HAL
open science

Etude et modélisation de la turbulence homogène stratifiée instable

Alan Burlot

▶ To cite this version:

Alan Burlot. Etude et modélisation de la turbulence homogène stratifiée instable. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ECDL0038 . tel-01306253

HAL Id: tel-01306253
https://theses.hal.science/tel-01306253v1

Submitted on 22 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2015-38

École doctorale n° 162 : Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Doctorat de l'Université de Lyon

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École centrale de Lyon

Spécialité "Mécanique des fluides"

présentée par

Alan Burlot

soutenue publiquement le 9 décembre 2015

Étude et modélisation de la turbulence homogène stratifiée instable

Jury

Claude Cambon,	Directeur de recherche, LMFA	Examinateur
Jean-Marc Chomaz,	Directeur de recherche, LadHyX	Examinateur
Bérengère Dubrulle,	Directrice de recherche, CNRS–CEA	Rapporteur
Fabien Godeferd,	Directeur de recherche, LMFA	Directeur de thèse
Benoît-Joseph Gréa,	Ingénieur de recherche, CEA	Encadrant de thèse
Daniel Livescu,	Ingénieur de recherche, Los Alamos	Examinateur
Jacques Magnaudet,	Directeur de recherche, IMFT	Rapporteur
Julian Scott,	Professeur des universités, ECL	Examinateur

CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, F-69134 Ecully, France

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la turbulence homogène stratifiée instable, un écoulement idéalisé décrivant l'évolution de la turbulence au sein d'une zone de mélange de type Rayleigh-Taylor. Cette approche se concentre sur l'évolution des quantités fluctuantes ; l'influence de l'écoulement moyen est prise en compte au travers d'un gradient moyen de densité. Un modèle spectral est utilisé pour étudier cette turbulence, conjointement à des simulations numériques directes. En comparaison avec ces simulations, l'étape de validation du modèle met en lumière le rôle des termes de stratification sur la dynamique du transfert d'énergie. Une première étude montre l'établissement, dans l'état autosemblable, de lois d'échelles ainsi que l'influence de la distribution initiale d'énergie sur l'état asymptotique et sur l'anisotropie de l'écoulement. Dans une seconde étude, la rétroaction de la turbulence sur le gradient moyen est introduite, dans un premier temps, afin de rapprocher la dynamique autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable de celle observée en turbulence Rayleigh-Taylor. Dans un second temps, l'influence d'un renversement de la stratification sur la dynamique du mélange est étudiée au travers d'un profil d'accélération variable.

Mots-clés Mélange, turbulence, stratification, instabilité de Rayleigh-Taylor, modèle spectral, EDQNM, DNS

Abstract

This thesis is dedicated to the study of unstably stratified homogeneous turbulence. This flow is an idealized framework introduced to investigate the turbulence developing at the centerline of a Rayleigh-Taylor mixing zone. This approach focuses on turbulent quantities, when the mean flow acts on the turbulent field through a mean density gradient. A spectral model and direct numerical simulations are used to study this turbulent flow. The validation step reveals the role of stratification terms on the energy transfer dynamic. Then, a first study shows the emergence of scaling laws in the self-similar state, together with the large scale energy distribution impact on the asymptotic state and on the flow anisotropy. In a second study, the turbulent retroaction on the mean density gradient is introduced in order to bring unstably stratified homogeneous turbulence closer to the Rayleigh-Taylor turbulence dynamics. This step leads to investigate the consequences of a stratification inversion on the mixing dynamics through a variable acceleration profile.

Keywords Mixing, turbulence, stratification, Rayleigh-Taylor instability, spectral modeling, EDQNM, DNS

Remerciements

Je remercie en premier lieu Benoît-Joseph Gréa, en tant qu'encadrant au CEA, pour son engagement constant et son implication au cœur de ma thèse. Les nombreux échanges que nous avons eu pendant ces trois années ont joué un rôle clé dans l'avancement et l'obtention de ces résultats.

Je remercie également mon directeur de thèse, Fabien Godeferd, avec qui nous avons pu garder des échanges réguliers malgré la distance entre Lyon et Paris. J'ai pu compter sur ces éclaircissements pour comprendre la technique de l'EDQNM et certains mystères de la turbulence.

Je tiens aussi à remercier Claude Cambon en sa qualité de co-encadrant officieux pour les nombreux échanges que nous avons eus. Ces travaux de thèse ont notamment profité de sa connaissance profonde des rouages de l'EDQNM, ou plutôt du modèle spectral anisotrope dans son ensemble.

Je remercie l'ensemble des membres du jury d'avoir accepter d'assumer ce rôle d'examinateur. Je remercie les rapporteurs, Bérengère Dubrulle et Jacques Magnaudet, de s'être attelé à la lecture de mon manuscrit et pour les remarques et commentaires détaillés.

Je remercie Jérôme Griffond, Olivier Soulard et Antoine Llor pour les nombreux échanges et la collaboration étroite que nous avons menée afin de comprendre les fondements de la turbulence USH en couplant nos différentes approches.

Je remercie Stéphane Bernard et les membres du service de m'avoir accueilli. Je remercie aussi les membres du LMFA pour leurs conseils et remarques. Une mention spéciale pour la personne du CEA, que je n'ai jamais rencontrée, qui a validé mes demandes de conférences/formations et m'a ainsi permis de découvrir Les Houches, Porquerolles, Puy Saint-Vincent, Cargèse, Copenhague, Cambridge et Melbourne.

Je remercie mes compagnons doctorants, désormais docteurs pour certains, stagiaires et post-doc sans qui ces trois années n'auraient certainement pas été les mêmes. Merci à Thibaud, Guillaume, Raphaël, Clément, Nicolas, Anaïs, Alexis, Lucile, Florian et toutes celles et ceux qui ont foulé notre bien-aimé couloir. Un remerciement particulier à Claire de s'être patiemment occupée de nous.

Je remercie finalement toutes les personnes qui m'ont accompagné, conseillé et écouté au cours de ma thèse. Et merci à mes amis et ma famille pour leur soutien indéfectible.

Table des matières

Résumé **i**

Table des matières **v**

1 Problématique générale **1**

1.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor 1

1.1.1 Description du phénomène 1

1.1.2 Revue historique 2

1.1.3 Vers une représentation complémentaire de la turbulence Rayleigh-Taylor 6

1.2 La turbulence homogène stratifiée instable 8

1.2.1 Principe et hypothèses 8

1.2.2 Système d'équations 9

1.2.3 Taille de zone de mélange en turbulence USH 12

1.2.4 État autosemblable en turbulence USH 13

1.3 Effets d'accélération variable 15

1.4 Organisation du manuscrit 18

2 Principe d'un modèle spectral anisotrope pour la turbulence homogène stratifiée instable **19**

2.1 Introduction 19

2.2 Description formelle du modèle EDQNM pour le cas homogène isotrope . . . 21

2.3 Principe de la fermeture EDQNM pour la turbulence homogène stratifiée instable 25

2.3.1 Équations des corrélations doubles 26

2.3.1.1 Équations dans le repère fixe 26

2.3.1.2 Équations dans le repère de Craya-Herring 27

2.3.2 Équations des corrélations triples 28

2.4 De la stratification stable à la stratification instable 31

2.5 Implémentation numérique 32

2.5.1 Diagonalisation du système linéaire 33

2.5.2 Schéma temporel 34
2.5.3 Maillage de l'espace spectral 35
2.5.4 Intégration des termes de transfert 37
2.5.5 Parallélisation et performance 38
2.6 Validation préliminaire du modèle spectral pour la turbulence USH 39
2.7 Conclusion 42

3 Validation du modèle spectral anisotrope et prémices d'un état auto-semblable 45
3.1 Introduction 45
3.2 Validation du modèle : procédure et premiers résultats 46
3.2.1 Méthodologie 46
3.2.1.1 Procédure d'initialisation des simulations en stratification instable 46
3.2.1.2 Initialisation des simulations en THI 47
3.2.1.3 Nombres adimensionnels de l'écoulement 49
3.2.2 Comparaisons des résultats de simulation 49
3.2.2.1 Évolution des nombres adimensionnels 50
3.2.2.2 Statistiques en un point 51
3.2.2.3 Spectres d'énergie 53
3.2.2.4 Transferts d'énergie 54
3.2.3 Origine de l'écart entre modèle et simulation numérique directe . . 54
3.2.3.1 Moyenne d'ensemble contre réalisation unique ? 55
3.2.3.2 Confinement aux grandes échelles ? 57
3.2.3.3 Influence de la forme initiale du spectre ? 59
3.2.3.4 Effet de la stratification sur la dynamique des corrélations triples ? 59
3.2.3.5 Bilan sur l'origine de l'écart 63
3.3 Correction du modèle 63
3.3.1 Temps caractéristique actualisé 64
3.3.2 Détermination de la constante supplémentaire 64
3.3.2.1 Fonction de coût 65
3.3.2.2 Méthode de Newton 65
3.3.3 Résultats de l'optimisation 66
3.3.3.1 Écart sur l'énergie cinétique 66
3.3.3.2 Répercussion sur les nombres sans dimension 68
3.3.3.3 Correction sur les spectres 70
3.3.3.4 Influence de la correction sur l'anisotropie 72

3.3.4 Validation complémentaire sur la variation de la pente du spectre infrarouge . . . 73
3.3.4.1 Statistiques en un point : énergie cinétique, nombres sans dimension et anisotropie . . . 74
3.3.4.2 Spectres et transferts d'énergie . . . 77
3.3.4.3 Bilan de l'influence de la zone infrarouge . . . 78
3.3.5 Discussion des propriétés de la correction . . . 78
3.4 Résultats à grand nombre de Reynolds . . . 79
3.4.1 État autosemblable . . . 81
3.4.1.1 Évolution des nombres adimensionnels . . . 81
3.4.1.2 Statistique en un point : énergie cinétique, variance de flottaison et flux . . . 84
3.4.1.3 Statistique en deux points : densités spectrales . . . 85
3.4.2 Anisotropie . . . 88
3.4.2.1 Mesure globale de l'anisotropie . . . 88
3.4.2.2 Répartition angulaire de l'anisotropie . . . 91
3.5 Conclusion . . . 94

4 États autosemblables en turbulence homogène stratifiée instable 97
4.1 Problématique des grandes échelles . . . 97
4.2 Initialisation des simulations . . . 101
4.2.1 Méthodologie . . . 101
4.2.2 Simulations EDQNM . . . 101
4.2.3 DNS à haute résolution . . . 102
4.3 Résultats de simulation . . . 103
4.3.1 Différents régimes d'écoulement . . . 103
4.3.1.1 Caractérisation par les nombres sans dimension . . . 103
4.3.1.2 Taux de croissance de l'énergie cinétique, de la variance de flottaison et du flux de flottaison . . . 107
4.3.2 Spectres en évolution autosemblable . . . 112
4.3.2.1 Spectres des corrélations doubles . . . 112
4.3.2.2 Transferts d'énergie cinétique et de variance de flottaison . 113
4.3.2.3 Spectres compensés aux grandes échelles . . . 117
4.3.2.4 Lois d'échelle dans la zone inertielle . . . 121
4.3.3 Évolution de l'anisotropie de l'écoulement . . . 127
4.3.3.1 Structuration de l'écoulement en régime autosemblable . . 127
4.3.3.2 Anisotropie échelle par échelle . . . 133
4.3.3.3 Décomposition anisotrope du spectre d'énergie . . . 137
4.3.4 Comparaison avec la méthode perturbative . . . 138

4.4 Conclusion 140

5 Effets de stratification et d'accélération variables sur le mélange turbulent 143

5.1 Introduction 143
5.2 Nouvelles équations pour la turbulence USH 145
5.2.1 Équation de la taille de la zone de mélange 145
5.2.2 Variation de l'accélération 146
5.2.3 Termes supplémentaires dans l'équation de la vitesse de flottaison . 147
5.2.4 Changement de l'étape de markovianisation 148
5.2.5 Modification numérique 149
5.3 Lois d'échelle pour la turbulence homogène stratifiée instable à gradient variable 150
5.4 Rétroaction de la turbulence sur le gradient moyen 153
5.4.1 Choix d'initialisation 153
5.4.2 Validation du modèle EDQNAM 154
5.4.3 Bilan 159
5.5 Effets d'accélération variable sur la croissance de la zone de mélange 159
5.5.1 Initialisation 160
5.5.2 Résultats 161
5.5.2.1 Croissance de la taille de la zone de mélange 162
5.5.2.2 Évolution des statistiques en un point 163
5.5.2.3 Dynamique des taux de mélange et de croissance 165
5.5.2.4 Anisotropie : déformation des structures 166
5.5.3 Bilan 167
5.6 Conclusion 168

6 Conclusion et perspectives 171

A Corrélations doubles : définition et propriétés 177

A.1 Définition 177
A.2 Représentation dans l'espace de Fourier 178
A.3 Repère de Craya-Herring : définition et relations utiles 180
A.3.1 Définition et simplification 180
A.3.2 Relations angulaires 182
A.4 Intégration sphérique 186
A.5 Décomposition isotrope-anisotrope du tenseur des corrélations doubles . . . 187

B Détails des équations pour les corrélations doubles **189**
B.1 Équation pour la corrélation double de vitesse 189
B.2 Équation pour la corrélation croisée flottaison-vitesse 190
B.3 Équation pour la variance de scalaire 191

C Détails des équations pour les corrélations triples **195**
C.1 Equation d'évolution de la corrélation triple de vitesse 195
C.2 Equation d'évolution de la corrélation triple scalaire-vitesse-vitesse 200
C.3 Equation d'évolution de la corrélation triple scalaire-scalaire-vitesse 203

D Évolution détaillée des spectres de transfert **207**

Bibliographie **211**

Chapitre 1

Problématique générale

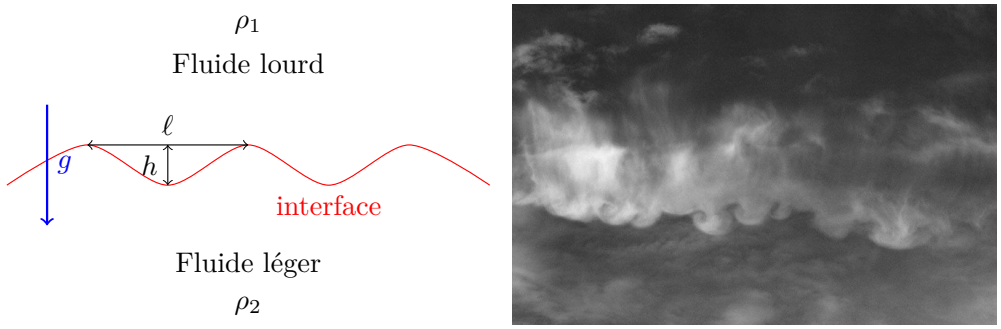
L'objectif de cette introduction générale est de poser les bases physiques des écoulements étudiés. On présente les fondements associés à l'instabilité de Rayleigh-Taylor avant de s'intéresser à la turbulence homogène stratifiée instable. On termine par évoquer le cas particulier d'un mélange turbulent soumis à des effets d'accélération variable.

1.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor

Comprendre les mécanismes régissant le mélange turbulent dans les écoulements est au cœur de nombreux travaux depuis les premières recherches en hydrodynamique [32]. La configuration qui nous intéresse dans le cadre de ces travaux de recherche est le mélange de fluides de densités différentes soumis à un champ d'accélération. Lorsque la stratification de densité est instable, un phénomène physique particulier se manifeste : l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

1.1.1 Description du phénomène

L'instabilité de Rayleigh-Taylor apparaît à l'interface entre deux fluides de masses volumiques différentes soumis à un champ d'accélération normal à l'interface. Cette configuration initiale est présentée à la figure 1.1(a). Lorsque le fluide léger est accéléré dans le fluide lourd, toute perturbation de l'interface est amplifiée et entraîne la formation d'un écoulement. Cette amplification est due au fait que les gradients de pression et de densité ne sont plus alignés à l'interface. Il y a alors création de vorticité qui tend à mélanger les deux fluides, s'ils sont miscibles. Pour que l'instabilité apparaisse, il importe que le produit de l'accélération et du gradient de densité soit négatif, $g_i \partial_i \rho < 0$. Ainsi, l'écoulement de Rayleigh-Taylor peut apparaître lorsque deux fluides au repos en stratification stable, c'est-à-dire le fluide léger placé au dessus du fluide lourd, sont propulsés « vers le bas ».



(a) Configuration Rayleigh-Taylor. (b) Nuage de type « cirrus ».

FIGURE 1.1 – (a) Écoulement Rayleigh-Taylor avec un fluide lourd ρ_1 et un fluide léger ρ_2 soumis à une accélération g. On définit h l'amplitude de la perturbation et ℓ sa longueur d'onde ; (b) Exemple de phénomène naturel lié à l'instabilité de Rayleigh-Taylor : les nuages de type cirrus (extrait de ANDREWS et DALZIEL [2]).

La stratification instable crée un puits d'énergie potentielle dans le fluide lourd. Dans l'évolution de l'écoulement, on a une conversion de cette énergie potentielle en énergie cinétique liée à la mise en mouvement des deux fluides. Le système tend vers un état d'équilibre correspondant au mélange des deux fluides dans un cas miscible ou à l'inversion de la configuration de la figure 1.1(a) avec le fluide lourd sous le fluide léger dans un cas non miscible.

Un paramètre fondamental associé à l'écoulement est le nombre d'Atwood défini par

$$\mathcal{A} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \tag{1.1}$$

avec les masses volumiques ρ_1 du fluide lourd et ρ_2 du fluide léger. Il décrit le contraste relatif de masse volumique entre les deux fluides. Ce paramètre joue un rôle dans le développement de la zone de mélange identifiable dans l'écoulement. Dans le cadre de nos travaux, on fera l'hypothèse d'un nombre d'Atwood faible, $\mathcal{A} \ll 1$.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor se rencontre dans de nombreuses configurations, en astrophysique dans l'explosion de supernovæ [33, 13], en géophysique dans l'ionosphère [88] ou dans les remontées d'eau froide près des côtes [25]. Cette instabilité apparaît également en ingénierie au travers de la fusion par confinement inertiel [48, 23] et dans des procédés de soudage industriel [52].

1.1.2 Revue historique

Les premiers travaux sur cette instabilité sont à mettre au compte de RAYLEIGH [101] en 1882. Il étudia expérimentalement le mélange entre de l'eau chaude salée et de l'eau froide claire. Il avait pour objectif de comprendre la formation des nuages appelés cirrus

(figure 1.1b) qu'avait décrit JEVONS [54] en 1857. Il mit en évidence un mécanisme quelque peu plus complexe appelé « double diffusion » qui fait apparaître des « doigts de sel » [107, 108].

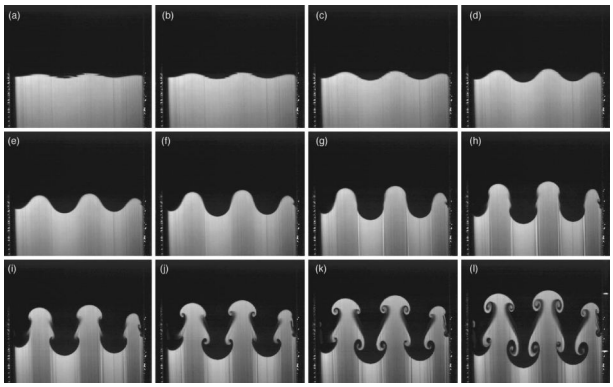
Les travaux de Rayleigh furent redécouverts indépendamment en 1950 lorsque TAYLOR [119] posa les bases théoriques et analytiques du développement de petites perturbations à l'interface entre deux fluides lorsque le fluide léger est accéléré dans le fluide lourd. Il utilisa la théorie de la stabilité linéaire : en considérant des perturbations dont l'amplitude initiale h_0 est très faible devant la longueur d'onde ℓ de la perturbation, Taylor montre que cette amplitude h croît de façon exponentielle d'après la relation

$$h(t) = h_0 \cosh(\gamma t) \tag{1.2}$$

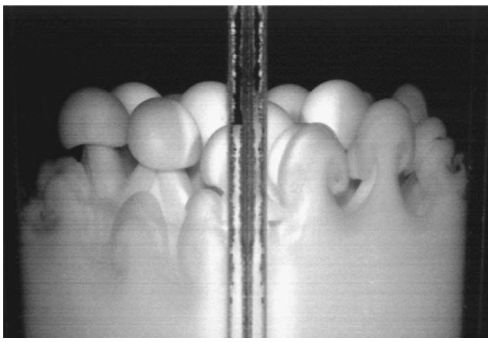
avec $\gamma = \sqrt{\mathcal{A}gk}$. On retrouve le nombre d'Atwood $\mathcal{A}$ défini précédemment, l'accélération g et le nombre d'onde k défini tel que $\ell = 2\pi/k$. Ce résultat est obtenu par Taylor dans l'approximation de fluide non visqueux et sans tension de surface. On doit à BELLMAN et PENNINGTON [9] l'extension de ce résultat en tenant compte de ces deux contraintes supplémentaires. On retrouve l'ensemble des développements analytiques dans le livre de CHANDRASEKHAR [20, chapitre 10]. La confirmation expérimentale de cette première phase de croissance exponentielle de l'instabilité est donnée par LEWIS [75]. Il établit que cette phase initiale prend fin lorsque l'amplitude h atteint $0{,}4 \times \ell$. SHARP [109] donne également une limite basse de $0{,}1 \times \ell$. La théorie linéaire ne s'applique plus au delà de cette limite signifiant ainsi que des phénomènes de couplage non linéaires font leur apparition.

Rapidement, une nouvelle théorie émergea pour caractériser la phase qui suit cette première croissance exponentielle. D'après DAVIES et TAYLOR [26] et LAYZER [70], la seconde phase est caractérisée par une croissance linéaire en temps. Layzer considère un tube de fluide dans lequel une perturbation de l'interface entre les deux fluides donne naissance à l'apparition d'une bulle. Il montre que cette bulle atteint une vitesse limite qui permet de conclure que la croissance de l'instabilité est linéaire par rapport au temps. D'après WILKINSON et JACOBS [124], cette deuxième phase prend fin lorsque l'amplitude atteint la limite $h \simeq 0{,}75 \times \ell$.

Cette phase se caractérise par des effets liés au nombre d'Atwood. Deux cas de figure se distinguent. D'une part, le cas d'un nombre d'Atwood grand, $\mathcal{A} \lesssim 1$, fait apparaître une dissymétrie dans l'écoulement avec le fluide léger se développant sous forme de bulles et le fluide lourd sous forme d'aiguilles. D'autre part, le cas d'un nombre d'Atwood faible, $\mathcal{A} \gtrsim 0$, montre une évolution symétrique avec l'apparition de bulles pour les deux fluides. La figure 1.2 présente des visualisations expérimentales de WILKINSON et JACOBS [124] avec un nombre d'Atwood relativement faible $\mathcal{A} = 0{,}15$. On observe bien sur la figure 1.2(a) que l'instabilité se développe de manière symétrique dans le fluide lourd et le fluide léger. On note également que des structures tourbillonnaires apparaissent à l'interface entre les



(a) Développements de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.



(b) Visualisation 3D des « champignons »

FIGURE 1.2 – Extrait de WILKINSON et JACOBS [124, p. 5-6]. La figure (a) montre le développement d'une instabilité de Rayleigh-Taylor. Le temps séparant la première photo (en haut à gauche) et la dernière (en bas à droite) est d'environ 360 ms. On voit nettement apparaître les structures montantes et descendantes avec le développement d'instabilités de Kelvin-Helmholtz dues au cisaillement entre fluide lourd et fluide léger. La figure (b) est une visualisation des structures de bulles caractéristiques de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le nombre d'Atwood est de $\mathcal{A} = 0{,}15$.

deux fluides. C'est le cisaillement entre le fluide lourd montant et le fluide léger descendant qui fait apparaître des instabilités de Kelvin-Helmholtz [20, chapitre 11]. La figure 1.2(b) montre ces bulles en trois dimensions grâce à l'ajout d'oxyde de titane dans le fluide léger.

L'initialisation de cette expérience fait intervenir un mode unique, une seule longueur d'onde. Cette question de l'initialisation est centrale. La théorie développée par LAYZER [70] ne faisait intervenir qu'un seul mode alors même que la plupart des applications font intervenir une multitude de longueurs d'onde. Par exemple, l'implosion d'un micro-ballon en fusion par confinement inertiel [47, 23] fait intervenir un grand nombre de longueur d'onde du fait de l'imperfection de la coquille contenant le combustible ainsi que de l'hétérogénéité du chauffage par laser. Les premiers modèles théoriques pour l'approche multi-modale sont apparus bien plus tard avec notamment ZUFIRIA [129] en 1988. La compréhension des mécanismes liés à cette perturbation initiale est prépondérante car elle joue un rôle déterminant dans le développement du mélange, notamment lorsque l'écoulement devient turbulent avec la domination des termes non linéaires.

Après les premières études linéaires et faiblement non linéaires des années 1950 et 1960, une nouvelle avancée apparut en 1984 avec les premières simulations numériques menées par YOUNGS [127] et les travaux expérimentaux de READ [102]. Ils ont en effet montré pour la première fois que la taille de la zone de mélange évolue au temps long selon la relation

$$h(t) = \alpha \mathcal{A} g t^2 \tag{1.3}$$

avec α le taux de croissance de la zone de mélange. Youngs montre, au moyen de simulation numérique d'un écoulement en deux dimensions, qu'une croissance autosemblable de la zone de mélange apparaît lorsque l'écoulement est contrôlé par les interactions non linéaires. Il utilise une initialisation multi-modale de très petites perturbations qui s'associent rapidement pour former des perturbations à grandes longueurs d'onde et laisser place à ce régime non linéaire. Ces résultats furent confirmés expérimentalement par Read grâce au dispositif appelé *rocket rig*. Ils semblent contredire par contre le résultat obtenu par Layzer sur la croissance linéaire de la perturbation. Linden et al. [76] en 1994 réconcilient les deux approches par l'intermédiaire d'un modèle « flottaison-trainée ».

Cette découverte de Youngs et Read est une étape majeure car elle introduit pour la première fois le taux de croissance α. Ce dernier est au cœur des recherches sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor depuis près de 30 ans. Les premières estimations numériques de Youngs donnent $\alpha \sim 0{,}03 - 0{,}04$ tandis que Read trouve expérimentalement $\alpha \sim 0{,}07$. De nombreuses recherches ont été menées par la suite, tant expérimentales que numériques, dans le but de déterminer la valeur du paramètre α. Dans ces premières approches, ce paramètre était considéré comme universel car on supposait que l'état autosemblable de la zone de mélange impliquait un oubli des conditions initiales. Pourtant, deux tendances sont rapidement apparues entre expérience et simulation où un facteur 2 sépare les mesures du taux de croissance α.

Afin d'analyser cet écart, un groupement de différents chercheurs s'est constitué en 2004 pour établir si les méthodes numériques employées peuvent justifier cette différence. Il prit le nom « α-group » [31]. Un ensemble de cas-tests fut étudié par les différents codes de calcul. Ils convergèrent vers un taux de croissance $\alpha = 0{,}025 \pm 0{,}003$ tandis que du côté expérimental, on mesurait un taux de croissance $\alpha = 0{,}057 \pm 0{,}008$. L'écart observé n'est donc pas dû aux méthodes de simulation. Dimonte et al. [31] avancent l'argument que les simulations ne prennent pas en compte l'excitation aux grandes échelles de l'interface qui intervient dans les expériences du fait du confinement des dispositifs. Ajouter artificiellement ces modes aux grandes échelles aux conditions initiales des simulations numériques permet effectivement de rapprocher le taux de croissance des simulations de la valeur expérimentale.

Pourtant, d'après Poujade et Peybernes [98], des écoulements géophysiques et astrophysiques sujets à l'instabilité de Rayleigh-Taylor sont exempts d'effets de confinements aux grandes échelles. Ce forçage aux grandes échelles n'explique donc pas tous les écarts mesurés. Dans ce contexte, Poujade et Peybernes [98] ont développé une analyse de la turbulence Rayleigh-Taylor basée sur les grandes échelles de la turbulence à la manière des travaux de Batchelor [5] pour la turbulence homogène isotrope. Ils ont établi un lien direct entre le taux de croissance α et la distribution d'énergie aux grandes échelles des structures turbulentes. Ces paramètres étant difficilement mesurables expérimentalement, Gréa [38] a également établi un lien entre le taux de croissance et deux propriétés de l'écoulement, le taux de mélange et l'anisotropie.

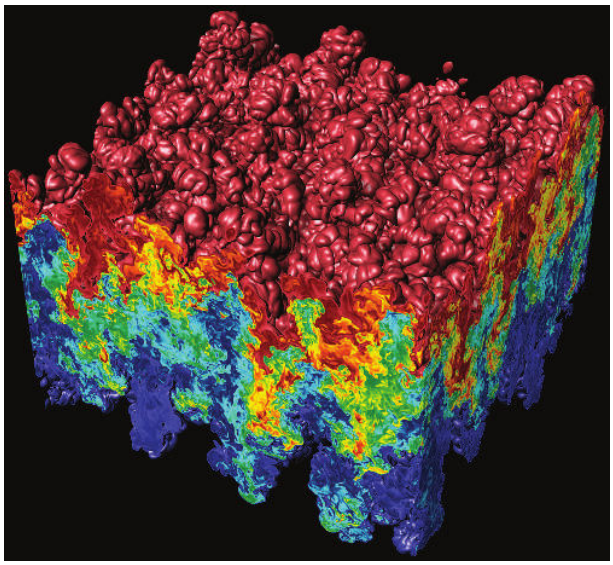


FIGURE 1.3 – Zone de mélange Rayleigh-Taylor avec le fluide lourd en rouge et le fluide léger en bleu d'après une simulation numérique directe avec 3072^3 points (extrait de CABOT et COOK [13]).

Comprendre l'évolution de la turbulence dans l'écoulement de Rayleigh-Taylor est donc primordial pour déterminer la croissance de la zone de mélange. Cependant, l'état autosemblable est rarement atteint, que ce soit expérimentalement ou numériquement. Il est en effet nécessaire d'atteindre des régimes d'écoulement à grand nombre de Reynolds pour obtenir un écoulement turbulent en état autosemblable. Par exemple, CABOT et COOK [13] ont atteint un nombre de Reynolds turbulent proche de $Re \simeq 4600$ pour un coût de calcul très important, encore loin des configurations géo- et astrophysiques et avec un état autosemblable faiblement établi. Une visualisation de la zone de mélange qu'ils ont obtenu par simulation est donnée à la figure 1.3. La complexité de la turbulence Rayleigh-Taylor rend délicate l'approche directe du problème. Dans ce contexte, des approches complémentaires ont été développées en s'affranchissant de certaines contraintes. On présente maintenant une partie de ces approches dont l'écoulement particulier qui nous intéresse dans ce manuscrit.

1.1.3 Vers une représentation complémentaire de la turbulence Rayleigh-Taylor

Nous avons vu que la caractérisation de l'état autosemblable reste ouverte dans l'étude de l'écoulement issu d'une instabilité de Rayleigh-Taylor. La complexité de cet écoulement le rend difficile à aborder de façon directe. L'inhomogénéité, l'anisotropie et la compressibilité sont une partie des multiples contraintes liées à l'écoulement de Rayleigh-Taylor. Des approches simplifiées ont été mises en œuvre afin de se concentrer sur certains aspects

particuliers de l'écoulement.

Des travaux précurseurs sur les écoulements à densité variable ont été entrepris par Batchelor et al. [6]. Ils ont étudié une turbulence homogène, en décroissance, avec scalaire passif, soumise à des effets de flottaison. Leur approche se restreint à l'approximation de Boussinesq. Cette approximation est équivalente, en turbulence Rayleigh-Taylor, à une hypothèse de nombre d'Atwood faible. Ils ont cependant identifié certains points essentiels comme l'apparition d'un état autosemblable directement lié aux propriétés des grandes échelles de la turbulence. Ils obtiennent une solution exacte en limite linéaire pour la croissance autosemblable des quantités turbulentes. Ils trouvent également que ce comportement reste valable en tenant compte des termes non linéaires.

Dans la continuité, on peut mentionner l'approche de Livescu et Ristorcelli [77] qui ont étudié un écoulement à densité variable soumis à des effets de flottaison en supprimant également la contrainte liée à l'inhomogénéité. Leur étude complète l'approche de Batchelor et al. [6] en ne faisant pas l'approximation de Boussinesq ainsi qu'en étudiant des effets de nombre de Schmidt (rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité moléculaire) et de nombre d'Atwood élevé. Ces deux approches ont en commun de s'intéresser aux quantités fluctuantes et donc aux propriétés de la turbulence. Cependant, ces écoulements ne traitent qu'une turbulence en décroissance alors que la turbulence Rayleigh-Taylor est caractérisée par une injection d'énergie cinétique qui tend à accroître le caractère turbulent de l'écoulement.

Dans cette lignée de modèle simplifiée pour l'étude d'écoulement soumis à des effets de flottaison, B.-J. Gréa, O. Soulard et J. Griffond [38, 44, 112, 45] au CEA ont introduit un écoulement canonique appelé turbulence homogène stratifiée instable à l'image de la turbulence homogène stratifiée stable. On fera référence au premier sous le nom de turbulence USH pour *unstably stratified homogeneous*. Du fait des nombreuses applications géophysiques, la communauté de la turbulence s'est principalement attachée à l'étude de la turbulence en stratification stable. On retrouve malgré tout des travaux sur la stratification instable menée par Thoroddsen et al. [121]. Ils ont fait une série d'expérience dans un canal utilisant une grille chauffante. Ce dispositif leur a surtout permis de faire des expériences en turbulence stratifiée stable en chauffant la partie supérieure de la grille. Le cas instable a été abordé simplement en retournant cette grille chauffante. Ils observent l'apparition de cellules de convection dues à une instabilité de Rayleigh-Bénard. Mais ils ont surtout mis en évidence la croissance de l'énergie cinétique du fait des effets de flottaison dans la direction verticale, une propriété également présente dans l'écoulement de Rayleigh-Taylor. Le chauffage de la grille crée un gradient de température et donc de densité qui alimente l'énergie cinétique.

L'avantage de la turbulence USH par rapport au modèle de densité variable susnommé est que l'on ne considère que des quantités fluctuantes. On peut dès lors prendre en compte l'influence de l'écoulement moyen sous la forme d'un gradient moyen de concentration. À

l'image du chauffage de la grille, il permet de modéliser l'injection d'énergie dans le système. Le modèle de densité variable prend en compte l'écoulement moyen et les fluctuations mais l'énergie décroît dans le système du fait de l'absence de gradient.

On présente maintenant cet écoulement turbulent homogène stratifié instable et en quoi il peut apporter des éléments de réponse sur les écoulements Rayleigh-Taylor.

1.2 La turbulence homogène stratifiée instable

Cet écoulement a été défini par Gréa [38], Griffond et al. [44] et Soulard et al. [112]. On rappelle les principales hypothèses de l'approche (section 1.2.1) ainsi que les équations qui régissent l'écoulement (section 1.2.2). On définit également la taille de la zone de mélange et sa relation avec la turbulence (section 1.2.3). On présente finalement des éléments relatifs à l'état autosemblable en turbulence USH (section 1.2.4).

1.2.1 Principe et hypothèses

On modélise une zone de mélange Rayleigh-Taylor par un écoulement turbulent homogène en stratification instable. La première hypothèse simplificatrice est donc l'homogénéité. Cette hypothèse est justifiée si l'échelle caractéristique des phénomènes turbulents, l'échelle intégrale ℓ, est petite devant la taille de la zone de mélange L. Dans la pratique, cette hypothèse est vérifiée notamment par Vladimirova et Chertkov [123] qui mesurent un rapport $\ell/L \approx 0{,}2$ dans une zone de mélange pleinement développée. Ce dernier point est important car l'écoulement de Rayleigh-Taylor est bien entendu inhomogène comme la figure 1.2 le montre. Livescu et Ristorcelli [77] justifie également l'homogénéité en restreignant l'étude au cœur d'une zone de mélange Rayleigh-Taylor pleinement développée.

La turbulence USH se concentre uniquement sur l'évolution des quantités turbulentes. Mais à l'image des expériences de Thoroddsen et al. [121], on prend en compte l'effet d'un gradient moyen vertical de concentration qui injecte de l'énergie de manière continu dans l'écoulement. On prend en compte ce gradient, noté Γ, au travers de la fréquence de flottaison $N = \sqrt{2\mathcal{A}g\Gamma}$ qui caractérise l'amplitude de la force de flottaison dans l'écoulement. Cette fréquence de flottaison est l'équivalent en instable de la fréquence de Brunt-Väisälä en turbulence stratifiée stable. Cette force de flottaison induit une anisotropie dans l'écoulement du fait de l'action privilégiée selon l'axe vertical. La figure 1.4 représente l'évolution du champ de concentration, dans un écoulement de turbulence USH, extrait d'une simulation numérique directe en trois dimensions employée dans ce manuscrit. On démarre d'une configuration isotrope et on observe nettement cette anisotropie avec des structures allongées qui se développent du fait de la flottaison qui agit selon l'axe vertical. On note également que la taille caractéristique des structures turbulentes croît au cours

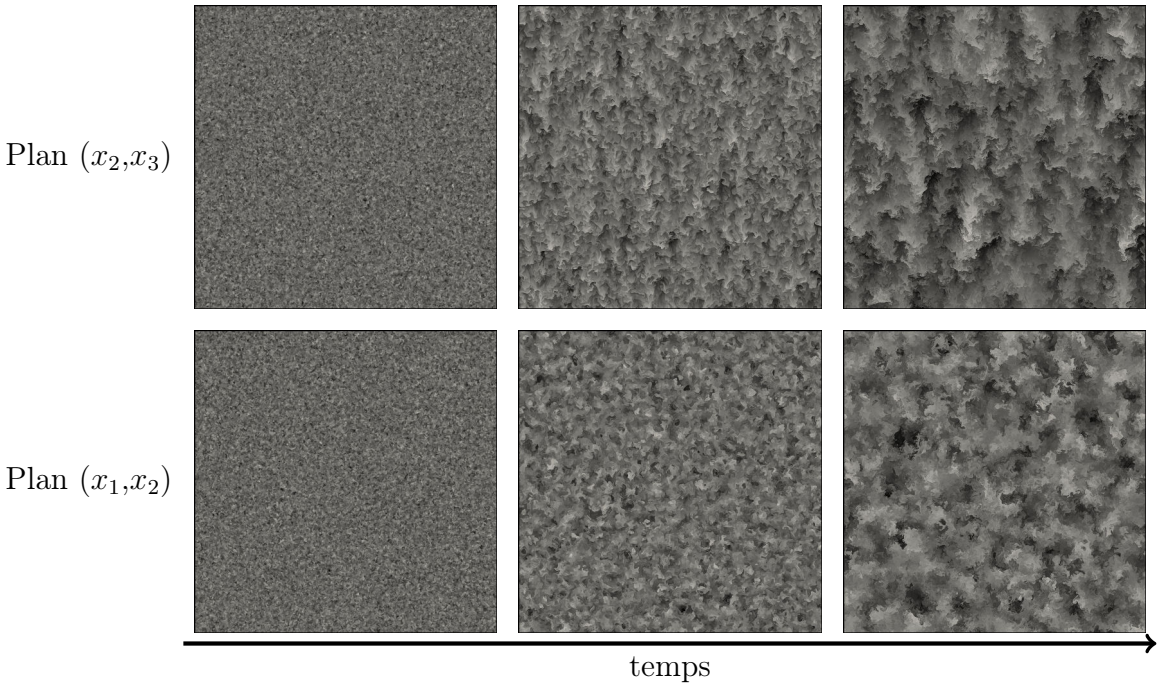


FIGURE 1.4 – Évolution temporelle du champ de concentration dans le plan vertical (x_2,x_3) (ligne supérieure) et le plan horizontal (x_1,x_2) (ligne inférieure). Extrait d'une simulation directe de turbulence USH. Le fluide léger est en noir et le fluide lourd en blanc.

du temps. Dans le plan horizontal, il n'y a pas de direction privilégiée mais on observe tout de même cette croissance de la taille des structures turbulentes.

Cette direction verticale privilégiée permet de supposer que l'écoulement est axisymétrique. On a donc une invariance des statistiques de l'écoulement pour toute rotation par rapport à un axe parallèle à l'axe vertical.

Cet écoulement canonique offre un cadre d'étude simplifié pour étudier la dynamique des écoulements entraînés par des effets de flottaison, comme en particulier une zone de mélange Rayleigh-Taylor. On présente maintenant les équations qui caractérisent l'écoulement.

1.2.2 Système d'équations

Soient les champs instantanés de vitesse $\mathbf{u}$ et de concentration du fluide lourd c. L'évolution de ces deux quantités est gouvernée par les équations de Navier-Stokes-Boussinesq. On introduit p la pression normalisée par la masse volumique ρ de référence, $\mathbf{g}$ la gravité, ν la viscosité cinématique et $\mathcal{D}$ la diffusivité moléculaire. On peut alors écrire le système d'équations :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + 2\mathcal{A}cg\delta_{i3}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{x_j} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 c}{\partial x_j^2}. \tag{1.6}$$

On note que le terme proportionnel à la concentration est positif dans l'équation (1.5). Il agit comme un terme source de quantité de mouvement. On peut relier la masse volumique de référence ρ, la concentration du mélange c et les masses volumiques des deux fluides considérés par l'expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c}{\rho_1} + \frac{1-c}{\rho_2}. \tag{1.7}$$

On rappelle que l'on cherche à obtenir les équations d'évolution des champs fluctuants. On introduit donc un opérateur de moyenne spatiale $\langle\rangle_{\mathcal{L}}$ permettant de décomposer un champ instantané q en ses parties moyennée $\langle q\rangle_{\mathcal{L}}$ et fluctuante q'. La moyenne spatiale est définie sur le plan horizontal (x_1, x_2) par

$$\langle q\rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\mathcal{L}^2}\int_0^{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}} q(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{1.8}$$

avec $\mathcal{L}$ une longueur caractéristique, telle la longueur entre les parois d'un système expérimental ou la taille du domaine de simulation. Cette définition découle de l'analyse des écoulements de Rayleigh-Taylor où l'on peut considérer que les quantités turbulentes sont homogènes dans un plan (x_1, x_2). On peut alors décomposer le système d'équations (1.4)–(1.6) pour obtenir les équations propres aux quantités fluctuantes :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + 2\mathcal{A}gc'\delta_{i3} + \frac{\partial \langle u_3' u_i'\rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial c'}{x_j} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \langle c\rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3} u_3' + \frac{\partial \langle u_3' c'\rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3}. \tag{1.11}$$

Dans l'approximation des petits nombres d'Atwood, on considère que le gradient moyen de concentration est linéaire [3]. On suppose alors qu'il est inversement proportionnel à la taille de la zone de mélange $L(t)$; on le note

$$\frac{\mathrm{d}\langle c\rangle_{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}x_3} \sim -\frac{1}{L(t)} = -\Gamma. \tag{1.12}$$

De plus, l'hypothèse d'homogénéité est justifiée si l'on peut négliger les termes $\partial\langle u_3' u_i'\rangle_{\mathcal{L}}/\partial x_3$ et $\partial\langle u_3' c'\rangle_{\mathcal{L}}/\partial x_3$ respectivement devant $u_j'\partial u_i'/\partial x_j$ et $u_j'\partial c'/x_j$. L'hypothèse déjà évoquée d'une séparation d'échelle entre la taille caractéristique des structures turbulentes et la

taille de la zone de mélange nous permet de valider la non prise en compte de ces termes. Avant de réécrire le système final, on introduit la vitesse de flottaison $\vartheta' = 2\mathcal{A}gc'/N$ avec $N = \sqrt{2\mathcal{A}g\Gamma}$. Cette notation permet d'obtenir une équation du scalaire homogène à une vitesse. On peut dès lors réécrire le système (1.9)–(1.11) :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} + N\vartheta' \delta_{i3}, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_j} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x_j \partial x_j} + N u_3'. \tag{1.15}$$

Nous avons écrit ces équations (1.14) et (1.15) dans l'espace physique. On anticipe la dérivation du modèle de turbulence détaillée au chapitre 2 en écrivant le système d'équations dans l'espace spectral. On introduit ainsi la transformée de Fourier (voir l'annexe A.2) dont l'utilisation est justifiée grâce à l'hypothèse d'homogénéité. On obtient le système d'équations pour les transformées de Fourier des champs de fluctuation de vitesse $\hat{u}_i$ et de fluctuation de flottaison $\hat{\vartheta}$:

$$k_i \hat{u}_i(\mathbf{k}) = 0, \tag{1.16}$$

$$\left(\partial_t + \nu k^2\right) \hat{u}_i(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2} P_{ijm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \, \mathrm{d}^3\mathbf{p} + N P_{i3}(\mathbf{k}) \hat{\vartheta}(\mathbf{k}), \tag{1.17}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{D} k^2\right) \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}\, k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{p}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \, \mathrm{d}^3\mathbf{p} + N \hat{u}_3(\mathbf{k}). \tag{1.18}$$

On rappelle que le vecteur $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde de l'espace spectral. On a introduit $P_{ijm}(\mathbf{k})$ appelé projecteur de Kraichnan défini par $P_{ijm}(\mathbf{k}) = k_j P_{im}(\mathbf{k}) + k_m P_{ij}(\mathbf{k})$ avec $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - (k_i k_j)/(k_i k_i)$ en notation d'Einstein.

Les systèmes d'équations (1.13)–(1.15) et (1.16)–(1.18), respectivement dans l'espace physique et l'espace spectral, décrivent l'évolution des champs fluctuants de vitesse et de concentration (au travers de la vitesse de flottaison) en turbulence homogène stratifiée instable. On a supposé que le gradient de concentration Γ et donc la fréquence de flottaison N sont fixes. D'après la relation $L = \sqrt{2\mathcal{A}g/N}$, cela revient à considérer une taille de zone de mélange constante. Or les fluctuations turbulentes ont une influence sur l'écoulement moyen et doivent être prises en compte. Les modifications qu'elles induisent seront abordées au chapitre 5. On présente ci-après comment la taille de la zone de mélange évolue en fonction des fluctuations.

1.2.3 Taille de zone de mélange en turbulence USH

On établit la relation entre l'écoulement moyen et les fluctuations au travers d'une équation sur la taille de la zone de mélange impliquant le flux de concentration. On définit la taille $L(t)$ de la zone de mélange en fonction de la concentration du mélange à partir de l'expression [3]

$$L(t) = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle c \rangle_{\mathcal{L}} \left(1 - \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right) \mathrm{d}x_3. \tag{1.19}$$

On applique l'opérateur de moyenne défini par l'équation (1.8) à l'équation (1.6) pour obtenir, après avoir négligé les effets de dissipation, une relation entre la dérivée temporelle de la concentration moyenne et la moyenne des fluctuations du flux de flottaison vertical :

$$\frac{\partial \langle c \rangle_{\mathcal{L}}}{\partial t} = -\frac{\partial \langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3}. \tag{1.20}$$

Seule la composante verticale subsiste dans la dérivée spatiale car on suppose que la concentration est homogène dans le plan horizontal. On dérive l'équation (1.19) en temps et on remplace la dérivée temporelle de $\langle c \rangle_{\mathcal{L}}$ par l'expression de l'équation (1.20) :

$$\dot{L}(t) = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\langle \dot{c} \rangle_{\mathcal{L}} \left(1 - \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right) - \langle \dot{c} \rangle_{\mathcal{L}} \langle c \rangle_{\mathcal{L}} \right) \mathrm{d}x_3, \tag{1.21}$$

$$= 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \dot{c} \rangle_{\mathcal{L}} \left(1 - 2 \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right) \mathrm{d}x_3, \tag{1.22}$$

$$= 6 \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial \langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3} \left(1 - 2 \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right) \mathrm{d}x_3. \tag{1.23}$$

On effectue une intégration par parties sur l'équation (1.23) :

$$\dot{L}(t) = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial \langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}}}{x_3} \left(1 - 2 \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right) \mathrm{d}x_3, \tag{1.24}$$

$$= -\left[\langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}} \left(1 - 2 \langle c \rangle_{\mathcal{L}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}} \times 2 \frac{\partial \langle c \rangle_{\mathcal{L}}}{\partial x_3} \mathrm{d}x_3. \tag{1.25}$$

Le terme entre crochets est nul car la contribution du flux de flottaison est globalement nulle quand on considère l'ensemble de la zone de mélange [38]. D'après l'équation (1.12), on obtient la forme finale de l'équation d'évolution de la taille de la zone de mélange :

$$\dot{L}(t) = \frac{12}{L(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_3' c' \rangle_{\mathcal{L}} \mathrm{d}x_3. \tag{1.26}$$

On utilisera cette équation pour étudier l'influence de la turbulence sur la zone de mélange au chapitre 5. Elle permet de prendre en compte l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen et de considérer l'évolution d'une zone de mélange que l'on pourrait retrouver dans

Écoulement étudié	N	$\langle u_3 u_3 \rangle$	$\langle \vartheta \vartheta \rangle$	$\langle \vartheta u_3 \rangle$
Rayleigh-Taylor	$\propto t^{-1}$	$\propto t^2$	const.	$\propto t$
Turbulence USH (N constante)	const.	$\propto e^{\beta N t}$	$\propto e^{\beta N t}$	$\propto e^{\beta N t}$
Turbulence USH (N variable)	$\propto t^{-1}$	$\propto t^2$	const.	$\propto t$

TABLE 1.1 – Lois d'échelle asymptotiques pour un écoulement Rayleigh-Taylor, USH avec fréquence N fixe et USH avec fréquence N variable.

un écoulement Rayleigh-Taylor.

On donne maintenant des précisions sur l'état autosemblable en turbulence homogène stratifiée instable.

1.2.4 État autosemblable en turbulence USH

À l'image de l'évolution autosemblable de la zone de mélange en turbulence Rayleigh-Taylor, on s'attend également à observer une croissance autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable. On différencie les cas où la fréquence de flottaison est constante ou variable. Pour le cas de la fréquence N fixe, les moments d'ordre deux de l'écoulement croissent de façon exponentielle. On fait apparaître un paramètre β, le pendant en turbulence USH à gradient constant du paramètre α de l'écoulement de Rayleigh-Taylor. Pour le cas de la fréquence N variable, on retrouve une croissance autosemblable identique à l'instabilité de Rayleigh-Taylor, à savoir une croissance en t^2 de l'énergie cinétique, une croissance en t du flux de flottaison vertical, une convergence vers une valeur constante pour la variance de flottaison et une décroissance en t^{-1} pour la fréquence de flottaison. La croissance des différents moments d'ordre deux est résumée dans le tableau 1.1.

Comme le taux de croissance α, le paramètre β est directement lié au comportement des grandes échelles de la turbulence. On détaille maintenant ce lien qui permet d'établir une expression reliant β à s, la pente aux petits nombres d'onde du spectre des corrélations. Les développements qui suivent reprennent l'étude de l'état autosemblable de la turbulence USH de SOULARD et al. [112].

On fait l'hypothèse que l'énergie cinétique turbulente croît de manière exponentielle en suivant la formule $\mathcal{K}(t) \sim e^{\beta N t}$. On peut également supposer que la dissipation d'énergie cinétique turbulente ε évolue comme la dérivée temporelle de l'énergie cinétique turbulente ; on a donc $\varepsilon \sim \beta N e^{\beta N t}$. On peut alors définir l'échelle intégrale

$$\ell_i = \frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\varepsilon} \sim e^{\beta N t/2}. \tag{1.27}$$

D'autre part, on peut considérer que l'évolution de l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}(t)$ est proportionnelle à la contribution des grandes échelles de la turbulence. Cela revient à faire

l'approximation

$$\mathcal{K}(t) \sim \int_0^{k_i} E(k,t)\,\mathrm{d}k \tag{1.28}$$

avec $k_i \sim 1/\ell_i$ le nombre d'onde associé à l'échelle intégrale. Ces grandes échelles de la turbulence sont principalement affectées par les termes linéaires présents dans les équations de la turbulence USH. On peut montrer que la croissance linéaire des quantités turbulentes est proportionnelle à e^{2Nt} (voir section 2.6). De plus, on considère que la zone infrarouge[1] qui contribue à l'énergie cinétique turbulente suit une loi d'échelle en k^s. On remplace donc le spectre d'énergie cinétique dans l'équation (1.28) par l'approximation $E(k,t) \simeq k^s e^{2Nt}$:

$$\mathcal{K}(t) \sim \int_0^{k_i} k^s e^{2Nt}\,\mathrm{d}k. \tag{1.29}$$

On peut alors intégrer cette équation en sachant que $k_i \sim e^{-\beta Nt/2}$. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t) \sim \int_0^{k_i} k^s e^{2Nt}\,\mathrm{d}k, &= e^{2Nt} \times \left[\frac{k^{s+1}}{s+1}\right]_0^{k_i}, && (1.30)\\
&= e^{2Nt} \times e^{-(\beta Nt/2)\times(s+1)}, && (1.31)\\
&= e^{(2N-(\beta Nt/2)\times(s+1))t}, && (1.32)\\
&= e^{\beta Nt}. && (1.33)
\end{aligned}$$

L'identification des arguments des deux dernières étapes (1.32) et (1.33) permet d'établir l'expression finale liant β à s

$$\beta = \frac{4}{3+s}, \quad s \leq 4. \tag{1.34}$$

Cette relation exprime le lien étroit entre les grandes échelles de la turbulence et la croissance des moments d'ordre 2 dans le cadre de la turbulence USH à fréquence de flottaison constante.

Lorsque la fréquence de flottaison varie, l'état autosemblable en turbulence USH peut se formuler de la même façon qu'en turbulence Rayleigh-Taylor. On a montré précédemment que l'on peut définir une taille de zone de mélange en turbulence USH comme on peut le faire en turbulence Rayleigh-Taylor. Ainsi, on s'attend à observer une croissance de la taille de la zone de mélange similaire à la formule (1.3) faisant intervenir le taux de croissance α, caractéristique du comportement autosemblable de l'écoulement Rayleigh-Taylor. D'après la formule $L(t) = 2\alpha\mathcal{A}gt^2$, on peut calculer le paramètre α par la relation

$$\alpha = \frac{\dot{L}^2(t)}{8\mathcal{A}gL(t)}. \tag{1.35}$$

1. La zone infrarouge correspond, dans l'espace spectral, aux faibles nombres d'onde. On peut également définir une zone ultraviolette correspondant aux grands nombres d'onde.

Poujade et Peybernes [98] dérivent une relation liant α à s. Ils obtiennent

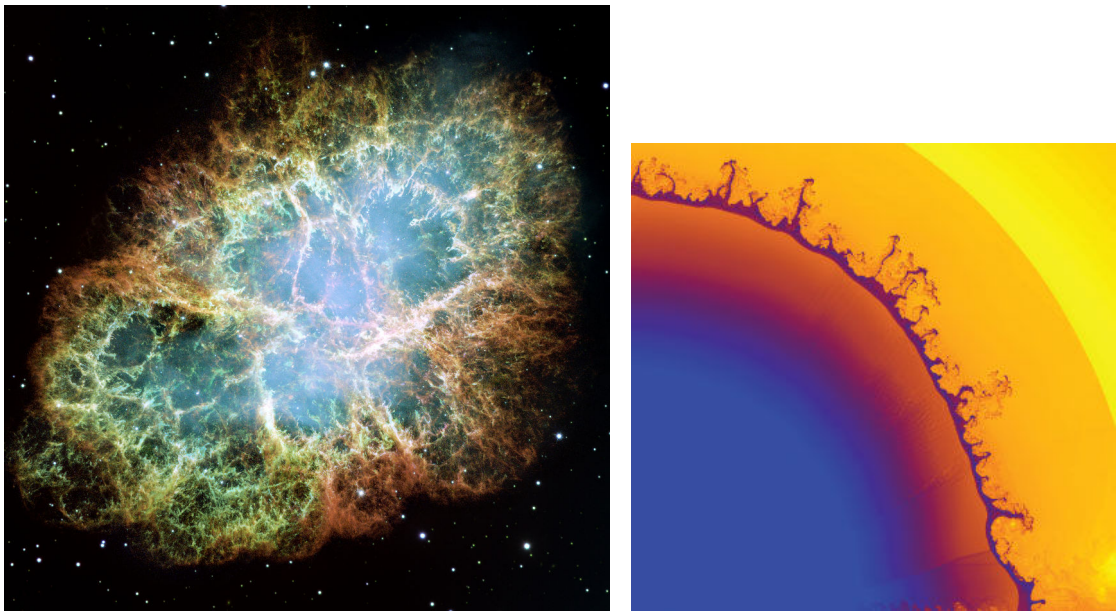
$$\alpha = \frac{1}{(s+2)(s+3)}. \tag{1.36}$$

On remarque que l'échelle intégrale ℓ_i définie à l'équation (1.27) croît au cours du temps. Cela traduit la croissance de la taille des structures turbulentes dans l'état autosemblable. Les simulations numériques de la turbulence USH sont donc confrontées au même problème de confinement que pour la turbulence Rayleigh-Taylor : la taille du domaine de simulation limite l'évolution de l'écoulement. Pour reprendre l'image des champignons montants à la figure 1.2(b), les structures vont s'entrechoquer et leur développement sera alors limité par le dispositif expérimental. L'approche par simulation directe de la turbulence USH est donc limitée comme pour la turbulence Rayleigh-Taylor. En effet, il est très coûteux d'augmenter la taille du domaine de simulation. Les plus grandes simulations numériques à l'heure actuelle font intervenir un domaine de 4096^3 points [55]. Une multiplication du nombre de points par un facteur 2 dans chaque direction de l'espace associée à une division par 2 du pas de temps implique une multiplication par 16 du coût de calcul. Les contraintes de simulation sont donc très fortes en termes de temps de calcul et de stockage. Pour autant, les simulations numériques directes sont un outil important pour aider à comprendre l'évolution de l'écoulement. Un des objectifs des travaux présentés dans ce manuscrit est de mettre en place une approche par un modèle de fermeture appelé modèle EDQNM pour *eddy-damped quasi-normal markovian*. Les détails de ce modèle sont donnés au chapitre 2. Ce modèle offre la possibilité d'atteindre l'état autosemblable en s'affranchissant du confinement. Nous l'utiliserons pour caractériser les propriétés de l'état autosemblable en complément de résultats obtenus par simulation directe.

La caractérisation d'un état autosemblable est néanmoins restreinte au cas où le mélange est soumis à une accélération constante, sauf cas particulier $g \sim t^m$ [91, 79]. Lorsqu'elle varie de manière moins contrôlée, il n'est plus possible d'établir une relation telle que l'expression (1.3). On présente maintenant ces conditions particulières que l'on va étudier dans ce manuscrit.

1.3 Effets d'accélération variable

Parmi les nombreux effets susceptibles d'altérer la croissance de la zone de mélange, on s'intéresse plus particulièrement aux effets de variation de l'accélération. Les développements précédents sont valables tant que l'accélération est constante. L'état autosemblable auquel se réfère l'équation (1.3) n'est plus valide dès lors que l'accélération g varie. Au-delà du simple aspect théorique relatif à l'influence de l'accélération, des configurations réelles sont sujettes à ces effets et nécessitent une recherche approfondie des conséquences de ces



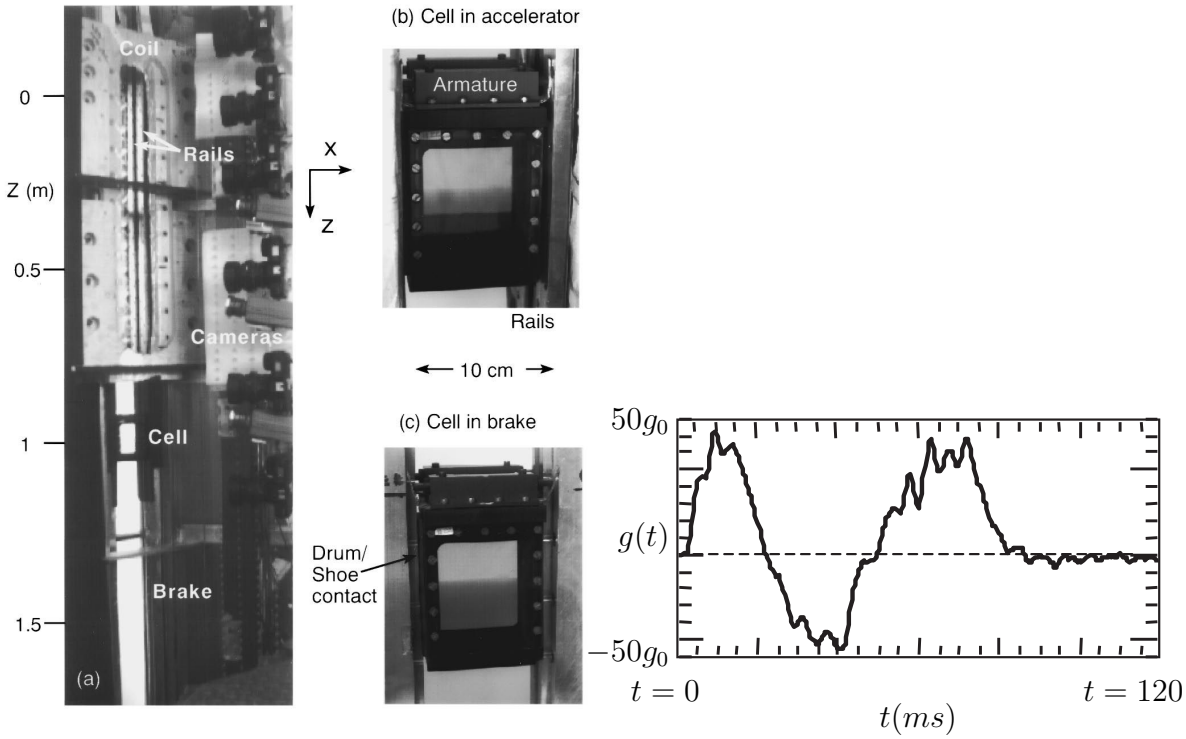
(a) Nébuleuse du Crabe. (b) Mélange Rayleigh-Taylor en FCI.

FIGURE 1.5 – Deux applications de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : (a) la nébuleuse du Crabe qui résulte de l'explosion d'une supernova ; (b) le mélange de deux plasmas dans un contexte de fusion par confinement inertiel (FCI) (Crédit : Tomasz Plewa, Université de Floride)

variations.

Le premier contexte est l'étude des supernovæ. EBISUZAKI et al. [33] ont étudié l'explosion de la supernova SN1987A dans le Grand Nuage de Magellan afin d'en déterminer le comportement hydrodynamique. Lors de l'explosion de l'étoile, c'est l'accélération de la matière qui agit comme une gravité effective. Cette gravité est reliée au gradient de pression. Ils montrent que ce gradient de pression change de signe deux fois au cours de l'explosion. Ils identifient donc trois phases dans l'évolution de cette gravité effective, avec une phase de décélération séparant deux phases d'accélération. Ces changements de signe sont notamment dus à la présence de chocs, caractéristiques de l'apparition d'instabilités de Richtmyer-Meshkov. Les instabilités de Rayleigh-Taylor apparaissant entre les différentes couches internes jouent un rôle central dans l'évolution de l'explosion. La figure 1.5(a) montre la nébuleuse du Crabe créée par l'explosion d'une supernova. La forme des éjectas de gaz est liée à l'instabilité de Rayleigh-Taylor [83]. Comprendre le rôle de l'accélération sur la croissance du mélange est donc primordial et nécessite des études complémentaires par rapport aux travaux existants en accélération constante. On retrouve les mêmes questions pour l'étude de la fusion par confinement inertiel avec l'ablation d'une capsule de polystyrène contenant un combustible de deutérium-tritium [48, 23] (figure 1.5b).

Afin de mieux comprendre ces mécanismes, DIMONTE et al. [28] ont mis en place



(a) Moteur électrique linéaire. (b) Profil temporel de l'accélération.

FIGURE 1.6 – (a) Détail de l'installation appelée *linear electric motor (LEM)* utilisée par DIMONTE et SCHNEIDER [30] et DIMONTE et al. [29] pour étudier des accélérations variables. (b) Profil d'accélération extrait de DIMONTE et al. [29] avec une phase de décélération séparant deux phases d'accélération. g_0 est la gravité terrestre et l'expérience dure $t = 120ms$.

le *LEM (linear electric motor)*. Le dispositif est visible à la figure 1.6(a). Le principe est similaire aux expériences *rocket rig* de READ [102] : un moteur électrique déplace une cellule expérimentale via un champ magnétique. L'intérêt principal est de pouvoir contrôler le profil d'accélération. Un exemple de profil étudié est donné à la figure 1.6(b). DIMONTE et SCHNEIDER [30] et DIMONTE et al. [29] ont montré que le mélange turbulent est dépendant du profil de l'accélération. Ils ont même identifié que la phase de décélération entraîne une réduction de la taille de la zone de mélange.

Des simulations numériques de RAMAPRABHU et al. [100] ont récemment permis de compléter ces observations. Ils ont notamment montré que la phase de décélération qui sépare les deux phases d'accélération tend à augmenter le taux de mélange et à détruire les structures bulles-aiguilles de l'écoulement Rayleigh-Taylor. Cela a pour effet de retarder la croissance de la zone de mélange dans la phase d'accélération qui s'ensuit. Ils confirment également la diminution de la taille de la zone de mélange.

Ces expériences et simulations numériques se sont principalement concentrées autour de l'intensité du champ d'accélération. Un point qui n'a pas été traité est la durée de la

phase intermédiaire de décélération. Une réduction de la taille de la zone de mélange a été observée, mais des simulations numériques récentes [2] ont montré que la taille de la zone de mélange oscille. La réduction observée n'est peut-être qu'une phase transitoire suivie d'une nouvelle phase de croissance apparaissant avant même la reprise de la phase d'accélération. Ce comportement oscillant de la zone de mélange pourrait ainsi contredire les conclusions de Dimonte et al. [29] et Ramaprabhu et al. [100]. La dynamique de la zone de mélange peut donc induire une croissance différente. Si la reprise de l'accélération intervient dans une phase de contraction ou d'expansion de la zone de mélange, on peut s'attendre à observer un résultat différent malgré le fait que le taux de mélange ait atteint son maximum. Cette question mérite des éclaircissements et nous tenterons d'y répondre dans ce manuscrit.

1.4 Organisation du manuscrit

Le chapitre 2 est consacré à la présentation des équations du modèle spectral anisotrope que l'on a utilisé. Les principales étapes du modèle y sont donnés. Les propriétés des corrélations doubles sont reportées à l'annexe A. Le détail des équations est présenté aux annexes B et C.

Le chapitre 3 se concentre sur la validation du modèle spectral pour la turbulence homogène stratifiée instable. On se sert de simulations numériques directes comme référence. On met en évidence la nécessité d'ajouter une correction au modèle présenté au chapitre 2. On établit également que le modèle est à même d'atteindre l'état autosemblable pour un nombre de Reynolds élevé.

Le chapitre 4 présente une étude centrée sur l'état autosemblable de la turbulence USH au travers de l'influence de la distribution d'énergie aux grandes échelles. On présente deux séries de calcul avec d'une part, des cas se servant uniquement du modèle spectral et d'autre part, des simulations numériques directes à haute résolution (2048^3 points). On met en évidence le rôle clé de cette distribution initiale d'énergie et son influence sur le taux de croissance et la structuration de l'écoulement.

Le chapitre 5 est dédié à la validation de la prise en compte de la rétroaction de la turbulence sur le gradient moyen. On présente également des résultats sur la variation de l'accélération. On donne notamment une confirmation de l'importance, sur la croissance de la taille de la zone de mélange, du temps de reprise en phase d'accélération.

2. Gréa, 2012, non publiées.

Chapitre 2

Principe d'un modèle spectral anisotrope pour la turbulence homogène stratifiée instable

Ce chapitre fournit les éléments de base du modèle spectral anisotrope que nous avons développé. Dans un premier temps, on s'attache à décrire les étapes de la fermeture EDQNM. *Dans un second temps, on décrit la fermeture pour la turbulence* USH *avec les équations de base du modèle. On donne ensuite des informations sur l'implémentation numérique et on termine par une validation préliminaire du cas linéaire.*

2.1 Introduction

La modélisation statistique permet d'accéder directement à des grandeurs globales qui caractérisent des énergies, des flux et des transferts inter-échelles, sans passer par les réalisations complètes des champs turbulents, obtenues par simulation directe.

La non linéarité quadratique des équations de Navier-Stokes entraîne un problème de fermeture des équations de moments [1] des différents champs fluctuants de l'écoulement. Ce problème de fermeture apparaît lorsque les équations des moments d'ordre n mettent en jeu des moments d'ordre $n+1$. Cela forme ce qu'on appelle une hiérarchie d'équations.

Parmi les différents moments, on s'intéresse aux corrélations doubles (ordre deux) des fluctuations de vitesse, pression, concentration, etc. Elles permettent de définir des énergies et des flux, par exemple. D'après la hiérarchie d'équations, les équations des corrélations doubles font intervenir des moments d'ordre trois. Le problème de fermeture est compliqué par la présence de corrélations croisées avec le champ de pression. On peut s'en affranchir avec l'hypothèse d'un champ de vitesse à divergence nulle lorsque l'écoulement est incompressible ou dans la limite de l'approximation de Boussinesq dans

1. Définition d'un moment à l'annexe A.1.

notre cas. La relation non locale entre pression et vitesse permet d'exprimer, au moyen d'une équation de Poisson, la corrélation croisée pression-vitesse en fonction de corrélations de vitesse, définies en *deux* points.

Cette expression « en deux points » renvoie aux nombres de points utilisés pour former la corrélation. En plus du rôle de la pression, la modélisation en deux points permet une meilleure capture du mouvement des structures dans l'écoulement et ainsi la prise en compte plus fine de l'anisotropie de l'écoulement. Ainsi, plus le nombre de points est important, plus l'information est riche.

La fermeture du système d'équations nécessite l'emploi d'un modèle. Le principe d'un modèle est de proposer une « relation de fermeture » permettant d'arrêter la hiérarchie de moments. La manière avec laquelle les corrélations sont exprimées définit des catégories de modèle ; on a ainsi des modèles en *un* point et des modèles en *deux* points.

Cette relation de fermeture relie une quantité inconnue, par exemple les corrélations doubles de vitesse, à d'autres variables physiques de l'écoulement. Par exemple, les modèles en un point les plus simples, dit de viscosité turbulente, permettent d'exprimer les corrélations doubles de vitesse au travers de l'énergie cinétique turbulente (calculée en un point) et une viscosité turbulente ν_t. La fermeture complète nécessite de trouver une expression adéquate de cette viscosité turbulente. Parmi ces modèles, le modèle $\mathcal{K} - \varepsilon$ propose d'exprimer ν_t en fonction de l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}$ et sa dissipation ε. Ces deux quantités font intervenir deux nouvelles équations et sont calculées en un point (d'où la dénomination de modèle en un point). Cependant, cette modélisation est limitée car elle ne permet pas de prendre en compte la non localité de la pression, évoqué précédemment. L'information est également moins riche du fait de la formulation en un seul point.

Nous allons utiliser un modèle de turbulence statistique multi-échelle [2] faisant intervenir des moyennes de quantités calculées en deux points séparés de l'espace. Ce modèle s'appelle modèle EDQNM pour *eddy-damped quasi-normal markovian*. Il fournit des informations plus riches que les formulations en un point. Le principe de ce modèle EDQNM est donc de proposer une méthode de fermeture des équations d'évolution des moments d'ordre deux en deux points. Par commodité mathématique, nous travaillerons dans l'espace spectral qui permet de résoudre plus simplement certains termes associés au champ de pression. Un autre atout de l'espace de Fourier est la possibilité de définir un repère local, lié au vecteur d'onde, dans lequel on peut réduire le nombre de composantes à traiter dans le modèle (voir annexe A).

Les bases du modèle EDQNM ont été posées par ORSZAG [94, 95] pour l'étude de la turbulence homogène isotrope (THI) dans la continuité de travaux de Kraichnan [61, 62]. Depuis, de nombreuses contributions ont permis d'étendre le champ d'application du

2. Le caractère multi-échelle d'un modèle renvoie à des corrélations prises en plusieurs points.

modèle EDQNM à des écoulements plus complexes. LEITH [71] a étudié des écoulements turbulents axisymétriques en deux dimensions et a notamment introduit l'un des schémas numériques les plus efficaces. CAMBON et al. [15] et CAMBON et JACQUIN [14] ont développé ce modèle axisymétrique en trois dimensions pour la turbulence en rotation. Ils ont ainsi généralisé cette approche spectrale au cas anisotrope en traitant les problèmes formels et numériques associés. L'approche spectrale avec fermeture EDQNM a aussi été utilisée pour la turbulence en stratification stable [36], des réactions chimiques [125], la turbulence MHD quasi-statique [35], la turbulence à viscosité variable [40], etc.

Dans le cadre de la turbulence stratifiée (stable ou instable), des effets linéaires sur les fluctuations sont induits par les termes liés au gradient moyen de densité. Ces effets linéaires traduisent le phénomène de « déformation rapide » [3] de la turbulence, apparaissant lorsque les non linéarités sont négligeables. Dans ce cas, le modèle doit également prendre en compte ces effets, en plus de la fermeture des termes non linéaires. L'emploi d'un vecteur d'état adapté à la représentation des corrélations doubles (cf. la décomposition poloïdale-toroïdale [106]) permet de différencier, dans les équations, une partie linéaire et une partie non linéaire relative aux corrélations triples. Le modèle spectral avec la fermeture EDQNM permet de prendre en compte, d'une part, les termes linéaires de façon *exacte* et, d'autre part, le transfert conservatif inter-échelles et les effets de ré-isotropisation. Dans cette partie linéaire exacte, on retrouve les termes de production échelle par échelle ainsi que la contribution *rapide* de la corrélation pression-vitesse. On insiste sur le fait que ces termes linéaires sont exacts dans le modèle spectral que nous considérons. Cela représente un atout majeur puisqu'on peut dès lors analyser en détail la compétition entre effets linéaires et non linéaires au sein de l'écoulement grâce au modèle EDQNM généralisé.

Nous commençons par rappeler les principales étapes de dérivation de la fermeture EDQNM dans le cadre historique de la turbulence homogène isotrope à la section 2.2. Ensuite, à la section 2.3, on reprend les étapes de la fermeture afin de l'appliquer en détail au cas de la turbulence homogène stratifiée instable. Les détails de l'implémentation numérique du modèle spectral pour la turbulence USH sont donnés à la section 2.5. Nous terminons par une validation préliminaire du modèle à la section 2.6.

2.2 Description formelle du modèle EDQNM pour le cas homogène isotrope

Cette section est consacrée à la description succincte et formelle du modèle EDQNM dans le cadre simple qu'est la turbulence homogène isotrope. On donne les informations essentielles permettant d'expliquer le principe du modèle ; certains termes ne sont donc

3. On place l'expression entre guillemets car elle fait plutôt référence à des effets de gradient de vitesse que de gradient de densité.

pas explicités. Les détails et justifications complètes de la procédure de dérivation peuvent être trouvés dans ORSZAG [95] et LESIEUR [72] ainsi que SAGAUT et CAMBON [106] pour les écoulements anisotropes.

On commence par écrire l'équation d'évolution des corrélations doubles de vitesse à partir de l'équation (1.17) pour les coefficients de Fourier de la vitesse (on ne tient pas compte, dans un premier temps, du terme de concentration) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\left(k^2 + p^2\right)\right)\langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\rangle = Q^{(3)}. \tag{2.1}$$

Le terme $Q^{(3)}$ est une combinaison linéaire de moments d'ordre 3. Il inclut une intégration sur une triade de vecteurs $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ (voir figure 2.1) avec $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$. Ce terme $Q^{(3)}$ s'apparente au transfert non linéaire entre les différents vecteurs de Fourier de l'écoulement. Ces corrélations triples n'étant pas connues, on écrit formellement l'équation d'évolution des corrélations triples

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\left(k^2 + p^2 + q^2\right)\right)\langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\hat{u}(\mathbf{q})\rangle = Q^{(4)}. \tag{2.2}$$

À l'image du terme $Q^{(3)}$, le terme $Q^{(4)}$ est une combinaison linéaire de moments d'ordre 4. C'est sur ce terme que porte la première étape de fermeture du modèle EDQNM afin d'arrêter la hiérarchie de moments. On utilise l'hypothèse quasi-normale (ou QN) pour exprimer les corrélations quadruples $Q^{(4)}$ comme somme de produits de corrélations doubles. L'écart au comportement gaussien est exprimé par les cumulants d'ordre 4 $C^{(IV)}$ [22, 87]. On l'écrit formellement :

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\hat{u}(\mathbf{q})\hat{u}(\mathbf{s})\rangle = \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\rangle\langle \hat{u}(\mathbf{q})\hat{u}(\mathbf{s})\rangle + \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{q})\rangle\langle \hat{u}(\mathbf{p})\hat{u}(\mathbf{s})\rangle \\ + \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{s})\rangle\langle \hat{u}(\mathbf{q})\hat{u}(\mathbf{p})\rangle + C^{(IV)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dans le cadre de l'hypothèse quasi-normale, on considère ces cumulants $C^{(IV)}$ nuls. On peut ainsi intégrer l'équation d'évolution des corrélations triples et résoudre l'équation des corrélations doubles. On obtient alors l'équation d'évolution des corrélations doubles de vitesse dans l'approximation quasi-normale

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right)\langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(-\mathbf{k})\rangle = \underbrace{\int_0^t \mathrm{d}\tau \iint_\Delta e^{-\left(\nu\left(k^2+p^2+q^2\right)\right)(t-\tau)} \sum \langle \hat{u}\hat{u}\rangle\langle \hat{u}\hat{u}\rangle(\tau)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}_{Q^{(3)}}. \tag{2.4}$$

Cette première étape a été testée numériquement par OGURA [93]. Il a montré que cette hypothèse tend à surestimer le transfert d'énergie inter-échelle. Cela provoque l'apparition de mode non-physique sous forme d'énergie négative. Ce modèle n'est donc a priori pas

adapté à l'étude de la turbulence.

Orszag [94] s'appuie sur un argument de physique statistique pour expliquer les défauts du modèle QN. Il considère qu'un système non visqueux, partant d'un état initial régulier, tend vers un équilibre statistique d'équipartition de l'énergie. Cet argument implique, qu'à l'équilibre, les corrélations doubles sont constantes et les corrélations triples nulles. Or, au travers d'un test de réversibilité temporelle, Orszag montre qu'une petite perturbation autour de l'état d'équilibre ne permet pas aux corrélations triples de s'annuler. Il en conclut que le modèle QN ne traite pas correctement la relaxation de ces corrélations triples.

Pour pallier ce défaut, il ajoute un terme de viscosité au modèle QN permettant ainsi d'introduire un terme de relaxation dans le système. L'état final de ce système visqueux ne peut tendre vers l'équipartition mais peut tout de même atteindre un état d'équilibre. Là encore, Orszag montre que ce dernier point n'est pas satisfait car le temps de relaxation des effets visqueux est trop grand pour contrer les effets des corrélations triples. Ces dernières s'éloignent une nouvelle fois de l'état d'équilibre. Il met en avant le fait qu'aucun temps de relaxation dynamique n'est calculé dans le modèle QN. L'absence de ce temps de relaxation expliquerait donc que les corrélations triples ne soient pas suffisamment amorties dans le système.

Orszag conclut son explication en reprenant les travaux d'Ogura et sa mise en évidence de la non réalisabilité du modèle QN. Le problème majeur lié à la non réalisabilité vient du fait qu'elle intervient dans les échelles énergétiques du système. Le transfert d'énergie associé à l'action des corrélations triples est trop fort. Orszag met en cause l'influence des termes d'histoire dans le membre de droite de l'équation (2.4). Il propose alors d'ajouter un temps caractéristique de décorrélation qui permettrait d'amortir l'effet des corrélations triples sur le système. Ce terme, qu'il nomme amortissement tourbillonnaire ou *eddy damping* (ED), serait associé à l'effet de décorrélation des effets non linéaires. Il justifie l'ajout de ce terme au modèle en l'associant à l'effet des cumulants d'ordre quatre $C^{(IV)}$, précédemment annulés dans le modèle QN.

Orszag [94] propose donc d'exprimer les cumulants $C^{(IV)}$ par un terme proportionnel aux corrélations triples de la forme

$$C^{(IV)} = -\left(\mu_k(t) + \mu_p(t) + \mu_q(t)\right) \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\hat{u}(\mathbf{q})\rangle = -\mu_{kpq}(t) \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(\mathbf{p})\hat{u}(\mathbf{q})\rangle \tag{2.5}$$

avec μ_{kpq} l'amortissement tourbillonnaire qui fait intervenir le taux caractéristique de déformation $\mu_k(t)$. L'expression retenue pour μ_k est celle donnée par Pouquet et al. [99]

$$\mu_k(t) = a_0 \left(\int_0^k p^2 E(p,t)\, \mathrm{d}p \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

avec $a_0 = 0{,}355$ la constante du modèle [1], calibrée pour retrouver la constante de

Kolmogorov $C_K = 1{,}4$ et $E(p,t)$ le spectre d'énergie cinétique. Le terme μ_k représente le taux de déformations moyen des tourbillons d'échelle $1/k$ causées par les tourbillons d'échelle supérieure à $1/k$. À ce stade, on peut réécrire l'équation des corrélations doubles fermée par l'expression des corrélations triples :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \langle \hat{u}(\mathbf{k})\hat{u}(-\mathbf{k})\rangle = \int_0^t \mathrm{d}\tau \iint_\Delta e^{-\left(\mu_{kpq}+\nu\left(k^2+p^2+q^2\right)\right)(t-\tau)} \sum \langle \hat{u}\hat{u}\rangle \langle \hat{u}\hat{u}\rangle (\tau)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q$$

avec $\sum \langle uu\rangle \langle uu\rangle$ [4] l'écriture formelle de la somme des produits de corrélations donnée à l'équation (2.3).

D'après Orszag [95], le modèle ne garantit pas encore la réalisabilité. Une dernière hypothèse est nécessaire : la markovianisation. On suppose que le temps caractéristique $(\mu_{kpq} + \nu k^2 + p^2 + q^2)^{-1}$ du terme exponentiel est faible devant le temps caractéristique d'évolution des produits de corrélations doubles ; ce dernier étant de l'ordre du temps de retournement des grands tourbillons. Cette hypothèse revient à supposer que

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}\tau \iint_\Delta e^{-\left(\mu_{kpq}+\nu\left(k^2+p^2+q^2\right)\right)(t-\tau)} \sum \langle \hat{u}\hat{u}\rangle \langle \hat{u}\hat{u}\rangle (\tau)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q \\ \sim \sum \langle \hat{u}\hat{u}\rangle \langle \hat{u}\hat{u}\rangle (t) \times \int_0^t \mathrm{d}\tau \iint_\Delta e^{-\left(\mu_{kpq}+\nu\left(k^2+p^2+q^2\right)\right)(t-\tau)}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q. \quad (2.7)\end{aligned}$$

On a « sorti » la somme de produits de corrélations doubles de l'intégration temporelle. On peut alors écrire l'équation de Lin, c'est-à-dire l'équation d'évolution du spectre d'énergie cinétique turbulence $E(k,t)$, reliée à la corrélation double de vitesse, pour la turbulence homogène isotrope

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) E(k,t) = T(k,t) \quad (2.8)$$

avec le transfert $T(k,t)$ qui s'exprime par le modèle EDQNM

$$T(k,t) = \iint_{\Delta_k} \Theta_{kpq}(t) \left(xy + z^3\right) \frac{k}{pq} E(q,t) \left(k^2 E(p,t) - p^2 E(k,t)\right) \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q. \quad (2.9)$$

Le terme de transfert T fait intervenir les interactions triadiques entre les trois nombres d'onde k, p et q ainsi que les cosinus x, y et z des angles du triangle qu'ils forment (voir figure 2.1). L'intégration de l'équation d'évolution des corrélations triples fait également apparaître un temps caractéristique Θ_{kpq} fonction de l'amortissement tourbillonnaire défini par

$$\Theta_{kpq}(t) = \frac{1 - e^{-\left(\nu(k^2+p^2+q^2)+\mu_{kpq}\right)t}}{\nu(k^2+p^2+q^2) + \mu_{kpq}} \quad (2.10)$$

4. Afin de conserver une forme compacte, on a inclus dans cette somme le terme géométrique $P_{ilm}(\mathbf{k})$ (voir équation (2.18)). Ce dernier apparaît en exprimant le terme de pression, dans l'équation de Poisson qui lui est associée, en fonction du produit de convolution de la vitesse.

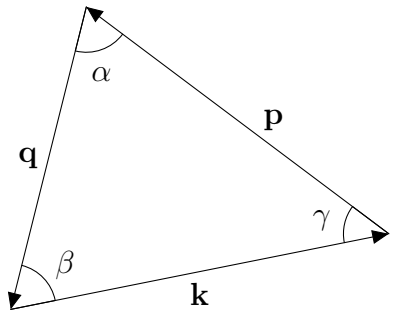


FIGURE 2.1 – Triade formée par le triplet de vecteurs $\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0$. Les cosinus des angles sont également mentionnés avec $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$ et $z=\cos\gamma$.

avec

$$\mu_{kpq} = \mu_k + \mu_p + \mu_q. \tag{2.11}$$

Dans le cadre de la turbulence homogène stratifiée instable, on a vu au chapitre 1 qu'une variable supplémentaire, la vitesse de flottaison $\hat{\vartheta}$, doit être prise en compte. Utiliser le modèle EDQNM dans le cadre de la turbulence USH nécessite de former une équation similaire à l'équation de Lin (2.8) pour la variance de flottaison $<\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}>$. Une troisième équation doit être établie pour la corrélation croisée flottaison-vitesse $<\hat{u}_a\hat{\vartheta}>$ du fait du couplage entre les deux équations (1.5) et (1.6). À ce stade, on peut se demander si le seul temps caractéristique de déformation des tourbillons peut permettre de décrire tous les phénomènes présents en turbulence USH. On montrera par la suite qu'il est effectivement insuffisant. On évoque également à la section 2.4 les liens unissant notre approche instable avec les précédents travaux en turbulence stratifiée stable.

