathcal{M}^{-1}\mathfrak{H} + B^T W(t^-) + N\mathbf{z} \\ \Leftrightarrow \mathbf{s} &= (G + N)\mathbf{z} + \mathbf{g} \quad \text{avec } G = B^T \mathcal{M}^{-1}B \text{ et } \mathbf{g} = B^T \mathcal{M}^{-1}\mathfrak{H} + B^T W(t^-). \end{aligned}$$

Nous ramenons le problème d'existence de solutions pour (1.1.23) au problème d'existence de solutions pour $\mathbf{LCP}(G + N, \mathbf{g})$. Nous utilisons le théorème 3.8.6 du livre [CPS92] pour conclure à l'existence d'une solution. Pour cela, nous montrons que le problème $\mathbf{LCP}(G + N, \mathbf{g})$ vérifie bien les hypothèses du théorème 3.8.6.

Pour vérifier l'hypothèse $G + N$ est une matrice co-positive, nous montrons que G est co-positive. Pour cela, nous utilisons le résultat de factorisation par pivot (*voir la proposition 1.1.7*). le problème $\mathbf{LCP}(A, 0)$ est équivalent au problème $\mathbf{LCP}(A', 0)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & \mathcal{M}^{-1}B \\ B^T \mathcal{M}^{-1} & B^T \mathcal{M}^{-1}B \end{pmatrix},$$

par pivotement de \mathcal{M} qui est une sous matrice principale et inversible de A . En effet, nous pouvons le faire car \mathcal{M} est la matrice diagonale des masses des floes non obstacles du système S .

En utilisant le théorème 4.1.5 du livre [CPS92], nous avons A' semi-définie positive. En effet

A est semi-définie positive :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in \mathcal{R}^{3n+4m}, \quad & \mathbf{z}^T A \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}^T A \mathbf{z} = \mathbf{z}_1^T \mathcal{M} \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_1^T B \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T B^T \mathbf{z}_1 \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}^T A \mathbf{z} = \mathbf{z}_1^T \mathcal{M} \mathbf{z}_1 \geq 0, \end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in \mathcal{R}^{3n+4m}, \quad & \mathbf{z}^T A' \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & \mathcal{M}^{-1} B \\ B^T \mathcal{M}^{-1} & B^T \mathcal{M}^{-1} B \end{pmatrix} \mathbf{z} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}^T A' \mathbf{z} = \mathbf{z}_1^T \mathcal{M}^{-1} \mathbf{z}_1 + 2 (\mathbf{z}_1^T \mathcal{M}^{-1} B \mathbf{z}_2) + \mathbf{z}_2^T G \mathbf{z}_2 \geq 0 \\ \text{en particulier pour } \mathbf{z}_1 = 0, \forall \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^{4m} \quad & \mathbf{z}_2^T G \mathbf{z}_2 \geq 0, \end{aligned}$$

donc G est semi-définie positive, donc, a fortiori, co-positive.

Il reste à vérifier l'hypothèse suivante :

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{4m} / [\mathbf{z} \geq 0, (G + N) \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{z}^T (G + N) \mathbf{z} = 0] \Rightarrow \mathbf{z}^T \mathbf{g} \geq 0. \quad (1.1.24)$$

Vérifier 1.1.24 revient à vérifier $\mathbf{z}^T \mathbf{g} \geq 0$ pour tout \mathbf{z} , une solution de $\mathbf{LCP}(G + N, 0)$. Par définition, une solution de $\mathbf{LCP}(G + N, 0)$ vérifie : $\mathbf{z} \geq 0$ et $\mathbf{z}^T (G + N) \mathbf{z} = 0$. Or, $\mathbf{z}^T (G + N) \mathbf{z} = \mathbf{z}^T G \mathbf{z} + \mathbf{z}^T N \mathbf{z}$ et nous venons de montrer que G et N sont des matrices co-positives, c'est-à-dire : $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} \geq 0$ et $\mathbf{z}^T N \mathbf{z} \geq 0$. Ainsi nous pouvons en déduire l'égalité suivante :

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Nous rappelons que $G = B^T \mathcal{M}^{-1} B$ et \mathcal{M} est définie positive, donc \mathcal{M}^{-1} est aussi définie positive. Donc :

$$\mathbf{z}^T B^T \mathcal{M}^{-1} B \mathbf{z} = 0 \Rightarrow B \mathbf{z} = 0,$$

d'où :

$$\mathbf{z}^T \mathbf{g} = \mathbf{z}^T B^T \mathcal{M}^{-1} \mathfrak{J} + \mathbf{z}^T B^T W(t^-) = 0,$$

donc $\mathbf{LCP}(G + N, \mathbf{g})$ admet une solution. Soit \mathbf{z} cette solution, alors \mathbf{z} est aussi solution de (1.1.23). \square

Grâce à la formulation en problème linéaire de complémentarité, nous sommes capables de montrer qu'il existe des vitesses solutions pour toutes configurations de contact avec friction de Coulomb. Le plus intéressant ici, c'est que nous pouvons à partir d'un algorithme de Lemke (à partir de la page 267 du livre [CPS92]), construire une de ces vitesses solutions. Nous savons que cette solution permet au système de floes de satisfaire certaines propriétés physiques comme celles découlant de la loi de Coulomb et de la condition de non interpénétration. Mais nous savons aussi que les choix que nous avons faits, peuvent entraîner une augmentation d'énergie cinétique après le contact. Détaillons comment traiter ce problème.

La mise en place pour une résolution conservant l'énergie cinétique

Comme indiqué précédemment, nous choisissons d'utiliser une loi de Poisson pour modéliser le contact inélastique de la même manière que celle présentée dans [GP95, AP97]. Le modèle est basé sur la mise en forme de problèmes linéaires de complémentarité explicitée ci-dessus. Pour bien comprendre, nous interprétons physiquement la loi de non interpénétration et faisons la correspondance avec les phases de compression et de décompression présentes dans la loi de

Poisson. Essayons de comprendre à quoi correspond physiquement une solution de (1.1.23). Ces vitesses solutions vérifient la loi de non interpénétration écrite en (1.1.19). À la fin du contact, la composante normale des vitesses relatives des points de contact est soit positive et, dans ce cas, aucune impulsion n'est appliquée au solide, soit nulle et, dans ce cas, des impulsions sont appliquées au solide. Cela peut se traduire par le fait de trouver les impulsions nécessaires pour éviter l'interpénétration mais sans pour autant décoller les floes en contact. Physiquement, cela correspondrait à un état de compression maximale. Le système ne pourrait pas se compresser davantage car, avec les composantes normales nulles, la condition de non interpénétration n'est plus violée. La dissipation d'énergie due au contact, exclusivement de l'énergie cinétique dans notre modèle, est maximale dans l'état de compression. Finalement, les solutions du problème (1.1.23), sont les vitesses du système dans cet état comprimé et nous dirons que ces solutions sont les vitesses à la fin de la phase de compression. La partie d'énergie cinétique stockée durant cette phase est liée à l'impulsion nécessaire pour éviter l'interpénétration lors de cette phase et donc, nous considérons que la partie de l'énergie restituée lors de la phase de décompression est modélisée par une impulsion supplémentaire appliquée aux floes pour entraîner un éventuel décollement. Cette impulsion, l'impulsion de décompression, correspond simplement à une fraction de l'impulsion de la phase de compression.

Nous allons donc diviser notre problème de contacts multiples en deux phases : la compression et la décompression. Un problème du type (1.1.23) sera résolu lors de chaque phase. Nous vérifierons que l'énergie cinétique du système à l'état comprimé, c'est-à-dire à la fin de la phase de compression, est inférieure à l'énergie cinétique du système à l'état initial sans apport des forces extérieures non liées aux contacts. Nous utiliserons l'hypothèse de Poisson [GP95], c'est-à-dire que le coefficient de restitution est le rapport entre l'impulsion normale restituée lors de la phase de décompression et l'impulsion normale lors de la compression.

La phase de compression

Nous reprenons les mêmes notations que précédemment et nous utilisons l'exposant c pour indiquer l'instant fin de la phase de compression. Ainsi, à la fin de la phase de compression, le contact est maintenu : $\lambda^c \geq 0$ et $J^T W^c = 0$ ou le contact est cassé : $\lambda^c = 0$ et $J^T W^c \geq 0$. Nous montrons maintenant que les vitesses solutions W^c de (1.1.23) n'entraînent pas d'augmentation d'énergie cinétique du système.

Théorème 1.1.8 (Consistance énergétique (théorème 2.3 [AP97])). *L'énergie cinétique à la fin de la phase de compression E^c , ne peut pas excéder l'énergie cinétique $E(t^-)$ du système dans la même configuration sans les contraintes de contact et en enlevant l'apport énergétique éventuel dû aux forces extérieures. Avec :*

$$E^c = \frac{1}{2} W^{cT} \mathcal{M} W^c, \quad E^- = \frac{1}{2} W(t^-)^T \mathcal{M}^{-1} W(t^-)$$

Démonstration. Nous multiplions (1.1.18), écrite sans forces extérieures, par W^{cT} :

$$W^{cT} \mathcal{M} (W^c - W(t^-)) = W^{cT} J \lambda^c + W^{cT} D \tilde{\beta}^c,$$

or, en utilisant (1.1.19) et (1.1.21), nous avons :

$$W^{cT} J \lambda^c = 0 \quad \text{et} \quad W^{cT} D \tilde{\beta}^c = -\alpha^{cT} H^T \tilde{\beta}^c = -\alpha^{cT} \mu \lambda^c,$$

donc

$$W^{cT} \mathcal{M} (W^c - W(t^-)) = -\alpha^{cT} \mu \lambda^c \leq 0.$$

Posons $X_c = \mathcal{M}^{1/2}W^c$ et $X_- = \mathcal{M}^{1/2}W(t^-)$, alors

$$X_c^T (X_c - X_-) \leq 0 \quad \text{d'où} \quad X_c^T X_c \leq X_c^T X_-,$$

or, d'après l'inégalité de Cauchy

$$X_c^T X_- \leq \|X_c\| \|X_-\|,$$

d'où

$$\|X_c\| \leq \|X_-\|,$$

donc en mettant au carré, en divisant par 2 et en remplaçant par les variables originales nous obtenons le résultat désiré :

$$\frac{1}{2}W^{cT}\mathcal{M}W^c \leq \frac{1}{2}W(t^-)^T\mathcal{M}W(t^-).$$

□

La phase de décompression

Nous utilisons l'exposant $^+$, pour indiquer l'état résultant de la phase de décompression. Nous utilisons l'hypothèse de Poisson à laquelle nous rajoutons une impulsion additionnelle $\tilde{\lambda}$ pour prévenir l'éventuelle interpénétration durant la phase de décompression :

$$\lambda^+ = \varepsilon\lambda^c + \tilde{\lambda}.$$

Cela donne lieu à une contrainte de complémentarité (1.1.25) similaire à (1.1.19) :

$$w_d = J^T W^+ \geq 0, \quad \tilde{\lambda} \geq 0, \quad w_d \cdot \tilde{\lambda} = 0. \quad (1.1.25)$$

Comme dans le paragraphe 3.2 de [AP97], nous supposons que l'impulsion tangentielle de la phase de compression est irréversible. Ainsi, nous recherchons β^+ indépendamment de $\tilde{\beta}^c$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(W(t^+) - W^c) &= \mathfrak{H} + J\lambda^+ + D\beta^+ \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}(W(t^+) - W^c) &= \mathfrak{H} + J\varepsilon\lambda^c + J\tilde{\lambda} + D\beta^+. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire un problème linéaire de complémentarité similaire à (1.1.23) avec $\mathfrak{H} \leftarrow \mathfrak{H} + J\varepsilon\lambda^c$ qui est bien connu.

En utilisant le théorème (1.1.6), nous montrons qu'il existe une solution $W(t^+)$. De plus, en utilisant un raisonnement similaire au théorème (1.1.8), nous pouvons montrer que :

$$\frac{1}{2}W(t^+)^T\mathcal{M}W(t^+) \leq \frac{1}{2}(W^c + \mathcal{M}^{-1}J\varepsilon\lambda^c)^T\mathcal{M}(W^c + \mathcal{M}^{-1}J\varepsilon\lambda^c).$$

Démonstration. En effet,

$$W(t^+)^T\mathcal{M}(W(t^+) - W^c) \leq W(t^+)^T J\varepsilon\lambda^c.$$

Posons $X_c = \mathcal{M}^{1/2}W^c$, $X_+ = \mathcal{M}^{1/2}W(t^+)$ et $X_{\mathcal{H}} = \mathcal{M}^{-1/2}J\varepsilon\lambda^c$, alors :

$$X_+^T X_+ \leq X_+^T (X_c + X_{\mathcal{H}}),$$

or, d'après l'inégalité de Cauchy

$$X_+^T X_+ \leq \|X_+\| \|X_c + X_{\mathcal{H}}\|,$$

d'où

$$\|X_+\| \leq \|X_c + X_{\mathcal{H}}\|.$$

□

Néanmoins ces inégalités nous permettent seulement d'écrire :

$$W(t^+)^T \mathcal{M}W(t^+) \leq W(t^-)^T \mathcal{M}W(t^-) + 2W^{cT} J \varepsilon \lambda^c + \underbrace{(\varepsilon \lambda^c)^T J^T \mathcal{M}^{-1} J \varepsilon \lambda^c}_{\geq 0}.$$

En particulier, si pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$, $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ alors $W^{cT} J \varepsilon \lambda^c = 0$. Dans tous les cas, nous n'avons pas à coup sûr le critère de non augmentation d'énergie cinétique recherché.

Pour modéliser la phase de décompression sans augmentation d'énergie, nous pouvons recourir à une égalité sur les vitesses qui vérifient la loi de Newton (1.1.20). Commençons par supposer que les coefficients de restitution sont tous égaux à un même coefficient noté $\varepsilon \in [0, 1]$. Puis nous écrivons les vitesses après contact comme combinaison linéaire de W^c et $W(t^-)$:

$$W^N = (1 + \varepsilon) W^c - \varepsilon W(t^-). \quad (1.1.26)$$

Nous allons montrer que cette vitesse W^N , est solution d'un problème linéaire de complémentarité similaire à (1.1.23) avec une condition unilatérale de non interpénétration tirée de la loi de Newton. De plus, le principal avantage de cette solution est qu'elle n'entraîne pas d'augmentation d'énergie cinétique après contact. Cependant, ces vitesses possèdent une faiblesse : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision.

Construisons un problème linéaire de complémentarité $\mathbf{LCP}(G + N, \tilde{\mathbf{g}})$ avec

$$\tilde{\mathbf{g}} = B^T W^c + B^T (\varepsilon W(t^-), 0, 0)^T.$$

Alors nous avons la propriété suivante :

Proposition 1.1.9. *Soit une configuration de choc commençant en t^- telle que les chocs soient frontaux, c'est-à-dire, $D^T W(t^-) = 0$. Après la phase de compression, posons :*

$$\lambda^+ = \varepsilon \lambda^c, \quad \beta^+ = \varepsilon \tilde{\beta}^c \quad \text{et} \quad \alpha^+ = (1 + \varepsilon) \alpha^c,$$

alors $(W^N, \lambda^+, \beta^+, \alpha^+)^T$ est solution de $\mathbf{LCP}(G + N, \tilde{\mathbf{g}})$.

Démonstration. En remplaçant $W(t^+)$, λ , et β dans l'équation (1.1.18) sans les forces extérieures \mathcal{H} , par la solution $(W^N, \lambda^+, \beta^+)^T$ et en développant les deux membres indépendamment nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(W^N - W^c) &= \varepsilon \mathcal{M}(W^c - W(t^-)) = \varepsilon (J \lambda^c + D \tilde{\beta}^c) \\ \text{et} \quad J \lambda^+ + D \beta^+ &= J \varepsilon \lambda^c + D \varepsilon \tilde{\beta}^c = \varepsilon (J \lambda^c + D \tilde{\beta}^c). \end{aligned}$$

Donc nous avons bien : $\mathcal{M}(W^N - W^c) = J \lambda^+ + D \beta^+$. Montrons maintenant que les contraintes dues aux contacts sont vérifiées. La contrainte de non interpénétration construite à partir de la loi de Newton devient :

$$J^T W(t^+) + \varepsilon J^T W(t^-) \geq 0, \quad \lambda^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad (J^T W(t^+) + \varepsilon J^T W(t^-))^T \lambda^+ = 0. \quad (1.1.27)$$

En remplaçant $W(t^+)$ par W^N , nous obtenons :

$$\begin{aligned} J^T W^N + J^T \varepsilon W(t^-) &= (1 + \varepsilon) J^T W^c, \\ \text{d'où} \quad \lambda^{+T} (J^T W^N + \varepsilon J^T W(t^-)) &= \varepsilon (1 + \varepsilon) \lambda^{cT} J^T W^c, \\ \text{or} \quad \lambda^{cT} J^T W^c &= 0, \\ \text{donc} \quad (J^T W^N + \varepsilon J^T W(t^-))^T \lambda^+ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, nous avons $\lambda^+ = \varepsilon\lambda^c \geq 0$ et $J^T W^N + \varepsilon J^T W(t^-) = (1 + \varepsilon)J^T W^c \geq 0$ car W^c et λ^c sont solutions de la phase de compression. Nous avons donc W^N qui vérifie (1.1.27). Regardons maintenant la condition de complémentarité modélisant la friction de Coulomb, nous avons :

$$\begin{aligned}
D^T W^N + H\alpha^+ &= (1 + \varepsilon)(D^T W^c + H\alpha^c) - \varepsilon D^T W(t^-), \\
\text{d'où } \beta^{+T}(D^T W^N + H\alpha^+) &= \varepsilon(1 + \varepsilon)\tilde{\beta}^{cT}(D^T W^c + H\alpha^c) - \varepsilon^2 \tilde{\beta}^{cT} D^T W(t^-), \\
\text{or } \tilde{\beta}^{cT}(D^T W^c + H\alpha^c) &= 0, \\
\text{et } D^T W(t^-) &= 0, \\
\text{donc } (D^T W^N + H\alpha^+)^T \lambda^+ &= 0, \\
\text{et } \alpha^{+T}(\mu\lambda^+ - H^T \beta^+) &= \varepsilon(1 + \varepsilon)\alpha^{cT}(\mu\lambda^c - H^T \tilde{\beta}^c), \\
\text{or } \alpha^{cT}(\mu\lambda^c - H^T \tilde{\beta}^c) &= 0, \\
\text{donc } \alpha^{+T}(\mu\lambda^+ - H^T \beta^+) &= 0.
\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha^+ = (1 + \varepsilon)\alpha^c \geq 0, \quad \beta^+ = \varepsilon\tilde{\beta}^c \geq 0 \\
\text{et } D^T W^N + H\alpha^+ = (1 + \varepsilon)(D^T W^c + H\alpha^c) - \varepsilon D^T W(t^-) \geq 0
\end{aligned}$$

car W^c , α^c et $\tilde{\beta}^c$ sont solutions de la phase de compression. Nous avons donc $(W^N, \lambda^+, \beta^+, \alpha^+)^T$ solution de $\mathbf{LCP}(G + N, \tilde{\mathbf{g}})$. \square

Nous montrons maintenant que la solution W^N n'entraîne pas une augmentation d'énergie cinétique.

Proposition 1.1.10. *Si, pour la phase de décompression, la solution est donnée par W^N alors $\frac{1}{2}W^{NT}\mathcal{M}W^N \leq \frac{1}{2}W(t^-)^T\mathcal{M}W(t^-)$.*

Démonstration. Soit

$$X_c = \mathcal{M}^{1/2}W^c, \quad X_- = \mathcal{M}^{1/2}W(t^-) \quad \text{et} \quad X_+ = \mathcal{M}^{1/2}W^N,$$

W^c est solution pour la phase de compression, donc $X_c^T(X_c - X_-) \leq 0$.

De plus nous avons : $X_+ = X_c + \varepsilon(X_c - X_-)$, donc

$$\begin{aligned}
\|X_+\|^2 &= X_c^T X_c + \varepsilon^2 (X_c - X_-)^T (X_c - X_-) + 2\varepsilon X_c^T (X_c - X_-) \\
&\leq X_c^T X_c + \varepsilon^2 (X_c - X_-)^T (X_c - X_-) && \text{car } X_c^T (X_c - X_-) \leq 0 \\
&\leq X_c^T X_c + (X_c - X_-)^T (X_c - X_-) && \text{car } \varepsilon \leq 1 \\
&\leq X_c^T X_c + (X_c - X_-)^T (X_c - X_-) - 2X_c^T (X_c - X_-) && \text{car } X_c^T (X_c - X_-) \leq 0,
\end{aligned}$$

or

$$X_c^T X_c + (X_c - X_-)^T (X_c - X_-) - 2X_c^T (X_c - X_-) = \|(X_c - X_-) - X_c\|^2,$$

donc $\|X_+\|^2 \leq \|X_-\|^2$. \square

Bilan

Nous venons d'étudier le modèle choisi pour traiter les multiples contacts inélastiques avec friction de Coulomb et le cheminement effectué pour obtenir une solution qui n'entraîne pas d'augmentation d'énergie après le contact. À ma connaissance, traiter le contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique! Dans certains cas, l'un des trois

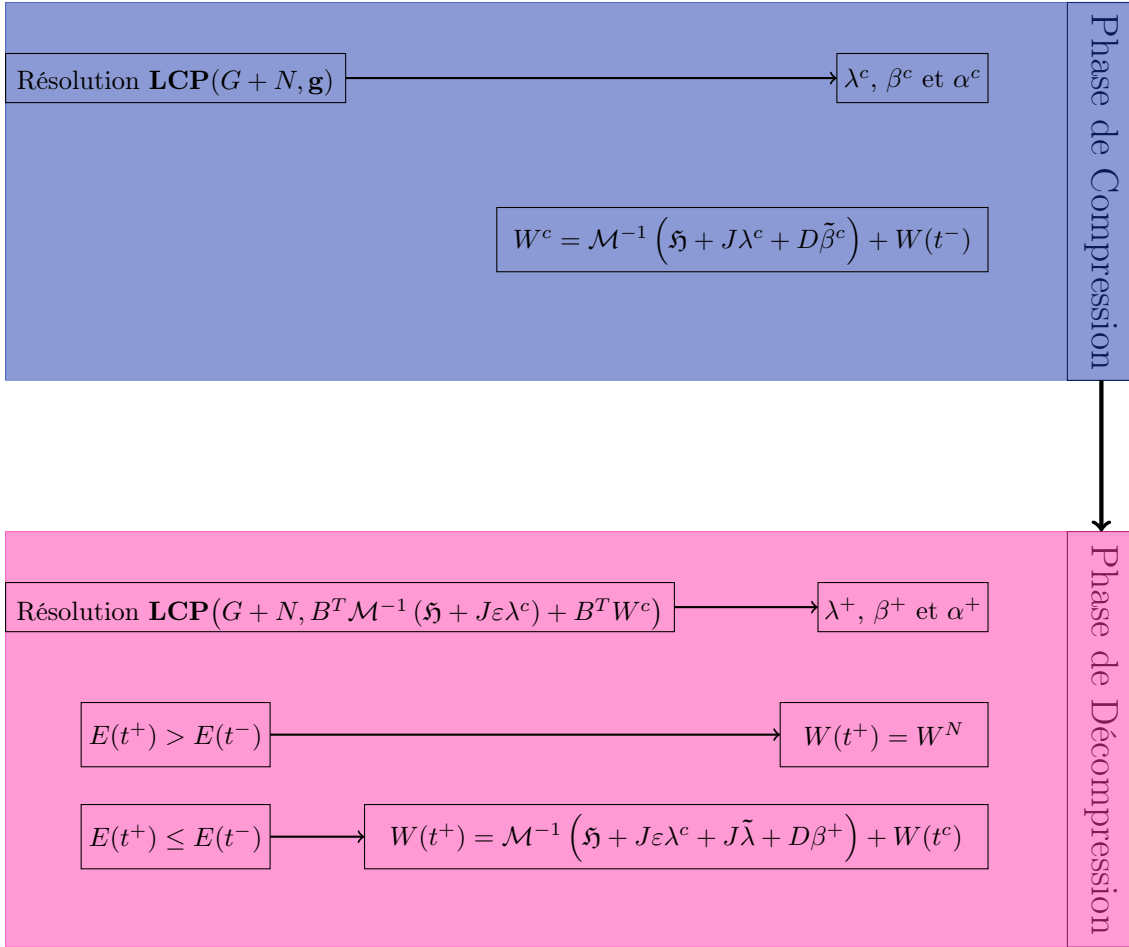


FIGURE 1.6 – L’algorithme du processus de collision.

aspects est violé. Il a donc fallu choisir un aspect physique à privilégier. J’ai donc opté pour la constance énergétique et la non interpénétration avec la solution W^N . Cette option a deux avantages : le premier, avec le modèle choisi, le cas d’augmentation d’énergie est un événement rare (de l’ordre de 0.06 %), et le deuxième, la solution vérifie pour chaque point de contact P_j , l’inégalité suivante : $\beta_j^+ \leq \mu_j \lambda_j^+$. De plus, pour $(1 + \epsilon) \beta^c D^T W^c \leq \epsilon \beta^c D^T W(t^-)$, nous avons le comportement de résistance de la force de contact au mouvement : $\beta^{+T} D^T W^N \leq 0$.

En conclusion, dès que des contacts sont détectés, le modèle consiste à : construire les matrices J et D à partir des données géométriques des contacts, dans un premier temps, puis résoudre le problème linéaire de complémentarité associé à la phase de compression, et enfin, en utilisant la loi de Poisson, écrire et résoudre le problème linéaire de complémentarité correspondant à la phase de décompression. Si la solution trouvée W^+ entraîne une augmentation d’énergie cinétique, alors nous la remplaçons par W^N (voir Figure 1.6).

1.1.3 Les conditions aux bords

Notre modèle de la dynamique des glaces de mer peut adopter une vision lagrangienne ou eulérienne du mouvement des floes. La vision lagrangienne consistera à suivre le déplacement d’une zone d’océan contenant tous les floes et une vision eulérienne consistera à suivre le déplacement des floes dans une zone d’océan délimitée dans l’espace et le temps. Ces deux visions seront

utilisées dans des cas différents. Le premier cas, lorsque l'étude de la dynamique de l'assemblage de floes est localisée dans un espace et un temps réduit, par exemple, l'étude de la dérive dans un canal pendant quelques heures ou l'étude autour d'une structure offshore, nous adopterons une vision eulérienne. Par contre, dans le deuxième cas, lorsque l'étude se porte sur des grands espaces et des longues durées, par exemple, la dérive d'un assemblage de floes, sans obstacles autour, sur plusieurs jours, nous adopterons une vision lagrangienne.

Suivant dans quel cas nous sommes, les zones considérées et les conditions sur ses bords sont différentes. Dans le premier cas, les zones pourront être de forme et de taille variées et leurs bords pourront être laissés libres ou pourront être représentés par des obstacles pour simuler une côte, un port, un canal ou encore une structure offshore. Dans le deuxième cas, les zones seront de forme carrée et les conditions aux bords pourront être libres ou périodiques. La forme carrée possède l'avantage de faciliter le découpage de l'océan pour intégrer des conditions aux bords périodiques et pour appliquer des données météorologiques comme les champs de vitesse de courant océanique et de vent. La taille d'une telle zone est déterminée par la taille des floes, par la concentration de glace dans cette zone, donc le nombre de floes, et par la capacité maximale, limitée par les ressources informatiques, du nombre de floes pris en compte dans une zone d'océan. Avec des conditions libres aux bords, au delà de la zone considérée, l'océan est libre : sans autres floes et sans obstacles. Tandis qu'avec des conditions périodiques, chaque zone carrée voisine, possède un assemblage de floes ayant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire, ayant les mêmes tailles, les mêmes formes, les mêmes positions relatives à la zone et les mêmes vitesses que les floes de la zone considérée. Nous présentons maintenant, plus en détail, la mise en place dans le modèle de telles conditions aux bords.

Les conditions périodiques aux bords

Arrêtons-nous quelques instants sur les conditions périodiques aux bords et précisons comment nous les avons prises en compte dans notre modèle de glace de mer. Nous considérons 9 zones identiques, comme sur la Figure 1.7, telles que la zone centrale, appelée cellule de référence, contient l'assemblage de floes, que nous appelons floes de référence. Les autres zones sont appelées cellules images, et les floes contenus sont appelés floes images. Une cellule image est la réplique parfaite de la cellule de référence. La taille et la forme de la cellule image sont les mêmes que celles de la cellule de référence. Les floes images sont identiques aux floes de référence et sont dans la même configuration spatiale par rapport au centre de la cellule. Ainsi, les coordonnées relatives à la cellule d'un floe de référence sont les mêmes que les coordonnées relatives à la cellule du floe image associé. De plus, nous appliquons sur les cellules images les mêmes champs de vitesse du courant océanique et du vent que ceux appliqués sur la cellule de référence. Ainsi, la dynamique d'un floe image est identique à la dynamique du floe de référence associé. Cela limite donc l'utilisation de telles conditions aux bords à des conditions météorologiques périodiques en espace.

Le premier avantage de ces conditions périodiques est qu'elles permettent d'éviter de considérer un assemblage de floes isolé au milieu d'un océan libre, ce qui est le cas lorsque les conditions sont libres aux bords. Ainsi, cela permet de maintenir une même concentration de glace sur toutes les cellules au cours du temps, identique à la concentration initiale de glace au sein de la cellule de référence. En effet, s'il arrive qu'un floe de référence sorte de la cellule de référence, alors il existe un floe image associé qui rentre dans la cellule de référence. Dans ce cas, le floe image rentrant devient le floe de référence et le floe de référence sortant devient une des images du floe nouvellement de référence. Par exemple, disons qu'un floe de référence sort par la gauche

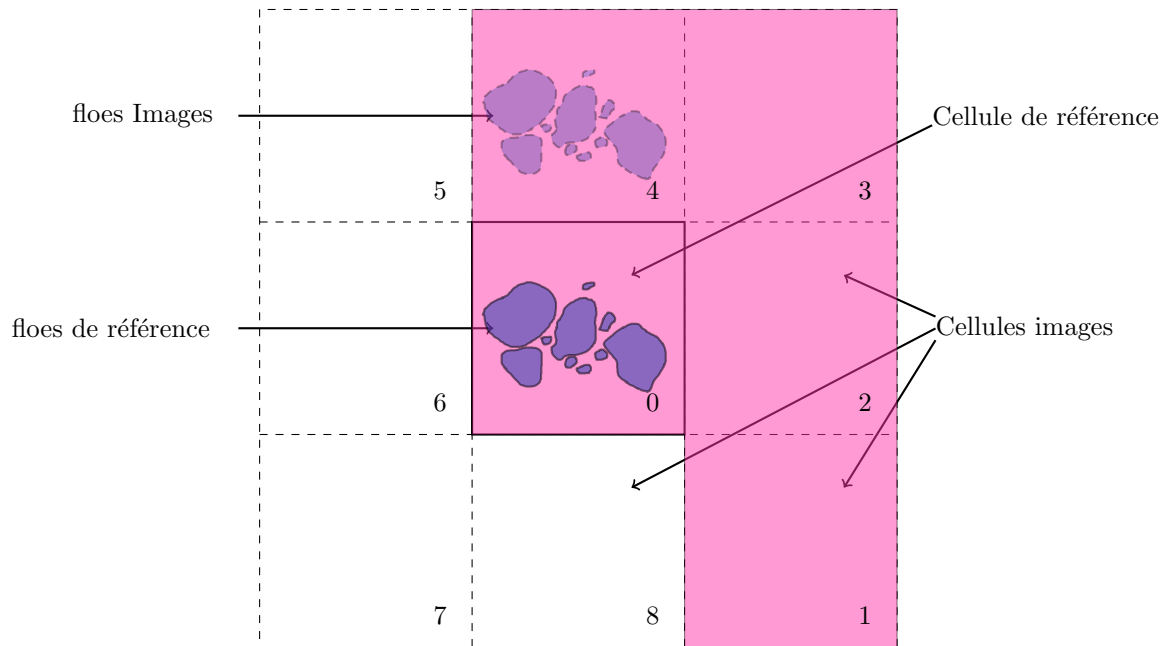


FIGURE 1.7 – Cellules de référence et images.

de la cellule de référence, alors il devient floe image dans la cellule image de gauche, et le floe image associé provenant de la cellule image à droite de la cellule de référence rentre dans la cellule de référence, alors il devient le nouveau floe de référence. La concentration est donc maintenue dans la cellule centrale.

Le deuxième avantage est que nous pouvons adopter une vision eulérienne pour suivre les floes dans la cellule de référence qui est alors considérée comme fixe, tout en conservant une vision lagrangienne pour suivre les floes tout au long de leur trajectoire sur plusieurs jours qui est bien plus grande que la taille de cellule de référence. En effet, une simple translation permet de passer d'un floe de référence à une de ses images. Dès qu'un floe de référence sort de la cellule de référence et devient un floe image, nous conservons la translation permettant de passer de ce floe devenu image à celui devenu référence. L'étude de la dynamique du système S peut donc se restreindre à ce qui se passe dans la cellule de référence et les trajectoires des floes de S peuvent donc être reconstruites à partir des translations ci-dessus.

Néanmoins, cela est vrai tant que la dérive est sans collisions. En effet, dès que des interactions entre floes sont détectées, nous ne pouvons pas nous restreindre à l'étude de la cellule de référence seule. Intéressons-nous donc aux collisions entre floes de référence et floes images. Il est simple d'observer qu'une collision entre un floe de référence et un floe image se retrouve au moins 4 fois dans l'espace des 9 cellules. Afin de traiter la collision une et une seule fois, nous restreignons l'étude à 4 cellules images autour de la cellule de référence. Par convention, nous prendrons les cellules numérotées de 0 à 4 (en rouge sur la Figure 1.7). Afin de simplifier les notations et d'alléger les écritures, je nommerai l'espace contenu par les cellules numérotées de 0 à 4, la **Zone d'Interaction Réduite** et je la noterai **ZIR** par la suite. Imaginons que nous résolvons le contact entre un floe de référence Ω_k et un floe image Ω_l en un point de contact P_j . Si nous reprenons le modèle choisi pour traiter les contacts (voir *Partie 1.1.2*), nous remarquons que seules les données vectorielles interviennent. Précisément, nous avons besoin de connaître

les vecteurs $\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j$, $\mathbf{G}_l \mathbf{P}_j$ et $(\mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$, mais la position des points (G_k, G_l, P_j) dans le repère absolu \mathcal{R}_{abs} , n'est pas nécessaire. Cette remarque est importante, car elle permet d'affirmer que les impulsions de contact appliquées au floe image sont équivalentes à celles appliquées au floe de référence associé. Nous verrons dans la partie 2.1.6, comment les conditions périodiques aux bords sont implémentées dans le modèle général sans augmenter drastiquement le coût en ressources informatiques. Un dernier point est à mentionner : l'interaction d'un floe avec sa propre image. Nous venons de montrer que les impulsions de contact aux floes images et floes de référence associés sont identiques, ainsi interagir avec son image est équivalent à interagir avec soi-même. Or nous avons exclu cette possibilité de notre modèle. Pour éviter que cela se produise nous prendrons garde à la taille des floes par rapport à la taille de la zone d'océan considérée (voir Partie 1.3).

1.2 Le modèle de l'environnement

Dans cette partie nous détaillons l'environnement dans lequel évoluent les floes. L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact qui sont décrites dans la partie 1.1.2. Nous précisons quelles forces nous retenons dans notre modèle pour être comptabilisées dans le bilan des forces lors des équations de la conservation des moments linéaire et angulaire (voir Partie 1.1.1). Nous précisons aussi leurs expressions et comment elles interagissent entre-elles et avec la glace de mer.

1.2.1 Les forces extérieures

Lorsque nous étudions un floe isolé, son mouvement, sa dérive, sont essentiellement dus à l'action combinée de l'océan, des vents et de la rotation de la Terre qui produit un effet communément appelé effet de Coriolis dû au fait que nous, observateurs, sommes dans un référentiel en rotation, la Terre. Ce caractère en rotation du référentiel dans lequel nous étudions la dynamique des glaces de mer ne sera pris en compte que par cet effet de Coriolis \mathfrak{F}_c . Soit Ω_i un floe et \dot{G}_i la vitesse du centre de masse, l'effet de Coriolis associé $\mathfrak{F}_{c,i}(t)$ est défini par :

$$\mathfrak{F}_{c,i}(t) = -f\mathbf{k} \wedge \dot{G}_i(t),$$

avec f le paramètre de Coriolis (voir Table 1.1) et \mathbf{k} le vecteur dirigé vers le haut du repère absolu \mathcal{R}_{abs} . L'effet de Coriolis a la dimension physique d'une accélération et non d'une force. Le mouvement des floes se situe dans le plan \mathcal{P} , les actions des courants s'expriment donc sur la surface des floes. Les actions se produisant hors-plan, comme celle d'une vague, ne seront pas prises en compte.

Des multiples observations, depuis l'incroyable voyage du bateau le Fram de Fridtjof Nansen à la fin du 19^e siècle le long du courant transpolaire, nous savons que la glace de mer dérive au maximum à 2% de la vitesse du vent en magnitude et de 20° à 40° vers la droite de la direction du vent dans l'hémisphère nord (voir [Nan02]). Ces valeurs sont valables pour une dérive libre, c'est-à-dire, sans interactions entre les floes. Des études plus récentes, comme [TC82], montrent que ces valeurs diminuent avec l'augmentation de la concentration des glaces, cela est dû à la prise en compte du stress interne qui entraîne une dissipation d'énergie. Ces caractéristiques du mouvement du floe sont dues à l'action du fluide : vent ou océan, qui exerce une contrainte sur la surface du floe. Précisément, la contrainte est exercée à la surface commune entre le floe et la couche du fluide considérée. Cette action peut s'exprimer comme une force de traînée pour modéliser la friction du fluide sur la surface de la glace en contact, et en fonction du mouvement relatif de la glace par rapport au fluide. Ces expressions sont basées sur des champs de vitesse des courants océanique et atmosphérique à l'interface glace/fluide.

Nous considérons le fluide divisé en une multitude de couches. De la même manière que le mouvement d'une couche exerce une action sur le floe, il exerce une action sur les couches de fluide voisines. Cette action est due au gradient de pression et au gradient des contraintes dues à la friction du fluide entre les couches voisines. Le transport d'Ekman est un exemple du résultat d'une telle action (voir [Ekm05]). Il correspond au déplacement horizontal de la couche limite océanique, celle à l'interface entre l'océan profond et l'atmosphère, dû à l'action combinée de traînée due au vent, d'amortissement de l'océan profond et de l'effet de Coriolis. Le mouvement de cette couche océanique est dirigé par le mouvement du vent et dévié vers la droite, dans l'hémisphère nord, par l'effet de Coriolis. L'ensemble des actions dues à la friction entre les couches de fluide entraînent des oscillations inertielles au sein du mouvement de la couche limite

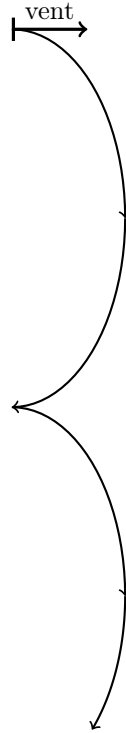


FIGURE 1.8 – Trajectoire d’une particule d’eau dans la couche océanique de surface soumise à un vent constant satisfaisant le transport d’Ekman.

océanique (voir Figure 1.8). La période de ces oscillations est autour de $12h$ dans l’Arctique (voir [Lep05]). Dès que les actions dues au gradient des contraintes de friction des couches voisines ne sont plus prises en compte, les oscillations inertielles diminuent jusqu’à disparaître.

Les forces de traînée

Nous avons la possibilité d’écrire les traînées de manière linéaire en la vitesse du fluide, comme dans [HH02, WBLM98], ou quadratique en la vitesse, comme dans [McB86, McP86]. L’expression est donc fonction de la vitesse du fluide \mathbf{U} (air ou océan), de sa densité et d’un coefficient appelé coefficient de traînée du fluide C' . Ce coefficient dépend du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e = \mathbf{U}L/\nu$, où ν est la viscosité cinématique et L la dimension caractéristique du fluide. Dans le cas d’un courant laminaire, le coefficient de traînée peut être de l’ordre de $\mathcal{R}e^{-1}$ et donc, la force de traînée peut être considérée linéairement dépendant de \mathbf{U} . Cependant, dans un régime turbulent, $\mathcal{R}e$ devient très grand, le coefficient de traînée n’est plus dépendant du nombre de Reynolds, et alors, la force de traînée est quadratique en la vitesse (voir [Lep05]). Dans la formulation quadratique, le coefficient C' , peut s’écrire :

$$C' = \rho C \|\mathbf{U}\|,$$

avec ρ la masse volumique du fluide et C un coefficient de traînée sans dimension (voir [HI86]).

Nous choisissons une forme quadratique pour considérer des régimes du fluide éventuellement turbulents. Ainsi pour le vent et l’océan, les forces de traînée associées, appliquées aux floes

s'expriment par :

$$\begin{aligned}\tau_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t) \\ \tau_w(t, P) &= \rho_w C_w \left\| \mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t) \right\| \left(\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t) \right),\end{aligned}$$

avec $\mathbf{U}_a(t)$, $\mathbf{U}_w(t)$ et $\dot{P}(t)$ respectivement la vitesse du vent à l'interface glace/fluide, la vitesse du courant océanique à l'interface glace/fluide et la vitesse d'un point P du floe. La force de traînée associée au vent écrite comme ci-dessus, est une première approximation de la force dépendant de la vitesse d'un point P d'un floe de manière similaire à $\tau_w(t, P)$, car dans le cas de la dérive de glace de mer nous avons \dot{P} très petit devant \mathbf{U}_a . ρ_a , ρ_w , C_a et C_w sont, respectivement, la masse volumique de l'air, la masse volumique de l'eau, le coefficient de traînée de l'air et celui de l'eau. Les différents paramètres et constantes du modèle sont donnés dans la Table 1.1. Les valeurs des coefficients de traînée de l'océan et du vent proviennent de mesures effectuées dans la mer de Beaufort (voir [Lep05, BSA80, McP82]). Les valeurs des masses volumiques de l'air, de l'eau et de la glace sont respectivement fixées pour un air à -10°C avec 50% d'humidité à 0 m d'altitude, pour une eau à 0°C avec une salinité à 30% à la surface et pour une glace à 0°C .

Nous remarquons que ces forces sont en fait des forces par unité de surface ds . Ainsi en précisant le bilan des forces dans le système d'équations (1.1.2) du mouvement pour un floe Ω_i , nous écrivons :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{G}_i(t)}{dt} = M_i \mathfrak{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \tau_a(t) + \tau_w(t, P) ds & \text{moment linéaire} \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\tau_a(t) + \tau_w(t, P)) ds & \text{moment angulaire} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Une étude de la dérive libre d'un floe unique soumis aux forces de traînée du vent et du courant océanique, avec un modèle idéalisé permet d'écrire la différence entre la vitesse d'un floe et la vitesse du courant en fonction d'un nombre appelé nombre de Nansen et de la vitesse du vent (voir [Lep05, Wei13]). Pour cela, nous considérons un modèle 1D, avec vent et courant constants en enlevant l'effet de Coriolis. L'étude de la dérive libre revient à l'étude d'un point fixe, qui correspond à l'accélération nulle $\ddot{G}(t^*) = 0$, et nous pouvons écrire la magnitude de la vitesse $|\dot{G}(t^*) - \mathbf{U}_w|$ comme :

$$|\dot{G}(t^*) - \mathbf{U}_w| = \sqrt{\underbrace{\frac{\rho_a C_a}{\rho_w C_w}}_{Na}} |\mathbf{U}_a(t^*)|, \quad (1.2.2)$$

avec Na le nombre de Nansen, égal à 0.021 d'après les valeurs de nos paramètres, qui est en bon accord avec la loi empirique de Nansen.

1.2.2 Le couplage océan/glace

La plupart des données des courants atmosphérique et océanique utilisées pour les simulations seront fournies par des modèles météorologiques comme **ERA-interim** (voir [DUS+11]) pour le vent et **TOPAZ** (voir [BLS08, Ble02]) pour le courant océanique. Dans **ERA-interim**, entre autres, un modèle atmosphérique multi-couches avec des conditions aux bords prenant en compte la concentration et la température de la glace de mer est considéré. Cela nous permet de

TABLE 1.1 – Paramètres et constantes du modèle.

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Vitesse angulaire de la Terre	\mathbf{V}_Ω	7.292×10^{-5}	s^{-1}
Latitude	ϕ	variable	rad
Paramètre de Coriolis	f	$2\mathbf{V}_\Omega \sin \phi$	s^{-1}
Densité de l'air	ρ_a	1.341	kg/m^3
Densité de la glace	ρ	917	kg/m^3
Densité de l'eau	ρ_w	1024.071	kg/m^3
Coefficient de traînée atmosphérique	C_a	1.7×10^{-3}	-
Coefficient de traînée océanique	C_w	5×10^{-3}	-
Épaisseur de la couche océanique	h_w	15	m
Épaisseur du floe	h_i	variable < 1	m
Aire de la surface de l'océan étudiée	\mathcal{A}_w	variable	m^2
Aire de la surface du floe Ω_i	\mathcal{A}_i	variable	m^2
Aire de la surface totale couverte par les floes	\mathcal{A}_f	variable	m^2
Vitesse de friction	γ	10^{-5}	m/s
Taille moyenne d'un élément du maillage de Ω_i	s_m	$\mathcal{A}_i/25$	m^2

récupérer des vitesses de vent à une altitude de 10 m et à haute fréquence, c'est-à-dire réanalysées toutes les 3 à 6 heures. Dans notre modèle, de telles vitesses seront directement appliquées comme des vitesses à l'interface glace/fluide.

Concernant le modèle **TOPAZ**, un modèle océanique multi-couches et un modèle de glace de mer ont, entre autres, été couplés. En particulier, les vitesses fournies par ce modèle satisfont le transport d'Ekman. Cependant la fréquence de stockage de ces vitesses ne dépassant rarement la journée, nous perdons la composante inertielle du mouvement. Nous pouvons donc récupérer les vitesses de courant à une profondeur de 2.8 m mais sauvegardées à basse fréquence, c'est-à-dire toutes les 24 heures.

Dans l'article [GJM⁺12], les auteurs montrent l'importance de la composante inertielle du mouvement du courant océanique pour décrire le mouvement des glaces de mer. Plus précisément, ils montrent qu'il y a un couplage entre le mouvement de la couche limite océanique et le mouvement des glaces. Entre autres, l'effet de rétroaction du mouvement de la glace sur le mouvement de la couche limite océanique se manifeste par l'observation d'oscillations inertielles.

Bien que ces oscillations soient bien connues dans la littérature sur la dynamique des glaces de mer (voir [McP79, Gil82, McP82, HI86, Lep05]), un tel couplage avec la couche limite océanique n'est encore que rarement pris en compte dans les articles. Par exemple, dans [McP79, HI86], la vitesse du fluide à l'interaction glace/fluide est une correction de la vitesse géostrophique avec un angle de déviation et dans [Her11], la vitesse est estimée à partir du modèle d'Ekman.

Contrairement à ces différents travaux, nous choisissons d'intégrer à notre modèle de dynamique des glaces le modèle de couplage océan/glace construit dans l'article [GJM⁺12]. Ce modèle de couplage idéalisé suppose que la couche limite océanique possède une vitesse invariante par rapport à la hauteur dans la couche, et donc égale à la vitesse de surface \mathbf{U}_w . L'idée est d'appliquer à cette couche limite l'effet de Coriolis qui agit perpendiculairement au courant, l'opposé de la force de traînée de l'océan sur le floe sur la surface recouverte par la glace et la force de traînée du vent sur l'océan sur la surface libre (non recouverte par les glaces). Ces forces de traînée appliquées à la couche limite océanique jouent le rôle des actions dues aux contraintes de friction. De plus, le modèle suppose que l'océan profond est au repos et que le terme d'amortissement est écrit comme une friction à la base de la couche limite et proportionnel

à la vitesse de cette couche limite, décrite par le paramètre γ (voir Figure 1.9) et (voir Table 1.1). C'est-à-dire, pour S un système de floes contenant $n - r > 0$ floes non obstacles, \mathbf{U}_w est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
M_w \frac{d\mathbf{U}_w(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n-r} \int_{\Omega_i(t)} \underbrace{\left[\rho_w C_w \left\| \dot{P}(t) - \mathbf{U}_w(t) \right\| \left(\dot{P}(t) - \mathbf{U}_w(t) \right) \right]}_{\tau_w(t,P)} ds \\
&+ (\mathcal{A}_w - \mathcal{A}_f) \underbrace{\rho_a C_a \left\| \mathbf{U}_a(t) \right\| \mathbf{U}_a(t)}_{\tau_a(t)} + M_w \mathfrak{F}_c(t) (\mathbf{U}_w(t)) - \gamma \rho_w \mathcal{A}_w \mathbf{U}_w(t),
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

avec,

$$M_w = \rho_w h_w \mathcal{A}_w,$$

où h_w est l'épaisseur de la couche océanique, \mathcal{A}_w est l'aire de la zone d'océan étudiée et \mathcal{A}_f est l'aire totale de la zone recouverte par les floes. Les valeurs de ces paramètres sont dans la table 1.1.

Même à partir de vitesses à basse fréquence, comme celles fournies par **TOPAZ**, ce modèle de couplage permet de retrouver les oscillations inertielles du courant océanique de surface. De plus, nous ajoutons à la dérivée $\dot{\mathbf{U}}_w$ vérifiant (1.2.3), une accélération de surface $\mathbf{a}_{w,data}$ correspondant aux variations basses fréquences de la vitesse du courant au cours de plusieurs jours de simulation. Cette accélération est calculée à partir des données fournies par les modèles météorologiques. Finalement, la vitesse de surface du courant utilisée pour calculer la force de traînée correspondante peut être écrite comme la somme de la composante issue du modèle de couplage et la composante issue de la variation à basse fréquence. Cela se traduit par le changement de l'équation différentielle (1.2.3) comme suit :

$$\begin{aligned}
M_w \frac{d\mathbf{U}_w(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n-r} \int_{\Omega_i(t)} \underbrace{\left[\rho_w C_w \left\| \dot{P}(t) - \mathbf{U}_w(t) \right\| \left(\dot{P}(t) - \mathbf{U}_w(t) \right) \right]}_{\tau_w(t,P)} ds \\
&+ (\mathcal{A}_w - \mathcal{A}_f) \underbrace{\rho_a C_a \left\| \mathbf{U}_a(t) \right\| \mathbf{U}_a(t)}_{\tau_a(t)} + M_w \mathfrak{F}_c(t) (\mathbf{U}_w(t)) - \gamma \rho_w \mathcal{A}_w \mathbf{U}_w(t) \\
&+ M_w \mathbf{a}_{w,data}(t).
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Ainsi, dans notre modèle, pour la description du mouvement des floes sans collisions, nous établissons un système contenant $2n + 1$ équations dont $2n$ pour la conservation des moments des floes et une, l'équation (1.2.4), pour décrire le mouvement de la couche limite océanique.

