



Approches d'homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogènes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques

Trung Hieu Hoang

► To cite this version:

Trung Hieu Hoang. Approches d'homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogènes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques. Autre. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1138 . tel-01305513v2

HAL Id: tel-01305513

<https://theses.hal.science/tel-01305513v2>

Submitted on 21 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
D'INGÉNIEURS
PARIS-LA DÉFENSE

UNIVERSITÉ PARIS-EST



THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique, Matériaux et Structures

Présentée par :

Trung Hieu HOANG

sujet :

Approches d'homogénéisation numériques
incrémentales pour le calcul des structures
hétérogènes élasto-plastiques et
élasto-visco-plastiques

Version Provisoire

Soutenue le 16 décembre 2015,
devant le jury composé de :

L. NOELS	Associate Professor Univ. de Liège	Rapporteur
H. ZAHROUNI	Professeur Univ. de Lorraine	Rapporteur
H. DUMONTET	Professeur Univ. Pierre et Marie Curie	Examineur
J. YVONNET	Professeur Univ. Paris-Est Marne-la-Vallée	Directeur de thèse
M. GUERICH	Professeur associé Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci	Co-encadrant de thèse

Table des matières

Introduction générale	7
1 Methodologies multi-échelles d'homogénéisation des matériaux hétérogènes : État de l'art	9
1.1 Introduction	9
1.2 Classification	11
1.3 Méthodes analytiques et semi-analytiques	11
1.3.1 Problèmes linéaires	11
1.3.2 Définition du VER et aspects statistiques	15
1.4 Problèmes non linéaires	15
1.4.1 Méthodes semi-analytiques	15
1.4.2 Méthode FE^2	21
1.4.3 Méthode d'interpolation de bases de données	23
1.4.4 Approches séquentielles pour les matériaux hyperléastiques	24
1.4.5 Méthode séquentielle pour l'homogénéisation des compo- sites linéaires viscoélastiques	27
1.4.6 Méthode NTFA	29
1.4.7 Calculs multi-échelles intensifs	33
1.5 Conclusion	33
2 Procédure de détermination de la taille du VER pour des com- posites non linéaires basée sur une méthode d'homogénéisation incrémentale	35
2.1 Introduction	35
2.2 Revue de la méthode incrémentale utilisée dans l'homogénéisation	37
2.3 Méthodologie proposée pour déterminer la taille du VER	41
2.3.1 Description de la procédure	41
2.3.2 Critère de convergence	43
2.4 Exemples numériques	45
2.4.1 Composite avec matrice élasto-plastique	46
2.4.2 Composite avec matrice élasto-viscoplastique	51
2.5 Application de la méthodologie proposée pour le calcul des struc- tures non linéaires hétérogènes	56
2.5.1 Influence de la fraction volumique des inclusions dans le VER sur le résultat de calcul des structures	57
2.5.2 Influence du rapport entre les modules d'Young de la ma- trice et des inclusions sur le résultat de calcul des structures	61
2.6 Conclusion	63

3	Une méthode incrémentale numérique d'homogénéisation des composites élastoplastiques	65
3.1	Introduction	65
3.2	Formulation du problème micro	66
3.3	Homogénéisation	69
3.4	Calcul numérique de $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x})$	71
3.5	Variables internes	73
3.5.1	Procédure proposée	73
3.5.2	Algorithme de Return-mapping	73
3.6	Choix du paramètre β	76
3.7	Algorithme général	78
3.8	Calcul de structures hétérogènes élastoplastiques à deux échelles .	80
3.9	Conclusion	83
4	Applications de la méthode incrémentale numérique d'homogénéisation aux composites élastoplastiques	85
4.1	Introduction	85
4.2	Homogénéisation de microstructures élastoplastiques sous charge- ments cycliques	86
4.2.1	Microstructure avec inclusion rigide et matrice élastoplas- tique avec écrouissage linéaire	86
4.2.2	Microstructure poreuse, matrice élastoplastique avec écrouis- sage linéaire	89
4.2.3	Microstructure avec inclusion rigide, matrice élastoplastique avec écrouissage cinématique	92
4.2.4	VER élastoplastique anisotrope	93
4.2.5	Microstructure réaliste obtenue à partir d'une image de mi- crotomographie	97
4.3	Exemple de calcul de structure hétérogène non linéaire élastoplas- tique à 2 échelles	98
4.4	Conclusion	100
	Conclusion générale	103
4.5	Conclusions	103
4.6	Perspectives	104
A	Présentation du logiciel Digimat	107
A.1	Digimat MF	107
A.1.1	Description	107
A.1.2	Exemple d'illustration	108
A.2	Digimat FE	110
A.2.1	Description	110
A.2.2	Exemple d'illustration	110
A.3	Digimat MX	113
A.3.1	Description	113
A.3.2	Exemple d'illustration	113
A.4	Digimat CAE	114
A.4.1	Description	114
A.4.2	Exemple d'illustration	116

Table des figures

1.1	Classification des méthodes d'homogénéisation.	12
1.2	Approche d'homogénéisation non linéaire incrémentale.	20
1.3	Représentation schématique de la méthode (FE ²).	22
1.4	Homogénéisation d'un matériau hétérogène viscoélastique par une approche d'homogénéisation numérique séquentielle [?]. (a) Struc- ture. (b) VER. (c) Réponse de la structure à un chargement per- manent dans le temps.	29
2.1	Exemple de réalisation de la microstructure	42
2.2	Identification des paramètres numériques α par 3 approches pour un comportement élasto-plastique, et une fraction volumique $f = 0.5$	43
2.3	Composite élasto-plastique : champs de contraintes de Von-Mises dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 3.23$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 19.41$	48
2.4	Composite élasto-plastique : champs de contraintes de Von-Mises dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.5$: (a) 4 inclusions, , correspondant à $L/D = 2.5066$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 15.03$	48
2.5	Composite élasto-plastique, $f = 0.3$: convergence statistique des paramètres : (a) σ_Y et (b) σ_∞ pour la taille de VER fixée à $L/D =$ 3.23	49
2.6	Composite élasto-plastique, $f = 0.3$: convergence statistique des paramètres : (a) m et (b) k pour la taille de VER fixée $L/D = 3.23$	49
2.7	Composite élasto-plastique : convergence du paramètre k par rap- port au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	50
2.8	Composite élasto-plastique : convergence du paramètre σ_Y par rap- port au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	50
2.9	Composite élasto-plastique : convergence de paramètre m par rap- port au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	50

2.10	Composite élasto-plastique : Convergence de paramètre σ_∞ par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	51
2.11	Composite élasto-viscoplastique : champs de contraintes de Von Mises dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 3.23$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 19.41$	53
2.12	Composite élasto-viscoplastique : champs de contraintes de Von Mises dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.5$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 2.5066$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 15.03$	53
2.13	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre k par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	54
2.14	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre σ_Y par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	54
2.15	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre σ_∞ par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	55
2.16	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre s par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	55
2.17	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre m par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	55
2.18	Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre η par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$	56
2.19	(a) géométrie du modèle complet et (b) géométrie du modèle homogénéisé dans le cas d'une fraction volumique des inclusions de 0.3	57
2.20	(a) géométrie du modèle complet et (b) géométrie du modèle homogénéisé dans le cas d'une fraction volumique des inclusions de 0.5	57
2.21	Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$: (a) modèle complet; (b) modèle homogénéisé	58
2.22	Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$: (a) modèle complet; (b) modèle homogénéisé	58
2.23	Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.5$: (a) modèle complet; (b) modèle homogénéisé	59
2.24	Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.5$: (a) modèle complet; (b) modèle homogénéisé	59

2.25	Déplacement en fonction du chargement : comparaison entre modèle complet et matériau homogénéisé dans le cas d'une fraction volumique = 0.3	59
2.26	Déplacement en fonction du chargement : comparaison entre modèle complet et matériau homogénéisé dans le cas d'une fraction volumique = 0.5	60
2.27	Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$ et d'un rapport $E_i/E_m = 100$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé	61
2.28	Champs de contraintes dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$ et d'un rapport $E_i/E_m = 100$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé	62
2.29	Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$ et d'un rapport $E_i/E_m = 200$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé	62
2.30	Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$ et d'un rapport $E_i/E_m = 200$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé	62
2.31	Déplacement en fonction du chargement avec (a) modèle complet et (b) modèle homogénéisé	63
3.1	Volume Elementaire Représentatif (VER).	66
3.2	Modélisation incrémentale du comportement effectif.	67
3.3	Influence du paramètre β pour un modèle de comportement de type loi puissance.	78
3.4	Influence du paramètre β sur la qualité de la réponse pour une lois élastoplastique avec écrouissage linéaire.	79
3.5	Procédure de calcul à deux échelles utilisant l'approche incrémentale à l'échelle microscopique.	82
4.1	Volume élémentaire représentatif avec une inclusion rigide et matrice élastoplastique, écrouissage linéaire : (a) géométrie ; (b) maillage.	86
4.2	Chargement cyclique appliqué sur le VER.	88
4.3	Courbes de contrainte-déformation pour le composite à matrice élastoplastique avec inclusion rigide élastique.	88
4.4	Champs de contrainte et déformation dans le VER : (a) ε_{11} et (b) σ_{11}	89
4.5	Volume élémentaire représentatif de la microstructure poreuse : (a) géométrie ; (b) maillage.	90
4.6	Microstructure poreuse : courbe de contrainte-déformation macroscopiques sous chargement cyclique.	91
4.7	Champs de contrainte et de déformation dans la microstructure poreuse : (a) ε_{11} et (b) σ_{11}	91
4.8	Chargement cyclique appliqué sur le VER pour le cas du composite avec phases élastoplastique, écrouissage cinématique.	93
4.9	Courbes de contrainte-déformation pour le composite avec matrice élastoplastique, écrouissage cinématique.	94
4.10	Champs de contrainte et déformation dans le VER pour le composite à matrice élastoplastique, écrouissage cinématique : (a) ε_{11} et (b) σ_{11}	94

4.11	VER pour une microstructure anisotrope : (a) géométrie ; (b) maillage.	95
4.12	Courbes de contrainte-déformation pour le VER anisotrope. . . .	96
4.13	Champs de contrainte et de déformation dans le VER anisotrope : (a) ε_{11} et (b) σ_{11}	96
4.14	VER de béton obtenu à partir d'une image segmenté à partir d'une microtomographie.	97
4.15	Courbe contrainte-déformation pour le VER de béton.	98
4.16	Champs de contrainte et déformation dans le VER de béton : (a) ε_{11} et (b) σ_{11}	99
4.17	Géométrie et chargement pour le problème de structure hétérogène élastoplastique à deux échelles.	99
4.18	Déplacement vertical d'un point extrémité de la poutre.	100
A.1	Chargement considéré dans Digimat MF	109
A.2	Résultat d'analyse de contrainte-déformation par Digimat MF . .	109
A.3	Résultat d'analyse de l'influence de l'orientation par Digimat MF	110
A.4	VER créé par Digimat FE	111
A.5	Maillage du VER pour l'analyse EF avec Abaqus CAE	112
A.6	Interface du processus de post-traitement dans Digimat FE	112
A.7	Densité du courant électrique moyenne dans les 3 directions. . . .	112
A.8	Identification des paramètres avec Digimat MX.	114
A.9	Résultat de l'identification	115
A.10	Les paramètres optimisés après l'identification	115
A.11	Interface de Digimat-Abaqus et maillage de la structure analysée .	116
A.12	Champ de contraintes de Von-Mises issu de l'analyse avec Digimat CAE	117

Introduction générale

Contexte

L'ingénierie du génie civil fait désormais un usage avancé de la simulation numérique pour modéliser une grande variété de phénomènes, tels que le calcul statique, dynamique ou la stabilité des structures, le vieillissement des matériaux dans des environnements naturels, la tenue au feu, etc. Cependant, la prise en compte des matériaux à des échelles plus fines reste encore du domaine de la recherche et n'est pas encore transférée dans les codes de calcul industriels. Les raisons principales sont liées à des difficultés théoriques et numériques associées au passage d'une description à l'échelle microscopique, où les phénomènes tels que la microfissuration, les modifications chemo-mécaniques, ou le transport de l'humidité à travers les pores peuvent être observés et modélisés, et l'échelle de la structure, où les dimensions caractéristiques vont de quelques centimètres à des dizaines de mètres.

Les progrès dans ce domaine, appelé "micromécanique", ou plus récemment "mécanique multi-échelle" sont cependant nombreux et ont permis des avancées spectaculaires ces dernières années. En effet, depuis les travaux pionniers des années 50 en micromécanique portant notamment sur l'homogénéisation, un très grand nombre d'outils mathématiques ont été proposés qui ont permis de définir des évaluations des comportements effectifs pour des matériaux hétérogènes, principalement dans le cas linéaire. C'est le cas par exemple de l'évaluation des propriétés élastiques ou thermiques des composites. Les challenges portent ces dernières années sur les comportements non linéaires : plasticité, endommagement ou les couplages multi physiques non linéaires. La prise en compte de microstructures réalistes, telles qu'obtenues par la démocratisation des techniques de microtomographie est également un défi. Pour aborder ces nouveaux problèmes, les méthodes incluant des calculs numériques sont désormais incontournables et permettent d'envisager de nouvelles stratégies de modélisation, en se rapprochant du calcul de structure incluant des effets microstructuraux non linéaires.

L'objectif de cette thèse est de contribuer à cet enjeu, en se centrant sur l'homogénéisation non linéaire des matériaux élastoplastiques et viscoplastiques, et sur le calcul de structures composées de ces matériaux non linéaires hétérogènes.

Intégration de la thèse dans le projet ILMAB

Ce travail de thèse s'inscrit dans le projet ILMAB (Infrastructure Logicielle pour la Modélisation et l'Analyse des Bâtiments) financé par la région Ile-de-France, dans lequel l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci (ESILV) est

partenaire. Les tâches du projet liées à la thèse portent sur le développement de méthodologies et d'outils de modélisation numérique, notamment, basés sur l'utilisation du Logiciel Digimat. Bien que l'objectif à plus long terme soit d'aborder le comportement à rupture pour des applications du génie civil, cette thèse constitue un premier pas vers le développement de méthodes permettant de traiter des structures hétérogènes non linéaires, et porte sur des approches plus en amont des applications, même si les outils proposés dans ce travail pourraient être étendus pour d'autres comportements non linéaires dans un futur proche.

Plan de la thèse

Dans le premier chapitre, nous dresserons un état de l'art récent des méthodes d'homogénéisation pour les matériaux linéaires et non linéaires, et notamment sur les méthodes numériques multi échelles.

Dans le deuxième chapitre, nous proposerons une démarche pour déterminer la taille d'un volume élémentaire représentatif (VER) dans un cadre non linéaire, en se basant sur une approche d'homogénéisation incrémentale semi-analytique, et utiliserons les modèles de comportement associés pour réaliser des calculs de structures hétérogènes non linéaires, pour des composites contenant des phases élastoplastiques et viscoplastiques.

Nous développerons Dans le troisième chapitre une nouvelle méthode d'homogénéisation numérique pour les matériaux élastoplastiques, basée sur une approche incrémentale, où les opérateurs permettant de définir les quantités macroscopiques sont calculés numériquement sur la base d'un VER. La démarche est développée pour des cas de calcul de structures hétérogènes non linéaires impliquant deux échelles de calcul.

Nous illustrerons dans le quatrième chapitre la méthode élaborée au chapitre 3 au travers d'exemples numériques réputés difficiles pour les méthodes disponibles, pour permettre de valider la méthode et d'en discuter ses avantages et inconvénients.

Enfin, nous présenterons un bilan et dresserons quelques perspectives.

Chapitre 1

Méthodologies multi-échelles d'homogénéisation des matériaux hétérogènes : État de l'art

1.1 Introduction

Le rôle des différentes échelles en mécanique des matériaux est aujourd'hui bien établi. Au niveau du matériau, l'échelle caractéristique d'intérêt est l'échelle des hétérogénéités microstructurales et des défauts. La mécanique et la physique de ces microstructures multiphasiques est généralement considérée comme le principal mécanisme décrivant le comportement de la réponse du matériau. La compréhension du comportement, des évolutions et de la réponse mécanique à l'échelle microstructurale est donc critique. Il est aujourd'hui bien compris que même les très petites échelles et les interfaces fines peuvent avoir une influence sur le comportement à l'échelle macroscopique. Les méthodes multi-échelles ont ainsi émergé en vue de relier les petites et grandes échelles en mécanique du solide. L'homogénéisation non linéaire des matériaux hétérogènes a constitué l'une des premières approches multi échelles, mais s'est rapidement révélée insuffisante pour traiter des microstructures plus complexes, des comportements non linéaires, et pour décrire les phénomènes locaux dans les microstructures. Pour pouvoir atteindre

ces objectifs, les méthodes numériques multi échelles ont été développées dans les dernières décennies. Nous présentons ci-dessous un état de l’art (probablement non exhaustif) des méthodes d’homogénéisation, en commençant par une présentation des méthodes classiques d’homogénéisation linéaires, puis des méthodes d’homogénéisation pour les matériaux hétérogènes non linéaires, nécessitant des approches numériques.

Les premiers travaux en homogénéisation remontent aux travaux de Voigt, suivi par le modèle de Sachs [?] de Reuss (1929) et le modèle de Taylor [?]. Bien que les bornes de Voigt et Reuss aient été développées pour les composites, les modèles de Sachs et Taylor ont été proposés pour les polycristaux. L’intérêt croissant pour les composites au cours du XX^e siècle a motivé d’importants développements en homogénéisation. La contribution la plus marquante a été celle d’Eshelby [?], où l’attention a été portée sur la solution élastique pour une inclusion ellipsoïdale. Cette thématique, appelée ensuite ”micromécanique”, a été formellement établie par Hill [?]. Une revue des travaux menés dans ce cadre depuis une quarantaine d’années peut être trouvée dans [?].

Les progrès en homogénéisation des matériaux hétérogènes ont été fournis par Kröner [?], Hashin and Shtrikman [?], Hill [?], Mori and Tanaka [?] ou encore Willis [?], parmi d’autres. Les premiers pas vers des extensions au cas non linéaire furent développés par Hill [?] ou encore Hutchinson [?]. Les comportements abordés incluaient l’élastoplasticité, l’élasticité non linéaire et la viscoélasticité. Plus récemment, plusieurs contributions importantes ont été apportés par Nemat-Nasser [? ?], Ponte Castañeda [?], Suquet [? ?], Willis [?] ou Zaoui [?], parmi d’autres.

Durant les dernières années, des progrès majeurs ont été réalisés par l’introduction des méthodes numériques dans les approches d’homogénéisation, particulièrement pour lever les verrous liés aux comportements non linéaires complexes dans les matériaux hétérogènes, ainsi que pour permettre de fournir des modèles utilisables dans des calculs de structures pour les ingénieurs. Ainsi, les méthodes d’homogénéisation ”numériques” [?] ont été proposées, où des calculs numériques

à deux échelles sont effectués de manière couplés pour fournir la réponse d'une structure hétérogène non linéaire. Ces techniques sont décrites plus en détails dans la suite de ce chapitre.

1.2 Classification

Nous proposons ici une classification des méthodes d'homogénéisation, bien qu'une telle classification ne soit pas unique. Nous distinguons, parmi les approches que nous présentons ci-dessous, les approches *séquentielles*, et les approches *concourantes*. Dans les approches séquentielles, l'information nécessaire à la construction de la loi de comportement macroscopique est obtenue par des calculs analytiques ou numériques préliminaires à l'échelle microscopique. Lors du calcul de structure, il n'est plus nécessaire d'effectuer de nouveaux calculs au niveau microstructural. Dans les approches concourantes, le problème à l'échelle macroscopique est résolu simultanément avec le problème à l'échelle microscopique, ce qui de manière numérique peut se traduire par des échanges d'informations, par exemple lors des différentes itérations, entre les échelles macroscopiques et microscopiques. Les méthodes présentées par la suite sont classées suivant ce principe dans la figure 1.1.

1.3 Méthodes analytiques et semi-analytiques

1.3.1 Problèmes linéaires

Les méthodes analytiques ont été proposées initialement pour les composites élastiques linéaires. Si ces approches fournissent des bornes et des estimations utiles pour les ingénieurs dans certains cas, elles sont limitées par la mauvaise prise en compte des interactions entre les inclusions et la forme de celles-ci, qui sont généralement restreintes aux formes ellipsoïdales.

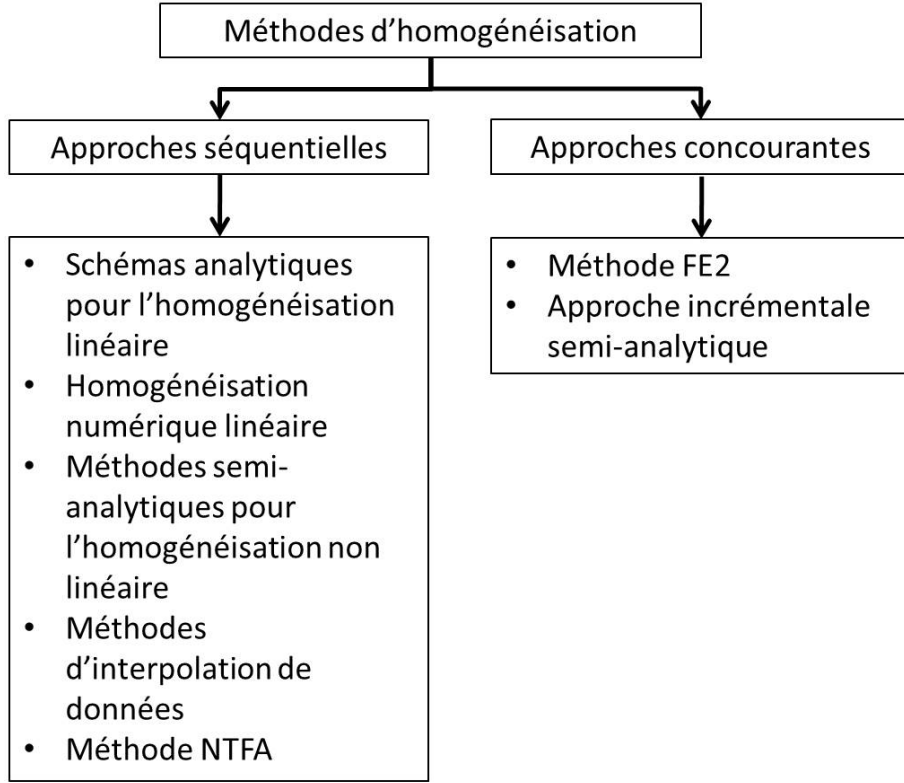


FIGURE 1.1 – Classification des méthodes d'homogénéisation.

1.3.1.1 Méthode d'Eshelby

Dans la méthode d'Eshelby, les inclusions sont supposées éloignées les unes des autres et leurs interactions négligées. En d'autres termes, chaque inhomogénéité peut être traitée comme existant dans une matrice homogène sans interaction avec les autres inhomogénéités. Soit une inclusion définie dans un domaine ellipsoïdal Ω^r , de module élastique $\mathbb{C}_r$. La matrice entourant l'inclusion possède un module élastique $\mathbb{C}_0$ et est soumise à un chargement en déplacements du type :

$$\mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{x} \quad (1.1)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (1.2)$$

La déformation dans l'inclusion Ω^r , supposée constante si l'inclusion est ellipsoïdale, peut être exprimée par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbb{A}_r : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3)$$

où $\mathbb{A}_r$ est le tenseur de localisation de la déformation dans l'inclusion r , donné par :

$$\mathbb{A}_r = [\mathbb{I} + \mathbb{E} : \mathbb{C}_0 : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0)]^{-1}, \quad (1.4)$$

avec $\mathbb{E}$ le tenseur de Eshelby (voir par exemple [?]). En exprimant la loi de comportement élastique en tout point et en prenant la moyenne

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (1.5)$$

on identifie le module élastique effectif $\bar{\mathbb{C}}$ comme :

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_0 + \sum_r f_r (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0) : \mathbb{A}_r. \quad (1.6)$$

Dans le cas d'un composite contenant des inclusions sphériques arbitrairement dispersées de fraction volumique f , et lorsque les constituants sont linéaires élastiques isotropes, on obtient, en notant k_1, μ_1 les coefficients de compressibilité et de cisaillement de la matrice et k_2, μ_2 des inclusions et $\bar{k}$ et $\bar{\mu}$ les coefficients effectifs du composite :

$$\bar{k} = k_1 + \frac{f(k_2 - k_1)(3k_1 + 4\mu_1)}{3k_2 + 4\mu_1} \quad (1.7)$$

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \frac{5f\mu_1(\mu_2 - \mu_1)(3k_1 + 4\mu_1)}{3k_1(3\mu_1 + 2\mu_2) + 4\mu_1(2\mu_1 + 3\mu_2)}. \quad (1.8)$$

1.3.1.2 Schéma de Mori-Tanaka

La méthode de Mori-Tanaka inclut certains effets des interactions entre inclusions en prenant la déformation dans l'inclusion égale à $\bar{\epsilon}_1 = \langle \epsilon \rangle_{\Omega_1}$ (voir détails dans [?]). On peut citer quelques applications dans [? ? ? ? ?]. Cela conduit, pour des inclusions sphériques isotropes, aux estimations suivantes :

$$\bar{k} = k_1 + \frac{f(k_2 - k_1)(3k_1 + 4\mu_1)}{3k_1 + 4\mu_1 + 3(1 - f)(k_2 - k_1)} \quad (1.9)$$

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \frac{5f\mu_1(\mu_2 - \mu_1)(3k_1 + 4\mu_1)}{5\mu_1(3k_1 + 4\mu_1) + 6(1 - f)(\mu_2 - \mu_1)(k_1 + 2\mu_1)}. \quad (1.10)$$

1.3.1.3 Schéma auto-cohérent

Dans ce schéma, les effets des chargements appliquées (par le biais des conditions aux limites) et les interactions entre inclusions sont prises en compte en supposant que l'inclusion r est placée dans une matrice homogène de tenseur élastique $\bar{\mathbb{C}}$ qui est soumise à une déformation $\bar{\epsilon}$. Dans le cas d'inclusions sphériques isotropes élastiques, cela conduit aux équations suivantes à résoudre pour déterminer $\bar{k}$ et $\bar{\mu}$:

$$\bar{k} = k_1 + \frac{f(k_2 - k_1)(3\bar{k} + 4\bar{\mu})}{3k_2 + 4\bar{\mu}}, \quad (1.11)$$

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \frac{5f\bar{\mu}(\mu_2 - \mu_1)(3\bar{k} + 4\bar{\mu})}{3\bar{k}(3\bar{\mu} + 2\mu_2) + 4\bar{\mu}(2\bar{\mu} + 3\mu_2)}. \quad (1.12)$$

Ce modèle a été étendu aux matériaux viscoplastiques [?] et pour des morphologies d'inclusions complexes [?]. Les différents schémas ci-dessus sont à la base de méthodes récentes, comme une technique proposée dans [?] permettant de traiter des composites polydispersés par une approche itérative.

1.3.2 Définition du VER et aspects statistiques

La définition du Volume Élémentaire Représentatif (VER) est centrale en homogénéisation numérique, où la microstructure est définie dans un domaine de taille finie. La définition proposée par Hill [?] implique que le VER doit être de taille suffisante pour représenter un ensemble de microstructures au sens statistique, lorsque les conditions aux limites sont macroscopiquement uniformes. Drugan et Willis [?] ont proposé une variante, où le VER est le plus petit volume de matériau qui représente la réponse mécanique moyenne avec suffisamment de précision. Povirk [?] proposa encore une autre approche pour déterminer la taille de VER basée sur la description de la microstructure en utilisant un indicateur statistique. Une taille optimale de domaine préservant la description statistique de la microstructure originale est appelée Cellule Unitaire Représentative (CUR). Dans tous les cas, le VER doit à la fois capturer le comportement mécanique (physique) du matériau et être statistiquement représentatif (capturer la complexité géométrique du matériau). La définition du VER est critique, et son étude dans le cas non linéaire est relativement récente. Ce problème fera l'objet du chapitre 2, dans lequel nous proposerons une méthodologie alternative pour déterminer la taille d'un VER dans un cadre non linéaire en se basant sur une approche incrémentale.

1.4 Problèmes non linéaires

1.4.1 Méthodes semi-analytiques

Les approches analytiques qui ont été proposées depuis les travaux pionniers de Hill [?] ont pour objectif d'estimer ou de borner le comportement des matériaux hétérogènes non linéaires. Dans le cas des matériaux non linéaires en petites déformations, des extensions au cas non linéaire de certaines techniques classiques dans le cadre linéaire ont été proposées (voir par exemple Nemat-Nasser & Hori [?]; Torquato [?]; Milton [?]), les travaux de Willis [?], Dvorak [?], Qiu and

Weng [?], Ponte Castañeda [?], Hu [?], Milton et Serkov [?]. Dans le cas des grandes déformations, plusieurs auteurs ont également étendu certaines approches d'homogénéisation analytiques issues du cadre linéaire pour des cas spécifiques. Dans une série de travaux, (voir par exemple [? ? ?] entre autres), des estimations et des solutions exactes pour certaines classes de composites hyperélastiques ont été dérivées. Ponte-Castañeda [?] a proposé une méthode d'homogénéisation du second ordre pour déterminer la loi de comportement effective de matériaux composites non linéaires poreux et renforcés, suivi par plusieurs autres auteurs (voir par exemple [? ? ?]). Quelques-unes de ces techniques sont décrites ci-dessous.

1.4.1.1 Méthodes incrémentales et affines

Les méthodes semi-analytiques ont été étendues pour les comportements non linéaires tels que la visco-élasticité non linéaire ou la viscoplasticité. La plupart des extensions se basent sur la notion de *composite de comparaison linéaire* (CCL) [? ? ? ? ?]. Hill [?] a proposé une méthode incrémentale pour homogénéiser les composites non linéaires dans ce cadre. L'approche a ensuite été étendue (voir par exemple [? ? ?]). Dans ce cas, le comportement du composite est écrit par une loi incrémentale du type $\Delta \bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}}^{tan} : \Delta \bar{\varepsilon}$, où $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\mathbb{C}}^{tan}$ sont respectivement la déformation et la contrainte macroscopique et le module tangent. Cette méthode, combinée avec un schéma de Mori-Tanaka est décrite plus en détails dans la section 1.4.1.3.

Les autres approches semi-analytiques sont appelées *méthodes affines*. Celles-ci ont été proposées initialement par Molinari et al. [? ?] pour les matériaux visco-plastiques. Dans ce type d'approche, on considère le champs de contraintes et non son incrément durant la procédure d'homogénéisation. Cette technique a été étendue aux matériaux élasto-plastiques par Zaoui et Masson [?] et Masson et al. [?]. Le comportement dans la méthode affine est exprimé sous la forme $\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}} : \bar{\varepsilon} + \tau$ où τ est une contrainte de polarisation et $\bar{\mathbb{C}}$ peut être différent du module tangent. Chaboche et al. [?] ont montré que cette méthode peut

conduire à un comportement trop raide lorsqu'un opérateur tangent anisotrope est considéré. Ces méthodes ont ensuite été utilisées pour étudier le comportement de composites visco-plastiques [? ? ?]. Le CCL peut être défini par un opérateur sécant comme dans Berveiller et Zaoui [?] pour les comportements élasto-plastiques. Dans cette approche, l'opérateur sécant est utilisé et la réponse effective du composite donnée sous la forme $\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}}^{sec} : \bar{\varepsilon}$, qui limite la méthode aux cas de chargements proportionnels monotones. D'autres approches peuvent être citées comme des extensions à l'endommagement dans le cas d'un schéma incrémental non local [?] ou une méthode de gradient modifié dans Peerlings et al. [?] ou Engelen et Baaijens [?] pour prendre en compte l'endommagement local dans la matrice.

En raison de la faible qualité de l'approximation dans le cas élastoplastique [?], ces méthodes ont été étendues en considérant le second ordre du moment stochastique (voir par exemple Suquet [?], Ponte Castañeda [?] ou de Doghri et al. [?]) et dans un cadre visco-plastique dans [? ? ? ?] et élasto-visco-plastique avec écrouissage cinématique dans [?].