2.3 Principe de la fermeture EDQNM pour la turbulence homogène stratifiée instable

Dans cette section, on reprend les différentes étapes présentées ci-avant pour les appliquer à la turbulence homogène stratifiée instable. En turbulence USH, s'agissant d'un écoulement dans lequel on désire conserver un certain niveau de description de l'anisotropie, nous ne pouvons plus utiliser la seule dépendance aux modules des nombres d'ondes. Nous allons devoir introduire des repères de coordonnées qui permettent de décrire la dépendance angulaire des statistiques. Ce repère a l'avantage de fournir un support détaillé pour l'étude de l'anisotropie de l'écoulement. Ainsi, on exprime les équations des corrélations doubles à la section 2.3.1 d'abord dans le repère fixe (section 2.3.1.1) puis dans le repère de Craya-Herring (section 2.3.1.2). Les équations des corrélations triples sont introduites à la section 2.3.2 uniquement dans le repère fixe.

2.3.1 Équations des corrélations doubles

On explique ici la méthode permettant d'obtenir les équations pour les corrélations doubles de vitesse $\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k},t)$, de scalaire $\mathcal{B}(\mathbf{k},t)$ et la corrélation croisée vitesse-scalaire $\mathcal{F}_a(\mathbf{k},t)$. On rappelle leur définition :

$$\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \langle \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\rangle\,, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\right\rangle, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{F}_a(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\right\rangle. \tag{2.14}$$

On simplifie la notation en omettant volontairement le marqueur « $\hat{\cdot}$ » pour les transformées de Fourier des corrélations doubles. Sauf mention contraire, les développements effectués dans ce chapitre sont faits uniquement dans l'espace spectral. On donne ci-après l'exemple de dérivation complète pour l'équation du tenseur des corrélations de vitesse. Les détails des deux équations restantes sont disponibles à l'annexe B. On écrit ces équations dans le repère fixe et dans le repère de Craya-Herring dont les détails sont donnés à l'annexe A.3.

2.3.1.1 Équations dans le repère fixe

Le point de départ est le système d'équations de la turbulence USH pour $\hat{u}_a$ et $\hat{\vartheta}$, les champs fluctuants de vitesse et de flottaison dans l'espace de Fourier :

$$k_i\hat{u}_i(\mathbf{k}) = 0, \tag{2.15}$$

$$\left(\partial_t + \nu k^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + NP_{a3}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}), \tag{2.16}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}\,k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{u}_3(\mathbf{k}). \tag{2.17}$$

On rappelle que

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - (k_ik_j)/(k_ik_i) \quad \text{et} \quad P_{ajm}(\mathbf{k}) = k_jP_{am}(\mathbf{k}) + k_mP_{aj}(\mathbf{k}). \tag{2.18}$$

Dans un premier temps, on forme la combinaison linéaire $\hat{u}_b(\mathbf{k}') \times \text{Eq.}(2.16)_a(\mathbf{k}) + \hat{u}_a(\mathbf{k}) \times \text{Eq.}(2.16)_b(\mathbf{k}')$ à laquelle on applique l'opérateur de moyenne d'ensemble. On définit les corrélations triples

$$\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \langle \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\rangle\,, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\right\rangle, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\right\rangle. \tag{2.21}$$

On trouve l'expression classique [94]

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + \frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}) \quad (2.22)$$

On rassemble les termes intégraux sous un même terme général $T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k})$. On applique la même procédure pour $\mathcal{B}(\mathbf{k},t)$ et $\mathcal{F}_a(\mathbf{k})$ pour obtenir le système d'équations des spectres des corrélations doubles

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}) + T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k}), \quad (2.23)$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k}) + T^{\mathcal{F}}_{a}(\mathbf{k}), \quad (2.24)$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{B}(\mathbf{k}) = N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k})\right) + T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \quad (2.25)$$

avec

$$T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k},t) = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + \frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}, \quad (2.26)$$

$$T^{\mathcal{F}}_{a}(\mathbf{k}) = \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} - \mathrm{i}\,k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}(\mathbf{p},-\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}, \quad (2.27)$$

$$T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = 2\Im\left(k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_j(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}\right). \quad (2.28)$$

On retrouve une forme similaire à l'équation de Lin (2.8) avec une dérivée temporelle, un terme de dissipation, un terme de transfert tenant compte des corrélations triples et des termes de flottaison liés à la stratification.

2.3.1.2 Équations dans le repère de Craya-Herring

Le système d'équations des corrélations doubles (2.23)–(2.25) est écrit dans le repère fixe. On le projette dans le repère de Craya-Herring. L'emploi de ce repère permet, via l'hypothèse d'axisymétrie, de réduire le nombre d'inconnues. On connaît déjà les deux composantes Φ_1 et Φ_2 du spectre du tenseur des corrélations de vitesse $\mathcal{R}_{ab}$ définies par la relation [36]

$$\mathcal{R}_{ab} = \Phi_1 e^{(1)}_a e^{(1)}_b + \Phi_2 e^{(2)}_a e^{(2)}_b. \quad (2.29)$$

On introduit deux nouvelles variables, Φ_3 et Ψ_r, définies par

$$\Phi_3(\mathbf{k},t) = \frac{\mathcal{B}(\mathbf{k},t)}{2}, \tag{2.30}$$

$$\Psi_r(\mathbf{k},t) = \mathcal{F}_a(\mathbf{k},t)e_a^{(2)}(\mathbf{k}). \tag{2.31}$$

Obtenir les équations pour Φ_1, Φ_2 et Ψ_r nécessite donc une projection du repère fixe sur le repère de Craya-Herring local au vecteur d'onde $\mathbf{k}$. L'équation pour Φ_3 est directe. Le système final dans le repère de Craya-Herring se résume ainsi aux quatre équations :

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\Phi_1(\mathbf{k},t) = T^1(\mathbf{k},t), \tag{2.32}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\Phi_2(\mathbf{k},t) = 2N\sin\theta\,\Psi_r(\mathbf{k},t) + T^2(\mathbf{k},t), \tag{2.33}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\Phi_3(\mathbf{k},t) = 2N\sin\theta\,\Psi_r(\mathbf{k},t) + T^3(\mathbf{k},t), \tag{2.34}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\Psi_r(\mathbf{k},t) = N\sin\theta\left(\Phi_3(\mathbf{k},t) + \Phi_2(\mathbf{k},t)\right) + T^4(\mathbf{k},t) \tag{2.35}$$

avec

$$T^1(\mathbf{k},t) = T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k},t)\mathrm{e}_a^{(1)}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}_b^{(1)}(\mathbf{k}), \tag{2.36}$$

$$T^2(\mathbf{k},t) = T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k},t)\mathrm{e}_a^{(2)}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}_b^{(2)}(\mathbf{k}), \tag{2.37}$$

$$T^3(\mathbf{k},t) = T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k},t)/2, \tag{2.38}$$

$$T^4(\mathbf{k},t) = T^{\mathcal{F}}_a(\mathbf{k},t)\mathrm{e}_a^{(2)}(\mathbf{k}). \tag{2.39}$$

Ce système d'équations est exact à ce stade car aucune hypothèse de fermeture n'a encore été faite sur les corrélations triples. On utilisera ce système d'équations pour les corrélations doubles dans le repère de Craya-Herring numériquement une fois la fermeture EDQNM utilisée pour fermer les termes de transfert. On précise qu'aucune variation du gradient moyen Γ ni de l'accélération g n'a été prise en compte lors de la dérivation de ce système d'équations. Les modifications de la partie linéaire que ces variations occasionnent seront abordées directement dans le chapitre 5 qui leur sera consacré.

2.3.2 Équations des corrélations triples

On cherche maintenant à établir, dans le repère fixe, les expressions des corrélations triples $\mathcal{S}_{abc}$, $\mathcal{S}_{ab}$ et $\mathcal{S}_a$ qui interviennent dans le système d'équations (2.23)–(2.25). Elles sont définies par les équations (2.19), (2.20) et (2.21). La méthode employée est identique à celle utilisée pour les corrélations doubles. On donne quelques éléments pour la corrélation triple de vitesse $\mathcal{S}_{abc}$, le développement étape par étape pour les trois corrélations triples mentionnées est disponible à l'annexe C.

On forme la combinaison linéaire

$$\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.}(2.16)_a(\mathbf{k}) + \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.}(2.16)_b(\mathbf{k}') + \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}') \times \text{Eq.}(2.16)_c(\mathbf{k}''). \quad (2.40)$$

On applique la moyenne d'ensemble, l'hypothèse quasi-normale ainsi que l'amortissement tourbillonnaire. On obtient l'équation suivante avec $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right) + \mu_{kk'k''}\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \\ - \mathrm{i}\, P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') - \mathrm{i}\, P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ - \mathrm{i}\, P_{clm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}') \\ + P_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{S}_{bc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') + P_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ac}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \\ + P_{c3}(-\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k}'',\mathbf{k}). \quad (2.41)\end{aligned}$$

Cette expression fait intervenir des termes de produits de corrélations doubles de type $\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}_{cd}$ d'une part et des corrélations triples fonctions des termes de flottaison de type $\mathcal{S}_{ab}$ d'autre part.

On choisit de faire une hypothèse de fermeture supplémentaire dans cette équation : on néglige les corrélations faisant intervenir des termes de flottaison. Pour l'EDQNM avec stratification stable, il est possible d'intégrer les termes de stratification aux corrélations triples moyennant un amortissement incluant la relation de dispersion des ondes d'inertie. Cet effet direct et explicite du gradient moyen en turbulence stratifiée stable s'ajoute au terme standard d'amortissement des corrélations triples hérité de la turbulence isotrope. Il représente ainsi l'amortissement associé à la dispersivité des interactions d'ondes de gravité. Pour la turbulence USH, la nature mathématique des termes linéaires est différente et la même stratégie ne peut être adoptée. On choisit de faire cette première hypothèse restrictive afin de conserver un modèle mathématiquement le plus simple possible. Cette hypothèse est cohérente avec d'autres approches spectrales pour les écoulements avec flottaison. CANUTO et al. [18], par exemple, ne tiennent pas compte des termes de production liés à la stratification dans l'évaluation du transfert d'énergie. On effectue cette hypothèse de fermeture sur les trois corrélations $\mathcal{S}_{abc}$, $\mathcal{S}_{ab}$ et $\mathcal{S}_a$. Une fois cette hypothèse faite, on trouve les trois équations d'évolution des corrélations triples

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right) + \mu_{kk'k''}\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \\ - \mathrm{i}\, P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ - \mathrm{i}\, P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ - \mathrm{i}\, P_{clm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'),\end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right) + \mu_{kk'k''}\right)\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \\ - \mathrm{i}\, k_j \left(\mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}') + \mathcal{F}_b(-\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\right) \\ - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}')\left(\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\right) \\ - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'')\left(\mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\right),\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right) + \mu_{kk'k''}\right)\mathcal{S}_{a}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \\ - \mathrm{i}\, k_j \left(\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}')\right) \\ - \mathrm{i}\, k'_j \left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\right) \\ - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}'')\left(\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\right).\end{aligned} \tag{2.44}$$

On note que l'amortissement tourbillonnaire dans le membre de gauche de chaque expression est identique. À la différence de HERR et al. [49] et BOS et al. [10], entre autres, on retient une forme identique de l'amortissement tourbillonnaire $\mu_{kk'k''}$ dans les trois expressions.

Afin de substituer les expressions des corrélations triples dans le système d'équations (2.23)–(2.25), il est nécessaire d'intégrer les trois équations (2.42)–(2.44). On applique ainsi l'hypothèse de markovianisation, dernière étape du modèle EDQNM. Cela fait apparaître le temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}(t) = \int_0^t e^{-\left(\nu(k^2+k'^2+k''^2)+\mu_{kk'k''}\right)(t-s)}\,\mathrm{d}s$. On trouve les expressions suivantes

$$\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\,\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ +P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ +P_{clm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}') \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

$$\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\,\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} k_j\left(\mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(\mathbf{k}') + \mathcal{F}_b(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\right) \\ +P_{ajm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \\ +P_{bjm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\mathcal{S}_{a}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\,\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} k_j\left(\mathcal{F}_a(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}')\right) \\ +p_j\left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\right) \\ +P_{ajm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

On peut ainsi exprimer les corrélations triples (2.26)–(2.28) qui permettent de fermer le système d'équations des corrélations doubles (2.23)–(2.25)

$$T^{\mathcal{R}}_{ab}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} P_{bij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{il}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{jm}(\mathbf{k}'') \\ +P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ib}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{jm}(\mathbf{k}'') \\ +P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ib}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{jl}(\mathbf{k}') \end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}'$$

$$+\frac{1}{2}P_{blm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix}P_{aij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{li}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\\+P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\\+P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}', \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}T_a^{\mathcal{F}}(\mathbf{k},t) = k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)&\begin{pmatrix}p_n\left(\mathcal{R}_{nj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(\mathbf{k})+\mathcal{F}_j(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{na}(\mathbf{k})\right)\\+P_{anm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_n(\mathbf{k}')\\+P_{jnm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ma}(\mathbf{k})\mathcal{F}_n(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}'\\+\frac{1}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)&\begin{pmatrix}k_j\left(\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_l(\mathbf{k}')+\mathcal{F}_m(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}')\right)\\+P_{ljn}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mn}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\\+P_{mjn}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ln}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}', \quad (2.49)\end{aligned}$$

$$T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k},t) = 2k_a\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix}k_j\left(\mathcal{F}_a(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}')+\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}')\right)\\+p_j\left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k})+\mathcal{F}_a(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\right)\\+P_{ajm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}'. \quad (2.50)$$

Obtenir les expressions des transferts T^1, T^2, T^3 et T^4 des équations (2.36)–(2.39) dans le repère de Craya-Herring se fait par projection. On ne détaille pas ces expressions ici du fait de la lourdeur des notations et du nombre conséquent de termes issus du développement des produits scalaires.

En résumé, on a établi le système d'équations d'évolution des corrélations doubles pour la turbulence homogène stratifiée instable dans le repère fixe ainsi que dans le repère de Craya-Herring à la section 2.3.1. Les équations d'évolution des corrélations triples ont été obtenues dans la section courante. On a appliqué les hypothèses du modèle EDQNM afin de fermer ces équations. Une hypothèse supplémentaire a été invoquée afin de conserver un modèle mathématiquement simple : on néglige les effets linéaires de stratification sur les corrélations triples. Après intégration, on a déterminé finalement les expressions dans le repère fixe de ces corrélations triples. Les expressions dans le repère de Craya-Herring peuvent être obtenues par projection. Ces expressions des termes de transfert viennent fermer le système d'équations des corrélations doubles qui peut maintenant être résolu.

2.4 De la stratification stable à la stratification instable

On apporte quelques précisions sur l'héritage associé aux recherches passées [36, 16, 115, 37] sur la stratification stable par le modèle EDQNM. Ces recherches ont orienté les choix de fermeture dans le cas de la turbulence USH. En effet, nonobstant les propriétés et

la phénoménologie différentes entre les deux écoulements, un formalisme identique peut être appliqué.

Dans la configuration de turbulence homogène stratifiée stable, le gradient moyen de flottaison a un rôle stabilisant. Lorsque les effets linéaires de stratification dominent les effets turbulents, des ondes internes affectent la composante verticale du champ fluctuant de vitesse [103]. On observe que ces ondes interagissent avec un mode d'énergie potentielle associé à la fluctuation de flottaison. Dans le régime non linéaire, il est nécessaire de tenir compte de cette dynamique d'interactions d'ondes. La formulation du modèle EDQNM anisotrope qui tient compte de ces interactions (modèle EDQNM2 dans la nomenclature lyonnaise) se révèle particulièrement pertinente pour reproduire ce régime, à l'instar des travaux menés en turbulence en rotation [14, 16, 8]. Cette formulation fait notamment intervenir une décomposition toroïdale-poloïdale du champ de vitesse [106] qui permet d'intégrer cette dynamique d'ondes dans les corrélations triples.

Dans la configuration en stratification instable, le gradient moyen de flottaison est déstabilisant et entraîne une production d'énergie. Aucune dynamique d'onde n'est présente dans ce cas. Cependant, on a conservé, a priori, la décomposition toroïdale-poloïdale. À la différence du cas stable, on choisit, dans un premier temps, de ne pas prendre en compte les effets linéaires de stratification dans les corrélations triples (modèle EDQNM1 dans la nomenclature lyonnaise). On montrera au chapitre 3 que notre hypothèse est trop restrictive. Cependant, l'intégration explicite de ces termes, associés au gradient moyen de densité, dans la dynamique des corrélations triples conduit à un problème de convergence des intégrales temporelles [17]. Ce problème de convergence remet en cause la procédure de markovianisation, légitime en turbulence stratifiée stable, car l'effet linéaire en stratification instable induit une croissance exponentielle sans onde dispersive. Le problème théorique associé à ces effets linéaires dans les corrélations triples est particulièrement complexe et non résolu à ce jour. La solution que nous avons retenue, présentée à la section 3.3, relève d'un compromis empirique [114] établi à partir de simulations directes.

2.5 Implémentation numérique

Dans cette partie, on décrit les éléments nécessaires au traitement numérique du système d'équations (2.60)–(2.63). On commence par identifier les modes propres du système linéaire (section 2.5.1). Le schéma de résolution temporel est ensuite présenté à la section 2.5.2. Puis on détaille les particularités de la discrétisation spatiale à la section 2.5.3. La méthode d'intégration des corrélations triples est décrite à la section 2.5.4. On présente finalement des éléments sur la parallélisation et les performances numériques du modèle spectral à la section 2.5.5.

2.5.1 Diagonalisation du système linéaire

On réécrit la partie linéaire du système d'équations (2.32)–(2.35) pour faire apparaître les modes propres et chaque valeur propre associée. Cette étape est nécessaire avant d'aborder la résolution numérique.

On peut réécrire le système d'équations (2.32)–(2.35) sous forme matricielle $\dot{\mathbf{q}} = \underline{\underline{L}}\mathbf{q} + \mathbf{T}$ avec

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Psi_r \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} -2\nu k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\nu k^2 & 0 & 2N\sin\theta \\ 0 & 0 & -2\nu k^2 & 2N\sin\theta \\ 0 & N\sin\theta & N\sin\theta & -2\nu k^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \\ T^4 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Afin d'étudier uniquement la partie linéaire, on annule les termes de transfert : $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Dès lors, on peut diagonaliser la matrice $\underline{\underline{L}}$ du système linéaire. Après projection du vecteur $\mathbf{q}$ sur la matrice des vecteurs propres, on trouve alors les quatre équations suivantes

$$M_1(\mathbf{k},t) = \Phi_1(\mathbf{k},t), \tag{2.52}$$
$$M_2(\mathbf{k},t) = -\Phi_2(\mathbf{k},t) + \Phi_3(\mathbf{k},t), \tag{2.53}$$
$$M_3(\mathbf{k},t) = \Phi_2(\mathbf{k},t) + \Phi_3(\mathbf{k},t) + \Psi_r(\mathbf{k},t), \tag{2.54}$$
$$M_4(\mathbf{k},t) = -\Phi_2(\mathbf{k},t) - \Phi_3(\mathbf{k},t) + \Psi_r(\mathbf{k},t) \tag{2.55}$$

avec les valeurs propres associées

$$\lambda_1 = -2\nu k^2, \tag{2.56}$$
$$\lambda_2 = -2\nu k^2, \tag{2.57}$$
$$\lambda_3 = -2\nu k^2 + 2N\sin\theta, \tag{2.58}$$
$$\lambda_4 = -2\nu k^2 - 2N\sin\theta. \tag{2.59}$$

Le système d'équations des amplitudes des modes propres s'écrit donc

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) M_1(\mathbf{k},t) = 0, \tag{2.60}$$
$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) M_2(\mathbf{k},t) = 0, \tag{2.61}$$
$$\left(\partial_t + 2\nu k^2 - 2N\sin\theta\right) M_3(\mathbf{k},t) = 0, \tag{2.62}$$
$$\left(\partial_t + 2\nu k^2 + 2N\sin\theta\right) M_4(\mathbf{k},t) = 0. \tag{2.63}$$

On peut faire deux remarques sur ce système linéaire :

— Pour un fluide visqueux, le mode $M_1 = \Phi_1$ ne peut que décroître, il n'échange pas d'énergie avec les autres modes dans la limite linéaire. Dans l'approximation d'un

fluide parfait, le mode $M_1 = \Phi_1$ reste constant.

— On peut identifier une orientation du vecteur d'onde particulière $\theta = \pi/2$ qui sera le mode le plus perturbé par les effets de stratification.

2.5.2 Schéma temporel

Le schéma temporel employé est un schéma d'ordre 1 où les termes linéaires tenant compte des effets visqueux et de stratification sont traités implicitement. Cela permet de les prendre en compte de manière exacte. Ce schéma a été utilisé auparavant pour la turbulence en rotation [14] et la turbulence en stratification stable [36]. Pour un pas de temps $\delta t = t_{n+1} - t_n$, on peut écrire les équations discrètes exactes :

$$M_1(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_1(\mathbf{k},t_n)e^{-2\nu k^2\delta t} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} T^{M_1}(\mathbf{k},\tau)e^{-2\nu k^2(t_{n+1}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.64}$$

$$M_2(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_2(\mathbf{k},t_n)e^{-2\nu k^2\delta t} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} T^{M_2}(\mathbf{k},\tau)e^{-2\nu k^2(t_{n+1}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} M_3(\mathbf{k},t_{n+1}) = {} & M_3(\mathbf{k},t_n)e^{-\left(2\nu k^2-2N\sin\theta\right)\delta t} \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} T^{M_3}(\mathbf{k},\tau)e^{-\left(2\nu k^2-2N\sin\theta\right)(t_{n+1}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} M_4(\mathbf{k},t_{n+1}) = {} & M_4(\mathbf{k},t_n)e^{-\left(2\nu k^2+2N\sin\theta\right)\delta t} \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} T^{M_4}(\mathbf{k},\tau)e^{-\left(2\nu k^2+2N\sin\theta\right)(t_{n+1}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Les quatre termes de transfert T^{M_α} avec $\alpha \in \{1,\,2,\,3,\,4\}$ sont des combinaisons linéaires des termes de transferts définis dans le système d'équations (2.36)–(2.39). On obtient le système précédent grâce à une intégration entre t_n et t_{n+1} et une méthode de variation de la constante. Afin de résoudre les équations (2.64) à (2.67), on fait une hypothèse sur les termes de transfert dans l'intégrale : on suppose qu'ils varient peu sur un pas de temps. Cela revient à faire l'approximation

$$T^{M_\alpha}(\mathbf{k},\tau) \simeq T^{M_\alpha}(\mathbf{k},t_n). \tag{2.68}$$

Cette hypothèse permet de n'avoir que des termes exprimés au temps t_n dans le membre de droite. On peut dès lors intégrer analytiquement le facteur placé devant ces termes de transferts et réécrire le système sous la forme suivante :

$$M_1(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_1(\mathbf{k},t_n)e^{-2\nu k^2\delta t} + T^{M_1}(\mathbf{k},t_n)\frac{1-e^{-2\nu k^2\delta t}}{2\nu k^2}, \tag{2.69}$$

$$M_2(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_2(\mathbf{k},t_n)e^{-2\nu k^2\delta t} + T^{M_2}(\mathbf{k},t_n)\frac{1-e^{-2\nu k^2\delta t}}{2\nu k^2}, \tag{2.70}$$

$$M_3(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_3(\mathbf{k},t_n)e^{-\left(2\nu k^2-2N\sin\theta\right)\delta t} + T^{M_3}(\mathbf{k},t_n)\frac{1-e^{-\left(2\nu k^2-2N\sin\theta\right)\delta t}}{2\nu k^2-2N\sin\theta}, \tag{2.71}$$

$$M_4(\mathbf{k},t_{n+1}) = M_4(\mathbf{k},t_n)e^{-\left(2\nu k^2+2N\sin\theta\right)\delta t} + T^{M_4}(\mathbf{k},t_n)\frac{1-e^{-\left(2\nu k^2+2N\sin\theta\right)\delta t}}{2\nu k^2+2N\sin\theta}. \tag{2.72}$$

On utilise ici un schéma d'avancement implicite d'ordre un, le plus simple possible. Dans le cadre d'une étude en turbulence stratifiée stable, STAQUET et GODEFERD [115] ont testé un schéma temporel Adams-Bashforth d'ordre 3, un schéma d'ordre plus élevé, en théorie plus précis que le schéma d'Euler. Avec la discrétisation utilisée, aucune amélioration significative n'a été obtenue sur la précision des résultats.

LESIEUR [72, p. 254] donne un critère sur le pas de temps

$$\nu k_{\max}^2 \delta t \leq 1. \tag{2.73}$$

Ce critère est particulièrement contraignant : une viscosité $\nu = 10^{-4}$ avec une borne maximum $k_{\max} = 10^4$, on obtient un pas de temps $\delta t \leq 10^{-12}$. L'implicitation des termes visqueux dans le schéma numérique permet de choisir un pas de temps plus grand initialement.

Une contrainte spécifique sur ce pas de temps intervient néanmoins de par la spécificité de la turbulence USH. La croissance de l'énergie, exponentielle dans le cas d'une fréquence N fixe, tend à rapprocher l'échelle de Kolmogorov k_η de la borne $k_{\max}$. Il est donc nécessaire de réduire régulièrement le pas de temps du calcul afin de conserver la stabilité du modèle. Cette procédure est faite de manière automatique dans les simulations EDQNM. Dans le cadre de la turbulence USH à fréquence de stratification variable, la croissance des quantités turbulentes n'est plus exponentielle mais quadratique au mieux. Les contraintes sur le pas de temps sont donc plus faibles mais toujours présentes.

2.5.3 Maillage de l'espace spectral

On utilise un maillage logarithmique de l'espace spectral pour discrétiser les nombres d'onde k, p et q. D'après ORSZAG [95, p. 304-305], un maillage cartésien rend le modèle spectral aussi coûteux en temps de calcul qu'une simulation numérique directe. Il suggère de remplacer l'intervalle à pas cartésien constant $\Delta k_i = k_{i+1} - k_i$ par un intervalle à pas logarithmique constant $\Delta k_i = \log(2)k_{i+1} - \log(2)k_i$. On utilise donc la formule

$$k_i = k_{\min} 2^{i/F},\ i \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ N_k - 1\} \tag{2.74}$$

pour discrétiser l'espace spectral avec F le nombre de points par octave et N_k le nombre total de points de maillage. VANHAREN [122] et GODEFERD et CAMBON [36] recommande $F = 4$ (14 points par décade) pour la turbulence homogène stratifiée stable. Nous avons

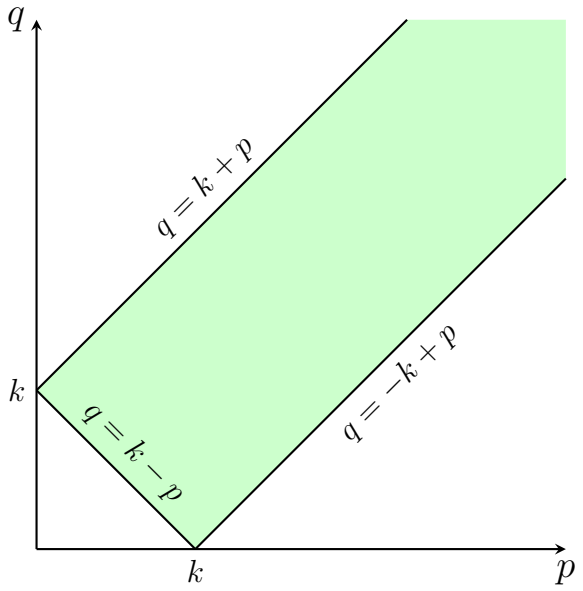


FIGURE 2.2 – Domaine (plein) de validité des nombres d'onde p et q pour k fixé.

retenu $F \simeq 6{,}3$ (21 points par décade) pour la turbulence USH suite à un test de convergence en maillage qui a montré que $F = 4$ n'était pas suffisant. $k_{\min}$ est le plus petit nombre d'onde pris en compte dans le calcul. Il est généralement pris égal à 1 pour correspondre à la simulation numérique directe (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*). Cette borne inférieure peut être facilement ajustée dans les simulations EDQNM. Elle a été portée jusqu'à $k_{\min} = 10^{-2}$ notamment dans les simulations décrites aux chapitres 3 et 4. Elle est liée à la problématique du confinement numérique des simulations évoquée au chapitre 3. On peut relier F, la borne minimum $k_{\min}$, la borne maximum $k_{\max}$ et le nombre total de points N_k par la relation

$$N_k = 1 + F\frac{\log\left(k_{\max}/k_{\min}\right)}{\log(2)}. \tag{2.75}$$

On peut fixer au choix trois paramètres afin d'ajuster le quatrième. Dans notre étude, les paramètres N_k, $k_{\min}$ et $k_{\max}$ sont imposés par l'utilisateur. C'est donc le paramètre F qui varie. L'intérêt du maillage logarithmique est de pouvoir prendre en compte un plus grand nombre d'échelles que dans le cas cartésien. Cela revient à fixer une borne maximum $k_{\max}$ plus grande. À titre d'exemple, avec $N_k = 64$, $F = 6$ et $k_{\min} = 1$, on obtient une borne $k_{\max} \simeq 10^3$. On peut donc visualiser un spectre d'énergie sur trois décades avec $N_k = 64$ points seulement. Une simulation numérique directe nécessite un cube de $N_k = 2048$ points de côté pour prendre 3 décades en compte.

Les nombres d'ondes p et q suivent la discrétisation en k mais toutes les combinaisons (k, p, q) ne sont pas nécessairement réalisables. En effet, les vecteurs d'onde sont liés par la relation $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$, la triade de vecteurs évoquée à la section 2.2 (figure 2.1). Cette relation impose un domaine de validité limité schématisé à la figure 2.2. L'intersection de

ce domaine de validité avec le maillage logarithmique oblige à calculer numériquement le volume effectif des mailles considérées. Il est nécessaire de faire intervenir un algorithme complexe pour calculer ce volume effectif. Cette étape n'est pas nécessaire avec un maillage cartésien mais ce dernier limite la gamme d'échelles prise en compte.

Le cadre de la turbulence axisymétrique nécessite aussi la prise en compte de l'orientation du vecteur $\mathbf{k}$, en plus de sa norme k. Cette orientation est déterminée par l'angle polaire θ. Dans un repère sphérique, cet angle est défini sur $[0,\, \pi]$. Les variables que l'on considère étant réelles, on a la relation $X^*(\mathbf{k}) = X(\mathbf{k})$. De plus, dans l'espace de Fourier (voir annexe A.2), on a la relation $X^*(\mathbf{k}) = X(-\mathbf{k})$. On a ainsi $X(\mathbf{k}) = X(-\mathbf{k})$, que l'on peut réécrire $X(k,\theta) = X(k,\pi-\theta)$. Cela permet de réduire le domaine de discrétisation de θ à l'intervalle $[0,\, \pi/2]$. La discrétisation choisie est linéaire entre 0 et $\pi/2$ et suit la formule

$$\theta_i = \frac{N_\theta - i}{N_\theta - 1}\frac{\pi}{2},\ i \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, N_\theta\}. \tag{2.76}$$

D'après les études menées en turbulence stratifiée stable [36, 122], $N_\theta = 21$ points permet d'avoir une précision suffisante. Nous avons vérifié en prenant $N_\theta = 41$ et $N_\theta = 61$. Aucune amélioration significative n'a été obtenue sur le résultat. $N_\theta = 21$ donne un résultat convergé sur les spectres et les quantités intégrées.

2.5.4 Intégration des termes de transfert

Il est nécessaire d'intégrer spatialement les termes de transfert afin d'évaluer leur contribution au temps t_n dans le système d'équations (2.69)–(2.72). On commence par faire un changement de variable pour passer d'une intégration sur le vecteur $\mathbf{p}$ en trois dimensions à une intégration sur les nombres d'onde p et q et l'angle de rotation de la triade λ (voir figure 2.3) :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}(\mathbf{k},\mathbf{p},t)\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} = \iint_{\Delta} \frac{pq}{k}\left(\int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\mathbf{k},p,q,\lambda,t)\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \tag{2.77}$$

avec S un terme de corrélation triple et Δ le domaine de validité de la triade évoqué à la section 2.5.3. Cette méthode d'intégration a été introduite par Leith [71] pour la partie bipolaire d'intégration sur p et q ; l'intégration en λ se résume dans son cas à une simple multiplication par 2π comme tous les cas isotropes.

La généralisation anisotrope nécessite de prendre en compte l'intégration complète sur λ. Les détails numériques ont été introduits pour le cas de la turbulence en rotation [14]. Cette étape est la plus coûteuse en temps de calcul, sans commune mesure avec les cas isotropes. Il est possible de s'en affranchir partiellement au travers d'une intégration analytique [15] mais nous ne retiendrons pas cette option dans notre étude.

On peut définir cet angle λ de rotation entre le vecteur du repère de Craya-Herring

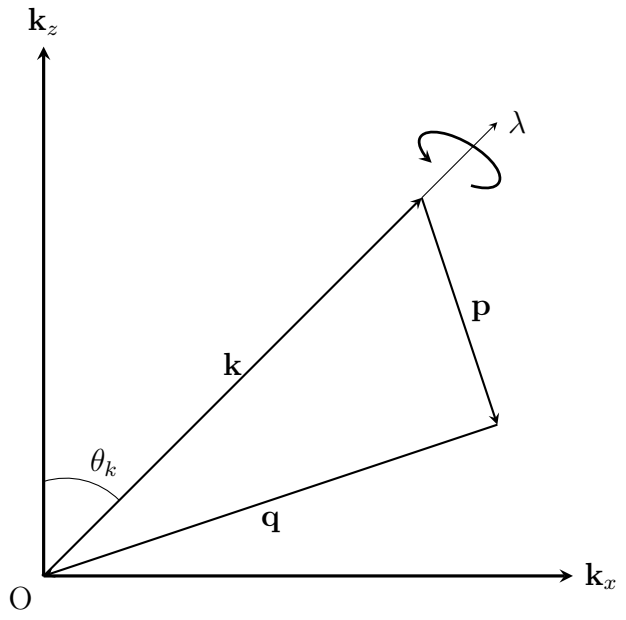


FIGURE 2.3 – Triade de vecteur $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$. On a représenté l'angle θ_k d'orientation du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ ainsi que l'angle λ de rotation de la triade autour de $\mathbf{k}$. La triade représentée est supposée quelconque, elle n'est pas nécessairement contenue dans le plan $\mathbf{k}_x O \mathbf{k}_z$.

$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$ et la projection du vecteur $\mathbf{p}$ sur le plan $(\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}), \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}))$. L'angle λ est défini entre $[0, 2\pi]$. Une nouvelle fois, les études sur la turbulence stratifiée stable ont montré que $N_\lambda = 21$ points étaient suffisants pour obtenir un résultat convergé. Nous avons de nouveau validé ce résultat en utilisant $N_\lambda = 41$ points sans obtenir de meilleurs résultats en matière de convergence. Dans le cadre de la turbulence homogène isotrope, les corrélations triples ne dépendent pas de l'angle λ. On peut donc intégrer analytiquement et s'affranchir de l'intégration angulaire complète.

2.5.5 Parallélisation et performance

L'intégration des termes de corrélations triples est très coûteuse en temps de calcul lorsque l'on prend en compte la dépendance à l'angle λ. Il est donc opportun d'appliquer un traitement informatique permettant de paralléliser le code de calcul : on diminue le temps de calcul en utilisant plus de ressources.

Le modèle EDQNM se prête bien à la parallélisation. En effet, les termes de transfert peuvent être traités séparément car ils ne dépendent que d'un vecteur $\mathbf{k}$ uniquement. On peut donc découper le domaine de calcul et traiter séparément chaque transfert lié à chaque nombre d'onde. On peut théoriquement utiliser autant de cœurs de calcul que de nombres d'onde N_k. Le gain en temps et l'efficacité sont quasiment parfaits : multiplier par deux le nombre de cœurs de calcul divise le temps de calcul par un facteur très proche de deux. Ce

niveau de parallélisation a été introduit par F. Godeferd en utilisant la bibliothèque MPI *(Message Passing Interface)*. Dans les travaux présentés dans ce manuscrit, nous avons fait le choix d'utiliser autant de cœurs de calcul que de nombres d'onde dans les simulations effectuées.

Nous avons ajouté au cours de ces recherches un autre niveau de parallélisation pour aboutir à une parallélisation du code que l'on appelle « hybride ». Au sein d'un calcul sur un nombre d'onde k, on peut découper la boucle de calcul sur les différents angles θ_i. Là encore, chaque mode est indépendant des autres car un terme de transfert ne fait intervenir qu'un vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Nous avons utilisé la bibliothèque OpenMP de parallélisation à mémoire partagée. Elle permet de découper une boucle de calcul sur plusieurs unités d'exécution ou *threads* en anglais. Avec la discrétisation angulaire $N_\theta = 21$ points que nous avons retenue, nous avons trouvé empiriquement que le gain optimal en temps de calcul était atteint pour quatre *threads*. Le gain effectif en temps de calcul est de l'ordre d'un facteur trois.

À titre d'exemple, avec $N_k = 128$, $N_\theta = 21$ et $N_\lambda = 21$, en utilisant $N_k \times 4 = 512$ cœurs de calcul, on effectue environ 260000 itérations en 18000 secondes, soit environ quinze itérations par seconde. Dans cette même configuration, sans parallélisation OpenMP, le code de calcul effectue environ cinq itérations par seconde.

2.6 Validation préliminaire du modèle spectral pour la turbulence USH

On présente maintenant des résultats de validation préliminaires du système d'équations (2.32)–(2.35). C'est une première étape de validation avant d'étudier le système complet au chapitre 3.

Dans un premier temps, nous avons vérifié que le modèle EDQNM pour la turbulence USH permet de retrouver les résultats classiques de la turbulence homogène isotrope en cas de gradient nul. [5]

Dans un second temps, nous allons étudier quelques cas particuliers du système linéaire. On néglige alors les termes non linéaires. Cette simplification est équivalente à considérer un écoulement où la stratification est très forte. Les termes de stratification agissant linéairement dans le système d'équations, ils prédominent, au moins au temps court, au sein de l'écoulement. On fera référence dans la suite du manuscrit à la limite RAM pour *Rapid Acceleration Model* d'après Gréa [38]. On peut mettre cette approche linéaire en parallèle de la *Rapid Distortion Theory* ou RDT introduite par Batchelor [5] et

5. Bien entendu, faire un calcul isotrope avec un modèle axisymétrique, qui tient compte de la rotation de la triade de vecteurs, implique un coût de calcul très largement supérieur par rapport à l'emploi d'un modèle purement isotrope.

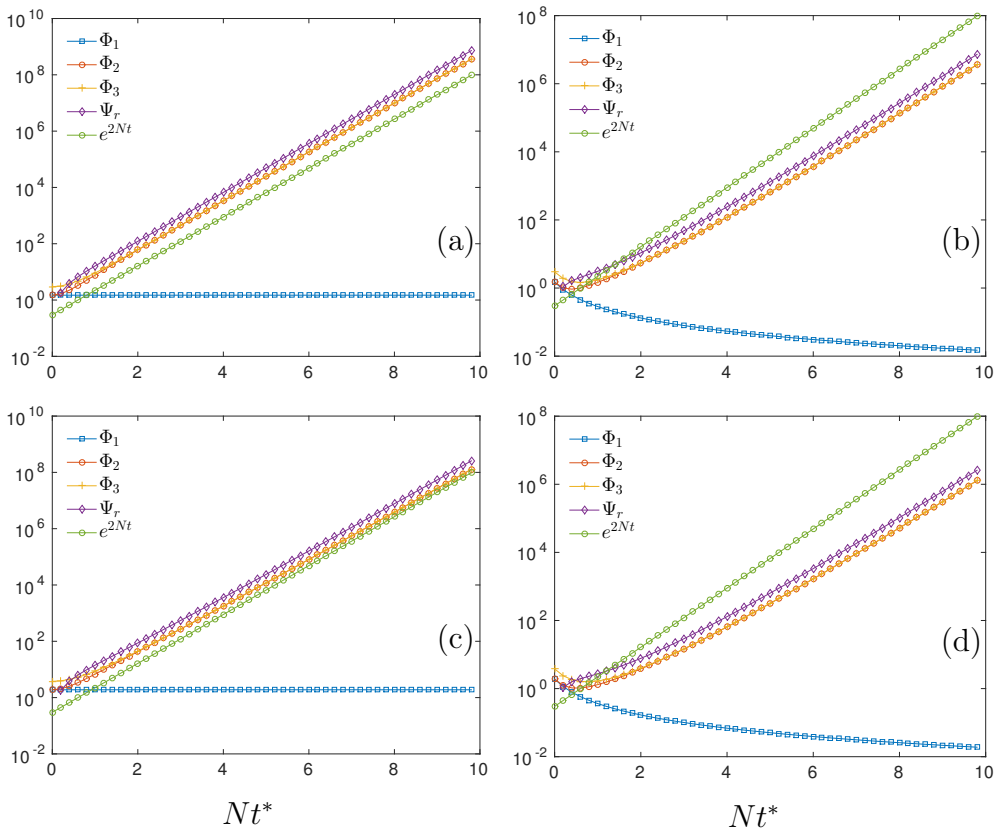


FIGURE 2.4 – Évolution temporelle des quantités intégrées du système linéaire pour les quatre cas (a) $\nu = 0$ et $\theta = \pi/2$, (b) $\nu = 10^{-2}$ et $\theta = \pi/2$, (c) $\nu = 0$ et $\theta \in [0, \pi/2]$ et (d) $\nu = 10^{-2}$ et $\theta \in [0, \pi/2]$.

BATCHELOR et PROUDMAN [7]. Ce système linéaire est étudié au travers de quatre cas particuliers :

1. Viscosité nulle et énergie concentrée dans l'axe vertical ($\theta = \pi/2$) uniquement ;
2. Viscosité non nulle ($\nu = 10^{-2}$) et énergie concentrée dans l'axe vertical ($\theta = \pi/2$) uniquement ;
3. Viscosité nulle et énergie répartie sur l'ensemble des modes angulaires ;
4. Viscosité non nulle ($\nu = 10^{-2}$) et énergie répartie sur l'ensemble des orientations angulaires.

Les autres paramètres définis sont :

— $k_{\text{min}} = 1$, $k_{\text{pic}} = 20$, $k_{\text{max}} = 1024$;
— $N_k = 64$;
— $N = 1$;
— $\delta t = 10^{-2}$, $N_{\text{itération}} = 1000$.

Dans le premier cas, la simplification réduit fortement le système linéaire et une solution

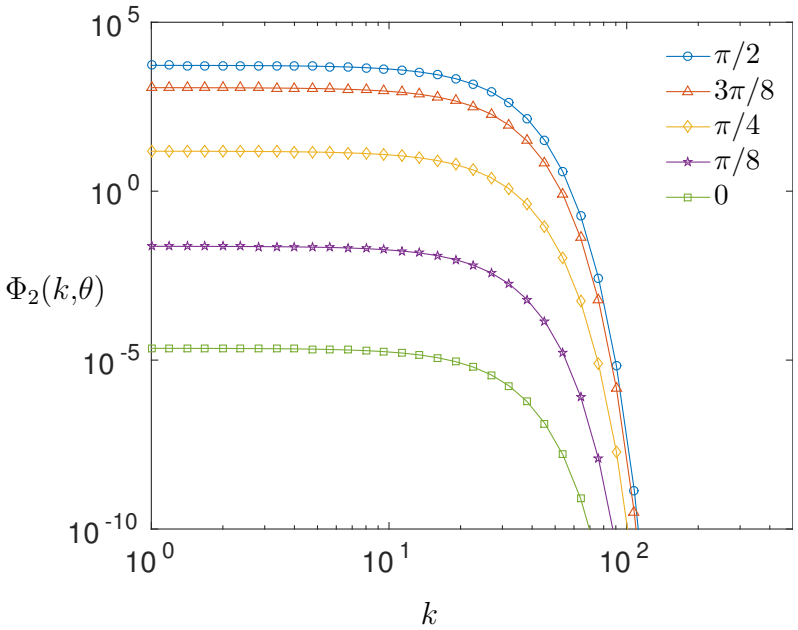


FIGURE 2.5 – Répartition angulaire de l'énergie sur le mode Φ_2 du tenseur des corrélations de vitesse. Ce spectre correspond au dernier temps, $Nt^* = 10$. Les angles sélectionnés sont $\pi/2$, $3\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/8$ et 0. Le résultat est identique sur Φ_3.

analytique peut être établie :

$$\Phi_1(\mathbf{k},t) = \Phi_1(\mathbf{k},0), \tag{2.78}$$

$$\Phi_2(\mathbf{k},t) = e^{2Nt}\Phi_2(\mathbf{k},0), \tag{2.79}$$

$$\Phi_3(\mathbf{k},t) = e^{2Nt}\Phi_3(\mathbf{k},0), \tag{2.80}$$

$$\Psi_r(\mathbf{k},t) = e^{2Nt}\Psi_r(\mathbf{k},0). \tag{2.81}$$

On rappelle que l'on ne considère que l'orientation $\theta = \pi/2$. Dans le cas général à viscosité nulle, le terme e^{2Nt} dans les équations (2.79), (2.80) et (2.81) est de la forme $e^{2Nt\sin\theta}$.

Après intégration sur l'ensemble des nombres d'onde, on montre que l'énergie cinétique, la variance de flottaison et le flux vertical ont une croissance exponentielle. Le résultat est présenté sur la figure 2.4(a). Le second cas est présenté sur la figure 2.4(b). On observe que la croissance s'écarte du cas fluide parfait. La dissipation visqueuse diminue le taux de croissance même en considérant uniquement le mode dominant. La figure 2.4(c) montre l'influence des différents modes angulaires dans le cas non visqueux. On observe que la croissance est proche de la limite e^{2Nt} mais reste plus faible que dans le cas où l'énergie est concentrée à l'équateur dans l'espace spectral. L'énergie se concentre alors autour d'un angle intermédiaire légèrement inférieur à $\pi/2$. En utilisant une méthode de Laplace pour évaluer l'intégrale, on obtient une croissance pour chaque mode pondéré par un facteur $\sin\theta$. C'est la raison pour laquelle la croissance globale est inférieure au cas purement

équatorial. Finalement, le dernier cas visqueux (figure 2.4d) avec une distribution angulaire complète montre un comportement similaire au second cas. On retrouve l'écart par rapport à la croissance du cas limite dû principalement à la dissipation visqueuse.

On observe également que, sur l'ensemble des cas, les modes Φ_2 et Φ_3 sont confondus.

On peut également regarder l'évolution de la répartition angulaire de l'énergie. La figure 2.5 montre cette décomposition angulaire sur Φ_2 pour le troisième cas. Les spectres correspondant aux angles $\pi/2$, $3\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/8$ et 0 ont été tracés. Le résultat est identique sur Φ_3 et Ψ_r. On observe que l'énergie est maximum pour l'angle $\pi/2$ comme attendu. C'est le mode angulaire le plus sensible à la stratification. L'angle $\pi/2$ est associé à un vecteur d'onde compris dans le plan équatorial dans l'espace spectral. D'après l'hypothèse d'incompressibilité, le champ de vitesse est orthogonal au vecteur d'onde. L'angle $\pi/2$ est donc associé à une vitesse verticale. La stratification agissant selon l'axe vertical, il est donc normal d'avoir un maximum d'énergie dans cette direction.

2.7 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, le modèle EDQNM et son application au cas de la turbulence homogène stratifiée instable. En plus de l'équation sur les corrélations doubles de vitesse, deux nouvelles équations ont été introduites pour décrire l'évolution de la variance de flottaison et du flux de flottaison. Ces équations ont été obtenues dans le repère fixe ainsi que dans le repère local de Craya-Herring. Afin de fermer ce système d'équations, nous avons établi l'expression des corrélations triples intervenant dans le système des corrélations doubles. Nous n'avons écrit explicitement ces corrélations triples que dans le repère fixe. Une projection est nécessaire pour obtenir leurs expressions dans le repère de Craya-Herring.

Nous avons choisi de faire une hypothèse supplémentaire dans la fermeture des corrélations triples : les termes linéaires de stratification ont été négligés dans la dynamique de ces corrélations triples afin de conserver un modèle simple mathématiquement.

Nous avons ensuite donné les détails de l'implémentation numérique avec notamment le schéma temporel employé, la discrétisation logarithmique de l'espace spectral et la méthode d'intégration des corrélations triples.

Finalement, nous avons présenté des cas–tests de validation du système linéaire. Cette étude linéaire porte le nom de RDT pour *Rapid Distortion Theory*. Nous y ferons référence par la suite notamment pour distinguer la transition entre régime linéaire et non linéaire.

Nous devons maintenant valider ce modèle spectral pour la turbulence USH en tenant compte des termes non linéaires. Nous allons utiliser des simulations numériques directes comme référence. Ces résultats de validation sont présentés au chapitre 3.

Dans la suite du document, nous nommerons « calculs EDQNM » ou « simulations

EDQNM » les calculs/simulations utilisant le modèle spectral anisotrope développé dans ce chapitre. La partie EDQNM, traitant les termes non linéaires, n'est bien entendu qu'une sous-partie du modèle spectral complet. Cependant, il semble plus aisé de faire référence à ce modèle spectral anisotrope sous la dénomination « modèle EDQNM ».

Chapitre 3

Validation du modèle spectral anisotrope et prémices d'un état autosemblable

Dans ce chapitre, nous validons l'approche spectrale anisotrope par rapport à des simulations numériques directes de référence. Les premières comparaisons montrent que le modèle EDQNM *capture l'évolution globale de l'écoulement mais un écart non négligeable est visible avec les* DNS*, notamment sur le niveau d'énergie et la transition de régime. On met en évidence que l'hypothèse de non prise en compte des effets de stratification sur les corrélations triples est trop forte. Elle permet de garantir la réalisabilité du modèle mais exclut le phénomène de balayage des structures turbulentes. Ce dernier tend à réduire le transfert d'énergie et peut expliquer l'écart observé entre le modèle* EDQNM *et les* DNS*. On propose une correction qui permet effectivement de reproduire l'évolution des* DNS*. On termine cette validation par des résultats préliminaires sur l'état autosemblable, atteint à haut nombre de Reynolds par le modèle.*

Les résultats inclus dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication : A. Burlot*, B.-J.* Gréa*, F. S.* Godeferd*, C.* Cambon *et J.* Griffond*. « Spectral modelling of high Reynolds number unstably stratified homogeneous turbulence ».* Journal of Fluid Mechanics *765 (2015), p. 17–44.*

3.1 Introduction

Le premier objectif de ce chapitre est de valider le modèle EDQNM décrit au chapitre 2. On utilisera des simulations numériques directes de turbulence USH comme résultat de référence. La turbulence USH a déjà été en partie étudiée et décrite au moyen de simulations directes par Griffond et al. [44, 45]. Dans ce chapitre, le gradient moyen de densité est fixe et ne subit pas la rétroaction des quantités fluctuantes. La fréquence de flottaison est donc

fixe. Ces quantités fluctuantes seront prises en compte au chapitre 5 avec l'introduction d'une rétroaction sur ce gradient moyen.

Le second objectif du chapitre est de présenter des résultats de turbulence USH à grand nombre de Reynolds. Après avoir réussi à reproduire l'évolution de l'écoulement dans les régimes atteignables par la simulation directe, le modèle EDQNM est utilisé pour atteindre des nombres de Reynolds plus grands, susceptibles de fournir un état autosemblable convergé. Les propriétés physiques de l'écoulement peuvent ainsi être mieux comprises comme la nature de l'anisotropie par exemple. Une étude exhaustive à grand nombre de Reynolds de l'état autosemblable sera menée au chapitre 4. On s'attachera ici à s'assurer de la cohérence des résultats par rapport à la DNS.

Les résultats de comparaison sont présentés à la section 3.2 avec la méthodologie de la comparaison (section 3.2.1). Une discussion sur l'écart constaté entre DNS et EDQNM dans les résultats est donnée à la section 3.2.3. Les détails de la correction du modèle sont présentés à la section 3.3 avec les résultats corrigés (section 3.3.3). Finalement, l'étude à grand nombre de Reynolds est décrite à la section 3.4 avec la caractérisation de l'état autosemblable (section 3.4.1) et de l'anisotropie (section 3.4.2). On rappelle que les hypothèses physiques de la turbulence homogène stratifiée instable sont données au chapitre 1 et les détails sur la modélisation EDQNM au chapitre 2.

3.2 Validation du modèle : procédure et premiers résultats

3.2.1 Méthodologie

3.2.1.1 Procédure d'initialisation des simulations en stratification instable

On effectue une pré-simulation en turbulence homogène isotrope via une simulation numérique directe pour créer l'état initial qui servira aux simulations stratifiées. Cette étape est nécessaire afin d'établir des corrélations triples pour la simulation directe en vu des comparaisons prévues avec le modèle spectral. En effet, le modèle EDQNM fait intervenir des corrélations triples, par construction, dès la première itération. Sans ce pré-calcul, un décalage apparaît entre simulation et modèle du fait du temps nécessaire à l'établissement de ces corrélations.

La simulation directe de THI est menée jusqu'à l'obtention d'un régime autosemblable de décroissance. Ce dernier peut être caractérisé par une évolution de l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}(t) \sim t^{-10/7}$ pour une pente $s = 4$. Cette valeur $t^{-10/7}$ est théorique et sujette à débat [34, 74], notamment du fait de transfert vers les grandes échelles qui tendent à modifier la pente $s = 4$. Le régime autosemblable se met en place progressivement. On observe, à la figure 3.1(a), que la phase de décroissance autosemblable débute environ à

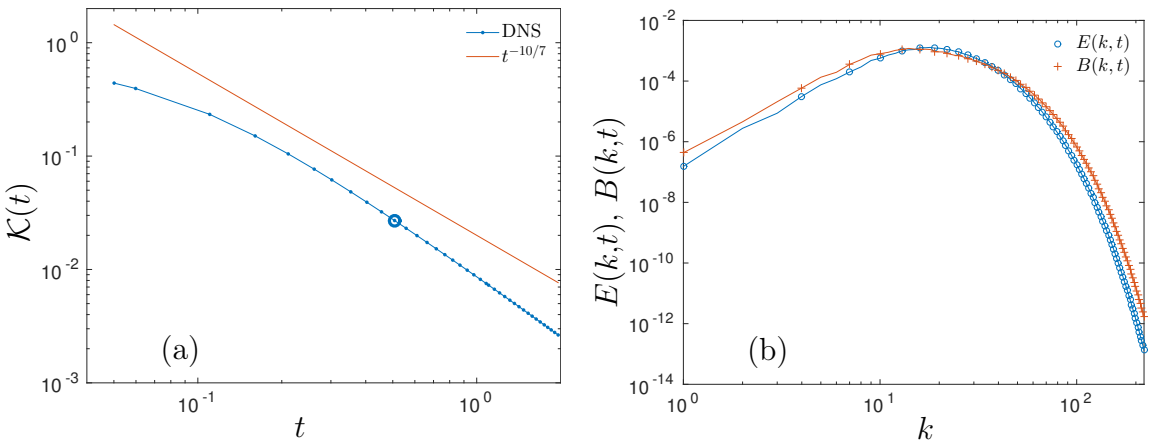


FIGURE 3.1 – (a) Décroissance de l'énergie cinétique pour la simulation de turbulence homogène isotrope servant à initialiser les simulations de turbulence en stratification instable. Le point entouré ∘ sur la figure correspond au temps t_0 auquel on a extrait les spectres afin d'initialiser les calculs stratifiés. (b) Spectres d'énergie cinétique (en bleu avec le symbole ∘) et de variance de scalaire (en rouge avec symbole « + ») au temps t_0 choisi pour initier les calculs USH.

$t_0 \simeq 0{,}5$. À ce temps $t = t_0$, on a $t_0 \times f_{ED} = 20$ avec $f_{ED} = k_{\text{pic}}\sqrt{\mathcal{K}(0)}$ la fréquence initiale de retournement des structures turbulentes. Ce critère est un marqueur de l'établissement de l'état autosemblable. Cette valeur $t_0 \times f_{ED} = 20$ est relativement faible : l'état autosemblable vient seulement de commencer. Attendre plus longtemps permettrait d'avoir un état autosemblable mieux établi. Ce choix $t_0 \times f_{ED} = 20$ est un compromis entre l'état convergé et la position du pic. Ce temps t_0 définira par la suite le temps initial du calcul en stratification instable. On a donc deux phases dans le calcul :

- de $t = 0$ à t_0, écoulement de turbulence homogène isotrope ;
- de t_0 à $t > t_0$, écoulement de turbulence stratifiée instable.

3.2.1.2 Initialisation des simulations en THI

On définit le spectre d'énergie cinétique $E(k,t = 0)$ à partir de l'expression analytique

$$E(k,t) = A_s \left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^s \exp\left(-\frac{s}{2}\left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^2\right) \tag{3.1}$$

dans le but d'initialiser la turbulence homogène isotrope. On définit k_{pic} le nombre d'onde contenant le maximum initial d'énergie du spectre d'énergie, s la pente de la zone infrarouge (petit nombre d'onde) et A_s un paramètre d'ajustement de l'amplitude du spectre. Dans cette étude, on a choisi une pente infrarouge $s = 4$ et le terme A_s pour avoir l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}(t = 0) = 0{,}75$ avec $\mathcal{K}(t)$ défini à l'annexe A.4. Le spectre de scalaire de la simulation directe en THI est initialisé avec la même expression (3.1).

On doit également choisir la valeur initiale du nombre d'onde k_{pic} du spectre pour le calcul en turbulence homogène isotrope. Le choix de cette valeur k_{pic} est contraint par la seconde phase de calcul en turbulence homogène stratifiée stable. En effet, dès la phase de décroissance en THI, le pic du spectre migre vers les petits nombres d'onde. Cette migration est reliée à la croissance de l'échelle intégrale, caractéristique des structures énergétiques. L'objectif de cette simulation étant de fournir une base pour une seconde simulation en turbulence USH, il est nécessaire de conserver une marge d'évolution dans les plus grandes échelles afin d'éviter le plus possible les effets de confinement. Il est donc préférable d'avoir un nombre d'onde pour le pic de spectre le plus grand possible. POPE [97] retient $k/k_{\text{min}} \simeq 10$ comme borne inférieure à ne pas dépasser sous peine d'être sujet au confinement numérique. Cependant, afin d'atteindre des niveaux d'énergie suffisant, on retient le critère $k/k_{\text{min}} \simeq 5$ comme limite basse du pic du spectre GRIFFOND et al. [45]. Ce choix permet de ne pas trop altérer la forme du spectre. Ce constat est corroboré par l'étude de confinement mené à la section 3.2.3.2. Cependant, il est également nécessaire d'avoir un niveau d'énergie cinétique turbulent permettant d'avoir un nombre de Reynolds assez élevé. Le cas échéant, un régime purement visqueux s'installe. Un compromis doit donc être fait sur la position du pic. On a choisi $k_{\text{pic}} = 40$ afin de satisfaire ces deux contraintes. À la fin de la phase THI à $t = t_0$, le maximum du spectre visible à la figure 3.1(b) est proche de $k \simeq 15$ ce qui laisse une marge pour le calcul stratifié où l'on s'attend également à voir croître l'échelle intégrale.

Une autre contrainte concerne l'initialisation du spectre du scalaire. À l'image du spectre d'énergie cinétique, on définit le spectre de variance de flottaison par :

$$B(k,t) = A'_s \left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^s \exp\left(-\frac{s}{2}\left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^2\right) \tag{3.2}$$

où $A's$ est un coefficient multiplicatif différent de A_s. Les termes s et k_{pic} sont identiques à ceux choisis pour l'énergie cinétique. Au travers de A'_s, nous allons faire varier les conditions initiales, notamment le rapport entre variance de scalaire et énergie cinétique. Cette procédure implique d'augmenter ou de réduire l'amplitude du spectre à toutes les échelles et notamment aux plus petites correspondant aux grands nombres d'onde. Il est donc nécessaire d'avoir une simulation très bien résolue aux plus petits nombres d'onde afin de maintenir une valeur correcte de l'échelle de Corrsin ℓ_c dans les simulations de turbulence USH.

On définit l'échelle de Corrsin par $\ell_c = (\varepsilon/\mathcal{D}^3)^{-1/4}$ [72, p. 222] dans le cadre de la turbulence avec scalaire passif. Elle représente l'échelle caractéristique des effets de dissipation du spectre de variance de scalaire. C'est l'équivalent de l'échelle de Kolmogorov $\eta = (\varepsilon/\nu^3)^{-1/4}$ pour le scalaire. On peut relier l'échelle de Kolmogorov à l'échelle de Corrsin par l'intermédiaire du nombre de Schmidt $Sc = \nu/\mathcal{D}$, $\ell_c = \eta \times Sc^{-3/4}$. On choisit un nombre

de Schmidt unité avec $\nu = \mathcal{D} = 2{,}5 \times 10^{-3}$, on a donc égalité des échelles de Kolmogorov et de Corrsin. On peut donc valider la résolution du spectre de scalaire en vérifiant le critère défini par POPE [97] et KANEDA et al. [56] pour le spectre d'énergie ; c'est le produit $k_{\max} \times \eta$ où $k_{\max}$ est le plus grand nombre d'onde, ici $k_{\max} = 481$. Au temps t_0 défini précédemment, ce critère vaut $k_{\max} \times \eta = 9{,}9$ dans la simulation de THI considérée ici. Cette valeur est très supérieure aux recommandations usuelles qui sont $k_{\max} \times \eta = 1{,}5$ pour YEUNG et POPE [126] (voir également POPE [97, p. 346]) et $k_{\max} \times \eta \in [1\,;\,2]$ pour KANEDA et al. [56]. POPE [97, p. 347] précise que la valeur $k_{\max} \times \eta = 1.5$ peut paraître large mais c'est lié au fait que l'échelle η sous-estime la taille caractéristique des effets de dissipation. Notre résolution aux petites échelles est donc adéquate.

On considère que le flux de flottaison est nul initialement. On a donc $F(k,t = 0) = 0$.

3.2.1.3 Nombres adimensionnels de l'écoulement

Nous avons retenu les trois nombres adimensionnels suivants pour caractériser les écoulements en turbulence USH : le nombre de Reynolds Re, le nombre de Froude Fr et le rapport entre la variance de flottaison et l'énergie cinétique Λ définis par

$$Re = \frac{\mathcal{K}^2}{\varepsilon\nu}, \quad Fr = \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}N}, \quad \Lambda = \frac{\langle\vartheta\vartheta\rangle}{\mathcal{K}} \tag{3.3}$$

où ε est la dissipation d'énergie cinétique, $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ la variance de flottaison (définie à l'annexe A.4) et N la fréquence de flottaison. Le nombre de Reynolds initial de la phase stratifiée est dépendant de la simulation de THI initiale. Dans le cas présent, au temps de reprise t_0 considéré, ce nombre est égal à $Re = 3$. Cette valeur est faible à cause de la décroissance de THI initiale mais va croître rapidement du fait de la stratification instable.

Afin d'étudier différents états initiaux, les nombres de Froude envisagés dans cette étude vont de 0,4 à 1,6. Un nombre de Froude très inférieur à 1 signifie que les effets linéaires de flottaison dominent les effets non linéaires. L'ajustement du nombre de Froude se fait par variation de la fréquence de flottaison N au début de la phase stratifiée.

Le rapport des fluctuations de flottaison sur l'énergie cinétique Λ varie de 0,06 à 6. La dynamique initiale sera imposée par l'énergie cinétique en cas de Λ faible et par les fluctuations de flottaison en cas de Λ grand.

Ces paramètres initiaux sont résumés dans le tableau 3.1.

3.2.2 Comparaisons des résultats de simulation

Dans cette section, les résultats des simulations directes et du modèle EDQNM sont comparés. L'évolution des nombres adimensionnels de l'écoulement dans les simulations directes est présentée. On décrit ensuite sur l'évolution des quantités, $\mathcal{K}$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ et $\langle u_3\vartheta\rangle$,

Run	$Re(t=t_0)$	$Fr(t=t_0)$	$\Lambda(t=t_0)$	N	ν, $\mathcal{D}$	Nb points
1	3,34	1,6	0,06	2	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
2	3,34	1,6	2	2	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
3	3,34	1,6	6	2	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
4	3,34	0,808	0,06	4	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
5	3,34	0,808	2	4	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
6	3,34	0,808	6	4	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
7	3,34	0,404	0,06	8	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
8	3,34	0,404	2	8	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
9	3,34	0,404	6	8	$2{,}5\times10^{-3}$	1024^3
10	3,28	0,814	0,06	1	1×10^{-2}	256^3
11	3,35	0,813	0,06	2	5×10^{-3}	512^3

TABLE 3.1 – Paramètres des simulations de turbulence USH étudiées. Pour rappel : $Re=\mathcal{K}^2/(\varepsilon\nu)$, $Fr=\varepsilon/(N\mathcal{K})$ et $\Lambda=\langle\vartheta\vartheta\rangle/\mathcal{K}$.

définies en un point, ainsi que les spectres des différentes corrélations doubles. Ces quantités sont définies dans l'annexe A.4.

3.2.2.1 Évolution des nombres adimensionnels

La figure 3.2 montre l'évolution du nombre de Reynolds (figure 3.2a), du nombre de Froude (figure 3.2b) et du rapport de variance de flottaison sur énergie cinétique Λ (figure 3.2c). Les résultats sont tracés en fonction du temps adimensionné $t^*=N(t-t_0)$. La borne supérieure est choisie à $t^*=6$ pour des raisons de résolution aux grandes échelles. Ce point sera discuté plus en détails par la suite.

Le nombre de Reynolds croît fortement pour atteindre des valeurs finales comprises entre 5×10^2 et 10^3. Il montre une large gamme de régimes transitoires décrivant l'influence du nombre de Froude et du paramètre Λ. Le *run* 1 correspondant à une faible stratification ($Fr=1{,}6$) et peu de variance de flottaison par rapport à l'énergie cinétique ($\Lambda=0{,}06$) limite la production de flottaison au début de la simulation. Cela induit une courte phase de décroissance similaire à la THI. La croissance du nombre de Reynolds ralentit autour de $t^*=4$ où un changement de régime semble intervenir. Il est trop tôt à ce stade pour conclure à l'apparition du régime autosemblable final.

L'évolution des nombres de Froude (figure 3.2b) montre une phase de décroissance initiale pour tous les cas avec un minimum inférieur à 1 atteint autour de $t^*=4$. La fréquence de flottaison N étant fixée, on a une décroissance de la fréquence caractéristique des effets non-linéaires $\varepsilon/\mathcal{K}$ liée à la THI initiale. Ces effets sont liés à l'action des termes de production linéaire qui entraîne une croissance rapide de l'énergie cinétique. Une fois le minimum atteint, les effets non linéaires sont plus forts que la stratification et le nombre de Froude remonte. On observe une convergence vers une valeur proche de 0,7 pour toutes les simulations à $t^*=6$. Une valeur proche de $Fr=0{,}5$ est également obtenue dans le

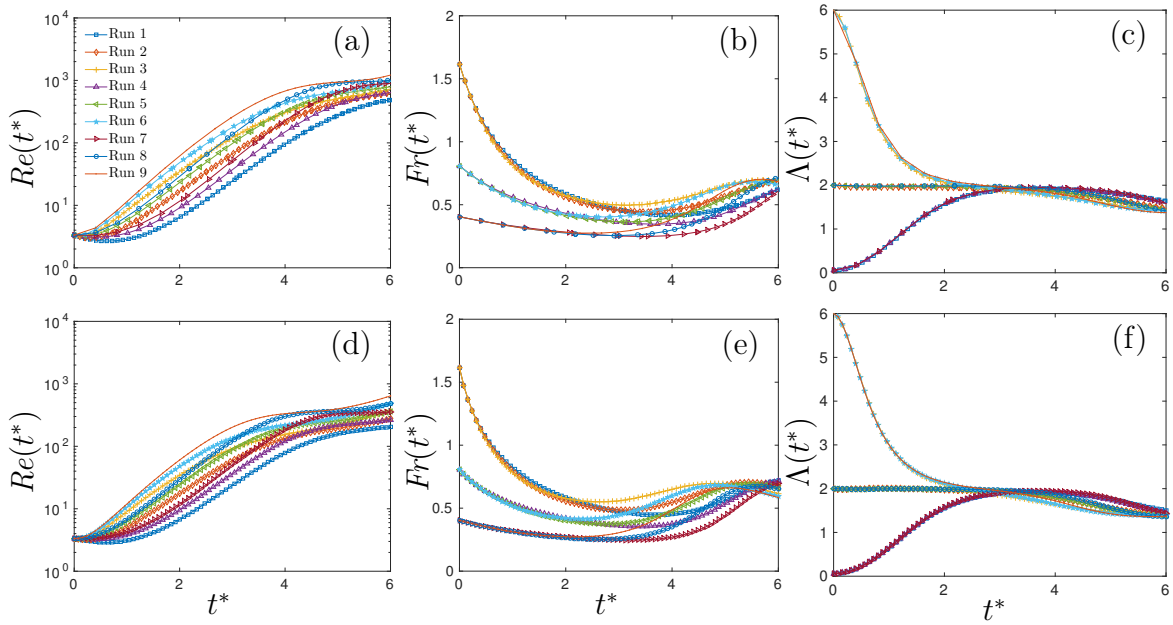


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle : (a),(d) du nombre de Reynolds, (b),(e) du nombre de Froude et (c),(f) du paramètre Λ. pour les neuf DNS (figures a, b, c) et les neuf calculs EDQNM (figures d, e, f).

cadre de la stratification stable [36]. Là non plus, on ne peut pas conclure sur l'apparition de l'état autosemblable.

L'évolution du paramètre Λ montre une convergence rapide vers une valeur proche de 2 à $t^* = 3$. Cette valeur $\Lambda = 2$ correspond au rapport obtenu en étudiant le système linéarisé, c'est-à-dire sans prendre en compte les termes de transfert. On a vu à la section 2.6 que les modes Φ_2 et Φ_3 tendent vers la même valeur pour cette configuration simplifiée. On retrouve cette valeur limite définie par $\Lambda = \langle \vartheta\vartheta \rangle / \mathcal{K} = 2\Phi_3/\mathcal{K}$. Une nouvelle fois, cette valeur $\Lambda = 2$ est similaire au résultat obtenu en stratification stable. Les effets linéaires font converger rapidement l'écoulement vers cette valeur d'équilibre quelque soit la valeur de la fréquence de flottaison N. La convergence à $t^* = 6$ vers la valeur $\Lambda = 1{,}6$ montre l'influence des termes non linéaires sur cette répartition.

Ces comparaisons montrent que le modèle reproduit l'évolution globale de l'écoulement observée sur la simulation directe. On s'intéresse maintenant aux statistiques en un point pour confronter le modèle plus en détails.

3.2.2.2 Statistiques en un point

La figure 3.3 décrit l'évolution en temps de l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t)$ (figure 3.3a), la variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle^*(t)$ (figure 3.3b) et le flux vertical de flottaison $\langle u_3\vartheta \rangle^*(t)$ (figure 3.3c). L'étoile en exposant signifie que les quantités ont été renormalisées par la

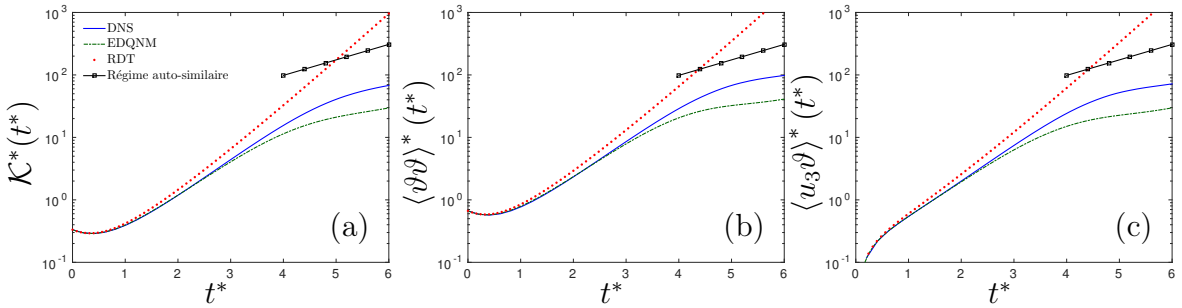


FIGURE 3.3 – Comparaison EDQNM-DNS pour le *run* 5 de l'évolution temporelle de (a) l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t^*)$, (b) la variance de flottaison $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*(t^*)$ et (c) le flux de flottaison $\langle u_3\vartheta\rangle^*(t^*)$ avec la DNS en trait plein (bleu), l'EDQNM en trait discontinu (vert), la solution linéaire en pointillé (rouge) et l'état autosemblable en tiret (noir et □). L'exposant « * » pour les trois quantités $\mathcal{K}^*$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*$ et $\langle u_3\vartheta\rangle^*$ signifie qu'elles ont été renormalisées par $\mathcal{K}(t_0) + \langle\vartheta\vartheta\rangle(t_0)$.

somme de l'énergie cinétique et la variance de flottaison au temps $t = t_0$, à savoir

$$X^*(t) = \frac{X(t)}{\mathcal{K}(t_0) + \langle\vartheta\vartheta\rangle(t_0)}. \tag{3.4}$$

Cette comparaison va permettre de déterminer les différents régimes de l'écoulement. On présente uniquement les résultats sur le *run* 5, les conclusions étant les mêmes pour l'ensemble des cas étudiés.

Les résultats obtenus en utilisant le modèle linéaire (RDT pour *Rapid Distorsion Theory*) sont représentés afin de montrer l'importance des effets non linéaires dans la configuration considérée. Si les effets visqueux étaient négligés, la solution asymptotique du système linéaire serait simplement $\mathcal{K}(t) \sim \mathrm{e}^{2Nt}$, pour l'énergie cinétique par exemple. Cette solution est quasiment celle obtenue sur la figure 3.3(a).

L'évolution au temps court de la simulation directe et du modèle EDQNM se confond avec la solution linéaire jusqu'au temps $t^* \simeq 2$. Passé ce temps, des effets non linéaires tendent à infléchir les courbes de croissance des trois quantités considérées. L'évolution des trois quantités sur la figure 3.3 montre ensuite une forte croissance. La correspondance DNS-EDQNM est bonne tant que ces effets non linéaires ne sont pas trop forts. Passé $t^* = 4$, on observe un changement de régime sur les trois quantités pour les résultats du modèle EDQNM alors que dans le même temps, la simulation directe continue de croître presque linéairement. Un écart non négligeable se creuse avant que la DNS n'effectue à son tour la transition de régime. Au terme de la simulation à $t^* = 6$, un écart d'environ 50% est établi entre les résultats EDQNM et DNS. L'écart est visible pour l'ensemble des conditions initiales décrites dans le tableau 3.1. À première vue, cet écart peut s'expliquer par un transfert d'énergie vers les petites échelles trop fort dans le modèle EDQNM. Une discussion complète sur l'origine de ce décalage est présentée à la section 3.2.3.

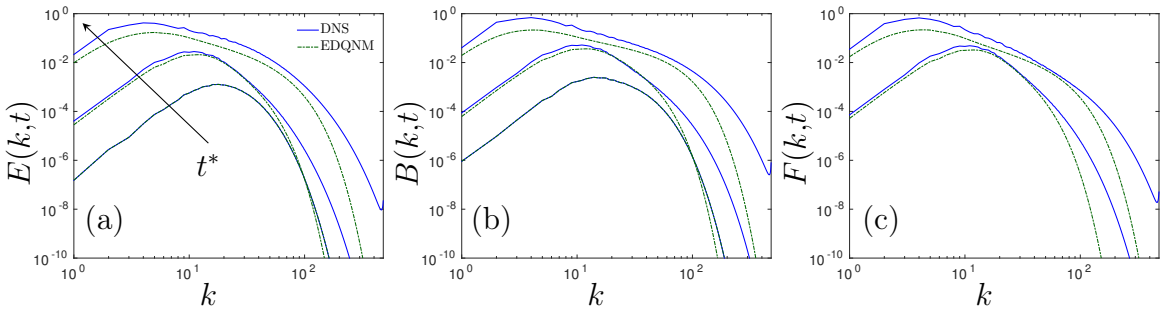


FIGURE 3.4 – Évolution en trois temps $t^* = 0, 3, 6$: (a) du spectre d'énergie $E(k,t)$; (b) du spectre de flottaison $B(k,t)$; (c) du spectre de flux vertical $F(k,t)$ pour le *run* 5. Trait plein (bleu) pour la DNS et trait discontinu (vert) pour l'EDQNM.

Les différents régimes de l'écoulement sont bien capturés par le modèle EDQNM pour les trois quantités mais l'écart observé avec la simulation directe n'est pas négligeable. On s'intéresse maintenant aux statistiques en deux points en comparant les spectres à différents temps.

3.2.2.3 Spectres d'énergie

La figure 3.4 permet une comparaison échelle par échelle entre la DNS et le modèle EDQNM. Cette comparaison est plus fine que sur les quantités intégrées en un point. Les figures 3.4(a), (b) et (c) représentent, respectivement, les spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$, de variance de flottaison $B(k,t)$ et de flux vertical de flottaison $F(k,t)$. Ces courbes sont une nouvelle fois extraites du *run* 5 mais les conclusions sont identiques pour les huit autres cas du tableau 3.1. Les spectres sont tracés à trois temps $t^* = 0, 3, 6$ pour $E(k,t)$ et $B(k,t)$ et $t^* = 3, 6$ pour $F(k,t)$, le flux vertical étant nul à l'état initial.

Tout d'abord, on observe un décalage au grand nombre d'onde, dans la zone dissipative, entre le modèle EDQNM et la DNS. Ce résultat était attendu car observé sur d'autres configurations, comme la turbulence en rotation [16] et la turbulence en stratification stable [37]. Cette différence est imputable aux deux approches. D'une part, d'après KRAICHNAN [65] et CHEN et al. [21], des effets de balayage des petites structures réduisent le transfert d'énergie aux grands nombres d'onde. Ce phénomène est généralement mal capturé par les modèles de fermeture en deux points, comme l'EDQNM. D'autre part, ils évoquent également le cas de l'intermittence aux petites échelles qui ne serait pas capturé. Pour la DNS, une légère remontée d'énergie est visible aux plus grands nombres d'onde. Cela est dû à la troncature des petites échelles engendrées par la taille finie du maillage, phénomène appelé *pile-up* en anglais. L'énergie ne pouvant se dissiper à l'infini, elle tend à s'accumuler dans les plus petites structures de l'écoulement. Cela occasionne alors cette remontée du spectre pour les grands nombres d'onde [97]. Pour autant, le niveau d'énergie dans la zone dissipative est faible et ne peut expliquer l'écart observé entre DNS et modèle

EDQNM.

La différence observée entre DNS et EDQNM sur les statistiques en un point se fait dans les zones infrarouge et inertielle. Les trois figures montrent des niveaux d'énergie significativement plus faibles à ces échelles, notamment aux petits nombres d'onde autour du pic du spectre. Ces échelles sont les plus significatives dans le calcul de l'énergie lors de l'intégration du spectre. La différence sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, observée à la figure 3.3(a), est confirmée sur le spectre d'énergie $E(k,t)$. Le fait que l'ensemble du spectre soit à un niveau inférieur confirme l'hypothèse d'un transfert d'énergie surestimé dans le modèle EDQNM.

3.2.2.4 Transferts d'énergie

Afin de vérifier que le transfert d'énergie est effectivement surestimé, on a tracé les spectres des transferts de l'énergie cinétique et de la variance de flottaison à la figure 3.5. On visualise les fonctions $k \times T^E(k,t)$ et $k \times T^B(k,t)$, respectivement pour l'énergie cinétique et la variance de flottaison. On a multiplié le transfert $T(k,t)$ par le nombre d'onde k afin de représenter la contribution exacte du transfert dans la représentation semilog. On l'appelle contribution exacte car l'aire sous la courbe vérifie la relation $\int_0^{+\infty} k \times T(k,t)\,\mathrm{d}\log(k) = 0$. On compare ces résultats à ceux obtenus en simulation directe toujours pour le *run* 5. On choisit de montrer le temps $t^* = 3$ auquel la transition de régime se fait pour le modèle EDQNM. La comparaison des spectres de transfert est délicate car une fois la transition de régime effectuée, le niveau d'énergie cinétique et est plus faible entre le modèle et la simulation. On ne peut donc plus comparer les deux approches car le niveau. En présentant le résultat à $t^* = 3$

La comparaison montre que le transfert est surestimé pour la variance de flottaison principalement. Un décalage autour du pic positif est visible sur le spectre de l'énergie cinétique. La surestimation du transfert de variance de flottaison est de l'ordre de 33% autour $k = 30$. On observe également que des effets de *backscatter*, de transfert positif aux grandes échelles, sont sous-estimés par le modèle EDQNM. Ces observations confirment l'hypothèse qu'un transfert d'énergie trop important est présent dans le modèle EDQNM.

3.2.3 Origine de l'écart entre modèle et simulation numérique directe

L'écart mis en évidence dans les comparaisons de la section 3.2.2 ne peut être négligé. Malgré le résultat confirmant le transfert trop élevé, nous allons étudier d'autres hypothèses envisageables pour comprendre l'origine de cette différence. Dans un premier temps (section 3.2.3.1), on va chercher à savoir si la comparaison d'une moyenne d'ensemble à une réalisation unique peut induire un écart aussi fort. Dans un deuxième temps (section 3.2.3.2),

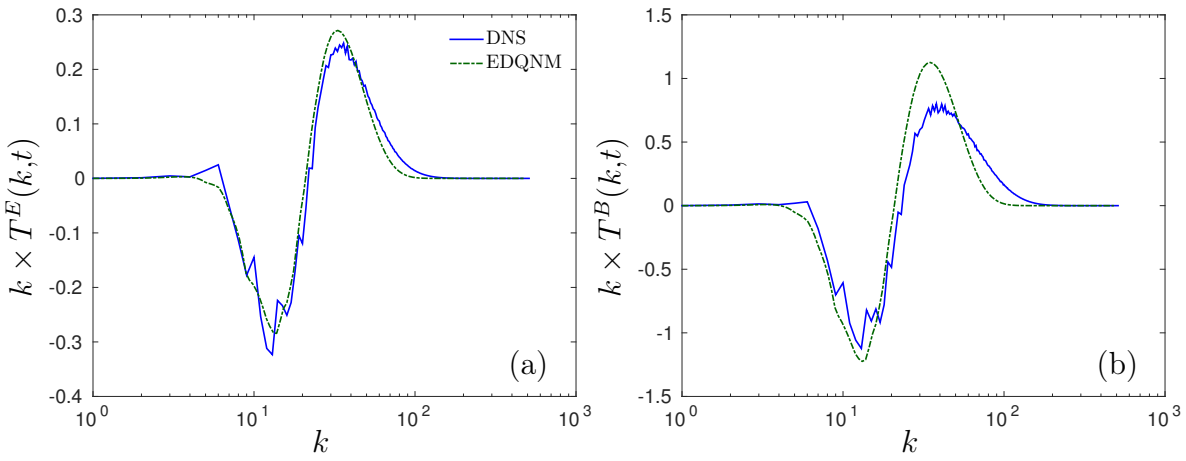


FIGURE 3.5 – Spectres de transfert de : (a) l'énergie cinétique ; (b) la variance de flottaison. Le temps retenu est $t^* = 3$, à l'instant où le modèle EDQNM change de régime mais pas la simulation directe.

l'hypothèse du confinement aux grandes échelles sera testée pour identifier son influence. Dans un troisième temps, nous allons tester si la distribution initiale d'énergie aux grandes échelles induit une différence notable en DNS et modèle (section 3.2.3.3). Finalement, nous discuterons de la validité physique de l'hypothèse faite, dans la fermeture du modèle, de la non influence des effets linéaires de stratifications sur les corrélations triples (section 3.2.3.4).

3.2.3.1 Moyenne d'ensemble contre réalisation unique ?

L'hypothèse du biais statistique entre moyenne d'ensemble pour l'EDQNM et réalisation unique pour la DNS est étudiée dans cette partie.

La comparaison entre DNS et EDQNM se fait sur une unique réalisation pour la première et sur un résultat impliquant une moyenne d'ensemble pour le second. La réalisation unique de la DNS renvoie au tirage aléatoire effectué pour le calcul de la DNS en THI qui permet l'initialisation du calcul USH. Le choix de ce tirage aléatoire induit une évolution particulière de la simulation. Un mode particulier pourrait alors se retrouver amplifié artificiellement et causer la différence entre le modèle EDQNM et la DNS.

Cette question a été abordée dans le cadre de la stratification stable par STAQUET et GODEFERD [115]. Dans leur étude, quatre simulations directes ont été effectuées à une résolution de 256^3 points. La première comparaison est faite sur l'énergie totale. Une différence relative de 3% apparaît après trois périodes de flottaison. Une analyse plus en détail sur les composantes de l'énergie cinétique, à savoir les parties toroïdale et poloïdale, montre une différence de seulement 1% sur la première. La seconde, par contre, présente des différences plus marquées dues aux oscillations en opposition de phase liées à l'apparition d'onde interne. Ces oscillations en opposition de phase sont directement liées au tirage aléatoire initial. La configuration en stratification instable ne faisant pas

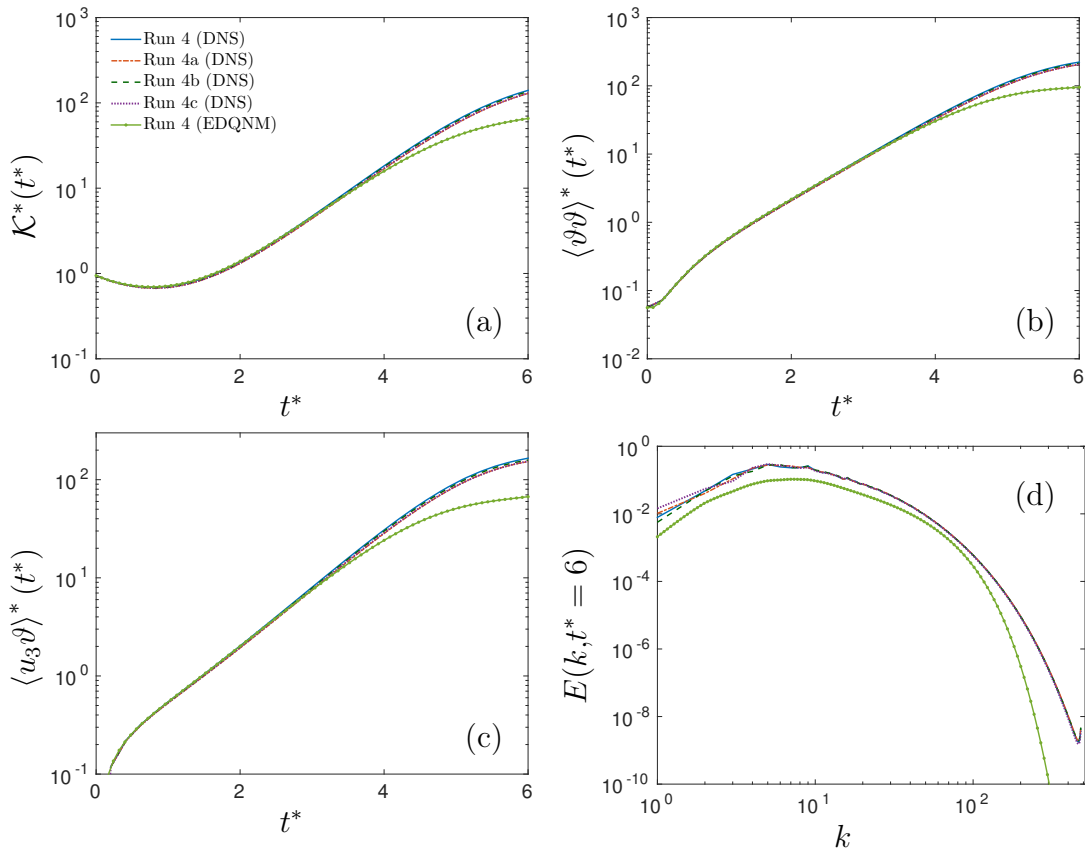


FIGURE 3.6 – Évolution de : (a) l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t^*)$, (b) la variance de flottaison $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*(t^*)$, (c) le flux de flottaison $\langle u_3\vartheta\rangle^*(t^*)$ pour les *runs* 4, 4a, 4b et 4c en DNS en comparaison du *run* 4 du modèle EDQNM. La figure (d) montre le spectre d'énergie cinétique $E(k,t^*)$ au temps $t^* = 6$.

apparaître d'onde interne, on peut s'attendre à n'avoir qu'un écart faible sur l'évolution des quantités turbulentes. Le test est tout de même effectué pour s'assurer qu'aucun biais n'est présent.