1.3 La caractérisation des packs

En préambule de nos simulations, nous créons une configuration initiale qui contient un ensemble S de n floes dont un certain nombre r peuvent être des floes obstacles. À l'état initial $t = 0$, les floes ne s'interpénètrent pas mais peuvent être en contact. Le nombre de floes non obstacles, le nombre de floes obstacles, leur taille, leur géométrie, leur épaisseur, leur position et leurs vitesses à $t = 0$ sont laissés libre de choix par l'utilisateur. C'est à cette configuration initiale que seront appliquées les forces extérieures (voir *Partie 1.2*). Afin de modéliser des situations réalistes comme la dérive d'un pack de floes dans un chenal, nous avons besoin de créer des configurations initiales de floes réalistes. Pour cela, nous avons étudié les résultats de multiples recherches menées sur les propriétés des glaces de mer dans les zones marginales et nous avons retenu quatre critères qui doivent être satisfaits pour déterminer une configuration réaliste. Ces critères sont la répartition des tailles de floes, la forme réaliste des floes, l'épaisseur des floes et leur concentration.

1.3.1 La distribution des tailles et des géométries de floes

Plusieurs études ont été menées sur la distribution des tailles de floes dans les zones marginales, (voir [RT84, Mat85, Wei11, LLZD08, THT11]). Les résultats montrent que la probabilité cumulée des floes de taille supérieure à d , suit une loi puissance $d^{-\alpha}$. Le coefficient α est appelé dimension de Hausdorff ou dimension fractale. Dans ces études, la taille d'un floe d , est définie comme la *mean caliper diameter*. La distance appelée *caliper diameter* est la distance entre deux droites parallèles qui sont localement tangentes à un côté du floe sans pénétrer l'intérieur. La moyenne se fait sur l'ensemble des orientations possibles, (voir [RT84]). Quand les géométries sont des disques, la *mean caliper diameter* correspond au diamètre du disque. La distribution des tailles suivant une loi puissance provient des travaux sur la dimension de Hausdorff d'ensembles limites d'un groupe de Klein qui pavent entièrement la dimension topologique (voir [Doy88, McM98, McM99]). La construction des cercles d'Apollonius est un exemple d'ensembles limites d'un groupe de Klein pour une dimension topologique égale à 2 (voir [Man82]), (voir *Figure 1.10*). Pour la banquise, d'après les articles ci-dessus, le coefficient α est compris entre 1 et 2 suivant la zone marginale considérée. Ces variations peuvent être dues à la localisation de la zone marginale et à la concentration de glace dans cette zone.

Le nombre total de floes n , la plus petite taille s_{min} , respectivement la plus grande s_{max} , parmi les n floes, et α la dimension fractale, sont alors reliés par l'équation (1.3.1) ci-dessous :

$$\ln(n) = \alpha \ln\left(\frac{s_{max}}{s_{min}}\right). \quad (1.3.1)$$

Alors, à partir de trois de ces quatre paramètres, nous pouvons construire un assemblage de floes tel que la distribution des tailles suit la loi puissance $s_{min}^{-\alpha}$ entre s_{min} et s_{max} . Par exemple, en prenant $\alpha = 1.5$, $s_{min} = 1$ m, et un nombre total de 500 floes, la taille du plus grand floe est de 63 m, ce qui donne un ratio entre la masse la plus grande et la masse la plus petite autour de 4 000. Dans notre modèle, les simulations ont été réalisées, jusqu'à maintenant, à partir d'une configuration avec un tel ratio compris entre 1 000 et 15 000. Ce qui donne, pour $s_{min} = 1$, $31.6 \simeq \sqrt{1000} \leq s_{max} \leq \sqrt{15000} \simeq 122.5$, $n = 500$ et $1.29 \leq \alpha \leq 1.8$.

De même, plusieurs études ont été menées sur la distribution des géométries de floes dans les zones marginales (voir [RT84, LLZD08, THT11]). Ces études montrent que la variation des géométries est moins significative que celle des tailles. En moyenne la rotondité se situe entre 1

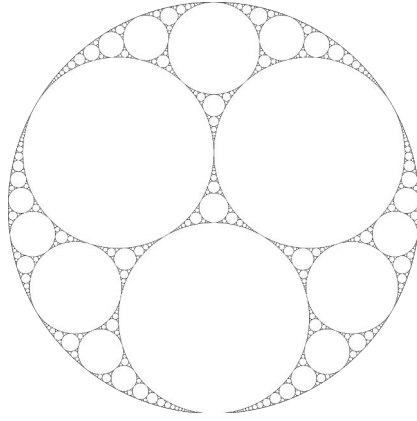


FIGURE 1.10 – Exemple de cercles d’Apollonius. Source [Unk08].

et 1.5 et elle est globalement plus importante pour les floes plus larges (voir [LLZD08, THT11]). De plus, les résultats montrent que les géométries sont grossièrement convexes (voir [LLZD08]). Dans [LLZD08], les auteurs expriment la rotondité comme le ratio :

$$\frac{P^2}{4\pi S}$$

avec P le périmètre et S la surface. La rotondité est égale à 1 pour un cercle, 1.27 pour un carré et 1.43 pour un rectangle de longueur deux fois plus grande que la largeur.

Les détails sur l’algorithme de construction de la configuration initiale seront décrits dans la Partie 2.3.

Chapitre 2

Méthodes Numériques et Algorithmiques Pour la Résolution de la Dynamique des Glaces de Mer

Nous avons vu dans la première partie les choix effectués pour le modèle théorique pour traiter la dynamique des glaces de mer. Nous avons privilégié une approche discrète, les glaces étant considérées comme un système de floes. Dans le cas d'une dynamique régulière, c'est-à-dire sans collisions, l'intégration se fait à partir du système d'équations des moments, contenant deux équations pour un floe, décrivant l'action des forces extérieures sur la surface des floes au cours du temps. Dans ce chapitre nous donnerons les méthodes numériques utilisées pour écrire un code permettant de simuler les solutions de telles équations.

Nous avons vu dans la première partie les choix théoriques pour la gestion des interactions entre les floes. Cela implique la mise en place d'algorithmes pour la détection des collisions et pour la résolution des problèmes linéaires de complémentarité. Nous séparons la détection des collisions en une étape de détection spatiale et une étape de détection temporelle. Tous ces algorithmes seront discutés dans ce chapitre en donnant, la plupart du temps des informations sur leur implémentation, leur efficacité et leur robustesse.

Dans ce chapitre nous présentons l'algorithme global du modèle de la dynamique des glaces de mer. Celui-ci gère l'évolution à la fois de la dynamique régulière et de la dynamique non régulière des floes. En particulier, nous détaillerons les conditions à respecter pour que cette évolution n'entraîne pas de vitesses non réalistes. Une attention particulière sera portée sur l'élaboration du pas de temps de la simulation.

Nous présenterons également dans ce chapitre le traitement des données météorologiques en vue de leur exploitation dans notre modèle. Nous donnerons aussi des détails sur les modifications algorithmiques engendrées par les conditions périodiques aux bords.

Enfin, nous présenterons le générateur de configurations initiales de floes. Il a pour but de construire une configuration initiale respectant les critères déterminés dans la partie [1.3](#).

2.1 La gestion du mouvement et des collisions

Nous avons vu que la simulation d'un système de floes tient compte des dynamiques régulière et non régulière. Pour chacune de ces dynamiques nous présentons les méthodes numériques et les algorithmes utilisés pour leur intégration. Nous avons vu précédemment comment les floes sont caractérisés ; en particulier par leur géométrie non forcément sous forme de disques observée dans la zone marginale des glaces de mer. Nous montrerons ici, comment discrétiser une telle forme pour la résolution de l'équation des moments linéaire et angulaire.

Nous avons vu précédemment les interactions définies par des collisions inélastiques avec friction. Nous verrons ici les algorithmes et les méthodes pour leur détection. Nous séparons la détection en deux étapes : l'une se concentrant sur la détection dans l'espace en déterminant une distance entre les floes et l'autre se concentrant sur la détection dans le temps en déterminant l'instant d'apparition de la collision.

2.1.1 La discrétisation des floes

Calculer l'accélération du floe au cours du temps à partir de l'équation des moments (1.1.2) nécessite le calcul d'intégrales sur la surface du floe qui correspondent à l'action globale des forces extérieures exercée sur la région $\Omega(t)$. La méthode de quadrature de Gauss-Legendre permet de calculer ces intégrales de manière discrète et approchée (voir [DR67]). La discrétisation consiste à découper la région $\Omega(t)$ en un nombre fini de polygones. Nous dirons que la région $\Omega(t)$ est approchée par la région constituée de l'ensemble des polygones, appelé un maillage. La solution de l'intégration des forces extérieures sur la surface du floe sera donc approchée par la solution de l'intégration sur le maillage. Les polygones du maillage sont appelés les éléments finis. Sur chaque élément fini, il est possible d'approcher le calcul intégral par une somme pondérée d'applications linéaires évaluées en un certain nombre de points du domaine de l'élément fini. Nous introduisons une maille de référence $w_{\text{réf}}$ et des applications $T_i : w_{\text{réf}} \rightarrow w_{i,\text{réel}}$ qui relient la maille de référence à chaque élément fini constituant le maillage de la région $\Omega(t)$ (voir Figure 2.1). Nous commençons par effectuer un changement de variable pour passer de l'intégration d'une fonction f définie sur un élément fini $w_{i,\text{réel}}$, à l'intégration sur la maille de référence $w_{\text{réf}}$:

$$\int_{w_{i,\text{réel}}} f(v) dv = \int_{w_{\text{réf}}} (f \circ T_i)(u) |J_{T_i}| du,$$

où $|J_{T_i}|$ est la *jacobienn*e de l'application T_i . Ensuite, nous approchons cette intégrale par une méthode de Gauss-Legendre :

$$\int_{w_{\text{réf}}} (f \circ T_i)(u) |J_{T_i}| du \simeq \sum_{k=1}^n \omega_k (f \circ T_i)(u_k) |J_{T_i}|,$$

où les u_k sont des points déterminés appartenant à la maille de référence, ils sont appelés les points de quadrature, et les coefficients ω_k sont appelés les poids d'intégration et sont calculés à partir des n polynômes de Legendre évalués en les points de quadrature (voir [DR67]).

Pour notre modèle de la dynamique des glaces de mer, nous choisissons une méthode de quadrature de Gauss-Legendre à trois points de quadrature sur des éléments finis de type triangulaire tels que $(1/6, 1/6)^T$, $(1/6, 2/3)^T$ et $(2/3, 1/6)^T$ sont les coordonnées barycentriques des points de quadrature et $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$ et $(0, 1)^T$ sont les coordonnées des sommets du triangle de référence (voir Figure 2.1). Dans ces conditions, l'application T qui associe un point $(x, y)^T$ du triangle de référence à un point d'un triangle PQR du maillage de la région $\Omega(t)$ d'un floe

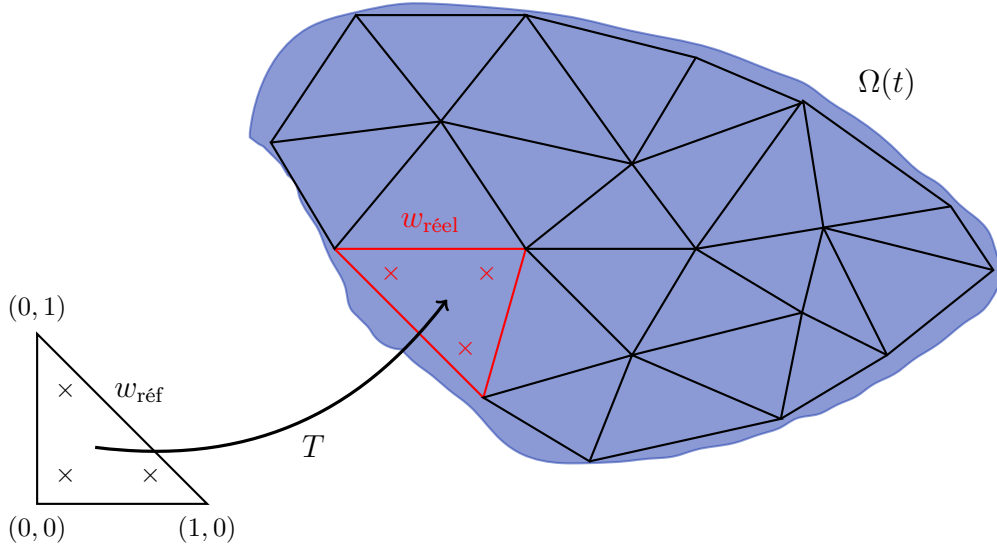


FIGURE 2.1 – Exemple d’une application T reliant la maille de référence comportant trois points de quadrature à un élément fini $w_{\text{réel}}$ du maillage de $\Omega(t)$.

et la jacobienne associée J_T s’expriment :

$$\forall (x, y)^T \in w_{\text{réf}}, \quad T \left((x, y)^T \right) = (Q - P, R - P) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P$$

$$J_T = (Q - P, R - P).$$

Pour tout floe $\Omega(t)$, le maillage associé est caractérisé par les coordonnées des points de quadrature et les poids associés pour chaque élément du maillage. Comme les floes sont rigides, ces caractéristiques, prises dans le repère propre au floe $\mathcal{R}_{\Omega(t)}$, sont invariantes au cours du temps. Les coordonnées des points de quadrature seront donc calculées à l’instant initial $t = 0$ dans le repère $\mathcal{R}_{\Omega(0)}$. Tout au long de la simulation, un simple changement de base permettra de passer des coordonnées dans $\mathcal{R}_{\Omega(t)}$ aux coordonnées dans le repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

Comme les modèles utilisant les éléments finis sont généralement très coûteux en ressources informatiques (mémoire, temps de calcul, etc) et que notre modèle a pour but de simuler la dynamique d’une population de quelques milliers de floes avec un large panel de tailles, nous utilisons l’optimisation suivante. Nous définissons la taille moyenne de l’élément de maillage s_m , en fonction de la surface du floe (voir Table 1.1). Ainsi, chaque floe, qu’il soit grand ou petit, est maillé avec le même nombre d’éléments finis (environ 25 par floe).

Cette discrétisation de la surface des floes en éléments finis sert principalement pour le calcul de l’action des forces extérieures à partir d’une méthode de quadrature de Gauss-Legendre, mais dans un futur travail, cela pourra aussi servir à l’intégration d’un modèle d’endommagement. Afin de simplifier les notations, dans la suite de la thèse, Ω représentera à la fois la région du plan occupée par le floe et la région occupée par le maillage associé. De même, $\partial\Omega$ représentera à la fois la frontière du floe et la frontière du maillage associé.

2.1.2 La discrétisation temporelle

Simuler la dynamique d'un système de plusieurs corps soumis à des forces extérieures dont d'éventuelles forces de collision, consiste à intégrer à la dynamique régulière, sans collisions, des événements de la dynamique non régulière, les collisions. En étudiant la littérature, il existe deux principales méthodes numériques pour cela. Elles sont nommées *event driven* et *time stepping*. La première considère la collision comme un événement instantané. Nous notons t^* le temps d'apparition d'une collision.

En t^* , les positions sont considérées invariantes, par contre les vitesses ont la possibilité d'être discontinues. Cette discontinuité est déterminée par des lois de contact entre les vitesses avant et après la collision. Entre deux événements successifs, les vitesses des floes vérifient les équations du moment linéaire et du moment angulaire qui sont intégrées avec des schémas numériques classiques. Lorsqu'une collision apparaît en t^* , un problème linéaire de complémentarité est construit à partir des positions et des vitesses en t^- et sa résolution détermine les vitesses en t^+ . Ensuite, les données mis à jour en t^+ sont utilisées comme données initiales pour l'intégration de la dynamique régulière jusqu'au prochain événement. Il est donc primordial de détecter avec précision la collision : trop tôt, les vitesses ne sont pas modifiées et la collision n'est donc pas traitée, trop tard, la collision a entraîné une interpénétration.

Ces méthodes de gestion d'événements ont été développées à l'origine pour simuler des gaz considérés comme un milieu granulaire où les grains sont des sphères dures (voir [AW59, Rap80, GZ93]). Dans la communauté des glaciologues, Herman applique de tels algorithmes pour décrire la dynamique des glaces de mer [Her11, Her12]. Cependant, contrairement à nous, ces méthodes sont appliquées à un ensemble de floes de forme circulaire.

La deuxième méthode, appelée *time stepping*, intègre en même temps les événements de type collision et la dynamique régulière sur un intervalle de temps fixe $\delta t = [t_k, t_{k+1}]$. Les lois de contact peuvent être violées sur $[t_k, t_{k+1}[$. Si c'est le cas, le contact est traité et une impulsion de contact est calculée telle que le système vérifie les lois de contact en t_{k+1} . Nous pouvons citer en exemple le schéma de Moreau [Mor85a, Jea99] repris par de nombreux auteurs (voir [MM93, ST96, TA11]) et le schéma de Schatzman-Paoli [PS02a, PS02b]. Des détails sur ces schémas peuvent être trouvés dans [Aca13].

Ces techniques sont apparues avec la méthode des éléments distincts (voir [Cum71, CS79]) utilisant des lois de contact du type loi de Hertz.

Comparons maintenant les avantages et les inconvénients de ces méthodes numériques. Les méthodes appelées *event driven* possèdent l'avantage d'être plus faciles à manipuler que celles appelées *time stepping*. De plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires et de localiser précisément en temps et en espace la collision, contrairement aux méthodes *time stepping* qui doivent se contenter d'un ordre d'intégration bas même sur le mouvement libre sans collisions et se contentent de localiser grossièrement en temps et en espace les collisions. Cependant, les méthodes *event driven* possèdent aussi plusieurs inconvénients. Le premier est que le pas de temps tend vers zéro à l'approche d'un point d'accumulation. Dans le cas, par exemple, d'une balle rebondissant sur le sol avec un coefficient de restitution strictement inférieur à 1, l'instant où la balle ne rebondit plus est atteint après une infinité de rebonds, cet instant est appelé un point d'accumulation. Sans astuces, les méthodes *event driven* ne traitent pas de tels points, contrairement aux méthodes *time stepping* grâce à un pas de temps *assez petit* dépendant de la situation. Il est communément établi que les méthodes *time stepping* se comportent mieux que les méthodes *event driven* pour traiter un grand nombre de contacts, cela est néanmoins à modérer dans certaines situations

(voir page 314 dans le livre [AB08]).

Moreau dans [Mor78], définit une convergence au sens de la *convergence en graphe* qu'il applique au processus de rafle (voir Partie 1.1.2). À partir de ces travaux, des preuves de convergence ont été trouvées pour les schémas de Moreau et de Schatzman-Paoli, mais aucune pour les méthodes *event driven*. Enfin, un dernier inconvénient concernant les méthodes *event driven* est leur sensibilité aux différents seuils utilisés. Dans notre cas, les deux seuils utilisés sont la distance de collision (voir Partie 2.1.3) et la tolérance sur la condition de non interpénétration (voir Partie 2.1.4). Un grand nombre d'informations peut être trouvé dans [Had06, AB08, McN11].

Deux types de schémas d'intégration sont associés à ces méthodes numériques : ceux à un pas et ceux à plusieurs pas. Dans le cas où des contacts apparaissent très fréquemment, les schémas à plusieurs pas perdent tout leur intérêt. En effet, l'ordre du schéma retombe à un après le traitement de la collision, donc s'il y a un contact traité à chaque pas de temps, l'ordre ne sera pas supérieur à un sur toute la simulation.

Finalement, dans le cadre de cette étude, nous choisissons une méthode *event driven* pour la précision de la localisation des collisions et la facilité de manipulation. Nous verrons qu'en prenant un seuil de collision assez grand, nous éviterons de traiter les collisions une par une et nous assurerons une borne inférieure strictement positive pour le pas de temps (voir Partie 2.1.5). De plus, nous choisissons un schéma d'intégration du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation (voir Partie 3.1.1). Pour le système de floes S , l'équation (1.1.5) devient :

$$\begin{cases} W(t + \Delta t) &= W(t) + \Delta t \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H}(t) \\ \mathcal{G}(t + \Delta t) &= \mathcal{G}(t) + \Delta t W(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}(t) = \left(\begin{array}{c} G_i(t) \\ \theta_i(t) \end{array} \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Le schéma complet de la méthode *event driven* utilisé pour notre modèle est présenté sur la figure 2.2. Dans un premier temps, nous porterons notre attention sur le pas de temps qui sera pris *assez petit* pour assurer la stabilité des vitesses des floes, c'est-à-dire, garder des vitesses bornées par la vitesse de dérive libre déterminée par les vitesses du vent et du courant, et du nombre de Nansen (voir l'équation 1.2.2). Notons un tel pas de temps Δt . Si aucune collision n'est détectée sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, alors la dynamique évolue à pas constant de Δt en Δt . Si une collision est détectée en $t^* \in [t, t + \Delta t]$, alors la dynamique régulière est intégrée sur $[t, t^*]$ et la collision est traitée en t^* . Dans un second temps, nous détaillerons la détection des collisions en espace (voir Partie 2.1.3) puis en temps (voir Partie 2.1.5).

Définition 2.1.2.1 (Critère de stabilité des vitesses des floes). *Le modèle est dit assurer la stabilité des vitesses des floes si, pour tout $t \in I = [0, T]$, $T > 0$, pour tout $\dot{G}(0) \in [-K_0, K_0]$, il existe $\Delta t_{max} > 0$ tel que pour tout $\Delta t \leq \Delta t_{max}$, l'un des deux critères est vérifié :*

$$\begin{aligned} & \dot{G}(t) \in [-K_t, K_t], \\ \text{ou} & \left| \dot{G}(t + \Delta t) \right| < \left| \dot{G}(t) \right|, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

avec

$$K_t = |Na\mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)|.$$

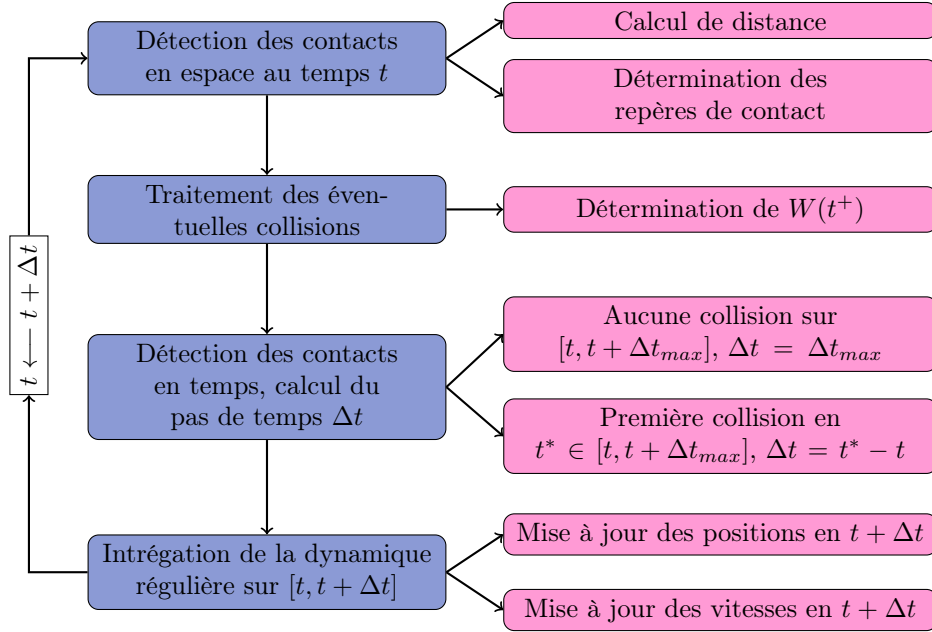


FIGURE 2.2 – Le procédé global d’intégration de la dynamique pour notre modèle.

Nous remarquons que ces critères sont dépendants de la vitesse des courants et de la manière dont elle varie. Nous appelons $Na\mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$ la vitesse caractéristique des courants et nous la notons $V_c(t)$. Nous considérons V_c bornée sur I . Ainsi nous pouvons définir le maximum de K_t sur I . Le deuxième critère est nécessaire lorsque les variations de V_c entraînent une diminution de K_t au cours du temps. En effet, dans ce cas, il existe des vitesses de floe pour lesquelles le premier critère n’est pas vérifié. Dans la suite, nous montrerons, pour un modèle idéalisé, qu’il est possible de construire des pas de temps maximaux Δt_{max} , tels que le modèle satisfait le critère (2.1.1). Nous verrons que ces pas de temps sont de l’ordre de la seconde permettant de capturer un grand nombre d’éventuels changements dans la nature du contact (frottant, glissant, roulant, les deux, etc). Puis nous montrerons qu’avec un modèle vérifiant ce critère, les vitesses des floes sont majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t.$$

Nous commençons par le cas où les courants sont constants au cours du temps. Nous verrons ensuite les conséquences lorsque les courants varient et nous calculerons le pas de temps maximal associé à des conditions de vent et d’océan réalistes dans les zones marginales des glaces de mer.

Reprenons l’analyse du modèle idéalisé 1D (voir Partie 1.2.1), avec un vent et un courant océanique constants sur I . Pour un floe dont la surface est infinitésimale et que l’on peut donc réduire au point G , l’équation du moment linéaire peut s’écrire :

$$\dot{G}(t + \Delta t) = \dot{G}(t) + \Delta t \left(\rho^{-1} \rho_a C_a |\mathbf{U}_a| \mathbf{U}_a + \rho^{-1} \rho_w C_w |\mathbf{U}_w - \dot{G}(t)| \left(\mathbf{U}_w - \dot{G}(t) \right) \right).$$

Dans ce cas, nous avons $K_t = K$ constant au cours du temps, et nous nous focalisons sur la vérification du 1^{er} critère uniquement. Nous définissons la famille de fonctions $\mathcal{F} = (f_{\Delta t})_{\Delta t > 0}$, telle que :

$$\forall \Delta t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_{\Delta t}(x) = x + C_1(\Delta t) + C_2(\Delta t) |\mathbf{U}_w - x| (\mathbf{U}_w - x),$$

avec

$$C_1(\Delta t) = \Delta t \rho^{-1} \rho_a C_a |\mathbf{U}_a| \mathbf{U}_a \quad \text{et} \quad C_2(\Delta t) = \Delta t \rho^{-1} \rho_w C_w > 0.$$

Étudions cette famille de fonctions définies sur \mathbb{R} . Premièrement, reprenons et précisons l'égalité (1.2.2), cela nous explicitera le choix de la borne K . Nous cherchons un réel x^* , tel que pour une fonction de \mathcal{F} nous ayons :

$$\begin{aligned} f_{\Delta t}(x^*) &= x^* \\ \Leftrightarrow \rho_a C_a |\mathbf{U}_a| \mathbf{U}_a + \rho_w C_w |U_w - x^*| (U_w - x^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^* &= Na \mathbf{U}_a + \mathbf{U}_w. \end{aligned}$$

Ainsi nous prenons $K = |x^*|$ comme borne de la vitesse des floes. Nous considérons donc que le modèle respecte la dynamique des floes lorsque le critère (2.1.1) est vérifié. L'étude se portera sur l'intervalle $[-K, K]$, et visera à déterminer Δt_{max} tel que, pour tout $\Delta t \leq \Delta t_{max}$, nous avons $f_{\Delta t}(x) \in [-K, K]$.

Pour commencer, nous étudions les dérivées première et seconde de la fonction $f_{\Delta t}$ par rapport à x :

$$\begin{aligned} f'_{\Delta t}(x) &= \begin{cases} 1 - 2C_2(\Delta t)(\mathbf{U}_w - x) & \text{si } x \leq \mathbf{U}_w \\ 1 + 2C_2(\Delta t)(\mathbf{U}_w - x) & \text{si } x \geq \mathbf{U}_w \end{cases} \\ f''_{\Delta t}(x) &= \begin{cases} 2C_2(\Delta t) & \text{si } x \leq \mathbf{U}_w \\ -2C_2(\Delta t) & \text{si } x \geq \mathbf{U}_w \end{cases} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que pour tout $\Delta t > 0$, $f_{\Delta t}(x) - x$ admet une unique solution, et $f_{\Delta t}(x)$ est une fonction strictement convexe sur $]-\infty, \mathbf{U}_w]$ et strictement concave sur $]\mathbf{U}_w, +\infty[$. Il existe donc un point d'inflexion en \mathbf{U}_w . De plus nous remarquons la propriété suivante pour une fonction de \mathcal{F} :

$$\forall \Delta t > 0, \forall (x, \mathbf{U}_a, \mathbf{U}_w) \in \mathbb{R}^3, f_{\Delta t}(-x, -\mathbf{U}_a, -\mathbf{U}_w) = -f_{\Delta t}(x, \mathbf{U}_a, \mathbf{U}_w). \quad (2.1.2)$$

Cette propriété nous servira pour l'étude des différents cas possibles suivant les valeurs de \mathbf{U}_a et \mathbf{U}_w .

Il existe quatre différents cas possibles :

- (i) : \mathbf{U}_a et \mathbf{U}_w positifs.
- (ii) : \mathbf{U}_a et \mathbf{U}_w négatifs.
- (iii) : \mathbf{U}_a positif et \mathbf{U}_w négatif.
- (iv) : \mathbf{U}_a négatif et \mathbf{U}_w positif.

Ce qui revient à regarder si le point d'inflexion est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'intervalle $[-K, K]$. Nous traitons les cas dans l'ordre. Dans ce qui suit nous supposons que le couple $(\mathbf{U}_w, \mathbf{U}_a)$ n'est pas égal au couple $(0, 0)$ dont l'étude est sans intérêt.

- (i) : Le point d'inflexion est à l'intérieur de $[-K, K]$. Nous avons au point d'inflexion, \mathbf{U}_w , la dérivée égale à 1 et

$$f_{\Delta t}(\mathbf{U}_w) = \mathbf{U}_w + C_1(\Delta t) \geq \mathbf{U}_w.$$

Ainsi sur l'intervalle $[\mathbf{U}_w, K]$, $f_{\Delta t}$ atteint le point fixe $x^* = K$ avec des dérivées strictement décroissantes. Par conséquent, il est nécessaire et suffisant que la dérivée en x^* soit positive pour que $f_{\Delta t}(x) \leq K$ (voir Figure 2.3). Pour $\mathbf{U}_a = 0$, $x^* = \mathbf{U}_w$,

donc la dérivée en x^* est positive quel que soit $\Delta t > 0$. Pour $\mathbf{U}_a > 0$, cela revient à écrire :

$$\begin{aligned} f'_{\Delta t}(x^*) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2C_2(\Delta t)(\mathbf{U}_w - x^*) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \Delta t &\leq \frac{\rho}{2\mathbf{U}_a\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}. \end{aligned}$$

De ces inégalités nous définissons sur I , le critère suivant :

$$\Delta t \leq \frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}. \quad (2.1.3)$$

D'après les valeurs de nos paramètres et pour un vent de vitesse égale à $10m/s$ nous obtenons alors $\Delta t_{max} \simeq 424.4s$.

Comme $f_{\Delta t}$ n'admet qu'un unique point fixe, nous avons déjà, pour Δt vérifiant (2.1.3), $f_{\Delta t}(x) \geq x$ sur l'intervalle $[-K, K]$, ce qui revient à $f_{\Delta t}(x) \geq -K$ sur $[-K, K]$, et $f_{\Delta t}(x) \leq K$ sur $[\mathbf{U}_w, K]$. Il nous reste à prouver que $f_{\Delta t}(x) \leq K$ sur $[-K, \mathbf{U}_w]$. Or sur cette intervalle, $f_{\Delta t}$ est strictement convexe. Donc il est nécessaire et suffisant d'avoir $f_{\Delta t}(-K) \leq K$. Cela revient à écrire :

$$f_{\Delta t}(-K) - K \leq 0,$$

$$\text{or} \quad f_{\Delta t}(-K) = -K + C_1(\Delta t) + C_2(\Delta t)(2\mathbf{U}_w + Na\mathbf{U}_a)^2$$

$$\Leftrightarrow f_{\Delta t}(-K) - K = -2K + \Delta t L,$$

$$\text{avec} \quad L = \rho^{-1}\rho_w C_w \left(Na^2\mathbf{U}_a^2 + (Na\mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2 \right) > 0,$$

$$\text{d'où} \quad \Delta t \leq \frac{2K}{L}.$$

De ces inégalités nous définissons sur I , le critère suivant :

$$\Delta t \leq \frac{2K_t}{L_t}. \quad (2.1.4)$$

En conclusion, pour ce premier cas, \mathbf{U}_w et \mathbf{U}_a positifs, le critère (2.1.1) est vérifié sur $[-K, K]$ dès que Δt vérifie à la fois (2.1.3) et (2.1.4). De plus la borne $2K/L$ se comporte comme $1/|\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_w|$ donc Δt_{max} est minimal quand la somme $|\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_w|$ est maximale (voir Figure 2.4). Ainsi pour un vent caractérisé par $\mathbf{U}_w = 10m/s$ et un courant caractérisé par $\mathbf{U}_a = 1m/s$, $\Delta t_{max} \simeq 88s$.

(ii) : Soit \mathbf{U}_w et \mathbf{U}_a négatifs, nous avons au point d'inflexion, \mathbf{U}_w , la dérivée égale à 1 et

$$f_{\Delta t}(\mathbf{U}_w) = \mathbf{U}_w + C_1(\Delta t) \leq \mathbf{U}_w.$$

À partir de l'égalité (2.1.2), nous affirmons que l'étude sur $[-K, \mathbf{U}_w]$ est similaire à l'étude sur $[\mathbf{U}_w, K]$ dans le cas précédent, $\mathbf{U}_w \geq 0$. De plus l'étude sur $[\mathbf{U}_w, K]$ est similaire à l'étude sur $[-K, \mathbf{U}_w]$ pour $\mathbf{U}_w \geq 0$ (voir Figure 2.3). Ainsi, nous retrouvons les mêmes conclusions que pour le cas (i).

(iii) : Soit maintenant \mathbf{U}_w et \mathbf{U}_a de signe différent, nous avons donc $|\mathbf{U}_w| \geq K$. Le cas d'égalité revient au cas $\mathbf{U}_a = 0$, et alors, nous retrouvons un des deux cas précédemment étudiés suivant le signe de \mathbf{U}_w . Nous considérons $\mathbf{U}_a \neq 0$ et $\mathbf{U}_w \geq 0$. Sur $[-K, K]$ nous avons $x \geq \mathbf{U}_w$, donc $f_{\Delta t}$ strictement concave. De plus

$$f_{\Delta t}(\mathbf{U}_w) = \mathbf{U}_w + C_1(\Delta t) \geq \mathbf{U}_w,$$

donc la situation est similaire à celle du cas (i) sur $[\mathbf{U}_w, K]$ pour \mathbf{U}_w positif (voir Figure 2.3). Ainsi la conclusion est similaire au cas (i) avec Δt vérifiant (2.1.3) uniquement.

(iv) : Sur $[-K, K]$ nous avons $x \leq \mathbf{U}_w$, donc $f_{\Delta t}$ strictement convexe. De plus

$$f_{\Delta t}(\mathbf{U}_w) = \mathbf{U}_w + C_1(\Delta t) \leq \mathbf{U}_w,$$

donc la situation est similaire à celle du cas (ii) sur $[-K, \mathbf{U}_w]$ pour \mathbf{U}_w négatif (voir Figure 2.3). Ainsi la conclusion est similaire au cas (i) avec Δt vérifiant (2.1.3) uniquement.

En conclusion pour des vitesses de courants constantes, pour tout $t \in I$, nous pouvons définir un pas de temps maximal Δt_{max} , pour s'assurer la stabilité des vitesses des floes comme :

$$\Delta t_{max} = \min \left(\frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right).$$

Que se passe-t-il lorsque les courants ne sont plus constants mais varient au cours du temps ? Il y a deux cas possibles :

- (i) : Les variations de la vitesse caractéristique $V_c(t)$ entraînent une augmentation de K_t au cours du temps.
- (ii) : Les variations de la vitesse caractéristique $V_c(t)$ entraînent une diminution stricte de K_t au cours du temps (voir Figure 2.5).

Soit un temps $t \in I$ donné et le pas de temps $\Delta t \leq \Delta t_{max}$ calculé pour des courants constants, le 1^{er} cas ne pose pas de souci. En effet, nous avons, $K_{t+\Delta t} \geq K_t$. Or, nous avons vu précédemment que pour un tel Δt , la vitesse des floes vérifie :

$$\dot{G}(t + \Delta t) = f_{\Delta t}(\dot{G}(t)) \in [-K_t, K_t] \subset [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}].$$

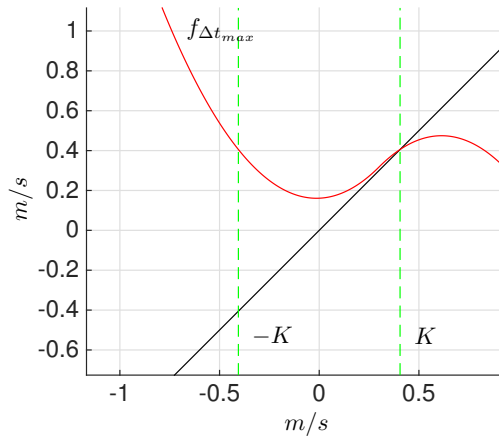
Ainsi le 1^{er} critère de (2.1.1) reste vérifié en $t + \Delta t$. Par contre, si $K_{t+\Delta t} < K_t$, nous avons, en particulier, $f_{\Delta t}(K_t) = K_t \notin [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$. C'est dans ce cas, que le 2^e critère de (2.1.1) est nécessaire. Cela revient à trouver $\tilde{\Delta t}_{max} > 0$, tel que pour tout $\tilde{\Delta t} \leq \tilde{\Delta t}_{max}$ et pour tout $x \in \mathbb{K}_{t+\Delta t} = [-\infty, -K_{t+\Delta t}[\cup]K_{t+\Delta t}, \infty]$, nous avons $|f_{\tilde{\Delta t}}(x)| < |x|$ avec

$$f_{\tilde{\Delta t}}(x) = x + C_1(\tilde{\Delta t}) + C_2(\tilde{\Delta t}) |\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x| (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x),$$

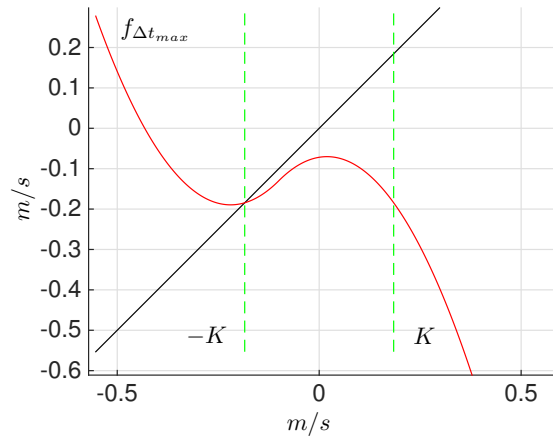
et

$$C_1(\tilde{\Delta t}) = \tilde{\Delta t} \rho^{-1} \rho_a C_a |\mathbf{U}_a(t + \Delta t)| \mathbf{U}_a(t + \Delta t) \quad \text{et} \quad C_2(\tilde{\Delta t}) = \tilde{\Delta t} \rho^{-1} \rho_w C_w > 0.$$

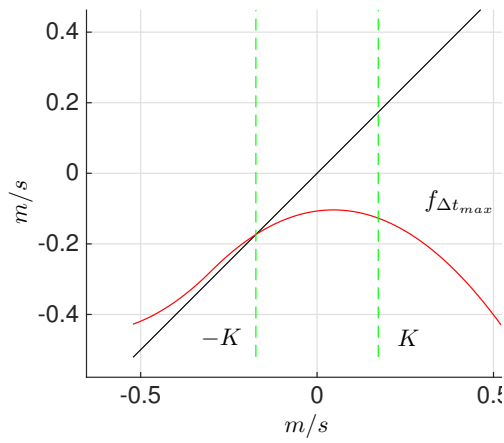
Comme pour le cas constant, nous pouvons étudier $f_{\tilde{\Delta t}}$ en fonction de $\mathbf{U}_a(t + \Delta t)$ et $\mathbf{U}_w(t + \Delta t)$. Nous avons vu précédemment que chacun des quatre cas possibles peut se ramener au cas



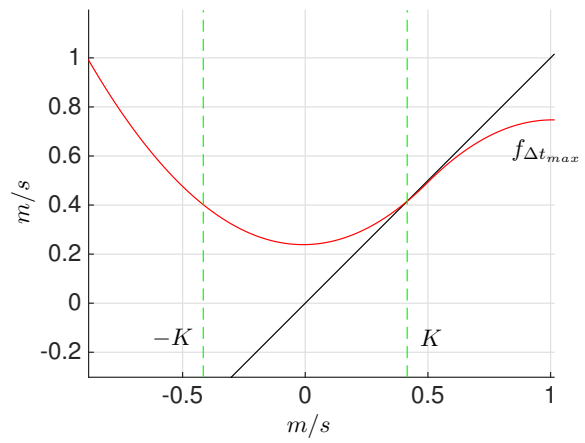
cas (i), $U_a = 5$ et $U_w = 0.3$



cas (ii), $U_a = -4$ et $U_w = -0.1$



cas (iii), $U_a = 6$ et $U_w = -0.3$



cas (iv), $U_a = -4$ et $U_w = 0.5$

FIGURE 2.3 – Exemple de fonction $f_{\Delta t}$ pour différentes valeurs de U_a , U_w en m/s et avec $\Delta t = \Delta t_{max}$.

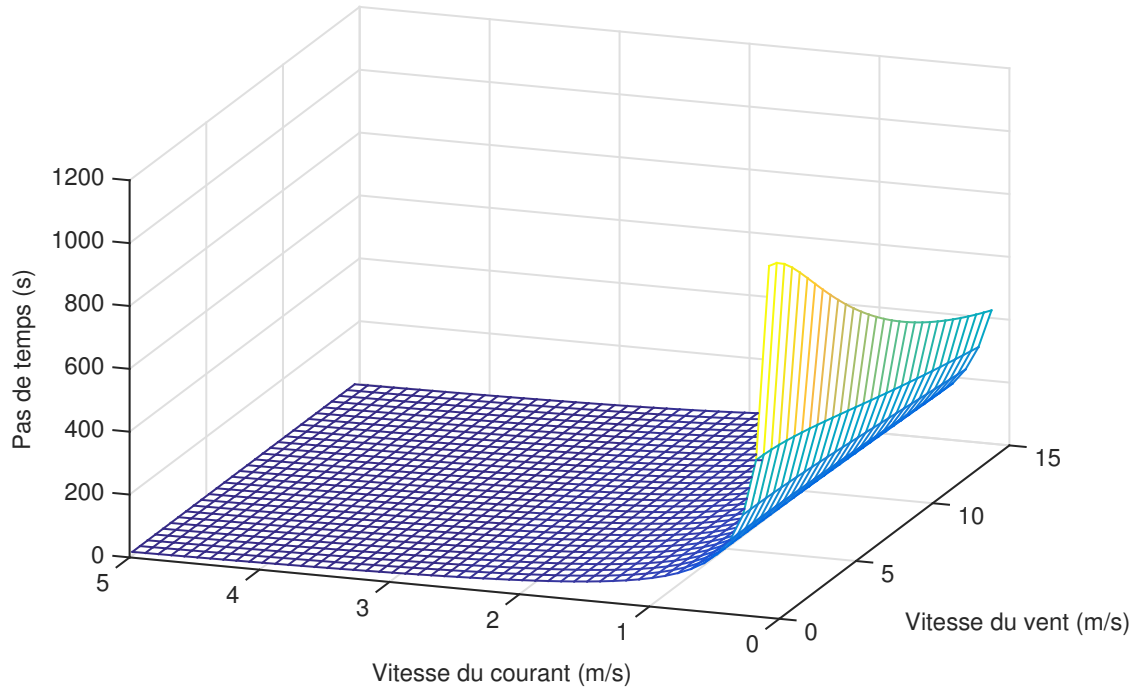


FIGURE 2.4 – Variations de $2K/L$ pour différentes valeurs de \mathbf{U}_a et \mathbf{U}_w en m/s .

$\mathbf{U}_a(t+\Delta t)$ et $\mathbf{U}_w(t+\Delta t)$ positifs. Étudions donc ce cas là. Nous savons que $\mathbf{U}_w(t+\Delta t) \leq K_{t+\Delta t}$ et, sur $]K_{t+\Delta t}, \infty]$, $f_{\tilde{\Delta}t}(x) < x$. Vérifier le 2^e critère revient donc à écrire :

$$f_{\tilde{\Delta}t}(x) + x > 0,$$

$$\text{or } f_{\tilde{\Delta}t}(x) = x + C_1(\tilde{\Delta}t) - C_2(\tilde{\Delta}t)(\mathbf{U}_w(t+\Delta t) - x)^2$$

$$\Leftrightarrow f_{\tilde{\Delta}t}(x) + x = 2x + \tilde{\Delta}t\tilde{L}_t^+,$$

$$\text{avec } \tilde{L}_t^+ = \rho^{-1}\rho_w C_w \left[Na^2 \mathbf{U}_a(t+\Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t+\Delta t) - x)^2 \right],$$

$$\text{or } \tilde{L}_t^+ < 0 \text{ sur }]K_{t+\Delta t}, \infty],$$

$$\text{d'où } \tilde{\Delta}t < \frac{2x}{-\tilde{L}_t^+}.$$

Tandis que sur $[-\infty, -K_{t+\Delta t}[$, $f_{\tilde{\Delta}t}(x) > x$, ainsi vérifier le 2^e critère revient à écrire :

$$f_{\tilde{\Delta}t}(x) + x < 0,$$

$$\text{or } f_{\tilde{\Delta}t}(x) = x + C_1(\tilde{\Delta}t) + C_2(\tilde{\Delta}t) (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2$$

$$\Leftrightarrow f_{\tilde{\Delta}t}(x) + x = 2x + \tilde{\Delta}t \tilde{L}_t^-,$$

$$\text{avec } \tilde{L}_t^- = \rho^{-1} \rho_w C_w \left[N a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2 \right],$$

$$\text{or } \tilde{L}_t^- > 0 \text{ sur } [-\infty, -K_{t+\Delta t}[$$

$$\text{d'où } \tilde{\Delta}t < \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-}.$$

De ces inégalités nous définissons sur I et pour $x \in \mathbb{K}_{t+\Delta t}$, le critère suivant :

$$\Delta t_{max} < \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in]K_{t+\Delta t}, \infty] \end{cases} \quad (2.1.5)$$

De plus les bornes ci-dessus se comportent comme $1/|x|$ quand $|x|$ est grand. Donc le pas de temps est minimal lorsque que $|x|$ est maximal. Prenons par exemple, en un temps $t \in I$ et un pas de temps $\Delta t > 0$ donnés :

$$\mathbf{U}_a(t) = 10m/s, \quad \mathbf{U}_a(t + \Delta t) = 0m/s, \quad \mathbf{U}_w(t) = 2m/s \text{ et } \mathbf{U}_w(t + \Delta t) = 0m/s.$$

Supposons qu'en $t + \Delta t$, la vitesse des floes $\dot{G}(t + \Delta t) = K_t$. Nous avons $K_t > K_{t+\Delta t} = 0$, et pour :

$$\tilde{\Delta}t = \frac{3}{4} \times \frac{2K_t}{-\tilde{L}_t^+} \simeq 51.5,$$

nous avons :

$$2.6 \simeq \left| f_{\tilde{\Delta}t}(\dot{G}(t + \Delta t)) \right| < K_t \simeq 5.2.$$

En conclusion, pour $\dot{G}(0) \in [-K_0, K_0]$, pour tout $t \in I$, et pour tout Δt_{max} vérifiant (2.1.3), (2.1.4) et (2.1.5), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t.$$

En effet, tant que la valeur absolue de la vitesse caractéristique est constante ou augmente, nous avons $\dot{G}(t + \Delta t_{max}) \in [-K_{t+\Delta t_{max}}, K_{t+\Delta t_{max}}]$, et, lorsque K_t diminue strictement, nous avons $\left| \dot{G}(t + \Delta t_{max}) \right| < \left| \dot{G}(t) \right|$. Ainsi, en prenant

$$\Delta t_{max} = \min \left(\frac{3}{4} \left(\frac{-2 \left(\max_{t \in I} K_t \right)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-} \right), \frac{3}{4} \left(\frac{2 \left(\max_{t \in I} K_t \right)}{\max_{t \in I} -\tilde{L}_t^+} \right), \frac{\rho}{2 \left(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)| \right) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right),$$

nous assurons que le modèle idéalisé vérifie le critère (2.1.1). Par exemple, pour des conditions de vent et océan variant sur un intervalle de temps avec pour valeurs maximales des vitesses :

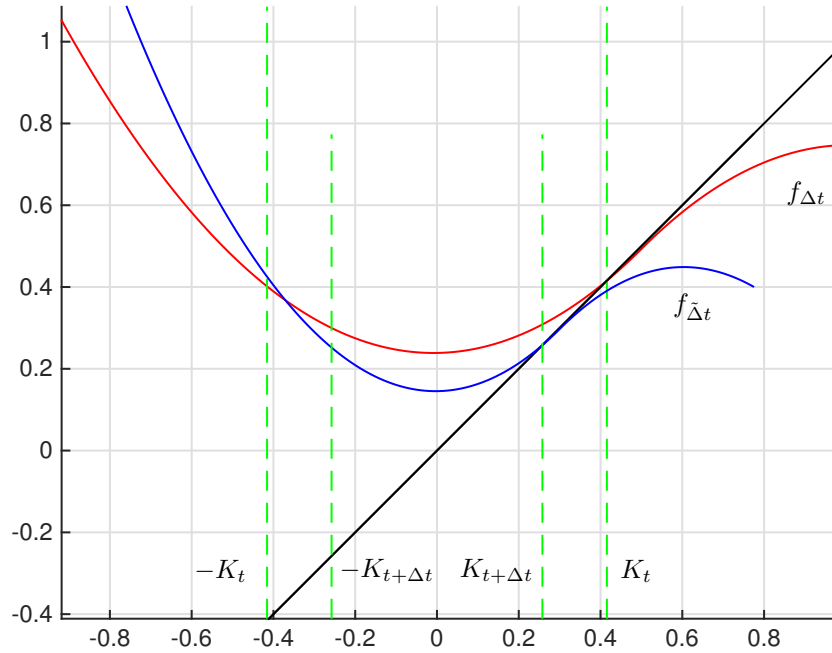


FIGURE 2.5 – Exemple d’un cas où $|V_c(t + \Delta t)| < |V_c(t)|$ pour $\mathbf{U}_a(t) = -4$, $\mathbf{U}_a(t + \Delta t) = -2$, $\mathbf{U}_w(t) = 0.5$ et $\mathbf{U}_w(t + \Delta t) = 0.3$ en m/s , $\Delta t = 176s$ et $\tilde{\Delta t} = 295s$.