1.4.1.2 Méthode de second ordre

La méthode d'homogénéisation non linéaire du second-ordre, proposée par Ponte-Castañeda dans (voir par exemple [?]), est une approche dans laquelle la loi de comportement non-linéaire est de la forme

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}}, \quad (1.13)$$

où la fonction de densité d'énergie $\bar{u}$ du matériau est obtenue par le problème de minimisation :

$$\bar{u}(\bar{\sigma}) = \inf_{\sigma \in \mathcal{K}(\bar{\sigma})} \sum_{r=1}^N c^{(r)} \langle u^{(r)}(\sigma, \mathbf{x}) \rangle, \quad (1.14)$$

où $u^{(r)}$ est le potentiel convexe associé au comportement non-linéaire d'une phase (r) . Ce type de loi permet de décrire la plasticité dans le cadre de la théorie de la

déformation (chargements monotones sans retour élastique), ou de la viscoplasticité. Dans ce cas, $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont remplacés par leurs dérivées temporelles $\dot{\bar{\sigma}}$ et $\dot{\bar{\varepsilon}}$, respectivement. La méthode du second ordre [?] consiste à approximer $\bar{u}(\bar{\sigma})$ sous la forme :

$$\bar{u}(\bar{\sigma}) = \underset{\mathbb{M}_0^{(s)}}{\text{Argmin}} \left\{ \tilde{u}_T \left(\bar{\sigma}, \check{\sigma}^{(s)}, \mathbb{M}_0^{(s)} \right) - \sum_{r=1}^N c^{(r)} V^{(r)} \left(\check{\sigma}^{(r)}, \mathbb{M}_0^{(r)} \right) \right\}. \quad (1.15)$$

Dans (1.15), $\tilde{u}_T$ est le potentiel effectif d'un composite linéaire de comparaison avec la même microstructure que le composite non linéaire, et où $\mathbb{M}_0^{(r)}$ sont des tenseurs de souplesse d'ordre 4 constants dans chaque phase (inconnus), et où $V^{(r)}$ est une fonction d'erreur. Les tenseurs $\check{\sigma}^{(r)}$ sont des contraintes résiduelles uniformes par phase (à choisir). La fonction erreur est telle que :

$$V^{(r)} \left(\check{\sigma}^{(r)}, \mathbb{M}_0^{(r)} \right) = \underset{\hat{\sigma}^{(r)}}{\text{Argmin}} \left\{ \tilde{u}_T \left(\hat{\sigma}, \check{\sigma}^{(s)}, \mathbb{M}_0^{(r)} \right) - u^{(r)} \left(\hat{\sigma}^{(r)} \right) \right\} \quad (1.16)$$

ou

$$\frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma} \left(\hat{\sigma}^{(r)} \right) - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma} \left(\check{\sigma}^{(r)} \right) = \mathbb{M}_0^{(r)} \left(\hat{\sigma}^{(r)} - \check{\sigma}^{(r)} \right). \quad (1.17)$$

L'Eq. (1.15) donne des relations supplémentaires reliant les variables $\hat{\sigma}^{(r)}$ aux variables $\check{\sigma}^{(r)}$ et $\mathbb{M}_0^{(r)}$ dans le composite linéaire de comparaison. La relation (1.15) peut être réécrite comme :

$$\tilde{u}(\bar{\sigma}) = \sum_{r=1}^N \left[u^{(r)} \left(\hat{\sigma}^{(r)} \right) - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma} \left(\check{\sigma}^{(r)} \right) : \left(\hat{\sigma}^{(r)} - \langle \sigma^{(r)} \rangle \right) \right]. \quad (1.18)$$

Le choix de $\mathbb{M}_0^{(r)}$ est discuté, par exemple dans [?]. Les équations (1.17) et (1.15) permettent de déterminer les variables inconnues $\hat{\sigma}^{(r)}$ et $\mathbb{M}_0^{(r)}$ pour tout choix de tenseur de référence $\check{\sigma}^{(r)}$. Dans [?] il est suggéré de choisir $\check{\sigma}^{(r)} = \bar{\sigma}^{(r)}$, ou, pour éviter certaines difficultés évoquées dans le même article, $\check{\sigma}^{(r)} = \bar{\sigma}$.

Cette méthode nécessite d'évaluer le tenseur de souplesse effectif du matériau linéaire de comparaison, avec une méthode d'homogénéisation linéaire analytique (Mori-Tanaka, modèle auto-cohérent, etc.).

Dans le cas des matériaux non linéaires, les estimations de comportement et les bornes analytiques sont d'une grande importance théorique et pratique lorsque celles-ci sont applicables. Cependant, en raison des difficultés inhérentes à la résolution des problèmes locaux non linéaires, ces solutions sont en général obtenues pour des hypothèses assez restrictives sur la morphologie de la microstructure et sur les lois de comportement utilisées, et sont insuffisantes pour être utilisées dans des calculs de structures, pour des chargements complexes arbitraires. Les méthodes d'homogénéisation numériques, développées depuis quelques années, permettent de dépasser ces limitations. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes représentatives de cette classe de techniques d'homogénéisation.

1.4.1.3 Méthode d'homogénéisation incrémentale par champ moyen

Les méthodes d'homogénéisation incrémentales sont des extensions de la formulation proposée par Hill [?] dans lesquelles les contraintes et les déformations sont reliées par une loi sous la forme :

$$\dot{\bar{\sigma}}(t) = \bar{\mathbb{C}}^{tan}(t) : \dot{\bar{\epsilon}}(t) \quad (1.19)$$

où $\dot{\bar{\sigma}}$ est le taux de contraintes macroscopiques, $\dot{\bar{\epsilon}}(t)$ le taux de déformations et $\bar{\mathbb{C}}^{tan}(t)$ est un opérateur tangent dépendant de l'état de déformation et de l'histoire du chargement. Pour le problème linéarisé, il est possible d'appliquer le principe de superposition et de calculer le module tangent $\bar{\mathbb{C}}^{tan}(t)$ à chaque itération, connaissant la loi de comportement non linéaire dans chaque phase et la déformation à l'itération précédente.

Pour un schéma d'homogénéisation donné (Mori-Tanaka, modèle auto-cohérent, etc.), connaissant l'incrément de déformation $\Delta\bar{\epsilon}$ appliqué sur le VER à un instant t^n , il est possible d'évaluer les modules tangents associés aux modèles non

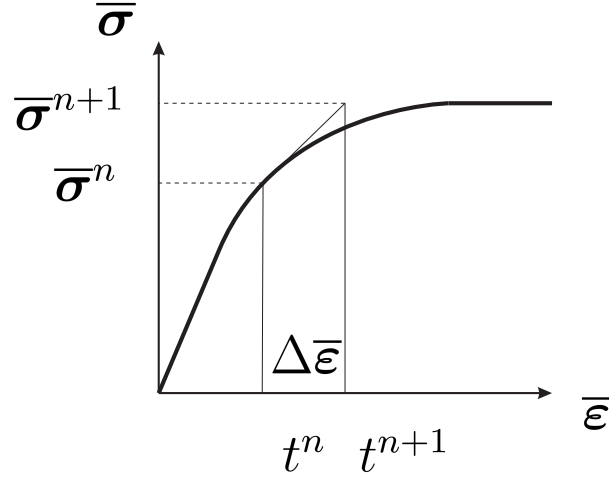


FIGURE 1.2 – Approche d’homogénéisation non linéaire incrémentale.

linéaires dans chaque phase (voir [? ? ?]) qui sont utilisés pour calculer le module effectif à l’instant t^{n+1} . Un schéma, proposé par Doghri et al. [?], consiste à chercher, pour un instant t^{n+1} , la déformation moyenne dans les inclusions. Un algorithme itératif est nécessaire pour calculer cette déformation moyenne. Soit $\langle \Delta \epsilon \rangle_{\Omega} = \Delta \bar{\epsilon}$ l’incrément de déformation, noté à l’instant t^n , $\langle \Delta \epsilon_n \rangle_{\Omega} = \Delta \bar{\epsilon}_n$. Pour une prédiction de $\langle \Delta \epsilon_n \rangle_{\Omega_1}$, on peut évaluer la moyenne dans la matrice $\langle \Delta \epsilon \rangle_{\Omega_0}$. A partir des modules tangents calculés dans chacune des phases, le tenseur d’Eshelby $\mathbb{E}$ peut être évalué (voir par exemple [?]). On peut alors calculer le tenseur de concentration $\mathbb{B}^{\epsilon}$ permettant de relier la déformation moyenne dans chacune des phases à la déformation macroscopique.

Pour un schéma de Mori-Tanaka, connaissant $\bar{\epsilon}_n$ et $\Delta \bar{\epsilon}_n$ et les variables d’histoire dans les phases au temps t^n , le problème consiste à déterminer la contrainte $\bar{\sigma}_{n+1}$ et le module tangent $\bar{\mathbb{C}}_{n+\alpha}^{tan}$, où $n + \alpha$ désigne le temps $t^{n+\alpha} = t^n + \alpha \Delta t$. L’algorithme est décrit plus en détails dans le chapitre 2, et sera étendu à une approche où les différents opérateurs seront calculés par éléments finis sur des VER dans les chapitres 3 et 4. Ces méthodes ont été étendues pour des techniques incrémentales sécantes pour le traitement des composites élastoplastiques dans [? ?] ou élastoplastiques avec endommagement dans [? ?].

1.4.2 Méthode FE²

Les méthodes d'homogénéisation numériques à deux niveaux ont connu un très grand succès ces dernières années (voir une revue dans [?]). Ce type de méthode permet de prendre en compte des comportements arbitrairement non linéaires, incluant des morphologies complexes, pouvant évoluer, ainsi que des couplages multiphysiques non linéaires. La méthode de base, supposant une séparation des échelles, est souvent mentionnée comme "approche du premier ordre" [?] est décrite ci-dessous.

La méthode multi-échelle numérique concourante est parfois désignée dans la littérature sous le nom de "Méthode d'Eléments Finis au carré" (FE² method) [?], ou "Eléments Finis multi-niveaux". L'idée de ce type de méthode est de coupler des problèmes mécaniques à deux échelles simultanément, les uns à l'échelle microscopique, l'autre à l'échelle macroscopique (voir Fig. 1.3). Ce type de technique suppose une séparation des échelles, ce qui signifie que les longueurs d'onde caractéristiques associées aux champs de déformations macroscopiques sont beaucoup plus grandes que la longueur caractéristique des champs à l'échelle microscopique. Le calcul macroscopique (à l'échelle de la structure) fournit les champs de déformations aux différents points de Gauss du calcul Eléments finis, à une itération de Newton-Raphson, permettant de définir des conditions aux limites pour tous les VER (Volume Elémentaires Représentatifs) correspondants (voir figure 1.3). La résolution de tous les problèmes non linéaires en chaque point de Gauss fournit par moyenne des contraintes les contraintes macroscopiques et permet de définir implicitement une relation de comportement contraintes/déformations à l'échelle macroscopique, pour des comportements et des microstructures arbitraires. Il est également possible de prendre en compte des microstructures dont la morphologie évolue. La méthode, nommée FE² par F. Feyel dans [?], a été proposée de façon indépendante par un certain nombre d'autres auteurs (voir par exemple [? ? ? ?]). Des extensions ont été développées récemment pour les cas de l'homogénéisation du second ordre [? ? ?], pour la réduction des calculs locaux en combinant

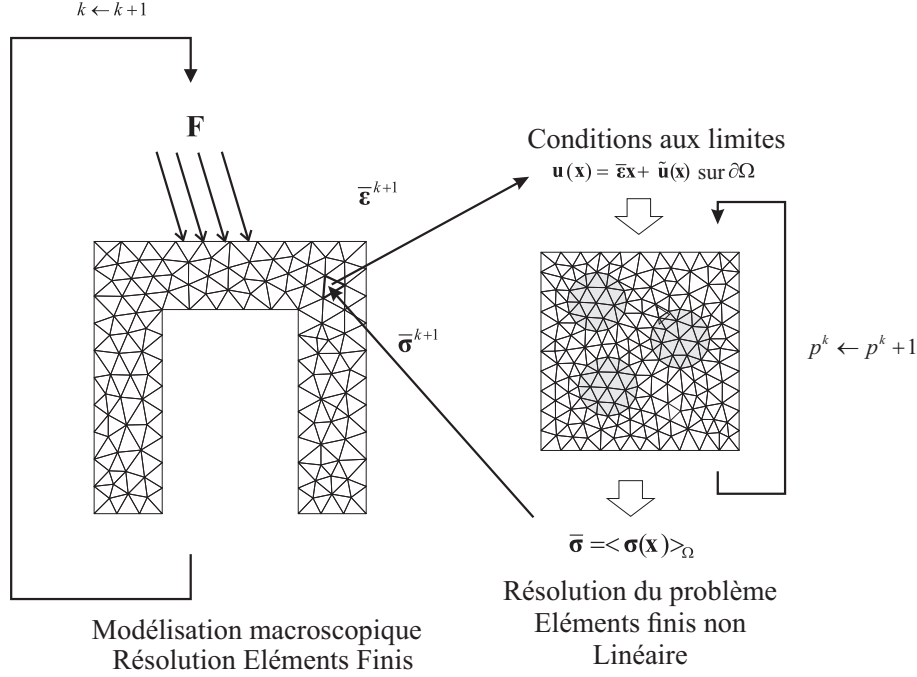


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de la méthode (FE²).

cette méthode avec des techniques de réduction de modèle par POD [? ?] ou pour le traitement des instabilités à plusieurs échelles [?].

Cette procédure ne nécessite pas de spécifier la loi de comportement macroscopique qui est déduite des non-linéarités dans le comportement de la microstructure associée. Les ingrédients de la méthode sont résumés ci-dessous :

1. Une modélisation du VER à l'échelle microscopique.
2. Des conditions aux limites imposées sur le VER en fonction des déformations macro en chaque point d'intégration.
3. Une résolution complète du problème non linéaire sur le VER en chaque point d'intégration, pour calculer par moyenne la contrainte macroscopique.
4. une résolution de type Newton-Raphson au niveau macro.

La résolution du problème macroscopique non linéaire nécessite d'évaluer l'opérateur tangent en chaque point d'intégration. Une façon d'évaluer ce tenseur est d'utiliser une méthode de perturbation (différences finies) à partir des calculs de contraintes moyennes sur le VER [?] :

$$\overline{C}_{ijkl}^{tan} \simeq \frac{\overline{\sigma}_{ij}(\overline{\varepsilon} + \delta\overline{\varepsilon}^{(kl)}) - \overline{\sigma}_{ij}(\overline{\varepsilon})}{\Delta\varepsilon^{(kl)}} \quad (1.20)$$

où $\delta\overline{\varepsilon}^{(kl)}$ désigne une perturbation sur la composante (kl) et $\Delta\varepsilon^{(kl)}$ l'amplitude de la perturbation. Ce point est une difficulté de la méthode car cette évaluation induit une augmentation importante du nombre de calculs locaux non linéaires à effectuer, qui motivera la méthode proposée dans cette thèse au chapitre 3.

Les méthodes de type FE² offrent l'avantage de fournir un cadre général pour tout type de comportement ou de morphologie, sans restriction. La méthode est très largement répandue, et a été récemment introduite dans des codes éléments finis généraux tels qu'Abaqus [?]. L'inconvénient majeur reste cependant la complexité des calculs numériques. En effets, le nombre de calculs non linéaires à effectuer dépend du nombre de points d'intégration de Gauss, et donc de la taille du maillage macroscopique. Pour cette raison, les calculs 3D sont prohibitifs à l'heure actuelle, et les problèmes mettant en jeu plus de deux échelles ne sont pas aujourd'hui envisageables.

Plusieurs extensions ont été proposées depuis, incluant : (a) la prise en compte du gradient de la déformation, ou techniques d'homogénéisation numériques du "second ordre" [? ? ? ? ?]; (b) les approches incluant des discontinuités à l'échelle macroscopique [?]; l'introduction de couplages multiphysiques [? ? ? ?], l'homogénéisation des coques et plaques non linéaires [? ? ?], les problèmes dynamiques [?] ou encore d'homogénéisation du contact [?]. Malgré leur indéniable utilité, les méthodes d'homogénéisation numériques induisent des coûts de calcul prohibitifs dans certains cas, spécialement pour les modélisations tridimensionnelles.

1.4.3 Méthode d'interpolation de bases de données

Pour réduire les coûts de calculs liés aux approches de type FE², des méthodes alternatives ont été introduites, dites "séquentielles" pour les problèmes non linéaires ou pour des comportements dépendant du temps. Une première approche directe, inspirée par les procédures d'identification expérimentales classiques, uti-

lise des tests virtuels sur des VERs numériques par calculs éléments finis pour identifier les paramètres de lois de comportement empiriques (voir par exemple les récentes contributions de Terada et al. [10]). Cependant, classer ces techniques dans les méthodes d'homogénéisation est discutable. Construire la loi de comportement effective sans connaissance a priori sur sa forme analytique est possible, mais dans un nombre restreint de cas. Une deuxième approche possible se base sur la construction d'une relation numérique entre les contraintes effectives et les déformations macroscopiques [11]. Ces méthodes peuvent être appliquées pour l'élasticité non linéaire ou pour la viscoélasticité linéaire, comme décrit ci-après. Une troisième classe de méthodologies, valides pour les matériaux viscoplastiques en petites déformations, utilise des calculs préliminaires pour construire une base de modes anélastiques (méthodes TFA et NTFA). Nous décrivons ces différentes techniques ci-dessous.

1.4.4 Approches séquentielles pour les matériaux hyperléastiques

1.4.4.1 Rappels d'homogénéisation en grandes déformations

Le lemme de Hill-Mandel stipule que si le VER est soumis à des conditions aux limites homogènes en déplacements ou périodiques, alors

$$\langle \mathbf{P} : \mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{P} \rangle : \langle \mathbf{F} \rangle. \quad (1.21)$$

avec $\mathbf{P}$ et $\mathbf{F}$ le premier tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur gradient de la déformation, respectivement. Une conséquence de ce lemme est que le premier tenseur de Piola-Kirchhoff effectif peut être défini par :

$$\bar{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P} \rangle = \frac{\partial \bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{F}})}{\partial \bar{\mathbf{F}}}, \quad (1.22)$$

où $\langle . \rangle$ est l'opérateur de moyenne défini sur le VER dans la configuration de référence et où $\bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{F}})$ définit la fonction de densité d'énergie ou potentiel élastique associé avec le matériau homogénéisé équivalent, défini par

$$\bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{F}}) = \inf_{\mathbf{F} \in \mathcal{K}^*(\bar{\mathbf{F}})} \langle \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \rangle = \inf_{\mathbf{F} \in \mathcal{K}^*(\bar{\mathbf{F}})} \sum_{r=1}^N c_r \langle \Psi^{*r}(\mathbf{F}) \rangle^r, \quad (1.23)$$

avec $\mathcal{K}^*$ l'ensemble des tenseurs de gradient de déformation cinématiquement admissibles, N est le nombre de phases et c_r sont les fractions volumiques des différentes phases. On peut montrer que $\bar{\Psi}^*$ est objective. Ainsi, $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}) = \bar{\Psi}^*(\bar{\mathbf{F}})$. Il est à noter que seuls $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{P}}$ peuvent être définis comme la moyenne de leurs quantités microscopiques. De plus, on a les relations :

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\bar{J}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{F}}^T, \quad (1.24)$$

avec $\bar{J} = \det \bar{\mathbf{F}}$. Une relation similaire à (1.22) peut être établie pour relier le second tenseur effectif des contraintes de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{S}}$ et le tenseur des déformations droit de Cauchy-Green $\bar{\mathbf{C}}$. En utilisant (1.22), on a

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} \right) : \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (1.25)$$

et

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} \right) = 2 \left(\bar{\mathbf{F}}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} \right), \quad (1.26)$$

où nous notons le produit $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$. Ainsi, on obtient

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{P}} = 2 (\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}) : \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}}. \quad (1.27)$$

Après quelques simplifications, et en utilisant la symétrie de $\bar{\mathbf{C}}$, on aboutit à

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}}. \quad (1.28)$$

La fonction de densité d'énergie effective $\bar{\Psi}$ du composite peut alors être définie comme

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}) = \inf_{\mathbf{C} \in \mathcal{K}(\bar{\mathbf{C}})} \langle \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \rangle = \inf_{\mathbf{C} \in \mathcal{K}(\bar{\mathbf{C}})} \sum_{r=1}^N c_r \langle \Psi^r(\mathbf{C}) \rangle^r, \quad (1.29)$$

où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des tenseurs de déformation admissibles $\bar{\mathbf{C}}$.

En d'autres termes, pour une déformation macroscopique donnée $\bar{\mathbf{C}}$, la valeur correspondante de $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})$ est déterminée en évaluant la moyenne spatiale des potentiels locaux $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})$, où $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ est un champ de déformation admissible. De la même manière, l'opérateur tangent effectif $\bar{\mathbb{L}}$ peut être exprimé par :

$$\bar{\mathbb{L}} = 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2}. \quad (1.30)$$

1.4.4.2 Méthode NEXP

Dans la méthode NEXP [? ?], le comportement effectif de matériaux hétérogènes non linéaires est obtenu par le biais d'une base de données décrivant le potentiel effectif $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})$, qui est évalué numériquement puis interpolé dans l'espace des déformations macroscopiques par

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}) \approx \sum_i N_i(\bar{\mathbf{C}}) \bar{\Psi}_i, \quad (1.31)$$

où N_i sont des fonctions d'interpolation dans l'espace des déformations macroscopiques. Pour cela, des calculs par éléments finis sont réalisés sur un VER en plusieurs points d'un domaine décrivant l'espace de déformation. Les déformations correspondantes sont alors appliquées sur le bord du VER et le problème local non linéaire est résolu par éléments finis. Une fois calculés et stockés, les valeurs discrètes du potentiel $\bar{\Psi}_i$ peuvent être interpolées pour obtenir les contraintes macroscopiques $\bar{\mathbf{S}}$ par

$$\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{C}}) \approx 2 \sum_i \frac{\partial N_i(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\Psi}_i. \quad (1.32)$$

Finalement, l'opérateur tangent, $\bar{\mathbb{L}}$, (nécessaire à l'échelle macroscopique en tout point d'intégration de la structure macro pour résoudre le problème dans un cadre de Netwon-Raphson), est évalué par

$$\bar{\mathbb{L}}(\bar{\mathbf{C}}) \approx 4 \sum_i \frac{\partial^2 N_i(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \bar{\Psi}_i. \quad (1.33)$$

Le problème local étant résolu dans le but de calculer le potentiel $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})$, il est utile de définir les conditions aux limites par rapport à $\bar{\mathbf{C}}$. Comme $\bar{\Psi}$ ne dépend pas des rotations $\bar{\mathbf{R}}$, on peut choisir $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$, qui conduit à $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{C}}^{1/2}$. Finalement, les conditions aux limites (par exemple périodiques) peuvent être appliquées comme

$$\Delta \mathbf{x} = \bar{\mathbf{C}}^{1/2} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{w} \text{ on } \partial \bar{\Omega}_0. \quad (1.34)$$

1.4.5 Méthode séquentielle pour l'homogénéisation des composites linéaires viscoélastiques

Pour les problèmes viscoélastiques, bien que le problème soit linéaire, la forme intégrale de la loi de comportement suffit à induire des difficultés importantes pour l'homogénéisation. Pour lever ce problème, les approches séquentielles numériques permettent de traiter l'homogénéisation des composites viscoélastiques dans le domaine temporel. Nous décrivons ci-dessous la méthode proposée par Tran et al. [?].

On considère un composite dont les phases sont linéaires et viscoélastiques, en supposant de petites déformations. Dans ce cas, il a été montré que le matériau macroscopique reste linéaire viscoélastique (voir ?) et est caractérisé de manière générale par :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) &= \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}(t-s) : \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)}{ds} ds \\ &= \int_0^t \bar{\Gamma}(t-s) : \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}(t) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(0), \end{aligned} \quad (1.35)$$

où $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(t) \rangle$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rangle$. Pour une morphologie de microstructure et des lois de comportement locales arbitraires, la forme analytique du tenseur de relaxation du quatrième ordre $\bar{\Gamma}(t)$ est inconnue. Cependant, une approximation numérique de $\bar{\Gamma}(t)$ peut être construite, comme proposé dans [?]. Pour cela, une

fonction de transformation numérique $[\Gamma]_{ijkl} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est introduite, et définie comme :

$$[\Gamma]_{ijkl}(t) \simeq \sum_{p=1}^M \phi_p^{ijkl}(t) \alpha_p^{ijkl}, \quad (1.36)$$

où M est le nombre de fonctions de forme non nulles au temps t et α_p^{ijkl} sont les composantes du tenseur de relaxation effectif échantillonné au temps t_p tel que :

$$[\Gamma]_{ijkl}(t^p) \equiv \alpha_p^{ijkl} \quad (1.37)$$

et $\phi_p^{ijkl}(t)$ est la fonction d'interpolation associé au pas de temps t^p . Dans l'Eq. (1.36), la sommation n'est pas réalisée sur les indices i, j, k et l . En choisissant

$$\bar{\epsilon}(t) = H(t) \bar{\epsilon}^{(ij)}, \quad (1.38)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside et $\bar{\epsilon}^{(ij)}$ est une déformation élémentaire définie ci-dessous, et en introduisant (1.38) dans (1.35), nous obtenons :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}(t-s) : \bar{\epsilon}^{(ij)} \delta(s) ds, \quad (1.39)$$

où $\delta(t)$ est la fonction de Delta Dirac. En utilisant la propriété

$$\int_{-\infty}^t f(t-s) \delta(s) ds = f(t), \quad (1.40)$$

nous obtenons finalement

$$[\bar{\Gamma}(t)]_{ijkl} = \frac{\sigma_{Mij}^{(kl)}(t)}{\bar{\epsilon}_0} = \frac{\langle \sigma_{mij}^{(kl)}(t) \rangle}{\bar{\epsilon}_0} \quad (1.41)$$

où $\sigma_{ij}^{(kl)}(t)$ est le tenseur des contraintes du second-ordre dans le VER obtenu par résolution numérique du problème de VER en temps en appliquant une déforma-

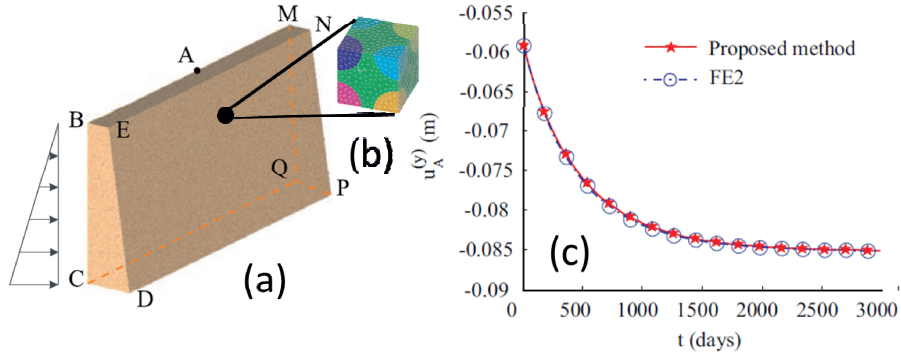


FIGURE 1.4 – Homogénéisation d’un matériau hétérogène viscoélastique par une approche d’homogénéisation numérique séquentielle [?]. (a) Structure. (b) VER. (c) Réponse de la structure à un chargement permanent dans le temps.

tion macroscopique de la forme :

$$\bar{\epsilon}^{(kl)} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_0 (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k), \quad k = 1, \dots, 3, \quad l = 1, \dots, 3. \quad (1.42)$$

Dans les Eqs. (1.41)-(1.42), $\bar{\epsilon}_0$ est une constante arbitraire, suffisamment petite pour maintenir l’hypothèse des petites déformations. Un algorithme simple peut alors être défini pour calculer la réponse à l’échelle d’une structure dans un cadre éléments finis (voir par exemple [?] pour plus de détails. Une illustration d’un calcul de structure hétérogène viscoélastique est fourni dans la figure 1.4.

1.4.6 Méthode NTFA

Dans cette approche, les constituants sont supposés être des matériaux standards généralisés (voir [?] ou [?]). En tout point de chaque matériau, le comportement est décrit par l’état de déformation infinitésimal ϵ et un ensemble de variables internes α décrivant les phénomènes irréversibles tels que la plasticité ou l’endommagement. Les contraintes et forces thermodynamiques sont données par les relations

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \epsilon}(\epsilon, \alpha), \quad \Xi = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}(\epsilon, \alpha). \quad (1.43)$$

L'évolution des variables internes est donnée par

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\psi}{\partial \Xi}(\Xi), \quad \text{ou} \quad \Xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}), \quad (1.44)$$

où φ et ψ sont des potentiels duaux convexes. Nous décrivons dans un premier temps brièvement la méthode TFA (Transformation Field Analysis), proposée initialement par Dvorak [?]. On considère les équations suivantes associées au problème local défini sur le VER défini dans un domaine ouvert Ω contenant des interfaces désignées collectivement par Γ :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma, \quad (1.45)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x})) \quad (1.47)$$

où (1.46) est associée à des conditions aux limites sur le bord du VER, pour une déformation macroscopique donnée $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et où $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ est le tenseur élastique, et $\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x})$ un champ de déformations anélastiques, dues aux phénomènes dissipatifs (plasticité, endommagement, etc.). En introduisant (1.47) dans (1.45) et en considérant (1.46), la solution en déformation du problème linéaire (1.45), (1.46), (1.47) peut être exprimée, grâce au principe de superposition, comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \int_{\Omega} \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.48)$$

Dans (1.48), $\mathbb{D}$ est un opérateur de Green du quatrième ordre défini sur Ω et $d\mathbf{y}$ désigne une intégration par rapport à la variable $\mathbf{y}$. Sous cette forme, en utilisant (1.47) et en exprimant la moyenne des contraintes $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle$, on aboutit à une expression dépendante du champ local anélastique complet $\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x})$ au niveau microscopique, correspondant à un nombre infini de variables internes pour la

loi de comportement à l'échelle macroscopique. L'idée de la méthode TFA est de réduire ce nombre de variables internes en décomposant $\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x})$ sous la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_r^{an} \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \quad (1.49)$$

où $\chi^{(r)}(\mathbf{x})$ est une fonction caractéristique telle que $\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 1$ dans la phase r et 0 dans le reste du domaine, et $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{an}$ un champ de déformations libres uniforme dans chaque phase.

En introduisant (1.49) dans le problème (1.45), (1.46), (1.47), $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ peut être décomposé comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{r=1}^N \mathbb{D}_r(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r^{an} \quad (1.50)$$

où $\mathbb{D}_r(\mathbf{x})$ sont des tenseurs du quatrième obtenus en résolvant le problème (1.45), (1.46), (1.47) pour $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ et pour des composantes unitaires de $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{an}$. En utilisant (1.47) et en prenant la moyenne spatiale sur Ω , on obtient la loi de comportement macroscopique suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbb{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{r=1}^N \bar{\mathbb{D}}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r^{an} \quad (1.51)$$

avec

$$\bar{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \mathbb{A}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.52)$$

et

$$\bar{\mathbb{D}}_r = \langle \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \{ \mathbb{D}_r(\mathbf{x}) - \mathbb{I} \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \} \rangle \quad (1.53)$$

avec $\mathbb{I}$ le tenseur identité du quatrième ordre. La loi de comportement dépend à présent d'un nombre fini N de variables internes, dont l'évolution est donnée par (voir [?]) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{an} = \frac{\partial \psi}{\partial \Xi^{an}} (\Xi_r^{an}, \Xi^\beta), \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_r = \frac{\partial \psi^{(r)}}{\partial \Xi^\beta} (\Xi_r^{an}, \Xi^\beta), \quad (1.54)$$

où

$$\Xi_r^{an} = \bar{\sigma}_r - \mathbf{X}_r, \quad \mathbf{X}_r = \frac{\partial (w^{an})^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{an}} (\boldsymbol{\varepsilon}_r^{an}), \quad (1.55)$$

$$\Xi_r^\beta = -\frac{\partial (w^\beta)^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{\beta}_r), \quad \bar{\sigma}_r = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega^{(r)}}. \quad (1.56)$$

Il a été montré que la méthode TFA donnait des résultats peu précis en pratique [?]. Une solution pour améliorer la qualité de l'approximation est de subdiviser les sous-domaines associés aux champs de déformations anélastiques uniformes, mais au prix d'un accroissement important du nombre de variables internes.