Trois simulations directes complémentaires ont été effectuées avec des tirages aléatoires différents pour initialiser trois simulations directes de turbulence homogène isotrope. Elles sont appelées *runs* 4a, 4b et 4c, étant des « variations » du *run* 4. Les paramètres adimensionnels et conditions initiales sont identiques à la THI qui a servi à initialiser les *runs* 1 à 9. La phase de décroissance est arrêtée au même instant que les calculs précédents. La phase de stratification est alors initiée pour ces trois nouvelles simulations.

La comparaison entre ces quatre simulations est présentée à la figure 3.6 sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ (figure 3.6a), la variance de flottaison $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ (figure 3.6b), le flux de flottaison $\langle u_3\vartheta\rangle$ (figure 3.6c) et les spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$ (figure 3.6d). Ces spectres sont tous pris au temps $t^* = 6$. Il est très clair que ce tirage aléatoire n'est pas responsable de la divergence entre modèle EDQNM et simulation directe. Les statistiques en un point montrent une croissance identique entre les quatre DNS. On observe des différences aux

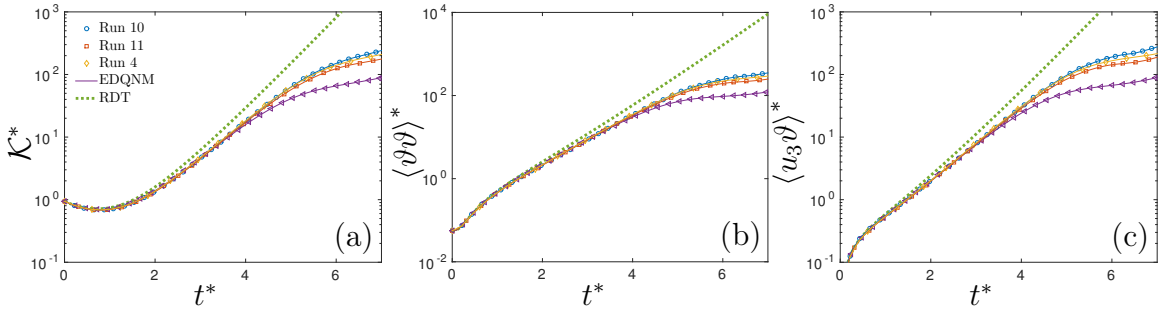


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle de (a) l'énergie cinétique, (b) la variance de flottaison et (c) le flux vertical. Les DNS à trois résolutions différentes sont tracés au côté du modèle EDQNM et de la solution linéaire du système d'équation USH.

grandes échelles entres les différents spectres. La différence avec le modèle EDQNM ne peut être imputée à cette légère différence. L'intégration des spectres DNS donne quasiment la même valeur de l'énergie cinétique.

Il apparaît donc qu'il n'y pas de biais statistique introduit dans la comparaison du modèle EDQNM avec une seule réalisation de la DNS. Cette hypothèse ne permet pas d'expliquer l'écart qui apparaît lors de la transition.

3.2.3.2 Confinement aux grandes échelles ?

Dans cette partie, l'hypothèse du confinement aux grandes échelles comme cause de l'écart est discutée.

L'objectif est d'identifier l'instant à partir duquel la solution du calcul DNS subit les effets de troncature aux petits nombres d'onde. Pour ce faire, deux simulations complémentaires sont réalisées en plus du *run* 4. Ces deux simulations sont effectuées sur le principe de la similitude des écoulements : un calcul est fait à une résolution de 256^3 points (*run* 10) et une seconde à une résolution de 512^3 points (*run* 11) en fixant les nombres adimensionnels de l'écoulement aux valeurs de la simulation de THI ayant permis d'initialiser le *run* 4. La même procédure d'initialisation est utilisée pour établir les corrélations triples pour les runs 10 et 11. Deux DNS en THI ont servi à créer ces états initiaux. Elles ont été stoppées au temps permettant de retrouver les paramètres adimensionnés du *run* 4, à savoir $Re = 3{,}3$, $Fr = 0{,}8$ et $\Lambda = 0{,}06$. On peut donc comparer trois simulations directes ayant les mêmes caractéristiques d'écoulement mais avec trois résolutions différentes.

Les deux simulations à résolution plus faible subissent plus rapidement les effets de confinement que le *run* 4. En effet, cette dernière possède une gamme de nombre d'onde plus étendue (1024^3 points). La « boîte » de simulation est ainsi plus grande dans le *run* 4 que dans le *run* 11, elle-même plus grande que dans le *run* 10. On s'attend donc à observer les effets de troncature successivement sur les runs 10, 11 et 4. Cet effet sera caractérisé par un écart dans l'évolution des quantités turbulentes. Étant principalement gouverné

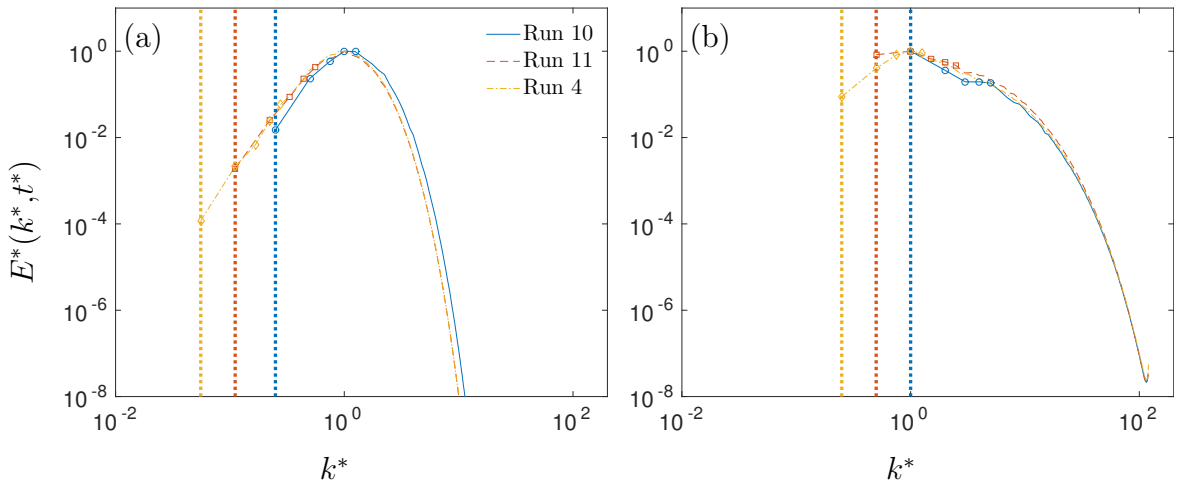


FIGURE 3.8 – Spectres d'énergie cinétique turbulente : (a) à $t^* = 0$ et (b) $t^* = 7$. Le nombre d'onde k^* est adimensionné par le nombre d'onde au pic du spectre k_{pic}. Le spectre E^* est adimensionné par sa valeur en $k = k_{\text{pic}}$. Les lignes verticales représentent le nombre d'onde minimum de chaque spectre.

par la dynamique des grandes échelles, une déviation dans la zone infrarouge entraînera inévitablement une croissance temporelle différente.

La figure 3.7 présente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique (figure 3.7a), de la variance de flottaison (figure 3.7b) et du flux vertical (figure 3.7c). Y sont représentées, les trois simulations directes *runs* 10, 11 et 4 ainsi que la solution du modèle EDQNM. La solution linéaire du système a été ajoutée afin de contrôler la transition vers le régime non linéaire.

On observe un comportement similaire sur les trois figures. Il y a tout d'abord une croissance des quantités turbulentes liée à la phase linéaire. Les quatre courbes de simulation se superposent jusqu'à $t^* \simeq 4$. À cet instant, la simulation EDQNM opère une transition vers le régime non linéaire. Les trois simulations directes poursuivent leur croissance et entament une séparation autour de $t^* \simeq 5$. On observe que l'effet du confinement des *run* 10 et 11 apparaît après le changement de régime du modèle EDQNM. La différence entre les *runs* 10 et 11 par rapport au *run* 4 est de l'ordre de $\pm 15\%$. La différence de 50% entre DNS et EDQNM ne peut donc être imputée aux effets de troncature de nombre d'onde.

Pour mieux observer cet effet de confinement sur les DNS, la figure 3.8 représente les spectres d'énergie cinétique turbulente à l'état initial $t^* = 0$ (figure 3.8a) et au temps $t^* = 7$ (figure 3.8b). La figure 3.8(a) montre la similitude des spectres initiaux. Elle permet également d'identifier la marge initiale disponible pour la croissance des plus grandes échelles. Le concept de troncature des grandes échelles prend tout son sens : le nombre d'onde adimensionné par le nombre d'onde k_{pic} le plus élevé est successivement $k^* = 2{,}50 \times 10^{-1}$ pour le *run* 10 (256^3), $k^* = 1{,}11 \times 10^{-2}$ pour le *run* 11 (512^3) et $k^* = 5{,}56 \times 10^{-2}$ pour le *run* 4 (1024^3). La figure 3.8(b) montre l'état final des spectres

Nom du cas	s	Re	Fr	Λ	ν	N
run A	2	18,4	1,16	1,87	7×10^{-4}	14,0
run B	3	15,6	1,17	1,85	7×10^{-4}	14,3
run C	4	15,9	1,18	1,83	7×10^{-4}	16,0

TABLE 3.2 – Paramètres des simulations numériques directes avec $N = 2048^3$ points. Les nombres de Reynolds, de Froude et le rapport de variance de flottaison sur énergie cinétique sont pris à des valeurs proches. Les fréquences N sont légèrement différentes car les reprises ne sont pas faites exactement avec la même valeur de variation de flottaison. La fréquence N est donc ajustée pour calibrer les nombres adimensionnels.

au temps $t^* = 7$. Les *run* 10 et 11 sont totalement confinés. Leur zone infrarouge est quasiment inexistante. Les grandes échelles n'ont plus leur forme initiale en k^4. Malgré la forme des spectres dans la zone infra-rouge, l'écart entre la DNS et le modèle EDQNM n'est pas lié à un effet de confinement numérique.

3.2.3.3 Influence de la forme initiale du spectre ?

Dans cette section, on évalue si l'écart observé est imputable à la distribution initiale d'énergie. Les deux paramètres étudiés sont le nombre de Reynolds initial et la forme du spectre dans la zone infrarouge. Pour ce faire, on utilise des simulations directes à plus haute résolution avec un domaine de $N = 2048$ points par côté. Pour rappel, les simulations de référence de ce chapitre (présentées au tableau 3.1) ont un domaine de $N = 1024$ points par côté. Ces simulations ont été initialement effectuées pour étudier l'influence de la pente du spectre infrarouge sur l'état autosemblable, présentée au chapitre 4. Cependant, elles offrent un cadre de validation supplémentaire pour tester le modèle EDQNM. On a en effet un jeu de simulation où le paramètre variable est la pente du spectre infrarouge et les paramètres sans dimension choisis identiques initialement. Les paramètres initiaux de ces simulations sont présentés au tableau 3.2. Le nombre de Reynolds initial $Re = 18$ est plus élevé que pour les cas présentés précédemment mais reste faible malgré tout.

La comparaison, présentée à la figure 3.9, est faite sur l'énergie cinétique turbulente renormalisée $\mathcal{K}^*(t^*)$ pour les *runs* A et C. Le résultat est identique sur le *run* B mais non présenté. On observe un écart significatif sur les deux courbes, indépendant de la condition initiale. Les nombres de Reynolds finaux à $t^* = 6{,}7$ pour le *run* A et $t^* = 7$ pour le *run* C sont respectivement $Re = 6800$ et $Re = 2200$. Ils sont donc plus élevés que les nombres de Reynolds finaux des *runs* 1 à 9 présentés précédemment. On observe pour autant un décalage entre le résultat de la simulation directe et le modèle EDQNM.

3.2.3.4 Effet de la stratification sur la dynamique des corrélations triples ?

La section 3.2.3.1 a permis de mettre à l'écart l'hypothèse du biais statistique lié au tirage aléatoire initial, la section 3.2.3.2 le biais numérique lié au confinement et la

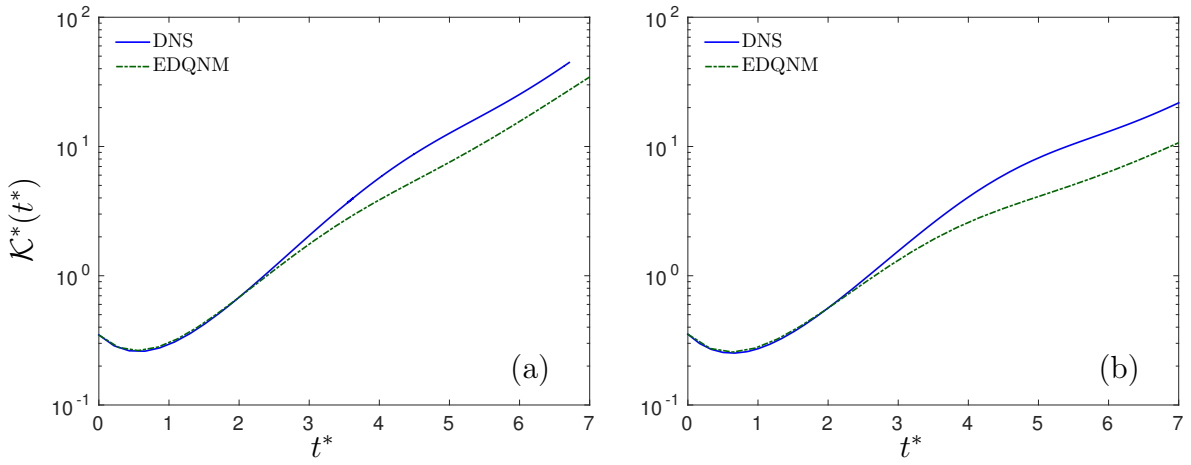


FIGURE 3.9 – Comparaisons DNS-EDQNM de l'influence de la pente du spectre infrarouge sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t^*)$: (a) *run* A avec une pente $s = 2$; *run* C avec une pente $s = 4$. La conclusion est identique avec le *run* C et la pente $s = 3$. L'écart observé est identique sur la variance de flottaison et le flux de flottaison.

section 3.2.3.3 le biais lié à la distribution initiale d'énergie. Le dernier biais possible est donc lié à la modélisation.

Pour rappel, on a supposé que les effets linéaires de stratification sont négligeables dans la dynamique des corrélations triples. Cette hypothèse a été utilisée par d'autres modèles de mélange induit par effet de flottaison [18, 116]. Elle avait également un intérêt mathématique pour le modèle : ne pas les prendre en compte garantit la réalisabilité du modèle [15]. Cette hypothèse est visiblement trop forte et ne permet pas de prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques induits par la stratification instable.

Deux effets caractéristiques notables doivent être pris en compte afin de modéliser correctement l'évolution des quantités turbulentes. Le premier est la déformation des petites structures turbulentes par les échelles de taille comparable. Ce phénomène est appelé *straining* en anglais [5, 120]. Cette déformation se fait par l'étirement en trois dimensions des structures turbulentes. Elle induit une décorrélation entre échelle au sein de l'écoulement. Il est nécessaire d'introduire un temps caractéristique supplémentaire τ_{nl} permettant de reproduire ces effets de décorrélation sur les moments d'ordre trois. Dans le cas de la modélisation EDQNM, ce phénomène est caractérisé par l'amortissement tourbillonnaire $\mu_k = \tau_{\mathrm{nl}}^{-1}$. Ce dernier modélise approximativement la décorrélation induite par les cumulants d'ordre 4.

Le deuxième effet à prendre en compte est l'advection des petites structures de la turbulence par les plus grandes échelles. Ce phénomène est appelé *sweeping* en anglais [61, 62]. On le traduira ici par entraînement ou balayage. Cet effet est analogue à l'hypothèse de turbulence gelée introduite par TAYLOR [118]. Il considère que les quantités turbulentes sont simplement advectées par l'écoulement moyen et qu'elles n'évoluent que lentement

sous l'effet de celui-ci. La même approche a été déduite pour les quantités fluctuantes où les plus grandes échelles de la turbulence engendrent un mouvement d'advection sur les plus petites. Ce phénomène n'induit pas de modification dans le cadre d'un écoulement turbulent « classique ». Dans le cadre de la MHD [1], KRAICHNAN [63] a mis en évidence qu'un champ magnétique moyen affecte les petites structures de la turbulence par un effet d'entraînement en fonction de la charge. Ce phénomène inhibe la cascade d'énergie non linéaire et limite le transfert d'énergie inter-échelle [128]. En effet, la présence du champ magnétique rompt l'invariance galiléenne. Il est également responsable de la propagation dans des directions opposées des fluctuations des modes propres, phénomène susceptible de réduire le transfert d'énergie. Il est aussi important de prendre ces effets en considération car ils induisent une loi d'échelle de la cascade inertielle différente de la turbulence classique, à savoir une dépendance au nombre d'onde en $k^{-3/2}$ en lieu et place du $k^{-5/3}$. Cette modification de la cascade inertielle vient de l'accumulation d'énergie liée à l'inhibition du transfert.

Il est possible de faire un parallèle entre les effets d'un champ magnétique moyen sur les petites structures turbulentes et les effets de déplacement de structures montantes et descendantes dans le cadre de la turbulence USH. Les fluctuations de flottaison de l'écoulement entraînent la formation de structures verticales turbulentes montantes et descendantes. Cette configuration est visible sur la figure 3.10. Des structures descendantes (blanches) côtoient des structures montantes (noires). Ce déplacement de structure peut avoir le même type d'effet qu'un champ magnétique en advectant les petites structures de la turbulence et ainsi bloquer le transfert inter-échelle. Le parallèle entre MHD et USH s'arrête là. En effet, aucune cascade en $k^{-3/2}$ ne s'observe en USH. Le phénomène de balayage n'a donc pas le même effet dans les deux configurations. On observe cependant (voir section 3.4.1.3) une modification de la zone inertielle en k^{-3} près de l'échelle intégrale liée à l'accumulation d'énergie.

Dans le cadre de la MHD, IROSHNIKOV [53] et KRAICHNAN [63] proposent d'ajouter un temps caractéristique τ_{ex} des effets de décorrélation liés à la période caractéristique des ondes d'Alfvén. Les mêmes auteurs soutiennent que les corrélations triples de vitesse dans le cadre de la turbulence MHD ont un temps caractéristique de décroissance de l'ordre de grandeur de la période des ondes d'Alfvén. Sur le même principe, une correction est introduite dans notre modèle afin de prendre en compte les effets de stratification au niveau des corrélations triples. On retient donc la période caractéristique des effets de stratification comme échelle de temps de décorrélation pour caractériser le phénomène de balayage, $\tau_{\text{ex}} \propto N^{-1}$.

Ce type de correction a également été utilisé par CAMBON et al. [16] dans le cadre de la turbulence en rotation. Dans leur étude, l'enstrophie des grands tourbillons $\langle\omega^2\rangle^{<k} = 2\int_0^k p^2 E(p,t)\,\mathrm{d}p$ est remplacée par l'enstrophie *absolue* égale à $\langle\omega^2\rangle^{<k} + 4\Omega^2$ où Ω^{-1} est la

1. MHD pour Magnéto-Hydro-Dynamique

FIGURE 3.10 – Champ fluctuant de flottaison extrait d'une simulation directe dans un plan contenant la gravité dirigée de haut en bas. La présence de structure verticale est visible. Le fluide montant est noir et le fluide descendant est blanc.

vitesse angulaire du repère en rotation. Dans ce cas, c'est Ω^{-1} qui joue le rôle du temps de décorrélation supplémentaire. Même si le phénomène de balayage n'intervient pas dans la turbulence en rotation, un temps de décorrélation doit être ajouté pour prendre en compte l'ensemble du processus physique.

Cet ajout d'un temps de décorrélation peut également être vu comme une moyenne des termes linéaires de stratification sur les corrélations triples. En effet, on peut repartir de l'équation d'évolution des corrélations triples [2]

$$\left(\partial_t + \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) - N(s\sin\theta + s'\sin\theta' + s''\sin\theta'')\right)\mathcal{S}_{ss's''}(\mathbf{k},\mathbf{k}',t) = Q^{\langle uuuu\rangle}_{ss's''}(\mathbf{k},\mathbf{k}',t). \quad (3.5)$$

On rappelle que cette équation est écrite dans le repère des vecteurs propres du système d'équation des moments d'ordre 1. Les signes s, s' et s'' peuvent prendre les valeurs -1, 0 ou 1 pour chaque valeur propre. La correction $\tau_{\text{ex}} \propto N^{-1}$ dans l'amortissement tourbillonnaire revient alors à prendre une moyenne des effets de stratification symbolisés par le terme $-N(s\sin\theta + s'\sin\theta' + s''\sin\theta'')$. Ces termes, négligés en premier lieu, jouent

2. Cette équation est différente de celles établies à l'annexe C. La corrélation triple $\mathcal{S}_{ss's''}(\mathbf{k},\mathbf{k}',t)$ est formée à partir des modes issus de la diagonalisation du système d'équations (1.16)–(1.18). Voir GODEFERD et CAMBON [36] et SAGAUT et CAMBON [106] pour les détails de cette méthode.

donc un rôle dans la dynamique des corrélations triples. Ce rôle semble être de réduire le transfert d'énergie.

3.2.3.5 Bilan sur l'origine de l'écart

Il apparaît donc que l'écart entre le modèle EDQNM et la DNS n'est ni d'origine statistique, ni d'origine numérique. Ce serait l'hypothèse de fermeture des corrélations triples qui ne permettrait pas de prendre correctement en compte la physique de l'écoulement. L'effet d'entraînement des petites structures par les grandes sous l'effet des fluctuations de flottaison jouerait donc un rôle dans la décorrélation du transfert non linéaire en réduisant son effet.

Ces conclusions sont corroborées par l'observation du transfert surestimé à la figure 3.5. Une correction est donc proposée : il faut prendre en compte un temps caractéristique supplémentaire dans l'équation des corrélations triples.

3.3 Correction du modèle

La correction proposée revient à modifier l'amortissement tourbillonnaire pour qu'il prenne en compte des effets d'entraînement des structures turbulentes liés aux termes linéaires de stratification dans l'équation des corrélations triples. On ajoute donc la fréquence caractéristique τ_{ex}^{-1} à l'expression de $\mu_k(t)$. Cette modification prend la forme suivante :

$$\mu_k^N(t) = a_0 \left(\int_0^k p^2 E(p,t)\,\mathrm{d}p \right)^{1/2} + a_1 N. \tag{3.6}$$

L'amplitude de la correction est contrôlée par le paramètre a_1. La détermination de sa valeur sera détaillée dans la suite. On rappelle que le paramètre $a_0 = 0{,}355$ [74] a été fixé définitivement par André et Lesieur [1] dans le but de retrouver la constante de Kolmogorov $C_K = 1{,}4$. On définit alors le nouvel amortissement tourbillonnaire

$$\mu_{kk'k''}^N(t) = \mu_k^N(t) + \mu_{k'}^N(t) + \mu_{k''}^N(t) \tag{3.7}$$

qui va modifier l'équation d'évolution des corrélations triples (voir les détails de la fermeture EDQNM au chapitre 2) :

$$\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right) + \mu_{kk'k''}^N(t)\right) S_{ss's''}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',t\right) = Q_{ss's''}^{(QN)}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',t\right). \tag{3.8}$$

La correction proposée se veut la plus simple possible. Elle permet une prise en compte globale des effets de stratification. On discutera de ses limites à la section 3.3.5.

3.3.1 Temps caractéristique actualisé

On repart de l'équation (3.8) pour retrouver la forme explicite des corrélations triples. Cependant, du fait de la nouvelle dépendance en N de l'amortissement tourbillonnaire, l'intégration permettant d'obtenir le temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}$ est modifiée. Il est nécessaire de séparer l'intégration en deux, une première intégrale de $s = 0$ à $s = t_0$ faisant intervenir l'expression classique $\mu_{kk'k''}$ et une seconde de $s = t_0$ à $s = t$ faisant intervenir $\mu^N_{kk'k''}$ dépendant de la fréquence N. La première intégrale correspond à la phase de turbulence homogène isotrope allant de $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$. Cette phase correspond à une stratification nulle avec $N = 0$. La seconde correspond à la phase USH démarrant à $t = t_0$ avec une fréquence de stratification non nulle. On obtient deux termes dans le membre de droite :

$$\begin{aligned}\Theta_{kk'k''}(t) = & \int_0^{t_0} \exp\left[-\left(\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu_{kk'k''}(s)\right)\right]\times(t-s)\,\mathrm{d}s \\ & + \int_{t_0}^{t} \exp\left[-\left(\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu^N_{kk'k''}(s)\right)\right]\times(t-s)\,\mathrm{d}s\end{aligned} . \tag{3.9}$$

On fait l'hypothèse que la variation temporelle de $\mu_{kk'k''}$ et $\mu^N_{kk'k''}$ est négligeable. Cette hypothèse n'est valable que pour une fréquence N constante au cours du temps. Si on la fait varier, comme ce sera le cas au chapitre 5, il est nécessaire de résoudre une équation différentielle pour le temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}$ [66]. On trouve ainsi l'expression du temps caractéristique corrigé

$$\begin{aligned}\Theta_{kk'k''}(t) = & \exp\left[-\left(\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu^N_{kk'k''}(t)\right)\times(t-t_0)\right] \\ & \times\frac{1-\exp\left[-\left(\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu_{kk'k''}(t_0)\right)\times t_0\right]}{\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu_{kk'k''}(t_0)} \\ & + \frac{1-\exp\left[-\left(\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu^N_{kk'k''}(t)\right)\times(t-t_0)\right]}{\nu\left(k^2+k'^2+k''^2\right)+\mu^N_{kk'k''}(t)}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

On vérifie que l'expression permet de retrouver la forme classique si $t_0 = 0$ ou $N = 0$ et qu'elle est bien continue pour $t = t_0$.

3.3.2 Détermination de la constante supplémentaire

L'équation (3.6) prenant en compte les effets d'entraînement des petites structures turbulentes introduit une nouvelle constante de proportionnalité a_1. L'objectif de cette partie est de détailler la méthode employée pour obtenir une valeur appropriée de cette constante.

3.3.2.1 Fonction de coût

Le but de la correction est de réduire le transfert d'énergie dans le modèle EDQNM afin de faire correspondre l'évolution de l'écoulement à la simulation directe. Ajuster la valeur de cette constante a_1 revient alors à minimiser l'écart entre l'énergie de la DNS et celui du modèle EDQNM. On introduit donc une fonction de coût $\mathcal{J}(a_1)$ permettant le calcul la somme des écarts quadratiques moyens entre le modèle EDQNM et la simulation directe. Cette différence est calculée entre le temps initial t_0 et un temps final t_1 défini ci-après. La formule retenue pour la fonction $\mathcal{J}$ est

$$\mathcal{J}(a_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\mathcal{K}^{\text{DNS}}(s) - \mathcal{K}^{\text{EDQNM}}(s,a_1)}{\mathcal{K}^{\text{DNS}}(s)} \right)^2 + \left(\frac{\langle \vartheta\vartheta \rangle^{\text{DNS}}(s) - \langle \vartheta\vartheta \rangle^{\text{EDQNM}}(s,a_1)}{\langle \vartheta\vartheta \rangle^{\text{DNS}}(s)} \right)^2 \mathrm{d}s.$$

Le but est de s'approcher le plus possible du transitoire de la simulation directe. D'après l'étude effectuée à la section 3.2.3.2 sur le confinement aux grandes échelles, il n'est pas permis d'exclure l'apparition d'un léger confinement aux plus grandes échelles pour $t^* \geq 5$. On restreint donc le calcul de la fonction de coût à cette borne supérieure $N \times (t_1 - t_0) = 5$ [3].

3.3.2.2 Méthode de Newton

Un algorithme de Newton est utilisé pour minimiser $\mathcal{J}(a_1)$ sur les *runs* 1 à 9. La méthode de Newton classique consiste à trouver une valeur x telle que $f(x) = 0$ avec $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. Dans notre cas, trouver le minimum de $\mathcal{J}$ revient à trouver la valeur de a_1 pour laquelle la dérivée $\partial\mathcal{J}(a_1)/\partial a_1$ s'annule. On a donc l'analogie suivante :

$$x \to a_1^{(\text{new})},\ x_0 \to a_1^{(\text{old})},\ f(x_0) \to \left.\frac{\partial \mathcal{J}(a_1)}{\partial a_1}\right|_{a_1 = a_1^{(\text{old})}},\ f'(x_0) \to \left.\frac{\partial^2 \mathcal{J}(a_1)}{\partial a_1^2}\right|_{a_1 = a_1^{(\text{old})}}. \tag{3.11}$$

Ainsi, le processus itératif de la méthode de Newton nécessite le calcul de la première et de la seconde dérivée de $\mathcal{J}$ par rapport à a_1. Il est donc nécessaire d'évaluer la fonction de coût en trois valeurs différentes de a_1 pour pouvoir évaluer la dérivée seconde. On effectue donc, à chaque itération, trois calculs EDQNM avec les valeurs a_1, $a_1 + h$ et $a_1 - h$, où h est une petite variation. On choisit $a_1 = 1$ et $h = 0{,}05$ comme condition initiale.

La convergence de la méthode est contrôlée sur la constante a_1 et sur la fonction de coût $\mathcal{J}$. Pour assurer une estimation correcte, on définit les critères à atteindre comme suit :

$$\frac{\Delta \mathcal{J}}{\mathcal{J}} < 10^{-3},\ \frac{\Delta a_1}{a_1} < 10^{-5}. \tag{3.12}$$

3. Le choix de cette fonction de coût est arbitraire. On ne peut affirmer que le résultat sera identique avec une autre fonction par exemple ou faisant intervenir une autre puissante que 2. Cependant, nous avons obtenu des résultats satisfaisants et nous avons choisi de ne pas nous attarder sur ce point.

	$Fr = 1{,}6$	$Fr = 0{,}8$	$Fr = 0{,}4$
$\Lambda = 0{,}06$	$run\ 1 : a_1 = 0{,}145$	$run\ 4 : a_1 = 0{,}172$	$run\ 7 : a_1 = 0{,}223$
$\Lambda = 2$	$run\ 2 : a_1 = 0{,}257$	$run\ 5 : a_1 = 0{,}277$	$run\ 8 : a_1 = 0{,}305$
$\Lambda = 6$	$run\ 3 : a_1 = 0{,}346$	$run\ 6 : a_1 = 0{,}353$	$run\ 9 : a_1 = 0{,}391$

TABLE 3.3 – Valeurs de a_1 obtenus pour les neuf cas après convergence de la méthode de Newton.

Une fois cette convergence atteinte, la valeur retenue pour la constante a_1 sera prise comme la moyenne des constantes des neuf cas étudiés. Le détail de l'optimisation est donné à la section suivante.

3.3.3 Résultats de l'optimisation

Cette section présente les résultats de validation du modèle EDQNM corrigé. Les différents points abordés se concentrent sur la bonne reproduction des transitoires et tendances des courbes. L'explication physique des phénomènes sera détaillée à la section 3.4 à un nombre de Reynolds plus élevé.

3.3.3.1 Écart sur l'énergie cinétique

Le résultat final de l'optimisation sur l'énergie cinétique est présenté sur la figure 3.11 pour chacun des neuf cas optimisés individuellement. Le transitoire est bien capturé dans chacun des cas et la transition de régime agit plus tard dans le calcul. L'objectif de décaler l'apparition de ce transitoire via la correction est atteint. Comme attendu, on observe une meilleure correspondance entre les simulations directes et le modèle EDQNMc. La dynamique des corrélations triples est donc mieux prise en compte avec la correction introduite.

Les valeurs des constantes pour les neuf cas sont détaillées dans le tableau 3.3. Le critère de convergence établi en fin de section 3.3.2.2 est atteint pour chaque cas en cinq itérations en moyenne. On observe que les valeurs de la constante a_1 sont relativement proches entre elles et restent comprises entre $a_1 = 0{,}15$ et $a_1 = 0{,}4$. La moyenne de ces neuf valeurs donnent $\overline{a_1} = 0{,}28$. On note que la variation du paramètre Λ influence plus la valeur de la constante que celle du nombre de Froude. Cette dépendance au paramètre Λ suggère de traiter différemment l'amortissement tourbillonnaire selon chaque composante Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Ψ_r. La sensibilité aux conditions initiales reste assez faible. On obtient une valeur de a_1 du même ordre de grandeur que la constante a_0.

Une nouvelle série de calcul est effectuée avec le modèle EDQNM en utilisant la valeur moyennée de la constante a_1. La figure 3.12 montre le résultat de cette série de simulation pour l'ensemble des 9 cas. On observe une sensibilité assez faible entre les résultats optimisés individuellement et les résultats avec la constante moyennée. Il est important

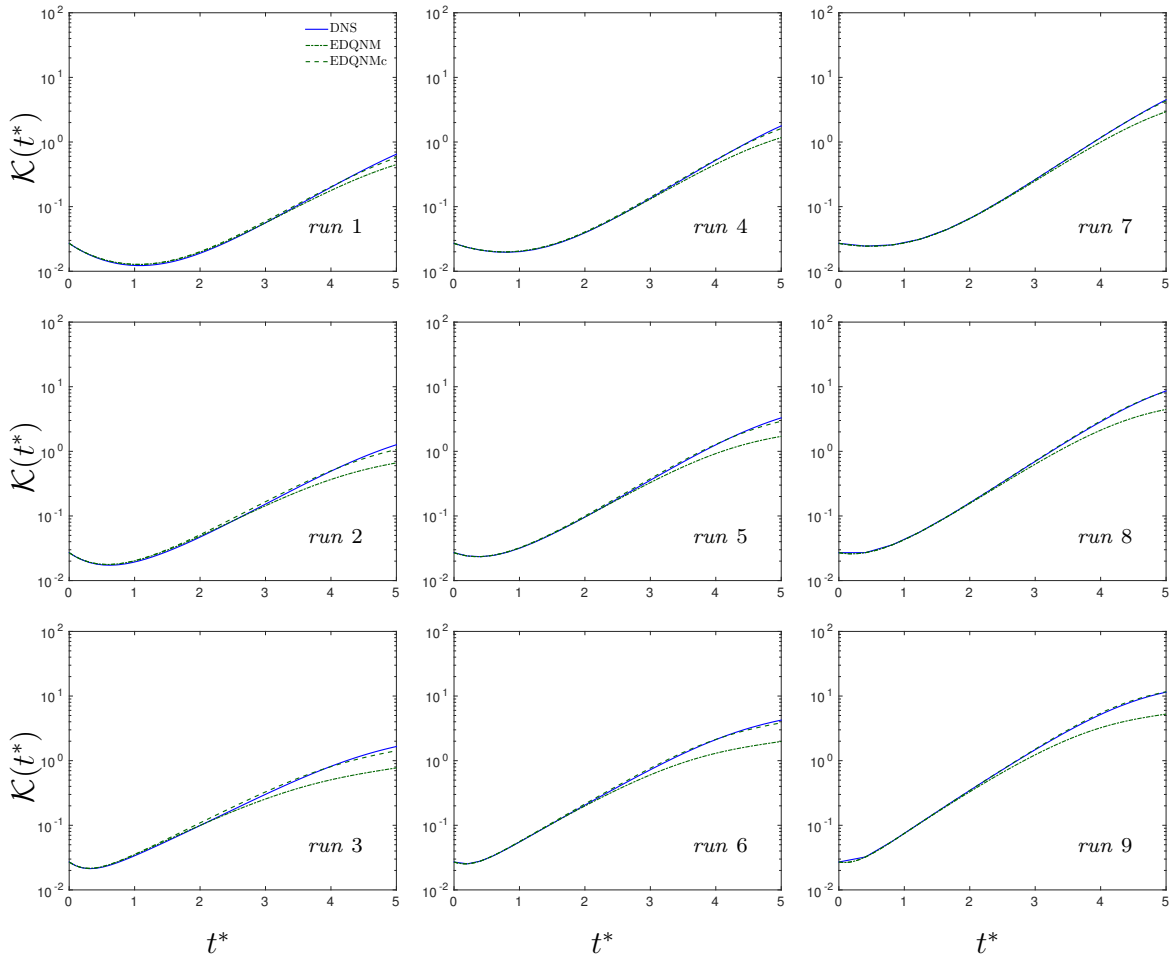


FIGURE 3.11 – Résultats de l'optimisation propre à chaque calcul. L'énergie cinétique est représentée pour la DNS, le modèle non corrigé et le modèle corrigé optimisé (EDQNMc).

que la constante montre une faible sensibilité. Cela signifie qu'elle n'est pas dépendante du cas étudié. L'écart final moyen est réduit de 50% à moins de 20% avec la correction du modèle. L'écart final aurait pu être réduit si l'optimisation avait été faite sur un temps légèrement plus long. Mais le choix a été fait de s'assurer de la non influence des effets de confinement.

Le résultat sur le *run* 5 est visible sur la figure 3.13. Les trois phases du calcul sont toujours bien représentées. La légère décroissance initiale avant l'entame de la phase linéaire n'a pas été modifiée par la correction. Les effets de flottaison étant faibles en début de calcul, il ne fallait pas qu'ils déforment l'évolution initiale. La croissance linéaire est ensuite mieux reproduite et suit la DNS jusqu'à $t^* = 5$ contre $t^* = 4$ précédemment. Le régime final s'installe ensuite. On observe que les deux courbes EDQNM et EDQNMc sont quasiment parallèle dans ce régime final. Cela confirme bien que l'action de la correction n'entraîne qu'un décalage temporel dans l'établissement du régime non linéaire et ne déforme pas sa nature. Ces remarques sont valables pour l'ensemble des cas présentés sur la figure 3.12.

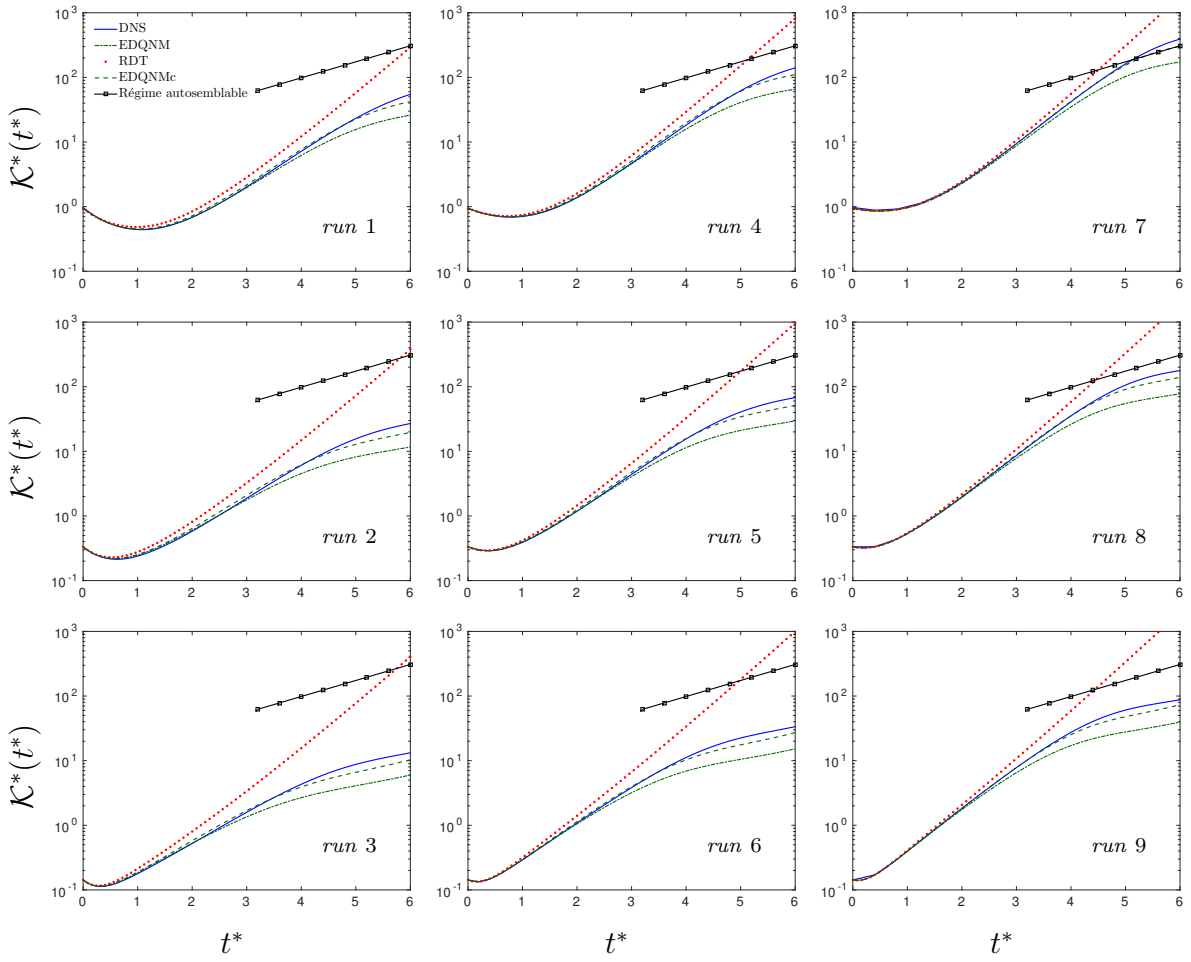


FIGURE 3.12 – Évolution de l'énergie cinétique renormalisée par l'énergie totale initiale pour les neuf cas avec la valeur moyennée de a_1. Les courbes de la DNS, du modèle EDQNM, du modèle EDQNM corrigé (EDQNMc), de la solution linéaire (RDT) et de l'état autosemblable final sont présentées.

On note malgré tout un écart entre le résultat de la DNS et de l'EDQNMc. Sur la valeur finale, le rapport est d'environ 20% quand il était de 50% sans la correction. Cet écart est supérieur à celui observé lors de l'étude du confinement. Pour rappel, l'écart dû au confinement est d'environ 15 %. On a indiqué cette marge de ±15% par des barres d'erreur pour les temps finaux. Il est normal de trouver un écart du fait que la constante utilisée est une moyenne. On aurait également pu prolonger la période d'optimisation jusqu'à $t^* = 6$ mais les résultats sur le confinement indiquent qu'une différence existe déjà entre les trois résolutions étudiées précédemment.

3.3.3.2 Répercussion sur les nombres sans dimension

Les trois nombres adimensionnels de l'écoulement sont représentés sur la figure 3.14 pour le *run* 5. On observe une meilleure correspondance entre le modèle corrigé et la

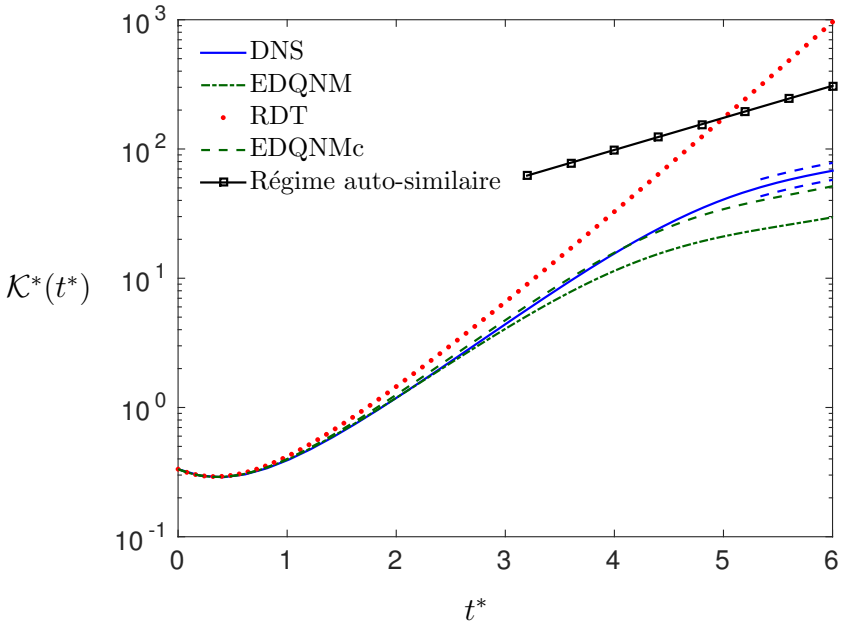


FIGURE 3.13 – Comparaison EDQNM-DNS sur le *run* 5 de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique adimensionnée $\mathcal{K}^*$. Les deux barres en trait tireté représentent les limites hautes et basses issus de l'écart mesuré sur le test de confinement. Elles correspondent à un écart de $\pm 15\%$.

DNS. La phase de croissance du nombre de Reynolds (figure 3.14a) est capturée jusqu'à $t^* = 4$ au lieu de $t^* = 3$. Il atteint ainsi une valeur finale à $t^* = 6$ plus élevée à $Re \simeq 600$. Le nombre de Froude (figure 3.14b) montre également un meilleur accord. La phase de décroissance est mieux capturée mais atteint une valeur légèrement inférieure à la DNS. La phase de croissance s'initie plus tardivement à un temps proche de $t^* = 3{,}6$ pour le modèle corrigé comme pour la DNS contre $t^* = 2{,}8$ pour le modèle non corrigé. On observe que la décroissance initiale du nombre de Froude n'est pas identique entre la simulation directe et le modèle EDQNM. Une hypothèse envisageable est qu'un effet de bas Reynolds donne une dissipation d'énergie cinétique turbulente différente entre simulation et modèle. On obtient alors deux comportements différents du nombre de Froude mais la différence reste faible. Finalement, le paramètre Λ (figure 3.14c) présente aussi un meilleur accord. Le changement de régime apparaît légèrement plus tard à $t^* = 4{,}2$ pour le modèle corrigé contre $t^* = 4{,}1$ pour le modèle non corrigé. La différence est moins marquée que pour les nombres de Reynolds et Froude. La raison peut en être que la valeur initiale $\Lambda = 2$ est également la valeur asymptotique du résultat RDT obtenu en négligeant les termes non linéaires. Ainsi, comme la phase initiale du calcul est contrôlée par les termes linéaires, le modèle comme la DNS capturent correctement cette phase. On note que le modèle corrigé rejoint la courbe du modèle non corrigé sur le nombre de Froude et le rapport de variance de flottaison sur énergie cinétique Λ à $t^* = 5{,}5$. La correction pourrait n'avoir qu'un effet sur la transition de régime au regard de ces deux nombres adimensionnels. Malgré ces

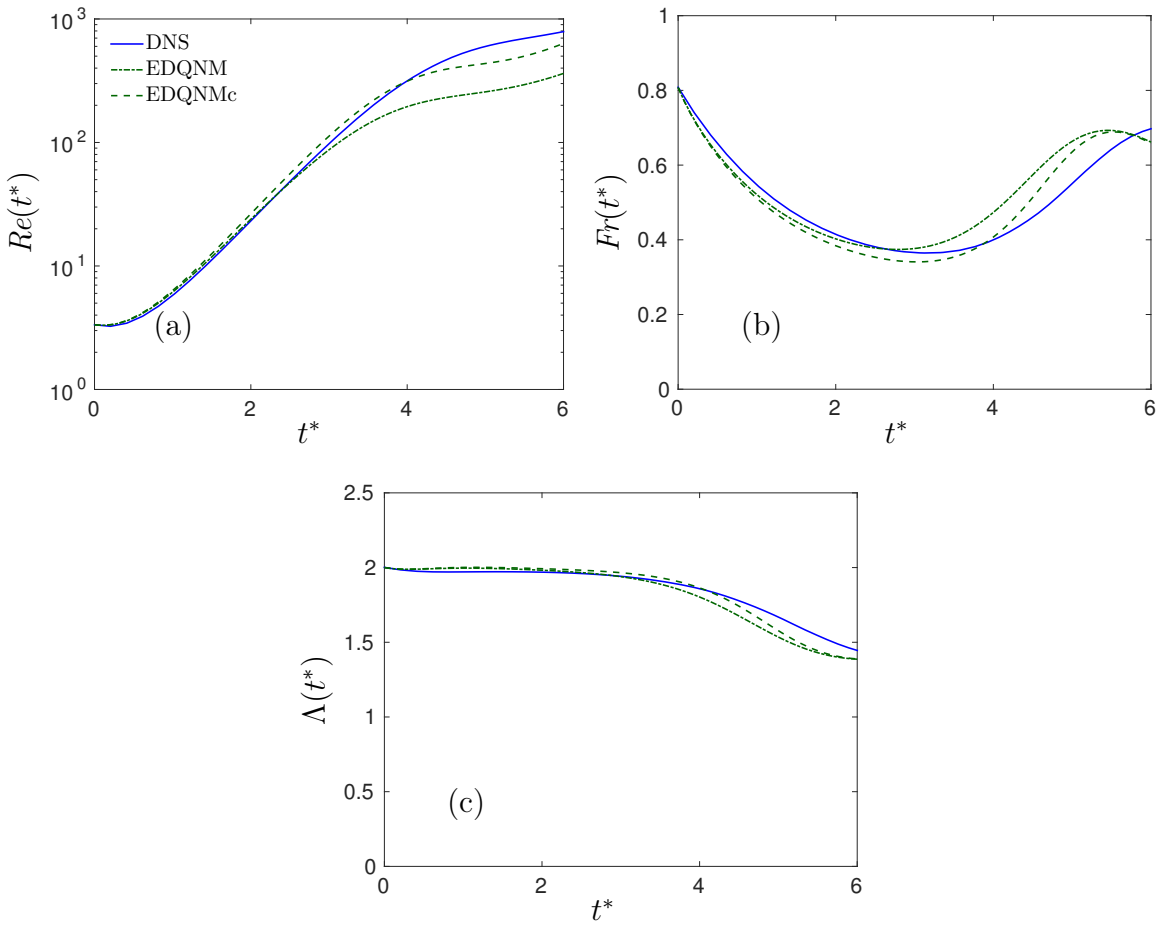


FIGURE 3.14 – Comparaison des nombres adimensionnels : (a) le nombre de Reynolds ; (b) le nombre de Froude ; (c) le paramètre Λ pour la DNS (trait plein), le modèle non corrigé (trait discontinu) et le modèle corrigé (trait tireté).

meilleurs résultats avec le modèle corrigé, on ne peut pas conclure sur l'apparition d'un éventuel état autosemblable. L'écoulement apparaît comme étant en pleine évolution au vu du nombre de Froude notamment.

3.3.3.3 Correction sur les spectres

Les spectres d'énergie cinétique sont représentés sur la figure 3.15(a) pour la DNS, les modèles EDQNM et EDQNMc à 3 temps : à l'état initial, au temps $t^* = 3$ et au temps $t^* = 6$. Le niveau du spectre d'énergie de l'EDQNM est sensiblement supérieur à la version non corrigée et se rapproche de la valeur finale de la DNS. Les résultats sont identiques sur les spectres de variance de flottaison et de flux vertical. La comparaison entre DNS et EDQNMc est très bonne aux grandes échelles. Un écart est visible mais cela reste dans le niveau de l'erreur statistique et numérique de la DNS. Au temps $t^* = 6$, les effets de confinement commencent à apparaître. Le nombre de points qui définissent ces grandes échelles est également réduit. Le test est également effectué sur un spectre infrarouge en k^4. Les effets

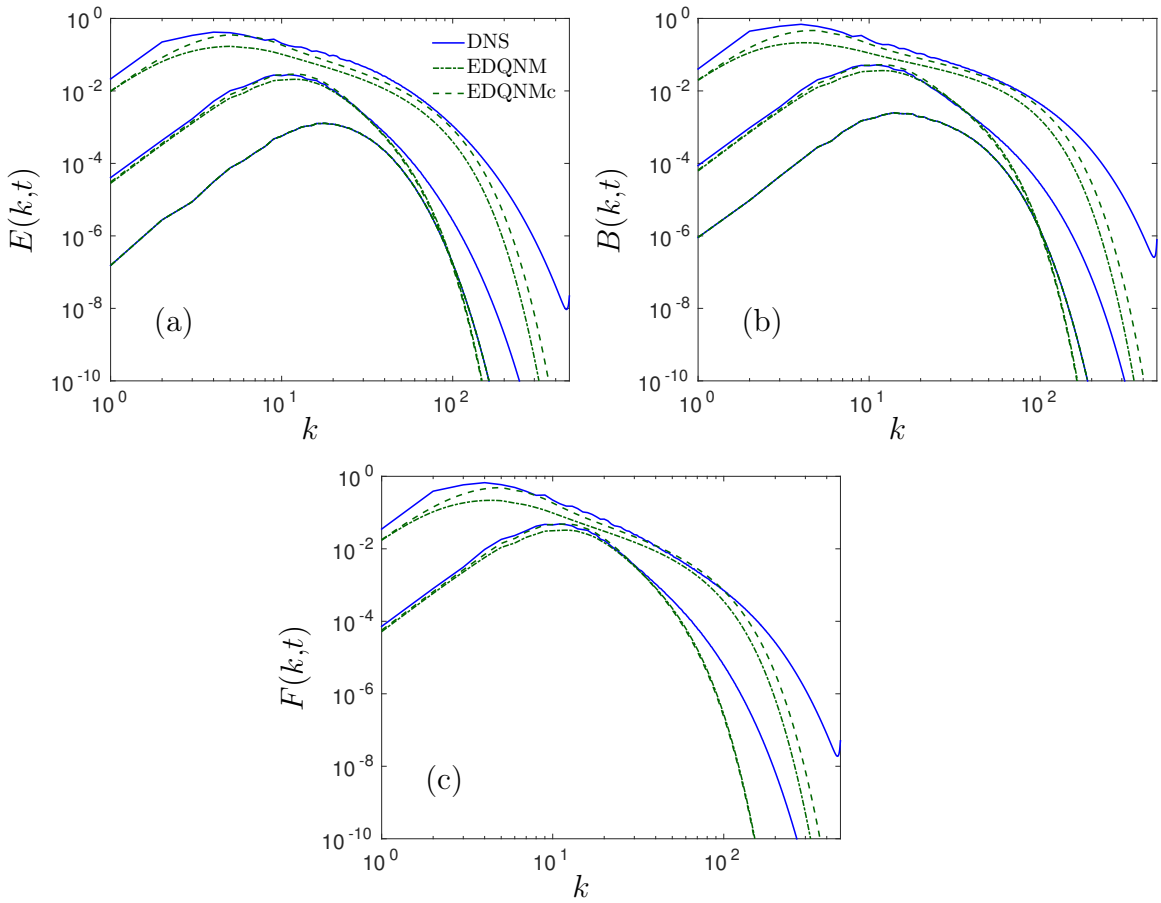


FIGURE 3.15 – Comparaison à trois temps ($t^* = 0, 3, 6$) des spectres : (a) d'énergie cinétique, (b) de variance de flottaison et (c) de flux vertical des simulations DNS, EDQNM et EDQNMc.

connus de *backscatter* entraînent une modification supplémentaire sur la zone infrarouge et ne sont pas capturés de la même manière par la DNS et l'EDQNM. Le modèle EDQNM est connu pour sous-estimer ces effets par rapport à la DNS. Malgré tout, l'accord est bon entre les deux simulations. La dynamique de la zone inertielle est également très bien capturée par le modèle corrigé. Au niveau de la zone dissipative, la correction apportée ne modifie pas le biais déjà mentionné du modèle EDQNM sur la zone dissipative.

Une dernière vérification porte sur le transfert de variance de flottaison présenté à la figure 3.16. Comme pour la figure 3.5, on trace le transfert d'énergie cinétique $k \times T^E(k,t)$ (figure 3.16a) et de variance de flottaison $k \times T^B(k,t)$ (figure 3.16b). On a choisi de tracer ce transfert au temps $t^* \simeq 3{,}04$ pour le *run* 5 afin de voir l'effet réel de la correction à un temps donné. À cet instant, l'écart avec simulation directe n'est pas encore apparu mais est déjà marqué pour le calcul sans correction. On observe que le niveau du transfert est mieux capturé avec le modèle corrigé, surtout pour la variance de flottaison. La forme globale du spectre est également bien reproduite. La transition entre les deux extremums n'est pas

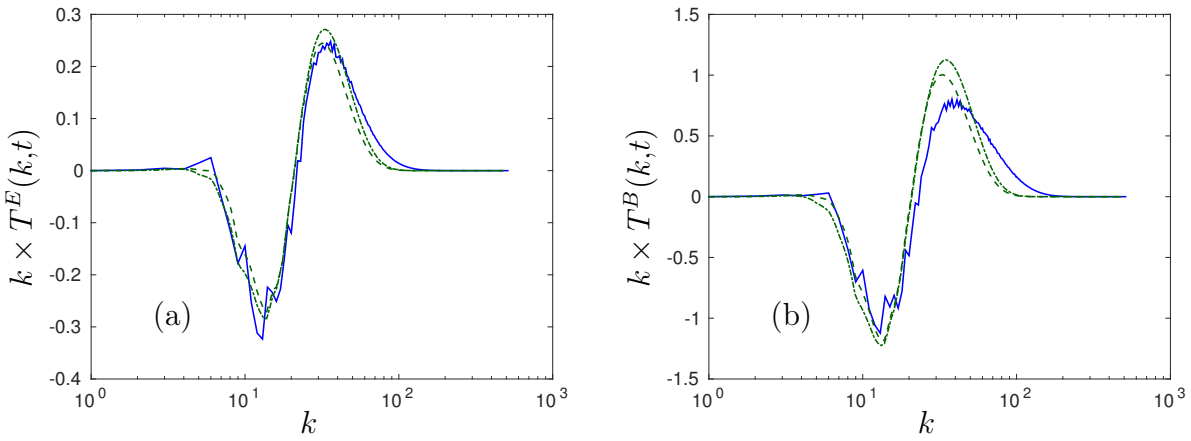


FIGURE 3.16 – Comparaison DNS-EDQNM-EDQNMc (a) du transfert d'énergie cinétique $k \times T^E(k,t)$ et (b) du transfert de variance de flottaison $k \times T^B(k,t)$.

altérée par la correction. La valeur du transfert est toujours légèrement supérieure à celle de la simulation directe. L'écart plus important entre DNS et EDQNM/EDQNMc pour la variance de flottaison semble indiquer que l'amortissement tourbillonnaire n'agit pas de la même manière entre la variance de flottaison et les termes cinétiques.

3.3.3.4 Influence de la correction sur l'anisotropie

L'évolution de l'anisotropie montre de meilleurs résultats avec le modèle corrigé. La figure 3.17 présente l'évolution de deux indicateurs de l'anisotropie de l'écoulement. Le premier est le déviateur du tenseur de Reynolds défini par

$$b_{ij}(t) = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\langle u_i u_i \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}. \tag{3.13}$$

Sa composante verticale, $b_{33}(t)$, est représentée sur la figure 3.17(a). Cette composante verticale du déviateur du tenseur de Reynolds permet d'estimer la quantité d'énergie contenue dans la direction verticale. Seule la composante b_{33} est nécessaire car l'hypothèse d'incompressibilité implique que $b_{ii} = 0$. Ainsi $b_{11} = b_{22} = -b_{33}/2$. On observe là encore une meilleure correspondance entre le modèle EDQNMc et la simulation directe. Le décalage par rapport à la croissance linéaire se fait au même temps que la DNS. Le pic d'anisotropie est également mieux capturé. La phase décroissante est aussi mieux représentée jusqu'à la valeur finale proche de 0,3 dans les deux cas.

Le second indicateur est l'anisotropie directionnelle de la variance de flottaison. Elle

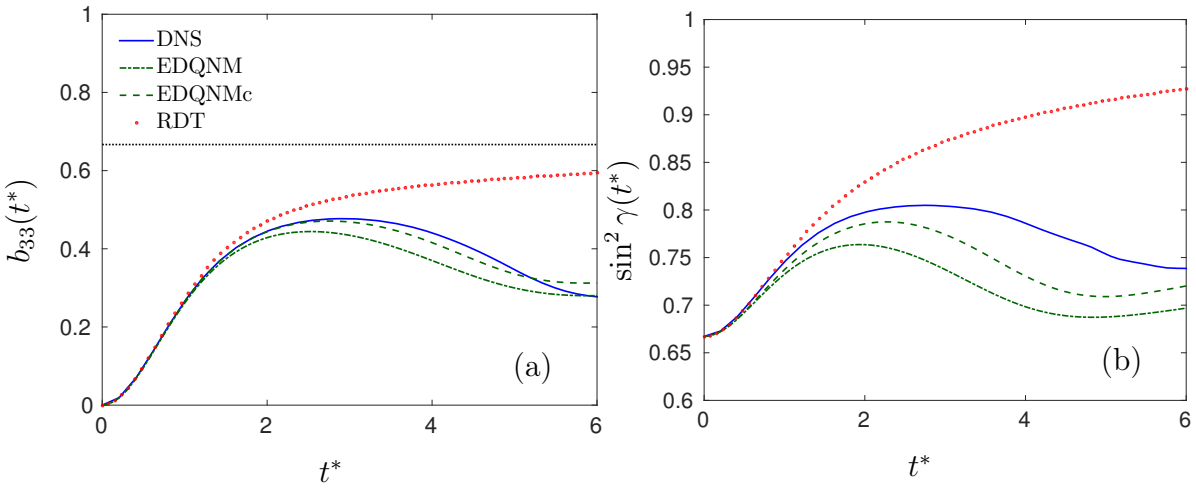


FIGURE 3.17 – Évolution temporelle de l'anisotropie sur deux critères : (a) la composante verticale du déviateur du tenseur de Reynolds $b_{33}(t^*)$; (b) mesure de l'anisotropie directionnelle du champ scalaire, $\sin^2\gamma$.

est caractérisée par le paramètre de dimensionnalité [38] défini par

$$\sin^2\gamma = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} k^2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \; \Phi_3(k,\theta)\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}k}{\displaystyle\int_0^{+\infty} k^2 \int_0^{\pi} \Phi_3(k,\theta)\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}k}. \tag{3.14}$$

Cette quantité $\sin^2\gamma$ décrit l'étirement des structures du champ de flottaison dans la direction verticale. Cet effet est très clairement visible sur la figure 3.10. L'accord entre la simulation directe et le modèle EDQNMc est meilleur que dans le cas non corrigé. Mais un écart non négligeable est toujours présent. Ceci est en partie lié à un défaut de la correction. Nous détaillerons dans la section 3.3.5.

3.3.4 Validation complémentaire sur la variation de la pente du spectre infrarouge

On réutilise ici les simulations directes à haute résolution déjà mentionnées à la section 3.2.3.3. On teste la modèle EDQNM corrigée sur ces simulations afin d'évaluer la sensibilité de la correction à une distribution d'énergie différente aux grandes échelles. On présente une nouvelle fois des comparaisons entre simulation directe et modèle EDQNM corrigé. La constante a_1 du modèle corrigé est naturellement identique à celle utilisée pour l'étude de la section 3.3.3. On analyse la croissance temporelle de l'énergie cinétique (figure 3.18), l'évolution du nombre de Reynolds, du nombre de Froude et du paramètre Λ (figure 3.19). On regarde également l'anisotropie du champ de vitesse via le terme b_{33} (figure 3.20) et les spectres de l'énergie cinétique (figure 3.21). Dans cette section, seul le

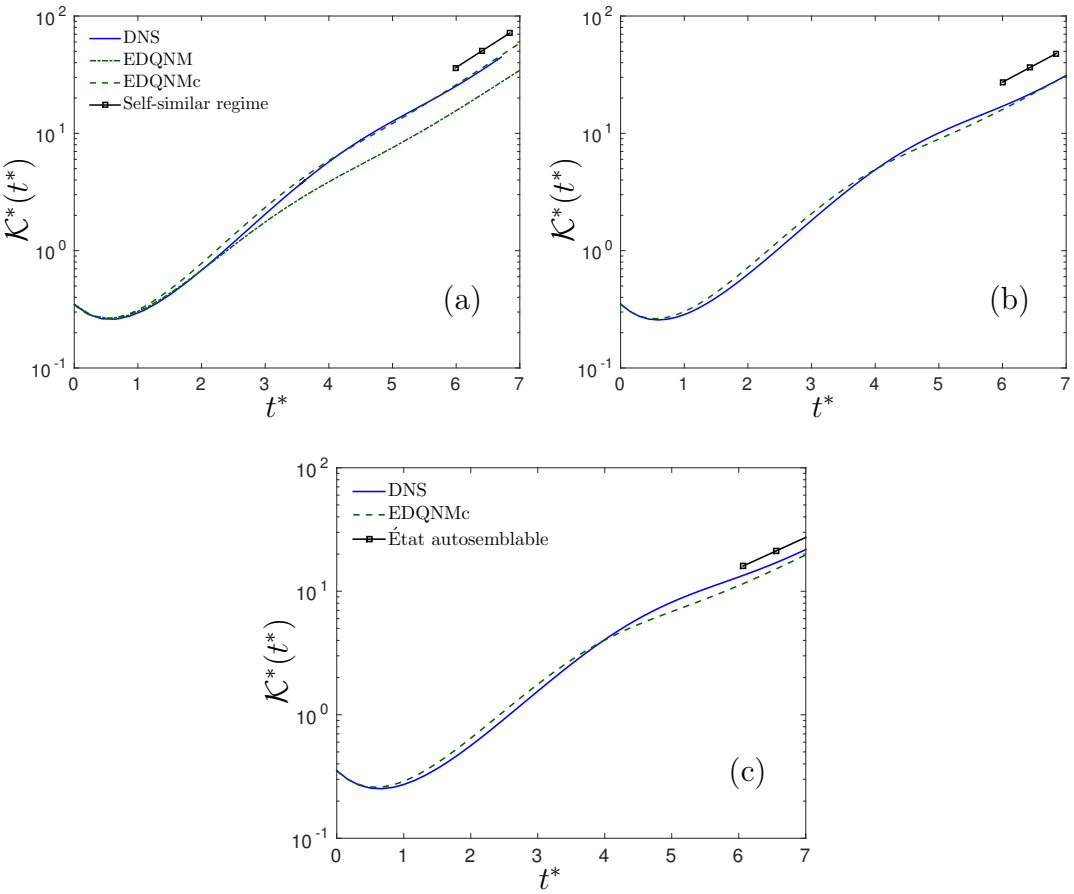


FIGURE 3.18 – Évolution de l'énergie cinétique : (a) *run* A avec $s = 2$; (b) *run* B avec $s = 3$; (c) *run* C avec $s = 4$. Le résultat de la simulation directe et du calcul EDQNM corrigé sont tracés. On a représenté la croissance exponentielle théorique en fin de calcul basé sur l'expression $\beta = 4/(3 + s)$.

modèle spectral corrigé est présenté dans les comparaisons avec les simulations directes

3.3.4.1 Statistiques en un point : énergie cinétique, nombres sans dimension et anisotropie

L'évolution de l'énergie cinétique turbulente renormalisée $\mathcal{K}^*$ est tracée, pour trois valeurs de la pente s, à la figure 3.18. Chaque *run* est tracé séparément afin de pouvoir visualiser le transitoire. Les résultats sont tracés jusqu'à $t^* = 7$. Contrairement aux simulations précédentes (*runs* 1 à 9 avec 1024^3 points), la limite est donnée par la résolution aux petites échelles (voir section 3.3.4.2 pour les spectres). Les trois simulations montrent des évolutions similaires. La phase transitoire et le changement de régime vers l'état autosemblable sont capturés. Le modèle EDQNMc a plus d'énergie sur la phase quasi-linéaire pour les trois cas. La croissance linéaire s'initie donc légèrement plus tôt que dans la DNS. Pour le *run* A (pente $s = 2$, figure 3.18a), le changement de régime du calcul

EDQNMc apparaît au même temps que la DNS alors qu'il semble s'opérer plus tôt pour les *runs* B (pente $s = 3$, figure 3.18b) et C (pente $s = 4$, figure 3.18c). La convergence vers l'état autosemblable dans le cas $s = 2$ est très bonne, les deux courbes étant presque superposées. La comparaison avec la croissance exponentielle théorique semble indiquer que l'état autosemblable est capturé aussi bien en DNS qu'en EDQNMc. À la figure 3.18(b), la simulation EDQNMc tend à rejoindre le niveau d'énergie du calcul DNS autour de $t^* = 6{,}7$. Malgré un transitoire légèrement décalé, l'énergie cinétique finale est correctement évaluée. Par contre, le *run* C avec la pente $s = 4$ sous-évalue le niveau d'énergie. Les deux courbes semblent se rapprocher et tendre vers une même valeur après $t^* = 7$. La pente du spectre initial semble jouer un rôle dans le niveau d'énergie atteint dans le régime non-linéaire. Le fait que le *run* A capture mieux le régime non linéaire que les *runs* B et C suggère que le modèle spectral corrigé sous-estime les effets de *backscatter*. Les spectres d'énergie tracés par la suite étayeront cette hypothèse.

On ne présente pas l'évolution de la variance de flottaison et du flux vertical de flottaison car elles sont identiques à celle de l'énergie cinétique. Les mêmes conclusions peuvent être tirées sur ces deux quantités.

La figure 3.19 représente l'évolution des nombres de Reynolds, de Froude et le paramètre Λ. Tout d'abord, les nombres de Reynolds présentés aux figures 3.19(a, b, c) sont plus grands que pour les *runs* 1 à 9 précédemment étudiés (figure 3.2, section 3.2.2.1). Le *run* A atteint $Re = 6800$ à $t^* = 6{,}7$, le *run* B $Re = 3400$ à $t^* = 7$ et le *run* C $Re = 2200$. On observe que le modèle EDQNMc reproduit bien le comportement de la simulation directe. On note sur le *run* C que le nombre de Reynolds en EDQNMc semble revenir au niveau de la DNS alors même que l'énergie cinétique est plus faible. Les nombres de Froude sont tracés aux figures 3.19(d, e, f). On observe que le comportement des trois simulations est très similaire à celui observé précédemment dans l'étude des *runs* 1 à 9. On observe une phase de décroissance initiale qui débute différemment entre modèle EDQNMc et DNS. Cette différence peut venir de l'évaluation de la dissipation qui n'est pas identique entre le modèle et la simulation. Cela imprime une tendance initiale différente mais l'écart observé est assez faible. On l'observe sur les 3 *runs*. On atteint un minimum autour de $t^* = 2{,}9$ en EDQNMc et $t^* = 3{,}1$ en DNS. Le nombre de Froude croît de nouveau jusqu'à $t^* = 4{,}5$ en EDQNMc et $t^* = 5{,}5$ en DNS. Le comportement est identique sur les 3 cas. La valeur du nombre de Froude à la fin du calcul est relativement proche entre DNS et EDQNMc. Le cas $s = 2$ tend vers $Fr = 0{,}4$, le cas $s = 3$ tend vers $Fr = 0{,}45$ et le cas $s = 4$ tend vers $Fr = 0{,}5$. Cette dernière valeur pour le cas $s = 4$ est cohérente avec les précédents *runs* 1 à 9 [4]. Enfin, on a tracé les rapports de variance de flottaison sur énergie cinétique aux figures 3.19(g, h, i). L'influence de la pente sur l'évolution de Λ est faible. Le même comportement est observé : une légère décroissance initiale de $t^* = 0$ à $t^* = 0{,}5$ pour atteindre $\Lambda = 1{,}6$ est

4. On peut déjà observer que les différentes pentes semblent donner des nombres de Froude finaux différents. Ce point sera détaillé au prochain chapitre.

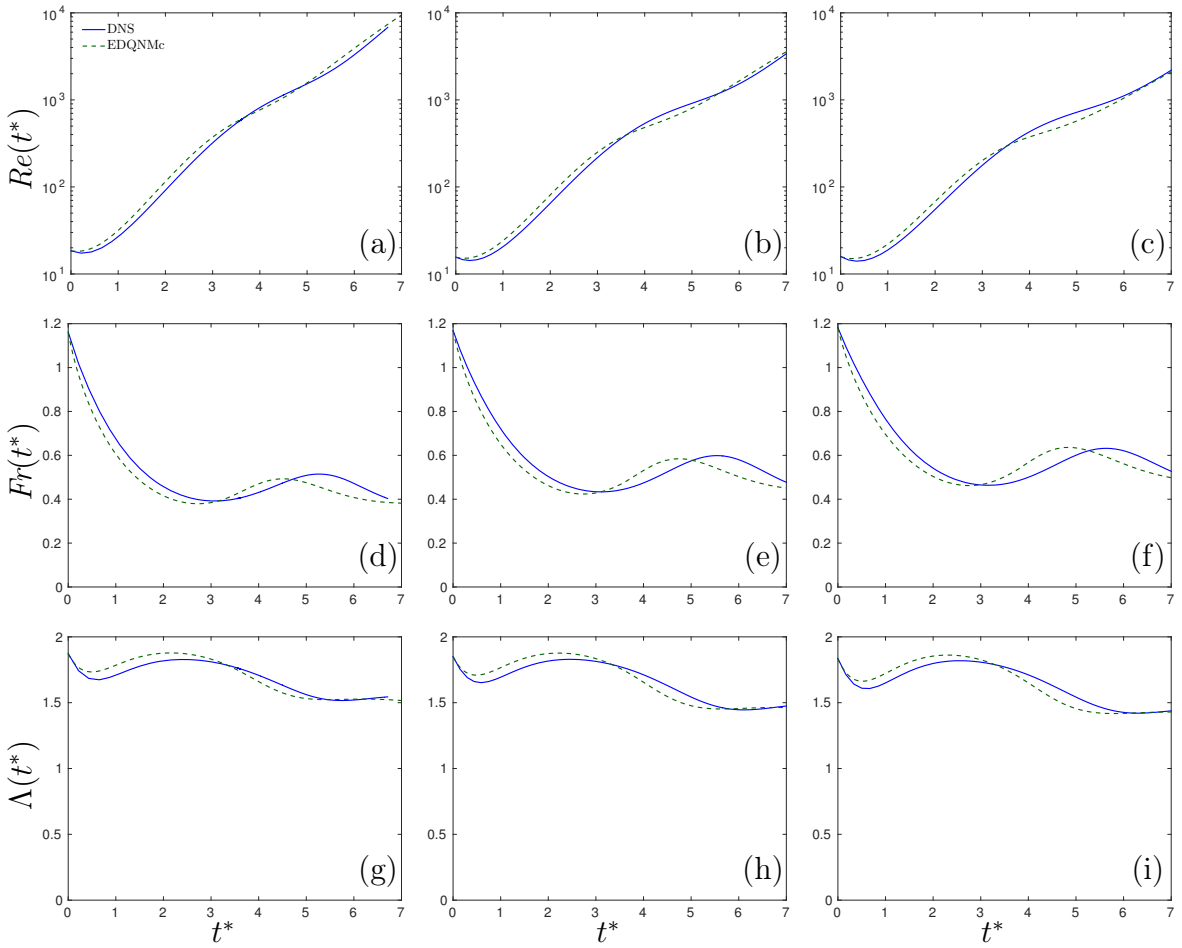


FIGURE 3.19 – Évolution des paramètres sans dimension. Ce tableau s'organise comme suit : la première ligne rassemble les nombres de Reynolds, la deuxième ligne les nombres de Froude et la troisième ligne les paramètres Λ. La colonne de gauche correspond au *run* A, la colonne centrale au *run* B et la colonne de droite au *run* C.

visible avant une phase de croissance jusqu'à $t^* = 3$. Les trois cas se stabilisent autour de $\Lambda = 1{,}5$. Cette valeur est cohérente avec les précédents résultats de la figure 3.14.

On complète ces observations en vérifiant que l'anisotropie du champ de vitesse est bien capturée dans les 3 *runs* A, B et C. On trace donc le paramètre b_{33} à la figure 3.20. Les 3 cas montrent une évolution comparable, les mêmes phases de croissance et plateau sont observés à l'image des résultats de simulation des *runs* 1 à 9 étudiés précédemment. L'écart entre le modèle spectral corrigé et les DNS est faible : les trois calculs EDQNMc convergent vers $b_{33} = 0{,}32$ et les 3 DNS vers $b_{33} = 0{,}3$. La correction du modèle ne semble pas affectée par la variation de la pente initiale.

Ces résultats montrent que le modèle EDQNM corrigé est peu sensible à une variation de la condition initiale. Cette vérification est essentielle et apporte une nouvelle confirmation sur la qualité de la correction proposée. On se propose de compléter ces résultats en étudiant des spectres d'énergie.

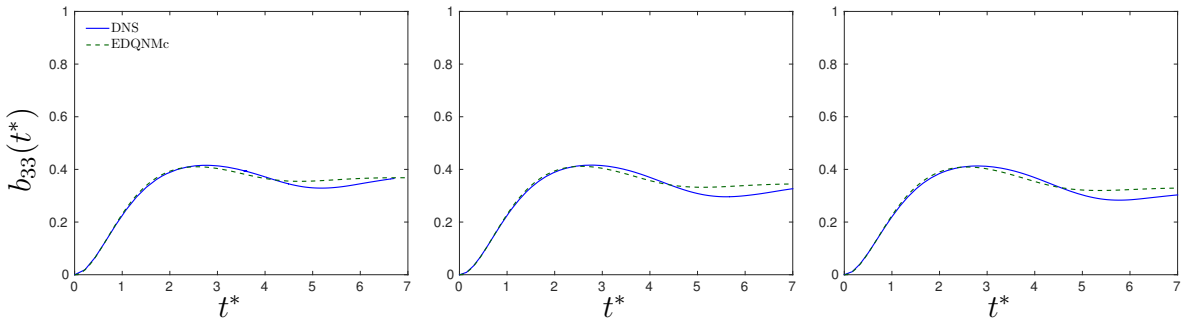


FIGURE 3.20 – Évolution de l'anisotropie du champ de vitesse sur la composante b_{33} pour les DNS et le modèle EDQNM corrigé : (a) le *run* A ; (b) le *run* B ; (c) le *run* C.

3.3.4.2 Spectres et transferts d'énergie

On présente à la figure 3.21 les spectres d'énergie cinétique aux temps $t^* = 0$, 3, 6 pour les *runs* A (figure a) et C (figure b). Les résultats de la simulation directe et du modèle EDQNM corrigé sont présentés. On n'inclut pas le modèle non corrigé pour plus de lisibilité. On ne trace pas les spectres pour la variance de flottaison et le flux vertical car ils montrent le même comportement que le spectre d'énergie cinétique. La principale information vient du comportement aux grandes échelles, dans la zone infrarouge. On observe que les trois simulations EDQNMc capturent bien l'évolution aux grandes échelles avec cependant un écart avec la DNS plus marqué pour le *run* C avec $s = 4$ que le *run* A avec $s = 2$. Cet écart peut justifier la différence plus marquée sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*$ observée à la figure 3.18. La zone inertielle est également bien reproduite ainsi que la zone dissipative. On remarque que cette dernière est mieux capturée que pour le *run* 5.

On trace en complément les spectres de transfert d'énergie à $t^* \simeq 6$ aux figures 3.21(c) et (d) pour les *runs* A et C respectivement. On présente sur ces deux figures les résultats de la simulation directe et des versions corrigée et non corrigée du modèle EDQNM afin d'évaluer la différence sur le transfert liée à la correction. La différence entre les deux résultats EDQNM est nettement visible. On observe que le modèle EDQNMc est bien en accord avec la prédiction de la simulation directe, surtout pour le *run* A. Une légère différence est notable sur le *run* C entre le résultat EDQNMc et la DNS, la différence est atténuée par rapport au modèle sans correction. L'évolution en temps des transferts d'énergie et de variance de flottaison est donné à l'annexe D. Cette évolution est présentée de $t^* = 0{,}03$ à $t^* = 8{,}6$. On observe, en particulier, l'accumulation d'énergie aux plus petites échelles, signe d'une limite de la résolution de la simulation directe. Ces résultats sur les spectres et transferts d'énergie apportent une validation supplémentaire au profit de la correction que nous avons introduite.

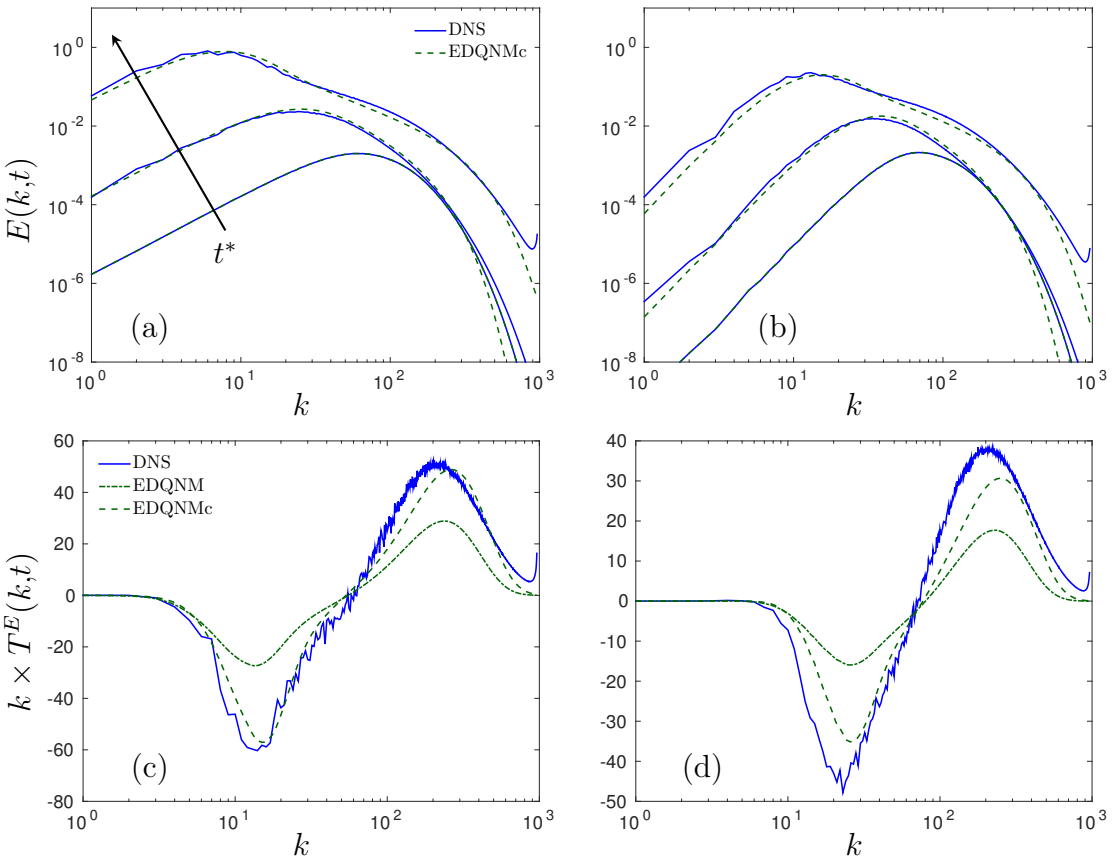


FIGURE 3.21 – Ligne supérieure : spectres d'énergie cinétique à $t^* = 0$, 3, 6 pour (a) le *run* A ($s = 2$) et (b) le *run* C ($s = 4$). Ligne inférieure : spectres de transfert d'énergie cinétique pour (c) le *run* A et (d) le *run* C à $t^* \simeq 6$.

3.3.4.3 Bilan de l'influence de la zone infrarouge

Grâce à des simulations plus résolues, nous avons testé la prédictivité du modèle pour des conditions initiales différentes caractérisées par une variation de la pente dans la zone infrarouge des spectres $E(k,t)$ et $B(k,t)$. Nous avons utilisé la correction issue de l'optimisation sur les *runs* 1 à 9. Les *runs* A, B et C ont été calibrés pour s'inscrire dans les mêmes conditions initiales de nombre de Froude et de rapport d'énergie potentielle sur énergie cinétique. On a montré que la correction du modèle EDQNMc avec la constante $a_1 = 0{,}28$ reste valide malgré la variation de la pente du spectre dans la zone infrarouge.

3.3.5 Discussion des propriétés de la correction

Les résultats présentés ont montré que la correction proposée permet de reproduire plus en détail la physique de la turbulence USH. L'ajout d'un temps caractéristique des effets de stratification dans la dynamique des corrélations triples a permis de retarder la transition de régime. La valeur retenue de la constante de proportionnalité est également

cohérente et ne transforme pas la correction en « rustine » artificielle. On conservera cette correction par la suite. Quelques remarques peuvent néanmoins être formulées sur ce terme supplémentaire.