$\mathbf{U}_a(t) \in [-10, 10]$ et $\mathbf{U}_w(t) \in [-2, 2]$ en m/s , le minimum des Δt_{max} est environ $28.8s$ quelle que soit la manière dont varient les vitesses du vent et du courant océanique. De surcroît, moins les conditions sont extrêmes, plus le minimum des Δt_{max} augmente. Enfin, prendre $\Delta t < 28.8s$ est donc tout à fait adapté pour répondre aux attentes du modèle, c’est-à-dire capturer les collisions à l’échelle de la seconde.

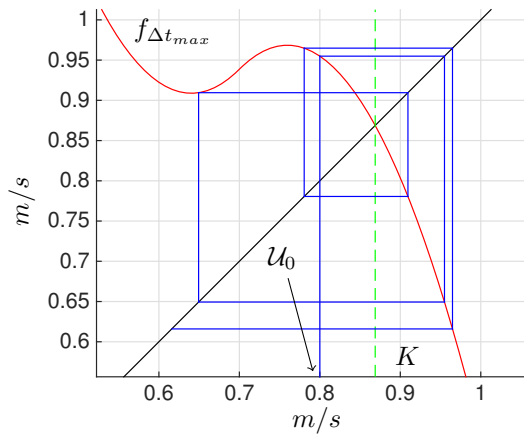
La figure 2.6 représente des exemples de cas pathologiques lorsque le pas de temps ne vérifie pas les critères respectifs (2.1.3), (2.1.4) et (2.1.5) correspondant aux figures (a), (b) et (c) respectivement. De plus, nous pouvons observer en bleu les premiers termes de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ vérifiant

$$\mathcal{U}_{n+1} = f_{\Delta t}(\mathcal{U}_n).$$

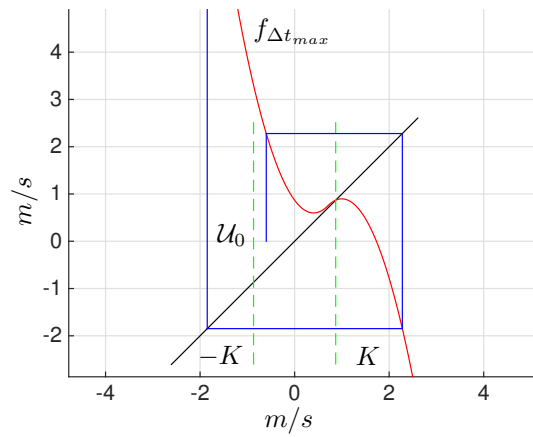
Ces cas sont dits pathologiques car pour V_c constant sur I , nous avons $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ qui diverge.

2.1.3 La détection des collisions en espace

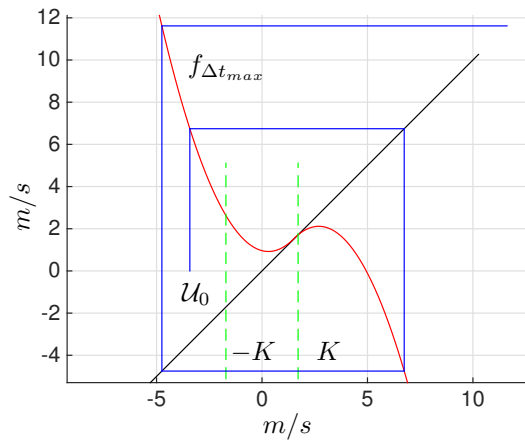
Lors de l’intégration de la dynamique régulière, sur chaque intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, nous effectuons la détection des éventuelles collisions. Nous commençons par la détection en espace. Elle se divise en deux étapes : la première recherche les voisins et la seconde recherche la géométrie de collision. La première doit cibler les floes potentiellement en collision. Cette étape nécessite une fonction distance et une attention particulière doit être portée afin de minimiser le temps de calcul pour chaque candidat traité. Si, à l’issue de la recherche de voisins, des floes se sont révélés être en collision, alors la deuxième étape a pour but de donner la géométrie de



cas (a) : $\mathbf{U}_a = 8$, $\mathbf{U}_w = 0.7$
 et $\mathcal{U}_0 = 0.8$ en m/s , et $\Delta t = 1500s$



cas (b) : $\mathbf{U}_a = 8$, $\mathbf{U}_w = 0.7$
 et $\mathcal{U}_0 = -0.6$ en m/s , et $\Delta t = 300s$



cas (c) : $\mathbf{U}_a = 10$, $\mathbf{U}_w = 1.5$
 et $\mathcal{U}_0 = -3.42$ en m/s , et $\Delta t = 75s$

FIGURE 2.6 – Exemple de cas pathologiques pour Δt ne vérifiant pas les critères : (a) (2.1.3), (b) (2.1.4) et (c) (2.1.5)

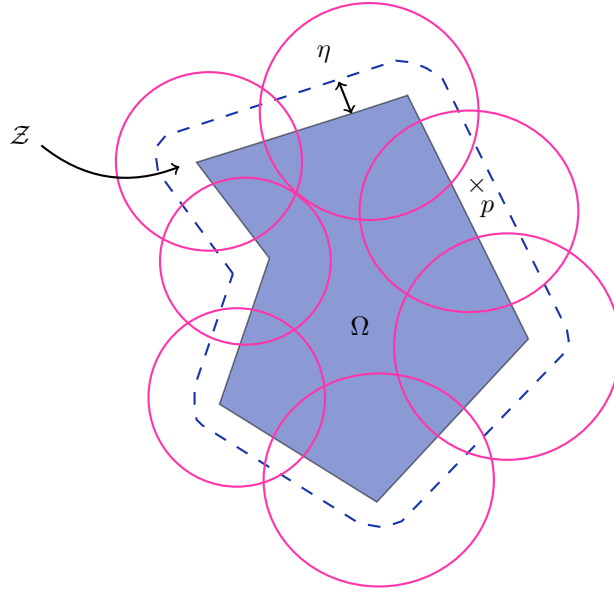


FIGURE 2.7 – Zone de collision \mathcal{Z} et niveau 1 de disques englobants.

ces collisions, c'est-à-dire, doit déterminer les points de contact et les repères de contact associés (voir *Partie 1.1.2*).

Mal conçue, la première étape peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul et donc, elle peut limiter le nombre de floes dans les simulations. Pour cibler les floes candidats à la collision il faut connaître leur position relative et donc leur distance aux autres. C'est le calcul de distance qui doit être à la fois rapide et précis. Ces caractéristiques peuvent varier suivant la configuration. Dans une configuration où les floes sont très éloignés les uns des autres, une grande précision n'est pas nécessaire, la rapidité du calcul doit être privilégiée. Par contre, dans une configuration où les floes sont rapprochés les uns des autres, la précision doit être prioritaire. Cela implique différents calculs de distance suivant les configurations géométriques. La recherche de voisins est donc une étape fortement liée à la notion de distance. Cependant, la notion de distance est elle-même fortement liée à la notion de collision puisque c'est la distance entre les floes qui caractérisera s'ils sont en collision ou non. Nous allons préciser et définir ce que nous entendons par la collision entre deux floes dans cette thèse. En effet, autant la notion d'interpénétration est simple à exprimer en termes mathématiques par l'intersection non vide de deux ensembles, et simple à manipuler, autant la notion de collision est plus ardue à exprimer et à manipuler. Il vient naturellement la notion de distance strictement égale à 0 lorsque l'on parle de collision. Mais numériquement, tester la stricte égalité est difficile à manipuler et est une source d'erreurs assurée. L'idée est donc de remplacer l'égalité par une inégalité et de définir la collision comme un événement apparaissant dès que la distance est plus petite qu'une distance donnée strictement supérieure à 0. Cette distance donnée est appelée une distance de collision et notée η . Ainsi, associée à η , une zone autour du floe, appelée zone de collision et notée \mathcal{Z} , est créée telle que pour tout point $P \in \mathcal{Z}$, la distance de P au floe est inférieure ou égale à η (voir *Figure 2.7*).

Nous l'avons vu dans les observations des zones marginales des glaces de mer, la distribution des tailles suit une loi puissance (voir *Partie 1.3*). Ainsi, de grandes variations de la taille des floes

sont à considérer. Définir une distance de collision indépendante des floes paraît mal adaptée. En effet, avoir η identique pour deux collisions, une entre des floes de petites tailles, et une entre des floes de grandes tailles, entraînera soit un manque de précision (donc un comportement mal modélisé) pour la collision entre petits, soit un excès de précision (donc un temps de calcul et des ressources informatiques trop importants) pour la collision entre grands. Une originalité de cette thèse est donc de considérer la distance de collision dépendant de la taille du floe telle que, pour un floe Ω_i avec \mathcal{A}_i l'aire de sa surface, la distance de collision associée vaut :

$$\eta_i = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_i}}{100}.$$

Nous pouvons définir la notion de collision maintenant. Elle est construite comme une relation symétrique et transitive. Nous donnons donc la définition de collision entre deux floes Ω_i et Ω_j . En fait, il existe deux notions de collision qui dépendent de la distance de collision considérée entre les deux floes. Soit nous prenons le maximum des distances de collision, soit nous prenons le minimum. Lorsque que nous considérons une collision entre deux floes de taille similaire, les deux définitions sont similaires. Par contre, lorsque nous considérons la collision entre deux floes de taille très différente, nous retrouvons le problème soulevé précédemment. Si nous prenons le maximum des distances de collision alors le comportement sera déterminé avec peu de précision, tandis que si nous prenons le minimum des distances de collision alors le temps de calcul et les ressources informatiques seront trop importants (plus précisément, c'est le pas de temps qui peut devenir *très petit* et ainsi ralentir le temps de simulation) (voir Figure 2.8). En fait, même la précision des calculs est impactée dans le cas du minimum des distances, cela est principalement dû à la distance entre les floes qui est petite par rapport à la taille du plus grand floe (voir Partie 2.1.4). En préambule, nous notons \mathfrak{E}_i l'ensemble des sommets des éléments du maillage, appartenant à la frontière $\partial\Omega_i$.

Définition 2.1.3.1 (floes non interpénétrés). *Deux floes Ω_i et Ω_j sont dits non interpénétrés si $d(\Omega_i, \Omega_j) > 0$.*

Définition 2.1.3.2 (deux notions de la collision entre deux floes et point de collision). *Deux floes Ω_i et Ω_j non interpénétrés sont en collision s'il existe un couple $(k, l) \in \{i, j\}^2$, tel que $k \neq l$ et il existe $Q \in \mathfrak{E}_k$ tel que :*

$$d(Q, \Omega_l) \leq \zeta,$$

avec

$$\begin{aligned} (i) \quad & \zeta = \max(\eta_k, \eta_l), \\ (ii) \quad & \zeta = \min(\eta_k, \eta_l), \end{aligned}$$

et

$$d(Q, \Omega_l) = \inf \{d(Q, P), P \in \Omega_l\}.$$

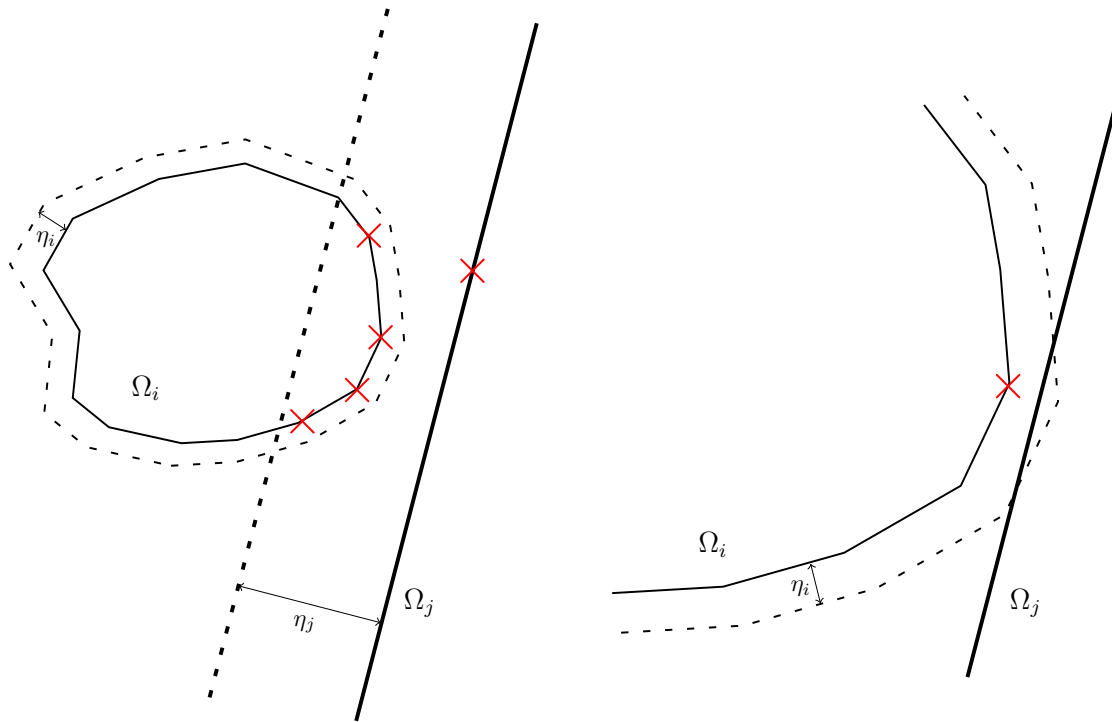
Un tel point Q est appelé point de contact. Nous notons $P_{c,i}$ l'ensemble des points de contact appartenant au floe Ω_i .

Remarque 2.1.3.1. *La région occupée par un floe est fermée et bornée, donc la région occupée par le maillage associé aussi. De plus la frontière de maillage est composée de points appartenant à \mathfrak{E} et de segments reliant ces points. Alors nous affirmons qu'il existe un couple $(k, l) \in \{i, j\}^2$, tel que $k \neq l$ et il existe un couple $(Q, P) \in \Omega_k \times \Omega_l$ tel que :*

$$d(\Omega_k, \Omega_l) = \inf \{d(R, S), (R, S) \in \Omega_k \times \Omega_l\} = d(Q, P), \quad (2.1.6)$$

et

$$Q \in \mathfrak{E}_k \quad \text{ou} \quad P \in \mathfrak{E}_l.$$



Définition (i) de la collision

Définition (ii) de la collision

FIGURE 2.8 – Exemple de collision pour la notion (i) et (ii). En rouge, les points de contact. Dans le cas (ii), nous dirons que la collision est déterminée avec précision car elle est localisée en un seul point, celui le plus proche de Ω_j . Tandis que dans le cas (i), nous dirons que la collision est déterminée avec peu de précision car elle est localisée sur 5 points.

En conclusion, la détection d'une collision revient à chercher un point de la frontière du maillage d'un floe tel que sa distance à un autre floe est plus petite que la distance de collision.

La recherche de voisins est un problème largement étudié depuis ces dernières années. Une multitude d'algorithmes ont été proposés pour traiter ce problème. Les deux principales méthodes sont le partitionnement de l'espace (voir [HH96, BT95]), et les hiérarchies de volumes englobants ou **B**ounding **V**olume **H**ierarchies en anglais (**BHV**) (voir [Qui94, HKT92]). Notre modèle est construit comme un modèle de type lagrangien, c'est-à-dire, que nous nous focalisons sur le mouvement de la particule à travers l'espace et le temps. Ainsi, dans des simulations de dérive sur plusieurs jours, en plein océan, sans obstacles comme conditions aux bords, l'espace à considérer est très grand par rapport à la taille des floes (voir Partie 1.1.3). Les algorithmes de partitionnement de l'espace semblent mal adaptés à cette situation. De plus, nous considérons des floes dont la taille varie beaucoup (voir Partie 1.3). Or, la plupart de ces algorithmes sont inefficaces dans ce cas. Il existe tout de même des travaux visant à surpasser ce problème, nous pouvons citer, entre autres, les travaux de Perkins et Williams [PW01], qui conservent un temps de calcul comparable avec un algorithme de partitionnement de l'espace dans le cas classique, alors que le ratio des tailles atteint 8, c'est-à-dire les plus petits objets traités ont une surface dont l'aire est 64 fois plus petite que les plus grands objets. Ce ratio de 8 n'est malheureusement pas comparable avec celui de 100, ou plus, obtenu dans nos configurations (voir Partie

3.2). Nous avons donc choisi d'adapter un algorithme de type **(BHV)** à notre cadre de travail, pour sa facilité de mise en place et pour son efficacité même avec de grands ratios de tailles. Il existe plusieurs types de volumes englobants. En 3D, cela peut être des sphères et des parallélépipèdes, en 2D, cela peut être des polygones convexes, des rectangles, ou des disques (voir [PG95, GLM96, KHM⁺98]). Nous choisissons des disques pour approcher le contour des floes, pour la facilité à calculer la distance entre eux et leurs éventuelles intersections.

Au delà de ces méthodes, il existe une multitude d'optimisations possibles. Certaines sont basées sur des critères géométriques comme des formes convexes ou des formes symétriques (voir [GLM96, HLC⁺97]), d'autres sont basées sur des critères dynamiques comme les cohérences temporelle et spatiale (voir [Coh95, RKC02]). Plus de détails sur ces méthodes et techniques peuvent être trouvés dans les études suivantes [LG98, JTT01]. Cependant, dans un premier temps, nous ne retenons aucune de ces techniques pour notre modèle. En effet, nous verrons que les premières optimisations nécessaires pour accélérer le temps de calcul seront faites au niveau du traitement des contacts et non au niveau de leur détection (voir Partie 2.1.4).

Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection. Nous parlerons de surfaces englobantes dans notre cas. L'ensemble des surfaces englobantes est représenté par un arbre avec plusieurs niveaux de feuilles, où chaque feuille contient une surface. Cet arbre possède les deux propriétés suivantes :

- (i) : L'union de toutes les feuilles d'un même niveau contient l'entière frontière de l'objet.
- (ii) : Chaque feuille contient l'union de tous ses descendants.

Nous construisons deux niveaux de disques : le niveau 0 constitué d'un seul disque et le niveau 1 constitué de plus de trois disques. Les objectifs de cette construction sont que l'ensemble des disques de niveau 1 couvre le bord du floe et la zone de collision associée, et que le disque de niveau 0, quant à lui, couvre l'ensemble des disques de niveau 1 (voir Figures 2.9 et 2.7). Le centre de chaque disque de niveau 1 est un point de \mathfrak{E} différent pour chaque disque et le rayon peut être différent d'un disque à l'autre. Suivant le nombre de points qui définit la frontière du floe, les disques de niveau 1 englobent les 2 ou 3 points appartenant à \mathfrak{E} voisins du centre du disque (voir Figure 2.10). Nous allons maintenant détailler la construction des disques englobants.

Soit $n_p \in \{2, 3\}$, et soit $\{1, n_t\}$ l'ensemble des indices des points de \mathfrak{E} . Nous parcourons la liste des points de \mathfrak{E} en commençant par l'indice $i = 1$ jusqu'à $i \leq n_t$ par pas de $2n_p$. À chaque point P_i de \mathfrak{E} d'indice i nous construisons le disque de centre P_i et de rayon R_i tel que :

$$R_i = \max_{j \in \{i-n_p, i+n_p\}} \|P_i P_j\| + \eta.$$

Nous notons \mathfrak{D}_1 l'ensemble des disques de niveau 1 et le centre et le rayon d'un disque de \mathfrak{D}_1 sont notés C_1 et R_1 respectivement.

Concernant le deuxième niveau, celui nommé niveau 0, nous commençons par construire le plus petit cercle possible circonscrit aux points de \mathfrak{E} . Soit C_{min} et R_{min} le centre et le rayon de ce cercle. Ensuite, nous construisons le disque D_0 de centre C_0 et de rayon R_0 tel que :

$$C_0 = C_{min} \quad \text{et} \quad R_0 = R_{min} + \underbrace{\frac{6}{5} \left(\max_{i \in \mathfrak{D}_1} R_{1,i} \right)}_{\kappa},$$

κ est la plus petite distance entre un point de la frontière de D_0 et un point de la frontière du floe associé.

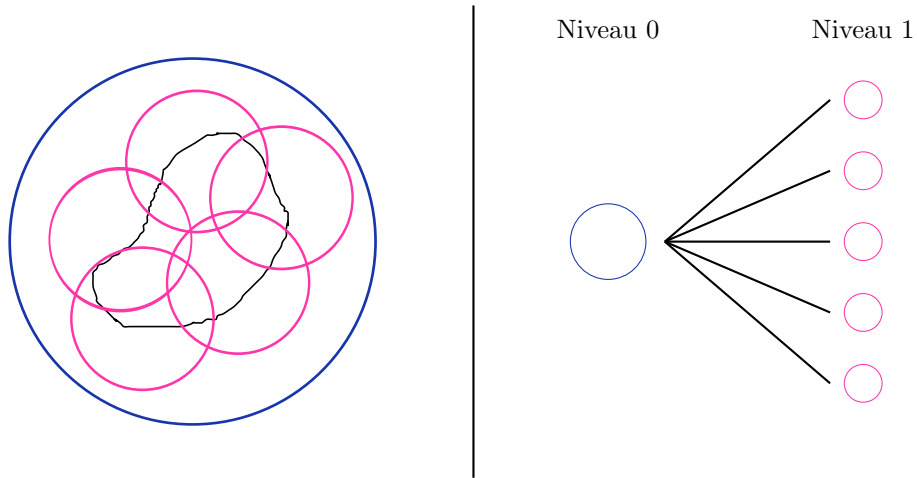


FIGURE 2.9 – Hiérarchie de disques englobants.

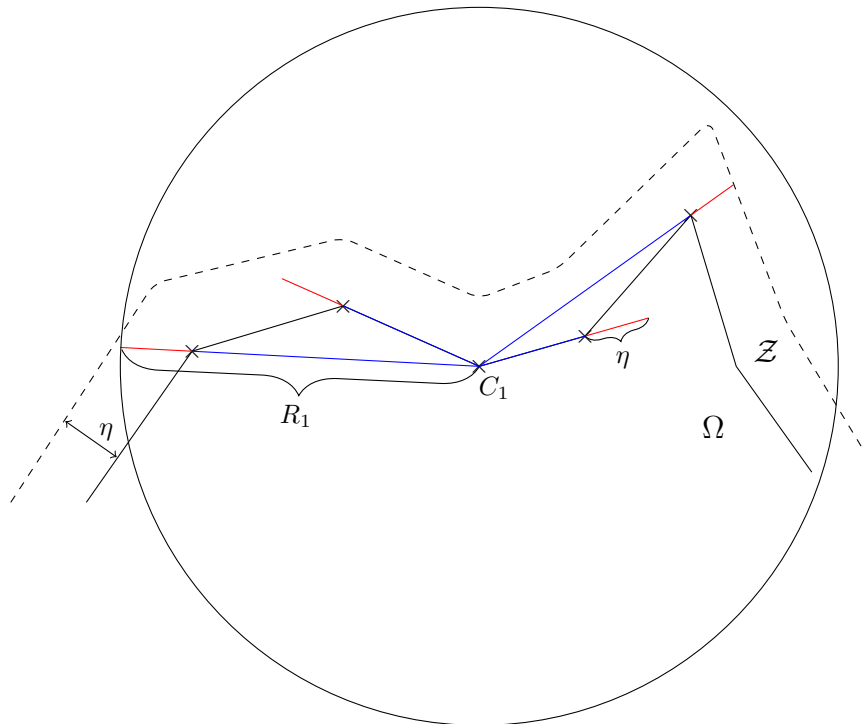


FIGURE 2.10 – Construction d'un disque de niveau 1 de centre C_1 et de rayon R_1 avec $n_p = 2$.

Proposition 2.1.1 (sur la construction de la hiérarchie des disques englobants). *La construction d'une telle hiérarchie de disques englobants définie comme ci-dessus vérifie les trois propriétés suivantes :*

(i) : Soit $P \in \partial\Omega$, alors il existe $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_1$ tel que $P \in \mathcal{D}$.

(ii) : Soit $P \in \mathcal{Z}$, alors il existe $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_1$ tel que $P \in \mathcal{D}$.

(iii) : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_1$, alors $\mathcal{D} \subset D_0$.

Démonstration. (i) : Soit $P \in \partial\Omega$, alors il existe un couple $(P_i, P_{i+1}) \in \mathfrak{E}^2$ tel que $P \in [P_i, P_{i+1}]$. Soit i ou $i+1$ vaut $1 + 2kn_p$ avec k tel que $1 + 2kn_p \leq n_t$, alors les deux points appartiennent à un même disque de niveau 1 de centre P_{1+2kn_p} , donc P appartient à ce même disque. Soit i et $i+1$ appartiennent à $[2 + 2kn_p, 2(k+1)n_p]$. Or nous remarquons que tous les points d'indice $1 + 2kn_p + n_p$ appartiennent aux deux disques de centre P_{1+2kn_p} et $P_{1+2(k+1)n_p}$. Ainsi soit i et $i+1$ appartiennent à $[2 + 2kn_p, 1 + 2kn_p + n_p]$ et alors ils appartiennent au disque de centre P_{1+2kn_p} , soit ils appartiennent à $[1 + 2kn_p + n_p, 2(k+1)n_p]$ et alors les points appartiennent au disque de centre $P_{1+2(k+1)n_p}$. Dans ces deux cas, nous avons donc un disque de niveau 1 contenant $[P_i, P_{i+1}]$, donc P .

(ii) : Soit $P \in \mathcal{Z}$, alors il existe $H \in \partial\Omega$, tel que $d(P, H) \leq \eta$. Or il existe $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_1$ de centre C_1 et de rayon R_1 et $Q \in \mathcal{D}$ tel que :

$$H \in \mathcal{D} \Leftrightarrow d(H, C_1) \leq d(C_1, Q) \leq R_1 - \eta,$$

ainsi

$$\begin{aligned} d(P, C_1) &\leq d(P, H) + d(H, C_1) \\ \Leftrightarrow d(P, C_1) &\leq \eta + R_1 - \eta \\ \Leftrightarrow P &\in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

(iii) : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_1$ de centre C_1 et de rayon R_1 , et soit $P \in \mathcal{D}$. Nous avons $d(P, C_1) \leq R_1$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} d(P, C_0) &\leq d(P, C_1) + d(C_1, C_0) \\ \Leftrightarrow d(P, C_0) &\leq R_1 + R_{min} \\ \Leftrightarrow P &\in D_0. \end{aligned}$$

□

Cette hiérarchie de disques englobants permet de définir un réel positif $\delta_{i,j}$ jouant le rôle de distance entre les floes Ω_i et Ω_j . Ce réel est calculé différemment en fonction de la position relative des deux floes. Un critère est établi permettant de séparer les cas de non collision assurée et de collision possible. Dans le cas de non collision, $\delta_{i,j}$ est simplement calculé en fonction de la distance entre les disques de niveau 0 respectifs. Dans le cas de collision éventuelle, une recherche plus approfondie au niveau des disques de niveau 1 est effectuée. Plusieurs cas sont possibles.

1. Des disques de niveau 1 ont une intersection non vide avec l'intersection des disques de niveau 0.
2. Des disques de niveau 1 d'un des floes ont une intersection non vide avec des disques de niveau 1 de l'autre floe.
3. Enfin, des points de la frontière d'un des floes appartiennent à un disque de niveau 1 de l'autre floe.

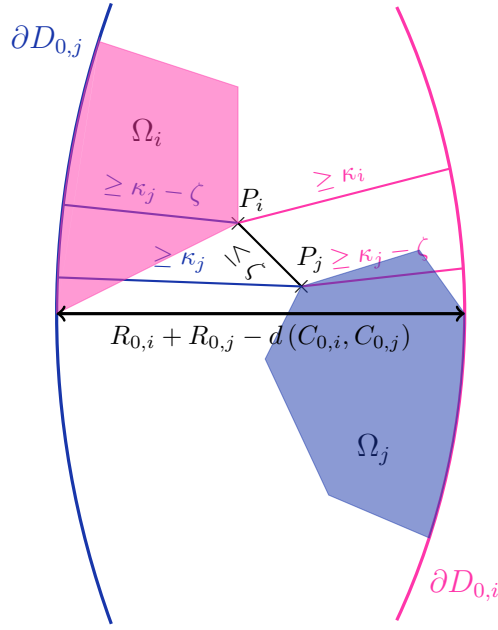


FIGURE 2.11 – Distance maximale entre $C_{0,i}$ et $C_{0,j}$ lors d'une collision.

Arrivé à ce niveau, un calcul de distance entre deux points ou entre un point et un segment est effectué. Dans le cas où il existe au moins un point de contact pour la définition (ii), nous avons l'égalité $\delta_{i,j} = d(\Omega_i, \Omega_j)$ (voir l'égalité 2.1.6). Cela est une conséquence de la construction de la hiérarchie de disques et de la propriété 2.1.1 (ii).

Proposition 2.1.2 (critère de collision). *Soit Ω_i et Ω_j deux floes. Soit $D_{0,i}$, $C_{0,i}$, $R_{0,i}$, κ_i , $D_{0,j}$, $C_{0,j}$, $R_{0,j}$ et κ_j les disques, leur centre, leur rayon et la distance au bord, de niveau 0 des deux floes respectifs. Nous affirmons :*

$$\text{Les floes sont en collision} \Rightarrow d(C_{0,i}, C_{0,j}) \leq R_{0,i} + R_{0,j} + \zeta - (\kappa_i + \kappa_j). \quad (2.1.7)$$

La démonstration est évidente à partir de la figure 2.11. Dans le cas de non collision, nous déterminons la distance entre les deux floes comme :

$$\delta_{i,j} = d(C_{0,i}, C_{0,j}) + \kappa_i + \kappa_j - (R_{0,i} + R_{0,j}).$$

La suite de la détermination de $\delta_{i,j}$ et des points de contact éventuels à partir de la hiérarchie de disques englobants est présentée par l'algorithme 1. Nous notons $d_{zone} = R_{0,i} + R_{0,j} - d(C_{0,i}, C_{0,j})$ et lorsque $d_{zone} \geq 0$, nous notons \mathcal{O}_{ij} l'intersection non vide entre $D_{0,i}$ et $D_{0,j}$.

Nous nous intéressons maintenant au cas où deux disques de niveau 1 s'interpénètrent et nous détaillons le calcul de $\delta_{i,j}$ et la détermination du repère de contact lorsqu'un point de contact est détecté. Soit Ω_i et Ω_j deux floes, soit $P \in \mathfrak{E}_i$, soit $\mathcal{D}_p \subset \mathfrak{D}_{1,j}$, soit $\mathcal{E}_p \subset \mathfrak{E}_j$ et soit \mathcal{S}_p un sous-ensemble de segments composant la frontière maillée du floe Ω_j tels que $\mathcal{D}_p \neq \emptyset$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_p$, $P \in \mathcal{D}$, \mathcal{E}_p est l'union des ensembles de points de \mathfrak{E}_j appartenant à un disque de \mathcal{D}_p et \mathcal{S}_p est l'union des ensembles de segments appartenant à un disque de \mathcal{D}_p . Nous calculons

Algorithme 1 : Recherche de points de contact et distance entre les floes .

Données : $\Omega_i, \Omega_j, D_{0,i}, D_{0,j}, \mathfrak{D}_{1,i}, \mathfrak{D}_{1,j}$ et $d_{zone} \geq \kappa_i + \kappa_j - \zeta$

Résultat : Distance et éventuels points de contact

début

Construction des ensembles d'indices $Inter_i$ et $Inter_j$ tels que pour tout $k \in Inter_i$, $\mathcal{D}_k \in \mathfrak{D}_{1,i}$ et $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{O}_{ij} \neq \emptyset$, et, pour tout $l \in Inter_j$, $\mathcal{D}_l \in \mathfrak{D}_{1,j}$ et $\mathcal{D}_l \cap \mathcal{O}_{ij} \neq \emptyset$;

si $Inter_i = \emptyset$ et $Inter_j = \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

$\delta_{i,j} = d_{zone} + \eta_i + \eta_j$;

sinon si $Inter_i = \emptyset$ et $Inter_j \neq \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

$\delta_{i,j} = \tau_j + \eta_i$;

sinon si $Inter_i \neq \emptyset$ et $Inter_j = \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

$\delta_{i,j} = \tau_i + \eta_j$;

sinon

Collisions éventuelles;

Recherche de l'ensemble $InterE \subset Inter_i \times Inter_j$ tel que pour tout

$(k, l) \in InterE$, $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_l \neq \emptyset$;

si $interE = \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

$\delta_{i,j} = \max_{\substack{k \in Inter_i \\ l \in Inter_j}} (R_{1,k} + R_{1,l} - \eta_i - \eta_j)$;

sinon

Collisions éventuelles;

Recherche des ensembles $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{E}_i \cup \mathfrak{E}_j$ tels que pour tout $P \in \mathfrak{P}$, il existe un couple $(k, l) \in InterE$, tel que $P \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_l$;

si $\mathfrak{P} = \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

$\delta_{i,j} = \max(\kappa_i, \kappa_j)$;

sinon

Collisions éventuelles;

Recherche de la distance entre $P_k \in \mathfrak{P} \cap \Omega_k$ et le bord de l'autre floe Ω_l pour $(k, l) \in \{i, j\}^2$ tel que $k \neq l$. Nous notons cette distance $d_{P_k, l}$ et nous notons $P_c = P_{c,i} \cup P_{c,j}$, l'ensemble des points de contact.;

$\delta_{i,j} = \min_{\substack{P \in \mathfrak{P} \cap \Omega_i \\ Q \in \mathfrak{P} \cap \Omega_j}} (d_{P,j}, d_{Q,i})$;

si $P_c = \emptyset$ **alors**

Il n'y a pas de collision;

sinon

Il y a collision;

Recherche de la géométrie de collision;

si $\delta_{i,j} \leq \min(\eta_i, \eta_j)$ **alors**

$\delta_{i,j} = d(\Omega_i, \Omega_j)$;

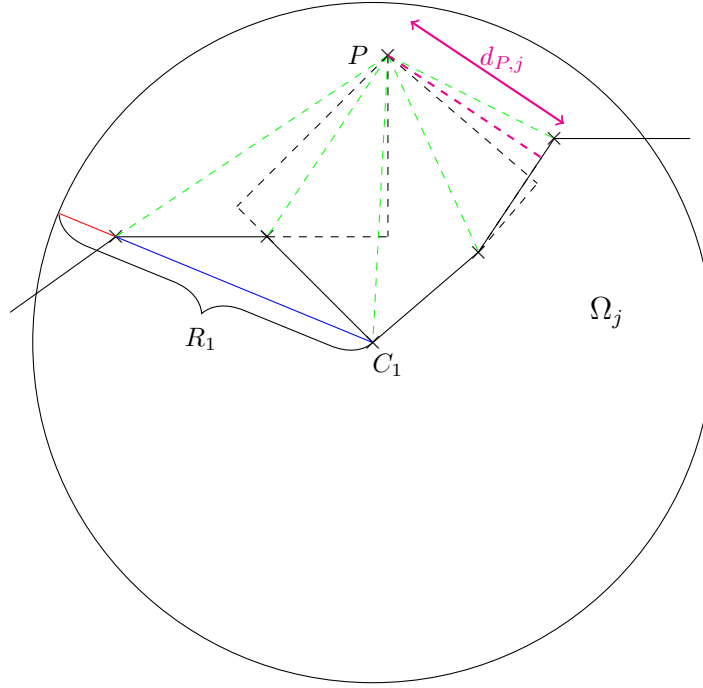


FIGURE 2.12 – Calcul de distance entre un point P et les segments et les sommets de la frontière maillée de Ω_j appartenant à un disque de niveau 1 de centre C_1 et de rayon R_1 avec $n_p = 2$.

la distance entre P et chaque point de \mathcal{E}_p et entre P et chaque segment de \mathcal{S}_p . Lorsque le projeté orthogonal de P sur une des droites portées par un segment de \mathcal{S}_p n'appartient pas à ce segment, la distance n'est pas prise en compte. $d_{P,j}$ est le minimum des distances restantes (voir Figure 2.12). Tant qu'il n'existe pas P un point de contact tel que $\delta_{i,j} \leq \min(\eta_i, \eta_j)$, nous ne pouvons pas assurer $\delta_{i,j} = d(\Omega_i, \Omega_j)$. En effet, il peut exister un point P' de Ω_i tel que $P' \notin \mathfrak{P}$ et $d_{P',j} < \delta_{i,j}$ ou il peut exister un point Q de $\partial\Omega_j$ tel que $\delta_{i,j} = d_{P,j} > d(P, \Omega_j) = d(P, Q)$, $Q \in \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{1,j}$ et $\mathcal{D} \notin \mathfrak{D}_p$ (voir Figure 2.13). Par contre, lorsque P est un point de contact tel que $d_{P,j} \leq \min(\eta_i, \eta_j)$, les situations exhibées ci-dessus ne sont plus possibles car les rayons des disques de niveau 1 sont strictement plus grands que le minimum des distances de collision.

Supposons que nous soyons en présence de P un point de contact. Nous nous intéressons maintenant à déterminer la géométrie de contact en P , c'est-à-dire le repère de contact $\mathcal{R}_P = (P, \mathbf{T}, \mathbf{N})$. Précisément nous nous focalisons sur la définition de la normale au contact. La tangente sera construite directement telle que \mathcal{R}_P est un repère orthonormal dirigé dans le sens direct. Afin de déterminer \mathbf{N} normale dirigée vers l'extérieur en P nous introduisons la notion de cône normal à un ensemble non convexe. Pour cela, l'idée est de considérer un voisinage convexe autour de P . Pour chaque $x \in \Omega$, nous associons un réel positif r_x , tel que l'intersection \mathcal{B}_x , entre la boule centrée en x de rayon r_x et Ω , $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}(x, r_x) \cap \Omega$, soit convexe (voir Figure 2.14).

Définition 2.1.3.3 (Cône normal à Ω fermée de \mathbb{R}^2 en $x \in \Omega$ (voir Figure 2.15)). Soit Ω la région fermée non forcément convexe de \mathbb{R}^2 . Pour $x \in \Omega$ nous notons le cône normal à Ω en x , \mathcal{N}_x et le définissons par :

$$\mathcal{N}_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (x \in \overset{\circ}{\Omega}) \text{ ou } (x \in \partial\Omega \text{ et } \mathcal{B}_x = \{x\}) \\ \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{v} \cdot (c - x) \leq 0, \forall c \in \mathcal{B}_x\} & \text{si } x \in \partial\Omega \text{ et } \mathcal{B}_x \neq \{x\} \end{cases}$$

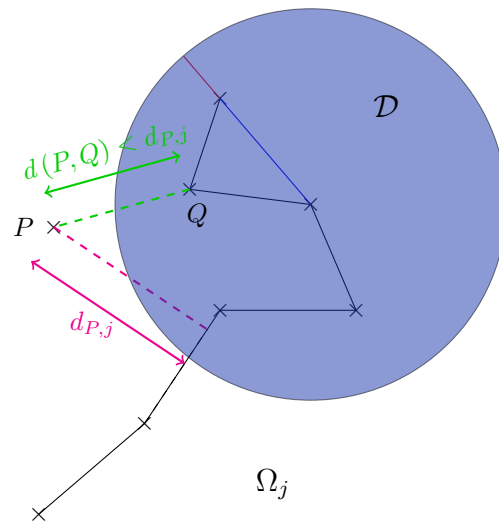


FIGURE 2.13 – Pour P non point de contact, exemple pour lequel $d_{P,j} = \delta_{i,j} \neq d(\Omega_i, \Omega_j)$ avec $Q \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{1,j}$ et $\mathcal{D} \notin \mathcal{D}_p$.

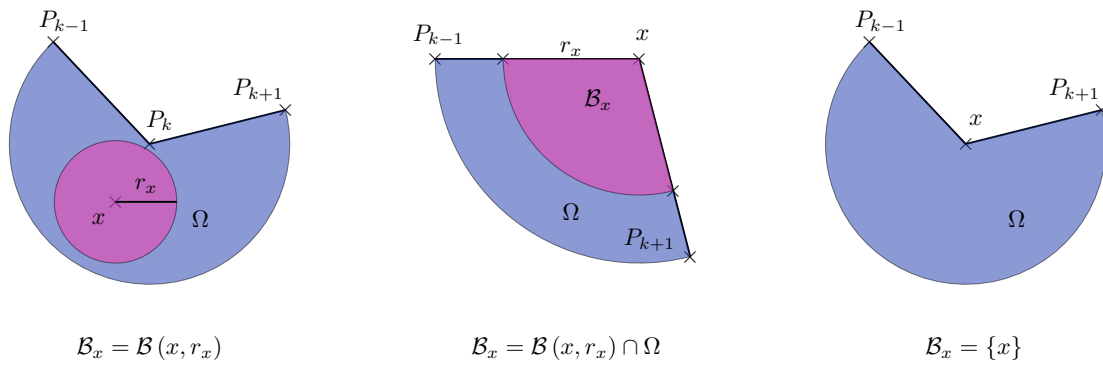


FIGURE 2.14 – Exemples de construction de \mathcal{B}_x pour différents points x d'un floe maillé Ω .

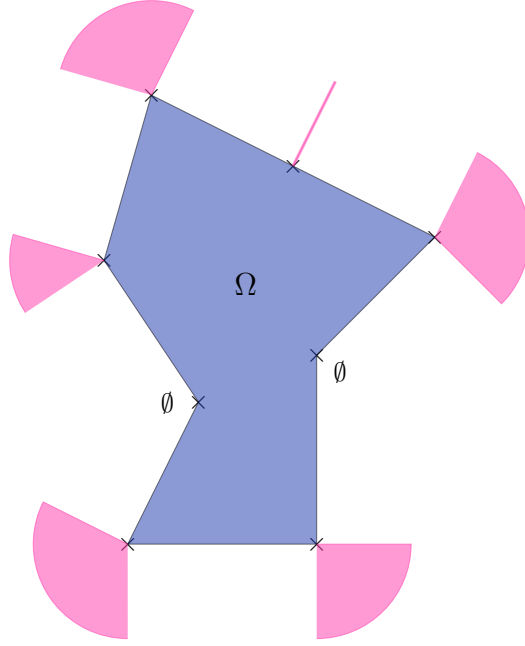


FIGURE 2.15 – Exemple d’un floe maillé Ω et des cônes normaux à Ω en chaque point de \mathfrak{E} .

Remarque 2.1.3.2. Si Ω est un convexe alors cette définition est équivalente à celle que l’on peut trouver pour un convexe d’un ensemble de Hilbert (voir [AB08] définition du cône normal page 74). Dans le cas d’un floe maillé, si $x \in \partial\Omega$, nous notons $(P_k, P_l) \in \mathcal{E}^2$ tel que $x \in [P_k, P_l]$. Si $[P_k, x]$ et $[x, P_l]$ sont colinéaires alors \mathcal{N}_x est restreint à un unique vecteur $\mathbf{v} \neq 0$. Sinon, si Ω est concave, il existe x tel que pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(x, r) \cap \Omega$ est un ensemble concave. Ainsi le rayon associé à un tel point x est zéro et $\mathcal{B}_x = \{x\}$ (voir Figure 2.15).

Revenons à notre point de contact P . Nous notons $Q \in \Omega_j$ tel que $d(P, \Omega_j) = d(P, Q)$. Il existe $(Q_{l-1}, Q_l, Q_{l+1}) \in \mathfrak{E}_j^3$ tel que $Q_l \in]Q_{l-1}, Q_{l+1}[$ et $Q \in]Q_{l-1}, Q_{l+1}[$. De même, il existe $(P_{k-1}, P_{k+1}) \in \mathfrak{E}_i^2$ tel que $P \in]P_{k-1}, P_{k+1}[$. En considérant des floes maillés, le contact peut être de deux types différents. Soit il est dit ponctuel lorsque le contact se fait au niveau de deux sommets du maillage du bord des floes, soit il est dit linéique lorsque le contact se fait au niveau de deux segments du maillage du bord des floes.

Nous l’avons vu précédemment, la notion de collision 2.1.3.2 (ii) permet de réduire le nombre de points de contact, augmentant donc la précision de la localisation en espace de la collision. Nous allons voir maintenant, que la notion de cône normal permet elle aussi, en étendant le nombre de types différents de contacts à 4, illustrés sur la figure 2.16, une meilleure localisation de la collision.

- (i) : $\mathcal{N}_P = \emptyset$.
- (ii) : $\mathcal{N}_P \neq \emptyset$ et le contact est linéique.
- (iii) : $\mathcal{N}_P \neq \emptyset$, le contact est ponctuel et $\mathbf{PQ} \in \mathcal{N}_P$.
- (iv) : $\mathcal{N}_P \neq \emptyset$, le contact est ponctuel et $\mathbf{PQ} \notin \mathcal{N}_P$.

Remarque 2.1.3.3. Dans tous les cas nous avons $\mathbf{QP} \in \mathcal{N}_Q$. En effet, par l’absurde, si cela n’était pas vrai, il existerait $c \in \mathcal{B}_Q$ tel que $\mathbf{Qc} \cdot \mathbf{QP} > 0$ et $d(P, c) < d(P, Q)$, ce qui est contradictoire avec le fait $d(P, \Omega_j) = d(P, Q)$. De plus, lorsque le contact est linéique nous avons forcément $\mathcal{N}_P \neq \emptyset$ et $\mathbf{PQ} \in \mathcal{N}_P$. Enfin, lorsque $\mathbf{PQ} \notin \mathcal{N}_P$, qui inclus le cas $\mathcal{N}_P = \emptyset$, il

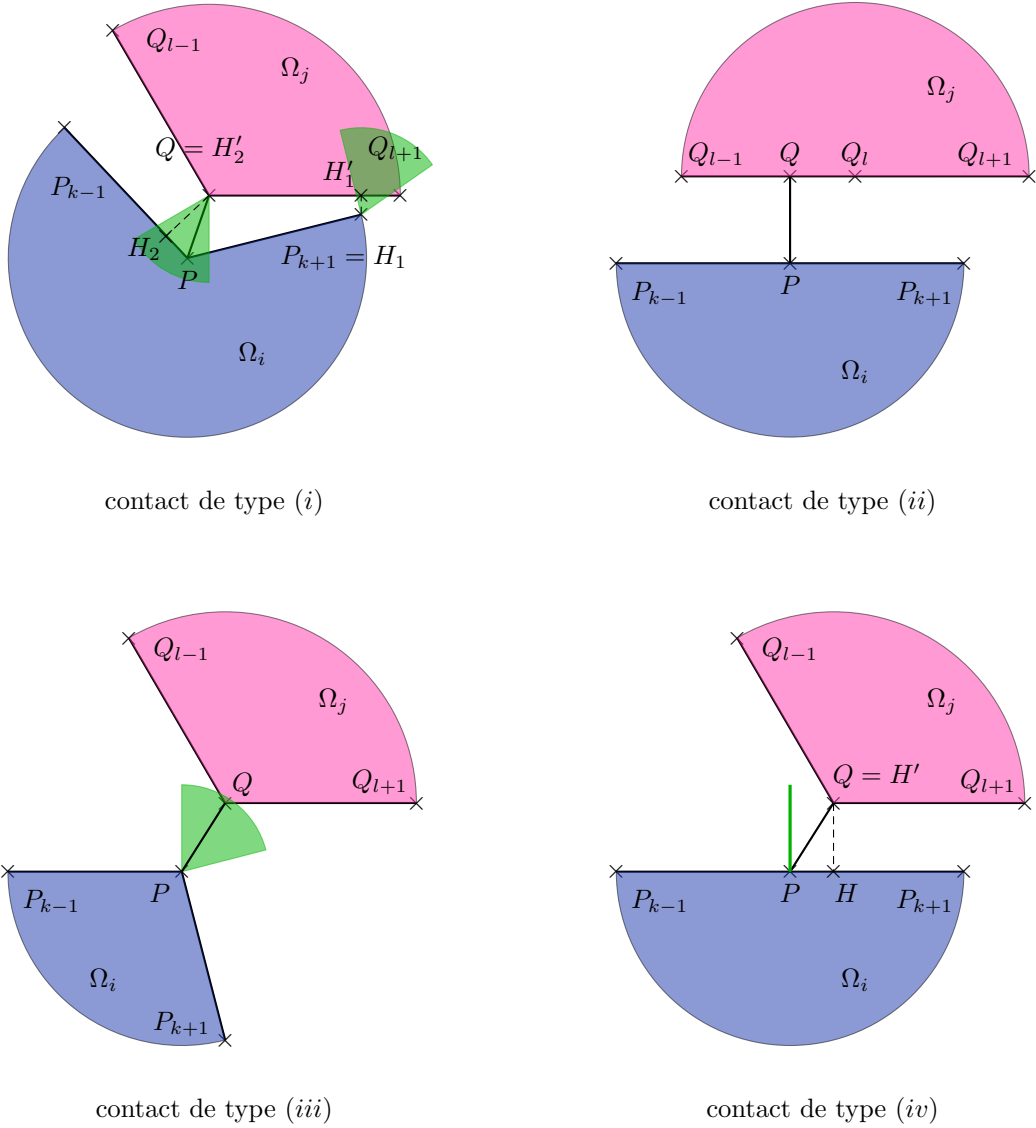


FIGURE 2.16 – Les 4 types différents de contact que nous pouvons rencontrer.

existe un couple $(H, H') \in [P_{k-1}, P_{k+1}] \times [Q_{l-1}, Q_{l+1}]$ tel que $d(H, H') < d(P, Q)$ et, soit $H \in \mathfrak{E}_i$ et $\mathbf{H}\mathbf{H}' \in \mathcal{N}_H$, soit $H' \in \mathfrak{E}_j$ et $\mathbf{H}'\mathbf{H} \in \mathcal{N}_{H'}$. Ce couple n'est pas unique lorsque $\mathcal{N}_P = \emptyset$. Nous en déduisons qu'au moins un des deux, disons H , est un point de contact (voir Définition 2.1.3.2). Alors dans ce cas, nous restreignons le contact ponctuel à H . De plus, la situation $\mathbf{P}\mathbf{Q} \notin \mathcal{N}_P$, peut entraîner des comportements après contact non réalistes dus à l'impulsion normale dirigée par $\mathbf{P}\mathbf{Q}$ (voir Figure 2.17).