La méthode NTFA (Non Uniform Transformation Field Analysis) proposée par Michel et Suquet [?] remplace la décomposition (1.49) par une décomposition où les champs de déformations libres anélastiques sont non uniformes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{an}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_k^{an}(\mathbf{x}) \alpha_k. \quad (1.57)$$

Cette décomposition est complétée par plusieurs hypothèses sur les modes anélastiques, comme l'incompressibilité des modes plastiques ($tr(\boldsymbol{\varepsilon}_r^{an}(\mathbf{x})) = 0$), l'orthogonalité des modes ($\langle \boldsymbol{\varepsilon}_s^{an}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r^{an}(\mathbf{x}) \rangle = 0$, $s \neq r$) et la normalité de ceux-ci ($\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_r^{an})_{eq} \rangle = 1$), avec $(\cdot)_{eq}$ désignant la partie déviatorique d'un tenseur du second ordre.

Un modèle a été proposé dans [?] pour décrire l'évolution des variables internes. Les modes anélastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{an}(\mathbf{x})$ peuvent être déterminés par simulations numériques en appliquant des chargements représentatifs sur le VER. Une méthode efficace pour la sélection des modes est la méthode POD (Propper Orthogonal Decomposition) [?], qui permet de sélectionner les modes orthogonaux les plus représentatifs à partir d'une collection de modes échantillonnés [?]. L'évolution des variables internes est un point clé et délicat.

1.4.7 Calculs multi-échelles intensifs

D'autres solutions ont été proposées pour réduire les calculs dans le cadre des calculs de structures non linéaires hétérogènes à deux échelles, basées sur la distribution en parallèle des calculs ou par l'introduction de techniques de réduction de modèle. Par exemple, dans Matouš et al. [? ?], un code parallèle hiérarchique a été utilisé pour résoudre des problèmes d'endommagement dans un cadre de double échelle. D'autres techniques basées sur des calculs GPU et des méthodes de réduction de modèle ont été proposées par exemple par Fritzen et al. [?].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un état de l'art des méthodes d'homogénéisation a été présenté. Les méthodes analytiques et semi-analytiques fournissent des solutions rapides à calculer, mais sont limitées en termes de morphologies de microstructures et de comportements locaux. D'autre part, la seule méthode vraiment générale, la méthode numérique multi-niveaux (FE^2) pour traiter tous types de comportement local et de microstructure dans un cadre non linéaire nécessite des calculs numériques très coûteux. Les autres familles de méthodes passées en revue possèdent toutes les avantages et inconvénients des deux premières approches citées. Les approches incrémentales d'homogénéisation par champ moyen possèdent néanmoins l'avantage de permettre de travailler dans un cadre linéarisé et d'utiliser les outils des approches linéaires (analytiques et numériques). La motivation de ce travail est de proposer une nouvelle méthode alliant avantages des calculs numériques et minimisation des coûts de calculs en vue de permettre l'introduction des modèles construits dans un cadre de calcul de structure. Pour cela, nous explorerons donc le cadre des méthodes d'homogénéisation incrémentales avec une amélioration de la précision à l'aide de calculs éléments finis sur des VER. L'autre problématique peu traitée, et nécessaire pour développer ces méthodes, est de définir la taille du VER dans le cadre non linéaire lorsque les microstructures sont

aléatoires. Dans une première partie (chapitre 2), nous utiliserons les approches incrémentales semi-analytiques par champ moyen pour définir une démarche originale pour déterminer la taille de VER pour des composites élastoplastiques et élasto-viscoplastiques. Dans une seconde partie (chapitre 3), nous proposerons une nouvelle méthode d'homogénéisation numérique basée sur l'homogénéisation incrémentale et utilisant des calculs locaux par éléments finis. Dans les deux parties, les modèles développés seront utilisés ou inclus dans des approches de calculs de structures hétérogènes non linéaires.

Chapitre 2

Procédure de détermination de la taille du VER pour des composites non linéaires basée sur une méthode d'homogénéisation incrémentale

2.1 Introduction

Un concept fondamental dans l'homogénéisation des matériaux composites aléatoires est le volume élémentaire représentatif (VER). Cette notion permet de définir le comportement effectif des matériaux hétérogènes à partir de la détermination du domaine associé à la microstructure. Les propriétés ainsi déterminées peuvent être injectées dans un outil de calcul par éléments finis des structures.

Si cette notion de VER est aujourd'hui bien définie pour les composites linéaires aléatoires, de nombreuses questions restent sans réponse quand on considère les matériaux hétérogènes non linéaires. Une revue des différentes définitions du VER peut être trouvée dans [?] pour les matériaux linéaires et non linéaires. Plusieurs méthodes statistiques ont été proposées, incluant, parmi d'autres, les procédures de Kanit *et al.* [?], Gitman *et al.* [?], ou Pelissou *et al.* [?].

Une première classe de méthodes pour l'étude de la taille du VER inclut les approches basées sur l'homogénéisation analytique, limitées principalement aux cas linéaires. Ces techniques (voir par exemple [10, 11, 12]), ont été utilisées pour étudier des inclusions sphériques ou ellipsoïdales et ont été utiles dans certaines situations, pour déterminer la taille du VER par rapport à la caractéristique des inclusions.

Une seconde classe d'approches, basées sur des méthodes numériques telles que la MEF (voir, par exemple, parmi beaucoup d'autres, ([13, 14, 15, 16])), utilise des calculs sur une cellule unitaire et permet de déterminer la taille du VER via des analyses statistiques s'appuyant sur des calculs numériques. Ces techniques ont été appliquées principalement aux cas linéaires, et dans quelques études récentes aux cas de matériaux hétérogènes non linéaires.

Dans le cas linéaire, la détermination de la taille du VER peut être effectuée par analyse de la convergence statistique des paramètres effectifs par rapport à la taille de la cellule unitaire. Dans [17], Kanit *et al.* ont étudié les propriétés linéaires thermiques et élastiques de microstructures aléatoires polycristalins 3D. Dans [18], Ostoja-Starzewski *et al.* ont effectué des investigations sur les polycristaux aléatoires constitués de cristaux de formes cubiques. D'autres exemples dans le domaine de l'élasticité peuvent être trouvés dans [19, 20, 21, 22]. Des applications à l'os cortical, des modèles de dynamique moléculaire de supports polymériques poreux peuvent être trouvés dans [23, 24]. Dans [25], de nouveaux critères pour déterminer la taille du VER à matrice élastique aléatoire ont été proposés ainsi que des estimations pour les tailles du VER. Dans [26], une théorie stochastique d'homogénéisation a été introduites pour les composites élastiques anisotropes aléatoires qui ne peuvent pas être décrits en termes de leurs constituants et pour lesquels les méthodes classiques ne peuvent pas être appliquées, comme l'os cortical ou des membranes biologiques. Dans [27], une méthode utilisant le concept de périodisation de milieux aléatoires a été utilisée pour estimer les propriétés effectives des composites aléatoires en utilisant des petits volumes.

Dans le cas non linéaire, la plupart des méthodes proposées sont basées sur l'analyse de la convergence de la réponse effective (par exemple la contrainte homogénéisée) à un point de la courbe de chargement, par rapport à la taille [? ?]. Des études plus récentes ont analysé la convergence des paramètres identifiés liés à un modèle macroscopique empirique par rapport à la taille de cellule unitaire [? ?].

Dans cette thèse, une nouvelle méthodologie pour estimer la taille du VER pour les composites non linéaires est proposée, pouvant s'appliquer aux matériaux hétérogènes non linéaires, comme pour les applications en jeu dans le projet lié à cette thèse tels que les matériaux cimentaires renforcés de fibres composites où les composites à matrice polymère élastoplastiques et viscoplastiques. La technique combine une analyse statistique basée sur la convergence des paramètres macroscopiques identifiés et l'homogénéisation. Une technique d'homogénéisation incrémentale [?] par champ moyen est utilisée, ce qui permet de fournir la loi de comportement effectif du matériau. Ensuite, la convergence des paramètres associés au processus d'homogénéisation est analysée par rapport à la taille du VER à travers une mesure appropriée. L'avantage de cette méthodologie est double : (a) la taille du VER pour les matériaux non linéaires comme celles élasto-plastiques ou élasto-visco-plastique peut être estimée ; (b) les paramètres identifiés à partir du calcul du VER peuvent être utilisés pour effectuer des calculs de structure liés au matériau homogénéisé.

2.2 Revue de la méthode incrémentale utilisée dans l'homogénéisation

Les schémas d'homogénéisation incrémentaux sont des extensions de la formulation proposée par Hill [?] dans lequel les contraintes et les déformations macroscopiques sont reliées par la loi de comportement donnée sous la forme suivante :

$$\dot{\bar{\sigma}}(t) = \bar{\mathbb{C}}^{tan}(t) : \dot{\bar{\epsilon}}(t), \quad (2.1)$$

où $\dot{\bar{\sigma}}$ et $\dot{\bar{\epsilon}}(t)$ sont les taux de contraintes et de déformation, respectivement, et $\bar{\mathbb{C}}^{tan}(t)$ est l'opérateur tangent effectif en fonction de l'état de déformation réelle et de l'historique du chargement. Pour le problème linéarisé, il est possible d'appliquer le principe de superposition et de calculer l'opérateur tangent effectif $\bar{\mathbb{C}}^{tan}(t)$ à chaque itération, à partir de la connaissance de la loi de comportement non linéaire dans chacune des phases et de la déformation à la première itération. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^d$ associé au VER, d étant la dimension de l'espace. Le bord de Ω est notée $\partial\Omega$. Nous supposons que Ω contient deux phases, la matrice, associée à un domaine Ω_0 et l'inclusion, associée à un domaine Ω_1 . Les interfaces entre les phases sont supposées parfaitement délimitées.

Pour un schéma d'homogénéisation analytique donné (par exemple auto-cohérent, Mori-Tanaka, voir [?]), à partir d'un incrément de déformation $\Delta\bar{\epsilon}$ défini sur le VER à l'instant t^n , il est possible d'évaluer les modules tangents associés à la loi constitutive non linéaire dans chaque phase (voir par exemple [? ? ?], qui sont utilisés pour calculer le module tangent effectif à l'instant t^{n+1} . Par exemple, dans le schéma proposé par Doghri *et al.* [?], le problème consiste à déterminer à l'instant t^{n+1} la déformation moyenne dans les inclusions à chaque itération. Un algorithme itératif est alors nécessaire pour évaluer cette déformation moyenne. Soit $\langle\Delta\epsilon\rangle_\Omega = \Delta\bar{\epsilon}$ l'incrément de déformation, notée à l'instant t^n $\langle\Delta\epsilon_n\rangle_\Omega = \Delta\bar{\epsilon}_n$. Le symbole $\langle.\rangle_\omega = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega (.) d\Omega$ signifie la moyenne spatiale sur le domaine ω . La matrice et les inclusions sont associées à l'indice 0 et 1 respectivement. Les déformations moyennes dans la matrice et dans les inclusions sont notées $\langle\Delta\epsilon\rangle_{\Omega_0}$ et $\langle\Delta\epsilon\rangle_{\Omega_1}$ respectivement. Pour un nouvel incrément de $\langle\Delta\epsilon_n\rangle_{\Omega_1}$, la déformation moyenne de la matrice $\langle\Delta\epsilon\rangle_{\Omega_0}$ peut être calculée par :

$$\Delta\bar{\epsilon} = \langle\Delta\epsilon\rangle_{\Omega_0} (1 - f_1) + f_1 \langle\Delta\epsilon\rangle_{\Omega_1}, \quad (2.2)$$

où f_1 est la fraction volumique des inclusions. En utilisant l'expression du module tangent calculé dans chaque phase, le tenseur d'Eshelby $\mathbb{E}$ peut être évalué (voir par exemple [?]). Nous pouvons alors calculer les tenseurs de concentration $\mathbb{A}_r$ qui lie la déformation moyenne dans chaque phase r à la déformation macroscopique par :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_0} = [f_1 \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{I}]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.3)$$

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1} = \mathbb{A}_r : [f_1 \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{I}]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.4)$$

où $\mathbb{A}_r$ est exprimé par (1.4), avec $\mathbb{C}_0$ et $\mathbb{C}_1$ les modules tangents associés aux lois de comportement non linéaires dans chaque phase. Enfin, le module tangent effectif est donné par :

$$\bar{\mathbb{C}} = [f_1 \mathbb{C}_1 : \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{C}_0] : [f_1 \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{I}]^{-1}. \quad (2.5)$$

Pour le schéma de Mori-Tanaka, l'algorithme proposé par Doghri *et al.* dans [?] , est décrit comme suit : Soit $[t_n, t_{n+1}]$ un intervalle de temps. Etant donnés $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$, $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ et les variables internes dans les phases à l'instant t_n , le problème consiste à déterminer la contrainte globale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ et le module tangent $\bar{\mathbb{C}}_{n+\beta}$, où $n+\beta$ désigne l'instant $t^{n+\beta} = t^n + \beta \Delta t$. Les différentes étapes de l'algorithme sont résumées comme suit :

- Initialisation $\langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_1} = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$.
- **Tant que** $\|\mathbf{R}\| > TOL$, où TOL est la tolérance numérique :
 1. Itération k (L'indice supérieure k est omis pour des raisons de simplicité)
 2. Etant données $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_{\Omega_1}$ et $\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1}$, calculer, à partir de la loi de comportement non linéaire de l'inclusion, le module tangent $\mathbb{C}_1 \equiv \mathbb{C}_{1_{(n+1)}}$.

3. Calcul de la déformation moyenne dans la matrice par (2.2) :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_0} = \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - f_1 \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1}}{1 - f_1}. \quad (2.6)$$

4. Etant données $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_{\Omega_0}$ et $\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_0}$, calculer, à partir de la loi comportement non linéaire de la matrice, le module tangent $\mathbb{C}_0 \equiv \mathbb{C}_{0(n+1)}$.
5. Extraire la partie isotrope $\mathbb{C}_0^{iso}$ de $\mathbb{C}_0$ (voir la justification et les détails dans [?])
6. Calculer le tenseur d'Eshelby $\mathbb{E}$ pour $\mathbb{C}_0^{iso}$.
7. Calculer $\mathbb{C}_0$ et $\mathbb{C}_1$ à l'instant $t_{n+\beta}$:

$$\mathbb{C}_{i(n+\beta)} = (1 - \beta) \mathbb{C}_{i(n)} + \beta \mathbb{C}_{i(n+1)} \quad i = 0, 1, \quad \beta \in]0, 1]. \quad (2.7)$$

8. Calculer le tenseur de localisation $\mathbb{A}_r$ comme suit :

$$\mathbb{A}_r = \left\{ \mathbb{I} + \mathbb{E} : \left[\mathbb{C}_{0(n+\beta)}^{-1} : \mathbb{C}_{1(n+\beta)} - \mathbb{I} \right] \right\}^{-1}. \quad (2.8)$$

9. Vérifier la compatibilité de la déformation moyenne dans l'inclusion par le calcul du résidu :

$$\mathbf{R} = \mathbb{B}^\epsilon : [f_1 \mathbb{B}^\epsilon + (1 - f_1) \mathbb{I}]^{-1} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1}. \quad (2.9)$$

10. **SI** $\|\mathbf{R}\| \leq TOL$, on arrête le processus itératif.

11. **SINON Aller à** (1) avec une déformation moyenne dans l'inclusion

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1}^{k+1} = \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega_1}^k + \xi \mathbf{R}, \quad \xi \in]0, 1]. \quad (2.10)$$

– A la convergence, calculer le module tangent effectif $\bar{\mathbb{C}}_{n+\beta}$ et la contrainte macroscopique comme suit :

$$\bar{\mathbb{C}}_{n+\beta} = \left[f_1 \mathbb{C}_{1(n+\beta)} : \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{C}_{0(n+\beta)} \right] : [f_1 \mathbb{A}_r + (1 - f_1) \mathbb{I}]^{-1}, \quad (2.11)$$

$$\Delta\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}}_{n+\beta} : \Delta\bar{\epsilon}, \quad (2.12)$$

$$\bar{\sigma}_{n+\beta} = (1 - \beta)\bar{\sigma}_n + \beta\Delta\bar{\sigma}. \quad (2.13)$$

2.3 Méthodologie proposée pour déterminer la taille du VER

2.3.1 Description de la procédure

La procédure de détermination de la taille du VER est décrite comme suit :

Nous définissons un ensemble de volumes $\chi_V = \{V^k\}_{k=1}^K$, où K est déterminé par le critère de tolérance définie dans (2.17)-(2.21) et V^1 est la taille minimale du VER. Le volume est donné par $V = L^2 \times H$, L désignant la longueur du domaine carré associé à $\Omega(V)$ et H est longueur unitaire. Le bord de $\Omega(V)$ est noté par $\partial\Omega(V)$.

Pour chaque volume V^k , on suppose que la géométrie de la microstructure est modélisée par un vecteur de $\mathbb{R}^m$, de variables aléatoires avec la distribution de probabilité P_ξ dont le support est un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$. Les paramètres géométriques possibles aléatoires sont représentés par le vecteur aléatoire ξ . Les réalisations indépendantes $\chi_\xi = \{\xi^r\}_{r=1}^R$ du vecteur aléatoire ξ sont générées ici par une distribution uniforme d'inclusions centrées dans Ω , en rejetant les positions induisant une intersection avec les inclusions introduites précédemment. Une illustration d'une réalisation de la microstructure est fournie dans la figure 2.1. Les lois de comportement de chaque phase sont non-linéaires. Ensuite, R réalisations de la morphologie de la microstructure sont générées, R étant déterminé par le critère défini en (2.22). Pour chaque réalisation r , un calcul par éléments finis direct est effectué, à partir d'un historique de chargement macroscopique $\bar{\epsilon}(t)$ sur le VER à travers des conditions aux limites périodiques :

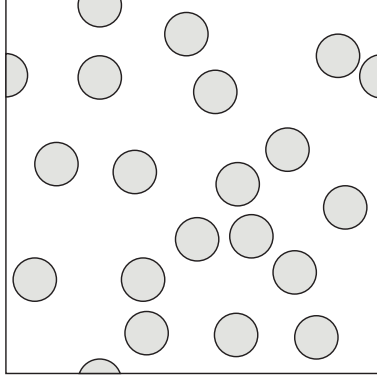


FIGURE 2.1 – Exemple de réalisation de la microstructure

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega(V^k), \quad (2.14)$$

avec $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ une fluctuation périodique. En définissant une discrétisation en temps $\mathcal{T} = [t^1, t^2, \dots, T]$ et en résolvant le problème non-linéaire pour $t \in [0, T]$, la réponse de contrainte effective est calculée par :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t) = \frac{1}{V^k} \int_{\Omega(V^k)} \boldsymbol{\sigma}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t, \mathbf{x}) d\Omega, \quad (2.15)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t, \mathbf{x})$ est la contrainte locale dans le VER à l'instant t , pour le volume V^k et pour la réalisation r . Cette solution constitue la solution de référence pour l'ensemble $\{k, r\}$. Ensuite, en choisissant une loi empirique appropriée définie par les P coefficients $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P\}$, la procédure incrémentale décrite dans la section précédente est suivie, où le comportement des inclusions est déterminé par les valeurs fixes de coefficients, mais où le comportement de la matrice est associé avec les coefficients $\boldsymbol{\alpha}$. La réponse en contrainte macroscopique peut être évaluée de manière efficace par (2.13) et est notée $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t)$.

Ensuite, les coefficients $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}^r, V^k)$ sont ajustés de manière à minimiser la fonction d'erreur :

$$e = \int_0^T \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(V^k, \boldsymbol{\xi}^r, t)\|^2 dt, \quad (2.16)$$

avec $\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e} : \mathbf{e}$. Pour un volume donné V^k , l'opération est répétée pour R réalisations, jusqu'à atteindre le critère de convergence, définie dans la section

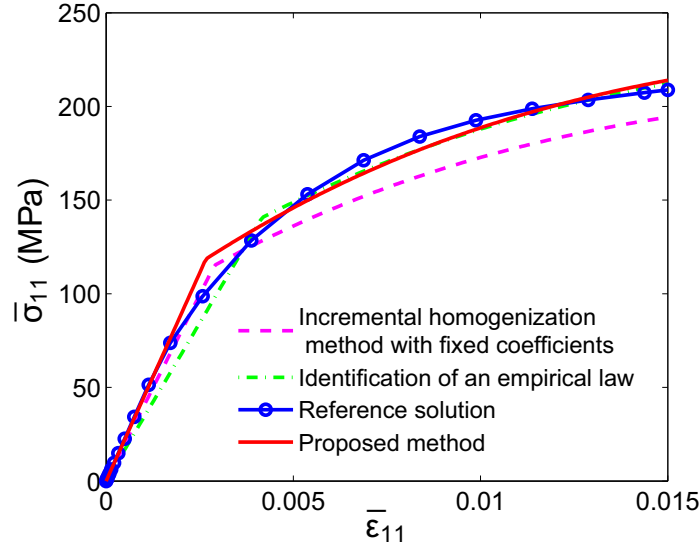


FIGURE 2.2 – Identification des paramètres numériques α par 3 approches pour un comportement élasto-plastique, et une fraction volumique $f = 0.5$.

suivante. Les paramètres convergents associés relatifs à la loi de comportement de la matrice pour le schéma d'homogénéisation incrémentale sont désignés par $\alpha(V^k)$.

Ensuite, le volume est augmenté à V^{k+1} et les étapes précédentes sont répétées. Enfin, la convergence est vérifiée par rapport au volume k , défini dans la section suivante. Le volume associé à la convergence par rapport à la taille K et au nombre des réalisations R fournit une estimation de la taille du VER, noté $V = V^{K,R}$.

2.3.2 Critère de convergence

2.3.2.1 Convergence des paramètres empiriques pour un volume donné

Pour un volume donné V^k , la convergence de P paramètres $\alpha_j(V^k)$, $j = 1, \dots, P$ est déterminée par un critère simple, défini par :

$$\epsilon_{rel} = \frac{2D_{\alpha}^j}{M_{\alpha}^j \sqrt{R}}, \quad (2.17)$$

où R désigne le nombre des réalisations indépendantes pour le volume V^k fixe, pour la réalisation r . Soit χ_α^j le vecteur regroupant les R réalisations indépendantes des paramètres α_j :

$$\chi_\alpha^j = \{\alpha_j^1(V^k), \alpha_j^2(V^k), \dots, \alpha_j^R(V^k)\}. \quad (2.18)$$

Dans (2.17), M_α^j et D_α^j représentent la moyenne et l'écart-type de α_j respectivement :

$$M_\alpha^j [\chi_\alpha^j] = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \alpha_j^r(V^k) \equiv \mu^j, \quad (2.19)$$

$$D_\alpha^j [\chi_\alpha^j] = \sqrt{M_\alpha^j [(\chi_\alpha^j - \mu^j)^2]}. \quad (2.20)$$

Le critère de convergence est choisi de telle sorte que :

$$\epsilon_{rel} \leq \epsilon_{rel}^*, \quad (2.21)$$

où ϵ_{rel}^* est une erreur de tolérance donnée. Dans notre travail, nous avons choisi $\epsilon_{rel}^* = 0.05$.

2.3.2.2 La convergence des paramètres empiriques par rapport au volume

Plusieurs approches ont été proposées précédemment pour déterminer les critères de convergence relatifs à la convergence par rapport au volume du VER, et les estimations du volume du VER associé (voir Kanit *et al.* [?], Gitman *et al.* [?], ou Pelissou *et al.* [?]). Dans [?], l'estimation de la variance par rapport à la taille du volume a été modélisée par une loi de puissance, ce qui nécessite la détermination d'une métrique appropriée. Dans notre travail, la convergence de $\alpha(V)$ est simplement estimée par une analyse de convergence numérique par rapport à V comme suit :

$$\frac{\|\alpha(V^{k+1}) - \alpha(V^k)\|}{\|\alpha(V^{k+1})\|} < \delta \quad (2.22)$$

où δ est un paramètre de tolérance.

Remarque Une approche plus simple aurait pu être encore proposée, consistant à identifier directement les paramètres d’une loi empirique choisie pour le composite homogénéisé, sans utiliser la procédure d’homogénéisation incrémentale pour obtenir $\hat{\sigma}(V^k, \xi^r, t)$. Cependant, cette approche présente deux inconvénients : (a) tout d’abord, sans aucune connaissance de la loi constitutive effective, la plage de variation des paramètres servant à l’identification peut être très grande, ce qui conduit à des calculs lourds associés à minimiser (2.16) ; (b) une loi de comportement classique peut conduire à des résultats éronés par rapport à la solution de référence, comme illustré ci-dessous dans la figure 2.2. Une autre option aurait été d’analyser la réponse en termes de contrainte macroscopique du composite en appliquant directement la procédure d’homogénéisation incrémentale, et en utilisant une loi de comportement avec des valeurs fixes pour la matrice. Comme indiqué ci-dessous, cela peut également conduire à des résultats éronés par rapport la solution de référence. À titre d’illustration, nous comparons dans la figure 2.2 la réponse en terme de contraintes effectives obtenu par un calcul direct par éléments finis (solution de référence) pour le composite non linéaire décrit dans 2.4 avec les estimations suivantes : i) par application directe de la procédure incrémentale ; ii) par identification avec une loi de comportement empirique sans utiliser le schéma d’homogénéisation incrémentale et iii) par application du schéma proposé d’homogénéisation incrémentale corrigé. On peut noter que la dernière solution est la plus proche de la solution de référence. Le cas étudié correspond au cas des inclusions élastiques dans une matrice élasto-plastique, avec une fraction volumique $f = 0.5$ et des paramètres du matériau fournis dans le tableau 2.1, sauf que le module d’Young des inclusions et la matrice sont 300 GPa et 15 GPa, respectivement. De plus, cette dernière stratégie est aussi la plus efficace, car dans ce cas, la plage de variation des paramètres à identifier peut être choisie comme beaucoup plus étroite.

2.4 Exemples numériques

Pour les deux exemples qui suivent, un VER 2D est considéré, contenant des fibres cylindriques réparties de façon aléatoire, comme représenté sur la figure 2.1. Les fibres ne peuvent pas s'interpénétrer. Nous avons étudié deux comportements de la matrice : élasto-plastique et élasto-visco-plastique. Pour chacun des deux cas, deux fractions volumiques sont étudiées : $f = 0.3$ et $f = 0.5$. Pour un nombre donné de fibres et une fraction volumique donnée, on définit la taille du VER comme étant la longueur d'une arête du domaine carré contenant les fibres, $L = \sqrt{(\pi N)/f}D/2$, D étant le diamètre des inclusions.

2.4.1 Composite avec matrice élasto-plastique

Dans le premier exemple, la matrice est élasto-plastique avec écrouissage isotrope non linéaire. La déformation est supposée composée d'une partie élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et d'une partie plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.23)$$

La loi de comportement locale est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.24)$$

avec

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbb{I}, \quad (2.25)$$

où $(\mathbb{I})_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, avec λ et μ les paramètres de Lamé. Dans le cadre de la théorie J_2 , la réponse est supposée élastique si

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y - R(p) \leq 0 \quad (2.26)$$

où $J_2(\boldsymbol{\sigma}) = (\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s})$, $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma})$, $Tr(\cdot)$ est l'opérateur trace, σ_Y est la limite d'élasticité, $R(p)$ est la contrainte d'écrouissage et p est la déformation plastique

	Matrice	Inclusion
Module d'Young E (MPa)	15000	300000
Coefficient de Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	80	
Module d'écrouissage σ_∞ (MPa)	60	
Exposant d'écrouissage m	75	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	

TABLE 2.1 – Paramètres de matériau pour la matrice et des inclusions pour le modèle élasto-plastique.

équivalente cumulée exprimée par :

$$p(t) = \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

avec $\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)^{1/2}$.

L'évolution de la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est donnée par la loi normale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.28)$$

Dans ce travail, la déformation d'écrouissage est supposée sous la forme suivante :

$$R(p) = kp + \sigma_\infty (1 - e^{-m\alpha}) \quad (2.29)$$

où k est le module d'écrouissage linéaire, σ_∞ est le module d'écrouissage et m est l'exposant d'écrouissage. Les valeurs numériques des paramètres sont indiquées dans le tableau 2.1.

Comme décrit dans les sections précédentes, les calculs par éléments finis sont réalisés en imposant une charge de traction $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_{11}(t)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ sur le VER, afin d'avoir une solution de référence. Quelques illustrations des champs de contraintes de Von-Mises pour 4 et 144 inclusions, et pour des fractions volumiques $f = 0.3$ et $f = 0.5$ sont montrées dans les figures 2.3 et 2.4. Nous avons observé des bandes de cisaillement très localisées pour les petites valeurs de L/D . Cependant, pour des valeurs beaucoup plus grandes de L/D , ces bandes existent mais restent

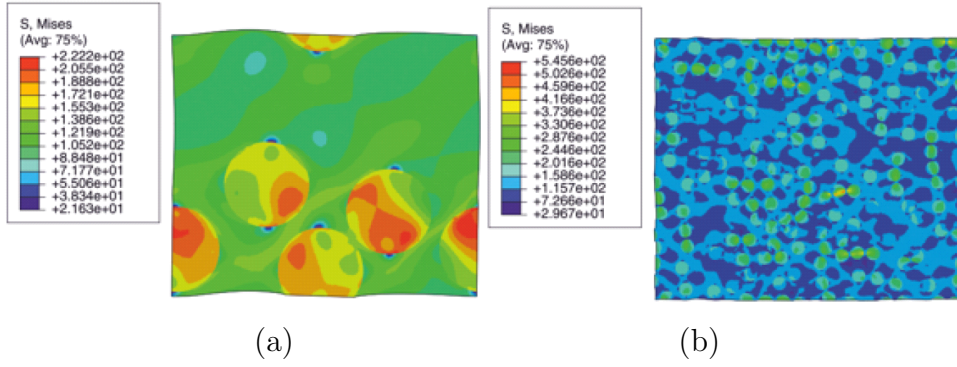


FIGURE 2.3 – Composite élasto-plastique : champs de contraintes de Von-Mises dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 3.23$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 19.41$.

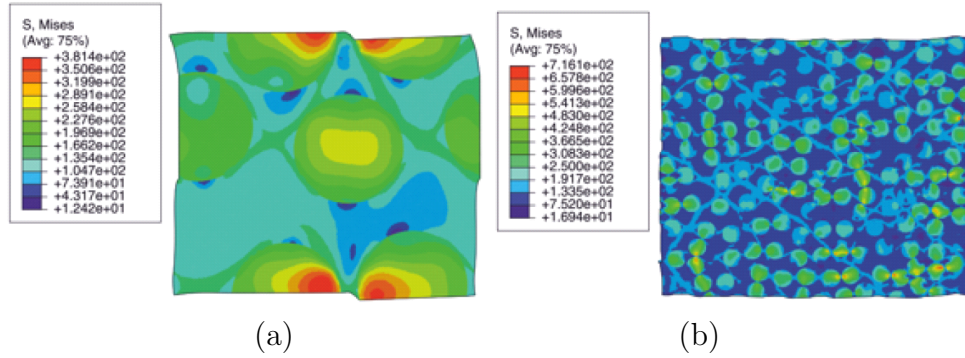


FIGURE 2.4 – Composite élasto-plastique : champs de contraintes de Von-Mises dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.5$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 2.5066$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 15.03$.

limitées et sont stoppées par les inclusions environnantes. Ceci induit un manque d’ergodicité du processus, qui nécessite des tailles élevées de VER (rapport L/D) pour obtenir des valeurs des paramètres à la convergence, comme le montre les figures suivantes. Ce phénomène a également été montré dans F. Fritzen *et al.* [?].

La procédure décrite dans la section 2.3 est effectuée dans les deux cas, $f = 0.3$ et $f = 0.5$. Les convergences statistiques des paramètres σ_Y , σ_∞ , m and k sont représentées par les figures 2.5-2.6. Les erreurs relatives ϵ_{rel}^* ont été choisies comme suit : $\epsilon_{rel}^* = 0.02$, $\epsilon_{rel}^* = 0.02$, $\epsilon_{rel}^* = 0.03$ et $\epsilon_{rel}^* = 0.04$.

