HAL
open science

Dynamique topologique sur les surfaces : gros groupe modulaire & classes de Brouwer

Juliette Bavard

To cite this version:

Juliette Bavard. Dynamique topologique sur les surfaces : gros groupe modulaire & classes de Brouwer. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066514 . tel-01309260

HAL Id: tel-01309260

https://theses.hal.science/tel-01309260v1

Submitted on 29 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Juliette Bavard

Dynamique topologique sur les surfaces : gros groupe modulaire & classes de Brouwer

---

dirigée par Frédéric Le Roux

Rapporteurs :

Danny Calegari	University of Chicago
Shigenori Matsumoto	Nihon University

Soutenue le 9 décembre 2015 devant le jury composé de :

Nicolas Bergeron	Université Pierre et Marie Curie
Louis Funar	Université Joseph Fourier
Vincent Guirardel	Université de Rennes 1
Patrice Le Calvez	Université Pierre et Marie Curie
Frédéric Le Roux	Université Pierre et Marie Curie
Shigenori Matsumoto	Nihon University

Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche.
UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Résumé

On étudie le groupe modulaire Γ du plan privé d'un ensemble de Cantor et les classes de Brouwer du groupe modulaire du plan privé de $\mathbb{Z}$. Ces objets apparaîssent naturellement en dynamique topologique sur les surfaces.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse au groupe Γ et à son action sur le graphe des rayons, qui est un analogue défini par Danny Calegari du complexe des courbes pour le plan privé d'un ensemble de Cantor. En particulier, on montre que ce graphe est de diamètre infini et hyperbolique. On utilise ensuite l'action de Γ sur ce graphe hyperbolique pour exhiber un quasi-morphisme non trivial explicite sur Γ et pour montrer que le deuxième groupe de cohomologie bornée de Γ est de dimension infinie. Enfin, on donne un exemple d'un élément hyperbolique de Γ dont la longueur stable des commutateurs est nulle.

Dans le second chapitre, on développe de nouveaux outils pour la théorie de Brouwer homotopique. En particulier, on décrit un ensemble canonique de droites de réduction, l'ensemble des « murs », qui sépare le plan en zones de translation maximales et en zones irréductibles. On se restreint ensuite au cas des classes de Brouwer relativement à quatre orbites, et on les décrit explicitement en ajoutant au diagramme de Handel et à l'ensemble des murs un « emmêlement », qui est essentiellement une classe d'isotopie de courbes sur le cylindre privé de deux points.

Mots-clés

Groupes modulaires, surfaces de type infini, complexe des courbes, espaces Gromov-hyperboliques, quasi-morphismes, longueur stable des commutateurs, théorie de Brouwer homotopique

Topological dynamics on surfaces : big mapping class group & Brouwer classes

Abstract

We study the mapping class group Γ of the complement of a Cantor set in the plane and the Brouwer mapping classes of the mapping class group of the complement of $\mathbb{Z}$ in the plane. These objects arise naturally in topological dynamics on surfaces.

In the first chapter, we study the group Γ and its action on the ray graph, which is the analog defined by Danny Calegari of the complex of curves for the complement of a Cantor set in the plane. In particular, we show that this graph has infinite diameter and is hyperbolic. We use the action of Γ on this graph to find an explicit non trivial quasimorphism on Γ and to show that this group has infinite dimensional second bounded cohomology. We give an example of a hyperbolic element of Γ with vanishing stable commutator length.

In the second chapter, we give new tools for homotopy Brouwer theory. In particular, we describe a canonical reducing set, the set of "walls", which splits the plane into maximal translation areas and irreducible areas. We then focus on Brouwer mapping classes relatively to four orbits and describe them explicitly by adding to Handel's diagram and to the set of walls a "tangle", which is essentially an isotopy class of simple closed curves in the cylinder minus two points.

Keywords

Mapping class groups, infinite type surfaces, curve complex, Gromov-hyperbolic spaces, quasimorphisms, scl, homotopy Brouwer theory

Table des matières

Introduction **7**

0.1 Pourquoi des surfaces de type infini ? 7

0.2 Résultats obtenus autour de MCG($\mathbb{R}^2$ − Cantor) 11

0.3 Résultats obtenus autour de MCG($\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}$) 17

0.4 Questions et perspectives 21

1 Groupe modulaire du plan privé d'un ensemble de Cantor **25**

1.1 Diamètre du graphe des rayons et demi-axe géodésique 25

1.2 Hyperbolicité du graphe des rayons 34

1.3 Quasi-morphismes non triviaux 45

1.4 Exemple d'un élément hyperbolique de scl nulle 60

2 Conjugacy invariant for Brouwer mapping classes **65**

2.1 First tools of homotopy Brouwer theory 65

2.2 Description of the results 73

2.3 Adjacency areas, diagrams and special nice families 81

2.4 Walls for a Brouwer mapping class 89

2.5 Determinant diagrams and irreducible areas 99

2.6 Deflectors 107

2.7 Classification relatively to 4 orbits 112

A Diagrams with four orbits **123**

Bibliographie **127**

Introduction

Lorsque S est une surface connexe orientable, deux homéomorphismes de S sont dits *isotopes* s'il existe un chemin continu d'homéomorphismes reliant l'un à l'autre dans le groupe des homéomorphismes de S. Le *groupe modulaire* de S est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de S préservant l'orientation. On le notera $\mathrm{MCG}(S)$, pour « mapping class group ».

Cette thèse porte sur l'étude de deux groupes modulaires : celui du plan privé d'un ensemble de Cantor et celui du plan privé de $\mathbb{Z}$. Dans cette introduction, on motive l'étude de ces deux groupes et on présente les résultats obtenus, puis on pointe quelques questions ouvertes et perspectives. Le premier chapitre regroupe les résultats autour de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$, rédigés dans [4], et le second regroupe les résultats autour des classes de Brouwer de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z})$, rédigés dans [3].

0.1 Pourquoi des surfaces de type infini ?

Une surface est dite *de type fini* si son genre est fini et si elle a un nombre fini (éventuellement nul) de composantes de bord et/ou de pointes. On dit qu'une surface est *de type infini* si elle n'est pas de type fini. Les deux surfaces considérées dans cette thèse, le plan privé d'un ensemble de Cantor et le plan privé de $\mathbb{Z}$, sont donc des surfaces de type infini. Le choix du *plan* (privé d'un nombre infini de pointes) peut paraître restrictif parmi toutes les surfaces, mais il l'est beaucoup moins si l'on pense au plan en temps que revêtement universel de surface : comme tout homéomorphisme de surface hyperbolique se relève en un homéomorphisme du plan, il apparaît naturellement comme un premier objet à étudier.

Si l'on connaît aujourd'hui de nombreuses caractéristiques des groupes modulaires des surfaces de type fini, les groupes modulaires des surfaces de type infini sont beaucoup moins étudiés. Pourtant, comme nous allons le voir, certains de ces groupes surgissent naturellement en dynamique ou ailleurs. Nous motivons ici

l'étude des deux groupes modulaires présents dans cette thèse : celui du plan privé d'un ensemble de Cantor et celui du plan privé de $\mathbb{Z}$.

0.1.1 Étude de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \text{Cantor})$: dynamique sur les surfaces et théorie des groupes

Les motivations suivantes sont dûes à Danny Calegari.

Dynamique sur les surfaces

Le groupe modulaire du plan privé d'un Cantor se manifeste assez rapidement lorsque l'on cherche à étudier les groupes qui agissent sur le plan, en particulier à travers la construction suivante.

Soit G un sous-groupe du groupe des homéomorphismes du plan préservant l'orientation. Si l'orbite $G \cdot p$ d'un point $p \in \mathbb{R}^2$ est bornée, alors il existe un morphisme de G vers $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$, où K est soit un ensemble fini, soit un ensemble de Cantor.

En effet, la réunion $\tilde{K}$ de l'adhérence de l'orbite $G \cdot p$ avec l'ensemble des composantes connexes bornées du complémentaire de cette adhérence est un ensemble compact, invariant par G et de complémentaire connexe. Le groupe G agit sur le quotient du plan obtenu en « écrasant » chacune des composantes connexes de $\tilde{K}$ sur un point (un point par composante), qui est encore homéomorphe au plan, d'après un théorème de Robert Lee Moore (théorème 25 de [39]). L'image de $\tilde{K}$ au quotient est un sous-ensemble K' du plan, totalement discontinu. Cet ensemble K' contient un sous-ensemble minimal, c'est-à-dire un sous-ensemble K tel que toute orbite $G \cdot q$ avec $q \in K$ est dense dans K. On obtient par cette construction un morphisme de G vers $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$. L'ensemble K est compact, totalement discontinu et minimal pour l'action de G : c'est soit un ensemble fini, soit un ensemble de Cantor.

Le groupe modulaire de $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points, qui est le quotient du groupe de tresses par son centre, a été très étudié. Dans cette thèse, on s'intéresse au cas où K est un ensemble de Cantor.

Groupes de Thompson et groupes agissant sur un ensemble de Cantor

Le groupe modulaire du plan privé d'un ensemble de Cantor est lié à l'étude des groupes de Thompson, notamment à travers les travaux de Peter Greenberg,

Louis Funar, Christophe Kapoudjian, Yurii Neretin et Vlad Sergiescu, qui décrivent en particulier l'*artinisation* des groupes de Thompson (voir [23], [20] et [21]). Plus généralement, si G est un groupe agissant par homéomorphismes ou difféomorphismes sur un ensemble de Cantor, on peut construire un artinisé $\tilde{G}$ de G qui est un équivalent de ce qu'est le groupe de tresses pour le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ d'un ensemble à n éléments.

Dans le cas fini, on peut voir les choses de la manière suivante. On note $P = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un choix de n points distincts dans l'intérieur du disque fermé. Le groupe de tresses B_n est le groupe modulaire du disque privé de P (en fixant le bord du disque) : tout élément de B_n permute les points de P, et ainsi B_n se surjecte sur $\mathcal{S}_n$. Si G est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, l'image inverse de G par cette surjection est un *artinisé* de G. On peut faire la même construction en remplaçant le disque par une autre surface, et on obtiendra d'autres artinisés de G.

Maintenant si K est un plongement de l'ensemble de Cantor dans le plan, on a comme dans le cas fini un morphisme surjectif $f : \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K) \to \mathrm{Homeo}(K)$ du groupe modulaire du plan privé de K dans le groupe des homéomorphismes de K (car tout homéomorphisme de K se prolonge au plan, voir par exemple [5]). Ainsi, si G est un sous-groupe de $\mathrm{Homeo}(K)$, l'image inverse $\tilde{G} := f^{-1}(G)$ de G par cette surjection est un artinisé de G, qui vit dans $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$. En étudiant $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$ et ses sous-groupes, on peut donc espérer en déduire des informations sur les sous-groupes d'homéomorphismes de l'ensemble de Cantor.

0.1.2 Étude de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z})$: théorie de Brouwer homotopique

Le groupe modulaire du plan privé de $\mathbb{Z}$ est le groupe qui contient les *classes de Brouwer*, c'est-à-dire les classes d'homéomorphismes du plan sans point fixe relativement à un nombre fini d'orbites. L'étude de ces classes est un des objectifs de la *théorie de Brouwer homotopique*.

La théorie de Brouwer homotopique a été introduite par Michael Handel dans [26] pour prouver son célèbre théorème de point fixe (voir l'introduction de [35] pour cette formulation) :

Théorème (Handel, [26]). *Soit $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ un homéomorphisme du disque fermé tel que :*

1. *Il existe $r \geq 3$ points $x_1, \ldots, x_r$ dans l'intérieur du disque et $2r$ points $\alpha_1, \omega_1, \ldots, \alpha_r, \omega_r$ sur le bord $\partial\mathbb{D}^2$ tels que, pour tout i entre 1 et r :*

$$\lim_{n\to-\infty} f^n(x_i) = \alpha_i, \qquad \lim_{n\to+\infty} f^n(x_i) = \omega_i.$$

2. *L'ordre cyclique sur le bord est le suivant :*

$$\alpha_1, \omega_r, \alpha_2, \omega_1, \alpha_3, \omega_2, \ldots, \alpha_r, \omega_{r-1}, \alpha_1.$$

Alors f a un point fixe dans l'intérieur de $\mathbb{D}^2$.

Ce théorème a de nombreuses applications en dynamique des surfaces (voir par exemple l'introduction de [33]). La théorie de Brouwer homotopique a été principalement utilisée par John Franks et Michael Handel, par exemple pour étudier les difféomorphismes hamiltoniens de surface dans [18] et pour prouver la conjecture de Zimmer pour les difféomorphismes de surfaces préservant l'aire dans [17].

Le lien entre théorie de Brouwer homotopique et $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z})$ est le suivant. La théorie de Brouwer classique est l'étude des *homéomorphismes de Brouwer*, c'est-à-dire des homéomorphismes du plan préservant l'orientation et sans point fixe. Soit h un tel homéomorphisme. On choisit un nombre fini d'orbites disjointes de cet homéomorphisme, et on note $\mathcal{O}$ leur union. On sait d'après la théorie de Brouwer classique que toute orbite d'un homéomorphisme de Brouwer est proprement plongée dans le plan, c'est-à-dire qu'elle intersecte tout compact en au plus un nombre fini de points (voir par exemple [25]). Ainsi $\mathcal{O}$ est homéomorphe à $\mathbb{Z}$ dans le plan. En théorie de Brouwer homotopique, on étudie h à isotopie près relativement à $\mathcal{O}$: on cherche donc à comprendre un élément du groupe modulaire de $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$, qui est isomorphe à $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z})$.

0.1.3 Deux approches différentes

Comme nous l'avons vu, les deux groupes modulaires considérés dans cette thèse apparaissent dans des contextes différents. Les questions que l'on se posera sur ces groupes, ainsi que les techniques utilisées pour les résoudre, seront elles aussi différentes.

Le groupe modulaire du plan privé d'un ensemble Cantor nous intéressera en temps que groupe : une des motivations principales est de développer des outils qui

permettent d'étudier ce groupe. On utilisera principalement des objets et résultats issus de l'étude des groupes modulaires des surfaces de type fini, que l'on cherchera à adapter dans le cas de cette surface de type infini.

Au contraire, le groupe modulaire du plan privé de $\mathbb{Z}$ nous intéressera essentiellement pour ses classes de Brouwer : on cherchera à comprendre quelles sont les classes de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z})$ qui contiennent un homéomorphisme de Brouwer relativement à un nombre fini de ses orbites, et à décrire des invariants de conjugaison pour ces classes. La condition *sans point fixe* des homéomorphismes étudiés est évidemment une contrainte forte, qui permet d'utiliser de nombreux outils de théorie de Brouwer classique (arcs de translation, droites de Brouwer, etc) adaptés dans le cas homotopique.

On note que comme toute orbite d'un homéomorphisme de Brouwer est non bornée, aucune classe de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ ne contient d'homéomorphisme de Brouwer.

0.2 Résultats obtenus autour de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$

0.2.1 Graphe des rayons

Un objet central dans l'étude des groupes modulaires des surfaces de type fini est *le complexe des courbes*, un complexe simplicial associé à chaque surface, dont les simplexes sont les ensembles de classes d'isotopie de courbes simples essentielles sur la surface qui peuvent être réalisées par des représentants disjoints. L'hyperbolicité de ce complexe, établie par Howard Masur et Yair Minsky (voir [37]), a permis de grandes avancées dans l'étude de ces groupes. Dans le cas du groupe $\Gamma = \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ que l'on considère, le complexe des courbes de $\mathbb{R}^2$ privé d'un ensemble de Cantor n'est pas intéressant du point de vue de la géométrie à grande échelle introduite par Mikhaïl Gromov, car il est de diamètre 2. Dans [11], Danny Calegari propose de remplacer ce complexe par le *graphe des rayons*, qu'il définit de la manière suivante (voir figure 1 pour des exemples de rayons) :

Définition (Calegari [11])**.** Le *graphe des rayons* est le graphe dont les sommets sont les classes d'isotopie des arcs simples joignant l'infini à un point de l'ensemble de Cantor K et d'intérieur disjoint de K, appelés *rayons*, et dont les arêtes sont les paires de tels rayons qui ont des représentants disjoints.

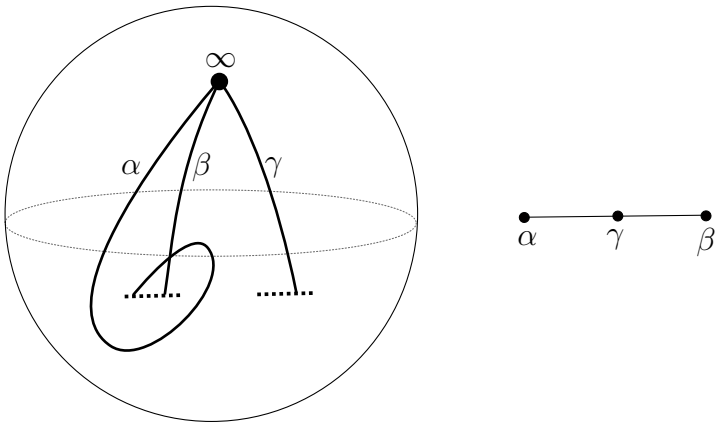

FIGURE 1 – Exemple de trois rayons représentés sur la sphère et du sous-graphe du graphe des rayons associé : $d(\alpha, \beta) = 2$ et $d(\alpha, \gamma) = d(\beta, \gamma) = 1$.

Dans les premières sections du chapitre 1 de cette thèse, on montre les résultats suivants :

Théorème (1.1.6)**.** *Le diamètre du graphe des rayons est infini.*

Théorème (1.2.13)**.** *Le graphe des rayons est hyperbolique au sens de Gromov.*

Théorème (1.3.1)**.** *Il existe un élément $h \in \Gamma$ agissant par translation sur un axe géodésique du graphe des rayons.*

Ces résultats nous permettent de voir Γ comme agissant non trivialement sur un espace hyperbolique. On cherche ensuite à utiliser cette action pour construire des *quasi-morphismes non triviaux* sur Γ.

0.2.2 Quasi-morphismes et cohomologie bornée

Un *quasi-morphisme* sur un groupe G est une application $q : G \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante D_q, appelée *défaut* du quasi-morphisme q, vérifiant pour tous $a, b \in G$ l'inégalité :

$$|q(ab) - q(a) - q(b)| \leq D_q.$$

Les premiers exemples de quasi-morphismes sont les morphismes et les fonctions bornées. Ce sont des quasi-morphismes triviaux : on dit qu'un quasi-morphisme q est *non trivial* si le quasi-morphisme $\tilde{q}$ défini par $\tilde{q}(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{q(a^n)}{n}$ pour tout $a \in G$ n'est pas un morphisme. L'*espace des classes de quasi-morphismes non triviaux* sur un groupe G, que l'on notera $\tilde{Q}(G)$, est défini comme le quotient

de l'espace des quasi-morphismes sur G par la somme directe du sous-espace des fonctions bornées et du sous-espace des morphismes réels sur G. L'existence de quasi-morphismes non triviaux sur G est équivalente à l'existence d'éléments non nuls dans $\tilde{Q}(G)$.

L'espace $\tilde{Q}(G)$ coïncide avec le noyau du morphisme naturel envoyant le deuxième groupe de cohomologie bornée $H_b^2(G;\mathbb{R})$ de G dans le deuxième groupe de cohomologie $H^2(G;\mathbb{R})$ de G (voir par exemple Barge & Ghys [1] et Ghys [22] pour des précisions sur la cohomologie bornée des groupes). L'étude de cet espace $\tilde{Q}(G)$ donne des informations sur le groupe G : par exemple, on sait qu'il est trivial lorsque G est moyennable (voir Gromov [24]), ou lorsque G est un réseau cocompact irréductible d'un groupe de Lie semi-simple de rang supérieur (voir Burger & Monod [10]). Dans [7], Mladen Bestvina et Koji Fujiwara ont montré que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux sur un groupe modulaire d'une surface de type fini est de dimension infinie, ce qui a de nombreuses conséquences et implique notamment que pour de nombreuses classes de groupes G, tout morphisme de G vers un groupe modulaire de surface de type fini se factorise par un groupe fini. Ces résultats, ainsi que les applications potentielles en dynamique, motivent la recherche de quasi-morphismes non triviaux sur le groupe MCG($\mathbb{R}^2$ – Cantor) proposée par Calegari [11]. On montre ici le résultat suivant :

Théorème (1.3.8)**.** *L'espace $\tilde{Q}(\Gamma)$ des classes de quasi-morphismes non triviaux sur Γ est de dimension infinie.*

Ce résultat implique en particulier que la *longueur stable des commutateurs* est une quantité non bornée sur Γ.

0.2.3 Longueur stable des commutateurs

Si G est un groupe, on note $[G,G]$ son groupe dérivé, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les commutateurs (éléments s'écrivant sous la forme $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x,y \in G$). Pour tout $a \in [G,G]$, on note $cl(a)$ la *longueur des commutateurs* de a, c'est-à-dire le plus petit nombre de commutateurs dont le produit est égal à a. On définit alors la *longueur stable des commutateurs* de a par :

$$scl(a) := \lim_{n\to+\infty} \frac{cl(a^n)}{n}.$$

C'est en particulier une quantité invariante par conjugaison (voir Calegari [12] pour des précisions sur la longueur stable des commutateurs). L'étude de cette quantité est reliée à celle des quasi-morphismes non triviaux par un théorème de dualité : Christophe Bavard a montré que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux sur un groupe G est trivial si et seulement si tous les éléments de $[G, G]$ sont de *scl* nulle (voir [2]).

Dans le cas du groupe Γ, Danny Calegari a montré dans [11] que si $g \in \Gamma$ a une orbite bornée sur le graphe des rayons, alors $scl(g) = 0$. Cette propriété rend encore plus surprenante l'existence d'un espace de classes de quasi-morphismes non triviaux de dimension infinie sur Γ. De plus, elle distingue Γ des groupes modulaires des surfaces de type fini, dont certains éléments ont une orbite bornée sur le complexe des courbes et une *scl* non nulle : en effet, Endo & Kotschick [14] et Korkmaz [32] ont montré que les twists de Dehn sont de *scl* strictement positive. Dans le cas des surfaces de type fini, on sait maintenant caractériser précisément en termes de la décomposition de Nielsen-Thurston les éléments de *scl* nulle (voir Bestvina, Bromberg & Fujiwara [6]). Dans le cas de Γ, on peut s'interroger sur une éventuelle réciproque à la proposition de Calegari : est-ce que tous les éléments de *scl* nulle ont une orbite bornée sur le graphe des rayons ? On exhibe ici un élément hyperbolique de Γ de *scl* nulle (proposition 1.4.1), montrant ainsi qu'une éventuelle caractérisation des éléments de *scl* nulle serait plus fine que la classification entre éléments ayant ou non une orbite bornée.

0.2.4 Stratégies de preuves

Dans la section 1.1, on construit une suite de rayons $(\alpha_k)_k$ qui est non bornée dans le graphe des rayons, montrant ainsi que le graphe des rayons est de diamètre infini.

Cette suite est contruite par récurrence à partir de l'idée suivante : si l'on considère un arc a_1 représentant un rayon et un arc a_2 formant un « tube » dans un petit voisinage autour de a_1 (comme sur la figure 2), tout arc disjoint de a_2 et représentant un rayon doit commencer en l'infini et finir en un point de l'ensemble de Cantor sans traverser a_2. Un tel arc doit alors « suivre le parcours de l'arc a_1 » avant de pouvoir éventuellement s'échapper du tube formé par a_2 et rejoindre un point de l'ensemble de Cantor. Si maintenant a_3 est un arc représentant un rayon et qui forme un tube dans un voisinage autour de a_2 (voir la figure 2), le même phénomène se produit : tout arc disjoint de a_3 doit « suivre le parcours de l'arc

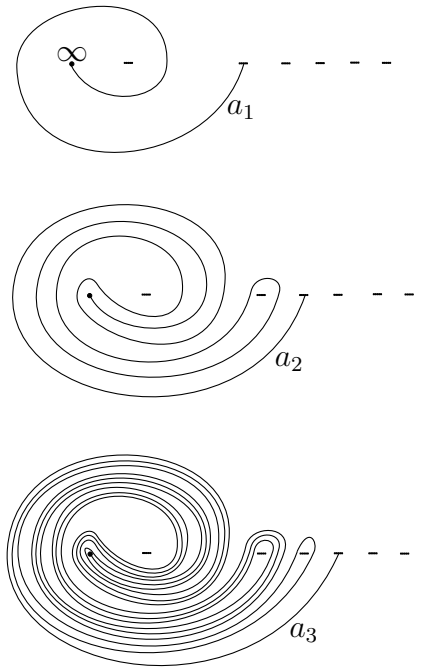

FIGURE 2 – Construction de a_2 à partir de a_1 et de a_3 à partir de a_2.

a_2 » avant de pouvoir s'échapper du tube formé par a_3 pour rejoindre un point de l'ensemble de Cantor. Ainsi, dans le graphe des rayons, tout rayon à distance 1 du rayon représenté par a_3 commence par suivre le parcours de a_2, ce qui force tout rayon à distance 2 de a_3 à suivre le parcours de a_1 : si β est par exemple le rayon représenté par un arc qui joint l'infini au point d'attachement de a_1 en restant dans l'hémisphère nord, alors β est à distance supérieure à 3 de a_3. En effet, tout arc qui commence par parcourir a_2 ou a_1 n'est pas homotopiquement disjoint de β, donc tous les représentants des rayons à distance 1 ou 2 du rayon représenté par a_3 intersectent tout arc homotope à β.

On choisit ensuite a_4 qui dessine un tube autour de a_3 : tout rayon à distance 1 du rayon représenté par a_4 commence par suivre le parcours de a_3 ; ce qui implique que tout rayon à distance 2 de a_4 commence par suivre le parcours de a_2 ; ce qui implique que tout rayon à distance 3 de a_4 commence par suivre le parcours de a_1 ; ce qui implique que le rayon représenté par a_4 est à distance supérieure à 4 du rayon β.

On peut continuer ainsi en choisissant a_5 qui forme un tube autour de a_4, etc. Pour tout k, on obtient un rayon α_k représenté par a_k et tel que tout arc représentant un rayon à distance strictement inférieure à k de α_k commence par suivre le parcours de a_1, coupant ainsi β. Pour rendre cette idée rigoureuse, on

définit dans la section 1.1 un codage pour certains rayons, puis la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rayons représentant les « tubes » voulus. On montre grâce au codage que cette suite est non bornée dans le graphe des rayons (théorème 1.1.6), et qu'elle forme un demi-axe géodésique dans ce graphe (proposition 1.1.7).

Dans la section 1.2, on montre que le graphe des rayons est hyperbolique au sens de Gromov (théorème 1.2.13). On définit pour cela un graphe annexe X_∞ dont les sommets sont les classes d'homotopie de lacets simples de $\mathbb{S}^2 - K$ basés en l'infini, et dont les arêtes sont les paires de tels lacets ayant des représentants disjoints. On montre que ce graphe est hyperbolique en adaptant la preuve de l'uniforme hyperbolicité des complexes des arcs par les chemins « unicornes » de Sebastian Hensel, Piotr Przytycki et Richard Webb [27]. On montre ensuite que ce graphe X_∞ est quasi-isométrique au graphe des rayons, ce qui permet d'établir l'hyperbolicité de ce dernier. On définit pour cela une application entre le graphe des rayons X_r et le graphe hyperbolique X_∞, qui à tout rayon x de X_r associe un élément $\hat{x}$ de X_∞ tel que x et $\hat{x}$ ont des représentants disjoints, puis on montre que cette application est une quasi-isométrie.

Dans la section 1.3, on utilise à nouveau la suite de rayons $(\alpha_k)_k$ construite dans la section 1.1, qui définit un axe géodésique du graphe des rayons. On exhibe un élément $h \in \Gamma$ qui agit par translation sur cet axe (théorème 1.3.1). L'élément h est un élément pouvant être représenté par la tresse de la figure 3. Les points noirs représentent l'ensemble de Cantor K, et chaque brin transporte tous les points du sous-ensemble de Cantor correspondant. On montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$.

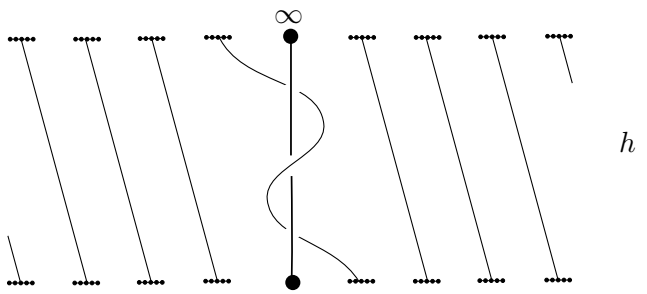

FIGURE 3 – Représentation de l'élément $h \in \Gamma$.

On cherche ensuite à construire des quasi-morphismes non triviaux sur Γ. Dans [19], Koji Fujiwara définit les quasi-morphismes de comptage sur les groupes

agissant sur des espaces hyperboliques, généralisant la construction de Brooks [9] sur les groupes libres. Dans le cas des groupes modulaires des surfaces compactes de type fini, Mladen Bestvina et Koji Fujiwara utilisent cette construction pour montrer que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux est de dimension infinie (voir [7]). L'espace hyperbolique considéré est alors le complexe des courbes de la surface, sur lequel le groupe modulaire de la surface considérée agit *faiblement proprement discontinûment*, propriété qui garantit en particulier la non-trivialité de certains quasi-morphismes obtenus par la construction de Fujiwara.