Bilan, exclusivement dans les cas où le contact est linéaire ou le contact est ponctuel et $\mathbf{P}\mathbf{Q} \in \mathcal{N}_P$, nous déterminons la normale \mathbf{N} comme le vecteur unité dirigé par $\mathbf{P}\mathbf{Q}$. Si Q n'est pas unique, c'est qui est possible lorsque nous sommes dans la situation (i) avec $P = Q$ et le projeté orthogonal de Q sur $[P, P_{k+1}]$ appartient à \mathcal{N}_Q , nous déterminons autant de normales que de points Q . Ainsi, il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point P n'est pas construit et P n'est pas considéré dans le traitement des contacts. Finalement, nous notons \tilde{P}_c l'ensemble des points de

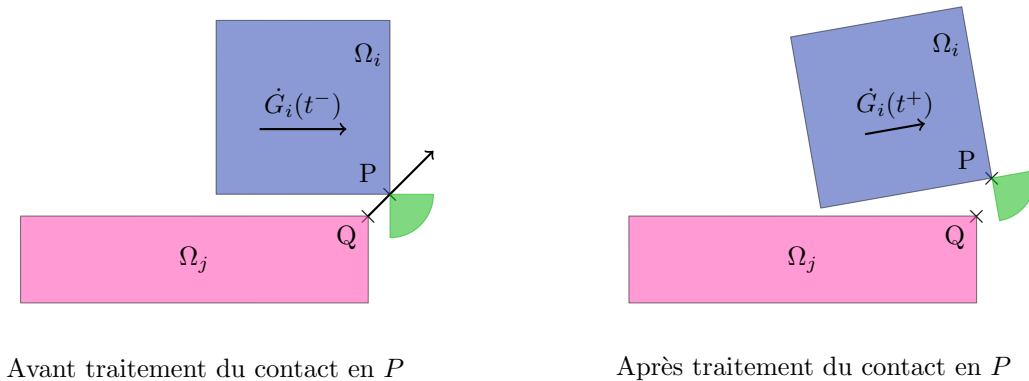


FIGURE 2.17 – Exemple de glissement sans décollement du floe Ω_i sur le floe obstacle Ω_j . Si nous considérons l'impulsion normale subie par Ω_i en P dirigée par \mathbf{QP} , alors un mouvement non réaliste de décollement du floe Ω_i apparaîtra après contact.

contact pour lesquelles un (plusieurs) repère(s) de contact est (sont) établi(s). Dans la suite du manuscrit, la résolution des problèmes linéaires de complémentarité impliqueront uniquement des points de \tilde{P}_c . D'après la remarque 2.1.3.3, restreindre à \tilde{P}_c permet de considérer un unique point lorsque le contact est ponctuel, améliorant ainsi la localisation des collisions, et ce, indépendamment de la définition de floes en collision. La notion 2.1.3.2 (ii) reste néanmoins intéressante dans certaines configurations impliquant des floes non convexes et lors de contacts linéiques (voir Figure 2.18).

Une fois les deux phases, recherche de voisins et détermination des repères de contact, effectuées, nous avons le matériel nécessaire pour écrire un problème linéaire de complémentarité et traiter les collisions (voir Partie 1.1.2). Nous détaillons les méthodes numériques pour résoudre de tels problèmes dans la partie 2.1.4.

2.1.4 Les événements collisions

Nous nous plaçons en $t^* \in I$ pour lequel le système S contient $m > 0$ contacts différents, chacun associé à un repère de contact différent :

$$\{\mathcal{R}_{p_1} = (P_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1), \dots, \mathcal{R}_{p_m} = (P_m, \mathbf{T}_m, \mathbf{N}_m)\}.$$

Par contre, comme nous l'avons vu précédemment, il est possible d'avoir plusieurs repères de contact différents impliquant le même point de contact. À partir de ces données, nous construisons un problème linéaire de complémentarité du type 1.1.23. La différence notable est l'intégration des forces extérieures, supposées continues sur I . En t^* , l'intégration donne $\mathfrak{H} = 0$. Le théorème d'existence 1.1.6 et la mise en place d'une solution sans augmentation d'énergie restent vrais. Étudions maintenant, les différentes méthodes de résolution possibles pour traiter le contact sous cette forme.

L'état de l'art

Dans la littérature, nous pouvons trouver un grand nombre de méthodes pour résoudre le problème du multi-contact frottant. Je n'ai pas l'ambition ici de toutes les lister et de toutes les présenter, ainsi je donnerai quelques exemples que nous pouvons répartir dans trois grandes catégories différentes :

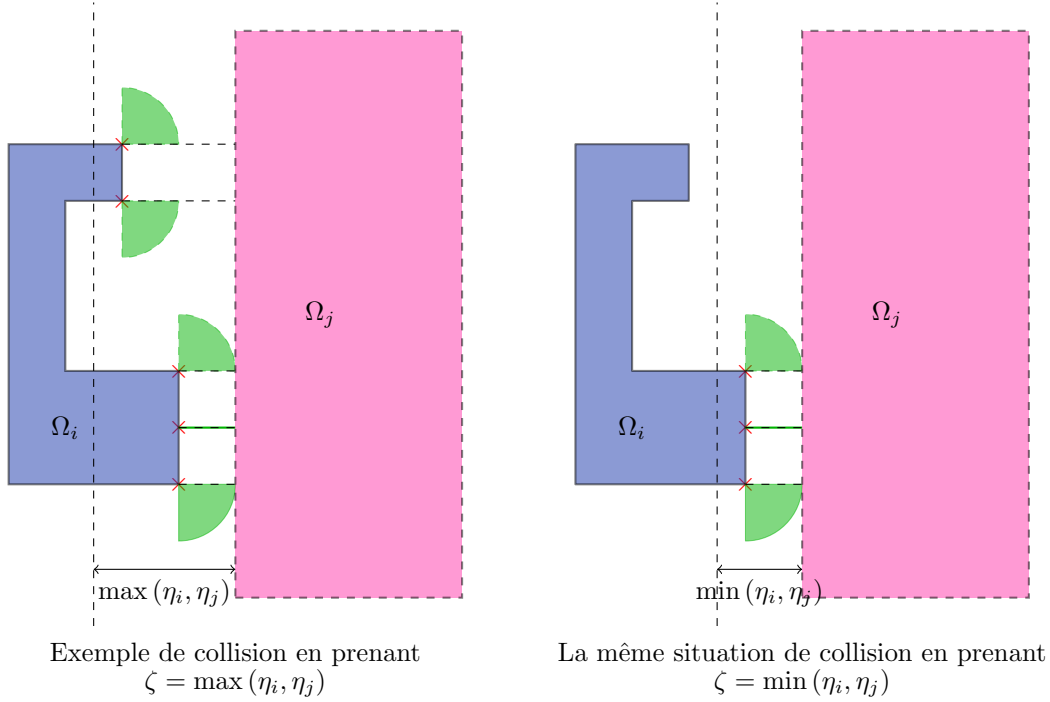


FIGURE 2.18 – Exemple d’un contact entre deux floes Ω_i et Ω_j avec un nombre de points de contact différent en fonction de la notion 2.1.3.2 (i) ou (ii) utilisée.

1. les méthodes dites de régularisations (voir [MW88b]), comme les méthodes de pénalisations ou de multiplicateurs de Lagrange,
2. les méthodes dites itératives comme les méthodes de Gauss-Seidel (voir [MP88]),
3. les méthodes dites de pivots comme les méthodes de Lemke ou de Dantzig (voir [Lem80]).

Les premières sont utilisées dans les modèles régularisant les lois de contact (voir Partie 1.1.2), en particulier la loi de non interpénétration. Les méthodes de pénalisations décrivent les forces de contact en fonction de la taille de l’interpénétration (voir [MW88b]). Ces méthodes connaissent des problèmes de précision et de stabilité. Pour les surpasser, elles sont souvent combinées à des techniques de multiplicateurs de Lagrange basées sur des algorithmes d’Uzawa (voir [SWT85, SL92]) ou basées sur des méthodes de Newton (voir [AC91, WP96]) ou Newton-Raphson (voir [SL92]). Je ne développerai pas plus ces différentes techniques qui sont réservées aux modèles régularisants que nous n’avons pas adoptés dans le cadre de cette étude.

Les deuxième et troisième catégories de méthodes peuvent être utilisées sans régularisation des lois de contact et peuvent s’employer pour résoudre des problèmes linéaires de complémentarité du type 1.1.23 que nous noterons $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$. Parmi les méthodes itératives nous pouvons citer entre autres les méthodes de Gauss-Seidel, de Jacobi, de relaxation avec projection **SORP** (voir [LPR91, RCL88]), de gradient conjugué (voir [HL99]) ou encore les méthodes de *splitting*. Par exemple, dans les travaux de Moreau [MP88, Mor99, Jea99], une méthode de Gauss-Seidel est utilisée. Elle consiste à estimer les vitesses W_{est} et les impulsions \mathbf{z}_{est} après contact. Puis, en altérant un unique contact j , nous pouvons écrire : $W_{corr} = W_{est} + \mathcal{M}^{-1}B_j(\mathbf{z}_{corr,j} - \mathbf{z}_{est,j})$ tel que W_{corr} vérifie les lois de contact. Cette opération est répétée sur l’ensemble des points de contact. L’arrêt peut être considéré d’après l’examen des quantités $J^T \mathcal{M}^{-1} J \lambda$. La convergence de l’al-

gorithme a été prouvée seulement dans des cas particuliers (voir [JAJ98]). Un de ses avantages est de ne pas avoir besoin de discrétiser le cône de Coulomb en un nombre fini de directions. Par contre, du fait de son procédé itératif, l'algorithme peut entraîner des pertes de symétries suivant l'ordre dans lequel sont traités les points de contact. Un grand nombre de variantes sont disponibles dans la littérature (voir [Bar93, LW05]). Par exemple, dans [CDR98, RCL88], les auteurs utilisent les travaux de Aitken [Ait50] pour accélérer l'algorithme de Gauss-Seidel. Dans [TBV12], les auteurs mettent en place un algorithme combinant plusieurs techniques comme les méthodes de *splitting* (voir page 394 du livre [CPS92]) et de Gauss-Seidel. Ils obtiennent de bons résultats de convergence mais cela est aussi dû au fait que le problème du contact est découpé en deux problèmes indépendants : le premier visant à trouver l'impulsion normale de contact sans friction et le deuxième visant à trouver l'impulsion tangentielle de contact à partir de l'impulsion normale solution du 1^{er} problème. Il est possible d'établir un algorithme itératif entre les deux problèmes pour lier les impulsions normales et tangentielles mais la convergence n'est pas prouvée. Dans [TA11], les auteurs utilisent des techniques de Gauss-Seidel et de Gauss-Jacobi et évitent le problème de discrétisation du cône de Coulomb en relâchant la contrainte de non-interpénétration. Malgré le caractère non-physique de la relaxation, les auteurs donnent des arguments pour affirmer que le comportement de contact de leur algorithme est un bon comportement de contact. Enfin, je citerai quelques autres auteurs utilisant des méthodes itératives comme l'algorithme d'Uzawa (voir [Mau06]) ou le gradient conjugué (voir [GF02, RF06]), avec des modèles de dynamique non régulière limités aux problèmes sans friction pour lesquelles la matrice A du $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ est symétrique.

Malheureusement, la matrice A du $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ n'est plus symétrique dès que nous considérons le contact frottant et n'est même pas une P -matrice dans certaines situations de contact. Dans ces cas, je n'ai pas connaissance de preuve de convergence des algorithmes itératifs vus précédemment et, de plus, dans la pratique ils peuvent ne pas converger. L'avantage de certains algorithmes de la troisième catégorie, comme les algorithmes de Lemke (voir [Lem80]), est qu'il existe des preuves d'existence pour des matrices A co-positives sous certaines conditions (voir [CPS92]). Le Lemke (voir pages 267 et 283 du livre [CPS92]) est basé sur la propriété suivante : si \mathbf{v} est positif alors $\mathbf{z} = 0$ et $W(t^+) = W(t^-)$ sont solutions. Il existe plusieurs variantes de cet algorithme dont une mettant en œuvre un \mathbf{LCP} augmenté noté $\mathbf{LCP}(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{v}})$ tel que :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d^T \\ d & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix},$$

avec d un vecteur artificiel, en pratique, ce vecteur est souvent composé de 1. Dans ce cas, le but est d'obtenir une solution $\tilde{\mathbf{z}} \geq 0$ telle que $\mathbf{z}_0 = 0$. Si $\tilde{\mathbf{v}} \geq 0$, la solution est immédiate, sinon, il existe un indice j tel que $\tilde{\mathbf{v}}_j < 0$. Cette technique est associée avec une technique de différenciation des pivots par lexicographie (voir pages 339 du livre [CPS92]) pour obtenir des algorithmes évitant des boucles infinies dans le procédé de pivotement (voir [Mur88]). Un grand nombre d'auteurs a utilisé les algorithmes de Lemke pour résoudre le problème du contact avec des techniques d'implémentation parfois différentes [Kla86, ST96, AP97, SP99, Llo05]. D'autres algorithmes de pivots sont aussi utilisés dans la littérature. Par exemple celui de Dantzig (voir page 248 du livre [CPS92]), prouvé converger pour des P -matrices, est utilisé dans [KB88, Bar93, Bar94].

Il existe plusieurs articles comparant les temps de calcul et les comportements de contact obtenus après la résolution de contacts types (voir [RCL88, CDR98, SKV⁺12, AB08]). En particulier je citerai le travail de Raous dans la partie 3.5 du livre [WP99] qui compare les temps de calcul pour les algorithmes de Lemke, **SORP**, Gauss-Seidel avec les travaux de Aitken et le gradient conjugué dans plusieurs situations de contact. Après analyse de ces articles ou livres,

nous pouvons affirmer que l’algorithme de Lemke est souvent le plus rapide en temps de calcul, qu’il est bien adapté pour des systèmes impliquant moins de 5000 objets et dans des configurations où la matrice A est seulement co-positive. Concernant le comportement après contact, les algorithmes de Lemke donnent de bonnes performances pour contrôler l’énergie cinétique du système et pour garantir la symétrie du système. Néanmoins, l’algorithme de Lemke étant une technique globale, c’est-à-dire traitant les contacts simultanément, il ne garantit pas une bonne propagation du contact (*voir Partie 2.1.4 et Partie 3.1.1*).

Finalement, nous choisissons les algorithmes de Lemke pour résoudre le problème linéaire de complémentarité du type 1.1.23. La plupart des variantes que nous utilisons proviennent des algorithmes du code de calcul **SICONOS**. En pratique, ces algorithmes sont bien adaptés pour la majorité des situations mais nécessitent encore des optimisations pour augmenter le taux de réussite (*voir Partie 2.1.4*). De plus amples informations de l’état de l’art des méthodes numériques disponibles pour le traitement des contacts pourront être trouvées dans les articles et livres suivant [CPS92, CDR98, WP99, Bro00, Cha02, AB08, TBV12].

Les optimisations supplémentaires

Nous avons pu l’observer dans la pratique, en dépit d’un théorème d’existence de solutions et de techniques lexicographiques pour éviter les cycles infinis, la résolution du problème de contact et en particulier, la détermination d’une solution par l’algorithme de Lemke peut échouer. Dans mes premières tentatives j’observais autour de 80% de situations de contact résolues avec pas plus de quelques dizaines de points de contact à traiter. Il a donc fallu mettre en place quelques optimisations supplémentaires, que je développe dans cette partie, pour atteindre un taux de réussite de plus de 99.9995% dans les situations réalistes de la partie 3.2 comportant parfois des matrices A de taille supérieure à 5000×5000 .

Les premières optimisations correspondent aux deux seuils présents dans les méthodes *event-driven* : la distance de collision (*voir Partie 2.1.3*) et la tolérance sur la condition de non interpénétration. La première a déjà été abordée, elle permet de réduire le nombre de points de contact et ainsi préciser la géométrie de contact. Il est à remarquer que prendre une distance de collision *trop petite* afin de restreindre le traitement du contact à l’unique premier contact dans l’ordre chronologique n’est pas conseillé. En effet, les erreurs numériques peuvent entraîner des asymétries après contact. Imaginons un choc frontal, les points de contact définissant la surface en contact doivent être traités simultanément pour ne pas créer de rotation après contact entraînant une perte de symétrie (*voir le test de Bernoulli 3.1.1*). Cela peut aussi entraîner des incohérences temporelles. Dans tous les cas la recherche du premier contact dans l’ordre chronologique n’est pas envisageable car elle entraîne une multitude de contacts à traiter à des temps très rapprochés, ce qui entraîne une explosion du temps de calcul. Ainsi prendre une distance de collision permettant de traiter simultanément plusieurs contacts dans un laps de temps raisonnable par rapport à la situation sans se soucier de la cohérence temporelle à l’intérieur de ce laps de temps est un bon compromis. Une optimisation du seuil permettra de considérer un nombre optimal de collisions simultanément, tout en gardant une bonne cohérence temporelle.

Concernant la deuxième, la tolérance sur la condition de non interpénétration, nous rappelons que, à l’instar du processus de rafle de Moreau, nous avons un ensemble de vitesses admissibles V . Dans notre modèle, il est déterminé par :

$$V = \{w \in \mathbb{R}^{3n} / J^T w \geq 0\}.$$

Ici, il n'est pas question de relâcher la condition de Signorini en acceptant de petites interpénétrations, mais de relâcher la condition d'admission pour les vitesses après contact $W(t^+)$. En effet, dans des situations de congestion importante, le rebond est quasiment inexistant et l'ensemble des vitesses admissibles se limite à $J^T W(t^+) = 0$. Or numériquement, vérifier une égalité, peut entraîner des problèmes. Nous préférons définir un réel $c < 0$, dépendant de la distance de collision η tel que $|c|$ soit très petit devant η (par exemple 50 fois plus petit) et définir l'ensemble des vitesses admissibles par :

$$V_c = \{w \in \mathbb{R}^{3n} / J^T w \geq c\}.$$

La condition de non interpénétration reste non violée justement car $|c|$ est très petit devant η . Néanmoins, il est possible d'imaginer une vitesse admissible w vérifiant $J^T w < 0$ suffisamment longtemps pour entraîner une interpénétration, mais cela n'a pas été observé durant mes simulations.

Une autre optimisation se situe au niveau du critère de réussite du traitement des contacts et, en particulier, au niveau des tolérances associées. Je rappelle que \mathbf{z} une solution de $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ vérifie :

$$\mathbf{z} \geq 0, \quad A\mathbf{z} + \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^T (A\mathbf{z} + \mathbf{v}) = 0.$$

Nous définissons l'erreur d'un vecteur \mathbf{z} par rapport au $\mathbf{LCP}(A, \mathbf{v})$ comme le réel :

$$Err_{LCP} = \left| \sum \mathbf{z}^- \right| + \left| \sum w^- \right| + \left| \mathbf{z}^T (A\mathbf{z} + \mathbf{v}) \right|, \quad (2.1.8)$$

avec \mathbf{z}^- , respectivement w^- , le vecteur contenant uniquement les valeurs négatives de \mathbf{z} , respectivement de $A\mathbf{z} + \mathbf{v}$. Je rappelle aussi que l'énergie cinétique du système après contact vérifie :

$$\frac{E(t^+)}{E(t^-)} \leq 1 + B_E,$$

avec

$$B_E = \begin{cases} 0 & \text{lors de la phase de compression} \\ 2W^c T J \varepsilon \lambda^c + (\varepsilon \lambda^c)^T J^T M^{-1} J \varepsilon \lambda^c & \text{lors de la phase de décompression} \end{cases}$$

Ainsi nous pouvons introduire la définition suivante :

Définition 2.1.4.1 (critère de réussite du traitement des contacts). *Soit tol_1 et tol_2 deux réels strictement positifs. Nous dirons que le traitement des contacts est réussi si les trois critères ci-dessous sont vérifiés :*

- (i) $Err_{LCP} \leq tol_1,$
- (ii) $\frac{E(t^+)}{E(t^-)} \leq 1 + B_E + tol_2,$
- (iii) $W(t^+) \in V_c.$

Les réels tol_1 et tol_2 sont appelées des tolérances. Lorsque la configuration de contact est *simple*, c'est-à-dire, la matrice A est une P -matrice, alors nous pouvons prendre des tolérances très petites : par exemple $tol_1 = 10^{-11}$ et $tol_2 = 10^{-4}$. Par contre, lorsque la configuration de contact est plus *complexe*, c'est-à-dire, A est seulement co-positive, alors nous pouvons prendre

des tolérances plus grandes, voire jusqu'à considérer $tol_1 = \infty$. En fait, dans ce cas, nous privilégions le bon comportement physique : l'énergie est conservée avec une tolérance $tol_2 \leq 10^{-2}$ et l'interpénétration n'est pas violée en dépit d'une solution qui admet une erreur importante pour le **LCP**. Ce cas reste très marginal, je l'ai observé dans moins de 0.001% des situations de contact dans les simulations de la partie 3.2.

Une autre optimisation a été faite au niveau du choix de l'algorithme de Lemke pour résoudre les contacts. Nous avons observé que pour une même situation de contact, chaque variante des algorithmes avait un comportement différent. Certaines échouaient, d'autres réussissaient, d'autres encore réussissaient avec une meilleure Err_{LCP} . De plus, pour une autre situation de contact, celles qui avaient réussi précédemment pouvaient échouer ce coup-ci et celles qui avaient échoué le coup d'avant pouvaient réussir sur celui-ci. Ainsi, aucune variante ne se détachait à nos yeux. Nous avons donc choisi d'en sélectionner 3 et de les essayer les unes après les autres si la précédente échouait, en plaçant en premier un algorithme utilisant la technique lexicographique qui nous semble la plus robuste des variantes d'algorithmes de Lemke pour notre modèle. En dépit d'un temps de calcul rallongé lorsque le contact est résolu à la 3^e tentative, nous augmentons drastiquement le taux de réussite à plus de 99.9%.

Une dernière optimisation est nécessaire afin d'augmenter encore le taux de réussite. Elle est basée sur le fait que la résolution du **LCP**(A, \mathbf{v}) est très sensible aux variations des coefficients de la matrice A . Ainsi, nous avons pu observer qu'une variation relative de l'ordre de 10^{-10} de seulement quelques coefficients de A pouvait entraîner la réussite de l'algorithme de Lemke. La réussite de l'algorithme est toujours déterminée par le critère 2.1.4.1 en calculant Err_{LCP} à partir de la matrice A d'origine et non à partir de la matrice contenant les coefficients modifiés. Ainsi, nous avons mis en place un algorithme itératif modifiant aléatoirement une valeur a_{ij} de A telle que $(i, j) \in \{1, \dots, 3m\}^2$. Ces modifications apparaissent si les 3 algorithmes de Lemke ont échoué. Après modification d'une ou plusieurs valeurs de A , la tentative de résolution en essayant un à un les 3 algorithmes de Lemke est relancée. Le critère de réussite est toujours calculé par rapport au problème d'origine, c'est-à-dire par rapport à la matrice A d'origine. Le nombre d'itérations pour la modification des coefficients de A et la valeur des tolérances tol_1 et tol_2 sont à optimiser pour trouver un compromis entre le temps de calcul et le taux de réussite de la résolution des contacts. Pour donner une idée, dans une simulation réalisée dans la partie 3.2, le modèle traite un nombre de collisions, c'est-à-dire un nombre de **LCP**, de l'ordre de 100 000 000. En ajustant la valeur de tous les seuils et les tolérances cités précédemment, nous obtenons un taux de réussite de plus de 99.9995% et un ratio temps de calcul de l'ordre de 0.3 principalement dû au temps de résolution des **LCP**, c'est-à-dire que pour 7 jours simulés il nous faudra 22 jours réels avec un code **MATLAB** sur un processeur d'une machine de bureau.

Maintenant, je présente une notion qui n'est pas fondamentale dans le traitement des contacts mais qui permettra d'ouvrir la résolution à un plus large panel de comportement de collision. Cette notion est une caractérisation des points de contact qui pourront être actifs ou non.

Définition 2.1.4.2 (point de contact actif). *Soit P_j un point de contact entre deux floes Ω_k et Ω_l , $k < l$, nous dirons que P_j est actif si $\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{V}_j^{lk}(t^-) < 0$. Nous notons $I_n(t)$ l'ensemble des points actifs au temps t .*

Nous en avons déjà discuté, l'algorithme de Lemke traite les contacts simultanément. Cela a l'avantage de conserver la symétrie des configurations (voir le test de Bernoulli 3.1.1), mais cela a l'inconvénient de ne pas modéliser correctement la propagation de l'onde de choc à travers la configuration de contact (voir le test du berceau de Newton 3.1.1). Afin d'obtenir un

comportement différent, nous mettons en place l'algorithme suivant. Initialement nous définissons l'ensemble $I_n^0 = I_n(t^-) \subset \tilde{P}_c$. À chaque étape $k \geq 0$, nous traitons les points de contact appartenant à I_n^k . L'algorithme se termine à l'étape r lorsque $I_n^r = I_n(t^+) = \emptyset$. Je ne connais aucune preuve assurant qu'un tel algorithme converge (voir [SKV⁺12]). Néanmoins, nous avons la propriété suivante : si $P \in I_n^k$ alors $P \notin I_n^{k+1}$. Par contre : si $P \notin I_n^k$ alors $P \notin I_n^{k+1}$, rien ne semble pouvoir le garantir. Malgré cela, dans toutes les simulations réalisées avec le modèle et cette notion, l'algorithme a convergé. Par contre, il a fallu parfois un grand nombre d'itérations (jusqu'à 50 fois le nombre total de points de contact - actifs et non actifs). Pour information, cela peut entraîner jusqu'à résoudre 50 000 **LCP** pour une situation de contact avec 1000 points de contact. Même si la majorité des 50 000 **LCP** sont de taille inférieure à 30×30 et que l'algorithme de Lemke est très rapide dans ces cas là, répéter l'opération 50 000 fois devient très coûteux en temps de calcul. Cette notion sera donc à manipuler avec parcimonie lors des différentes simulations.

D'autres techniques sont encore possibles afin d'augmenter le taux de réussite ou la rapidité du traitement des contacts. Parmi celles-ci, une correspond à un travail de permutations des lignes de A afin d'éviter des zéros sur la diagonale (voir [WP99]). Cette technique a été intégrée à un algorithme de Lemke actuellement utilisé pour la résolution des **LCP**.

2.1.5 La détection des contacts en temps

Nous nous plaçons dans une configuration sans interpénétrations des floes du système S au temps $t \in I$ telle que tous les contacts éventuels apparaissant en t soient traités. Nous avons étudié précédemment la détection des contacts en espace (voir Partie 2.1.3). Nous nous intéressons, ici, à la recherche du pas de temps $\Delta t > 0$, tel que sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ le système de floes S ne contient aucune interpénétration. Il est évident, qu'à partir d'une configuration dans laquelle la distance entre les floes est strictement positive, un tel $\Delta t > 0$ existe. Cela n'empêche pas, si le contact est mal résolu, que ce pas de temps puisse tendre vers zéro. Par contre, si le contact est correctement résolu, nous montrerons que nous pouvons construire une borne inférieure $\Delta t_{inf} > 0$ telle que $\Delta t \geq \Delta t_{inf}$. Cette borne inférieure est dépendante de la distance de collision η et de la vitesse des floes.

Définition 2.1.5.1 (le pas de temps optimal). *Soit S un système de floes non interpénétrés au temps t . Il existe un pas de temps $\Delta t > 0$ tel que la configuration des floes ne contient pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$. Un tel pas de temps sera appelé pas de temps optimal et noté Δt_{opt} . Le pas de temps optimal peut être infini.*

Soit $\Omega_i(t)$ et $\Omega_j(t)$ deux floes non interpénétrés. Dans un premier temps, nous recherchons le pas de temps $\Delta t_{i,j} > 0$ tel que, pour tout $\tilde{t} \in [t, t + \Delta t_{i,j}]$, $\Omega_i(\tilde{t})$ et $\Omega_j(\tilde{t})$ ne soient pas interpénétrés. Dans un second temps, nous déterminerons le pas de temps Δt en fonction du minimum des $\Delta t_{i,j}$ et de Δt_{max} , afin de conserver à la fois la condition de non interpénétration et le critère de stabilité tout au long de la simulation. Nous séparons la recherche de $\Delta t_{i,j}$ en deux cas. Le 1^{er} cas lorsque le critère de collision n'est pas vérifié (voir la proposition 2.1.7) en t , le 2^e cas lorsque le critère de collision est vérifié en t .

Dans le 1^{er} cas, la distance entre les floes est déterminée par :

$$\delta_{i,j}(t) = d(C_{0,i}(t), C_{0,j}(t)) + \kappa_i + \kappa_j - (R_{0,i} + R_{0,j}),$$

et nous avons : $d(\Omega_i(t), \Omega_j(t)) \geq \delta_{i,j}(t) > \zeta$. D'après la figure 2.11, une interpénétration est possible en $\tilde{t} \in [t, t + \Delta t_{i,j}]$ seulement si $\delta_{i,j}(\tilde{t}) \leq 0$. Pour éviter cela, il suffit de contrôler

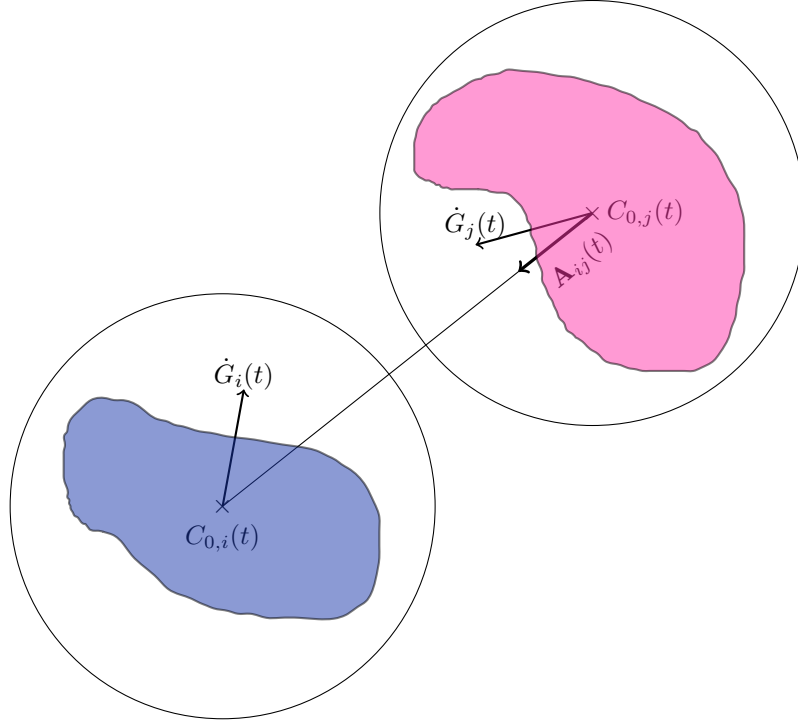


FIGURE 2.19 – Le signe de la vitesse relative projetée sur l’axe joignant les deux centres $C_{0,i}(t)$ et $C_{0,j}(t)$ permet de déduire si les floes se rapprochent ou non.

le parcours des centres des disques de niveau 0 sur $[t, t + \Delta t_{i,j}]$. À partir du schéma d’Euler explicite, le parcours est déterminé par la vitesse des centres de masse en t et le pas de temps $\Delta t_{i,j}$. En étudiant la vitesse relative $\dot{G}_i - \dot{G}_j$ projetée sur l’axe joignant les deux centres des disques de niveau 0, nous pouvons décider si les floes se rapprochent ou non (voir Figure 2.19). Dans le cas d’un rapprochement $\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t)) < 0$, nous pouvons déterminer un pas de temps $\Delta t_{i,j}$:

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t))},$$

avec

$$\mathbf{A}_{ij}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,j}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,j}(t))} \quad \text{et} \quad tol_3 = \frac{\zeta}{20}.$$

Ainsi nous avons $\Delta t_{i,j} > 0$ et $d(\Omega_i(\tilde{t}), \Omega_j(\tilde{t})) \geq tol_3$ pour tout $\tilde{t} \in [t, t + \Delta t_{i,j}]$. La tolérance tol_3 pourra être ajustée afin d’optimiser le pas de temps $\Delta t_{i,j}$.

Dans le 2^e cas, lorsque le critère de collision est vérifié, Il nous faut prêter attention à la fois au mouvement de rotation et aux configurations dans lesquelles $\delta_{i,j} > d(\Omega_i, \Omega_j)$ (voir Partie 2.1.3). Ce type de configurations est possible lorsque que $\delta_{i,j} > \min(\eta_i, \eta_j)$. Dans ce cas, nous ne déterminerons plus le pas de temps en fonction de $\delta_{i,j}$ mais en fonction de $\min(\eta_i, \eta_j)$ pour nous assurer la non interpénétration. Dans le cas :

$$d(C_{0,i}(t), C_{0,j}(t)) + \kappa_i + \kappa_j - (R_{0,i} + R_{0,j}) \leq 0 \quad \text{interpénétration possible,}$$

le mouvement de translation du floe ne suffit plus, il faut aussi étudier le mouvement de rotation. En effet, de part la géométrie non forcément convexe et de son mouvement de rotation, tout

point du floe peut éventuellement entraîner une interpénétration au temps suivant. Soit Ω un floe de centre de masse G , de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et dont le disque de niveau 0, D_0 est représenté par son centre C_0 , son rayon R_0 et le réel strictement positif κ (voir Partie 2.1.3). Le problème de la localisation d'un point pouvant entraîner une interpénétration est compliqué et il semble qu'il faille étudier le mouvement de chaque point du maillage du bord \mathfrak{E} de Ω . L'étude peut devenir très coûteuse en temps de calcul dès que le maillage est fin. Afin de réduire ce temps de calcul, nous pouvons nous intéresser seulement à la distance parcourue par un tel point et la comparer avec la distance entre les floes. Cela nous oblige encore à traiter tous les points du maillage du bord du floe, donc à récupérer les positions de ces points. Cette opération peut se révéler plus coûteuse en temps que de créer un ensemble de points dont le mouvement approchera le mouvement des points de \mathfrak{E} . Dans cette idée, nous construisons une ceinture de points autour du centre de masse G , assez éloignés pour assurer que la distance parcourue par un tel point est plus grande que la distance parcourue par un point de \mathfrak{E} . Cette ceinture \mathfrak{B} est représentée par le cercle de centre G et de rayon $R_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{GC}_0\| + R_0 - \kappa$.

Proposition 2.1.3. *Pour tout point $P \in \Omega$, il existe $Q \in \mathfrak{B}$ tel que $\|\dot{P}\| \leq \|\dot{Q}\|$.*

Démonstration. Soit $P \in \Omega$, $\|\dot{P}\| \leq \|\dot{G}\| + \|\mathbf{PG} \wedge \dot{\theta}\|$. Prenons $Q \in \mathfrak{B}$ tel que $\mathbf{QG} \wedge \dot{\theta}$ soit colinéaire à \dot{G} et de même sens. Alors $\|\dot{Q}\| = \|\dot{G} + \mathbf{QG} \wedge \dot{\theta}\| = \|\dot{G}\| + \|\mathbf{QG} \wedge \dot{\theta}\|$. Or $\|\mathbf{QG} \wedge \dot{\theta}\| = |\dot{\theta}| \|\mathbf{QG}\|$, $\|\mathbf{QG}\| = \|\mathbf{GC}_0\| + R_0 - \kappa$ et $\|\mathbf{PG}\| \leq \|\mathbf{GC}_0\| + R_0 - \kappa$. Donc $\|\mathbf{QG}\| \geq \|\mathbf{PG}\|$ et donc, $\|\dot{Q}\| \geq \|\dot{P}\|$. \square

Or, en considérant un schéma explicite, nous avons directement la distance parcourue par un point P durant un temps unitaire d'1 s avec $\|\dot{P}\|$. Ainsi, la distance parcourue par un point $P_i \in \Omega_i$ relativement à Ω_j durant un temps unitaire, est donnée par :

$$\begin{aligned} \|\dot{P}_i^{jj}(t)\| &= \|\dot{G}_i(t) + \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \wedge \dot{\theta}_i(t) - \dot{G}_j(t) - \mathbf{P}_i \mathbf{G}_j \wedge \dot{\theta}_j(t)\| \\ &= \|\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t) + [\dot{\theta}_i(t) (\mathbf{P}_i \mathbf{G}_i - \mathbf{P}_i \mathbf{G}_j) + (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)) \mathbf{P}_i \mathbf{G}_j] \wedge \mathbf{k}\| \\ &= \|\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t) + \dot{\theta}_i(t) \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j^\perp + (\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)) \mathbf{G}_j \mathbf{P}_i^\perp\|, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ et l'exposant $^\perp$ indiquant l'orthogonal dans le sens direct. À partir de cette égalité, nous remarquons que la vitesse relative ne dépend pas du choix du point P dès que les vitesses angulaires sont identiques. De plus, nous pouvons établir un majorant $\Gamma(t)$ pour la distance parcourue par un point de $\Omega_i(t)$ relativement à $\Omega_j(t)$ et pour la distance parcourue par un point de $\Omega_j(t)$ relativement à $\Omega_i(t)$:

$$\Gamma(t) = \max \left(\|\dot{Q}_i^{jj}(t)\|, \|\dot{Q}_j^{ji}(t)\| \right),$$

avec $Q_i(t) \in \mathfrak{B}_i(t)$, respectivement $Q_j(t) \in \mathfrak{B}_j(t)$, tel que $(\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)) \mathbf{G}_j \mathbf{Q}_i^\perp$ soit colinéaire à, et de même sens que $\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t) + \dot{\theta}_i \mathbf{G}_i(t) \mathbf{G}_j(t)^\perp$, respectivement $(\dot{\theta}_j(t) - \dot{\theta}_i(t)) \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_j^\perp$ soit colinéaire à, et de même sens que $\dot{G}_j(t) - \dot{G}_i(t) + \dot{\theta}_j \mathbf{G}_j(t) \mathbf{G}_i(t)^\perp$ (voir Figure 2.20). À partir de ce majorant, nous pouvons construire un pas de temps $\Delta t_{i,j} > 0$ assurant la non interpénétration entre Ω_i et Ω_j sur $[t, t + \Delta t_{i,j}]$:

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

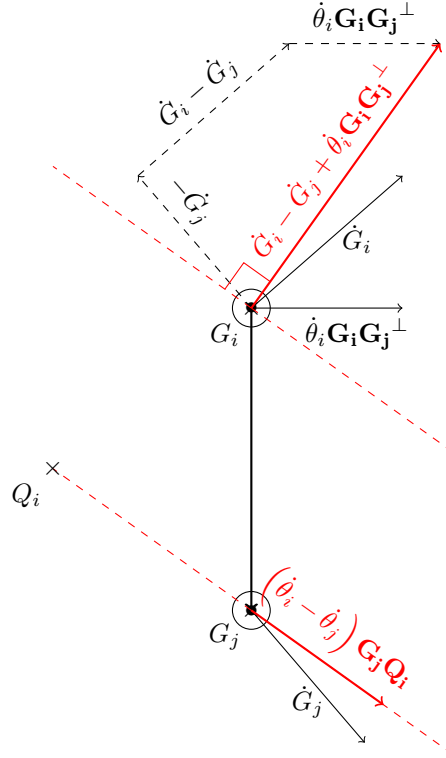


FIGURE 2.20 – Exemple d'un point Q_i vérifiant $(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j) \mathbf{G}_j \mathbf{Q}_i^\perp$ colinéaire à, et de même sens que $\dot{G}_i - \dot{G}_j + \dot{\theta}_i \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j^\perp$.

avec $tol_3 < \min(\eta_i, \eta_j)$.

Pour un couple de floes (Ω_i, Ω_j) appartenant au système S non interpénétrés en t , nous venons de construire un pas de temps $\Delta t_{i,j}$ qui vérifie pour chaque situation, c'est-à-dire, que le critère de collision soit vérifié ou non,

$$\Delta t_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \Omega_i \text{ et } \Omega_j \text{ ne s'interpénètrent pas sur } [t, t + \Delta t_{i,j}].$$

Cependant, aux vues de mes premières simulations, j'ai remarqué que dans la situation où le critère de collision est vérifié mais que les floes ne sont pas en contact, $\Delta t_{i,j}$ est petit devant Δt_{opt} . Cela s'explique car le majorant $\Gamma(t)$ construit est grossier et surtout car $\min(\eta_i, \eta_j)$ ne reflète pas correctement la distance entre les floes et est souvent bien plus petit. Le pas de temps ainsi généré se retrouve donc petit par rapport à Δt_{opt} et la simulation se voit alors ralentie. Nous allons étudier deux optimisations mises en place dans le code afin de calculer un $\Delta t_{i,j}$ plus proche de Δt_{opt} . Nous verrons que ces optimisations se font au prix de la perte de la garantie de la non interpénétration. Cependant, dans les simulations de la partie 3.2, j'ai pu ajuster ces optimisations afin de garder un nombre d'interpénétrations de l'ordre de une pour 1 000 000 de pas de temps, ce qui représente moins d'une interpénétration dans une simulation d'une durée d'une semaine. Lorsqu'une interpénétration est avérée, j'ai mis en place, dans le code, la possibilité de revenir à la dynamique liée au pas de temps précédent et d'avancer en prenant Δt calculé à partir des $\Delta t_{i,j}$ qui assurent la non interpénétration. Cela implique d'effectuer un test pour déterminer s'il y a interpénétration. Afin de ne pas être trop coûteux en temps de calcul, le test consiste à vérifier l'appartenance d'un point de contact à un polygone (la région fermée,

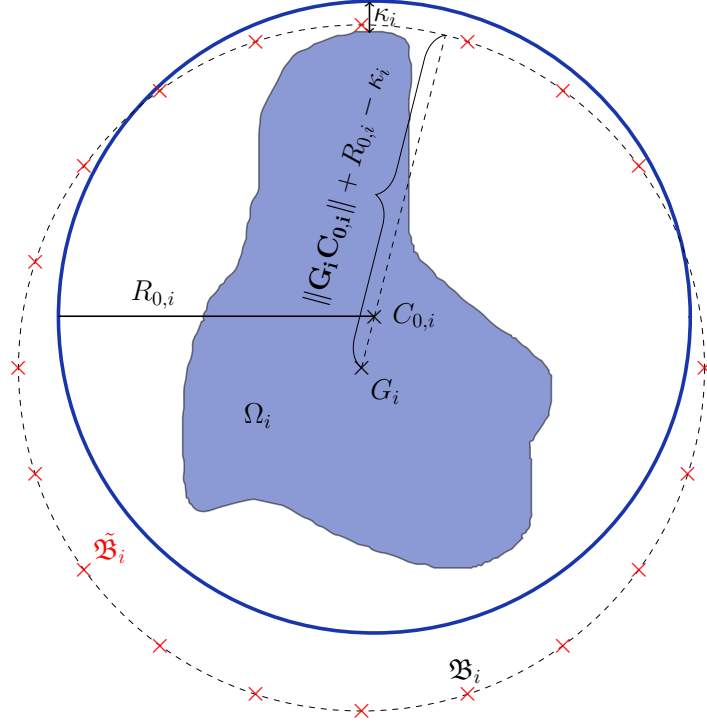


FIGURE 2.21 – Construction du cercle \mathfrak{B}_i et de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ pour un floe Ω_i . Les croix rouges représentent la position des points de $\tilde{\mathfrak{B}}_i$. Sur cette figure, l'ensemble $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ contient 19 directions différentes.

maillée du floe). Ce test ne garantit pas de trouver toutes les interpénétrations possibles car il se limite à tester les points de contact. Néanmoins, aucune interpénétration engendrée par un point non point de contact n'a été rencontrée pour l'instant.

La première optimisation se concentre sur la borne Γ . Afin de calculer une valeur approchée de Γ , nous allons discrétiser les ensembles \mathfrak{B}_i et \mathfrak{B}_j , c'est-à-dire nous allons considérer un ensemble fini de points $\tilde{\mathfrak{B}}_i$, respectivement $\tilde{\mathfrak{B}}_j$, appartenant à \mathfrak{B}_i respectivement \mathfrak{B}_j . Le nombre de ces tels points est à ajuster pour optimiser la valeur approchée de Γ et le risque d'interpénétrations. En effet, dès que nous discrétisons le cercle \mathfrak{B}_i (voir Figure 2.21), nous ne prenons plus en compte toutes les directions et donc pas forcément la direction correspondant à celle de $\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t) + \dot{\theta}_i \mathbf{G}_i(\mathbf{t}) \mathbf{G}_j(\mathbf{t})^\perp$. Ainsi nous ne pouvons plus garantir un majorant à la distance parcourue.

La valeur approchée de Γ est donnée après calcul, pour chaque point de $\tilde{\mathfrak{B}}_i$, respectivement $\tilde{\mathfrak{B}}_j$, de leur vitesse relative, en prenant le maximum.

La deuxième optimisation se concentre sur la distance entre les floes dans le cas où le critère de collision est vérifié. Au lieu de prendre $\min(\eta_i, \eta_j)$ comme distance entre les floes, qui est un minorant trop grossier, nous prenons $\delta_{i,j}$ (voir la détermination dans l'algorithme 1), excepté lorsqu'il y a collision entre les floes. Dans ce cas, nous considérons que la collision est résolue correctement, ainsi les points de contact sont assurés avoir un mouvement n'entraînant pas d'interpénétrations, les points pouvant entraîner une interpénétration se situent donc à une distance plus grande que ζ , nous pouvons donc prendre ζ comme distance entre les floes.

La détermination du pas de temps $\Delta t_{i,j}$ en fonction de la configuration dans laquelle se trouve les floes Ω_i et Ω_j est récapitulée dans l’algorithme 2. Afin que tout au long de la simulation, le critère de stabilité soit vérifié, nous comparons toujours le minimum des $\Delta t_{i,j}$ fournis par l’algorithme 2, avec le pas de temps Δt_{max} (voir Partie 2.1.2). Finalement, Δt est calculé comme :

$$\Delta t = \min \left(\Delta t_{max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j} \right).$$

En considérant que la vitesse maximale atteinte par un point du floe est donnée par $\max K_t$ pour $t \in I$, avec $K_t = |Na\mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)|$, et en considérant que la plus petite distance entre deux points entraînant une interpénétration est donnée par le minimum des distances de collision (dans le cas où $\zeta = \min(\eta_i, \eta_j)$), alors nous pouvons construire un pas de temps :

$$\Delta t_{inf} = \frac{1}{2} \frac{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} \eta_i}{\max_{t \in I} K_t}, \quad (2.1.9)$$

tel que, pour tout couple (Ω_i, Ω_j) de floes de S , $\Delta t_{i,j} \geq \Delta t_{inf}$. Si nous supposons que tout au long de la simulation, le critère de stabilité est vérifié pour $\Delta t_{max} \geq \Delta t_{inf}$ et que les collisions sont correctement résolues, alors nous avons bien $\Delta t \geq \Delta t_{inf} > 0$. Pour information, lors des simulations de la partie 3.2, la vitesse des floes est majorée par 0.3 m/s et le minimum des distances de collision est 0.02 m. Ainsi le $\Delta t_{inf} = 1/3 \times 10^{-1}$ s. Un tel petit pas de temps ne sera jamais observé lors de mes simulations. Cela s’explique par deux raisons : la première, les floes soumis au courant marin et au vent ne peuvent pas atteindre des vitesses relatives si grandes, et, la deuxième, le coefficient de restitution est pris généralement très inférieur à 1, ce qui réduit les vitesses des floes après contact. De plus, après une première phase lors de laquelle les floes se rapprochent et leur vitesse relative augmente entraînant une diminution du pas de temps de la simulation, une deuxième phase apparaît, due à la gestion des contacts et du coefficient de restitution strictement inférieur à 1, lors de laquelle les floes ne se rapprochent plus et leur vitesse relative diminue entraînant ainsi une augmentation du pas de temps de la simulation.

2.1.6 Les conditions aux bords

Dans cette section, je donnerai quelques points de comparaison entre des résultats de simulations à partir du modèle avec les conditions périodiques aux bords et avec les conditions libres aux bords. Je donnerai aussi quelques détails sur l’implémentation et les modifications du code pour prendre en compte de telles conditions aux bords. Pour comparer, j’ai étudié plusieurs résultats de deux simulations identiques par rapport à la configuration initiale, aux différents coefficients et tolérances, et à l’environnement utilisés, ne différant que sur les conditions aux bords. L’une avec des conditions libres et l’autre avec des conditions périodiques. Les pourcentages indiqués ci-après sont le résultat d’une moyenne arithmétique sur tous les résultats analysés.

Pour faciliter le traitement, les floes sont numérotés en fonction du numéro du floe de référence N_{ref} , du numéro i de la cellule à laquelle ils appartiennent et du nombre de floes de référence n qu’il correspond à un obstacle ou non :

$$N = N_{ref} + i \times n. \quad (2.1.10)$$

Les cellules sont numérotées de 0 à 9 comme indiqué sur la figure 1.7.

Algorithme 2 : Détermination du pas de temps $\Delta t_{i,j}$.

Données : $\Omega_i(t)$ et $\Omega_j(t)$ non interpénétrés, $\dot{G}_i(t)$, $\dot{G}_j(t)$, $\dot{\theta}_i(t)$, $\dot{\theta}_j(t)$, $D_{0,i}$, $D_{0,j}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_i$, $\tilde{\mathfrak{B}}_j$ et d_{zone}

Résultat : Construction de $\Delta t_{i,j}$

début

si $d_{zone} \leq \kappa_i + \kappa_j - \zeta$ **alors**

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t))};$$

 La condition de non interpénétration est assurée;

sinon

 Construction de la valeur approchée de $\Gamma(t)$ en fonction du mouvement relatif des points de $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ et de $\tilde{\mathfrak{B}}_j$. Cette valeur est notée $\tilde{\Gamma}(t)$;

si $P_c = \emptyset$ (il n'y a pas collision) **alors**

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\delta_{i,j} - tol_3}{\tilde{\Gamma}(t)};$$

sinon

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\zeta - tol_3}{\tilde{\Gamma}(t)};$$

 La condition de non interpénétration n'est plus assurée;

Afin de prendre en compte les floes images lors de la gestion des distances nous utilisons la position et les vitesses du floe de référence correspondant. Une translation est simplement appliquée par rapport à la position du floe de référence pour obtenir la position d'un floe image. La translation utilisée est celle qui permet de passer de la cellule de référence à la cellule contenant le floe image. Dans le cas de conditions libres aux bords, le nombre de calculs de distance correspond au nombre de couples de floes différents, ce qui correspond à $n(n-1)/2$ couples. Dans le cas de conditions périodiques aux bords, nous nous intéressons aux couples de floes de référence différente aussi, mais nous étendons les calculs seulement aux couples de floes composés d'un floe de référence et d'un floe image, dont la référence est différente, appartenant à la **ZIR**. Un couple de floes images et un couple composé d'un floe de référence et de son image ne seront jamais étudiés. Le nombre de floes et le nombre de calculs de distance sont ainsi multipliés par 5 par rapport à la version avec des conditions libres aux bords. Heureusement, la plupart de ces calculs supplémentaires sont de simples calculs de distance entre les disques de niveau 0 des floes qui correspondent à la 1^{re} phase de la détection des contacts en espace (voir *Partie 2.1.3*) et, dans le cas de conditions libres aux bords, la part du temps de calcul inhérente à cette 1^{re} phase par rapport à la détection en espace complète (voir *l'algorithme 1*) est d'environ 3%. Lors de la 2^e phase, c'est-à-dire, lorsque le critère de collision est vérifié, le nombre de couples de floes n'est plus augmenté que d'environ 15% pour des conditions périodiques par rapport aux conditions libres. Ainsi, globalement, le temps de calcul de l'étape de détection des contacts en espace est augmenté d'environ 18%.