Cette correction ne prend en compte aucun effet d'anisotropie. Le mouvement des structures turbulentes se fait préférentiellement dans la direction verticale du fait de l'action du champ de gravité. La forte anisotropie que cela crée dans l'écoulement entraîne une dissymétrie importante. On peut s'attendre alors à ce que les effets d'entraînement ou de balayage des petites structures par les grandes se fassent dans une certaine direction. Ainsi, appliquer une correction isotrope tend à surestimer dans un cas et sous-estimer dans un autre cas les effets de décorrélation liés aux termes de stratification dans les corrélations triples. Mais on peut aussi faire cette remarque sur l'amortissement tourbillonnaire μ_k. Sa définition est basée sur le spectre d'énergie cinétique intégré selon l'angle polaire θ. Les variations d'énergie entre les différents modes angulaires ne sont pas négligeables.

La correction que nous proposons est également identique dans les équations de Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Ψ_r. Cette hypothèse n'est pas sans conséquence. Tout d'abord, on applique la correction de l'amortissement tourbillonnaire pour le mode toroïdal Φ_1 alors même que son équation d'évolution ne comporte pas de terme proportionnel aux effets de flottaison. Ensuite elle est identique quel que soit le mode considéré. Là encore, rien ne garantit que le transfert d'énergie du mode poloïdal Φ_2 de la vitesse réagit de la même manière à la stratification que le transfert de Φ_3 ou du flux de flottaison Ψ_r. On peut cependant faire la même remarque au sujet de l'amortissement tourbillonnaire μ_k. En effet, on a choisi de retenir une forme unique pour l'ensemble des modes avec une constante a_0 identique. Les études menées par Herr et al. [49] et Bos et al. [10] ont montré que ce choix était discutable car il peut amplifier ou atténuer artificiellement le transfert lié au scalaire. L'observation faite sur le transfert de la variance de flottaison tend à aller dans ce sens car l'expression actuelle semble surestimer le transfert du scalaire.

L'analyse spécifique de l'influence de ces termes de stratification dans les corrélations triples pourrait permettre d'obtenir une information supplémentaire sur la compréhension de leur rôle. Il serait également plus aisé de dériver une correction en connaissant plus finement les effets anisotropes de la stratification sur les moments d'ordre 3.

3.4 Résultats à grand nombre de Reynolds

La section 3.2.3 a permis de mettre en évidence l'origine de l'écart entre DNS et EDQNM. Suite à cette discussion, une correction a été proposée et validée dans la section 3.3. Toute mention future du modèle EDQNM renvoie désormais à sa version EDQNMc. Pour autant, la transition de régime qui apparaît au temps $t^* \simeq 5$ n'est pas à même de montrer un état autosemblable clairement établi. Un choix plus affiné des paramètres de la simulation

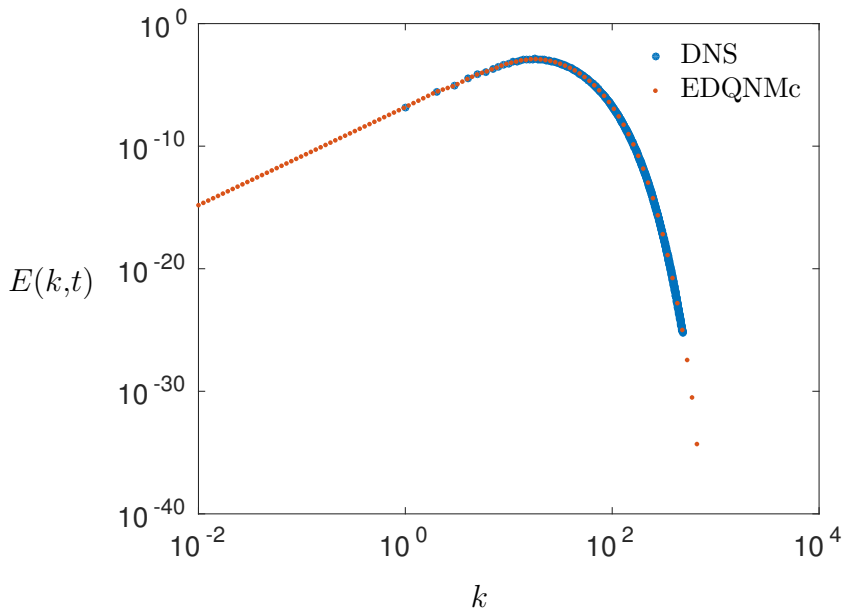


FIGURE 3.22 – Spectre initial du calcul étendu en EDQNM. Les gros points (bleu) correspondent à la DNS et les petits points (rouge) à l'EDQNM. La partie supplémentaire en EDQNM a été interpolée sur une loi de puissance k^s avec $s = 4$ la pente infrarouge du spectre de la DNS.

directe aurait pu permettre d'obtenir cet état autosemblable. Afin d'étudier cet état autosemblable, il est nécessaire d'atteindre des nombres de Reynolds significativement plus grands. Cependant, ce n'est pas envisageable en l'état avec le confinement des simulations directes. Le modèle EDQNMc étant à même de représenter l'évolution de la turbulence USH jusqu'à un temps $t^* = 6$, il est utilisé pour étudier l'écoulement à des régimes turbulents à des temps plus longs. Dans la suite du manuscrit, sauf mention contraire, les références au modèle EDQNM renvoient à la version corrigée EDQNMc.

Obtenir des résultats à plus grand nombre de Reynolds revient à laisser l'écoulement développer des échelles plus grandes et plus énergétiques. Dans le cadre d'une expérience, il faut augmenter la taille maximale du dispositif expérimental afin d'observer de plus grands tourbillons. Dans notre cas, l'échelle de longueur limitant ce développement est le nombre d'onde minimal du calcul $k_{\min}$. L'avantage du modèle EDQNM et du code de calcul utilisé est que l'on peut facilement ajouter plusieurs ordres de grandeur à ce niveau pour laisser l'écoulement évoluer. Ainsi, le nombre d'onde minimal était jusqu'à présent défini par $k_{\min} = 1$. On décide de le décaler de deux ordres de grandeur pour obtenir $k_{\min} = 10^{-2}$. Ce décalage est opéré sur l'état initial. On rappelle que la condition initiale du calcul EDQNM est tirée directement de la DNS en THI (voir section 3.2.1.1). Cette dernière n'est pas définie pour la gamme de nombre d'onde inférieure à $k_{\min} = 1$. On suppose ici que les grandes échelles de la turbulence homogène isotrope n'ont pas été influencées par la dynamique de l'écoulement. Cette hypothèse est liée à la question de la permanence des

grandes échelles de la turbulence. On considère que le temps de calcul de la simulation n'a pas permis de remettre en question cette invariance. Une extension du spectre est alors construite pour $k \in [0{,}01\,;\,1]$ en prolongeant la zone infrarouge. Cette zone est définie par la loi de puissance k^s où s est la pente du spectre. On prolonge alors le spectre par la même loi de puissance pour peupler les nombres d'onde non définis dans la DNS. La figure 3.22 présente une comparaison entre les deux spectres initiaux d'énergie cinétique pour la DNS et le modèle EDQNMc avec des bornes décalées. La même opération est effectuée sur le spectre de flottaison, le spectre de flux étant lui toujours nul à l'issu de la THI.

Cette extension aux grandes échelles n'a pas d'influence sur l'évolution de l'écoulement jusqu'au temps $t^* = 6$. Les courbes des calculs avec borne inférieure $k_{\min} = 1$ et $k_{\min} = 10^{-2}$ sont identiques jusqu'à $t^* = 6$.

Les résultats de simulation à grand nombre de Reynolds sont présentés dans cette section. Un seul cas, le *run* 5, a été retenu. L'analyse est valable sur l'ensemble des cas. Cette partie sera concentrée sur l'analyse du sens physique de l'évolution. On abordera dans un premier temps l'évolution des nombres adimensionnels (section 3.4.1.1), puis les quantités turbulentes en un point $\mathcal{K}^*$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*$ et $\langle u_3\vartheta\rangle^*$ (section 3.4.1.2) et enfin les différents spectres (section 3.4.1.3). Dans un deuxième temps, une analyse de l'anisotropie de l'écoulement sera faite à la section 3.4.2. Y seront présentés les résultats sur l'anisotropie de champ de vitesse et du champ scalaire par des quantités en un point et en deux points.

Dans cette section, les résultats estampillés EDQNM font intervenir la version corrigée.

3.4.1 État autosemblable

On s'intéresse en premier lieu à l'évolution des nombres adimensionnels. Ils permettent d'interpréter les différentes phases de l'écoulement. Les nombres de Reynolds et de Froude ainsi que le rapport Λ de variance de flottaison sur énergie cinétique sont présentés ci-après. Ces informations sont complétées par l'analyse des quantités turbulentes de l'écoulement que sont l'énergie cinétique turbulente, la variance de flottaison et le flux vertical. On va chercher à établir si l'état autosemblable prédit théoriquement est effectivement atteint.

3.4.1.1 Évolution des nombres adimensionnels

La figure 3.23 décrit l'évolution au cours du temps des trois paramètres adimensionnés de l'écoulement, le nombre de Reynolds Re (figure 3.23a), le nombre de Froude Fr (figure 3.23b) et le paramètre Λ (figure 3.23c). Le temps de calcul est ici prolongé jusqu'à $t^* = 14$ contre $t^* = 6$ pour la figure 3.13. On rappelle que tous les résultats présentés sont basés sur le *run* 5.

Sur la figure 3.23(a), le nombre de Reynolds part d'une valeur faible proche de $Re = 3$. Une première phase croissante apparaît ensuite liée aux effets linéaires de stratification. Elle se poursuit jusqu'à $t^* \simeq 4$ et $Re = 400$. L'accord entre la DNS et le modèle EDQNM

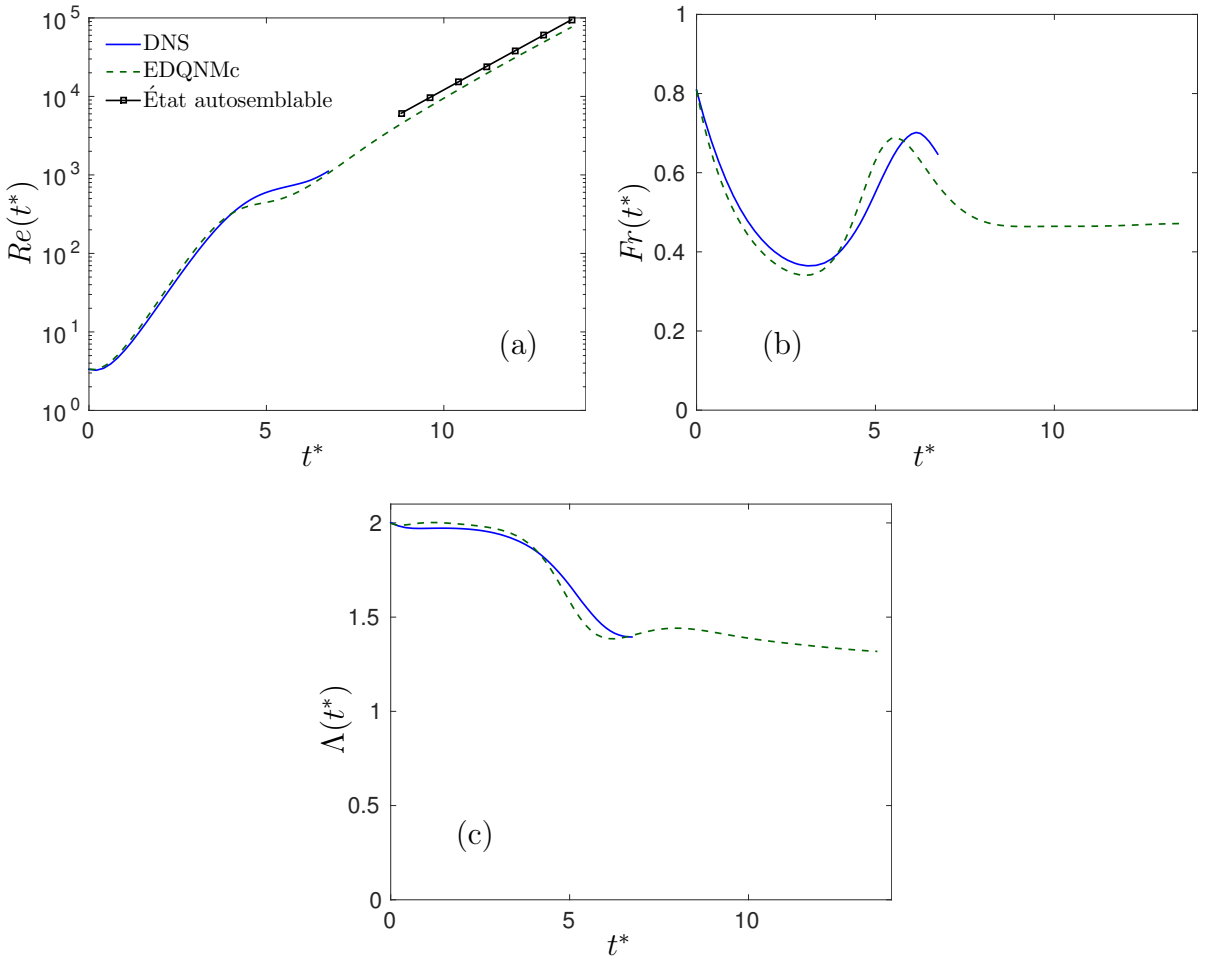


FIGURE 3.23 – Évolution temporelle des nombres adimensionnels pour le *run* 5 prolongé : (a) nombre de Reynolds ; (b) nombre de Froude ; (c) paramètre Λ. La simulation directe est en trait plein et le résultat du modèle EDQNM en trait tireté.

est très bon sur cette phase. Il vient ensuite un changement de régime caractérisé par une modification de la pente de croissance du nombre de Reynolds. Ce changement de régime entraîne l'apparition d'un écart entre les deux simulations. Cet écart est cependant relativement faible et atténué par la correction. Cette transition dure jusqu'à $t^* = 6$ et $Re = 600$ pour le modèle EDQNM. Une nouvelle phase de croissance apparaît alors. La DNS avait été poursuivie pour observer son évolution en état de confinement. On note l'apparition d'une nouvelle phase de croissance proche de $t^* = 7$. Ce résultat n'est qu'indicatif car l'état fortement confiné ne permet pas d'attribuer ce nouveau régime à un phénomène en particulier. La nouvelle phase de croissance du modèle EDQNM tend vers un état autosemblable. On le vérifie en traçant l'état autosemblable analytique $Re(t) \sim \exp(\beta N t)$ avec $\beta = 4/(3+s)$. On rappelle que le nombre de Reynolds, défini par $Re = \mathcal{K}^2/\nu\varepsilon$, croît comme l'énergie cinétique turbulent $\mathcal{K}$. On observe que l'état autosemblable est effectivement atteint par le modèle EDQNM pour un temps proche de

$t^* = 11$ pour un nombre de Reynolds $Re \simeq 10^4$.

La figure 3.23(b) traduit l'évolution au cours du temps du nombre de Froude. Elle permet d'apporter une information complémentaire sur les trois régimes d'écoulement caractérisés à partir du nombre de Reynolds. On rappelle que le nombre de Froude est défini comme $Fr = \varepsilon/\mathcal{KN}$. Le nombre de Froude part d'une valeur de $Fr = 0{,}8$ à $t^* = 0$ et décroît jusqu'à atteindre la valeur $Fr = 0{,}35$ à $t^* \simeq 3{,}5$. L'accord entre les deux simulations est excellent. Cette première phase correspond à la croissance rapide de l'énergie cinétique due aux effets linéaires de stratification. La dissipation met un certain temps à s'établir. Il apparaît alors une phase de croissance du nombre de Froude jusqu'à $t^* = 6$ pour le modèle EDQNM et $t^* = 6{,}5$ pour la DNS. À cet instant, le nombre de Froude est proche de $Fr \simeq 0{,}7$. Cette phase de croissance du nombre de Froude est liée au temps de transition de l'énergie cinétique et de la dissipation d'énergie cinétique. La dissipation a un effet décalé dans le temps et continue à opérer même après le changement de régime de l'énergie cinétique. L'accord est toujours correct entre le modèle EDQNM et la DNS, un léger décalage s'opère malgré tout. La DNS montre ensuite l'apparition d'une nouvelle phase de décroissance. Celle-ci apparaît également pour le modèle EDQNM jusqu'au temps $t^* = 8$ et une valeur de $Fr \simeq 0{,}5$. Le nombre de Froude entre alors proche d'un état d'équilibre. L'apparition de ce plateau correspond à l'état autosemblable de l'écoulement. Ce plateau est lié à la définition du nombre de Froude : une fois la croissance exponentielle de l'énergie cinétique atteinte, la dissipation adopte la même croissance de par sa définition. Il est possible d'exprimer le nombre de Froude comme un rapport entre la fréquence caractéristique de la turbulence $\tau_t^{-1} = \varepsilon/\mathcal{K}$ et la fréquence caractéristique des effets de stratification N. On a alors une mesure de l'équilibre entre les effets non linéaires et les effets de stratification.

Le dernier nombre sans dimension à considérer est Λ décrit à la figure 3.23(c). On observe trois phases majeures dans son évolution. Une première phase où Λ reste proche de sa valeur asymptotique en régime linéaire, phase qui s'étend de $t^* = 0$ à $t^* = 3{,}5$. Une décroissance s'opère ensuite jusqu'à $t^* = 6$ jusqu'à atteindre une valeur de $\Lambda = 1{,}4$. D'après la définition du paramètre Λ, cela signifie que la corrélation de flottaison décroît plus rapidement que l'énergie cinétique en fin de phase linéaire. S'ensuit une légère remontée proche de $\Lambda = 1{,}5$ à $t^* = 8$ avant la troisième et dernière phase de décroissance jusqu'à $t^* = 14$ et $\Lambda = 1{,}3$. Contrairement au nombre de Froude, on n'observe pas de plateau sur ce paramètre Λ, rapport de la variance de flottaison sur l'énergie cinétique. Pourtant, on s'attend également à voir la variance de flottaison croître d'après la même loi exponentielle. L'écoulement n'est peut-être pas suffisamment turbulent pour l'observer ou le taux de croissance est légèrement différent.

L'état autosemblable est donc, à première vue, capturé par le modèle EDQNM avec notamment la croissance exponentielle du nombre de Reynolds et le plateau du nombre de Froude.

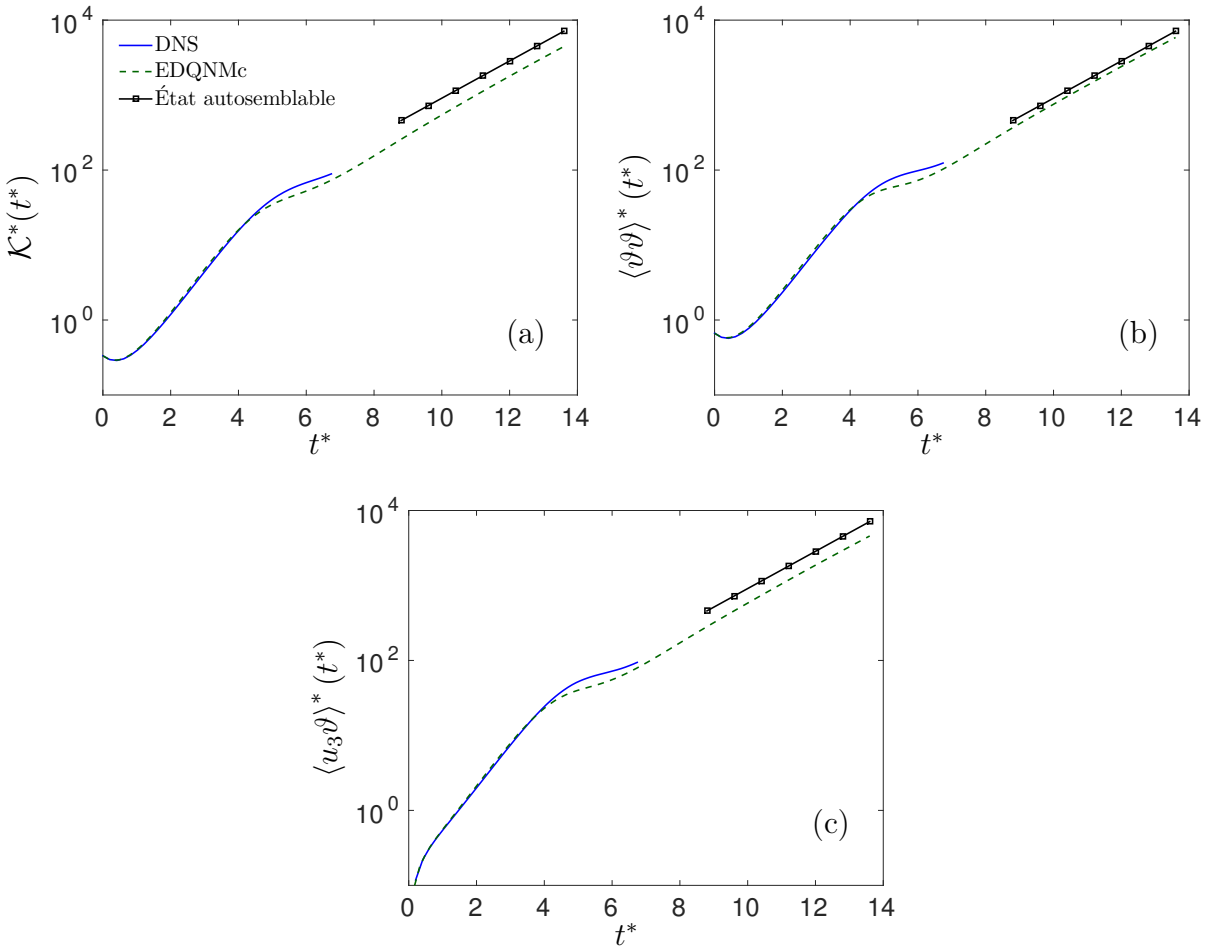


FIGURE 3.24 – Évolution temporelle des quantités turbulentes pour le *run* 5 étendu : (a) énergie cinétique ; (b) variance de flottaison ; (c) flux vertical de flottaison.

3.4.1.2 Statistique en un point : énergie cinétique, variance de flottaison et flux

La figure 3.24 présente l'évolution temporelle des trois corrélations doubles, l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}^*(t^*)$ (figure 3.24a), la variance de flottaison $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*(t^*)$ (figure 3.24b) et le flux vertical $\langle u_3\vartheta\rangle^*(t^*)$ (figure 3.24c). À l'instar de l'évolution des nombres adimensionnels, les résultats présentés sont ceux de la DNS et du calcul EDQNM prolongé pour le *run* 5. On a également tracé une courbe décrivant la croissance théorique finale attendue dans l'état autosemblable.

Les trois quantités présentent une croissance asymptotique comparable. La première phase de décroissance est bien capturée pour les deux autocorrélations de vitesse et de flottaison. Le flux étant initialement nul, on observe directement une phase de croissance. Cette première phase se termine à $t^* = 1$. La décroissance de $\mathcal{K}$ et $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ vient de la faible intensité de la stratification. Elle entraîne une décroissance légère comme pour une THI tant que les effets de stratification sont faibles dans l'écoulement. La phase de croissance

liée aux termes linéaires démarre ensuite jusqu'à $t^* = 5$. Cette phase est guidée par les termes de production du système linéaire et croît jusqu'à ce que les effets non linéaires deviennent suffisamment importants pour modifier le régime de l'écoulement. Déjà observée à la section 3.3.3, cette phase de l'écoulement est bien capturée par le modèle EDQNM. Une transition de régime intervient ensuite. Comme observé sur le nombre de Froude (figure 3.23b), elle est due à un rééquilibrage entre énergie et dissipation une fois que la zone dissipative est établie. Cette transition dure de $t^* \simeq 5$ à $t^* \simeq 7$ pour les trois corrélations. Finalement, le régime final de l'écoulement démarre une fois cette transition achevée à $t^* \simeq 7$. La courbe $\exp(\beta N t)$ est tracée sur les trois figures avec $\beta = 4/7$ pour le *run* 5 présenté ici. Elle représente l'état final que l'écoulement doit atteindre, en théorie. On observe que l'énergie cinétique, la variance de flottaison et la corrélation croisée scalaire-vitesse s'établissent effectivement sur une croissance exponentielle.

Le taux de croissance doit être légèrement différent entre l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ et la variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle$. En effet, elles semblent toutes deux converger vers une croissance exponentielle mais l'information donnée par le rapport Λ semble indiqué que l'énergie cinétique croît légèrement plus rapidement.

3.4.1.3 Statistique en deux points : densités spectrales

L'analyse des quantités en deux points est nécessaire pour révéler si l'on observe des lois d'échelle particulières dans les différentes zones caractéristiques du spectre, à savoir la zone infrarouge (IR) aux petits nombres d'onde ou la zone inertielle aux nombres d'onde intermédiaires entre la zone IR et la zone dissipative. On ne montre ici qu'une tendance sur les lois d'échelle, notamment dans la zone inertielle. Une étude approfondie de ces lois est présentée au chapitre 4 sur des simulations à plus grand nombre de Reynolds permettant d'avoir une séparation d'échelle plus marquée et donc une zone inertielle mieux définie. On s'intéressera également aux différentes échelles caractéristiques de l'écoulement que sont l'échelle intégrale, l'échelle d'Ozmidov et l'échelle de Kolmogorov. Leur placement par rapport au spectre et leur signification physique seront également abordés.

La figure 3.25 présente l'évolution des spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$ (figure 3.25a), de variance de flottaison $B(k,t)$ (figure 3.25b) et de flux vertical $F(k,t)$ (figure 3.25c) choisis à quatre temps $t^* \in \{8{,}8\,;\,10{,}4\,;\,12\,;\,13{,}6\}$ dans l'évolution autosemblable de l'écoulement. Ces spectres, extraits du calcul EDQNMc, montrent une évolution claire d'un état autosemblable : une similitude de forme s'observe entre les différents spectres dans les zones infrarouges et inertielles. La zone dissipative n'est pas en état autosemblable. La zone infrarouge conserve un spectre en k^4 sur deux décades jusqu'au dernier temps. Il est mis en évidence par la courbe en pointillé. La distribution d'énergie initiale est conservée dans sa forme au cours du temps. Cela se vérifie sur les trois différents spectres représentés. La zone inertielle présente également sur deux décades une loi d'échelle en $k^{-5/3}$ pour

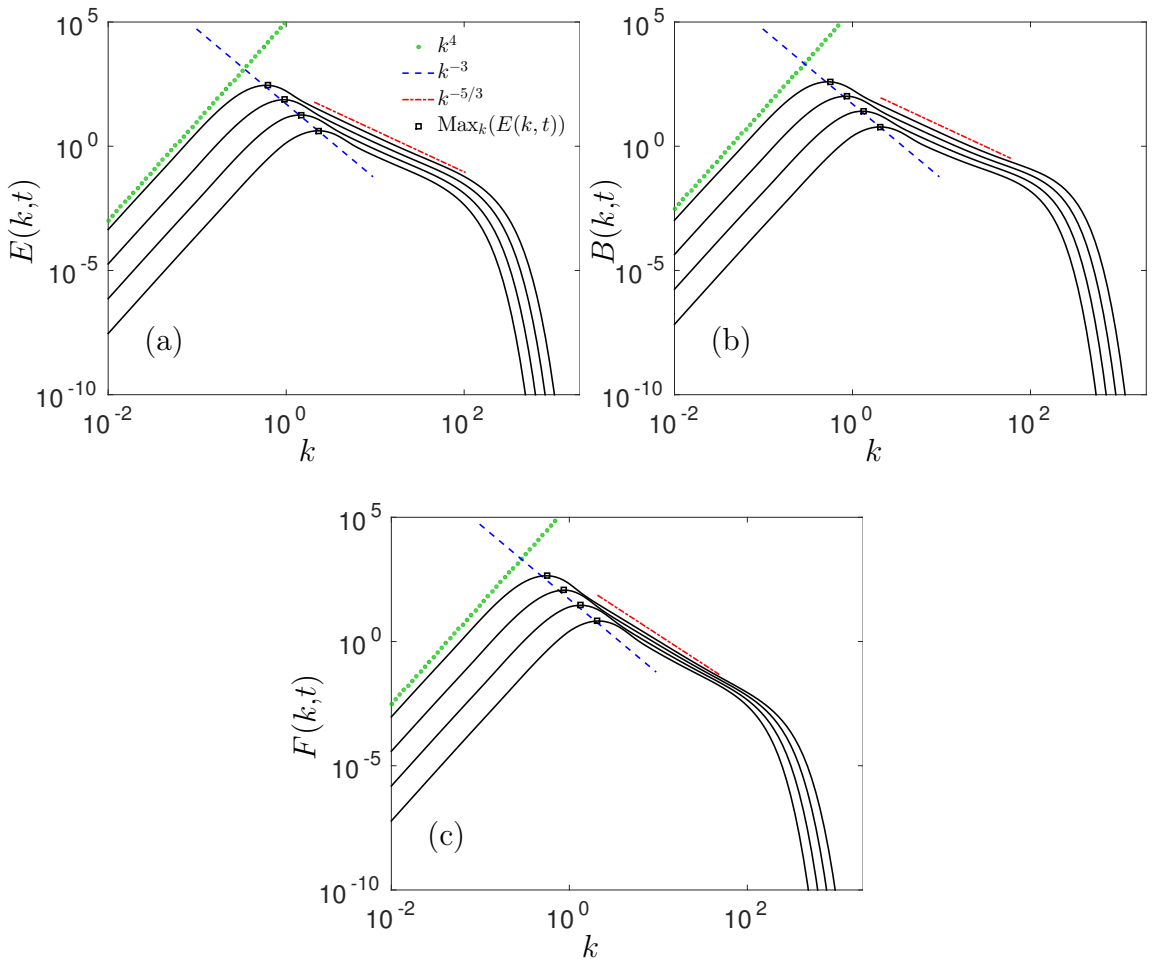


FIGURE 3.25 – Évolution des spectres : (a) d'énergie cinétique ; (b) de variance de flottaison et (c) de flux de flottaison à quatre temps ($t^* \in \{8{,}8\,;\ 10{,}4\,;\ 12\,;\ 13{,}6\}$) en fonction du nombre d'onde k. Sont également tracées les droites en k^4 pour la zone infrarouge, les droites en $k^{-5/3}$ pour (a) et (b) et $k^{-7/3}$ pour (c) dans la zone inertielle. Le maximum du spectre suit également une courbe en k^{-3} représentée ici.

$E(k,t)$ et $B(k,t)$ comme prédit pour la turbulence homogène isotrope par KOLMOGOROV [60] et OBUKHOV [92] respectivement. D'après LUMLEY [84], le spectre du flux $F(k,t)$ doit présenter, en turbulence homogène isotrope, une loi d'échelle en $k^{-7/3}$. La figure 3.25(c) affiche une zone inertielle qui semble tendre vers cette loi d'échelle mais l'étendue de la zone inertielle ne permet pas réellement d'observer cette loi d'échelle.

On s'attache à présent à l'analyse des échelles caractéristiques de l'écoulement que sont les nombres d'onde associés à l'échelle intégrale k_ℓ, à l'échelle d'Ozmidov k_O et à l'échelle de Kolmogorov k_η [5]. La figure 3.26 montre l'emplacement de ces trois échelles pour les spectres d'énergie cinétique (figure 3.26a), de variance de flottaison (figure 3.26b) et de flux vertical de flottaison (figure 3.26c). Les spectres représentés sur les trois figures

5. On parlera parfois directement, par métonymie, de l'échelle intégrale k_ℓ, l'échelle d'Ozmidov k_O et de l'échelle de Kolmogorov k_η.

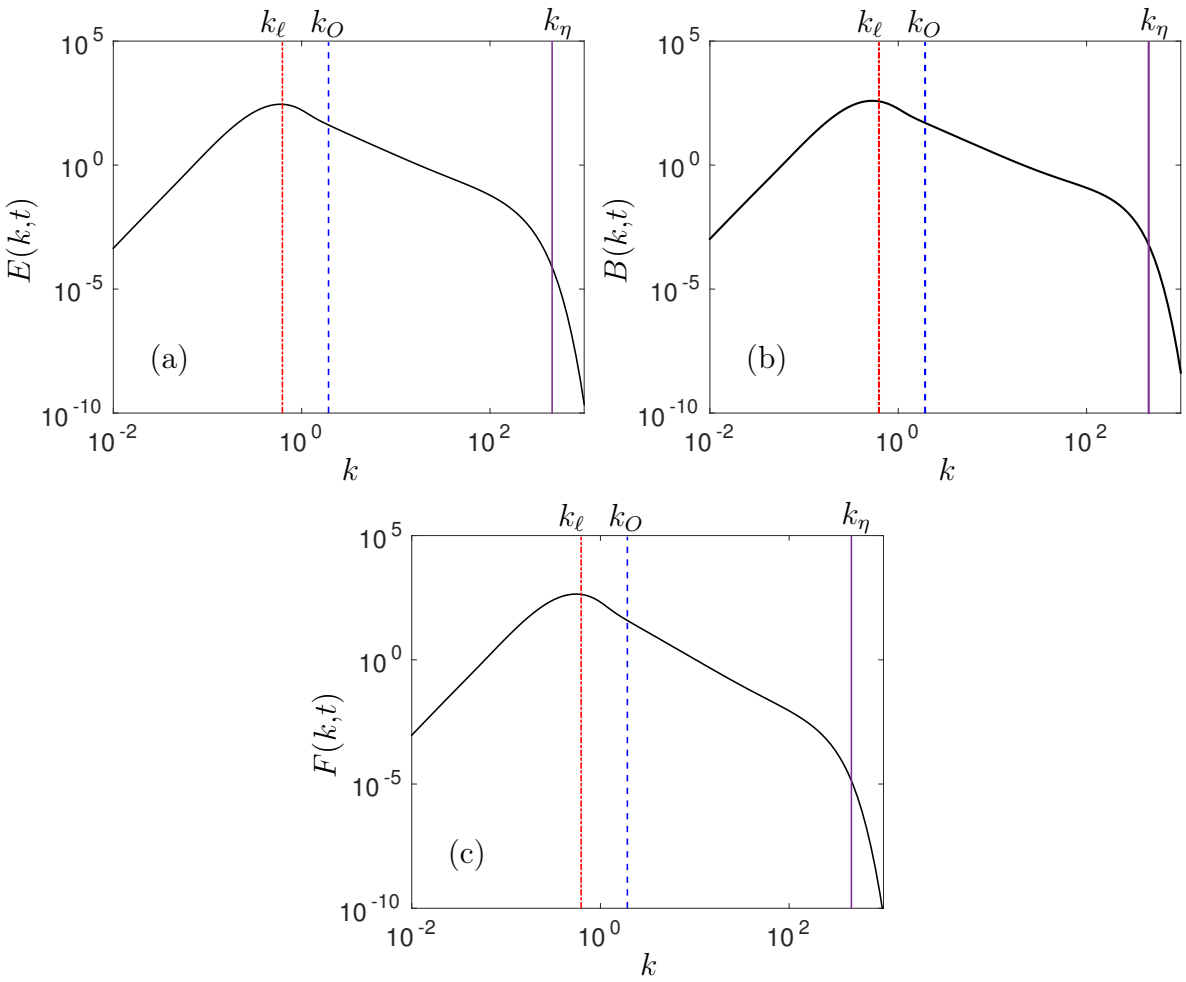


FIGURE 3.26 – Spectres au dernier temps de l'énergie cinétique $E(k,t)$ (a), de la variance de flottaison $B(k,t)$ (b) et du flux vertical de flottaison $F(k,t)$ (c). Sont représentées de gauche à droite les échelles caractéristiques de l'écoulement, k_ℓ l'échelle intégrale, k_O l'échelle d'Ozmidov et k_η l'échelle de Kolmogorov.

sont choisis à un nombre de Reynolds proche de 10^4. L'échelle intégrale est définie par $k_\ell = \mathcal{K}^{3/2}/\varepsilon$ et représente l'échelle caractéristique des grandes structures turbulentes. Le nombre d'onde associé à l'échelle d'Ozmidov [96] est définie par $k_O = N^{3/2}/\varepsilon^{1/2}$.

Cette échelle d'Ozmidov donne une information sur le rapport entre les effets de stratification décrits par la fréquence de flottaison N et les effets non linéaires liés à la dissipation d'énergie cinétique turbulente. Ce nombre d'onde k_O est construit à partir de la définition d'un nombre de Froude local, lié à un nombre d'onde. En partant du taux de dissipation ε, on peut construire une fréquence locale, caractéristique des effets turbulents liée au nombre d'onde k, à savoir $f_{\text{loc}}(k) = \sqrt[3]{k^2\varepsilon}$. On construit alors le nombre de Froude $Fr_{\text{loc}}(k)$ associé à ce nombre d'onde k comme le rapport entre la fréquence caractéristique des effets turbulents $f_{\text{loc}}(k)$ et la fréquence des effets de stratification N ; on obtient ainsi $Fr_{\text{loc}}(k) = f_{\text{loc}}(k)/N$. On retrouve le nombre d'onde de l'échelle d'Ozmidov en considérant

un équilibre local entre stratification et effets turbulents avec $Fr_{\mathrm{loc}}(k_O) = 1$.

D'après Lesieur [72], l'échelle intégrale et l'échelle d'Ozmidov sont liées au nombre de Froude (global) de l'écoulement par la relation

$$\frac{k_\ell}{k_O} = Fr^{3/2}. \tag{3.15}$$

Le nombre de Froude de l'écoulement est ici $Fr = 0{,}5$. Cela donne donc un rapport entre les deux échelles $k_\ell/k_O = 0{,}35$. Cette valeur est confirmée par les deux mesures des échelles sur les spectres présentés à la figure 3.26. Ce placement de l'échelle d'Ozmidov est relativement différent des observations faites sur la turbulence en stratification stable [27]. Le positionnement du nombre d'onde d'Ozmidov coïncide avec les échelles caractérisant la diminution de l'anisotropie. On abordera plus en détails ce point lors de l'analyse de l'anisotropie des spectres à la section 3.4.2.2. Le rapprochement de k_O par rapport à l'échelle intégrale indique que cet effet de retour à l'isotropie arrive relativement vite en turbulence USH. On observe également que cette échelle se place en bas d'une légère « bosse » au sommet du spectre délimitant le début de la zone inertielle. Cette zone est caractérisée par les effets couplés de stratification et d'anisotropie qui induisent une modification de la répartition d'énergie au sein de l'écoulement. Des détails sur l'origine de cette modification de la zone inertielle vers une loi d'échelle en k^{-3} seront donnés au chapitre 4.

3.4.2 Anisotropie

Dans cette section, les résultats de mesure de l'anisotropie sont détaillés. Dans un premier temps, on s'attache à l'étude des quantités globales, à la section 3.4.2.1, avec l'évolution de l'anisotropie du champ de vitesse et du champ scalaire au cours du temps. Dans un second temps, une étude des spectres et de leur dépendance angulaire est présentée à la section 3.4.2.2.

3.4.2.1 Mesure globale de l'anisotropie

Dans cette section, l'évolution temporelle de trois quantités, tracées à la figure 3.27, est détaillée, à savoir :

— la composante verticale du déviateur du tenseur de Reynolds b_{33},
— le paramètre de dimensionnalité du champ scalaire $\sin^2\gamma$,
— le paramètre de dimensionnalité du champ de vitesse $\sin^2\gamma_E$.

L'évolution de ces trois indicateurs est tracée pour l'ensemble des neuf cas d'étude de la section 3.2.2 et du *run* 5 prolongé à grand nombre de Reynolds.

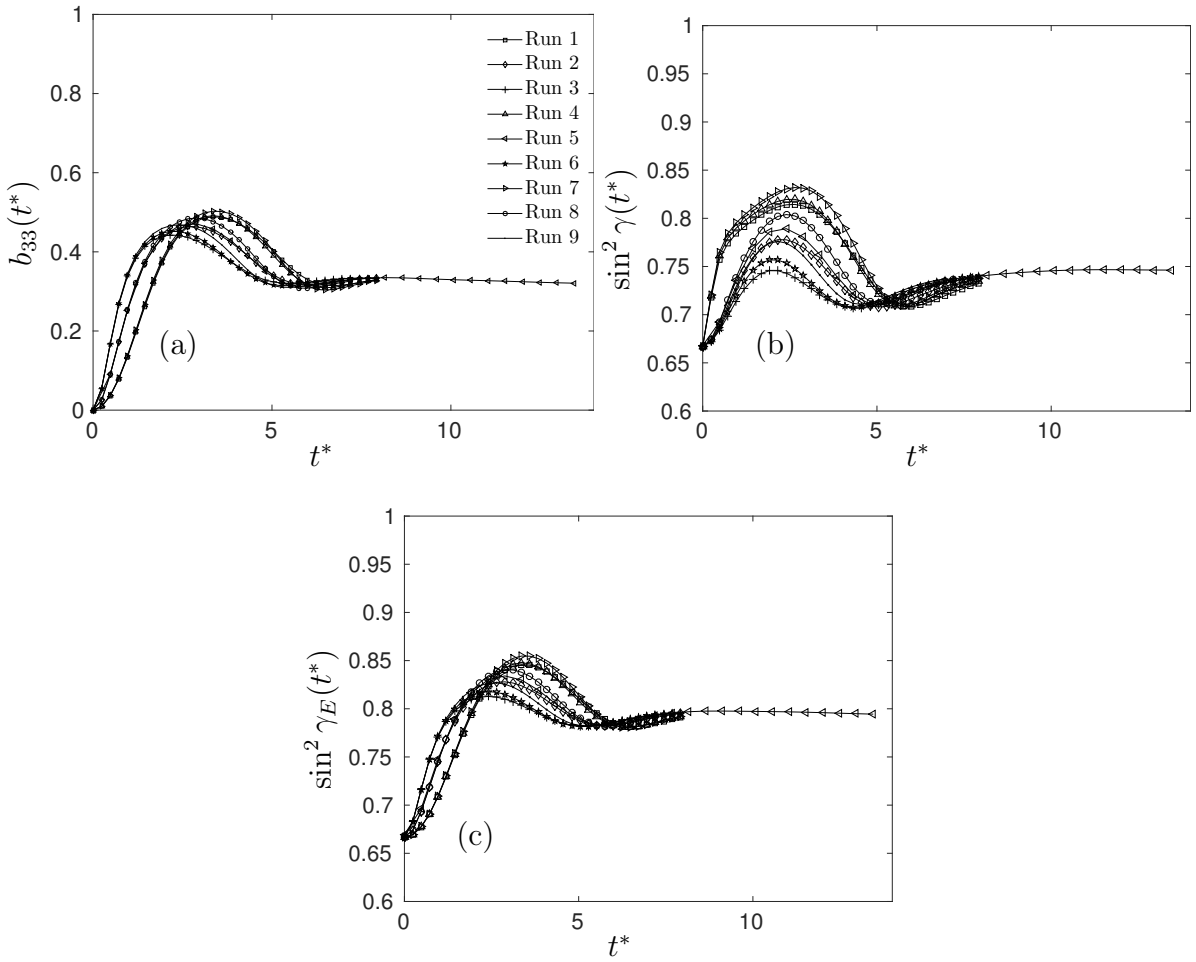


FIGURE 3.27 – Évolution temporelle des quantités en un point de l'anisotropie : (a) composante verticale du déviateur du tenseur de Reynolds b_{33} ; (b) mesure de l'anisotropie directionnelle du champ scalaire $\sin^2\gamma$; (c) mesure de l'anisotropie directionnelle du champ de vitesse $\sin^2\gamma_E$. Les neuf cas du tableau 3.1 sont représentés sur ces figures ainsi que le calcul étendu pour le *run* 5.

La figure 3.27(a) présente l'évolution de b_{ij} défini par sa composante verticale

$$b_{33} = \frac{\langle u_3 u_3 \rangle}{\langle u_i u_i \rangle} - \frac{1}{3}. \tag{3.16}$$

L'état initial étant isotrope, la valeur initiale $b_{33}(t = 0)$ est nulle. Une phase de croissance linéaire s'établit avec trois profils correspondant aux trois nombres de Froude de l'écoulement, la croissance linéaire étant liée à la valeur de la fréquence de flottaison. La valeur maximale est atteinte à la fin de cette première phase entre $t^* = 2$ et $t^* = 3$ pour des valeurs comprises entre 0,45 et 0,51. Si la phase linéaire s'était poursuivie, elle aurait atteint la valeur asymptotique $b_{33} = 2/3$. Après ce maximum, une phase de décroissance s'opère faisant état d'un début de retour à l'isotropie. Cette phase de décroissance s'étend

de $t^* = 5$ à $t^* = 7$ avec un minimum proche de 0,3 suivi d'une légère remontée vers 0,35. Le retour à l'isotropie est arrêté. Tous les calculs semblent converger plus ou moins rapidement vers une même valeur. L'évolution de b_{33} après $t^* = 8$ est uniquement présenté sur le *run* 5. On observe une légère décroissance de 0,35 vers 0,3. Cette tendance indique que l'état autosemblable n'atteint pas un véritable plateau dans son évolution au temps long. L'écoulement présente une anisotropie verticale non négligeable qui renvoie à l'étirement des structures turbulentes selon l'axe vertical.

Les figures 3.27(b) et 3.27(c) décrivent, respectivement, l'évolution de $\sin^2\gamma$ défini à l'équation (3.14) appelé paramètre de dimensionnalité [38] et l'évolution de $\sin^2\gamma_E$ défini par

$$\sin^2\gamma_E = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} k^2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,(\Phi_1(k,\theta) + \Phi_2(k,\theta))\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}k}{\displaystyle\int_0^{+\infty} k^2 \int_0^{\pi} (\Phi_1(k,\theta) + \Phi_2(k,\theta))\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}k}. \tag{3.17}$$

Pour rappel, cette quantité permet d'évaluer l'anisotropie directionnelle de l'écoulement. Plus elle est grande, plus les structures turbulentes tendent à être étirées selon l'axe vertical. Cette tendance vers des structures purement 2D est symbolisée par la limite $\sin^2\gamma = 1$. La figure 3.27(b) mesure l'anisotropie du scalaire et la figure 3.27(c) mesure celle du champ de vitesse. La dynamique est similaire à celle de b_{33}, quelques différences sont néanmoins visibles entre le scalaire et la vitesse dans la phase initiale. Partant d'une valeur de 0,66 au temps initial correspondant à l'isotropie, une première phase de croissance linéaire apparaît jusqu'à $t^* = 3$ pour $\sin^2\gamma$ et de $t^* = 2$ à $t^* = 3$ pour $\sin^2\gamma_E$. Les extremums atteints pour $\sin^2\gamma$ sont plus dispersés, entre 0,74 et 0,83. Pour le champ de vitesse, le maximum est contenu entre 0,81 et 0,85. Les *runs* 1, 4 et 7 présentent, sur la figure 3.27(b), deux phases avant d'atteindre le maximum avec d'abord une croissance très forte, presque verticale, puis une croissance plus modérée. Leur caractéristique commune est le paramètre Λ très faible et égal à $\Lambda = 0{,}06$. Un transfert rapide d'énergie et une action forte des termes linéaires peuvent expliquer la croissance rapide de l'anisotropie du scalaire. Elle se développe majoritairement aux grandes échelles, là même où les termes linéaires ont une influence significative. À la suite de cette première phase, la décroissance s'opère jusqu'à atteindre un minimum commun à tous les cas, proche de 0,7 pour le scalaire et de 0,78 pour la vitesse. Une nouvelle croissance de l'anisotropie directionnelle s'opère ensuite et tend vers une valeur unique caractérisée par le *run* 5 prolongé. La figure 3.27(b) montre un plateau bien établi à $\sin^2\gamma = 0{,}75$. La figure 3.27(c) poursuit la même évolution vers une valeur de $\sin^2\gamma_E = 0{,}8$. Un léger déclin est visible mais moins prononcé que sur la figure 3.27(a).

L'évolution de l'anisotropie dans l'écoulement montre une dépendance à l'état initial dans la transition vers l'état autosemblable. Le nombre de Froude influence la croissance initiale ainsi que le maximum d'anisotropie atteint dans l'écoulement. Le paramètre Λ

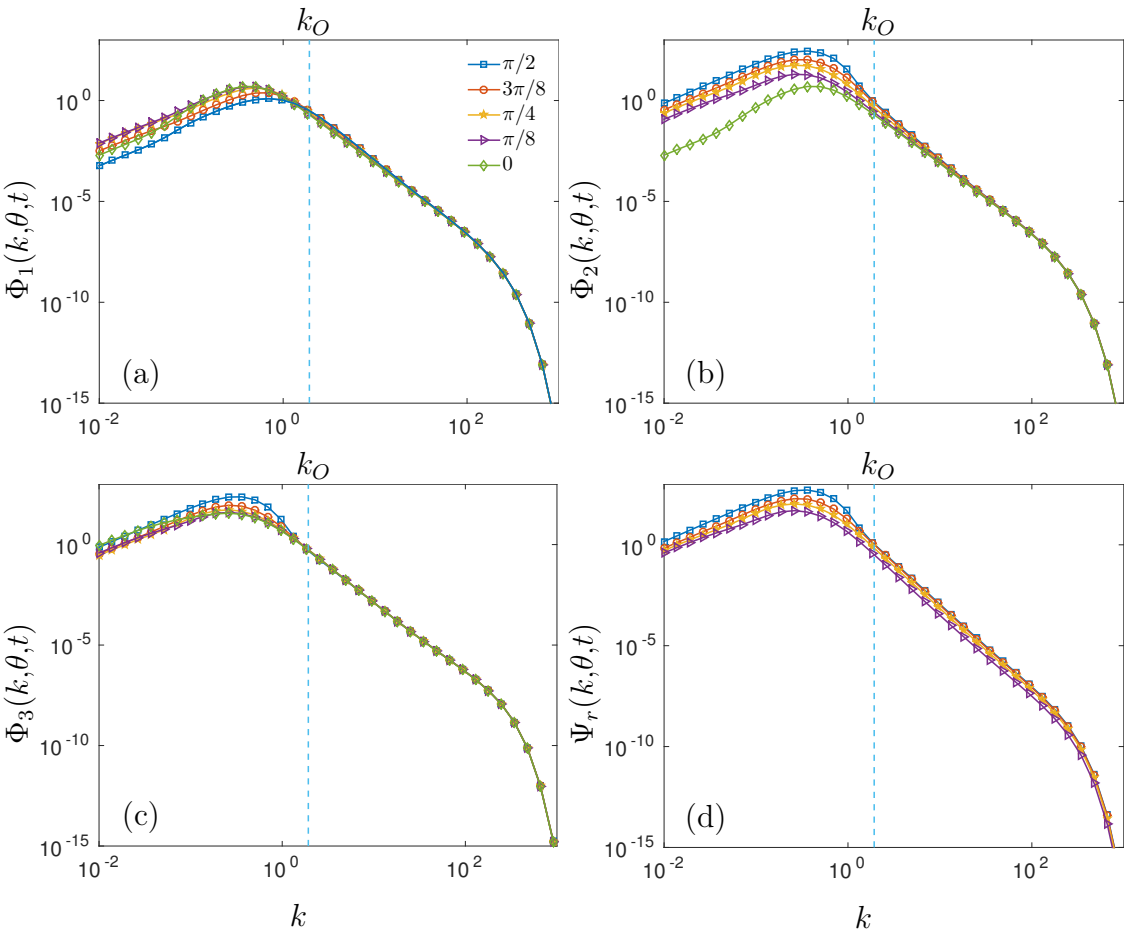


FIGURE 3.28 – Décomposition angulaire en fonction du nombre d'onde k de (a) $\Phi_1(k,\theta)$, (b) $\Phi_2(k,\theta)$, (c) $\Phi_3(k,\theta)$ et (d) $\Psi_r(k,\theta)$. Les angles représentés sont $\pi/2$, $3\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/8$ et 0. L'angle 0 n'est pas représenté pour Ψ_r car le flux horizontal est nul. k_O est le nombre d'onde d'Ozmidov.

joue un rôle moins important sur l'anisotropie du champ de vitesse. Il est cependant plus marqué sur le champ scalaire où la dispersion des valeurs maximales montre une plus forte dépendance. Toutes ces différences tendent à s'estomper lorsque les écoulements arrivent à l'état autosemblable. Une valeur unique semble apparaître pour tous les écoulements. L'étude menée au chapitre 4 montrera plus en détail que le paramètre déterminant de l'état autosemblable est la distribution d'énergie aux grandes échelles caractérisée par la pente du spectre dans la zone infrarouge. Les neuf cas présents ayant tous la même pente $s = 4$, il n'est pas étonnant qu'ils convergent vers une valeur unique.

3.4.2.2 Répartition angulaire de l'anisotropie

Dans cette section, on étudie la répartition angulaire de l'anisotropie caractérisée par la mesure de l'anisotropie de directionnalité. La figure 3.28(a), (b), (c), (d) montre, respectivement, la décomposition de Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Ψ_r selon cinq valeurs d'angle des

spectres. Les angles choisis sont $\pi/2$, $3\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/8$ et 0. La figure 3.28(d) ne présente pas de courbe pour l'angle 0 car le flux est nul selon cette direction. Pour rappel, l'angle $\theta = 0$ correspond à un vecteur d'onde colinéaire à l'axe vertical porteur de l'action de la gravité. Mis à part le flux, on observe un découpage par échelle similaire entre Φ_1, Φ_2 et Φ_3 : une zone aux petits nombres d'onde avec une forte anisotropie directionnelle et un retour plus ou moins progressif vers l'isotropie. Cette démarcation est caractérisée par l'échelle d'Ozmidov k_O. La dépendance angulaire disparaît au delà de cette échelle. Le flux présente une anisotropie plus marquée même aux grands nombres d'onde. Ce retour à l'isotropie est moins rapide sur Φ_1 et Φ_2 que sur le champ scalaire représenté par Φ_3. Thoroddsen et al. [121] observe expérimentalement une anisotropie maximale aux plus grandes échelles sur les corrélations de vitesse en deux points et également aux petites échelles mais dans une moindre mesure.

Le maximum d'énergie se trouve concentré autour de l'angle $\pi/2$ pour Φ_2, Φ_3 et Ψ_r. Cela correspond aux vecteurs d'onde dans le plan horizontal, autour de l'équateur en représentation sphérique. Du fait de l'hypothèse d'incompressibilité, cela renvoie à une dynamique préférentielle selon la verticale avec des structures allongées dans cette direction (voir figure 3.10). Cette configuration est liée à la production des termes linéaires dans l'écoulement. L'absence de terme linéaire dans l'équation d'évolution de Φ_1 entraîne une dynamique principalement non linéaire aux grandes échelles. Cela explique la différence de distribution angulaire d'énergie entre Φ_1 et Φ_2. On note que la courbe $\theta = 0$ est identique pour les deux quantités.

La dynamique autour du pic du spectre montre que des effets supplémentaires viennent déformer le spectre. Cela s'observe fortement au niveau de l'angle $\theta = 0$ pour Φ_2 où la pente en k^4 aux grands nombres d'onde est modifiée. Les autres angles sont également influencés et cela pour les quatre variables. Seul l'angle $\theta = \pi/2$ conserve une dynamique non modifiée. Ce phénomène a été observé par Soulard et al. [112]. Une redistribution d'énergie liée aux termes non linéaires permet d'expliquer ce phénomène.

Une autre manière d'observer l'anisotropie directionnelle et son évolution en fonction des nombres d'onde est présentée à la figure 3.29. Le déviateur du spectre angulaire y est tracé. Cette quantité est définie par

$$\Delta\Phi = 100 \times \frac{\Phi - \langle\Phi\rangle_\theta}{\langle\Phi\rangle_\theta} \quad \text{avec} \quad \langle\Phi\rangle_\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi \, \mathrm{d}\theta. \tag{3.18}$$

Cette quantité $\Delta\Phi$ rend compte de l'écart à la moyenne angulaire des quatre corrélations doubles exprimé en pourcentage de cette moyenne. Elle est évaluée à trois nombres d'onde différents : $k = 0{,}1$ dans la zone infrarouge, $k = 1$ au début de la zone inertielle et $k = 10$ au milieu de la zone inertielle. La figure 3.29(a) présente l'évolution de $\Delta\Phi$ pour Φ_1, Φ_2 est décrite sur la figure 3.29(b), Φ_3 sur la figure 3.29(c) et Ψ_r sur la figure 3.29(d). Tout d'abord, on observe des comportements similaires entre Φ_2, Φ_3 et Ψ pour les nombres

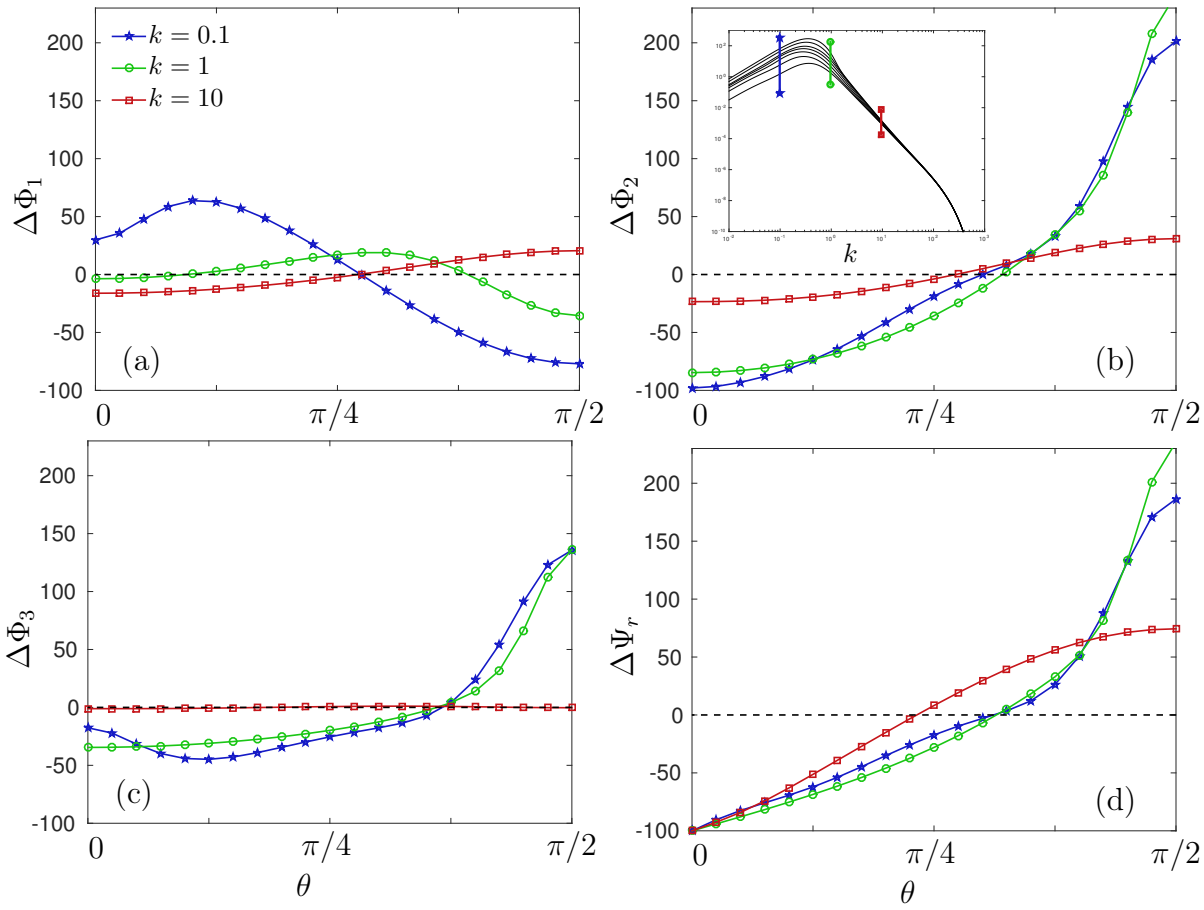


FIGURE 3.29 – Déviateur $\Delta\Phi$ du spectre angulaire pour (a) Φ_1, (b) Φ_2, (c) Φ_3 et (d) Ψ_r. On a choisi trois nombres d'onde particuliers pour tracer ce déviateur : $k = 0{,}1$, $k = 1$ et $k = 10$. L'insert montre le spectre de la composante Φ_2 avec sa décomposition angulaire et la position des vecteurs d'onde sélectionnés.

d'onde $k = 0{,}1$ et $k = 1$ avec une anisotropie forte et une accumulation d'énergie en $\theta = \pi/2$. $\Delta\Phi$ est plus faible pour Φ_3. Par contre, l'anisotropie angulaire de Φ_1 est différente. On observe une légère accumulation plutôt autour de $\theta = 0$ pour $k = 0{,}1$. L'anisotropie dans la zone inertielle à $k = 10$ montre un comportement différent de la zone infrarouge. Elle tend à s'estomper pour Φ_1 et Φ_2 mais reste malgré tout non nulle. La répartition d'énergie est ici très proche entre la composante toroïdale Φ_1 et la composante poloïdale Φ_2. La corrélation de scalaire Φ_3 affiche une anisotropie presque nulle pour $k = 10$ comme déjà observé à la figure 3.28(c). Finalement, et comme observé également sur la figure 3.28(d), l'anisotropie angulaire du flux Ψ_r est toujours marquée dans la zone inertielle avec une valeur deux fois supérieure à celle de Φ_2. Ces observations confirment qu'un retour à l'isotropie est présent. Il est nettement plus marqué pour le scalaire que pour les deux composantes du champ de vitesse.

Le modèle EDQNM permet cette description angulaire fine des statistiques de l'écoulement. Obtenir ces mêmes statistiques avec des simulations directes est difficile à cause du

faible échantillonnage aux grandes échelles.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé le modèle EDQNM de la turbulence homogène en stratification instable (turbulence USH). Des simulations numériques directes nous ont servi de référence dans ce processus de validation. Nous avons fait varier le nombre de Froude initial, le rapport entre variance de flottaison et énergie cinétique ainsi que la distribution initiale d'énergie afin de balayer une large gamme de conditions initiales. Les premières comparaisons ont montré que le modèle EDQNM est à même de reproduire l'évolution d'un écoulement turbulent USH. Cependant, un écart significatif a été mis en évidence lors du changement de régime du linéaire au non linéaire.

Nous avons cherché à identifier l'origine de cet écart. Plusieurs hypothèses ont été testées : une erreur liée au tirage aléatoire de la DNS, une contrainte liée au confinement des grandes échelles, à la distribution d'énergie aux grandes échelles ou un problème dans le modèle ? Nous avons montré que l'écart observé est lié à une hypothèse simplificatrice que nous avons faite sur le modèle. On a supposé que les termes liés à la stratification étaient négligeables dans les équations des corrélations triples. Il s'avère que leur présence induit une réduction du transfert d'énergie par un effet appelé « balayage ». Ce dernier a été mis en évidence par KRAICHNAN [63] dans le cadre de la turbulence MHD du fait de la présence d'un champ magnétique.

Afin de réintroduire cet effet dans notre modèle, nous avons mis en avant une correction prenant en compte l'effet d'amortissement des termes de stratification. Cette correction prend la forme d'un temps caractéristique supplémentaire ajouté à l'amortissement tourbillonnaire classique du modèle EDQNM. On fait intervenir une constante évaluée via une méthode de Newton. Les nouvelles simulations avec le modèle corrigé montrent des résultats concluants : le changement de régime est retardé et le modèle EDQNM reproduit le résultat prédit par la simulation directe. Nous avons validé le modèle sur des comparaisons multiples avec notamment des spectres de corrélations doubles, des statistiques en un point et des mesures de l'anisotropie de l'écoulement.

Nous avons finalement montré que le modèle EDQNM est à même de reproduire la dynamique asymptotique de la turbulence homogène stratifiée instable au travers de l'établissement de l'état autosemblable. Le modèle nous a permis d'établir des résultats préliminaires sur l'état autosemblable en atteignant un nombre de Reynolds proche de $Re \simeq 10^5$. Un tel nombre de Reynolds est difficilement atteignable par simulation directe.

On souhaite maintenant caractérisé plus finement cet état autosemblable avec notamment une étude sur l'influence de la distribution d'énergie aux grandes échelles. Nous présentons ces travaux au chapitre 4. Dans le présent chapitre, le gradient moyen de densité

n'est pas influencé par les quantités fluctuantes et reste donc fixe au cours du temps. La prise en compte de cette rétroaction permettra de rapprocher la turbulence USH d'une configuration plus réaliste. Ce point sera abordé au chapitre 5.

Chapitre 4

États autosemblables en turbulence homogène stratifiée instable

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'état autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable à grand nombre de Reynolds. Au chapitre précédent, on a mis en évidence, grâce au modèle EDQNM*, l'établissement d'une croissance exponentielle dépendante de la distribution initiale du spectre d'énergie caractérisée par la pente « s » aux grandes échelles. On effectue une étude paramétrique sur cette pente s pour identifier son influence sur l'état autosemblable. On montre que le régime d'écoulement final est dépendant de la pente s. On met en évidence la présence de* backscatter *en turbulence* USH *qui altère la distribution d'énergie aux grandes échelles si $s \geq 2{,}5$. On retrouve également la loi d'échelle de la zone inertielle en $k^{-5/3}$ pour l'énergie cinétique et la variance de flottaison. Le spectre du flux présente une tendance vers la loi en $k^{-7/3}$ mais avec une convergence nettement plus lente. On termine en validant en partie l'approche par la méthode d'équilibre spectral de* Kaneda *et* Yoshida *[57] prédisant une évolution du spectre de flux de flottaison vertical en $\sin^2\theta$ dans la zone inertielle.*

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication : A. Burlot*, B.-J.* Gréa*, F. S.* Godeferd*, C.* Cambon *et O.* Soulard*. « Large Reynolds number self-similar states of unstably stratified homogeneous turbulence ».* Physics of Fluids *27.6, 065114 (2015).*

4.1 Problématique des grandes échelles

Dans ce chapitre, notre objectif est d'identifier l'influence de la distribution d'énergie aux grandes échelles sur le comportement asymptotique de la turbulence homogène stratifiée instable. Au chapitre précédent, on a mis en évidence, grâce au modèle EDQNM, que la turbulence USH atteint un état autosemblable aux temps longs. Soulard et al. [112] et Griffond et al. [45] avaient déjà établi des propriétés de cet état autosemblable à des

nombres de Reynolds faibles via des simulations numériques directes. On se propose ici d'explorer la turbulence USH à des nombres de Reynolds plus élevés, inaccessibles aux simulations directes.

Cet état autosemblable est lié à l'évolution des grandes échelles de la turbulence. En effet, la forme du spectre du tenseur des corrélations doubles pour les faibles nombres d'onde influence le taux de croissance β des statistiques, comme l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}(t)$ par exemple. L'approximation du spectre aux grandes échelles, c'est-à-dire aux petits nombres d'onde, s'écrit :

$$\lim_{k\to 0} E(k) \sim k^s \tag{4.1}$$

avec s la pente du spectre infrarouge. La relation entre l'état autosemblable et ces grandes échelles se traduit par la dépendance du taux de croissance à la pente du spectre infrarouge par l'expression

$$\beta = \frac{4}{3+s}. \tag{4.2}$$

Les détails sur l'obtention de ce résultat ont été donnés au chapitre 1. On souhaite alors comprendre comment l'écoulement se structure et évolue pour différentes valeurs initiales de s, c'est-à-dire différentes distributions d'énergie aux grandes échelles.

On s'intéresse particulièrement à l'anisotropie, aux lois d'échelle dans la zone inertielle et à l'évolution du spectre aux grandes échelles. Le premier point est important dans la mesure où l'on cherche à comprendre comment se structure l'écoulement sous l'effet de la stratification. Il permet d'identifier certains comportements transposables à d'autres écoulements soumis à des effets de flottaison comme la turbulence Rayleigh-Taylor. Le second point est également crucial pour savoir si l'on retrouve une évolution de la zone inertielle semblable à d'autres écoulements. Cette question aborde un point fondamental sur l'universalité des statistiques de la turbulence dans la zone inertielle [57]. Retrouve-t-on une loi d'échelle en $k^{-5/3}$ dans la zone inertielle en turbulence USH ? Cette question pourrait nous éclairer sur l'influence ou non de la stratification et donc des effets de flottaison sur cette zone inertielle. Cette question reste également ouverte pour la turbulence Rayleigh-Taylor. Enfin le troisième point, l'évolution des grandes échelles dans l'écoulement, renvoie là aussi à un aspect fondamental de la turbulence : la « permanence des grandes échelles ».

Ce concept de permanence des grandes échelles est étroitement lié à la turbulence homogène isotrope et anime des recherches depuis les années 40 [82, 69, 5, 105, 34, 74, 80]. Le principe de cette permanence des grandes échelles en turbulence homogène isotrope (THI) se traduit par l'existence d'un invariant mathématique aux grandes échelles que l'on peut écrire $E(k) = C_s k^s$, indépendant du temps, pour les nombres d'onde $k \to 0$ et $s \leq 4$ la pente dans la zone infrarouge.

Un des résultats fondamentaux en THI est le taux de décroissance temporelle n de la

turbulence dans l'évolution autosemblable que l'on écrit

$$\mathcal{K} \sim t^{-n}. \tag{4.3}$$

L'évaluation de ce taux de décroissance revêt un enjeu théorique important mais également pratique car il sert à calibrer certains modèles de turbulence dits « ingénieurs ». Par exemple, on se sert de simulation de turbulence en THI pour calibrer les coefficients du modèle $k - \varepsilon$, notamment le coefficient C_{ε_2}. On peut établir une relation entre le taux de décroissance n et la pente infrarouge du spectre s. C'est sur ce modèle que la relation entre β et s a été établie. Tout d'abord, on peut écrire dans l'état autosemblable que le spectre d'énergie cinétique dépend d'une vitesse caractéristique u, d'une longueur caractéristique ℓ (l'échelle intégrale, par exemple) et d'une fonction sans dimension $\mathcal{G}$:

$$E(k) = u^2 \ell \mathcal{G}(k\ell). \tag{4.4}$$

On peut également exprimer le taux de dissipation d'énergie cinétique ε en fonction de la longueur ℓ et la vitesse u par la relation

$$\varepsilon = \frac{u^3}{\ell}. \tag{4.5}$$

Dans l'approximation des petits nombres d'onde $k \to 0$, on écrit ainsi

$$u^2 \ell^{s+1} = \text{cste}. \tag{4.6}$$

On pose $\ell = 1/k_\ell \sim t^m$ avec m le taux de croissance de l'échelle intégrale et, avec l'équation (4.3) qui permet d'écrire $\mathcal{K} \sim u^2 \sim t^{-n}$, on peut écrire l'équation (4.6)

$$u^2 \ell^{s+1} \sim t^{-n} \times t^{(s+1)m} = \text{cste}. \tag{4.7}$$

On obtient ainsi une première relation

$$n = (s+1)m. \tag{4.8}$$

L'équation (4.5) nous permet d'écrire

$$\varepsilon = \frac{u^3}{\ell} \sim t^{-3n/2} \times t^{-m}. \tag{4.9}$$

La dissipation d'énergie cinétique s'écrit également

$$-\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\mathcal{K}(t)}{\mathrm{d}t} \sim t^{-(n+1)}. \tag{4.10}$$

Les deux équations (4.9)–(4.10) nous donnent une seconde relation

$$m = 1 - \frac{n}{2}. \tag{4.11}$$

On trouve ainsi la relation entre le taux de décroissance n et s ainsi que celle entre m et s à partir des deux équations (4.8) et (4.11) :

$$n = \frac{2(s+1)}{s+3} \quad \text{et} \quad m = \frac{2}{s+3}. \tag{4.12}$$

On vient d'établir le lien entre les grandes échelles de la turbulence et le taux de décroissance n de l'énergie cinétique. La valeur de ce paramètre n, et par extension la valeur de s, a fait l'objet de nombreux débats. Historiquement, la pente $s = 4$ qui donne une décroissance théorique en $n = -10/7$ a été étudiée par Batchelor [5]. Saffman [105] a lui mis en avant la valeur $s = 2$ associée à une décroissance théorique en $n = -6/5$. Meldi et Sagaut [86, p. 366] rapporte les différentes valeurs de n mesurées expérimentalement et numériquement. Ils observent une large dispersion des mesures qui tend malgré tout à mettre en avant la décroissance en $n = -6/5$. Les deux valeurs $s = 2$ et $s = 4$ sont issues de considérations mathématiques sur les conditions de régularité des corrélations de vitesse dans la limite $k \to 0$. Les travaux plus récents de Gustafsson et George [46] ont tenté d'établir une preuve mathématique que la pente s ne pouvait être qu'un entier pair. Llor et Soulard [81] ont montré que ces arguments étaient fallacieux et que rien n'empêchait le choix d'un entier impair voire d'un nombre décimal. Eyink et Thomson [34] et Lesieur et Ossia [74] avaient cherché à mieux comprendre les mécanismes de la décroissance des grandes échelles avec des pentes non entières. Eyink et Thomson [34] ont notamment établi une valeur charnière $s \simeq 3{,}45$ comme limite haute de l'invariance des grandes échelles.

Cette brève introduction nous a permis d'établir dans quel cadre notre étude se pose. Elle reprend des grands principes de l'étude de la turbulence homogène isotrope que l'on se propose d'approfondir dans le cadre de la turbulence homogène stratifiée instable.

Ce chapitre s'organise comme suit. On présente tout d'abord la méthodologie de l'étude à la section 4.2 avec les caractéristiques des calculs EDQNM et des simulations directes utilisées. Ensuite, à la section 4.3, on détaille les résultats autour de quatre points principaux : les différents régimes d'écoulement (section 4.3.1), les spectres des corrélations doubles (section 4.3.2), l'évolution de l'anisotropie (section 4.3.3) et une comparaison à la théorie de la réponse linéaire (section 4.3.4).

Dans l'ensemble de ce chapitre, les références au modèle EDQNM renvoient à sa version « corrigée », incluant le terme lié à la stratification dans l'amortissement tourbillonnaire.

4.2 Initialisation des simulations

4.2.1 Méthodologie

Nous voulons caractériser les propriétés de l'état autosemblable en fonction de la pente s du spectre infrarouge. On modifie donc la forme des spectres initiaux d'énergie et de variance de flottaison, dont on rappelle l'expression, déjà employée au chapitre précédent :

$$E(k,t=0) = A_s \left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^s \exp\left(-\frac{s}{2}\left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^2\right), \tag{4.13}$$

$$B(k,t=0) = A_s \left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^s \exp\left(-\frac{s}{2}\left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^2\right). \tag{4.14}$$

Le spectre de flux de flottaison $F(k,t=0)$ est nul à l'état initial. Cette modification se fait au travers du paramètre s que nous allons faire varier initialement. Nous avons mené deux études complémentaires de l'influence de la forme de cette condition initiale :

— La première étude ne fait intervenir que des calculs EDQNM. On tire profit de la validation du modèle décrite au chapitre 3.

— La seconde fait intervenir des simulations directes et les simulations EDQNM associées. Ces simulations ont déjà permis de valider le modèle EDQNM au travers de l'influence de la pente du spectre infrarouge.

Chaque section de la partie résultat fera intervenir une analyse des calculs EDQNM du premier jeu de simulation et ensuite une analyse des simulations directes. On décrit maintenant les choix d'initialisation de chaque groupe de simulation.

4.2.2 Simulations EDQNM

Nous avons choisi d'étudier neuf valeurs différentes de la pente s allant de $s = 1$ à $s = 5$ avec un pas de 0,5. Afin de pouvoir comparer ces calculs entre eux, on a fixé les nombres sans dimension initiaux, nombre de Reynolds Re, nombre de Froude Fr et rapport de variance de flottaison sur énergie cinétique Λ, à des valeurs identiques :

$$Re = \frac{\mathcal{K}^2}{\varepsilon\nu} = 833, \quad Fr = \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}N} = 1{,}2, \quad \Lambda = \frac{\langle\vartheta\vartheta\rangle}{\mathcal{K}} = 1. \tag{4.15}$$

De cette manière, on se ramène à l'étude d'écoulements similaires ayant les mêmes propriétés mais avec une distribution d'énergie initiale différente. La fréquence de flottaison est choisie à $N = 2$ et la viscosité du fluide $\nu = 5 \times 10^{-4}$. Le nombre de Froude Fr et le paramètre Λ sont dans la gamme de paramètres utilisés lors de la validation. Nous pouvons donc utiliser la même constante a_1 calibrée précédemment. Afin de faire correspondre les nombres sans dimension initiaux, on fait varier le maximum du spectre initial k_{pic} afin de fixer l'énergie

s	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
k_{pic}	34,64	37,95	40	41,4	42,43	43,2	43,82	44,32	44,72
Nt	9,4	10,4	11,9	13,1	14,5	16,2	16,9	17,4	17,6

TABLE 4.1 – Les pentes initiales s des spectres dans la zone infrarouge et le pic du spectre associé. On indique la valeur du dernier temps sans dimension $t^* = Nt$. À cet instant et pour chaque cas, le nombre de Reynolds est $Re \geq 10^6$.

cinétique et sa dissipation à la même valeur pour les neuf cas, quelque soit la pente du spectre.

On choisit une borne $k_{\text{min}} = 10^{-2}$ afin d'avoir une marge suffisante permettant aux grandes échelles de se développer. On fixe également un nombre d'onde k_{pic} en fonction de la pente s afin d'ajuster les nombres sans dimension. Les différentes valeurs choisies sont précisées au tableau 4.1.

On fixe la viscosité du fluide et donc l'échelle de Kolmogorov des neuf cas. Ainsi, en contrôlant la bonne résolution du calcul sur un cas, on s'assure de la résolution de tous les cas.

On fera référence à ces calculs dans des paragraphes intitulés « Étude EDQNM » ou « Résultats EDQNM ».

4.2.3 DNS à haute résolution

Le second jeu de calcul que nous avons utilisé est basé sur trois simulations numériques directes avec des pentes initiales de la zone infrarouge $s = 2$, $s = 3$ et $s = 4$. Les caractéristiques de ces simulations ont été données à la section 3.2.3.3 au chapitre précédent et sont rappelées au tableau 4.2. Un atout de ces DNS est leur résolution élevée avec 2048^3 points dans le domaine de simulation. On peut dès lors simuler des échelles plus petites et atteindre des niveaux d'énergie et donc des nombres de Reynolds plus élevés. La borne maximale du domaine spectral passe ainsi à $k_{\text{max}} = 963$. À la différence du jeu de calcul EDQNM présenté ci-avant, on a initialisé chaque DNS par une simulation de THI. Les conditions de reprise sont similaires à celles utilisées au chapitre précédent pour les simulations 1024^3. Ces nouvelles simulations haute résolution nous ont déjà permis de confronter le modèle EDQNM à la turbulence USH. Elles viennent ici en appui pour renforcer les résultats du modèle, notamment sur les questions de loi d'échelle à la section 4.3.2.4. On présente également les trois calculs EDQNM basés sur les conditions initiales des simulations directes en USH.

On fera référence à ce jeu de simulation dans des paragraphes intitulés « Étude DNS » ou « Résultats DNS ».

Nom du cas	s	Re	Fr	Λ	ν	N
run A	2	18,4	1,16	1,87	7×10^{-4}	14,0
run B	3	15,6	1,17	1,85	7×10^{-4}	14,3
run C	4	15,9	1,18	1,83	7×10^{-4}	16,0

TABLE 4.2 – Paramètres des simulations numériques directes avec 2048^3 points. Les nombres de Reynolds Re, de Froude Fr et le rapport de variance de flottaison sur énergie cinétique Λ sont pris à des valeurs proches. Les fréquences N sont légèrement différentes car les reprises ne sont pas faites exactement avec la même valeur de variation de flottaison. La fréquence N est donc ajustée pour calibrer les nombres adimensionnels.

4.3 Résultats de simulation

Les résultats de simulation sont présentés dans cette section en quatre parties. On commence à la section 4.3.1 par étudier les différents régimes d'écoulement qui surviennent à partir de l'état initial commun. On abordera cette question au travers des nombres sans dimensions et des trois corrélations en temps que sont l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, la variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle$ et le flux de flottaison vertical $\langle u_3\vartheta \rangle$. On s'intéresse ensuite, à la section 4.3.2, aux différents spectres des corrélations ainsi qu'à leur transfert. On étudie les propriétés des spectres aux grandes échelles pour observer le phénomène de croissance linéaire des grandes échelles, le pendant en turbulence USH de la permanence des grandes échelles en THI, et les propriétés des spectres dans la zone inertielle afin d'établir des lois d'échelles. On poursuit, à la section 4.3.3, par l'examen de l'anisotropie de l'écoulement. On regarde l'évolution en temps ainsi que la répartition échelle par échelle, c'est-à-dire par nombre d'onde, de l'anisotropie. On termine, à la section 4.3.4, par la comparaison des résultats à la méthode perturbative développée notamment par KANEDA et YOSHIDA [57] pour la turbulence stratification stable.

4.3.1 Différents régimes d'écoulement

On présente tout d'abord l'évolution des nombres sans dimension (section 4.3.1.1) puis les corrélations en 1 point (section 4.3.1.2).

4.3.1.1 Caractérisation par les nombres sans dimension

Étude EDQNM La figure 4.1(a) montre l'évolution du nombre de Reynolds Re. Une phase de décroissance débute pour atteindre un minimum proche de $t^* = 0{,}5$ pour $s = 1$ et $t^* = 1$ pour $s = 5$. Le nombre de Reynolds passe de $Re = 833$ à $Re = 180$ pour $s = 1$ et $Re = 60$ pour $s = 5$. La décroissance du nombre de Reynolds est la diminution rapide de l'énergie cinétique liée à l'établissement du transfert d'énergie. La dissipation initiale est forte et entraîne donc le nombre de Reynolds à la baisse. Ces valeurs minimales, quoique faibles, restent plus élevées que la condition initiale ayant servi à valider le modèle EDQNM.

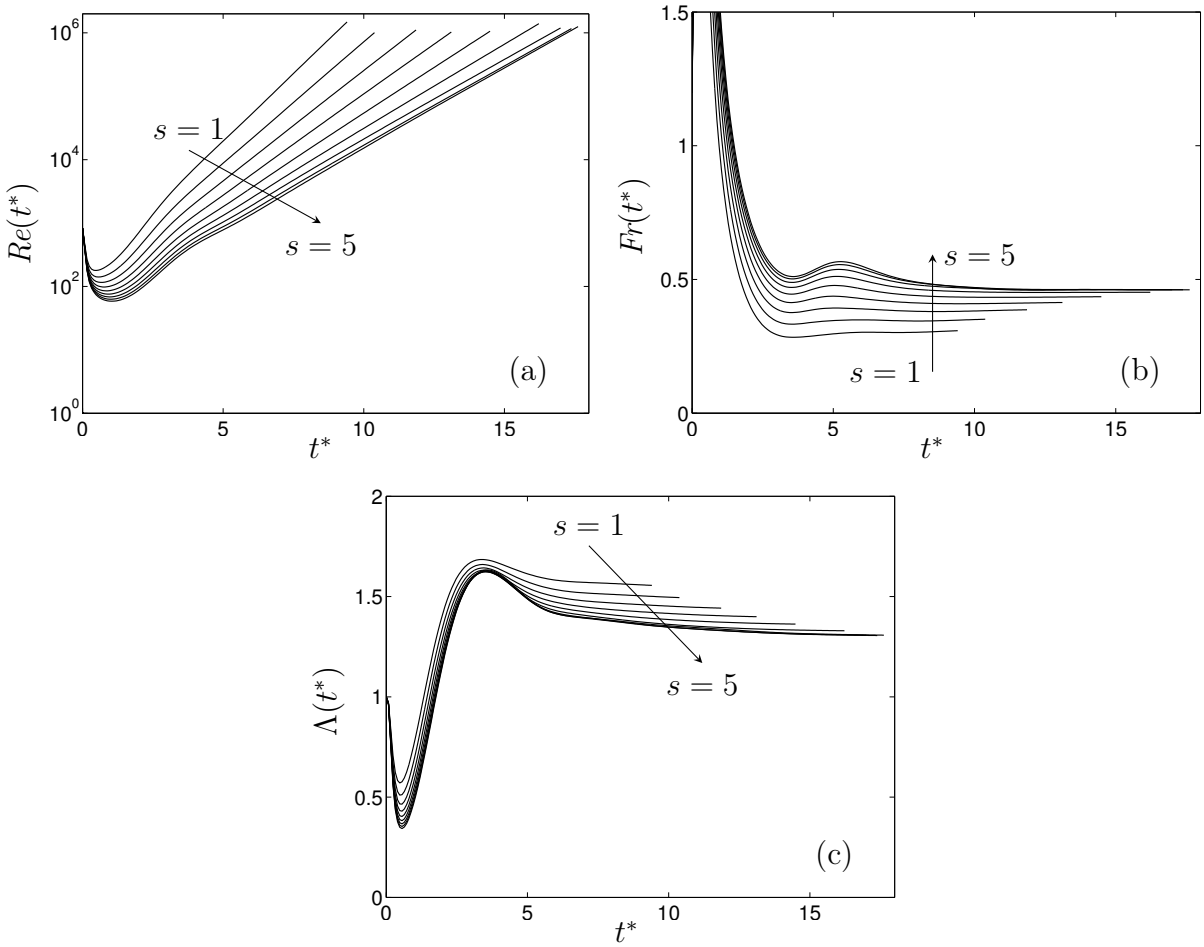


FIGURE 4.1 – Évolution en temps des trois nombres sans dimension pour les neufs calculs EDQNM : (a) nombre de Reynolds $Re(t^*)$; (b) nombre de Froude $Fr(t^*)$; (c) rapport de la variance de flottaison sur l'énergie cinétique Λ.

L'état autosemblable caractérisé par une ligne droite en représentation lin-log semble apparaître plus tôt pour $s = 1$ que $s = 5$ avec un nombre de Reynolds $Re \simeq 2 \times 10^3$ à $t^* = 3$ pour $s = 1$ et $t^* = 6$ pour $s = 5$. Les sept autres cas se situent entre ces deux valeurs. On observe enfin que les cas $s = 4{,}5$ et $s = 5$ évoluent comme $s = 4$. Ceci est lié au changement de la pente aux grandes échelles sous l'effet du *backscatter* (voir la section 4.3.2.2). La pente du spectre dans la zone infrarouge se ramène à $s = 4$ en quelques périodes caractéristiques de la turbulence. Cela a pour effet de modifier le taux de croissance du nombre de Reynolds.