Comme on sait que Γ agit sur un espace hyperbolique (le graphe des rayons), la construction [19] de Fujiwara nous donne des quasi-morphismes sur Γ. On cherche alors à montrer que certains de ces quasi-morphismes sont non triviaux. Malheureusement, l'action de Γ sur le graphe des rayons n'est pas *faiblement proprement discontinue* (voir l'énoncé au début de la section 1.3). On peut néanmoins définir un *nombre d'intersections positives*, qui nous permet de montrer que l'axe $(\alpha_k)_k$ est *non retournable* (proposition 1.3.4). Cette propriété généralise le fait pour h de ne pas être conjugué à son inverse. Plus précisément, on montre que pour tout segment orienté suffisamment long de l'axe $(\alpha_k)_k$, si un élément de Γ envoie ce segment dans un voisinage « proche » de l'axe $(\alpha_k)_k$, alors l'image du segment est orientée dans le même sens que le segment d'origine. Cette propriété de l'axe $(\alpha_k)_k$ ainsi que l'action de h sur cet axe permettent de construire un quasi-morphisme non trivial explicite (proposition 1.3.7).

On utilise ensuite encore une fois l'élement $h \in \Gamma$, ainsi qu'un conjugué de son inverse, pour montrer grâce à un autre théorème de Bestvina et Fujiwara [7] et à la propriété 1.3.4 de non retournement que l'espace $\tilde{Q}(\Gamma)$ des classes de quasi-morphismes non triviaux sur Γ est de dimension infinie (théorème 1.3.8).

0.3 Résultats obtenus autour de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z})$: classes de Brouwer

Comme expliqué précédemment, les résultats obtenus dans le deuxième chapitre ont pour cadre la théorie de Brouwer homotopique. Si h est un homéomorphisme de Brouwer et $\mathcal{O}$ la réunion d'un nombre fini de ses orbites, on s'intéresse à h à isotopie près relativement à $\mathcal{O}$. On note $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ le groupe modulaire du plan privé de $\mathcal{O}$, et $[h; \mathcal{O}]$ la classe de h dans ce groupe. Deux telles classes de

Brouwer $[h;\mathcal{O}]$ et $[h';\mathcal{O}']$ sont dites *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme ϕ du plan qui préserve l'orientation, qui envoie $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$ et tel que $[\phi h \phi^{-1};\phi(\mathcal{O})]$ est égal à $[h';\mathcal{O}']$ dans $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2;\mathcal{O}')$. Une question naturelle est de décrire, pour un nombre r d'orbites, toutes les classes de Brouwer relativement à r orbites et à conjugaison près.

0.3.1 Classes de Brouwer relativement à une, deux ou trois orbites

Dans [26], Michael Handel donne une description complète des classes de Brouwer relativement à une ou deux orbites (à conjugaison près). Il montre que relativement à une orbite, il n'existe qu'une seule classe de Brouwer (à conjugaison près) : la classe de la translation relativement à l'une de ses orbites. Relativement à deux orbites, il prouve qu'il y a exactement trois classes de Brouwer (à conjugaison près) : la classe de la translation, la classe du temps 1 d'un flot de Reeb R, et la classe de R^{-1}.

Dans [35], Frédéric Le Roux donne une description complète des classes de Brouwer relativement à trois orbites et utilise cette description pour définir un indice pour les homéomorphismes de Brouwer. En particulier, il montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de Brouwer relativement à trois orbites, et que chacune d'entre elles contient le temps 1 d'un flot (voir [35] pour plus détails et la description complète de ces classes).

La situation change lorsque l'on s'intéresse aux classes de Brouwer relativement à quatre orbites ou plus : en effet, si $r \geq 4$, il existe une infinité de classes de Brouwer relativement à r orbites, et seulement un nombre fini d'entre elles contiennent le temps 1 d'un flot. L'un des objectifs du chapitre 2 est de donner une description complète des classes de Brouwer relativement à 4 orbites.

0.3.2 Murs

Dans [26], Michael Handel définit la notion de *droite de réduction* pour une classe de Brouwer $[h;\mathcal{O}]$: c'est une droite topologique du plan homotope à son image par h (par une homotopie propre) et qui partage l'ensemble des orbites en deux ensembles non vides. Il prouve que toute classe de Brouwer relativement à plus de deux orbites admet au moins une droite de réduction (théorème 2.7 de [26]).

Dans le chapitre 2 de cette thèse, on propose d'appeller *mur* d'une classe de Brouwer $[h; \mathcal{O}]$ toute classe d'isotopie d'une droite de réduction homotopiquement disjointe de toutes les autres droites de réduction relativement à $\mathcal{O}$. En particulier, l'ensemble des murs est un invariant de conjugaison. On prouve que si la classe de Brouwer considérée n'est pas une translation, alors l'ensemble des murs est non vide. De plus, on montre le résultat suivant :

Théorème. 2.2.1 *Soit $[h; \mathcal{O}]$ une classe de Brouwer. Soit $\mathcal{W}$ une famille de droites de réduction deux à deux disjointes contenant exactement un représentant de chaque mur de $[h; \mathcal{O}]$. Si Z est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}$, alors Z vérifie exactement l'une des propriétés suivantes :*

- *Z est une zone irréductible ;*
- *Z est une zone maximale de translation ;*
- *Z n'intersecte pas $\mathcal{O}$.*

Une zone maximale de translation Z est en particulier une zone invariante sous h et sur laquelle la dynamique de h est très simple : h est conjugué à un homéomorphisme dont la restriction à Z est une translation. Au contraire, les zones irréductibles possèdent une dynamique plus complexe et ne peuvent pas être décomposées en zones plus simples : elles ne contiennent aucune droite de réduction. Les définitions précises de zone irréductible et de zone maximale de translation seront données dans la section 2.2 du chapitre 2.

En utilisant ce résultat, on comprend très bien les classes de Brouwer qui n'ont aucune zone irréductible : ce sont exactement les classes contenant le temps 1 d'un flot (voir section 2.2). De plus, on montre que si une classe de Brouwer admet une zone irréductible, alors elle admet au moins deux zones maximales de translation et deux murs.

0.3.3 Diagrammes

En suivant essentiellement [26] et [35], on peut associer à chaque classe de Brouwer un unique diagramme combinatoire, dont on donnera une définition plus précise dans la section 2.2 du chapitre 2. Ce diagramme est un disque contenant r flèches, où r est le nombre d'orbites que l'on considère : chaque flèche représente une orbite. L'ordre cyclique des extrémités des flèches est déterminé par l'existence d'une *famille adaptée d'arcs de translation homotopiques* (voir section 2.2). Le diagramme d'une classe de Brouwer est dit *déterminant* s'il existe une unique

classe de Brouwer auquel il est associé. Relativement à une, deux ou trois orbites, tous les diagrammes sont déterminants : le diagramme est donc un invariant total de conjugaison jusqu'à trois orbites. A partir de quatre orbites, il existe des diagrammes non déterminants.

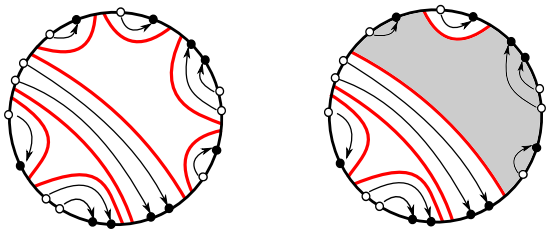

FIGURE 4 – Exemples de diagrammes murés : celui de gauche est déterminant, celui de droite est non déterminant

En ajoutant l'ensemble des murs sur le diagramme, on obtient un *diagramme muré*, qui est encore un invariant de conjugaison (voir figure 4 pour des exemples). Cet invariant est plus précis que le diagramme simple (sans murs), mais il n'est pas total pour les classes de Brouwer relativement à plus de quatre orbites. De même que pour les diagrammes simples, on définit la notion de diagramme muré *déterminant* (qui correspond à une unique classe de conjugaison). On donne la condition combinatoire suivante pour identifier les diagrammes déterminant parmi les diagrammes sans flèches croisées :

Proposition. 2.2.7 *Un diagramme muré sans flèches croisées est déterminant si et seulement si aucune zone du complémentaire des murs n'est irréductible (ce qui revient à dire que les flèches de toute famille de flèches incluses dans la même composante connexe du complémentaire des murs sont adjacentes dans le passé et dans le futur).*

0.3.4 Un invariant de conjugaison total pour les classes de Brouwer relativement à 4 orbites

Pour les classes de Brouwer relativement à 4 orbites, on ajoute un nouvel invariant aux diagrammes murés non déterminant : *l'emmêlement*. Cet invariant est une classe d'isotopie de courbes sur le cylindre privé de deux points (à twist horizontal près). Voir la figure 5 pour un exemple. En utilisant en particulier l'ensemble des murs et la description des diagrammes déterminant dans le cas 4 orbites, on obtient un invariant total :

Théorème. 2.2.5 *Deux classes de Brouwer relativement à* 4 *orbites sont conjuguées si et seulement si elles ont le même couple d'invariants (Diagramme muré, Emmêlement).*

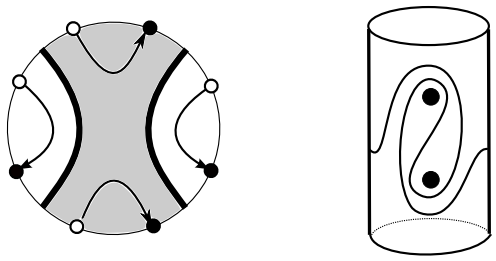

FIGURE 5 – Exemple d'un couple d'invariants (Diagramme muré, Représentant de l'emmêlement)

Finalement on obtient une description complète des classes de Brouwer relativement à quatre orbites.

Dans la première section du second chapitre, on rappelle les outils de base de la théorie de Brouwer homotopique issus de [26] et [35]. Une description précise des résultats est donnée en section 2.2. Le reste du chapitre est consacré aux preuves.

0.4 Questions et perspectives

0.4.1 Autour du groupe modulaire lisse

Le groupe modulaire *lisse* d'une surface est le groupe modulaire obtenu en quotientant le groupe des *difféomorphismes* de la surface (et non le groupe des homéomorphismes). Dans le cas des surfaces de type fini, les deux groupes modulaires lisse et non lisse sont isomorphes, mais ce n'est plus le cas dans le cas du plan privé d'un ensemble de Cantor. Une première différence vient de l'ensemble de Cantor lui-même : deux ensembles de Cantor du plan sont toujours homéomorphes par un homéomorphisme du plan, mais pas toujours difféomorphes. Ensuite, même après avoir fixé un ensemble de Cantor, l'existence de points d'accumulation dans l'ensemble des pointes de la surface permet d'obtenir des classes du groupe modulaire non lisse qui ne contiennent aucun difféomorphisme. Il semble donc intéressant d'étudier les différences entre ces deux groupes, entre leurs actions sur le graphe des rayons, etc.

0.4.2 Autour des sous-groupes de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathbf{Cantor})$

Existence de restrictions sur les sous-groupes

Comme on l'a vu, une des motivations de l'étude de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ est la compréhension de ses sous-groupes, dans l'objectif d'obtenir des restrictions sur les groupes agissant sur le plan avec une orbite bornée. Dans le cas des groupes modulaire des surfaces de type fini, Bestvina et Fujiwara ont montré dans [7] une alternative de Tits pour les sous-groupes. Il serait intéressant d'avoir le même genre de dichotomie dans le cas de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$.

Dans cette direction, Sebastian Hurtado et Emmanuel Militon ont montré dans [28] une alternative de Tits faible pour les sous-groupe du groupe modulaire lisse du plan privé d'un ensemble de Cantor.

Action de sous-groupes connus

Si G est un sous-groupe de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ que l'on souhaite étudier (comme par exemple l'artinisé d'un groupe connu), son action sur le graphe des rayons peut éventuellement nous fournir de nouvelles informations.

0.4.3 Autour du graphe des rayons

Toute question qui se pose autour du graphe des courbes dans le cas des surfaces de type fini se pose également pour le graphe des rayons. Par exemple, Erica Klarreich a décrit le bord des complexes des courbes des surfaces de type fini en termes de laminations minimales (voir [31]) ; Nikolaï Ivanov a montré dans [29] que le groupe d'automorphismes du complexe des courbes des surfaces de type fini coïncide avec le groupe modulaire de la surface. On peut chercher à adapter ce genre de résultats dans le cas du graphe des rayons.

0.4.4 Autour des groupes modulaires des surfaces de type fini

Plus généralement, pour tout résultat existant sur les groupes modulaires de type fini, on peut chercher à comprendre s'il s'adapte ou non dans le cas de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$, comme on l'a fait dans cette thèse pour montrer l'existence de quasi-morphismes non triviaux sur ce groupe.

0.4.5 Autour des surfaces de type infini

On peut chercher à généraliser à toute surface de type infini la construction d'un graphe hyperbolique et de diamètre infini sur lequel le groupe modulaire agit non trivialement par isométries.

Ici encore, on peut ensuite chercher à comprendre la version lisse de ces groupes, et quels sont les résultats sur $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ et le graphe des rayons qui s'adaptent dans ce cas.

0.4.6 Autour des classes de Brouwer

On peut chercher à généraliser les résultats obtenus sur l'emmêlement à toute classe de Brouwer, et trouver un invariant total pour toute classe de Brouwer (i.e. relativement à un nombre fini quelconque d'orbites).

0.4.7 Autour de la théorie de Brouwer homotopique

Les récents travaux de Patrice Le Calvez et Fabio Tal (voir [34]) utilisent des techniques liés au théorème de feuilletage équivariant de Patrice Le Calvez, et qui semblent avoir des similitudes avec la théorie de Brouwer homotopique. Il pourrait être intéressant de comprendre les liens entre ces deux théories.

Chapitre 1

Groupe modulaire du plan privé d'un ensemble de Cantor

1.1 Diamètre du graphe des rayons et demi-axe géodésique

On cherche ici à montrer que le graphe des rayons est de diamètre infini. Dans ce but, on va construire une suite de rayons $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et montrer qu'elle n'est pas bornée dans le graphe des rayons. On code certains rayons par des suites de segments, pour pouvoir les manipuler plus facilement dans les preuves. On définit à partir de ce codage la suite de rayons $(\alpha_n)_n$ qui nous intéresse. On montre enfin que cette suite n'est pas bornée dans le graphe des rayons, et qu'elle définit un demi-axe géodésique. Les résultats montrés autour de cette suite nous seront à nouveau utiles dans la section 1.3.

1.1.1 Préliminaires

On utilisera dans toute la suite les notations, propositions, et le vocabulaire suivants.

Ensemble de Cantor K

On note K un ensemble de Cantor plongé dans $\mathbb{S}^2$, et on choisit un point de $\mathbb{S}^2 - K$, que l'on note ∞. On identifie $\mathbb{R}^2 - K$ et $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$. Si K' est un autre ensemble de Cantor plongé dans $\mathbb{S}^2$ et ∞' un point de $\mathbb{S}^2 - K'$, alors il existe

un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ qui envoie K' sur K et ∞' sur ∞ (voir par exemple l'appendice A de Béguin, Crovisier & Le Roux [5]).

Arcs, homotopies et isotopies

Soit $a : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ une application continue telle que $\{a(0)\}$ et $\{a(1)\}$ sont inclus dans $K \cup \{\infty\}$ et telle que $a(]0,1[)$ est inclus dans $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$. On appellera *arc* cette application a, que l'on confondra parfois avec l'image de $]0,1[$ par a. Si de plus l'application a est injective, on dira que a est un *arc simple* de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$.
On dira que deux arcs a et b de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^2$ telle que :

- $H(0,\cdot) = a(\cdot)$ et $H(1,\cdot) = b(\cdot)$;
- $H(\cdot,0)$ et $H(\cdot,1)$ sont constantes (les extrémités sont fixes) ;
- $H(t,s) \in \mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ pour tous $(t,s) \in [0,1]\times]0,1[$.

Si a et b sont simples, homotopes, et si de plus il existe une homotopie H telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,\cdot)$ est un arc simple, alors on dira que a et b sont *isotopes*. David Epstein a montré que sur une surface, deux arcs homotopes sont isotopes (voir [15]). Dans ce texte, on confondra isotopie et homotopie sur les surfaces.

On dira que deux classes d'isotopie d'arcs α et β sont *homotopiquement disjointes* s'il existe des représentants a de α et b de β tels que $a(]0,1[)$ et $b(]0,1[)$ sont disjoints. On dira que deux arcs a et b sont *homotopiquement disjoints* s'ils représentent deux classes d'isotopie homotopiquement disjointes. Un *bigone* entre deux arcs a et b est une composante connexe du complémentaire de $a \cup b$ dans $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ homéomorphe à un disque et dont le bord est la réunion d'un sous-arc de a et d'un sous-arc de b. On dira que deux arcs propres a et b sont *en position d'intersection minimale* si toutes leurs intersections sont transverses et s'il n'y a aucun bigone entre a et b.

Graphe des rayons

Définition. Un *rayon* est une classe d'isotopie d'arcs simples α ayant pour extrémités $\alpha(0) = \infty$ et $\alpha(1) \in K$. On appellera *point d'attachement du rayon* le point $\{\alpha(1)\}$.

Définition (Calegari [11])**.** Le *graphe des rayons*, noté X_r, est le graphe défini comme suit :

- Les sommets sont les rayons définis précédemment ;
- Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si ils sont homotopiquement disjoints.

Remarque. Le graphe des rayons est connexe : on peut adapter la preuve classique de la connexité du complexe des courbes, donnée par exemple dans Farb & Margalit [16], théorème 4.3 page 97.

Préliminaires sur les classes d'isotopie de courbes

On utilisera à plusieurs reprises les résultats suivants, adaptés de Casson & Bleiler [13], Handel [26] et Matsumoto [38]. On munit $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ d'une métrique hyperbolique complète de première espèce. Son revêtement universel est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.

Proposition 1.1.1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles localement finies d'arcs simples de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ telles que tous les éléments de $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) sont deux à deux homotopiquement disjoints. On suppose que pour tous $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, a et b sont en position d'intersection minimale. Alors il existe un homéomorphisme h isotope à l'identité par une isotopie qui fixe $K \cup \{\infty\}$ en tout temps et telle que pour tous $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, $h(a)$ et $h(b)$ sont géodésiques.*

Proposition 1.1.2. *Soit a et b deux arcs de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$. Si $\tilde{a}$ est un relevé de a au revêtement universel, alors il existe deux points p^- et p^+ du bord $\partial\mathbb{H}^2$ du revêtement universel $\mathbb{H}^2$ tels que $\tilde{a}(t)$ tend vers p^-, respectivement p^+ lorsque t tend vers 0, respectivement 1. On appelle extrémités de $\tilde{a}$ ces deux points. Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux relevés respectifs de a et b au revêtement universel qui ont les mêmes extrémités au bord, alors a et b sont isotopes dans $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$.*

1.1.2 Codage de certains rayons

Équateur

On choisit à l'aide de la proposition 1.1.1 un cercle topologique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{S}^2$ contenant $K \cup \{\infty\}$ et tel que tous les segments de $\mathcal{E} - (K \cup \{\infty\})$ sont géodésiques. On appellera *équateur* ce cercle. On choisit une orientation sur l'équateur, et on appelle *hémisphère nord* le cercle topologique situé à sa gauche, et *hémisphère sud* celui situé à sa droite.

Choix de segments de $\mathcal{E}$

Comme sur la figure figure 1.1, on choisit un point p de $\mathcal{E} - \{\infty\}$ tel que les deux composantes connexes de $\mathcal{E} - \{\infty, p\}$ contiennent chacune des points de K. On choisit ensuite une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de K sur la composante connexe de $\mathcal{E} - \{\infty, p\}$ située à droite de ∞, telle que p_0 est le premier point de K à droite de ∞ sur $\mathcal{E}$ et p_{n+1} est à droite de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On choisit de même une suite $(p_n)_{n<0}$ sur la composante connexe de $\mathcal{E} - \{\infty, p\}$ située à gauche de ∞, telle que p_{-1} est le premier point à gauche de ∞ et telle que p_{n-1} est à gauche de p_n pour tout $n < 0$. On note s_0 la composante connexe de $\mathcal{E} - (K \cup \{\infty\})$ entre ∞ et p_0 et s_{-1} celle entre ∞ et p_{-1}. On choisit pour tout $n > 0$ une composante connexe s_n de $\mathcal{E} - K$ entre p_{n-1} et p_n, et pour tout $n < -1$ une composante connexe s_n de $\mathcal{E} - K$ entre p_n et p_{n+1}. On note S l'ensemble des segments topologiques $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, et $\mathbf{S}$ leur union $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} s_n$.

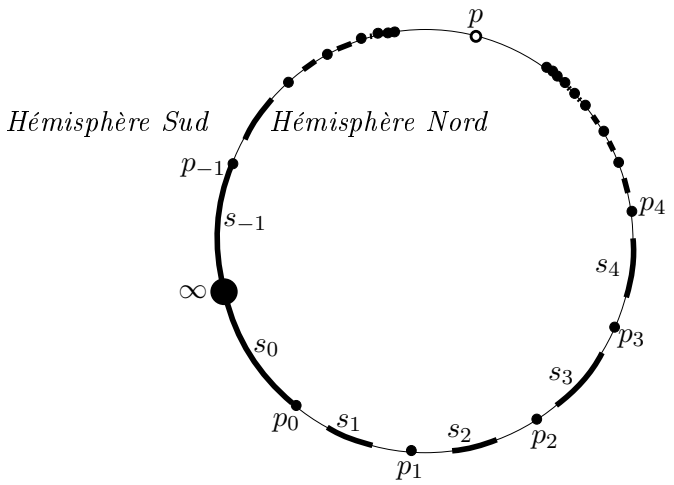

FIGURE 1.1 – Choix d'un équateur, d'un point p, d'une suite de points de K et d'un ensemble de segments.

Suite associée

Si α est une classe d'isotopie d'arcs de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$, on notera $\alpha_\#$ l'unique arc géodésique représentant α dans $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$. On note X'_S l'ensemble des classes d'isotopie d'arcs α de $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$ joignant l'infini et un point de l'ensemble de Cantor K (éventuellement avec auto-intersection) tels que :

1. $\mathcal{E} \cap \alpha_\# \subset \mathbf{S}$;

2. La composante connexe de $\alpha_\# - \mathcal{E}$ qui part de ∞ est incluse dans l'hémisphère sud ;
3. $\mathcal{E} \cap \alpha_\#$ est un ensemble fini.

On note X_S le sous-ensemble de X'_S composé des classes d'isotopie d'arcs simples (c'est-à-dire l'ensemble des rayons vérifiant les trois propriétés précédentes).

Soit $\alpha \in X'_S$. On peut associer à α une suite de segments de la manière suivante : on parcourt $\alpha_\#$ depuis ∞ et jusqu'à son point d'attachement, et on note u_1 le premier segment de S intersecté par $\alpha_\#$, u_2 le second, ..., et u_k le k-ième pour tout k, jusqu'à avoir atteint le point d'attachement. On note $\mathring{u}(\alpha)$ cette suite (finie) de segments, et $u(\alpha)$ la suite $\mathring{u}(\alpha)$ à laquelle on ajoute le point d'attachement, et que l'on appelle *suite complète associée à* α (voir la figure 1.2 pour un exemple). Comme la géodésique $\alpha_\#$ est unique dans la classe d'isotopie α, la suite de segment associée à α est bien définie. De façon générale, on appellera *suite complète* la donnée d'une suite finie de segments et d'un point de K, telle que la suite de segments ne commence ni par s_{-1}, ni par s_0, et ne contient pas plusieurs fois de suite le même segment (pour éviter les bigones).

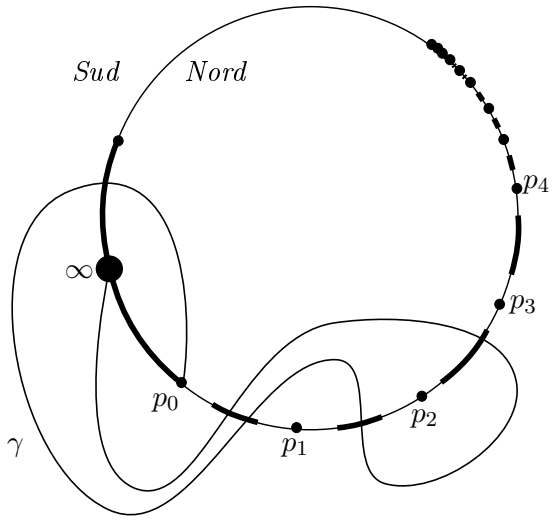

FIGURE 1.2 – Exemple d'un rayon $\gamma \in X_S$: ici, le point d'attachement est p_0, la suite complète de segments associée est $u(\gamma) = s_1 s_3 s_2 s_1 s_{-1}(p_0)$, et on a $\mathring{u}(\gamma) = s_1 s_3 s_2 s_1 s_{-1}$.

Lemme 1.1.3. *À chaque suite complète correspond une unique classe d'isotopie d'arcs de X'_S (éventuellement avec auto-intersections) entre l'infini et un point*

de K. En particulier, si deux rayons de X_S ont la même suite complète associée, alors ils sont égaux.

Démonstration. Soient α et β deux arcs ayant la même suite complète associée, disons $u_0...u_n(p_j)$. Au revêtement universel, on choisit un « relevé » $\tilde{\infty}$ de ∞ sur le bord du disque hyperbolique : on peut voir ce point $\tilde{\infty}$ comme la limite au bord d'un relevé quelconque de α. On relève ensuite β à partir de ce point. Le revêtement universel est pavé par des demi-domaines fondamentaux correspondant aux relevés d'un hémisphère : chaque demi-domaine fondamental a pour bord un relevé de l'équateur. On commence à relever α et β à partir de $\tilde{\infty}$ dans un même demi-domaine fondamental F_0 (correspondant à un relevé de l'hémisphère sud). On définit $(F_i)_{0\leq i\leq n}$ comme la suite des relevés alternativement de l'hémisphère nord et sud, traversés par $\tilde{\alpha}_\#$. On remarque que $(F_i)_i$ est entièrement déterminée par le codage : on sort de F_0 pour arriver dans un relevé F_1 de l'hémisphère nord en traversant le seul relevé de u_0 qui borde F_0. On continue ainsi jusqu'au demi-domaine F_n, qui a un seul relevé $\tilde{p}_j$ de p_j dans son bord. Ainsi les deux relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de α et β ont mêmes extrémités, donc α et β sont isotopes dans $\mathbb{S}^2-(K\cup\{\infty\})$ (d'après la proposition 1.1.2). □

À partir de maintenant on ne fera plus de différence explicite entre une classe d'isotopie d'arcs de X'_S et sa suite complète associée.

1.1.3 Une suite de rayons particulière

On construit ici une suite particulière de rayons, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dont les propriétés nous seront utiles pour toute la suite.

Si $u = u_0u_1...u_n(p_j)$ est une suite complète de segments, on rappelle que l'on note $\mathring{u} = u_0u_1...u_n$ la suite de segments sans le point d'attachement. La suite de segments inverse sera alors notée $\mathring{u}^{-1} := u_n...u_1u_0$.

Définition. On définit la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ de rayons de la façon suivante :
- α_0 est la classe d'isotopie du segment s_0, avec pour extrémités ∞ et p_0 ;
- α_1 est le rayon codé par $s_1s_{-1}(p_1)$ (voir figure 1.4) ;
- Pour tout $k \geq 1$, α_{k+1} est le rayon défini à partir de α_k comme sur la figure 1.3 : on part de ∞, on longe $\alpha_{k\#}$ jusqu'à son point d'attachement p_k dans un voisinage tubulaire de $\alpha_{k\#}$, on contourne ce point par la droite en

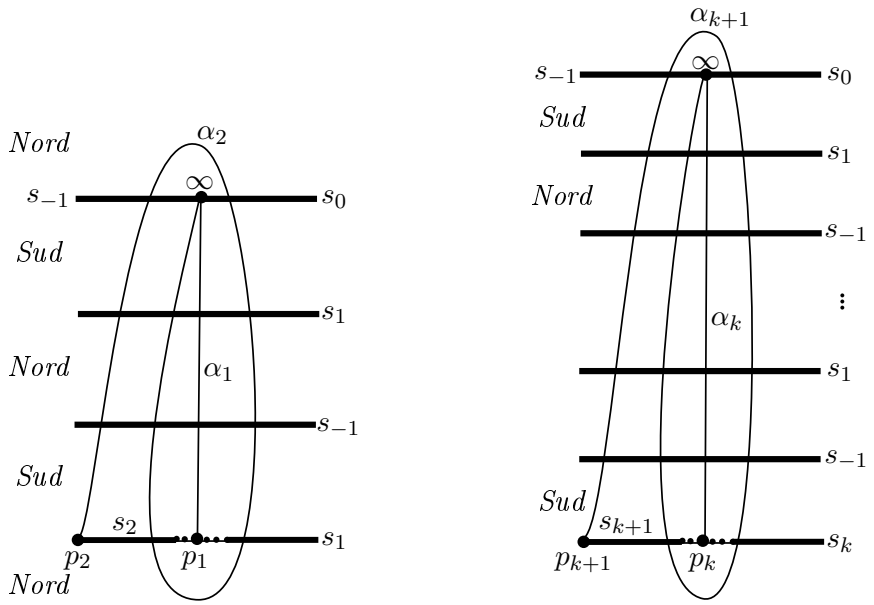

FIGURE 1.3 – Définition de α_2 à partir de α_1, puis de α_{k+1} à partir de α_k : représentation des intersections locales de ces rayons avec $\mathcal{E}$.

traversant les segments voisins, c'est-à-dire en traversant d'abord s_{k+1} puis s_k, on longe à nouveau $\alpha_{k\#}$ dans un voisinage tubulaire, on contourne ∞ en traversant s_0 puis s_{-1}, on longe une dernière fois $\alpha_{k\#}$ dans un voisinage tubulaire jusqu'à son point d'attachement et on va s'attacher au point p_{k+1} sans traverser l'équateur.