L'étape suivante, une fois les configurations de collision détectées, est de constituer les listes de floes en contact. Pour des conditions libres aux bords, cette étape ne pose pas de problème particulier, par contre ce n'est plus le cas lorsque les conditions sont périodiques. En effet, étudier les contacts uniquement sur la **ZIR** permet de réduire les coûts de calcul mais peut séparer les configurations de contact (voir *Figure 2.22*). Sur la *figure 2.22*, nous pouvons observer que

la collision entre les floes numérotés 2117 et 82 n'est pas prise en compte car 2117 n'est pas dans la **ZIR**. Par contre la collision est équivalente à celle entre les floes 17 et 782 qui est, elle, bien prise en compte car les floes 2117 et 782 sont bien les images des floes 17 et 82. Ainsi, nous avons besoin de modifier l'algorithme permettant de créer les listes de floes en contact en réunissant dans une même liste les floes dont le numéro modulo n est identique. Celui-ci pourra prendre jusqu'à 8 fois plus de temps que dans le cas de conditions libres. Heureusement le temps de calcul de cet algorithme reste quasiment négligeable par rapport aux temps de calcul de la phase de détection des collisions en espace ($< 2\%$).

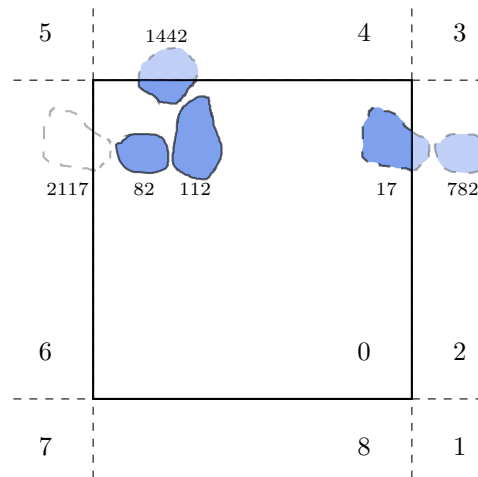


FIGURE 2.22 – Exemple d'une partie des configurations de contact entre des floes références et des floes images. Les numéros sont déterminés suivant l'équation (2.1.10) pour 350 floes de référence.

Concernant la gestion des contacts, nous avons vu précédemment que la **ZIR** contient toutes les configurations de contact. Ainsi la gestion de la distance dans cette zone nous permet de déterminer toutes les données géométriques du contact afin de le traiter, c'est-à-dire les axes des repères de contact et les vecteurs reliant les points de contact aux centres de masse des floes. De plus, nous avons remarqué précédemment que la gestion du contact dépend seulement de la position relative des floes les uns par rapport aux autres et non de la position des floes dans un repère (voir Partie 1.1.3). Ainsi nous pouvons appliquer aux floes de référence des forces de contact provenant d'un contact déterminé sur un floe image correspondant. Par exemple, sur la figure 2.22 qui montre une partie d'une configuration avec 350 floes de référence, nous pouvons observer deux groupes de contact : le groupe des floes numéros $\{82, 112, 1442, 2117\}$ et celui des floes numéros $\{17, 782\}$ où 782, 1442 et 2117 sont, respectivement, des images des références 82, 42 et 17. Ainsi la collision entre 17 et 782 est identique à la collision entre 2117 et 82, c'est-à-dire les données géométriques du contact entre 17 et 782 sont identiques aux données géométriques du contact entre 2117 et 82.

En conclusion, il suffit d'associer, pour chaque floe de référence, les données du contact provenant des interactions entre lui-même et ses voisins dans la **ZIR** et les interactions entre ses images et des voisins dans la cellule de référence. Cela fait, la suite de la résolution du contact reste identique à celle avec les conditions libres.

Toutes les contraintes du contact (même celles avec des floes images) étant appliquées aux floes de référence, la condition de non-interpénétration et la périodicité sont conservées. En ajoutant les conditions périodiques aux bords, nous augmentons d'environ 13% le nombre de floes en

collision et à peu près d'autant le nombre de points de contact. Cependant, cette augmentation peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul (jusqu'à multiplier par 3 le temps calcul de la résolution du contact!). Cela peut s'expliquer par le fait que les configurations de contact, c'est-à-dire les assemblages de floes en contact, dans le cas de conditions périodiques, sont moins nombreuses (de l'ordre de 2 fois moins) mais comportent un plus grand nombre de floes (plus de 2 fois plus) que pour des conditions libres. Du coup les **LCP** à résoudre contiennent jusqu'à 1 500 points de contact et le temps de résolution peut alors devenir beaucoup plus long qu'avec seulement 2 fois moins de points de contact (dans le cas de conditions libres).

Le calcul du pas de temps, c'est-à-dire la phase de détection des contacts en temps, se trouve lui aussi affecté par ce changement de conditions aux bords. Les modifications apportées sont similaires à celles apportées pour la phase de détection des contacts en espace. En effet, le calcul du pas de temps de la simulation implique le calcul d'un pas de temps pour chaque couple de floes différents (*voir Partie 2.1.5*). Le nombre de couples à considérer est aussi multiplié par 5 pour le calcul du pas de temps lorsque les floes sont dans une configuration où le critère de collision n'est pas vérifié et le temps de calcul est aussi augmenté de 15% lorsque ce critère est vérifié. Ainsi, globalement, le temps de calcul de la routine est augmenté d'environ 10%.

Au final, il est difficile de donner la différence de temps de calcul total pour une même simulation entre des conditions aux bords libres et périodiques à cause de la variabilité du temps de résolution des **LCP**. Sur l'ensemble des résultats analysés, j'ai observé une augmentation de 30% à 200% lorsque les conditions aux bords sont périodiques.

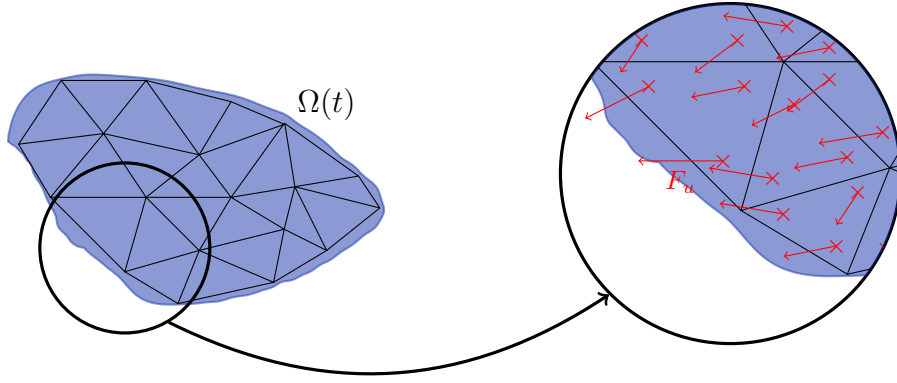


FIGURE 2.23 – Le floe Ω maillé avec les forces extérieures F appliquées aux points de quadrature u de chaque élément fini triangulaire.

2.2 La gestion de l'environnement

Nous avons vu précédemment les méthodes numériques pour intégrer la dynamique régulière dont, concernant la gestion de l'environnement, la méthode de quadrature de Gauss-Legendre et le schéma d'Euler explicite. Nous présenterons ici les équations des moments réécrites en tenant compte de la discrétisation en espace et de la discrétisation en temps. Enfin, nous présenterons l'interpolation choisie pour déterminer un vecteur vitesse des forces extérieures en un point de quadrature en fonction des valeurs connues par les données météorologiques.

2.2.1 Les forces extérieures

Soit un maillage d'un floe Ω construit à partir d'une méthode de Gauss-Legendre à trois points de quadrature, contenant $n_e > 0$ éléments finis triangulaires tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n_e\}$, T_i est l'application reliant la maille de référence à l'élément fini $w_{i,\text{réel}}$ avec $|J_{T_i}|$ sa jacobienne et $\omega_{i,j}$, respectivement $u_{i,j} = T_i(u_j)$, est le j^{e} poids, respectivement le j^{e} point de quadrature, de l'élément $w_{i,\text{réel}}$. Les forces extérieures se retrouvent appliquées aux trois points de quadrature de chaque élément fini du maillage du floe Ω (voir Figure 2.23).

2.2.2 Les forces de traînée

Pour le passage du temps $t \in I$ au temps $t + \Delta t \in I$, après discrétisation spatiale des floes et discrétisation temporelle, l'intégration de la dynamique régulière pour un floe Ω_k , s'exprime à partir des équations (1.2.1) comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{G}_k(t + \Delta t) = \dot{G}_k(t) + \Delta t M_k^{-1} \left[M_k \mathfrak{F}_{c,k}(t) + \sum_{i=1}^{n_e} |J_{T_i}| \sum_{j=1}^3 \omega_{i,j} \left(\tau_a(t) + \tau_w(t, u_{i,j}) \right) \right] \\ \dot{\theta}_k(t + \Delta t) = \dot{\theta}_k(t) + \Delta t \mathcal{I}_k^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n_e} |J_{T_i}| \sum_{j=1}^3 \omega_{i,j} \mathbf{G}_k \mathbf{u}_{i,j} \wedge \left(\tau_a(t) + \tau_w(t, u_{i,j}) \right) \right] \end{array} \right.$$

La vitesse du vent \mathbf{U}_a à l'interface entre l'océan et l'atmosphère est directement fournie par les modèles météorologiques tandis que la vitesse du courant \mathbf{U}_w à l'interface entre l'océan et l'atmosphère est, soit directement fournie par les modèles météorologiques, soit, calculée à partir



FIGURE 2.24 – Exemple d’interpolation linéaire entre deux vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 en prenant le chemin le plus court entre les angles θ_1 et θ_2 .

de la vitesse issue du modèle de couplage et de la vitesse fournie par les modèles météorologiques. Ces vitesses sont évaluées en certains points de l’espace et du temps qui ne correspondent pas forcément aux points de quadrature et aux temps d’évolution de la dynamique des floes. Nous avons donc besoin de déterminer le vecteur vitesse en espace et en temps désiré en fonction de ceux donnés. Pour cela, nous utiliserons une interpolation linéaire sur la direction et la norme des vecteurs (voir Figure 2.24). Nous écrivons les vecteurs vitesses en coordonnées polaires (r, θ) avec les angles exprimés en radians. Soit $\mathbf{u}_1 = (r_1, \theta_1)$ et $\mathbf{u}_2 = (r_2, \theta_2)$ deux valeurs du champ de vitesse $\mathcal{V}(t, x)$ donné, telles qu’il existe deux temps $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+$, $t_1 \neq t_2$ et deux points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4$, $x_1 \neq x_2$ tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathcal{V}(t_1, x_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \mathcal{V}(t_2, x_1) \\ \text{ou} \quad \mathbf{u}_1 &= \mathcal{V}(t_1, x_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \mathcal{V}(t_1, x_2). \end{aligned}$$

Nous cherchons à déterminer la valeur du vecteur vitesse $\mathbf{v} = (r, \theta)$ au temps t et au point x telle que pour $\lambda \in [0, 1]$, soit $t = \lambda t_2 + (1 - \lambda)t_1$, soit $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$. L’interpolation ne se fera jamais à la fois en espace et en temps, en premier, le champ de vecteur sera discrétisé en temps puis pour chaque temps t donné, le champ sera discrétisé en espace. Le calcul est similaire dans les deux cas :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\lambda r_2 + (1 - \lambda)r_1, \lambda(\theta_2 - \theta_1 + \alpha) + \theta_1), \\ \text{avec} \quad \alpha &= \begin{cases} 0 & \text{si } |\theta_2 - \theta_1| \leq \pi \\ -2\pi & \text{si } \theta_2 - \theta_1 \geq \pi \\ 2\pi & \text{si } \theta_2 - \theta_1 \leq -\pi \end{cases} \end{aligned}$$

le coefficient α est nécessaire pour s’assurer que l’évolution de l’angle θ suit bien le plus petit chemin entre θ_1 et θ_2 (voir Figure 2.24).

2.2.3 Le couplage océan/glace

Concernant la vitesse de la couche limite océanique, nous appliquons le modèle de couplage après avoir mises à jour les vitesses des floes. Ainsi, pour le passage du temps $t \in I$ au temps $t + \Delta t \in I$, après discrétisation spatiale des floes et discrétisation temporelle, l’équation (1.2.4)

s'exprime comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_w(t + \Delta t) &= \mathbf{U}_w(t) + \frac{\Delta t}{M_w} \rho_w C_w \left[\sum_{k=1}^{n-r} \sum_{i=1}^{n_e} |J_{T_i}| \sum_{j=1}^3 \omega_{i,j} \tilde{\tau}_w(t + \Delta t, u_{i,j}) \right] \\
&+ \frac{\Delta t}{M_w} (\mathcal{A}_w - \mathcal{A}_f) \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t) \\
&+ \Delta t \left[\mathfrak{F}_c(t) (\mathbf{U}_w(t)) - \frac{\gamma}{h_w} \mathbf{U}_w(t) \right] \\
&+ \Delta t \mathbf{a}_{w,data}(t),
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

avec

$$\tilde{\tau}_w(t + \Delta t, u_{i,j}) = \left\| \dot{u}_{i,j}(t + \Delta t) - \mathbf{U}_w(t) \right\| \left(\dot{u}_{i,j}(t + \Delta t) - \mathbf{U}_w(t) \right).$$

L'équation ci-dessus, vérifiée par \mathbf{U}_w , est valable sur une zone de l'océan, d'aire \mathcal{A}_w , dans laquelle les vitesses de surface du courant et du vent sont invariantes en espace. La valeur de \mathbf{U}_w en $t + \Delta t$ est exprimée en fonction de la vitesse des points de quadrature des floes en $t + \Delta t$, $\dot{u}_{i,j}(t + \Delta t)$, de la vitesse du vent à l'interface entre l'océan et l'atmosphère au temps précédent t , $\mathbf{U}_a(t)$, de la vitesse du courant issue du modèle de couplage au temps t , $\mathbf{U}_w(t)$ et de la vitesse du courant de surface à basse fréquence, fournie par les modèles météorologiques.

L'accélération du courant océanique à basse fréquence, $\mathbf{a}_{w,data}$, est construite à partir des données de la vitesse du courant de surface fournies par les modèles météorologiques $\mathbf{U}_{w,data}$ échantillonnées aux temps et points désirés par l'interpolation linéaire décrite précédemment, comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{w,data}(t) &= \frac{\mathbf{U}_{w,data}(t + \Delta t) - \mathbf{U}_{w,data}(t)}{\Delta t}, & t \in [0, T[\\ \mathbf{a}_{w,data}(T) &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, la vitesse du courant océanique de surface \mathbf{U}_w , utilisée pour écrire la force de traînée correspondante, est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_w(0) = \mathbf{U}_{w,data}(0) \\ \mathbf{U}_w(t + \Delta t) \text{ vérifie l'équation (2.2.1)} \end{cases}$$

2.3 La génération des packs

Dans la partie 1.3, nous avons étudié les critères définissant une configuration initiale réaliste de floes. Parmi ces critères, nous avons évoqué les géométries de floes, caractérisées par la rotondité, et la distribution des tailles de floes, caractérisée par la dimension fractale. Afin de respecter ces distributions de tailles et de géométries, nous avons eu la possibilité de récupérer le contour des floes à partir d'une analyse d'images aériennes telles que celle présentée dans la figure 2.25. Néanmoins ce procédé comporte deux principaux inconvénients. Le premier est lié à la qualité de l'image utilisée. En effet, pour récupérer le contour, il faut un contraste suffisant entre l'océan et la glace. De plus, il faut une précision suffisante pour différencier des floes en collision et ne pas confondre avec simplement un floe fracturé. Dans ces conditions, il arrive régulièrement de devoir reprendre à la main l'image afin d'en détailler les contours souhaités. Le deuxième concerne la masse de données. L'obtention d'images aériennes n'est pas aisée et leur nombre n'est pas suffisamment grand pour couvrir un large panel de configurations initiales possibles. En conclusion, la création de configurations initiales à partir d'analyse d'images n'est pas facile à automatiser et restreint notre champ d'applications.

Nous avons donc opté pour un générateur de packs de floes. En fait, nous utilisons quand même les images aériennes, mais au lieu de construire directement toute une configuration, nous les utilisons pour créer une bibliothèque de géométries (voir Partie 2.3.1). Le générateur pioche aléatoirement des géométries dans cette bibliothèque et les placera dans une zone pré-requise afin d'obtenir la concentration et la distribution des tailles désirées, donnant ainsi un choix quasi illimité de configurations initiales.

2.3.1 L'algorithme de génération

À l'heure actuelle, notre bibliothèque contient une centaine de géométries différentes provenant de l'analyse de plusieurs images aériennes du canal Roberson au nord ouest du Groenland (Latitude 81°) (voir Figure 2.25). Le contraste est important ce qui permet de facilement séparer les glaces. Nous n'avons pas eu accès à l'information de l'échelle spatiale des photos. Nous avons donc établi nous-mêmes une échelle. Après une première analyse, manuellement, nous avons conservé les contours dont l'aire à l'intérieur est entre $4 m^2$ et $60\,000 m^2$ et, parmi ceux-là, nous avons éliminé ceux dont la rotondité est supérieure à 1.5. Enfin, parmi les contours restants, nous éliminerons ceux jugés trop irréalistes, c'est-à-dire, ceux jugés pas *assez convexes* (voir Figure 2.26). En effet, malgré une valeur maximale fixée à 1.5 pour la rotondité, il peut encore exister des géométries que nous jugerons non réalistes. Le caractère pas *assez convexe*, n'a pas été quantifié lors de cette thèse et reste pour l'instant à l'appréciation de l'utilisateur.

Les contours conservés sont caractérisés par un nombre de points en accord avec la discrétisation spatiale du floe soit autour de 25 (voir Partie 2.1.1). De plus, nous associons à chacun de ces contours le plus petit cercle contenant tous leurs points caractéristiques. Nous conservons le centre et le rayon de ce cercle pour aider au placement dans une future configuration. Ce cercle est différent de celui du disque de niveau 0 construit pour l'algorithme de volumes englobants (voir Partie 2.1.3). Il ne servira plus, une fois la configuration initiale construite.

Étudions plus en détail l'algorithme du générateur de packs de floes. Il est construit pour être capable de créer une configuration initiale de floes dans une zone carrée à partir des paramètres suivants :

1. les points définissant la zone carrée,

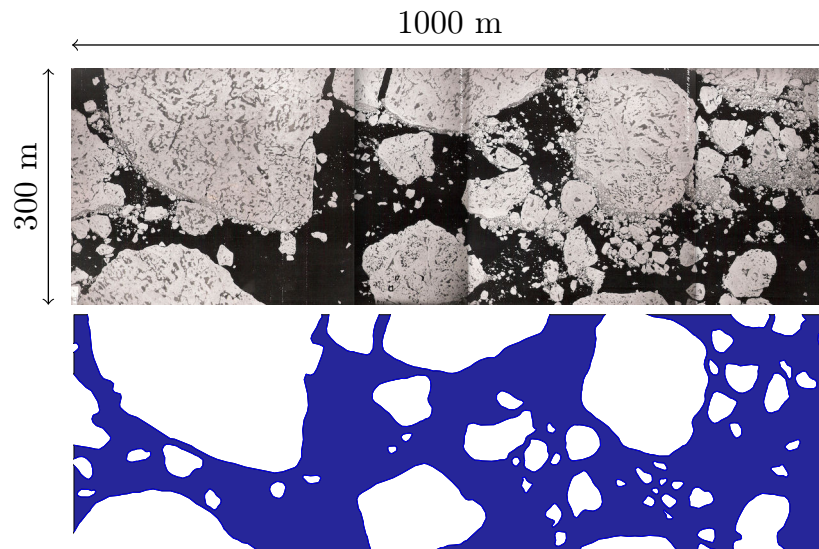


FIGURE 2.25 – Configuration créée à partir d’une analyse d’une image du canal Roberson (nord ouest du Groenland).

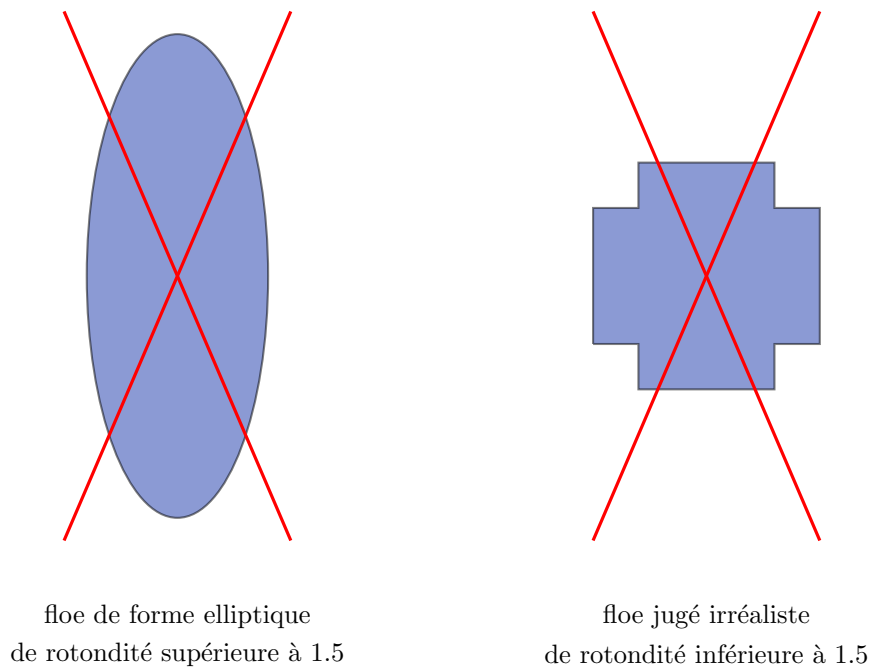


FIGURE 2.26 – Exemple de contours non conservés pour la bibliothèque de floes.

2. la dimension fractale,
3. la concentration,
4. la taille maximale,
5. la taille minimale,
6. le nombre de floes,

sachant que contrôler tous ces paramètres à la fois n'est pas possible. En effet, ils sont liés les uns aux autres. Par exemple, en donnant une taille minimale, une taille maximale et une dimension fractale nous pouvons calculer le nombre total de floes (*voir l'équation (1.3.1)*), et donc l'aire couverte par ces floes ainsi que la concentration. Dans la pratique, l'utilisateur devra faire attention à la cohérence des valeurs des paramètres afin que l'algorithme converge. Pour l'instant, le générateur fonctionne seulement pour une zone carrée. La concentration est calculée comme le rapport de la somme de l'aire des floes sur l'aire totale de la zone. La taille maximale ne peut être supérieure à la longueur de la zone afin d'éviter la collision d'un floe avec lui-même dans le cas de conditions périodiques aux bords. La variété des configurations est obtenue en jouant sur ces 6 paramètres d'entrée. Le but est de construire un ensemble de floes non interpénétrés, inclus dans la zone carrée et dont la distribution des tailles suit une loi puissance.

L'algorithme de génération de packs de floes se décompose en quatre étapes (*voir Figure 2.28*) :

- Étape 1 : tirage de disques de centre C et de diamètre d contenus dans un carré unité,
- Étape 2 : tirage de géométries de floes associées à chaque disque de l'étape précédente, parmi les géométries de la bibliothèque,
- Étape 3 : ajustement de la concentration de la configuration établie à l'étape précédente,
- Étape 4 : agrandissement de la configuration établie à l'étape précédente à la zone carrée donnée en conservant la concentration.

La 1^{re} étape consiste à calculer les tailles d entre s_{min} et s_{max} , en fonction de la dimension fractale et à partir de l'équation (1.3.1), en écrivant :

$$d = \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \ln(i) + \ln(s_{max})\right).$$

Si nous trions la liste des floes de celui ayant la plus grande aire à celui ayant la plus petite, alors $i \in \{1, \dots, n\}$ est l'indice du floe. Ainsi, nous avons bien : $d = s_{max}$ pour $i = 1$, $d = s_{min}$ pour $i = n$ et la probabilité cumulée des floes de taille supérieure à s_{min} , suit une loi puissance $s_{min}^{-\alpha}$. Ensuite, les disques de diamètre d sont placés, dans l'ordre du plus grand au plus petit, dans un carré unitaire tels que les disques soient inclus dans le carré et qu'ils ne s'interpénètrent pas. Il est possible que le placement d'un tel disque ne remplisse pas ces conditions, dans ce cas, nous le remplaçons par un disque de rayon le maximum possible. Le critère d'arrêt à cette étape est vérifié dès qu'une de ces trois conditions est satisfaite :

1. le diamètre maximal possible pour le placement est inférieur à la taille minimale,
2. le nombre de disques construits dépasse le nombre désiré de floes,
3. la concentration des disques dépasse la concentration désirée plus une certaine tolérance.

Une fois la configuration des disques établie, la 2^e étape consiste à tirer aléatoirement une géométrie de floe parmi celles contenues dans la bibliothèque pour chacun des disques. Une homothétie et une translation sont appliquées aux points définissant le contour afin qu'il prenne le maximum de place dans le disque associé. Ce sont les mêmes applications que celles permettant

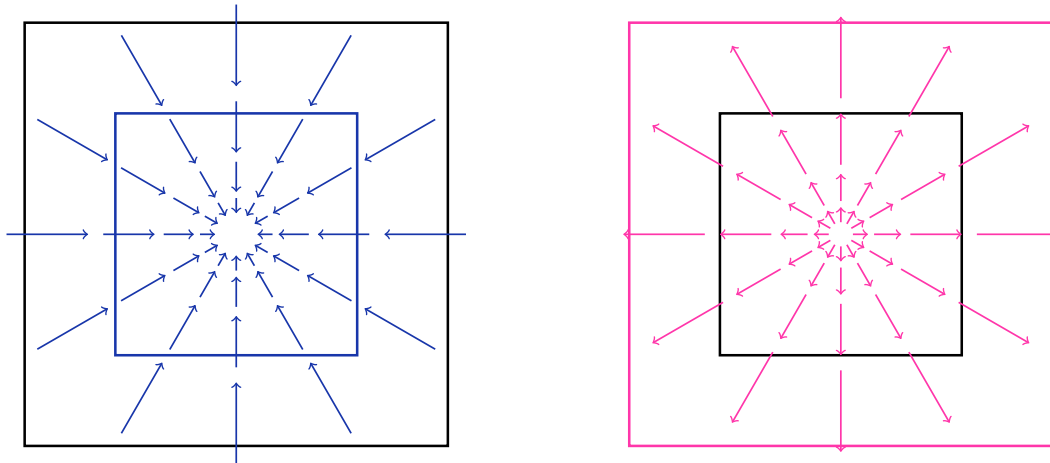


FIGURE 2.27 – Champs de vecteurs du forçage afin d’augmenter ou de diminuer la concentration des floes.

de passer du cercle associé au contour, au bord du disque construit à l’étape 1.

Une fois les géométries de floes placées dans chacun des disques de la configuration, l’étape 3 consiste à ajuster la concentration en appliquant un forçage dirigé vers le centre du carré unité si la concentration désirée est plus grande que la concentration des floes à la fin de la 2^e étape, ou dirigé vers l’extérieur du carré unité sinon. Afin de faciliter le placement des floes, les coefficients de restitution et de friction sont fixés à zéro (*voir Figure 2.27*). L’arrêt de cette étape est programmé lorsque la concentration de la configuration atteint la concentration désirée à une tolérance près. La progression se fait de manière empirique et avec la possibilité de changer de forçage suivant le signe de la différence des concentrations. Avec un tel algorithme nous pouvons atteindre des concentrations maximales autour de 85%.

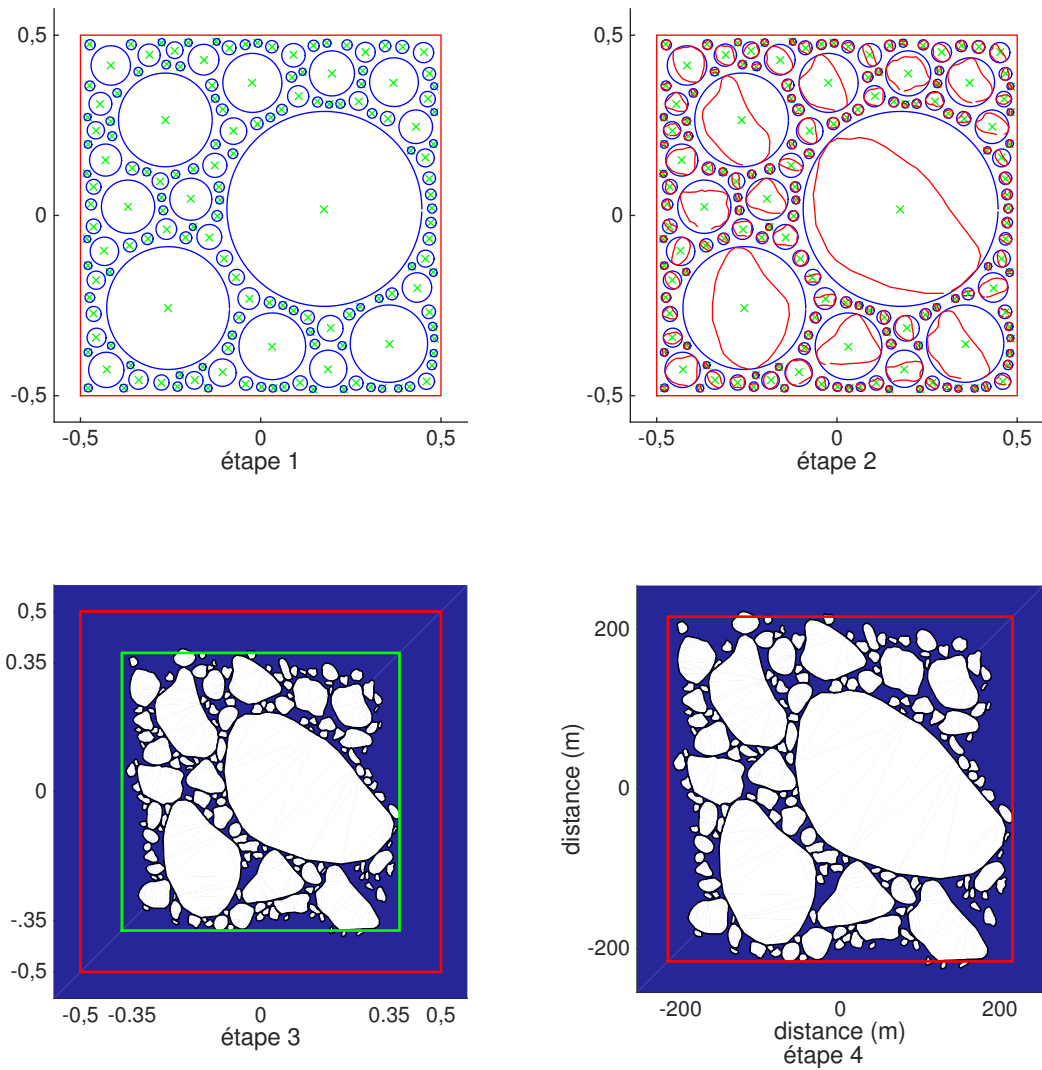


FIGURE 2.28 – Les 4 étapes de l’algorithme de génération de packs de floes. Les paramètres sont : le nombre de floes égal à 160, la dimension fractale égale à 1.5, la concentration égale à 70%, la taille maximale égale à 250 m et une zone de $400 \times 400 \text{ m}^2$.

Chapitre 3

Validations et Exploitations du Modèle

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu en détail tous les aspects théoriques et numériques de notre modèle de la dynamique des glaces de mer. Nous avons déjà discuté de certaines propriétés du modèle dues aux choix théoriques et numériques, comme la géométrie non circulaire des floes, le couplage entre l'océan et la glace ou encore le traitement des contacts, qui justifient la cohérence du comportement simulé, réaliste, des glaces en comparaison du comportement observé dans la réalité de la zone marginale. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus précisément aux tests et aux expérimentations mis en place pour valider cette cohérence des comportements simulés par rapport aux comportements observés. Le modèle traitant des collisions inélastiques avec friction entre des floes rigides, nous nous intéresserons aussi aux tests et aux expérimentations mis en place pour valider la cohérence des comportements après contact simulés par rapport aux comportements après contact observés ou théoriques. Ces premiers tests et expérimentations sont basés sur des scénarios de dérive et de collision simples afin de se focaliser sur un comportement unique dans un premier temps. Ensuite, d'autres scénarios plus complexes, mêlant des collisions, des dérives et des zones d'embouteillages, ont été simulés afin d'obtenir des trajectoires et des comportements de glace plus complexes et proches du réel. Les trajectoires des floes seront souvent un outil de comparaison. Dans la suite de ce chapitre, la trajectoire d'un floe correspond à la position de son centre de masse au cours du temps.

3.1 Les validations

Plusieurs types de validations sont présentés ici. D’abord, nous effectuerons des tests basés sur des scénarios simples pour les collisions. Pour ce type de scénarios, le comportement théorique après contact est bien connu. Afin de valider notre modèle dans ce cas, nous comparerons les comportements simulés par rapport aux comportements attendus pour ces chocs simples. Ensuite, nous effectuerons des tests basés sur des scénarios simples de dérive de glace sans collisions. Pour ce type de scénarios, le comportement attendu sera déduit de plusieurs observations faites en zones marginales des glaces de mer. La validation se fera donc en comparant le comportement simulé des floes par rapport à ces observations. Enfin, nous conclurons cette partie sur les validations du modèle en effectuant un test mêlant un scénario simple de collision avec un scénario simple de dérive comprenant la force de traînée de l’océan. Ces expérimentations ont été effectuées en bassin en remplaçant les floes par des disques de bois.

3.1.1 Des scénarios simples pour les collisions

Parmi les comportements après contact que nous pouvons comparer à des résultats théoriques connus, nous en sélectionnons 5 :

1. la conservation de la symétrie d’une configuration (*voir Partie 3.1.1*),
2. la satisfaction du modèle de Coulomb (*voir Partie 3.1.1*),
3. le traitement d’un point d’accumulation (*voir Partie 3.1.1*),
4. la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc (*voir Partie 3.1.1*) et (*voir Partie 3.1.1*),
5. la conservation de l’énergie cinétique (*voir Partie 3.1.1*).

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà discuté de ces différents comportements après contact (*voir Partie 2.1.4*). Les choix théoriques et numériques que nous avons faits assurent qu’une partie de ces comportements sont satisfaits. Par exemple, la formulation en **LCP** que nous avons adoptée garantit aux vitesses des floes après contact de satisfaire la non augmentation de l’énergie cinétique dans tous les cas et le modèle de Coulomb sous certaines conditions (*voir Partie 1.1.2*). Ces différents comportements sont illustrés par les tests proposés suivants dans lesquels l’environnement sera limité à une ou plusieurs forces extérieures aux floes données mais ne considérera ni les traînées dues au vent et au courant océanique, ni l’effet de Coriolis, ni le couplage entre l’océan et la glace.

Une configuration symétrique

Afin de tester la conservation de la symétrie d’une configuration, nous préparons la configuration suivante. Soit trois sphères B_1 , B_2 et B_3 de centres respectifs C_1 , C_2 et C_3 telles que, initialement, B_2 et B_3 sont au repos, et B_1 a une vitesse $\mathbf{v}_1(t=0)$ non nulle dirigée vers et le long de l’axe de symétrie entre C_2 et C_3 (*voir Figure 3.1*). Nous notons θ l’angle formé par les centres de masse des balles au moment de la collision.

Les paramètres dynamiques sont les suivants : la vitesse de la sphère B_1 est $\mathbf{v}_1(t=0) = (1, 0)^T$ m/s, la masse est identique égale à 1 kg pour les trois sphères, le coefficient de restitution est identique égal à 1 et le coefficient de friction est identique égal à 0 pour tous les points de contact. Les résultats théoriques sont présentés dans l’article [LZB08]. Pour la simulation, nous construisons des disques unités pour B_1 , B_2 et B_3 dans le cas $\theta \in \{\pi/3, \pi/4\}$ et la moitié du rayon unité pour les disques B_2 et B_3 dans le cas $\theta \in \{\pi/6, \pi/8\}$. La frontière des disques est discrétisée en un polygone à 24, 32, 48 et 48 côtés pour B_1 , et 24, 32, 24 et 48 côtés pour B_2 et

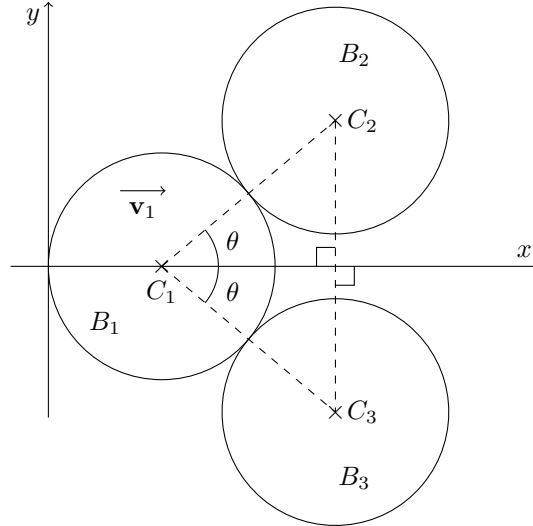


FIGURE 3.1 – Exemple d’une configuration symétrique pour un scénario de collision.

B_3 respectivement selon $\theta \in \{\pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/8\}$. Le rayon des disques ne joue aucun rôle dans le traitement du contact, seules comptent la masse des disques et la construction de la frontière discrétisée afin d’obtenir l’angle de contact souhaité.

Nous comparons les vitesses des centres de masse après contact évaluées théoriquement et numériquement pour différents angles de contact θ . Les résultats sont récapitulés dans la table 3.1. Ces résultats obtenus numériquement pour $\mu = 0$ sont en très bon accord avec les résultats théoriques, ainsi la symétrie de la configuration est bien conservée après contact.

Remarque 3.1.1.1. *Lorsque, dans la simulation, nous prenons $\mu \neq 0$ pour tous les points de contact, le résultat après contact dépend de la finesse du maillage. En effet, le point de contact P du bord maillé n’est pas forcément aligné avec les centres des disques, ainsi une force tangentielle apparaît dès que le coefficient de friction est non nul. Avec le nombre de côtés donné dans nos simulations, nous obtenons des différences entre les vitesses théoriques et numériques de C_2 et C_3 après contact de l’ordre de 10^{-2} en ordonnée et 10^{-4} en abscisse. La vitesse angulaire est aussi de l’ordre de 10^{-2} pour B_2 et B_3 . Par contre, avec $\mu = 0$, la vitesse angulaire de tous les disques est de l’ordre de 10^{-15} .*

La boîte glissante

Afin de confronter notre modèle à la friction de Coulomb, nous préparons le scénario de la boîte glissante suivant. Soit un cube unité de 1 kg , initialement au repos, placé sur le sol. Le sol est modélisé par un obstacle. Nous appliquons une force de poussée parallèle au sol. Le scénario est similaire à celui de l’article [DS11] (voir Figure 3.2). La simulation se déroule sur 7 s comme suit : sur $[0, 1[\cup]5, 7]$ aucune force n’est appliquée à la boîte et sur $[1, 5]$ une force de poussée F de 1 N parallèle au plan est appliquée à la boîte. Pour effectuer la simulation, nous prenons l’accélération due à la gravité égale à $\mathbf{g} = 9.81 \text{ m/s}^2$ et le coefficient de restitution égal à 0. La boîte et le sol sont maillés avec 4 éléments finis dont les sommets sont les 4 sommets du bord de l’objet (boîte ou sol) et le centre de masse. La distance les séparant est de 0.01 m .

TABLE 3.1 – Comparaisons entre les résultats théoriques (indice t) et numériques (indice n) pour une configuration de contact symétrique.

angle θ (en rad)	résultats théoriques (en m/s)	différence des résultats (en m/s)
	$\begin{bmatrix} \dot{C}_{1,t} \\ \dot{C}_{2,t} \\ \dot{C}_{3,t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{C}_{1,n} - \dot{C}_{1,t} \\ \dot{C}_{2,n} - \dot{C}_{2,t} \\ \dot{C}_{3,n} - \dot{C}_{3,t} \end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{8}$	$\begin{bmatrix} -0.26 & 0 \\ 0.63 & 0.26 \\ 0.63 & -0.26 \end{bmatrix}$	$10^{-11} \begin{bmatrix} 0 & 1 \times 10^{-4} \\ 1.6 & -4 \\ 1.6 & 4 \end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{6}$	$\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.35 \\ 0.6 & -0.35 \end{bmatrix}$	$10^{-11} \begin{bmatrix} 0 & 2.7 \times 10^{-6} \\ 2.7 & -4.7 \\ 2.7 & 4.7 \end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{4}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$	$10^{-11} \begin{bmatrix} -8.8 \times 10^{-5} & 1.9 \times 10^{-5} \\ 5.5 & -5.5 \\ 5.5 & 5.5 \end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{3}$	$\begin{bmatrix} 0.33 & 0 \\ 0.33 & 0.58 \\ 0.33 & -0.58 \end{bmatrix}$	$10^{-11} \begin{bmatrix} 5.5 \times 10^{-6} & -2.7 \times 10^{-5} \\ 6.1 & -3.5 \\ 6.1 & 3.5 \end{bmatrix}$

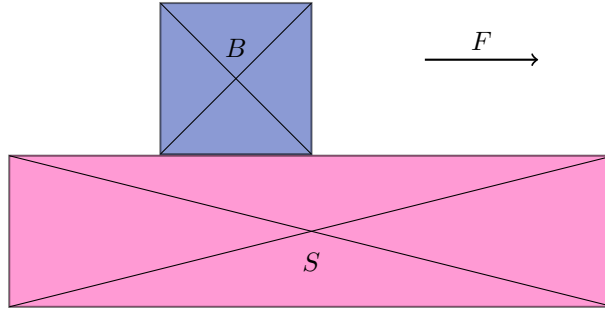


FIGURE 3.2 – Exemple d’une configuration pour le scénario de la boîte B glissante sur le sol S .

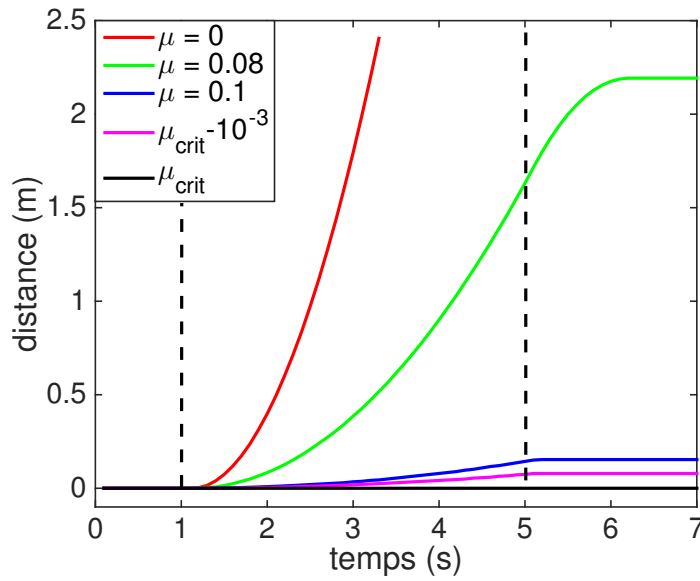


FIGURE 3.3 – Résultat du déplacement de la boîte pour le scénario de la boîte glissante selon différentes valeurs du coefficient de friction.

Contrairement à [DS11], nous testons différents coefficients de friction (voir Figure 3.3). Le modèle de Coulomb établit que, pour cette configuration, le coefficient de friction à partir duquel la boîte commence à se déplacer est $\mu_{crit} = 1/g \simeq 0.102$. Les résultats obtenus pour ces différents coefficients de friction sont présentés dans la figure 3.3 et montrent que le modèle de Coulomb est satisfait.

Le berceau de Newton

Afin d’investiguer la propagation du choc, nous nous intéressons au problème classique du berceau de Newton. C’est l’un des plus simples scénarios de collisions multiples qui peut être considéré. Il consiste à étudier la collision entre trois balles identiques alignées B_1 , B_2 et B_3 de centres respectifs C_1 , C_2 et C_3 telles que, initialement B_2 et B_3 sont au repos et B_1 a une vitesse $\mathbf{v}_1(0)$ non nulle dirigée vers et le long de l’axe porté par $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3$ (voir Figure 3.4).

Nous pouvons répertorier plusieurs études pour décrire le comportement dynamique des balles durant ce scénario de collision, dont un grand nombre sont listées dans le livre [NB14].

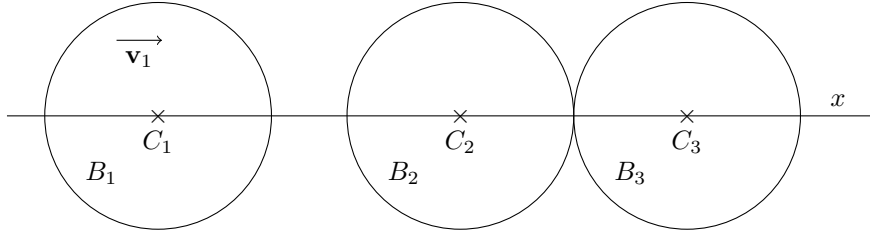


FIGURE 3.4 – Exemple d’un problème du berceau de Newton pour trois balles.

Les résultats de ces études montrent que la conservation des moments linéaire et angulaire et la propriété de non augmentation d’énergie cinétique après contact ne sont pas suffisantes pour permettre une description complète de la dynamique en jeu dans ce scénario. En effet, la dynamique d’une chaîne de balles en contact implique deux principaux phénomènes : la dissipation et la dispersion d’énergie. La dissipation est due à la plasticité ou l’endommagement aux points de contact. La dispersion, elle, est due aux effets de vibrations et d’ondes à travers la chaîne entière. Notre modèle prend en compte la dissipation par l’intermédiaire des coefficients de friction et de restitution, mais ne considère pas la dispersion.

La configuration de test est la suivante. Soit B_1 , B_2 et B_3 trois sphères unités, de masse 1 kg et $\mathbf{v}_1(t=0) = 1\text{ m/s}$ à l’état initial. Le coefficient de restitution est identique égal à 1 et le coefficient de friction est identique égal à 0 pour tous les points de contact. Comme la collision se situe sur l’axe des abscisses x , nous étudions uniquement la 1^{re} composante des vitesses. Rien que pour cette situation, il existe une infinité de solutions pour les vitesses des centres des sphères après collision, entre la solution pour le cas de zéro dispersion : $\mathbf{v}_1(t^+) = 0$, $\mathbf{v}_2(t^+) = 0$ et $\mathbf{v}_3(t^+) = 1$ et la solution pour le cas de dispersion maximale $\mathbf{v}_1(t^+) = -1/3$, $\mathbf{v}_2(t^+) = 2/3$ et $\mathbf{v}_3(t^+) = 2/3$ (voir la page 25 du livre [NB14]). Dans le cas de zéro dispersion, toute l’énergie cinétique de B_1 est transférée à B_3 après collision.

Comme noté dans la partie 1.1.2, les choix théoriques que nous avons faits restreignent l’espace des solutions que le modèle peut atteindre. Sans la notion de points de contact actifs discutée dans la partie 2.1.4, nous traitons tous les points de contact simultanément. Appliquée au problème du berceau de Newton, cela signifie que le point de contact entre les sphères B_1 et B_2 et le point de contact entre les sphères B_2 et B_3 sont traités ensemble, c’est-à-dire que nous ne prenons pas en compte la propagation du choc qui s’initie au point de contact entre B_1 et B_2 et qui s’étend au point de contact entre B_2 et B_3 . Ceci nous assure une unique solution pour le scénario décrit précédemment correspondant à la solution pour le cas de dispersion maximale. Afin de capturer d’autres solutions, telles que la solution pour le cas de zéro dispersion, nous devons prendre en compte la cohérence temporelle, c’est-à-dire, traiter le contact entre B_1 et B_2 indépendamment et avant de considérer le contact entre B_2 et B_3 . La notion de points de contact actifs permet de respecter cette cohérence temporelle. En effet, en t^- , seul le point de contact entre B_1 et B_2 est actif. Après une 1^{re} itération, le point de contact entre B_1 et B_2 devient inactif et le point de contact entre B_2 et B_3 devient actif. Enfin, après une 2^e itération, les deux points de contact deviennent inactifs, la résolution du contact est terminée. La solution engendrée par cette méthode correspond à la solution pour le cas de zéro dispersion.