La figure 4.1(b) montre l'évolution des nombres de Froude Fr. Comme indiqué à l'équation 4.15, tous les calculs démarrent à $Fr = 1{,}2$. Une première phase apparaît avec une croissance forte et rapide. Le nombre de Froude croît jusqu'à $Fr = 2{,}9$ pour $s = 1$ et $Fr = 4{,}25$ pour $s = 5$ à $t^* = 0{,}5$. On ne voit pas cette première croissance sur la figure car on a choisi de concentrer l'analyse sur les valeurs finales. La courbe sort donc du

cadre. La forte dissipation initiale de l'énergie cinétique fait chuter cette dernière et donc augmenter le nombre de Froude. L'explication est identique à celle justifiant la chute initiale du nombre de Reynolds. L'écoulement est ainsi fortement dominé par les effets turbulents aux temps très courts. Le nombre de Froude redescend sous l'unité rapidement et va jusqu'à $Fr = 0{,}3$ pour $s = 1$ et $Fr = 0{,}5$ pour $s = 5$. Ce dernier, comme pour les cas $s \in \{2{,}5\,;3\,;3{,}5\,;4\,;4{,}5\}$, montre un nouveau transitoire avec une légère remontée du nombre de Froude avant de décroître vers la valeur autosemblable finale. Cet effet est dû à un court transitoire entre le régime quasi-linéaire et le régime non linéaire.

L'état autosemblable final s'établit finalement avec une borne inférieure $Fr = 0{,}3$ pour $s = 1$ et $Fr = 0{,}48$ pour $s = 5$, les autres cas étant répartis entre ces deux valeurs. Ainsi, plus la pente du spectre est faible, plus le nombre de Froude asymptotique de l'écoulement est faible. Ce sont donc les effets de stratification qui dominent dans tous les cas mais de manière plus marquée pour une pente faible. En effet, les termes de stratification agissent principalement sur les grandes échelles via les termes linéaires. Une pente plus faible induit plus d'énergie aux grandes échelles et donc des effets de stratification plus forts. On observe également que le nombre de Froude est borné à $Fr = 0{,}48$, la valeur associée au cas $s \geq 4$. Augmenter la pente infrarouge à l'état initial ne permet pas d'augmenter le nombre de Froude asymptotique.

La figure 4.1(c) montre l'évolution en temps du paramètre Λ, rapport de la variance de flottaison sur l'énergie cinétique. Les neuf cas partent d'une équipartition entre $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ et $\mathcal{K}$ avec $\Lambda = 1$. Une première phase de décroissance amène le rapport Λ à une valeur minimum comprise entre $\Lambda = 0{,}34$ pour le cas $s = 5$ et $\Lambda = 0{,}57$ pour la cas $s = 1$ à $t^* = 0{,}56$. Cette décroissance signifie que la variance de flottaison décroît initialement plus vite que l'énergie cinétique. Cette observation fait écho aux résultats observés en turbulence stratifiée stable. Elle s'explique par la plus grande « efficacité » de la cascade du scalaire par rapport à la cascade d'énergie cinétique. Le transfert inter-échelle permet une dissipation plus rapide de la variance de scalaire que de l'énergie cinétique. Il s'ensuit une phase de forte croissance de Λ jusqu'à $t^* \simeq 3{,}5$. Cela correspond à la phase linéaire dans l'évolution de l'écoulement. Elle s'arrête jusqu'à atteindre $\Lambda = 1{,}65$; on rappelle que dans le cas linéaire, le paramètre Λ converge vers $\Lambda = 2$. Les effets non linéaires font plafonner cette valeur.

On observe ensuite une phase de décroissance jusqu'à $t^* = 6$, plus forte pour $s = 5$ que $s = 1$. Cette décroissance s'infléchit par la suite mais reste présente. Aucun plateau horizontal n'apparaît dans les neuf cas considérés. Le paramètre Λ se stabilise tout de même autour de différentes valeurs en fonction de la pente du spectre infrarouge : de $\Lambda = 1{,}55$ pour $s = 1$ à $\Lambda = 1{,}3$ pour $s \geq 4$. Cette dernière valeur marque une limite basse au rapport Λ. L'écoulement contient ainsi de 30 à 60% plus de variance de flottaison que d'énergie cinétique dans le régime asymptotique autosemblable. Le léger transitoire de Λ visible entre $t^* = 3{,}5$ et $t^* = 6$ est à mettre en parallèle avec celui observé sur le nombre de Froude. Un rééquilibrage entre énergie cinétique et dissipation apparaît entre le régime

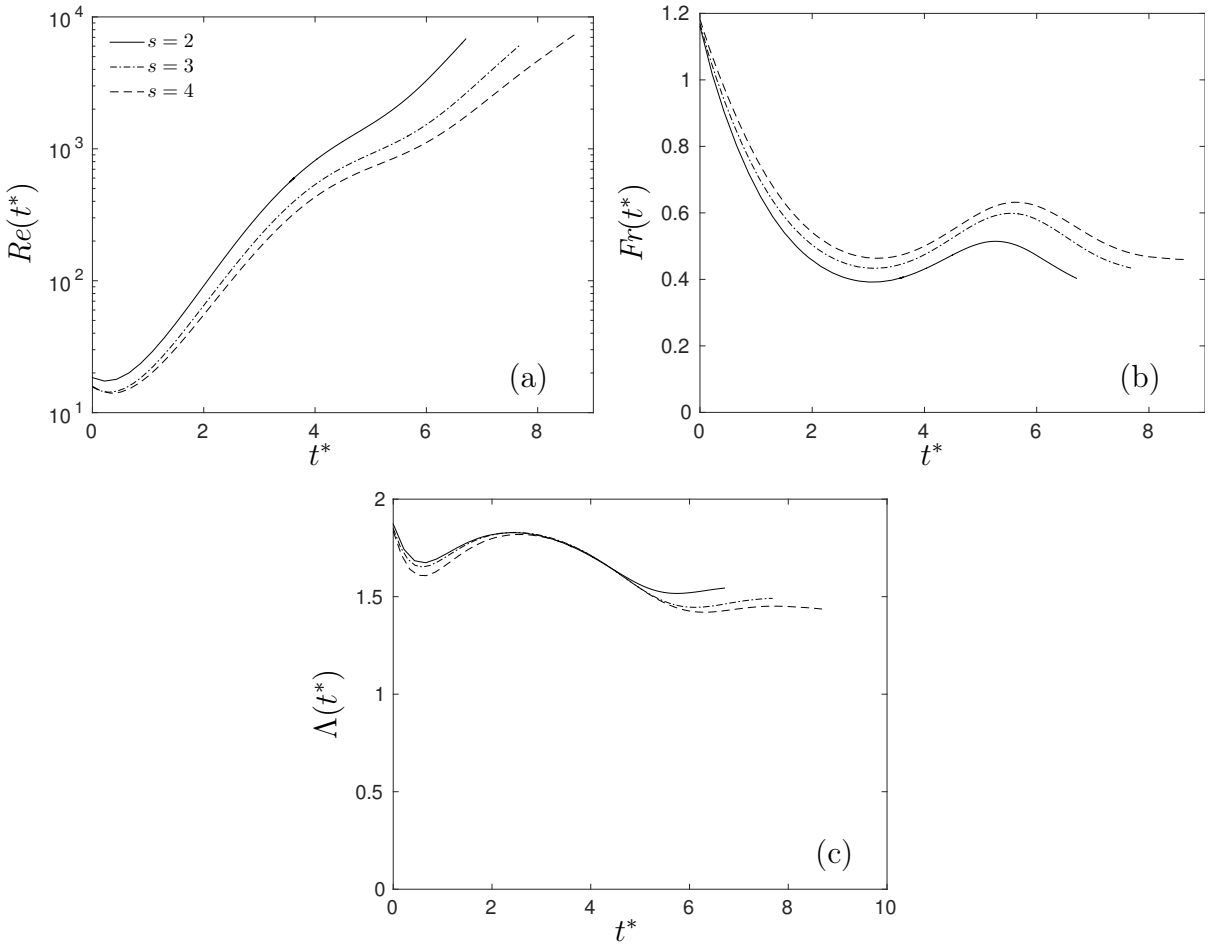


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des nombres sans dimension pour les trois DNS : (a) nombre de Reynolds $Re(t^*)$; (b) nombre de Froude $Fr(t^*)$; (c) rapport de la variance de flottaison sur l'énergie cinétique Λ. On ne présente que les résultats DNS ici pour plus de lisibilité.

quasi-linéaire et le régime non linéaire. Cela semble favoriser la décroissance de $\langle \vartheta\vartheta \rangle$ plus que celle de $\mathcal{K}$ et donc une décroissance de Λ.

En résumé, on a atteint le régime autosemblable avec une croissance exponentielle du nombre de Reynolds, un plateau pour le nombre de Froude et une tendance à la décroissance vers un plateau pour le rapport entre variance de flottaison et énergie cinétique. La pente du spectre agit donc directement sur l'évolution de l'écoulement et entraîne l'apparition d'états finaux différents.

Étude DNS On complète ces résultats grâce aux simulations numériques directes à haute résolution présentées au tableau 4.2. Les nombres de Reynolds, de Froude et le paramètre Λ sont présentés à la figure 4.2. On ne présente pas les résultats EDQNM sur les figures de cette section car les comparaisons ont déjà été faites à la section 3.3.4.1. La figure 4.2(a) montre l'évolution du nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds maximum est proche de

$Re = 7000$, ce qui est plus élevé que les résultats du chapitre 3. La croissance exponentielle du nombre de Reynolds semble obtenue.

Contrairement aux calculs EDQNM précédents, le nombre de Froude des simulations directes, présenté à la figure 4.2(b), n'atteint pas de plateau horizontal marqué. Le nombre de Reynolds étant plus faible, il n'y a pas de décroissance initiale forte de l'énergie cinétique qui cause une forte hausse du nombre de Froude. On a une phase de décroissance initiale jusqu'à $t^* = 3$ pour atteindre $Fr = 0{,}4$ pour $s = 2$ et $Fr = 0{,}5$ pour $s = 4$. Une remontée du nombre de Froude s'ensuit jusqu'à $t^* = 5$ environ. Puis une décroissance finale s'opère. On observe que le calcul pour $s = 4$ atteint un début de plateau proche de $Fr = 0{,}45$ qui pourrait indiquer la présence de l'état autosemblable. Le cas $s = 4$ dans l'étude EDQNM tend vers cette même valeur du nombre de Froude. Les deux autres cas, $s = 2$ et $s = 3$, ne sont pas stabilisés et continuent de décroître. Cependant, le nombre de Froude semble tendre vers des valeurs différentes en fonction de la pente s. Cela confirme en partie le résultat précédent sur la figure 4.1(b).

Finalement, le paramètre Λ est présenté à la figure 4.2(c). Il débute à $\Lambda = 1{,}87$, décroît légèrement jusqu'à $\Lambda = 1{,}6$ puis revient autour de $\Lambda = 1{,}8$ à $t^* = 2{,}5$. Les trois calculs convergent en même temps vers cette valeur. Il vient ensuite une décroissance jusqu'à $t^* = 5$ pour le cas $s = 2$ et $t^* = 6$ pour les cas $s = 3$ et $s = 4$. Les valeurs finales sont proches de celles trouvées à la figure 4.1(c). Le début de décroissance visible sur la courbe associée au cas $s = 4$ semble indiquer que le plateau n'est pas non plus atteint et qu'une valeur plus faible du paramètre Λ sera atteinte. On retrouve bien un comportement différent entre les trois cas et des valeurs distinctes aux temps longs sur ce rapport entre variance de flottaison et énergie cinétique.

Bilan Nous avons réussi à identifier différents régimes d'écoulement liés à la distribution initiale d'énergie cinétique aux grandes échelles. Les nombres sans dimension présentent un comportement asymptotique directement influencé par la pente du spectre infrarouge. Nous avons identifié la croissance exponentielle du nombre de Reynolds, la convergence vers une constante du nombre de Froude et une décroissance lente du paramètre Λ. Les deux approches, purement EDQNM d'une part et DNS-EDQNM d'autre part, nous ont permis d'obtenir ces résultats. Le modèle présente une convergence plus marquée du fait de l'absence d'effets de confinement.

4.3.1.2 Taux de croissance de l'énergie cinétique, de la variance de flottaison et du flux de flottaison

Étude EDQNM On s'intéresse maintenant à l'évolution des statistiques en un point que sont l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{K}^*$ (figure 4.3a), la variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle^*$ (figure 4.3b) et le flux de flottaison vertical $\langle u_3\vartheta \rangle^*$ (figure 4.3c). On rappelle que l'astérisque

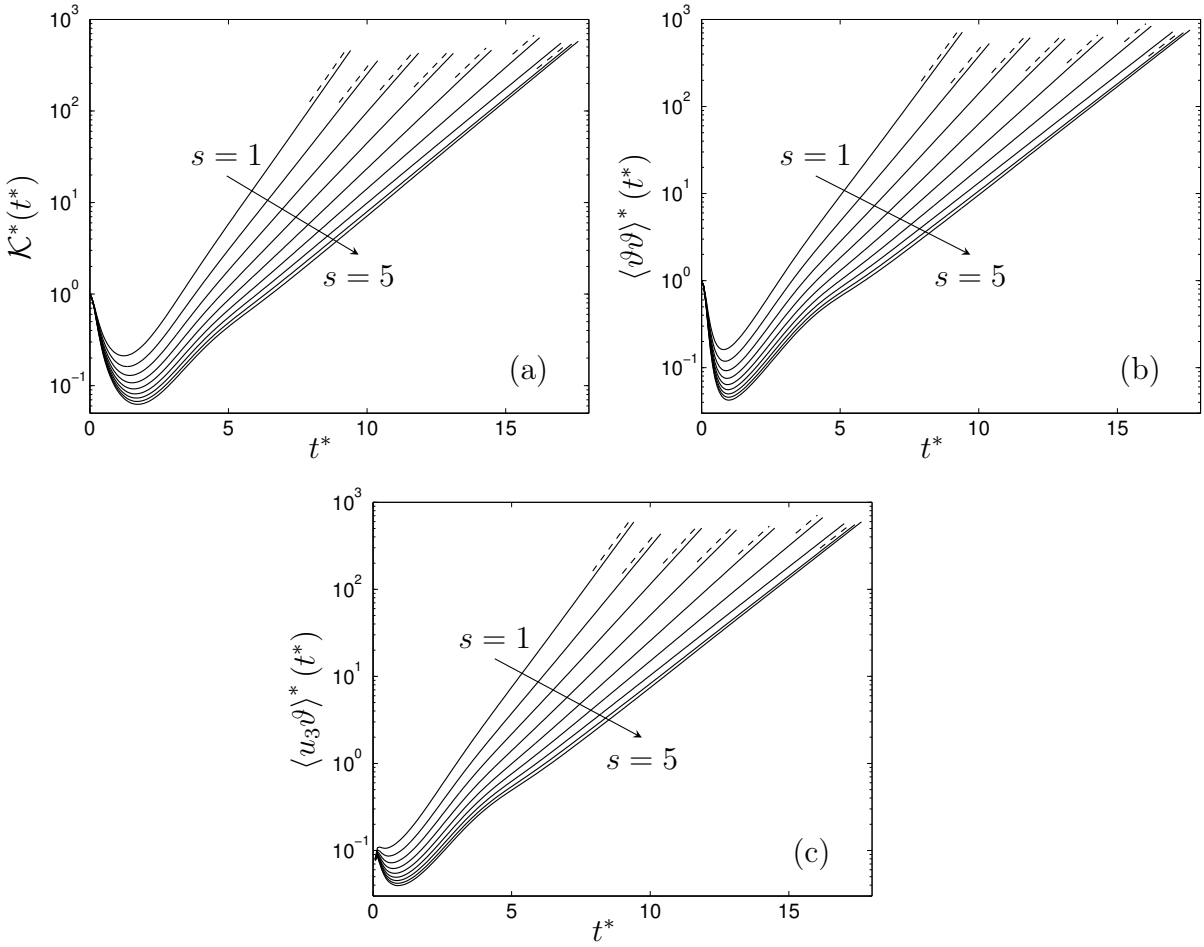


FIGURE 4.3 – Évolution temporelle des corrélations doubles en un point pour les calculs EDQNM : (a) énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t^*)$; (b) variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle^*(t^*)$; (c) flux de flottaison vertical $\langle u_3\vartheta \rangle^*(t^*)$.

en exposant signifie une renormalisation par la somme de l'énergie cinétique initiale et la variance de flottaison initiale. Les neuf cas sont présentés sur chaque figure ainsi que des courbes de tendances correspondant à la croissance exponentielle théorique finale (ce sont des droites du fait du tracé en lin-log).

On retrouve l'évolution observée au chapitre 3. Tout d'abord, l'énergie cinétique montre une décroissance forte jusqu'à des valeurs comprises entre $\mathcal{K}^* = 0{,}2$ à $t^* = 1{,}2$ pour $s = 1$ et $\mathcal{K}^* = 0{,}07$ à $t^* = 1{,}8$ pour $s = 5$. Cette décroissance explique la chute du nombre de Reynolds observée à la figure 4.1(a). On observe ensuite la croissance quasi-linéaire de l'énergie cinétique avant le changement de régime vers l'état autosemblable. Un schéma d'évolution identique est visible pour la variance de flottaison à la figure 4.3(b). On note toutefois que le minimum de $\langle \vartheta\vartheta \rangle^*$ est atteint à $t^* \simeq 0{,}85$, plus tôt que pour l'énergie cinétique. La variance de flottaison est dissipée plus rapidement au début ; cela explique la chute du paramètre Λ à la figure 4.3(b) juste après le début du calcul. Le flux de flottaison

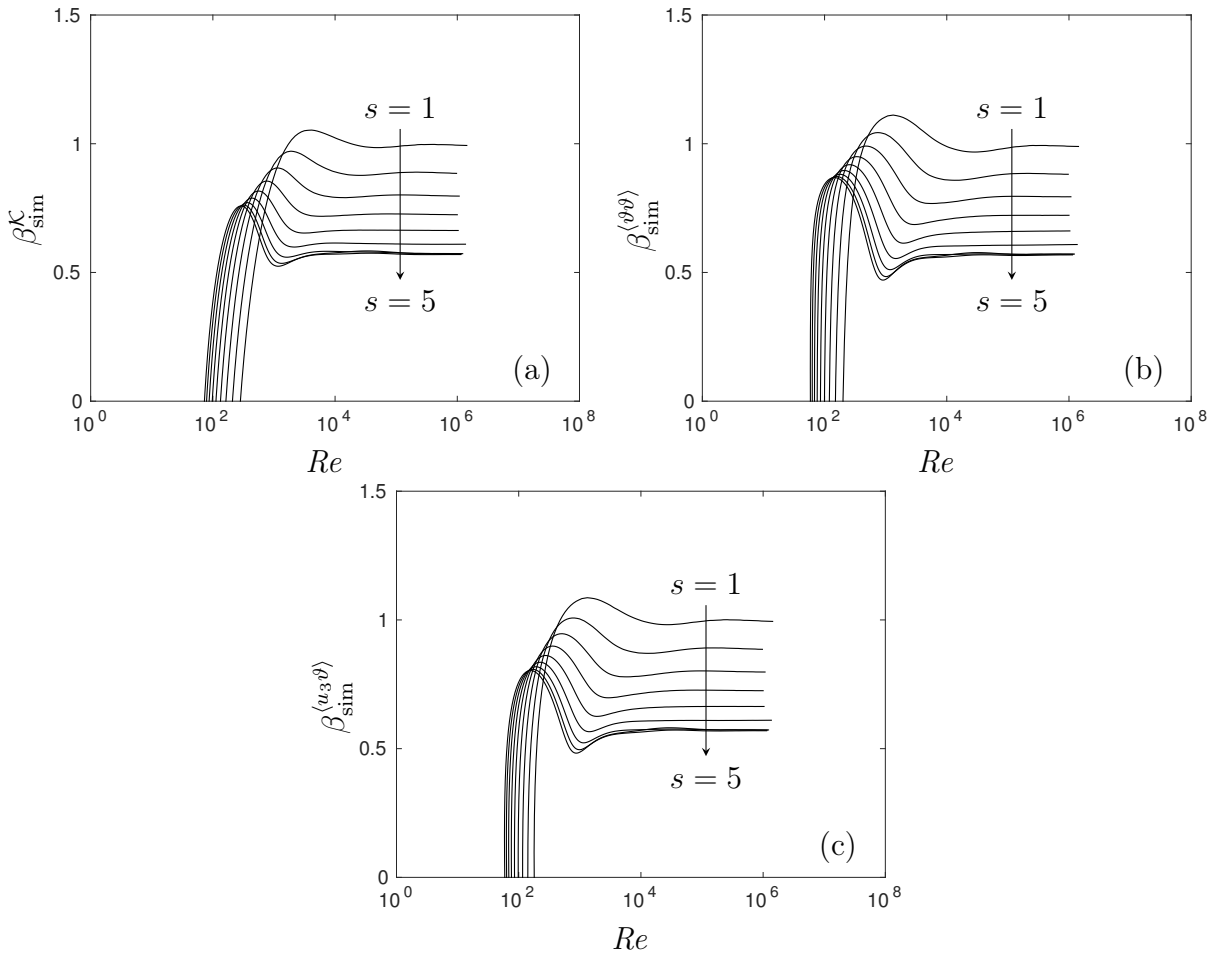


FIGURE 4.4 – Évolution des taux de croissance β de (a) l'énergie cinétique $\mathcal{K}$; (b) la variance de flottaison ; (c) le flux de flottaison vertical en fonction du nombre de Reynolds pour l'ensemble des neuf cas EDQNM. Les valeurs finales de chaque cas sont rapportées au tableau 4.3.

vertical renvoie également le même schéma d'évolution que les deux autres quantités. On observe que les cas $s = 4{,}5$ et $s = 5$ ont un taux de croissance identique à $s = 4$ pour les trois variables. Cela est dû au transfert d'énergie vers les grandes échelles appelé *backscatter* déjà évoqué et que l'on abordera plus en détails à la section 4.3.2.2.

La valeur théorique β_{th} du taux de croissance est identique pour $\mathcal{K}^*$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle^*$ et $\langle u_3\vartheta\rangle^*$. On rappelle son expression :

$$\beta_{\text{th}} = \frac{4}{3+s}. \tag{4.16}$$

Afin d'évaluer le taux de croissance propre à chaque cas et à chaque variable, on évalue β^X_{sim}, le taux de croissance de la simulation basé sur la quantité $\mathcal{K}$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ ou $\langle u_3\vartheta\rangle$ (noté indifféremment X). Ce taux de croissance de la simulation est calculé selon l'expression suivante :

$$\beta^X_{\text{sim}} = \frac{1}{X(t^*)}\frac{\mathrm{d}X(t^*)}{\mathrm{d}t^*}. \tag{4.17}$$

s	β_{th}	$\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}}$	$\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}}/\beta_{\text{th}}$ (%)	$\beta^{\langle\vartheta\vartheta\rangle}_{\text{sim}}$	$\beta^{\langle\vartheta\vartheta\rangle}_{\text{sim}}/\beta_{\text{th}}$ (%)	$\beta^{\langle u_3\vartheta\rangle}_{\text{sim}}$	$\beta^{\langle u_3\vartheta\rangle}_{\text{sim}}/\beta_{\text{th}}$ (%)
1	4/(1+3)	0.993	99.3	0.989	98.9	0.994	99.4
1.5	4/(1.5+3)	0.885	99.5	0.881	99.2	0.886	99.7
2	4/(2+3)	0.797	99.6	0.794	99.3	0.798	99.7
2.5	4/(2.5+3)	0.724	99.6	0.722	99.3	0.725	99.7
3	4/(3+3)	0.663	99.5	0.661	99.2	0.664	99.6
3.5	4/(3.5+3)	0.610	99.1	0.609	98.9	0.610	99.2
4	4/(4+3)	0.572	100.2	0.571	99.9	0.572	100.1
4.5	4/(4+3)	0.570	99.7	0.568	99.4	0.570	99.7
5	4/(4+3)	0.573	100.3	0.571	100.0	0.573	100.2

TABLE 4.3 – Valeurs théoriques et valeurs effectives du taux de croissance β à la fin de chaque simulation EDQNM pour l'énergie cinétique, la variance de flottaison et le flux de flottaison vertical. La valeur théorique β_{th} est donnée par l'équation (4.16) et la valeur de la simulation β^{X}_{sim} est donnée par l'expression (4.17).

Les taux de croissance sont tracés à la figure 4.4 et leur valeur finale sont rapportées au tableau 4.3. L'évolution de $\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}}$ pour l'énergie cinétique est présentée à la figure 4.4(a), $\beta^{\langle\vartheta\vartheta\rangle}_{\text{sim}}$ pour la variance de flottaison à la figure 4.4(b) et $\beta^{\langle u_3\vartheta\rangle}_{\text{sim}}$ pour le flux de flottaison à la figure 4.4(c). On observe que l'on retrouve de manière assez précise la valeur théorique prédite pour l'ensemble des cas. On note que les cas $s = 4{,}5$ et $s = 5$ sont bien ramenés à une pente $s = 4$ car le coefficient de croissance finale est bien celui obtenu pour une pente infrarouge $s = 4$. On observe qu'il est nécessaire d'atteindre un nombre de Reynolds suffisamment élevé pour pouvoir atteindre le taux de croissance théorique.

Un agrandissement autour de la valeur finale montre une légère oscillation du paramètre $\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}}$. Cette oscillation se fait autour de la valeur théorique prédite. Si l'on poursuit le calcul vers des nombres de Reynolds encore plus élevés, on s'attend à obtenir une convergence plus précise vers le β_{th}.

Étude DNS Les résultats des simulations directes présentés à la figure 4.5 viennent compléter ces évaluations de taux de croissance. L'énergie cinétique (figure 4.5a), la variance de flottaison (figure 4.5b) et le flux de flottaison vertical (figure 4.5c) sont tracés avec les pentes théoriques atteintes dans l'état autosemblable. On analyse les taux de croissance sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, les valeurs de β_{sim} étant quasiment identique pour $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ et $\langle u_3\vartheta\rangle$. Les valeurs finales du paramètre β des simulations directes sont $\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}} = 0{,}866$ pour $s = 2$, $\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}} = 0{,}759$ pour $s = 3$ et $\beta^{\mathcal{K}}_{\text{sim}} = 0{,}670$ pour $s = 4$. Ces valeurs de simulation sont de 8 à 17% plus élevées que les valeurs théoriques. Cet écart sur l'évaluation du taux de croissance est nettement visible à la figure 4.5 où les courbes de tendance ne sont pas parallèles aux corrélations.

Cette différence peut venir du fait que les spectres des tenseurs des corrélations doubles commencent à être confinés aux plus grandes échelles. On peut également envisager que

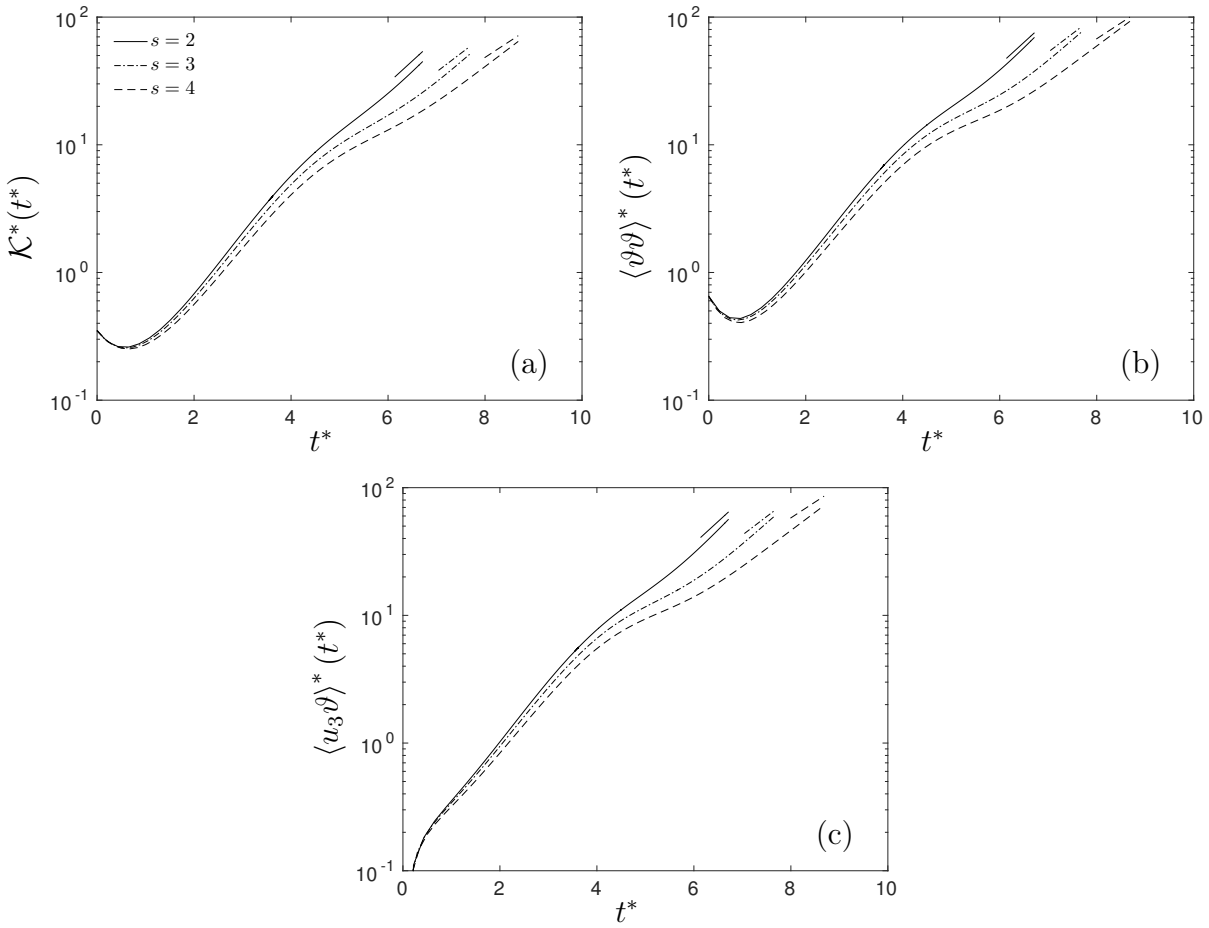


FIGURE 4.5 – Évolution temporelle des corrélations doubles en un point pour les simulations directes : (a) énergie cinétique $\mathcal{K}^*(t^*)$; (b) variance de flottaison $\langle \vartheta\vartheta \rangle^*(t^*)$; (c) flux de flottaison vertical $\langle u_3\vartheta \rangle^*(t^*)$. On ne présente pas les comparaisons avec les calculs EDQNM associés car elles sont déjà détaillées à la section 3.3.4.

les effets de *backscatter* qui perturbent les spectres soient plus importants en DNS. Cela induirait alors une évolution différente de la zone infrarouge qui ne serait plus définie par la pente k^s initiale. On confirmera cette hypothèse à la section 4.3.2.3 en examinant les spectres compensés aux grandes échelles.

Bilan Ces résultats sur les statistiques en un point nous ont montré que l'état autosemblable est effectivement atteint dans l'étude EDQNM, notamment en examinant précisément le taux de croissance propre à chaque quantité. Les simulations directes montrent un début d'état autosemblable mais les valeurs du taux de croissance β sont relativement éloignées du taux de croissance théorique, surtout pour le cas $s = 4$. On va tenter d'apporter une explication plus précise en étudiant les spectres des tenseurs de corrélation.

4.3.2 Spectres en évolution autosemblable

Dans cette section, on s'intéresse à la description échelle par échelle des corrélations doubles en deux points. On regarde tout d'abord les spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$, de variance de flottaison $B(k,t)$ et de flux vertical de flottaison $F(k,t)$ à la section 4.3.2.1. Ces spectres sont tracés pour les calculs EDQNM seulement, les spectres des DNS ayant déjà été décrits à la section 3.3.4.

Le spectre de transfert d'énergie cinétique est également tracé, à la figure 4.7 (section 4.3.2.2), afin d'apporter un complément d'information sur l'évolution des grandes échelles. Afin de renforcer les analyses, on ajoute ici les spectres des transferts pour les simulations directes.

On s'intéresse ensuite à l'évolution de la zone infrarouge des spectres $E(k,t)$, $B(k,t)$ et $F(k,t)$ à la section 4.3.2.3. Pour ce faire, on trace les spectres compensés aux petits nombres d'onde avec une formule adaptée au cas de la turbulence USH du fait de la croissance de l'énergie. On intègre également les résultats des simulations directes pour les trois pentes considérées, mais uniquement sur l'évolution du spectre d'énergie cinétique compensé.

Finalement, on présente à la section 4.3.2.4 les résultats de lois d'échelle pour la zone inertielle. Comme pour les spectres compensés, les simulations EDQNM et les DNS sont présentées.

4.3.2.1 Spectres des corrélations doubles

Les spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$, de variance de flottaison $B(k,t)$ et de flux vertical de flottaison $F(k,t)$ sont présentés à la figure 4.6. Pour chacun des neufs cas EDQNM, on a choisi de représenter les spectres associés à un nombre de Reynolds $Re = 10^6$.

On observe tout d'abord un comportement similaire entre le spectre d'énergie cinétique et le spectre de variance de flottaison. On voit en effet apparaître un spectre de type Kolmogorov-Obukhov avec une zone inertielle en $k^{-5/3}$. Le spectre de flux de flottaison semble s'approcher d'une zone inertielle proportionnelle à $k^{-7/3}$ mais moins nettement que les deux autres spectres (voir la section 4.3.2.4 pour une discussion complète). Comme attendu, la zone dissipative est très similaire entre les différents cas du fait de la viscosité identique utilisée. La principale différence se fait dans la zone infrarouge.

On observe que le nombre d'onde correspondant au maximum d'énergie du spectre s'est décalé de plus de deux décades vers les petits nombres d'onde. Il est maintenant à une valeur proche de $k \sim 0{,}1$. Il est nécessaire de considérer des échelles particulièrement grandes pour étudier la turbulence à un nombre de Reynolds élevé sans être confronté à des problèmes de confinement. L'échelle de Kolmogorov étant proche de $k_\eta = 10^3$, il est donc nécessaire de prendre en compte quatre décades dans la zone inertielle pour atteindre un nombre de Reynolds $Re = 10^6$. Cette séparation d'échelle est difficilement accessible en simulation directe.

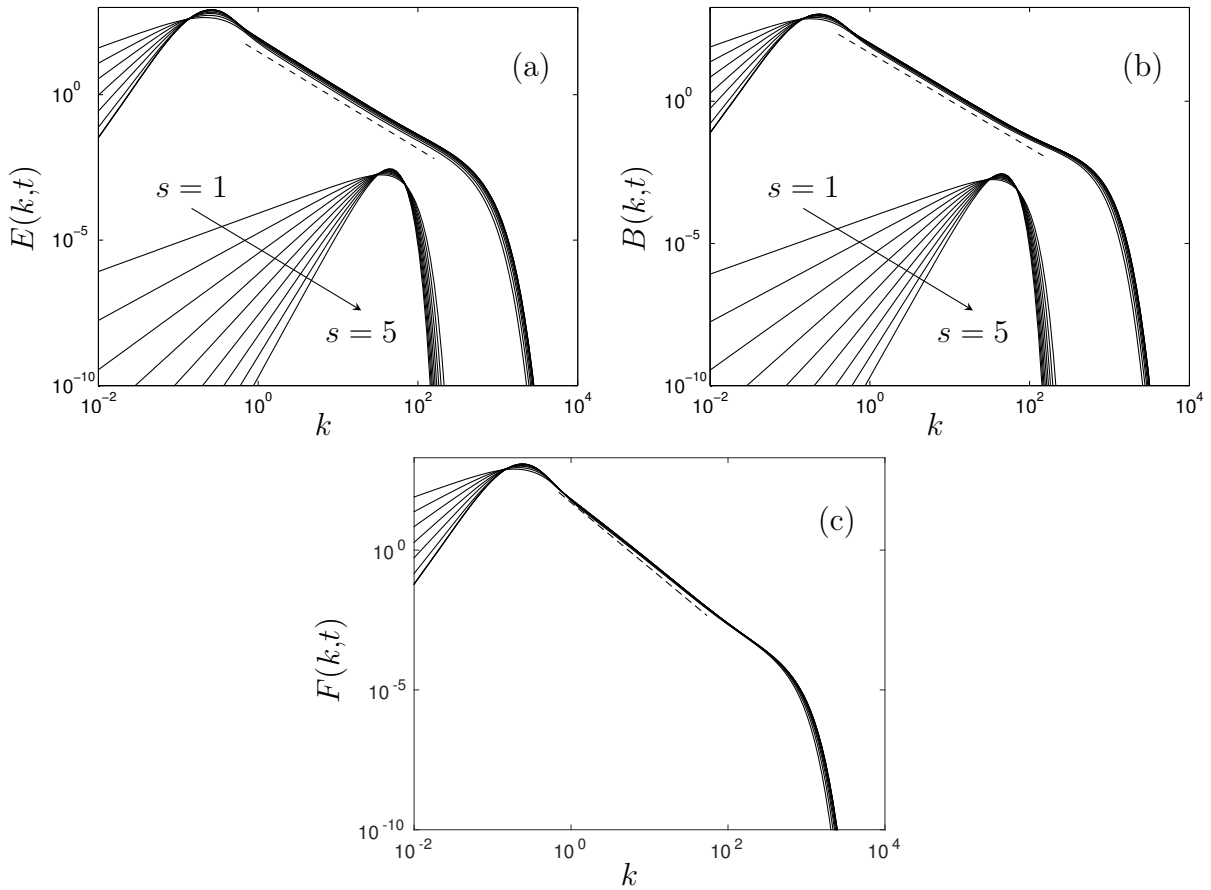


FIGURE 4.6 – Spectres des corrélations doubles des calculs EDQNM : (a) énergie cinétique $E(k,t)$; (b) variance de flottaison $B(k,t)$; (c) flux de flottaison $F(k,t)$. On a tracé la condition initiale pour l'énergie cinétique et la variance de flottaison uniquement (décalée d'une décade verticalement), le flux de flottaison étant nul initialement.

L'examen des pentes des spectres dans la zone infrarouge montre que seulement sept courbes distinctes sont visibles. En effet, comme attendu d'après les résultats existants en turbulence homogène isotrope [34, 74], on observe que les pentes initiales $s = 4{,}5$ et $s = 5$ sont ramenées à une pente $s = 4$. Cela explique le changement de taux de croissance observé à la section 4.3.1.2 sur les évolutions temporelles de $\mathcal{K}$, $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ et $\langle u_3\vartheta\rangle$. C'est l'effet appelé *backscatter*, déjà mentionné plusieurs fois dans ce manuscrit, qui est responsable du changement de pente en quelques temps de retournement des grands tourbillons. On regarde ce phénomène de plus près en étudiant directement les transferts d'énergie.

4.3.2.2 Transferts d'énergie cinétique et de variance de flottaison

Étude EDQNM On présente, à la figure 4.7, les spectres des transferts d'énergie cinétique (figure 4.7a) et de variance de flottaison (figure 4.7b) associés aux spectres présentés à la figure 4.6. Ce sont les spectres intégrés selon l'ensemble des contributions angulaires,

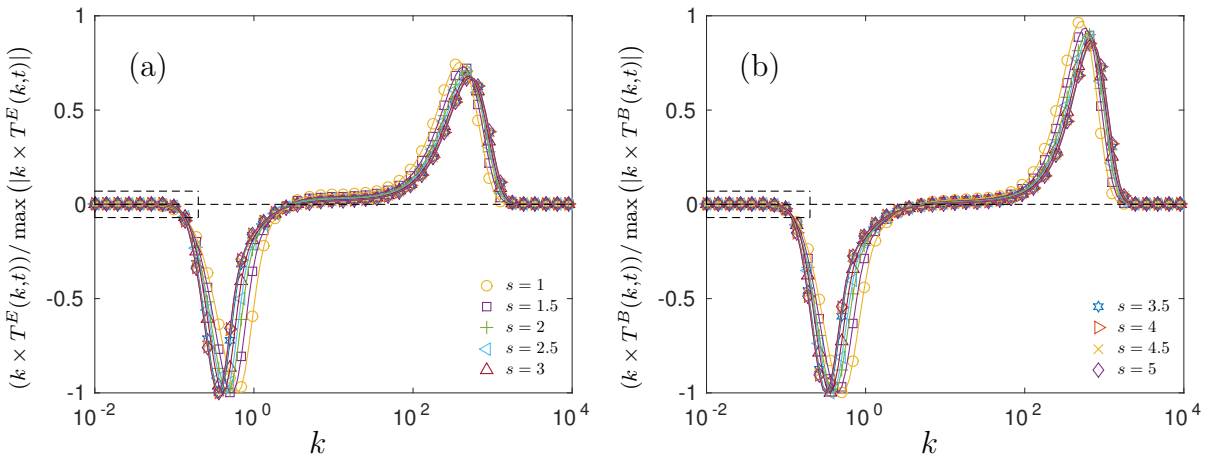


FIGURE 4.7 – Spectres de transfert, (a) d'énergie cinétique et (b) de variance de flottaison, pondéré par le nombre d'onde k et renormalisés par le maximum de la valeur absolue du transfert : $(k \times T(k,t))/\max(|k \times T(k,t)|)$. Les neuf cas sont représentés sur les deux figures. (On a séparé la légende entre les deux figures.) L'encadré en trait tireté sur la figure (a), respectivement (b), correspond à la figure 4.8(a), respectivement (b).

extraits des calculs EDQNM. Les niveaux d'énergie n'étant pas tout à fait les mêmes, les spectres de transfert n'ont pas les mêmes extremums. On a donc divisé ce spectre par le maximum de la valeur absolue. Cela permet de placer l'ensemble des spectres sur un même graphe avec des bornes identiques entre -1 et 1.

On observe tout d'abord que ces spectres de transfert ont une forme classique proche des cas de turbulence stratifié stable [36] ou de turbulence en rotation [16]. On a en effet un transfert négatif dans les grandes échelles avec un extremum près de l'échelle intégrale et un transfert positif dans les petites échelles. Le caractère fortement anisotrope de l'écoulement n'altère pas la forme de ce transfert d'énergie par rapport au transfert observé en turbulence isotrope. On note également la présence d'une séparation d'échelle bien marquée du fait du nombre de Reynolds élevé. Cette zone inertielle entre les deux extremums est caractérisée par un flux d'énergie quasiment constant. Le même comportement est identifiable entre les spectres de transfert d'énergie et de transfert de variance de flottaison.

Afin d'éclairer le comportement aux grandes échelles, on présente à la figure 4.8 un zoom sur les spectres aux petites nombres d'onde correspondant aux encadrés tiretés à la figure 4.7. La figure 4.8(a) correspond au zoom sur le transfert d'énergie cinétique et la figure 4.8(b) sur la variance de flottaison. On voit nettement le transfert positif pour les cas $s \geq 2{,}5$. Les cas $s \geq 4$ sont les plus fortement touchés par ce transfert « inverse » vers les grandes échelles. C'est ce phénomène que l'on appelle *backscatter*. On peut montrer pour la turbulence homogène isotrope [72, p. 271] que le transfert se décompose en une contribution liée aux interactions locales et une contribution liée aux interactions non locales. Ces dernières sont représentées par les triades de vecteurs tels que $k \ll p \sim q$.

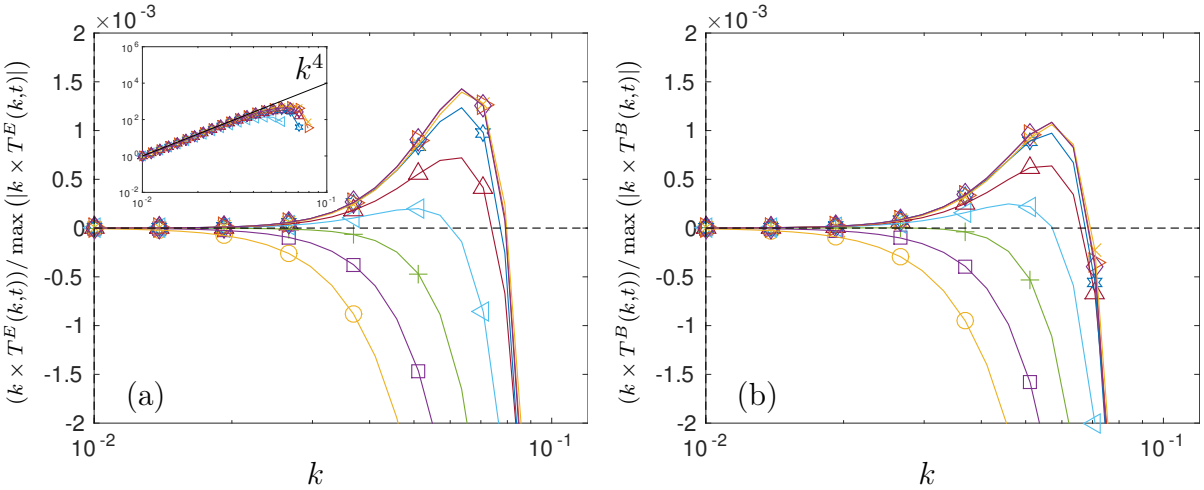


FIGURE 4.8 – Zoom aux grandes échelles du transfert renormalisé et pondéré, (a) d'énergie cinétique et (b) de variance de flottaison. Les courbes des calculs pour $s \simeq 2{,}5$ montrent un transfert positif aux grandes échelles. L'insert montre le transfert non pondéré par k proportionnel à $\sim k^4$.

Dans les grandes échelles, c'est-à-dire pour $k \to 0$, ce sont les termes non locaux qui dominent. En effet, la contribution principale du transfert aux grandes échelles vient des échelles énergétiques proches de l'échelle intégrale, $k_\ell \gg k$. Ces termes non locaux peuvent également être décomposés en deux termes, un terme d'*eddy viscosity* de la forme $-2\nu_t k^2 E(k)$ [68] et un terme proportionnel à k^4. C'est ce second terme qui est responsable du transfert d'énergie vers les grandes échelles. On vérifie, en traçant le transfert $T(k,t)$ sans la multiplication par le nombre d'onde (insert dans la figure 4.8a), que les spectres de transfert positifs pour $s \geq 2{,}5$ ont bien une forme en k^4. On observe que tous ces spectres de transfert sont bien dominés par les termes en k^4 dans les grandes échelles. Ces résultats sont en accord avec l'étude DNS de SOULARD et al. [112].

Étude DNS On confirme ces résultats en traçant les spectres des transferts d'énergie issus des simulations directes à haute résolution. La figure 4.9 présente un zoom sur les grandes échelles pour les cas $s = 2$ et $s = 4$ des simulations numériques. On trace également les calculs EDQNM associés. Comme à la figure 4.8, les spectres sont pondérés par le nombre d'onde k du fait de la représentation en semilog. Les spectres représentés correspondent à un nombre de Reynolds $Re \simeq 4000$ à $t^* \simeq 8$ pour le cas $s = 2$ et $Re \simeq 3400$ à $t^* \simeq 6$ pour le cas $s = 2$.

On observe très nettement le transfert positif du cas $s = 4$ en DNS. Le calcul EDQNM équivalent affiche également un transfert positif mais dans une moindre mesure. À nombre de Reynolds identique, le modèle EDQNM semble effectivement sous-estimer le transfert positif aux grandes échelles causé par le *backscatter*. On a sélectionné ce temps pour la représentation mais on observe cette différence tout au long du calcul. On reste prudent

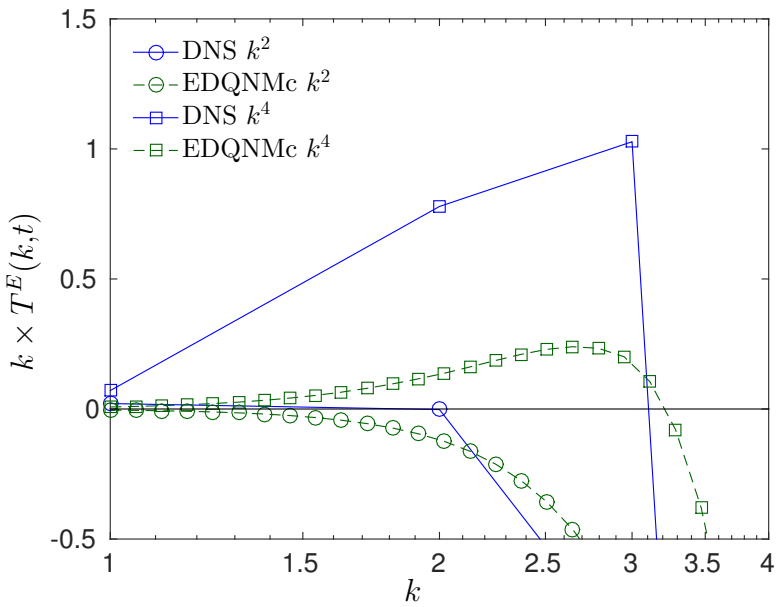


FIGURE 4.9 – Transferts d'énergie cinétique pour la DNS (trait plein) et le modèle EDQNM corrigé (trait tireté) extraits des simulations 2048^3. Les deux cas $s = 2$ et $s = 4$ sont représentés, respectivement par un symbole $\circ$ et un symbole $\square$. Les spectres représentés correspondent à un nombre de Reynolds $Re \simeq 4000$ à $t^* \simeq 8$ pour le cas $s = 2$ et $Re \simeq 3400$ à $t^* \simeq 6$ pour le cas $s = 2$.

sur la conclusion car nous n'avons qu'une seule simulation DNS. Mais d'après les résultats précédents (section 3.2.3.1), il est peu probable qu'une autre réalisation donne un transfert radicalement différent.

Les cas $s = 2$ et $s = 4$ affichent tous deux un faible transfert positif pour le nombre d'onde $k = 1$. Le calcul EDQNM du cas $s = 4$ est également légèrement positif tandis que le calcul EDQNM du cas $s = 2$ est strictement négatif. Une explication possible est l'effet du confinement qui tendrait à faire croître ce nombre d'onde minimum, censé être très peu affecté par la dynamique de l'écoulement. Cependant, le confinement est identique entre DNS et modèle EDQNM dans le cas présent car on utilise la même discrétisation. Il est donc probable que cet effet soit lié à la sous-estimation des effets de *backscatter* par le modèle EDQNM.

Bilan On observe des phénomènes de transfert inverse vers les grandes échelles en turbulence homogène stratifiée instable. Ils limitent la pente du spectre infrarouge à une valeur maximale $s = 4$. L'ensemble des cas $s \geq 2{,}5$ subissent l'effet de ce transfert positif, le *backscatter*, qui tend à perturber la forme du spectre aux grandes échelles. On voit ainsi que les grandes échelles sont perturbées pour les cas $s \geq 2{,}5$: la pente de la zone infrarouge est donc vraisemblablement altérée pour ces différents cas.

La section suivante est consacrée à l'étude de ces spectres aux grandes échelles et va

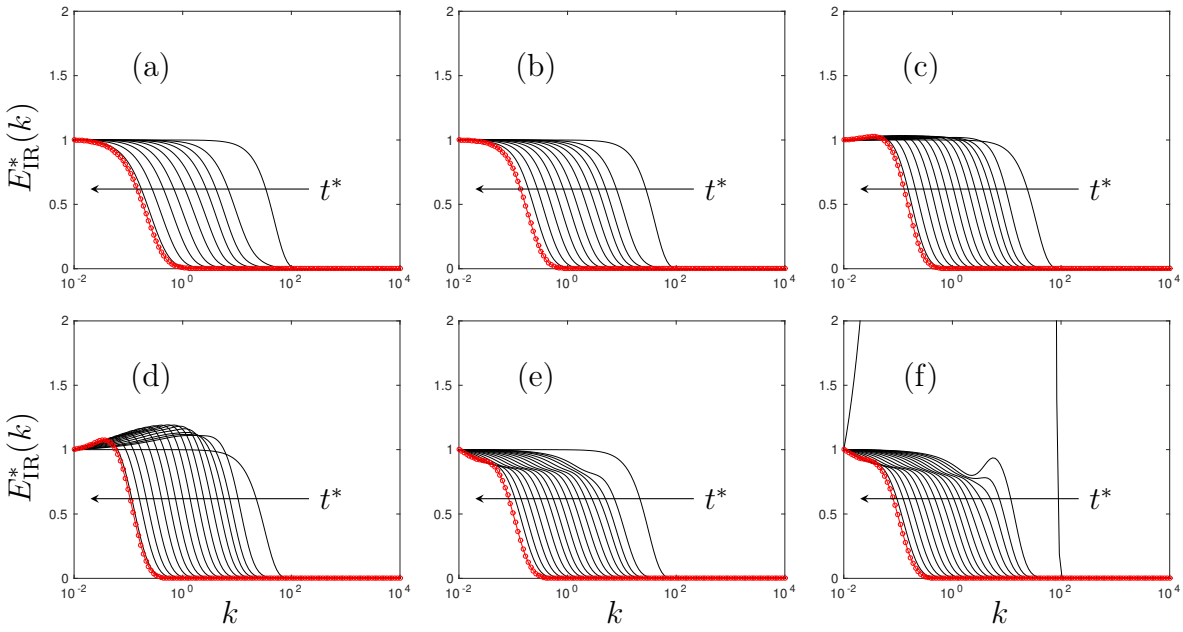


FIGURE 4.10 – Spectres d'énergie cinétique compensés aux grandes échelles. Les spectres sont donnés à des temps entiers $t^* = 0, 1 \cdots$ ainsi qu'au dernier temps disponible dans la simulation. Les cas présentés sont (a) $s = 1$ (temps final $t^* = 9{,}4$), (b) $s = 2$ ($t^* = 11{,}9$), (c) $s = 3$ ($t^* = 14{,}5$), (d) $s = 3{,}5$ ($t^* = 16{,}2$), (e) $s = 4$ ($t^* = 16{,}9$) et (f) $s = 5$ ($t^* = 17{,}6$). Ce dernier temps est symbolisé par des $\circ$ et un trait rouge.

nous permettre de visualiser l'influence du *backscatter* sur les grandes échelles.

4.3.2.3 Spectres compensés aux grandes échelles

On présente dans cette section des spectres compensés pour l'énergie cinétique turbulence $E(k,t)$ (figure 4.10), pour la variance de flottaison $B(k,t)$ (figure 4.11) et le flux de flottaison vertical $F(k,t)$ (figure 4.12). On ajoute également l'évolution du spectre compensé pour l'énergie cinétique dans les simulations numériques directes à la figure 4.13. On s'inspire ici de l'étude effectuée par LESIEUR et OSSIA [74] qui a montré l'altération du spectre infrarouge causée par le transfert inverse.

L'expression retenue pour le spectre compensé est

$$X^*_{\mathrm{IR}}(k,t) = \frac{X(k,t)}{X(k_m,t)} \times \left(\frac{k}{k_m}\right)^{-s} \tag{4.18}$$

où X prend successivement les valeurs $E(k,t)$, $B(k,t)$ et $F(k,t)$. Cette expression est différente de celle employée par LESIEUR et OSSIA [74] car, dans le cadre de la turbulence USH, l'énergie croît aux grandes échelles. Ainsi, on divise par $X(k_m,t)$ pour renormaliser tous les spectres, k_m étant le nombre d'onde minimum, c'est-à-dire l'échelle la plus grande prise en compte. On divise également par k_m^{-s} car k_m est différent de l'unité dans notre

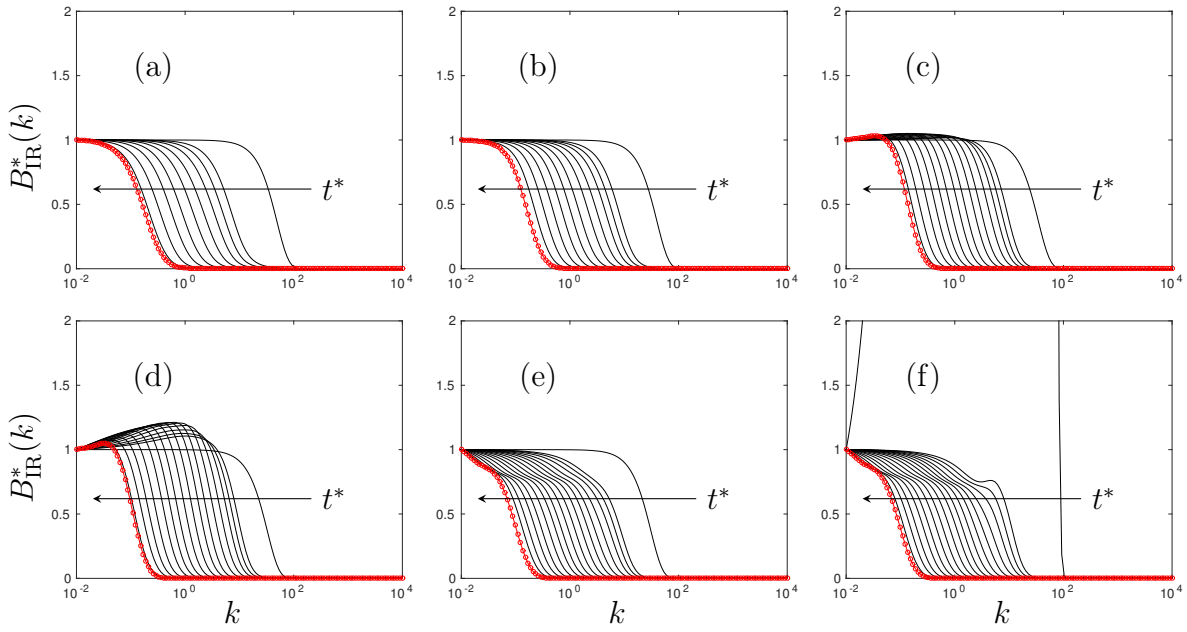


FIGURE 4.11 – Spectres de variance de flottaison compensés aux grandes échelles. Les cas présentés sont (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$, (d) $s = 3{,}5$, (e) $s = 4$ et (f) $s = 5$. Les temps sélectionnés sont identiques à ceux de la figure 4.10

cas. On s'attend ainsi à avoir un plateau aux grandes échelles à l'état initial positionné à $X^*_{\mathrm{IR}}(k,t = 0) = 1$. Si ce plateau disparaît, cela signifie que la distribution aux grandes échelles est altérée et n'est plus identique à la condition initiale.

Résultats EDQNM On a choisi de présenter aux figures 4.10, 4.11 et 4.12 les cas $s = 1$ (a), $s = 2$ (b), $s = 3$ (c), $s = 3{,}5$ (d), $s = 4$ (e) et $s = 5$ (f). Les deux premiers, $s = 1$ et $s = 2$, nous permettent de voir des spectres non perturbés aux grandes échelles par le *backscatter*. Les cas $s = 3$, $s = 3{,}5$ et $s = 4$ permettent de mettre en évidence la présence d'une pente « de transition ». Enfin le cas $s = 5$ montre le retour à une pente $s = 4$.

On voit de manière claire que les spectres pour les cas $s \geq 3$ sont altérés aux grandes échelles. C'est également le cas pour le cas $s = 2{,}5$ (non présenté ici). Pour $s = 3$ et $s = 3{,}5$, le transfert inverse tend à augmenter la pente du spectre dans la zone infrarouge. On l'observe particulièrement pour $s = 3{,}5$. La figure 4.10(e) pour le cas $s = 4$ montre par contre que les effets de *backscatter* diminuent la pente du spectre aux grandes échelles. On trouve empiriquement que le cas $s = 3{,}5$ tend vers une pente $s = 3{,}55$ tandis que le cas $s = 4$ tend vers une pente $s = 3{,}9$. Enfin, la figure 4.10(f) montre que le cas $s = 5$ retrouve un comportement aux grandes échelles similaire à $s = 4$ en quelques périodes de stratification (on rappelle que $t^* = N \times t$). Dès $t^* = 1$, la pente du spectre aux petits nombres d'onde s'est stabilisée autour de k^4. On précise que la courbe qui sort du graphe correspond à l'état initial. Étant compensée par k^{-4}, cette condition initiale en k^5 donne

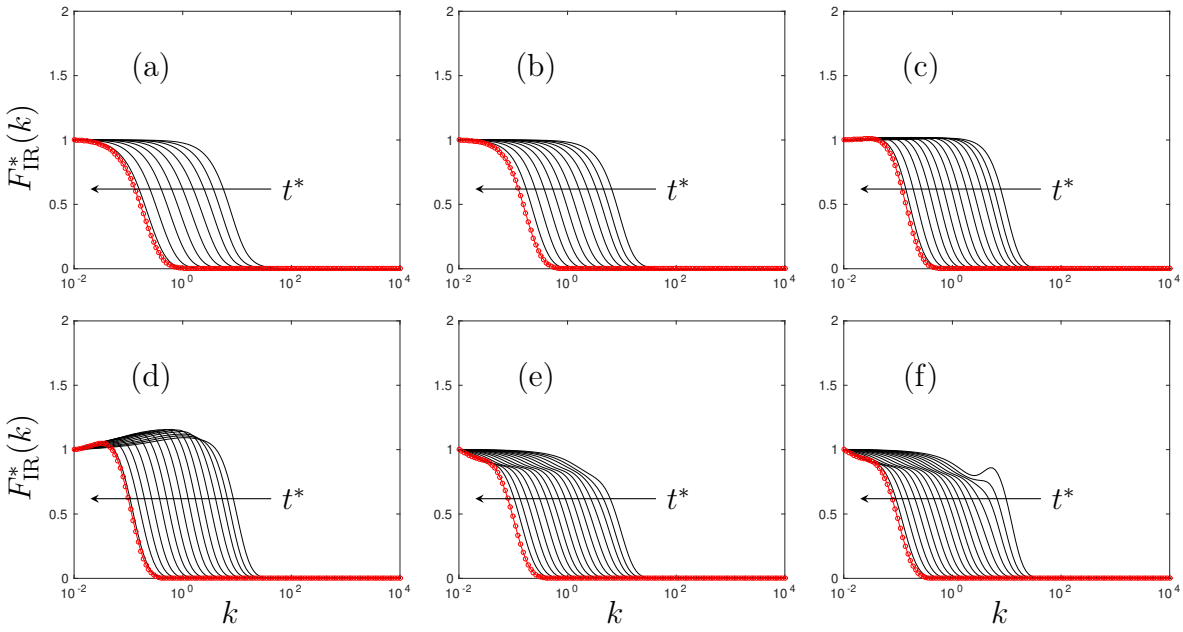


FIGURE 4.12 – Spectres de flux de flottaison compensés aux grandes échelles. Les cas présentés sont (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$, (d) $s = 3{,}5$, (e) $s = 4$ et (f) $s = 5$. Les temps sélectionnés sont identiques à ceux de la figure 4.10.

un spectre compensé en k^1 et pas un plateau. Les mêmes conclusions peuvent être données pour les spectres de variance de flottaison $B(k,t)$ et de flux vertical de flottaison $F(k,t)$.

On a donc mis en évidence la modification de la pente initiale dans les cas $s \geq 2{,}5$. Il y a une rupture dans le comportement autosemblable des grandes échelles dont la pente caractéristique se différencie de l'état initial.

Résultats DNS On ajoute à ces résultats EDQNM les spectres compensés de l'énergie cinétique pour les simulations directes. Ils sont tracés à la figure 4.13 pour (a) le cas $s = 2$, (b) le cas $s = 3$ et (c) le cas $s = 4$. On ne présente que les spectres d'énergie cinétique, les spectres de variance de flottaison et de flux vertical de flottaison présentant les mêmes caractéristiques. En premier lieu, on observe que les spectres sont très bruités aux grandes échelles. On rappelle que les spectres initiaux sont issus d'une simulation DNS en THI ce qui explique les écarts aux grandes échelles.

Le cas $s = 2$ montre un plateau assez net à l'état initial, le cas $s = 4$ présente un écart assez marqué sur les trois premiers nombres d'onde mais reste proche d'un plateau jusqu'à $k \simeq 20$. L'évolution temporelle montre que le cas $s = 2$ se détache du plateau contrairement au résultat EDQNM. On peut supposer que cette différence vient du confinement lié à la troncature de la zone inertielle. Elle peut aussi être liée à la réalisation unique de la simulation directe qui donne un spectre bruité aux grandes échelles. Une dernière cause pourrait être le *backscatter* qui altère plus le spectre aux grandes échelles que dans le modèle

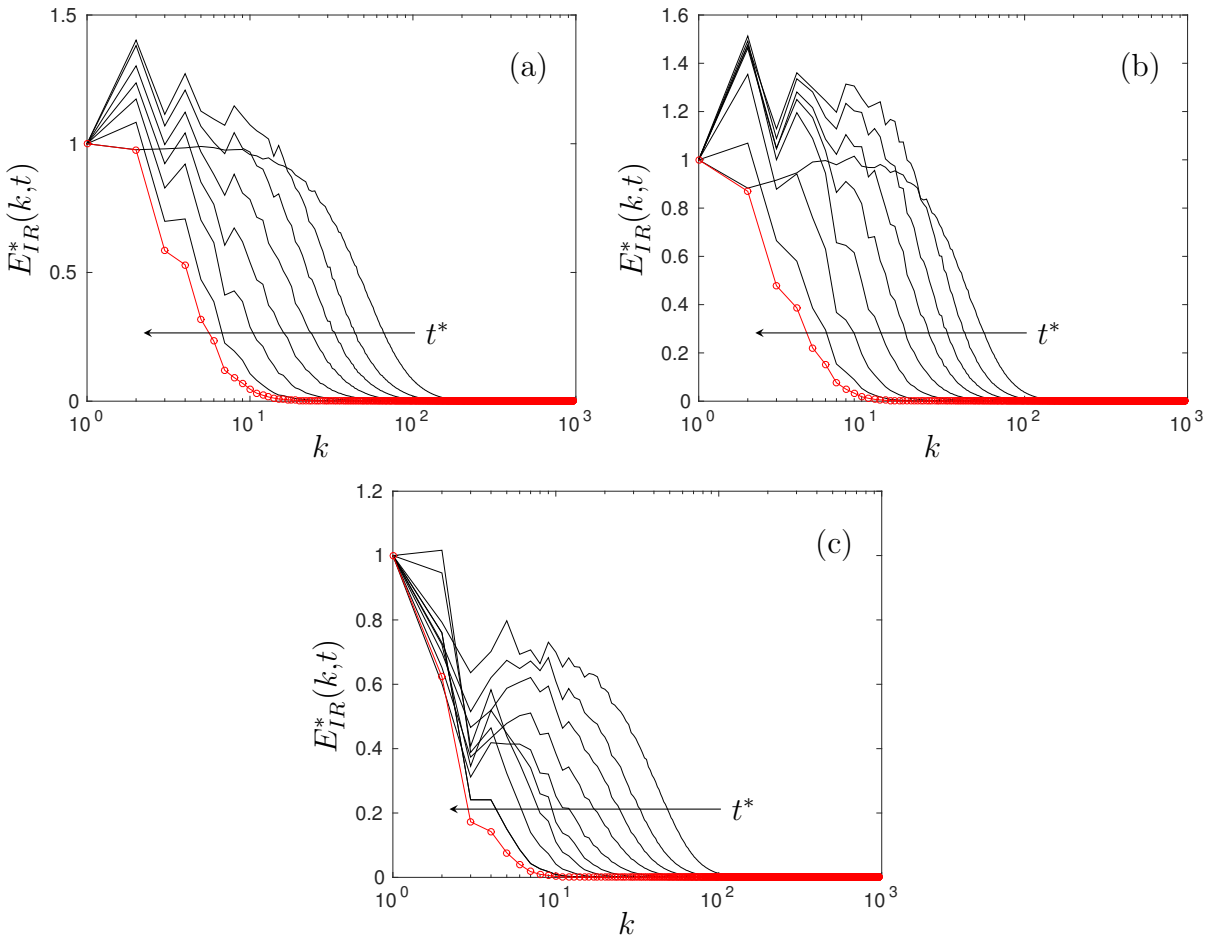


FIGURE 4.13 – Spectres d'énergie cinétique compensés aux grandes échelles des simulations numériques directes : (a) $s = 2$; (b) $s = 3$; (c) $s = 4$. Les temps représentés sont les temps entiers et le dernier pas de temps disponible, caractérisé pour des $\circ$ et un tracé de couleur rouge.

EDQNM. On observe également que le cas $s = 3$ a tendance à voir sa pente augmenter tandis que le cas $s = 4$ voit sa pente infrarouge diminuer. On note que l'on est très loin de conserver un spectre en k^4 pour ce dernier cas. L'écart avec le spectre théorique en k^4 est très marqué par rapport au résultat EDQNM. Ceci est dû au confinement, à l'écart observé à l'état initial ainsi qu'au fort *backscatter* mis en évidence sur les transferts.

Bilan Dans cette section, nous avons mis en évidence l'altération des grandes échelles des différents spectres par les effets de transfert inverse vers les grandes échelles, appelés *backscatter*. Les deux études, EDQNM et DNS, nous ont permis d'arriver à ces conclusions. En complément des résultats sur les transferts d'énergie, on observe bien que les spectres infrarouges pour les cas $s \geq 2{,}5$ sont modifiés et que la similitude aux grandes échelles n'est pas conservée. À première vue, ces résultats sont confirmés par les simulations numériques directes. Le faible échantillonnage aux petits nombres d'onde par rapport au modèle

EDQNM ne permet pas d'avoir une zone infrarouge aussi nette. La tendance semble tout de même identique.

On aurait également pu utiliser des simulations aux grandes échelles pour étudier la zone infrarouge [73]. SOULARD et al. [112] ont notamment employé ce type de simulations pour certaines propriétés des grandes échelles en turbulence USH.

4.3.2.4 Lois d'échelle dans la zone inertielle

On s'intéresse dans cette section aux lois d'échelle de la zone inertielle. À l'image des spectres compensés aux grandes échelles, on trace ici des spectres compensés pour cette zone inertielle, intermédiaire entre zone infrarouge et zone dissipative. Pour se faire, on utilise l'hypothèse d'invariance d'échelle de Kolmogorov-Obukhov mise en avant pour la THI [60, 59, 92]. Elle suppose que les spectres ne sont dépendants, dans la zone inertielle, que du nombre d'onde k et du taux de dissipation ε pour l'énergie cinétique et ε_B pour la variance de flottaison. Cette approche permet d'obtenir les lois d'échelle classiques de la turbulence, à savoir la pente en $k^{-5/3}$ pour les spectres d'énergie cinétique $E(k,t)$ et de variance de flottaison $B(k,t)$. D'après des prédictions théoriques [85] et des mesures expérimentales effectuées en turbulence de grille [90], une pente en $k^{-7/3}$ est attendu pour le spectre de flux de flottaison $F(k,t)$. Ces lois d'échelle sont théoriques, on cherche à savoir si on les retrouve pour la turbulence USH.

On trace donc les spectres compensés définis par les trois expressions suivantes :

$$E^*_{\mathrm{ZI}} = E(k,t) \times \varepsilon^{-2/3}(t) k^{5/3}, \tag{4.19}$$

$$B^*_{\mathrm{ZI}} = B(k,t) \times \varepsilon^{1/3}(t) \varepsilon_B^{-1}(t) k^{5/3}, \tag{4.20}$$

$$F^*_{\mathrm{ZI}} = F(k,t) \times N^{-1} \left(C_K \varepsilon^{1/3}(t) + C_O \varepsilon_B(t) \varepsilon^{-2/3}(t) \right)^{(-1)} k^{7/3}. \tag{4.21}$$

L'indice ZI signifie Zone Inertielle. Les deux premières équations correspondent aux spectres compensés classiques pour la turbulence homogène isotrope avec scalaire passif. On s'attend à observer un plateau pour la zone inertielle autour de la constante de Kolmogorov $C_K \simeq 1{,}4$ pour l'énergie cinétique E^*_{ZI} et autour de la constante d'Obukhov $C_O \simeq 0{,}7$ pour la variance de flottaison B^*_{ZI}. L'expression pour le spectre de flux vertical de flottaison F^*_{ZI} a été établie dans le cadre de l'étude de la zone inertielle en turbulence Rayleigh-Taylor par SOULARD et GRIFFOND [111].

Résultats EDQNM On présente le spectre d'énergie cinétique compensé dans la zone inertielle à la figure 4.14, le spectre de variance de flottaison compensé à la figure 4.15 et le spectre de variance de flottaison compensé à la figure 4.16. Les temps sélectionnés sont les mêmes que pour les spectres compensés dans la zone infrarouge à la section 4.3.2.3 et les cas présentés sont également identiques. On a ajouté différents nombres d'onde

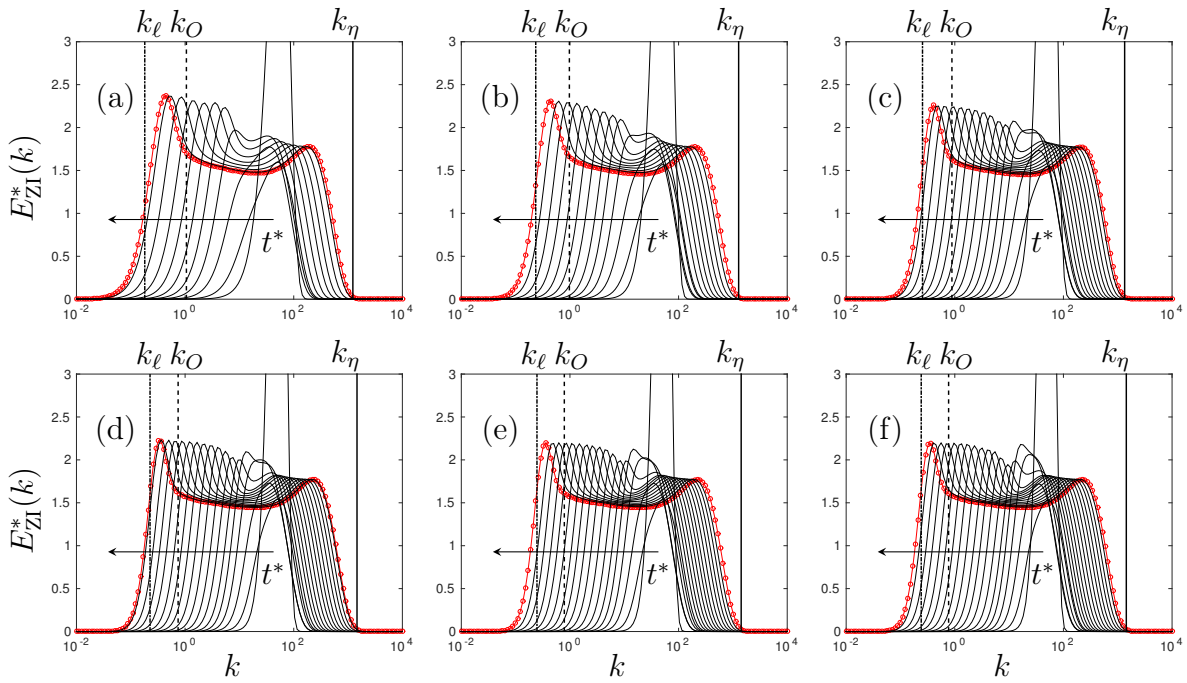


FIGURE 4.14 – Spectres d'énergie cinétique compensés dans la zone inertielle par l'équation (4.19). Les cas présentés sont (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$, (d) $s = 3{,}5$, (e) $s = 4$ et (f) $s = 5$. Les temps sélectionnés sont identiques à ceux de la figure 4.10. On a également inclus sur les figures les nombres d'onde k_ℓ, k_O et k_η associés respectivement à l'échelle intégrale, l'échelle d'Ozmidov et l'échelle de Kolmogorov.

caractéristiques à ces spectres compensés : le nombre d'onde associé à l'échelle intégrale k_ℓ, le nombre d'onde associé à l'échelle d'Ozmidov k_O et le nombre d'onde associé à l'échelle de Kolmogorov k_η.

À la figure 4.14, les spectres d'énergie cinétique compensés dans la zone inertielle présentent dans l'ensemble un comportement similaire au cours du temps, quelque soit la pente infrarouge du spectre initial considéré. Le spectre initial de chaque cas « sort » du graphe car la dissipation n'est pas encore pleinement développée à cet instant. On observe que les spectres compensés se structurent autour de trois zones caractéristiques.

On voit tout d'abord que la zone inertielle forme un plateau quasiment horizontal dans tous les cas. Ce plateau se positionne autour de $C_K \simeq 1{,}5$, légèrement supérieure à la constante de Kolmogorov communément considérée. La valeur de ce plateau est liée à la constante a_0 du modèle EDQNM et peut être altérée par la nouvelle constante a_1 issue de la correction apportée lors de la validation du modèle. L'évolution en temps montre bien la convergence vers cet état avec la séparation d'échelle qui s'établit. Ce résultat est visible sur tous les cas présentés.

On note ensuite, à l'image des spectres compensés en THI [74], la présence d'une remontée du spectre entre la borne inférieure de la zone inertielle (« à droite » de la zone inertielle) et le début de la zone dissipative symbolisé par l'échelle de Kolmogorov k_η.

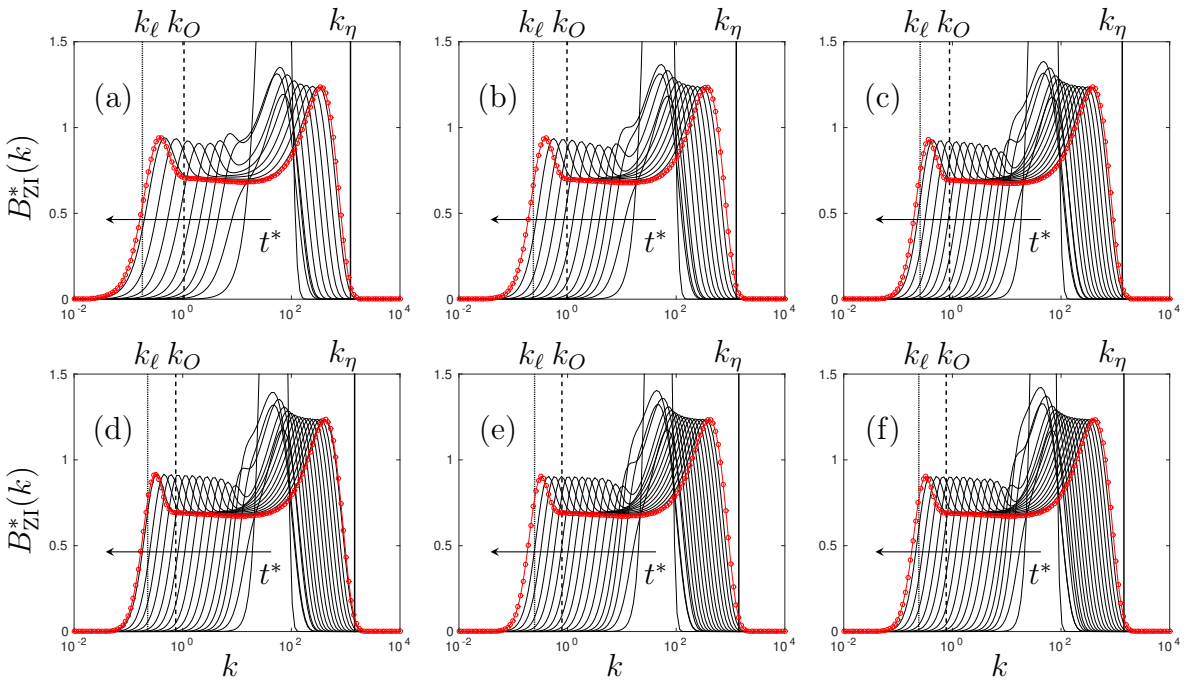


FIGURE 4.15 – Spectres de variance de flottaison compensés dans la zone inertielle par l'équation (4.20). Les cas présentés sont (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$, (d) $s = 3{,}5$, (e) $s = 4$ et (f) $s = 5$. Les temps sélectionnés sont identiques à ceux de la figure 4.10. On a également inclus sur les figures les nombres d'onde k_ℓ, k_O et k_η associés respectivement à l'échelle intégrale, l'échelle d'Ozmidov et l'échelle de Kolmogorov.

Cette zone appelée *bottleneck* est caractérisée par une accumulation d'énergie avant la zone dissipative.

Enfin, la troisième zone se situe autour de l'échelle intégrale k_ℓ. Elle est bornée à droite par l'échelle d'Ozmidov k_O. Cette partie du spectre diffère d'un spectre compensé classique de THI. Elle est caractérisée par une modification du spectre en k^{-3} liée à l'anisotropie de l'écoulement. Ce résultat a été mis en évidence pour la turbulence Rayleigh-Taylor par SOULARD [110]. Même si des différences majeures existent entre la turbulence Rayleigh-Taylor et la turbulence USH, comme l'inhomogénéité aux grandes échelles par exemple, on s'attend à trouver des similitudes dans les nombres d'onde proche de la borne supérieure de la zone inertielle, autour de l'échelle d'Ozmidov. On mettra en évidence l'influence de l'anisotropie pour ce spectre en k^{-3} à la section 4.3.3.3.

La figure 4.15 montre les spectres compensés pour la variance de flottaison. On note là aussi la présence de trois zones caractéristiques.

Tout d'abord, la zone inertielle forme un plateau plus marqué que pour le spectre compensé d'énergie cinétique. Ce plateau est bien situé autour de la constante d'Obukhov $C_O = 0{,}7$ comme attendu [51]. Ce résultat ne semble pas être altéré par la correction apportée au modèle. On observe également une nette séparation d'échelle et une convergence rapide vers ce plateau.

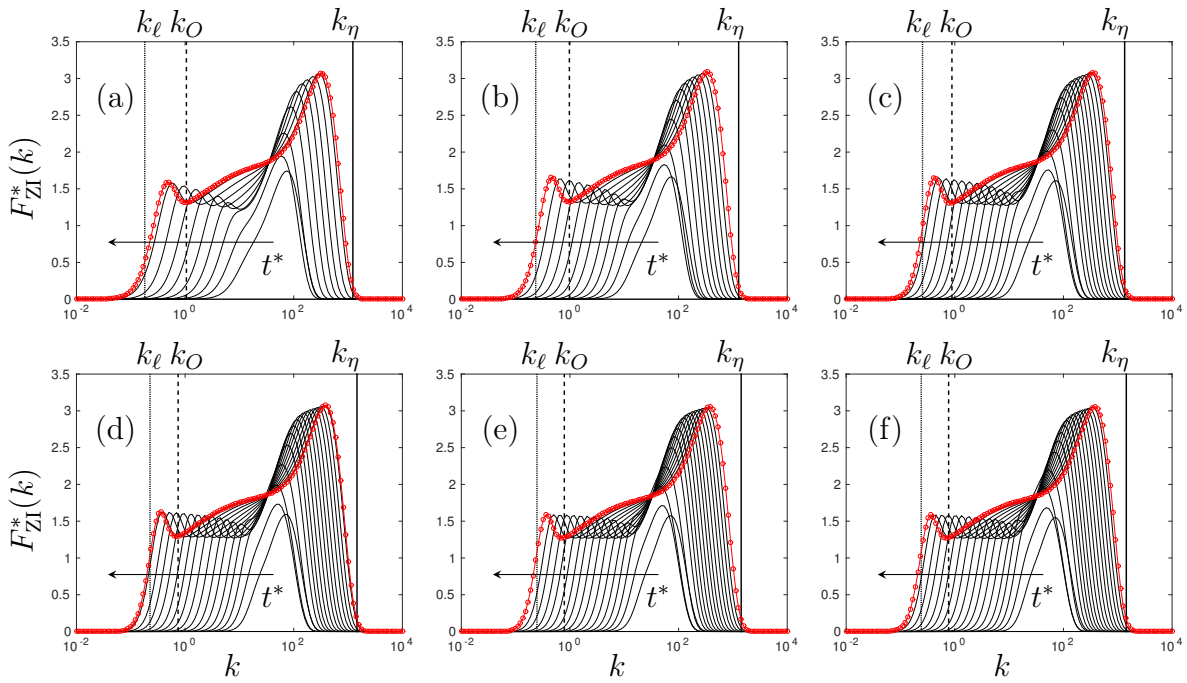


FIGURE 4.16 – Spectres de flux de flottaison compensés dans la zone inertielle par l'équation (4.21). Les cas présentés sont (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$, (d) $s = 3{,}5$, (e) $s = 4$ et (f) $s = 5$. Les temps sélectionnés sont identiques à ceux de la figure 4.10. On a également inclus sur les figures les nombres d'onde k_ℓ, k_O et k_η associés respectivement à l'échelle intégrale, l'échelle d'Ozmidov et l'échelle de Kolmogorov.

Ensuite, la partie inférieure de la zone inertielle présente également une accumulation d'énergie, le *bottleneck*. Ce dernier est plus prononcé que pour l'énergie cinétique. Ce résultat est cohérent avec les expériences de turbulence avec scalaire passif menées par MYDLARSKI et WARHAFT [89].

Enfin, on observe une modification du spectre sur la partie supérieure de la zone inertielle autour de l'échelle intégrale. Elle est du même ordre de grandeur que celle observée pour l'énergie cinétique.

On regarde finalement les spectres compensés pour le flux de flottaison vertical à la figure 4.16. On remarque immédiatement que la convergence n'est pas atteinte dans ce cas. En effet, le plateau attendu dans la zone inertielle n'est pas établi. L'historique des spectres montre une lente d'évolution vers une zone inertielle en $k^{-7/3}$. La zone inertielle est moins bien marquée que dans le cas des spectres compensés d'énergie cinétique et de variance de flottaison. Ce résultat est cohérent avec les études de turbulence avec scalaire passif de MYDLARSKI et WARHAFT [89] et BOS et al. [10]. Ces derniers ont montré que dans le cas de la turbulence homogène isotrope avec scalaire passif, il est nécessaire d'atteindre un nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor proche de $Re_\lambda = 10^7$ pour voir apparaître une zone inertielle en $k^{-7/3}$. Dans notre cas, on estime le nombre de Reynolds $Re_\lambda \simeq 10^3$ pour un nombre de Reynolds turbulent $Re = 10^6$. Une explication possible peut être que

le flux vertical, étant une corrélation croisée, converge plus lentement que les corrélations doubles. On peut également supposer que la zone inertielle n'est pas à l'équilibre car les effets de flottaison agissent à toutes les échelles. De plus, la forte anisotropie angulaire de l'écoulement déjà mise en évidence à la section 3.4.2.2 peut altérer la convergence du flux de flottaison vers une loi d'échelle en $k^{-7/3}$.