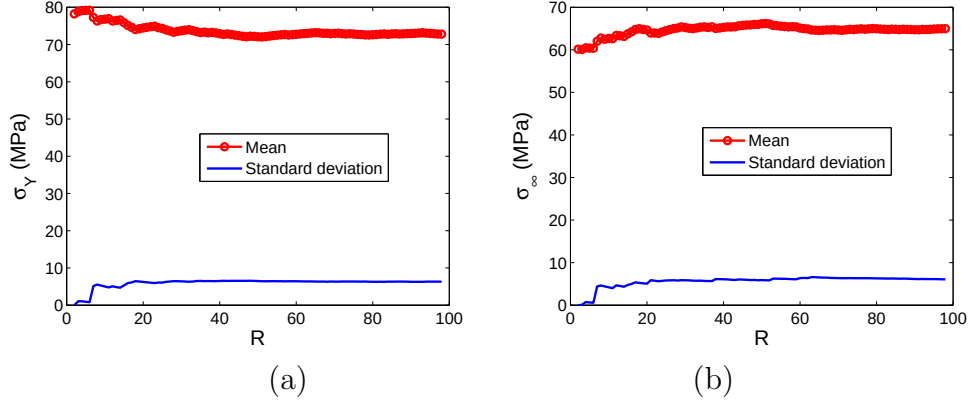


FIGURE 2.5 – Composite élasto-plastique, $f = 0.3$: convergence statistique des paramètres : (a) σ_Y et (b) σ_∞ pour la taille de VER fixée à $L/D = 3.23$.

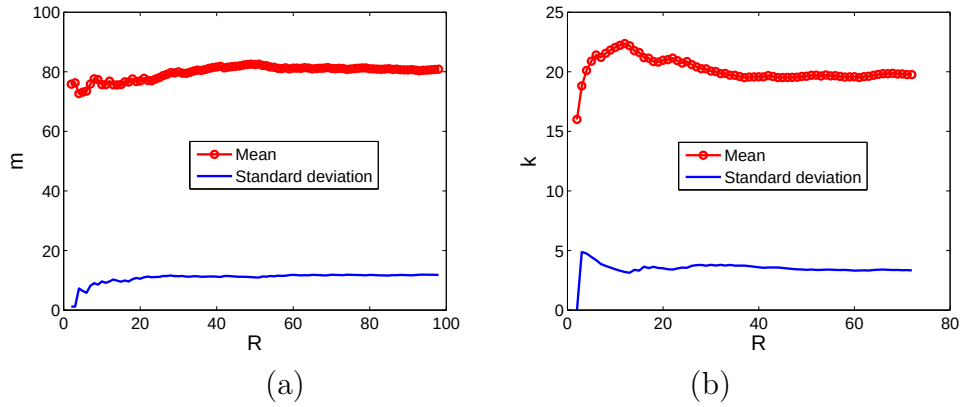


FIGURE 2.6 – Composite élasto-plastique, $f = 0.3$: convergence statistique des paramètres : (a) m et (b) k pour la taille de VER fixée $L/D = 3.23$.

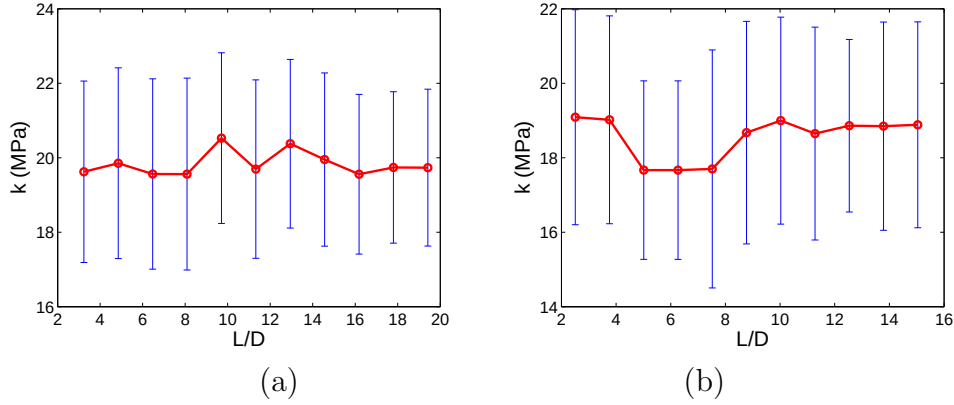


FIGURE 2.7 – Composite élasto-plastique : convergence du paramètre k par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

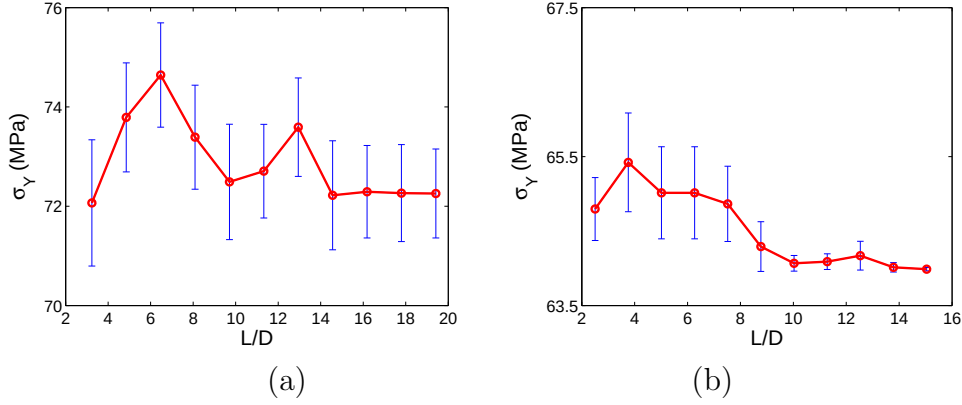


FIGURE 2.8 – Composite élasto-plastique : convergence du paramètre σ_Y par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

Dans les figures 2.7-2.10, la convergence des paramètres par rapport à la taille du VER L/D est représentée. Pour chaque valeur de L/D , nous avons rapporté les valeurs de convergence en fonction du nombre de réalisations R .

Dans le cas de la fraction volumique $f = 0.3$, on observe une convergence des différents paramètres pour une taille de VER d'environ $L/D = 17 - 18$. Dans le cas $f = 0.5$, la taille est à peu près de $L/D = 14 - 15$.

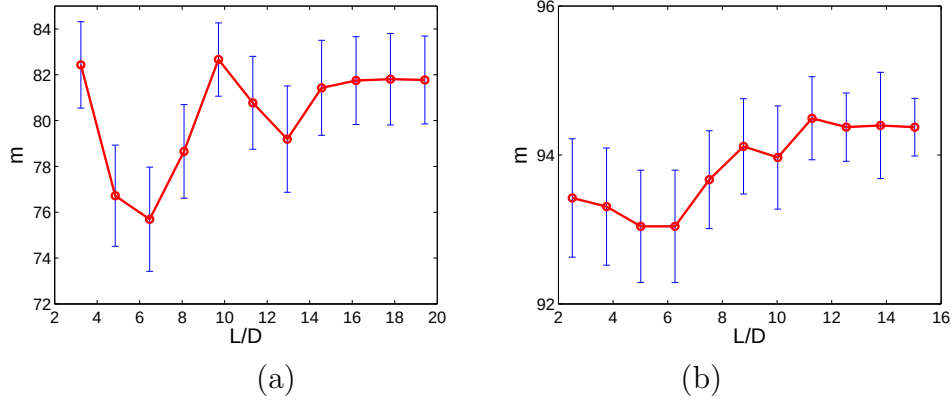


FIGURE 2.9 – Composite élasto-plastique : convergence de paramètre m par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

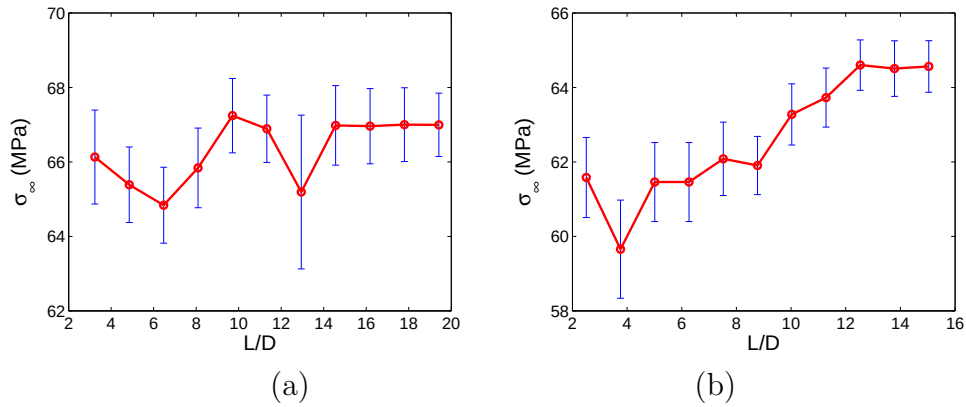


FIGURE 2.10 – Composite élasto-plastique : Convergence de paramètre σ_∞ par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

2.4.2 Composite avec matrice élasto-viscoplastique

Dans le deuxième exemple, la matrice est supposée avoir un comportement élasto-visco-plastique. La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ est supposé être la somme d'une partie élastique et une partie viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}. \quad (2.30)$$

Les effets visqueux ne sont considérés que dans le domaine de plasticité. L'évolution de la déformation viscoplastique est donnée par la loi d'écoulement :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.31)$$

et les contraintes vérifient (2.26). Dans ce travail, la loi de Norton définie ci-dessous [?] a été choisie pour décrire l'évolution de $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$:

$$\dot{p} = \frac{\sigma_Y}{\eta} \left(\frac{f}{\sigma_Y + \sigma(p)} \right)^s, \quad (2.32)$$

où η est le coefficient viscoplastique de Norton. Ce paramètre indique la sensibilité viscoplastique du matériau à la vitesse de déformation, σ_Y est la limite d'élasticité, s est l'exposant viscoplastique et f est la partie viscoplastique de la contrainte, définie comme suit :

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y - R(p). \quad (2.33)$$

Les valeurs numériques de paramètres sont indiquées dans le tableau 2.2.

Ici encore, la procédure décrite dans la section 2.3 a été utilisée. Les illustrations des contraintes de Von-Mises obtenues lors du calcul de la solution de référence

	Matrice	Inclusion
Module d'Young E (MPa)	15000	300000
Coefficient de Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	80	
Module d'écrouissage σ_∞ (MPa)	60	
Exposant d'écrouissage m	75	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	
Coefficient viscoplastique η	2	
Exposant viscoplastique s	100	

TABLE 2.2 – Paramètres du matériau pour la matrice et les inclusions pour le modèle élasto-viscoplastique

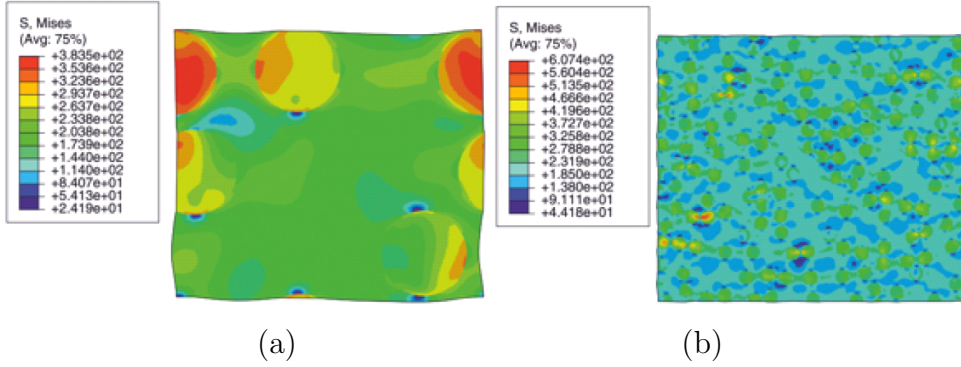


FIGURE 2.11 – Composite élasto-viscoplastique : champs de contraintes de Von Mises dans le cas d'une fraction volumique $f = 0.3$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 3.23$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 19.41$

sont représentés par les figures 2.11 et 2.12, pour $f = 0.3$ et $f = 0.5$ et pour les cas $N = 4$ et $N = 144$ inclusions.

Dans le cas d'un composite élasto-viscoplastique, on observe également des bandes de cisaillement, qui se propagent à l'extérieur de la cellule pour les petites tailles L/D et sont bloqués pour les grandes tailles. Cependant, ces bandes sont beaucoup moins localisées dans le cas d'un composite viscoplastique et induisent une convergence plus rapide par rapport à la taille L/D , et conduisent ainsi à de plus petites tailles de VER.

Dans les figures 2.13-2.18, la convergence des paramètres par rapport à L/D est représentée comme dans l'exemple précédent.

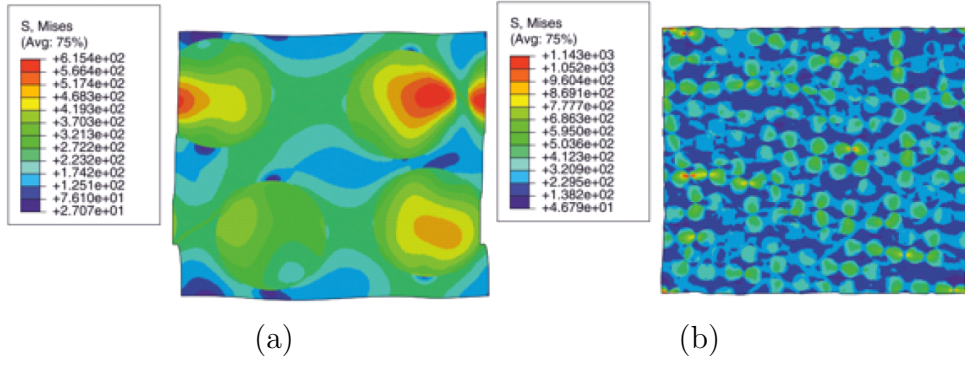


FIGURE 2.12 – Composite élasto-viscoplastique : champs de contraintes de Von Mises dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.5$: (a) 4 inclusions, correspondant à $L/D = 2.5066$; (b) 144 inclusions, correspondant à $L/D = 15.03$

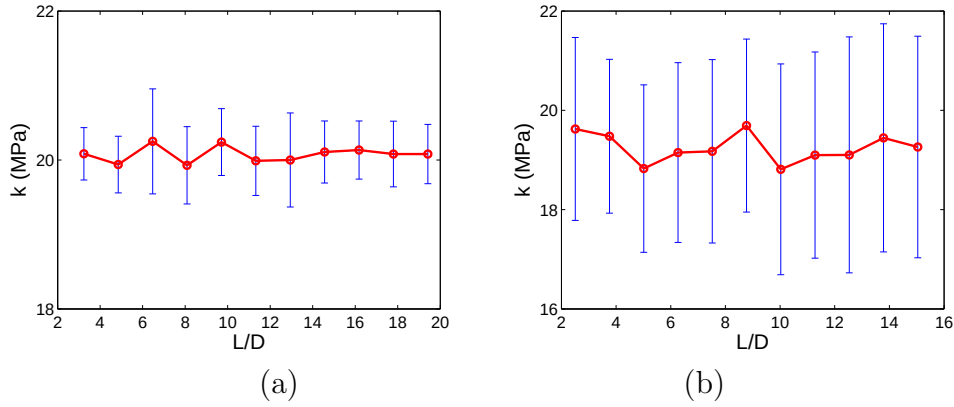


FIGURE 2.13 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre k par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

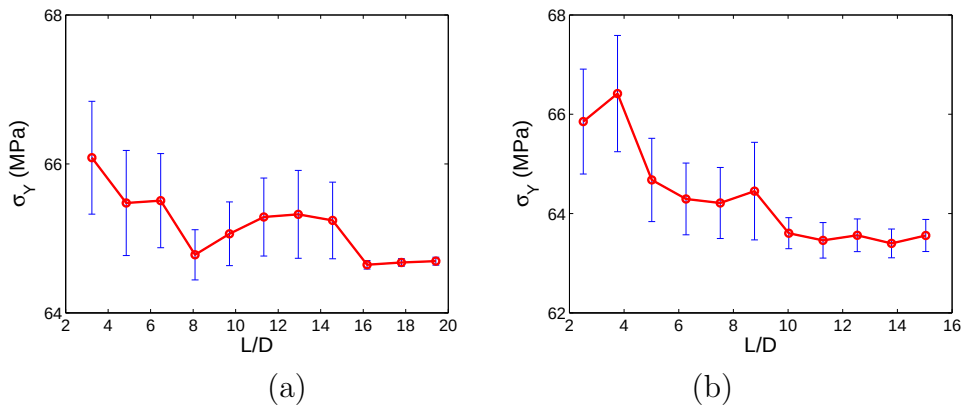


FIGURE 2.14 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre σ_Y par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

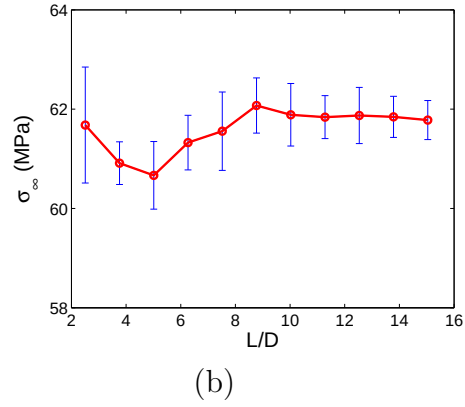
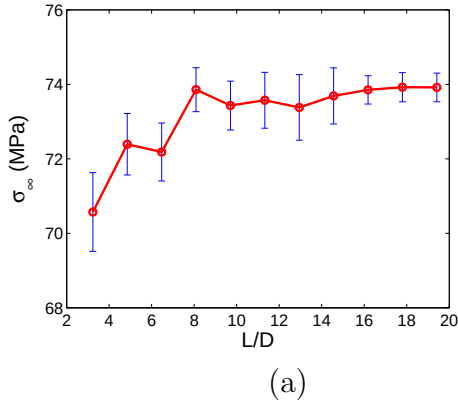


FIGURE 2.15 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre σ_∞ par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

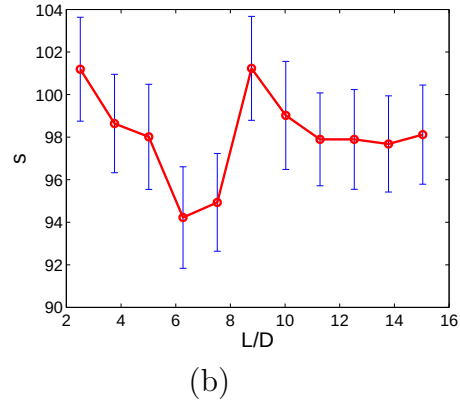
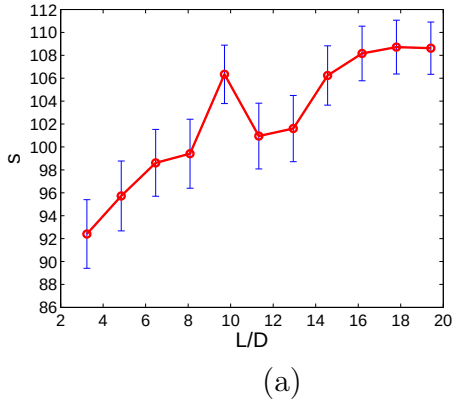


FIGURE 2.16 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre s par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

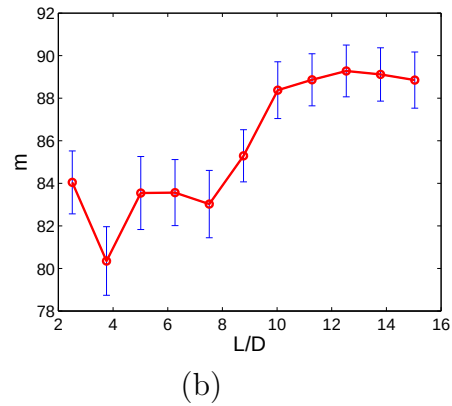
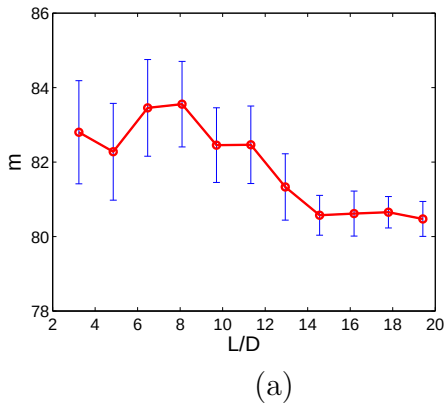


FIGURE 2.17 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre m par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

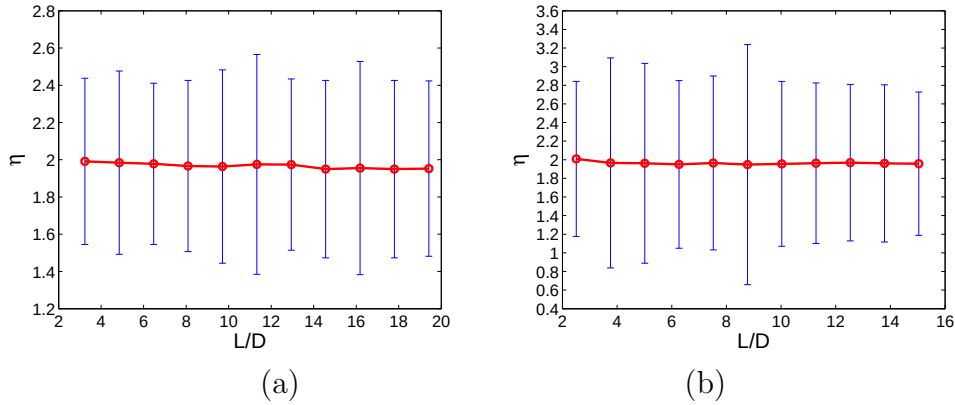


FIGURE 2.18 – Composite élasto-viscoplastique : convergence du paramètre η par rapport au volume du VER, ou de manière équivalente par rapport à L/D ; (a) fraction volumique $f = 0.3$; (b) fraction volumique $f = 0.5$.

On peut noter que la convergence du coefficient d'écrouissage k et du coefficient viscoplastique η est très rapide par rapport à la taille L/D , tandis que les autres coefficients convergent beaucoup plus lentement. Enfin, on remarque que la taille du VER L/D pour laquelle la convergence est observée par rapport à l'ensemble des paramètres dans ce cas est d'environ $L/D = 14 - 15$. La rapidité du processus de convergence dans le cas des composites avec une matrice élasto-visco-plastique peut être expliquée par le fait qu'il y a moins de localisation dans la matrice par rapport au cas de composites élasto-plastiques.

2.5 Application de la méthodologie proposée pour le calcul des structures non linéaires hétérogènes

Dans la partie précédente, la méthodologie que nous avons proposée permet de déterminer la taille de VER pour des matériaux non linéaires, tels qu'élastoplastiques ou élasto-viscoplastiques. Comme nous l'avons noté, les coefficients, convergés vis-à-vis de cette taille sont associés à la loi de comportement macroscopique, peuvent alors être utilisés pour réaliser un calcul de structure. Notons que les lois obtenues ne sont pas des formes empiriques mais des paramètres d'une loi incrémentale d'homogénéisation, fournissant une loi de comportement

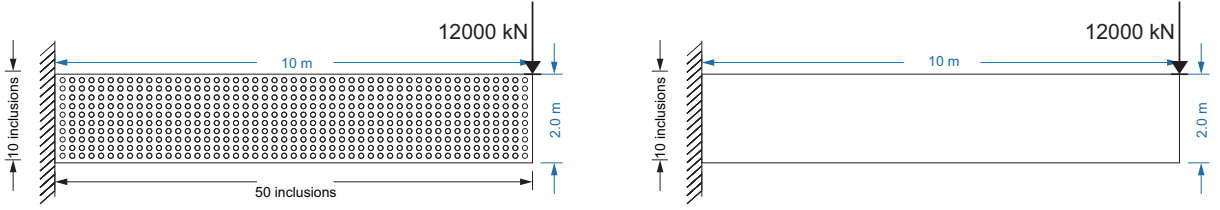


FIGURE 2.19 – (a) géométrie du modèle complet et (b) géométrie du modèle homogénéisé dans le cas d’une fraction volumique des inclusions de 0.3

plus précise que par simple identification des coefficients de la loi empirique tout en restant rapide à évaluer. Nous utilisons donc la loi incrémentale construite au travers de l’étude de convergence de ces paramètres pour réaliser des calculs de structures, en introduisant la loi obtenue dans le logiciel Abaqus. Nous évaluons la qualité de la réponse de la structure hétérogène en comparant le modèle homogénéisé obtenu avec des calculs de structures complets, où toutes les inclusions sont décrites explicitement et maillées dans le modèle éléments finis. Nous utilisons également le modèle construit pour effectuer des analyses de sensibilité de la réponse non linéaire de la structure hétérogène par rapport à certains paramètres microstructuraux tels que la fraction volumique des inclusions ou les contrastes de rigidité entre phases.

2.5.1 Influence de la fraction volumique des inclusions dans le VER sur le résultat de calcul des structures

On considère une structure hétérogène constituée d’un matériau composite formé d’une matrice élastoplastique et d’inclusions cylindriques, dont la géométrie et les conditions aux limites sont représentées dans les figures 2.19 et 2.20, pour des fractions volumiques d’inclusions $f = 0.3$ et $f = 0.5$, correspondant aux VER étudiés dans la partie précédente pour les cas élastoplastiques. Les paramètres du matériau hétérogène sont donnés dans le tableau 2.1. Les paramètres du matériau homogénéisés ou les paramètres identifiées de la matrice sont donnés dans le tableau 2.3.

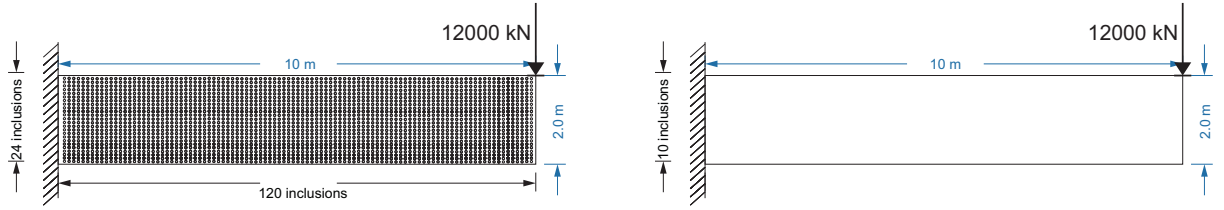


FIGURE 2.20 – (a) géométrie du modèle complet et (b) géométrie du modèle homogénéisé dans le cas d’une fraction volumique des inclusions de 0.5

Fraction volumique	0.3	0.5
Module d’Young E (MPa)	14337	14738
Coefficient de Poisson ν	0.19	0.20
Limite d’élasticité σ_Y (MPa)	72.21	74.35
Module d’écrouissage σ_∞ (MPa)	67.57	61.16
Exposant d’écrouissage m	79.5	77.23
Module d’écrouissage linéaire k (MPa)	19.97	20.26

TABLE 2.3 – Paramètres identifiés du matériau de la matrice pour le modèle élasto-plastique dans le cas des fractions volumiques des inclusions de 0.3 et de 0.5.

Afin d’évaluer la qualité de l’approximation construite, nous menons des calculs complets non linéaires où toutes les hétérogénéités sont explicitement maillées.

Dans cet exemple, nous étudions le déplacement et la contrainte en un point d’extrémité de la poutre. Les champs de déplacement et de contrainte dans la poutre sont donnés dans les figures 2.21-2.24.

Les courbes déplacement-chargeement dans les calculs complets et modèle homogène pour des fractions volumiques de 0.3 et de 0.5 sont donnés dans les figures 2.25 et 2.26.

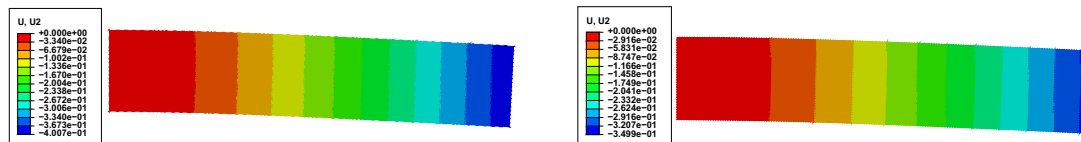


FIGURE 2.21 – Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

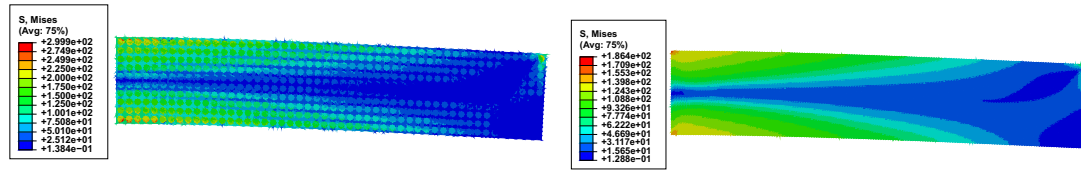


FIGURE 2.22 – Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

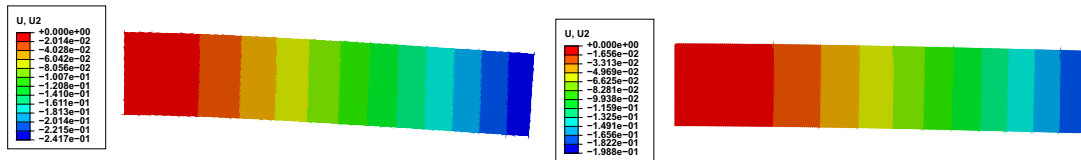


FIGURE 2.23 – Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.5$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

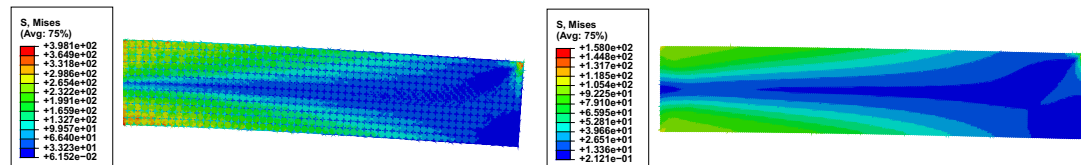


FIGURE 2.24 – Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.5$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

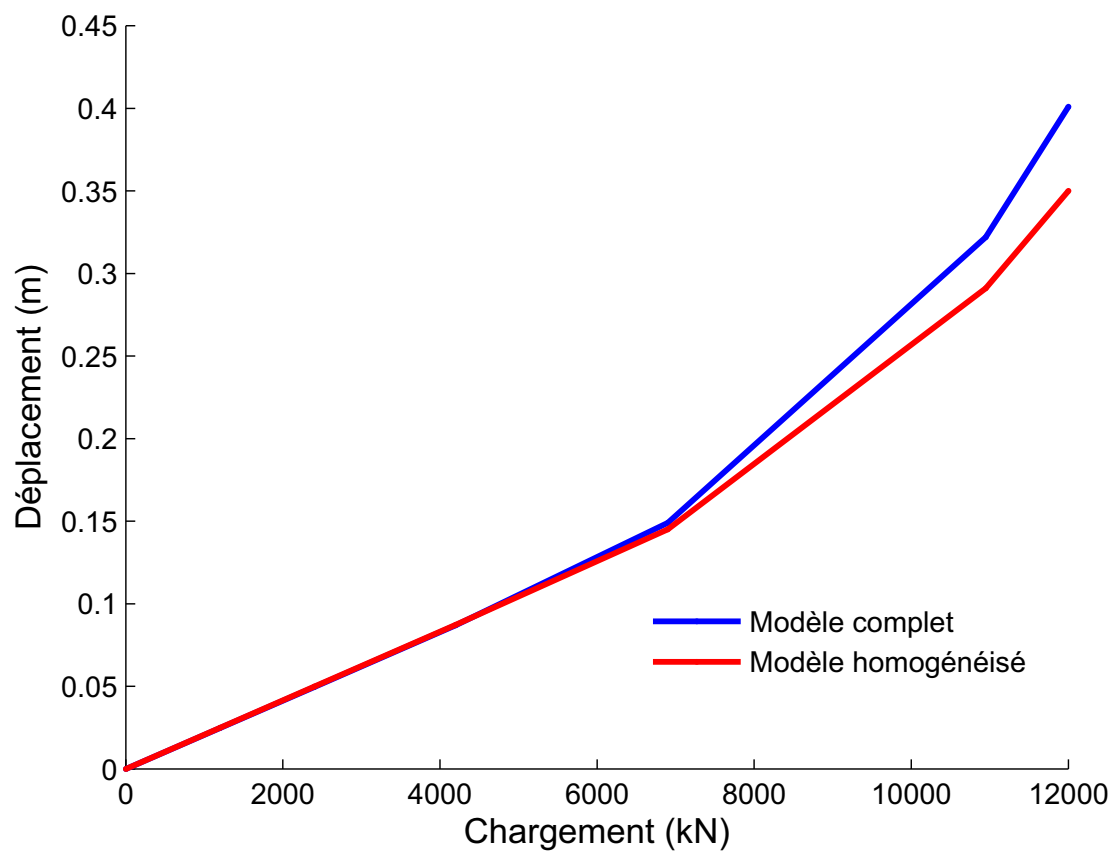


FIGURE 2.25 – Déplacement en fonction du chargement : comparaison entre modèle complet et matériau homogénéisé dans le cas d'une fraction volumique = 0.3

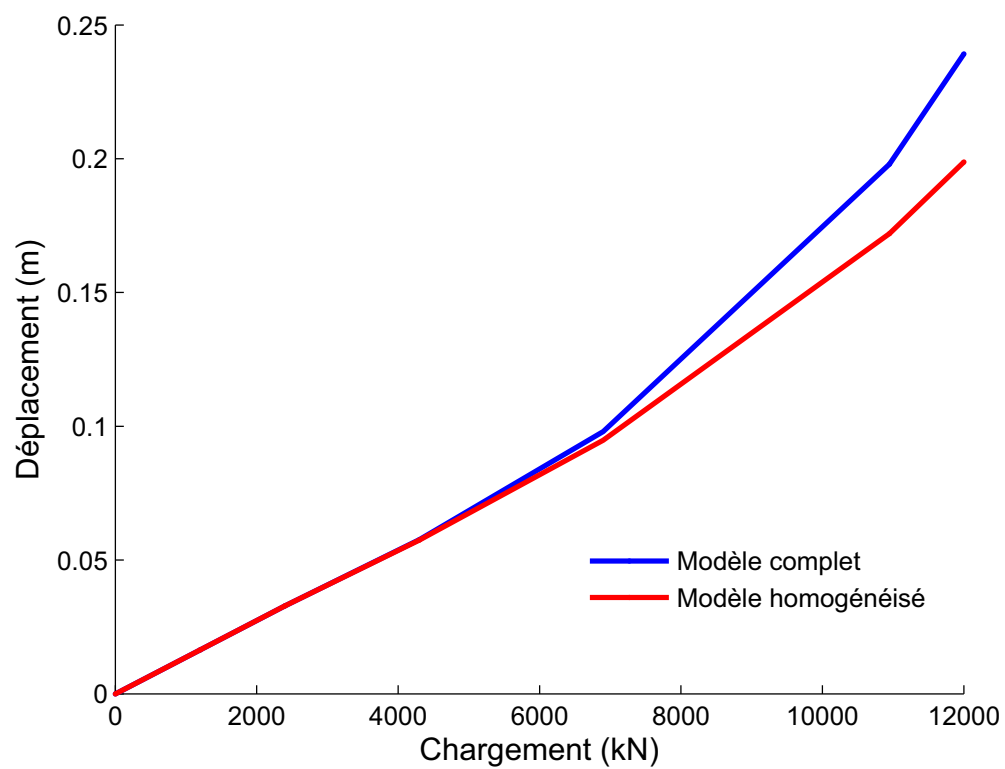


FIGURE 2.26 – Déplacement en fonction du chargement : comparaison entre modèle complet et matériau homogénéisé dans le cas d’une fraction volumique $=0.5$

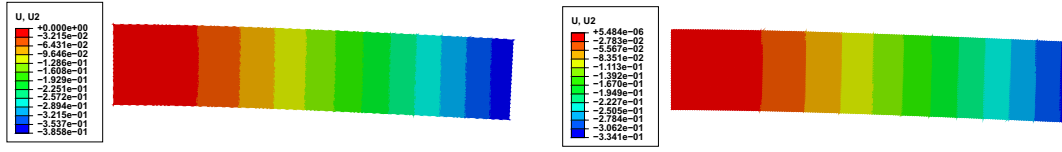


FIGURE 2.27 – Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$ et d’un rapport $E_i/E_m = 100$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

On peut constater dans les figures 2.25 et 2.26 un accord satisfaisant entre le modèle complet faisant office de solution de référence et le modèle homogénéisé, bien que des écarts apparaissent pour les grandes valeurs de chargements. Cet écart est encore plus marqué pour la fraction volumique $f = 0.5$. Cela peut être expliqué par les limitations de la méthode semi-analytique pour les fortes fractions volumiques et les effets liés à la séparation incomplète des échelles pour le modèle complet, où les inclusions restent de tailles finies et peuvent sur les bords engendrer des effets parasites comparé au modèle homogène.