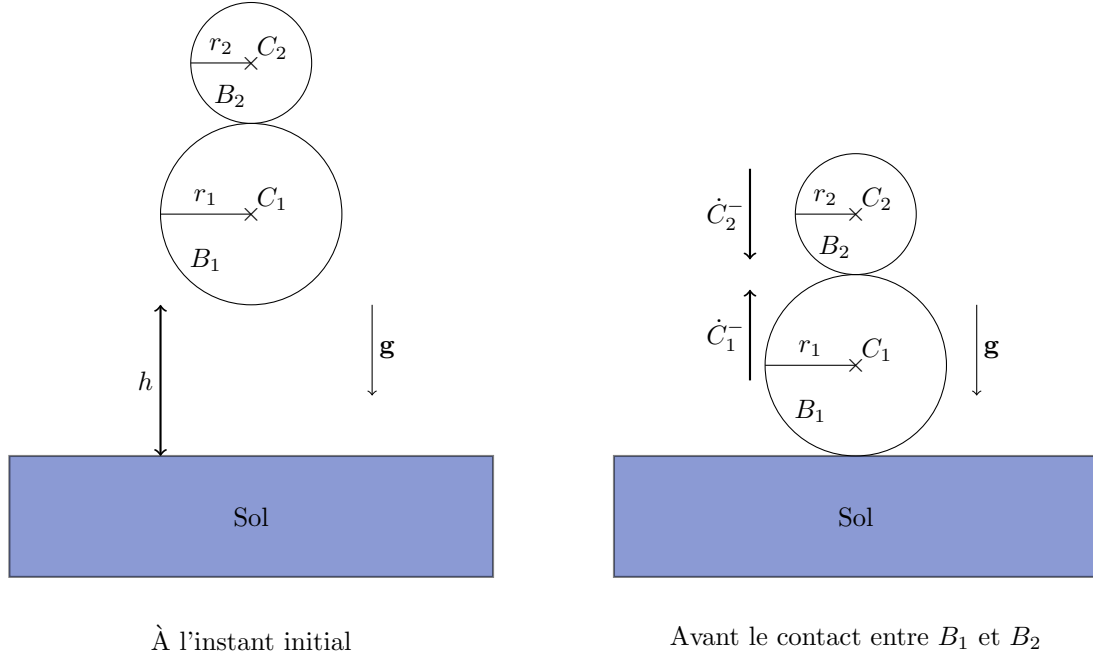


FIGURE 3.5 – Exemple d'une configuration du canon de Newton avec 2 balles B_1 et B_2 .

Le canon de Newton

Un autre scénario simple de multi-contacts peut être étudié pour illustrer la propagation du choc. Nous pouvons l'appeler le canon de Newton. Il consiste à étudier la collision entre deux balles B_1 et B_2 de centres respectifs C_1 et C_2 , de masses respectives M_1 et M_2 et de rayons respectifs r_1 et r_2 , alignées à la verticale du sol à une hauteur $h > 0$, telles que, initialement B_1 et B_2 sont en contact et lâchées avec une vitesse nulle (voir Figure 3.5).

Nous étudions la vitesse verticale du centre de masse \dot{C}_2 , de B_2 en fonction du rayon $r_2 \in \{1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$. Nous traitons les points de contact avec l'algorithme des points de contact actifs (voir Partie 2.1.4). Ainsi, le premier contact actif traité est entre le sol et la balle B_1 , puis le deuxième entre B_1 et B_2 . Nous comparons les vitesses simulées avec les vitesses théoriques obtenues après le contact entre B_1 et B_2 pour $r_2 = r_1$ et $r_2 = 0$ (voir l'équation 3.1.1).

Pour effectuer la simulation nous prenons une hauteur $h = 1$ m, le rayon $r_1 = 1$ m, l'accélération due à la gravité égale à $\mathbf{g} = 9.81$ m/s², le coefficient de restitution égal à 1 et le coefficient de friction égal à 0 pour tous les points de contact. Les balles B_1 et B_2 sont représentées par des disques discrétisés en des polygones à 32 côtés et le sol est représenté par un obstacle. Les résultats sont présentés dans la figure 3.6.

$$\dot{C}_2(t^+) = \frac{2M_1\dot{C}_1(t^-) + (M_2 - M_1)\dot{C}_2(t^-)}{M_1 + M_2},$$

$$\text{et } \dot{C}_1(t^+) = \frac{2M_2\dot{C}_2(t^-) + (M_1 - M_2)\dot{C}_1(t^-)}{M_1 + M_2}.$$

(3.1.1)

Avec les temps t^- et t^+ indiquant l'instant avant et après le contact entre B_1 et B_2 . Pour $r_2 = r_1$, nous avons $\dot{C}_2(t^+) = \dot{C}_1(t^-)$ et pour $r_2 = 0$, nous avons $\dot{C}_2(t^+) = 3\dot{C}_1(t^-)$ car $\dot{C}_2(t^-) = -\dot{C}_1(t^-)$

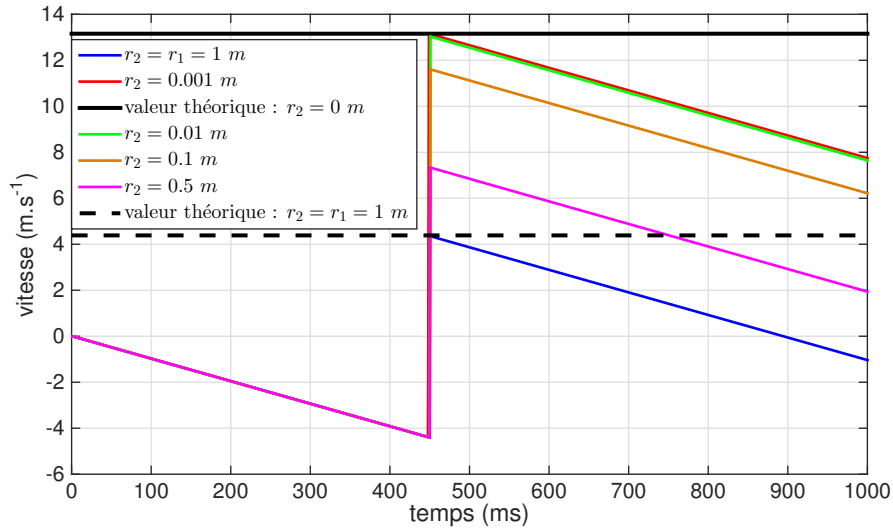


FIGURE 3.6 – Évolution de la vitesse du centre de masse de la balle B_2 en fonction de son rayon r_2 .

(voir Figure 3.5).

Nous observons une bonne cohérence entre les vitesses simulées et celles théoriques pour les cas $r_2 = r_1$ et $r_2 = 0$.

Une balle rebondissante

Afin de confronter notre modèle au problème de points d'accumulation (voir Partie 2.1.2), nous préparons un scénario de balle rebondissante. Soit une balle B_1 de masse 1 kg , placée à une hauteur $h > 0$ du sol. Le scénario consiste à lâcher la balle avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_1(t=0)$, soumise à l'action de la gravité (voir Figure 3.7). Nous étudions la trajectoire du centre de masse C_1 de B_1 , l'évolution de sa vitesse \dot{C}_1 et l'évolution de l'impulsion normale λ . Les résultats numériques sont comparés avec les résultats théoriques. Pour effectuer la simulation nous prenons une hauteur $h = 1 \text{ m}$, une vitesse initiale nulle, l'accélération due à la gravité égale à $\mathbf{g} = 9.81 \text{ m/s}^2$, le coefficient de restitution strictement inférieur à 1 et le coefficient de friction égal à 0. Différents coefficients de restitution ont été testés, par choix je ne présenterai ici que les résultats pour $\varepsilon = 0.75$, la qualité ne dépendant pas de la valeur choisie. La balle B_1 est représentée par un disque discrétisé en un polygone à 32 côtés.

La résolution du contact en t^* garantit que la vitesse $\mathbf{v}_1(t^+)$ appartient à l'ensemble des vitesses admissibles V . Le schéma d'Euler explicite garantit que la vitesse $\mathbf{v}_1(t)$ est constante, égale à $\mathbf{v}_1(t^+)$ sur $[t^+, t^+ + \Delta t]$. Ainsi, aucun contact n'est possible jusqu'à la mise à jour de la vitesse en $t^+ + \Delta t$. L'intervalle de temps entre deux collisions pour la balle simulée restera donc toujours plus grand ou égal au pas de temps maximal choisi et ce, même proche de l'instant d'apparition théorique du point d'accumulation ($\simeq 3 \text{ s}$) (voir la Figure : zoom sur l'intervalle [3, 5] 3.8). Ainsi, la simulation dépasse le temps associé au point d'accumulation et peut continuer indéfiniment. De plus, la distance entre le sol et la balle oscille autour de la distance ζ déterminée par les distances de collision du sol et de la balle. En effet, si la balle pénètre à l'intérieur de la zone de collision du sol avec une vitesse non admissible, alors la résolution du choc avec $\varepsilon > 0$

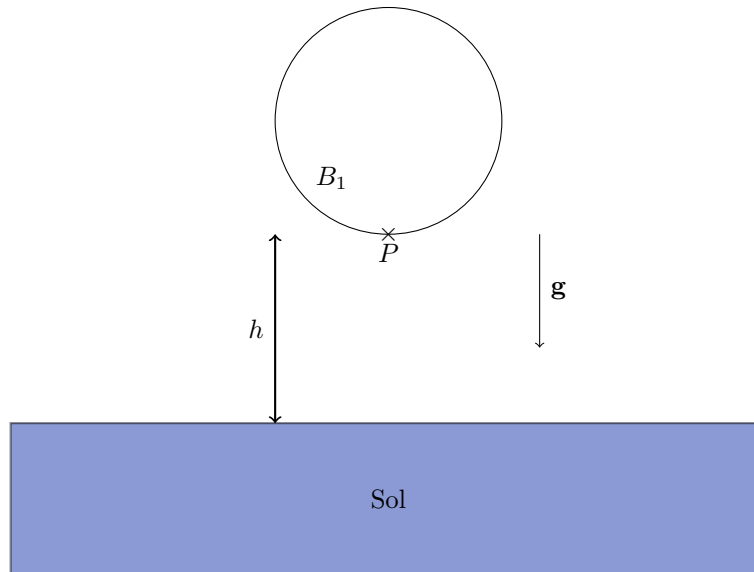


FIGURE 3.7 – Exemple d’un problème de point d’accumulation avec la balle B_1 rebondissante.

entraîne l’éloignement de la balle jusqu’à la prochaine mise à jour des vitesses et si la balle est en dehors de la zone de collision du sol lors d’une mise à jour de la vitesse, alors la composante $-\Delta t \mathbf{g}$ provenant de l’action de la gravité entraîne un rapprochement de la balle au sol (voir la Figure : zoom sur l’intervalle [3, 5] 3.8).

Remarque 3.1.1.2. *Ce qui est discuté précédemment convient pour la simulation effectuée avec le paramètre c , relâchant la définition de vitesses admissibles, pris à 0. En effet, si nous prenons $c < 0$ comme expliqué dans la partie 2.1.4, le contact ne sera détecté qu’après une période durant laquelle la vitesse de la balle est dirigée vers le sol, rapprochant ainsi la balle du sol. À un temps très grand, il est possible d’obtenir une interpénétration. Ce scénario étant un scénario de collision simple, nous pouvons prendre $c = 0$ et ainsi garantir la non interpénétration quel que soit le temps de la simulation.*

Ainsi, en prenant un pas de temps $\Delta t_{max} = 5 \cdot 10^{-4}$ s, et en construisant une balle et un sol obstacle avec des distances de collision $\eta = 10^{-3}$ m, nous obtenons des résultats numériques en adéquation avec les résultats théoriques (voir Figure 3.8).

La conservation de l’énergie

De part l’étude numérique du pas de temps Δt vérifiant le critère de stabilité (2.1.1) et de part l’étude théorique sur les solutions de problèmes linéaires de complémentarité (voir Partie 1.1.2), la non augmentation de l’énergie cinétique du système après contact est vérifiée. En outre, afin d’illustrer cette propriété, nous pouvons reprendre le scénario de la balle rebondissante en prenant un coefficient de restitution égal à 1 et le scénario du berceau de Newton avec un traitement des contacts utilisant la notion de points de contact actifs (voir Partie 2.1.4). Dans les deux cas, aucune dissipation d’énergie ne peut provenir de la friction.

Concernant la balle rebondissante, la simulation comprend les mêmes paramètres initiaux que dans la partie 3.1.1 avec $\varepsilon = 1$. Nous étudions l’évolution de la hauteur maximale du point P au cours du temps. En théorie, cette hauteur maximale est constante, égale à 1 au cours

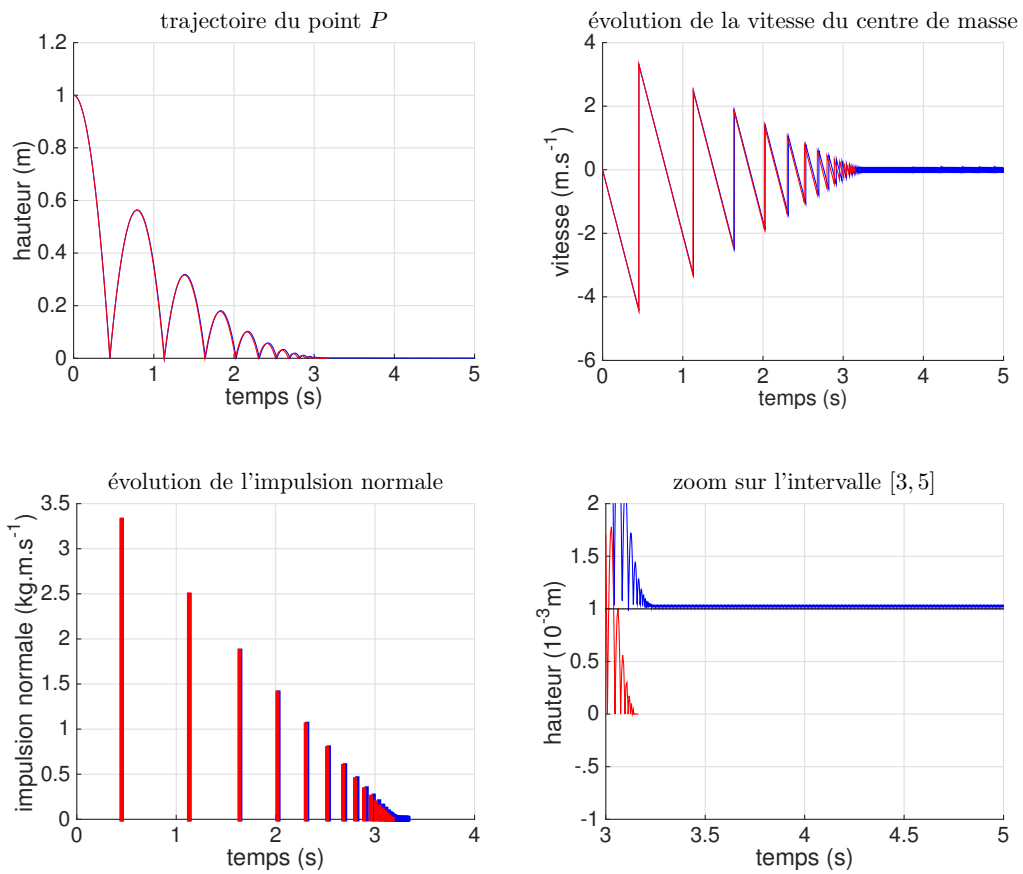


FIGURE 3.8 – Comparaison entre les résultats numériques en bleu et les résultats théoriques en rouge.

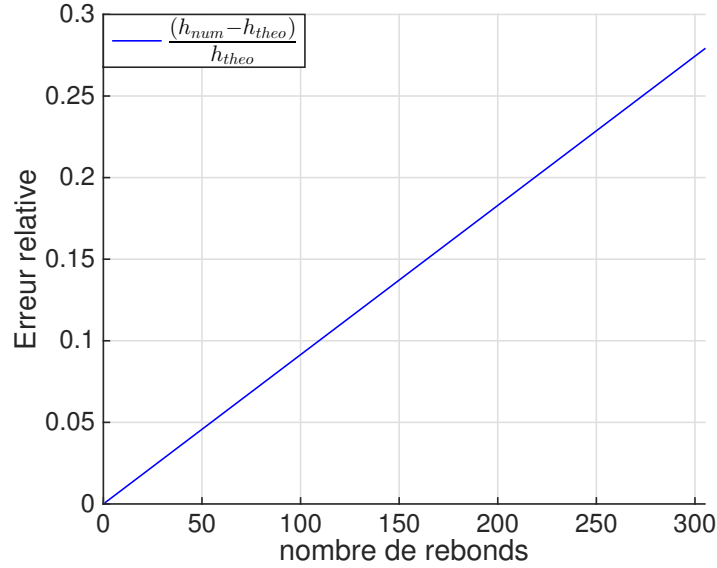


FIGURE 3.9 – Évolution de l’erreur relative $\frac{h_{num} - h_{theo}}{h_{theo}}$ de la hauteur maximale h du point P .

du temps. Cela nous permet d’étudier la précision de la solution donnée par la résolution du problème linéaire de complémentarité et l’évolution de l’erreur numérique après n rebonds au sol, les résultats sont présentés dans la figure 3.9.

L’erreur relative atteint 30% après 300 rebonds. Cette valeur importante est principalement due au schéma numérique et un peu à la distance de collision η . En effet, la première collision est détectée dès que la balle pénètre dans la zone de collision associée au sol, fournissant ainsi une vitesse après contact différente de la vitesse après contact théorique. De plus, le schéma d’Euler explicite maintient cette différence sur tout l’intervalle $[t^+, t^+ + \Delta t_{max}]$. Ainsi, d’après les paramètres de simulation choisis, en $t^+ + \Delta t_{max}$ la différence de vitesse entraîne une différence de position égale à 9×10^{-4} et la hauteur de la balle simulée atteint 1.0009 m après le 1^{er} rebond. Enfin, à chaque rebond, la hauteur maximale est augmentée de 9×10^{-4} , ce qui explique l’erreur relative importante au bout des 300 rebonds successifs.

Concernant le berceau de Newton, la simulation comprend les mêmes paramètres initiaux que dans la partie 3.1.1 avec un nombre de balles $n \geq 3$. Soit B_{end} la dernière balle de la configuration, c’est-à-dire, celle qui, après contact avec dispersion maximale, atteint une vitesse équivalente à celle de B_1 avant contact. Nous notons $\dot{G} = (\dot{G}_x, \dot{G}_y)^T$ les composantes horizontale et verticale de la vitesse du centre de masse de la balle. Ainsi, en théorie, nous avons : $\dot{G}_{x,end}(t^-) = 0$, $\dot{G}_{x,end}(t^+) = 1$, $\dot{G}_{y,end} = 0$, et la vitesse angulaire de $\dot{\theta}_{end} = 0$. Nous étudions l’évolution de ces données cinématiques en fonction du nombre de balles n . La distance entre chaque balle est plus petite que la distance de collision. Ainsi les $n - 1$ contacts sont traités durant un même pas de temps. Cela nous permet d’étudier la précision de la solution donnée par la résolution du problème linéaire de complémentarité et l’évolution de l’erreur numérique après $n - 1$ résolutions, les résultats sont présentés dans la figure 3.10.

Nous observons que les vitesses, verticale et angulaire, de la dernière balle restent proches

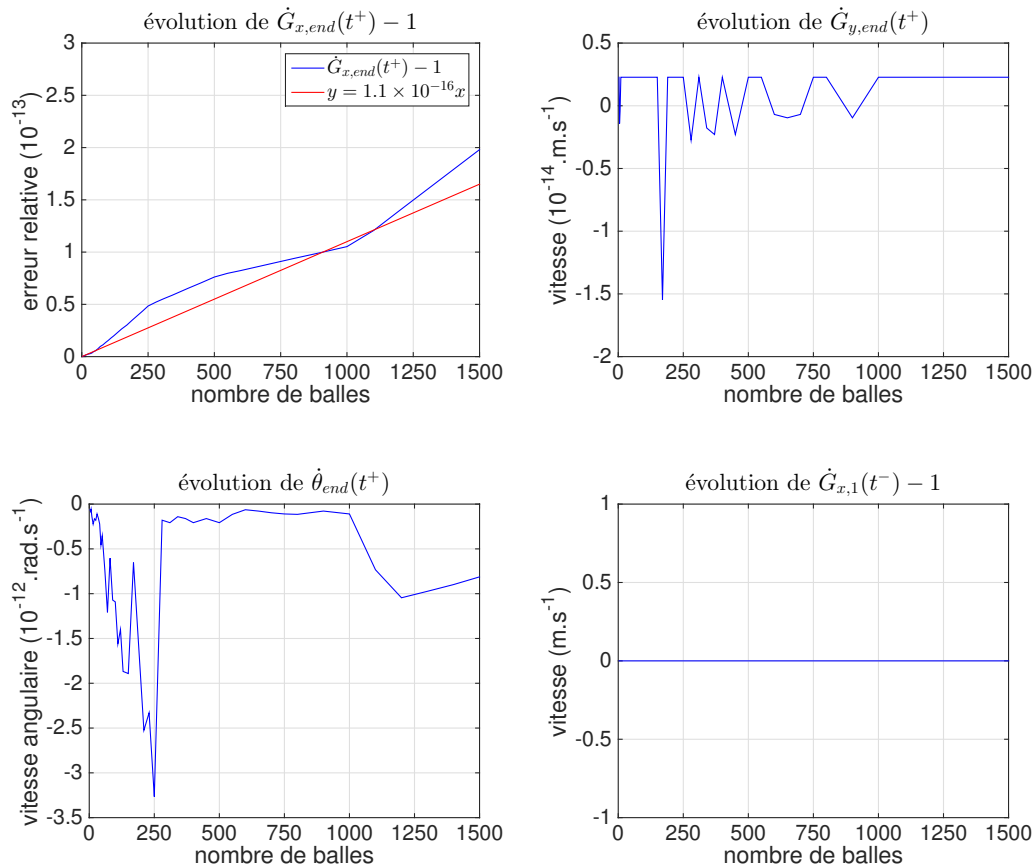


FIGURE 3.10 – Étude de la précision du modèle et de l'évolution de l'erreur numérique au cours du temps, pour le problème du berceau de Newton sans dissipation d'énergie et avec dispersion maximale d'énergie.

de zéro quel que soit le nombre de contacts. Concernant, la vitesse horizontale de la dernière balle, nous observons une évolution grossièrement linéaire autour de la droite rouge d'équation $y = 1.1 \times 10^{-16}x$ dont la pente est de l'ordre de l'erreur **LCP** calculée à partir de l'équation (2.1.8).

3.1.2 Des interactions avec l'environnement

Nous allons maintenant confronter notre modèle à des scénarios simples de dérive de glace de mer soumise à des courants atmosphérique et océanique et sans collisions. Parmi les comportements connus des floes vis à vis de l'environnement, nous en sélectionnons 3 :

1. la vitesse de dérive libre atteint asymptotiquement la vitesse caractéristique des courants (voir Partie 3.1.2),
2. la trajectoire du floe suit une direction de 20° à 40° vers la droite de la direction du vent (voir Partie 3.1.2),
3. l'installation du modèle de couplage océan/glace permet de retrouver les oscillations inertielles de la trajectoire du floe (voir Partie 3.1.2).

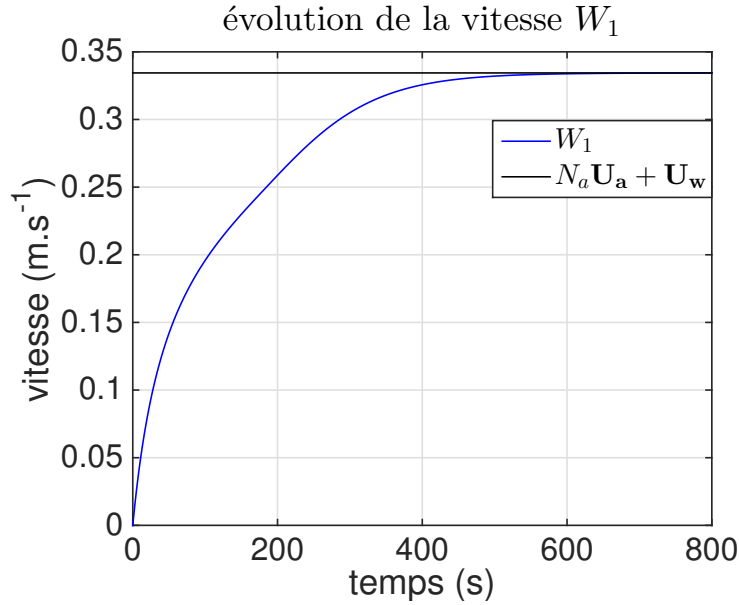


FIGURE 3.11 – Évolution de la vitesse de B_1 soumis à un courant $\mathbf{U}_w = (0.25, 0)^T m/s$ et un vent $\mathbf{U}_a = (4, 0)^T m/s$.

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà discuté de ces différents comportements de dérive de glace en fonction de l’environnement appliqué. Les choix théoriques et numériques que nous avons faits assurent qu’une partie de ces comportements sont satisfaits. Par exemple, le formalisme Newton-Euler, la formulation de l’action de traînée des courants et la méthode de quadrature de Gauss-Legendre pour le calcul intégral sur la surface du floe, que nous avons adoptés garantissent que l’action des traînées soit indépendante du type de mouvement du floe, c’est-à-dire, que l’action sur le mouvement du floe est la même que ce soit un mouvement de translation, de rotation ou une combinaison des deux. Ces différents comportements sont illustrés par les tests proposés suivants dans lesquels aucune collision n’apparaît et l’environnement sera précisé à chaque fois. Lors des simulations suivantes, nous utilisons les constantes et les paramètres décrits dans la table 1.1.

La vitesse caractéristique

Afin de tester l’action de traînée du courant océanique sur le mouvement du floe, nous préparons la configuration suivante. Soit un floe B_1 de la forme d’un disque de rayon $r_1 = 0.1 m$, de masse $M_1 = 2 kg$ uniformément répartie, de centre de masse C_1 et de vecteur vitesse W_1 , nul à l’instant initial. B_1 est placé dans un environnement constitué d’un courant océanique de vitesse \mathbf{U}_w constante, d’un vent de vitesse \mathbf{U}_a constante, sans effet de Coriolis et sans le modèle de couplage océan/glace.

La limite asymptotique est donnée par la vitesse caractéristique des courants V_c (voir l’équation 1.2.2) et (voir Partie 2.1.2). La figure 3.11 donne l’évolution de la vitesse au cours du temps pour $\mathbf{U}_w = (0.25, 0)^T m/s$ et $\mathbf{U}_a = (4, 0)^T m/s$. La vitesse caractéristique est égale à $0.33 m/s$. Pour les simulations, le cylindre B_1 est représenté par un disque dont la frontière est discrétisée en un polygone à 32 côtés. Le pas de temps Δt_{max} est égal à $5.10^{-4} s$.

La vitesse simulée atteint la valeur donnée par la vitesse caractéristique et à partir de la 10^e

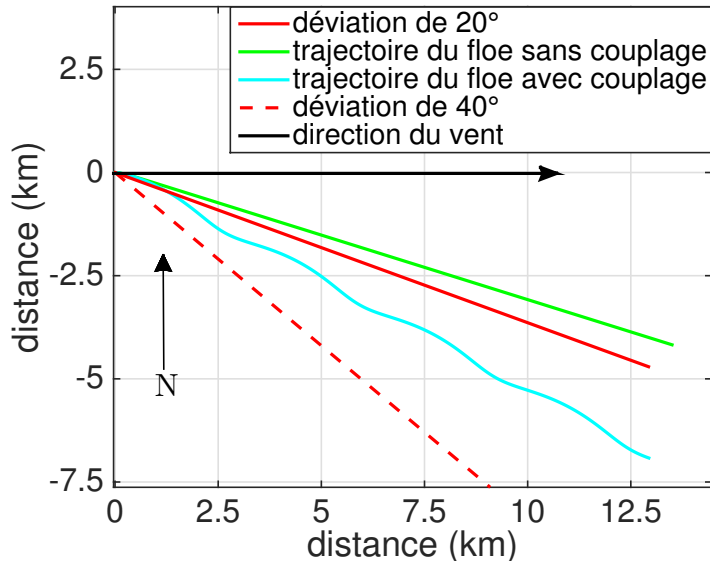


FIGURE 3.12 – Trajectoire du floe B_1 déviée par l’effet de Coriolis à la latitude de 81° N. La mesure de la déviation est autour de 17° vers le sud sans le modèle de couplage océan/glace et autour de 28° vers le sud avec le modèle de couplage.

minute, l’erreur relative entre la valeur théorique et numérique à un même instant est inférieure à 10^{-3} .

La déviation de 20 degrés par rapport au vent

Afin d’illustrer la déviation de la trajectoire des floes par rapport à la direction du vent, nous préparons la configuration suivante. Soit un floe B_1 de la forme d’un disque de rayon 100 m , d’épaisseur $h_1 = 1\text{ m}$, de masse $M_1 = 100^2\pi\rho\text{ kg}$ uniformément répartie. B_1 est placé dans un environnement constitué d’un courant océanique au repos, d’un vent de vitesse $\mathbf{U}_a = 4\text{ m/s}$ constant, dirigé vers l’est et avec l’effet de Coriolis à une latitude de 81° N. Deux tests seront effectués, l’un sans le modèle de couplage océan/glace et l’autre avec.

Pour les simulations, le floe B_1 est représenté par un disque dont la frontière est discrétisée en un polygone à 32 côtés, et $\rho = 917\text{ kg.m}^{-3}$. La simulation se déroule sur 2 jours avec un pas de temps Δt_{max} égal à 10 s .

Le résultat montre une déviation vers la droite de la direction du vent en accord avec les observations. Précisément, dans le test sans couplage l’angle est légèrement inférieur à 20° , tandis que dans le test avec couplage nous retrouvons un angle de déviation entre 20° et 40° (voir Figure 3.12).

L’étude du couplage océan/glace

Afin de confronter notre modèle à l’action de la couche limite océanique, nous préparons le scénario suivant. Soit un floe B_1 de la forme d’un disque de rayon 100 m , d’épaisseur $h_1 = 1\text{ m}$, de masse $M_1 = 100^2\pi\rho\text{ kg}$ uniformément répartie. B_1 est placé dans un environnement constitué d’un courant océanique au repos, d’un vent de vitesse \mathbf{U}_a variant au cours du temps, avec l’effet

de Coriolis à une latitude de 81° N et le couplage océan/glace. La vitesse en m/s du vent varie d'une vitesse nulle à l'instant initial jusqu'à atteindre une vitesse $(-5, -2)^T$ au temps $t = 12$ h, puis est constante jusqu'à $t = 45$ h. À ce moment, plusieurs changements de vitesse apparaissent : entre $t = 45$ et $t = 46$ h, la vitesse passe de $(-5, -2)^T$ à $(-2, 5)^T$, puis entre $t = 46$ et $t = 47$ h, la vitesse passe de $(-2, 5)^T$ à $(4, 3)^T$, et enfin entre $t = 47$ et $t = 48$ h, la vitesse passe de $(4, 3)^T$ à $(1, -6)^T$. Ensuite, la vitesse du vent reste constante, égale à $(1, -6)^T$ durant 4 jours supplémentaires.

Les simulations sont effectuées en prenant un disque de 100 m de diamètre, dont la frontière est discrétisée en un polygone à 32 côtés. Nous effectuons quatre tests en faisant varier l'aire de la maille de l'océan. Au cours des trois premiers tests, l'aire du floe B_1 représente respectivement 20%, 50% et 80% de l'aire de la maille de l'océan considérée. Le quatrième test consiste à simuler le scénario précédent sans couplage océan/glace. Dans ce cas, la concentration de glace ne joue aucun rôle dans la dynamique. Ce quatrième test permettra d'illustrer la différence des trajectoires lorsque le couplage n'est pas pris en compte.

La trajectoire simulée de B_1 au cours du temps est représentée sur la figure 3.13. Nous retrouvons les oscillations inertielles, démarrant après la brusque variation du vent avant la fin du 2^e jour, au nombre de 8 sur les 4 jours qui suivent. Ce résultat est en accord avec les observations de la glace à ces latitudes dont la fréquence des oscillations est estimée autour de 12 h. Tandis que lorsque le couplage océan/glace n'est pas pris en compte, aucune oscillation n'apparaît. La proportion de la surface de l'océan couverte par la glace n'a finalement qu'un effet peu important sur la dérive aux grandes échelles de temps. Par contre, à l'échelle du floe, en zoomant sur les trajectoires autour du 6^e jour, l'effet devient important avec des différences observées de l'ordre du kilomètre entre les trajectoires (*voir Figure : zoom autour du 6^e jour 3.13*).

3.1.3 Les tests en bassin

Précédemment, nous avons validé notre modèle sur des scénarios idéalisés. Maintenant, nous validons notre modèle par rapport à des expérimentations qui ont été effectuées en bassin. Ces tests consistent à étudier la collision entre deux cylindres de bois identiques D_1 et D_2 de centres de masse C_1 et C_2 , de masse 14 kg, dont les caractéristiques sont données dans la figure 3.14. Le scénario est le suivant : initialement, les disques ne sont pas en collision, D_1 est poussé en direction de D_2 au repos. L'environnement est constitué d'un courant et d'un vent nuls. 7 poussées différentes ont été testées et les mouvements des deux cylindres ont été enregistrés par caméra. L'extraction de la position et de la vitesse des centres de masse de D_1 et D_2 en fonction du temps a été réalisée à partir d'analyse d'images (*voir [DLBPB13]*).

En théorie, les 3 premières poussées ont été effectuées dans la direction de l'axe des centres de masse des cylindres, sans appliquer de rotation. Ceci explique que les trajectoires soient quasi rectilignes. Les poussées 4 à 7 ont été effectuées dans une direction faisant un angle $\theta \neq 0$ avec l'axe des centres de masse (*voir Figure 3.15*). Cependant, en pratique, les floes n'étant pas fixés à une position initiale et les poussées étant effectuées manuellement, les trajectoires et les angles de contact ne sont pas parfaitement en accord avec la théorie.

Les simulations sont effectuées en prenant deux disques de 0.99 m de diamètre, dont la frontière est discrétisée en un polygone à 32 côtés, d'épaisseur 0.033 m, de masse 14 kg, sans friction, sans prise en compte de l'effet de Coriolis et sans couplage eau du bassin/cylindre de bois. Ce-

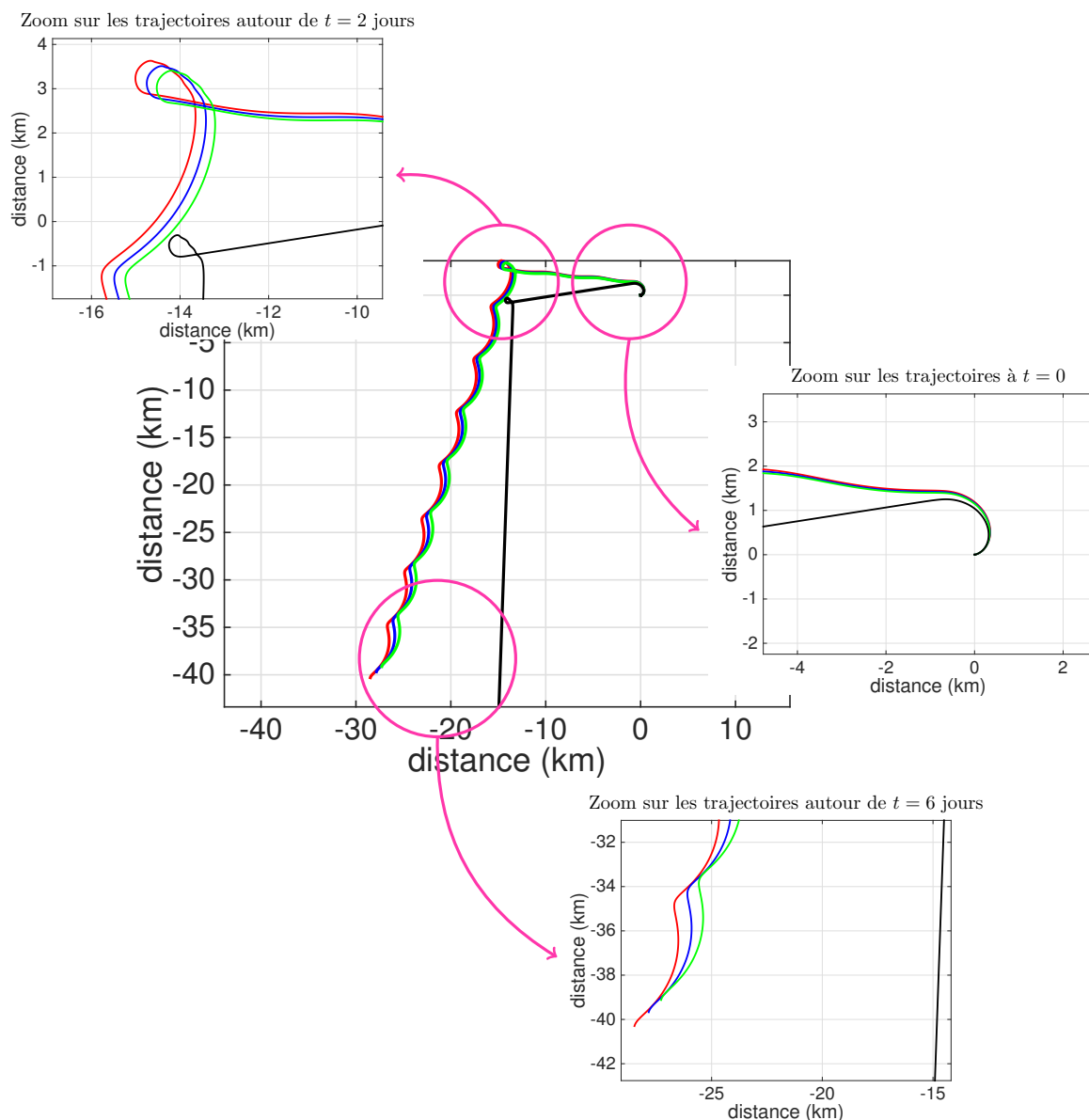


FIGURE 3.13 – Trajectoires sur 6 jours du floe B_1 soumis à un vent dont la vitesse varie au cours du temps. Le modèle de couplage océan/glace est pris en compte avec différentes mailles d’océan. En rouge, bleu et vert, la trajectoire de B_1 dont l’aire représente 20%, 50% et 80%, respectivement, de l’aire de la maille d’océan. En noire, la trajectoire du floe sans couplage.

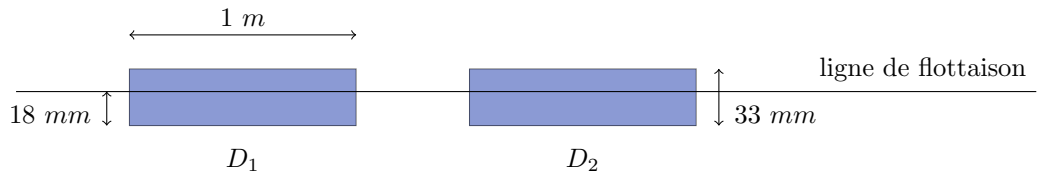


FIGURE 3.14 – Vue de profil de la configuration utilisée pour les tests de collision entre D_1 et D_2 .

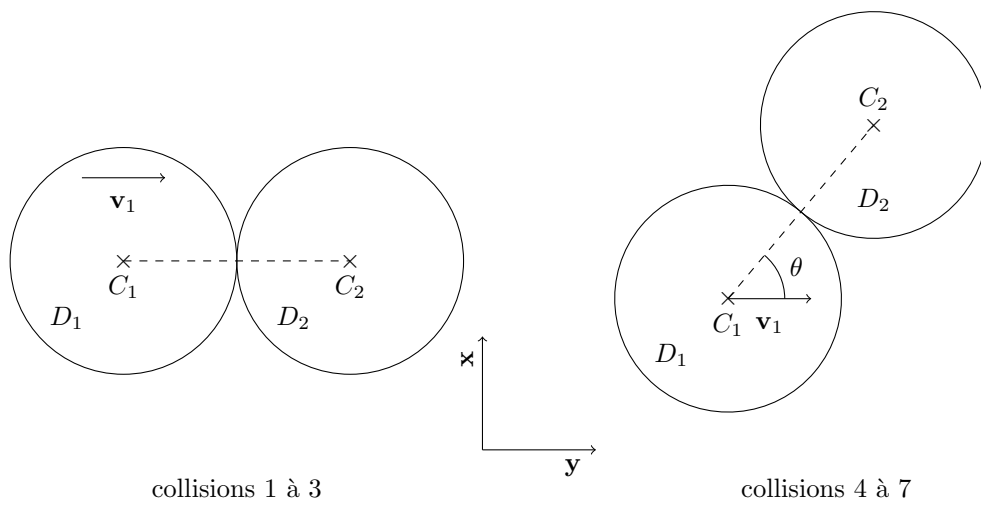


FIGURE 3.15 – Vue de dessus de la configuration de contact lors des tests de collision entre D_1 et D_2 .

TABLE 3.2 – Paramètres dérivés des 7 collisions : t_c est l’instant d’apparition de la collision, $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont, respectivement, les composantes selon l’axe \mathbf{x} et l’axe \mathbf{y} (voir Figure 3.15) de la vitesse du cylindre D_i avant contact $j = b$ ou après contact $j = a$. Les valeurs fournies par la simulation sont en bleu et les valeurs extraites de l’analyse d’images sont en noire.

#	t_c s	$u_{1,b}$ $cm.s^{-1}$	$v_{1,b}$	$u_{2,b}$	$v_{2,b}$	$u_{1,a}$	$v_{1,a}$	$u_{2,a}$	$v_{2,a}$
1	26.96	-0.84	-21.75	-0.62	-0.44	-0.46	-7.07	0	-14.34
1_{simu}	26.9	-0.84	-21.72	-0.62	-0.44	-1.19	-7.06	-0.26	-15.1
2	117	-1.65	-27.65	-0.19	-0.64	-0.72	-8.16	-0.14	-19.65
2_{simu}	116.95	-1.65	-27.65	-0.19	-0.64	-2.05	-8.26	0.21	-20.03
3	190.8	-0.41	-20.07	-0.91	1.25	0.48	-3.86	0.32	-13.17
3_{simu}	190.72	-0.41	-20.06	-0.91	1.25	0.29	-3.86	-1.6	-14.96
4	240.68	3.33	-25.12	0.41	2.78	-2.23	-6.6	7.34	-14.01
4_{simu}	240.74	3.33	-25.14	0.41	2.78	-4.41	-8.14	8.15	-14.22
5	330.16	-1.46	-22.59	0.49	-0.43	-5.67	-6.56	4.43	-14.61
5_{simu}	330.28	-1.46	-22.6	0.49	-0.43	-5.7	-8.45	4.73	-14.58
6	399.92	0.3	-19.95	0.35	-0.29	3.57	-7.53	-4.09	-13.92
6_{simu}	399.78	0.3	-19.95	0.35	-0.29	3.53	-7.51	-2.89	-12.73
7	552.72	-7.36	-27.21	2	0.26	-11.94	-11.01	6.73	-16.73
7_{simu}	552.76	-7.38	-27.28	2	0.26	-12.46	-11.08	7.08	-15.94

pendant, les forces de traînée dues au vent et à l’eau du bassin sont bien toujours présentes. À partir des positions et des vitesses initiales extraites par l’analyse d’images, nous avons utilisé notre modèle pour reconstruire les trajectoires des cylindres. Ces trajectoires simulées (en rouge) sont comparées aux trajectoires mesurées (en bleu) à partir des données de [DLBPB13]. Le coefficient de restitution a été ajusté afin de minimiser la distance entre les trajectoires simulées et les trajectoires extraites. Le meilleur choix a été trouvé autour de $\varepsilon = 0.35$, et les résultats sont présentés dans la figure 3.16 pour trois collisions utilisant cette valeur. Les résultats montrent une adéquation entre les trajectoires simulées et les trajectoires observées, en particulier, la direction des trajectoires simulées et la direction des trajectoires obtenues après analyse d’images sont similaires, avant et après contact.

Les résultats détaillés des vitesses avant et après collision ainsi que l’instant de détection des collisions pour les données observées et les données simulées sont présentés dans la table 3.2.

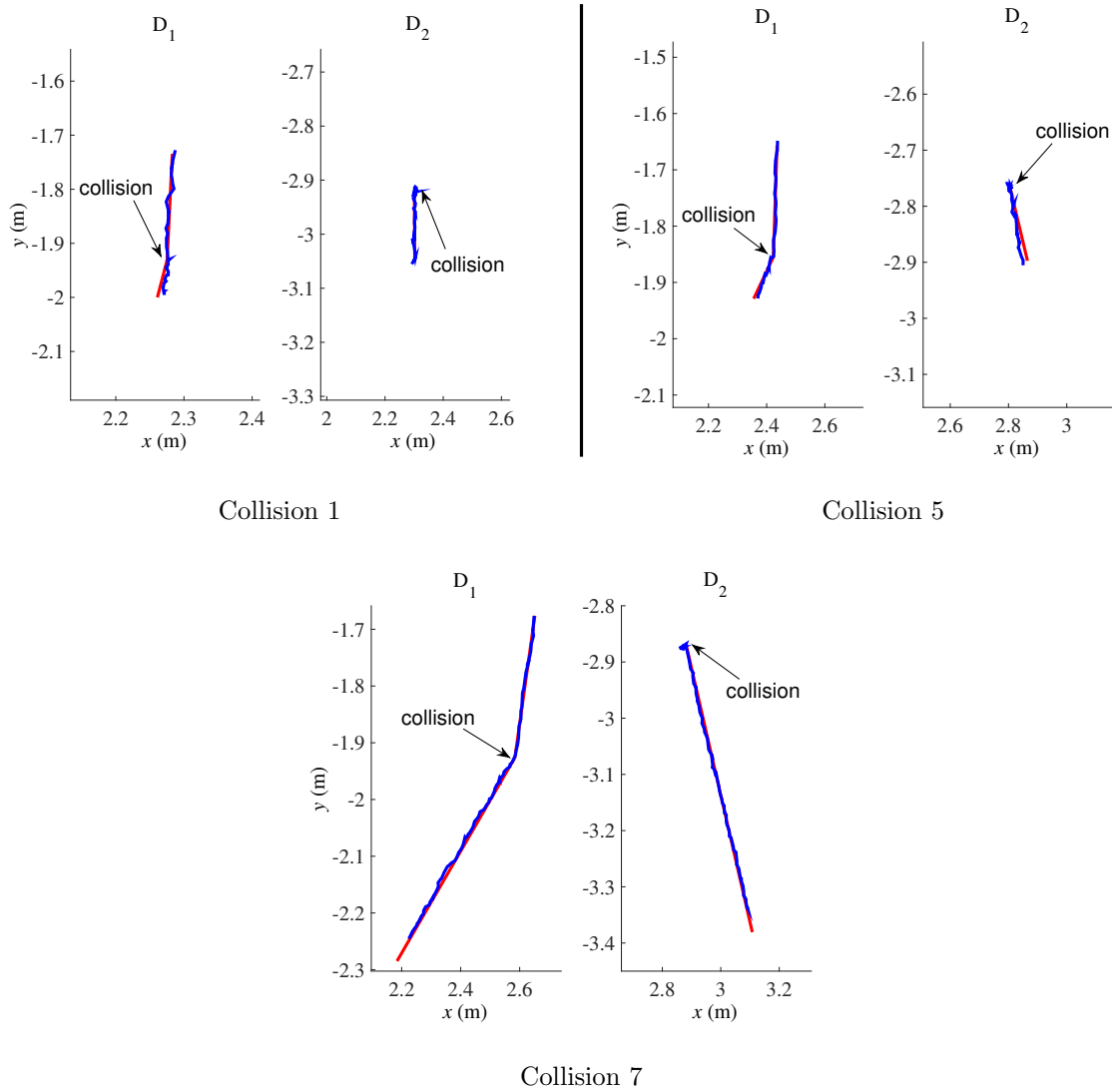


FIGURE 3.16 – Comparaison entre les trajectoires simulées (en rouge) et les trajectoires mesurées (en bleu) prises 1 seconde avant et 1 seconde après le contact (sauf pour la collision 7 : 2 secondes après le contact).

3.2 Les exploitations

Notre modèle a été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océanique et atmosphérique et des scénarios simples de collision. En effet, nous avons vérifié que le comportement d'un objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Nous pouvons à présent en faire différentes exploitations. Ces exploitations se rapprochent de configurations que l'on peut retrouver dans des situations réelles, où l'information des trajectoires de floes et l'information des forces de contact peuvent avoir des conséquences très importantes pour la navigation ou l'implantation d'une structure offshore.

Nous reprenons les paramètres, les seuils et les tolérances, explicités dans les chapitres précédents pour effectuer les simulations. Le pas de temps Δt_{max} est calculé en fonction des données du vent et du courant océanique. Le choix du traitement des contacts utilisant la notion de points de contact actifs sera retenu pour toutes les simulations. En effet, nous avons pu observer que, par rapport au traitement simultané des contacts, le taux de réussite des **LCP** est bien supérieur et le temps de calcul bien inférieur. Nous retenons deux scénarios de dérive soumise au vent et au courant :

1. un assemblage de floes poussés par un vent constant vers un canal contenant un rétrécissement,
2. un assemblage de floes dérivant sur un océan sans obstacles et soumis à un vent et un courant variant au cours du temps.

Ces deux scénarios sont présentés en détail dans les parties suivantes. Les premiers résultats obtenus permettent de mettre en avant le potentiel de notre approche sans que nous ayons pu encore proposer une interprétation physique détaillée. Une analyse détaillée et complète de ces résultats est encore à venir.

3.2.1 La dérive dans un canal étroit

Pour ce premier scénario, nous préparons la configuration suivante. Nous utilisons le générateur de packs de floes afin de construire un assemblage de 100 floes de différentes formes dont les caractéristiques sont : la plus petite des aires de floes est $110.5 m^2$, la plus grande $237\ 550 m^2$, l'épaisseur des floes est constante égale à $1 m$ et la dimension fractale est égale à 1.2 . La concentration ici n'a pas d'importance. Le canal est un obstacle de $850 m$ de large et $2 km$ de long (à l'endroit le plus étroit). Les conditions aux bords supérieur et inférieur sont libres, cependant elles n'ont pas d'importance ici, les trajectoires de floes étant délimitées par le canal (voir Figure 3.17).

L'environnement est constitué d'un océan au repos et d'un vent constant avec une vitesse de magnitude $10 m/s$ et dirigée vers le bas en faisant un angle de 10° par rapport à la verticale (voir Figure 3.17). Le modèle de couplage océan/glace n'est pas utilisé pour ce scénario. La simulation se déroule sur $5 h$ avec un pas de temps $\Delta t_{max} = 5 s$. Les floes sont initialement au repos. 5 tests sont réalisés en faisant varier les coefficients de friction et de restitution et en introduisant ou non l'effet de Coriolis calculé pour une latitude de $81^\circ N$ (voir Table 3.3). Les coefficients de friction et de restitution sont identiques pour tous les contacts entre les floes et entre les floes et le canal.