En termes de codage, on obtient les suites complètes suivantes :
- $\alpha_0 = s_0(p_0)$;
- $\alpha_1 = s_1 s_{-1}(p_1)$;
- $\alpha_{k+1} = \mathring{\alpha}_k s_{k+1} s_k \mathring{\alpha}_k^{-1} s_0 s_{-1} \mathring{\alpha}_k(p_{k+1})$ pour tout $k \geq 1$.

Remarque. Si l'on note $\texttt{long}(\alpha_k)$ le nombre de fois que $\alpha_{k\#}$ traverse un hémisphère, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de $\alpha_{k\#} - \mathcal{E}$, ou encore le nombre de copies de demi-domaines fondamentaux traversés par un relevé géodésique $\tilde{\alpha}_k$ au revêtement universel, alors $\texttt{long}(\alpha_k)$ est impair pour tout $k \geq 1$. En effet on a $\texttt{long}(\alpha_1) = 3$ (voir figure 1.3) et par construction $\texttt{long}(\alpha_{k+1}) = 3\texttt{long}(\alpha_k) + 2$ donc $\texttt{long}(\alpha_{k+1})$ a la même parité que $\texttt{long}(\alpha_k)$. Ainsi on est sûr d'être dans la situation de la figure 1.3, à savoir que le dernier hémisphère traversé par α_k est l'hémisphère sud, donc p_{k+1} est toujours à gauche de p_k dans la représentation choisie (figure 1.3), et lorsque α_{k+1} contourne ∞, ce rayon traverse d'abord s_0 puis s_{-1} pour éviter toute auto-intersection.

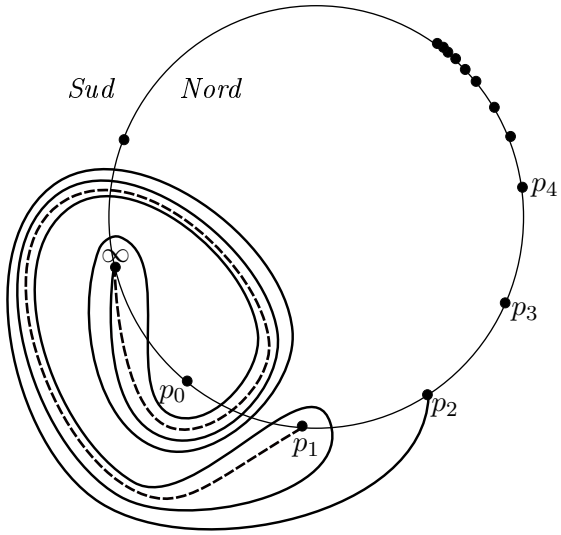

FIGURE 1.4 – Sur la sphère, représentation en pointillés de $\alpha_1 = s_1 s_{-1}(p_1)$ représentation en trait plein de $\alpha_2 = s_1 s_{-1} s_2 s_1 s_{-1} s_1 s_0 s_{-1} s_1 s_{-1}(p_2)$.

1.1.4 Diamètre infini et demi-axe géodésique

Soit β un rayon et $\mathring{u} = u_0 u_1 ... u_n$ une suite de segments. On dira que β *commence par* $\mathring{u}$ si la première composante connexe de $\beta_\# - \mathcal{E}$ est dans l'hémisphère sud et si les premières intersections de $\beta_\#$ avec $\mathcal{E}$ sont, dans cet ordre, les segments $u_0, u_1, ..., u_n$. En particulier, si $\beta \in X_S$, ceci revient à dire que $u(\beta)$ commence par $\mathring{u}$.

Définition. Soit $A : X_r \to \mathbb{N}$ l'application qui à toute classe d'isotopie de rayon γ associe :

$$A(\gamma) := \max\{i \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \gamma \textit{ commence par } \mathring{\alpha}_i\}.$$

Comme $\mathring{\alpha}_0$ est la suite vide, A est bien définie pour tout $\gamma \in X_r$. On montre à présent que l'application A est 1-lipschitzienne.

Lemme 1.1.4. *Soient β et γ deux rayons tels que $d(\gamma, \beta) = 1$. Alors :*

$$|A(\gamma) - A(\beta)| \leq 1.$$

Démonstration. On pose $n := A(\beta)$. On choisit des représentants géodésiques $\beta_\#$ de β et $\gamma_\#$ de γ (voir figure 1.5). L'arc $\beta_\#$ commence par parcourir la courbe représentant $\mathring{\alpha}_n$: en effet, il doit traverser les mêmes segments, dans le même ordre. Il existe un homéomorphisme fixant chaque point de K et ∞, fixant globalement

$\mathcal{E}$ et envoyant le début de $\beta_\#$, c'est-à-dire la composante de $\beta_\#$ entre ∞ et s_{-1}, sur le début de α_n, c'est-à-dire la composante de α_n entre ∞ et s_{-1}. Comme γ est à distance 1 de β, $\gamma_\#$ est disjoint de $\beta_\#$ et doit sortir de la zone grise, qui ne contient aucun point de K, pour s'accrocher à un point de K sans couper $\beta_\#$, donc sans couper la courbe pleine sur la figure 1.5. Ainsi $\gamma_\#$ doit commencer par parcourir une des deux flèches pointillées, ce qui revient exactement à dire que γ commence par $\mathring{\alpha}_{n-1}$. On a donc $A(\gamma) \geq n-1$. Par symétrie, on a le résultat voulu. □

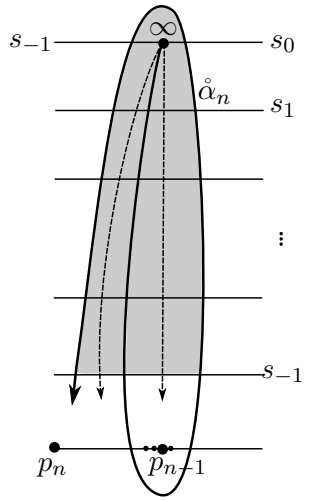

FIGURE 1.5 – Représentation des intersections locales de $\mathring{\alpha}_n$ avec $\mathcal{E}$. Par définition de $(\alpha_k)_k$, il n'y a aucun point de K dans la zone grisée.

Corollaire 1.1.5. *Soient β et γ deux rayons quelconques de X_r. On a :*

$$|A(\beta) - A(\gamma)| \leq d(\beta, \gamma).$$

Démonstration. On choisit une géodésique dans le graphe des rayons entre β et γ et par sous-additivité de la valeur absolue on en déduit le résultat grâce au lemme 1.1.4. □

Cette inégalité permet de minorer certaines distances, et en particulier on en déduit le théorème suivant :

Théorème 1.1.6. *Le diamètre du graphe des rayons est infini.*

Démonstration. Par définition de A, on a $A(\alpha_0) = 0$ et $A(\alpha_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le corollaire 1.1.5, on a donc $d(\alpha_0, \alpha_n) \geq n$. □

Proposition 1.1.7. *Le demi-axe* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est géodésique.*

Démonstration. Par construction de la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a $d(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1$ pour tout $k \geq 0$. Par ailleurs $d(\alpha_k, \alpha_0) \geq k$ pour tout $k \geq 0$ (c'est une conséquence du corollaire 1.1.5). Ainsi pour tout $k \geq 0$, on a $d(\alpha_k, \alpha_0) = k$. □

1.2 Hyperbolicité du graphe des rayons

On dira qu'un espace métrique X est *géodésique* si entre deux points quelconques de X il existe toujours au moins une géodésique, c'est-à-dire un chemin qui minimise la distance entre ces deux points. On rappelle la définition d'espace métrique hyperbolique au sens de Gromov. Pour plus de précisions sur les espaces hyperboliques, on pourra consulter par exemple Bridson & Haefliger [8].

Définition (Espace hyperbolique)**.** On dira qu'un espace métrique géodésique X est *hyperbolique au sens de Gromov*, ou tout simplement *hyperbolique*, s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que pour tout triangle géodésique de X, chaque côté du triangle est inclus dans le δ-voisinage des deux autres.

On définit un graphe X_∞ et on montre qu'il est hyperbolique par les mêmes arguments que ceux développés dans Hensel, Przytycki & Webb [27] pour montrer l'hyperbolicité du graphe des arcs dans le cas des surfaces compactes à bord. On utilise ensuite cette hyperbolicité pour établir l'hyperbolicité du graphe des rayons.

1.2.1 Hyperbolicité du graphe des lacets simples basés en l'infini

Graphe X_∞ et chemins « unicornes »

On fixe K un ensemble de Cantor de $\mathbb{R}^2$ et on compactifie $\mathbb{R}^2$ en ajoutant ∞, obtenant ainsi la sphère $\mathbb{S}^2$. Un arc simple de $\mathbb{S}^2 - K$ joignant l'infini à l'infini est dit *essentiel* s'il ne borde pas un disque topologique, c'est-à-dire qu'il sépare la sphère en deux composantes dont chacune contient des points de K.

Définition. On construit le graphe X_∞ comme suit :

- Les sommets sont les classes d'isotopie des arcs simples essentiels sur $\mathbb{S}^2 - K$ et joignant ∞ à ∞, où l'on identifie les arcs ayant même image et des orientations opposées ;

– Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si ils sont homotopiquement disjoints.

Remarque. On rappelle que l'on note X_r le graphe des rayons. Les graphes X_∞ et X_r sont naturellement munis d'une métrique où toutes les arêtes sont de longueur 1. Le groupe $\Gamma = \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$ agit sur X_∞ (et sur X_r) par isométries.

On adapte ici la preuve de [27] de l'hyperbolicité du graphe des arcs dans le cas des surfaces à bord pour montrer l'hyperbolicité de X_∞.

Soient a et b deux arcs simples essentiels sur $\mathbb{S}^2 - K$ joignant ∞ à ∞ et en position d'intersection minimale. On choisit une orientation sur chacun d'entre eux et on note a^+, b^+ les arcs orientés correspondant. Soit $\pi \in a \cap b$. Soit a' et b' les sous-arc orientés de a, respectivement b, commençant comme a, respectivement comme b, et ayant π pour deuxième extrémité. On note $a' \star b'$ la concaténation de ces deux sous-arcs ; en particulier, c'est un arc joignant ∞ à ∞. On suppose que cet arc est simple. Comme a et b sont en position d'intersection minimale, l'arc $a' \star b'$ est essentiel. Il définit donc un élément de X_∞. On dira que $a' \star b'$ est un *arc unicorne obtenu à partir de a^+ et b^+*.

On note que cet arc est déterminé de manière unique par le choix de $\pi \in a \cap b$, et que tous les points de $a \cap b$ ne définissent pas un arc sans auto-intersection. Par ailleurs, $a \cap b$ est un ensemble fini, car a et b ont des intersections transverses. Il y a donc un nombre fini d'arcs unicornes obtenus à partir de a^+ et b^+.

Fait. *Si π et π' sont deux points de $a \cap b$ définissant des arcs unicornes $a' \star b'$ et $a'' \star b''$, alors $a'' \subset a'$ si et seulement si $b' \subset b''$.*

Définition (Ordre total sur les arcs unicornes)**.** Soient a^+ et b^+ deux arcs essentiels orientés entre ∞ et ∞ sur $\mathbb{S}^2 - K$, en position minimale d'intersection. On ordonne les arcs unicornes entre a^+ et b^+ de la manière suivante :
$a' \star b' \leq a'' \star b''$ si et seulement si $a'' \subset a'$ et $b' \subset b''$.

Cet ordre est total. On note $(c_1, ..., c_{n-1})$ l'ensemble ordonné des arcs unicornes entre a^+ et b^+. Il correspond en particulier à l'ordre des points π lorsque l'on parcourt b^+.

On définit des chemins unicornes dans le graphe X_∞ de la manière suivante :

Définition (Chemins unicornes entre arcs orientés)**.** Soient a^+ et b^+ deux arcs essentiels orientés entre ∞ et ∞ sur $\mathbb{S}^2 - K$, en position minimale d'intersection.

La suite d'arcs unicornes $P(a^+, b^+) = (a = c_0, c_1, ..., c_{n-1}, c_n = b)$ est appelée *chemin unicorne entre a^+ et b^+.*

Fait. *Soient a et b deux arcs orientés en position minimale d'intersection et soit $(c_0, ..., c_n)$ le chemin unicorne entre ces deux arcs orientés. Soient a' et b' deux arcs en position minimale d'intersection tels que a', respectivement b', est isotope à a, respectivement à b, et orienté dans le même sens. On note $(d_0, d_1, ..., d_{m-1}, d_m)$ le chemin unicorne entre a' et b' orientés. Alors $n = m$ et c_k est isotope à d_k pour tout k.*

C'est une conséquence de la proposition 1.1.1. □

Définition (Chemins unicornes entre éléments de X_∞ orientés)**.** Soient α^+ et β^+ deux éléments de X_∞ munis d'une orientation. Soient a et b, deux représentants respectifs de α et β qui sont en position minimale d'intersection, munis de l'orientation naturellement induite par α^+ et β^+. Soit $P(a^+, b^+) = (c_0, ..., c_n)$ le chemin unicorne associé. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note γ_k la classe d'isotopie de c_k. On pose alors : $P(\alpha^+, \beta^+) = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$, qui définit le *chemin unicorne* entre α^+ et β^+.

Fait. *Tout chemin unicorne est un chemin dans X_∞.*

En effet, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, c_i et c_{i+1} sont homotopiquement disjoints. C'est la remarque 3.2 de [27]. □

Remarques.
1. Si $a \cap b = \emptyset$, on a alors $P(a^+, b^+) = (a, b)$.
2. Par abus de notation, on notera encore $P(a^+, b^+)$ l'ensemble des éléments de la suite $P(a^+, b^+)$.

Les arcs unicornes ne dépendent que du voisinage de $a \star b$: si l'on considère un voisinage fermé de $a \star b$ suffisamment petit (pour qu'il soit homotopiquement équivalent à $a \star b$), on peut alors voir les arcs unicornes comme arcs unicornes de la surface compacte à bord définie par ce voisinage. On est alors exactement dans le cas de l'article [27]. Cette correspondance nous permet de voir tout chemin unicorne de X_∞ comme un chemin unicorne d'un graphe des arcs d'une surface. En particulier, les lemmes 3.3, 3.4, 3.5 et 4.3 de [27] restent vrais dans X_∞. Comme la proposition 4.2, puis le théorème 1.2 en découlent, on obtient de la même façon l'hyperbolicité du graphe X_∞. Il semble difficile de déduire l'hyperbolicité de X_∞ de celle du graphe des arcs d'une seule surface : dans chaque preuve des lemmes,

on doit passer par des surfaces différentes, qui dépendent des éléments de X_∞ que l'on considère. Pour plus de commodités, on adapte la preuve de [27] dans notre contexte. Le lemme 1.2.1, le corollaire 1.2.2, le lemme 1.2.3 et les propositions 1.2.5 et 1.2.8 correspondent, dans cet ordre, aux lemmes 3.3, 4.3, 3.5, à la proposition 4.2 et au théorème 1.2 de [27].

On note que la preuve de [27] ne s'adapte pas directement au graphe des rayons X_r : en effet, l'arc obtenu à partir de deux représentants d'éléments du graphe des rayons orientés de l'infini jusqu'au point d'attachement va de l'infini à l'infini et n'appartient donc pas au graphe des rayons. Si l'on modifie la définition en choisissant l'arc unicorne comme parcourant le début de a puis la fin de b, on obtient bien un arc dont la classe d'isotopie est un rayon, mais le lemme 1.2.1 devient faux, d'où la nécessité de passer par le graphe X_∞.

Lemmes sur les chemins unicornes de X_∞

Lemme 1.2.1 (Les triangles unicornes sont 1-fins). *Soient α^+, β^+ et δ^+ trois éléments de X_∞ munis d'une orientation. Alors pour tout $\gamma \in P(\alpha^+, \beta^+)$, l'un des termes γ^* de $P(\alpha^+, \delta^+) \cup P(\delta^+, \beta^+)$ est tel que $d(\gamma, \gamma^*) = 1$ dans X_∞.*

Démonstration. Soient a, b, d des représentants géodésiques de α, β, δ. Soit $c \in P(a^+, b^+)$: il existe a' et b' sous-arcs respectifs de a et b tels que $c = a' \star b'$. Si c est disjoint de d, $\gamma^* = \delta$ convient. Sinon, soit $d' \subset d$ le sous arc maximal commençant comme d^+ et disjoint de c. Soit $\sigma \in c$ l'autre extrémité de d'. Le point σ divise c en deux sous-arcs, dont l'un est contenu dans a' ou b', disons a' (le cas b' est analogue). On note a'' ce sous-arc. Alors $c^* := a'' \star d'$ est un terme de $P(a^+, d^+)$. De plus, c et c^* sont homotopiquement disjoints. □

Corollaire 1.2.2. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $m \leq 2^k$ et soit $(\xi_0, ..., \xi_m)$ un chemin dans X_∞. On munit les ξ_i d'une orientation arbitraire. Alors $P(\xi_0^+, \xi_m^+)$ est inclus dans un k-voisinage de $(\xi_0, ..., \xi_m)$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in P(\xi_0^+, \xi_m^+)$. Montrons qu'il existe i tel que $d(\gamma, \xi_i) \leq k$. En appliquant le lemme 1.2.1 aux sommets ξ_0^+, ξ_m^+ et $\xi_{E(m/2)}^+$ (où $E(\cdot)$ désigne la partie entière), on obtient $\gamma_1^* \in P(\xi_0^+, \xi_{E(m/2)}^+) \cup P(\xi_{E(m/2)}^+, \xi_m^+)$ tel que $d(\gamma, \gamma_1^*) = 1$. On note (α_1^+, β_1^+) le couple $(\xi_0^+, \xi_{E(m/2)}^+)$ ou $(\xi_{E(m/2)}^+, \xi_m^+)$ tel que $\gamma_1^* \in P(\alpha_1^+, \beta_1^+)$. On applique alors le lemme 1.2.1 aux éléments α_1^+, β_1^+ et ξ_l^+, où l est choisi de telle sorte que ξ_l est au milieu de α_1 et β_1 sur le chemin $(\xi_0, ..., \xi_m)$. On a alors $\gamma_2^* \in P(\alpha_1^+, \xi_l^+) \cup P(\xi_l^+, \beta_1^+)$ tel que $d(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = 1$, et donc $d(\gamma, \gamma_2^*) \leq 2$. On

continue ainsi par récurrence en choisissant à chaque fois un élément ξ_j au milieu des deux éléments concernés par le chemin unicorne précédent, et on finit par trouver $\gamma^* = \xi_i$ tel que $d(\gamma, \gamma_*) \leq k$. □

Lemme 1.2.3. *Soient $\alpha^+, \beta^+ \in X_\infty$ orientés et soit $P(\alpha^+, \beta^+) = (\gamma_0, ..., \gamma_n)$ le chemin unicorne associé dans X_∞. Pour tous $0 \leq i \leq j \leq n$, on considère $P(\gamma_i^+, \gamma_j^+)$, où γ_i^+, respectivement γ_j^+, a la même orientation que a^+, respectivement b^+. Alors ou bien $P(\gamma_i^+, \gamma_j^+)$ est un sous-chemin de $P(\alpha^+, \beta^+)$, ou bien $j = i + 2$ et $d(\gamma_i, \gamma_j) = 1$ dans X_∞.*

On choisit des représentants a^+ et b^+, et on note $(c_0, ..., c_n)$ le chemin unicorne associé. Pour garder la terminologie de [27], on appelera *demi-bigone* tout bigone ayant l'infini dans son bord. On montre d'abord le sous-lemme suivant :

Sous-lemme 1.2.4. *Soit $c = c_{n-1}$, c'est-à-dire que $c = a' \star b'$, avec l'intérieur de a' disjoint de b. Soit $\tilde{c}$ un arc homotope à c obtenu en poussant a' en dehors de a de telle sorte que $a' \cap \tilde{c} = \emptyset$. Alors ou bien $\tilde{c}$ et a sont en position minimale d'intersection, ou bien ces deux arcs bordent exactement un demi-bigone : dans ce cas, après avoir poussé $\tilde{c}$ à travers ce demi-bigone, obtenant ainsi un arc $\overline{c}$, on a que $\overline{c}$ et a sont en position minimale d'intersection.*

Preuve du sous-lemme 1.2.4. Les arcs $\tilde{c}$ et a ne peuvent pas border un bigone, sinon a et b bordent un bigone, ce qui contredit la position minimale d'intersection. Ainsi si $\tilde{c}$ et a ne sont pas en position minimale d'intersection, alors ils bordent un demi-bigone $\tilde{c}'a''$, où $\tilde{c}' \subset \tilde{c}$, et $a'' \subset a$ (voir la figure 1.6 pour un exemple). Soit $\pi' = \tilde{c}' \cap a''$. Comme $\tilde{c}$ découpe la sphère en deux composantes connexes, l'une contient a'' et l'autre contient $b - b'$, donc l'intérieur de a'' est disjoint de b. En particulier, a'' est situé à la fin de a. De plus, π' et $\pi = a' \cap b'$ sont deux points d'intersection de $a \cap b$ successifs sur b (sinon il y a un bigone).

On note b'' la première composante connexe de $b - \pi'$ dans le sens de parcours de b. Soit $\overline{c} := a'' \star b''$. En appliquant à $\overline{c}$ le même raisonnement que celui appliqué à $\tilde{c}$, mais en orientant a dans l'autre sens, on obtient que ou bien $\overline{c}$ et a sont en position minimale d'intersection, ou bien il existe un demi-bigone $\overline{c}'a'''$, avec $\overline{c}' \subset \overline{c}$ et $a''' \subset a$. Mais dans ce dernier cas, on a que a''' est situé sur le début de a (car sur la fin de a orienté à l'envers), d'où $a' \subset a'''$. Comme π' est situé avant π dans le sens de parcours b, on a même $a' \subsetneq a'''$, ce qui contredit le fait que l'intérieur de a''' est disjoint de b. □

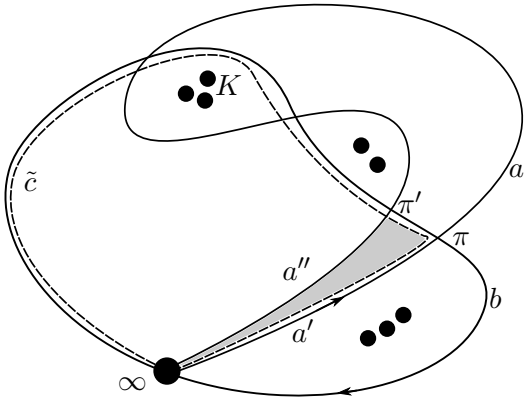

FIGURE 1.6 – Un exemple de deux arcs a et b dans la situation où a et $\tilde{c}$ (en pointillés) bordent un demi-bigone (grisé). Les points noirs représentent des morceaux de K.

Preuve du lemme 1.2.3. Si le lemme est vrai pour $i = 0$ et $j = n - 1$ alors par symétrie il est vrai pour $i = 1$ et $j = n$, et donc par récurrence il est vrai pour tous $0 \leq i \leq j \leq n$. Soit donc $i = 0$ et $j = n-1$. On a alors $c_0 = a$ et $c_{n-1} = a' \star b'$, où a' intersecte b seulement en son extrémité π distincte de l'infini. Soit $\tilde{c}$ obtenu à partir de $c = c_{n-1}$ comme dans le sous-lemme 1.2.4. On reprend toutes les notations du sous-lemme 1.2.4. Si $\tilde{c}$ est en position minimale d'intersection avec a, alors les points de $a \cap b - \{\pi\}$ qui déterminent des arcs unicornes à partir de a^+ et b^+ déterminent les mêmes arcs unicornes que ceux réalisés à partir de a^+ et $\tilde{c}^+$, donc le lemme est prouvé dans ce cas.

Sinon, soit $\overline{c}$ l'arc du sous-lemme 1.2.4, homotope à $\tilde{c}$ et en position minimale d'intersection avec a : les points de $(a \cap b) - \{\pi, \pi'\}$ qui déterminent des arcs unicornes à partir de a^+ et b^+ déterminent les mêmes arcs que ceux obtenus à partir de a^+ et $\overline{c}^+$. Soit $a^* = a - a''$. Si π' ne détermine pas un arc unicorne à partir de a^+ et b^+, c'est-à-dire si a^* et b'' s'intersectent en dehors de π', alors le lemme est montré comme dans le cas précédent. Sinon, $a^* \star b'' = c_1$, puisque c'est le deuxième arc dans la suite des arcs unicornes obtenus à partir de a^+ et b^+. De plus, comme le sous-arc $\pi\pi'$ de a est dans a^*, son intérieur est disjoint de b'', donc aussi de b'. Ainsi $a^* \star b''$ est juste avant c dans l'ordre des arcs unicornes obtenus à partir de a^+ et b^+, ce qui signifie que $j = 2$, comme voulu. $\square$

Hyperbolicité de X_∞

On peut maintenant déduire des lemmes précédents l'hyperbolicité du graphe considéré.

Proposition 1.2.5. *Soit $\mathcal{G}$ un chemin géodésique de X_∞ entre deux sommets α et β. Alors quelles que soient les orientations choisies sur α et β, $P(\alpha^+, \beta^+)$ est inclus dans le 6-voisinage de $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in P(\alpha^+, \beta^+)$ dont la distance à $\mathcal{G}$ est maximale parmi les éléments de $P(\alpha^+, \beta^+)$. On note k la distance entre γ et $\mathcal{G}$. En particulier, $P(\alpha^+, \beta^+)$ est inclus dans un k-voisinage de $\mathcal{G}$. On suppose $k \geq 1$. Si $d(\alpha, \gamma) < 2k$, on pose $\alpha' := \alpha$. Sinon, on note α' l'élement le plus proche de α le long de $P(\alpha^+, \beta^+)$ parmi les éléments de $P(\alpha^+, \beta^+)$ à distance $2k$ de γ. De même, si $d(\beta, \gamma) < 2k$, on pose $\beta' := \beta$, et sinon on note β' l'élément le proche de β le long de $P(\alpha^+, \beta^+)$ parmi les éléments de $P(\alpha^+, \beta^+)$ à distance $2k$ de γ.
On considère le sous-chemin $\alpha'\beta' \subset P(\alpha^+, \beta^+)$. D'après le lemme 1.2.3, $P(\alpha'^+, \beta'^+)$ est un sous-chemin de $P(\alpha^+, \beta^+)$ (on choisit les bonnes orientations sur α' et β'). Ainsi $\gamma \in P(\alpha'^+, \beta'^+)$: sinon on est dans le cas $d(\alpha', \beta') = 1$, ce qui implique que γ est à distance ≤ 1 de α ou β, et donc de $\mathcal{G}$.

Soient $\alpha'', \beta'' \in \mathcal{G}$ à distance minimale de α' et β' : $d(\alpha'', \alpha') \leq k$ et $d(\beta'', \beta') \leq k$. Si $\alpha' = \alpha$ ou $\beta' = \beta$, alors $\alpha'' = \alpha$ ou $\beta'' = \beta$. On a :

$$d(\alpha'', \beta'') \leq d(\alpha'', \alpha') + d(\alpha', \gamma) + d(\gamma, \beta') + d(\beta', \beta'') \leq k + 2k + 2k + k \leq 6k.$$

Soit $\mathcal{J}$ le chemin de α' à β' obtenu en concaténant le sous-chemin $\alpha''\beta''$ de $\mathcal{G}$ avec des chemins géodésiques quelconques entre α' et α'', et entre β' et β''. On note $\xi_0\xi_1...\xi_m$ les sommets de $\mathcal{J}$, et on a $m \leq 8k$. D'après le corollaire 1.2.2, il existe i tel que $d(\gamma, \xi_i) \leq E(\log_2 8k)$, où E est la fonction partie entière supérieure.