L'équation (4.21) fait également apparaître une constante autour de laquelle le plateau de la zone inertielle doit converger. Les résultats de Soulard et Griffond [111] en turbulence Rayleigh-Taylor montrent une convergence du flux vertical vers une constante égale à 1,23. Nos résultats EDQNM montrent une convergence vers une valeur supérieure, proche de 2. On peut expliquer cette différence par les constantes de Kolmogorov et d'Obukhov différentes employées. Soulard et Griffond [111] ont réévalué ces dernières et retenu $C_K = 1{,}9$ et $C_O = 1{,}7$ alors que nous avons conservé les valeurs classiques $C_K = 1{,}4$ et $C_O = 0{,}7$. Il est possible que les hypothèses de la turbulence USH limitent la comparaison avec la turbulence Rayleigh-Taylor pour le flux de flottaison. Mais il est plus vraisemblable que la différence soit imputable au nombre de Reynolds faible ($Re \sim 10^3$) de leur simulation directe.

Résultats DNS On conclut cette étude des spectres compensés dans la zone inertielle par des comparaisons entre les simulations numériques directes à haute résolution et les calculs EDQNM qui leur sont associés. On a choisi ici de présenter les résultats à un nombre de Reynolds fixe commun à tous les cas, $Re \simeq 6100$. On peut ainsi comparer qualitativement et quantitativement les lois d'échelle entre les DNS et le modèle EDQNM. On présente le spectre compensé de l'énergie cinétique $E^*_{ZI}(k,t)$ à la figure 4.17(a), le spectre compensé de variance de flottaison $B^*_{ZI}(k,t)$ à la figure 4.17(b) et le spectre compensé de flux de flottaison $F^*_{ZI}(k,t)$ à la figure 4.17(c).

La figure 4.17(a) montre que la zone inertielle ne forme pas un plateau, ni pour les DNS, ni pour les calculs EDQNM. Les simulations directes présentent malgré tout un minimum local dans la zone inertielle autour de $E^*_{ZI}(k,t) = 1{,}5$, valeur proche de la constante de Kolmogorov attendue. Les calculs EDQNM ont également un minimum local pour une valeur légèrement plus élevée, $E^*_{ZI}(k,t) = 1{,}6$. On remarque aussi que les trois simulations directes se superposent presque parfaitement entre les deux maximums du spectre compensé. La pente du spectre n'altère pas la zone inertielle. On confirme ici le résultat observé précédemment avec les calculs EDQNM. On note une différence entre simulation et modèle au niveau du *bottleneck*. Ce dernier est nettement plus marqué pour les DNS. On peut y voir la différence de traitement de la dissipation. La remontée du spectre autour de $k = 10$ est légèrement supérieure pour les calculs EDQNM mais reste proche du résultat de la DNS.

La figure 4.17(b) montre de résultats plus semblables pour le spectre compensé de la variance de flottaison $B^*_{ZI}(k,t)$. On ne retrouve pas non plus de plateau pour la zone inertielle mais les spectres des DNS et des calculs EDQNM montrent une très bonne

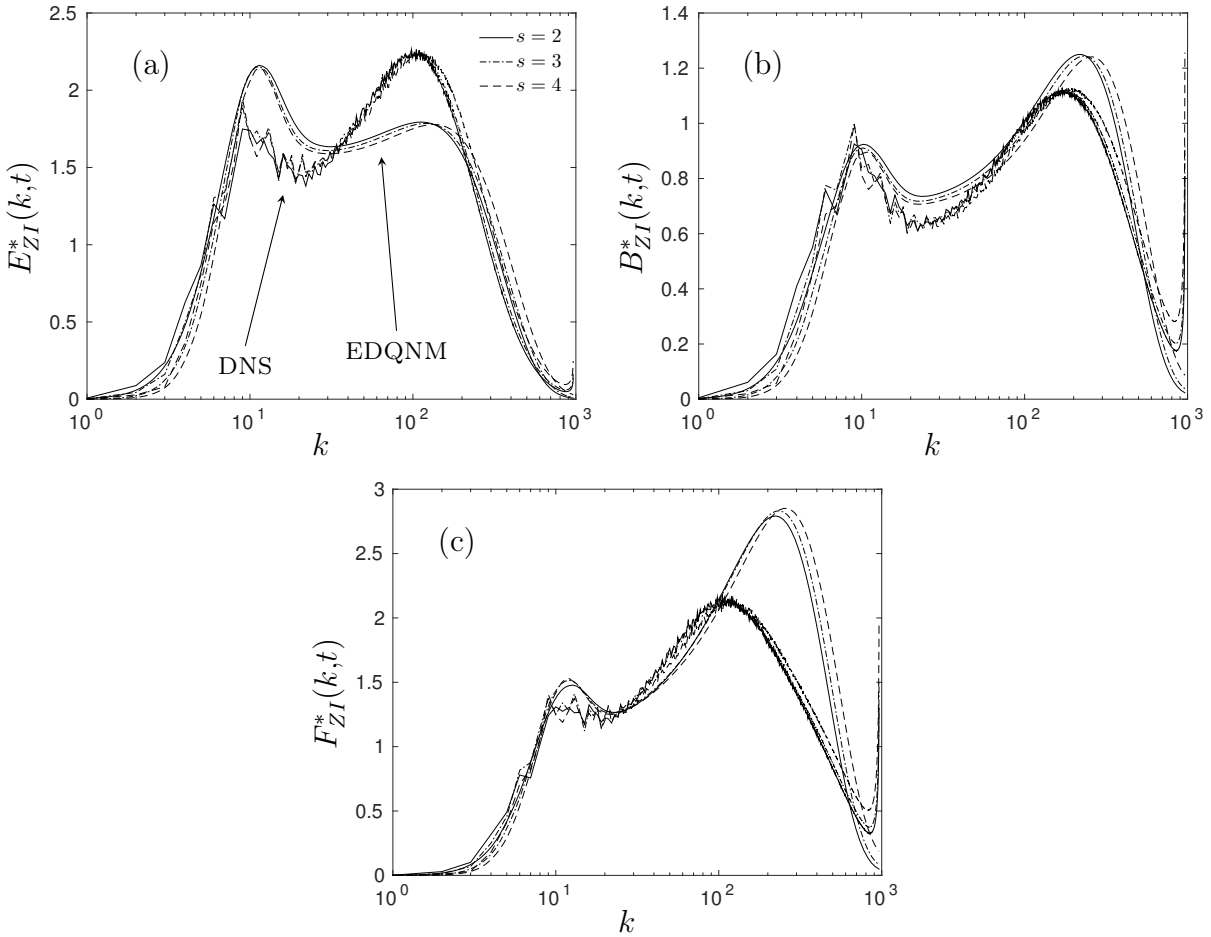


FIGURE 4.17 – Comparaison DNS-EDQNM de spectres compensés dans la zone inertielle pour les trois cas $s = 2, 3, 4$: (a) énergie cinétique $E^*_{ZI}(k,t)$; (b) variance de flottaison $B^*_{ZI}(k,t)$; (c) flux de flottaison $F^*_{ZI}(k,t)$. Les expressions des spectres compensés sont données par les équations (4.19)–(4.21). Les courbes bruitées correspondent aux simulations DNS et les courbes lisses au modèle EDQNM.

concordance. Le minimum local dans la zone inertielle est proche de $B^*_{ZI}(k,t) = 0{,}75$ pour les calculs EDQNM et proche de $B^*_{ZI}(k,t) = 0{,}65$ pour les DNS. On est très près de la constante d'Obukhov $C_O = 0{,}7$. On retrouve également en DNS les deux « bosses » qui jouxtent la zone inertielle. Le *bottleneck* est très similaire entre simulation directe et modèle EDQNM. Les courbes dans la zone autour de $k = 10$ se superposent presque parfaitement.

Finalement, on compare les spectres compensés de flux de flottaison $F^*_{ZI}(k,t)$ à la figure 4.17(c). On observe une nouvelle fois qu'aucun plateau n'est identifiable pour la zone inertielle, ni pour les calculs EDQNM, ni pour les DNS. D'après les résultats précédents sur les calculs EDQNM à haut Reynolds, on ne s'attendait pas à voir ce plateau pour la zone inertielle car le nombre de Reynolds $Re \simeq 6100$ est de trois ordres de grandeur inférieurs à celui de l'étude EDQNM.

Un résultat intéressant se situe au niveau du minimum local visible à $k \simeq 20$ pour les

calculs EDQNM. Ce minimum est visible pour les simulations directes également mais de façon moins marqué. Cet extremum local est proche de $F^*_{ZI}(k,t) \simeq 1{,}3$. Cette valeur fait écho à celle obtenue par SOULARD et GRIFFOND [111] dans l'étude de la zone inertielle en turbulence Rayleigh-Taylor. Ils obtiennent une valeur similaire, $F^*_{ZI}(k,t) = 1{,}23$, pour un nombre de Reynolds du même ordre de grandeur, $Re \sim 10^3$. Ce résultat va dans le sens des observations liées à la figure 4.16 : les effets bas Reynolds sont vraisemblablement à l'origine de la différence entre la constante $F^*_{ZI}(k,t) \simeq 2$ pour l'étude EDQNM et les résultats DNS de SOULARD et GRIFFOND [111]. On peut supposer que le niveau du spectre compensé en DNS va remonter pour s'établir autour de $F^*_{ZI}(k,t) \simeq 2$ à mesure que le nombre de Reynolds va croître. Finalement, on note une différence autour du *bottleneck* entre les DNS et les calculs EDQNM. Ces derniers surestiment de près de 50% l'accumulation aux petits nombres d'onde.

Bilan Cette section nous a permis de mettre en évidence les comportements asymptotiques dans la zone inertielle en turbulence homogène stratifiée instable. On a validé les lois d'échelle classique pour le spectre d'énergie cinétique et le spectre de variance de flottaison. Le spectre compensé du flux de flottaison ne présente pas le large plateau escompté malgré le nombre de Reynolds élevé des calculs EDQNM. Un début de stabilisation semble néanmoins apparaître autour d'une constante $F^*_{ZI}(k,t) \simeq 2$. Cette dernière est supérieure à celle obtenue par SOULARD et GRIFFOND [111] mais les résultats de la figure 4.17(c) nous permettent de conclure à des effets liés au nombre de Reynolds faible dans leur simulation. La variation de la pente infrarouge ne semble pas altérer le comportement de la zone inertielle.

4.3.3 Évolution de l'anisotropie de l'écoulement

Cette section se concentre autour de l'étude de l'influence de la condition initiale sur l'anisotropie de l'écoulement. On regarde dans un premier temps la structuration de l'écoulement au cours du temps à la section 4.3.3.1. On affine ensuite ces résultats à la section 4.3.3.2 en analysant la contribution de chaque nombre d'onde à l'anisotropie. On termine en regardant en détail à la section 4.3.3.3 les trois composantes du spectre de la composante verticale du tenseur de Reynolds afin d'étudier comment la stratification altère ce spectre.

4.3.3.1 Structuration de l'écoulement en régime autosemblable

On discute dans cette section de la structuration de l'écoulement autour de la mesure de l'anisotropie au cours du temps. Dans un premier temps, on présente les résultats généraux sur le terme b_{33}, d'abord pour l'étude EDQNM et ensuite pour les comparaisons DNS-EDQNM. Dans un second temps, on définit la structuration de l'écoulement au travers

de la décomposition de b_{33}. On termine enfin par l'évaluation, uniquement pour l'étude EDQNM, de l'anisotropie de directionnalité $\sin^2\gamma_E$ pour le champ de vitesse et $\sin^2\gamma$ pour le champ de flottaison. L'objectif est d'évaluer comment la pente du spectre modifie l'anisotropie de l'écoulement.

Résultats EDQNM : b_{33} total La figure 4.18(a) montre l'évolution en temps de la variable $b_{33}(t^*)$ pour les neuf calculs EDQNM de $s = 1$ à $s = 5$. Partant d'un état isotrope, $b_{33}(t^* = 0)$ est nul initialement. On note une croissance commune de l'ensemble des cas jusqu'à $t^* = 4$ pour une valeur comprise entre $b_{33}(t^*) = 0{,}36$ pour $s \geq 2{,}5$ et $b_{33}(t^*) = 0{,}4$ pour $s = 1$. Cette phase de croissance initiale coïncide avec la croissance linéaire identifiée sur l'énergie cinétique $\mathcal{K}^*$ à la section 4.3.1.2. Il est intéressant de remarquer que malgré la forte variation dans la croissance initiale de l'énergie cinétique, l'anisotropie reste peu altérée initialement par les différences de pentes infrarouges.

Différents comportements émergent ensuite. On observe que $b_{33}(t^*)$ croît de nouveau pour le cas $s = 1$ mais ne se stabilise pas autour d'une valeur précise. Il est proche de $b_{33}(t^*) = 0{,}42$ à l'issue du calcul. Les cas $s \geq 2$ et $s = 1{,}5$ dans une moindre mesure montrent une décroissance plus ou moins marquée de $b_{33}(t^*)$. Pour $s \geq 4$, on note que les trois cas suivent quasiment le même schéma d'évolution avec une décroissance de $b_{33}(t^*)$ jusqu'à $t^* = 6$ et $b_{33}(t^*) = 0{,}31$. Une fois cette valeur atteinte, un plateau apparaît pour les cas $s \geq 4$. Ces trois cas montrent une évolution identique du fait du retour rapide à une pente $s = 4$ des deux cas $s = 4{,}5$ et $s = 5$ identifiée à la section 4.3.2.3. Les cas intermédiaires ne s'établissent pas autour d'une valeur asymptotique. Ils continuent de croître légèrement mais avec des valeurs comprises entre $b_{33}(t^*) = 0{,}31$ et $b_{33}(t^*) = 0{,}42$. Les cas $s = 1$ et $s = 4$ marquent donc des bornes supérieure et inférieure pour cette mesure de l'anisotropie liée au champ de vitesse.

On a donc une dépendance claire à la distribution initiale aux grandes échelles. On rappelle que la variable $b_{33}(t^*)$ permet de mesurer un étirement des structures turbulentes dans l'axe vertical. Plus la pente infrarouge est faible, plus les structures semblent étirées. Une pente faible signifie plus d'énergie aux grandes échelles ; or ces dernières sont sujettes à l'action des termes de flottaison qui agissent principalement dans la direction verticale. GRÉA [38] a montré un résultat identique pour la turbulence Rayleigh-Taylor où l'anisotropie de l'écoulement est fonction du taux de croissance dans le régime autosemblable. Cette similitude entre les deux écoulements renforce l'intérêt de la turbulence USH comme complément à l'analyse de la turbulence Rayleigh-Taylor.

Résultats DNS : b_{33} total On trace, à la figure 4.18(b), le terme $b_{33}(t^*)$ pour les simulations numériques directes avec les calculs EDQNM associés pour les cas $s = 2$ et $s = 4$. On a placé les quatre courbes sur la même figure. L'évolution en temps est prise jusqu'au dernier instant des DNS malgré les effets de confinement notables. La valeur au

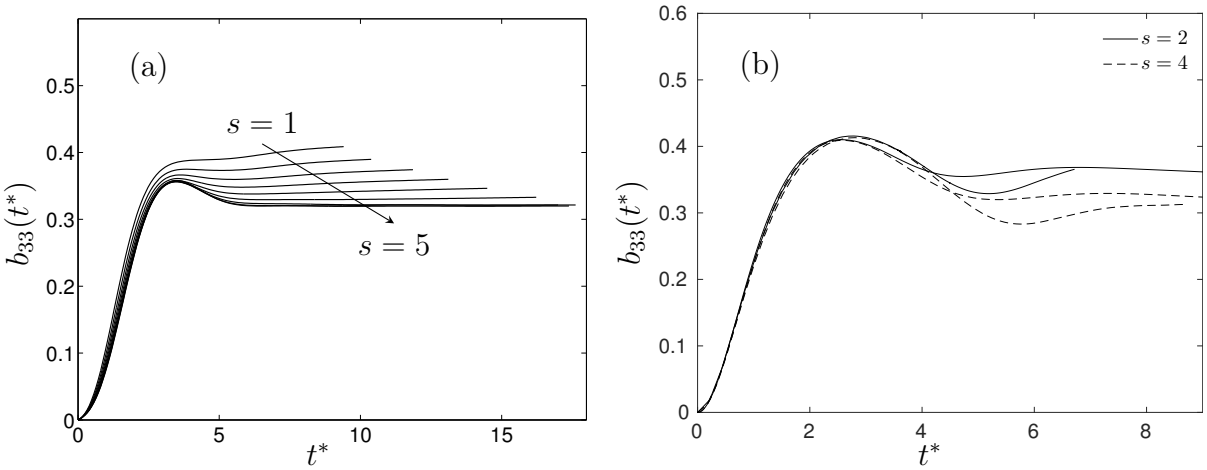


FIGURE 4.18 – Anisotropie du champ de vitesse mesurée par $b_{33}(t^*)$ pour : (a) les neuf cas EDQNM ; (b) la confrontation DNS-EDQNM pour les cas $s = 2$ (trait plein) et $s = 4$ (trait tireté). Les courbes atteignant la borne $t^* = 9$ correspondent aux simulations EDQNM.

dernier temps est donc vraisemblablement altérée par ce confinement mais donne malgré tout une idée de la tendance d'évolution de l'anisotropie dans la simulation.

Le cas $s = 2$ montre un accord relativement bon entre DNS et EDQNM jusqu'à $t^* \simeq 4{,}5$. Au delà, la simulation directe continue de décroître alors que le calcul EDQNM tend à remonter légèrement avant de se stabiliser autour de $b_{33}(t^*) = 0{,}36$. On voit cependant que le terme $b_{33}(t^*)$ de la DNS augmente de nouveau à partir de $t^* \simeq 5{,}5$ pour atteindre la valeur obtenue par le calcul EDQNM à l'issue de la simulation à $t^* \simeq 7$. C'est une information importante car le résultat obtenu à la section 3.3.3 sur la comparaison DNS-EDQNM à la figure 3.17(a) montrait une différence à l'issue du calcul. Ce nouveau résultat avec cette simulation directe à haute résolution permet de constater que les deux approches convergent vers une même valeur pour un nombre de Reynolds plus élevé.

On note également que cette valeur finale $b_{33}(t^*) = 0{,}36$ est identique à la valeur obtenue pour le cas $s = 2$ dans la comparaison des neuf calculs EDQNM et ce malgré la différence initiale de nombre de Reynolds et de paramètre Λ. On retrouve le même comportement pour le cas $s = 4$ avec un bon accord jusqu'à $t^* = 4{,}5$, la décroissance de $b_{33}(t^*)$ en DNS qui se poursuit, la stabilisation en EDQNM à $b_{33}(t^*) \simeq 0{,}31$ et la croissance en DNS à partir de $t^* = 6$. On voit là aussi que la simulation directe tend à se rapprocher du résultat EDQNM. Une nouvelle fois, la valeur finale atteinte par le cas $s = 4$ coïncide avec la valeur finale atteinte pour la même pente dans l'étude EDQNM précédente. Ces résultats de simulation directe confirment une nouvelle fois la justesse des conclusions de l'étude EDQNM.

Définition de la structuration Comme indiqué à l'annexe A, on peut décomposer le tenseur de Reynolds en trois composantes, une composante purement isotrope, une

composante tenant compte de l'anisotropie de polarisation et une composante tenant compte de l'anisotropie de directionnalité. De part la définition de b_{ij}, on peut identifier, pour b_{33} notamment, un terme de directionnalité b_{33}^{dir} et un terme de polarisation b_{33}^{pol}, la composante b_{33}^{iso} étant nulle par construction. Les termes b_{33}^{dir} et b_{33}^{pol} donnent chacun une information sur l'agencement global de l'écoulement, sur sa structuration interne. Ces deux propriétés de l'écoulement sont, respectivement, la dimensionnalité et la componentalité. On donne maintenant quelques précisions sur le sens et l'importance de cette décomposition anisotrope. Le lecteur peut se référer aux travaux de Cambon et Jacquin [14], Kassinos et Reynolds [58] et Sagaut et Cambon [106] pour les détails techniques complets.

Dans un premier temps, la dimensionnalité donne le nombre de dimensions dont dépendent les statistiques du champ de vitesse. Elle est au maximum égale à *3*. En prenant l'exemple sur le champ de vitesse $\mathbf{u}(x,y,z)$ dans le repère cartésien, la dimensionnalité renvoie à la dépendance du champ de vitesse $\mathbf{u}$ à (x,y,z). Si $\mathbf{u}(x,y,z) \simeq \mathbf{u}(y,z)$, l'écoulement est *2D* car le champ de vitesse ne dépend que des deux dimensions y et z. On parle également de directionnalité en référence à une éventuelle direction privilégiée d'accumulation dans l'espace spectral.

On décrit cette propriété autour de trois exemples :

- Dans le cadre de la turbulence homogène isotrope, aucune direction de l'espace n'est privilégiée : les variations des statistiques sont réparties dans les trois directions. L'écoulement est donc *3D* car il est nécessaire de tenir compte des trois dimensions pour décrire l'écoulement. Dans ce cas, étant isotrope, on $b_{33}^{\mathrm{dir}} = 0$;
- Dans le cas de la turbulence homogène stratifiée stable, les structures se développent selon des plans horizontaux superposées dans lesquels les propriétés de la turbulence varient peu. On parle alors de feuillets (ou *pancakes* [106, p. 41]). Seule une translation selon l'axe vertical, un « changement » de plan, entraîne une variation des statistiques turbulentes. L'écoulement est alors *1D* de part l'invariance par translation dans le plan horizontal. Dans ce cas, on a $b_{33}^{\mathrm{dir}} < 0$;
- Enfin, pour la turbulence homogène stratifiée instable, la direction verticale est privilégiée du fait de l'action de la force de flottaison. Cela tend à créer des structures semblables à des jets verticaux contigus. Les propriétés de la turbulence varient peu au sein d'une structure lors d'un déplacement selon l'axe vertical. Par contre, un déplacement dans le plan horizontal amène à « changer » de structure, vers un autre jet avec des statistiques différentes. Le plan horizontal est défini en deux dimensions ; la turbulence USH est donc *2D* de part l'invariance par translation selon l'axe vertical. Dans ce cas, on a $b_{33}^{\mathrm{dir}} > 0$.

Dans un second temps, la componentalité indique le nombre de composante du champ de vitesse nécessaire pour décrire le mouvement d'une structure turbulente. Elle est également au maximum égale à *3*. Pour reprendre l'exemple du champ de vitesse u_i, on considère cette fois les composantes $i \in 1, 2, 3$ dans le repère cartésien. Si la composante

u_1 n'intervient pas, la componentalité est alors *2C*.

La détermination de la componentalité est dépendante de la dimensionnalité. Une fois cette dernière établie, on peut chercher à déterminer si certaines composantes sont privilégiées dans l'écoulement. Un passage par l'espace spectral rend plus aisé la détermination de la componentalité. On a évoqué le lien entre dimensionnalité et une orientation dans l'espace spectral. On rappelle que l'hypothèse d'incompressibilité, donnant un champ de vitesse à divergence nulle, se traduit, dans l'espace spectral, par l'orthogonalité du champ de vitesse et du nombre d'onde. On reprend les exemples précédents pour caractériser la componentalité :

- Pour la turbulence homogène isotrope, la dimensionnalité est égale à *3*. Cela signifie qu'aucune direction de l'espace n'est privilégiée. Ainsi, toutes les composantes de la vitesse interviennent et doivent être prises en compte. L'écoulement est donc *3C*.
- Pour la turbulence homogène stratifiée stable, on a évoqué des structures en feuillet dans le plan horizontal dans l'espace physique, associé à dimensionnalité *1D*. Ces structures correspondent à un vecteur vitesse orienté préférentiellement selon l'axe vertical de l'espace spectral. D'après l'hypothèse d'incompressibilité, le champ de vitesse est ainsi défini dans le plan horizontal spectral, orthogonal au nombre d'onde vertical. Cette définition dans un plan induit la dépendance à deux composantes du champ de vitesse. La turbulence en stratification stable est donc *2C*. Le parallèle avec une valeur de polarisation est délicat car l'accumulation au pôle dans l'espace spectral tend à annuler la polarisation.
- Pour la turbulence homogène stratifiée instable, l'accumulation de l'énergie se fait autour d'un nombre d'onde compris dans le plan horizontal de l'espace spectral. Le champ de vitesse est donc défini dans un plan orthogonal, contenant l'axe vertical. On rappelle que le champ de vitesse se décompose selon un terme toroïdal et un terme poloïdal. Le premier étant compris dans le plan horizontal spectral, le second est alors colinéaire à l'axe vertical spectral. Ainsi, du fait de l'action des termes de flottaison, le terme poloïdal est prépondérant. Le champ de vitesse se réduit à une seule composante. L'écoulement est donc *1C*. La composante poloïdale étant favorisée, on s'attend à avoir $b_{33}^{\mathrm{pol}} > 0$.

On peut alors synthétiser la structuration des différents écoulements :

- Turbulence homogène isotrope : *3D-3C*
- Turbulence homogène stratifiée instable : *2D-1C*
- Turbulence homogène stratifiée stable : *1D-2C*

Afin de vérifier la structure de la turbulence USH, on trace, à la figure 4.19, $b_{33}(t^*)$ et ses deux composantes, pour les cas $s = 2$ et $s = 4$ issus de l'étude EDQNM. On observe tout d'abord que la majeure partie de l'anisotropie associée au champ de vitesse vient du terme de polarisation quelle que soit la pente du spectre (résultat non montré mais vérifié pour les cas différents de $s = 2$ et $s = 4$). La partie polarisation s'établit autour de $b_{33}^{\mathrm{pol}}(t^*) = 0{,}3$

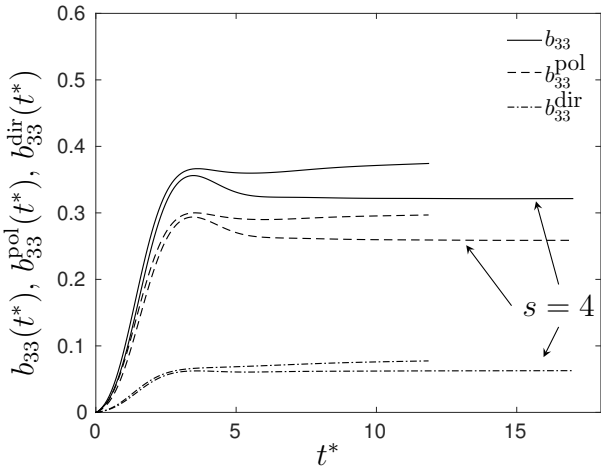


FIGURE 4.19 – Décomposition de l'anisotropie verticale du champ de vitesse en un terme de polarisation $b_{33}^{\rm pol}(t^*)$ et un terme de directionnalité $b_{33}^{\rm dir}(t^*)$. On trace cette décomposition pour les cas $s = 2$ et $s = 4$.

pour $s = 2$ et $b_{33}^{\rm pol}(t^*) = 0{,}26$ pour $s = 4$. La composante directionnelle converge vers $b_{33}^{\rm dir}(t^*) = 0{,}08$ pour $s = 2$ et $b_{33}^{\rm dir}(t^*) = 0{,}06$ pour $s = 4$. Ces deux valeurs positives confirment que la structure de l'écoulement est *2D-1C* comme détaillé précédemment. On est bien en présence de jets verticaux plus ou moins étirés.

On observe aussi, qu'au terme des calculs, pour un nombre de Reynolds $Re = 10^6$, le rapport $b_{33}^{\rm pol}(t^*)/b_{33}(t^*)$ n'est pas dépendant de la pente et s'établit à $b_{33}^{\rm pol}(t^*)/b_{33}(t^*) = 0{,}8$. Ces résultats sont notamment en accord avec des mesures d'anisotropie pour la turbulence Rayleigh-Taylor [42] et les simulations numériques directes de turbulence USH [45].

Résultat EDQNM : anisotropie directionnelle On termine cette revue de l'évolution de l'anisotropie au cours du temps par l'évaluation de l'anisotropie directionnelle du champ de vitesse $\sin^2\gamma_E(t^*)$ (figure 4.20a) et du champ de flottaison $\sin^2\gamma(t^*)$ (figure 4.20b). L'anisotropie directionnelle du champ de vitesse évolue de manière très similaire au terme $b_{33}(t^*)$ décrit précédemment. En effet, ils traitent tous deux du champ de vitesse et l'information fournie par $\sin^2\gamma_E(t^*)$ est semblable à celle fournie par $b_{33}^{\rm dir}(t^*)$.

Partant de $\sin^2\gamma_E(t^*) = 2/3$, on retrouve la croissance commune jusqu'à atteindre $\sin^2\gamma_E(t^*) \simeq 0{,}8$ à $t^* = 4$, temps correspondant au changement de régime de l'écoulement. Une légère décroissance est visible pour les cas $s \geq 3$ mais dans une moindre mesure que celle observée pour $b_{33}(t^*)$. La variable $\sin^2\gamma_E(t^*)$ continue de croître après le changement de régime pour tous les cas, dès $t^* = 4$ pour $s = 1$ à $t^* = 6$ pour $s \geq 4$. On note une nouvelle fois la superposition des cas $s \geq 4$ qui évoluent conjointement. À la fin des calculs, pour un nombre de Reynolds commun $Re \simeq 10^6$, on a une dispersion de l'anisotropie directionnelle entre $\sin^2\gamma_E(t^*) \simeq 0{,}85$ pour $s = 1$ et $\sin^2\gamma_E(t^*) \simeq 0{,}79$ pour $s \geq 4$. Les autres cas sont répartis entre ces deux bornes. On a une nouvelle fois une influence directe de la

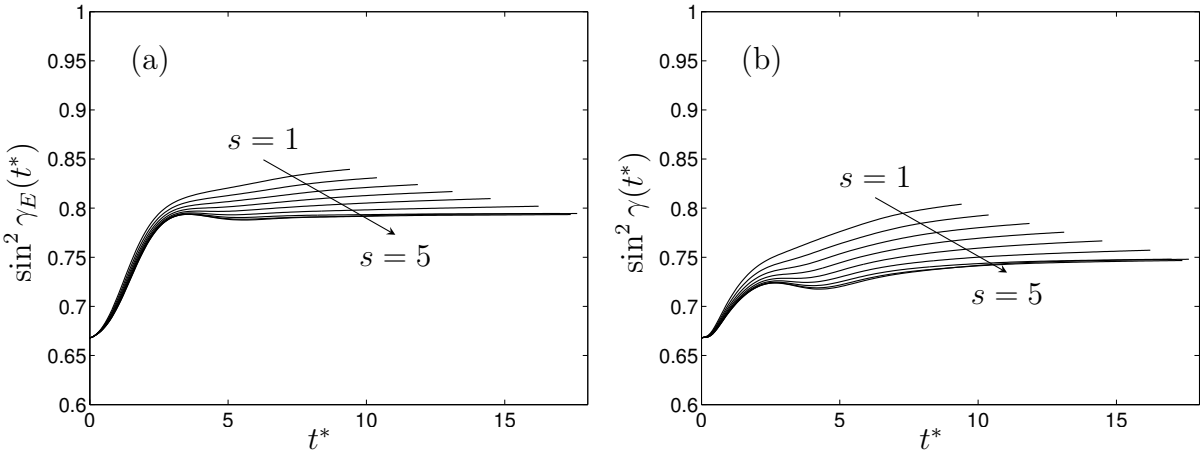


FIGURE 4.20 – Anisotropie directionnelle pour les neuf cas EDQNM : (a) du champ de vitesse $\sin^2 \gamma_E$; (b) du champ scalaire $\sin^2 \gamma$.

pente du spectre sur l'anisotropie directionnelle. On rappelle que la limite $\sin^2 \gamma_E(t^*) \to 1$ correspond à un écoulement purement *2D* où toute l'énergie est concentrée autour de l'axe vertical. On voit ici que plus la pente est faible, plus l'écoulement se rapproche de la limite *2D* signifiant un plus grand étirement des structures turbulentes.

Pour le terme $\sin^2 \gamma(t^*)$ associé au champ de flottaison, on observe tout d'abord une croissance moins marquée que dans le cas de $\sin^2 \gamma_E(t^*)$. Partant de $\sin^2 \gamma(t^*) = 2/3$, la transition se fait autour de $t^* = 3$ avec $\sin^2 \gamma(t^*) = 0{,}75$ pour $s = 1$ et $\sin^2 \gamma(t^*) = 0{,}72$ pour $s \geq 4$. Une courte décroissance survient pour les cas $s \geq 3{,}5$ jusqu'à $t^* = 5$ avant la reprise de la croissance. Les cas $s \leq 2$ n'ont pas cessé de croître et ce de façon plus forte que pour $\sin^2 \gamma_E(t^*)$. Les valeurs finales atteintes par $\sin^2 \gamma(t^*)$ restent inférieures et s'établissent entre 0,81 pour $s = 1$ et 0,75 pour les cas $s \geq 4$. Pour les deux quantités, la plus forte anisotropie mesurée pour $s = 1$ vient une nouvelle fois de la plus grande quantité d'énergie aux grandes échelles. Ces dernières étant sujettes aux termes linéaires de flottaison, l'anisotropie s'en trouve accentuée. On obtient donc des structures de l'écoulement plus étirées pour une pente infrarouge faible.

Bilan Toutes ces mesures nous permettent de confirmer l'influence directe de la pente du spectre dans la zone infrarouge sur la structuration de l'écoulement. Une pente faible induit la présence de plus d'énergie aux grandes échelles et fait apparaître des structures verticales plus étirées et plus énergétiques. Cela correspond à un écoulement à tendance *2D* caractérisé par la seule composante verticale du champ de vitesse.

4.3.3.2 Anisotropie échelle par échelle

Dans cette section, en complément des mesures globales précédentes, on s'intéresse à la décomposition par nombre d'onde de la composante verticale du déviateur du tenseur

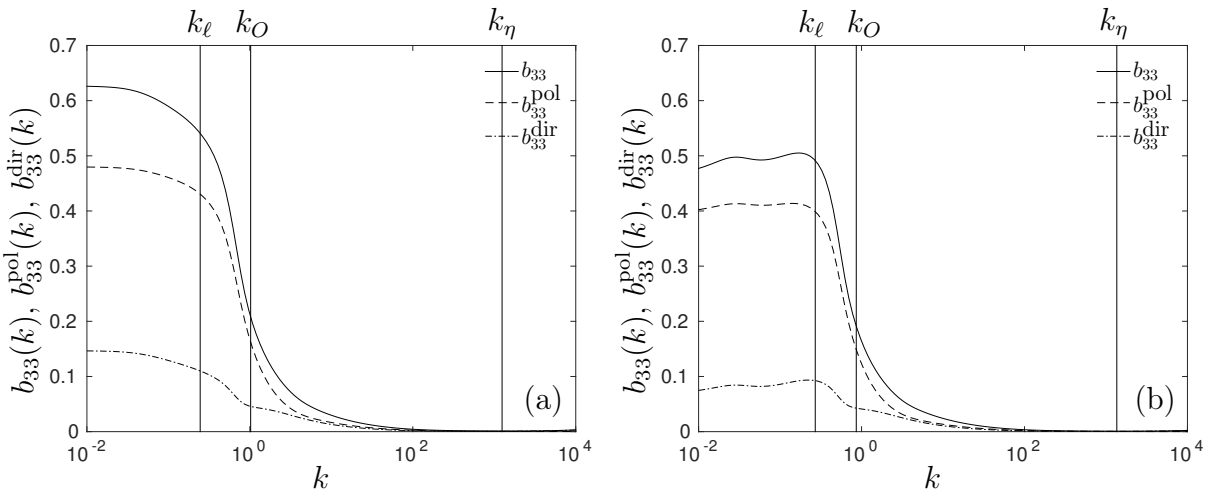


FIGURE 4.21 – Décomposition $b_{33}(k)$ en un terme de polarisation $b_{33}^{\rm pol}(k)$ et et de directionnalité $b_{33}^{\rm dir}(k)$ de l'anisotropie du champ de vitesse pour les cas $s = 2$ et $s = 4$ pour $Re = 10^6$.

de Reynolds $b_{33}(k)$ ainsi que de ces deux composantes de polarisation $b_{33}^{\rm pol}(k)$ et de directionnalité $b_{33}^{\rm dir}(k)$. On regarde également cette décomposition par échelle pour les paramètres de dimensionnalité $\sin^2\gamma_E(k)$ et $\sin^2\gamma(k)$.

La figure 4.21 montre l'anisotropie par nombre d'onde de $b_{33}(k)$ et ses deux composantes pour les cas $s = 2$ (figure 4.21a) et $s = 4$ (figure 4.21b) extraits de l'étude EDQNM, toujours pour un nombre de Reynolds $Re = 10^6$. On a également placé sur les graphes les nombres d'onde correspondant aux échelles intégrale k_ℓ, d'Ozmidov k_O et de Kolmogorov k_η.

On observe tout d'abord que, dans les deux cas, l'anisotropie est majoritairement concentrée aux grandes échelles dans les nombres d'onde $k \gtrsim 1$. L'échelle d'Ozmidov semble correspondre avec cette limite basse. Le niveau d'anisotropie est cependant différent. On note que $b_{33}(k) \sim 0{,}6$ pour $k \geq k_\ell$ dans le cas d'une pente infrarouge $s = 2$ alors que dans le cas d'une pente $s = 4$, $b_{33}(k) \sim 0{,}5$ pour $k \geq k_\ell$. Les deux composantes $b_{33}^{\rm pol}(k)$ et $b_{33}^{\rm dir}(k)$ montrent également une différence avec, pour $s = 2$, $b_{33}^{\rm pol}(k) \sim 0{,}47$ et $b_{33}^{\rm dir}(k) \sim 0{,}15$ toujours pour les nombres d'onde supérieurs à l'échelle intégrale et, pour le cas $s = 4$, $b_{33}^{\rm pol}(k) \sim 0{,}41$ et $b_{33}^{\rm dir}(k) \sim 0{,}09$. Les deux quantités sont plutôt stables pour ces très grandes échelles.

Une décroissance de l'anisotropie s'initie pour $k > k_\ell$ dans les deux cas, $s = 2$ et $s = 4$, avec une chute très forte de la composante de polarisation. On voit que la composante de dimensionnalité diminue pour $k > k_\ell$ mais change d'inclinaison pour $k > k_O$. Les deux composantes tendent finalement vers 0 pour les grands nombres d'onde. Ce dernier point traduit le fait que la préférence de direction s'estompe au delà d'une certaine échelle car l'anisotropie tend à disparaître. L'écoulement tend donc vers un comportement isotrope aux petites échelles et devient ainsi *3D*. De même, la diminution de l'anisotropie de polarisation induit que toutes les directions du vecteur vitesse tendent vers une équipartition de l'énergie.

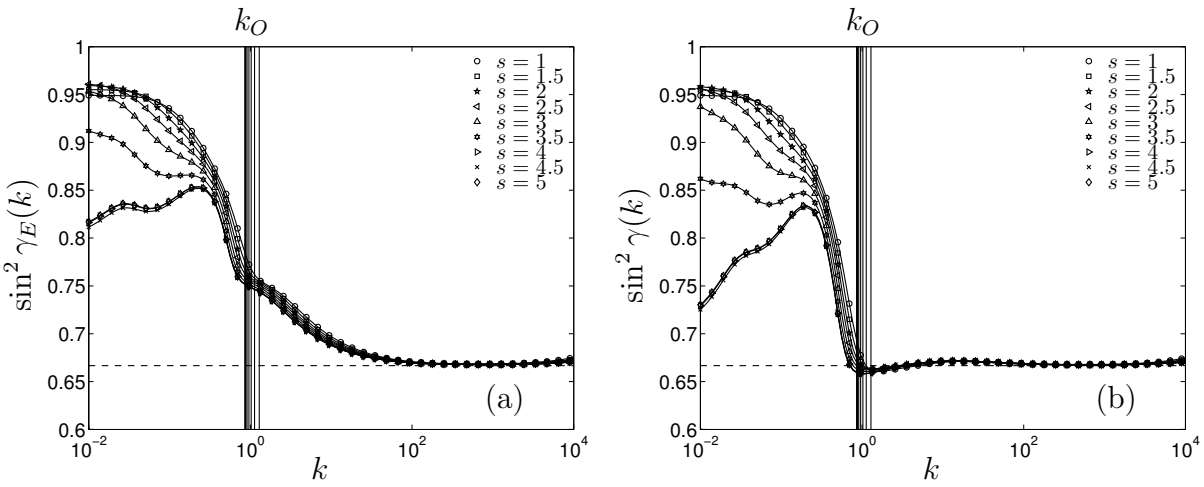


FIGURE 4.22 – Distribution échelle par échelle de l'anisotropie directionnelle : (a) du champ de vitesse $\sin^2\gamma_E(k)$; (b) du champ scalaire $\sin^2\gamma(k)$.

La dépendance angulaire se réduit à mesure que l'on va vers les plus grands nombres d'onde. L'écoulement tend ainsi à redevenir *3C*. Cela correspond également à un retour progressif à l'isotropie dans l'écoulement.

On poursuit cette étude de l'anisotropie échelle par échelle au travers de la décomposition par nombre d'onde de $\sin^2\gamma_E(k)$ (figure 4.22a) et $\sin^2\gamma(k)$ (figure 4.22b). On a tracé ici l'ensemble des neuf cas EDQNM sur chacune des figures. On a une nouvelle fois choisi de représenter la décomposition correspondant à un nombre de Reynolds $Re = 10^6$. On a également placé les échelles d'Ozmidov k_O de chacun des cas sur les figures. D'après les définitions de $\sin^2\gamma_E(k)$ et $\sin^2\gamma(k)$, la valeur limite 2/3 correspond à un état isotrope de l'écoulement.

Dans un premier temps, on identifie trois zones caractéristiques à la figure 4.22(a). La première, aux plus grandes échelles, concentre la majeure partie de l'anisotropie. Deux tendances se dégagent entre les différents cas : d'une part, les cas $s \leq 3$ avec $s = 3{,}5$ dans une moindre mesure, et d'autre part, les cas $s \geq 4$.

Le premier groupe montre une anisotropie très forte, supérieure à $\sin^2\gamma_E(k) > 0{,}9$ avec un maximum à $\sin^2\gamma_E(k) = 0{,}96$ pour $s = 2{,}5$. L'anisotropie décroît ensuite pour les nombres d'ondes plus grands, à mesure que l'on se déplace vers les petites échelles.

Le second groupe, $s \geq 4$, montrent, par contre, une anisotropie plus faible, autour de $\sin^2\gamma_E(k) \simeq 0{,}82$ pour $k = k_{\min}$. Cependant, la courbe croît légèrement jusqu'à atteindre un maximum à $\sin^2\gamma_E(k) \simeq 0{,}85$ à $k \simeq k_\ell$. Les trois cas $s \geq 4$ suivent la même évolution. Ce maximum est atteint pour $k = k_\ell$ (non tracé ici par souci de clarté sur la figure, mais k_ℓ est visible pour le cas $s = 4$ sur la figure 4.21b).

On observe, qu'à partir de $k = k_\ell$, l'ensemble des courbes suit une décroissance avec le même profil jusqu'à atteindre $\sin^2\gamma_E(k) = 0{,}75$ pour $k = k_O$. Un changement de

pente intervient une fois l'échelle d'Ozmidov atteinte. L'ensemble des cas décroît toujours conjointement et tend vers la valeur limite $\sin^2\gamma_E(k) = 2/3$ finalement atteinte pour $k \simeq 10^2$.

On n'observe pas de plateau dans la zone inertielle. D'après les figures 3.28 et 3.29, on avait déjà identifié un retour progressif plus lent de Φ_2 vers l'équipartition angulaire. On confirme ce résultat par cette décomposition par échelle de $\sin^2\gamma_E(k)$. Pour les nombres d'ondes $k > 10^2$, les neuf cas sont revenus à un état isotrope. On note une légère remontée pour $k \simeq 10^4$. Cette dernière tend à s'estomper lorsque le nombre de Reynolds augmente (non montré mais vérifié).

Les spectres de $\sin^2\gamma(k)$ montrent une répartition similaire à la figure 4.22(b). Deux groupes de calcul se détachent clairement aux grandes échelles : d'une part, les cas $s \leq 3$ et, d'autre part, les cas $s \geq 4$, le cas $s = 3{,}5$ étant dans une position intermédiaire. Le premier groupe est marqué par une très forte anisotropie avec là aussi un maximum $\sin^2\gamma(k) \simeq 0{,}95$ et une décroissance progressive vers $k = k_\ell$. Le second groupe a une anisotropie plus faible que $\sin^2\gamma_E(k)$. On a en effet $\sin^2\gamma(k) = 0{,}73$ pour $k = 10^{-2}$. Comme à la figure précédente, $\sin^2\gamma(k)$ croît ensuite pour atteindre $\sin^2\gamma(k) = 0{,}84$ autour de $k = k_\ell$.

Cette décroissance de l'anisotropie à mesure que le nombre d'onde diminue peut en partie s'expliquer par le rôle du transfert inverse, le *backscatter*, identifié à la section 4.3.2.2. En effet, les cas $s \geq 4$ sont les plus influencés par ces termes de transfert, proportionnels à k^4. Les termes de transfert, tendent à mélanger ou « brouiller » (*scrambling* en anglais) les structures turbulentes. De fait, le transfert aspire à faire revenir l'écoulement vers un état isotrope. Cette diminution de l'anisotropie aux grandes échelles est donc un signe des effets de transfert qui viennent perturber les grandes structures turbulentes. Le fait que les cas $s \geq 3{,}5$ soient graduellement moins perturbés vient renforcer cette conclusion. Le cas $s = 3{,}5$ est un peu à part et marque un état intermédiaire où le *backscatter* a un effet plus faible. L'anisotropie pour cette pente $s = 3{,}5$ est en effet presque constant autour de $\sin^2\gamma(k) = 0{,}85$ de $k = 10^{-2}$ à $k = k_\ell$. Comme pour $\sin^2\gamma_E(k)$, une fois le nombre d'onde $k = k_\ell$ atteint, les neuf cas suivent la même décroissance jusqu'à atteindre un minimum légèrement inférieur à $\sin^2\gamma(k) = 2/3$ pour $k = k_O$.

On observe ensuite un plateau net autour de $\sin^2\gamma(k) = 2/3$ pour l'ensemble des neuf calculs EDQNM, pour k allant de l'échelle d'Ozmidov k_O à $k_{\max}$. Le retour à l'isotropie est plus rapide et plus marqué pour la variance de flottaison que pour l'énergie cinétique. L'échelle d'Ozmidov marque nettement le début du retour à l'isotropie de l'écoulement. Les neuf échelles d'Ozmidov correspondant aux neuf cas se superposent dans une certaine mesure. Cela vient de la définition, $k_O = \sqrt{(N^3/\varepsilon)}$. Ayant choisi un même nombre de Reynolds et une fréquence de flottaison N identique, la dissipation d'énergie cinétique ε varie peu entre les cas et l'échelle d'Ozmidov varie peu également.

La dépendance à la pente du spectre infrarouge est donc claire sur l'anisotropie directionnelle. Nous avons pu noter et confirmer que l'anisotropie est majoritairement

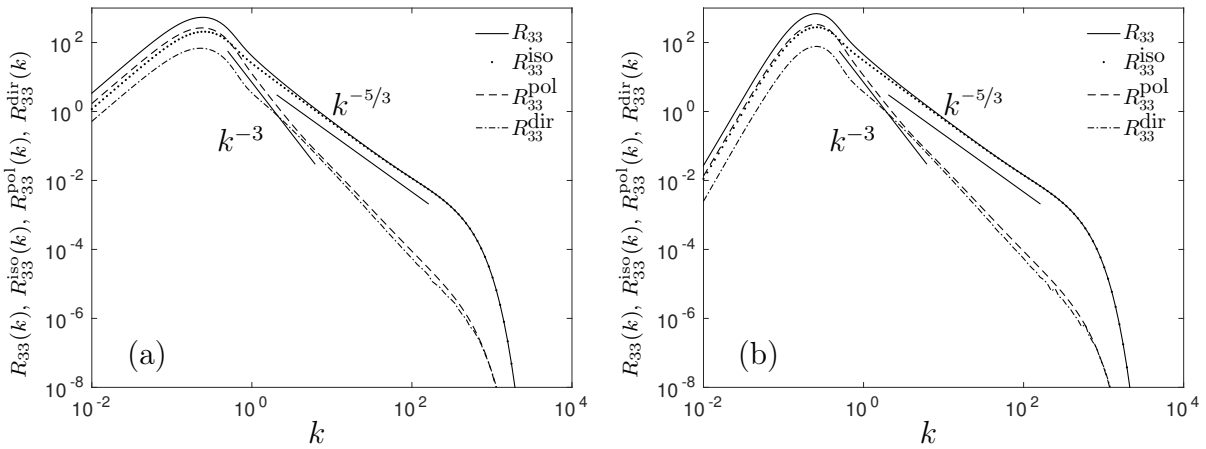


FIGURE 4.23 – Séparation du terme vertical de la corrélation double de vitesse $R_{33}(k)$ en ses trois composantes : isotrope $R_{33}^{\rm iso}(k)$, polarisation $R_{33}^{\rm pol}(k)$ et directionnalité $R_{33}^{\rm dir}(k)$ pour (a) $s = 2$ et (b) $s = 4$.

portée aux grandes échelles et est plus forte à mesure que la pente est faible. Le cas $s = 3{,}5$ marque un état intermédiaire comme le suggère également LESIEUR et OSSIA [74] et MELDI et SAGAUT [86]. Cette dépendance à la pente infrarouge tend à s'estomper à mesure que l'on s'éloigne des grandes échelles.

Bilan L'anisotropie du champ de vitesse et du champ scalaire est principalement portée par les grandes échelles. On a retrouvé, sur $\sin^2\gamma_E(k)$, l'altération du spectre entre les échelles intégrale k_ℓ et d'Ozmidov k_O. Au delà de cette dernière, les différents écoulements s'organisent de façon similaire. On a également pu identifier cette échelle d'Ozmidov k_O comme marqueur du retour à l'isotropie, principalement pour le scalaire. Ce résultat fait écho à des recherches en turbulence en rotation notamment [27].

4.3.3.3 Décomposition anisotrope du spectre d'énergie

On termine cette analyse de l'anisotropie en étudiant le spectre de la partie verticale du tenseur de Reynolds, $R_{33}(k)$, au travers de ses trois composantes, isotrope $R_{33}^{\rm iso}(k)$, de polarisation $R_{33}^{\rm pol}(k)$ et de directionnalité $R_{33}^{\rm dir}(k)$. Les détails de cette décomposition sont issus de SAGAUT et CAMBON [106] et rappelés à l'annexe A.5. On présente cette décomposition pour le cas $s = 2$ (figure 4.23a) et pour le cas $s = 4$ (figure 4.23a), uniquement pour l'étude EDQNM.

On observe tout d'abord que la majeure partie de l'énergie aux grandes échelles est portée par la composante $R_{33}^{\rm pol}(k)$ suivie de $R_{33}^{\rm iso}(k)$. Cette différence est plus marquée dans le cas $s = 2$. Pour $s = 4$, on note que $R_{33}^{\rm pol}(k) \sim R_{33}^{\rm iso}(k)$ quand $k \to k_{\rm min}$. La polarisation du spectre du tenseur de Reynolds diminue aux plus grandes échelles pour $s = 4$. On peut mettre ce constat en parallèle avec l'effet de décorrélation lié au terme de transfert agissant

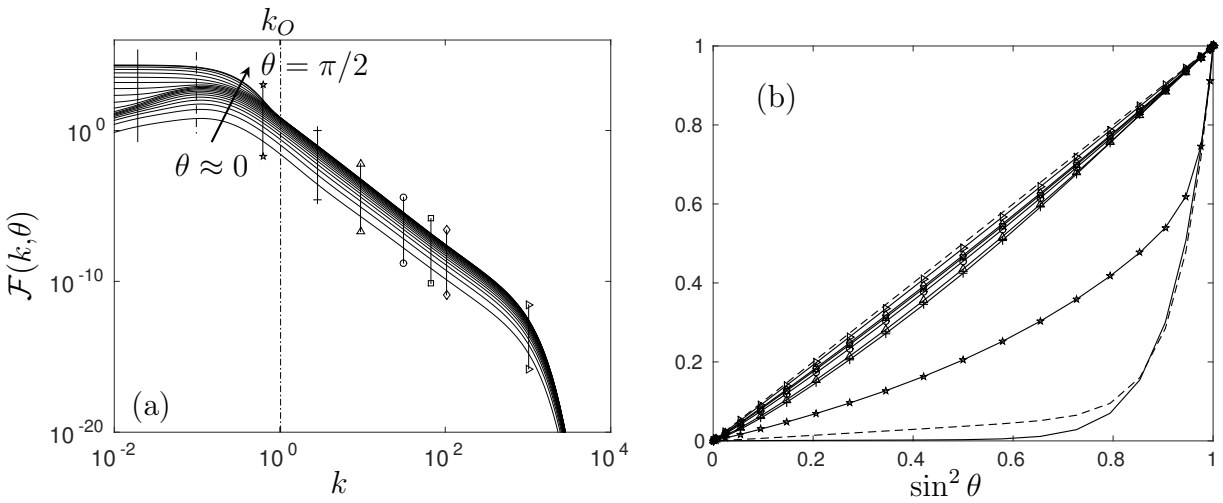


FIGURE 4.24 – Distribution angulaire du flux vertical pour le cas $s = 2$ tracée (a) en fonction du nombre d'onde k et (b) en fonction de $\sin^2\theta$. La courbe la moins énergétique sur la figure (a) correspond au premier angle non nul, le flux vertical étant nul pour $\theta = 0$. Les nombres d'onde représentés à la figure (b) et indiqués sur la figure (a) sont $k = 0{,}02$, $0{,}1$, $0{,}6$, 3, 10, 30, 70, 100, et 1000. La ligne en trait discontinu représente l'échelle d'Ozmidov k_O.

sur les grandes échelles. Cela a pour effet de diminuer la polarisation du champ de vitesse en redistribuant l'énergie du terme Φ_2 vers le terme Φ_1.

La zone située à droite du pic du spectre nous montre que les spectres de $R_{33}^{\mathrm{pol}}(k)$ et $R_{33}^{\mathrm{dir}}(k)$ montrent une tendance selon une loi d'échelle en k^{-3}. Cette perturbation en k^{-3} fait écho à l'altération du spectre compensé dans la zone inertielle à la section 4.3.2.4. Cette zone en k^{-3} est particulièrement visible pour la partie polarisation, que ce soit pour $s = 2$ ou pour $s = 4$. On observe, qu'au delà de l'échelle d'Ozmidov à $k_O \simeq 1$, la contribution majeure à la zone inertielle est fournie par la composante isotrope qui évolue selon une loi d'échelle en $k^{-5/3}$. On note que les deux autres composantes ont une contribution presque négligeable dans cette zone inertielle ainsi que dans la zone dissipative. Cette observation confirme le retour à l'isotropie identifié précédemment sur $\sin^2\gamma_E(k)$ dans les zones inertielle et dissipative.

4.3.4 Comparaison avec la méthode perturbative

Dans cette section, on regarde la dépendance angulaire des spectres des corrélations et on cherche si l'on peut établir une loi d'évolution dans la zone inertielle. De telles lois ont été mises en évidence dans le cadre de la turbulence en stratification stable par KANEDA et YOSHIDA [57]. Ils développent une théorie basée sur une méthode perturbative autour d'un spectre isotrope. Ils considèrent une évolution classique du spectre d'énergie cinétique, par exemple, en $k^{-5/3}$ dans la zone inertielle et introduisent une correction tenant compte

des effets de stratification. Cette méthode consiste en un développement de Taylor, basé sur une fréquence N faible, de la composante verticale du tenseur de Reynolds $\mathcal{R}_{33}$. Cette correction permet de prendre en compte les effets de flottaison qui perturbent les effets inertiels. La forme exacte de ces relations est

$$\mathcal{R}_{33}^{\text{iso}}(k,\theta) = \left(\frac{1}{4\pi}C_K\varepsilon^{2/3}k^{-11/3} - \frac{5}{16}N^2\frac{1}{4\pi}C_e\left(C_K + C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-1}\right)k^{-5}\right)\sin^2\theta, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{R}_{33}^{\text{dir}}(k,\theta) = N^2\frac{1}{4\pi}C_e\left(C_K + C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-1}\right)k^{-5}\left(\sin^2\theta - \frac{2}{3}\right)\sin^2\theta, \tag{4.23}$$

$$\mathcal{R}_{33}^{\text{pol}}(k,\theta) = N^2\frac{1}{4\pi}C_e\left(C_K + C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-1}\right)k^{-5}\sin^4\theta, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(k,\theta) = {} & \frac{1}{4\pi}C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-1/3}k^{-11/3} \\ & - C_pN^2\frac{1}{4\pi}\left(C_K + C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-1}\right)\left(3 - 2\sin^2\theta - \frac{25}{12}\varepsilon_B\varepsilon^{-1}\right)k^{-5},\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\mathcal{F}(k,\theta) = C_fN\frac{1}{4\pi}\left(C_K\varepsilon^{1/3} + C_O\varepsilon_B\varepsilon^{-2/3}\right)k^{-13/3}\sin^2\theta. \tag{4.26}$$

La dépendance en $k^{-5/3}$ pour le spectre $E(k,t)$ se traduit par une loi en $k^{-11/3}$ pour le spectre $\mathcal{R}_{33}(k,\theta)$ avant intégration angulaire, à laquelle s'ajoute un terme correctif en k^{-5} donnant une dépendance en k^{-3} pour le spectre $E(k,t)$.

Ils proposent ainsi que le spectre de la corrélation croisée vitesse-flottaison dépend de l'angle θ par la relation $\mathcal{F}(k,\theta) \propto \sin^2\theta$ avec une loi d'échelle en $k^{-13/3}$ dans la zone inertielle permettant de retrouver l'évolution classique en $k^{-7/3}$ du flux vertical intégré $F(k,t)$ [85]. On se propose de regarder si l'on retrouve le même comportement dans la zone inertielle dans le cadre de la turbulence homogène stratifiée instable. L'utilisation de résultats EDQNM semble opportune car les spectres considérés sont des fonctions explicites du nombre d'onde k et de l'angle θ, à la différence des résultats DNS qui fournissent des spectres très bruités. On a également une grande séparation d'échelle du fait du nombre de Reynolds élevé qui permet d'avoir une zone inertielle bien établie. On présente ainsi le spectre du flux vertical de flottaison $\mathcal{F}(k,\theta)$ à la figure 4.24(a) en fonction du nombre d'onde et à la figure 4.24(b) en fonction de $\sin^2\theta$.

Sur la figure 4.24(a), on a représenté les différentes dépendances angulaires du spectre du flux vertical. On voit tout d'abord que le flux est maximum pour l'angle $\theta = \pi/2$ aux grandes échelles, comme attendu, mais le reste également dans la zone inertielle. Contrairement aux spectres d'énergie cinétique ou de variance de flottaison, on ne constate pas de retour à l'isotropie dans la zone inertielle. Sur la figure 4.24(b), on trace $\mathcal{F}(k,\theta)$ en fonction de $\sin^2\theta$. On observe que le flux de flottaison suit effectivement une loi linéaire proche de $\sin^2\theta$ dans la zone inertielle. Les trois nombres d'onde inférieurs à l'échelle d'Ozmidov ne suivent visiblement pas cette loi.

La théorie de Kaneda et Yoshida [57] prédit un comportement similaire pour le

spectre de flottaison $\mathcal{B}(k,\theta)$. Cependant, ce spectre montre un retour à l'isotropie beaucoup plus marqué que dans le cas du spectre de flux de flottaison comme on a pu le constater à la section 4.3.3.2. On n'obtient donc pas de dépendance en $\sin^2\theta$ dans la zone inertielle du spectre de variance de flottaison car aucune anisotropie directionnelle n'est présente alors même que la méthode perturbative prédit ce comportement.

La méthode perturbative donne des résultats partiels pour la turbulence USH. L'accord sur le flux vertical est correcte mais pas sur la variance de flottaison. On peut envisager que ce sont des effets non locaux, non pris en compte par la méthode perturbative et partiellement inclus dans les termes de transfert du modèle EDQNM, qui produisent cet effet de retour à l'isotropie.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'état autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable à grand nombre de Reynolds. On a montré au chapitre 1 que le taux de croissance de l'état autosemblable est relié à la distribution du spectre d'énergie aux grandes échelles. Cette dernière est caractérisée par la pente s du spectre aux petits nombres d'onde. On a fait varier ce paramètre à l'image des études DNS de EYINK et THOMSON [34] et EDQNM de LESIEUR et OSSIA [74] en turbulence homogène isotrope.

On a d'abord identifié différents régimes d'écoulement associés à chaque distribution d'énergie. Le taux de croissance $\beta = 4/(3+s)$ est correctement prédit par le modèle EDQNM. On montre également que les cas $s > 4$ convergent rapidement vers la pente limite $s = 4$ du fait du *backscatter*, ce transfert dirigé des petites vers les grandes échelles[1]. Le nombre de Froude de l'écoulement affiche une évolution différente selon la pente. On a identifié notamment qu'une pente faible induit un nombre de Froude faible signifiant des effets de stratification plus forts que les effets non linéaires de la turbulence. Ces résultats ont été confirmés par des simulations directes à haute résolution.

On a ensuite constaté l'influence du *backscatter* sur les spectres compensés aux grandes échelles. Cet effet altère la forme du spectre, et donc la distribution d'énergie, pour les pentes infrarouges $s \geq 2{,}5$. On identifie également l'influence de cet effet grâce aux simulations directes. Elles nous permettent de confirmer que le modèle EDQNM sous-estime ce transfert inverse. En particulier, le cas $s = 4$ présente une différence notable aux grandes échelles sur les spectres de transfert d'énergie.

On a mis en évidence l'établissement de lois d'échelle dans la zone inertielle. On retrouve les lois classiques de type Kolmogorov-Obukhov en $k^{-5/3}$ pour les spectres d'énergie cinétique et de variances de flottaison. On identifie également une perturbation autour de l'échelle

1. Grandes et petites échelles d'un point de vue relatif : la borne k_{min} est grande par rapport à l'échelle intégrale k_ℓ qui est elle-même grande par rapport à l'échelle de Kolmogorov k_η.

intégrale en k^{-3}. On peut associer ce phénomène à l'accumulation d'énergie liée à la réduction du transfert d'énergie identifiée au chapitre 3. Le spectre du flux de flottaison présente une loi de type Corrsin en $k^{-7/3}$ mais la convergence est nettement plus lente. Le plateau n'est pas encore établi malgré le nombre de Reynolds relativement élevé.

Nous avons ensuite étudié l'anisotropie de l'écoulement. On a montré que la pente du spectre influence la forme des structures de l'écoulement aux grandes échelles. Une pente faible donne des structures plus étirées dans la direction verticale. On identifie ce comportement à la fois en EDQNM et en DNS. L'étude échelle par échelle de l'anisotropie a également montré qu'elle se concentre principalement aux grandes échelles et qu'un retour à l'isotropie est visible pour les nombres d'onde supérieures à l'échelle d'Ozmidov. Enfin la décomposition du spectre du tenseur de Reynolds a montré que la perturbation en k^{-3} de la zone inertielle est portée par les termes d'anisotropie directionnelle et de polarisation tandis que le terme isotrope est responsable de la loi en $k^{-5/3}$.

Finalement, nous avons testé la méthode perturbative de KANEDA et YOSHIDA [57] appliquée à la zone inertielle en turbulence homogène stratifiée stable. On a confirmé que le flux de flottaison vertical suit une loi en $\sin^2\theta$. Cependant, leur méthode ne permet pas de reproduire le comportement de la variance de flottaison. En effet, on a pu voir qu'elle subit un retour rapide vers l'isotropie dans la zone inertielle. Ces effets, principalement non locaux, ne peuvent être pris en compte dans la théorie mise en avant par KANEDA et YOSHIDA [57].

Ces éléments permettent de mieux comprendre l'évolution dans le régime autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable. Cependant, la turbulence considérée dans ce chapitre ne perturbe pas le gradient moyen de concentration. Si l'on veut comparer réellement la turbulence USH à la turbulence Rayleigh-Taylor, il nous faut prendre ces effets en compte. C'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 5

Effets de stratification et d'accélération variables sur le mélange turbulent

Ce chapitre est consacré, dans un premier temps, à la validation du modèle spectral pour la turbulence USH *avec variation du gradient moyen de densité. Cette variation est prise en compte au travers d'une équation d'évolution de la taille de la zone de mélange liée au flux vertical de concentration. On valide la prise en compte de cette rétroaction de la turbulence sur l'écoulement moyen au travers de relations liant le taux de mélange moléculaire aux quantités turbulentes. Ces relations ont été établies par* SOULARD *et al. [113] pour la turbulence Rayleigh-Taylor. La turbulence* USH *présente un très bon accord avec ces prédictions*

Dans un second temps, on présente une étude d'effets d'accélération variable sur la dynamique du mélange turbulent. On s'intéresse en particulier à une variation impliquant une étape de décélération intercalée entre deux phases d'accélération. Cette configuration a déjà été étudiée expérimentalement et numériquement [29, 100]. On montre notamment que le temps auquel le second changement de signe s'opère altère la dynamique de la zone de mélange.

5.1 Introduction

Les chapitres précédents ont permis d'établir les caractéristiques de l'état autosemblable en turbulence homogène stratifiée instable grâce au modèle EDQNM. Pour autant, la comparaison directe avec une zone de mélange Rayleigh-Taylor est limitée. En effet, la configuration de turbulence USH que nous avons étudiée jusqu'à présent fait intervenir un gradient moyen de densité fixe. Or, le flux de flottaison, la corrélation croisée des champs fluctuants de vitesse et de concentration, varie au cours du temps et doit à terme modifier ce gradient moyen. Il nous faut donc prendre en compte cette variation pour nous rapprocher de l'évolution de la turbulence Rayleigh-Taylor. On pourra alors évaluer une taille de zone de mélange et déterminer si la turbulence USH est à même de donner des

indications sur la turbulence Rayleigh-Taylor.

La validation de cette étape se fait au travers de relations entre différentes quantités turbulentes : la variance de concentration, le flux vertical de concentration, la corrélation double de vitesses verticales et le paramètre Θ appelé taux de mélange. Ce paramètre est relié à la variance de concentration. Soulard et al. [113] ont établi ces relations dans le but de paramétrer des modèles réduits. La méthode qu'ils utilisent est semblable à celle employée par Gréa [38] dans le cadre du modèle d'accélération rapide.

Un second phénomène pouvant altérer la croissance de la taille de la zone de mélange est la variation de l'accélération g. Les applications géophysiques du mélange induit par des effets de flottaison ne sont généralement pas soumises à ce type d'effet. Mais des applications en ingénierie ou astrophysique peuvent l'être, comme rappelé à la section 1.3. Il est donc nécessaire de pouvoir prendre en compte des variations d'accélération pour modéliser ces configurations réelles d'écoulement Rayleigh-Taylor. On peut également se référer aux écoulements issus d'une instabilité de Richtmyer-Meshkov. Cette instabilité apparaît sous l'effet d'un choc qui peut s'apparenter en première approximation à une accélération impulsionnelle.

On a présenté, à la section 1.3, les expériences et simulations que l'on cherche à reproduire ici. Il s'agit d'expériences liées au LEM, où le dispositif expérimental se déplace linéairement sous l'effet d'un moteur magnétique. Les variations d'un champ magnétique permettent d'étudier des profils d'accélération variables. Ces expériences peuvent être vues comme une extension des expériences menées par Read [102] en accélération constante. D'après Dimonte et Schneider [30] et Dimonte et al. [29], la variation de l'accélération a une incidence sur la croissance de la taille de la zone de mélange. On peut notamment établir un lien entre la taille de la zone de mélange et une longueur caractéristique définie à partir de l'accélération. Cette longueur caractéristique change si l'on considère une accélération constante ou variable. Ils ont également mis en évidence la forte dépendance du taux de mélange au profil de l'accélération. Un des objectifs de leurs expériences est de tester des modèles de mélange notamment utilisés dans le cadre de la fusion par confinement inertiel.

Ces expériences ont été complétées par des simulations numériques effectuées par Ramaprabhu et al. [100]. Un point important qui s'en dégage est la validation de l'influence de l'accélération sur le taux de mélange. Dans ces expériences et simulations, une séquence particulière a été mise en avant ; Ramaprabhu et al. [100] l'appelent ADA pour accélération-décélération-accélération. Il s'agit d'une phase de décélération intercalée entre deux phases d'accélération. L'objectif de cette variation est d'identifier l'effet de la décélération sur le taux de mélange afin d'établir si une telle phase permettrait de limiter la croissance de la taille de la zone de mélange lors de la seconde phase d'accélération. D'après leurs résultats, la phase de décélération modifie les structures de l'écoulement et retarde la croissance de la zone de mélange dans la phase suivante d'accélération. Ce

résultat est notamment obtenu grâce à l'évaluation du taux de mélange moléculaire qui atteint un maximum dans cette phase stabilisante.

Cependant, seule l'intensité de l'accélération a été étudiée et pas l'influence de la durée de cette phase stabilisante. Nous allons nous intéresser à cette durée car il est possible que la zone de mélange développe un régime oscillant à l'image du comportement de la turbulence stratifiée stable [36, 115]. Cette évolution particulière pourrait avoir une incidence sur la reprise de la croissance de la zone de mélange.

Ce chapitre s'organise comme suit. On introduit les nouvelles équations et modifications liées à la variation du gradient moyen à la section 5.2. On donne le détail des lois d'échelle de SOULARD et al. [113] à la section 5.3. Les résultats de validation liés à ces lois d'échelle sont donnés à la section 5.4. On termine à la section 5.5 par l'étude de la variation de l'accélération.

5.2 Nouvelles équations pour la turbulence USH

On présente dans cette section l'ensemble des modifications à apporter pour prendre en compte la variation du gradient de densité. On commence par l'équation de variation de la longueur de la zone de mélange (section 5.2.1) puis les variations de l'accélération que nous avons considérées (section 5.2.2). On décrit ensuite le nouveau système d'équations des modes Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Ψ_r (section 5.2.3) et le nouveau traitement du temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}$ lié à la correction (section 5.2.4). On termine en présentant les différents choix de traitement numérique (section 5.2.5).

5.2.1 Équation de la taille de la zone de mélange

On fait varier la longueur $L(t)$ de la zone de mélange en tenant compte de l'évolution du flux de flottaison vertical. On rappelle l'expression qui les relie :

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = 12\frac{\langle u_3 c\rangle\,(t)}{L(t)}. \tag{5.1}$$

On prend ainsi en compte la modification du gradient moyen par les fluctuations turbulentes.

Cette évolution de la taille de la zone de mélange induit une modification de la fréquence de flottaison. Ces deux quantités sont liées par l'expression suivante :

$$N(t) = \frac{2\mathcal{A}|g(t)|}{L^2(t)}. \tag{5.2}$$

On peut désormais raisonner en terme de zone de mélange et envisager d'évaluer le taux de croissance à l'image des écoulements Rayleigh-Taylor.

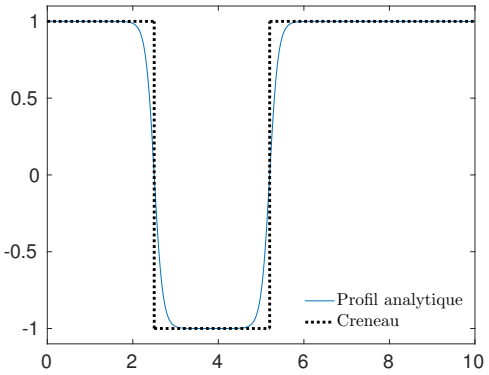


FIGURE 5.1 – Trait plein : exemple de profil d'accélération basé sur l'équation (5.3) avec $g_0 = 1$, $\eta = 5$, $t_1 = 2{,}5$ et $t_2 = 5{,}2$. Trait pointillé : profil asymptotique équivalent en créneau.

5.2.2 Variation de l'accélération

On considère également l'évolution de l'accélération $g(t)$ au cours du temps. On appelle $j(t) = \dot{g}(t)$ la dérivée de l'accélération, appelé à-coup [1].

Dans ce chapitre, on étudie le cas où l'accélération change de signe deux fois à l'image des expériences et simulations de DIMONTE et al. [29] et RAMAPRABHU et al. [100]. On intercale donc une phase de décélération entre deux phases d'accélération. Cette phase de décélération revient à inverser la stratification : on insère donc une phase de stratification stable entre deux phases de stratification instable.

Dans les cas susnommés, l'évolution de l'accélération est continue. RAMAPRABHU et al. [100] proposent un profil analytique de l'accélération basé sur l'équation :

$$g(t) = g_0\Big(1 - \big(\tanh(\eta(t - t_1)) - \tanh(\eta(t - t_2))\big)\Big) \tag{5.3}$$

qui a l'avantage de permettre le calcul analytique de l'à-coup :

$$j(t) = -\frac{\eta}{\cosh^2(\eta(t - t_1))} + \frac{\eta}{\cosh^2(\eta(t - t_2))}. \tag{5.4}$$

Le paramètre g_0 représente l'amplitude initiale de l'accélération. Le paramètre η décrit la raideur de la pente lors du passage de l'accélération à la décélération. Les deux temps t_1 et t_2 sont les temps de coupure permettant, respectivement, le passage du cas instable au cas stable, puis le passage du cas stable au cas instable. Ce profil est représenté à la figure 5.1 en trait plein.

On s'est restreint dans ce chapitre au cas asymptotique en créneau (figure 5.1, trait pointillé). Cette première étape nous permet de valider le passage en phase stable. On

1. On parle également de saccade. La lettre j vient du nom anglais *jolt* utilisé pour définir cette dérivée troisième de la position.

pourra par la suite étudier des profils plus complexes. Ce créneau est donc défini par :

$$g(t) = g_0 \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq t_1, \tag{5.5}$$

$$g(t) = -g_0 \quad \text{pour} \quad t_1 < t \leq t_2, \tag{5.6}$$

$$g(t) = g_0 \quad \text{pour} \quad t_2 < t. \tag{5.7}$$

Dans les deux configurations, en créneau ou continu, on fait intervenir une étape où la turbulence est soumise à une stratification stable. Ce passage en stable nécessite la résolution d'un système d'équations spécifique. On ne détaille pas ici le modèle EDQNM adapté à ce cas. Il a été mis en place et validé par GODEFERD et CAMBON [36] notamment. Dans leur modèle, les termes de stratification dans les corrélations triples sont pris en compte explicitement. Dans le cadre de notre étude, on suppose que la correction que l'on a introduite au chapitre 3 permet de prendre en compte ces effets de stratification. On considère notamment que les effets de triades résonantes identifiées en turbulence stratifiée stable n'altèrent pas l'évolution de la zone de mélange dans le laps de temps où la zone de mélange est en configuration stable.

5.2.3 Termes supplémentaires dans l'équation de la vitesse de flottaison

On a défini la vitesse de flottaison ϑ à partir de la concentration c, la fréquence de flottaison N, l'accélération g et le nombre d'Atwood $\mathcal{A}$ par l'expression

$$\vartheta(\mathbf{x},t) = \frac{2\mathcal{A}g(t)c(\mathbf{x},t)}{N(t)}. \tag{5.8}$$

La variation de l'accélération et de la fréquence de flottaison font apparaître deux nouveaux termes dans l'équation de ϑ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \boxed{+\vartheta \left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{g}}{g} \right)} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} + N u_3. \tag{5.9}$$

Cette modification de l'équation de ϑ implique un changement des équations de Φ_3 et Ψ_r définis par

$$\Phi_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathcal{B}(\mathbf{k})}{2} \quad \text{et} \quad \Psi_r = \mathcal{F}_a(\mathbf{k}) e_a^{(2)}(\mathbf{k}) \tag{5.10}$$

où $\mathcal{B}$ est la densité spectrale de la variance de flottaison et $\mathcal{F}_a$ est la densité spectrale de la corrélation croisée flottaison-vitesse. Les équations (2.34) et (2.35) du système d'équations

dans le repère de Craya-Herring sont modifiées et le nouveau système d'équations s'écrit

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \Phi_1(\mathbf{k},t) = T^1(\mathbf{k},t), \tag{5.11}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \Phi_2(\mathbf{k},t) = 2N \sin\theta\, \Psi_r(\mathbf{k},t) + T^2(\mathbf{k},t), \tag{5.12}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \Phi_3(\mathbf{k},t) = 2N \sin\theta\, \Psi_r(\mathbf{k},t) \boxed{-2\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{g}}{g}\right) \Phi_3(\mathbf{k},t)} + T^3(\mathbf{k},t), \tag{5.13}$$

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \Psi_r(\mathbf{k},t) = N \sin\theta\, (\Phi_3(\mathbf{k},t) + \Phi_2(\mathbf{k},t)) \boxed{-\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{g}}{g}\right) \Psi_r(\mathbf{k},t)} + T^4(\mathbf{k},t). \tag{5.14}$$

On doit donc modifier la résolution numérique du système d'équations afin de prendre en compte ces variations de la fréquence N et de l'accélération g.

5.2.4 Changement de l'étape de markovianisation

Lors de la confrontation du modèle EDQNM aux simulations directes au chapitre 3, on a mis en évidence la nécessité d'inclure un terme correctif supplémentaire permettant la prise en compte des effets de flottaison sur les corrélations triples. En effet, le transfert d'énergie est surestimé dans le modèle EDQNM et une fréquence caractéristique de décorrélation liée aux effets de stratification a été ajoutée à l'amortissement tourbillonnaire classique. On rappelle que cet amortissement $\mu_k^N(t)$ est désormais de la forme :

$$\mu_k^N(t) = a_0 \left(\int_0^k p^2 E(p,t)\, \mathrm{d}p\right)^{1/2} + a_1 N \tag{5.15}$$

avec $a_1 \simeq 0{,}27$. Dans le cas de l'étude de la turbulence USH à gradient fixe, la fréquence de flottaison N ne varie pas. Ainsi, l'étape de markovianisation, qui clôt le modèle EDQNM, pouvait être appliquée car on peut considérer que cette fréquence $\mu_k^N(t)$ n'évolue pas ou peu au cours du temps. On a ainsi pu établir l'expression du temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}(t)$ en tenant compte de la correction à la section 3.3.1.

Dans cette nouvelle approche où la taille de la zone de mélange, et donc la fréquence N, évoluent, cette hypothèse de markovianisation est mise à mal et ne peut plus être appliquée à la turbulence homogène stratifiée instable. Nous devons tenir compte de la dépendance temporelle de l'amortissement tourbillonnaire $\mu_k^N(t)$. Cela nous amène à considérer un modèle de fermeture proche du modèle quasi-markovien de KRAICHNAN [66]. Dans cette approche, Kraichnan tient compte de la dépendance temporelle de l'amortissement tourbillonnaire et aboutit à une équation différentielle permettant de définir l'évolution du

temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}(t)$. Cette équation s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_{kk'k''}(t)}{\mathrm{d}t} = 1 - \left(\mu_k^N(t) + \mu_{k'}^N(t) + \mu_{k''}^N(t)\right)\Theta_{kk'k''}(t). \tag{5.16}$$

On vérifie bien que l'indépendance temporelle de $\mu_k^N(t)$ permet de retrouver l'expression (3.10) obtenue après intégration. On retrouve également l'expression classique du temps caractéristique de l'EDQNM dans le cadre de la turbulence homogène isotrope si l'on considère $N = 0$ en plus de l'indépendance temporelle.

Nous souhaitons insister sur l'originalité de la démarche. En effet, en introduisant cette équation pour le temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}(t)$, le modèle spectral employé n'est plus un modèle EDQNM. On conserve la majeure partie de la procédure EDQNM mais la markovianisation n'est plus possible du fait de la variation du terme correctif proportionnel à la fréquence N. D'autres modèles spectraux en deux points tiennent compte de la variation de $\Theta_{kk'k''}(t)$, notamment le *Test Field Model* [67] ou les différentes approches par *Direct Interaction Approximation* [64]. Ces modèles sont nettement plus complexes à mettre en œuvre. Nous voulons conserver au maximum une modélisation « simple ». Notre approche consiste donc à apporter une modification localisée du modèle EDQNM. On fera désormais référence au modèle sous l'acronyme EDQNAM pour *eddy-damped quasi-normal almost-markovian*. À la différence d'un modèle EDQN, nous avons en partie conservé l'hypothèse d'oubli des termes d'histoire sur les corrélations triples. On rappelle que cette hypothèse, décrite à l'équation (2.7), revient à évaluer les produits de corrélations doubles au temps t au lieu d'évaluer l'intégrale temporelle de leur contribution.

5.2.5 Modification numérique

On rassemble dans cette section les différents choix de traitement numérique.

Taille de la zone de mélange L'avancement en temps de la longueur L de la zone de mélange se fait simplement par un schéma en temps d'ordre un :

$$L(t_{n+1}) = L(t_n) + \Delta t \times \dot{L}(t_n). \tag{5.17}$$

On a vérifié la convergence du résultat en fonction du pas de temps.

Système d'équations On a choisi une option nécessitant un minimum de modification du code pour prendre en compte les termes supplémentaires apparaissant dans le système d'équations. On effectue simplement un redimensionnement des termes Φ_3 et Ψ_r à chaque

itération. Cela revient à considérer les opérations :

$$\Phi_3(t_{n+1}) = \Phi_3(t_n) \times \frac{N^2(t_n)}{|g^2(t_n)|} \times \frac{g^2(t_{n+1})}{N^2(t_{n+1})} \tag{5.18}$$

et

$$\Psi_r(t_{n+1}) = \Psi_r(t_n) \times \frac{N(t_n)}{|g(t_n)|} \times \frac{|g(t_{n+1})|}{N(t_{n+1})}. \tag{5.19}$$

Ce choix permet de conserver le même système linéaire que dans le cas avec fréquence de flottaison fixe étudié précédemment.

Temps caractéristique On doit résoudre l'équation différentielle à chaque pas de temps afin d'évaluer le temps caractéristique $\Theta_{kk'k''}(t)$. On utilise un schéma d'avancement d'ordre 1 de la forme :

$$\Theta_{kk'k''}(t_{n+1}) = \Theta_{kk'k''}(t_n) + \Delta t \times \left(1 - \left(\mu_k^N(t_n) + \mu_{k'}^N(t_n) + \mu_{k''}^N(t_n)\right) \Theta_{kk'k''}(t_n)\right). \tag{5.20}$$

On a également testé un schéma Runge-Kutta 4, dans un cas à fréquence fixe, sans obtenir de modifications significatives du résultat.

5.3 Lois d'échelle pour la turbulence homogène stratifiée instable à gradient variable

On décrit dans cette section les différentes lois d'échelle mises en avant par Gréa [38] et Soulard et al. [113]. L'objectif est d'établir un lien entre les différents moments d'ordre deux de l'écoulement et le taux de mélange Θ. Les quantités que l'on souhaite exprimer sont

- le taux de croissance α,
- la corrélation double de vitesse verticale $\langle u_3 u_3 \rangle$,
- la corrélation double de vitesse horizontale $\langle u_p u_p \rangle$,
- le flux de concentration vertical $\langle u_3 c \rangle$,
- la variance de concentration $\langle cc \rangle$.

On présente ici succinctement les étapes permettant d'obtenir ces relations. Cette démarche est similaire à celle employée par Soulard et al. [112] pour établir des lois d'échelle dans la zone inertielle en turbulence USH.

On définit tout d'abord la taille de la zone de mélange L en fonction de la concentration moyenne :

$$L = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle c \rangle \left(1 - \langle c \rangle\right) \mathrm{d}x_3. \tag{5.21}$$

Cette relation permet d'établir un lien entre le taux de mélange Θ et la corrélation double de concentration $\langle cc \rangle$:

$$\Theta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \langle c(1-c) \rangle \, \mathrm{d}x_3}{\int_{-\infty}^{+\infty} \langle c \rangle \, (1 - \langle c \rangle) \, \mathrm{d}x_3} = 1 - 6\frac{\langle cc \rangle}{L}. \tag{5.22}$$

La taille de la zone de mélange en régime autosemblable évolue d'après la relation $L(t) = 2\alpha \mathcal{A} g t^2$, et l'équation (5.1) de sa dérivée, on peut évaluer le taux de croissance α de deux manières :

$$\alpha = \frac{\left(\dot{L}\right)^2}{8\mathcal{A}gL} = \left(6\frac{\langle u_3 c \rangle}{L \times V_N}\right)^2 \tag{5.23}$$

où $V_N = L \times N$ est une vitesse caractéristique des effets de flottaison.