2.5.2 Influence du rapport entre les modules d’Young de la matrice et des inclusions sur le résultat de calcul des structures

Nous proposons ici d’étudier l’influence de ce rapport de module d’Young sur les résultats de calcul des structures dans le cas non linéaire élastoplastique.

Les rapports que nous avons considérés entre le module Young des inclusions et de la matrice sont 20, 100 et 200. Les autres paramètres matériaux sont ceux du tableau 2.1. Les comparaisons des champs de déplacement et des champs des contraintes sont donnés dans les figures 2.27-2.30.

Aussi, les courbes déplacement-charge dans les 2 cas de matériau hétérogène et homogénéisé sont données par les courbes de la figure 2.31. Nous pouvons voir l’influence du module d’Young sur la réponse en déplacement. Ainsi, la méthode peut être utilisée pour réaliser des études paramétriques de calcul de structures hétérogènes vis-à-vis des paramètres microscopiques. Les conclusions

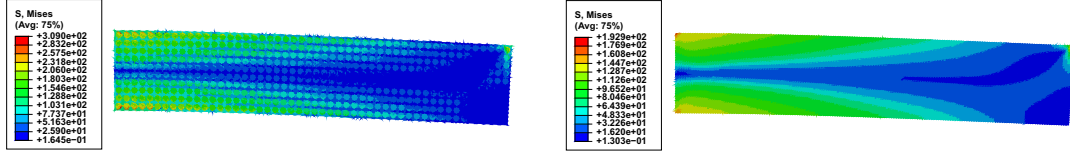


FIGURE 2.28 – Champs de contraintes dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$ et d’un rapport $E_i/E_m = 100$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

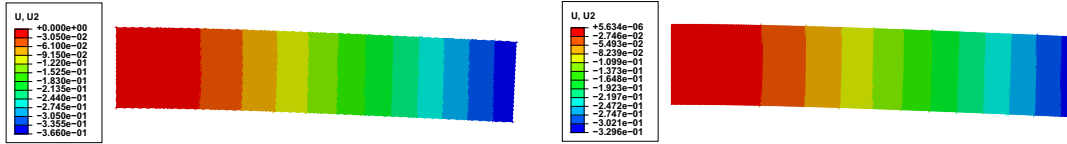


FIGURE 2.29 – Champs de déplacement dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$ et d’un rapport $E_i/E_m = 200$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

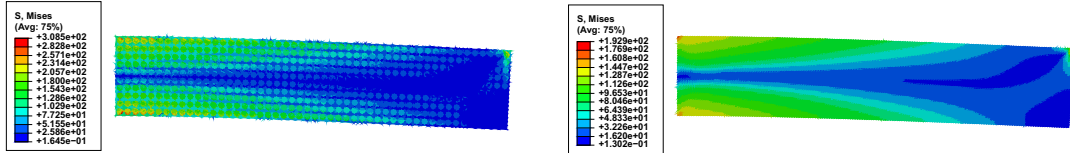


FIGURE 2.30 – Champs de contrainte dans la poutre dans le cas d’une fraction volumique $f = 0.3$ et d’un rapport $E_i/E_m = 200$: (a) modèle complet ; (b) modèle homogénéisé

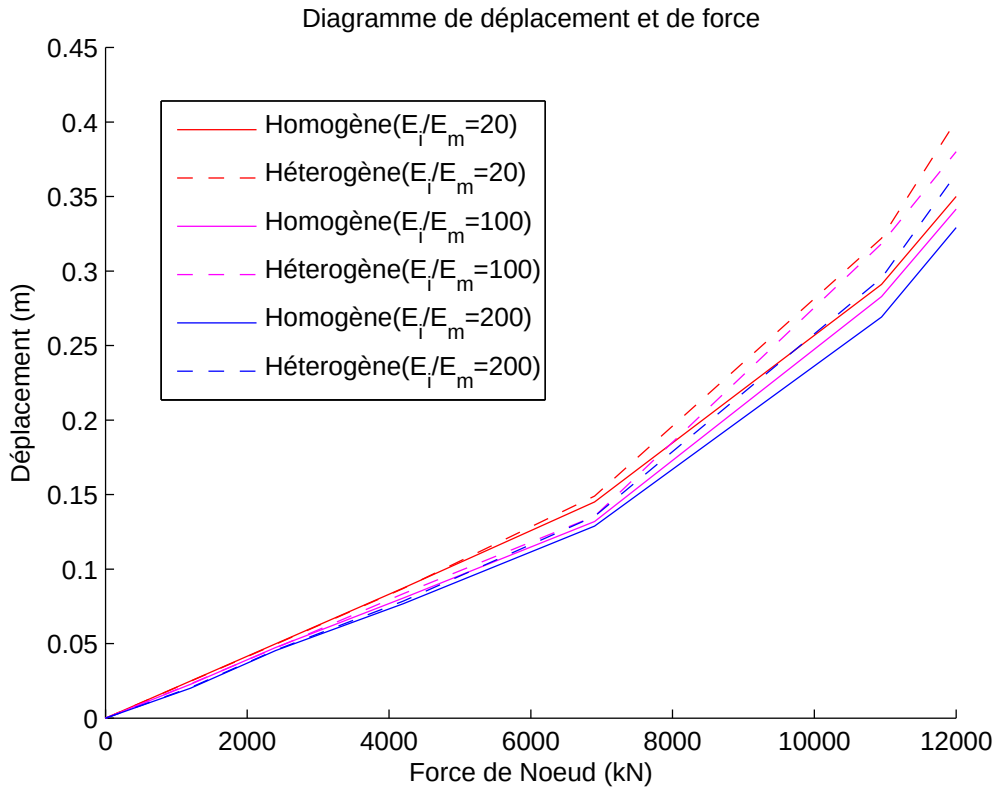


FIGURE 2.31 – Déplacement en fonction du chargement avec (a) modèle complet et (b) modèle homogénéisé

vis-à-vis de la qualité du modèle homogénéisé par rapport à la solution du modèle complet sont similaires au cas traité précédemment, avec un accord satisfaisant entre les deux modèles.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, en première contribution, une nouvelle méthode de détermination de la taille de VERs pour des comportements locaux non linéaires tels qu'élastoplastiques ou élasto-visco plastiques avec des microstructures aléatoires a été proposée. Dans le cas non linéaire, la plupart des approches disponibles sont basées sur la convergence d'une réponse non linéaire du VER, nécessitant la construction d'une métrique appropriée. L'originalité de notre approche est d'étudier directement la convergence statistique des paramètres d'une loi empi-

rique fittant la réponse du VER sous chargement, qui est calculée numériquement. Cependant, une telle approche directe peut conduire à des temps de calculs prohibitifs sans connaissance préalable sur les plages de validité des paramètres. Pour contourner ce problème, notre approche utilise une réponse incrémentale construite par la méthode de Doghri et al. [?] et utilise seulement les paramètres empiriques associés à un comportement fictif de la matrice. Ainsi, les plages de recherche lors de l'identification des paramètres peuvent être choisies beaucoup plus étroite et les calculs associés réduits considérablement. Une procédure basée sur l'analyse statistique de ces paramètres a été conduite pour des composites contenant des distributions aléatoires de fibres rigides élastiques dans des matrices élastoplastiques ou élasto-visco plastiques. Nous avons trouvé une taille caractéristique du VER de l'ordre de 17-18 fois le diamètre des fibres dans le cas élastoplastique, et 13-15 fois le diamètre des fibres pour le cas viscoplastique. La taille plus réduite dans le cas viscoplastique peut s'expliquer par une plus faible localisation des déformations dans la matrice pour ce cas.

Une seconde contribution a consisté à utiliser les comportements identifiés par l'approche précédente sous la forme des lois incrémentales semi-analytiques pour mener des calculs de structures, afin de modéliser la réponse de structures hétérogènes non linéaires. Les coûts de calculs liés à l'évaluation de ces lois sont très faibles et le calcul de structure peut être mené en des temps comparables avec un calcul où une loi purement empirique est donnée en chaque point d'intégration de la structure. Nous avons utilisé ce modèle pour effectuer des analyses de sensibilité de la réponse non linéaire de structures hétérogènes par rapport à certains paramètres microstructuraux tels que la fraction volumique des inclusions ou les contrastes de rigidité entre phases.

Chapitre 3

Une méthode incrémentale numérique d'homogénéisation des composites élastoplastiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'homogénéisation numérique incrémentale pour les matériaux hétérogènes non linéaires, avec application aux composites élastoplastiques. L'objectif est de définir une approximation du comportement effectif d'un matériau hétérogène non linéaire sans restriction concernant le comportement local des phases, ni sur la morphologie de la microstructure, tout en réduisant les temps de calculs par rapport à des calculs couplés de type FE^2 [?]. Pour cela, le problème d'homogénéisation non linéaire est linéarisé à un incrément de chargement donné et le tenseur effectif élastique tangent est calculé numériquement par superposition de chargements élémentaires dans l'espace tangent. Une loi incrémentale est alors construite, pour exprimer la relation de comportement effective. L'algorithme général ainsi que les développements dans un cadre éléments finis sont présentés.

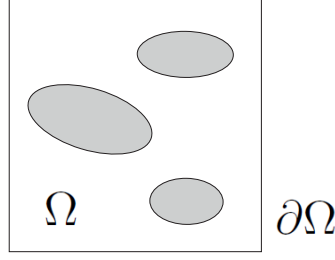


FIGURE 3.1 – Volume Elementaire Représentatif (VER).

3.2 Formulation du problème micro

On considère un volume élémentaire représentatif (VER), défini dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec d la dimension de l'espace, dont le bord est noté $\partial\Omega$ (voir la Fig. 3.1). Les déformations et contraintes microscopiques sont notées $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, respectivement, pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega$. Celles-ci sont liées aux quantités macroscopiques par les relations :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle, \quad (3.1)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle, \quad (3.2)$$

où $\langle . \rangle$ indique l'opération de moyenne sur Ω , soit $\langle . \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (.) d\Omega$.

On considère le problème d'homogénéisation non linéaire suivant. Soient $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ respectivement un champ de déformations macroscopique et un vecteur de variables internes au niveau microscopique. On cherche $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.3)$$

sous la condition (3.1).

Si $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ est une fonction non linéaire de $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ et de $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, le problème est non linéaire et le principe de superposition ne peut s'appliquer. Nous proposons ici une approche incrémentale numérique pour résoudre ce problème. L'idée est de linéariser le problème et de déterminer numériquement l'opérateur tangent effectif

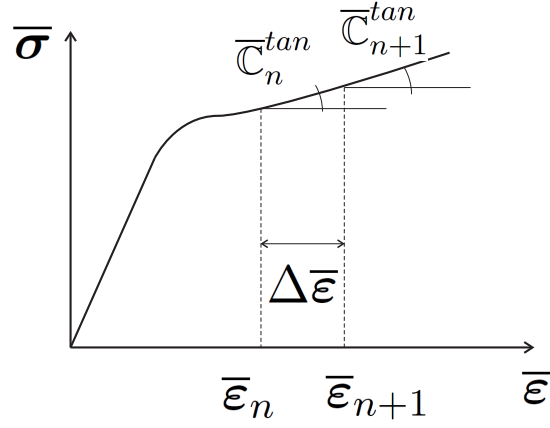


FIGURE 3.2 – Modélisation incrémentale du comportement effectif.

par analogie avec le module élastique effectif pour le problème d'homogénéisation élastique linéaire (voir Fig. 3.2). On pose :

$$\mathcal{R}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t). \quad (3.4)$$

On introduit une discrétisation du temps sous la forme :

$$\mathcal{T} = \{0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, T\} \quad (3.5)$$

et l'on pose $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_n$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ et adptons l'approximation

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_{n+1}) \simeq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

En appliquant un développement de Taylor de $\mathcal{R}_1$ à l'ordre 1, on obtient :

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n) + D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n), \quad (3.7)$$

ce qui conduit, à partir de (3.7), au problème linéarisé à l'instant t :

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = -\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (3.8)$$

où $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{u})$ est la dérivée de Gâteaux, ou dérivée directionnelle, définie par :

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{u}) = \left[\frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) \right]_{\epsilon=0}. \quad (3.9)$$

On obtient, à partir de (3.8) :

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{div} (D_{\Delta \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : D_{\Delta \mathbf{u}} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (3.10)$$

$$= \operatorname{div} (\mathbb{C}^{tan} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) = \operatorname{div} (\mathbb{C}^{tan} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (3.11)$$

La condition (3.1) s'exprime, en introduisant la discrétisation en temps, comme :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) \quad (3.12)$$

et on a :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.13)$$

En supposant $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ vérifiée, on obtient :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.14)$$

Finalement, on aboutit au problème linéarisé à l'instant t_n :

$$\operatorname{div} (\mathbb{C}_n^{tan} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = -\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_n), \quad (3.15)$$

avec

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})_{n+1} \rangle = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.16)$$

Le problème ci-dessus étant linéaire, il est possible d'appliquer le principe de superposition. La solution $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})$ peut alors être reliée à l'incrément de déformation macroscopique $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$ par le biais d'un tenseur de localisation $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, \quad (3.17)$$

avec

$$[A_{ijkl}]_{n+1}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}^{(kl)}(\mathbf{x}), \quad (3.18)$$

où $\varepsilon_{ij}^{(kl)}(\mathbf{x})$ est la solution locale du problème (3.15)-(3.16) avec

$$(\Delta \bar{\varepsilon}_{kl})_{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k), \quad (3.19)$$

où $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$ en 2D sont des vecteurs unitaires de base. La condition (3.16) peut être vérifiée pour l'une des conditions suivantes sur $\partial\Omega$:

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.20)$$

ou

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1} \mathbf{x}, \quad (3.21)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une fluctuation de l'incrément de déplacement périodique. Dans ce travail, nous avons utilisé le deuxième type de conditions aux limites.

3.3 Homogénéisation

En supposant connue l'expression analytique de $\mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x})$ (voir section 3.5.2) et en remplaçant la relation

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}^{tan}(\mathbf{x}, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.22)$$

par l'approximation

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})}{\Delta t} = \{\gamma \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) + (1 - \gamma) \mathbb{C}_{n+1}^{tan}(\mathbf{x})\} : \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (3.23)$$

on obtient

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \{\gamma\mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) + (1 - \gamma)\mathbb{C}_{n+1}^{tan}(\mathbf{x})\} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}). \quad (3.24)$$

avec $\gamma \in [0, 1]$. A ce stade, il est à noter que l'on ne connaît pas $\mathbb{C}_{n+1}^{tan}(\mathbf{x})$. En choisissant $\gamma = 1$ on obtient

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_n) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.25)$$

En utilisant (3.17), on obtient ;

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_n) : \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.26)$$

En prenant la moyenne spatiale de (3.26) sur Ω , il suit :

$$\langle \Delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_n) : \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) \rangle : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.27)$$

On définit le module tangent homogénéisé comme :

$$\bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan} = \langle \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_n) : \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) \rangle. \quad (3.28)$$

En remplaçant la relation macro

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbb{C}}^{tan} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3.29)$$

par l'approximation

$$\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n}{\Delta t} = \left[\beta \bar{\mathbb{C}}_n^{tan} + (1 - \beta) \bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan} \right] \frac{(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)}{\Delta t}, \quad (3.30)$$

avec $\beta \in [0, 1]$, on obtient finalement la relation :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \left[\beta \bar{\mathbb{C}}_n^{tan} + (1 - \beta) \bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan} \right] \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.31)$$

De plus, en utilisant (3.17), on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^n(\mathbf{x}) + \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}. \quad (3.32)$$

Nous choisissons ici de mettre à jour les variables internes dans tout le VER par un algorithme de prédiction-correction (return-mapping) (voir section 3.5.2).

Numériquement, les valeurs de $\bar{\mathbb{C}}^{tan}$ sont rangées en 2D dans une matrice $\bar{\mathbb{C}}^{tan}$ telle que

$$[\Delta \boldsymbol{\sigma}] = \bar{\mathbb{C}}^{tan} : [\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{n+1} \quad (3.33)$$

avec

$$\bar{\mathbb{C}}^{tan} = [[\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(11)}] ; [\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(22)}] ; [\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(12)}]] \quad (3.34)$$

où

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(11)}] = [\langle \sigma_{11}^{(ij)}(\mathbf{x}) \rangle ; \langle \sigma_{22}^{(ij)}(\mathbf{x}) \rangle ; \langle \sigma_{12}^{(ij)}(\mathbf{x}) \rangle] \quad (3.35)$$

avec $\sigma_{ij}^{(kl)}(\mathbf{x})$ le champ de contraintes obtenus par la résolution éléments finis de (3.42) (voir section suivante.)

3.4 Calcul numérique de $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x})$

Les solutions $[A_{ijkl}]_{n+1}(\mathbf{x})$ sont calculées ici numériquement par la méthode des éléments finis. La forme faible associée au problème (3.15) est donnée par :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.36)$$

En introduisant les formes vectorielles associées aux tenseurs du second ordre :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}, \quad (3.37)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}, \quad (3.38)$$

et en introduisant les discrétisations éléments finis classiques :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})] = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^e, \quad (3.39)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})] = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e, \quad (3.40)$$

avec $\mathbf{B}$ une matrice de dérivées de fonctions de forme et $\Delta \mathbf{u}^e$ et $\delta \mathbf{u}^e$ des vecteurs d'inconnues nodales, on obtient :

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) \mathbf{B} d\Omega \right\} \Delta \mathbf{u}^e = -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\boldsymbol{\sigma}_n] d\Omega, \quad (3.41)$$

ce qui conduit au système linéaire :

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{R}, \quad (3.42)$$

avec

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) \mathbf{B} d\Omega \quad (3.43)$$

et

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\boldsymbol{\sigma}_n] d\Omega. \quad (3.44)$$

En 2D, pour chacun des problèmes élémentaires, le système (3.42) est résolu en appliquant les conditions aux limites (3.21) avec $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(kl)}$ sous la forme :

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

La forme matricielle associée à $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x})$ est donc donnée, en 2D et déformations planes, par :

$$\underbrace{\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{x})}_{3 \times 3} = \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{3 \times 2n} \left[\underbrace{\mathbf{u}_e^{(11)}}_{2n \times 1}; \underbrace{\mathbf{u}_e^{(22)}}_{2n \times 1}; \underbrace{\mathbf{u}_e^{(12)}}_{2n \times 1} \right] = \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{3 \times 2n} \underbrace{\mathbf{U}^e}_{2n \times 3}. \quad (3.46)$$

avec n le nombre de nœuds par élément, et $\mathbf{u}_e^{(kl)}$ les vecteurs de déplacements nodaux dans les éléments obtenus par la résolution des différents problèmes élémentaires.

3.5 Variables internes

3.5.1 Procédure proposée

Il est à noter que les variables internes $\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{x})$ doivent être actualisées pour le pas de temps suivant dans tous les points du VER après avoir évalué les déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})$. Dans le cas élastoplastique traité ici, nous proposons d'actualiser les variables internes par une opération de type return-mapping dans les points de Gauss du VER. A noter que cette opération n'est ici qu'un post-traitement des données et peut être parallélisée. Nous rappelons ci-dessous les étapes de l'algorithme de return-mapping pour des matériaux élastoplastiques avec écrouissage linéaire et cinématique.

3.5.2 Algorithme de Return-mapping

L'algorithme de return-mapping pour l'hypothèse de contraintes planes est fourni ci-dessous, d'après [?]. On rappelle tout d'abord les équations principales décrivant la plasticité associative avec écrouissage isotrope et cinématique (Eqs. (2.23)-(2.25)).

On définit :

$$\boldsymbol{\eta} = dev(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta}, \quad Tr(\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (3.47)$$

et la fonction seuil :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K'(\alpha). \quad (3.48)$$

La loi d'écoulement est donnée par

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \gamma \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}, \quad (3.49)$$

et

$$\dot{\alpha} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.50)$$

avec $K'(\alpha)$ et $H'(\alpha)$ les modules d'écrouissage isotropes et cinématiques et

$$\alpha(t) = \int_0^T \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\tau)\| d\tau. \quad (3.51)$$

On a de plus les relations de Kuhn-Tucker :

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.52)$$

où $\mathbf{q}$ représente un vecteur de variables internes.

Pour un modèle d'écrouissage linéaire, on a :

$$H'(\alpha) = (1 - \theta)\overline{H}, \quad K'(\alpha) = [\sigma_Y + \theta\overline{H}\alpha], \quad \theta \in [0, 1] \quad (3.53)$$

avec $\overline{H}$ une constante matériau et σ_Y la contrainte d'écoulement. On définit le tenseur $\mathbb{P}$ tel que :

$$\mathbf{s} = dev[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.54)$$

Enfin, on définit la partie déviatorique de $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ telle que

$$\overline{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{P} : \tilde{\boldsymbol{\beta}}. \quad (3.55)$$

L'algorithme de prédiction-correction est alors donné ci-dessous. A chaque incrément de chargement t_{n+1} , pour un point $\mathbf{x}$ du VER, connaissant $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{q}_n$:

(1) Calculer les contraintes de prédiction et la fonction test

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n, \quad (3.57)$$

et

$$f_{n+1}^* = \|\boldsymbol{\xi}^*\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y + \beta \bar{H}' \alpha_n]. \quad (3.58)$$

(2) **SI** $f_{n+1}^* < 0$ **ALORS : FIN**

SINON : Résoudre $f(\Delta\gamma) = 0$ et déterminer $\Delta\gamma$, avec

$$f^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{2}\bar{f}^2(\Delta\gamma) - R^2(\Delta\gamma) = 0, \quad (3.59)$$

$$\bar{f}^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\xi_{11}^* + \xi_{22}^*)^2}{\left[1 + \left(\frac{E}{3(1-\nu)} + \frac{2}{3}H'\right)\Delta\gamma\right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\xi_{11}^* - \xi_{22}^*)^2 + 2(\eta_{12}^*)^2}{\left[1 + \left(2\mu + \frac{2}{3}H'\right)\Delta\gamma\right]^2}, \quad (3.60)$$

$$R^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{3}K^2 \left[\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma\bar{f}(\Delta\gamma) \right]. \quad (3.61)$$

(3) Calculer le module tangent algorithmique

$$\Xi = \left[\mathbb{C}^{-1} + \frac{\Delta\gamma}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma H'} \mathbb{P} \right]^{-1}. \quad (3.62)$$

(4) Actualiser les différentes quantités locales :

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma H'} \boldsymbol{\Xi} \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\xi}^*, \quad (3.63)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \Delta\gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\xi}_{n+1}, \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{n+1}, \quad (3.65)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \bar{f}(\Delta\gamma), \quad (3.66)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbb{P} : \boldsymbol{\xi}_{n+1}. \quad (3.67)$$

(5) Calculer le module tangent

$$\mathbb{C}_{n+1}^{tan} = \boldsymbol{\Xi} - \frac{[\boldsymbol{\Xi} : \mathbb{P} : \boldsymbol{\xi}_{n+1}] [\boldsymbol{\Xi} : \mathbb{P} : \boldsymbol{\xi}_{n+1}]^T}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T : \mathbb{P} : \boldsymbol{\Xi} : \mathbb{P} : \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \bar{\boldsymbol{\beta}}_{n+1}} \quad (3.68)$$

$$\theta_1 = 1 + \frac{2}{3} H' \Delta\gamma \quad \theta_2 = 1 - \frac{2}{3} K'_{n+1} \Delta\gamma \quad (3.69)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} \frac{\theta_1}{\theta_2} (K'_{n+1} \theta_1 + H' \theta_2) \boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbb{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}. \quad (3.70)$$

(6) Actualiser ε_{33}

$$\varepsilon_{33n+1} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11n+1} + \sigma_{12n+1}) - (\varepsilon_{11n+1}^p + \varepsilon_{22n+1}^p). \quad (3.71)$$

FIN

3.6 Choix du paramètre β

Le paramètre β dans le schéma (3.31) peut influencer fortement la précision des calculs, et son choix peut permettre, pour une précision donnée, d'augmenter

	Matrice
Module d'élasticité k (MPa)	20
Contrainte d'écoulement σ_0 (MPa)	1
Déformation de référence ε_0	1
Paramètre d'écrouissage m	0.4

TABLE 3.1 – Paramètres de matériau élastique non linéaire en petites déformations.

les pas de chargement et ainsi diminuer les temps de calcul. La détermination de sa valeur optimale dépend de la loi de comportement et de la microstructure. Dans cette partie, nous réalisons des études numériques pour deux lois de comportements non linéaires pour déterminer les valeurs optimales de β . Pour des lois analytiques données, nous pouvons évaluer l'opérateur tangent et comparer la réponse incrémentale avec la réponse exacte en contraintes.

Dans ce premier test, nous utilisons la loi suivante (loi puissance) :

$$w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{9}{2}k^{(r)}\boldsymbol{\varepsilon}_m^2 + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}\boldsymbol{\sigma}_0^{(r)}}{1+m^{(r)}} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}} \right)^{1+m^{(r)}}, \quad (3.72)$$

Dans (3.72), $k^{(r)}$ est le module de compressibilité de la phase r , $\varepsilon_m = Tr(\boldsymbol{\varepsilon})/3$ est la déformation hydrostatique; $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}$ est la déformation équivalente définie par $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{2\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d/3}$ avec $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \mathbf{1}$ et $\mathbf{1}$ est le tenseur d'identité d'ordre deux. Dans l'équation (3.72), $m^{(r)}$ est le paramètre d'écrouissage de déformation dans la phase r et $0 \leq m \leq 1$; σ_0 et ε_0 sont, respectivement, la contrainte d'écoulement et la déformation de référence de la phase r . Les cas particuliers, $m^{(r)} = 0$ et $m^{(r)} = 1$ correspondent à la plasticité parfaite et à l'élasticité linéaire, respectivement.

Pour ce test, les valeurs des paramètres choisis sont indiqués dans le tableau 3.1.

Les résultats de l'influence de β sur l'approximation de la réponse par un schéma incrémental sont présentés dans la figure 3.3. Dans ce cas, nous trouvons une valeur de paramètre β optimale de 0.8.

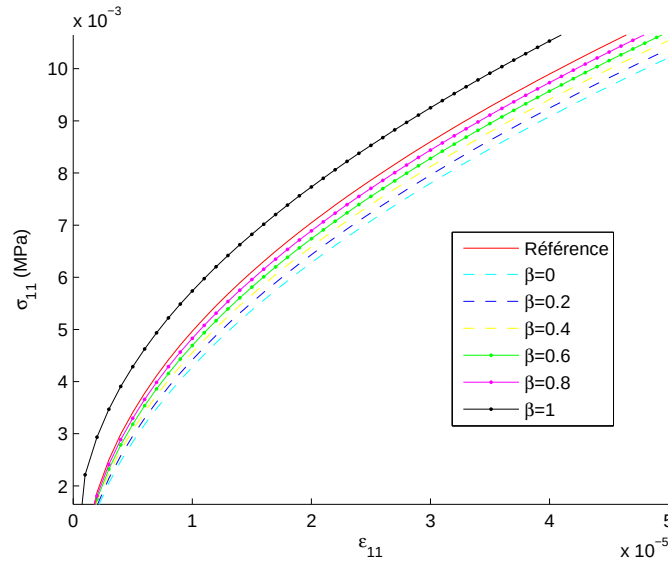


FIGURE 3.3 – Influence du paramètre β pour un modèle de comportement de type loi puissance.

	Matrice
Module d'Young G (MPa)	15000
Coefficient Poisson ν	0.2
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	100

TABLE 3.2 – Paramètres de matériau élastoplastique avec écrouissage isotrope.

Pour ce deuxième exemple, la loi de comportement non linéaire étudiée est une loi élastoplastique avec écrouissage linéaire. Les paramètres sont fournis dans le tableau 3.2.

Pour un choix judicieux du paramètre β , les incréments de chargements peuvent être augmenté jusqu'à un facteur 10.

Les résultats sont fournis dans la figure 3.4.

Pour cet exemple, la valeur optimale de β est ici encore de $\beta = 0.8$.