Si $\xi_i \notin \mathcal{G}$, disons $\xi_i \in \alpha\alpha'$, alors on est dans le cas où $d(\gamma, \alpha') = 2k$, et donc $d(\gamma, \xi_i) \geq d(\gamma, \alpha') - d(\alpha', \xi_i) \geq k$, d'où $E(\log_2 8k) \geq k$. Sinon, si $\xi_i \in \mathcal{G}$, on a directement $E(\log_2 8k) \geq k$, cette fois par définition de k. Finalement, on a toujours $E(\log_2 8k) \geq k$, et donc $k \leq 6$. □

Corollaire 1.2.6. *Soit $\mathcal{G}$ une géodésique de X_∞ entre deux sommets α et β. Quelles que soient les orientations choisies sur α et β, $\mathcal{G}$ est incluse dans le 13-voisinage de $P(\alpha^+, \beta^+)$.*

C'est une conséquence de la proposition 1.3.4 et du lemme suivant :

Lemme 1.2.7. *Soit X un espace géodésique. Soit $\mathcal{G}$ une géodésique de X entre deux points α et β. Soit k un entier positif. Si $\mathcal{J}$ est un chemin de X entre α et β qui reste dans un k-voisinage de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}$ reste dans un $(2k+1)$-voisinage de $\mathcal{J}$.*

Preuve du lemme. Soit $\mathcal{G}'$ un sous-segment de $\mathcal{G}$ tel que pour tout $\gamma' \in \mathcal{G}'$, pour tout $\xi \in \mathcal{J}$, on a $d(\gamma', \xi) > k$. On montre que tous les points de $\mathcal{G}'$ sont à distance au plus $(2k+1)$ de $\mathcal{J}$. On oriente $\mathcal{G}$ et $\mathcal{J}$ de α vers β. L'ensemble $\mathcal{G} - \mathcal{G}'$ a deux composantes connexes : on note $\mathcal{G}_1$ celle située avant $\mathcal{G}'$ (lorsque l'on parcourt $\mathcal{G}$ de α vers β), et $\mathcal{G}_2$ la deuxième. On a $d(\alpha, \mathcal{G}_2) > k$, sinon $\mathcal{G}'$ est dans le k-voisinage de $\beta \in \mathcal{J}$. Soit ζ le premier point de $\mathcal{J}$ (dans le sens de parcours de $\mathcal{J}$) tel que $d(\zeta, \mathcal{G}_2) \leq k$. Soit $\gamma_2 \in \mathcal{G}_2$ tel que $d(\zeta, \gamma_2) \leq k$. Soit $\zeta' \in \mathcal{J}$ à distance 1 de ζ et situé avant ζ sur $\mathcal{J}$. Alors par définition de ζ et par hypothèse sur $\mathcal{G}'$, il existe $\gamma_1 \in \mathcal{G}_1$ tel que $d(\zeta', \gamma_1) \leq k$. Ainsi, comme $\mathcal{G}$ est une géodésique, le segment de $\mathcal{G}$ entre γ_1 et γ_2 est de longueur inférieure ou égal à $2k+1$ et contient $\mathcal{G}'$. On en déduit que tous les points de $\mathcal{G}'$ sont à distance au plus $2k+1$ de $\mathcal{J}$. □

Proposition 1.2.8. *Le graphe X_∞ est 20-hyperbolique, au sens de Gromov.*

Démonstration. Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle géodésique de X_∞. Soit ζ sur la géodésique entre α et β. On oriente α, β et γ. D'après le corollaire 1.2.6, il existe ξ sur $P(\alpha^+, \beta^+)$ tel que $d(\zeta, \xi) \leq 13$. D'après le lemme 1.2.1, il existe $\xi^* \in P(\alpha^+, \gamma^+) \cup P(\gamma^+, \beta^+)$ tel que $d(\xi, \xi^*) \leq 1$. D'après la proposition 1.2.5, il existe ζ^* sur un des côtés géodésiques du triangle joignant α à γ ou γ à β, tel que $d(\xi^*, \zeta^*) \leq 6$. On a donc $d(\zeta, \zeta^*) \leq 20$, d'où le résultat. □

1.2.2 Quasi-isométrie entre X_r et X_∞

On cherche à déduire l'hyperbolicité du graphe des rayons X_r à partir de celle du graphe X_∞. Pour arriver à cette conclusion, on montre que ces deux graphes sont quasi-isométriques.

Rappels de géométrie à grande échelle

On utilise les résultats suivants (voir par exemple Bridson & Haefliger [8]).

Définition (Quasi-isométrie)**.** Soient X et X' deux espaces métriques. Une application $f : X' \to X$ est un *plongement (κ, ε)-quasi-isométrique* s'il existe $\kappa \geq 1$

et $\varepsilon \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in X'$:

$$\frac{1}{\kappa} d(x,y) - \varepsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x,y) + \varepsilon.$$

Si de plus il existe $C \geq 0$ tel que tout point de X est dans le C-voisinage de $f(X')$, on dit que f est une (κ, ε)-*quasi-isométrie*. Lorsqu'une telle application existe, on dit que X et X' sont *quasi-isométriques*.

Définition (Quasi-géodésique)**.** Une (κ, ε)-*quasi-géodésique* d'un espace métrique X est un plongement (κ, ε)-quasi-isométrique d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans X. Par abus de langage, on appelle quasi-géodésique toute image dans X d'un tel plongement.

Théorème (Lemme de Morse, voir par exemple Bridson & Haefliger [8], théorème 1.7 page 401)**.** *Soit X un espace métrique δ-hyperbolique. Pour tous κ, ε réels positifs, il existe une constante universelle B dépendant uniquement de δ, κ et ε, telle que tout segment (κ, ε)-quasi-géodésique est dans le B-voisinage de toute géodésique joignant ses extrémités.*

On dira que B est la (κ, ε)-*constante de Morse* de l'espace X.

Théorème (voir par exemple Bridson & Haefliger [8], théorème 1.9 page 402)**.** *Soient X et X' deux espaces métriques géodésiques et soit $f : X' \to X$ un plongement quasi-isométrique. Si X est hyperbolique, alors X' est hyperbolique.*

Quasi-isométrie entre X_r et X_∞

D'après la proposition 1.2.8, on sait que X_∞ est un espace hyperbolique. Pour montrer l'hyperbolicité du graphe des rayons X_r, on cherche maintenant à montrer qu'il existe un plongement quasi-isométrique de X_r dans X_∞, ce qui nous permettra de conclure grâce au théorème énoncé ci-dessus. On montre un peu plus, à savoir que le plongement choisi est une quasi-isométrie.

On définit une application $f : X_r \to X_\infty$ qui à $x \in X_r$ associe n'importe quel $\hat{x} \in X_\infty$ tel que x et $\hat{x}$ sont homotopiquement disjoints sur $\mathbb{S}^2 - (K \cup \{\infty\})$.

Proposition 1.2.9. *L'application f définie ci-dessus est une quasi-isométrie.*

Lemme 1.2.10. *Soient $\hat{x}, \hat{y} \in X_\infty$ et $x, y \in X_r$ tels que x (respectivement y) est homotopiquement disjoint de $\hat{x}$ (respectivement de $\hat{y}$). Alors :*

$$d(x,y) \leq d(\hat{x}, \hat{y}) + 2.$$

Remarque. En particulier, on note que ce lemme implique que pour tous $x, y \in X_r$, $d(x,y) - 2 \leq d(f(x), f(y))$.

Démonstration. On note n la distance dans X_∞ entre $\hat{x}$ et $\hat{y}$. Soit $(\hat{\mu}_j)_{0 \leq j \leq n}$ une géodésique dans X_∞ entre $\hat{x}$ et $\hat{y}$ (en particulier, $\hat{\mu}_0 = \hat{x}$ et $\hat{\mu}_n = \hat{y}$). On va construire un chemin $(\mu_1, ..., \mu_{n-1})$ de longueur $(n-1)$ dans X_r, puis montrer que $d(x, \mu_1) \leq 2$ et $d(\mu_{n-1}, y) \leq 2$. Pour tout élément α de X_r ou X_∞, on note toujours $\alpha_\#$ le représentant géodésique de α.

Comme $(\hat{\mu}_i)_i$ est une géodésique de X_∞, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $(\hat{\mu}_i)_\#$ est disjointe de $(\hat{\mu}_{i-1})_\#$ et $(\hat{\mu}_{i+1})_\#$ (sauf en $\{\infty\}$), et $(\hat{\mu}_{i-1})_\#$ et $(\hat{\mu}_{i+1})_\#$ s'intersectent ailleurs qu'en l'infini. Ainsi $(\hat{\mu}_i)_\#$ sépare la sphère $\mathbb{S}^2$ en deux composantes connexes, dont l'une contient $(\hat{\mu}_{i-1})_\#$ et $(\hat{\mu}_{i+1})_\#$. On note A_i l'autre composante connexe. On remarque que pour tout $1 \leq i \leq n-2$, A_i est disjointe de A_{i+1}. Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on choisit un rayon μ_i tel que $(\mu_i)_\#$ est inclus dans A_i (un tel μ_i existe car les $\hat{\mu}_i$ sont des courbes essentielles). On a donc construit un chemin $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ de longueur $(n-1)$ dans X_r.

Montrons maintenant que $d(x, \mu_1) \leq 2$: si $(\mu_1)_\#$ intersecte $x_\#$, alors $x_\#$ est dans la composante connexe de $\mathbb{S}^2 - \hat{x}_\#$ qui contient $(\hat{\mu}_1)_\#$ et $(\mu_1)_\#$. Tout représentant de rayon inclus dans l'autre composante connexe de $\mathbb{S}^2 - \hat{x}_\#$ n'intersecte ni $(\mu_1)_\#$, ni $x_\#$: ainsi $d(x, \mu_1) \leq 2$. On montre de même que $d(\mu_{n-1}, y) \leq 2$. □

Lemme 1.2.11. *Soit $\hat{x} \in X_\infty$. Soit $x \in X_r$ homotopiquement disjoint de $\hat{x}$. Alors :*

$$d(f(x), \hat{x}) \leq 2.$$

Démonstration. On note toujours $x_\#$ et $\hat{x}_\#$ les représentants géodésiques de x et $\hat{x}$, qui sont disjoints (sauf en l'infini). Comme $x_\#$ est disjoint de $\hat{x}_\#$, il existe un disque topologique ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^2$ contenant $x_\# - \{\infty\}$ et disjoint de $\hat{x}_\# - \{\infty\}$. De même, comme $f(x)_\#$ est disjoint de $x_\#$, on a un disque topologique ouvert $\mathcal{V}$ contenant $x_\# - \{\infty\}$ et disjoint de $f(x)_\# - \{\infty\}$. Ainsi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ contient un disque topologique ouvert contenant $x_\# - \{\infty\}$ et disjoint de $(\hat{x}_\# \cup f(x)_\#) - \{\infty\}$. En particulier, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ contient des points de K, puisqu'il contient le point d'attachement de $x_\#$. Il existe donc $\hat{y}_0 \subset (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - K$ une courbe simple de $\mathbb{S}_2$ passant par ∞, ayant pour classe d'isotopie l'élément $\hat{y} \in X_\infty$. Finalement, $d(\hat{y}, \hat{x}) = d(\hat{y}, f(x)) = 1$, d'où le résultat. □

Lemme 1.2.12. *Pour tous $x, y \in X_r$, on a :*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) + 4.$$

Démonstration. Soient $x, y \in X_r$ et $n = d(x, y)$. Si x et y n'ont pas le même point d'attachement, on choisit une géodésique $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq n}$ de X_r entre x et y, telle que pour tous i, j, les éléments γ_i et γ_j n'ont pas le même point d'attachement. Des tels γ_i existent quitte à changer certains points d'attachement pour un point voisin de K sans ajouter de point d'intersection avec les autres γ_k. Si x et y ont le même point d'attachement, on choisit pour γ_n un rayon homotopiquement disjoint de y et de $f(y)$ et qui n'a pas le même point d'attachement que x, puis on choisit une géodésique $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq n}$ de X_r entre $x = \gamma_0$ et γ_n.

Autour des points d'attachement des rayons γ_i, on choisit maintenant des petits voisinages deux à deux disjoints et tels que chaque voisinage intersecte un unique rayon, qui vient s'attacher à un point contenu dans le voisinage. Si $y \neq \gamma_n$, on choisit de plus $\hat{\gamma}_n$ disjoint de y. On définit alors pour chacun des rayons γ_i une courbe $\hat{\gamma}_i$ de la manière suivante : on parcourt γ_i jusqu'au voisinage choisi, on parcourt le bord du voisinage choisi puis on reparcourt γ_i dans l'autre sens. On obtient ainsi un élément de X_∞.

Par construction, pour tout i entre 2 et $n-1$, on a $d(\hat{\gamma}_{i-1}, \hat{\gamma}_i) = d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = 1$. D'après le lemme 1.2.11 appliqué à $\hat{\gamma}_0$ disjoint de $x = \gamma_0$ et à $\hat{\gamma}_n$ disjoint de y, on obtient $d(\hat{\gamma}_0, f(x)) \leq 2$ et $d(\hat{\gamma}_n, f(y)) \leq 2$. Finalement on a $d(f(x), f(y)) \leq n + 4$. □

Fin de la preuve de la proposition 1.2.9 : Les lemmes 1.2.10 (pour la première inégalité) et 1.2.12 (pour la deuxième inégalité) nous donnent :

$$d(x, y) - 2 \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) + 4.$$

Le lemme 1.2.11 nous donne la constante $C = 2$ telle que tout $\hat{x}$ de X_∞ soit dans un C-voisinage de $f(X_r)$, ce qui termine la preuve de la proposition 1.2.9. □

Hyperbolicité du graphe des rayons

Finalement on a montré le théorème suivant :

Théorème 1.2.13. *Le graphe des rayons est hyperbolique au sens de Gromov.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.2.9 (il existe un plongement quasi-isométrique de X_r dans X_∞), de la proposition 1.2.8 (X_∞ est hyperbolique) et du théorème 1.2.2 (si $f : X \to X'$ est un plongement quasi-isométrique et X' est hyperbolique, alors X est hyperbolique). □

1.3 Quasi-morphismes non triviaux

Dans [7], Mladen Bestvina et Koji Fujiwara montrent que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux sur le groupe modulaire d'une surface compacte est de dimension infinie. Ils montrent d'abord (théorème 1 de [7]) que si un groupe G agit par isométries sur un espace hyperbolique X, alors sous la condition d'existence d'éléments hyperboliques qui vérifient certaines propriétés dans G, l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux sur ce groupe est de dimension infinie. Dans un deuxième temps, ils montrent que si l'action de G sur X est *faiblement proprement discontinue*, alors il existe des éléments qui vérifient les conditions du théorème 1, puis ils montrent que les groupes modulaires de surfaces compactes agissent proprement faiblement discontinûment sur les complexes de courbes associés.

Dans le cas du groupe Γ qui nous intéresse, l'action considérée sur l'espace X_r n'est pas faiblement proprement discontinue. On dit qu'un élément g d'un groupe G agit proprement faiblement discontinûment sur un espace hyperbolique X si pour tout $x \in X$, pour tout $C > 0$, il existe $N > 0$ tel que le nombre de $\sigma \in G$ vérifiant $d(x, \sigma x) \leq C$ et $d(g^N x, \sigma g^N x) \leq C$ est fini (voir par exemple Calegari [12] p74).

Fait. *Pour tout $g \in \Gamma$, l'action de g sur le graphe des rayons X_r n'est pas proprement faiblement discontinue.*

En effet, pour tout $x \in X_r$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de $\sigma \in \Gamma$ tels que $d(x, \sigma x) \leq 1$ et $d(g^N x, \sigma g^N x) \leq 1$: on considère un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point du Cantor tel que $\mathcal{U}$ est disjoint de x et de $g^N x$, alors tout σ à support dans $\mathcal{U}$ fixe x et $g^N x$ donc vérifie $d(x, \sigma x) \leq 1$ et $d(g^N x, \sigma g^N x) \leq 1$. De plus il y a une infinité de tels σ car il y a une infinité de points de l'ensemble de Cantor dans $\mathcal{U}$. □

La stratégie de [7] ne s'applique donc pas entièrement, mais on peut trouver explicitement des éléments de Γ qui vérifient les hypothèses du théorème 1 de [7],

ce qui nous permet de montrer que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux sur Γ est de dimension infinie.

On commence par trouver un élément $h \in \Gamma$ qui agit par translation sur l'axe des $(\alpha_k)_k$ défini précédemment. On montre ensuite, en utilisant le « nombre d'intersections positives », que si w est un sous-segment suffisamment long de cet axe, alors pour tout $g \in \Gamma$, g ne peut pas retourner ce segment dans un voisinage proche de l'axe (proposition 1.3.4). On utilisera enfin cette proposition d'une part pour construire un quasi-morphisme non trivial explicite sur Γ et d'autre part pour construire des éléments de Γ qui vérifient les conditions du théorème 1 de [7].

1.3.1 Un élément de Γ qui agit par translation sur un axe géodésique infini du graphe des rayons

On cherche à définir un élément hyperbolique $h \in \Gamma$ comme sur la figure 1.7, où chaque brin envoie un sous-ensemble de Cantor sur un autre, de telle sorte que cet élément envoie α_k sur α_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$ (voir figure 1.8).

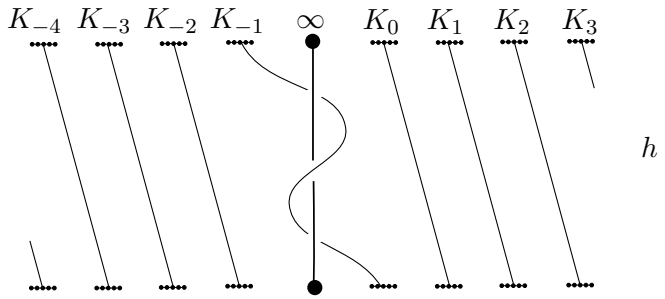

FIGURE 1.7 – Représentation de l'élément $h \in \Gamma$.

Comme $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un demi-axe géodésique (d'après la proposition 1.1.7), on a alors que $(h^n(\alpha_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un axe géodésique du graphe des rayons, sur lequel l'élément h agit par translation.

Définition de h

On fixe un équateur $\mathcal{E}$ et un alphabet de segments $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ comme dans la partie 1.1.2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$, on note K_k les points de K entre s_{k-1} et s_k sur $\mathcal{E}$. En particulier, les K_k sont des ouverts-fermés de l'ensemble de Cantor initial K pour

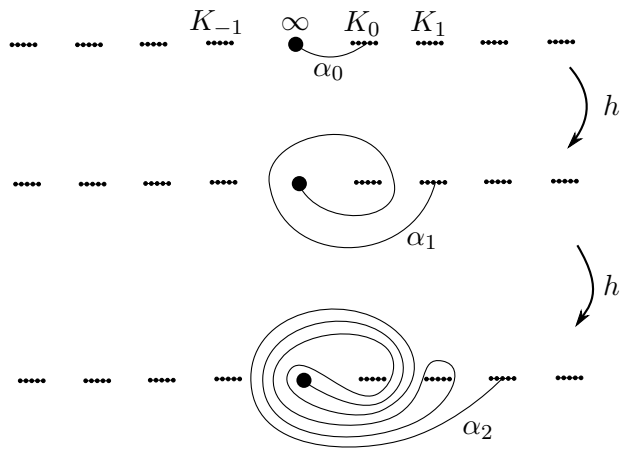

FIGURE 1.8 – Action de h sur les rayons α_0 et α_1.

tout k, ce sont donc des ensembles de Cantor (tout ouvert-fermé non vide d'un ensemble de Cantor en est un, d'après la caractérisation comme compact métrique totalement discontinu sans point isolé). On note I une composante connexe de $\mathcal{E} - K$ telle que $I \cup \{\infty\}$ partagent l'équateur en deux composantes dont l'une contient tous les segments s_k avec $k > 0$ et l'autre contient tous les segments s_k avec $k < 0$.

Soit $\mathcal{C}_N$ un cercle topologique qui coïncide avec l'équateur $\mathcal{E}$ en dehors d'un voisinage de l'infini et qui passe dans l'hémisphère nord au-dessus de l'infini. Soit $\mathcal{C}_S$ un cercle topologique qui coïncide avec l'équateur $\mathcal{E}$ en dehors d'un voisinage de l'infini et qui passe dans l'hémisphère sud en dessous de l'infini.

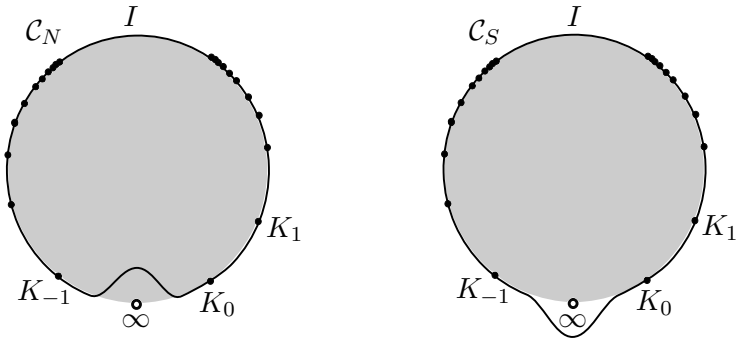

FIGURE 1.9 – $\mathcal{C}_N$ et $\mathcal{C}_S$ (sur chaque figure, la partie grisée représente l'hémisphère nord).

Soit $\tilde{t}_1$ un homéomorphisme de $\mathcal{C}_N$ qui envoie chaque morceau d'ensemble de Cantor K_k sur le morceau d'ensemble de Cantor K_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et qui vaut l'identité sur I (tout ensemble de Cantor de l'intervalle peut être envoyé sur tout

autre ensemble de Cantor par un homéomorphisme de l'intervalle). On prolonge $\tilde{t}_1$ à un homéomorphisme de la sphère $\mathbb{S}^2$, et on considère sa classe d'isotopie $t_1 \in \Gamma$.

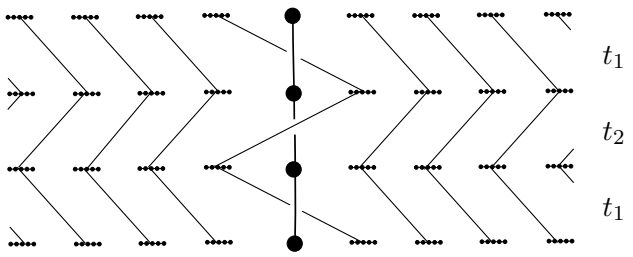

FIGURE 1.10 – Définition de $h := t_1 t_2 t_1$.

De même, soit $\tilde{t}_2$ un homéomorphisme de $\mathcal{C}_S$ qui envoie chaque morceau d'ensemble de Cantor K_{k+1} sur le morceau d'ensemble de Cantor K_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et qui fixe I. On prolonge $\tilde{t}_2$ à un homéomorphisme de la sphère $\mathbb{S}^2$, et on considère sa classe d'isotopie $t_2 \in \Gamma$. En particulier, si on note ϕ la classe d'isotopie de la rotation d'angle π autour de ∞ qui envoie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le morceau d'ensemble de Cantor K_k sur le morceau K_{-k-1}, alors on peut choisir $t_2 = \phi t_1 \phi^{-1}$.

On pose enfin $h := t_1 t_2 t_1$ (voir figure 1.10).

Action de h sur le graphe des rayons

S'il existe une géodésique de X_r qui est globalement invariante par une isométrie g, et si g n'a pas de point fixe sur cette géodésique, alors on dit que l'action de g sur X_r est hyperbolique et que cette géodésique est un axe de g.

Théorème 1.3.1. *L'action de h sur le graphe des rayons est hyperbolique, d'axe $(\alpha_k)_k$. Plus précisément, $h(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Pour voir que $h(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, on représente α_k par un graphe, comme sur la figure 1.11.

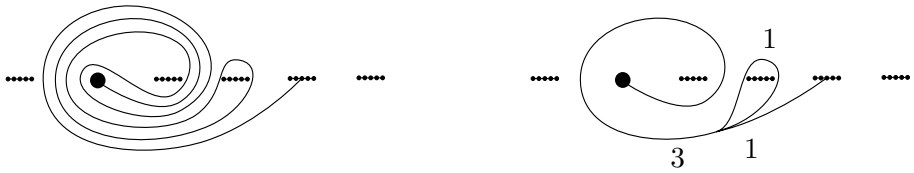

FIGURE 1.11 – A gauche, le rayon α_2 ; à droite, un graphe le représentant.

Démonstration. Pour chaque rayon, on peut choisir une courbe le représentant et identifier certains morceaux de courbes qui restent dans un voisinage tubulaire les uns des autres. On obtient ainsi un graphe fini plongé de façon lisse dans $\mathbb{S}^2$ et disjoint de tous les points de K sauf du point d'attachement du rayon initial. En chaque noeud, les arêtes se répartissent en deux directions. Chaque arête porte un poids qui correspond au nombre de morceaux de courbes qu'elle représente : en chaque noeud, dans une des deux directions il y a une seule arête, qui porte un poids égal à la somme des poids des arêtes de l'autre direction. On peut retrouver le rayon initial à partir d'un graphe le représentant : en effet, il suffit de dupliquer chaque arête le nombre de fois correspondant à son poids, et de recoller les morceaux ainsi obtenus en chaque noeud de l'unique façon possible. On ne recolle que des morceaux arrivant sur le noeud avec des directions différentes, et on cherche à obtenir une courbe simple donc il y a un ordre bien défini sur les morceaux de courbes pour faire ce recollement.

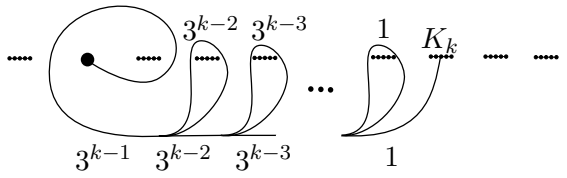

FIGURE 1.12 – Exemple d'un graphe représentant le rayon α_k.

Sur la figure 1.12, on a dessiné un graphe particulier représentant α_k, pour tout $k \geq 0$. Comme il existe une courbe a_k représentant α_k qui reste dans un voisinage tubulaire de ce graphe, si h_0 est un représentant de h, on a que $h_0(a_k)$ reste dans un voisinage tubulaire de l'image par h_0 du graphe : le rayon correspondant à l'image du graphe est $h(\alpha_k)$.

Sur la figure 1.13, on a dessiné un graphe représentant α_k et les images successives de ce graphe par des représentants de t_1, t_2 et t_1. Le graphe final est donc l'image du graphe de α_k par h : il représente $h(\alpha_k)$. Par ailleurs, on voit que le rayon représenté par ce graphe final est α_{k+1} : ainsi $h(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

1.3.2 Nombre d'intersections positives

On note toujours X_r le graphe des rayons, et on oriente chaque rayon de l'infini jusqu'à son point d'attachement.

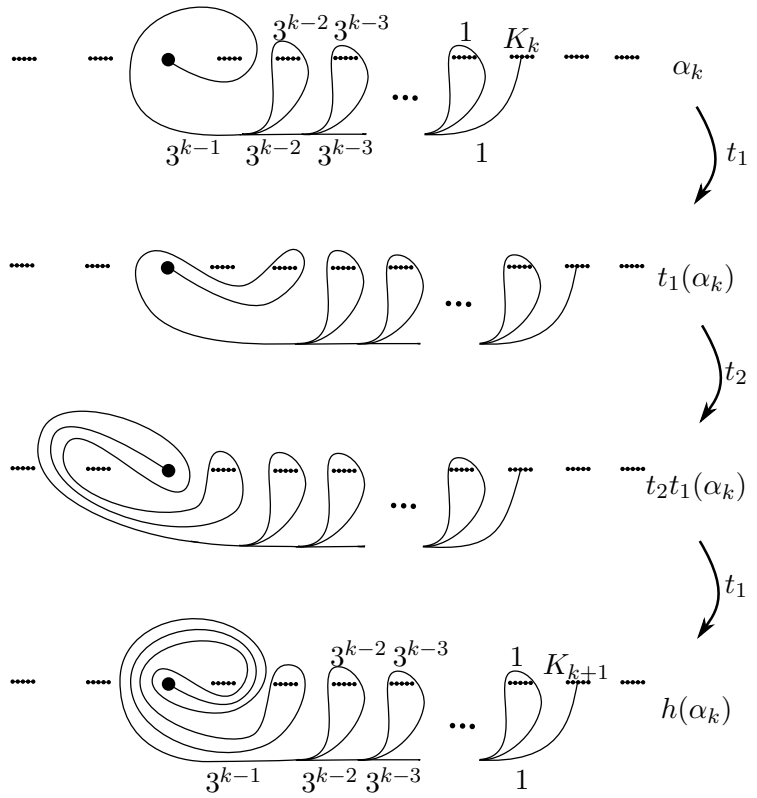

FIGURE 1.13 – Image de α_k par h.

Définition (Nombre d'intersections positives)**.** Soit $I : X_r^2 \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'application qui à deux rayons orientés α et β de X_r associe le nombre d'intersections positives entre deux représentants de α et β en position minimale d'intersection (voir figure 1.14).

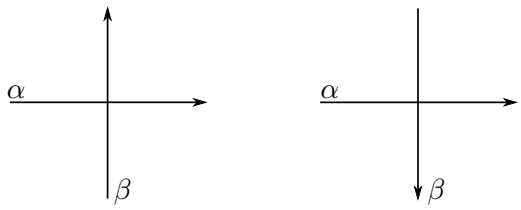

FIGURE 1.14 – Intersection positive à gauche, négative à droite

Remarques.

1. Ce nombre est bien défini : il ne dépend pas du choix de représentants en position minimale d'intersection (d'après la proposition 1.1.1).
2. En général, on a $I(\alpha, \beta) \neq I(\beta, \alpha)$.

3. Pour tout $g \in \Gamma$, $I(g \cdot \alpha, g \cdot \beta) = I(\alpha, \beta)$ (car Γ est obtenu comme quotient du groupe des homéomorphismes préservant l'orientation).

Cas de la suite $(\alpha_k)_k$

Lemme 1.3.2. *Soient β et γ deux éléments de X_r tels que $A(\gamma) \leq A(\beta) - 2$, où A est l'application définie dans la partie 1.1.4. Alors $I(\gamma, \beta) \geq 1$.*

Démonstration. On pose $n := A(\beta)$. Alors γ ne commence pas par $\mathring{\alpha}_{n-1}$. Sur la figure 1.15, on a représenté le début de β, c'est-à-dire $\mathring{\alpha}_n$. Tout représentant de γ part de l'infini et doit s'attacher à un point de l'ensemble de Cantor : ainsi, tout représentant de γ doit sortir de la zone grisée. Comme γ ne commence pas par $\mathring{\alpha}_{n-1}$, γ ne peut pas sortir de la zone grisée en coupant s_{-1}. Ainsi γ sort de cette zone en intersectant β. La première intersection est positive, et on a donc $I(\gamma, \beta) \geq 1$. □

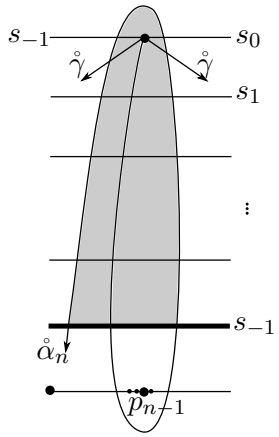

FIGURE 1.15 – Illustration du lemme 1.3.2 (par définition de $(\alpha_k)_k$, il n'y a aucun point de K dans la zone grisée).