Dans la partie 2.1.5, nous avons vu que le pas de temps s'adaptait en fonction de la distance entre les floes et des éventuelles collisions. Dans les tests présentés précédemment, le pas de

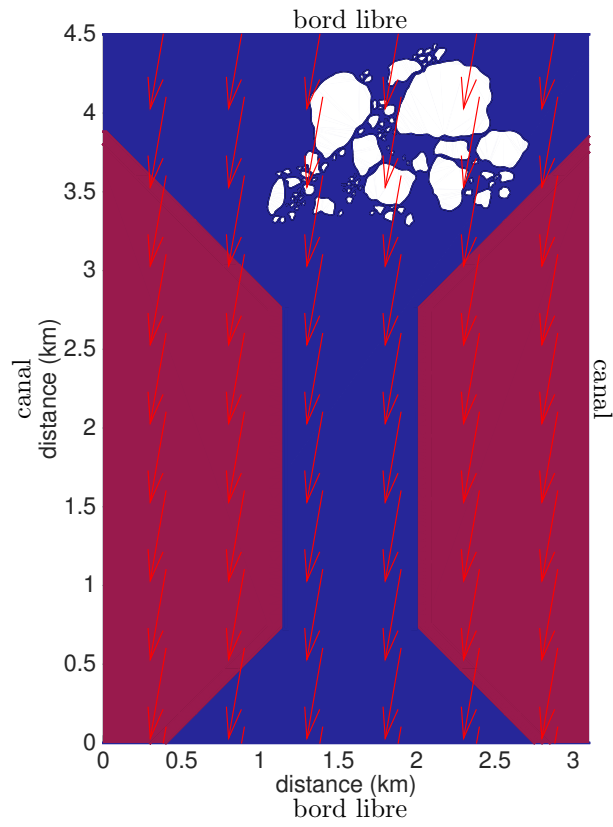


FIGURE 3.17 – Configuration à l’instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit.

TABLE 3.3 – Liste des valeurs des paramètres qui diffèrent suivant le test réalisé.

Numéro du test	Coef. de friction μ	Coef. de restitution ε	Paramètre de Coriolis f
1	0.7	0.35	0
2	0.7	0.6	0
3	0.7	1	0
4	0.5	0.6	0
5	0.7	0.35	$1.44 \times 10^{-4} s^{-1}$

temps de la simulation varie entre 5 et 0.1 s, et est donc en général bien supérieur au pas de temps minimum, calculé à partir de l'équation (2.1.9), valant 0.096 s.

Une description qualitative

Les configurations spatiales des assemblages de floes obtenues à 2h04 et 3h40 de temps de simulation pour les différents tests sont présentées dans les figures 3.18, 3.19 et 3.20. Pour les tests numéros 1, 2 et 5, une partie de l'assemblage de floes reste bloquée à l'entrée du canal. Dans les tests numéros 3 et 4, un tel blocage n'est pas observé. Cela peut s'expliquer par le fait que lors du test 3, le coefficient de friction est inférieur à la valeur des autres tests, et lors du test 4, le coefficient de restitution est supérieur à la valeur des autres tests. Un coefficient de friction plus faible peut faciliter le glissement des floes les uns contre les autres et donc réduire le risque de blocage, tandis qu'un coefficient de restitution très élevé induit une agitation dynamique importante permettant à l'assemblage d'explorer efficacement l'espace des configurations spatiales, et donc in fine d'en trouver une permettant le franchissement du goulet.

La force de Coriolis est généralement considérée comme jouant un rôle secondaire dans la dynamique de la glace de mer (voir [Hum75]). En effet, nous avons observé dans la figure 3.12 que, sans couplage océan/glace, l'effet de Coriolis entraînait une déviation de 17° des trajectoires de floes par rapport à la direction du vent, en comparaison avec les 28° avec le couplage. Cependant, la comparaison des configurations spatiales entre les tests 1 et 5 révèle des différences significatives. Depuis l'étude de la résolution des problèmes linéaires de complémentarité, nous savons que le traitement des contacts est très sensible aux changements de la dynamique. Ces différences de configurations pourraient-elles donc s'expliquer uniquement par la sensibilité de la gestion du contact ou aussi par la sensibilité de la dynamique de l'assemblage de floes aux petits changements dans l'équilibre des moments linéaire et angulaire de chaque floe ? La question reste encore ouverte.

Dans la figure 3.21, nous présentons les trajectoires décrites par les centres de masse des floes lors du test numéro 5. L'effet de Coriolis étant pris en compte, nous pouvons observer la légère déviation vers la droite de la direction du vent des trajectoires rectilignes des floes qui ne sont pas restés bloqués.

Une description quantitative

Nous présentons la variation de l'énergie cinétique de l'assemblage de floes en fonction du temps pour les 5 différents tests dans la figure 3.22. L'énergie cinétique calculée lorsque tous les floes de l'assemblage atteignent la vitesse de dérive libre, c'est-à-dire, la vitesse caractéristique des courants, soit $10Na \simeq 0.21 \text{ m/s}$, est égale à $1.59 \times 10^7 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$. L'énergie cinétique calculée lorsque seulement les floes non bloqués de l'assemblage pour le test 1 atteignent la vitesse de dérive libre, est égale à $3.96 \times 10^6 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$. Ces deux valeurs limites d'énergie cinétique sont représentées par une droite noire sur la figure 3.22. Au début de la simulation, l'énergie cinétique croît rapidement pour atteindre près de 90% de la limite supérieure. Cette phase qui dure environ 20 minutes, ne contient quasiment aucune collision, que ce soit entre les floes ou entre les floes et le canal. Puis, une seconde phase, jusqu'aux environs des 2h00 de simulation, apparaît lorsque les floes entrent en contact avec le canal, entraînant un nombre important de collisions. Lors de cette phase, l'énergie cinétique diminue avec des variations brusques dues à la dissipation à travers les contacts inélastiques avec friction lorsque $\varepsilon < 1$ ou juste avec la friction lorsque $\varepsilon = 1$. Enfin, lors de la dernière phase, l'énergie cinétique se remet à croître pour les configurations des tests 3 et 4 une fois que les floes ont passé le rétrécissement, ou se stabilise

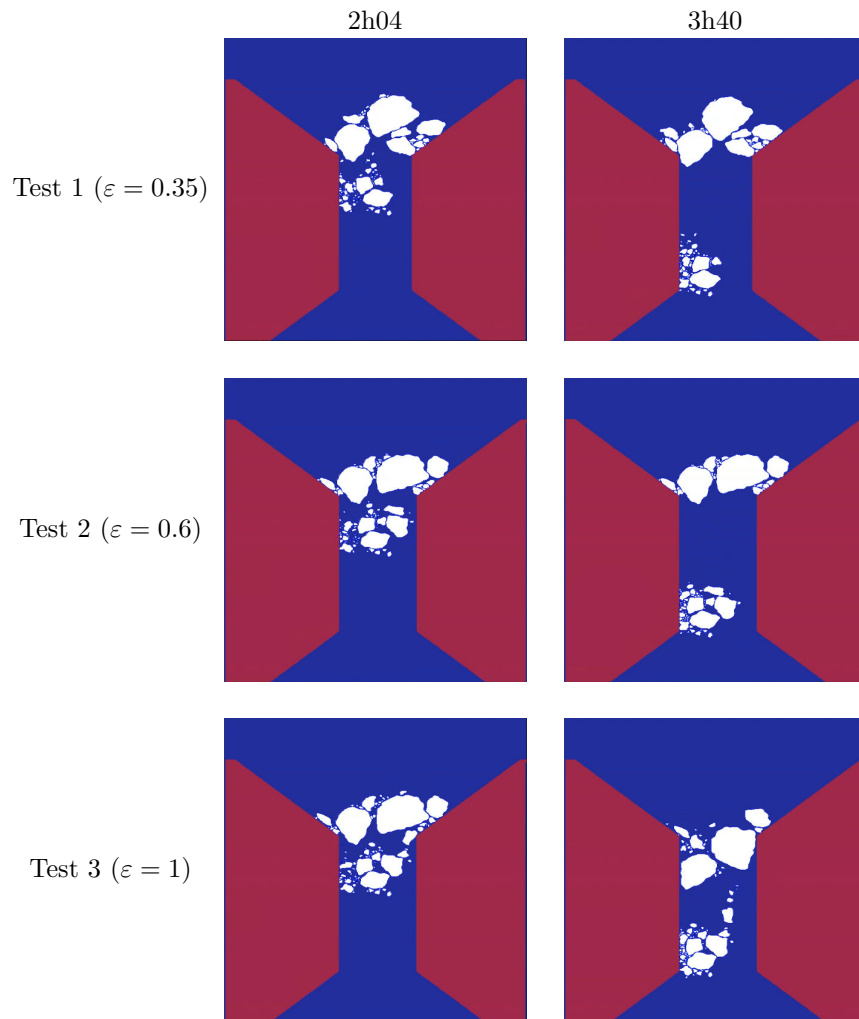


FIGURE 3.18 – Images prises à 2h04 et 3h40 de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution ε .

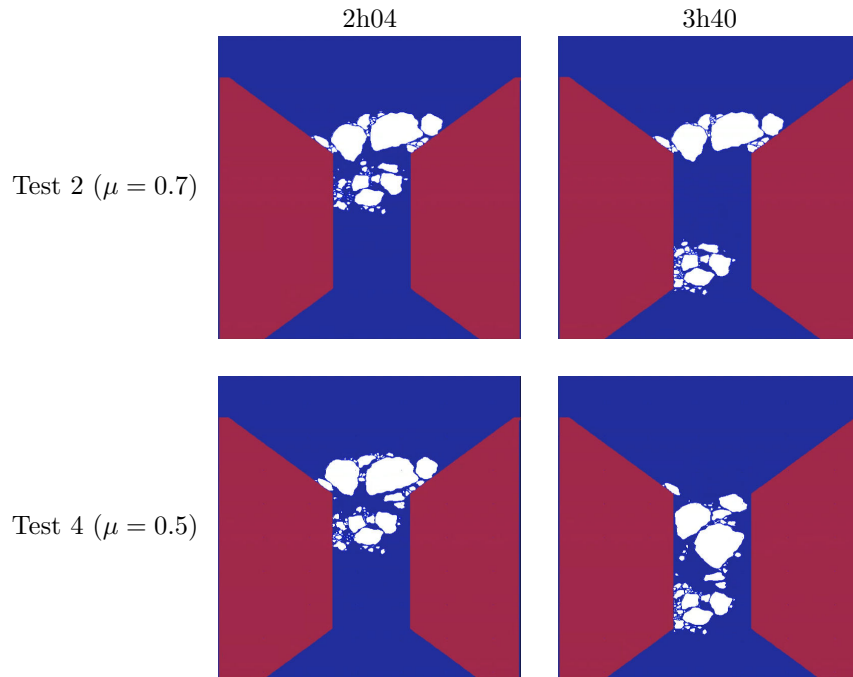


FIGURE 3.19 – Images prises à 2h04 et 3h40 de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de friction μ .

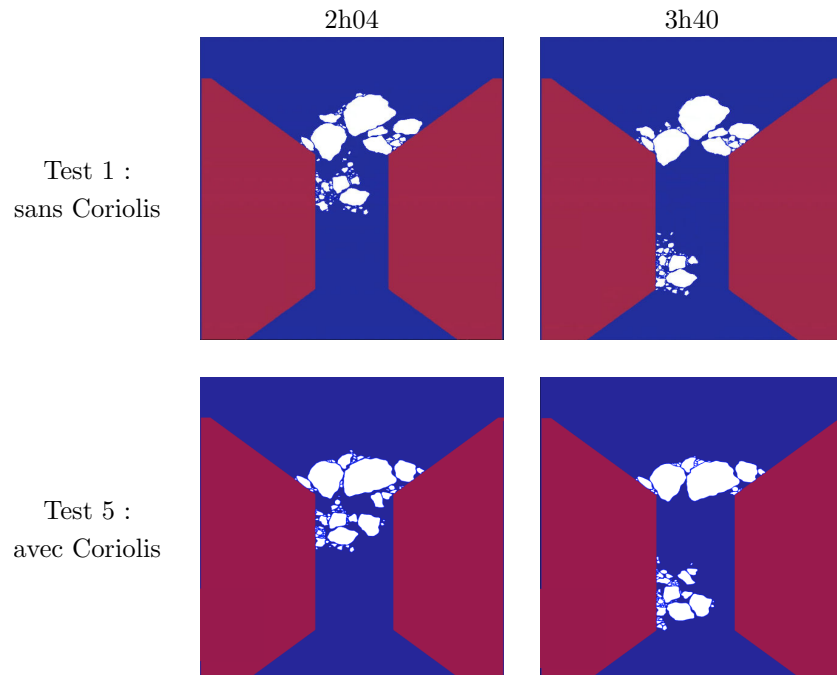


FIGURE 3.20 – Images prises à 2h04 et 3h40 de la configuration des floes avec ou sans la prise en compte de l'effet de Coriolis.

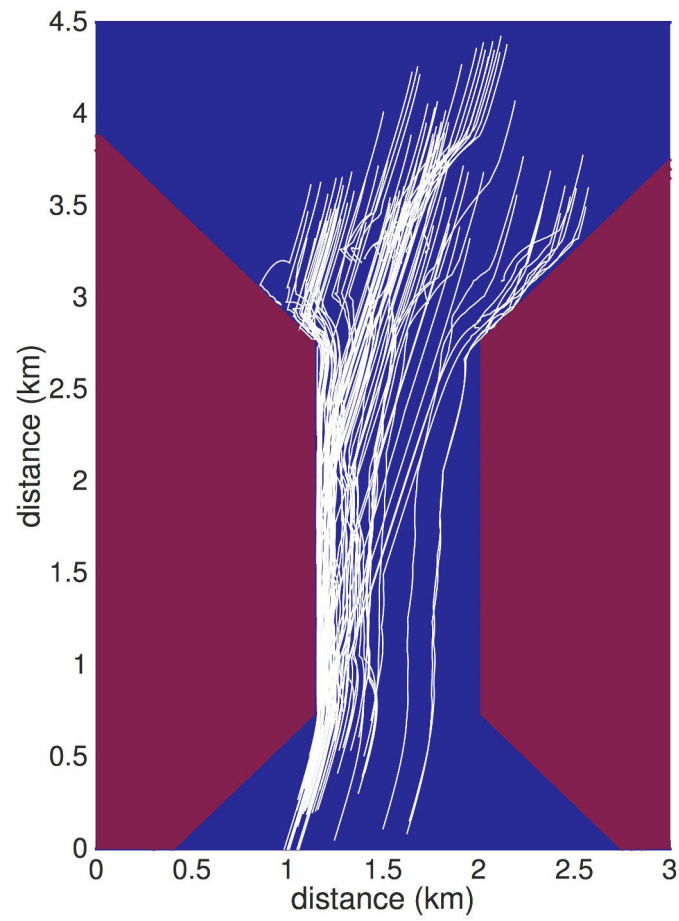


FIGURE 3.21 – Trajectoires des centres de masse des floes pour le test numéro 5.

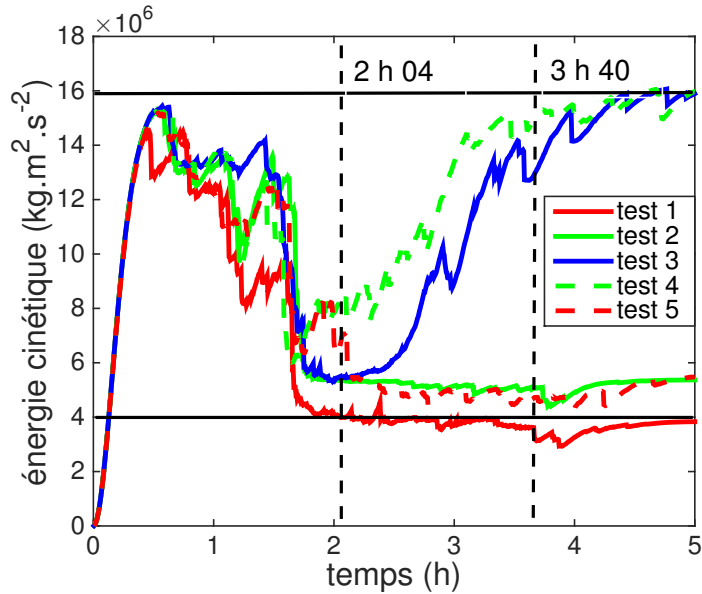


FIGURE 3.22 – Variation de l'énergie cinétique au cours de la simulation de dérive dans le canal pour les 5 tests.

autour de la limite inférieure calculée pour chaque configuration dépendant du nombre de floes restés bloqués dans le canal.

Nous présentons la variation de l'impulsion normale de contact pour les tests numéros 1 et 3 dans la figure 3.23. Le signal correspondant à la somme de l'impulsion normale de contact sur tous les points de contact pendant 5 s, est hautement intermittent. Dans le cas du test 1, une partie de la configuration se retrouvant bloquée dans le canal, la somme des impulsions sur tous les points de contact se stabilise autour de la valeur nécessaire pour maintenir cette situation de blocage.

3.2.2 La dérive soumise à un vent et un courant variables

Pour ce deuxième scénario, nous préparons plusieurs configurations avec différentes concentrations de glace. Nous utilisons le générateur de packs de floes afin de construire un assemblage de 350 floes de différentes formes dont les caractéristiques sont : la plus petite des aires de floes est $4.5 m^2$, la plus grande $59\,952 m^2$, l'épaisseur des floes est comprise entre 0.25 et 0.38 m et la dimension fractale est égale à 1.35. Cet assemblage occupe une zone d'océan plus ou moins grande afin de fixer une concentration initiale variant de 30% à 80% pour la zone occupée par les glaces. Pour information, la zone d'océan est de taille $1.2 \times 1.2 km^2$ dans le cas d'une concentration à 60%. Les conditions aux bords sont libres ou périodiques. Aucun obstacle n'est présent dans ce scénario. Enfin, l'effet de Coriolis est pris en compte selon la latitude des floes au cours du temps. La latitude du centre de la zone d'océan contenant l'assemblage de floes à l'instant initial est de $80.2^\circ N$.

Plusieurs simulations sont réalisées en faisant varier la concentration initiale de glace, les conditions aux bords et la prise en compte du modèle de couplage océan/glace. Cependant, les conditions du vent et du courant océanique restent identiques pour toutes les simulations. Les vitesses du vent proviennent de données **ERAinterim** datant de février 2008 prises dans la mer

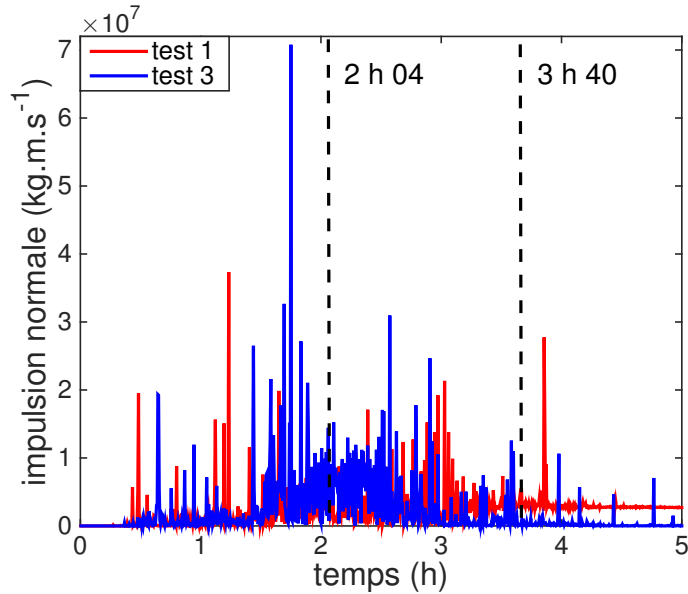


FIGURE 3.23 – Variation de l’impulsion normale de contact au cours de la simulation de dérive dans le canal pour les tests numéros 1 et 3.

de Barentz à une latitude de 80.2° N et une longitude de 36.8° E. Cette position en temps et en espace pouvant correspondre à celle d’une zone marginale des glaces de mer. Les vitesses du courant de surface sont obtenues à partir du modèle glace de mer et océan **TOPAZ** (voir [SCB⁺12]) aux mêmes temps et positions que les vitesses du vent. Ces données sur la vitesse des courants océanique et atmosphérique sont présentées dans la figure 3.24. Nous avons une donnée par heure durant 7 jours. Nous utilisons l’interpolation linéaire (voir Partie 2.2.2) sur la direction et la norme des vitesses pour obtenir les valeurs aux temps désirés et nous fixons à 12 h la phase préliminaire pour passer de conditions vent et océan au repos jusqu’aux conditions initiales données. La simulation se déroule donc sur 7.5 jours avec un pas de temps maximal $\Delta t_{max} = 10$ s. Les valeurs des coefficients de restitution et de friction sont fixées respectivement à 0.4 et 0.7. Initialement, les floes sont au repos.

Dans certains cas, les trajectoires simulées de floes de l’assemblage seront comparées à la trajectoire d’un floe de référence. Ce floe est construit sur la base d’un cylindre de 200 m de rayon et de 1 m d’épaisseur, dont le bord est discrétisé en un polygone à 32 côtés.

Enfin, nous testons l’influence de la forme des floes dans ce type de scénario. Ainsi, nous créons une configuration de 350 floes, tous de forme circulaire dont la frontière est discrétisée en un polygone à 32 côtés, ayant les mêmes caractéristiques que celles précédentes contenant des floes dont les formes proviennent de la bibliothèque de floes (voir Partie 2.3.1).

La liste de tous les tests réalisés est donnée dans la table 3.4.

Une description qualitative

Nous présentons, dans la figure 3.25, la trajectoire du centre de masse des floes pour deux simulations avec la même concentration à 60%, les mêmes conditions périodiques aux bords, l’une avec le modèle de couplage océan/glace et l’autre sans, correspondant aux tests numéros 3 et 8. La trajectoire de référence correspond à celle du floe de référence soumis aux mêmes

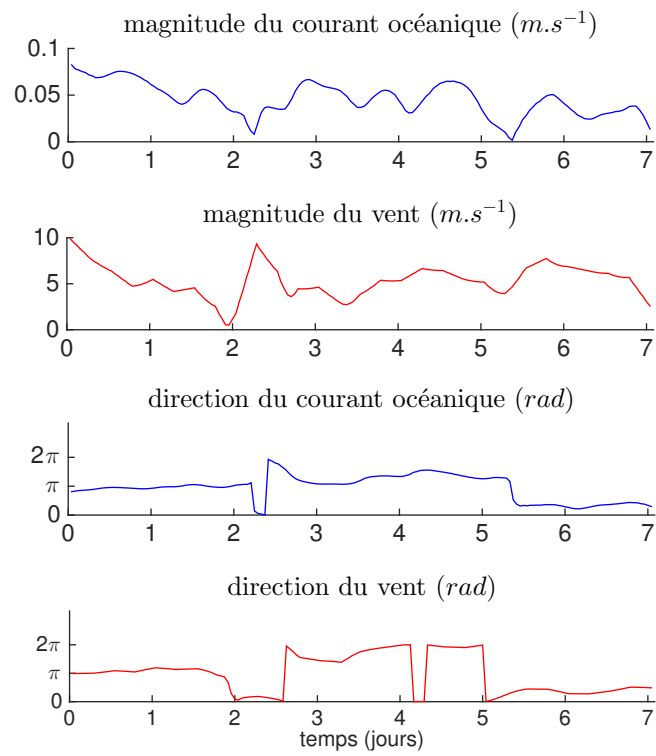


FIGURE 3.24 – Données de la magnitude et de la direction des vitesses du vent et du courant océanique sur 7 jours utilisées pour les simulations du scénario de dérive soumise à un vent et un courant variants.

TABLE 3.4 – Liste des valeurs des paramètres qui diffèrent suivant le test réalisé.

Numéro du test	conditions aux bords	concentration	forme des floes	couplage océan/glace
1	Périodiques	30%	bibliothèque de formes	oui
2	Périodiques	50%	bibliothèque de formes	oui
3	Périodiques	60%	bibliothèque de formes	oui
4	Périodiques	70%	bibliothèque de formes	oui
5	Périodiques	30%	circulaire	oui
6	Périodiques	70%	circulaire	oui
7	Périodiques	30%	bibliothèque de formes	non
8	Périodiques	60%	bibliothèque de formes	non
9	Périodiques	70%	bibliothèque de formes	non
10	libres	30%	bibliothèque de formes	non
11	libres	70%	bibliothèque de formes	non
12	libres	30%	bibliothèque de formes	oui
13	libres	70%	bibliothèque de formes	oui

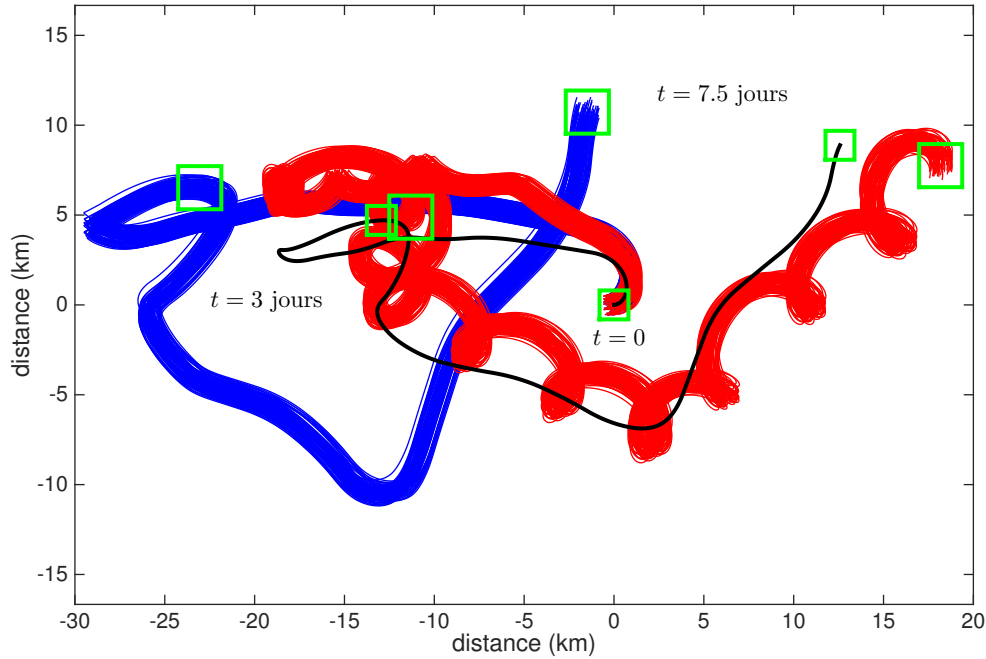


FIGURE 3.25 – Trajectoires des centres de masse des floes du test numéro 3 (en rouge), du test 8 (en bleu) et la trajectoire du floe de référence (en noir).

conditions de vent mais avec un océan au repos et sans le modèle de couplage. Nous pouvons observer que les trajectoires d'un assemblage de 350 floes, suivent grossièrement la trajectoire du floe isolé déterminée par la vitesse du vent, en vérifiant les deux propriétés suivantes : la magnitude de la vitesse est bornée par le maximum des K_t et la direction des vitesses forme un angle entre 20° et 40° avec la direction du vent vers la droite dans le sens du vent. Entre les deux ensembles de trajectoires pour la simulation avec et sans modèle de couplage, nous retrouvons les mêmes différences qu'entre les trajectoires pour un floe isolé (*voir Partie 3.1.2*).

Sur les figures représentant les trajectoires des floes durant les 7.5 jours de simulation, les carrés aux bords verts indiquent l'emplacement de l'assemblage des floes au temps t précisé.

Pour observer plus spécifiquement l'influence de la taille et de la forme des floes, nous commençons par nous intéresser à deux ensembles de trajectoires simulées représentées sur les figures 3.26 et 3.27. Parmi les trois trajectoires tracées, deux correspondent au même floe et la troisième correspond à un floe isolé de même aire et de même masse mais de forme circulaire construit comme le floe de référence. Concernant les trajectoires du même floe, l'une correspond au cas où il est placé dans un pack dont la concentration est à 70%, l'autre correspond au cas où il est isolé. Dans tous les cas, les conditions sont périodiques aux bords et le modèle de couplage est pris en compte. La différence se joue entre la taille des floes et leur forme. Dans 3.26, le floe a une aire de $59\,952\text{ m}^2$, soit la plus grande aire du pack, alors que dans 3.27, le floe a une aire de seulement 4.5 m^2 , soit la plus petite aire du pack. À l'échelle de la dérive sur 7.5 jours, les trajectoires sont similaires que le floe soit isolé non circulaire, dans un pack à 70% ou isolé et circulaire. Si nous regardons de plus près la zone avant le 3^e jour, nous pouvons mettre en évidence des écarts de trajectoires de l'ordre de 80 m entre le floe isolé de plus grande aire et le même au sein d'un pack

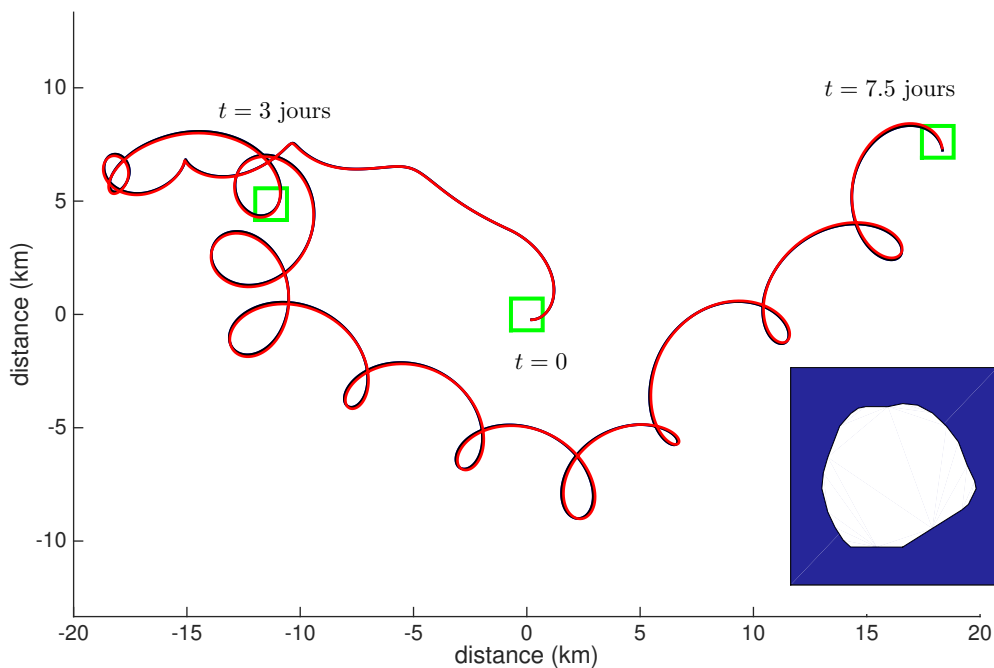


FIGURE 3.26 – Trajectoires des centres de masse pour un floe dont l’aire est $59\,952\text{ m}^2$. En bleu, celle associée au floe non circulaire isolé (non visible sur cette figure car cachée par la courbe noire), en rouge, celle associée au même floe mais au sein d’un pack à 70% et en noir, celle associée au floe circulaire isolé.

à 70% et des écarts de trajectoires de l’ordre de 220 m entre le floe isolé de plus petite aire et le même au sein d’un pack à 70%. Dans ce cas, l’influence des collisions pour dévier la trajectoire du floe est plus importante pour un floe petit. De plus, en zoomant encore un peu plus dans cette zone, nous pouvons mettre en évidence des écarts de trajectoires de l’ordre de 2 cm entre les floes isolés de même aire, de même masse et avec juste une forme différente, que ce soit pour la plus grande ou la plus petite des aires du pack. Dans ce cas là, l’influence de la forme sur les trajectoires ne dépend pas de la taille du floe et est beaucoup moins importante que l’influence des collisions. Ensuite, pour mettre en évidence l’influence de la taille, nous avons placé sur la même figure les trajectoires du centre de masse du floe dont l’aire est la plus grande du pack et du floe dont l’aire est la plus petite (voir Figure 3.28). Nous observons des écarts de trajectoire de l’ordre de 30 m dans la zone avant le 3^e jour. Dans ce cas, l’influence de la taille du floe est plus importante que celle de la forme mais reste moins importante que celle des collisions. Cette tendance est confirmée dans la partie 3.2.2, lors de l’étude de l’évolution des distances entre les centres de masse pris au même instant pour ces différentes simulations.

Afin de s’intéresser à l’influence des conditions aux bords, nous présentons, dans la figure 3.29, la trajectoire du centre de masse des floes pour deux simulations avec la même concentration à 70%, la prise en compte du modèle de couplage océan/glacé et l’une avec les conditions périodiques aux bords et l’autre avec les conditions libres aux bords correspondant aux tests numéros 4 et 13. Le résultat précédent sur les trajectoires reste encore valide dans le cas où les conditions sont libres aux bords. La différence se joue dans la concentration qui est maintenue constante égale à 70% dans le cas des conditions périodiques alors qu’elle varie dans le cas des

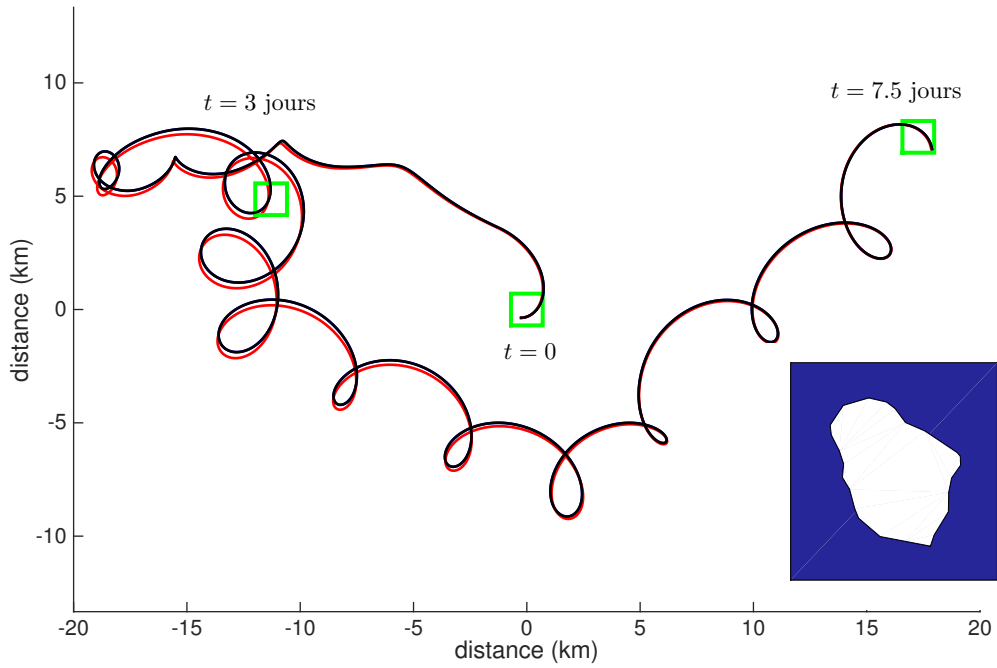


FIGURE 3.27 – Trajectoires des centres de masse pour un floe dont l’aire est 4.5 m^2 . En bleu, celle associée au floe non circulaire isolé (non visible sur cette figure car cachée par la courbe noire), en rouge, celle associée au même floe mais au sein d’un pack à 70% et en noir, celle associée au floe circulaire isolé.

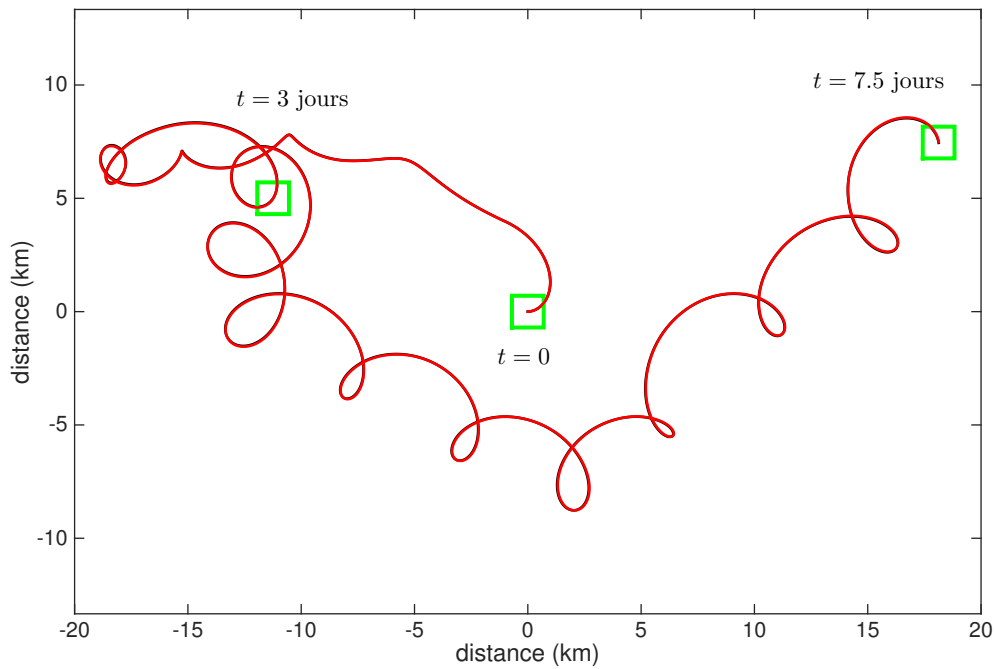


FIGURE 3.28 – Trajectoires des centres de masse pour les floes isolés dont l’aire est 4.5 m^2 en noir, et dont l’aire est $59\,952 \text{ m}^2$ en rouge.

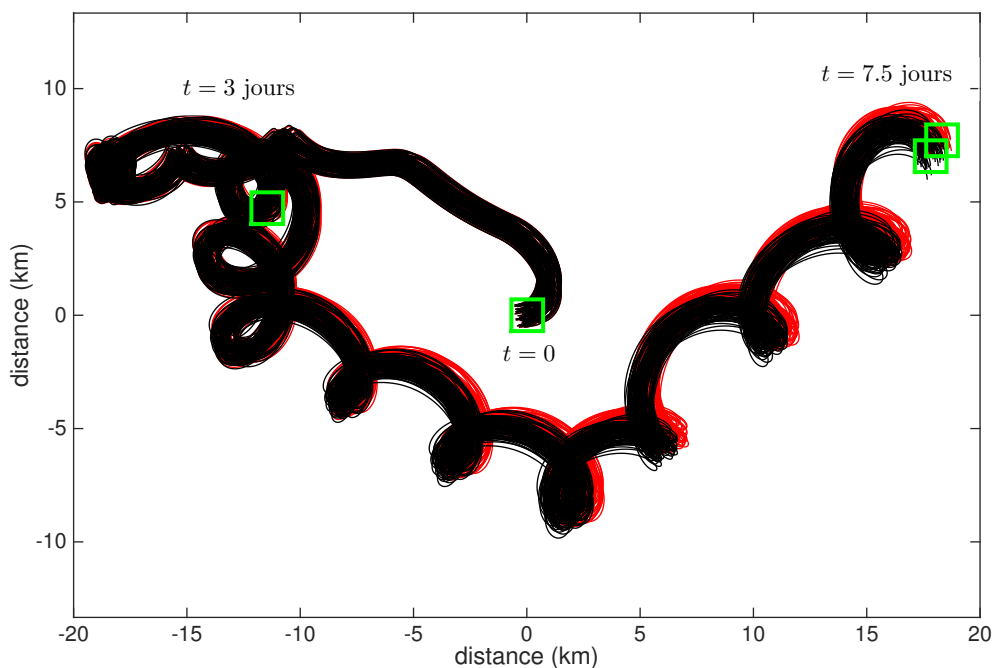


FIGURE 3.29 – Trajectoires des centres de masse de floes du test numéro 4 (en rouge) et du test 13 (en noir).

conditions libres. Néanmoins, à cette échelle, les floes restent grossièrement groupés durant la dérive sur plusieurs dizaines de kilomètres. La variation de la concentration au cours de la simulation dans ce cas est représentée dans la figure 3.30. Durant les deux 1^{er} jours, quand le vent et le courant sont grossièrement constants les floes se dispersent et la concentration diminue jusqu'à 58%. Puis, à la suite de brutaux changements des courants, les floes se sont rassemblés au point d'augmenter la concentration jusqu'à 61%.

Afin de s'intéresser à l'influence de la concentration de glace au sein d'un assemblage, nous présentons, dans la figure 3.31, les trajectoires des centres de masse de floes pour trois simulations avec les mêmes conditions périodiques aux bords, la prise en compte du modèle de couplage, l'une avec une concentration à 30%, une autre avec une concentration à 50% et une dernière à 70% correspondant aux tests numéros 1, 2 et 4. Nous observons que les trajectoires sont grossièrement similaires pour les trois différentes concentrations utilisées.

Durant la simulation, les floes forment progressivement des groupes de floes séparés par une zone d'océan sans glace (voir Figure 3.32). Ce processus d'agglomération est bien connu (voir [THT11]) et a été étudié à partir d'un modèle de dynamique des glaces de mer avec des floes parfaitement circulaires (voir [Her11]). Cela résulte de l'équilibre des moments sous le stress de l'environnement, donnant des vitesses dépendantes de la taille des floes et de la perte d'énergie cinétique durant les collisions (voir [Her11]). Dans le paragraphe suivant, nous introduisons une quantité \mathfrak{C}_r qui permettra de comparer le niveau d'agglomération relatif à la concentration, à la forme, aux conditions aux bords et avec la prise en compte du modèle de couplage.

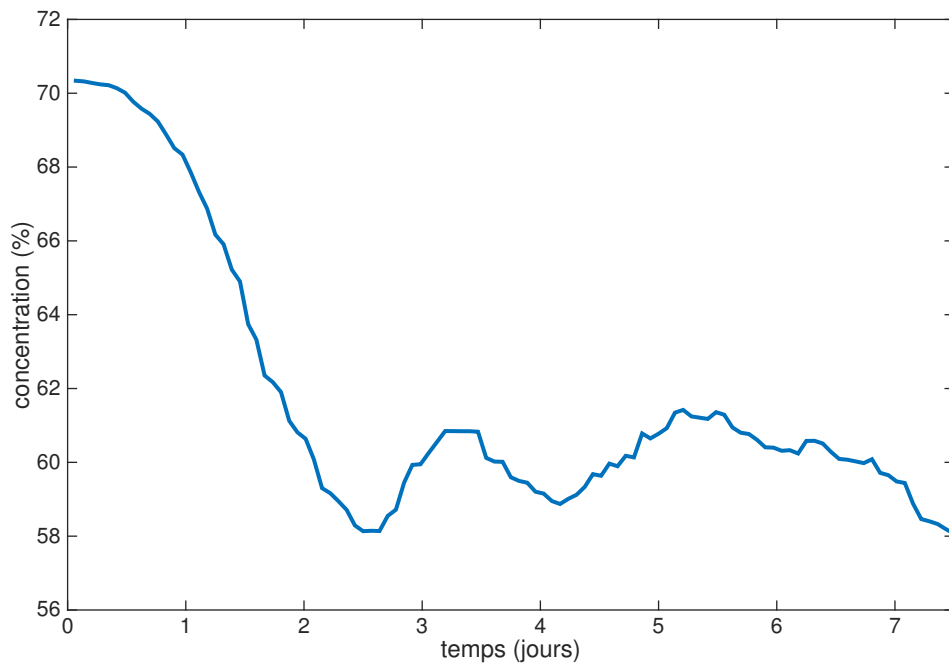


FIGURE 3.30 – Évolution de la concentration de glace pour le test numéro 13.

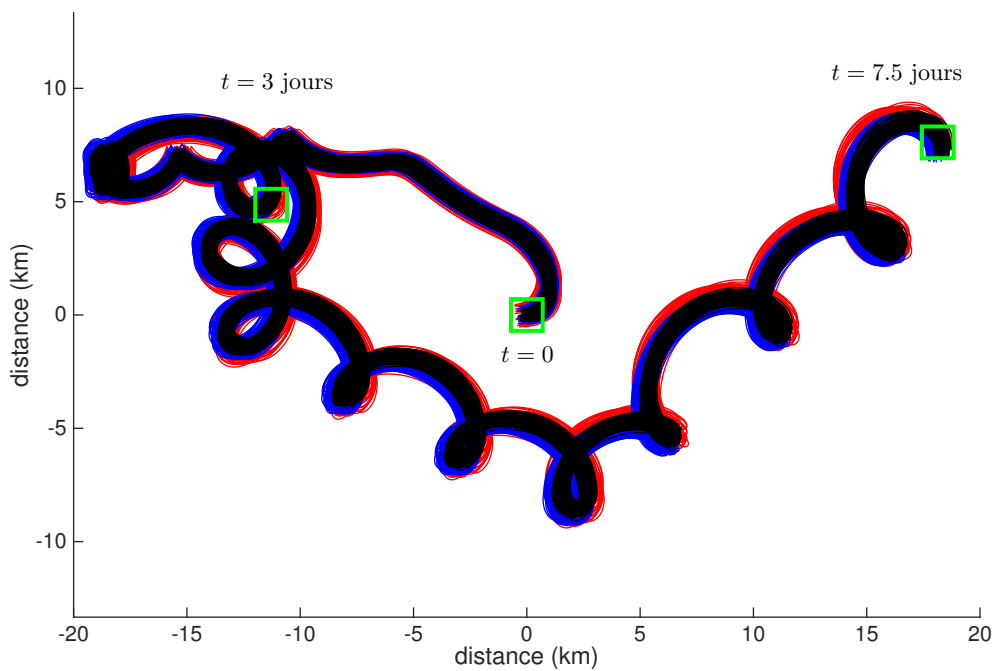


FIGURE 3.31 – Trajectoires des centres de masse de floes du test numéro 1 (en rouge), 2 (en bleu) et 4 (en noir).

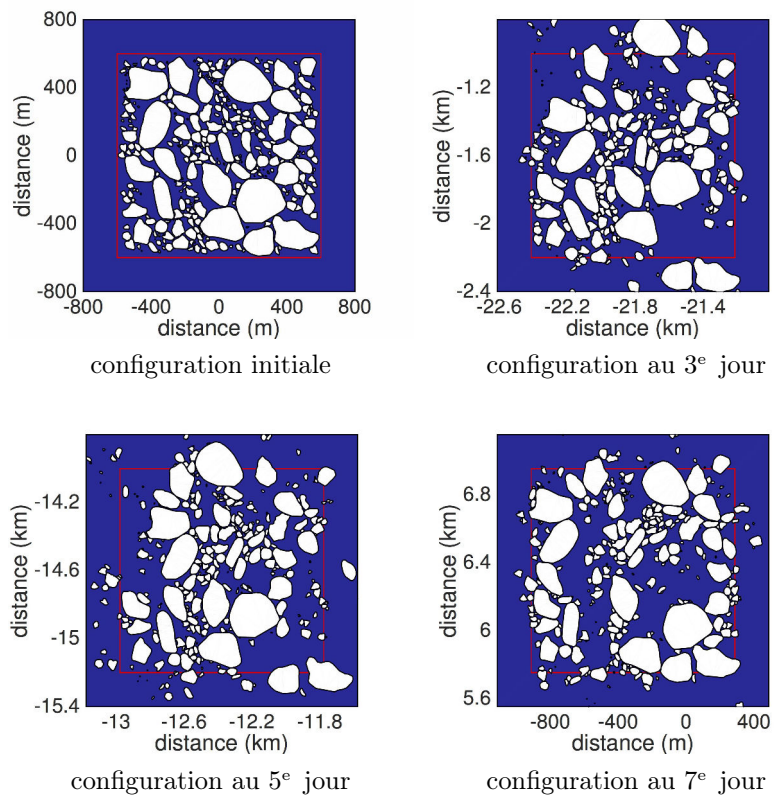


FIGURE 3.32 – Configuration des floes à des temps différents pour le test numéro 9.

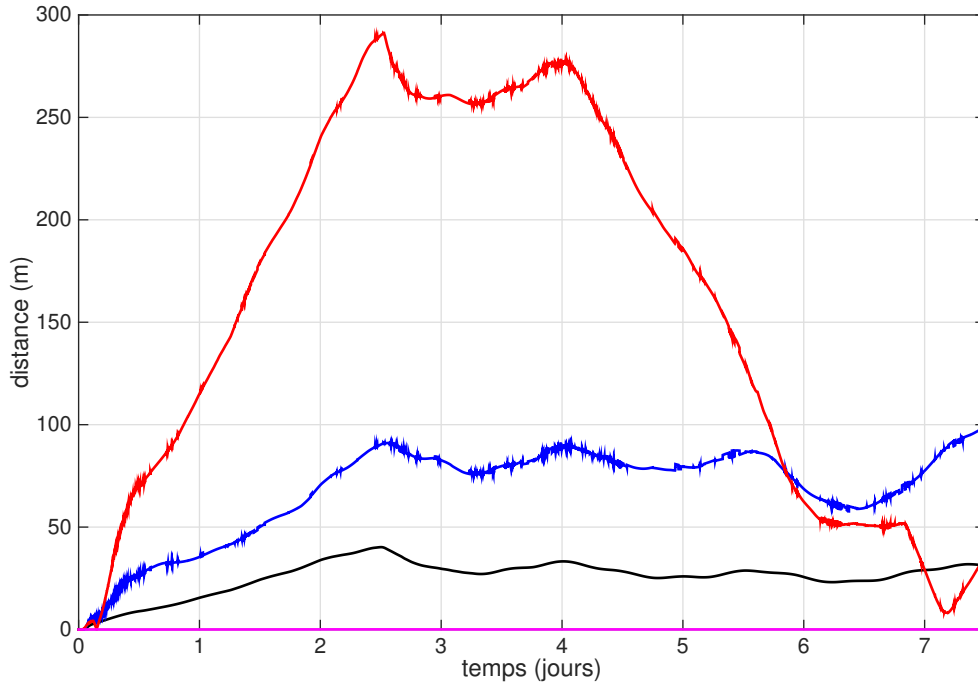


FIGURE 3.33 – Évolution de la distance entre les centres de masse de floes. En rouge, la distance entre le floe isolé d’aire 4.5 m^2 et le même floe au sein d’un pack à 70%. En bleu, la distance entre le floe isolé d’aire $59\,952 \text{ m}^2$ et le même floe au sein d’un pack à 70%. En noir, la distance entre le floe isolé d’aire $59\,952 \text{ m}^2$ et le floe isolé d’aire 4.5 m^2 . Enfin en mauve, respectivement en vert (non visible sur cette figure car cachée par la courbe mauve), la distance entre les floes isolés d’aire $59\,952 \text{ m}^2$ dont l’un est de forme circulaire, respectivement la distance entre les floes isolés d’aire 4.5 m^2 dont l’un est de forme circulaire.