3.7 Algorithme général

Finalement, l'algorithme proposé est résumé ci-dessous :

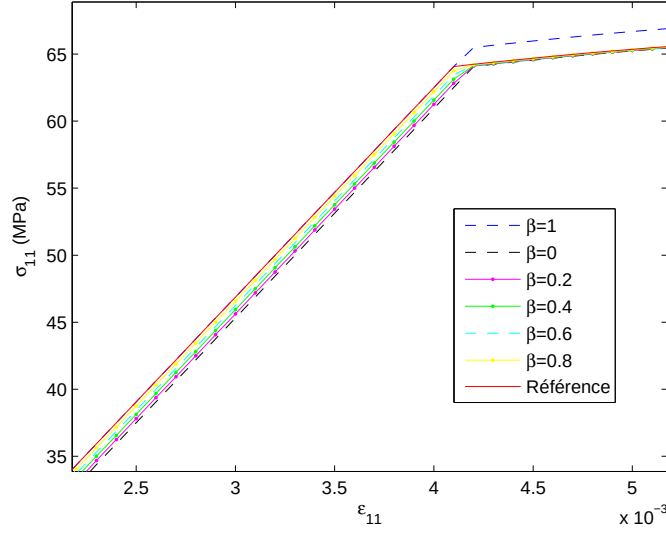


FIGURE 3.4 – Influence du paramètre β sur la qualité de la réponse pour une lois élastoplastique avec écrouissage linéaire.

(0) Initialiser $\varepsilon_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbb{C}_0^{tan}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x})$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbb{C}}_0^{tan} = \bar{\mathbb{C}}$.

POUR tous les pas de temps (incréments de chargement), connaissant $\mathbf{q}_n(\mathbf{x})$, $\varepsilon_n(\mathbf{x})$, $\mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x})$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, $\bar{\mathbb{C}}_n^{tan}$:

(1) Calculer $\mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x})$ en utilisant la procédure décrite dans la section 3.4.

(2) Calculer $\bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan} = \langle \mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{q}_n) : \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) \rangle$

(3) Actualiser le champ de déformations microscopique dans le VER

$$\varepsilon_{n+1}(\mathbf{x}) = \varepsilon_n(\mathbf{x}) + \mathbb{A}_{n+1}(\mathbf{x}) : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

(4) Actualiser les variables internes $\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{x})$ en appliquant l'algorithme de return-mapping décrit dans la section 3.5.2 en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$, connaissant $\varepsilon_{n+1}(\mathbf{x})$.

(5) Calculer le module tangent (voir section 3.5.2).

(6) Actualiser les contraintes macroscopiques.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \left[\beta \bar{\mathbb{C}}_n^{tan} + (1 - \beta) \bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan} \right] \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

(7) $\varepsilon_n(\mathbf{x}) \leftarrow \varepsilon_{n+1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}) \leftarrow \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{x})$, $\mathbb{C}_n^{tan}(\mathbf{x}) \leftarrow \mathbb{C}_{n+1}^{tan}(\mathbf{x})$, $\overline{\mathbb{C}}_n^{tan} \leftarrow \overline{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan}$,
 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n \leftarrow \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ et aller en (1).

FIN

3.8 Calcul de structures hétérogènes élastoplastiques à deux échelles

Nous décrivons ici une procédure dans laquelle l'algorithme décrit précédemment est utilisé en tout point $\overline{\mathbf{x}}$ d'une structure à l'échelle macroscopique, en vue de calculer la réponse de celle-ci dans un cadre de résolution de type Newton. A l'échelle macroscopique, le problème à résoudre est donné par :

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = 0 \quad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}, \quad (3.73)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann imposés sur les portions correspondantes du bord $\partial\overline{\Omega}$, $\partial\overline{\Omega}_u$ et $\partial\overline{\Omega}_F$, telles que $\partial\overline{\Omega} = \partial\overline{\Omega}_u \cup \partial\overline{\Omega}_F$, $\partial\overline{\Omega}_u \cap \partial\overline{\Omega}_F = \emptyset$:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{F}} \text{ on } \partial\overline{\Omega}_F, \quad \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{U}} \text{ on } \partial\overline{\Omega}_u, \quad (3.74)$$

où $\overline{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire sortant normal à $\partial\overline{\Omega}$, et où $\overline{\mathbf{F}}$ et $\overline{\mathbf{U}}$ sont les efforts et les déplacements imposés sur la structure à l'échelle macroscopique. Pour résoudre ce problème, une procédure de type Newton-Raphson est appliquée, dans laquelle l'opérateur tangent $\overline{\mathbb{C}}^{tan}(t)$ est évalué par la procédure décrite dans la section 3.3. Dans la suite, on notera pour alléger les notations $\overline{\mathbf{u}} \equiv \overline{\mathbf{u}}_{n+1}$.

La forme faible associée au problème (3.73)-(3.74) est donnée comme suit : trouver le champ de déplacements macroscopique $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{U}}$ sur $\partial\overline{\Omega}_u$, $\overline{\mathbf{u}} \in H^1(\overline{\Omega})$, tel que :

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\sigma}_{n+1} : \varepsilon(\delta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial \bar{\Omega}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = \bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \delta \bar{\mathbf{u}} \in H_0^1(\bar{\Omega}), \quad (3.75)$$

où $H^1(\bar{\Omega})$ et $H_0^1(\bar{\Omega})$ sont les espaces de Sobolev habituels. Le développement de Taylor au premier ordre de $\bar{\mathcal{R}}$ au voisinage d'une solution $\bar{\mathbf{u}}^k$ connue à l'itération k est donnée par :

$$\bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k + \Delta \mathbf{u}) \simeq \bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k) + D_{\Delta \mathbf{u}} \bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k), \quad (3.76)$$

Ce qui conduit, au problème linéarisé :

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k) = -\bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k), \quad (3.77)$$

avec

$$\begin{aligned} D_{\Delta \mathbf{u}} \bar{\mathcal{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k) &= \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}(\bar{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}^k))}{\partial \bar{\varepsilon}} : \bar{\varepsilon}(\Delta \bar{\mathbf{u}}) : \bar{\varepsilon}(\delta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathcal{C}}_{n+1}^{tan}(\bar{\mathbf{u}}^k) : \bar{\varepsilon}(\Delta \bar{\mathbf{u}}) : \bar{\varepsilon}(\delta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.78)$$

En posant $[\bar{\sigma}]$ et $[\bar{\varepsilon}]$ les formes vectorielles des tenseurs du second ordre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$, et $\bar{\mathcal{C}}_{n+1}$ la forme matricielle associée avec $\bar{\mathcal{C}}_{n+1}^{tan}$, $[\delta \bar{\varepsilon}] = [\bar{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})]$ et $[\Delta \bar{\varepsilon}] = [\bar{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})]$, la forme linéarisée (3.78) peut être ré-écrite comme :

$$\int_{\bar{\Omega}} [\delta \bar{\varepsilon}]^T \bar{\mathcal{C}}_{n+1}^{tan}(\bar{\mathbf{u}}^k) [\Delta \bar{\varepsilon}] d\Omega = - \int_{\bar{\Omega}} [\delta \bar{\varepsilon}]^T [\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}^k)] d\Omega + \int_{\partial \bar{\Omega}_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (3.79)$$

En introduisant une discrétisation FEM :

$$[\Delta \bar{\varepsilon}] = \mathbf{B} \Delta \bar{\mathbf{u}}^e, \quad [\delta \bar{\varepsilon}] = \mathbf{B} \delta \bar{\mathbf{u}}^e, \quad \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}}^e, \quad (3.80)$$

où $\mathbf{N}$ et $\mathbf{B}$ sont les matrices de fonctions de forme et de dérivées de fonctions de forme, et $\Delta \bar{\mathbf{u}}^e$ et $\delta \bar{\mathbf{u}}^e$ sont les valeurs nodales de $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ et $\delta \bar{\mathbf{u}}^e$, respectivement, nous obtenons finalement le problème linéarisé à résoudre sous la forme :

$$\bar{\mathbf{K}}^{tan}(\bar{\mathbf{u}}^k) \Delta \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{R}(\bar{\mathbf{u}}^k) \quad (3.81)$$

avec

$$\bar{\mathbf{K}}^{tan}(\bar{\mathbf{u}}^k) = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{tan}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{u}}^k)) \mathbf{B} d\Omega, \quad (3.82)$$

$$\bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{u}}^k) = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{u}}^k)] d\Omega + \int_{\partial \bar{\Omega}_F} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}} d\Gamma. \quad (3.83)$$

La procédure est la suivante. A l'échelle de la structure, une procédure de Newton est appliquée pour résoudre le problème non linéaire. La loi de comportement locale étant inconnue, on applique, connaissant $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$ et les quantités à l'incrément de chargement précédent, l'algorithme décrit dans la section 3.7, qui nous fournit le module tangent $\bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan}$ et la contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, qui permet de mener la prochaine itération de Newton à l'échelle macro après avoir bouclé sur tous les points de Gauss. Une représentation schématique de la procédure de calcul à deux échelles utilisant l'approche incrémentale à l'échelle micro est fournie dans la figure 3.5.

Pour résumer, la détermination de $\bar{\mathbb{C}}_{n+1}^{tan}$ ne nécessite ici que la résolution de 3 problèmes élémentaires linéaires en 2D, contre $IT \times (1 + 3)$ problèmes dans un cadre FE², avec IT le nombre d'itérations à convergence en chaque point de Gauss, le facteur 3 étant lié à la nécessité d'approximer l'opérateur tangent dans la méthode FE² par différences finies. En 3D, 6 problèmes linéaires sont nécessaires contre $IT \times (1 + 6)$ problèmes pour la méthode FE². Si l'on suppose 4 itérations à convergence, le gain est d'environ de 5. En comparaison avec la méthode de Doghri [?], l'opérateur tangent est ici calculé numériquement par éléments finis, permettant de prendre en compte des comportements non linéaires et des morphologies de microstructures arbitraires. La méthode fournie constitue donc un compromis entre qualité et temps de calculs, en réduisant les temps de

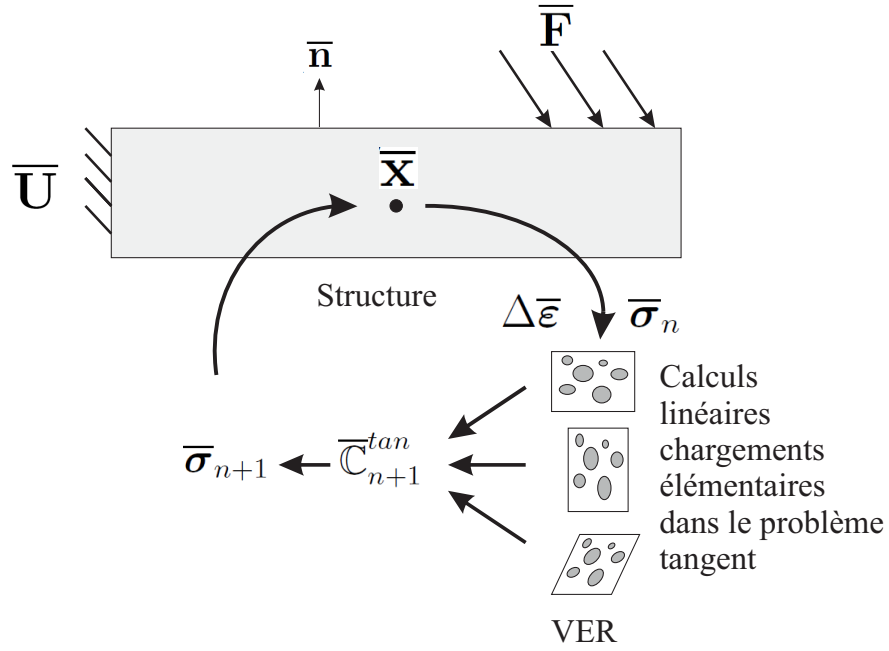


FIGURE 3.5 – Procédure de calcul à deux échelles utilisant l’approche incrémentale à l’échelle microscopique.

calculs par rapport à une approche de type FE^2 et en améliorant la qualité par rapport à une méthode semi-analytique incrémentale par champ moyen.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode d’homogénéisation numérique incrémentale pour les matériaux hétérogènes élastoplastiques. L’originalité de la démarche est d’utiliser un cadre incrémental, dans lequel une homogénéisation classique basée sur le principe de superposition est réalisée dans le problème tangent (linéarisé) à chaque incrément de chargement. L’opérateur tangent effectif est ainsi calculé numériquement par homogénéisation, sans nécessiter de technique de perturbation. Des calculs sur un VER sont réalisés par la méthode des éléments finis pour calculer les différents opérateurs nécessaires à l’évaluation de l’opérateur tangent, comme le tenseur de localisation, permettant de lever les limitations liées aux approches semi-analytiques, comme l’isotropie du comportement effectif, ou les types d’écrouissages dans le modèle élastoplastique.

La technique permet ainsi de combler les limitations des approches incrémentales semi-analytiques telles qu'utilisées dans le chapitre 2, en permettant la prise en compte de morphologies de microstructures et de comportements non linéaires locaux arbitraires. Cependant, la contrepartie réside en des coûts de calculs supplémentaires liés aux calculs linéaires par éléments finis à effectuer sur le VER. Par contre, cette technique est moins onéreuse qu'un calcul non linéaire direct à chaque incrément, car ne nécessite que la résolution en chaque point d'intégration de 3 problèmes linéaires en 2D, contre un nombre plus important avec une résolution directe par Newton, qui nécessite de calculer plusieurs problèmes pour évaluer les contraintes moyennes et l'opérateur tangent par perturbation. La méthode proposée est donc un compromis entre les méthodes semi-analytiques incrémentales, qui sont peu coûteuses mais moins précises, et une résolution directe non linéaire, précise mais très coûteuse.

La deuxième contribution proposée dans ce chapitre a été d'inclure la démarche ci-dessus dans un cadre de calcul de structure hétérogène à deux échelles. Les conclusions concernant les avantages et inconvénients par rapport (a) à un calcul de structure avec une loi semi-analytique incrémentale, comme utilisée dans le chapitre précédent, et un calcul où une résolution non linéaire complète est requise en chaque point d'intégration (méthode FE^2), sont identiques que dans la première partie. Pour analyser quantitativement la qualité de cette approche, nous proposons dans le chapitre 4 des exemples d'applications à l'homogénéisation de composites à phases non linéaires élastoplastiques sous chargements cycliques.

Chapitre 4

Applications de la méthode incrémentale numérique d'homogénéisation aux composites élastoplastiques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons des applications de la méthode présentée dans le chapitre 3, en vue de réaliser l'homogénéisation de matériaux hétérogènes dont les phases sont élastoplastiques avec écrouissage isotrope et cinématique. Dans un premier temps, nous réaliserons des tests de validation de la technique en comparant les réponses sous chargements cycliques obtenues par le modèle numérique homogénéisé proposé et des calculs directs utilisés comme référence, et des comparaisons avec la méthode semi-analytique incrémentale par champ moyen de Doghri *et al.* [?]. Dans un deuxième temps, nous utiliserons la méthode d'homogénéisation numérique développée dans une approche à deux échelles en vue de réaliser le calcul d'une structure hétérogène élastoplastique. Plusieurs cas de morphologies de microstructures seront étudiés, incluant des cas sévères pour l'ho-

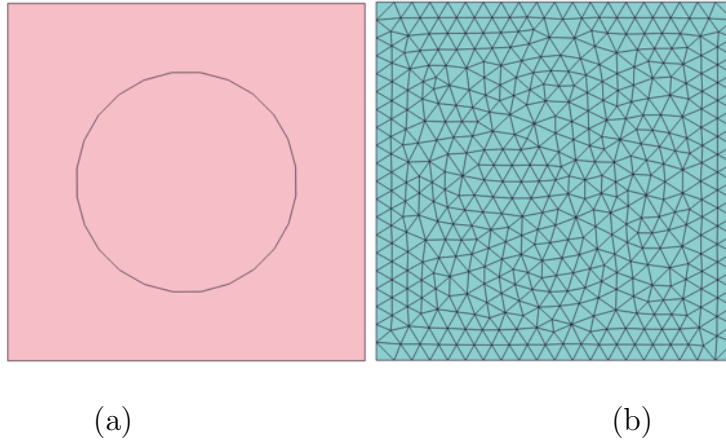


FIGURE 4.1 – Volume élémentaire représentatif avec une inclusion rigide et matrice élastoplastique, écrouissage linéaire : (a) géométrie ; (b) maillage.

mogénéisation numérique non linéaire, comme par exemple des microstructures poreuses ou anisotropes, ou des microstructures issues d’images de microstructures obtenues par microtomographie.

4.2 Homogénéisation de microstructures élastoplastiques sous chargements cycliques

4.2.1 Microstructure avec inclusion rigide et matrice élastoplastique avec écrouissage linéaire

Dans ce premier exemple, nous considérons un volume élémentaire représentatif d’une microstructure dont la géométrie est représentée dans la figure 4.1 (a). Le VER est constitué d’une inclusion élastique rigide circulaire et d’une matrice élastoplastique. La fraction volumique de l’inclusion est de $f = 0.3$. La matrice est élasto-plastique renforcée par une inclusion élastique. Le maillage du VER est représenté dans la Fig. 4.1 (b).

	Matrice	Inclusion
Module de Young E (MPa)	45000	300000
Coefficient Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	200	

TABLE 4.1 – Paramètres pour la matrice et les inclusions pour le modèle élasto-plastique avec écrouissage isotrope linéaire.

la matrice est élasto-plastique, dont le comportement est décrit par un modèle avec écrouissage isotrope linéaire sous la forme (2.24) avec

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y - R(p) \leq 0. \quad (4.1)$$

Pour cet exemple, on choisit le modèle :

$$R(p) = kp \quad (4.2)$$

où k est le module d'écrouissage linéaire. Les paramètres numériques utilisés pour cet exemple sont indiqués dans le Tableau 4.1.

Un chargement cyclique est appliqué sur le bord du VER comme représenté dans la Fig. 4.2. Il est à noter que dans ce travail, les différents problèmes sont résolus de manière quasi-statique, et que le temps représente ici l'évolution du chargement appliqué.

Pour les différents exemples présentés dans ce chapitre, l'algorithme décrit dans la section 3.7 est utilisé pour calculer la réponse par la méthode incrémentale numérique proposée. Nous comparons cette réponse avec un calcul direct (résolution par éléments finis du problème non linéaire sur le VER), ainsi qu'avec la réponse fournie par la méthode semi-analytique de Doghri et al. [?]. Pour le premier exemple, les résultats sont fournis dans la figure 4.3.

Nous pouvons constater que la méthode proposée permet une bonne approximation par rapport à la solution de référence. De plus, celle-ci permet de capturer l'écrouissage progressif induit par la plastification hétérogène dans la matrice au

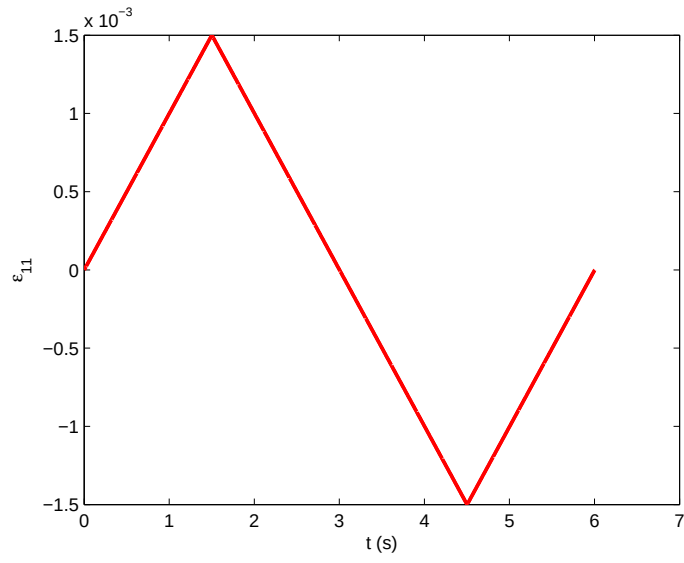


FIGURE 4.2 – Chargement cyclique appliqué sur le VER.

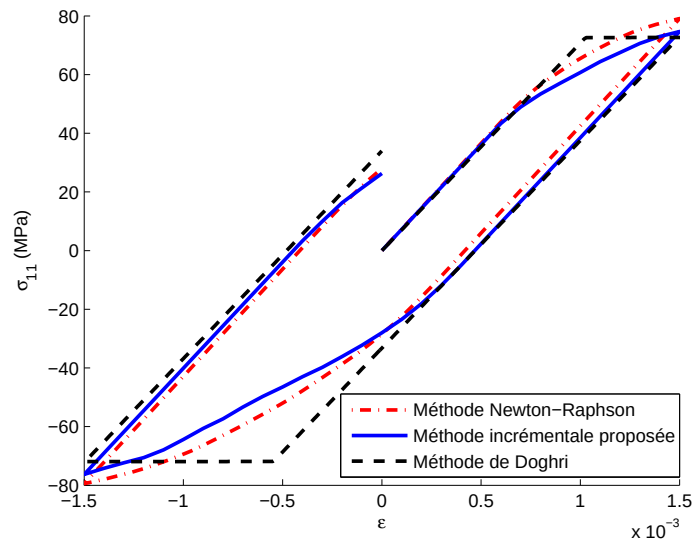


FIGURE 4.3 – Courbes de contrainte-déformation pour le composite à matrice élastoplastique avec inclusion rigide élastique.

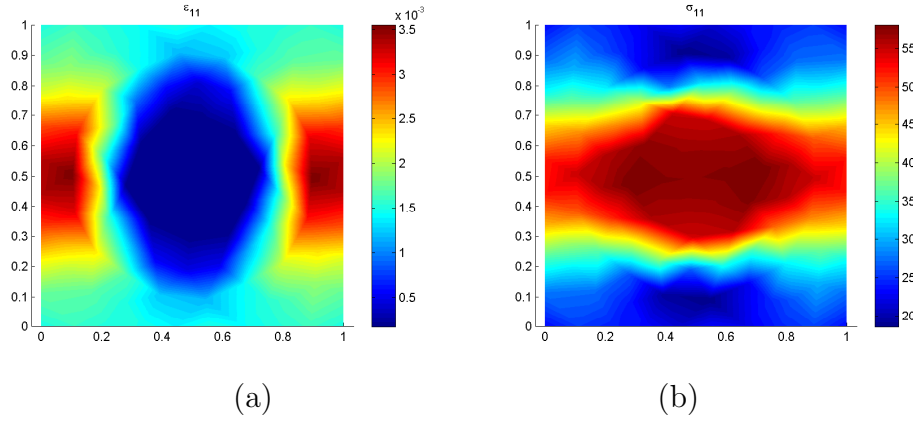


FIGURE 4.4 – Champs de contrainte et déformation dans le VER : (a) ε_{11} et (b) σ_{11} .

cours du chargement, ce qui n'est pas le cas pour la méthode semi-analytique, qui ne permet que de capturer un comportement de type élastoplastique sans écrouissage. On constate donc que la méthode incrémentale proposée permet d'accéder à un degré plus fin de précision pour l'homogénéisation de composites élastoplastiques avec écrouissage sous chargement cyclique. Comme mentionné dans le chapitre précédent, le coût par rapport à la méthode de Newton (calcul direct) est moindre, en raison du nombre restreint de calculs linéaires nécessaires dans l'algorithme présenté dans la section 3.7. Les champs de déformations et de contraintes dans la microstructure pour $\bar{\varepsilon}_{11} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ sont représentés dans la figure 4.13.

4.2.2 Microstructure poreuse, matrice élastoplastique avec écrouissage linéaire

Dans cet exemple, une microstructure périodique poreuse, dont la géométrie est représentée dans la Fig. 4.5 (a), est considérée.

Ici encore, la matrice est décrite par un comportement élastoplastique avec écrouissage linéaire. La fraction volumique de pore est de $f = 0.2$. Le maillage utilisé est représenté sur la figure Fig. 4.5 (b). Les paramètres du comportement utilisés sont fournis dans le tableau 4.2.

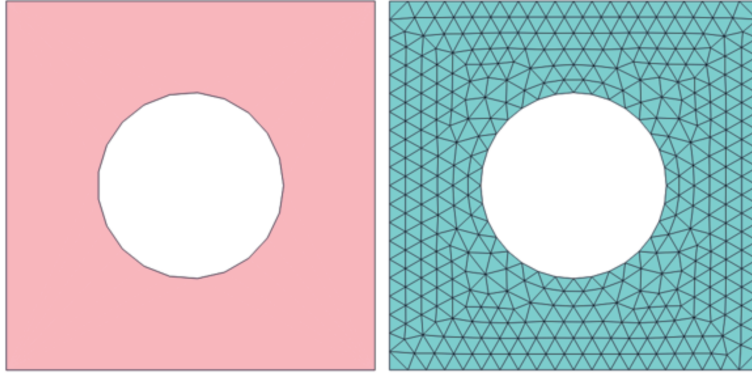


FIGURE 4.5 – Volume élémentaire représentatif de la microstructure poreuse : (a) géométrie ; (b) maillage.

	Matrice
Module de Young E (MPa)	1.5×10^6
Coefficient de Poisson ν	0.2
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20

TABLE 4.2 – Paramètres du matériau pour la microstructure poreuse avec matrice élastoplastique, écrouissage linéaire.

Le chargement est le même que dans l'exemple précédent. Les résultats sont fournis dans la figure 4.6. Nous pouvons constater que dans ce cas plus sévère que dans le précédent (ici le contraste de propriétés entre la matrice et l'inclusion est infini), un plus grand écart est noté entre la solution fournie par la méthode d'approximation proposée et la solution de référence. Cependant, la solution proposée capture ici encore l'écrouissage progressif et non linéaire apparent du composite, contrairement à la méthode semi-analytique.

Les champs de contraintes et de déformations dans la microstructure pour $\bar{\varepsilon}_{11} = 8.10^{-3}$ sont représentés dans la figure 4.7.

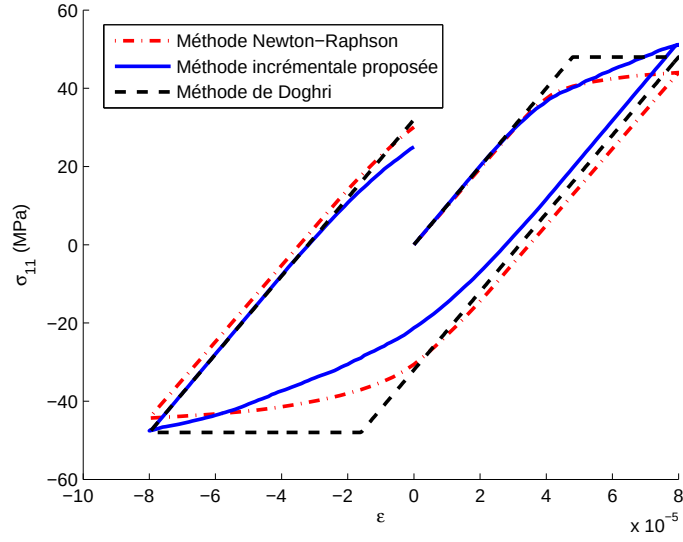


FIGURE 4.6 – Microstructure poreuse : courbe de contrainte-déformation macroscopiques sous chargement cyclique.

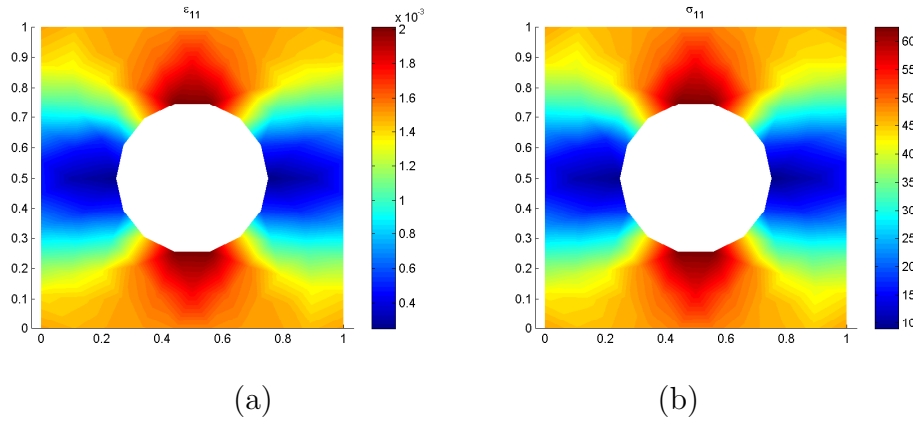


FIGURE 4.7 – Champs de contrainte et de déformation dans la microstructure poreuse : (a) ε_{11} et (b) σ_{11} .

	Matrice	Inclusion
Module de Young E (MPa)	1.5×10^6	3×10^7
Coefficient de Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60	
Module d'écrouissage cinématique h (MPa)	2E4	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	

TABLE 4.3 – Paramètres matériau pour la matrice élasto-plastique avec écrouissage isotrope et cinématique.

4.2.3 Microstructure avec inclusion rigide, matrice élastoplastique avec écrouissage cinématique

La méthode proposée n'étant pas restreinte à des comportements élastoplastiques parfaits ou avec écrouissage isotrope, nous testons ici ses capacités à reproduire le comportement d'un composite dont les inclusions sont élastiques et rigides, et la matrice élastoplastique avec écrouissage cinématique. L'écrouissage cinématique est linéaire et décrit par :

$$R(p) = (1 - \theta)kp + \theta hp \quad (4.3)$$

où k est le module d'écrouissage linéaire et h le module d'écrouissage cinématique. Le paramètre θ donne la proportion entre l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. On obtient donc un comportement avec écrouissage purement isotrope pour $\theta = 0$ et purement cinématique pour $\theta = 1$. Dans le cas présent, nous avons choisi $\theta = 0.5$. Les paramètres numériques sont indiqués dans le tableau 4.3.

Le chargement appliqué est représenté dans la figure 4.8. Nous réalisons ici plus de cycles afin de mettre en évidence l'écrouissage cinématique apparent du composite.

La réponse contrainte-déformation est représentée dans la figure 4.9. Nous constatons ici encore une meilleure précision de la méthode proposée par rapport à la méthode semi-analytique, et pouvons observer que la technique capture bien

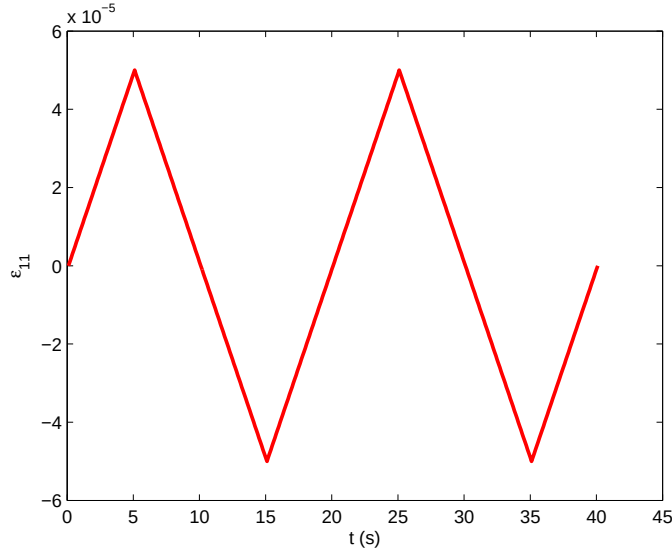


FIGURE 4.8 – Chargement cyclique appliqué sur le VER pour le cas du composite avec phases élastoplastique, écrouissage cinématique.

l'écrouissage cinématique apparent du composite induit par l'écrouissage cinématique de la matrice.

Les champs de déformations et de contraintes pour cet exemple sont représentés dans la figure 4.10 pour $\bar{\varepsilon}_{11} = 5 \cdot 10^{-5}$.

4.2.4 VER élastoplastique anisotrope

L'objectif de ce test est de montrer les potentialités de la méthode proposée pour traiter des cas de microstructures où les méthodes semi-analytiques sont limitées. Nous considérons ici un VER avec une microstructure anisotrope, comme représentée dans la figure 4.11. Très clairement, ce cas ne peut être traité par les méthodes semi-analytiques telles que proposées dans [?], car ces méthodes nécessitent une étape d'isotropisation du tenseur effectif élastique. Nous montrons ici qu'à l'opposé, la méthode incrémentale proposée n'est pas restreinte à des cas isotropes.