Remarques. 1. Comme α_0 et α_1 sont homotopiquement disjoints, on a : $I(\alpha_0, \alpha_1) = I(\alpha_1, \alpha_0) = 0$;

2. On n'utilisera pas ce résultat dans la suite, mais on peut calculer précisément les nombres d'intersections positives entre α_0 et α_k pour tout $k \geq 2$. On a :

$$I(\alpha_0, \alpha_k) = \frac{3^{k-1} + 2k - 3}{4} \quad \text{et} \quad I(\alpha_k, \alpha_0) = \frac{3^{k-1} - 2k + 1}{4}.$$

En effet, notons $(p_k, n_k) = (I(\alpha_0, \alpha_k), I(\alpha_k, \alpha_0))$. On a alors :

$$(p_{k+1}, n_{k+1}) = (2p_k + n_k + 1, p_k + 2n_k).$$

Ceci vient de la construction de $(\alpha_k)_k$: on trace un tube autour de α_{k-1}, et on peut donc regarder l'orientation des intersections entre ce tube et α_0. On sait alors exprimer p_k et n_k en fonction de k.

1.3.3 Non-retournement de l'axe $(\alpha_k)_k$

On note B la $(2,4)$-constante de Morse du graphe des rayons (voir la partie 1.2.2). Quitte à prendre sa partie entière supérieure, on suppose que B est un entier. On cherche à montrer une proposition de non-retournement de l'axe $(\alpha_k)_k$ (proposition 1.3.4), qui nous servira de manière fondamentale dans les constructions de quasi-morphismes non triviaux (proposition 1.3.7 et théorème 1.3.8). Pour montrer cette proposition, on a besoin de pouvoir comparer les orientations de certains segments.

Segments orientés dans le même sens

Soit X un espace métrique géodésique. Soient $\gamma_1 = [p_1q_1]$ et $\gamma_2 = [p_2q_2]$ deux segments géodésiques de X de même longueur et orientés de p_i vers q_i. Soit γ_1' un segment géodésique (éventuellement infini) contenant γ_1 et soit C une constante telle que γ_2 est inclus dans un C-voisinage de γ_1' et telle que $d(p_1, p_2) \leq C$. On suppose de plus que $|\gamma_1| = |\gamma_2| \geq 3C$. Dans ces conditions, on dira que γ_1 et γ_2 sont *orientés dans le même sens* si pour tout $r \in \gamma_1'$ tel que $d(r, q_2) \leq C$, r est du même côté de p_1 que q_1 sur γ_1'. Comme γ_1 et γ_2 sont de longueur supérieure à $3C$, on vérifie facilement que l'existence d'un seul r vérifiant ces conditions suffit.

Lemme 1.3.3. *Si γ_1 et γ_2 sont les segments décrits précédemment et s'ils sont orientés dans le même sens, alors $d(q_1, q_2) \leq 3C$.*

Démonstration. Soit r sur γ_1' tel que $d(q_2, r) \leq C$. On note α le segment de γ_1' entre p_1 et r, β celui entre r et q_1.

- **1er cas : si $r \in \gamma_1$.** On a alors :

$$|\gamma_2| = |\gamma_1| = |\alpha| + |\beta| \leq d(p_1, p_2) + |\alpha| + C.$$

On en déduit :

$$|\beta| \leq d(p_1, p_2) + C \leq 2C.$$

Finalement on obtient :

$$d(q_1, q_2) \leq d(q_1, r) + d(r, q_2) \leq |\beta| + C \leq 3C.$$

• **2ème cas : si $r \notin \gamma_1$.** Alors le segment $[p_1, r] \subset \gamma_1'$ contient γ_1 (car γ_1 et γ_2 sont orientés dans le même sens, donc r ne peut pas être de l'autre côté de p_1 sur γ_1'). On a alors :

$$|\gamma_1| + |\beta| \leq d(p_1, p_2) + |\gamma_2| + d(q_2, r) \leq |\gamma_1| + 2C.$$

D'où :

$$|\beta| \leq 2C.$$

Finalement :

$$d(q_1, q_2) \leq d(q_1, r) + d(r, q_2) \leq |\beta| + C \leq 3C.$$

□

Non-retournement

Proposition 1.3.4 (Non-retournement)**.** *Soit B la $(2,4)$-constante de Morse du graphe des rayons et soit w un sous-segment de l'axe $l = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de longueur supérieure à $10B$. Pour tout $g \in \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$, si $g \cdot w$ est inclus dans le B-voisinage de l, alors il est orienté dans le même sens que w.*

Autrement dit, les segments de l'axe l de longueur supérieure à $10B$ sont *non retournables* : il n'existe pas de copies de w^{-1} allant dans le sens de w dans le B-voisinage de l'axe l.

Remarque. Si un élément $h' \in \Gamma$ est conjugué à h^{-1} par une application ψ, alors on note l' l'image de l par ψ, que l'on munit de l'orientation inverse de celle de l. C'est un axe pour h'. D'après la proposition précédente, pour tout w sous-segment de l'axe l' de h' de longueur supérieure à $10B$ et orienté dans le même sens que l', pour tout $g \in \Gamma$, si $g \cdot w$ est inclus dans un B-voisinage de l'axe l de h, alors $g \cdot w$ est orienté dans le sens opposé à celui de l.

Preuve de la proposition 1.3.4. On montre les deux lemmes suivants, qui nous permettent ensuite de conclure :

Lemme 1.3.5. *Soient $m < n$ deux entiers positifs et soit $w = (\alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n)$ un sous-segment de $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit g un élément de $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - K)$ tel que $d(\alpha_m, g \cdot \alpha_n) \leq B$ et tel que $g \cdot w$ est dans un B-voisinage de l, orienté dans le sens inverse de w. Alors si $|w| > 8B+1$, il existe $m \leq i \leq n$ tel que $A(g \cdot \alpha_{i+2}) = A(g \cdot \alpha_i) - 2$.*

Démonstration. Comme $d(\alpha_m, g \cdot \alpha_n) \leq B$, on a $A(g \cdot \alpha_n) \leq m + B$ (d'après le corollaire 1.1.5).
Comme $g \cdot w^{-1}$ et w vont dans le même sens et ont même longueur, d'après le lemme 1.3.3 on a :

$$d(\alpha_n, g \cdot \alpha_m) \leq 3B.$$

D'où $A(g \cdot \alpha_m) \geq n - 3B$ (d'après le corollaire 1.1.5).

Comme A est 1-lipschitzienne (lemme 1.1.4), $A(g \cdot w)$ prend alors toutes les valeurs entières entre $m+B$ et $n-3B$. Par l'absurde, si on suppose que pour tout i entre m et n, $A(g \cdot \alpha_{i+2}) \neq A(g \cdot \alpha_i) - 2$, alors pour tout i on a :

$$A(g \cdot \alpha_{i+2}) \geq A(g \cdot \alpha_i) - 1.$$

Par récurrence, on en déduit :

$$A(g \cdot \alpha_n) \geq A(g \cdot \alpha_m) - \frac{n-m}{2}.$$

Comme $A(g \cdot \alpha_m) \geq n - 3B$ et $A(g \cdot \alpha_m) \geq n - 3B$, on a :

$$m + B \geq n - 3B - \frac{n-m}{2}.$$

D'où finalement :

$$8B \geq n - m.$$

Comme on a supposé $|w| > 8B + 1$, on obtient une contradiction. □

Lemme 1.3.6. *Pour tout $g \in \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - Cantor)$ et pour tout $i \geq 0$, on a :*

$$A(g \cdot \alpha_{i+2}) \neq A(g \cdot \alpha_i) - 2.$$

Démonstration. Comme pour tout $f \in \mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cantor})$ et pour tout $\beta, \gamma \in X_r$, on a $I(f.\beta, f.\gamma) = I(\beta, \gamma)$, on en déduit :

$$I(g \cdot \alpha_{i+2}, g \cdot \alpha_i) = I(\alpha_2, \alpha_0) = 0.$$

Par l'absurde, si $A(g \cdot \alpha_{i+2}) = A(g \cdot \alpha_i) - 2$, d'après le lemme 1.3.2 on a :

$$I(g \cdot \alpha_{i+2}, g \cdot \alpha_i) \geq 1.$$

□

On en déduit la proposition 1.3.4 :

Démonstration. Par l'absurde : supposons qu'il existe une copie de w^{-1} qui convient, c'est-à-dire un $g \in \Gamma$ tel que le segment $g \cdot w^{-1} = (g \cdot \alpha_n, ..., g \cdot \alpha_{m+1}, g \cdot \alpha_m)$ est dans le B-voisinage de l'axe l et va dans le même sens que w. Quitte à composer g par h^k pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, on peut supposer que $d(\alpha_m, g \cdot \alpha_n) \leq B$. Comme $|w| > 8B + 1$, les lemmes 1.3.5 et 1.3.6 nous permettent de conclure. □

1.3.4 Un quasi-morphisme non trivial explicite sur Γ

On rappelle la construction de Fujiwara [19] de quasi-morphismes sur les groupes agissant sur des espaces hyperboliques. On fixe $p \in X_r$. Soient w et γ deux chemins de X_r. Une *copie de* w est chemin de la forme $g \cdot w$, avec $g \in \Gamma$. On note $|\gamma|_w$ le nombre maximal de copies disjointes de w sur γ, et :

$$c_w(g) := d(p, g \cdot p) - \inf_\gamma(\mathrm{long}(\gamma) - |\gamma|_w),$$

l'infimum étant considéré sur tous les chemins γ entre p et $g \cdot p$. Comme X_r est hyperbolique, on a alors que l'application $q_w : \Gamma \to \mathbb{R}$ définie par $q_w := c_w - c_{w^{-1}}$ est un quasi-morphisme sur Γ (proposition 3.10 de [19]). De plus, le quasi-morphisme homogène $\tilde{q}_w$ défini par $\tilde{q}_w(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{q(g^n)}{n}$ ne dépend pas du point $p \in X_r$ choisi pour construire c_w.

On peut maintenant montrer la proposition suivante (qui n'est pas utile pour montrer que l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux est de dimension infinie) :

Proposition 1.3.7. *Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la géodésique du graphe des rayons définie précédemment et soit w un sous-segment de cette géodésique de longueur supérieure à $10B$, où B est la $(2,4)$-constante de Morse du graphe des rayons. Le quasi-morphisme $\tilde{q}_w$ obtenu par la construction précédente est non trivial.*

Remarque. Comme on connaît la constante d'hyperbolicité du graphe X_∞, on peut en déduire celle du graphe des rayons, et on peut donc calculer la constante B : ainsi le segment w peut être choisi explicitement.

Démonstration. Comme $\tilde{q}_w$ est homogène, il suffit de montrer que ce n'est pas un morphisme pour avoir la non-trivialité. On montre d'une part que $\tilde{q}_w(h)$ est non nul, où $h = t_1t_2t_1$ est l'élément hyperbolique de Γ défini précédemment, et d'autre part que $\tilde{q}_w(t_1) = \tilde{q}_w(t_2) = 0$: ainsi $\tilde{q}_w(t_1t_2t_1) \neq \tilde{q}_w(t_1) + \tilde{q}_w(t_2) + \tilde{q}_w(t_1)$, donc $\tilde{q}_w$ n'est pas un morphisme.

La première affirmation se déduit de la proposition 1.3.4. C'est la stratégie décrite dans Calegari [12], page 74 : si l'on note m la longueur de w et si l'on choisit $p = \alpha_0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $c_w(h^{km}) = k$ et $c_{w^{-1}}(h^{km}) = 0$. En effet, la première égalité est évidente, et pour la deuxième, on utilise le fait que les chemins qui réalisent l'infimum sont des $(2,4)$-géodésiques, d'après le lemme 3.3 de [19]. Ils restent donc dans un B-voisinage de l'axe $(\alpha_k)_k$, d'après le lemme de Morse (1.2.2). Par ailleurs ce voisinage ne contient pas de copie de w^{-1}, d'après la proposition 1.3.4 (voir [12] partie 3.5 pour plus de détails). Ainsi :

$$\tilde{q}_w(h^m) := \lim_{k\to\infty} \frac{c_w(h^{km}) - c_{w^{-1}}(h^{km})}{k} = 1.$$

Donc $\tilde{q}_w$ est non nul.

Montrons que $\tilde{q}_w(t_1) = \tilde{q}_w(t_2) = 0$. On choisit $p = \alpha_0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t_1^k(\alpha_0)$ est une classe d'isotopie de courbe incluse dans l'hémisphère nord. Par suite $d(p, t_1^k \cdot p) = 1$. Ainsi $c_w(t_1^k) = c_{w^{-1}}(t_1^k) = 0$, et donc $\tilde{q}_w(t_1) = 0$. De la même façon, $\tilde{q}_w(t_2) = 0$. Finalement, on a montré que $\tilde{q}_w$ est un quasi-morphisme non trivial. □

Remarque. Pour montrer que $\tilde{q}_w$ n'est pas un morphisme, on peut aussi montrer que Γ *est un groupe parfait*, c'est-à-dire que tout élément de Γ s'écrit comme un produit de commutateurs. On en déduit que le seul morphisme de Γ dans $\mathbb{R}$ est le morphisme trivial. Comme $\tilde{q}_w$ est non identiquement nul, ce n'est pas un morphisme.

L'écriture de tout élément de Γ comme produit de commutateurs se déduit d'un lemme de Calegari [11], que l'on peut énoncer ainsi : *Si $g \in \Gamma$ est tel qu'il existe $x \in X_r$ tel que $d(x, gx) = 1$, alors g est le produit d'au plus deux commutateurs.*

Soit $g \in \Gamma$ et soit $x \in X_r$ quelconque. On considère un chemin dans X_r entre x et gx, que l'on note $(x = x_0, x_1, ..., x_n = gx)$. Comme Γ agit transitivement sur X_r, pour tout $1 \leq i \leq n-1$ il existe $g_i \in \Gamma$ qui envoie x_{i+1} sur x_i, et qui s'écrit donc comme produit d'au plus deux commutateurs. On a alors que $g_1 ... g_{n-1} g$ envoie x sur x_1, avec $d(x, x_1) = 1$. Ainsi cet élément s'écrit aussi comme produit d'au plus deux commutateurs. Finalement g s'écrit comme produit de commutateurs.

1.3.5 Dimension de l'espace des classes de quasi-morphismes non triviaux

Théorème 1.3.8. *L'espace $\tilde{Q}(\Gamma)$ des classes de quasi-morphismes non triviaux sur Γ est de dimension infinie.*

Démonstration. On utilise le théorème 1 de Bestvina & Fujiwara [7]. Comme Γ agit par isométries sur le graphe des rayons qui est hyperbolique, si on trouve deux éléments hyperboliques $h_1, h_2 \in \Gamma$ agissant par translation sur des axes l_1 et l_2 respectivement, tels que l_1 et l_2 sont orientés dans le sens de cette action, et qui vérifient les deux propriétés suivantes, alors le théorème est démontré (voir [7]). Les deux propriétés à vérifier sont :

1. « h_1 et h_2 sont indépendants » : la distance entre un demi-axe quelconque de l_1 et un demi-axe quelconque de l_2 est non bornée.
2. « $h_1 \nsim h_2$ » : il existe une constante C telle que pour tout segment w de l_2 de longueur supérieure à C, pour tout $g \in \Gamma$, $g \cdot w$ sort du B-voisinage de l_1 ou bien est orienté dans le sens inverse de l_1.

Trouvons donc deux éléments hyperboliques qui vérifient ces propriétés. On note $h_1 \in \Gamma$ l'élément h qui agit par translation sur l'axe $(\alpha_k)_k$ défini précédemment. Soit $\phi \in \Gamma$ la classe de la rotation d'angle π autour de l'infini. On suppose que K est symétriquement disposé autour de ∞, de sorte que ϕ préserve K et envoie chaque sous-ensemble de Cantor K_i sur K_{-i-1}. Soit enfin $h_2 := \phi h_1^{-1} \phi^{-1}$. Alors $h_1 \nsim h_2$ d'après la proposition 1.3.4 et la remarque qui la suit (la constante $C := 10B$ convient, où B est la constante de Morse). D'autre part, on va montrer que h_1 et h_2 sont indépendants, ce qui conclura la preuve.

On a montré dans le corollaire 1.1.5 que pour tout $n \geq 2$, tout rayon à distance inférieure ou égale à $(n-2)$ de $h_1^n(\alpha_0)$ commence par $\mathring{\alpha}_2$. De même tout rayon à distance inférieure ou égale à $(n-1)$ de $h_1^{n-1}(\alpha_0)$ commence par $\mathring{\alpha}_1$.

On a un phénomène similaire pour h_2, h_2^{-1} et h_1^{-1}. On note σ la classe d'isotopie de la symétrie axiale par rapport à l'équateur. En particulier, σ est égale à son inverse, fixe l'ensemble de Cantor K et n'est pas un élément de Γ car ne préserve pas l'orientation. De plus, comme ϕ est aussi égale à son inverse, on a :

$$h_2 = \phi h_1^{-1} \phi^{-1} = \sigma h_1 \sigma^{-1}.$$

$$h_2^{-1} = \phi h_1 \phi^{-1}.$$

$$h_1^{-1} = \sigma \phi h_1 (\sigma \phi)^{-1}.$$

D'autre part, on a $\phi\alpha_{-1} = \sigma\alpha_0$ (voir figure 1.16). Comme $\alpha_n = h_1^n(\alpha_0)$, on en déduit, d'après la troisième égalité qui précède, que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\phi\alpha_{-k-1} = \sigma\alpha_k.$$

Si l'on étend l'écriture en suites complètes aux rayons qui commencent dans l'hémisphère nord, en ajoutant par exemple nord ou sud dans l'écriture en segments du rayon, on peut coder les $\phi\alpha_k$. On en déduit alors, en utilisant le corollaire 1.1.5 et les égalités qui précèdent, que (voir figure 1.16) :

- Pour tout $n \geq 2$, tout rayon à distance inférieure ou égale à $n-2$ de $h_2^n(\phi\alpha_0) = h_2^n(\sigma\alpha_{-1}) = \sigma h_1^{n-1}(\alpha_0)$ commence par $\phi\mathring{\alpha}_{-2} = \sigma\mathring{\alpha}_1$;
- Pour tout $n \geq 2$, tout rayon à distance inférieure ou égale à $n-2$ de $h_2^{-n}(\phi\alpha_0) = \phi(h_1^n\alpha_0)$ commence par $\phi\mathring{\alpha}_2$;
- Pour tout $n \geq 2$, tout rayon à distance inférieure ou égale à $n-2$ de $h_1^{-n}(\alpha_0) = \sigma\phi h_1^n \phi\sigma\alpha_0 = \sigma\phi h_1^n \alpha_{-1}$ commence par $\mathring{\alpha}_{-2} = \sigma\phi\mathring{\alpha}_1$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, tous les éléments des boules de rayon $(n-2)$ et de centres respectifs $h_1^n(\alpha_0)$, $h_2^n(\phi\alpha_0)$, $h_2^{-n}(\phi\alpha_0)$ et $h_1^{-n}(\alpha_0)$ commencent respectivement par $\mathring{\alpha}_2$, $\phi\mathring{\alpha}_{-2}$, $\phi\mathring{\alpha}_2$ et $\mathring{\alpha}_{-2}$. Or $\mathring{\alpha}_2$, $\phi\mathring{\alpha}_{-2}$, $\phi\mathring{\alpha}_2$ et $\mathring{\alpha}_{-2}$ n'ont deux à deux pas de représentants disjoints : ces quatre boules sont donc disjointes (et même à distance supérieure à 1). Ainsi les axes l_1 et l_2 de h_1 et h_2 sont tels que la distance entre deux demi-axes est non bornée. $\square$

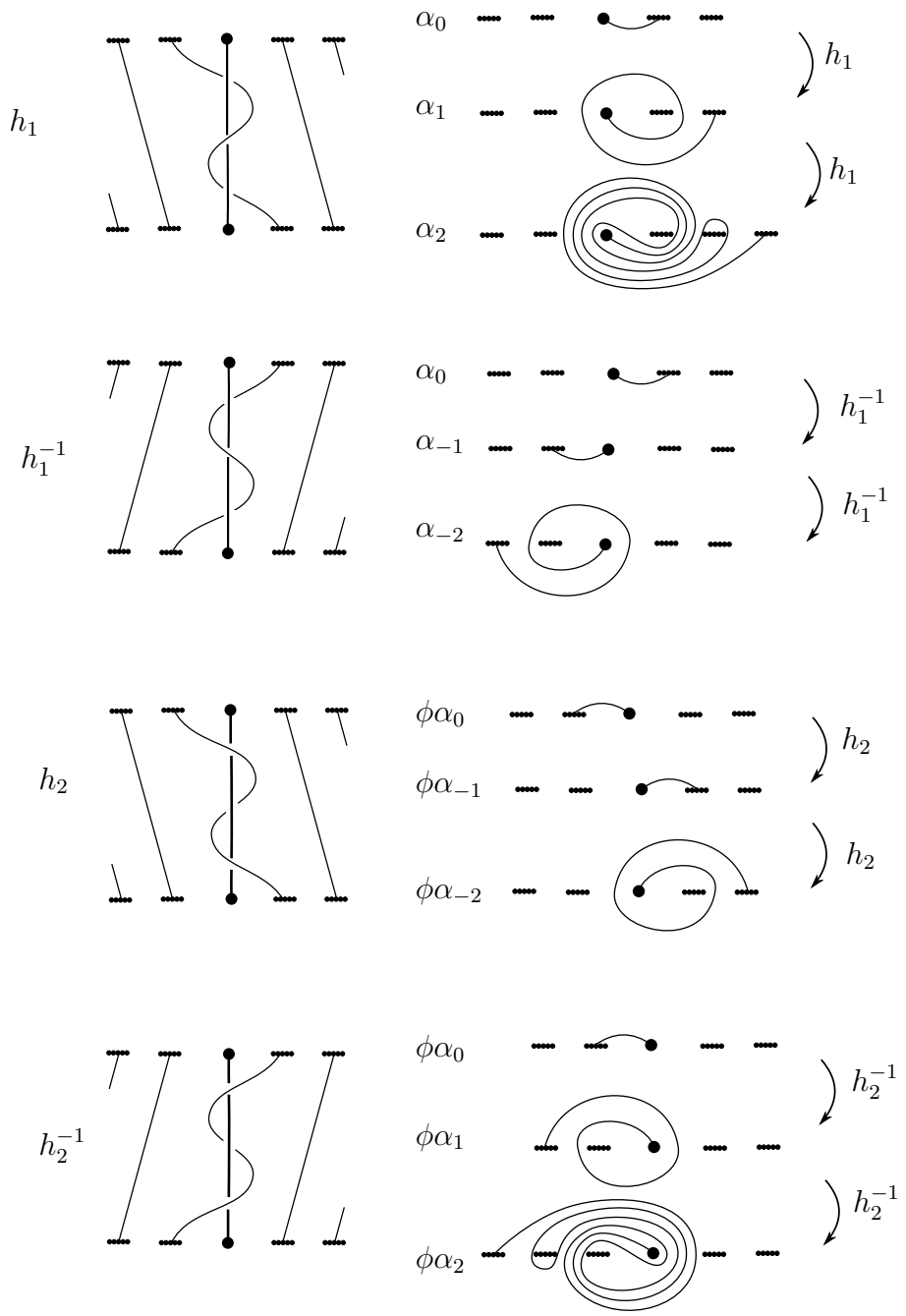

FIGURE 1.16 – h_1, h_2, leurs inverses et leur action sur quelques rayons

Remarque. Plus précisément, on a que pour tous $|n|, |m| \geq 2$ (voir figure 1.17) :

$$d(h_2^n(\phi\alpha_0), h_1^m(\alpha_0)) \geq |n| + |m| - 1.$$

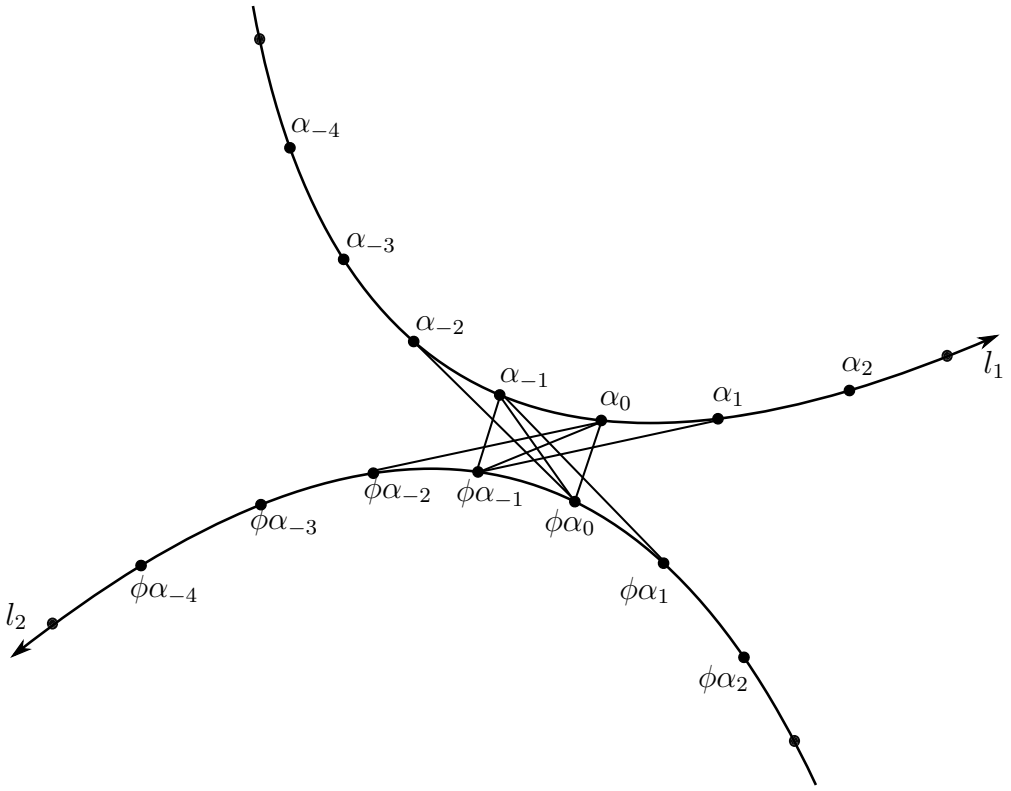

FIGURE 1.17 – Axes de h_1 et h_2 : ce graphe est isométriquement plongé dans X_r

1.4 Exemple d'un élément hyperbolique de scl nulle

Danny Calegari a montré que les éléments de Γ ayant une orbite bornée sur le graphe des rayons sont de *scl* nulle (voir [11]). Montrons que la réciproque n'est pas vraie.

Proposition 1.4.1. *Il existe un élément $g \in \Gamma$ hyperbolique de scl nulle.*

Démonstration. Soient h_1 et h_2 les deux éléments de Γ définis dans la preuve du théorème 1.3.8 : h_1 est l'élément h défini plus tôt, et $h_2 = \phi h_1^{-1}\phi^{-1}$, où ϕ est la classe de la rotation d'angle π autour l'infini. Soit $g := h_2 h_1$ (voir figure 1.18). Alors g est conjugué à son inverse (car $\phi = \phi^{-1}$), donc $scl(g) = 0$. Montrons que de plus, g est hyperbolique. On construit pour cela un demi-axe géodésique $(\gamma_k)_k$ du graphe des rayons, sur lequel g agit par translation (comme on l'avait fait avec $(\alpha_k)_k$ pour montrer que h est hyperbolique).

Définition de $(\gamma_k)_k$. La suite $(\gamma_k)_k$ se défini de manière similaire à $(\alpha_k)_k$, à ceci près que pour définir α_{k+1} à partir de α_k on longeait la courbe et on contournait

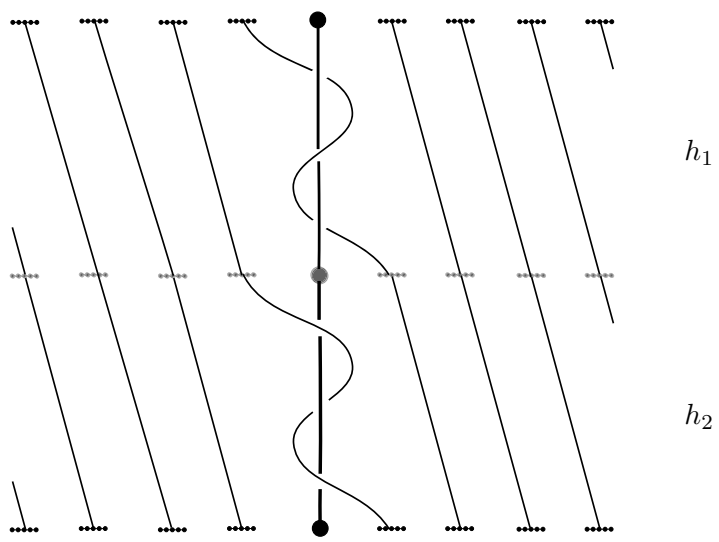

FIGURE 1.18 – L'élément $g := h_2 h_1$.

le point d'attachement de α_k toujours par la droite, mais pour $(\gamma_k)_k$ on contourne le point d'attachement de la courbe précédente alternativement une fois par la droite, une fois par la gauche (voir figures 1.19 et 1.20).