Une description quantitative

Dans cette partie, nous allons étudier certaines quantités physiques liées aux comportements de l’assemblage de floes dans ce scénario. Les deux principales sont la dispersion et l’agglomération.

Nous commençons par étudier la variation de la distance entre les centres de masse pris au même temps toutes les minutes, pour les différents cas (voir Figure 3.33). Les observations faites dans le paragraphe précédent par rapport à ces tests, sont encore valables en regardant l’évolution de la distance entre les trajectoires durant les 7.5 jours de simulation.

Concernant la dispersion, nous caractérisons la dispersion des floes autour du centre de masse du pack par la mesure de la quantité σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (G_i - \mathfrak{G})^2},$$

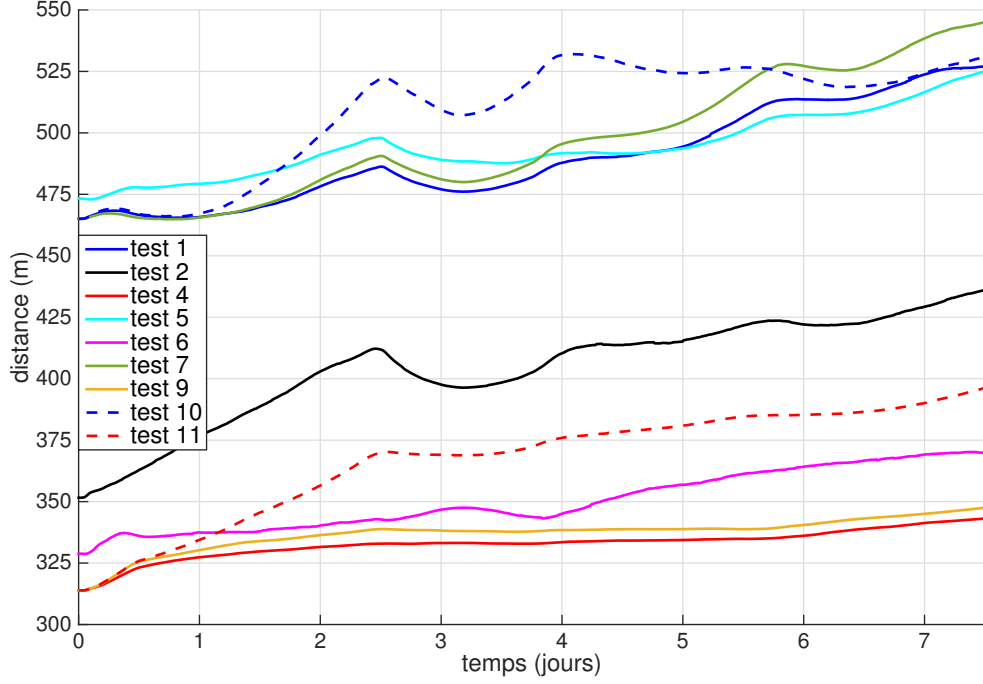


FIGURE 3.34 – Évolution de la dispersion tout au long des 7.5 jours.

avec

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n M_i} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_{e,i}} m_{i,j} G_{i,j} \right)$$

où \mathfrak{G} est le centre de masse du pack de floes, n le nombre de floes, M_i la masse du floe Ω_i , G_i le centre de masse du floe Ω_i , $n_{e,i}$ le nombre d'éléments finis du maillage du floe Ω_i , $m_{i,j}$ la masse de l'élément j et $G_{i,j}$ le centre de masse de l'élément j . Cette dispersion permet d'étudier le mouvement relatif entre les floes d'un même pack. Sur la figure 3.34, nous avons tracé les variations de la quantité σ en fonction du temps pour 9 tests différents. Nous pouvons observer que dans tous les cas, σ augmente au cours du temps, mais cette augmentation est plus légère lorsque les conditions aux bords sont périodiques et lorsque les concentrations sont plus importantes. De plus, les variations brusques du courant océanique et du vent qui ont lieu avant le 3^e jour entraînent une diminution de σ dans tous les cas.

Concernant l'agglomération, nous définissons une autre quantité, notée \mathfrak{C}_r , qui permet d'étudier le niveau d'agglomération des floes au sein d'un même pack. Cette quantité est dépendante d'une distance entre deux centres de masse de floes, notée $r > 0$.

$$\mathfrak{C}_r = \frac{\text{Card}(\mathcal{N}_r)}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

avec, n le nombre de floes de l'assemblage, $\text{Card}(\mathcal{N}_r)$ le nombre d'éléments de \mathcal{N}_r , et \mathcal{N}_r l'ensemble défini par :

$$\mathcal{N}_r = \{\Omega_i \in S / \exists \Omega_j \in S / |G_i - G_j| \leq r\}.$$

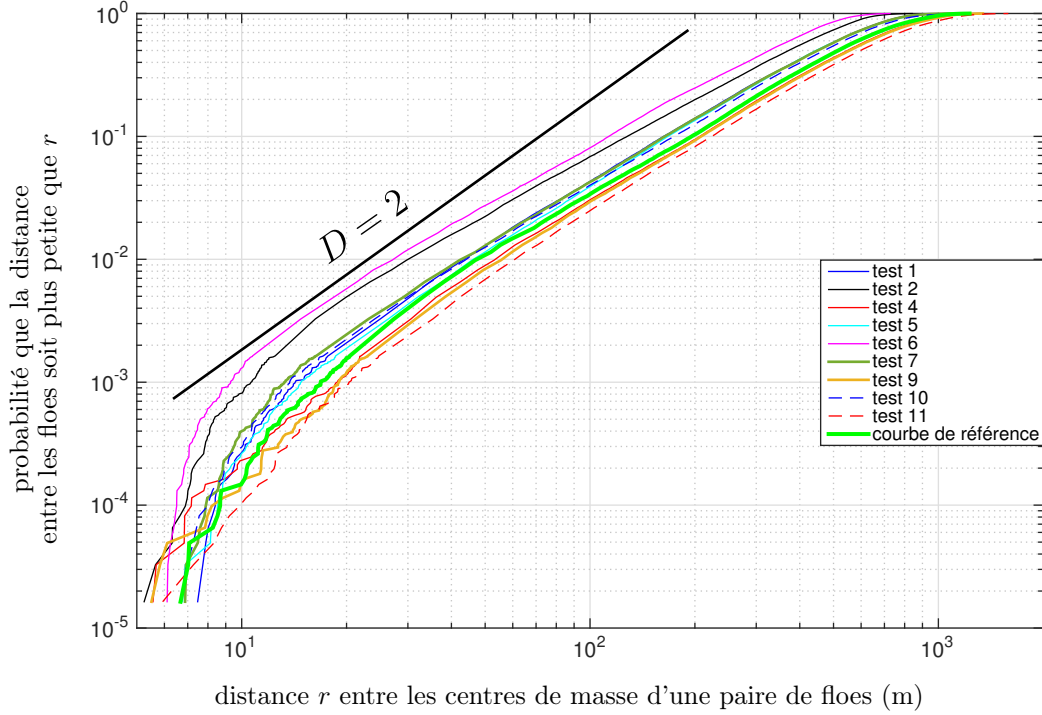


FIGURE 3.35 – Graphe de la courbe (r, \mathfrak{C}_r) au 3^e jour de simulation pour différents tests.

Nous traçons la courbe reliant les points de coordonnées : (r, \mathfrak{C}_r) sur l'intervalle $[r_{min}, r_{max}]$ avec :

$$r_{min} = \min_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |G_i - G_j| \quad \text{et} \quad r_{max} = \max_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |G_i - G_j|.$$

La courbe sera représentée avec une échelle logarithmique en abscisse et en ordonnée. En théorie, pour un ensemble de points aléatoirement positionnés (suivant une distribution de Poisson), la quantité \mathfrak{C}_r suit une loi puissance r^D avec $D = 2$ la dimension du plan. Avec une échelle logarithmique, si la courbe \mathfrak{C}_r est de pente inférieure à 2 alors nous pouvons dire que les points sont amassés spatialement. Cependant, dans notre cas, nous ne manipulons pas des points mais des floes ayant des tailles et des formes diverses. N'ayant pas de référence dans la littérature, nous comparons nos résultats entre eux et avec une courbe de référence qui correspond à l'évolution de \mathfrak{C}_r pour la configuration initiale avec une concentration à 70% contenant des floes dont les formes proviennent de la bibliothèque de floes (voir Figure 3.35). Nous observons que la pente des courbes devient inférieure à 2 dès que r devient supérieure à 20 m pour les tests numéros 1, 2, 5, 6, 7 et 10. Ces tests correspondent aux configurations avec des concentrations à 30% et 50% et le test 6 avec des floes de forme circulaire et une concentration à 70%. Par contre, pour les tests numéros 4, 9 et 11, ainsi que la courbe de référence, la pente des courbes associées devient inférieure à 2 pour r supérieure à 100 m. Ces tests, ainsi que la courbe de référence correspondent aux configurations avec 70% de concentration.

Nous définissons la distance r_{moy} pour laquelle la probabilité de l'événement : la distance entre les centres de masse d'une paire de floes soit plus petite ou égale à r_{moy} , soit égale à 0.5, c'est-à-dire, $\mathfrak{C}_{r_{moy}} = 0.5$. Nous présentons sur la figure 3.36 l'évolution au cours de la simulation de cette distance r_{moy} pour différents tests. Les observations sont très proches de celles faites

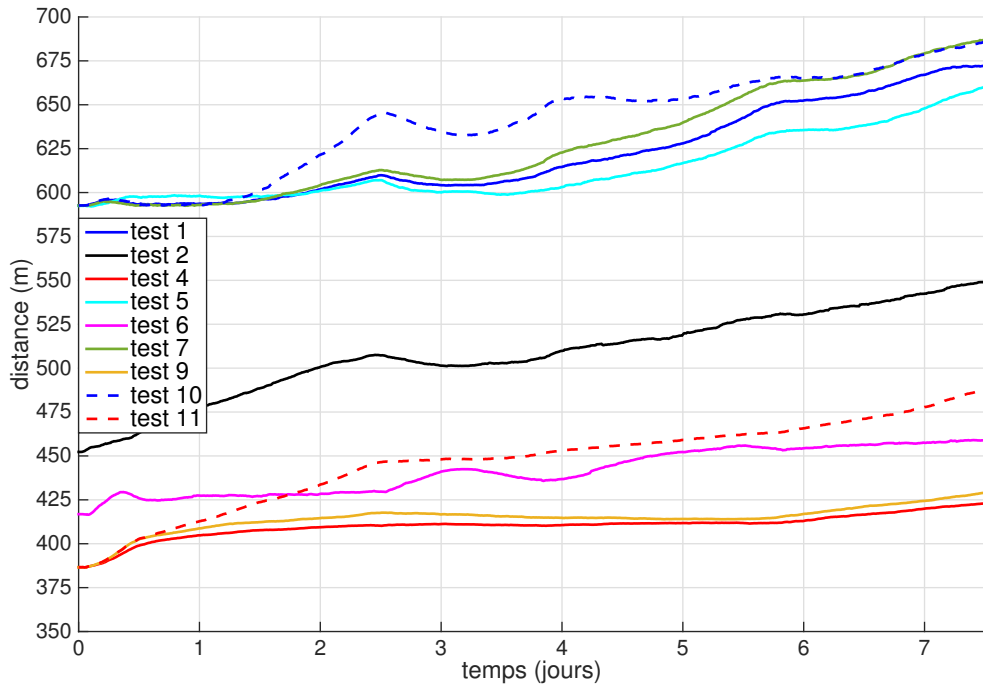


FIGURE 3.36 – Évolution de la distance r_{moy} au cours de la simulation, pour différents tests.

lors de l'étude de la dispersion.

Conclusion

L’environnement des glaces de mer Arctique est encore un domaine privilégié pour l’exploration et l’innovation de nouvelles idées. Le comportement dynamique des glaces de mer, non encore complètement compris, est très complexe et implique un large panel de différents domaines scientifiques.

Le modèle présenté dans cette thèse est construit pour décrire le comportement dynamique d’un assemblage de floes impliquant un grand nombre d’interactions à travers des collisions inélastiques avec friction entre les floes, tout en gardant un temps de calcul raisonnable. Il combine différentes études sur les problèmes linéaires de complémentarité pour le traitement des collisions, différentes techniques basées sur les méthodes de volumes englobants pour la détection des collisions, une méthode de quadrature de Gauss-Legendre pour l’intégration des forces et un modèle de couplage océan/glace pour la prise en compte de la composante inertielle du mouvement. Bien que notre modèle ne considère pas la dispersion d’énergie par certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact, il permet de décrire précisément un large panel de comportements de contact (*voir Chapitre 3*). De même, bien que le modèle de couplage ne soit pas complet, ne prenant pas en compte les interactions entre les mailles d’océan voisines, il permet de retrouver les oscillations inertielles dans le mouvement des floes. De plus, les moments linéaire et angulaire ainsi que l’énergie cinétique du système sont conservés. Après une première version implémentée sous **MATLAB**, le modèle a été codé en **C++** avec les mêmes optimisations. Avec la version du code en **C++** lancée depuis un ordinateur de bureau sur un seul processeur pour la simulation de la dérive durant 7.5 jours d’un assemblage de 350 floes avec une concentration à 70%, impliquant autour de 100 millions de collisions, nous atteignons un ratio entre le temps de la simulation et le temps de calcul supérieur à 7. Dès que la concentration ou que le nombre de floes diminuent, et donc le nombre de collisions, le ratio augmente fortement. Par exemple, pour la même simulation avec un même assemblage à une concentration à 30%, le ratio atteint 50.

Nous pouvons mettre l’accent sur plusieurs contributions présentes dans cette thèse. Les premières se situent au niveau de la simulation des interactions entre solides rigides par la prise en compte à la fois de géométries très variées, non forcément convexes, d’un ratio entre les plus grandes tailles et les plus petites tailles pouvant dépasser 100, et de solides obstacles avec une masse volumique tendant vers l’infini. Cela implique plusieurs méthodes et techniques spécifiques à cette thèse pour la détection des contacts en espace et en temps, et la résolution des problèmes linéaires de complémentarité. La dernière contribution se situe au niveau de la dynamique granulaire des glaces soumises aux forces de traînée dues au vent et à l’océan par la prise en compte du couplage entre le mouvement de la couche limite océanique et le mouvement de la glace. Cela implique l’installation d’un modèle de couplage océan/glace et permet, entre autres, la capture de la composante inertielle du mouvement.

Afin d’optimiser le temps de calcul et d’améliorer le comportement dynamique simulé avec notre modèle, plusieurs axes de recherche et étapes pourront être développés dans le futur. Parmi

ces étapes, nous pouvons citer entre autres, une meilleure estimation du coefficient de restitution ε , l'intégration au modèle de couplage des interactions entre les mailles d'océan voisines et la validation de notre modèle en utilisant des expérimentations en bassin avec des *vrais* floes de glace ou en utilisant des observations in situ.

Comme indiqué dans l'introduction, dans la présente version du modèle, les principales simplifications sont l'absence de rhéologie de la glace et l'utilisation d'un coefficient de restitution fixé et constant. Afin d'améliorer ces aspects dans le futur, il sera nécessaire de combiner notre modèle avec des modèles de rhéologie et d'endommagement appliqués à chaque floe pour une description plus physique et plus détaillée de la dissipation et la dispersion d'énergie durant les collisions.

Parmi les sources importantes d'information pour la validation de notre modèle, nous pouvons citer les trajectoires des bouées attachées aux floes dérivant, par exemple, dans la zone marginale des glaces de mer. Cependant, une comparaison directe, déterministe des trajectoires simulées par notre modèle avec les trajectoires observées sera difficile, particulièrement car les caractéristiques géométriques de l'assemblage de floes, comme la taille, la forme, l'épaisseur ou encore l'arrangement spatial des floes, sont rarement connus. Alors qu'une comparaison en termes de propriétés statistiques des vitesses, comme par exemple dans [RWMB09] pourrait être plus prometteuse.

Finalement, en termes d'optimisation du temps de calcul, une importante direction de recherche sera l'implémentation parallèle de notre modèle sur **GPU**. Pour cela, une structure de *clusters* sera développée. Cette structure consistera à rassembler les floes, interagissant entre eux ou dans une zone spatiale définie en fonction du déplacement des floes, dans un même cluster. Dans un cluster, les floes évolueront avec le même pas de temps et chaque cluster suivra son propre rythme. En effet, les interactions entre les floes n'ont pas toutes besoin d'être décrites avec le même pas de temps. Le principal avantage de cette approche est de traiter les clusters en parallèle, permettant de manipuler un grand nombre de floes tout en conservant un temps de calcul raisonnable.

Un autre axe de recherche concernera l'amélioration en temps de calcul de la résolution des problèmes linéaires de complémentarité. En effet, à l'heure actuelle, c'est le processus le plus chronophage du modèle. Dans certaines situations, il peut requérir plus de 90% du temps de calcul total sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ comprenant le temps de calcul des processus de détection des contacts en espace et en temps ainsi que la mise à jour des vitesses des floes, du vent et du courant océanique, et la mise à jour des positions des floes.

Le modèle présenté ici, construit pour prendre en compte les interactions entre les floes, est un modèle granulaire à l'échelle du floe ou d'un assemblage de floes. Nous dirons que c'est un modèle aux petites échelles par comparaison avec les modèles continus de dynamique des glaces de mer traitant tout l'océan Arctique avec des mailles élémentaires de plusieurs dizaines de kilomètres carrés, utilisés dans des modèles de climatologie, qui eux sont dits aux grandes échelles. Une nouvelle perspective sera de faire du multi-échelle. De la petite à la grande échelle, l'idée sera d'intégrer, en utilisant des méthodes numériques d'homogénéisation, des paramètres glaciologiques fournis par le modèle granulaire aux petites échelles, comme la perte d'énergie cinétique à travers les collisions, dans le modèle continu aux grandes échelles. De la grande échelle à la petite, l'idée sera d'établir, en utilisant des outils d'analyse stochastique, des caractéristiques fournies par le modèle continu, comme la concentration ou la distribution des épaisseurs, pour la construction d'un assemblage de floes dans le modèle granulaire.

Bibliographie

- [AB08] Vincent Acary and Bernard Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2008.
- [AC84] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag New York, Inc., 1984.
- [AC91] Pierre Alart and Alain Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 92(3) :353–375, 1991.
- [Aca13] Vincent Acary. Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and coulomb’s friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 256 :224–250, 2013.
- [Ait50] Alexander C Aitken. Iv.—studies in practical mathematics. v. on the iterative solution of a system of linear equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences*, 63(01) :52–60, 1950.
- [AP97] M. Anitescu and F. A. Potra. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. *Nonlinear Dynamics*, 14(3) :231–247, 1997.
- [APS99] M. Anitescu, F. A. Potra, and D. E. Stewart. Time-stepping for three-dimensional rigid body dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 177 :183–197, 1999.
- [AT89] Mike P Allen and Dominic J Tildesley. *Computer simulation of liquids*. Oxford university press, 1989.
- [Auc08] Jason Auch. Antarctic mountains, pack ice and ice floes, 2008. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Antarctic_mountains,_pack_ice_and_ice_floes.jpg.
- [AW59] B. J. Alder and T. E. Wainwright. Studies in molecular dynamics. i. general method. *J. Chemical Phys.*, 31(2) :459–466, 1959.
- [Bar93] D. Baraff. Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies. *Algorithmica*, 10 :292–352, 1993.
- [Bar94] D. Baraff. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, number ACM, pages 23–34, 1994.
- [Ben00] H. Benabdellah. Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. *J. Differential Equations*, 164(2) :286–295, 2000.
- [Ble02] Rainer Bleck. An oceanic general circulation model framed in hybrid isopycnic-cartesian coordinates. *Ocean modelling*, 4(1) :55–88, 2002.

- [BLS08] Laurent Bertino, KA Lisæter, and S Scient. The topaz monitoring and prediction system for the atlantic and arctic oceans. *Journal of Operational Oceanography*, 1(2) :15–18, 2008.
- [Bra84] Iain Bratchie. Rheology of an ice-floe field. *Annals of Glaciology*, 5 :23–28, 1984.
- [Bra91] R. M. Brach. *Mechanical impact dynamics : rigid body collisions*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [Bra98] R. M. Brach. Formulation of rigid body impact problems using generalized coefficients. *International J. Engrg. Sci.*, 36(1) :61–71, 1998.
- [Bro96] B. Brogliato. *Nonsmooth Impact Mechanics - Models, Dynamics, and Control*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [Bro00] Bernard Brogliato. *Impacts in mechanical systems : analysis and modelling*, volume 551. Springer Science & Business Media, 2000.
- [BSA80] EG Banke, SD Smith, and RJ Anderson. Drag coefficients at aidjex from sonic anemometer measurements. *Sea Ice Processes and Models*, pages 430–442, 1980.
- [BSHP96] Nikolai V Brilliantov, Frank Spahn, Jan-Martin Hertzsch, and Thorsten Pöschel. Model for collisions in granular gases. *Physical Review E.*, 53(5) :5382, 1996.
- [BT95] Srikanth Bandi and Daniel Thalmann. An adaptive spatial subdivision of the object space for fast collision detection of animated rigid bodies. 14(3) :259–270, 1995.
- [BW98] David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 43–54. ACM, 1998.
- [CD70] Richard W Cottle and George B Dantzig. A generalization of the linear complementarity problem. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(1) :79–90, 1970.
- [CDR98] P Chabrand, F Dubois, and M Raous. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4) :97–108, 1998.
- [Cha02] Dominique Chamoret. *Modélisation du contact : nouvelles approches numériques*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2002.
- [Coh95] *I-collide : An interactive and exact collision detection system for large-scale environments*. ACM, 1995.
- [Cou85] C. A. Coulomb. *Théorie des machines simples ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur de leurs cordages*. Bachelier, Librairie, quai des Augustins, Paris, 1785.
- [CPGS08] J.C. Comiso, C.L. Parkinson, R. Gersten, and L. Stock. Accelerated decline in the arctic sea ice cover. *Geophys. Res. Lett.*, 35, 2008.
- [CPS92] Richard W Cottle, Jong-Shi Pang, and Richard E Stone. *The Linear Complementarity Problem*, volume 60. Siam, 1992.
- [CR98] A. Chatterjee and A. L. Ruina. A new algebraic rigid-body collision law based on impulse space considerations. *ASME J. Appl. Mech.*, 65 :939–950, 1998.
- [CS79] Peter A Cundall and Otto DL Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [CS96] H. Cohen and G. P. Mac Sithigh. Collisions of pseudo-rigid bodies : A brach-type treatment. *International J. Engrg. Sci.*, 34(3) :249–256, 1996.

- [CT71] S. K. Chan and I. S. Tuba. A finite element method for contact problems of solid bodies—part i. theory and validation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(7) :615–625, 1971.
- [Cun71] P. A. Cundall. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. *Proc. Symp. Rock Fracture (ISRM), Nancy*, 1 :132–150, 1971.
- [Del17] E. Delassus. Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales. *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, 34(95-179), 1917.
- [DL72] Georges Duvaut and Jacques Louis Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, volume 21. Dunod, 1972.
- [DLBPB13] D. Dumont, Y. Lévesque, A. Bihan-Poudec, and E. Bismuth. Image processing report. CITEPH 64-2012 project, BGO First, Oceanide, 2013.
- [Doy88] P. Doyle. On the base note of a schottky group. *Acta Math.*, 160 :249–284, 1988.
- [DR67] Philip J Davis and Philip Rabinowitz. *Numerical integration*. Blaisdell Publishing Company London, 1967.
- [DS11] Evan Drumwright and Dylan Shell. *An evaluation of methods for modeling contact in multibody simulation*. IEEE, May 2011.
- [DUS⁺11] DP Dee, SM Uppala, AJ Simmons, Paul Berrisford, P Poli, S Kobayashi, U Andrae, MA Balmaseda, G Balsamo, and P Bauer. The era-interim reanalysis : Configuration and performance of the data assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 137(656) :553–597, 2011.
- [Ekm05] V Walfrid Ekman. On the influence of the earth’s rotation on ocean currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 2 :1–53, 1905.
- [Fel08] D. L. Feltham. Sea ice rheology. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40(91–112), 2008.
- [Fic63] G. Fichera. Sul problema elastostatico di signorini con ambigue condizioni al contorno. *Atti Act*, 1963.
- [GB99] F. Génot and B. Brogliato. New results on painlevé paradoxes. *European J. Mech. A. (Solids)*, pages 653–677, 1999.
- [GBW⁺11] L. Girard, S. Bouillon, J. Weiss, D. Amitrano, T. Fichet, and V. Legat. A new modeling framework for sea-ice mechanics based on elasto-brittle rheology. *Annals of Glaciology*, 52(57) :123–132, 2011.
- [GDJB94] Javier García De Jalón and Eduardo Bayo. *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems : the real-time challenge*. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.
- [GF02] Olivier Galizzi and François Faure. Animation efficace de solides en contact par modèle physique. In *15èmes journées de l’Association Française d’Informatique Graphique, AFIG 2002*, pages 167–178, 2002.
- [Gil82] Adrian E Gill. *Atmosphere-ocean dynamics*, volume 30. Academic Press, Elsevier, San Diego, 1982.
- [GJM⁺12] F. Gimbert, N. C. Jourdain, D. Marsan, J. Weiss, and B. Barnier. Recent mechanical weakening of the arctic sea ice cover as revealed from larger inertial oscillations. *J. Geophys. Res.-Oceans*, 117(C00J12), 2012.
- [GLM96] Stefan Gottschalk, Ming C Lin, and Dinesh Manocha. *OBBTree : A hierarchical structure for rapid interference detection*, pages 171–180. ACM, 1996.
- [Glo01] C. Glocker. *Set-valued force laws : dynamics of non-smooth systems*, volume 1. Springer Science, 2001.

- [GMS61] L. A. Galin, H. Moss, and I. N. Sneddon. Contact problems in the theory of elasticity. *NORTH CAROLINA STATE UNIV RALEIGH SCHOOL OF PHYSICAL SCIENCES AND APPLIED MATHEMATICS*, 1961.
- [Gol60] W. Goldsmith. *Impact : The theory and physical behavior of colliding solids*. E. Arnold, 1960.
- [GP95] Ch. Glocker and F. Pfeiffer. Multiple impacts with friction in rigid multi-body systems. *Nonlinear Dynamics*, 7 :471–497, 1995.
- [GS02] G. Gilardi and I. Sharf. Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism and machine theory*, 37(10) :1213–1239, 2002.
- [GZ93] I. Goldhirsch and G. Zanetti. Cluster instability in dissipative gases. *Physical Review Lett.*, 70 :1619–1622, 1993.
- [Had06] Mounia Haddouni. *Algorithmes de résolution de la dynamique du contact avec impact et frottement*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2006.
- [Her82] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *J. reine und angewandte Mathematik*, pages 92–156, 1882.
- [Her11] A. Herman. Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes. *Physical Review E.*, 84(056104), 2011.
- [Her12] Agnieszka Herman. Influence of ice concentration and floe-size distribution on cluster formation in sea-ice floes. *Open Physics*, 10(3) :715–722, 2012.
- [Her13] A. Herman. Numerical modeling of force and contact networks in fragmented sea ice. *Annals of Glaciology*, 54(62) :114–120, 2013.
- [HFT04] M. A. Hopkins, S. Frankenstein, and A. S. Thorndike. Formation of an aggregate scale in arctic sea ice. *J. Geophys. Res.*, 109, 2004.
- [HH96] Koichi Hamada and Yoichi Hori. Octree-based approach to real-time collision-free path planning for robot manipulator. In *Advanced Motion Control, 1996. AMC'96-MIE. Proceedings., 1996 4th International Workshop on*, volume 2, pages 705–710. IEEE, 1996.
- [HH02] P. Heil and W. D. I. Hibler. Modeling the high frequency component of arctic sea ice drift and deformation. *J. Physical Oceanography*, 32 :3039–3057, 2002.
- [HI79] W. D. Hibler III. A dynamic thermodynamic sea ice model. *Journal of Physical Oceanography*, 9(4) :815–846, 1979.
- [HI86] W. D. Hibler III. *The Geophysics of Sea Ice*, chapter Ice dynamics, pages 576–640. Springer-Verlag New York, Inc., 1986.
- [HK93] W. S. Howard and V. Kumar. A minimum principle for the dynamic analysis of systems with frictional contacts. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 437–442. IEEE, 1993.
- [HKT92] G. J. Hamlin, R. B. Kelley, and J. Tornero. Efficient distance calculation using the spherically-extended polytope (s-tope) model. *IEEE Trans. Robotics Automat*, 3 :2502–2507, 1992.
- [HL99] Martin W Heinstejn and Tod A Laursen. An algorithm for the matrix-free solution of quasistatic frictional contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(9) :1205–1226, 1999.
- [HLC⁺97] Thomas C Hudson, Ming C Lin, Jonathan Cohen, Stefan Gottschalk, and Dinesh Manocha. V-collide : accelerated collision detection for vrml. In *Proceedings of the second symposium on Virtual reality modeling language*, pages 117–ff. ACM, 1997.

- [Hoo31] Robert Hooke. 1678, lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies. *Printed for John Martyn printer to the Royal Society, Bell in St. Paul's church-yard*, 1931.
- [Hop85] Mark A Hopkins. Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis. Master's thesis, Clarkson University, 1985.
- [Hop96] M. A. Hopkins. On the mesoscale interaction of lead ice and floes. *J. Geophys. Res.*, 101(C8), 1996.
- [Hop98] M. A. Hopkins. Four stages of pressure ridging. *J. Geophys. Res.*, 103(C10), 1998.
- [HT06] Mark A Hopkins and Alan S Thorndike. Floe formation in arctic sea ice. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 111(C11), 2006.
- [Hun75] Kenneth Hunkins. Oceanic boundary-layer and stress beneath a drifting ice floe. *J. Geophys. Res.-Oceans and Atmospheres*, 80(24) :3425–3433, 1975.
- [HWY] E. J. Haug, S. C. Wu, and S. M. Yang. Dynamics of mechanical systems with coulomb friction, stiction, impact and constraint addition.
- [JAJ98] Franck Jourdan, Pierre Alart, and Michel Jean. A gauss-seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 155(1) :31–47, 1998.
- [Jea99] Michel Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177(3) :235–257, 1999.
- [Joh87] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- [JP85] Michel Jean and Elaine Pratt. A system of rigid bodies with dry friction. *International J. Engrg. Sci.*, 23(5) :497–513, 1985.
- [JTT01] Pablo Jiménez, Federico Thomas, and Carme Torras. 3d collision detection : a survey. *Computers & Graphics*, 25(2) :269–285, 2001.
- [Kal77] J. J. Kalker. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *Z. Angew. Math. Mech.*, 57(5) :3–17, 1977.
- [KB88] Anders Klarbring and Gunnar Björkman. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers & Structures*, 30(5) :1185–1198, 1988.
- [KFK97] P. R. Kraus, A. Fredriksson, and V. Kumar. Modeling of frictional contacts for dynamic simulation. In *Proceedings of IROS 1997 workshop on dynamic simulation : Methods and applications*, volume 28, pages 1–10. Citeseer, 1997.
- [KHM⁺98] James T Klosowski, Martin Held, Joseph SB Mitchell, Henry Sowizral, and Karel Zikan. Efficient collision detection using bounding volume hierarchies of k-dops. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 4(1) :21–36, 1998.
- [Kla86] Anders Klarbring. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(2) :175–200, 1986.
- [Kla90] A. Klarbring. Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *European J. Mech. A. (Solids)*, 9 :53–85, 1990.
- [Kla92] Anders Klarbring. Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. In *Proceedings Contact Mechanics International Symposium*, pages 409–422. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.

- [KR66] Clive William Kilmister and John Edmund Reeve. Rational mechanics. *Constraints*, 1 :65, 1966.
- [KR09] R. Kwok and D. A. Rothrock. Decline in arctic sea ice thickness from submarine and icesat records : 1958-2008. *Geophys. Res. Lett.*, 36, 2009.
- [KT51] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, pages 481–492. University of California press, Berkeley and Los Angeles, 1951.
- [Lem78] Carlton E Lemke. *Complementarity and Fixed Point Problems*, chapter Some pivot schemes for the linear complementarity problem, pages 15–35. Springer Berlin Heidelberg, 1978.
- [Lem80] Carlton E Lemke. A survey of complementarity theory, 1980.
- [Lep05] M. Leppäranta. *The drift of sea ice*. Springer-Verlag Berlin, 2005.
- [LG98] Ming Lin and Stefan Gottschalk. Collision detection between geometric models : A survey. In *Proc. of IMA conference on mathematics of surfaces*, volume 1, pages 602–608, 1998.
- [LH64] Carlton E Lemke and Joseph T Howson, Jr. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, 12(2) :413–423, 1964.
- [Llo05] J. E. Lloyd. Fast implementation of lemke’s algorithm for rigid body contact simulation. *IEEE Trans. Robotics Automat*, pages 4538–4543, 2005.
- [LLT89] Qian-Ming Lu, Jesper Larsen, and Per Tryde. On the role of ice interaction due to floe collisions in marginal ice zone dynamics. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 94(C10) :14525–14537, 1989.
- [LLZD08] P. Lu, Z. J. Li, Z. H. Zhang, and X. L. Dong. Aerial observations of floe size distribution in the marginal ice zone of summer prydz bay. *J. Geophys. Res.-Oceans*, 113(C2), 2008.
- [Lot81] P. Lotstedt. Coulomb friction in two-dimensional rigid-body systems. *Z. Angew. Math. Mech.*, 61 :605–615, 1981.
- [Lot82a] P. Lotstedt. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints. *SIAM J. Appli. Math.*, 42(2) :281–296, 1982.
- [Lot82b] P. Lotstedt. Time-dependent contact problems in rigid-body mechanics. *Math. Prog. Study*, 17 :103–110, 1982.
- [LPR91] Christian Licht, Elaine Pratt, and Michel Raous. *Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction*, pages 129–144. Springer, 1991.
- [LSJC84] CKK Lun, SB Savage, DJ Jeffrey, and N Chepurniy. Kinetic theories for granular flow : inelastic particles in couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *Journal of fluid mechanics*, 140(223–256), 1984.
- [LW05] Tong Liu and Michael Yu Wang. Computation of three-dimensional rigid-body dynamics with multiple unilateral contacts using time-stepping and gauss-seidel methods. *Automation Science and Engineering, IEEE Transactions on*, 2(1) :19–31, 2005.
- [LZB08] C. Liu, Z. Zhen, and B. Brogliato. Part i. theoretical framework. In *Proceedings of the Royal Society A*, editor, *Frictionless multiple impacts in multibody systems*, volume 464, pages 3193–3211, 2008.
- [Mab98] Mongi Mabrouk. Liaisons unilatérales et chocs élastiques quelconques : un résultat d’existence. *Comptes Rendus Aca. Sci. Paris*, 326(11) :1353–1357, 1998.

- [Man82] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, San Francisco, Calif., 1982.
- [Mas81] M. T. Mason. Compliance and force control for computer controlled manipulators. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 11(6) :418–432, 1981.
- [Mat85] M. Matsushita. Fractal viewpoint of fracture and accretion. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 54 :857–917, 1985.
- [Mau06] Bertrand Maury. A time-stepping scheme for inelastic collisions. *Numerische Mathematik*, 102(4) :649–679, 2006.
- [McB86] G. McBean. *The Geophysics of Sea Ice*, chapter The atmospheric boundary layer, pages 283–338. Springer-Verlag New York, Inc., 1986.
- [McM98] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics iii : Computation of dimension. *Am. J. Math.*, 120 :691–721, 1998.
- [McM99] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics i : Strong convergence of kleinian groups. *J. Differential Geom.*, 51(3) :471–515, 1999.
- [McN11] S. McNamara. *Discrete Numerical Modeling of Granular Materials*, chapter Molecular Dynamics Method, pages 1–25. Wiley-ISTE, 2011.
- [McP79] Miles G McPhee. The effect of the oceanic boundary layer on the mean drift of pack ice : Application of a simple model. *Journal of Physical Oceanography*, 9(2) :388–400, 1979.
- [McP82] Miles G McPhee. Sea ice drag laws and simple boundary layer concepts, including application to rapid melting. Technical report, 1982.
- [McP86] M.G. McPhee. *The Geophysics of Sea Ice*, chapter The upper ocean, pages 339–395. Springer-Verlag New York, Inc., 1986.
- [MLJK13] I. Metrikin, S. Løset, N. A. Jenssen, and S. Kerkeni. Numerical simulation of dynamic positioning in ice. *Marine Technology Society Journal*, 47(2) :14–30, 2013.
- [MM85] M. D. P. Monteiro Marques. Chocs inélastiques standards : un résultat d’existence. *Sém. Anal. Convexe*, 15 :1–32, 1985.
- [MM88] M. D. P. Monteiro Marques. Inclusões diferenciais e choques inelásticos. Master’s thesis, Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon, 1988.
- [MM93] M. D. P. Monteiro Marques. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems*. Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1993.
- [MM94] M. D. P. Monteiro Marques. An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction. *European J. Mech. A. (Solids)*, 13(2) :277–306, 1994.
- [Mor74] Jean J Moreau. *New variational techniques in mathematical physics*, chapter On unilateral constraints, friction and plasticity, pages 173–322. CJME 2°ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma, 1974.
- [Mor76] J. J. Moreau. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certain problèmes d’évolution. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 282 :837–840, 1976.
- [Mor77] J. J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3) :347–374, 1977.
- [Mor78] Jean Jacques Moreau. Approximation en graphe d’une évolution discontinue. *RAIRO-Analyse numérique*, 12(1) :75–84, 1978.
- [Mor79] J. J. Moreau. Application of convex analysis to some problems of dry friction. *Trends in applications of pure mathematics to mechanics*, 2 :263–280, 1979.

- [Mor83] J. J. Moreau. Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 296(19) :1473–1476, 1983.
- [Mor85a] J. J. Moreau. dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel : Essais numériques. *U.S.T.L Montpellier, Technical Report*, 85(1), 1985.
- [Mor85b] J. J. Moreau. standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints. In New York Springer-Verlag, Wien, editor, *unilateral problem in structural analysis, CISM Courses and Lectures*, number 288, 1985.
- [Mor87] J. J. Moreau. une formulation de la dynamique classique moreau. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304 :191–194, 1987.
- [Mor88] J. J. Moreau. Bounded variation in time. *Topics in Nonsmooth Mechanics*, 1 :1–74, 1988.
- [Mor99] J. J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 177 :329–349, 1999.
- [MP88] J. J. Moreau and P. D. Panagiotopoulos. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*, 1988.
- [Mur88] K.G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Heldermann Verlag, New York, 1988.
- [MW88a] M.T. Mason and Y. Wang. On the inconsistency of rigid-body frictional planar mechanics. In New York IEEE, editor, *In International Conference on Robotics and Automation*, pages 524–528, 1988.
- [MW88b] M. Moore and J. Wilhelms. Collision detection and response for computer animation. *ACM Siggraph Computer Graphics*, 22(4) :289–298, 1988.
- [Nan02] F. Nansen. Oceanography of the north polar basin : The norwegian north polar expedition 1893-96. *Scientific Results*, 3(9) :427, 1902.
- [NB14] Ngoc Son Nguyen and Bernard Brogliato. *Multiple Impacts in Dissipative Granular Chains*, volume 72. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [New86] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Reg. Soc. Phreases, London, 1686.
- [NW72] J. L. Nevins and D. E. Whitney. *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*, chapter The force vector assembler concept, pages 273–288. Springer Berlin Heidelberg, 1972.
- [Pai85] P. Painleve. Sur les lois du frottement de glissement. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 121 :112–115, 1985.
- [Pan85] P. D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications*. Springer, 1985.
- [Pao55] Yoh-Han Pao. Extension of the hertz theory of impact to the viscoelastic case. *J. Applied Physics*, 26(9) :1083–1088, 1955.
- [PG95] Ian J. Palmer and Richard L. Grimsdale. Collision detection for animation using sphere-trees. 14(2) :105–116, 1995.
- [PG96] F. Pfeiffer and C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley and Sons, New York, 1996.

- [PH93] Thorsten Pöschel and Hans J Herrmann. A simple geometrical model for solid friction. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 198(3) :441–448, 1993.
- [Poi33] S. D. Poisson. *Traité de mécanique*. Bachelier, Librairie, quai des Augustins, Paris, 2nde edition, 1833.
- [PS02a] Laetitia Paoli and Michelle Schatzman. A numerical scheme for impact problems i : The one-dimensional case. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2) :702–733, 2002.
- [PS02b] Laetitia Paoli and Michelle Schatzman. A numerical scheme for impact problems ii : The multidimensional case. *SIAM journal on numerical analysis*, 40(2) :734–768, 2002.
- [PTP11] J. Paavilainen, J. Tuhkuri, and A. Polojarvi. 2d numerical simulations of ice rubble formation process against an inclined structure. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 68(1-2) :20–34, 2011.
- [PW01] Eric Perkins and John R Williams. A fast contact detection algorithm insensitive to object sizes. *Engineering Computations*, 18(1/2) :48–62, 2001.
- [Qui94] S. Quinlan. Efficient distance computation between non-convex object. *IEEE Trans. Robotics Automat*, 4 :3324–3329, 1994.
- [Rap80] D. C. Rapaport. The event scheduling problem in molecular dynamic simulation. *J. Comput. Phys.*, 34 :184–201, 1980.
- [RCL88] M Raous, P Chabrand, and F Lebon. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7 :111–128, 1988.
- [RD82] GT Rooney and P Deravi. Coulomb friction in mechanism sliding joints. *Mechanism and machine theory*, 17(3) :207–211, 1982.
- [RF06] Laks Raghupathi and François Faure. Qp-collide : A new approach to collision treatment. 2006.
- [RGF⁺04] Laks Raghupathi, Laurent Grisoni, François Faure, Damien Marchal, Marie-Paule Cani, and Christophe Chaillou. An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 10(6) :708–718, 2004.
- [RKC02] Stéphane Redon, Abderrahmane Kheddar, and Sabine Coquillart. Fast continuous collision detection between rigid bodies. 21(3) :279–287, 2002.
- [RT84] D.A. Rothrock and A.S. Thorndike. Measuring the sea ice floe size distribution. *J. Geophys. Res.*, 89 :6477–6486, 1984.
- [Rui85] A. L. Ruina. Constitutive relations for frictional slip. *Mechanics of Geomaterials : Rocks, Concrete, Soils*, 1985.
- [RWDC11] P. Rampal, J. Weiss, C. Dubois, and J. M. Campin. Ipc climate models de not capture arctic sea ice drift acceleration : Consequences in terms of projected sea ice thinning and decline. *J. Geophys. Res.*, 116, 2011.
- [RWMB09] P. Rampal, J. Weiss, D. Marsan, and M. Bourgoïn. Arctic sea ice velocity field : general circulation and turbulent-like fluctuations. *J. Geophys. Res.*, 114, 2009.
- [SA82] Hayley H. Shen and Norbert L. Ackermann. Constitutive relationships for fluid-solid mixtures. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 108(5) :748–763, 1982.

- [SCB⁺12] P. Sakov, F. Counillon, L. Bertino, K. A. Lisaeter, P. R. Oke, and A. Korabely. Topaz4 : an ocean-sea ice data assimilation system for the north atlantic and arctic. *Ocean Sci.*, 8(4) :633–656, 2012.
- [Sch78] M. Schatzman. A class of non linear differential equations of 2nd order in time. *J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2(355), 1978.
- [SFIR06] EM Schulson, AL Fortt, D Iliescu, and CE Renshaw. On the role of frictional sliding in the compressive fracture of ice and granite : Terminal vs. post-terminal failure. *Acta materialia*, 54(15) :3923–3932, 2006.
- [SHL86] H. H. Shen, W. D. Hibler, and M Leppäranta. On applying granular flow theory to a deforming broken ice field. *Acta Math.*, 63(1-4) :143–160, 1986.
- [SHL87] Hayley H Shen, William D Hibler, and Matti Leppäranta. The role of floe collisions in sea ice rheology. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 92(C7) :7085–7096, 1987.
- [SHM⁺07] J. Stroeve, M. M. Holland, W. Meier, T. Scambos, and M. C. Serreze. Arctic sea ice decline : Faster than forecast. *Geophys. Res. Lett.*, 34(L09501), 2007.
- [Sig59] A. Signorini. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, 18 :95–139, 1959.
- [SKB⁺12] J. C. Stroeve, V. Kattsov, A. P. Barrett, M. C. Serreze, T. Pavlova, M. M. Holland, and W. N. Meier. Trends in arctic sea ice extent from cmip5, cmip3 and observations. *Geophys. Res. Lett.*, 39(L16502), 2012.
- [SKKD01] P. Song, P. Kraus, V. Kumar, and P. Dupont. Analysis of rigid-body dynamic models for simulation of systems with frictional contacts. *J. Applied Mechanics*, 68(1) :118–128, 2001.
- [SKM11] G. Spreen, R. Kwok, and D. Menemenlis. Trends in arctic sea ice drift and role of wind forcing : 1992-2009. *Geophys. Res. Lett.*, 38(L19501), 2011.
- [SKV⁺12] B. Smith, D. M. Kaufman, E. Vouga, R. Tamstorf, and E. Grinspun. Reflections on simultaneous impact. *ACM Transactions on Graphics*, 31(4) :106 :1–106 :12, 2012.
- [SL92] J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42(1) :97–116, 1992.
- [Smi91] C. E. Smith. Predicting rebounds using rigid-body dynamics. *J. Appli. Mech.*, 58(3) :754–758, 1991.
- [Sol70] H Solomon. A study of ice dynamics relevant to aidjex. *AIDJEX Bull*, 2(33–50), 1970.
- [SP99] D.E. Stewart and J.-S. Pang. A unified approach to frictional contact problems. *International J. Engrg. Sci.*, 37 :1747–1768, 1999.
- [SSH⁺12] J. C. Stroeve, M. C. Serreze, M. M. Holland, J. E. Kay, J. Malanik, and A. P. Barrett. The arctic’s rapidly shrinking sea ice cover : a research synthesis. *Clim. Change*, 110(3-4) :1005–1027, 2012.
- [ST95] David E Stewart and Jeffrey C Trinkle. Dynamics, friction, and complementarity problems. *Complementarity and variational problems (Baltimore, MD, 1995)*, pages 425–439, 1995.
- [ST96] D.E. Stewart and J.C. Trinkle. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39 :2673–2691, 1996.

- [Ste98] D.E. Stewart. Convergence of a time-stepping scheme for rigid body dynamics and resolution of painlevé’s problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 145 :215–260, 1998.
- [Ste00] D.E. Stewart. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM*, 42 :3–39, 2000.
- [Ste01] D.E. Stewart. Reformulations of measure differential inclusions and their closed graph property. *J. Differential Equations*, 175 :108–129, 2001.
- [Str90] W. J. Stronge. Rigid body collisions with friction. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 431 :168–181, 1990.
- [SWT85] Juan C Simo, Peter Wriggers, and Robert L Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 50(2) :163–180, 1985.
- [TA11] A. Tasora and M. Anitescu. A matrix-free cone complementarity approach for solving large-scale, nonsmooth, rigid body dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 200(5) :439–453, 2011.
- [TBV12] Richard Tonge, Feodor Benevolenski, and Andrey Voroshilov. Mass splitting for jitter-free parallel rigid body simulation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 31(4) :105–112, 2012.
- [TC82] AS Thorndike and R Colony. Sea ice motion in response to geostrophic winds. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 87(C8) :5845–5852, 1982.
- [THT11] T. Toyota, C. Haas, and T. Tamura. Size distribution and shape properties of relatively small sea-ice floes in the antarctic marginal ice zone in late winter. *Deep-Sea Research Part II-Top. Stud. Oceanogr.*, 58(9-10) :1182–1193, 2011.
- [TP95] J. C. Trinkle and J.-S. Pang. Complementarity formulations and existence of solutions of multi-rigid-body contact problems with coulomb friction. *Math. Prog. Study*, 1995.
- [TPSL97] J. C. Trinkle, J.-S. Pang, S. Sudarsky, and G. Lo. On dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction. *Z. Angew. Math. Mech.*, 77 :267–279, 1997.
- [Unk] Unknown. Us geological survey. <http://glovis.usgs.gov/>.
- [Unk08] Unknown. Apollonian gasket, 2008. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apollonian_gasket.svg.
- [Unk12] Unknown. Arctic sunrise steams into sea ice melt, 2012. <http://www.theguardian.com/environment/picture/2012/sep/14/arctic-sunrise-sea-ice-melt-big-picture>.
- [VCMT95] P. Volino, M. Courchesne, and N. Magnenat Thalmann. Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects. In *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 137–144. ACM, 1995.
- [VVSM00] J. Van Vliet, I. Sharf, and O. Ma. Experimental validation of contact dynamics simulation of constrained robotic tasks. *The International Journal of Robotics Research*, 19(2) :1203–1217, 2000.
- [WBLM98] John W Weatherly, Bruce P Briegleb, William G Large, and James A Maslanik. Sea ice and polar climate in the near csm*. *Journal of Climate*, 11(6) :1472–1486, 1998.
- [WDA10] J. Wang and A. Derradji-Aouat. Ship performance in broken ice ice floes - preliminary numerical simulations. *Institute for Ocean Technology, National Research Council, St. John’s, NL*, 2010.

- [Wei11] J. Weiss. Fracture and fragmentation of ice : a fractal analysis of scale invariance. *Engineering Fracture Mechanics*, 68 :1975–2012, 2011.
- [Wei13] J. Weiss. *Drift, deformation and fracture of sea ice - A perspective across scales*. Springer Netherlands, 2013.
- [WFH10] A. V. Wilchinsky, D. L. Feltham, and M. A. Hopkins. Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice. *J. Geophys. Res.-Oceans*, 115(C10002), 2010.
- [Whi77] D. E. Whitney. Force feedback control of manipulator fine motions. *J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 99(2) :91–97, 1977.
- [WK94] Y. T. Wang and V. Kumar. Simulation of mechanical systems with multiple frictional contacts. *J. of Mechanical Design*, 166 :571–580, 1994.
- [WP96] M Wösle and F Pfeiffer. Dynamics of multibody systems containing dependent unilateral constraints with friction. *Journal of Vibration and Control*, 2(2) :161–192, 1996.
- [WP99] Peter Wriggers and Panagiotis D Panagiotopoulos. *New developments in contact problems*. Number 384. Springer, 1999.
- [WSS07] Jérôme Weiss, Erland M Schulson, and Harry L Stern. Sea ice rheology from in-situ, satellite and laboratory observations : Fracture and friction. *Earth and Planetary Science Letters*, 255(1) :1–8, 2007.
- [WW90] Andrew Witkin and William Welch. Fast animation and control of nonrigid structures. In *Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 243–252. ACM, 1990.