Les inclusions sont supposées périodiques et ellipsoïdales. Les valeurs choisies pour les semi-axes sont $a = 0.3$ mm, $b = 0.1$ mm. L'inclusion est centrée dans un VER carré de largeur $L = 1$ mm. Les propriétés matériaux sont données dans

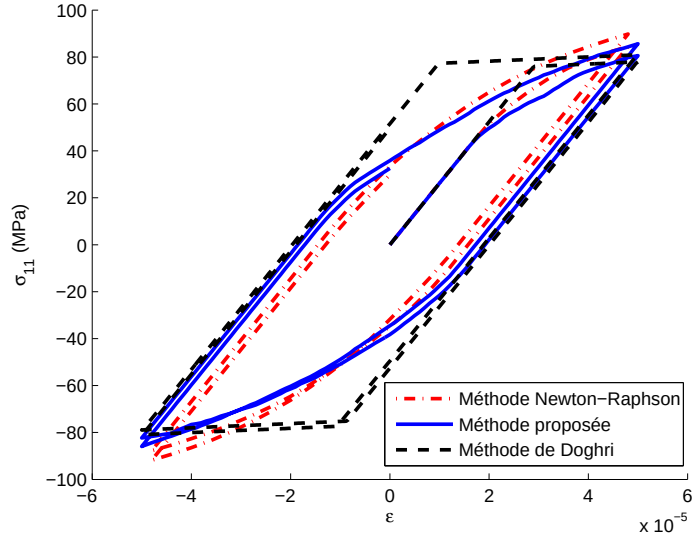


FIGURE 4.9 – Courbes de contrainte-déformation pour le composite avec matrice élastoplastique, écrouissage cinématique.

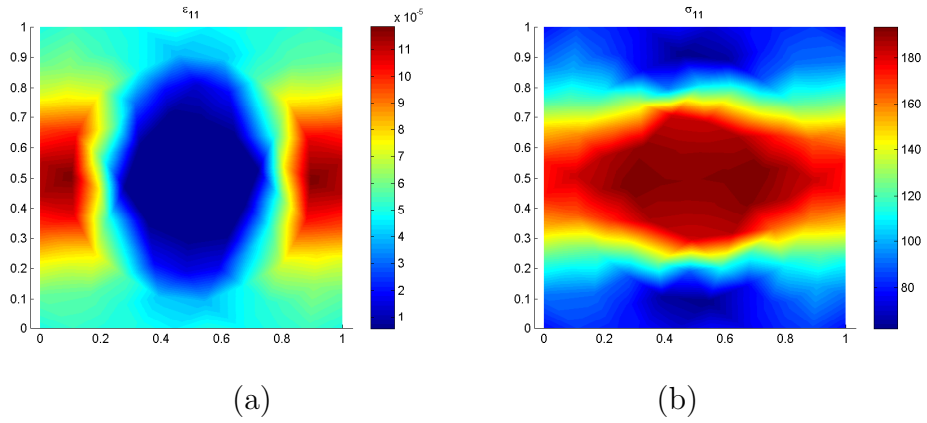


FIGURE 4.10 – Champs de contrainte et déformation dans le VER pour le composite à matrice élastoplastique, écrouissage cinématique : (a) ε_{11} et (b) σ_{11} .

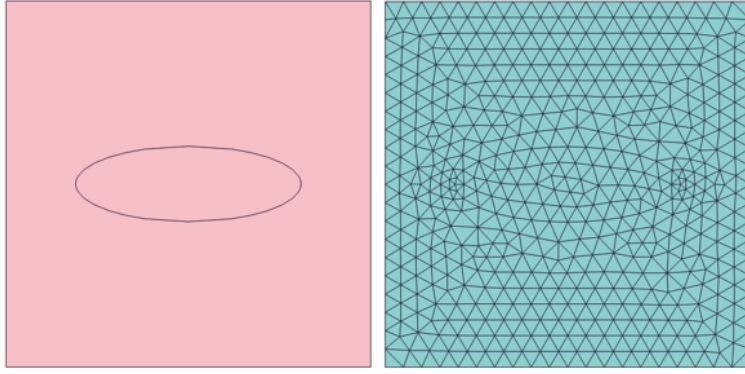


FIGURE 4.11 – VER pour une microstructure anisotrope : (a) géométrie; (b) maillage.

	Matrice	Inclusion
Module de Young E (MPa)	1.5×10^6	6×10^7
Coefficient Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	

TABLE 4.4 – Paramètres matériau pour le VER anisotrope

le tableau 4.4. La matrice est supposée élastoplastique avec écrouissage linéaire isotrope, les inclusions élastiques et rigides.

Un chargement cyclique est appliqué sur le bord du VER. Les résultats sont présentés dans la figure 4.12. La méthode semi-analytique ne pouvant être appliquée ici, nous comparons la méthode incrémentale numérique et la solution de référence.

Nous constatons un très bon accord entre la solution de référence et la solution proposée, même dans ce cas limite pour ce cas de microstructure plus complexe. De plus, on peut apprécier très nettement l'anisotropie du comportement effectif. Les champs de déformation et contraintes sont représentés dans la figure 4.13 pour $\bar{\varepsilon}_{11} = 5.10^{-5}$.

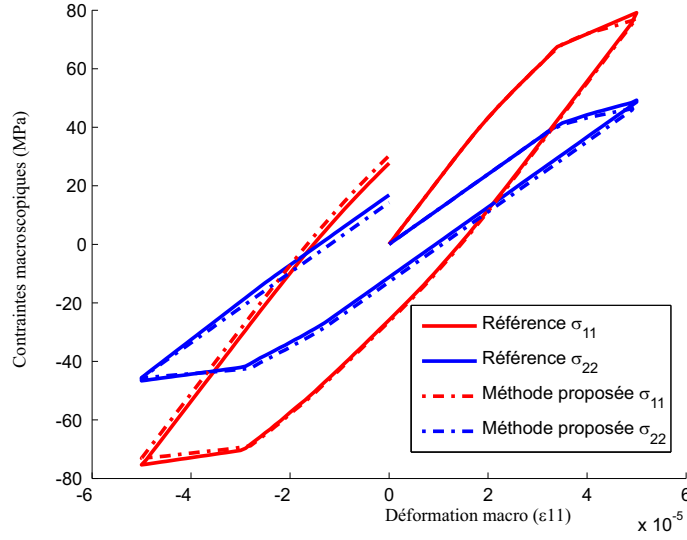


FIGURE 4.12 – Courbes de contrainte-déformation pour le VER anisotrope.

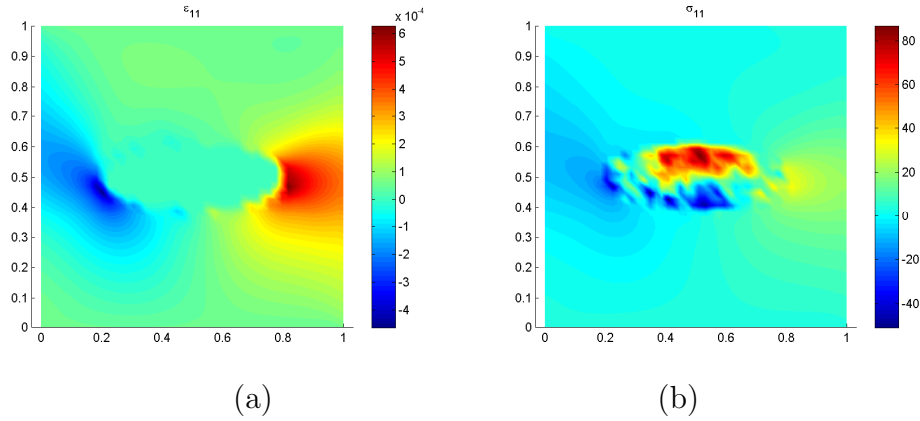


FIGURE 4.13 – Champs de contrainte et de déformation dans le VER anisotrope : (a) ε_{11} et (b) σ_{11} .

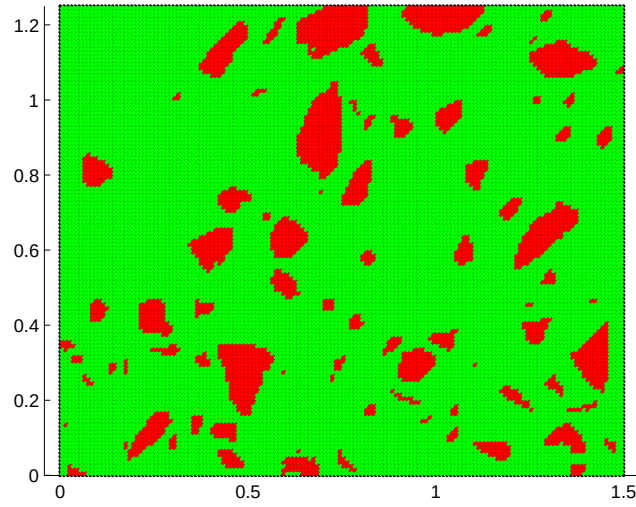


FIGURE 4.14 – VER de béton obtenu à partir d’une image segmenté à partir d’une microtomographie.

4.2.5 Microstructure réaliste obtenue à partir d’une image de microtomographie

Pour les matériaux à microstructures complexes tels que les matériaux cimentaires, la prise en compte de microstructures réalistes (voir par exemple [? ?]) est essentielle. Nous évaluons ici la capacité de la méthode à traiter des morphologies de microstructures arbitraires. La microstructure étudiée a été obtenue à partir d’une image segmentée obtenue par microtomographie d’un matériau de type béton. La géométrie de la microstructure est décrite dans la figure 4.14. L’image segmentée est constituée de pixels associés à des propriétés des phases du matériau. Pour obtenir le modèle numérique, chaque pixel a été associé à un domaine carré constitué de deux éléments triangulaires. Ainsi, les propriétés des phases sont projetées sur le maillage régulier éléments finis.

Une loi de comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope est adoptée pour la matrice. Les inclusions sont supposées élastiques. Les paramètres associés aux comportements des phases sont fournis dans le tableau 4.5.

Un cycle de charge/décharge est appliqué sur la microstructure. La réponse obtenue par le modèle incrémental est comparée avec un calcul direct dans la

	Matrice	Inclusion
Module d'Young G (MPa)	1.5×10^6	3×10^7
Coefficient Poisson ν	0.2	0.45
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	60	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	

TABLE 4.5 – Paramètres de matériau du VER de béton

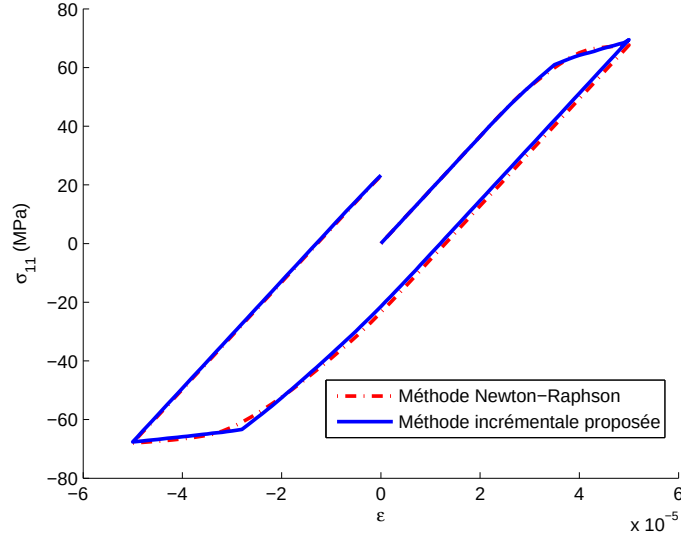


FIGURE 4.15 – Courbe contrainte-déformation pour le VER de béton.

figure 4.15. Nous pouvons constater un très bon accord entre les deux solutions, montrant la robustesse de l'approche vis-vis des morphologies de microstructures considérées.

Les champs de contraintes et de déformation pour $\bar{\varepsilon}_{11} = 5.10^{-5}$ sont représentés dans la figure 4.16.

4.3 Exemple de calcul de structure hétérogène non linéaire élastoplastique à 2 échelles

Dans ce dernier exemple, nous présentons un exemple de calcul de structure à deux échelles illustrant la démarche présentée dans la section 3.8. La structure considérée est hétérogène, constituée de phase élastoplastiques avec écrouissage

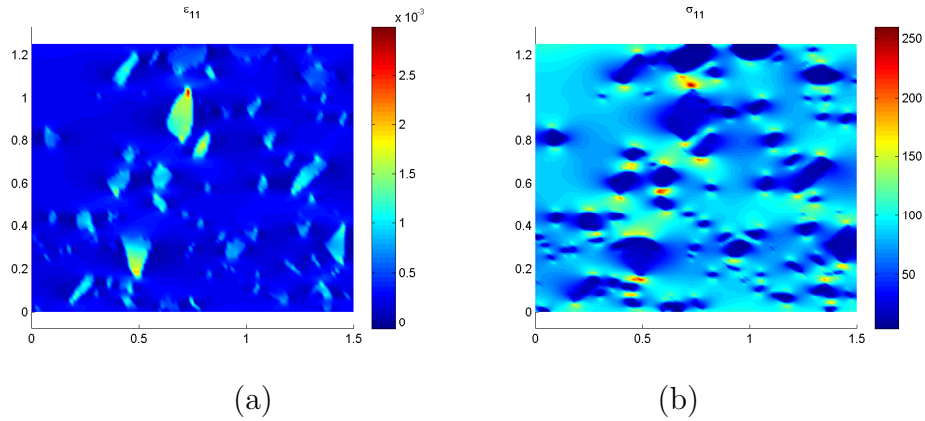


FIGURE 4.16 – Champs de contrainte et déformation dans le VER de béton : (a) ε_{11} et (b) σ_{11} .

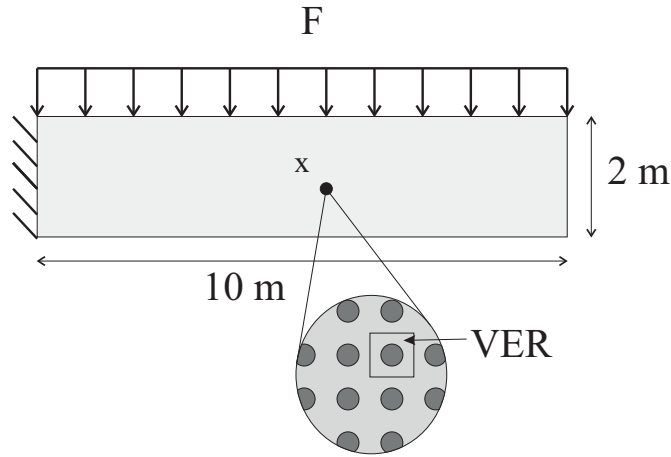


FIGURE 4.17 – Géométrie et chargement pour le problème de structure hétérogène élastoplastique à deux échelles.

isotrope (identique à celui traité dans l'exemple 4.2.1). La microstructure est associée à un VER défini dans la figure 3.8. La géométrie de la structure et son chargement sont représentés dans la figure 4.17. La réponse de la structure obtenue par la méthode à deux échelles proposée dans cette thèse et une solution de référence dont la solution est décrite ci-dessous.

Le déplacement du point supérieur droit de la structure macroscopique est tracé en fonction de l'effort appliqué. Une solution de référence est construite en réalisant un maillage complet décrivant explicitement toutes les hétérogénéités.

Les solutions de référence et obtenues par la méthode à deux échelles proposée sont comparées dans la figure 4.18. Nous pouvons constater un accord satisfaisant

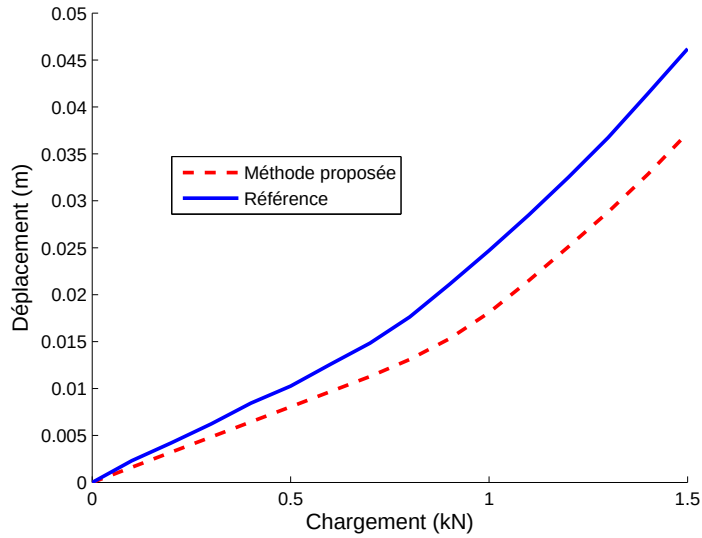


FIGURE 4.18 – Déplacement vertical d’un point extrémité de la poutre.

entre les deux courbes, malgré que des écarts existent. L’une des hypothèses pouvant expliquer ces différences est le type de conditions aux limites imposées sur le VER pour les calculs micro. Nous avons fait le choix ici, pour des raisons de simplicité, d’imposer des conditions uniformes en déformation sur le bord du VER, ce qui peut légèrement modifier la solution par rapport à des conditions périodiques. Ce point nécessitera des analyses supplémentaires.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs exemples numériques utilisant l’approche d’homogénéisation incrémentale introduite dans le chapitre 3 appliqués à l’homogénéisation de composites élastoplastiques. Les exemples ont été choisis comme étant des cas limites pour les approches semi-analytiques incrémentales, en introduisant : des géométries de microstructures complexes et anisotropes, et la prise en compte de l’écrouissage isotrope et cinématique. Pour les différents cas, il a été constaté globalement que l’approche proposée permettait un bon accord avec la solution de référence (fournie par un calcul direct non linéaire) et pouvait notamment reproduire l’écrouissage non linéaire apparent induit par la

plastification hétérogène dans la microstructure au cours du chargement, ce que ne capture pas la méthode semi-analytique. Un autre avantage est de pouvoir accéder aux champs locaux de déformations et de contraintes. Par rapport à un calcul direct, cette approche réduit le nombre de calculs en exploitant le schéma présenté dans le chapitre 3. Enfin, nous avons montré les potentialités de la méthode pour un calcul de structures hétérogènes élastoplastique, en appliquant cette démarche dans un cadre à deux échelles.

Conclusions et perspectives

4.5 Conclusions

Dans ce travail, nous avons développé des approches dont l'objectif est de permettre le calcul de structures hétérogènes non linéaire, en utilisant les avantages des méthodes incrémentales et des calculs numériques par éléments finis. Dans une première partie, nous avons proposé une méthodologie pour déterminer la taille des VER associés à des composites non linéaires dont les phases sont distribuées arbitrairement. La technique repose sur une identification des coefficients d'une loi empirique associée à la matrice dans un cadre d'homogénéisation incrémentale semi-analytique [?]. Une analyse de la convergence statistique des paramètres de la loi identifiée en vue de déterminer la taille du VER. L'idée de n'utiliser que les paramètres de la matrice dans un cadre d'homogénéisation incrémental permet d'obtenir une loi d'allure plus complexe que la loi empirique choisie pour la matrice pour mieux représenter le comportement homogénéisé, et d'autre part permet de réduire les calculs en réduisant l'intervalle de recherche lors de l'identification des paramètres. Une fois construite, la loi peut être utilisée pour des calculs de structures. Nous avons appliqué cette démarche pour des composites à fibres longues réparties aléatoirement dans des matrices élastoplastiques et elasto-visco-plastiques et avons pu d'une part déterminer la taille des VER associés, et d'autre part mener des calculs de structures pour ces matériaux et réaliser des études de sensibilité des paramètres microscopiques sur la réponse non linéaire de la structure.

Dans une deuxième partie, nous avons introduit une nouvelle méthode d'homogénéisation numérique incrémentale. En formulant le problème de localisation dans l'espace de chargement tangent, nous avons exploité la linéarité des problèmes obtenus pour calculer numériquement le tenseur élastique tangent effectif par superposition de calculs par éléments finis réalisés sur le VER. Ensuite, une procédure d'actualisation des différentes quantités macroscopiques et microscopiques a été proposée et appliquée en calcul de structures hétérogènes non linéaires, pour des microstructures anisotropes, de morphologies complexes, et pour des comportements locaux avec écrouissages isotropes et cinématiques. Les avantages et inconvénients de la méthode par rapport d'une part aux approches semi-analytiques et d'autre part par rapport à une méthode numérique couplée à deux échelles (FE²) ont été discutés.

4.6 Perspectives

Ce travail de thèse ouvre de nombreuses perspectives. D'une part, la méthodologie proposée pour déterminer la taille des VER dans un cadre non linéaire pourrait être appliquée pour traiter d'autres types de composites (matériaux élastoplastiques poreux, autres formes d'hétérogénéités) mais également pour d'autres types de comportements, tels que la prise en compte de l'endommagement, en utilisant les développements récents des approches semi-analytiques dans ce cadre [?]. D'autre part, la méthode d'homogénéisation numérique incrémentale proposée pourrait être étendue à d'autres types de comportements non linéaires, la démarche n'étant pas restreinte aux seuls comportements élastoplastiques, comme des composites hyperélastiques. En particulier, l'extension au cadre de l'endommagement pourrait permettre d'aborder des problèmes plus proches des calculs de structures hétérogènes en génie civil. un autre point d'amélioration est la diminution des temps de calculs dans la méthode, notamment associés à l'actualisation des variables internes au niveau microscopique.

Enfin, des développements pour un cadre incluant des couplages multi physiques non linéaires pourrait permettre de traiter de nombreuses autres classes de problèmes pour des applications d'intérêt en génie civil et en sciences de l'ingénieur.

Annexe A

Présentation du logiciel Digimat

DIGIMAT [?] est une plateforme de logiciels pour la simulation prédictive des matériaux composites. Cet outil est utilisé dans de nombreuses applications industrielles pour modéliser le comportement des composites en tenant compte de l'orientation locale des fibres et du processus de fabrication. Il peut être aussi appliqué aux matériaux cimentaires.

Il présente quatre modules : Digimat MF, Digimat FE, Digimat MX et Digimat CAE.

A.1 Digimat MF

A.1.1 Description

Digimat-MF est un logiciel d'homogénéisation par champs moyens utilisé pour prédire le comportement non-linéaire des matériaux multi-phaseiques. Il utilise pour cela deux méthodes semi-analytiques principales : Mori-Tanaka et Interpolative double inclusion (Modèle Lielens). Le nombre de phases de l'inclusion peut être supérieur à un. Les inclusions peuvent avoir une forme ellipsoïde, de cavités, d'inclusions enrobées et d'inclusions rigides ou quasi-rigides. Il peut modéliser des matériaux thermo-élastique linéaire, thermo-élasto-plastique, plasticité cyclique, viscoélasticité linéaire, élasto-viscoplastique et hyper-élastique. Les chargements

	Matrice	Fibres
Densité (g/cm^3)	1.14	2.54
Module d'Young G (MPa)	3000	72000
Coefficient de Poisson ν	0.37	0.22
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	30	
Module d'écrouissage σ_∞ (MPa)	75	
Exposant d'écrouissage m	10	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	20	

TABLE A.1 – Paramètres du matériau

appliqués peuvent être : thermo-mécaniques, en contraintes ou en déformations multi-axiales, monotones ou cycliques, imposés ou provenant d'une analyse par éléments finis.

Les modèles de rupture sont : contrainte maximale, déformation maximale, Tsai-Hill 2D et 3D, Azzi-Tsai-Hill 2D, Tsai-Wu 2D et 3D, Hashin-Rotem 2D, Hashin 2D et 3D.

L'interface de Digimat MF est facile à utiliser avec un arbre de données semblable à celui d'Abaqus.

A.1.2 Exemple d'illustration

Le matériau composite étudié est une matrice de polyamide remplie de fraction volumique 0.3 des fibres en verre courtes. La matrice est définie comme un matériau élasto-plastique et les fibres en verre (inclusions) sont modélisées par le comportement élastique. Les paramètres des 2 matériaux sont donnés dans le tableau A.1.

Les inclusions sont caractérisées par :

- Rapport d'aspect : 25 (Rapport entre la dimension transversale et longitudinale de l'inclusion).
- Tenseur d'orientation : $A_{11} = 0.8$; $A_{22} = 0.2$; les autres = 0 (indicateur sur l'orientation des inclusions dans le repère local).

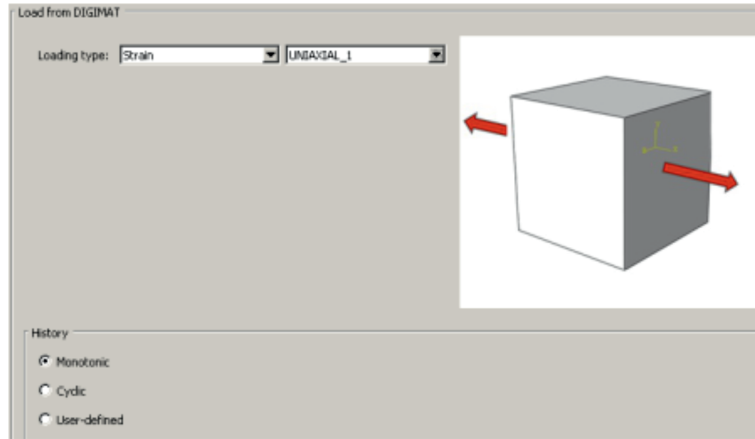


FIGURE A.1 – Chargement considéré dans Digimat MF

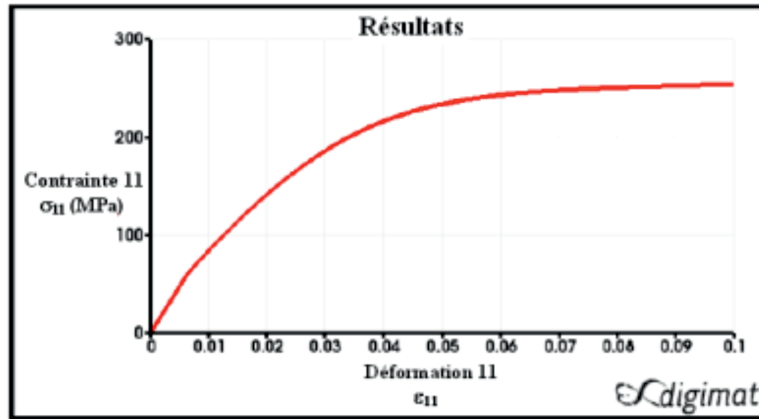


FIGURE A.2 – Résultat d’analyse de contrainte-déformation par Digimat MF

La méthode Mori-Tanaka est utilisée dans cette homogénéisation.

Le chargement est de type de déformation uniaxiale suivant la direction 1 dans le repère local d’une valeur de 0.1 comme le montre la figure A.1.

Le résultat de cette homogénéisation est la courbe contrainte-déformation est donnée dans la figure A.2.

On peut aussi étudier l’influence des orientations des fibres en modifiant le tenseur d’orientation comme le montre la figure A.3.

Ces résultats sont conformes à la théorie. En effet, pour une déformation donnée, si on considère le cas où les inclusions sont orientées vers l’axe 1 ($A_{11} = 1, A_{22} = 0$) la rigidité sur cette direction devient plus élevée ce qui explique que

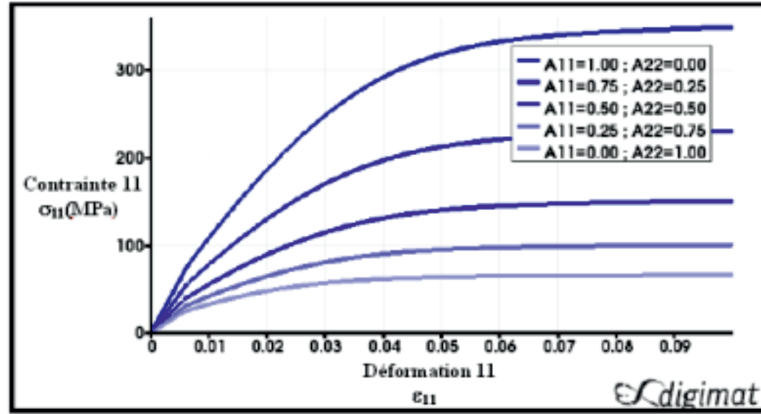


FIGURE A.3 – Résultat d’analyse de l’influence de l’orientation par Digimat MF

la courbe contrainte déformation se trouve au dessus de toutes les autres courbes correspondant aux autres configurations.

A.2 Digimat FE

A.2.1 Description

Digimat-FE est un logiciel d’homogénéisation du comportement non-linéaire de Volume Elémentaire Représentatifs (VER) de microstructure de matériaux complexes. Ce module utilise la méthode des éléments finis (MEF) pour l’analyse de la structure de VER.

Digimat-FE utilise Abaqus/CAE pour générer le maillage d’une microstructure via un script Python. Il utilise le même arbre de données que Digimat MF.

Il sert entre autre de confronter les résultats de la méthode MEF (Digimat FE) avec ceux de la méthode semi-analytique (Digimat MF).

A.2.2 Exemple d’illustration

Dans cet exemple, on étudie la conductivité et la percolation d’un matériau composite à l’échelle d’un VER. Ce VER est composé d’une matrice de carbone

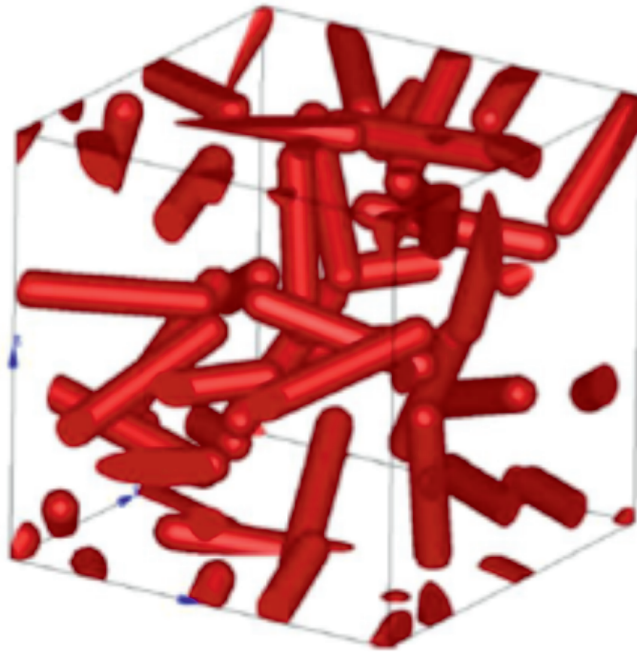


FIGURE A.4 – VER créé par Digimat FE

remplie de fraction volumique de 7.5% des fibres PE (inclusions).

La conductivité électrique de la matrice est de $5000S/m$ et celle de l'inclusion est de $2.5 * 10^{-12}S/m$. Les inclusions sont caractérisées par

- Le rapport d'aspect : 5.5.
- L'orientation : aléatoire 3D

Un VER est alors créé par Digimat FE comme le montre la figure A.4.

Ensuite, ce modèle de VER est importé dans Abaqus CAE pour effectuer le maillage comme le montre la figure A.5.

Enfin, on post-traite les résultats par Digimat (Post processing tasks). Dans cet exemple, nous montrons la densité du courant électrique (ECD) dans la direction 1 (ECD1) pour le chargement considéré (étape-1) et le volume élémentaire considéré.

La figure A.7 donne la courbe de la densité du courant électrique moyenne en fonction du temps dans les trois directions.