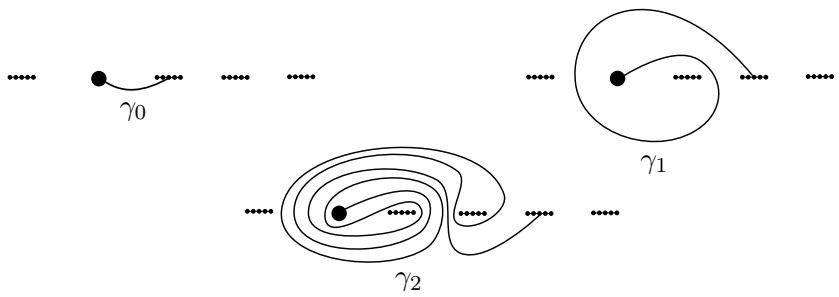

FIGURE 1.19 – Rayons γ_0, γ_1 et γ_2.

Plus précisément, on définit la suite de rayons $(\gamma_k)_{k\geq 0}$ par récurrence de la manière suivante :

• $\gamma_0 := \alpha_0$ est la classe d'isotopie du segment s_0 ayant pour extrémités ∞ et p_0.

• Pour tout $k \geq 1$, k impair (*contournement du point d'attachement par la droite*) : pour obtenir γ_{k+1}, on part de ∞, on longe γ_k jusqu'à son point d'attachement p_k (dans un voisinage tubulaire de γ_k), on contourne ce point *par la droite* en traversant les segments voisins, *d'abord* s_{k+1} *puis* s_k, on longe à nouveau γ_k dans un voisinage tubulaire, on contourne ∞ en traversant s_0 puis s_{-1}, on longe

une dernière fois γ_k dans un voisinage tubulaire jusqu'à son point d'attachement et on va s'attacher au point p_{k+1} sans traverser l'équateur.

• Pour tout $k \geq 1$, k pair (*contournement du point d'attachement par la gauche*) : pour obtenir γ_{k+1}, on part de ∞, on longe γ_k jusqu'à son point d'attachement p_k (dans un voisinage tubulaire de γ_k), on contourne ce point *par la gauche* en traversant les segments voisins, *d'abord* s_k *puis* s_{k+1}, on longe à nouveau γ_k dans un voisinage tubulaire, on contourne ∞ en traversant s_{-1} puis s_0, on longe une dernière fois γ_k dans un voisinage tubulaire jusqu'à son point d'attachement et on va s'attacher au point p_{k+1} sans traverser l'équateur.

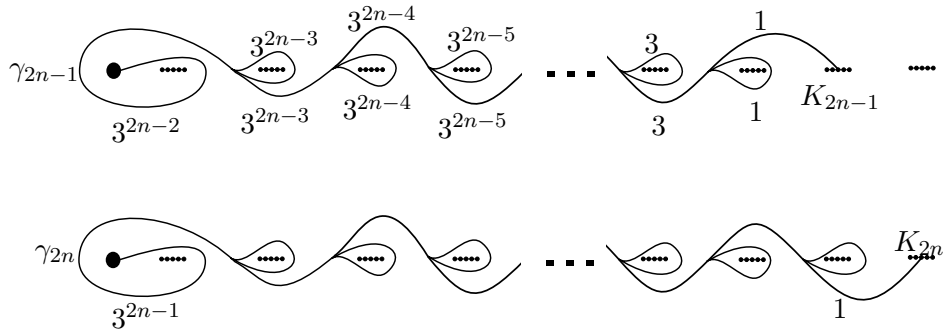

FIGURE 1.20 – Graphes représentant γ_k dans le cas impair (en haut) et dans le cas k pair (en bas).

Vu les similarités de construction entre $(\alpha_k)_k$ et $(\gamma_k)_k$, on peut adapter les mêmes arguments que ceux utilisées dans la section 1.1 : en particulier le lemme 1.1.4, puis son corollaire 1.1.5 et la proposition 1.1.7. On en déduit que le demi-axe $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géodésique.

L'élément g agit par translation sur $(\gamma_k)_k$. On voit par récurrence en utilisant les graphes représentant les rayons (comme on l'avait fait pour montrer que h est hyperbolique) que $g^n(\gamma_0) = \gamma_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, voir la figure 1.21 pour le cas $n = 0$, la figure 1.22 pour le cas $n = 1$ et la figure 1.23 pour le cas général. $\square$

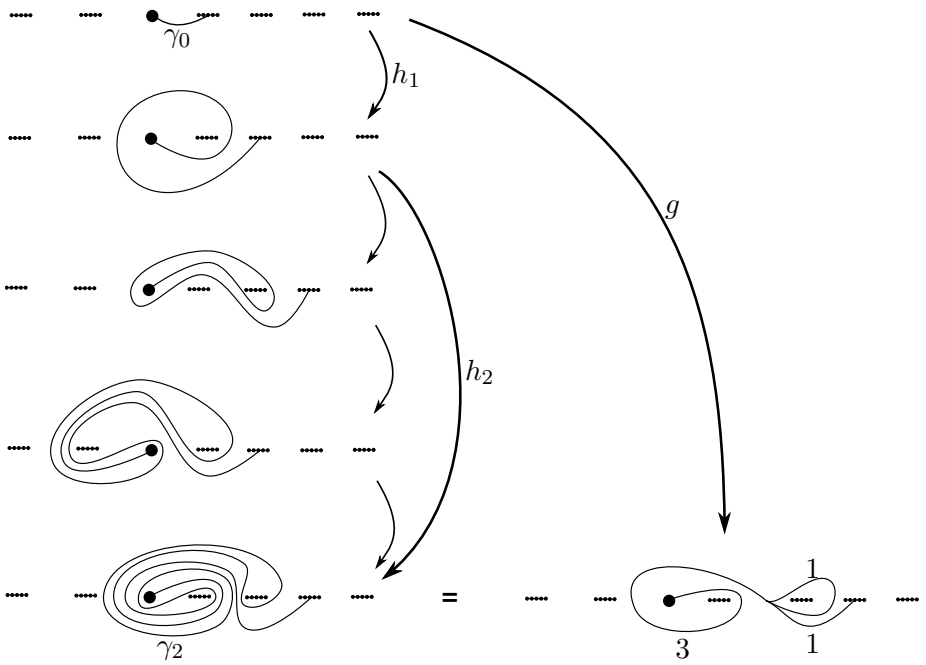

FIGURE 1.21 – Graphe représentant l'image de γ_0 par g, où l'on a décomposé l'action de h_2 en trois parties, comme on l'avait fait plus tôt pour h. Les deux graphes du bas représentent le même rayon, à savoir $g(\gamma_0) = \gamma_2$.

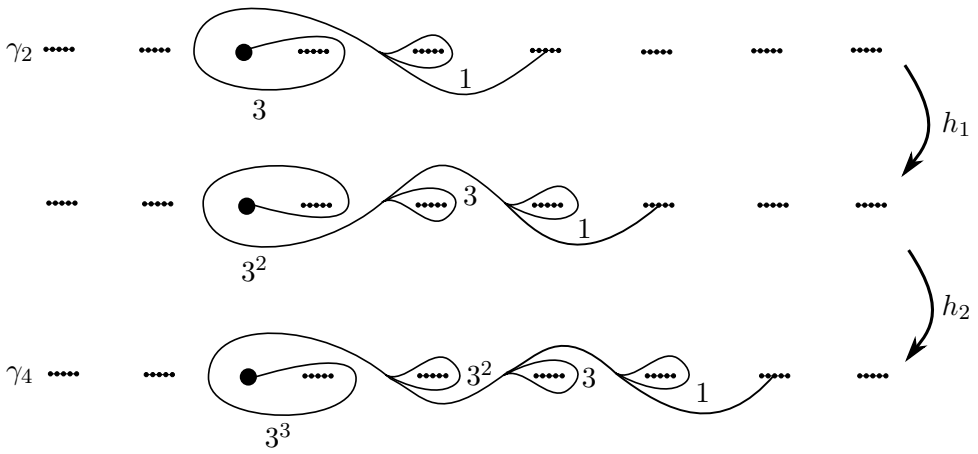

FIGURE 1.22 – Action de g sur γ_2.

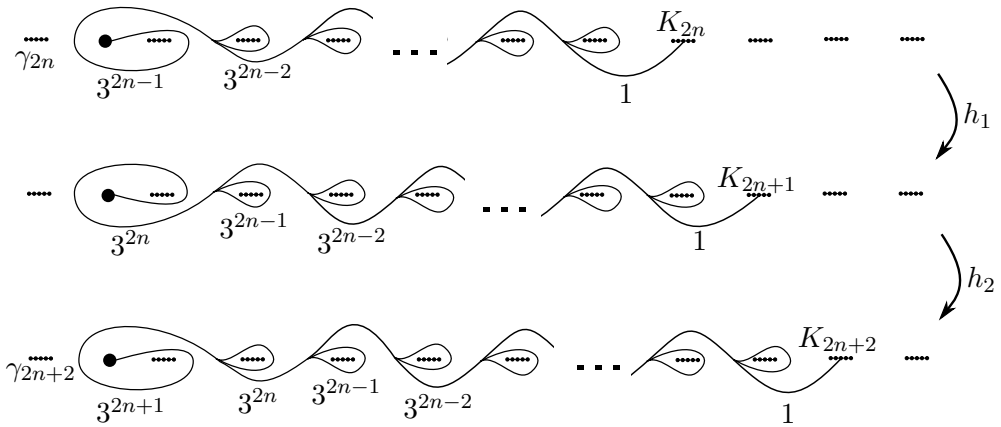

FIGURE 1.23 – Action de g sur γ_{2n} : $g(\gamma_{2n}) = \gamma_{2n+2}$.

Chapter 2

Conjugacy invariant for Brouwer mapping classes

2.1 First tools of homotopy Brouwer theory

We recall the following definitions and properties (see [26], [36] and [35]). Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class, i.e. the isotopy class of a Brouwer homeomorphism h relatively to a finite set of orbits $\mathcal{O}$. Denote by r the number of orbits of $\mathcal{O}$. We choose a complete hyperbolic metric of the first kind on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Even if not explicitly specified, we will always consider complete hyperbolic metrics *of the first kind* on surfaces, i.e. such that the surface is isomorphic to $\mathbb{H}^2/\Gamma$ where Γ is of the first kind (see Matsumoto [38] for details).

2.1.1 Examples: flows and product with a free half twist

Flows. For abbreviation, we say that a homeomorphism f is a flow if it is the time one map of a flow. If a Brouwer homeomorphism f is isotopic to a flow without fixed points relatively to $\mathcal{O}$, then we say that $[f;\mathcal{O}]$ is a *flow class*.

Example A. The first example is the flow class of figure 2.1. In this example, we choose 5 streamlines of a flow f and get a Brouwer mapping class relative to 5 orbits: $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ and $\mathcal{O}_5$. We denote by $\mathcal{O}$ their union.

Free half twist. We call *half twist* any homeomorphism which is:

- supported in a topological disk D of $\mathbb{R}^2$ which contains exactly 2 points of $\mathcal{O}$, denoted by x and y;

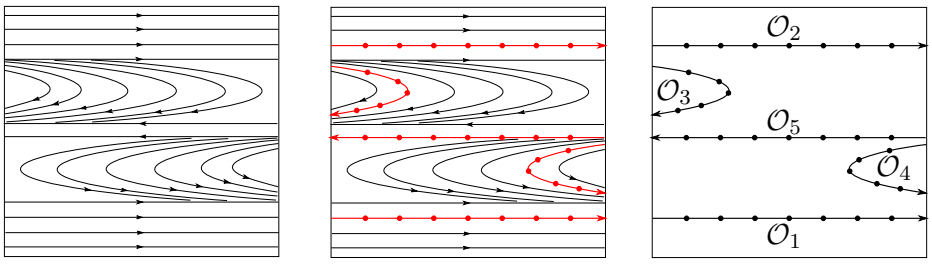

Figure 2.1: Example of a Brouwer mapping class $[f;\mathcal{O}]$ relatively to 5 orbits.

– isotopic to a homeomorphism supported in D which is a rotation of a half turn on a disk included in D, which exchanges x and y.

If h is a Brouwer homeomorphism, we call *h-free half twist* every half twist μ supported in a h-free disk, i.e. in a disk D such that $h^n(D)\cap D=\emptyset$ for every non zero $n\in\mathbb{Z}$. Note that μh is a Brouwer homeomorphism.

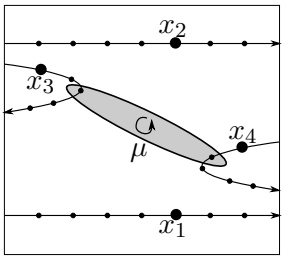

Figure 2.2: Example B: the Brouwer mapping class $[g;\mathcal{O}']$.

Example B. Our second example is the product of f with the free half twist μ of figure 2.2, which exchanges the two points of the disk which are in $\mathcal{O}$. We denote by g the product μf. For $i=1,2,3,4$, we choose x_i on $\mathcal{O}_i$ as in figure 2.2 and denote by $\mathcal{O}'_i$ the g-orbit of x_i, i.e. $\{g^n(x_i)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. In particular, we have $\mathcal{O}_1=\mathcal{O}'_1$ and $\mathcal{O}_2=\mathcal{O}'_2$. We denote by $\mathcal{O}'$ the union of the $\mathcal{O}'_i$. Note that $\mathcal{O}'$ coincide with $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2\cup\mathcal{O}_3\cup\mathcal{O}_4$. We consider the Brouwer mapping class $[g;\mathcal{O}']$.

2.1.2 Arcs and topological lines in $\mathbb{R}^2-\mathcal{O}$.

We call *arc* an embedding α of $]0,1[$ in $\mathbb{R}^2-\mathcal{O}$ such that it can be continuously extending to 0 and 1 with $\alpha(0),\alpha(1)\in\mathcal{O}$. By abuse of notations, we will call again arc and denote by α the image of the embedding $\alpha(]0,1[)$. The extensions $\alpha(0)$ and $\alpha(1)$ are said to be the *endpoints* of α. A *topological line* is an embedding

α of $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ which is proper in $\mathbb{R}^2$, i.e. an embedding α such that for every compact K of the plane, there exists $t_0 \in \mathbb{R}$ such that if $|t| > |t_0|$, then $\alpha(t) \notin K$. Again, by abuse of notations, we call (topological) line and denote by α the image of $\mathbb{R}$ by α in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$.

2.1.3 Isotopy classes of arcs and lines.

We say that two arcs (respectively two lines) α and β are isotopic relatively to $\mathcal{O}$ if there exists a continuous and proper application $H :]0,1[\times[0,1] \to \mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that:

- $H(\cdot, 0) = \alpha(\cdot)$ and $H(\cdot, 1) = \beta(\cdot)$;
- If α and β are arcs, H can be continuously extending to $[0,1] \times [0,1]$ in such a way that the endpoints coincide, i.e. for every $t \in]0,1[$, we have: $\alpha(0) = H(0,t) = \beta(0)$ and $\alpha(1) = H(1,t) = \beta(1)$.

If α is an arc or a line of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$, we denote by $\alpha_\#$ the geodesic representative in the isotopy class of α relatively to $\mathcal{O}$. It is known that this geodesic representative is unique and that if α and β are two arcs or lines, then $\alpha_\#$ and $\beta_\#$ are in minimal position. In particular, if α and β are homotopically disjoint (i.e. they have disjoint representatives in their isotopy classes), then $\alpha_\#$ and $\beta_\#$ are disjoint.

2.1.4 Straightening principle.

We will need the following lemma, which is the lemma 3.5 of [26] (see also lemma 1.4, corollary 1.5 and lemma 3.2 of [35]):

Lemma 2.1.1 (Straightening principle)**.** Let $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ be two locally finite families of lines and arcs of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that:

- The elements of $\mathcal{F}_1$ (respectively $\mathcal{F}_2$) are mutually homotopically disjoint;
- If $\alpha \in \mathcal{F}_1$ and $\beta \in \mathcal{F}_2$, then α and β are in minimal position.

Then the following statements hold.

1. There exists a homeomorphism u isotopic to Id relatively to $\mathcal{O}$ such that for every element γ in $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, $u(\gamma) = \gamma_\#$, where $\gamma_\#$ is the geodesic representative of the isotopy class of γ;
2. If h is an orientation preserving homeomorphism of the plane such that $h(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, then there exists $h' \in [h; \mathcal{O}]$ such that for every α in $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, we have $h'(\alpha_\#) = h(\alpha)_\#$.

Remark 2.1.1. – We get 2 by applying 1 to $h(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$;
– Note that the h' of 2 may not be a Brouwer homeomorphism.

2.1.5 Homotopy translation arc.

A *homotopy translation arc* for $[h; \mathcal{O}]$ is an arc α such that:
– There exists $x \in \mathcal{O}$ such that $\alpha(0) = x$ and $\alpha(1) = h(x)$;
– For every $n \in \mathbb{Z}$, $h^n(\alpha)$ is homotopically disjoint from α.

In particular, every translation arc for h with endpoints in $\mathcal{O}$ is a homotopy translation arc for $[h; \mathcal{O}]$. In general, there exist homeomorphisms h and arcs which are not homotopic to translation arc for h, but which are homotopy translation arcs for $[h; \mathcal{O}]$.

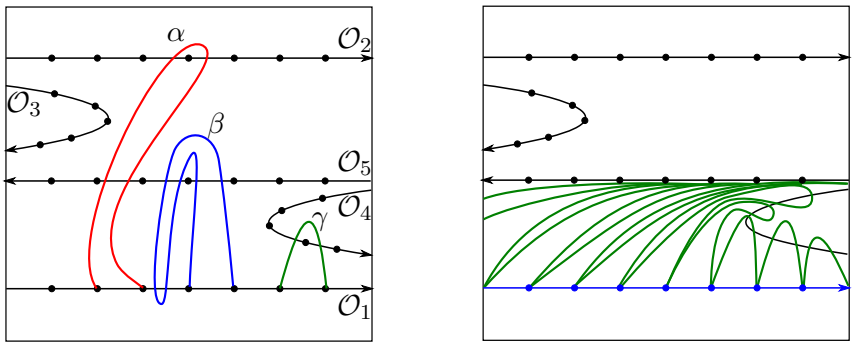

Figure 2.3: Examples of homotopy translation arcs and homotopy streamlines.

Example A: Figure 2.3 (left) shows different homotopy translation arcs for example A: the arcs β and γ are homotopy translation arcs for $[f; \mathcal{O}]$. The arc α is not a homotopy translation arc for $[f; \mathcal{O}]$. Note that however if we forget the orbit $\mathcal{O}_5$, α is a homotopy translation arc for $[h; \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4]$.

2.1.6 Half homotopy streamlines.

If α is a homotopy translation arc for $[h; \mathcal{O}]$, we define the *homotopy streamline*:

$$T(\alpha, h, \mathcal{O}) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (h^n(\alpha([0, 1[)))_{\#}.$$

Since α is a homotopy translation arc, the geodesic iterates are mutually disjoint, hence $T(\alpha, h, \mathcal{O})$ is an embedding of $\mathbb{R}$, which can eventually be non proper.

We also define the *backward (respectively forward) homotopy streamline* $T^-(\alpha, h, \mathcal{O})$ (respectively $T^+(\alpha, h, \mathcal{O})$) by:

$$T^-(\alpha, h, \mathcal{O}) := \bigcup_{n \leq 0} (h^n(\alpha([0,1[)))_{\#}.$$

$$T^+(\alpha, h, \mathcal{O}) := \bigcup_{n \geq 0} (h^n(\alpha([0,1[)))_{\#}.$$

Example A: The streamline $T(\beta, f, \mathcal{O})$ of example A is proper and coincides with the horizontal streamline which contains $\mathcal{O}_1$. The streamline $T(\gamma, h, \mathcal{O})$ is drawn on figure 2.3. It is not proper, but $T^+(\gamma, h, \mathcal{O})$ is proper.

2.1.7 Backward proper and forward proper arcs.

Let α be a homotopy translation arc. If the backward homotopy streamline $T^-(\alpha, h, \mathcal{O})$ is the image of $\mathbb{R}^-$ under a proper embedding, i.e. if for every compact K of the plane there exists $n_0 \leq 0$ such that for every $n \leq n_0$, $(h^n(\alpha))_{\#}$ does not intersect K, then α is said to be a *backward proper arc* for $[h; \mathcal{O}]$. Similarly, if the forward homotopy streamline $T^+(\alpha, h, \mathcal{O})$ is proper, then α is said to be a *forward proper arc* for $[h; \mathcal{O}]$.

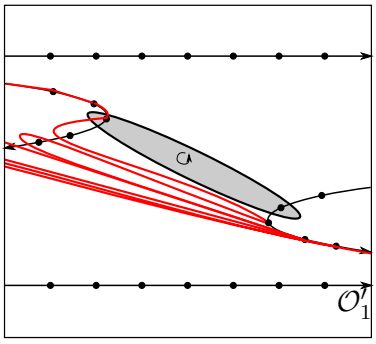

Figure 2.4: Example of a homotopy streamline for $[g; \mathcal{O}']$.

Example A: In the example of figure 2.3, β is a backward proper and forward proper arc, and γ is a forward proper arc but it is not a backward proper arc. Note that if h is a flow, then every homotopy translation arc which lies on a flow streamline is backward proper and forward proper.

Example B: In figure 2.4, we draw iterates of an arc lying on a streamline of f which intersects the support of the free half twist μ. We see that this arc is backward proper but not forward proper (the iterates are "stuck" by the orbit $\mathcal{O}'_1$).

Translation. If a Brouwer homeomorphism f is conjugate to a translation relatively to $\mathcal{O}$, then we say that $[f;\mathcal{O}]$ is a *translation class*. In this case, every homotopy translation arc for $[f;\mathcal{O}]$ is backward proper and forward proper.

2.1.8 Nice family $(\alpha_i^{\pm})_{1\leq i\leq r}$.

A *nice family* $(\alpha_i^{\pm})_{1\leq i\leq r}$ associated to $[h;\mathcal{O}]$ is a family of homotopy translation arcs for $[h;\mathcal{O}]$ such that:

- For every $1 \leq i \leq r$:
  - α_i^- is a backward proper arc;
  - α_i^+ is a forward proper arc;
  - α_i^- and α_i^+ have the same endpoints, lying in the orbit $\mathcal{O}_i$;
- The backward proper half streamlines $T^-(\alpha_i^-, h, \mathcal{O})$'s are mutually disjoint;
- The forward proper half streamlines $T^+(\alpha_i^+, h, \mathcal{O})$'s are mutually disjoint.

Note that if $(\alpha_i^{\pm})_i$ is a nice family for a Brouwer mapping class $[h;\mathcal{O}]$, then the previous proper half streamlines $T^{\pm}(\alpha_i^{\pm}, h, \mathcal{O})$'s are mutually disjoint outside a topological disk of the plane.

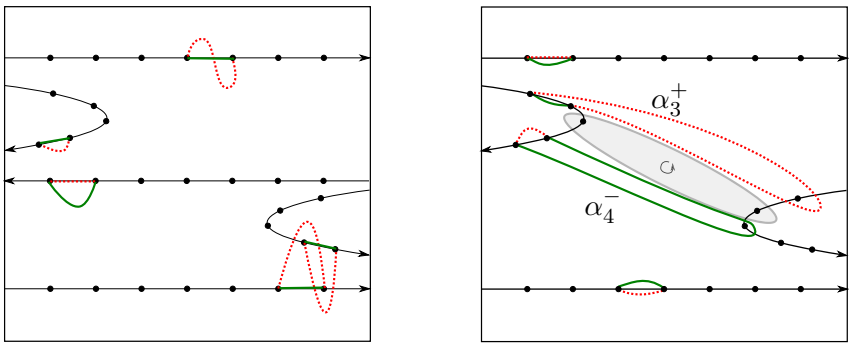

Figure 2.5: Example of nice families for $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$.

Examples: Figure 2.5 give an example of a nice family for $[f;\mathcal{O}]$ with some arcs not homotopic to arcs included in streamlines, and an example of a nice family for $[g;\mathcal{O}']$. In particular, α_3^+ (respectively α_4^-) is constructed with an iteration by g^{-1} (respectively g) of an arc lying on the f-streamline of $\mathcal{O}_4$ after the support

of μ (respectively of an arc lying on the f-streamline of $\mathcal{O}_3$ before the support of μ).

The following theorem of Handel [26] allows us to consider a nice family for every Brouwer mapping class in the following sections.

Theorem 2.1.2 (Handel [26])**.** For every $[h;\mathcal{O}]$, there exists a nice family associated to $[h;\mathcal{O}]$.

Remark 2.1.2. For a statement closer to this one, see [35], proposition 3.1. Here we describe a way to deduce our statement from proposition 3.1 of [35], where the statement is given for *generalized homotopy half streamlines*. As seen in figure 2.6, in any open neighborhood of a generalized homotopy half streamline there exist disjoint homotopy streamlines whose union contains every points of $\mathcal{O}$ included in the generalized homotopy half streamline. It follows that the result is still true with the statement given here (i.e. when we replace disjoint generalized homotopy half streamlines by (non generalized) disjoint homotopy half streamlines).

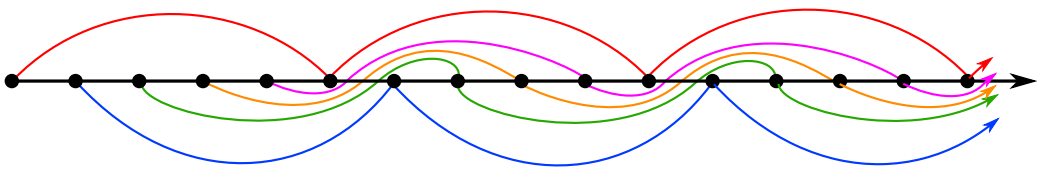

Figure 2.6: Finding disjoint homotopy half streamlines in a neighborhood of a generalized homotopy half streamline.

2.1.9 Reducing line.

We say that a line of $\mathbb{R}^2$ *splits* a given set of points X included in $\mathbb{R}^2 - \Delta$ if both connected components of $\mathbb{R}^2 - \Delta$ intersect X.

A *reducing line* Δ for $[h;\mathcal{O}]$ is a line in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that $h(\Delta)$ is properly isotopic to Δ relatively to $\mathcal{O}$ and such that Δ splits $\mathcal{O}$. Note that all the elements of a same orbit of $\mathcal{O}$ are included in the same connected component of $\mathbb{R}^2 - \Delta$. Indeed, according to the straightening principle 2.1.1, there exists $h' \in [h;\mathcal{O}]$ such that $h'(\Delta) = \Delta$. Figure 2.7 gives examples.

We will need the following Handel's theorem. See [35], proposition 3.3 for this formulation.

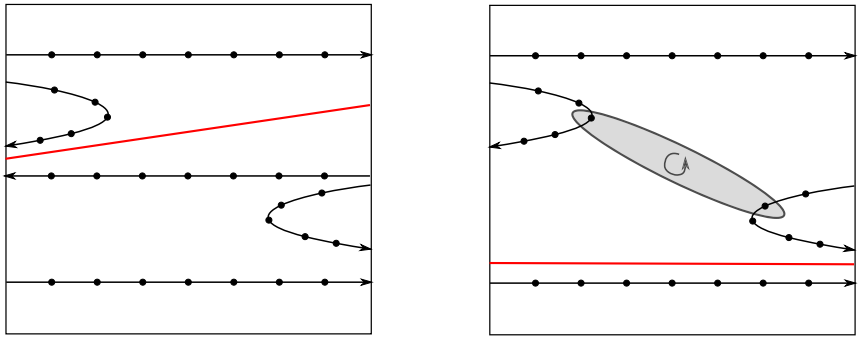

Figure 2.7: Examples of reducing lines for $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$.

Theorem 2.1.3 (Handel [26])**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to more than one orbits. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family for $[h;\mathcal{O}]$. There exists a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$ which is disjoint from every backward proper half streamline $T^-(\alpha_i^-, h, \mathcal{O})$.

2.1.10 Homotopy Brouwer line.

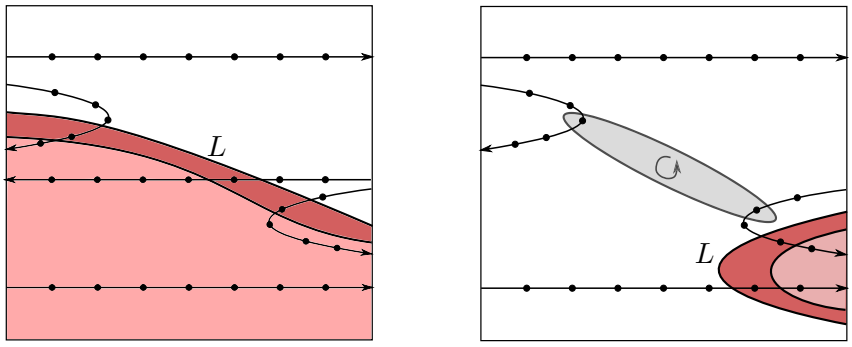

Figure 2.8: Examples of Brouwer lines for $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$.

A *homotopy Brouwer line* L for $[h;\mathcal{O}]$ is a topological line in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that:

- L is homotopically disjoint from $h(L)$;
- L is not isotopic to $h(L)$;
- If we denote by V the connected components of $\mathbb{R}^2 - L_\#$ containing $h(L)_\#$, then we have $h(V)_\# \subset V$, where $h(V)_\#$ is the connected component of $\mathbb{R}^2 - h(L)_\#$ which does not contain $L_\#$.

This definition does not depend on the chosen metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Figure 2.8 gives examples of Brouwer lines for $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$.

2.2 Description of the results

Here we give the main definitions and statements of the paper. Proofs will be given in the following sections.