L'objectif est d'établir un lien entre ce paramètre Θ et les moments d'ordre 2 de la vitesse et de la concentration. Soulard et al. [113] définissent les trois modes propres, $\hat{a}_-$, $\hat{a}_0$ et $\hat{a}_+$, du système d'équations (1.4)–(1.6) de la vitesse et de la concentration. Ces modes propres sont définies par [2]

$$\hat{a}_- = -s_\theta \frac{\varphi_2}{V_N} + c_\theta \hat{c}, \tag{5.24}$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\varphi_1}{V_N}, \tag{5.25}$$

$$\hat{a}_+ = c_\theta \frac{\varphi_2}{V_N} + s_\theta \hat{c}. \tag{5.26}$$

avec

$$c_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 4\sin^2\theta}}}, \tag{5.27}$$

$$s_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 4\sin^2\theta}}}. \tag{5.28}$$

Le mode $\hat{a}_+$ est appelé « mode dominant » car il est amplifié par les effets de flottaison ; les modes $\hat{a}_-$ et $\hat{a}_0$ sont appelés respectivement « mode bloquant » et « mode neutre ». À partir de ces modes, on peut créer des spectres de corrélation double de la forme $A_{ij} = \langle \hat{a}_i \hat{a}_j \rangle$ où i et j peuvent prendre les « valeurs » $\{-, 0, +\}$. Ces spectres de corrélation doubles basées sur les trois modes a_-, a_0 et a_+ permettent d'exprimer les spectres des corrélations doubles $\mathcal{R}_{33}(\mathbf{k})$, $\mathcal{R}_{pp}(\mathbf{k})$, $\mathcal{C}(\mathbf{k}) = \langle c(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) \rangle$ et $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{R}_{pp}(\mathbf{k})$ étant le spectre horizontal (indice p pour perpendiculaire à la verticale). En négligeant les spectres faisant intervenir a_- et a_0, on

2. Les termes φ_1 et φ_2 sont les deux composantes de la vitesse définies dans l'espace spectral. Voir l'équation (A.15) à l'annexe A.3.

aboutit aux expressions :

$$\mathcal{C}(\mathbf{k}) \approx s_\theta^2 A_{++}(\mathbf{k}), \tag{5.29}$$

$$\frac{\mathcal{R}_{33}(\mathbf{k})}{V_N^2} \approx c_\theta^2 A_{++}(\mathbf{k}) \sin^2\theta, \tag{5.30}$$

$$\frac{\mathcal{R}_{pp}(\mathbf{k})}{V_N^2} \approx c_\theta^2 A_{++}(\mathbf{k}), \tag{5.31}$$

$$\frac{\mathcal{F}_3(\mathbf{k})}{V_N} \approx s_\theta c_\theta A_{++}(\mathbf{k}) \sin\theta. \tag{5.32}$$

avec

$$A_{++} = \frac{c_\theta^2}{V_N^2}\Phi_2 + s_\theta^2 \frac{N^2}{g^2}\Phi_3 + 2c_\theta s_\theta \frac{N}{gV_N}\Psi_r. \tag{5.33}$$

On intègre le système (5.29)–(5.32) sur l'ensemble des vecteurs $\mathbf{k}$. On obtient un premier système d'équations reliant les moments d'ordre deux au taux de croissance α :

$$\frac{\langle cc\rangle}{L} \simeq \frac{1}{d_{cc}}\frac{\sqrt{\alpha}}{12}\left(\sqrt{\alpha+4}+\sqrt{\alpha}\right), \tag{5.34}$$

$$\frac{\langle u_3u_3\rangle}{V_N^2 L} \simeq d_{33}\frac{\sqrt{\alpha}}{12}\left(\sqrt{\alpha+4}-\sqrt{\alpha}\right), \tag{5.35}$$

$$\frac{\langle u_pu_p\rangle}{V_N^2 L} \simeq \frac{1}{d_{pp}}\frac{\sqrt{\alpha}}{12}\left(\sqrt{\alpha+4}-\sqrt{\alpha}\right), \tag{5.36}$$

$$\frac{\langle u_3c\rangle}{V_N L} \simeq \frac{\sqrt{\alpha}}{6}\left(\sqrt{\alpha+4}+\sqrt{\alpha}\right). \tag{5.37}$$

On fait intervenir les paramètres d_{cc}, d_{33} et d_{pp} qui décrivent l'anisotropie angulaire du mode dominant et sont définis par

$$d_{cc} = \frac{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(c_\theta s_\theta/\left(c_{\pi/2}s_{\pi/2}\right)\right)\sin\theta A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(s_\theta^2/s_{\pi/2}^2\right)A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}, \tag{5.38}$$

$$d_{33} = \frac{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(c_\theta^2/c_{\pi/2}^2\right)\sin^2\theta A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(c_\theta s_\theta/\left(c_{\pi/2}s_{\pi/2}\right)\right)\sin\theta A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}, \tag{5.39}$$

$$d_{pp} = \frac{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(c_\theta s_\theta/\left(c_{\pi/2}s_{\pi/2}\right)\right)\sin\theta A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}{\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(c_\theta^2/c_{\pi/2}^2\right)A_{++}\,\mathrm{d}\mathbf{k}}. \tag{5.40}$$

En combinant les équations (5.22) et (5.34), on obtient une relation entre le taux de croissance α et le taux de mélange Θ :

$$\alpha = \frac{d_{cc}^2\left(1-\Theta\right)^2}{1+d_{cc}\left(1-\Theta\right)}. \tag{5.41}$$

En injectant cette expression dans le système d'équations (5.34)–(5.37), on obtient un second système liant les moments d'ordre deux au taux de mélange Θ :

$$\frac{\langle cc \rangle}{L} = \frac{1-\Theta}{6}, \tag{5.42}$$

$$\frac{\langle u_3 u_3 \rangle}{V_N^2 L} \simeq \frac{d_{33}}{6} \frac{d_{cc}(1-\Theta)}{1+d_{cc}(1-\Theta)}, \tag{5.43}$$

$$\frac{\langle u_p u_p \rangle}{V_N^2 L} \simeq \frac{1}{6 d_{pp}} \frac{d_{cc}(1-\Theta)}{1+d_{cc}(1-\Theta)}, \tag{5.44}$$

$$\frac{\langle u_3 c \rangle}{V_N L} \simeq \frac{1}{6} \frac{d_{cc}(1-\Theta)}{\sqrt{1+d_{cc}(1-\Theta)}}. \tag{5.45}$$

Soulard et al. [113] ont validé ces relations au moyen de simulations directes de turbulence Rayleigh-Taylor. On se propose ici de tester si le modèle EDQNAM, adapté à la turbulence USH avec gradient variable, permet de retrouver ces relations.

5.4 Rétroaction de la turbulence sur le gradient moyen

L'objectif de cette section est de valider la prise en compte dans le modèle EDQNAM de la rétroaction du flux de flottaison vertical sur le gradient moyen de densité. Ces effets se traduisent par l'introduction d'une équation d'évolution de la taille de la zone de mélange qui induit une modification de la fréquence de flottaison N. On cherche notamment à retrouver les lois d'échelles présentées à la section 5.3. Dans cette première configuration, l'accélération est constante. On présente les conditions initiales retenues à la section 5.4.1 et les résultats obtenus sur l'état autosemblable à la section 5.4.2.

5.4.1 Choix d'initialisation

Les paramètres de calcul utilisés sont semblables aux études précédentes des chapitres 3 et 4. On utilise une nouvelle fois la formule d'initialisation déjà présentée, que l'on rappelle ici :

$$E(k,t=0) = A_s \left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^s \exp\left(-\frac{s}{2}\left(\frac{k}{k_{\text{pic}}}\right)^2\right). \tag{5.46}$$

Elle nous permet d'initialiser le spectre d'énergie $E(k,t)$ ainsi que le spectre de la variance de flottaison $B(k,t)$, le spectre de flux de flottaison étant nul initialement. On choisit de regarder les trois pentes $s = 2$, $s = 3$ et $s = 4$ définissant ainsi trois distributions initiales différentes.

Le choix des nombres d'onde maximum du spectre k_{pic} est identique à l'étude du chapitre 4, à savoir $k_{\text{pic}} = 20$ pour $s = 2$, $k_{\text{pic}} = 21{,}21$ pour $s = 2$ et $k_{\text{pic}} = 21{,}91$ pour $s = 4$. On choisit le paramètre A_s pour ajuster le niveau d'énergie cinétique initiale à $\mathcal{K}(t=0) = 1$.

Avec une viscosité $\nu = 10^{-3}$, on obtient un nombre de Reynolds initial $Re = 833$ dans les trois cas. On a réduit la viscosité par rapport au cas similaire du chapitre 4 car la prise en compte des variations de la taille de la zone de mélange oblige à réduire le pas de temps du fait de la résolution de l'équation de l'amortissement tourbillonnaire. On a ainsi réduit la borne maximum à $k_{\max} = 10^3$. On définit le nombre d'onde minimum $k_{\min} = 10^{-2}$ afin de s'affranchir d'effets de confinement et d'atteindre un nombre de Reynolds élevé en permettant à l'échelle intégrale de croître suffisamment.

Le nombre de Froude des écoulements est choisi égal à $Fr = 1{,}2$ avec une fréquence de flottaison égale à $N = 1$ dans notre cas. D'après la relation qui lie la fréquence N à la taille de la longueur de mélange, cela revient à considérer une longueur $L = 1$ pour la zone de mélange initiale.

Le rapport entre variance de flottaison et énergie cinétique est fixé à $\Lambda = 2$. Pour rappel, cela correspond à la valeur limite du cas linéaire.

5.4.2 Validation du modèle EDQNAM

On trace à la figure 5.2 les taux de croissance α de la zone de mélange pour les trois cas étudiés, $s = 2$ (figure 5.2a), $s = 3$ (figure 5.2b) et $s = 4$ (figure 5.2c). On rappelle que la valeur théorique du taux croissance est évaluée à partir de l'équation

$$\alpha = \frac{1}{(s+2)(s+3)}. \tag{5.47}$$

On trace également sur la figure les taux de croissance calculés à partir des quantités extraites de la simulation. On utilise l'équation (5.23) basée sur la longueur L et sa dérivée, l'équation (5.41) basée sur le taux de mélange Θ et la mesure d_{cc} de l'anisotropie du champ de concentration associée au mode dominant (noté $\alpha(\Theta,d_{cc})$ sur la figure) et l'équation $\alpha = \frac{\sin^4\gamma(1-\Theta)^2}{1+\sin^2\gamma(1-\Theta)}$ introduite initialement par Gréa [38] (noté $\alpha(\Theta, \sin^2\gamma)$ sur la figure).

On observe une évolution identique sur les trois figures. On note tout d'abord une première phase de forte croissance où le paramètre α atteint $\alpha = 0{,}4$ (en dehors de la figure) puis une diminution où le taux de croissance atteint un minimum à $\alpha = 0{,}02$ pour le cas $s = 2$ et $\alpha = 0{,}01$ pour le cas $s = 4$. Ce minimum est obtenu à $t \simeq 2$. On observe ensuite une légère croissance où le taux de croissance basé sur la taille de la zone de mélange tangente la valeur théorique pour $s = 2$ et la dépasse pour les deux autres cas. La formule $\alpha(\Theta,d_{cc})$ basée sur le taux de mélange surestime très légèrement cette valeur du taux de croissance. Un maximum est atteint vers $t \simeq 5$. Le taux de croissance diminue ensuite jusqu'à $t = 10$, ainsi que les deux estimations, pour croître à nouveau jusqu'à la fin du calcul. À la fin du calcul, et dans les trois cas, les estimations basées sur la taille de la zone de mélange L sous-estiment le taux de croissance d'environ 7%. Avec l'expression de α fonction de Θ, on est légèrement plus proche de la valeur théorique avec un écart réduit à

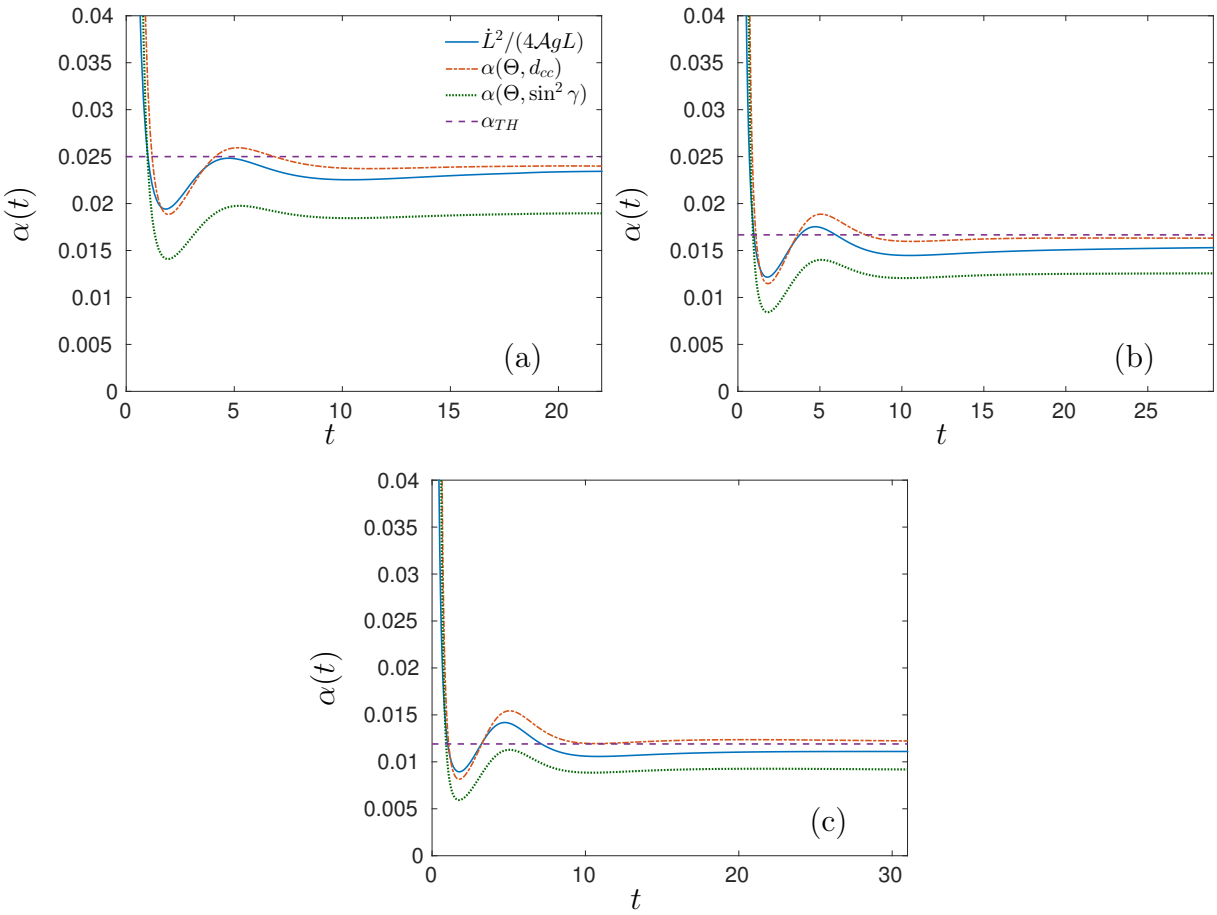


FIGURE 5.2 – Comparaison des taux de croissance pour les cas (a) $s = 2$, (b) $s = 3$ et (c) $s = 4$. On trace la valeur théorique α_{TH}, le taux de croissance basé sur la taille de la zone de mélange $\dot{L}^2/(4\mathcal{A}gL)$ et l'expression du taux de croissance $\alpha(\Theta)$.

3% pour les trois cas $s = 2$, 3, 4. L'expression $\alpha(\Theta, \sin^2\gamma)$ montre une évolution semblable aux autres courbes. Cependant, le taux de croissance est sous-estimé avec un écart de 24% sur la valeur finale pour les trois cas. On peut expliquer cet écart, notamment par rapport à la formule $\alpha(\Theta,d_{cc})$, par le fait que $\sin^2\gamma$ ne prend en compte que l'anisotropie du champ de concentration tandis que d_{cc} inclut les effets du mode dominant. La formule de GRÉA [38] a également été développée dans un cas à très forte accélération. La stratification n'est pas aussi forte dans notre cas. Cela peut expliquer la différence notable entre les deux formules basées sur Θ.

Ces résultats confirment la validité de la prédiction théorique de POUJADE et PEYBERNES [98]. On retrouve également le bon comportement du taux de croissance basé sur le taux de mélange Θ. La sous-estimation de α basé sur la longueur de la zone de mélange montre l'effet des modes non pris en compte dans le développement basé sur le mode dominant. Les mesures du taux de mélange et de l'anisotropie d_{cc} intervenant dans l'équation du taux de croissance (5.41) permettent d'estimer de façon précise le taux de

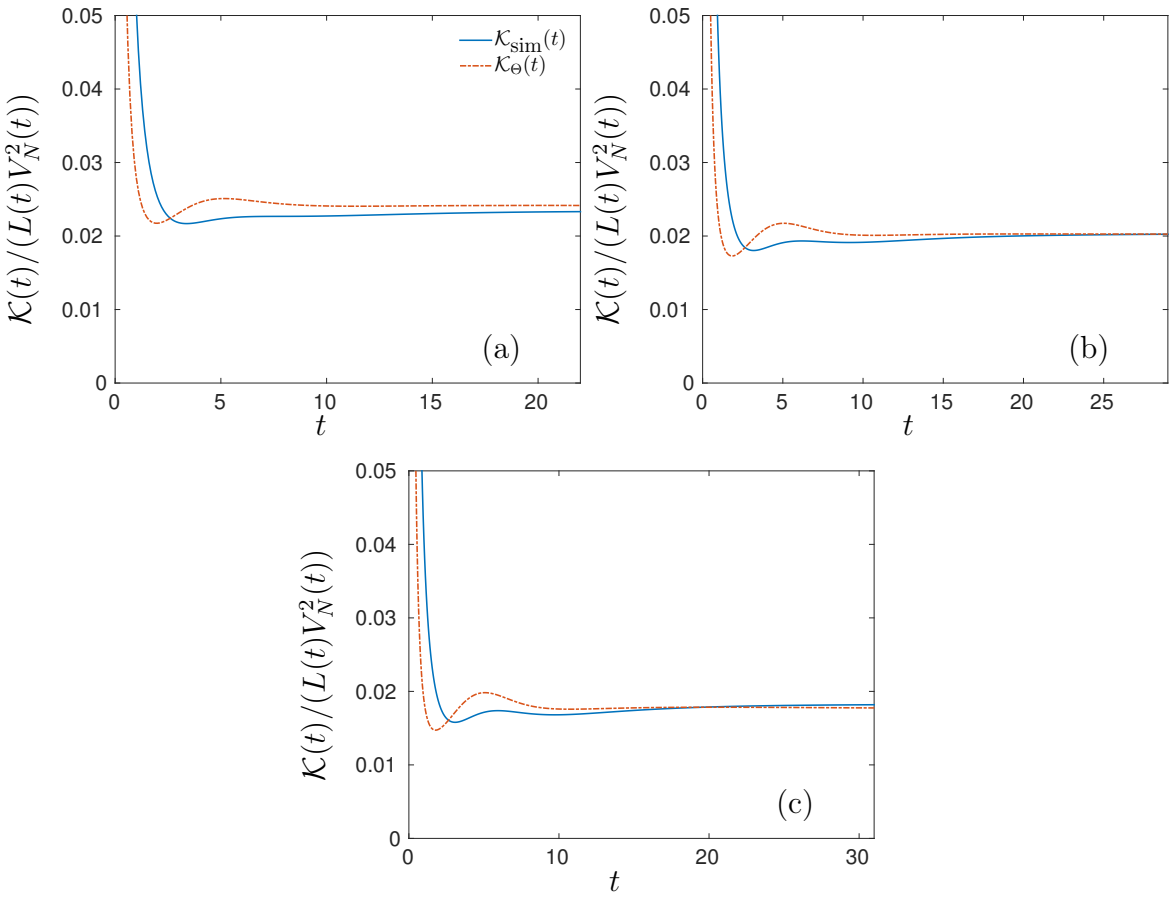


FIGURE 5.3 – Énergie cinétique adimensionnée $\mathcal{K}_{\text{sim}}$ en trait plein et à partir de l'expression $\mathcal{K}_{\Theta}$ en trait discontinu pour les trois cas : (a) $s = 2$, (b) $s = 3$ et (c) $s = 4$.

croissance.

On trace à la figure 5.3 l'évolution de l'énergie cinétique adimensionnée par la vitesse de flottaison pour les trois cas $s = 2$, $s = 3$ et $s = 4$. On additionne les deux équations (5.43) et (5.44) afin d'obtenir l'évolution de l'énergie cinétique fonction du taux de mélange Θ. On observe une évolution semblable au taux de croissance α. On note quelques différences tout de même. Le minimum est atteint à $t = 2$ pour la formule basée sur Θ et $t = 4$ pour l'énergie cinétique extraite de la simulation. Une convergence vers une valeur commune est visible sur les trois cas. La concordance au temps long est très bonne. On note que l'énergie cinétique croise la courbe de la formule basée sur Θ pour le cas $s = 4$ à la figure 5.3(c). Au temps long, il est possible que la formule sous-estime la valeur réelle. Mais la croissance reste faible et l'accord reste très bon.

La différence au temps court peut être imputée à l'action des modes négligés. En effet, le mode dominant n'est pas suffisamment fort par rapport aux autres en début de calcul. Cela freine la croissance de l'énergie cinétique. L'effet du mode dominant devient prépondérant à mesure que l'écoulement évolue et domine finalement l'évolution de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$.

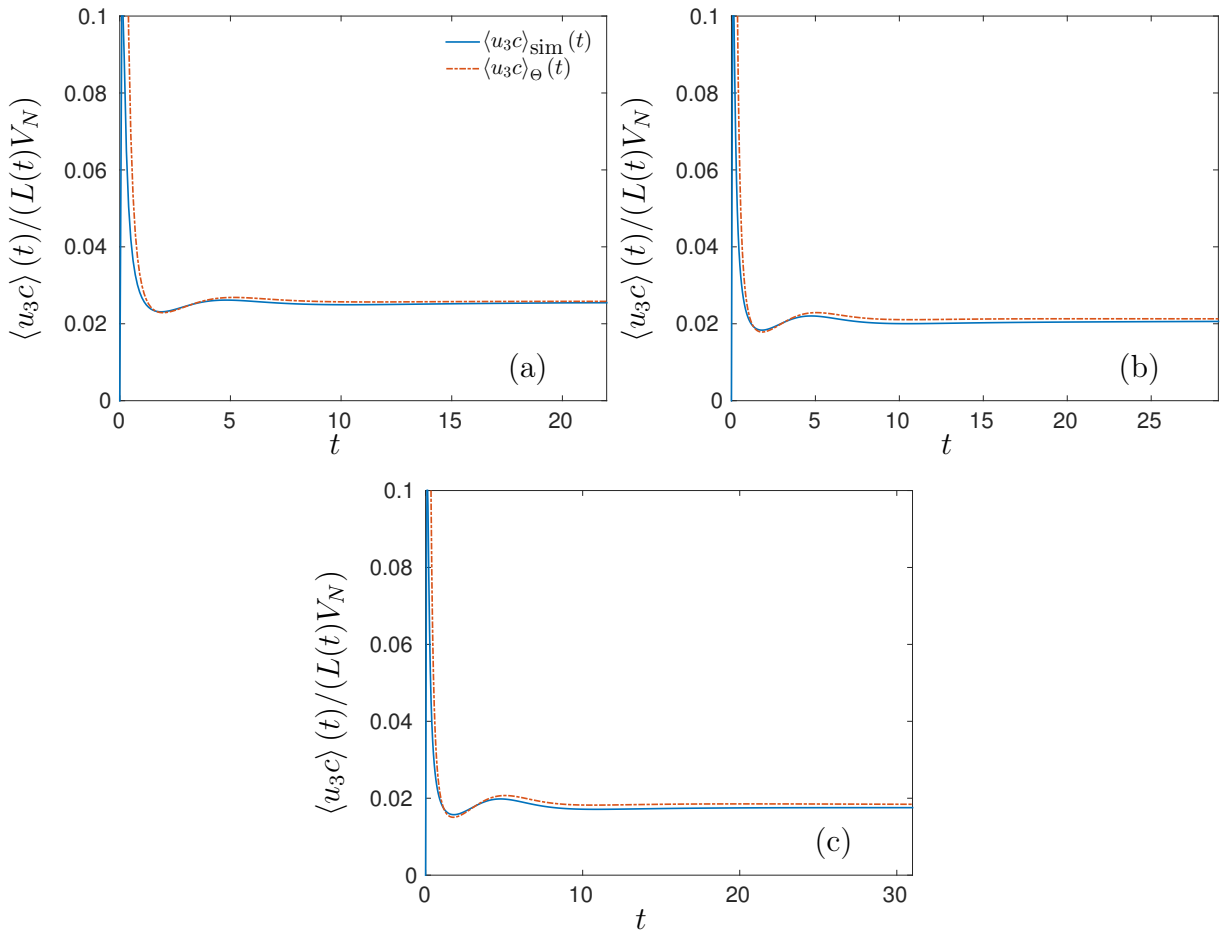


FIGURE 5.4 – Flux vertical $\langle u_3 c\rangle$ adimensionné en trait plein et expression basée sur le taux de mélange Θ en trait discontinu pour (a) $s = 2$, (b) $s = 3$ et (c) $s = 4$.

La figure 5.4 montre l'évolution du flux vertical adimensionné conjointement à l'expression (5.45) basée sur le taux de mélange Θ. L'accord est excellent pour les trois cas, même au temps court. Le flux vertical est donc principalement contrôlé par ce mode dominant. En effet, il fait intervenir la composante verticale de la vitesse poloïdale φ_2 qui contribue majoritairement au flux vertical. L'estimation basée sur le mode dominant est donc bien adaptée pour le flux vertical.

On présente à la figure 5.5 l'évolution, en fonction du taux de mélange Θ, du taux de croissance α (figure 5.5a), de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ (figure 5.5b) et du flux vertical $\langle u_3 c\rangle$ (figure 5.5c). On trace un domaine de validité défini par les deux courbes en trait pointillé noir. Elles correspondent aux cas limites isotrope et anisotrope du mode dominant. On observe que les trois quantités sont bien comprises entre ces deux bornes. On ajoute un agrandissement sur les variations finales de chaque variable. On note une stabilisation des oscillations, signe probable de l'état autosemblable.

On présente enfin les mesures de l'anisotropie déjà évoquées dans les chapitres précédents avec le déviateur du tenseur de Reynolds b_{33} (figure 5.6a) et l'anisotropie du champ de

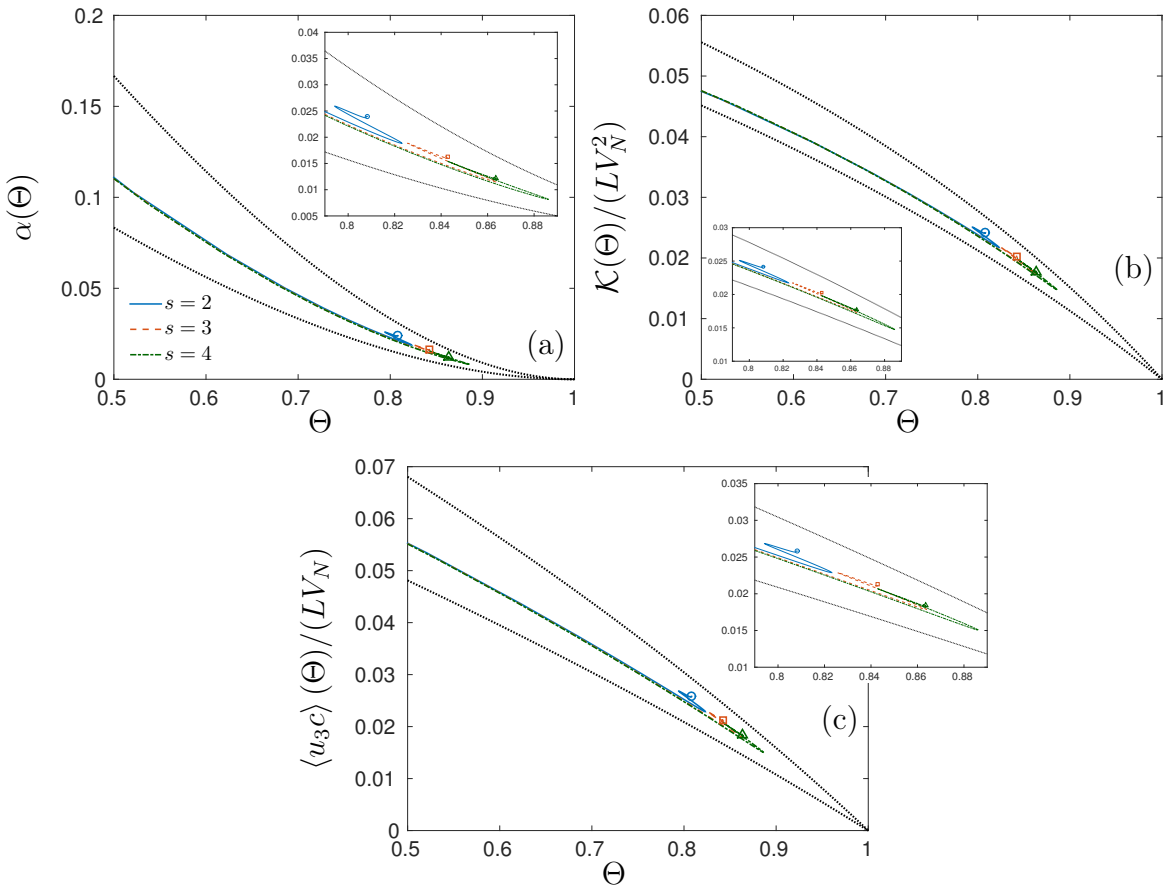


FIGURE 5.5 – Domaines de validité des valeurs admissibles en fonction du taux de mélange Θ pour (a) le taux de croissance α ; (b) l'énergie cinétique $\mathcal{K}$; et (c) le flux vertical de concentration $\langle u_3 c\rangle$. La courbe inférieure en pointillé représente la limite dans le cas isotrope, la courbe supérieure en pointillé la limite anisotrope où l'écoulement est purement 2D. Les symboles indiquent la dernière valeur de chaque cas. En insert : un zoom sur les variations finales.

concentration $\sin^2\gamma$ (figure 5.6b). Les trois cas $s = 2$, $s = 3$ et $s = 4$ présentent une évolution similaire à leur équivalent à fréquence N fixée du chapitre 4. On obtient toujours trois valeurs différentes en fonction de la distribution initiale d'énergie. On observe un net plateau à la figure 5.6(a) pour les cas $s = 3$ et $s = 4$ tandis que le cas $s = 2$ présente encore une légère croissance. Les différentes courbes de $\sin^2\gamma$ présentent toutes une croissance malgré l'état autosemblable. On observait déjà ce comportement au temps long pour le cas à fréquence N constante.

Les valeurs finales de b_{33} sont proches des estimations en turbulence Rayleigh-Taylor. Par rapport aux résultats de la section 4.3.3, les valeurs de b_{33} sont légèrement inférieures au cas à fréquence N fixe. On a ici $b_{33} \simeq 0{,}35$ pour $s = 2$ et $b_{33} \simeq 0{,}4$ dans l'étude précédente. L'effet de la stratification est plus faible du fait de la rétroaction de la turbulence qui tend à diminuer la fréquence de flottaison N. Cela induit donc une croissance plus faible de

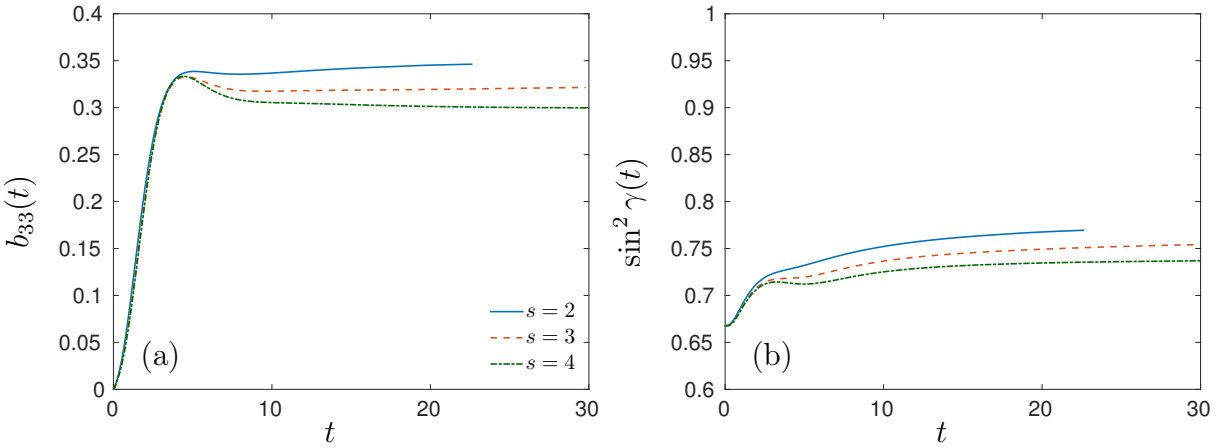


FIGURE 5.6 – Calcul de l'anisotropie pour les trois cas $s = 2$, $s = 3$ et $s = 4$: (a) composante $b_{33}(t)$ du déviateur du tenseur de Reynolds ; (b) anisotropie du scalaire $\sin^2\gamma(t)$.

l'anisotropie dans l'écoulement.

5.4.3 Bilan

Ces résultats viennent conforter les prédictions théoriques et numériques déjà obtenues par GRÉA [38] et SOULARD et al. [113]. Les équations qu'ils ont pu établir en mettant en relation le taux de mélange Θ et les quantités turbulentes sont très utiles dans la modélisation des écoulements Rayleigh-Taylor. En effet, ce taux de mélange est un paramètre que l'on peut extraire des expériences et des simulations numériques étudiant le développement du mélange Rayleigh-Taylor. GRÉA [38] a repris les résultats d'un certain nombre d'entre elles et montré la validité de l'estimation du taux de croissance α en fonction du taux de mélange Θ et de l'anisotropie du champ de concentration. Ces formules sont utiles dans l'établissement de modèle réduit pour la simulation d'écoulements Rayleigh-Taylor dans des applications d'ingénierie. Elles nous ont également permis de valider la prise en compte par le modèle EDQNAM de l'effet de la turbulence sur le gradient moyen.

On utilise maintenant ce modèle pour étudier l'influence d'un changement du profil d'accélération.

5.5 Effets d'accélération variable sur la croissance de la zone de mélange

On s'intéresse maintenant à un cas limite de variation d'accélération : un profil en créneau où deux phases d'accélération sont séparées par une phase de décélération. Cette configuration rappelle les études expérimentales de DIMONTE et al. [29] ainsi que l'équivalent numérique de RAMAPRABHU et al. [100]. Dans leur cas, un profil continu fait

alterner la configuration entre accélération et décélération. LIVESCU et al. [78] ont également entrepris d'étudier l'influence du renversement de l'accélération sur un mélange Rayleigh-Taylor.

On présente les paramètres d'initialisation de l'étude à la section 5.5.1 et les résultats de simulation à la section 5.5.2.

5.5.1 Initialisation

On prend exemple sur les simulations de LIVESCU et al. [78] de turbulence Rayleigh-Taylor afin de calibrer les calculs EDQNAM. Ils ont effectué une étude préliminaire sur l'influence du renversement de l'accélération sur une zone de mélange. On cherche à reprendre une condition initiale proche dans la mesure du possible afin de pouvoir comparer qualitativement la croissance de la taille de la zone de mélange avec leurs résultats.

La définition de cet état initial s'est avérée particulièrement difficile. En effet, comme les différences initiales entre la turbulence USH et l'écoulement de Rayleigh-Taylor sont nombreuses. Tout d'abord, la turbulence USH suppose une taille de zone de mélange non nulle initialement tandis que l'écoulement de Rayleigh-Taylor démarre sans zone de mélange, avec seulement une interface entre les deux fluides. L'énergie cinétique turbulente est également nulle pour Rayleigh-Taylor. L'inhomogénéité et la présence d'un écoulement moyen ajoutent également des sources de divergence. La définition des nombres sans dimension de l'écoulement est différente car nous les calculons à partir des quantités fluctuantes quand ils sont définis sur l'écoulement moyen en Rayleigh-Taylor. On va chercher un compromis entre des conditions proches des simulations Rayleigh-Taylor et des simulations que l'on a menées jusqu'à maintenant.

On réutilise l'expression analytique donnée à l'équation (5.46) pour initialiser le spectre d'énergie $E(k,t)$ et le spectre de variance de flottaison $B(k,t)$. On se restreint ici au cas $s = 2$ avec $k_{\text{pic}} = 20$.

On choisit une énergie cinétique initiale $\mathcal{K} = 1$ et un paramètre $\Lambda = 1$, proche des conditions de simulation que nous avons déjà étudiées.

Le nombre de Froude initial dans l'étude de LIVESCU et al. [78] est de l'ordre de $Fr \sim 0{,}02$. Leur définition du nombre de Froude est différente de la nôtre. Il est défini sur des quantités moyennes tandis que nous l'avons défini sur des fluctuations. On essaye malgré tout de conserver une certaine cohérence. On choisit $Fr = 0{,}6$ qui correspond la valeur finale obtenue par GRIFFOND et al. [45] en turbulence USH à N variable. On définit ainsi avec une fréquence de flottaison $N = 2$ correspondant à une taille de zone de mélange $L = 0{,}25$.

Le nombre de Reynolds de leur étude est également défini sur des quantités moyennes et vaut initialement $Re = 500$. On choisit de conserver un nombre de Reynolds élevé, $Re = 833$ avec $\nu = 10^{-3}$.

Le temps t_1 de passage de la phase instable à la phase stable, c'est-à-dire du renversement de l'accélération, est choisi $t_1 = 2{,}5$, proche au choix fait par LIVESCU et al. [78]. Le second temps t_2, associé au basculement décélération vers accélération, est défini à partir du flux de flottaison. On rappelle que l'on cherche à évaluer s'il a une importance dans la phase de re-croissance de la taille de la zone de mélange. On effectue un calcul sans le second renversement afin de laisser évoluer l'écoulement en stratification stable. À partir de ce résultat, on a choisi les différentes valeurs de t_2 par rapport au premier minimum et premier maximum des oscillations du flux de flottaison en phase stable. Ces temps sont les bornes des valeurs t_2 évalués dans cette étude, à savoir $t_2 = 5{,}2$ et $t_2 = 7{,}7$ avec un pas de reprise $\Delta t = 0{,}2$. Ces différents temps de reprise sont représentés par des traits verticaux à la figure 5.7. On regarde principalement trois cas dans les résultats de la section 5.5.2 : ce sont les cas de reprise à $t_2 = 5{,}2$, $t_2 = 6{,}2$ et $t_2 = 7{,}7$. On fait référence aux différents cas sous les noms, *run* 1, *run* 2, etc. où le *run* 1 correspond à la reprise à $t_2 = 5{,}2$, le *run* 2 à la reprise à $t_2 = 5{,}2 + 0{,}2$, le *run* 3 $t_2 = 5{,}2 + 2 \times 0{,}2$ etc. Les trois temps mentionnés précédemment sont donc les *runs* 1, 6 et 14. On détaille à la section 5.5.2.1 pourquoi on s'attache à ces trois cas.

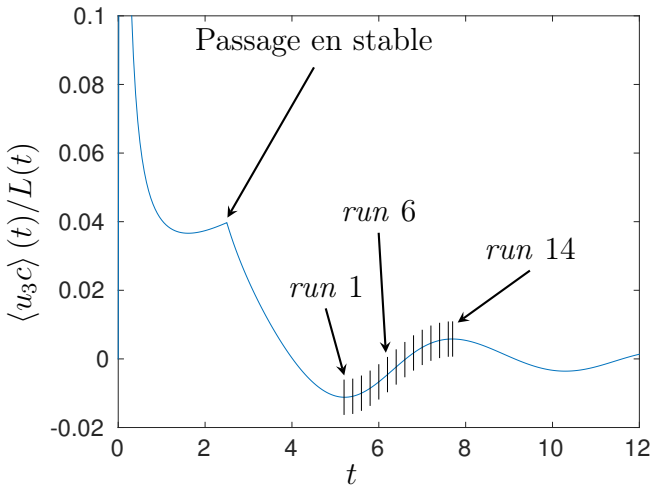


FIGURE 5.7 – Différents temps de reprise de la phase d'accélération en fonction du flux de concentration. Chaque trait vertical correspond à un *run*, l'intervalle entre deux traits est $\Delta t = 0{,}2$, sauf entre les deux derniers où il est de $\Delta t = 0{,}1$. Pour chaque *run*, le basculement entre décélération et accélération est fait à un temps différents.

5.5.2 Résultats

On présente les résultats de simulation en quatre points. On regarde d'abord l'évolution de la taille de la zone de mélange à la section 5.5.2.1, puis celle de l'énergie cinétique, de la variance de concentration et du flux vertical de concentration à la section 5.5.2.2.

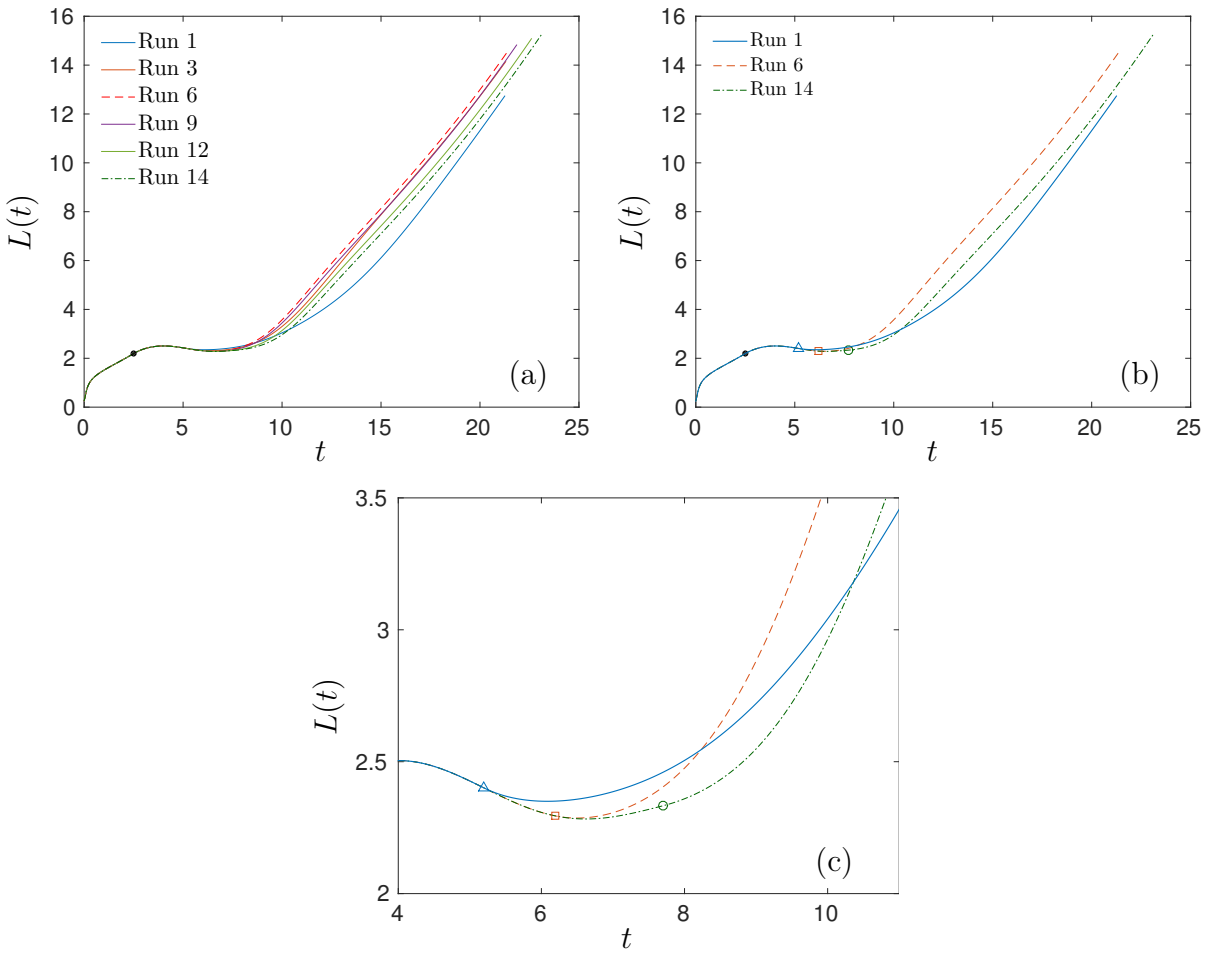


FIGURE 5.8 – Évolution temporelle de la taille de la zone de mélange L : (a) pour l'ensemble des cas ; (b) pour les *runs* 1, 6 et 14 ; (c) pour les *runs* 1, 6 et 14 avec un zoom sur le croisement des courbes. Le point • sur la figure (a) marque le passage en phase stable. Sur les figures (b) et (c), on a représenté les temps de reprise par un triangle △ pour le *run* 1, un carré □ pour le *run* 6 et un cercle ∘ pour le *run* 14.

On analyse l'évolution des taux de mélange et de croissance à la section 5.5.2.3 avant de terminer par la caractérisation de l'anisotropie à la section 5.5.2.4.

5.5.2.1 Croissance de la taille de la zone de mélange

On trace la croissance de la taille de la zone de mélange à la figure 5.8 pour l'ensemble des cas (figure 5.8a) et pour les *runs* 1, 6 et 14 (figure 5.8b). On présente également un zoom autour des temps de reprise à la figure 5.8(c). On a symbolisé le passage à la stratification stable par un point à $t = 2{,}5$ sur la figure 5.8(a). La taille de la zone de mélange croît rapidement en début de calcul, passant de $L \simeq 0{,}25$ à $L \simeq 1$ à $t = 0{,}3$. Un changement de régime apparaît et fait croître la longueur L jusqu'à $L \simeq 2{,}5$ à $t = 4$. On note que le maximum est atteint après le changement de signe de l'accélération. Cette

évolution peut s'expliquer par l'inertie du flux de concentration qui ne change pas de signe instantanément. Tant que le flux reste positif, la taille de la zone de mélange augmente. On observe ensuite que la longueur L décroît et entre en régime oscillant amorti. On a finalement tracé de $t = 5{,}2$ à $t = 7{,}7$ l'ensemble des temps auxquels l'accélération devient de nouveau positive. L'ordre de grandeur de la taille de la zone de mélange à $t = 2{,}5$ est identique aux simulations de Livescu et al. [78] puisqu'ils évaluent la longueur de la zone de mélange $L \simeq 2{,}1$ à $t = 2{,}5$. La croissance suite au basculement est cependant moins forte. L'inertie du flux de concentration est donc vraisemblablement moins forte.

On observe sur cette première figure, qu'à l'exception du *run* 1, l'ensemble des cas semble aboutir à une croissance identique de la taille de la zone de mélange avec seulement un décalage en fonction du temps de reprise de la phase instable. Cependant, en comparant cas par cas, on voit que le *run* 6 avec la reprise à $t = 6{,}2$ représente une borne supérieure. Ce cas montre la croissance la plus forte de la taille de la zone de mélange. À l'inverse, le *run* 1 avec la reprise à $t = 5{,}2$ montre la croissance la plus lente.

On voit très nettement la différence à la reprise sur la figure 5.8(c). La courbe de croissance du *run* 6 croise celle du *run* 1 à $t \simeq 8$. On note également que la taille de la zone de mélange est légèrement plus faible à la reprise du *run* 6, au temps $t = 6{,}2$, qu'à la reprise du *run* 1, à $t = 5{,}2$. Cela n'empêche pas le *run* 6 de croître plus rapidement. Par contre, la reprise à $t = 7{,}7$ du *run* 14 ne permet pas de dépasser la croissance du *run* 6 : ce dernier conserve son « avance ».

Avec des reprises échelonnées entre le minimum du flux de concentration et le maximum, la configuration qui croît le plus fortement se trouve entre les deux. On compare à la figure 5.9 les conditions de reprise de chacun de ces trois cas.

5.5.2.2 Évolution des statistiques en un point

La figure 5.9(a) montre l'évolution de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, la figure 5.9(b) l'évolution de la variance de concentration $\langle cc \rangle$ et la figure 5.9(c) le flux vertical de concentration $\langle u_3 c \rangle$. On a divisé chaque quantité par la longueur L de la zone de mélange afin d'obtenir les différents états asymptotiques, en t^2 pour l'énergie cinétique, vers une constante pour la variance de concentration et en t pour le flux vertical de concentration.

On voit nettement sur les trois figures le changement de régime à $t = 2{,}5$ lors du changement de signe de l'accélération. Les trois quantités entrent alors dans un régime où l'on observe des oscillations en opposition de phase entre l'énergie cinétique et la variance de concentration. Ce comportement est caractéristique de la stratification stable [36, 115]. Le flux de concentration oscille également et est décalé par rapport à l'énergie cinétique : il atteint son minimum à $t = 5{,}2$ lorsque l'énergie cinétique se situe entre un minimum et un maximum.

Lors de la reprise à $t = 6{,}2$ du *run* 6, on observe que la reprise se situe à un maximum

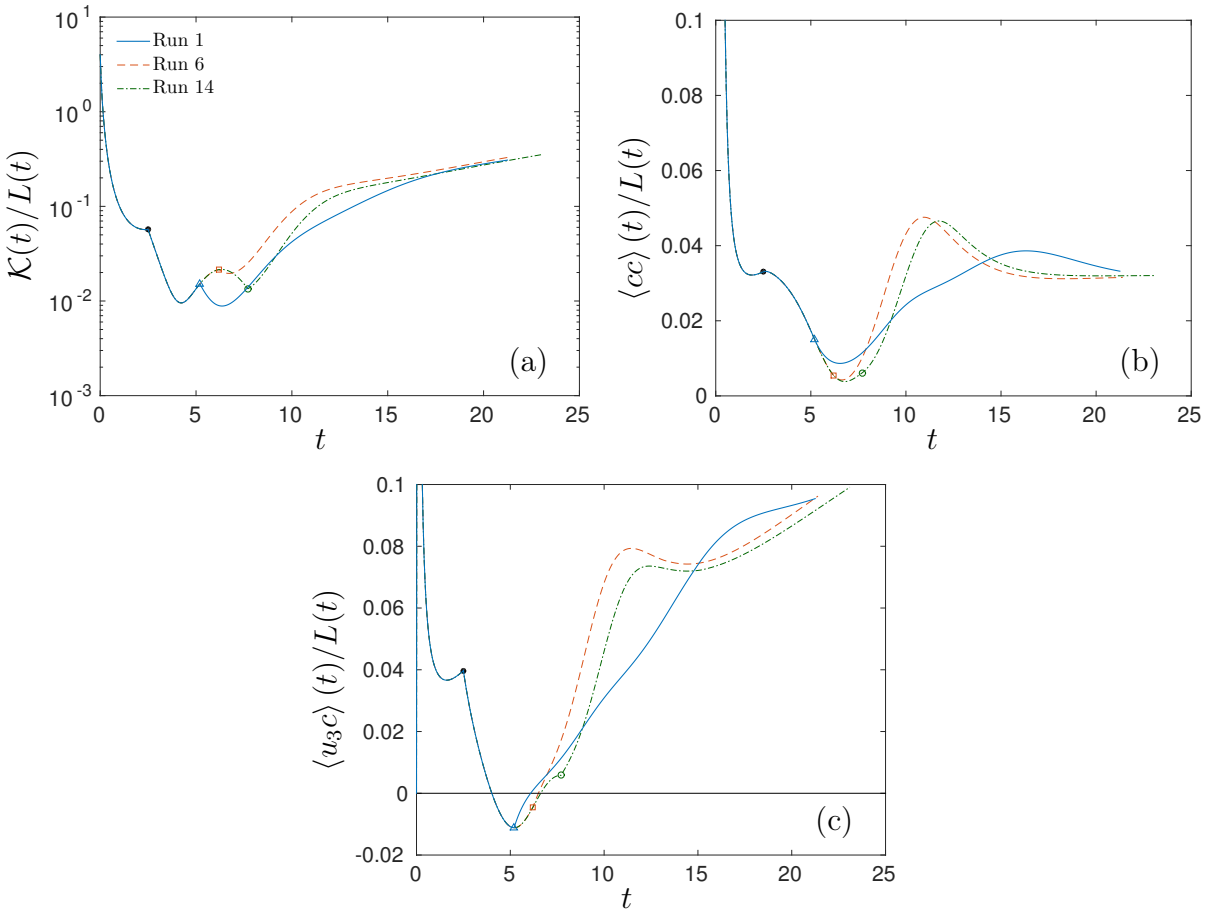


FIGURE 5.9 – Évolution temporelle de : (a) l'énergie cinétique $\mathcal{K}/L(t)$; (b) la variance de concentration $\langle cc\rangle/L(t)$; (c) le flux vertical de concentration $\langle u_3c\rangle/L(t)$. On a représenté les temps de reprise par un triangle △ pour le *run* 1, un carré □ pour le *run* 6 et un cercle ∘ pour le *run* 14.

d'énergie cinétique et quasiment à un minimum de variance de concentration. Ce maximum d'énergie cinétique semble permettre à la zone de mélange de croître plus rapidement. On voit également que le flux de concentration est négatif pour la reprise du *run* 1. Cela a pour effet de retarder la croissance de la zone de mélange car l'inertie tend à maintenir la zone de mélange dans une phase de contraction. Le flux de concentration positif du *run* 14 indique que la zone de mélange est déjà en phase de croissance lors du changement de signe de l'accélération. Cela ne semble pas permettre de « rattraper » le *run* 6 pour autant. On voit également que la reprise du *run* 1 en phase instable s'accompagne d'une brusque chute de l'énergie cinétique. Cet effet est lié au changement de signe de l'accélération. On a un flux vertical négatif avec une accélération positive qui tend donc à diminuer l'énergie cinétique. Le minimum de l'énergie cinétique coïncide avec l'instant où le flux est nul. Une fois le flux vertical positif, l'énergie cinétique reprend sa croissance car l'accélération est également positive.

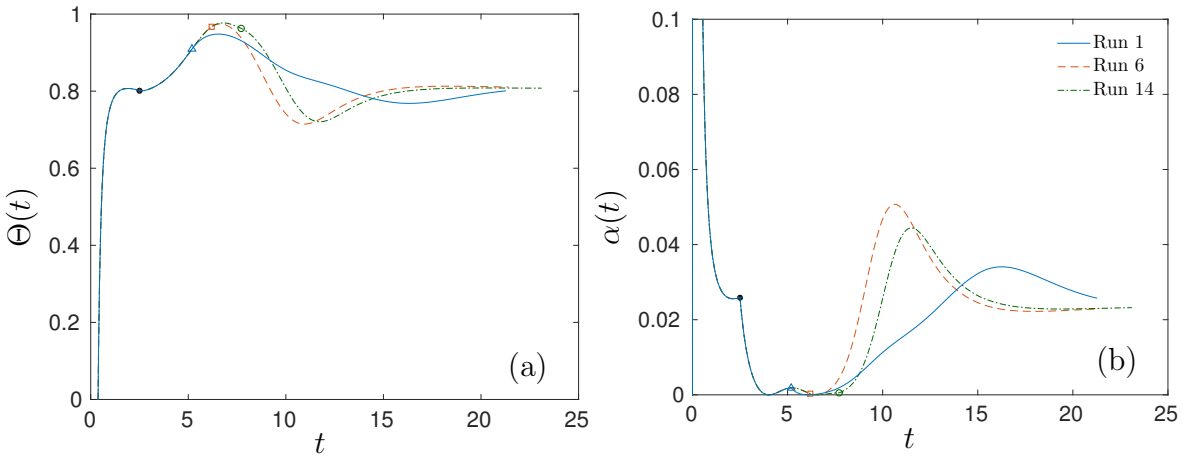


FIGURE 5.10 – Évolution temporelle : (a) du taux de mélange Θ ; (b) du taux de croissance α pour les *runs* 1, 6 et 14.

On voit que les trois cas tendent vers un même état autosemblable, surtout pour l'énergie cinétique et la variance de flottaison. Le flux vertical n'est pas encore établi autour d'un profil unique.

5.5.2.3 Dynamique des taux de mélange et de croissance

On trace le taux de mélange Θ et le taux de croissance α aux figures 5.10(a) et (b). Le premier montre une croissance très rapide en début de calcul jusqu'à une stabilisation à $t = 2$ autour de $\Theta = 0{,}8$. Lors du changement de signe de l'accélération vers une phase de décélération, on voit que le taux de croissance augmente rapidement pour atteindre une valeur maximum $\Theta \simeq 0{,}98$. La reprise du *run* 1 se fait à $\Theta \simeq 0{,}9$. Après une légère croissance, le taux de mélange de l'écoulement diminue jusqu'à un minimum $\Theta \simeq 0{,}77$ avant de tendre vers une valeur finale $\Theta = 0{,}8$. La reprise du *run* 6 se fait juste avant d'atteindre le maximum à $\Theta \simeq 0{,}97$. Le *run* 6 montre ensuite une rapide décroissance jusqu'à $\Theta \simeq 0{,}71$ à $t \simeq 11$. Le taux de mélange croît ensuite pour converger vers $\Theta \simeq 0{,}8$. L'évolution du *run* 14 est similaire à celle du *run* 6 avec seulement un décalage en temps correspondant au temps qui sépare les changements de signe de l'accélération dans les deux cas ($\Delta t \simeq 2{,}5$). Cette valeur finale $\Theta \simeq 0{,}8$ est très proche de la valeur théorique finale prédite déjà obtenue à la section précédente pour la pente initiale $s = 2$. On observe que l'on atteint très rapidement cette valeur avant même le premier basculement de l'accélération. On retrouve cette valeur en fin de calcul lorsque l'état autosemblable est atteint.

Le taux de croissance α croît très fortement dès le premier pas de temps avant de diminuer pour atteindre $\alpha \simeq 0{,}026$, valeur très proche de l'estimation théorique. Lors du changement de signe vers la phase stabilisatrice à $t = 2{,}5$, le taux de croissance diminue

pour être quasiment nul ($\alpha < 10^{-6}$) à $t \simeq 4$, temps auquel le flux vertical de concentration s'annule. Il croît ensuite très légèrement pour atteindre un maximum local correspondant au minimum du flux de concentration à $t = 5{,}2$, temps auquel la reprise du *run* 1 se fait.

Pour les deux autres cas, le taux de croissance diminue encore pour s'annuler de nouveau lorsque le flux de concentration change de nouveau de signe et redevient positif. On observe de très faibles oscillations qui tendent vers zéro, signe que la zone de mélange tend à se stabiliser autour d'une valeur limite. Le taux de croissance pour le *run* 1 suit l'évolution du flux de concentration, diminue et s'annule avant de croître faiblement vers un maximum $\alpha \simeq 0{,}034$ à $t = 16$. Il décroît ensuite vers la valeur finale proche de $\alpha \simeq 0{,}025$. Le *run* 6 croît beaucoup plus vite malgré la valeur très faible du taux de croissance. Il atteint un maximum à $\alpha \simeq 0{,}05$ à $t \simeq 10$ puis décroît rapidement pour se stabiliser également autour de la valeur théorique finale. L'évolution du taux de croissance pour le *run* 14 est semblable au précédent. Ils semblent tous converger vers un état autosemblable unique.

5.5.2.4 Anisotropie : déformation des structures

On présente les deux mesures d'anisotropie b_{33} et $\sin^2\gamma$ respectivement aux figures 5.11(a) et (b). On rappelle que la première se concentre sur le champ de vitesse et la seconde sur le champ de concentration.

La figure 5.11(a) montre d'abord une croissance de l'anisotropie jusqu'à $b_{33} \simeq 0{,}27$ à $t = 2{,}5$. Le basculement de l'accélération entraîne une forte décroissance qui fait changer de signe b_{33} à $t \simeq 3{,}5$ pour atteindre une valeur minimum $b_{33} = -0{,}1$ à $t = 4$, temps auquel le flux de flottaison change de signe. Le déviateur croît ensuite très rapidement jusqu'à atteindre un maximum $b_{33} \simeq 0{,}31$ à $t \simeq 6{,}2$ correspondant au maximum d'énergie cinétique. Il entre ensuite en phase d'oscillation en suivant l'évolution de l'énergie cinétique. Le changement de signe de b_{33} du positif au négatif indique que l'énergie bascule d'une concentration autour de l'axe vertical ($b_{33} > 0$) vers le plan horizontal ($b_{33} < 0$). Ce changement est lié aux effets de la stratification stable. Dans cette configuration stable, déjà évoquée à la section 4.3.3.1, l'énergie se concentre autour de l'axe vertical spectral et est dominer par le mode toroïdal de la vitesse.

Le *run* 1 reprend dans une phase de croissance de b_{33} mais diminue rapidement jusqu'à $b_{33} \simeq 0{,}12$ à $t = 6{,}2$, temps auquel le flux de concentration s'annule pour ce *run* 1. Il croît de nouveau pour se stabiliser autour de $b_{33} \simeq 0{,}35$. Le *run* 6 reprend au maximum de b_{33} à $t = 6{,}2$. On observe une nouvelle croissance qui amène l'anisotropie du champ de vitesse jusqu'à $b_{33} \simeq 0{,}46$ à $t \simeq 9$. Elle décroît ensuite vers la même valeur asymptotique proche de $b_{33} \simeq 0{,}35$. Le *run* 14 montre une croissance dès le changement de signe malgré la dynamique descendante de b_{33}. Cette croissance s'arrête à $t \simeq 10$ pour $b_{33} \simeq 0{,}43$. Il tend finalement vers la limite précédente.

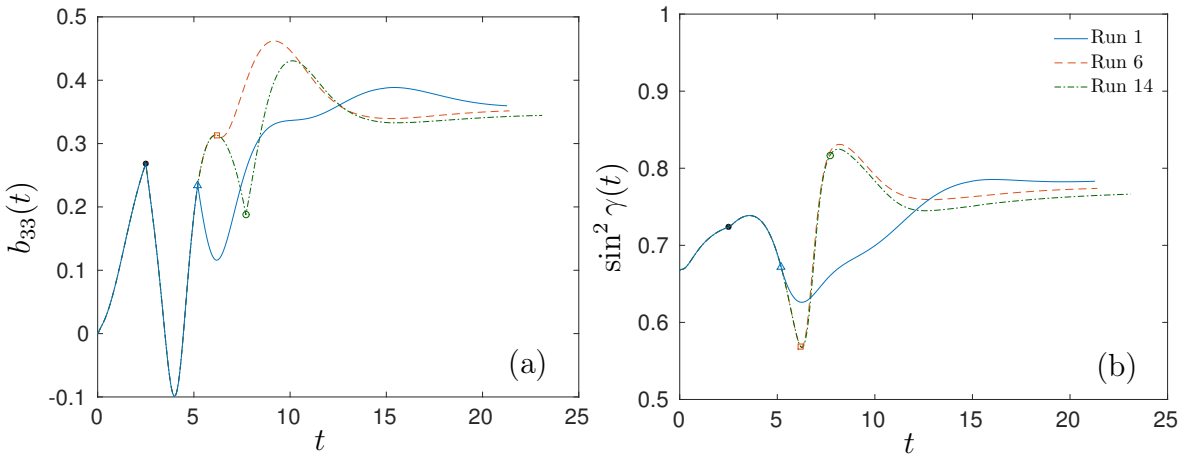


FIGURE 5.11 – Évolution temporelle (a) du déviateur du tenseur de Reynolds b_{33} et (b) du paramètre de dimensionnalité $\sin^2\gamma$ pour les *runs* 1, 6 et 14.

La croissance plus forte du *run* 6 suggère que les structures déjà étirées dans l'axe vertical le sont encore plus au moment du changement de signe de l'accélération. Cet effet ne dure qu'un temps relativement court mais semblent favoriser la croissance de la taille de la zone de mélange.

L'évolution de $\sin^2\gamma$ à la figure 5.11(b) montre une croissance initiale accentuée lors du passage en phase de stratification stable jusqu'à atteindre un maximum à $\sin^2\gamma \simeq 0{,}74$ à $t = 3{,}6$. Une nette décroissance apparaît ensuite jusqu'à atteindre un minimum à $t = 6{,}2$ pour $\sin^2\gamma = 0{,}57$. Ce minimum correspond au maximum d'énergie cinétique, et presque au minimum de variance de flottaison. On observe que la reprise à $t = 5{,}2$ du *run* 1 freine la décroissance jusqu'à $\sin^2\gamma \simeq 0{,}63$ avant de croître jusqu'à atteindre une valeur finale proche de $\sin^2\gamma \simeq 0{,}79$ à $t \simeq 15$ et de s'y tenir jusqu'à la fin du calcul.

Le *run* 6 change de signe au moment où $\sin^2\gamma$ est inférieur à $2/3$. Cela semble indiquer que les structures du champ scalaire n'ont plus la forme de structures allongées dans l'axe vertical mais plutôt une forme aplatie dans le plan horizontal. On observe que le paramètre de dimensionnalité $\sin^2\gamma$ croît fortement dès cette reprise de la phase d'accélération et suit exactement la dynamique du cas stable qui se poursuit. On voit en effet que le *run* 14 qui est toujours en phase stable a un paramètre de dimensionnalité qui croît. Cette croissance s'arrête pour les deux cas à $t \simeq 8$, peu après la reprise en phase instable du *run* 14.

5.5.3 Bilan

On a mis en évidence dans cette section que le temps de reprise en phase d'accélération joue un rôle non négligeable sur la croissance de la taille de la zone de mélange. D'après RAMAPRABHU et al. [100], lorsque le taux de mélange atteint un maximum dans la phase stabilisatrice, la croissance de la zone de mélange est repoussée et la longueur de la zone

de mélange augmente moins fortement. Nos résultats sont différents et ne vont pas vers les mêmes conclusions. En effet, le *run* 6, qui montre la croissance la plus rapide, est justement celui avec le taux de mélange le plus élevé. Le *run* 1, par contre, affiche une croissance réduite de la taille de la zone de mélange. Faire basculer l'accélération lorsque le flux de concentration atteint sa valeur minimum (négative) semble permettre de retarder la croissance de la zone de mélange. Ces résultats sont néanmoins à confirmer car ils amènent à des conclusions différentes des résultats du modèle d'accélération rapide (RAM) [38]. Une explication envisageable peut venir du nombre de Froude qui n'est pas suffisamment faible dans notre cas. Le modèle RAM s'appuie justement sur une accélération très forte synonyme d'un nombre de Froude très faible. Ce modèle linéaire s'applique également sur des temps très courts. Il est possible que cette dynamique soit reproduite dans notre cas mais rapidement masquée par les effets non linéaires. De plus amples comparaisons sont donc nécessaires.

Une étape importante sera également la confrontation aux profils analytiques et expérimentaux des expériences de DIMONTE et al. [29] et RAMAPRABHU et al. [100] en faisant par exemple varier la raideur de la transition entre accélération et décélération.

5.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que le modèle EDQNAM est à même de prendre en compte les effets de la turbulence sur le gradient moyen de concentration. Les lois d'échelle fonction du taux de mélange Θ décrites par SOULARD et al. [113] en turbulence Rayleigh-Taylor ont permis de valider cette prise en compte. L'accord semble juste et confirme les similitudes entre la turbulence USH et la turbulence Rayleigh-Taylor. De plus amples comparaisons sont prévus afin de mieux caractériser le transitoire dans le modèle spectral.

Une fois ce modèle validé, nous avons étudié les effets de l'accélération sur la croissance de la zone de mélange. On a choisi de tester une variation d'accélération incluant une phase de décélération entre deux phases d'accélération. Cette phase de décélération revient à considérer une période de stratification stable entre deux périodes de stratification instable. Des résultats expérimentaux et numériques ont déjà été obtenus [29, 100] avec cette configuration. Ils concluent que la phase stabilisatrice tend à retarder la croissance de la zone de mélange lors du passage à la seconde phase d'accélération.

Cependant, ils n'ont pas étudié l'influence du temps auquel ce second basculement apparaît. Nous avons montré que ce temps de reprise a une influence non négligeable. Pris au bon moment, dans notre cas sur un minimum local du flux de concentration, on parvient effectivement à retarder la croissance de la zone de mélange. Mais si on laisse la phase stabilisatrice se poursuivre, on remarque que la croissance est nettement plus forte.

Il y a notamment un cas limite se situant sur un maximum local d'énergie cinétique qui croît plus fortement que tous les autres. Ces résultats méritent d'être approfondies car ils semblent être en contradiction avec une étude linéaire comparable. La question du temps de reprise semble néanmoins primordiale si l'on veut contrôler la croissance de la taille de la zone de mélange.

Ces résultats finaux doivent être pris avec précaution du fait des difficultés rencontrées pour définir au mieux l'état initial. Une amélioration de ces conditions initiales permettrait une validation plus précise du comportement décrit par la modélisation. La comparaison quantitative avec des résultats existants est donc la prochaine étape. On espère obtenir ainsi un modèle spectral quantitatif, à même de pouvoir prédire l'évolution d'une taille de zone de mélange.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

L'objectif principal de ces travaux de thèse est d'étudier un écoulement canonique de turbulence soumis à des effets de stratification instable au travers d'un modèle spectral anisotrope de turbulence. Ce modèle fait intervenir la méthode de fermeture EDQNM pour *eddy-damped quasi-normal markovian*. L'emploi de ce modèle spectral pour la turbulence homogène stratifiée instable (turbulence USH) nous a permis de mieux comprendre l'évolution d'une zone de mélange turbulent, semblable à celle que l'on retrouve au cœur d'un écoulement issu d'une instabilité de Rayleigh-Taylor.

La thèse présentée dans ce manuscrit s'articule autour de trois axes :

— valider un modèle spectral anisotrope pour la turbulence homogène stratifiée instable ;

— étudier l'état autosemblable de la turbulence USH à grand nombre de Reynolds ;

— évaluer la dynamique d'une zone de mélange soumise à des variations d'accélération.

Nous reprenons ici les principales conclusions de nos travaux et donnons quelques éléments de perspective sur les poursuites envisageables.

Modèle spectral anisotrope pour la turbulence USH

Nous avons développé un modèle spectral anisotrope basé sur des statistiques utilisant des moyennes en deux points. Ce modèle nous a permis d'établir un système d'équations basé sur les corrélations doubles et triples de la vitesse et de la concentration pour la turbulence homogène stratifiée instable. La fermeture des termes non linéaires a été faite au moyen d'un modèle EDQNM. Afin de valider ce modèle spectral, nous l'avons comparé à des simulations numériques directes. Ces comparaisons ont montré que le modèle spectral parvenait à décrire l'évolution globale de l'écoulement. Un écart significatif a cependant été identifié entre les deux approches mettant en lumière un problème de modélisation. En effet, dans l'établissement du modèle EDQNM, nous avons supposé que les termes de stratification étaient négligeables dans les équations d'évolution des corrélations triples. Il

est apparu que cette hypothèse empêche de prendre en compte un phénomène apparenté au balayage, *sweeping* en anglais, des petites structures par les plus grandes. Mis en évidence dans le cadre de la turbulence MHD, cet effet tend à diminuer le transfert d'énergie entre les différentes échelles.

Afin de prendre en compte ces effets, nous avons introduit une correction sous la forme d'un terme supplémentaire d'amortissement des corrélations triples, ajouté à l'expression existante de l'amortissement tourbillonnaire. Une fois cette correction calibrée, les comparaisons entre le modèle EDQNM corrigé et les simulations directes ont été renouvelées. Le modèle corrigé a finalement permis de reproduire la dynamique de la turbulence homogène stratifiée instable. Cependant, le nombre de Reynolds caractérisant le régime turbulent est limité du fait du confinement des structures turbulentes. Un avantage du modèle spectral anisotrope par rapport aux simulations directes est la possibilité de s'affranchir de ces effets de confinement en considérant un domaine de simulation plus grand, tout en conservant un coût de calcul plus faible. Nous avons ainsi pu mettre en évidence, grâce au modèle spectral anisotrope, l'apparition du régime asymptotique autosemblable à grand nombre de Reynolds. La dynamique asymptotique de la turbulence Rayleigh-Taylor est également autosemblable mais seulement quadratique, tandis que la dynamique de la turbulence USH à gradient fixe est exponentielle. Nous avons ensuite cherché à identifier les caractéristiques de ce régime autosemblable.

États autosemblables en turbulence USH

L'état autosemblable est associé, dans le cas d'un gradient moyen de densité fixe, à un taux de croissance exponentielle β relié à un paramètre décrivant la distribution d'énergie aux grandes échelles, l'exposant s de la loi de puissance aux petits nombres d'onde k. Cette relation s'écrit $\beta = 4/(3+s)$. D'après cette expression, il est possible d'avoir un état autosemblable différent en fonction de l'exposant s. Nous avons cherché à identifier l'influence de ce paramètre sur l'écoulement de la turbulence USH.

Nous avons pu constater que l'état autosemblable final est directement contrôlé par cette distribution initiale d'énergie. Le régime d'écoulement final, caractérisé par les nombres sans dimension, ne tend pas vers un état unique. Nous avons notamment mis en évidence que le nombre de Froude, rapport entre les effets non linéaires de la turbulence et les effets de stratification, ne tend pas vers une valeur unique. Il dépend directement du choix du paramètre s. Par exemple, un exposant faible, indiquant la présence de plus d'énergies aux grandes échelles, fait apparaître un nombre de Froude faible, signifiant que les effets de stratification dominent les effets turbulents.

Nous avons également établi, sur une large gamme de nombres d'onde, que la zone inertielle tend en partie vers une loi d'échelle classique en turbulence, à savoir en $k^{-5/3}$

pour le spectre d'énergie cinétique et le spectre de variance de flottaison et en $k^{-7/3}$ pour le spectre du flux de flottaison. Ce dernier n'affiche pas le même niveau de convergence que les deux autres. À l'image des résultats obtenus en turbulence avec scalaire passif, il apparaît que le nombre de Reynolds relativement élevé ($Re = 10^6$) auquel nous avons étudié l'état autosemblable, n'est pas suffisant pour identifier une convergence nette vers cette loi d'échelle. Les trois spectres présentent une perturbation de la zone inertielle en k^{-3} près de l'échelle intégrale due à l'anisotropie causée par la stratification.

L'anisotropie de l'écoulement a aussi été étudiée. Nous avons montré que la structuration de l'écoulement était, là encore, dépendante de la distribution d'énergie aux grandes échelles. Nous avons pu identifier que des structures plus allongées dans la direction verticale apparaissent pour une pente s faible.

Finalement, nous avons testé une méthode perturbative mise en place pour la turbulence homogène stratifiée stable. Cette méthode prévoit que les corrélations doubles suivent une loi dépendante de l'orientation du vecteur d'onde. Nous avons montré que ce résultat se vérifie pour le flux vertical de flottaison mais n'est pas valable pour la variance de flottaison.

L'ensemble de ces résultats nous permet de mieux comprendre la dynamique de la turbulence soumise à une stratification instable. Pour autant, les comparaisons avec des écoulements réels de type Rayleigh-Taylor sont limitées du fait que nous ne tenons pas compte des perturbations du gradient moyen de concentration par les fluctuations turbulentes. Il est nécessaire d'inclure ces perturbations dans le modèle pour rapprocher la turbulence homogène stratifiée instable de la turbulence Rayleigh-Taylor.

Rétroaction de la turbulence et accélération variable

Cette dernière partie s'organise en deux points. Dans un premier temps, nous avons introduit, au sein du modèle spectral, la variation de la taille de la zone de mélange, définie à partir du champ de concentration. Cette variation est induite par l'effet du flux vertical de concentration sur le gradient moyen de densité. Dans cette configuration, nous avons pu définir le taux de mélange moléculaire et le taux de croissance de la zone de mélange. Ces deux paramètres sont couramment employés en turbulence Rayleigh-Taylor, tant expérimentalement que numériquement.

Afin de valider le modèle, nous avons repris une démarche faisant intervenir le mode dominant de l'écoulement. Cette approche, initialement développée pour la turbulence Rayleigh-Taylor, permet d'établir l'expression des statistiques en un point à partir du taux de mélange moléculaire et de l'anisotropie du mode dominant. Nous avons validé le modèle en comparant ces relations à l'évolution des quantités turbulentes. Le modèle spectral avec rétroaction sur le gradient moyen semble bien en mesure de reproduire la dynamique d'un

mélange stratifié de type Rayleigh-Taylor.

Dans un second temps, nous avons étudié l'effet d'une variation du champ d'accélération sur la dynamique du mélange turbulent. Cette variation a pris la forme d'un créneau dans lequel une phase de décélération est intercalée entre deux phases d'accélération. Cette configuration revient à étudier une alternance de stratification avec une phase stable entre deux phases instables. Cette étude est motivée par des expériences et simulations qui ont montré qu'il est possible de contrôler la dynamique du mélange grâce à cette étape stabilisatrice intermédiaire. Nous avons complété ces études en analysant l'influence de la durée pendant laquelle le mélange se trouve en phase de décélération. Les conclusions ne sont pas définitives mais il apparaît tout de même que la dynamique du mélange varie en fonction la durée de cette phase. Ces observations méritent de plus amples recherches car la définition d'un état initial comparable à des simulations Rayleigh-Taylor est délicate.

Perspectives de recherche

Ces résultats sur les effets de la variation de l'accélération sont à compléter en étudiant notamment les profils extraits des expériences LEM. Cette étape permettra une évaluation quantitative du modèle que nous avons développé. Si ces comparaisons expérimentales sont concluantes, le modèle actuel se révélera être un outil performant pour étudier en détail l'influence des différents paramètres sur le mélange.

Nous avons également évoqué des accélérations impulsionnelles mimant l'effet du passage d'un choc générant une instabilité de Richtmyer-Meshkov. La prise en compte d'un choc au sein de l'écoulement nécessite de traiter une approche compressible. RYU et LIVESCU [104] ont étudié le passage d'un choc au sein d'une THI grâce à des simulations directes. Ils ont notamment montré la capacité de l'approche LIA [43] *(Linear Interaction Analysis)* à prédire l'évolution des quantités turbulentes en présence d'un choc. Dans notre cas, l'approche spectrale employée nous limite au cas incompressible. Cependant, des travaux internes au CEA ont montré que la méthode LIA est compatible avec un modèle EDQNM incompressible pour évaluer l'influence d'un choc sur un mélange turbulent. Dans cette configuration, on considère que l'écoulement n'est compressible que lors du passage du choc. La perturbation associée au passage de ce choc est alors traité par le modèle LIA. Avant et après le passage du choc, l'écoulement est incompressible et notre modèle spectral reste valable.

Il est également possible d'introduire des effets de déformation de la zone de mélange. De même que des variations d'accélération peuvent apparaître, le mélange turbulent issu de l'instabilité de Rayleigh-Taylor peut aussi être soumis à un cisaillement ou une compression/dilatation. L'implosion d'un micro-ballon dans les applications de fusion est notamment sujette à ce type d'effets de déformation [47, 23]. Une étude linéaire [41]

du couplage des effets de stratification et de déformation a été récemment menée en prolongement des travaux sur le modèle d'accélération rapide [38]. En particulier, cette étude du couplage stratification-déformation a montré l'influence notable du taux de mélange et de l'anisotropie du champ scalaire sur la croissance de la zone de mélange. Une autre piste de recherche est donc envisageable au travers de la prise en compte de ces déformations dans une étude non linéaire grâce au modèle spectral que nous avons mis en place.

Finalement, le modèle spectral anisotrope pour la turbulence USH est un outil adapté à la validation et à la calibration de modèle « ingénieur ». Il est en effet moins coûteux que les simulations directes pour faire des études paramétriques balayant une large gamme de conditions initiales. Ces travaux ont déjà été entrepris en interne au CEA dans le cadre de la turbulence USH sans rétroaction sur l'écoulement moyen [39]. Nous pouvons désormais étendre ces comparaisons, entre modèle spectral et modèle ingénieur, en testant la prise en compte des variations d'accélération. L'enrichissement successif avec des effets de compressibilité ou des effets de déformation permettra de tester de plus en plus de configurations physiques afin de poursuivre l'amélioration constante des modèles de turbulence.

Annexe A

Corrélations doubles : définition et propriétés

Dans cette annexe, on définit les corrélations doubles et les propriétés qui leur sont associées (section A.1). On décrit la représentation des corrélations dans l'espace spectral (section A.2). On présente également un repère de l'espace de Fourier associé au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ appelé repère de Craya-Herring (section A.3). On définit diverses relations trigonométriques associées à ce repère. On poursuit en définissant des quantités issues de l'intégration des corrélations doubles (section A.4). On termine par la décomposition isotrope-anisotrope du tenseur des corrélations doubles (section A.5).

A.1 Définition

L'étude statistique de la turbulence se fait au travers des moments d'ordre n des quantités statistiques de l'écoulement. On peut écrire ce moment d'ordre n sous la forme $\langle u_i(\mathbf{x}_1,t_1)u_j(\mathbf{x}_2,t_2)\cdots u_m(\mathbf{x}_n,t_n)\rangle$ [95, p. 252]. La grandeur la plus souvent étudiée est le moment d'ordre 2 du champ de vitesse appelé tenseur des corrélations [117, 5, 97]. On le définit en deux points, $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$, au temps t, par

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t) = \langle u_i(\mathbf{x}_1,t)u_j(\mathbf{x}_2,t)\rangle\,. \tag{A.1}$$

On peut réécrire ce tenseur en faisant intervenir la distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ pour obtenir

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{r};t) = \langle u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rangle\,. \tag{A.2}$$

Homogénéité L'hypothèse d'homogénéité induit l'invariance de toutes les quantités statistiques par translation du vecteur $\mathbf{x}$ dans l'espace. Cela implique que le tenseur $\mathcal{R}_{ij}$ est indépendant du vecteur $\mathbf{x}$ et ne dépend que de la distance et l'orientation du vecteur $\mathbf{r}$

qui sépare les deux points :

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r};t) = \langle u_i(\mathbf{x},t) u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) \rangle \,. \tag{A.3}$$

On peut alors écrire la relation

$$\mathcal{R}_{ij}(-\mathbf{r}) = \mathcal{R}_{ji}(\mathbf{r}). \tag{A.4}$$

Axisymétrie Le vecteur $\mathbf{r}$ est défini par trois composantes dans un repère sphérique :

— sa norme r ;
— l'angle polaire θ entre l'axe vertical et le vecteur $\mathbf{r}$;
— l'angle azimutal ϕ entre l'axe $\mathbf{x}$ et la projection de $\mathbf{r}$ sur le plan ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$).

La dépendance à ces trois composantes amène à considérer une turbulence statistiquement anisotrope. On effectue une hypothèse d'axisymétrie en considérant une invariance statistique pour toute rotation autour d'un axe privilégié de l'écoulement (l'axe vertical en cas d'écoulement soumis à la force de gravité par exemple). Cette hypothèse permet de s'affranchir de la dépendance à l'angle azimutal ϕ pour obtenir $\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r};t) = \mathcal{R}_{ij}(r,\theta;t)$. La dépendance à l'angle θ traduit la prise en compte de l'orientation du vecteur $\mathbf{r}$.

Cette hypothèse d'axisymétrie permet également de réduire le nombre de variable caractérisant le tenseur $\mathcal{R}_{ij}$. Batchelor [4] et Chandrasekhar [19] montrent qu'un tenseur axisymétrique solenoïdal par rapport à un de ses indices peut s'exprimer à partir de trois scalaires seulement.

A.2 Représentation dans l'espace de Fourier

L'hypothèse d'homogénéité précédemment introduite permet d'utiliser l'espace spectral. On définit la transformée de Fourier tridimensionnelle en espace d'une fonction $f(\mathbf{x},t)$ par

$$TF(f) = \hat{f}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{A.5}$$

Le vecteur $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde. On définit la transformée inverse par

$$f(\mathbf{x},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k},t)\,\mathrm{d}\mathbf{k}. \tag{A.6}$$

On vérifie bien la relation

$$TF(TF^{-1}(\hat{f})) = \hat{f}. \tag{A.7}$$

On définit le spectre du tenseur des corrélations de vitesse dans l'espace de Fourier

comme étant la transformée du tenseur des corrélations $\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r},t)$:

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{A.8}$$

À partir de cette relation, on peut définir, dans le cadre de la turbulence homogène, le spectre du tenseur des corrélations de vitesse par

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k},t)\hat{u}_j(\mathbf{k}',t)\rangle \tag{A.9}$$

où δ est la fonction de Dirac.

La transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction f s'écrit

$$TF\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) = \mathrm{i}\,k_i f_i = \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}. \tag{A.10}$$

La notation suppose la sommation sur les indices répétés. Cette propriété permet de réécrire la divergence nulle du champ de vitesse décrivant l'incompressibilité de l'écoulement :

$$TF\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}\,k_i\hat{u}_i' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}} = 0. \tag{A.11}$$

L'hypothèse de divergence nulle dans l'espace physique se traduit par l'orthogonalité du champ de vitesse $\mathbf{u}$ et du vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

On rappelle une propriété classique dans l'espace de Fourier :

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{R}}_{ji}^*(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{R}}_{ji}(-\mathbf{k}) \tag{A.12}$$

avec $*$ symbolisant le conjugué dans l'espace de Fourier.

L'axisymétrie permet, également dans l'espace spectral, de supprimer la dépendance à l'angle ϕ du spectre du tenseur des corrélations de vitesse en deux points. On a donc

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{R}}_{ij}(k,\theta). \tag{A.13}$$

k étant la norme du vecteur $\mathbf{k}$ et θ son angle polaire, c'est-à-dire l'angle que forme $\mathbf{k}$ avec l'axe vertical.

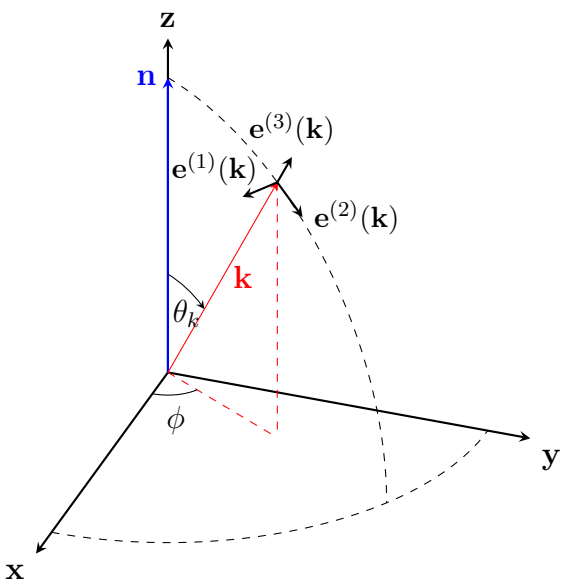


FIGURE A.1 – Représentation du repère de Craya-Herring dans l'espace spectral. Le vecteur $\mathbf{k}$ est représenté ainsi que ses angles azimuthal ϕ et polaire θ. Les vecteurs du repère de Craya-Herring associés à $\mathbf{k}$ sont représentés. On précise que le vecteur $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$ est bien situé dans un plan parallèle au plan horizontal ($\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$).

A.3 Repère de Craya-Herring : définition et relations utiles

A.3.1 Définition et simplification

Le repère de Craya-Herring a été utilisé pour la première fois en turbulence par CRAYA [24] et popularisé par la suite par HERRING [50]. C'est un repère local basé sur le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ adapté à l'étude de la turbulence axisymétrique incompressible. On note $\mathbf{n}$ l'axe de symétrie. On peut définir ainsi un triplet de vecteurs orthonormés ($\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})$) formant une base de l'espace spectral et défini par

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{n}}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{n}\|}, \quad \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}\times\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}. \tag{A.14}$$

Ce repère est représenté à la figure A.1. Le champ de vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ se situe dans le plan orthogonal au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du fait l'hypothèse d'incompressibilité. On peut alors le décomposer sur le plan $\left(\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}), \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})\right)$ en introduisant deux scalaires φ_1 et φ_2 pour obtenir

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \varphi_1(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) + \varphi_2(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}). \tag{A.15}$$

Dans le cadre de la turbulence homogène axisymétrique et incompressible, CHANDRASEKHAR [19] et BATCHELOR [5] ont montré que le tenseur des corrélations de vitesse peut

se décomposer en trois scalaires indépendants. Cette propriété est également valable pour le spectre de ce même tenseur $\hat{\mathcal{R}}$. Dans le repère de Craya-Herring, on peut l'écrire sous forme de matrice

$$\underline{\underline{\hat{\mathcal{R}}}} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

avec $\Phi_{21} = \Phi_{12}^*$ car la matrice $\underline{\underline{\hat{\mathcal{R}}}}$ est hermitienne.