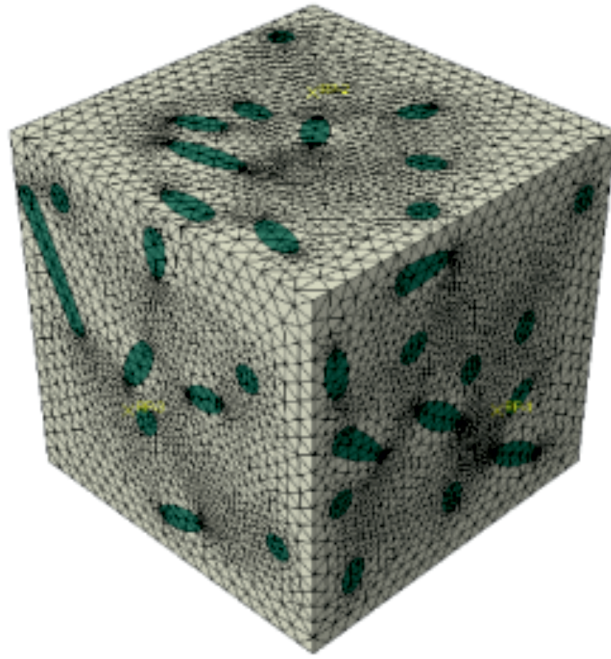


FIGURE A.5 – Maillage du VER pour l'analyse EF avec Abaqus CAE

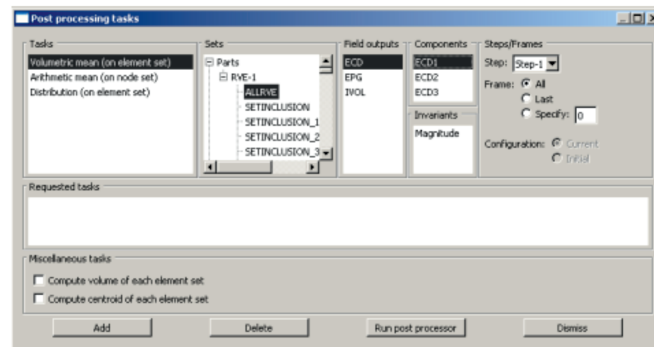


FIGURE A.6 – Interface du processus de post-traitement dans Digimat FE

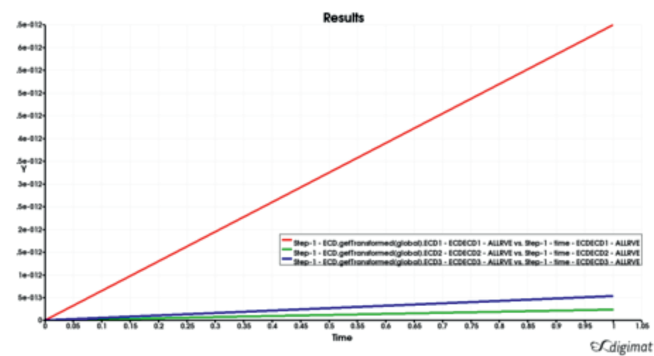


FIGURE A.7 – Densité du courant électrique moyenne dans les 3 directions.

	Matrice	Fibres
Densité (T/mm^3)	1.14e-9	2.54e-9
Module d'Young G (MPa)	1000	72000
Coefficient de Poisson ν	0.44	0.22
Limite d'élasticité σ_Y (MPa)	10	
Module d'écrouissage σ_∞ (MPa)	10	
Exposant d'écrouissage m	100	
Module d'écrouissage linéaire k (MPa)	1	

TABLE A.2 – Paramètres de matériau

A.3 Digimat MX

A.3.1 Description

Digimat MX est un module de Digimat qui sert à :

- Gérer des modèles de matériaux Digimat ainsi que des matériaux issus de mesures expérimentaux.
- Identifier les paramètres des matériaux à partir de courbes expérimentales. Ces courbes peuvent être importées sous forme de fichiers texte.
- Déterminer les caractéristiques de la matrice ou de l'inclusion en se basant sur une méthode inverse.

A.3.2 Exemple d'illustration

On considère un matériau composite renforcé de fibres de verre. Ce matériau composite appelé *Hostaform* fait partie de la base de données de Digimat-MF avec les données dans le tableau A.2.

Le comportement de la matrice est élastoplastique dont le modèle de plasticité est le modèle J2-Von Mises. Le comportement des inclusions est élastique.

Les 2 courbes expérimentales de tension de ce matériau aux 2 angles de chargement : 0 et 90 sont données dans la base des données de Digimat.

La figure A.8 montre un tableau de Digimat MX avec les paramètres à renseigner avec les bornes inférieurs et supérieurs ainsi que la moyenne et l'écart type de

Parameter	Lower Bound	Upper Bound	Mean	Range (%)	Original Value	Optimized Value
☒ Young	2000	3000	2500	20	1000	2504.12
☐ Poisson						0.44
☒ Yield stress	10	30	20	50	10	13.3333
☒ Hardening modulus	10	50	30	66.6667	10	30.4938
☒ Hardening exponent	100	300	200	50	100	100.412
☒ Hardening modulus2	1	10	5.5	81.8182	1	6.83333
☒ Plastic strain multiplier	1	5	3	66.6667	1	3
☒ Aspect ratio	18	25	21.5	16.2791	22	23.7469
☐ Select All						

Analysis parameters	
Maximum number of evaluations	1000
Minimum boxsize	0.01
Run analysis	Show status
Stop analysis	

FIGURE A.8 – Identification des paramètres avec Digimat MX.

chaque paramètre de ce matériau et les résultats expérimentaux pour identifier les paramètres.

Une fois de calcul Digimat MX lancé, il fournit les courbes d'identification comme le montre la figure A.9.

Les paramètres identifiés sont donnés dans le tableau de la figure A.10, qui est une sortie de DIGIMAT MX.

A.4 Digimat CAE

A.4.1 Description

L'interface DIGIMAT CAE/Abaqus couple Digimat MF avec Abaqus à travers la fonctionnalité matériau utilisateur d'Abaqus. Digimat-MF est fourni sous forme de librairie logicielle, reliée à Abaqus, pour réaliser le couplage entre les capacités de modélisation non-linéaire, multi-échelles de Digimat-MF et celles d'analyse non-linéaire par éléments finis d'Abaqus. Dans cette configuration, Digimat-MF agit en tant que matériau utilisateur avancé, non-linéaire et visqueux à chaque point d'intégration du maillage éléments finis Abaqus.

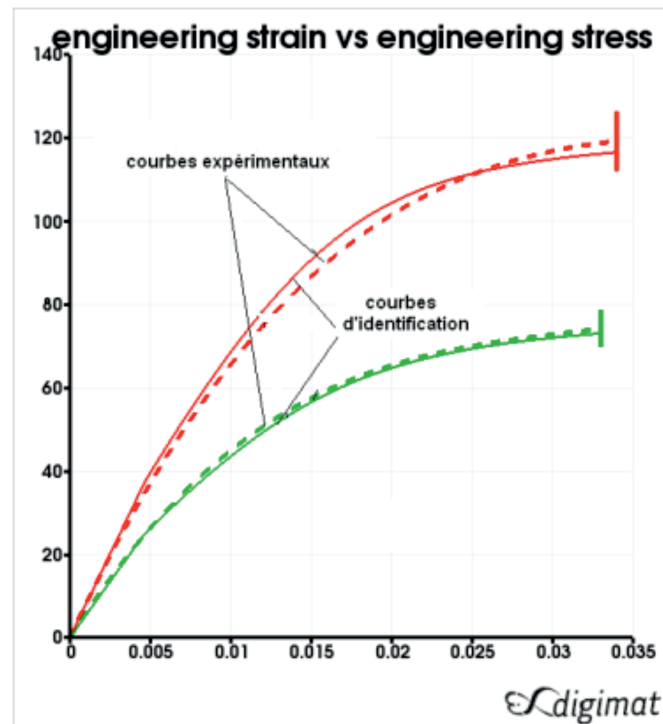


FIGURE A.9 – Résultat de l'identification

Reverse Engineering Results			
Function	1	2	Global
Best function	--	--	596
Objective function	1.0932202624e-03	1.0312855770e-03	2.124506E-003

Parameter	Best Value
Young	2.5041152263e+03
yield_stress	1.333333333e+01
hardening_modulus	3.0493827160e+01
hardening_exponent	1.0041152263e+02
hardening_modulus2	6.833333333e+00
plastic_strain_multiplier	3.000000000e+00
aspect_ratio	2.3746913580e+01

Show report

Import results

Plot results

FIGURE A.10 – Les paramètres optimisés après l'identification

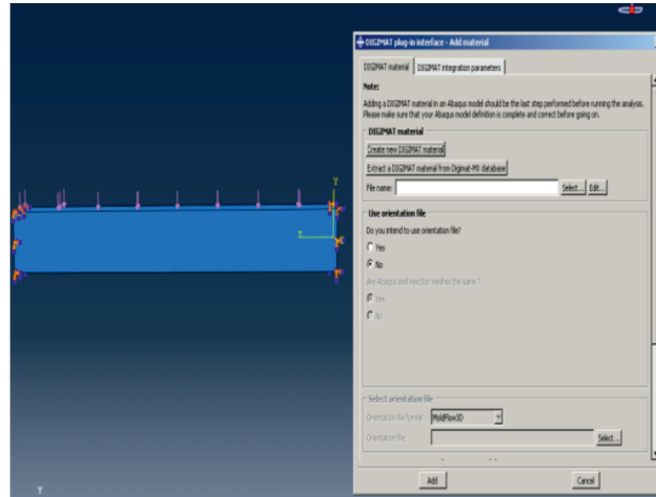


FIGURE A.11 – Interface de Digimat-Abaqus et maillage de la structure analysée

A.4.2 Exemple d'illustration

On crée un matériau dans Digimat MF dont les données sont celles du tableau A.1.

Pour cet exemple, la sortie de Digimat MF est la courbe donnée dans la figure A.2 montrée précédemment.

Ensuite on identifie les paramètres du matériau en utilisant Digimat-MX. Ensuite, on considère ce même matériau comme un matériau virtuel qui servira d'entrée à Abaqus pour une analyse éléments finis.

Ci-dessous une structure maillée avec Abaqus CAE ainsi que l'interface Abaqus-Digimat pour renseigner le matériau dans Abaqus. Cette structure est une poutre encastree en ses deux extrémités sur laquelle est appliquée une charge répartie sur sa face supérieure comme le montre la figure A.11.

La distribution de contraintes Von-Mises dans cette poutre est donnée par la figure A.12.

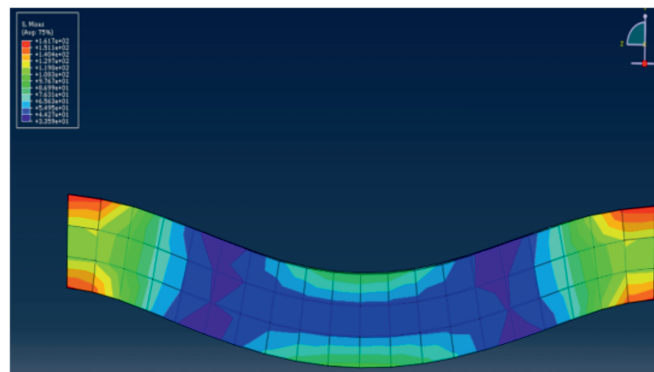


FIGURE A.12 – Champ de contraintes de Von-Mises issu de l’analyse avec Digimat CAE

Bibliographie

- [1] *Digimat 4.3.1 Documentation*.
- [2] J. Aboudi. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 6(5) :411–434, 2008.
- [3] W.L. Azoti, A. Tchalla, Y. Koutsawa, A. Makradi, G. Rauchs, S. Bellouet, and H. Zahrouni. Mean-field constitutive modeling of elasto-plastic composites using two (2) incremental formulations. *Composite Structures*, 105 :256–262, 2013.
- [4] J.G. Berryman and A.B Patricia. Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites. *Mechanics of Materials*, 22(2) :149–164, 1996.
- [5] M Berveiller and A Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(5) :325–344, 1978.
- [6] V. Bouchart, M. Brieu, D. Kondo, and M.N. Abdelaziz. Implementation and numerical verification of a non-linear homogenization method applied to hyperelastic composites. *Comput. Mat. Sci.*, 43 :670–680, 2004.
- [7] L. Brassart, H.M. Inglis, L. Delannay, I. Doghri, and P.H. Geubelle. An extended mori-tanaka homogenization scheme for finite strain modeling of debonding in particle-reinforced elastomers. *Computational Materials Science*, 45(3) :611 – 616, 2009. Proceedings of the 17th International Workshop on Computational Mechanics of Materials IWCMM-17.
- [8] L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, and L. Delannay. A variational formulation for the incremental homogenization of elasto-plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(12) :2455–2475, 2011.
- [9] L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, and L. Delannay. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*, 36 :86–112, 2012.
- [10] V. Bulsara, R. Talreja, and J. Qu. Damage initiation under transverse loading of unidirectional composites with arbitrarily distributed fibers. *Composites Science and Technology*, 59 :673–682, 1999.
- [11] J.L. Chaboche, P. Kanouté, and A. Roos. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International journal of Plasticity*, 21(7) :1409–1434, 2005.

- [12] E.W.C. Coenen, V.G. Kouznetsova, and M.G.D. Geers. Computational homogenization for heterogeneous thin sheets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1180–1205, 2010.
- [13] Y. Cong, S. Nezamabadi, H. Zahrouni, and J. Yvonnet. Multiscale computational homogenization of heterogeneous shells at small strains with extensions to finite displacements and buckling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(4) :236–259, 2015.
- [14] J. Cugnoni and M. Galli. Representative volume element size of elastoplastic and elastoviscoplastic particle-reinforced composites with random microstructure. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 66(2) :165–185, 2010.
- [15] G. deBotton and G. Shmuel. Mechanics of composites with two families of finitely extensible fibers undergoing large deformations. *J. Mech. Phys. Solids*, 57 :1165–1181, 2009.
- [16] I. Doghri, L. Adam, and N. Bilger. Mean-field homogenization of elastoviscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method. *International Journal of Plasticity*, 26(2) :219–238, 2010.
- [17] I. Doghri, L. Brassart, L. Adam, and J-S. Gérard. A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity*, 27(3) :352–371, 2011.
- [18] W.J. Drugan and J.R. Willis. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(4) :497–524, 1996.
- [19] X. Du and M. Ostoja-Starzewski. On the size of representative volume element for darcy law in random media. *Proceedings of the Royal Society A*, 462 :2949–2963, 2006.
- [20] G.J. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 437 :311–327, 1992.
- [21] G.J. Dvorak. *Micromechanics of Composites Materials*. Springer, New-York, 2013.
- [22] A. Elvin and S.S. Sunder. Microcracking due to grain boundary sliding in polycrystalline ice under uniaxial compression. *Acta Materialia*, 44(1) :43–56, 1996.
- [23] R.A.B. Engelen, M.G.D. Geers, and F.P.T. Baaijens. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International journal of Plasticity*, 19(4) :403–433, 2003.
- [24] S. Erwin, R. de Borst, and T.J.R. Hughes. *Encyclopedia of computational mechanics*. Wiley, 2004.

- [25] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226) :376–396, 1957.
- [26] F. Feyel. Multiscale FE² elastoviscoplastic analysis of composite structure. *Computational Materials Science*, 16(1-4) :433–454, 1999.
- [27] F. Fritzen, S. Forest, T. Böhlke, D. Kondo, and T. Kanit. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, 29(0) :102 – 119, 2012.
- [28] F. Fritzen, M. Hodapp, and M. Leuschner. Gpu accelerated computational homogenization based on a variational approach in a reduced basis framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278 :186–217, 2014.
- [29] M.G.D. Geers, E.W.C. Coenen, and V.G. Kouznetsova. Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 15(4) :S393, 2007.
- [30] M.G.D. Geers, V.G. Kouznetsova, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(7) :2175–2182, 2010.
- [31] P. Germain. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983.
- [32] S. Ghosh, K. Lee, and P. Raghavan. A multilevel computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous media. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :2335–2385, 2001.
- [33] I.M. Gitman, H. Askes, and L.J. Sluys. Representative volume : Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(16) :2518 – 2534, 2007.
- [34] C. Gonzalez and J. LLorca. Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression : Microscopic mechanisms and modeling. *Composites Science and Technology*, 67(13) :2795 – 2806, 2007.
- [35] Q. Grimal, K. Raum, A. Gerisch, and P. Laugier. A determination of the minimum sizes of representative volume elements for the prediction of cortical bone elastic properties. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 10 :925–937, 2011.
- [36] F. Grondin, H. Dumontet, A. Ben Hamidab, G. Mounajedc, and H. Boussac. Multi-scales modelling for the behaviour of damaged concrete. *Cement Concrete Res.*, 37(10) :1453–1462, 2007.
- [37] F. Grondina, H. Dumontet, A. Ben Hamidab, and H. Boussac. Micromechanical contributions to the behaviour of cement-based materials : Two-scale modelling of cement paste and concrete in tension at high temperatures. *Cement Concrete Comp.*, 33(3) :424–435, 2011.

- [38] A.A. Gusev. Representative volume element size for elastic composites : a numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45 :1449–1459, 1997.
- [39] B. Halphen and Q. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de mécanique*, 14 :39–63, 1975.
- [40] Z. Hashin. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics*, 32(3) :630–636, 1965.
- [41] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127–140, 1963.
- [42] Q.C. He, H. Le Quang, and Z.Q. Feng. Exact results for the homogenization of elastic fiber-reinforced solids at finite strain. *J. Elast.*, 83 :153–177, 2006.
- [43] C. Heinrich, M. Aldridge, A.S. Wineman, J. Kieffer, A.M. Waas, and K. Shahwan. The influence of the representative volume element (rve) size on the homogenized response of cured fiber composites. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 20 :075007, 2012.
- [44] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :357–372, 1963.
- [45] R. Hill. Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :89–101, 1965.
- [46] R. Hill. A self-consistent mechanics of composites materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :213–222, 1965.
- [47] P. Holmes, J.L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [48] G.K. Hu. A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *Int. J. Plasticity*, 12 :439–449, 1996.
- [49] J.W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 348, pages 101–127. The Royal Society, 1976.
- [50] M. Idiart and P. Ponte Castañeda. Second-order estimates for nonlinear isotropic composites with spherical pores and rigid particles. *C. R. Mec.*, 333 :147–154, 2005.
- [51] A. Javili, G. Chatzigeorgiou, and P. Steinmann. Computational homogenization in magneto-mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 50(25) :4197–4216, 2013.

- [52] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14) :3647 – 3679, 2003.
- [53] M.A. Keip, P. Steinmann, and J. Schröder. Two-scale computational homogenization of electro-elasticity at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278 :62–79, 2014.
- [54] Z. F. Khisaeva and M. Ostoja-Starzewski. On the size of rve in finite elasticity of random composites. *Journal of Elasticity*, 37, 2006.
- [55] V.G Kouznetsova, M. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4) :557–598, 2004.
- [56] V.G. Kouznetsova, M.G.D Geers, and W.A.M. Brekelmans. Advanced constitutive modeling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :1235–1260, 2002.
- [57] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with gradient enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :1235–1260, 2002.
- [58] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5525–5550, 2004.
- [59] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48) :5525–5550, 2004.
- [60] S. Koyama, S. Katano, I. Saiki, and T. Iwakuma. A modification of the mori-tanaka estimate of average elastoplastic behavior of composites and polycrystals with interfacial debonding. *Mechanics of Materials*, 43(10) :538 – 555, 2011.
- [61] E. Kröner. Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta metallurgica*, 9(2) :155–161, 1961.
- [62] E. Lacoste, S. Fréour, and F. Jacquemin. On the validity of the self-consistent scale transition model for inclusions with varying morphologies. *Mechanics of Materials*, 42(2) :218–226, 2010.
- [63] D.C. Lagoudas, A.C. Gavazzi, and H. Nigam. Elastoplastic behavior of metal matrix composites based on incremental plasticity and the mori-tanaka averaging scheme. *Computational Mechanics*, 8(3) :193–203, 1991.

- [64] N. Lahellec, F. Mazerolle, and J.C. Michel. Second-order estimates for the macroscopic behavior of periodic hyperelastic composites : theory and experimental validation. *J. Mech. Phys. Solids*, 52 :27–49, 2004.
- [65] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9) :1932–1963, 2007.
- [66] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II : A second-order procedure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9) :1964–1992, 2007.
- [67] N. Lahellec and P. Suquet. Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non-radial loadings. *International Journal of Plasticity*, 42 :1–30, 2013.
- [68] O. Lopez-Pamies and P. Ponte Castañeda. Second-order estimates for the macroscopic response and loss of ellipticity in porous rubbers at large deformations. *J. Elast.*, 76(3) :247–287, 2004.
- [69] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6) :1203–1227, 2000.
- [70] K. Matouš and A.M. Maniatty. Finite element formulation for modelling large deformations in elasto-viscoplastic polycrystals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(14) :2313–2333, 2004.
- [71] S. Mercier and A. Molinari. Homogenization of elastic–viscoplastic heterogeneous materials : Self-consistent and mori-tanaka schemes. *International Journal of Plasticity*, 25(6) :1024–1048, 2009.
- [72] J.-C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25) :6937–6955, 2003.
- [73] G.W. Milton and S.K. Serkov. Bounding the current in nonlinear conducting composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :1295–1324, 2000.
- [74] A. Molinari, G.R. Canova, and S. Ahzi. A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metallurgica*, 35(12) :2983–2994, 1987.
- [75] A. Molinari, F.E. Houdaigui, and L.S. Tóth. Validation of the tangent formulation for the solution of the non-linear eshelby inclusion problem. *International Journal of Plasticity*, 20(2) :291–307, 2004.
- [76] I. Monetto and W.J. Drugan. A micromechanics-based non local constitutive equation and minimum rve size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 :1578–1595, 2009.

- [77] E. Monteiro, J. Yvonnet, and Q.-C. He. Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction. *Computational Materials Science*, 42 :704–712, 2008.
- [78] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5) :571–574, 1973.
- [79] M. Mosby and K. Matouš. Hierarchically parallel coupled finite strain multiscale solver for modeling heterogeneous layers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4) :748–765, 2015.
- [80] H. Moulinec and P. Suquet. Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites : a computational approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22(5) :751–770, 2003.
- [81] S. Nemat-Nasser. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Solids*. Elsevier, 1993.
- [82] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, 2013.
- [83] S. Nemat-Nasser and M. Obata. Rate-dependent, finite elasto-plastic deformation of polycrystals. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 407, pages 343–375. The Royal Society, 1986.
- [84] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. A multilevel computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities. *Comput. Meth. Appl. Mech. eng.*, 198 :2099–2110, 2009.
- [85] V.-D. Nguyen and L. Noels. Computational homogenization of cellular materials. *Int. J. Solids Struct.*, 51(11-12) :2183–2203, 2014.
- [86] I. Niyonzima, R. Sabariego, P. Dular, and C. Geuzaine. Nonlinear computational homogenization method for the evaluation of eddy currents in soft magnetic composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2) :61–64, 2014.
- [87] M. Ostoja-Starzewski. Material spatial randomness : from statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21 :112–132, 2006.
- [88] N.S. Ottosen and M. Ristinmaa. *Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier Science Ltd, 2005.
- [89] A. Ouaar and I. Doghri. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures, study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :1681–1712, 2003.
- [90] R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, R. De Borst, and W.A.M. Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44) :7723–7746, 2001.

- [91] C. Pelissou, J. Baccou, Y. Monerie, and F. Perales. Determination of the size of the representative volume element for random quasi-brittle composites. *International Journal of Solids and Structures*, 46(14-15) :2842 – 2855, 2009.
- [92] V. Pensée and Q.-C. He. Generalized self-consistent estimation of the apparent isotropic elastic moduli and minimum representative volume element size of heterogeneous media. *International Journal of Solids and Structures*, 44(7) :2225–2243, 2007.
- [93] H.E. Pettermann, C.O. Huber, M.H. Luxner, S. Nogales, and H.J. Bohm. An incremental mori-tanaka homogenization scheme for finite strain thermoelastoplasticity of mmcs. *Materials*, 3(1) :434–451, 2010.
- [94] K. Pham, V.G. Kouznetsova, and M.G.D. Geers. Transient computational homogenization for heterogeneous materials under dynamic excitation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(11) :2125–2146, 2013.
- [95] O. Pierard and I. Doghri. An enhanced affine formulation and the corresponding numerical algorithms for the mean-field homogenization of elastoviscoplastic composites. *International journal of plasticity*, 22(1) :131–157, 2006.
- [96] O. Pierard and I. Doghri. Study of various estimates of the macroscopic tangent operator in the incremental homogenization of elastoplastic composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 4(4), 2006.
- [97] P. Ponte-Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :45–71, 1991.
- [98] P. Ponte-Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [99] P. Ponte-Castañeda. A new variational principle and its application to nonlinear heterogeneous systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(5) :1321–1341, 1992.
- [100] P. Ponte-Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [101] P. Ponte-Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [102] P. Ponte-Castañeda and E. Tiberio. Second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(6-7) :1389–1411, 2000.
- [103] G.L. Povirk. Incorporation of microstructural information into models of two-phase materials. *Acta metallurgica et materialia*, 43(8) :3199–3206, 1995.

- [104] Y.P. Qiu and G.J. Weng. A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *Int. J. Plasticity*, 59 :261–268, 1992.
- [105] J. Qu and M. Cherkaoui. *Fundamentals of Micromechanics of Solids*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2006.
- [106] J.F. Rakow and A.M. Waas. Size effects in metal foam cores for sandwich structures. *AIAA Journal*, 42 :7, 2004.
- [107] I.S. Ranganathan and M. Ostoja-Starzewski. Scaling function, anisotropy and the size of rve in elastic random polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 :2773–2791, 2008.
- [108] Z.Y. Ren and Q.S. Zheng. A quantitative study of minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals - numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :881–893, 2002.
- [109] J. Renard and M.F. Marmonier. Etude de l’initiation de l’endommagement dans la matrice d’un matériau composite par une méthode d’homogénéisation. *Aerospace Science and Technology*, 9 :36–51, 1987.
- [110] S. Roussette, J.C. Michel, and P. Suquet. Non uniform transformation field analysis of elastic-viscoplastic composites. *Composites Science and Technology*, 69 :22–27, 2009.
- [111] S. Swaminathan S and S. Ghosh. Statistically equivalent representative volume elements for unidirectional composite microstructures : II. with interfacial debonding. *Journal of Composite Materials*, 49 :605–621, 2006.
- [112] K. Sab and B. Nedjar. Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Comptes Rendus Mecanique*, 333 :187–195, 2005.
- [113] G. Sachs. Zur ableitung einer fließ bedingung. *Zeichschrift der Verein deutscher Ingenieur*, 72 :734–736, 1928.
- [114] A. Salahouelhadj and H. Haddadi. Estimation of the size of the rve for isotropic copper polycrystals by using elastic-plastic finite element homogenisation. *Computational Materials Science*, 48(3) :447 – 455, 2010.
- [115] M. Salmi, F. Auslender, M. Bornert, and M. Fogli. Various estimates of representative volume element sizes based on a statistical analysis of the apparent behavior of random linear composites. *Comptes Rendus Mecanique*, 340 :230–246, 2012.
- [116] J. Segurado, R.A Lebensohn, J. LLorca, and C.N Tomé. Multiscale modeling of plasticity based on embedding the viscoplastic self-consistent formulation in implicit finite elements. *International Journal of Plasticity*, 28(1) :124 – 140, 2012.
- [117] J.C. Simo and T.J.R. Hugues. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.

- [118] R. Smit, W. Brekelmans, and H. Meijer. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :181–192, 1998.
- [119] C. Soize. Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23 :307–323, 2008.
- [120] P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(6) :981–1002, 1993.
- [121] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with ponte castañeda’s nonlinear variational procedure. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 320(11) :563–571, 1995.
- [122] P. Suquet. *Continuum micromechanics*. Springer, 1997.
- [123] P. Suquet. Effective properties for nonlinear composites. *In : CISM Lecture Notes*, 377 :197–264, 1997.
- [124] S. Swaminathan, S. Ghosh, and N.J. Pagano. Statistically equivalent representative volume elements for unidirectional composite microstructures : I. without damage. *Journal of Composite Materials*, 40 :583–604, 2006.
- [125] N. Takano, M. Zako, and Y. Ohnishi. Macro-micro uncoupled homogenization procedure for microscopic nonlinear behavior analysis of composites. *Materials Science Research International*, 2(2) :81–86, 1996.
- [126] D.R.S. Talbot and J.R. Willis. Variational principles for inhomogeneous non-linear media. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 35(1) :39–54, 1985.
- [127] D.R.S. Talbot and J.R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites. *IMA journal of applied mathematics*, 39(3) :215–240, 1987.
- [128] D.R.S. Talbot and J.R. Willis. Some simple explicit bounds for the overall behaviour of nonlinear composites. *International journal of solids and structures*, 29(14) :1981–1987, 1992.
- [129] G.I Taylor. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, 62 :307–324, 1938.
- [130] A. Tchalla, W.L. Azoti, Y. Koutsawa, A. Makradi, S. Belouettar, and H. Zahrouni. Incremental mean-fields micromechanics scheme for non-linear response of ductile damaged composite materials. *Comp. Part B-Eng.*, 69 :169–180, 2015.
- [131] A. Tchalla, S. Bellouettar, A. Makradi, and H. Zahrouni. An abaqus toolbox for multiscale finite element computation. *Composites Part B : Engineering*, 52 :323–333, 2013.

- [132] I. Temizer. Multiscale thermomechanical contact : Computational homogenization with isogeometric analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(8) :582–607, 2014.
- [133] I. Temizer and P. Wriggers. An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35-36 :3409–3423, 2007.
- [134] K. Terada, N. Hirayama, J. Kato, T. Kyoya, S. Matsubara, Y. Yarakawa, Y. Ueno, and N. Miyanaga. An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity. *Advanced Composite Materials*, 23(5-6) :421–450, 2014.
- [135] K. Terada, J. Kato, N. Hirayama, T. Inugai, and K. Yamamoto. A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme : application to hyperelastic composite materials. *Computational Mechanics*, 52(5) :1199–1219, 2013.
- [136] K. Terada and N. Kikuchi. Nonlinear homogenization method for practical applications, in S. Ghosh, M. Ostoja-Starzewski (Eds.), Computational Methods in Micromechanics. *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, AMD-Vol.212/MD-vol.62 :1–6, 1995.
- [137] K. Terada and N. Kikuchi. A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :5427–5464, 2001.
- [138] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, 2001.
- [139] A. B. Tran, J. Yvonnet, Q-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A simple computational homogenization method for structures made of heterogeneous linear viscoelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(45-46) :2956–2970, 2011.
- [140] P.K. Valavala, G.M. Odegard, and E.C. Aifantis. Influence of representative volume element size on predicted elastic properties of polymer materials. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17 :045004, 2009.
- [141] J.R. Willis. The overall response of composite materials. *ASME J. Appl. Mech.*, 50 :1202–1209, 1983.
- [142] J.R. Willis. Upper and lower bounds for non-linear composite behaviour. *Materials Science and Engineering : A*, 175(1) :7–14, 1994.
- [143] L. Wu, L. Noels, L. Adam, and I. Doghri. A multiscale mean-field homogenization method for fiber-reinforced composites with gradient-enhanced damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233 :164–179, 2012.

- [144] L. Wu, L. Noels, L. Adam, and I. Doghri. A combined incremental-secant mean-field homogenization scheme with per-phase residual strains for elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity*, 51 :80–102, 2013.
- [145] L. Wu, L. Noels, L. Adam, and I. Doghri. An implicit-gradient-enhanced incremental-secant mean-field homogenization scheme for elasto-plastic composites with damage. *Int. J. Solids Struct.*, 50(24) :3843–3860, 2013.
- [146] J. Yvonnet, D. Gonzalez, and Q.-C. He. Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2723–2737, 2009.
- [147] J. Yvonnet and Q.-C. He. The reduced model multiscale method (R3M) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223 :341–368, 2007.
- [148] J. Yvonnet, E. Monteiro, and Q.-C. He. Computational homogenization method and reduced database model for hyperelastic heterogeneous structures. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 11(3) :201–225, 2013.
- [149] D. Zäh and C. Miehe. Computational homogenization in dissipative electro-mechanics of functional materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 :487–510, 2013.
- [150] A. Zaoui. Continuum micromechanics : survey. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8) :808–816, 2002.
- [151] A. Zaoui and R. Masson. Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals : an affine formulation. *Materials Science and Engineering : A*, 285(1) :418–424, 2000.
- [152] A. Zaoui and R. Masson. Modelling stress-dependent transformation strains of heterogeneous materials. In *IUTAM symposium on transformation problems in composite and active materials*, pages 3–15. Springer, 2002.
- [153] T.I. Zhodi and P. Wriggers. On the sensitivity of homogenized material responses at infinitesimal and finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16 :657–670, 2000.
- [154] R. Zouari, A. Benhamida, and H. Dumontet. micromechanical iterative approach for the behavior of polydispersed composites. *Int. J. Struct.*, 45(11-12) :3139–3152, 2008.