2.2.1 Adjacency areas, diagrams and special nice families (Section 2.3)

Cyclic order of a nice family

Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family for $[h;\mathcal{O}]$. There is a natural cyclic order on the elements of the nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ given by the order of the half homotopy streamlines generated by the $\alpha_i^{\pm}$ at infinity: if we choose a big enough topological circle which intersects each half streamline only once, with transverse intersections, the order on the half streamlines is given by the order of these intersections (which is independent of the choice of the circle). In the following, we will call this cyclic order the *cyclic order of the nice family.*

Adjacency

If several forward proper arcs, respectively several backward proper arcs, are consecutive for the cyclic order of the nice family, then they are said to be *adjacent.* A sub-family of the nice family consisting only of consecutive arcs of the same type (all backwards or all forwards) is said to be a *sub-family of adjacency.* If two orbits have forward proper arcs (respectively backward proper arcs) in the same nice family which are adjacent, they are said to be *forward adjacent* (respectively *backward adjacent*). The following proposition is essentially due to Handel [26] (a proof will be given in section 2.3).

Proposition 2.2.1. *Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. If $(\alpha_i^{\pm})_i$ and $(\beta_i^{\pm})_i$ are two nice families for this class, then they have the same cyclic order up to permutation of arcs of $(\beta_i^{\pm})_i$ inside the same sub-families of adjacency.*

Diagram associated to a Brouwer mapping class

Using proposition 2.2.1, we can associate a diagram to each Brouwer mapping class (see figures 2.9 and 2.10 for examples):

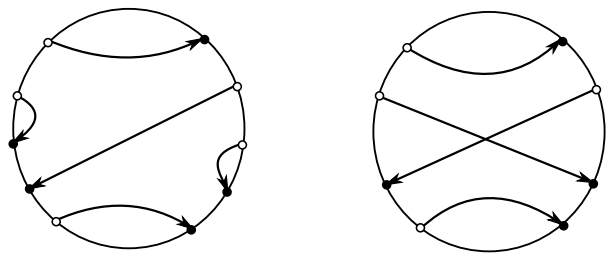

Figure 2.9: Diagrams associated to $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$ (examples A and B of section 2.1).

1. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to r orbits. Choose a nice family $(\alpha_i^{\pm})_{1\leq i\leq r}$.
2. On the boundary component of a disk, choose one point for each arc of $(\alpha_i^{\pm})_i$ in such a way that the $2r$ chosen points respect the cyclic order of $(\alpha_i^{\pm})_i$.
3. For every i, draw an arrow from the point representing α_i^- to the point representing α_i^+. Label this arrow with i.
4. Exchange the points in a same sub-family of adjacency if necessary to eliminate as many crossings as possible between the arrows.

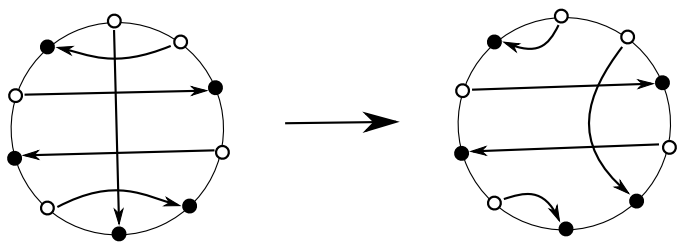

Figure 2.10: An example of step 4 (this is example 2.9 of Handel [26]).

We identify two diagrams if they have the same combinatorics.

Proposition 2.2.2. *The diagram associated to a Brouwer mapping class is a conjugacy invariant: if two Brouwer mapping classes are conjugated, then they have the same diagram.*

We say that a diagram $\mathcal{D}$ is *determinant* if, up to conjugacy, there exists only one Brouwer mapping class whose associated diagram is $\mathcal{D}$. It is a natural question to ask which diagrams are determinant.

For Brouwer mapping classes relatively to one, two and three orbits, the diagram is a total invariant: every diagram with one, two or three arrows is determinant (see [26] for one and two orbits and [35] for three orbits).

However, for Brouwer mapping classes relatively to more than 3 orbits, the diagram is not a total invariant. For example, consider the flow f and the f-free half twist μ of examples A and B. The Brouwer mapping classes $[\mu^2 f; \mathcal{O}']$ and $[f; \mathcal{O}']$ have the same diagram but are not conjugated (we will prove later that they are not conjugated). In section 2.5, we will give combinatorial conditions on diagrams to prove that some of them are determinant. In section 2.7 we will describe all the determinant diagrams for Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits.

Special nice families

A *reducing set* is a union of mutually disjoint and non isotopic reducing lines. Any connected component of the complement of a reducing set is said to be a *stable area.* In particular, every stable area for $[h; \mathcal{O}]$ is isotopic to its image by h relatively to $\mathcal{O}$. If the reducing lines of a given reducing set $\mathcal{R}$ are geodesic, then according to the straightening principle 2.1.1, there exists $h' \in [h; \mathcal{O}]$ such that every stable area Z of the complement of $\mathcal{R}$ is such that $h'(Z) = Z$. The following proposition will be proved in section 2.3.3.

Proposition 2.2.3. *Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let $(\Delta^k)_k$ be a reducing set. There exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h; \mathcal{O}]$ such that for every k, for every i, α_i^- and α_i^+ are homotopically disjoint from Δ^k.*

2.2.2 Walls for a Brouwer mapping class (section 2.4)

We define a canonical reducing set (the walls) and prove that this set splits the plane into three types of stable areas: stable areas disjoint from $\mathcal{O}$, translation areas and irreducible areas. In the next section, we will give combinatorial conditions for the existence of irreducible areas.

Translation areas

Henceforth, if Z is a stable area of $[h; \mathcal{O}]$, whenever we say "orbits of Z", it means "orbits of $\mathcal{O}$ contained in Z".

Definition (Translation area)**.** Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. We say that a stable area Z of $[h; \mathcal{O}]$ is a *translation area* if all the orbits of Z are backward adjacent and forward adjacent for $[h; \mathcal{O}]$.

Moreover, a translation area Z is said to be *maximal* if there exists no translation area Z' non isotopic to Z and such that $Z \subset Z'$.

Note that every translation area is included in a maximal translation area.

Remark 2.2.1. The orbits of a same translation area for a Brouwer mapping class are represented by arrows which are backward and forward adjacent in the diagram associated to the Brouwer class. However, some arrows which are backward and forward adjacent do not represent orbits of a translation area. For an example, see figure 2.11: the Brouwer class that we consider is the product of a flow with a double free half twist between the two arrows that intersect the grey disk of the figure. The two arrows on the bottom of the diagram are backward and forward adjacent but not in the same translation area.

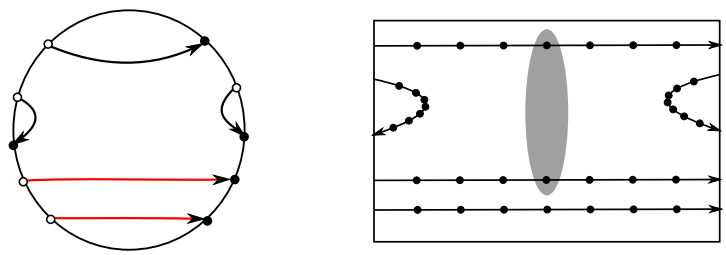

Figure 2.11: Example of a Brouwer class whose diagram has two backward and forward adjacent arrows which are not in the same translation area.

The following proposition implies that every Brouwer class has flow streamlines on its translation areas. It will be proved in section 2.4.1.

Proposition 2.2.4. *If Z is a translation area, every backward (respectively forward) proper arc of a nice family which is included in Z is also forward (respectively backward) proper.*

Irreducible areas

Definition (Irreducible area)**.** Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. We say that a stable area Z of $[h; \mathcal{O}]$ is an *irreducible area* if:

– Z contains at least 2 orbits of $\mathcal{O}$;

– There is no reducing line of $[h;\mathcal{O}]$ strictly included in Z (i.e. homotopically disjoint from every boundary component of Z and non isotopic to any of those).

Walls

Definition (Wall)**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. An isotopy class of a reducing line Δ for $[h;\mathcal{O}]$ is called a *wall for* $[h;\mathcal{O}]$ if every reducing line for $[h;\mathcal{O}]$ is homotopically disjoint from Δ.

The proof of the following theorem is the aim of section 2.4.

Theorem 2.2.1. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let $\mathcal{W}$ be a family of pairwise disjoint reducing lines containing exactly one representative of each wall for $[h;\mathcal{O}]$. If Z is a connected component of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}$, then exactly one of the followings holds:

– Z is an irreducible area;
– Z is a maximal translation area;
– Z does not intersect $\mathcal{O}$.

Remark 2.2.2. A maximal translation area has either one or two boundary components

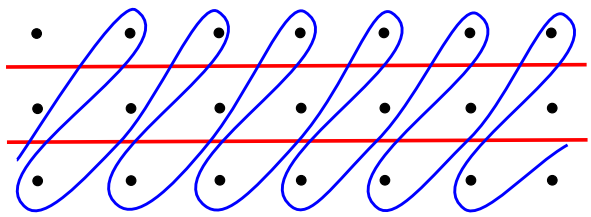

Figure 2.12: Examples of reducing lines for a translation relatively to three orbits.

Remark 2.2.3. The set of walls is empty if and only if $[h;\mathcal{O}]$ is a translation class.

Proof. Assume that $[h;\mathcal{O}]$ is a translation class relatively to $r \geq 2$ orbits, then it is conjugated to the unitary horizontal translation relatively to $\mathbb{Z} \times \{1, ..., r\}$. Hence there are $r-1$ horizontal non homotopic reducing lines (see figure 2.12). Every non horizontal reducing line intersects at least one horizontal line, and for every horizontal line Δ, there exists at least one reducing line which intersects Δ (see figure 2.12). Thus the set of walls of $[h;\mathcal{O}]$ is empty.

Conversely, assume that the set of walls of $[h; \mathcal{O}]$ is empty, then according to theorem 2.2.1, R^2 is either an irreducible area or a maximal translation area. But according to theorem 2.1.3, every Brouwer mapping class relatively to more than one orbit admits at least one reducing line, hence $\mathbb{R}^2$ is never an irreducible area. Thus $[h; \mathcal{O}]$ is a translation class. $\square$

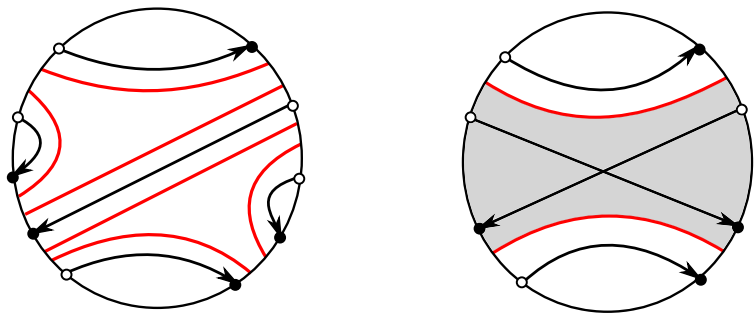

Figure 2.13: Diagrams with walls associated to $[f; \mathcal{O}]$ and $[g; \mathcal{O}']$ (examples A and B of section 2.1).

Since there exists a nice family disjoint from the walls (according to proposition 2.2.3), it makes sense to add the set of walls on the diagram defined in section 2.3 (see figure 2.13 for two examples). We can see the maximal translation areas on this diagram: the backward ends of their arrows are adjacent in the diagram and the forward ends of their arrows are adjacent in the diagram. Consequently, according to theorem 2.2.1, we can also see the irreducible areas. To help the reader, we color the irreducible areas in grey. The resulting *diagram with walls* is a conjugacy invariant of the Brouwer mapping class which is more precise than the diagram (without walls), but still not total. In the next section we will give conditions to determine which diagrams with walls are determinant.

2.2.3 Determinant diagrams and irreducible areas (section 2.5)

Determinant diagrams

The following propositions motivate the search of necessary combinatoric conditions on diagrams (without walls) for the existence of irreducible areas. They will be proved in section 2.5.1.

Proposition 2.2.5. *A Brouwer mapping class $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class if and only if no connected component of the complement of the set of walls for $[h;\mathcal{O}]$ is an irreducible area.*

Proposition 2.2.6. *If two flow classes have the same diagram, then they are conjugated.*

Proposition 2.2.7. *A diagram with walls and without crossing arrows is determinant if and only if there is no irreducible area in the wall complement.*

Combinatorics of irreducible areas

If $[h;\mathcal{O}]$ is a Brouwer class relatively to r orbits, we denote by $2r'$ the number of adjacency subfamilies of $[h;\mathcal{O}]$. If $r' = r$, then we say that the orbits of $[h;\mathcal{O}]$ alternate (in this situation, every adjacency subfamily has only one element). We will prove proposition 2.2.8 in section 2.5.2.

Proposition 2.2.8 (Combinatorics of irreducible areas)**.** *Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Z be an irreducible area for $[h;\mathcal{O}]$. Then:*

1. *The orbits of Z are not all backward adjacent, neither all forward adjacent for $[h;\mathcal{O}]$;*
2. *Z has at least two boundary components;*
3. *The orbits of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ do not alternate.*

This proposition gives tools to know which diagrams are determinant. In particular, we have the following corollaries, which will be proved in section 2.5.3:

Corollary 2.2.2. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to r orbits. Denote by $2r'$ the number of adjacency subfamilies of $[h;\mathcal{O}]$. If $r' = 1, 2$ or r, then $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class.

Remark 2.2.4. It was proved in [26] (for $r' = 1$) and [35] (for $r' = r$) that if $r' = 1$ or $r' = r$, then $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class (see proposition 3.1 and lemma 3.6 of [35]).

Corollary 2.2.3. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to r orbits.

1. If $r \geq 3$, there exist at least two disjoint and non isotopic reducing lines for $[h;\mathcal{O}]$;
2. If $r \geq 2$, there exist at least two translation areas for $[h;\mathcal{O}]$ which have exactly one boundary component;

3. There exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ and $j \neq k$ such that:
   - Relatively to $\mathcal{O}$, α_j^- is isotopic to α_j^+ and α_k^- is isotopic to α_k^+;
   - In the cyclic order, α_j^- and α_j^+ (respectively α_k^- and α_k^+) are neighbors.

The third point of corollary 2.2.3 can be reformulated as follow.

Corollary 2.2.4. Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer class relatively to $r \geq 2$ orbits. There exist at least two disjoint backward and forward proper streamlines T and S for $[h; \mathcal{O}]$.

Moreover, the orbits which are not in T nor S are included in the same connected component of the complement of $S \cup T$.

2.2.4 Classification relatively to 4 orbits (section 2.7)

The aim of section 2.7 is to give a complete description of Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits. We first find every diagram with walls which are not determinant. For the Brouwer mapping classes with a non determinant diagram, we define a new conjugacy invariant, *the tangle* (see section 2.7.2). This tangle is an isotopy class of curves on the cylinder with two marked points, up to horizontal twists (see figure 2.14 for an example). We set that the tangle of Brouwer mapping classes without irreducible area is the empty set. We claim that the couple `(Diagram with walls, Tangle)` is a total conjugacy invariant for Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits:

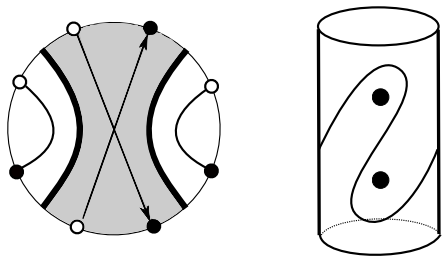

Figure 2.14: Example of a couple (Diagram with walls, Representative of the tangle)

Theorem 2.2.5. Two Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits are conjugated if and only if they admit the same couple (Diagram with walls, Tangle).

We describe which tangles are realized by Brouwer mapping classes and call them *adapted tangles*.

Finally, every couple `(Diagram with walls, Adapted tangle)` is realized by:

- A flow if the diagram is determinant or if the tangle is trivial;
- A product of a flow and finitely many free half twists if the diagram is not determinant and the tangle is not trivial.

This gives a complete description of the Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits.

2.3 Adjacency areas, diagrams and special nice families

2.3.1 Adjacency areas

Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let $(\alpha_i^{\pm})_{1\leq i\leq r}$ be a nice family. Let $\{\alpha_{i_1}^+,...,\alpha_{i_n}^+\}$ be a sub-family of adjacency for $[h;\mathcal{O}]$. For simplicity of notation, we assume that $i_k = k$ for every $1 \leq k \leq n$. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Let L be a geodesic topological line in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that (see figure 2.15):

- One connected component of $\mathbb{R}^2 - L$, denoted by A, contains an infinite component of each T_i^+ for $1 \leq i \leq n$;
- For every $1 \leq i \leq n$, L intersects $T_i^+ := T^+(\alpha_i^+, h, \mathcal{O})$ in exactly one point;
- A does not contain any point of $\mathcal{O}$ outside those n half streamlines.

Definition (Adjacency area)**.** With the previous notations, we say that A is a *forward adjacency area* for $[h;\mathcal{O}]$. A forward adjacency area for $[h^{-1};\mathcal{O}]$ is said to be a *backward adjacency area* for $[h;\mathcal{O}]$.

Note that every adjacency area can be obtained with the following construction.

Construction of an adjacency area. With the previous notations, suppose that the α_i^+'s for $i = 1...n$ are ordered from α_1^+ to α_n^+ in the cyclic order of the nice family. Choose one point $x_i \in \mathcal{O}_i$ in every T_i^+. Denote by L_i the unbounded component of $T_i^+ - \{x_i\}$.

- If $n = 1$, let $\mathcal{U}$ be an open neighborhood of L_1 which is homotopic to L_1 relatively to $\mathcal{O}$;

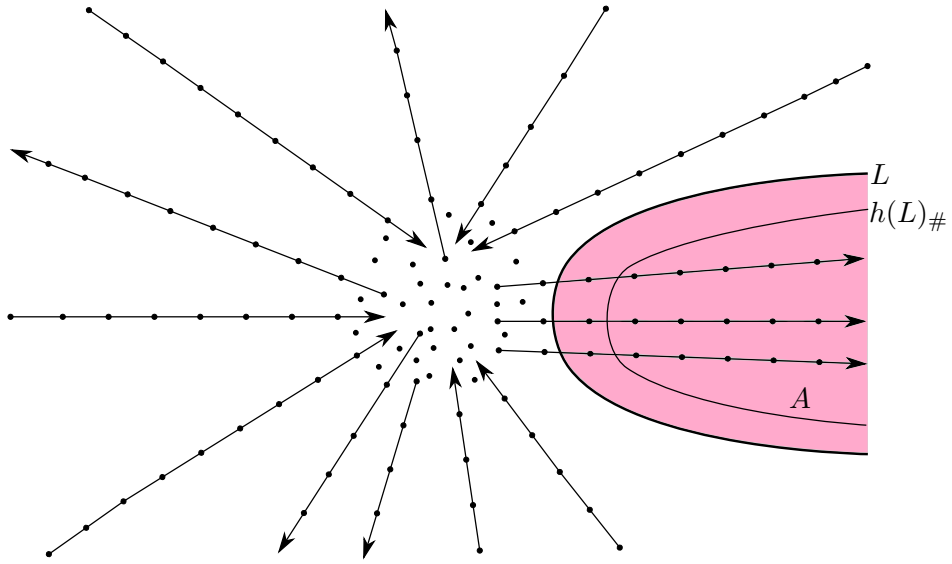

Figure 2.15: Example of a forward adjacency area.

– If $n > 1$: for every $i \leq n-1$, denote by γ_i a geodesic arc of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ which admits x_i and x_{i+1} for endpoints, and such that one connected component of $L_i \cup \gamma_i \cup L_{i+1}$ does not intersect $\mathcal{O}$. In particular, note that $\{h^n(\gamma_i)_\#\}_{n\geq 0}$ is locally finite. Now consider the line $\tilde{L} := L_1 \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n \cup L_n$. Let $\mathcal{V}$ be the connected component of $\mathbb{R}^2 - \tilde{L}$ which contains L_2 if $n \geq 3$ and which does not intersect $\mathcal{O}$ if $n = 2$. Let $\mathcal{U}$ be an open neighborhood of $\mathcal{V}$, isotopic to $\mathcal{V}$ relatively to $\mathcal{O}$.

Assume that the boundary component L of the closure of $\mathcal{U}$ is geodesic: then $\mathcal{U}$ is an adjacency area. Since there exist pairwise disjoint half homotopy streamlines (theorem 2.1.2), there exist pairwise disjoint adjacency areas whose union contain an infinite component of every half orbit (see figure 2.16).

Definition. Choose an adjacency area for every subfamily of adjacency such that the chosen areas are mutually disjoint. Such a family is said to be a *complete family of adjacency areas for* $[h; \mathcal{O}]$.

In particular, the union of the elements of a complete family of adjacency areas contains every point of $\mathcal{O}$ but a finite number. Moreover, if we consider two complete families of adjacency areas, then there exists a compact K such that these two families are isotopic relatively to $\mathcal{O}$ in $\mathbb{R}^2 - K$.

The following theorem is essentially due to Handel [26]. This statement is a reformulation of proposition 3.1 of [35].

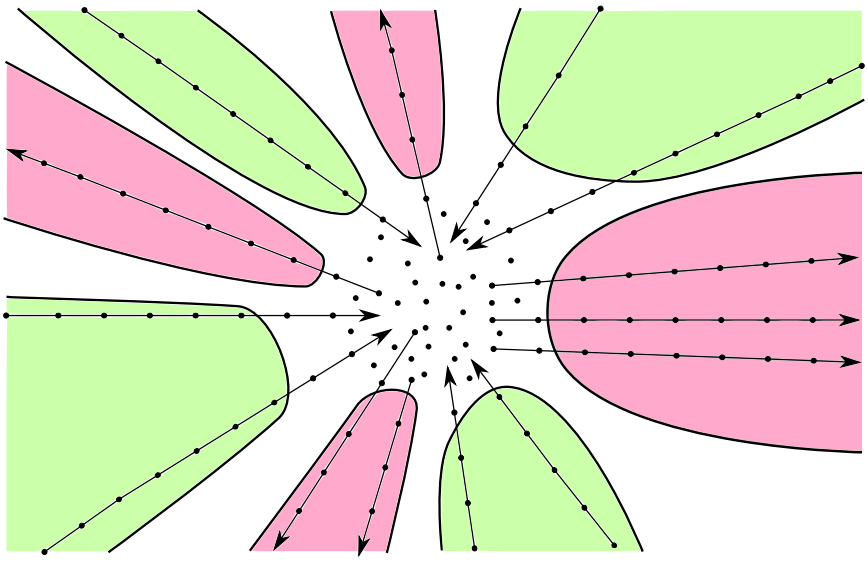

Figure 2.16: Example of a complete family of backward and forward adjacency areas.

Theorem 2.3.1 (Handel)**.** Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer class which is not a translation class. Choose a complete family of adjacency. There exists a reducing line disjoint from all the backward adjacency areas of the complete family.

Proof. There exists a family of generalized homotopy half streamline such that for every backward adjacency area A of the complete family, $\mathcal{O} \cap A$ is included in one of the backward generalized homotopy half streamlines. Proposition 3.1 of [35] gives a reducing line disjoint from all the backward generalized homotopy half streamlines of the family. The result follows. □

Proposition 2.3.1. *Let A be an adjacency area for $[h; \mathcal{O}]$ and let L be its boundary component.*

1. *L is a homotopy Brouwer line;*
2. *The family $(h^k(L)_\#)_{k\in\mathbb{N}}$ is locally finite;*
3. *(Handel) Let β^+ be any forward proper arc with endpoints in an orbit of $\mathcal{O}$ which intersects A. There exists k_0 such that for every $k > k_0$, $h^k(\beta^+)_\#$ is included in A.*

Proof. Every adjacency area can be seen as in the construction done before. Thus (1) and (2) follow, because $\{h^n(\gamma_i)_\#\}_{n\geq 0}$ is locally finite for every i, as well as $\{h^n(L_i)_\#\}_{n\geq 0}$. The constructed $\mathcal{U}$ is a neighborhood of a "generalized homotopy

streamline“ (see [26] and figure 2.17), hence property (3) holds, according to lemma 4.6 of [26]. □

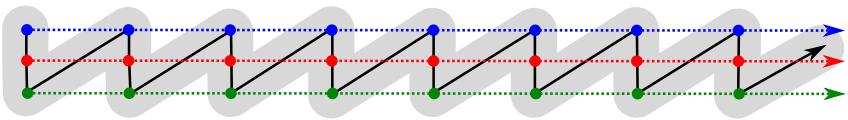

Figure 2.17: Neighborhoods of generalized homotopy half streamlines are homotopic to adjacency areas.

Corollary 2.3.2. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class, and let A be an adjacency area for $[h;\mathcal{O}]$. Then there exists a homeomorphism χ of the plane, preserving the orientation, such that $\chi h \chi^{-1}$ is isotopic relatively to $\chi(\mathcal{O})$ to a homeomorphism which coincides with a translation on $\chi(A)$.

Proof. This follows from (1) and (2) of proposition 2.3.1. □

2.3.2 Diagrams

Proofs of propositions 2.2.1 and 2.2.2. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ and $(\beta_i^{\pm})_i$ be two nice families for a Brouwer class $[h;\mathcal{O}]$. According to (3) of proposition 2.3.1, for every i there exists an adjacency area A and there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $k > k_0$, $h^k(\alpha_i^+)$ and $h^k(\beta_i^+)$ are included in A. We have a similar result for backward arcs. It follows that $(\alpha_i^{\pm})_i$ and $(\beta_i^{\pm})_i$ have the same cyclic order up to permutation of arcs of $(\beta_i^{\pm})_i$ inside the same sub-families of adjacency, which is proposition 2.2.1.

As a corollary we get proposition 2.2.2: if two Brouwer mapping classes are conjugated, then they have the same diagram. □

2.3.3 Special nice families

The aim of this section is to prove proposition 2.2.3, i.e. that for every reducing set $\mathcal{R}$, there exists a nice family which is disjoint from $\mathcal{R}$.

Intersections between reducing lines and adjacency areas

Lemma 2.3.3. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class, with a complete family of adjacency areas. Let Δ be a reducing line. Then Δ is isotopic relatively to $\mathcal{O}$ to a topological line Δ' which intersects at most two adjacency areas of the family.

Moreover, for any complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$, the intersection between the geodesic representative of Δ for this metric and any adjacency area has at most finitely many connected components.

Proof. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family for $[h; \mathcal{O}]$. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. For every i, we denote by T_i^+, respectively T_i^-, the homotopy half streamline $T^+(\alpha_i^+, h, \mathcal{O})$, respectively $T^-(\alpha_i^+, h, \mathcal{O})$. According to the straightening principle 2.1.1, there exists $h' \in [h; \mathcal{O}]$ such that $h'(T_i^+) \subset T_i^+$, $T_i^- \subset h'(T_i^-)$ and $h'(\Delta_\#) = \Delta_\#$.

Claim 1. Let A be an adjacency area. We denote by ∂A its boundary component. If $\Delta_\# \cap \partial A$ is non empty, then $\Delta_\# \cap h'^n(\partial A)_\#$ is non empty for every $n \in \mathbb{Z}$.

Proof of claim 1. Since $\Delta_\# \cap \partial A$ is non empty, $h'^n(\Delta_\#) \cap h'^n(\partial A)$ is non empty for every $n \in \mathbb{Z}$. Since $\Delta_\#$ and ∂A are geodesic, they are in minimal position. Hence for every n, $h'^n(\Delta_\#)$ and $h'^n(\partial A)$ are also in minimal position. It follows that $h'^n(\Delta_\#) \cap h'^n(\partial A)_\#$ is non empty. □

Claim 2. Let A be an adjacency area. If $\Delta_\# \cap A$ is non empty, then for every compact subset K of the plane, $(\Delta_\# \cap A) - K$ is non empty.

Proof of claim 2. Assume A is a forward adjacency area (if not, consider h'^{-1} instead of h). Let K be any compact subset of the plane. Assume that $\Delta_\# \cap A$ is non empty. Since $(h'^n(\partial A)_\#)_{n\in\mathbb{N}}$ is locally finite (according to (2) of proposition 2.3.1), there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $h'^k(\partial A)_\#$ does not intersect K. Since ∂A is a homotopy Brouwer line (according to (1) of proposition 2.3.1), $h'^k(\partial A)_\#$ is included in A. According to claim 1, $h'^k(\partial A)_\#$ intersects $\Delta_\#$. Claim 2 follows. □

Denote by $(A_i)_{1\leq i\leq l}$ the adjacency areas of the chosen complete family. According to claim 1, if we prove that for some $(n_i)_i \in \mathbb{Z}^l$, $\Delta_\#$ intersects at most two of the $h'^{n_i}(\partial A_i)_\#$'s, then $\Delta_\#$ intersects at most two of the ∂A_i's. Hence, up to replacing $(A_i)_{1\leq i\leq l}$ by $(h'^{n_i}(\partial A_i)_\#)_{1\leq i\leq l}$ such that $\Delta_\#$ intersects at most two of the $h'^{n_i}(\partial A_i)_\#$'s, we can assume that for every i, j, A_i is disjoint from α_j^-.

Claim 3. There exists a topological disk K of the plane such that every connected component of $\Delta_\# - K$ intersects at most one adjacency area.

Proof of claim 3. Assume by contradiction that for every K, one connected component of $\Delta_\# - K$ intersects two adjacency areas. Then there exist two adjacency areas, say A_i^- and A_j^+, such that $\Delta_\# \cap A_i^-$ and $\Delta_\# \cap A_j^+$ have infinitely many connected components. Moreover, taking K which intersects every adjacency area of the complete family, we can suppose that A_i^- follows A_j^+ in the cyclic order at infinity of the adjacency areas. Hence we can suppose that A_i^- is a backward adjacency area, and A_j^+ is a forward adjacency area.