On peut montrer que les termes non diagonaux sont nuls. D'après l'hypothèse de symétrie miroir, on a une symétrie par rapport à tout plan contenant l'axe vertical. On se place en particulier dans le plan contenant $u_2(\mathbf{k})$ et $u_3(\mathbf{k})$. Cette hypothèse de symétrie miroir nous permet d'écrire

$$\langle u_1(\mathbf{k}) u_2(\mathbf{k}) \rangle = - \langle u_1(\mathbf{k}) u_2(\mathbf{k}) \rangle \tag{A.17}$$

car la composante $u_1(\mathbf{k})$ est changée en son opposé par la symétrie. D'après l'hypothèse d'axisymétrie, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \langle u_1(\mathbf{k}) u_2(\mathbf{k}) \rangle \, \mathrm{d}\phi = 0. \tag{A.18}$$

On peut développer cette expression en utilisant l'équation (A.15) de décomposition du vecteur vitesse :

$$\int_0^{2\pi} \langle u_1(\mathbf{k}) u_2(\mathbf{k}) \rangle \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \langle \varphi_1(\mathbf{k}) \varphi_1(\mathbf{k}) \rangle \, e_1^{(1)}(\mathbf{k}) e_2^{(1)}(\mathbf{k}) \\ + \langle \varphi_1(\mathbf{k}) \varphi_2(\mathbf{k}) \rangle \, e_1^{(1)}(\mathbf{k}) e_2^{(2)}(\mathbf{k}) \\ + \langle \varphi_2(\mathbf{k}) \varphi_1(\mathbf{k}) \rangle \, e_1^{(2)}(\mathbf{k}) e_2^{(1)}(\mathbf{k}) \\ + \langle \varphi_2(\mathbf{k}) \varphi_2(\mathbf{k}) \rangle \, e_1^{(2)}(\mathbf{k}) e_2^{(2)}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi = 0. \tag{A.19}$$

Dans le repère cartésien, les coordonnées des vecteurs de Craya-Herring s'écrivent :

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) = \left| \begin{matrix} \sin\theta_k \sin\phi \\ -\sin\theta_k \cos\phi \\ 0 \end{matrix} \right. \quad et \quad \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) = \left| \begin{matrix} \cos\theta_k \cos\phi \\ -\cos\theta_k \sin\phi \\ -\sin\theta_k \end{matrix} \right. . \tag{A.20}$$

On rappelle que $\int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi \, \mathrm{d}\phi = 0$. On obtient alors que

$$\langle \varphi_1(\mathbf{k}) \varphi_1(\mathbf{k}) \rangle \int_0^{2\pi} e_1^{(1)}(\mathbf{k}) e_2^{(1)}(\mathbf{k}) \, \mathrm{d}\phi = 0, \tag{A.21}$$

$$\langle \varphi_2(\mathbf{k}) \varphi_2(\mathbf{k}) \rangle \int_0^{2\pi} e_1^{(2)}(\mathbf{k}) e_2^{(2)}(\mathbf{k}) \, \mathrm{d}\phi = 0 \tag{A.22}$$

Le terme restant dans l'équation (A.19) est donc

$$\langle\varphi_1(\mathbf{k})\varphi_2(\mathbf{k})\rangle \int_0^{2\pi} \left(e_1^{(1)}(\mathbf{k})e_2^{(2)}(\mathbf{k}) + e_1^{(2)}(\mathbf{k})e_2^{(1)}(\mathbf{k})\right) \mathrm{d}\phi = 0. \tag{A.23}$$

L'intégrale étant non nulle, il advient que $\langle\varphi_1(\mathbf{k})\varphi_2(\mathbf{k})\rangle = \Phi_{12} = 0$. On a ainsi montrer que les termes non diagonaux sont nuls grâce aux hypothèses de symétrie miroir et d'axisymétrie [1].

Le spectre du tenseur des corrélations s'écrit alors

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij} = \Phi_{11}\mathbf{e}_i^{(1)}\mathbf{e}_j^{(1)} + \Phi_{22}\mathbf{e}_i^{(2)}\mathbf{e}_j^{(2)}. \tag{A.24}$$

Il est ainsi pleinement défini par la connaissance des deux scalaires Φ_{11} et Φ_{22}. On écrit par la suite $\Phi_1 = \Phi_{11}$ et $\Phi_2 = \Phi_{22}$.

A.3.2 Relations angulaires

Dans cette section, des informations supplémentaires sont fournies pour aider à la compréhension des relations géométriques dans l'espace de Craya-Herring. On décrit les relations principales et les différentes simplifications possibles. Ces formules ont été obtenues systématiquement par un calcul sur papier et une vérification par calcul formel. [2] Ce formalisme hérite de la généralisation en trois dimensions de l'intégration triadique mise en place par Cambon et al. [15].

La détermination complète des équations du modèle EDQNM (présentées aux annexes B et C) implique la prise en compte d'interactions triadiques faisant intervenir trois vecteurs, $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. Ces trois vecteurs sont liés par la relation $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$. Ils forment une triade de vecteurs et l'on peut associer un repère de Craya-Herring à chacun d'eux. Ces produits de vecteurs interviennent notamment dans les termes de corrélations triples. Lors du développement complet des équations, des produits de tenseurs de Reynolds du type $P_{ab}(\mathbf{k})\hat{R}_{bc}(\mathbf{p},t)\hat{R}_{ca}(\mathbf{q},t)$ peuvent apparaître. On voit qu'en décomposant les tenseurs de corrélations doubles, des produits de vecteurs apparaissent, comme par exemple le premier terme

$$\begin{aligned} P_{ab}(\mathbf{k})\hat{R}_{bc}(\mathbf{p},t)\hat{R}_{ca}(\mathbf{q},t) &= \delta_{ab}\Phi_1(\mathbf{p},t)\mathrm{e}_b^{(1)}(\mathbf{p})\,\mathrm{e}_c^{(1)}(\mathbf{p})\,\Phi_1(\mathbf{q},t)\mathrm{e}_c^{(1)}(\mathbf{q})\,\mathrm{e}_a^{(1)}(\mathbf{q}) + [\ldots], && \text{(A.25)}\\ &= \Phi_1(\mathbf{p},t)\Phi_1(\mathbf{q},t)\mathrm{e}_a^{(1)}(\mathbf{p})\,\mathrm{e}_a^{(1)}(\mathbf{q})\,\mathrm{e}_c^{(1)}(\mathbf{p})\,\mathrm{e}_c^{(1)}(\mathbf{q}) + [\ldots], && \text{(A.26)}\\ &= \Phi_1(\mathbf{p},t)\Phi_1(\mathbf{q},t)\left(\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p})\,\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q})\right)^2 + [\ldots]. && \text{(A.27)} \end{aligned}$$

Dans l'objectif de résoudre numériquement ces produits, on va déterminer les expressions

1. La suppression des termes non diagonaux revient à considérer un écoulement sans hélicité.
2. Le logiciel Mathematica™ a été utilisé.

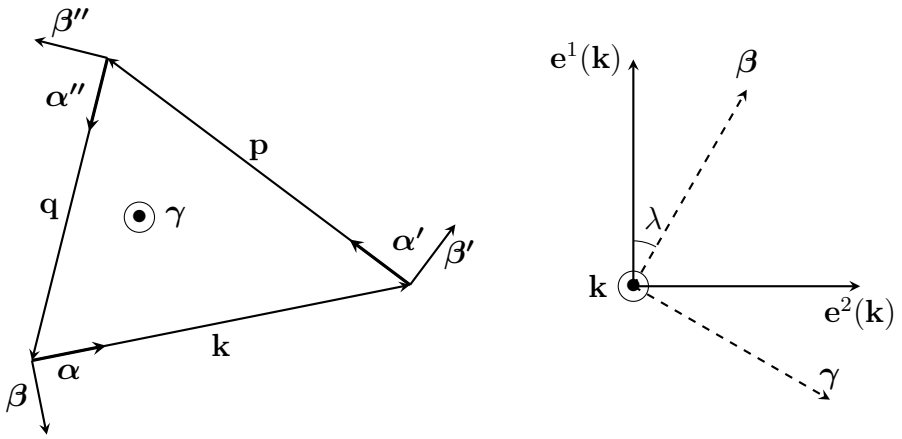


FIGURE A.2 – Gauche : triade de vecteurs avec leur repère respectif lié à la triade. Droite : rotation du repère de Craya-Herring lié à $\mathbf{k}$ vers le repère de la triade lié à $\mathbf{k}$.

de chaque vecteur. Pour ce faire, on va utiliser la décomposition introduite par CAMBON et al. [15] qui fait intervenir des repères compris dans le plan de la triade.

On définit tout d'abord le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ tel que

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{p}|}, \tag{A.28}$$

ainsi que trois vecteurs $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta'}$ et $\boldsymbol{\beta''}$ définis par les relations

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}|}, \quad \boldsymbol{\beta'} = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma}|}, \quad \boldsymbol{\beta''} = \frac{\mathbf{q} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{q} \times \boldsymbol{\gamma}|}. \tag{A.29}$$

Dans le souci de garder les expressions le plus compactes possibles, on introduit les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha'}$ et $\boldsymbol{\alpha''}$ tel que

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \boldsymbol{\alpha'} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \boldsymbol{\alpha''} = \frac{\mathbf{q}}{q}. \tag{A.30}$$

On peut effectuer un changement de repère entre les repères de Craya-Herring associés à chaque vecteur et ces nouveaux repères associés à la triade. On introduit pour ce faire trois angles λ, λ' et λ'' de rotation définis par les relations

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) - \mathrm{i}\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}\lambda}\left(\boldsymbol{\beta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\right), \tag{A.31}$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) - \mathrm{i}\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = e^{\mathrm{i}\lambda'}\left(\boldsymbol{\beta'} + \mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\right), \tag{A.32}$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}) - \mathrm{i}\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}) = e^{\mathrm{i}\lambda''}\left(\boldsymbol{\beta''} + \mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\right). \tag{A.33}$$

Le développement des termes du type de ceux introduit à l'équation (A.25) montre que les interactions de vecteurs sont ramenées à des produits scalaires. L'important pour l'expression de ces produits scalaires est que l'ensemble des vecteurs soit défini dans le

même repère. On choisit ici d'exprimer l'ensemble des vecteurs dans le repère de Craya-Herring lié au vecteur $\mathbf{k}$. On évite ainsi de descendre au dernier niveau qu'est le repère fixe initial. Pour ce faire, on va procéder en plusieurs étapes :

1. on identifie les parties réelles et parties imaginaires du système d'équations (A.31)–(A.33) pour obtenir l'expression des vecteurs de Craya-Herring dans le repère de la triade ;
2. on ré-exprime ensuite chaque vecteur $\boldsymbol{\beta'}$, $\boldsymbol{\beta''}$, $\boldsymbol{\alpha'}$ et $\boldsymbol{\alpha''}$ en fonction de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ en utilisant les relations de la triade ;
3. on trouve alors les expressions des vecteurs de Craya-Herring pour $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ en fonction de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$;
4. on exprime ensuite ces deux vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ en fonction de $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$;
5. et on obtient les expressions finales des vecteurs de Craya-Herring pour $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ en fonction de $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$.

Dans un premier temps, l'identification des parties réelles et imaginaires du système (A.31)–(A.33) nous donne

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) = -\sin\lambda\boldsymbol{\beta} - \cos\lambda\boldsymbol{\gamma}, \qquad \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) = \cos\lambda\boldsymbol{\beta} - \sin\lambda\boldsymbol{\gamma}, \tag{A.34}$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = -\sin\lambda'\boldsymbol{\beta'} - \cos\lambda'\boldsymbol{\gamma}, \qquad \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) = \cos\lambda'\boldsymbol{\beta'} - \sin\lambda'\boldsymbol{\gamma}, \tag{A.35}$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}) = -\sin\lambda''\boldsymbol{\beta''} - \cos\lambda''\boldsymbol{\gamma}, \qquad \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}) = \cos\lambda''\boldsymbol{\beta''} - \sin\lambda''\boldsymbol{\gamma}. \tag{A.36}$$

Ensuite, les relations internes de la triade fournissent les expressions de $\boldsymbol{\beta'}$, $\boldsymbol{\beta''}$, $\boldsymbol{\alpha'}$ et $\boldsymbol{\alpha''}$ en fonction de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\beta'} = -\cos\gamma\boldsymbol{\beta} + \sin\gamma\boldsymbol{\alpha} \tag{A.37}$$

$$\boldsymbol{\beta''} = -\cos\beta\boldsymbol{\beta} - \sin\beta\boldsymbol{\alpha} \tag{A.38}$$

$$\boldsymbol{\alpha'} = -\sin\gamma\boldsymbol{\beta} - \cos\gamma\boldsymbol{\alpha} \tag{A.39}$$

$$\boldsymbol{\alpha''} = +\sin\beta\boldsymbol{\beta} - \cos\beta\boldsymbol{\alpha} \tag{A.40}$$

En remplaçant ces expressions dans le système d'équations (A.34)–(A.36), on obtient :

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) = -\sin\lambda\boldsymbol{\beta} - \cos\lambda\boldsymbol{\gamma} \tag{A.41}$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) = \cos\lambda\boldsymbol{\beta} - \sin\lambda\boldsymbol{\gamma} \tag{A.42}$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = \sin\lambda'\cos\gamma\boldsymbol{\beta} - \cos\lambda'\boldsymbol{\gamma} - \sin\lambda'\sin\gamma\boldsymbol{\alpha} \tag{A.43}$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) = -\cos\lambda'\cos\gamma\boldsymbol{\beta} - \sin\lambda'\boldsymbol{\gamma} + \cos\lambda'\sin\gamma\boldsymbol{\alpha} \tag{A.44}$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}) = \sin\lambda''\cos\beta\boldsymbol{\beta} - \cos\lambda''\boldsymbol{\gamma} + \sin\lambda''\sin\beta\boldsymbol{\alpha} \tag{A.45}$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}) = -\cos\lambda''\cos\beta\boldsymbol{\beta} - \sin\lambda''\boldsymbol{\gamma} - \cos\lambda''\sin\beta\boldsymbol{\alpha} \tag{A.46}$$

En inversant les équations (A.41) et (A.42), on obtient l'expression de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ en fonction de $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$:

$$\boldsymbol{\beta} = -\sin\lambda\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) + \cos\lambda\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}), \tag{A.47}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = -\cos\lambda\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) - \sin\lambda\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}). \tag{A.48}$$

On trouve ainsi les expressions des vecteurs du repère de Craya-Herring liées à $\mathbf{p}$ en fonction du repère $\left(\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}), \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}), \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\right)$ (on rappelle que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})$) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = \; & (\cos\lambda\cos\lambda' - \sin\lambda\sin\lambda'\cos\gamma)\,\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\lambda\cos\lambda' + \cos\lambda\sin\lambda'\cos\gamma)\,\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & - (\sin\lambda'\sin\gamma)\,\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) = \; & (\cos\lambda\sin\lambda' + \cos\gamma\sin\lambda\cos\lambda')\,\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\lambda\sin\lambda' - \cos\gamma\cos\lambda\cos\lambda')\,\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\gamma\cos\lambda')\,\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{p}) = \; & \sin\gamma\sin\lambda\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & - \sin\gamma\cos\lambda\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & - \cos\gamma\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\tag{A.52}$$

Et les expressions des vecteurs du repère de Craya-Herring lié à $\mathbf{q}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}) = \; & (\cos\lambda\cos\lambda'' - \cos\beta\sin\lambda\sin\lambda'')\,\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\lambda\cos\lambda'' + \cos\beta\cos\lambda\sin\lambda'')\,\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\beta\sin\lambda'')\,\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}) = \; & (\cos\lambda\sin\lambda'' + \cos\beta\sin\lambda\cos\lambda'')\,\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & + (\sin\lambda\sin\lambda'' - \cos\beta\cos\lambda\cos\lambda'')\,\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & - (\sin\beta\cos\lambda'')\,\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{q}) = \; & -\sin\beta\sin\lambda\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ & + \sin\beta\cos\lambda\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ & - \cos\beta\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{A.55}$$

On peut également exprimer certains angles en fonction des angles de base que sont γ, β, $\cos\theta_k$. Pour ce faire, on calcule les produits scalaires des vecteurs définis par les équations (A.29) et (A.30) en utilisant les relations avec les vecteurs de base $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$

introduites dans le système d'équations (A.37)–(A.40) :

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} = \cos\theta_k \tag{A.56a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{n} = \cos\theta_p = -\cos\gamma\cos\theta_k + \sin\theta_k \sin\gamma\cos\lambda \tag{A.56b}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{n} = \cos\theta_q = -\cos\beta\cos\theta_k - \sin\theta_k \sin\beta\cos\lambda \tag{A.56c}$$

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = -\sin\theta_k \cos\lambda \tag{A.56d}$$

$$\boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n} = -\sin\theta_p \cos\lambda' = -\left(-\sin\gamma\cos\theta_k - \cos\gamma\sin\theta_k\cos\lambda\right) \tag{A.56e}$$

$$\boldsymbol{\beta}'' \cdot \mathbf{n} = -\sin\theta_q \cos\lambda'' = -\left(\sin\beta\cos\theta_k - \cos\beta\sin\theta_k\cos\lambda\right) \tag{A.56f}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} = -\sin\theta_k \sin\lambda = -\sin\theta_p \sin\lambda' = -\sin\theta_q \sin\lambda'' \tag{A.56g}$$

Toutes ces relations sont utiles pour qui veut résoudre les équations obtenues pour un écoulement non-isotrope par le modèle EDQNM présenté au chapitre 2.

A.4 Intégration sphérique

On définit dans cette annexe les quantités intégrées sur la sphère définie par son rayon qui est le nombre d'onde k. Cette intégration sphérique permet de passer d'un spectre dépendant du vecteur $\mathbf{k}$ (ou de manière équivalente dépendant du nombre d'onde k et de l'angle θ) à un spectre dépendant du nombre d'onde k uniquement. Ce dernier rassemble les effets d'anisotropie des différentes orientations du vecteur à une norme k donnée. On utilise le changement de variable du repère cartésien vers le repère de sphérique lié à $\mathbf{k}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{k} = k\,\mathrm{d}k \times k\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}\phi. \tag{A.57}$$

Dans un premier temps, on définit les spectres issus de l'intégration angulaire de $\mathcal{R}_{ab}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sur θ et ϕ. Les corrélations doubles n'étant pas dépendantes de l'angle ϕ, l'intégration sur l'angle azimuthal fait apparaître un facteur 2π. On introduit trois nouvelles variables : le spectre de densité d'énergie cinétique $E(k,t)$, le spectre de variance de flottaison $B(k,t)$ et le spectre du flux de flottaison vertical $F(k,t)$ définies par

$$E(k,t) = 2\pi k^2 \int_0^\pi \frac{\hat{\mathcal{R}}_{ii}}{2}(k,\theta,t)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{A.58}$$

$$B(k,t) = 2\pi k^2 \int_0^\pi \hat{\mathcal{B}}(k,\theta,t)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{A.59}$$

$$F(k,t) = 2\pi k^2 \int_0^\pi \hat{\mathcal{F}}_3(k,\theta,t)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{A.60}$$

À partir de ces spectres, on définit les statistiques en un point : l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, la variance de flottaison $\langle\vartheta\vartheta\rangle$ et le flux vertical $\langle u_3\vartheta\rangle$. Ces quantités sont obtenues par

intégration sur l'ensemble des nombres d'onde k :

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^{+\infty} E(k,t)\,\mathrm{d}k, \tag{A.61}$$

$$\langle \vartheta\vartheta \rangle (t) = \int_0^{+\infty} B(k,t)\,\mathrm{d}k, \tag{A.62}$$

$$\langle u_3\vartheta \rangle (t) = \int_0^{+\infty} F(k,t)\,\mathrm{d}k. \tag{A.63}$$

A.5 Décomposition isotrope-anisotrope du tenseur des corrélations doubles

Afin de caractériser l'anisotropie de l'écoulement, on peut décomposer en trois parties le tenseur des corrélations doubles en deux points $\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k})$:

— une composante purement isotrope $\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{iso})}(\mathbf{k})$;
— une composante anisotrope tenant compte de la polarisation $\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{pol})}(\mathbf{k})$;
— une composante anisotrope tenant compte de la directionnalité $\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{dir})}(\mathbf{k})$.

Ces deux composantes de l'anisotropie ont des définitions différentes. L'anisotropie de polarisation signifie que toutes les orientations du champ de vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ dans le plan orthogonal à $\mathbf{k}$ ne sont pas équivalentes statistiquement. L'anisotropie de directionnalité signifie que toutes les orientations du vecteur $\mathbf{k}$ dans l'espace spectral ne contiennent pas le même niveau d'énergie.

L'expression complète et générale de ces termes est donnée par Sagaut et Cambon [106, p. 38]. On les exprime ici à partir des composantes Φ_1 et Φ_2 du repère de Craya-Herring dans le cadre de la turbulence USH :

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{iso})}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} P_{ij}(\mathbf{k}), \tag{A.64}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{pol})}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(\Phi_2(\mathbf{k}) - \Phi_1(\mathbf{k})\right)\left(e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}) - e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k})\right), \tag{A.65}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{dir})}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2}\left(\Phi_1(\mathbf{k}) + \Phi_2(\mathbf{k})\right) - \frac{E(k)}{4\pi k^2}\right) P_{ij}(\mathbf{k}) \tag{A.66}$$

On rappelle que, dans le repère de Craya-Herring, on a la relation $P_{ij}(\mathbf{k}) = e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k})$. On vérifie bien que l'on retrouve

$$\hat{\mathcal{R}}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{iso})}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{pol})}(\mathbf{k}) + \hat{\mathcal{R}}_{ij}^{(\mathrm{dir})}(\mathbf{k}) = \Phi_1(\mathbf{k})e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + \Phi_2(\mathbf{k})e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}).$$

Annexe B

Détails des équations pour les corrélations doubles

Dans cette annexe, on écrit l'intégralité des développements permettant d'obtenir les équations d'évolution des corrélations doubles $\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k})$, $\mathcal{B}(\mathbf{k},t)$ et $\mathcal{F}_a(\mathbf{k},t)$. On rappelle que l'on part du système d'équations dans l'espace de Fourier :

$$k_i\hat{u}_i(\mathbf{k}) = 0, \tag{B.1}$$

$$\left(\partial_t + \nu k^2\right)\hat{u}_i(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{ijm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + NP_{i3}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}), \tag{B.2}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{u}_3(\mathbf{k}). \tag{B.3}$$

B.1 Équation pour la corrélation double de vitesse

Dans cette section, on cherche à établir l'équation d'évolution des corrélations doubles de vitesse en deux points définies par $\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \langle\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\rangle$. Pour cela, on forme la combinaison linéaire $\hat{u}_b(\mathbf{k}') \times \mathrm{Eq.}(\mathrm{B.2})_a(\mathbf{k}) + \hat{u}_a(\mathbf{k}) \times \mathrm{Eq.}(\mathrm{B.2})_b(\mathbf{k}')$:

$$\begin{aligned}\hat{u}_b(\mathbf{k}')\left(\partial_t + \nu k^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}\\ + NP_{a3}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}),\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_a(\mathbf{k})\left(\partial_t + \nu k'^2\right)\hat{u}_b(\mathbf{k}') = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}\\ + NP_{b3}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}').\end{aligned} \tag{B.5}$$

On somme les deux équations :

$$\left(\partial_t + \nu(k^2 + k'^2)\right)\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}') =$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\mathrm{i}}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2} P_{blm}(\mathbf{k}') \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\qquad + NP_{a3}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{b}(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{B.6}
$$

On applique l'opérateur de moyenne d'ensemble $\langle\rangle$ à l'équation précédente :

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \nu(k^2 + k'^2)\right) \mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{blm}(\mathbf{k}',\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2} P_{blm}(\mathbf{k}') \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\qquad\qquad + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') + NP_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_a(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{B.7}
$$

Les fonctions de Dirac $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$ sont non nulles uniquement pour $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. On peut donc les « simplifier » :

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} - \frac{\mathrm{i}}{2} P_{blm}(-\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(-\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

Les projecteurs $P_{blm}(-\mathbf{k})$ et $P_{b3}(-\mathbf{k})$ peuvent se simplifier, par construction, comme suit :

$$
P_{blm}(-\mathbf{k}) = -P_{blm}(\mathbf{k}) \tag{B.9}
$$

$$
P_{b3}(-\mathbf{k}) = P_{b3}(\mathbf{k}) \tag{B.10}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + \frac{\mathrm{i}}{2} P_{blm}(\mathbf{k}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

En rassemblant les termes intégraux sous un même terme général $T^{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$, on peut écrire :

$$
\left(\partial_t + 2\nu k^2\right) \mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}) + T^{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) \tag{B.12}
$$

B.2 Équation pour la corrélation croisée flottaison-vitesse

On cherche dans cette section à établir l'équation d'évolution de la corrélation scalaire-vitesse définie par $\mathcal{F}_a(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}') \right\rangle$. Comme à la section précédente, on

effectue l'opération $\hat{u}_a(\mathbf{k}') \times \text{Eq.}B.3(\mathbf{k}) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) \times \text{Eq.}B.2_a(\mathbf{k}')$:

$$\hat{u}_a(\mathbf{k}')\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_3(\mathbf{k}) \tag{B.13}$$

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\left(\partial_t + \nu k'^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}') = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + NP_{a3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') \tag{B.14}$$

On somme les deux équations :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2 + \nu k'^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}') = \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ -\mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ + NP_{a3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') + N\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_3(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{B.15}$$

On applique l'opération de moyenne d'ensemble et on fait apparaître les termes définis dans la première partie. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2 + \nu k'^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ -\mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_{aj}(\mathbf{p},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ + P_{a3}(\mathbf{k}')\mathcal{B}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') + N^2\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\end{aligned} \tag{B.16}$$

Après simplification des Dirac, et avec $P_{alm}(\mathbf{k}') = -P_{alm}(\mathbf{k})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} - \mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}(\mathbf{p},-\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ + P_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N^2\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{B.17}$$

En rassemblant les termes intégraux sous un terme unique $T_a^{\mathcal{F}}(\mathbf{k})$, on obtient :

$$\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = P_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N^2\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k}) + T_a^{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \tag{B.18}$$

B.3 Équation pour la variance de scalaire

De manière identique aux sections précédents, on cherche à trouver l'équation qui régit l'évolution de $\mathcal{B}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \left\langle \hat{b}(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}')\right\rangle$. Pour ce faire, on effectue l'opération

$\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') \times$ Eq.$B.3(\mathbf{k}) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) \times$ Eq.$B.3(\mathbf{k}')$:

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_3(\mathbf{k}) \tag{B.19}$$

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\left(\partial_t + \mathcal{D}k'^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') = -\mathrm{i}k'_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_3(\mathbf{k}') \tag{B.20}$$

On somme les deux équations :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}(k^2+k'^2)\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') = &-\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &- \mathrm{i}k'_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &+ N\left(\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_3(\mathbf{k}) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_3(\mathbf{k}')\right)\end{aligned} \tag{B.21}$$

Après application de l'opérateur de moyenne d'ensemble, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t + \mathcal{D}(k^2+k'^2)\right)\mathcal{B}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = \\ &\qquad - \mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(\mathbf{k}',\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &\qquad - \mathrm{i}k'_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(\mathbf{k},\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &\qquad + N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') + \mathcal{F}_3(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right)\end{aligned} \tag{B.22}$$

On simplifie les Dirac pour aboutir à :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right)\mathcal{B}(\mathbf{k}) = &-\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(-\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &+ \mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k})\right)\end{aligned} \tag{B.23}$$

Une nouvelle fois, on fait apparaître un conjugué dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right)\mathcal{B}(\mathbf{k}) = &-\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j^*(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &+ \mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k})\right)\end{aligned} \tag{B.24}$$

On peut écrire le terme $\mathcal{S}_j$ sous la forme :

$$\mathcal{S}_j = \Re\left(\mathcal{S}_j\right) + \mathrm{i}\Im\left(\mathcal{S}_j\right) \tag{B.25}$$

$$\mathcal{S}_j^* = \Re\left(\mathcal{S}_j\right) - \mathrm{i}\Im\left(\mathcal{S}_j\right) \tag{B.26}$$

On trouve ainsi :

$$\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right)\mathcal{B}(\mathbf{k}) = -2\Im\left(k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_j(\mathbf{k},\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}\right) + N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k})\right) \tag{B.27}$$

On rassemble le terme intégral sous le terme $T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k})$ pour obtenir :

$$\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right)\mathcal{B}(\mathbf{k}) = N\left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k})\right) + T^{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \tag{B.28}$$

Annexe C

Détails des équations pour les corrélations triples

On décrit ici les développements permettant d'obtenir les expressions des corrélations triples apparaissant dans les équations pour les corrélations doubles.

C.1 Equation d'évolution de la corrélation triple de vitesse

On souhaite établir l'équation *complète* pour $\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k})$. Il advient donc d'établir l'équation pour les corrélations triples de vitesse $\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$. La procédure est identique à celle employée pour les corrélations doubles. On forme la combinaison linéaire :

$$\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.(B.2)}_a(\mathbf{k}) + \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.(B.2)}_b(\mathbf{k}') + \hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}') \times \text{Eq.(B.2)}_c(\mathbf{k}'')$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\left(\partial_t + \nu k^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad + NP_{a3}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \\
\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\left(\partial_t + \nu k'^2\right)\hat{u}_b(\mathbf{k}') &= -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad + NP_{b3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \\
\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\left(\partial_t + \nu k''^2\right)\hat{u}_c(\mathbf{k}'') &= -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{clm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad + NP_{c3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')
\end{aligned}$$

On somme les trois équations :

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right)\right)\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'') = \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{clm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&+ NP_{a3}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \\
&+ NP_{b3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_c(\mathbf{k}'') \\
&+ NP_{c3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{u}_a(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{C.1}$$

On prend la moyenne d'ensemble $\langle\rangle$ de l'expression précédente pour faire apparaître des corrélations quadruples. On effectue une hypothèse sur ces corrélations quadruples : on les suppose égales à une somme de produit de corrélation double. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\langle\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\rangle &= \langle\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\rangle\langle\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\rangle \\
&+ \langle\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_l(\mathbf{p})\rangle\langle\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\rangle \\
&+ \langle\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\rangle\langle\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\rangle
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{u}_b(\mathbf{k}')\hat{u}_c(\mathbf{k}'')\hat{u}_l(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p})\rangle &= \mathcal{R}_{bc}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{lm}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\
&+ \mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\
&+ \mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathcal{R}_{cl}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{p})
\end{aligned} \tag{C.3}$$

On voit qu'un terme en $\delta(k)$ va apparaître et sera toujours nul. On supprime donc ce terme dans chaque expression des corrélations quadruples. On obtient ainsi, après développement et remplacement :

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right)\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\ + \mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathcal{R}_{cl}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{p})\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}'-\mathbf{p}) \\ + \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{p})\mathcal{R}_{cl}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{p})\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{clm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{p}) \\ + \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}''-\mathbf{p})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p})\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{S}_{bc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&+ NP_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ac}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')
\end{aligned}$$

$$+ NP_{c3}(\mathbf{k}'')\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k}'',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \quad \text{(C.4)}$$

L'intégration sur le vecteur $\mathbf{p}$ et les différents Dirac ne laissent qu'un seul vecteur non-nul : $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$. Cela simplifie l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right)\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cl}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k}')\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cl}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{clm}(\mathbf{k}'')\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\
&\qquad + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{S}_{bc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad + NP_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ac}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad + NP_{c3}(\mathbf{k}'')\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k}'',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \quad \text{(C.5)}
\end{aligned}$$

Les termes entre parenthèses sont symétriques 2 à 2 :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + k''^2\right)\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{clm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{S}_{bc}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad + NP_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ac}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\qquad + NP_{c3}(\mathbf{k}'')\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k}'',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \quad \text{(C.6)}
\end{aligned}$$

On simplifie les Dirac, seule la configuration $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ est possible :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \nu\left(k^2 + k'^2 + (k+k')^2\right)\right)\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&\qquad - \mathrm{i}P_{clm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}') \\
&\qquad + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{S}_{bc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \\
&\qquad + NP_{b3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ac}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \\
&\qquad + NP_{c3}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathcal{S}_{ab}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{k}) \quad \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

À ce stade, on fait l'hypothèse dite « EDQNM1 » où les termes linéaires de stratification sont négligés. On intègre l'équation en ne gardant que les termes sous l'intégrale. On précise ici que les termes $\mathcal{R}$ dépendent de s :

$$\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\int_0^t e^{-\nu\left(k^2+k'^2+(k+k')^2\right)(t-s)} \times \begin{pmatrix} P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ + P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ + P_{clm}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}') \end{pmatrix} \mathrm{d}s \tag{C.8}$$

On effectue l'hypothèse de markovianisation : les corrélations $\mathcal{R}$ sont prises à leur valeur à t. Cela permet de faire apparaître la fonction $\Theta_{kpq}(t) = \int_0^t e^{-\nu\left(k^2+k'^2+(k+k')^2\right)(t-s)}\,\mathrm{d}s$:

$$\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kpq}(t) \begin{pmatrix} P_{alm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bl}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ + P_{blm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{cm}(\mathbf{k}'') \\ + P_{clm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{al}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}') \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

On peut alors remplacer les termes de l'équation d'évolution de $\mathcal{R}_{ab}$. Pour rappel, :

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = &-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+\frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}) \end{aligned} \tag{C.10}$$

On peut modifier la première intégrale comme suit, grace au changement de variable $\mathbf{k}'$ en $-\mathbf{k}'$ [1] :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{blm}(-\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' = \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}^*_{blm}(\mathbf{k},-\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \tag{C.11}$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}^*_{blm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \tag{C.12}$$

On a en effet la relation suivante liée au changement de variable :

$$\iiint_{-\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3(-\mathbf{k}') = \int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\mathrm{d}^3(-\mathbf{k}') \tag{C.13}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3(-\mathbf{k}') \tag{C.14}$$

1. Si le signe négatif devant $\mathbf{k}$ est conservé, il sera moins aisé de simplifier les équations car le vecteur $\mathbf{k}''$ sera différent dans les deux termes. Cette modification est donc nécessaire pour conserver une cohérence dans les termes.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k}' \tag{C.15}$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3(\mathbf{k}') \tag{C.16}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = &-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}^*_{blm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+\frac{\mathrm{i}}{2}P_{blm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a(-\mathbf{k})\end{aligned} \tag{C.17}$$

Le premier terme $\mathcal{S}^*_{blm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ devient ainsi :

$$\mathcal{S}^*_{blm}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} P_{bij}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{li}(\mathbf{k}')\mathcal{R}^*_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}^*_{bi}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}^*_{bi}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix} \tag{C.18}$$

Et le second terme $\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ donne :

$$\mathcal{S}_{alm}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} P_{aij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{li}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}') \\ + P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix} \tag{C.19}$$

On remplace ces deux expressions dans l'équation pour $\mathcal{R}_{ab}$. On a deux produits $-\mathrm{i}\times\mathrm{i} = 1$:

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = &\frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)\times P_{alm}(\mathbf{k})\begin{pmatrix} P_{bij}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{li}(\mathbf{k}')\mathcal{R}^*_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}^*_{bi}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}^*_{bi}(\mathbf{k})\mathcal{R}^*_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+\frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kk'k''}(t)\times P_{blm}(\mathbf{k})\begin{pmatrix} P_{aij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{li}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'') \\ + P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ &+ NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k}) + NP_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}^*_a(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{C.20}$$

On peut simplifier les conjugués pour obtenir l'expression suivante :

$$\left(\partial_t + 2\nu k^2\right)\mathcal{R}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kpq}(t)\times P_{alm}(\mathbf{k})\begin{pmatrix} P_{bij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{il}(\mathbf{p})\mathcal{R}_{jm}(\mathbf{k}'') \\ + P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ib}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{jm}(\mathbf{k}'') \\ + P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ib}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{jl}(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}'$$

$$+\frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\Theta_{kpq}(t)\times P_{blm}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}P_{aij}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{li}(\mathbf{p})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\\ +P_{lij}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\\ +P_{mij}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ai}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}')\end{pmatrix}\mathrm{d}^3\mathbf{k}'$$
$$+NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_b(\mathbf{k})+P_{b3}(\mathbf{k})\mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}) \quad \text{(C.21)}$$

On rappelle ici qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le caractère isotrope ou anisotrope du tenseur $\mathcal{R}_{ab}$.

C.2 Equation d'évolution de la corrélation triple scalaire-vitesse-vitesse

On cherche à établir l'équation d'évolution des termes de transfert pour le flux $\mathcal{F}_a$, à savoir $\mathcal{S}_{ab}$. Une nouvelle fois, on forme une combinaison linéaire des équations :

$$\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\times\text{Eq.(B.3)}(\mathbf{k})+\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\times\text{Eq.(B.2)}_a(\mathbf{k}')+\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\times\text{Eq.(B.2)}_b(\mathbf{k}'')$$

On obtient :

$$\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\left(\partial_t+\mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k})=-\mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$+N\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_3(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}'')$$
$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\left(\partial_t+\nu k'^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}')=-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$+NP_{a3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')$$
$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\left(\partial_t+\nu k''^2\right)\hat{u}_b(\mathbf{k}'')=-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$+NP_{b3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{u}_a(\mathbf{k}')$$

On somme les trois équations :

$$\left(\partial_t+\mathcal{D}k^2+\nu(k'^2+k''^2)\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')=$$
$$-\mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3}\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}$$
$$+N\hat{u}_3(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')$$
$$+NP_{a3}(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')$$

$$+ NP_{b3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{u}_a(\mathbf{k}') \quad \text{(C.22)}$$

On effectue la meme procédure que pour la section précédente. On applique l'opérateur de moyenne d'ensemble qui fait apparaître des corrélations quadruples. Ces corrélations quadruples sont exprimées en fonction de corrélation double. Là encore, un terme est nul par construction car il ne dépend que d'un seul vecteur. On simplifie également l'intégrale en ne conservant que le terme non-nul lié au Dirac. On aboutit finalement à l'expression suivante une fois tous les remplacements effectués :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2 + \nu(k'^2 + k''^2)\right)\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\
&\quad - \mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathcal{F}_a(\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p}) \\ + \mathcal{F}_b(\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{p})\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}') \iiint_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}'-\mathbf{p})\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \\ + \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{p})\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'') \iiint_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{p})\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \\ + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{p})\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}''-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{d}^3\mathbf{p} \\
&\quad + N\left\langle \hat{u}_3(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\right\rangle \\
&\quad + NP_{a3}(\mathbf{k}')\left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_b(\mathbf{k}'')\right\rangle \\
&\quad + NP_{b3}(\mathbf{k}'')\left\langle \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{u}_a(\mathbf{k}')\right\rangle \quad \text{(C.23)}
\end{aligned}$$

L'intégration sur $\mathbf{p}$ et les Dirac ne laisse subsister qu'un terme :

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2 + \nu(k'^2 + k''^2)\right)\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\
&\quad - \mathrm{i}k_j \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{F}_b(-\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}') \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'') \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \end{pmatrix} \\
&\quad + N\mathcal{S}_{3ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\quad + NP_{a3}(\mathbf{k}')\mathcal{S}_b(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\
&\quad + NP_{b3}(\mathbf{k}'')\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \quad \text{(C.24)}
\end{aligned}$$

L'opération est identique à l'équation pour $\mathcal{S}_{abc}(\mathbf{k},\mathbf{p})$. Les corrélations doubles sont prises à leur valeur à t. On fait ainsi apparaître la fonction $\Theta_{kk'k''}(t) = \int_0^s e^{-\left(\mathcal{D}k^2+\nu\left(k'^2+k''^2\right)\right)(t-s)}$.

On aboutit finalement à :

$$\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} k_j\left(\mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}') + \mathcal{F}_b(-\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\right) \\ +\dfrac{1}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}')\left(\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\right) \\ +\dfrac{1}{2}P_{bjm}(\mathbf{k}'')\left(\mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\right) \end{pmatrix} \tag{C.25}$$

On peut faire une simplification sur les deux derniers termes. On fait également intervenir le conjugué de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} k_j\left(\mathcal{R}_{bj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}') + \mathcal{F}_b^*(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}')\right) \\ +P_{ajm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{bm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \\ +P_{bjm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{am}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \tag{C.26}$$

On va maintenant intégrer cette expression dans l'équation pour l'évolution de $\mathcal{F}_a$. Pour rappel, cette équation est :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' - \mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}(\mathbf{k}',-\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{C.27}$$

On modifie le second terme pour faire disparaître le vecteur négatif comme pour la section précédente :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}(\mathbf{k}',-\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' = \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}^*(-\mathbf{k}',\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' = \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \tag{C.28}$$

D'où la nouvelle forme de l'équation de $\mathcal{F}_a$:

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = \frac{\mathrm{i}}{2}P_{alm}(\mathbf{k})\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' - \mathrm{i}k_j\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathcal{S}_{aj}^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{C.29}$$

Le terme conjugué s'écrit donc comme suit ($z^{**} = z$) :

$$\mathcal{S}_{ab}^*(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t)\begin{pmatrix} k_j\left(\mathcal{R}_{bj}^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(\mathbf{k}') + \mathcal{F}_b(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{aj}^*(\mathbf{k}')\right) \\ +P_{ajm}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{bm}^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j^*(\mathbf{k}) \\ +P_{bjm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{am}^*(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \tag{C.30}$$

On remplace les termes de corrélations triples $\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ et $\mathcal{S}_{aj}^*(\mathbf{k}',\mathbf{k})$:

$$\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k})$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} \Theta_{kk'k''}(t) \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \left(\begin{array}{r} k_j \left(\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_l^*(\mathbf{k}') + \mathcal{F}_m^*(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}') \right) \\ +P_{ljn}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mn}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \\ +P_{mjn}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ln}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{array} \right) \\ +k_j \left(\begin{array}{r} k'_n \left(\mathcal{R}_{jn}^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{an}^*(\mathbf{k}) \right) \\ +P_{anm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{jm}^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_n^*(\mathbf{k}') \\ +P_{jnm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{am}^*(\mathbf{k})\mathcal{F}_n^*(\mathbf{k}') \end{array} \right) \end{array} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k}) \quad \text{(C.31)}$$

On trouve après simplification [2] des conjugués :

$$\left(\partial_t + (\mathcal{D}+\nu)k^2\right)\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) \\ = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Theta_{kk'k''}(t) \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} P_{alm}(\mathbf{k}) \left(\begin{array}{r} k_j \left(\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_l(\mathbf{k}') + \mathcal{F}_m(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{k}') \right) \\ +P_{ljn}(\mathbf{k}')\mathcal{R}_{mn}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \\ +P_{mjn}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ln}(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{array} \right) \\ +k_j \left(\begin{array}{r} k'_n \left(\mathcal{R}_{nj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{na}(\mathbf{k}) \right) \\ +P_{anm}(\mathbf{k})\mathcal{R}_{mj}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_n(\mathbf{k}') \\ +P_{jnm}(\mathbf{k}'')\mathcal{R}_{ma}(\mathbf{k})\mathcal{F}_n(\mathbf{k}') \end{array} \right) \end{array} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{k}' \\ + NP_{a3}(\mathbf{k})\mathcal{B}(\mathbf{k}) + N\mathcal{R}_{3a}(\mathbf{k}) \quad \text{(C.32)}$$

C.3 Equation d'évolution de la corrélation triple scalaire-scalaire-vitesse

Afin d'établir les termes de transfert de l'équation pour $\mathcal{B}$, il convient d'établir l'équation pour $\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{p})$. On forme la combinaison linéaire

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.(B.3)}(\mathbf{k}) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'') \times \text{Eq.(B.3)}(\mathbf{k}') + \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') \times \text{Eq.(B.2)}_a(\mathbf{k}'').$$

Les trois équations considérées sont :

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\left(\partial_t + \mathcal{D}k^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ + N\hat{u}_3(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'')$$

2. On a pris $\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}) = \mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_a(\mathbf{k})$. En effet, si on écrit $\mathcal{F}_a(\mathbf{k}) = (\Psi_r(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\Psi_i(\mathbf{k}))\,\mathrm{e}_a^{(2)}(\mathbf{k})$, une équation pour Ψ_i intervient. Mais cette partie imaginaire ne croît pas si elle est initialement nulle. On peut donc la prendre délibérément nulle pour faire de $\mathcal{F}_a^*(\mathbf{k})$ une quantité réelle.

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\left(\partial_t + \mathcal{D}k'^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k}') = -\mathrm{i}k'_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + N\hat{u}_3(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'')$$

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\left(\partial_t + \nu k''^2\right)\hat{u}_a(\mathbf{k}'') = -\frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} + NP_{a3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}')$$

On somme les trois équations :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}(k^2+k'^2) + \nu k''^2\right)\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'') = \\ &- \mathrm{i}k_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &- \mathrm{i}k'_j \iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}'')\iiint_{\mathbb{R}^3} \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}')\hat{u}_j(\mathbf{p})\hat{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \\ &+ N\hat{u}_3(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\hat{u}_a(\mathbf{k}'') \\ &+ N\hat{u}_3(\mathbf{k}')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{u}_a(\mathbf{k}'') \\ &+ NP_{a3}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k}'')\hat{\vartheta}(\mathbf{k})\hat{\vartheta}(\mathbf{k}')\end{aligned} \tag{C.33}$$

La procédure classique est appliquée. On obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}(k^2+k'^2) + \nu k''^2\right)\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') = \\ &- \mathrm{i}k_j \begin{pmatrix}\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\ &- \mathrm{i}k'_j \begin{pmatrix}\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\ &- \frac{\mathrm{i}}{2}P_{ajm}(\mathbf{k}'')\begin{pmatrix}\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{pmatrix} \\ &+ N\mathcal{S}_{3a}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ &+ N\mathcal{S}_{3a}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \\ &+ NP_{a3}(\mathbf{k}'')S(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\end{aligned} \tag{C.34}$$

On supprime les 3 derniers termes pour l'hypothèse EDQNM1. On a la relation $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k}-\mathbf{k}'$:

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \mathcal{D}(k^2+k'^2) + \nu k''^2\right)\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \\ &- \mathrm{i}k_j\left(\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}')\right) \\ &- \mathrm{i}k'_j\left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k})\right)\end{aligned}$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{2} P_{ajm}(\mathbf{k}'') \left(\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}) \right) \quad \text{(C.35)}$$

On intègre et fait apparaître la fonction $\Theta_{kk'k''}(t) = \int_0^t e^{-(\mathcal{D}(k^2+k'^2)+\nu k''^2)(t-s)}\,\mathrm{d}s$:

$$\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t) \begin{pmatrix} k_j \left(\mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}') \right) \\ + p_j \left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a(-\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \right) \\ + \frac{1}{2} P_{ajm}(\mathbf{k}'') \left(\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_j(\mathbf{k}')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}) \right) \end{pmatrix} \quad \text{(C.36)}$$

On peut simplifier le dernier termes de la parenthèse en remarquant que les indices j et m peuvent être intervertis. On fait également intervenir le conjugué du flux :

$$\mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\mathrm{i}\Theta_{kk'k''}(t) \begin{pmatrix} k_j \left(\mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}') \right) \\ + p_j \left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \right) \\ + P_{ajm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad \text{(C.37)}$$

Pour rappel, l'équation de $\mathcal{B}$ est :

$$\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right) \mathcal{B}(\mathbf{k}) = -2\Im \left(k_a \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_a(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}' \right) + N \left(\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_3(-\mathbf{k}) \right) \quad \text{(C.38)}$$

Cela donne donc :

$$\left(\partial_t + 2\mathcal{D}k^2\right) \mathcal{B}(\mathbf{k}) = 2k_a \iiint_{\mathbb{R}^3} \Theta_{kk'k''}(t) \begin{pmatrix} k_j \left(\mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}') + \mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}') \right) \\ + p_j \left(\mathcal{R}_{aj}(\mathbf{k}'')\mathcal{B}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_a^*(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \right) \\ + P_{ajm}(\mathbf{k}'')\mathcal{F}_m(\mathbf{k}')\mathcal{F}_j(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \mathrm{d}^3\mathbf{k}' + 2N\mathcal{F}_3(\mathbf{k}) \quad \text{(C.39)}$$

Annexe D

Évolution détaillée des spectres de transfert

On reporte ici l'évolution des spectres de transfert d'énergie cinétique (figure D.1) et de variance de flottaison (figure D.2) extraits des simulations numériques à haute résolution (2048^3 points) présentées aux chapitres 3 et 4. Le cas sélectionné est initialisé par un spectre avec une pente infrarouge en $\sim k^4$. Les temps de simulation rapportés sont $t^* \in \{0{,}03\ ;1{,}6\ ;3{,}2\ ;4{,}8\ ;5{,}8\ ;6{,}4\ ;7{,}0\ ;7{,}4\ ;8{,}0\ ;8{,}3\ ;8{,}6\}$.

On observe que le modèle non corrigé sous-estime le transfert du fait du niveau plus faible de l'énergie cinétique et de la variance de flottaison. L'accord entre le modèle corrigé et la simulation directe est très bon jusqu'à des temps avancés. On voit qu'une surestimation du transfert apparaît pour le modèle corrigé aux deux figures (c). Malgré cela, le transfert reste proche de la DNS par la suite. Une explication possible est que le niveau d'énergie croît légèrement plus vite dans le mode EDQNM aux premiers instants entraînant un plus grand transfert. Pour autant, cela n'empêche pas le modèle de rester proche du comportement prédit par la DNS. On note également qu'une accumulation d'énergie apparaît assez rapidement aux petites échelles surtout pour la variance de flottaison. La limite de résolution des simulations est atteinte.

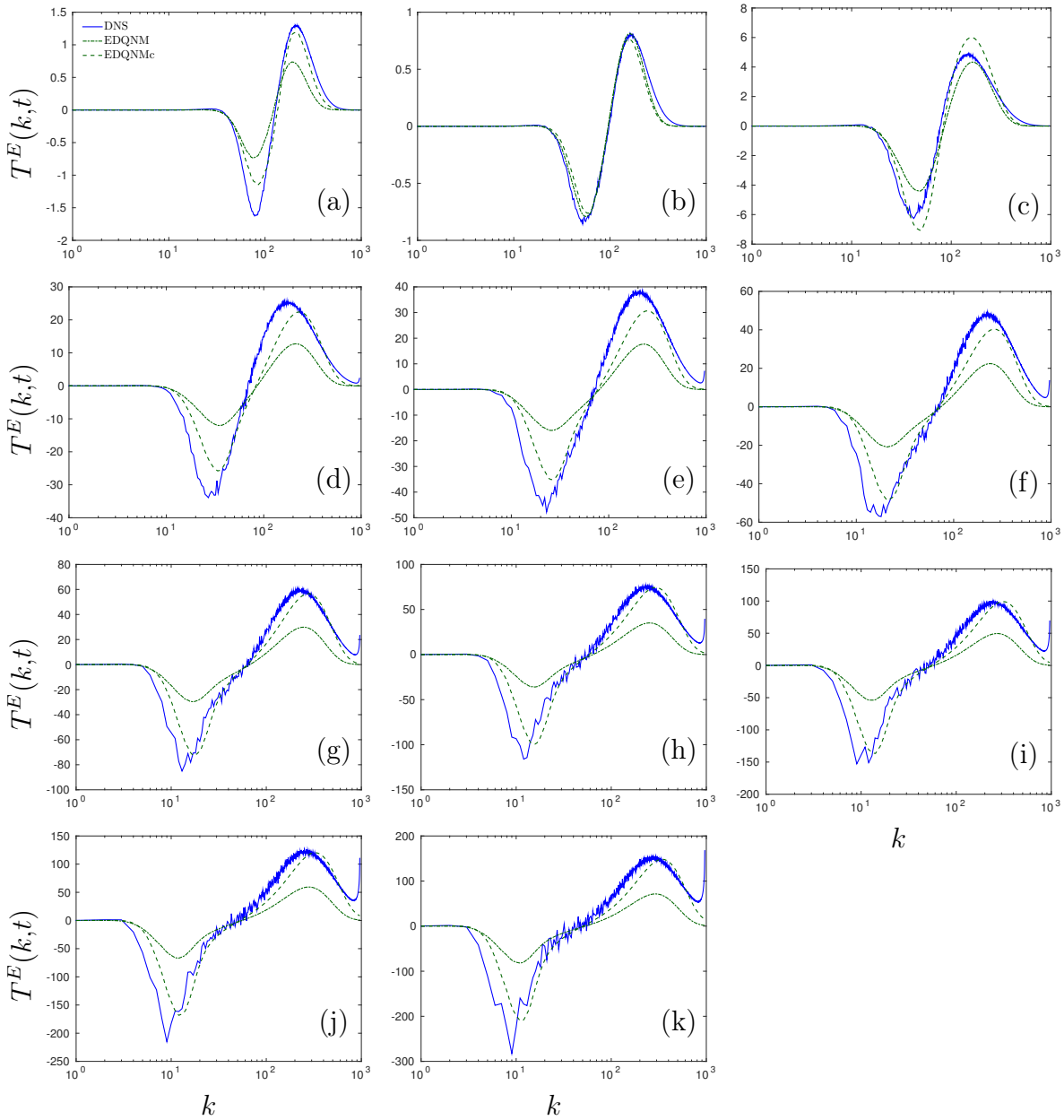


FIGURE D.1 – Évolution temporelle du transfert d'énergie cinétique à différents temps. Extrait du *run* C (pente $s = 4$). Les temps représentés sont (a) $t^* = 0{,}03$; (b) $t^* = 1{,}6$; (c) $t^* = 3{,}2$; (d) $t^* = 4{,}8$; (e) $t^* = 5{,}8$; (f) $t^* = 6{,}4$; (g) $t^* = 7{,}0$; (h) $t^* = 7{,}4$; (i) $t^* = 8{,}0$; (j) $t^* = 8{,}3$; (k) $t^* = 8{,}6$.

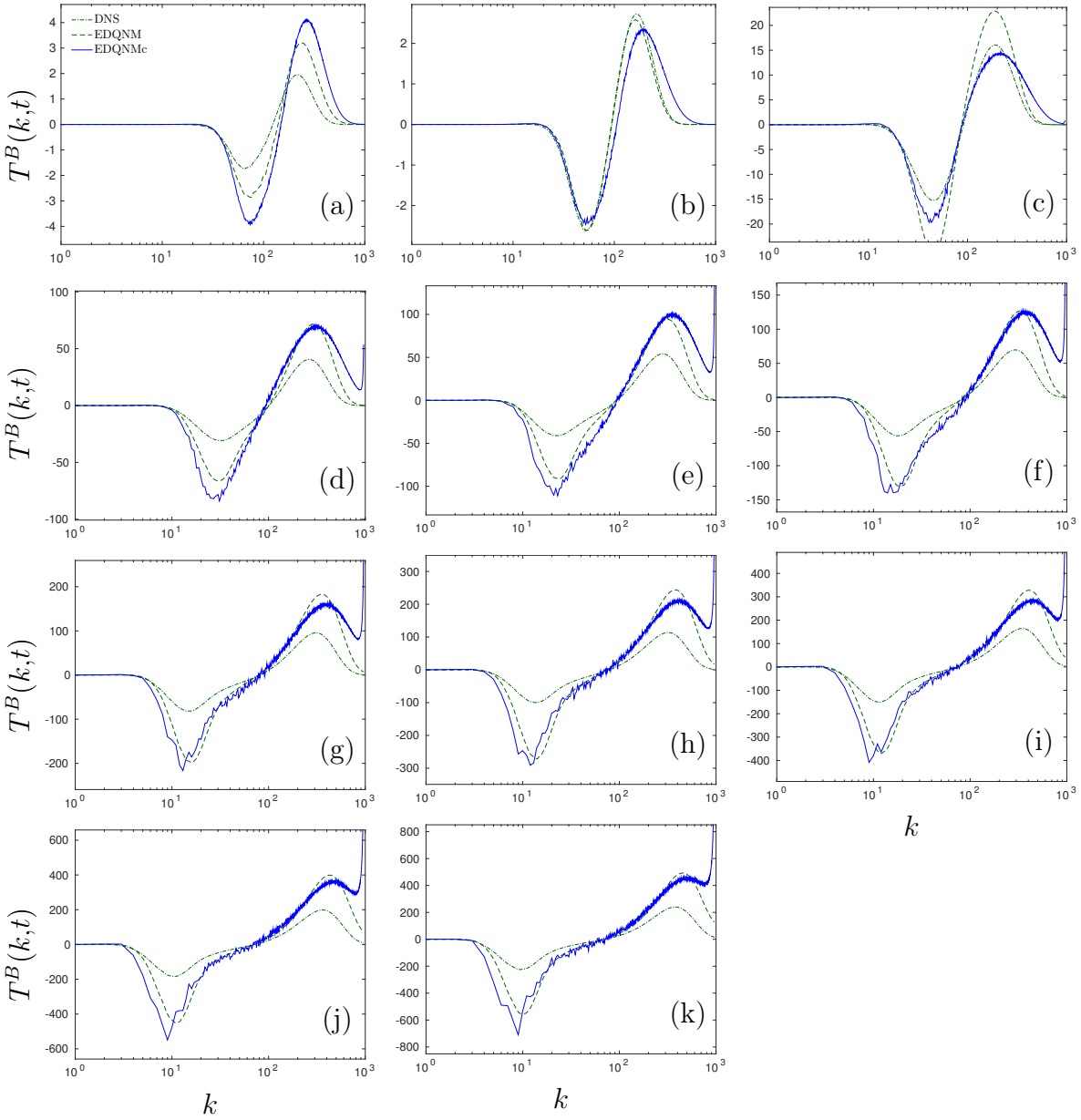


FIGURE D.2 – Évolution temporelle du transfert de variance de flottaison $T^B(k,t)$ à différents temps. Extrait du *run* C (pente $s = 4$). Les temps représentés sont (a) $t^* = 0{,}03$; (b) $t^* = 1{,}6$; (c) $t^* = 3{,}2$; (d) $t^* = 4{,}8$; (e) $t^* = 5{,}8$; (f) $t^* = 6{,}4$; (g) $t^* = 7{,}0$; (h) $t^* = 7{,}4$; (i) $t^* = 8{,}0$; (j) $t^* = 8{,}3$; (k) $t^* = 8{,}6$.

Bibliographie

[1] J. C. André et M. Lesieur. « Influence of helicity on the evolution of isotropic turbulence at high Reynolds number ». *Journal of Fluid Mechanics* 81 (01 1977), p. 187–207 (cf. p. 23, 63).

[2] M. J. Andrews et S. B. Dalziel. « Small Atwood number Rayleigh–Taylor experiments ». *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical,Physical and Engineering Sciences* 368.1916 (2010), p. 1663–1679 (cf. p. 2).

[3] M. J. Andrews et D. B. Spalding. « A simple experiment to investigate two-dimensional mixing by Rayleigh-Taylor instability ». *Physics of Fluids A* 2.6 (1990), p. 922–927 (cf. p. 10, 12).

[4] G. K. Batchelor. « The Theory of Axisymmetric Turbulence ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 186.1007 (1946), p. 480–502 (cf. p. 178).

[5] G. K. Batchelor. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, 1953 (cf. p. 5, 39, 60, 98, 100, 177, 180).

[6] G. K. Batchelor, V. M. Canuto et J. R. Chasnov. « Homogeneous buoyancy-generated turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 235 (1992), p. 349–378 (cf. p. 7).

[7] G. K. Batchelor et I. Proudman. « The Effect of Rapid Distortion of a Fluid in Turbulent Motion ». *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 7.1 (1954), p. 83–103 (cf. p. 39).

[8] F. Bellet, F. S. Godeferd, J. F. Scott et C. Cambon. « Wave turbulence in rapidly rotating flows ». *Journal of Fluid Mechanics* 562 (2006), p. 83–121 (cf. p. 32).

[9] R. Bellman et R. H. Pennington. « Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability ». *Q. Appl. Math.* 12 (1954), p. 151 (cf. p. 3).

[10] W. J. T. Bos, H. Touil et J.-P. Bertoglio. « Reynolds number dependency of the scalar flux spectrum in isotropic turbulence with a uniform scalar gradient ». *Physics of Fluids (1994-present)* 17.12, 125108 (2005) (cf. p. 30, 79, 124).

[11] A. Burlot, B.-J. Gréa, F. S. Godeferd, C. Cambon et J. Griffond. « Spectral modelling of high Reynolds number unstably stratified homogeneous turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 765 (2015), p. 17–44 (cf. p. 45).

[12] A. Burlot, B.-J. Gréa, F. S. Godeferd, C. Cambon et O. Soulard. « Large Reynolds number self-similar states of unstably stratified homogeneous turbulence ». *Physics of Fluids* 27.6, 065114 (2015) (cf. p. 97).

[13] W. H. Cabot et A. W. Cook. « Reynolds number effects on Rayleigh-Taylor instability with possible implications for type Ia supernovae ». *Nature Physics* 2.8 (2006), p. 562–568 (cf. p. 2, 6).

[14] C. Cambon et L. Jacquin. « Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation ». *Journal of Fluid Mechanics* 202 (1989), p. 295–317 (cf. p. 21, 32, 34, 37, 130).

[15] C. Cambon, D. Jeandel et J. Mathieu. « Spectral modelling of homogeneous non-isotropic turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 104 (1981), p. 247–262 (cf. p. 21, 37, 60, 182, 183).

[16] C. Cambon, N. N. Mansour et F. S. Godeferd. « Energy transfer in rotating turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 337 (1997), p. 303–332 (cf. p. 31, 32, 53, 61, 114).

[17] C. Cambon et J. F. Scott. « Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 31.1 (1999), p. 1–53 (cf. p. 32).

[18] V. M. Canuto, M. S. Dubovikov et A. Dienstfrey. « A dynamical model for turbulence. IV. Buoyancy-driven flows ». *Physics of Fluids* 9.7 (1997), p. 2118–2131 (cf. p. 29, 60).

[19] S. Chandrasekhar. « The Theory of Axisymmetric Turbulence ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 242.855 (1950), p. 557–577 (cf. p. 178, 180).

[20] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The International Series of Monographs on Physics. Dover Publ., 1961 (cf. p. 3, 4).

[21] S. Chen, G. Doolen, J. R. Herring, R. H. Kraichnan, S. A. Orszag et Z. S. She. « Far-dissipation range of turbulence ». *Physical Review Letters* 70 (20 1993), p. 3051–3054 (cf. p. 53).

[22] P. Y. Chou. « On an extension of Reynolds' method of finding apparent stress and the nature of turbulence. » *Chinese Journal of Physics* 4 (1940), p. 1–33 (cf. p. 22).

[23] D. S. Clark, D. E. Hinkel, D. C. Eder, O. S. Jones, S. W. Haan, B. A. Hammel, M. M. Marinak, J. L. Milovich, H. F. Robey, L. J. Suter et R. P. J. Town. « Detailed implosion modeling of deuterium-tritium layered experiments on the National Ignition Facility) ». *Physics of Plasmas* 20.5, 056318 (2013) (cf. p. 2, 4, 16, 174).

[24] A. Craya. « Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes ». Thèse de doct. Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1957 (cf. p. 180).

[25] A. Cui et R. L. Street. « Large-Eddy Simulation of Coastal Upwelling Flow ». *Environmental Fluid Mechanics* 4.2 (2004), p. 197–223 (cf. p. 2).

[26] R. M. Davies et G. I. Taylor. « The Mechanics of Large Bubbles Rising through Extended Liquids and through Liquids in Tubes ». *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 200.1062 (1950), p. 375–390 (cf. p. 3).

[27] A. Delache, C. Cambon et F. S. Godeferd. « Scale by scale anisotropy in freely decaying rotating turbulence ». *Physics of Fluids (1994-present)* 26.2, 025104 (2014) (cf. p. 88, 137).

[28] G. Dimonte, J. Morrison, S. Hulsey, D. Nelson, S. Weaver, A. Susoeff, R. Hawke, M. Schneider, J. Batteaux, D. Lee et J. Ticehurst. « A linear electric motor to study turbulent hydrodynamics ». *Review of Scientific Instruments* 67.1 (1996), p. 302–306 (cf. p. 16).

[29] G. Dimonte, P. Ramaprabhu et M. Andrews. « Rayleigh-Taylor instability with complex acceleration history ». *Physical Review E* 76 (4 2007), p. 046313 (cf. p. 17, 18, 143, 144, 146, 159, 168).

[30] G. Dimonte et M. Schneider. « Turbulent Rayleigh-Taylor instability experiments with variable acceleration ». *Physical Review E* 54 (4 1996), p. 3740–3743 (cf. p. 17, 144).

[31] G. Dimonte, D. L. Youngs, A. Dimits, S. Weber, M. Marinak, S. Wunsch, C. Garasi, A. Robinson, M. J. Andrews, P. Ramaprabhu, A. C. Calder, B. Fryxell, J. Biello, L. Dursi, P. MacNeice, K. Olson, P. Ricker, R. Rosner, F. Timmes, H. Tufo, Y.-N. Young et M. Zingale. « A comparative study of the turbulent Rayleigh–Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha-Group collaboration ». *Physics of Fluids (1994-present)* 16.5 (2004), p. 1668–1693 (cf. p. 5).

[32] P. E. Dimotakis. « Turbulent Mixing ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), p. 329–356 (cf. p. 1).

[33] T. Ebisuzaki, T. Shigeyama et K. Nomoto. « Rayleigh-Taylor instability and mixing in SN 1987A ». *Astrophysical Journal* 344 (1989), p. L65–L68 (cf. p. 2, 16).

[34] G. L. Eyink et D. J. Thomson. « Free decay of turbulence and breakdown of self-similarity ». *Physics of Fluids (1994-present)* 12.3 (2000), p. 477–479 (cf. p. 46, 98, 100, 113, 140).

[35] B. Favier, F. S. Godeferd, C. Cambon, A. Delache et W. J. T. Bos. « Quasi-static magnetohydrodynamic turbulence at high Reynolds number ». *Journal of Fluid Mechanics* 681 (2011), p. 434–461 (cf. p. 21).

[36] F. S. Godeferd et C. Cambon. « Detailed investigation of energy transfers in homogeneous stratified turbulence ». *Physics of Fluids* 6.6 (1994), p. 2084–2100 (cf. p. 21, 27, 31, 34, 35, 37, 51, 62, 114, 145, 147, 163).

[37] F. S. Godeferd et C. Staquet. « Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. Part 2. Large-scale and small-scale anisotropy ». *Journal of Fluid Mechanics* 486 (2003), p. 115–159 (cf. p. 31, 53).

[38] B.-J. Gréa. « The rapid acceleration model and the growth rate of a turbulent mixing zone induced by Rayleigh-Taylor instability ». *Physics of Fluids* 25.1, 015118 (2013) (cf. p. 5, 7, 8, 12, 39, 73, 90, 128, 144, 150, 154, 155, 159, 168, 175).

[39] B.-J. Gréa, A. Burlot, J. Griffond et A. Llor. « Challenging mix models on transients to self-similarity of unstably stratified homogeneous turbulence ». *Journal of Fluids Engineering* Accepted (2015) (cf. p. 175).

[40] B.-J. Gréa, J. Griffond et A. Burlot. « The effects of variable viscosity on the decay of homogeneous isotropic turbulence ». *Physics of Fluids (1994-present)* 26.3, 035104 (2014) (cf. p. 21).

[41] B.-J. Gréa, J. Griffond et F. S. Godeferd. « Strain and Stratification Effects on the Rapid Acceleration of a Turbulent Mixing Zone ». *Journal of Fluids Engineering* 136.9 (2014), p. 091203–091203 (cf. p. 174).

[42] B.-J. Gréa, O. Soulard et J. Griffond. « IWPTCM Conference ». Communication personnelle. 2010 (cf. p. 132).

[43] J. Griffond. « Linear interaction analysis applied to a mixture of two perfect gases ». *Physics of Fluids* 17.8, 086101 (2005) (cf. p. 174).

[44] J. Griffond, B.-J. Gréa et O. Soulard. « Unstably Stratified Homogeneous Turbulence as a Tool for Turbulent Mixing Modeling ». *Journal of Fluids Engineering* 136.9 (2014), p. 091201–091201 (cf. p. 7, 8, 45).

[45] J. Griffond, B.-J. Gréa et O. Soulard. « Numerical investigation of self-similar unstably stratified homogeneous turbulence ». *Journal of Turbulence* 16.2 (2015), p. 167–183 (cf. p. 7, 45, 48, 97, 132, 160).

[46] J. Gustafsson et W. K. George. « Energy spectra at low wavenumbers in homogeneous incompressible turbulence ». *Physics Letters A* 375.30–31 (2011), p. 2850–2853 (cf. p. 100).

[47] S. W. Haan. « Weakly nonlinear hydrodynamic instabilities in inertial fusion ». *Physics of Fluids B* 3.8 (1991), p. 2349–2355 (cf. p. 4, 174).

[48] S. W. Haan, S. M. Pollaine, J. D. Lindl, L. J. Suter, R. L. Berger, L. V. Powers, W. E. Alley, P. A. Amendt, J. A. Futterman, W. K. Levedahl, M. D. Rosen, D. P. Rowley, R. A. Sacks, A. I. Shestakov, G. L. Strobel, M. Tabak, S. V. Weber, G. B. Zimmerman, W. J. Krauser, D. C. Wilson, S. V. Coggeshall, D. B. Harris, N. M. Hoffman et B. H. Wilde. « Design and modeling of ignition targets for the National Ignition Facility ». *Physics of Plasmas* 2.6 (1995), p. 2480–2487 (cf. p. 2, 16).

[49] S. Herr, L.-P. Wang et L. R. Collins. « EDQNM model of a passive scalar with a uniform mean gradient ». *Physics of Fluids (1994-present)* 8.6 (1996), p. 1588–1608 (cf. p. 30, 79).

[50] J. R. Herring. « Approach of axisymmetric turbulence to isotropy ». *Physics of Fluids (1958-1988)* 17.5 (1974), p. 859–872 (cf. p. 180).

[51] J. R. Herring, D. Schertzer, M. Lesieur, G. R. Newman, J. P. Chollet et M. Larcheveque. « A comparative assessment of spectral closures as applied to passive scalar diffusion ». *Journal of Fluid Mechanics* 124 (1982), p. 411–437 (cf. p. 123).

[52] V. R. Ikkurthi et S. Chaturvedi. « Study of Rayleigh-Taylor Instability in Impact and Explosive-Loaded Metallic Plates ». *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* 15.3 (2014), p. 277–281 (cf. p. 2).

[53] P. S. Iroshnikov. « Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field ». *Sov. Astron.* 7 (1964), p. 566 (cf. p. 61).

[54] W. S. Jevons. « On the cirrus formation of cloud ». *Phil. Mag.* 14.90 (1857), p. 22–35 (cf. p. 3).

[55] Y. Kaneda et T. Ishihara. « High-resolution direct numerical simulation of turbulence ». *Journal of Turbulence* 7 (2006), N20 (cf. p. 15).

[56] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura et A. Uno. « Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box ». *Physics of Fluids* 15.2 (2003), p. L21–L24 (cf. p. 49).

[57] Y. Kaneda et K. Yoshida. « Small-scale anisotropy in stably stratified turbulence ». *New Journal of Physics* 6.1 (2004), p. 34 (cf. p. 97, 98, 103, 138, 139, 141).

[58] S. C. Kassinos et W. C. Reynolds. *A Structure-Based Model For The Rapid Distortion Of Homogeneous Turbulence*. Rapp. tech. Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1995 (cf. p. 130).

[59] A. N. Kolmogorov. « Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 434.1890 (1991), p. 15–17 (cf. p. 121).

[60] A. N. Kolmogorov. « The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 434.1890 (1991), p. 9–13 (cf. p. 86, 121).

[61] R. H. Kraichnan. « The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers ». *Journal of Fluid Mechanics* 5 (04 1959), p. 497–543 (cf. p. 20, 60).

[62] R. H. Kraichnan. « Kolmogorov's Hypotheses and Eulerian Turbulence Theory ». *Physics of Fluids (1958-1988)* 7.11 (1964), p. 1723–1734 (cf. p. 20, 60).

[63] R. H. Kraichnan. « Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence ». *Physics of Fluids (1958-1988)* 8.7 (1965), p. 1385–1387 (cf. p. 61, 94).

[64] R. H. Kraichnan. « Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence ». *Physics of Fluids* 8.4 (1965), p. 575–598 (cf. p. 149).

[65] R. H. Kraichnan. « Isotropic Turbulence and Inertial-Range Structure ». *Physics of Fluids* 9.9 (1966), p. 1728–1752 (cf. p. 53).

[66] R. H. Kraichnan. « An almost-Markovian Galilean-invariant turbulence model ». *Journal of Fluid Mechanics* 47 (03 1971), p. 513–524 (cf. p. 64, 148).

[67] R. H. Kraichnan. « Test-field model for inhomogeneous turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 56 (02 1972), p. 287–304 (cf. p. 149).

[68] R. H. Kraichnan. « Eddy Viscosity in Two and Three Dimensions ». *J. Atmos. Sci.* 33.8 (1976), p. 1521–1536 (cf. p. 115).

[69] L. D. Landau et E. M. Lifšic. *Fluid Mechanics*. Teoretičeskaja fizika. Butterworth-Heinenann, 1944 (cf. p. 98).

[70] D. Layzer. « On the instability of superposed fluids in a gravitational field ». *The Astrophysical Journal* 122 (1955), p. 1 (cf. p. 3, 4).

[71] C. E. Leith. « Atmospheric Predictability and Two-Dimensional Turbulence ». *Journal of the Atmospheric Sciences* 28.2 (1971), p. 145–161 (cf. p. 21, 37).

[72] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and Its Applications Series. Springer, 2008 (cf. p. 22, 35, 48, 88, 114).

[73] M. Lesieur, O. Métais et P. Comte. *Large-Eddy Simulations of Turbulence*. Cambridge Books Online. Cambridge University Press, 2005 (cf. p. 121).

[74] M. Lesieur et S. Ossia. « 3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers: EDQNM study ». *Journal of Turbulence* 1 (2000), p. 1–25 (cf. p. 46, 63, 98, 100, 113, 117, 122, 137, 140).

[75] D. J. Lewis. « The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. II ». *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 202.1068 (1950), p. 81–96 (cf. p. 3).

[76] P. F. Linden, J. M. Redondo et D. L. Youngs. « Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability ». *Journal of Fluid Mechanics* 265 (1994), p. 97–124 (cf. p. 5).

[77] D. Livescu et J. R. Ristorcelli. « Buoyancy-driven variable-density turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 591 (2007), p. 43–71 (cf. p. 7, 8).

[78] D. Livescu, T. Wei et M. R. Petersen. « Direct Numerical Simulations of Rayleigh-Taylor Instability ». *Journal of Physics: Conference Series*. T. 318. IOP Publishing, 2011, p. 082007 (cf. p. 160, 161, 163).

[79] A. Llor. « Bulk turbulent transport and structure in Rayleigh-Taylor, Richtmyer-Meshkov, and variable acceleration instabilities ». *Laser and Particle Beams* 21 (03 2003), p. 305–310 (cf. p. 15).

[80] A. Llor. « Langevin equation of big structure dynamics in turbulence: Landau's invariant in the decay of homogeneous isotropic turbulence ». *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 30.5 (2011), p. 480–504 (cf. p. 98).

[81] A. Llor et O. Soulard. « Comment on "Energy spectra at low wavenumbers in homogeneous incompressible turbulence" [Phys. Lett. A 375 (2011) 2850] ». *Physics Letters A* 377.15 (2013), p. 1157–1159 (cf. p. 100).

[82] L. G. Loitsyanskii. « Some basic laws of isotropic turbulent flow ». *Trudy Tsentr. Aero.-Giedrodin. Inst.* 440 (1939), p. 3–23 (cf. p. 98).

[83] A. M. Loll, S. J. Desch, P. A. Scowen et J. P. Foy. « Observations of the Crab Nebula's Asymmetrical Development ». *The Astrophysical Journal* 765.2 (2013), p. 152 (cf. p. 16).

[84] J. L. Lumley. « The Spectrum of Nearly Inertial Turbulence in a Stably Stratified Fluid ». *Journal of the Atmospheric Sciences* 21.1 (1964), p. 99–102 (cf. p. 86).

[85] J. L. Lumley. « Similarity and the Turbulent Energy Spectrum ». *Physics of Fluids (1958-1988)* 10.4 (1967), p. 855–858 (cf. p. 121, 139).

[86] M. Meldi et P. Sagaut. « On non-self-similar regimes in homogeneous isotropic turbulence decay ». *Journal of Fluid Mechanics* 711 (2012), p. 364–393 (cf. p. 100, 137).

[87] M. Millionshtchikov. « On the theory of homogeneous isotropic turbulence ». *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32 (1941), p. 615–618 (cf. p. 22).

[88] O. A. Molchanov. « On the origin of low- and middler-latitude ionospheric turbulence ». *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C* 29.4–9 (2004). Seismo Electromagnetics and Related Phenomena, p. 559–567 (cf. p. 2).

[89] L. Mydlarski et Z. Warhaft. « Passive scalar statistics in high-Péclet-number grid turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 358 (1998), p. 135–175 (cf. p. 124).

[90] K. Nagata, Y. Sakai, S. Komori et T. Kubo. « Velocity and Passive Scalar Cross Spectra in Stably and Unstably Stratified Grid Turbulence ». *Journal of Fluid Science and Technology* 2.1 (2007), p. 109–119 (cf. p. 121).

[91] V. E. Neuvazhaev. « Properties of a model for the turbulent mixing of the boundary between accelerated liquids differing in density ». English. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 24.5 (1983), p. 680–687 (cf. p. 15).

[92] A. M. Obukhov. *The structure of the temperature field in turbulent flow*. Rapp. tech. Izv. Akad. Nauk. SSSR, 1949 (cf. p. 86, 121).

[93] Y. Ogura. « A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 16 (01 1963), p. 33–40 (cf. p. 22).

[94] S. A. Orszag. « Analytical theories of turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 41 (02 1969), p. 363–386 (cf. p. 20, 23, 27).

[95] S. A. Orszag. « Lectures on the Statistical Theory of Turbulence ». *Les Houches Summer School 1973*. 1977, p. 273–374 (cf. p. 20, 22, 24, 35, 177).

[96] R. V. Ozmidov. « On energy distribution over multi-scale motions of ocean water ». *Izvestia Acad. Sci. USSR, Atmosphere and Ocean Physics* 4 (1965), p. 257 (cf. p. 87).

[97] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000 (cf. p. 48, 49, 53, 177).

[98] O. Poujade et M. Peybernes. « Growth rate of Rayleigh-Taylor turbulent mixing layers with the foliation approach ». *Physical Review E* 81 (1 2010), p. 016316 (cf. p. 5, 15, 155).

[99] A. Pouquet, M. Lesieur, J. C. André et C. Basdevant. « Evolution of high Reynolds number two-dimensional turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 72 (02 1975), p. 305–319 (cf. p. 23).

[100] P. Ramaprabhu, V. Karkhanis et A. G. W. Lawrie. « The Rayleigh-Taylor Instability driven by an accel-decel-accel profile ». *Physics of Fluids (1994-present)* 25.11, 115104 (2013) (cf. p. 17, 18, 143, 144, 146, 159, 167, 168).

[101] J. W. S. Rayleigh. « Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Fluid of Variable Density ». *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-14.1 (1882), p. 170–177 (cf. p. 2).

[102] K. I. Read. « Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability ». *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12.1–3 (1984), p. 45–58 (cf. p. 4, 17, 144).

[103] J. J. Riley, R. W. Metcalfe et M. A. Weissman. « Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids ». *AIP Conference Proceedings* 76.1 (1981), p. 79–112 (cf. p. 32).

[104] J. Ryu et D. Livescu. « Turbulence structure behind the shock in canonical shock–vortical turbulence interaction ». *Journal of Fluid Mechanics* 756 (2014) (cf. p. 174).

[105] P. G. Saffman. « The large-scale structure of homogeneous turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 27 (03 1967), p. 581–593 (cf. p. 98, 100).

[106] P. Sagaut et C. Cambon. *Homogeneous Turbulence Dynamics*. Cambridge University Press, 2008 (cf. p. 21, 22, 32, 62, 130, 137, 187).

[107] R. W. Schmitt. « Double Diffusion in Oceanography ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 26.1 (1994), p. 255–285 (cf. p. 3).

[108] R. W. Schmitt. « The Salt Finger Experiments of Jevons (1857) and Rayleigh (1880) ». *Journal of Physical Oceanography* 25.1 (1995), p. 8–17 (cf. p. 3).

[109] D. H. Sharp. « An overview of Rayleigh-Taylor instability ». *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12.1–3 (1984), p. 3–18 (cf. p. 3).

[110] O. Soulard. « Implications of the Monin-Yaglom Relation for Rayleigh-Taylor Turbulence ». *Phys. Rev. Lett.* 109 (25 2012), p. 254501 (cf. p. 123).

[111] O. Soulard et J. Griffond. « Inertial-range anisotropy in Rayleigh-Taylor turbulence ». *Physics of Fluids (1994-present)* 24.2, 025101 (2012) (cf. p. 121, 125, 127).

[112] O. Soulard, J. Griffond et B.-J. Gréa. « Large-scale analysis of self-similar unstably stratified homogeneous turbulence ». *Physics of Fluids* 26.1, 015110 (2014) (cf. p. 7, 8, 13, 92, 97, 115, 121, 150).

[113] O. Soulard, J. Griffond et B.-J. Gréa. « Influence of mixing on the second order moments of velocity and concentration in Rayleigh-Taylor turbulence ». *In preparation* (2015), p. – (cf. p. 143–145, 150, 151, 153, 159, 168).

[114] P. R. Spalart. « Philosophies and fallacies in turbulence modeling ». *Progress in Aerospace Sciences* 74 (2015), p. 1–15 (cf. p. 32).

[115] C. Staquet et F. S. Godeferd. « Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. Part 1. Flow energetics ». *Journal of Fluid Mechanics* 360 (1998), p. 295–340 (cf. p. 31, 35, 55, 145, 163).

[116] M. J. Steinkamp, T. T. Clark et F. H. Harlow. « Two-point description of two-fluid turbulent mixing—I. Model formulation ». *International Journal of Multiphase Flow* 25.4 (1999), p. 599–637 (cf. p. 60).

[117] G. I. Taylor. « Statistical Theory of Turbulence ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 151.873 (1935), p. 421–444 (cf. p. 177).

[118] G. I. Taylor. « The Spectrum of Turbulence ». *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 164.919 (1938), p. 476–490 (cf. p. 60).

[119] G. I. Taylor. « The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 201.1065 (1950), p. 192–196 (cf. p. 3).

[120] H. Tennekes et J.L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. Pe Men Book Company, 1972 (cf. p. 60).

[121] S. T. Thoroddsen, C. W. Van Atta et J. S. Yampolsky. « Experiments on homogeneous turbulence in an unstably stratified fluid ». *Physics of Fluids* 10.12 (1998), p. 3155–3167 (cf. p. 7, 8, 92).

[122] L. vanHaren. « Étude théorique et modélisation de la turbulence en présence d'ondes internes ». Thèse de doct. École centrale de Lyon, 1994 (cf. p. 35, 37).

[123] N. Vladimirova et M. Chertkov. « Self-similarity and universality in Rayleigh–Taylor, Boussinesq turbulence ». *Physics of Fluids* 21.1, 015102 (2009) (cf. p. 8).

[124] J. P. Wilkinson et J. W. Jacobs. « Experimental study of the single-mode three-dimensional Rayleigh-Taylor instability ». *Physics of Fluids* 19.12, 124102 (2007) (cf. p. 3, 4).

[125] Y. Xia, Y. Liu, T. Vaithianathan et L. R. Collins. « Eddy damped quasinormal Markovian theory for chemically reactive scalars in isotropic turbulence ». *Physics of Fluids* 22.4, 045103 (2010) (cf. p. 21).

[126] P. K. Yeung et S. B. Pope. « Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence ». *Journal of Fluid Mechanics* 207 (1989), p. 531–586 (cf. p. 49).

[127] D. L. Youngs. « Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability ». *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12.1–3 (1984), p. 32–44 (cf. p. 4).

[128] Y. Zhou, W. H. Matthaeus et P. Dmitruk. « Colloquium: Magnetohydrodynamic turbulence and time scales in astrophysical and space plasmas ». *Rev. Mod. Phys.* 76 (4 2004), p. 1015–1035 (cf. p. 61).

[129] J. A. Zufiria. « Bubble competition in Rayleigh–Taylor instability ». *Physics of Fluids* 31.3 (1988), p. 440–446 (cf. p. 4).

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la turbulence homogène stratifiée instable, un écoulement idéalisé décrivant l'évolution de la turbulence au sein d'une zone de mélange de type Rayleigh-Taylor. Cette approche se concentre sur l'évolution des quantités fluctuantes ; l'influence de l'écoulement moyen est prise en compte au travers d'un gradient moyen de densité. Un modèle spectral est utilisé pour étudier cette turbulence, conjointement à des simulations numériques directes. En comparaison avec ces simulations, l'étape de validation du modèle met en lumière le rôle des termes de stratification sur la dynamique du transfert d'énergie. Une première étude montre l'établissement, dans l'état autosemblable, de lois d'échelles ainsi que l'influence de la distribution initiale d'énergie sur l'état asymptotique et sur l'anisotropie de l'écoulement. Dans une seconde étude, la rétroaction de la turbulence sur le gradient moyen est introduite, dans un premier temps, afin de rapprocher la dynamique autosemblable de la turbulence homogène stratifiée instable de celle observée en turbulence Rayleigh-Taylor. Dans un second temps, l'influence d'un renversement de la stratification sur la dynamique du mélange est étudiée au travers d'un profil d'accélération variable.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of unstably stratified homogeneous turbulence. This flow is an idealized framework introduced to investigate the turbulence developing at the centerline of a Rayleigh-Taylor mixing zone. This approach focuses on turbulent quantities, when the mean flow acts on the turbulent field through a mean density gradient. A spectral model and direct numerical simulations are used to study this turbulent flow. The validation step reveals the role of stratification terms on the energy transfer dynamic. Then, a first study shows the emergence of scaling laws in the self-similar state, together with the large scale energy distribution impact on the asymptotic state and on the flow anisotropy. In a second study, the turbulent retroaction on the mean density gradient is introduced in order to bring unstably stratified homogeneous turbulence closer to the Rayleigh-Taylor turbulence dynamics. This step leads to investigate the consequences of a stratification inversion on the mixing dynamics through a variable acceleration profile.