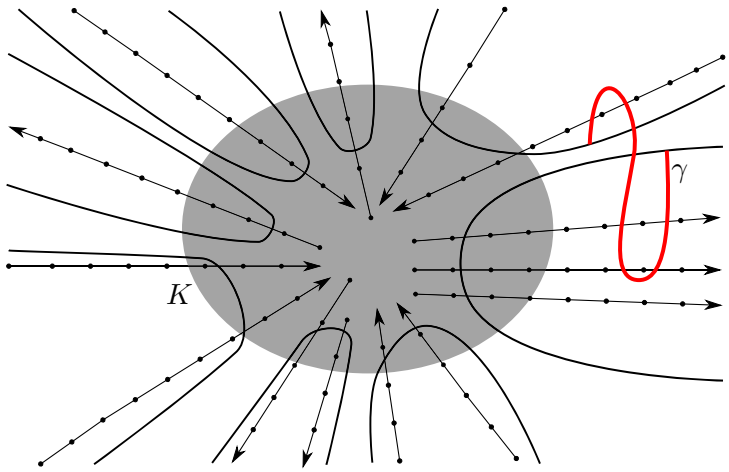

Figure 2.18: Example of a configuration with some K and some γ.

It follows that there exists a subsegment γ of $\Delta_\#$ such that γ is the concatenation of three smaller subsegments $\gamma_1 \star \gamma_2 \star \gamma_3$ such that (see figure 2.18):

– $\gamma_1 \subset A_i^-$ and its endpoints are included in ∂A_i^-;

– $\gamma_3 \subset A_j^+$ and its endpoints are included in ∂A_j^+;

– γ_2 does not intersect $\mathring{A}_i^-$ not $\mathring{A}_j^+$, where $\mathring{A}$ denotes the interior $A - \partial A$ of A.

Moreover, we can choose γ outside any chosen topological disk of the plane: in particular, we choose it disjoint from the α_i^-'s. Since $\Delta_\#$ and the boundary components of the adjacency areas are in minimal position, it follows that:

– γ_1 intersects a backward half homotopy streamline T_i^- of A_i^-;

– γ_2 does not intersect any half homotopy streamline of the family $(T_k^\pm)_k$;

– γ_3 intersects a forward half homotopy streamline T_j^+ of A_j^+.

Hence there exists a subsegment δ of γ, which contains γ_2, such that its endpoints are in T_i^- and T_j^+ but its interior does not intersect any $T_k^\pm$. Since h' acts as a translation on the $T_k^\pm$'s, it follows that $h'(\delta)$ intersects δ. This gives a con-

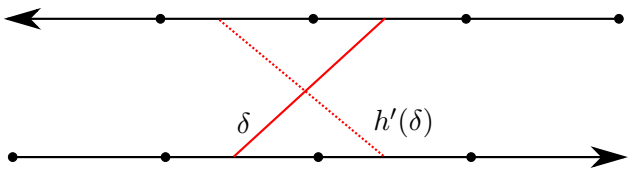

Figure 2.19: Image of δ under h'.

tradiction because $\Delta_\#$ is invariant by h' and without self-intersection (see figure 2.19). $\square$

Let K be a topological disk given by claim 3. Since $\Delta_\#$ is proper, there are only two unbounded connected components in $\Delta_\# - K$. According to claim 2, as $\Delta_\#$ and the boundary components of the adjacency areas are in minimal position, every connected component of $\Delta_\# - K$ which intersects an adjacency area is unbounded. Hence $\Delta_\#$ intersects at most two adjacency areas. Moreover, since $\Delta_\#$ and ∂A_k are geodesics, the second part of the lemma follows. $\square$

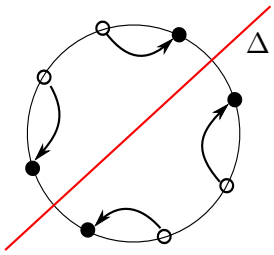

Figure 2.20: Example. Let $[f;\mathcal{O}]$ be a flow class with this diagram: the reducing line Δ intersects two forward adjacency areas.

Remark: If a reducing line intersects two adjacency areas, it does not necessary intersects one backward adjacency area and one forward adjacency area: some reducing lines intersect two adjacency areas of the same type (see figure 2.20 for an example).

The following lemma will be used in the proof of (2) of proposition 2.2.8.

Lemma 2.3.4. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer class which is not a translation class. Choose a complete family of adjacency areas. There exists a reducing line Δ such that the intersection of Δ with the complement of the forward adjacency areas is bounded.

Proof. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family such that each α_i^- intersects the boundary component of a backward adjacency area of the chosen family (such a family exists, up to take iterates of arcs of any nice family). Since $[h;\mathcal{O}]$ is not a translation class, according to theorem 2.3.1, there exists a reducing line Δ which is disjoint from every backward adjacency area. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2-\mathcal{O}$. Suppose Δ is geodesic. Let K be a topological compact disk of the plane such that:

- The boundary component ∂K of K is geodesic;
- K intersects every adjacency areas of the family;
- The union $\mathcal{A}$ of K with all the adjacency areas of the family contains $\mathcal{O}$.

Since Δ is proper, it intersects ∂K only finitely many times. Denote by Δ^+ and Δ^- the two unbounded components of $\Delta - K$. Since Δ^+ and Δ^- are disjoint from the backward adjacency areas, we can isotopy each of them if necessary to include Δ in a forward adjacency area. □

Proof of proposition 2.2.3

Proposition. 2.2.3 *Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let $(\Delta^k)_k$ be a reducing set. There exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h;\mathcal{O}]$ such that for every k, for every i, α_i^- and α_i^+ are homotopically disjoint from Δ^k.*

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2-\mathcal{O}$. As usual, we denote by $L_{\#}$ the geodesic representative of any line or arc L. Choose a complete family of adjacency areas for $[h;\mathcal{O}]$. In every adjacency area, we will construct pairwise disjoint backward or forward proper arcs for each orbit which intersects the area, such that every constructed arc is disjoint from the reducing set. By iterating those arcs so that the backward and forward arcs of a given orbit have the same endpoints, we get the needed nice family. Let A be an adjacency area of the complete family of adjacency. Suppose A is a forward adjacency area (if not, consider h^{-1}). Note that ∂A is geodesic (by definition). For simplicity of notations, we assume that $\Delta^1,...,\Delta^N$ are the reducing lines of $(\Delta^k)_k$ intersecting A. We assume that these reducing lines are geodesic. According to lemma 2.3.3, each of them has an unbounded connected component included in A. Denote by Δ^k_+ this unbounded component for Δ^k. Suppose that $\mathcal{O}_1,...,\mathcal{O}_m$ are the orbits of $\mathcal{O}$ which intersect A. We will find m mutually disjoint forward proper arcs $(\beta_i^+)_{1\leq i\leq m}$ for $[h;\mathcal{O}]$, included in A and homotopically disjoint from Δ^k for every k.

Applying the straightening principle 2.1.1 to the families $(\Delta^k)_k$ and $(h^n(\partial A))_{n\geq 0}$, we can find $h' \in [h;\mathcal{O}]$ such that $h'(\Delta^k) = \Delta^k$ for every k and $(h')^n(\partial A) = h^n(\partial A)_\#$ for every n. Note that h' is conjugate to the translation on A (according to corollary 2.3.2).

Let $\mathcal{C}$ be the quotient of A by h'. Denote by π the quotient map. In particular:

- $\mathcal{C}$ is a topological cylinder;
- $\pi(\mathcal{O} \cap A)$ is a set of m points $\hat{x}_1, ..., \hat{x}_m$ on $\mathcal{C}$;
- For every k, $\pi(\Delta^k \cap A) = \pi(\Delta^k_+)$ is a separating topological circle of $\mathcal{C} - \{\hat{x}_1, ..., \hat{x}_m\}$;
- The $\pi(\Delta^k \cap A)$'s are mutually disjoint.

For simplicity of notation, we see $\mathcal{C}$ as a vertical cylinder. There exists a homeomorphism ϕ of $\mathcal{C}$ sending each $\pi(\Delta^k \cap A)$ on a horizontal circle γ_k and the family $(\hat{x}_i)_i$ on points of $\mathcal{C}$ with mutually distinct heights. Now for every $1 \leq i \leq m$, consider the horizontal circle γ'_i containing $\phi(\hat{x}_i)$. Every γ'_i is disjoint from $\phi\pi(\Delta^k \cap A)$ for every k. Hence $(\phi^{-1}(\gamma'_i))_i$ is a family of mutually disjoint curves disjoint from $\pi(\Delta^k \cap A)$ for every k. For every i, choose a lift β_i^+ of $\phi^{-1}(\gamma'_i)$ included in A, i.e. an arc included in A and such that $\pi(\beta_i^+) = \phi^{-1}(\gamma'_i)$. Such a β_i^+ is a translation arc. Since $\{h'^n(\partial A)_\#\}_{n\geq 0}$ is locally finite (proposition 2.3.1), the β_i^+'s are forward proper . They are disjoint from the Δ^k's, as wanted. □

2.4 Walls for a Brouwer mapping class

The main aim of this section is to prove that the set of walls splits $\mathbb{R}^2$ into translation areas, irreducible areas and stable areas that do not intersect $\mathcal{O}$ (theorem 2.2.1).

2.4.1 Translation areas

Lemma 2.4.1. Let Z be a stable area of a Brouwer class such that all the orbits of Z are forward adjacent. Then every backward proper arc included in Z is forward proper.

Proof. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer class with a complete family of adjacency areas. Let Z be a stable area for $[h;\mathcal{O}]$ which intersects only one forward adjacency area. Denote by A this adjacency area. Up to replace h by $h' \in [h;\mathcal{O}]$, according to the straightening principle 2.1.1, we can assume that $h(Z) = Z$. Let $(\alpha_i^\pm)_i$ be a

nice family for $[h;\mathcal{O}]$ disjoint from the boundary components of Z (such a family exists, according to proposition 2.2.3). We prove the following claim, which is a consequence of theorem 5.5 of Handel [26].

Claim. For every i such that α_i^- is in Z, there exists n such that $h^n(\alpha_i^-)_\#$ is in A.

We use the definitions and notations of Handel [26], section 5 ("Fitted family"). We denote by W the Brouwer subsurface $\mathbb{R}^2 - \cup_k A_k^+$, where $\cup_k A_k^+$ is the union of forward adjacency areas. If $\alpha_i^- \in Z$ is such that for every $n \geq 0$, $h^n(\alpha_i^-)_\# \cap W \neq \emptyset$, then there exists a fitted family $T \subset RH(W, \delta_+ W)$ such that:

- Every $s \in T$ is included in Z (because the elements of T are subsegments of iterates of α_i^-, which is included in Z, and we have $h(Z) = Z$);
- There exists $t \in T$ whose endpoints lie on distinct components of $\delta_+ W$ (this is theorem (5.5.c) of [26]).

Since $\delta_+ W \cap Z$ has only one component (the boundary component of A), the last point does not hold, and thus every $\alpha_i^- \in Z$ is such that for every sufficiently big n, $h^n(\alpha_i^-)$ is homotopically included in A. It follows that every $\alpha_i^- \in Z$ is forward proper. □

Proposition. 2.2.4 *If Z is a translation area, every backward (respectively forward) proper arc of a nice family which is included in Z is also forward (respectively backward) proper.*

Proof. By definition, all the orbits of a translation area are backward adjacent and forward adjacent. The result is a consequence of lemma 2.4.1 applied to the Brouwer class, and respectively to its inverse. □

2.4.2 Intersections between reducing lines

Lemma 2.4.2 (Intersection of two reducing lines)**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Δ and Δ' be two reducing lines for $[h;\mathcal{O}]$. We assume that Δ and Δ' are in minimal position. Then one of the following situation holds.

1. $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$.
2. $\Delta \cap \Delta'$ contains exactly one point.
3. $\Delta \cap \Delta'$ is an infinite set.

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Taking their images by isotopies if necessary, we can suppose that Δ and Δ' are geodesic. We use the straightening principle 2.1.1 to find a homeomorphism $h' \in [h; \mathcal{O}]$ such that h' preserves Δ and Δ'.

If $\Delta \cap \Delta'$ contains more than one point, then there exists a bounded connected component of $\mathbb{R}^2 - (\Delta \cup \Delta')$ which contains one point $x \in \mathcal{O}$. Denote by C_x this component. Then $h'(C_x)$ is a bounded component of $\mathbb{R}^2 - (\Delta \cup \Delta')$ different from C_x. Indeed, if $h'(C_x)$ coincides with C_x, then $h'^n(C_x) = C_x$ for every $n \geq 0$. Hence $\{h'^n(x)\}_{n \geq 0}$ is included in C_x. This is not possible because $h'^n(x) = h^n(x)$ for every n: since h is a Brouwer homeomorphism, $\{h^n(x)\}_{n \geq 0}$ is not bounded (proposition 3.5 of [25]).

For the same reasons, for every $k < n \in \mathbb{N}$, $h^n(C_x)$ is disjoint from $h^k(C_x)$. Thus there exist infinitely many bounded connected component of $\mathbb{R}^2 - (\Delta \cup \Delta')$. Hence Δ and Δ' have infinitely many intersection points. □

Lemma 2.4.3 (Intersection between a reducing line and a translation area)**.** Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Z be a translation area for $[h; \mathcal{O}]$. Let Δ be a reducing line. If there exists a boundary component L of Z such that L and Δ are not homotopically disjoint, then $\Delta \cap L$ is an infinite set.

Proof. The line L is a reducing line, hence it is isotopic to its image by h. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Suppose that L and Δ are geodesic. For every orbit $\mathcal{O}_i$ of $\mathcal{O}$ included in Z, we choose a homotopic proper translation arc α_i included in Z such that the α_i's are mutually disjoint (given by proposition 2.2.3). If α is one of these homotopy translation arcs, we denote by T_α the proper streamline $\cup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(\alpha)_\#$. Since L and Δ are not homotopically disjoint, there exists α_i such that $T_{\alpha_i} \cap \Delta \neq \emptyset$. Since T_{α_j} and L are disjoint for every j, the straightening principle 2.1.1 gives us a homeomorphism $h' \in [h; \mathcal{O}]$ which preserves L, Δ and T_{α_j} for every i.

Suppose that $\Delta \cap L$ is not infinite. According to lemma 2.4.2, since this intersection is not empty, it contains only one point, say x. In particular, we have $h'(x) = x$. Choose an orientation on Δ. Let y be the first intersection point between Δ and T_{α_i} after x on Δ. Denote by $[xy]$ the segment of Δ between x and y. We have $h'(y) \in T_{\alpha_i}$ and $h'(]xy[) \cap (L \cup T_{\alpha_i}) = \emptyset$, hence $y = h'(y)$. This gives a contradiction because y is contained in a proper translation arc for h'. □

Lemma 2.4.4 (Intersection between reducing lines: infinite set case)**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Δ and Δ' be two reducing lines for $[h;\mathcal{O}]$. We assume that Δ and Δ' are in minimal position.
If $\Delta \cap \Delta'$ is an infinite set, then $\Delta \cup \Delta'$ is included in a translation area.

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Isotopying if necessary, we can assume that Δ and Δ' are geodesic. The straightening principle 2.1.1 gives us $h' \in [h;\mathcal{O}]$ which preserves Δ and Δ'. Choose a complete family of mutually disjoint adjacency areas for $[h;\mathcal{O}]$. Choose a bounded connected component C_x of the complement of $\Delta \cup \Delta'$ which contains a point x of an orbit $\mathcal{O}_i$ of $\mathcal{O}$. Denote by A^- and A^+ the backward and forward adjacency areas of the chosen complete family which are intersected by $\mathcal{O}_i$. As shown in the proof of lemma 2.4.2, $h'(C_x)$ is a bounded connected component of $R^2 - (\Delta \cup \Delta')$ different from C_x. Hence every path from x to $h'(x)$ intersects $\Delta \cup \Delta'$.

According to proposition 2.2.3, there exists a forward proper arc α^+ for $\mathcal{O}_i$ which joints x to $h'(x)$ and which is disjoint from Δ'. Denote by $T^+(\alpha^+)$ the forward half streamline $\cup_{n\geq 0} h^n(\alpha^+)_\#$. Note that $T^+(\alpha^+)$ is disjoint from Δ'. According to proposition 2.3.1, there exists an unbounded component of $T^+(\alpha^+)$ which is included in A^+. Since $T^+(\alpha^+)$ is proper and disjoint from Δ', the straightening principle 2.1.1 give us $h_1 \in [h;\mathcal{O}]$ which preserves $T^+(\alpha^+)$, Δ and Δ'. The arc α^+ intersects Δ, hence $h_1^n(\alpha^+)$ also intersects Δ for every $n \in \mathbb{N}$. It follows that Δ intersects A^+.

The same argument with a backward proper arc α^- disjoint from Δ' shows that Δ also intersects A^-. According to lemma 2.3.3, every geodesic reducing line intersects at most two adjacency areas: for Δ, this adjacency areas are A^- and A^+. Interchanging Δ and Δ', we get by the same arguments that Δ' also intersects A^- and A^+.

We choose an orientation on Δ and Δ' such that they are oriented from A^- to A^+. There exists an unbounded connected component of the complementary of $\Delta \cup \Delta'$ which is on the left of Δ and Δ'. We denote by L_l its boundary component. Likewise, we denote by L_r the boundary component of the unbounded connected component of the complementary of $\Delta \cup \Delta'$ which is on the right of Δ and Δ'. The two lines L_l and L_r are proper, because they are unions of segments of two topological lines. Moreover, they are preserved by h'.

Now we have the following cases, depending on the positions of the orbits:

– If L_r and L_l split the set of orbits, then their geodesic representatives $(L_r)_\#$

and $(L_g)_\#$ are disjoint reducing lines which intersect the same adjacency areas. Denote by Z the stable area bounded by $(L_r)_\#$ and $(L_g)_\#$. Thus Z intersects only two adjacency areas, A^- and A^+, hence Z is a translation area, which contains Δ and Δ';

- If none of L_r and L_l split the set of orbits, then there exist only two adjacency areas. Hence $[h;\mathcal{O}]$ is a translation, and the whole plane is a translation area;
- If only one of L_r and L_l splits the set of orbits, L_r for example, then L_r is a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$. The connected component of $\mathbb{R}^2 - (L_r)_\#$ which contains Δ and Δ' is a translation area.

□

Lemma 2.4.5 (Intersection between reducing lines: case with exactly one point)**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Δ and Δ' be two reducing lines for $[h;\mathcal{O}]$. We assume that Δ and Δ' are in minimal position.
If $\Delta \cap \Delta'$ contains exactly one point, then there exist four reducing lines that are mutually non isotopic and homotopically disjoint and disjoint from Δ and Δ'.

Moreover, if we denote by p the intersection point and by Δ_1 and Δ_2, respectively Δ'_1 and Δ'_2, the two half-lines of $\Delta - \{p\}$, respectively of $\Delta' - \{p\}$, these four reducing lines are isotopic relatively to $\mathcal{O}$ to $\Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta'_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cup \Delta'_2$ and $\Delta'_1 \cup \Delta'_2$.

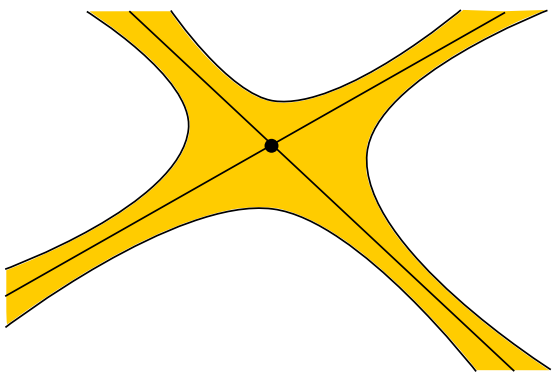

Figure 2.21: Neighborhood of $\Delta \cup \Delta'$.

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Isotopying if necessary, we can assume that Δ and Δ' are geodesic. The straightening principle 2.1.1 gives us $h' \in [h;\mathcal{O}]$ which preserves Δ and Δ'.

Consider a proper open neighborhood $\mathcal{U}$ of $\Delta \cup \Delta'$ which does not intersect $\mathcal{O}$ and which is isotopic to $\Delta \cup \Delta'$ relatively to $\mathcal{O}$ (as in figure 2.21). The complement

of $\mathcal{U}$ has 4 connected components. Each of them contains at least one orbit, because $\Delta \cup \Delta'$ are in minimal position. Hence the boundary component of the closure of $\mathcal{U}$ in $\mathbb{R}^2$ is a union of 4 reducing lines, mutually non isotopic, mutually disjoint, and each of them is disjoint from $\Delta \cup \Delta'$. $\square$

2.4.3 Study of the set of walls

Maximal translation areas

We show that there exist finitely many maximal translation areas (proposition 2.4.1), and that the boundary components of this areas are walls (proposition 2.4.2).

Proposition 2.4.1. *Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Up to isotopy, there exist finitely many maximal translation areas. Moreover, they are mutually homotopically disjoint.*

Remark 2.4.1. The statement 2.4.1 is generally false if we replace *maximal translation area* by *translation area*. Indeed, if a translation area Z of a Brouwer class $[h; \mathcal{O}]$ contains at least two orbits, then there are infinitely many non isotopic sub-translation areas included in Z. See figure 2.22 for examples of reducing lines for the translation.

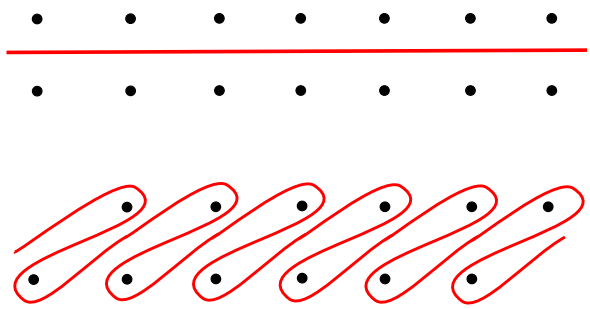

Figure 2.22: Example of two reducing lines for the translation: the complement are translation areas.

Proof of proposition 2.4.1. We choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ and a complete family of adjacency areas for $[h; \mathcal{O}]$. Let Z and Z' be two non homotopic maximal translation areas. Denote by A^-, A^+, respectively B^-, B^+, the adjacency areas intersected by Z, respectively Z'. We claim that:

1. The boundary components of Z and Z' are homotopically disjoint;
2. No boundary component of Z is included in Z'.

Proof of (1). If a boundary component L of Z intersects a boundary component L' of Z', then L and L' have infinitely many intersection points (according to lemma 2.4.3). Hence L and L' are included in the same translation area (according to lemma 2.4.4). Denote by Z'' this translation area, and by C^- and C^+ the two adjacency areas intersected by Z''. Since L and L' are reducing lines, they intersect at most two adjacency areas: C^- and C^+. The cyclic order of the adjacency areas at infinity is such that backward areas and forward areas alternate (by definition of adjacency areas). It follows that $A^- = B^- = C^-$ and $A^+ = B^+ = C^+$.

According to lemma 2.1.1, there exists $h' \in [h; \mathcal{O}]$ such that $h'(Z) = Z$ and $h'(Z') = Z'$. It follows that the boundary components of $Z \cup Z'$ are reducing lines, hence $Z \cup Z'$ is a stable area. Since $Z \cup Z'$ intersects only two adjacency areas (C^- and C^+), it is a translation area. This gives a contradiction with the maximality of Z and Z' as translation areas.

Proof of (2). If a boundary component L of Z is included in Z', then there exists an orbit $\mathcal{O}_i$ included in $Z \cap Z'$. Hence again $A^- = B^-$ and $A^+ = B^+$, which gives a contradiction.

We complete the proof of proposition 2.4.1. Every maximal translation area contains at least one orbit. Since there are finitely many orbits and since this areas are mutually disjoint, there are finitely many maximal translation areas. □

Proposition 2.4.2. *Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Z be a maximal translation area. Each isotopy class of a boundary component of Z is a wall of $[h; \mathcal{O}]$.*

Proof. Let L be a boundary component of a maximal translation area Z. We need to show that if Δ is a reducing line which is non isotopic to L, then $\Delta \cap L = \emptyset$. According to lemma 2.4.3, if a reducing line Δ intersects L then $\Delta \cap L$ is an infinite set. According to lemma 2.4.4, it follows that $L \cup \Delta$ is included in a translation area. Since maximal translation areas are mutually disjoint (according to proposition 2.4.1), Δ is included in Z (which contains L): this is impossible, hence every reducing line Δ is homotopically disjoint from L. □

Outside the translation areas

This subsection completes the picture: there are finitely many maximal translation areas, mutually homotopically disjoint, and outside those areas there are only finitely many geodesic reducing lines, which intersect mutually in zero or one point.

Lemma 2.4.6. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let Δ and Δ' be two disjoint reducing lines. If Δ and Δ' split the orbits into the same two subfamilies, then Δ and Δ' are isotopic.

Proof. The set $\Delta \cup \Delta'$ splits the plane into three connected components. One of them (the one in the middle) is disjoint from $\mathcal{O}$. □

Proposition 2.4.3. *Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Outside the maximal translation areas, there exists only finitely many non isotopic reducing lines.*

Proof. We prove that there exists only finitely many non isotopic reducing lines in every connected components of the complement of the union of the translation areas. If two such reducing lines are not homotopically disjoint, then they have only one intersection point (according to lemmas 2.4.2 and 2.4.4). Hence they do not split the orbits into the same subfamilies. This remark together with lemma 2.4.6 imply that if we choose a partition of the orbits in the chosen component into two subfamilies, there exists at most one reducing line included in the complement which splits the orbits into the same partition. Since there exist only finitely many different partitions of the orbits into two subfamilies, there are only finitely many isotopy classes of reducing lines. □

Proof of theorem 2.2.1

Theorem. ***2.2.1*** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let $\mathcal{W}$ be a family of pairwise disjoint reducing lines containing exactly one representative of each wall for $[h;\mathcal{O}]$. If Z is a connected component of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}$, then exactly one of the followings holds:

- Z is an irreducible area;
- Z is a maximal translation area;
- Z does not intersect $\mathcal{O}$.

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Up to isotopying relatively to $\mathcal{O}$, we can assume that the elements of $\mathcal{W}$ are geodesic. According to

proposition 2.4.2, the isotopy classes of boundary components of maximal translation areas are walls. Let Z be a connected component of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}$ which is not a translation area. Suppose that Z is not irreducible. Then there exists a reducing line included in Z which is not homotopic to any boundary component of Z. According to proposition 2.4.3, Z contains a finite number of mutually non isotopic reducing lines. Since they are not walls, each of them intersects another one. In particular there are at least two reducing lines included in Z and not homotopic to any boundary component of Z.

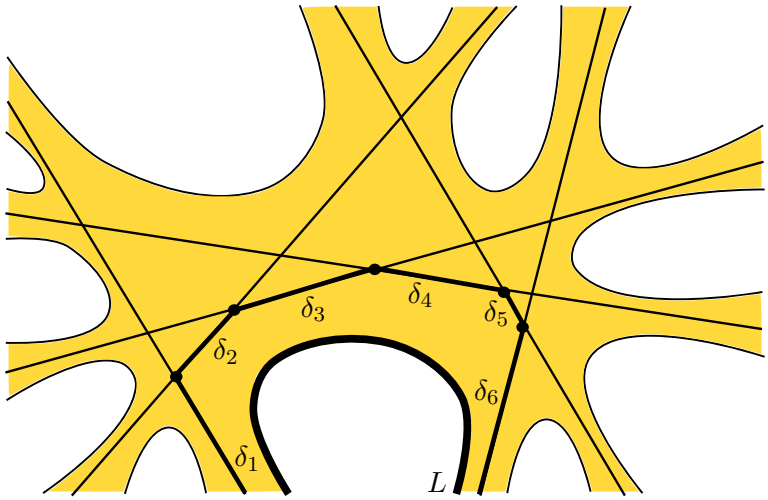

Figure 2.23: Example of $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}$ and a boundary component L isotopic to $\delta_1 \cup ... \cup \delta_6$.

Denote by $\mathcal{U}$ the finite union of geodesic reducing lines included in Z and not homotopic to any boundary component of Z. Denote by $\tilde{\mathcal{U}}$ a tubular neighborhood of $\mathcal{U}$ which does not intersect $\mathcal{O}$ (see figure 2.23). Choose $\tilde{\mathcal{U}}$ such that the boundary components of its closure are geodesic. Denote by L one of them. We claim the following:

Claim. The line L is a reducing line for $[h; \mathcal{O}]$.

Proof of the claim. The line L is homotopic to a union L' of a finite number of segments included in distinct reducing lines (see figure 2.24). The number of segments is finite because of the following properties.

1. The area Z is homotopically disjoint from the translation areas;
2. Up to isotopy there are only finitely many reducing lines outside the translation areas (according to proposition 2.4.3);

3. If two reducing lines outside the translation areas intersect, then their intersection is exactly one point: according to lemma 2.4.2, this intersection is either one point or infinite, and according to lemma 2.4.4, if the intersection is infinite then the reducing lines are included in a translation area.

Denote by n this number, and by $\delta_1 \cup ... \cup \delta_n$ the segments whose union is L'. We assume that the δ_i's are in this order on L' (as in figure 2.23). For every i, denote by Δ_i a reducing line of $\mathcal{U}$ which contains δ_i. Denote by L_1 the line obtained as the union of δ_1 and the half-line of Δ_2 whose endpoint is the intersection point between δ_1 and δ_2 and which contains δ_2. According to lemma 2.4.5, L_1 is a reducing line for $[h; \mathcal{O}]$. For every $2 \leq i \leq n-1$, denote inductively by L_i the line obtained as the union of the half-line L_{i-1} which contains δ_1 and the half-line Δ_{i+1} which contains δ_{i+1} (both half lines have the intersection point between δ_i and δ_{i+1} for endpoint). Applying lemma 2.4.5 inductively, we see that L_i is a reducing line for every i. Hence $L' = L_{n-1}$ is a reducing line for $[h; \mathcal{O}]$. □

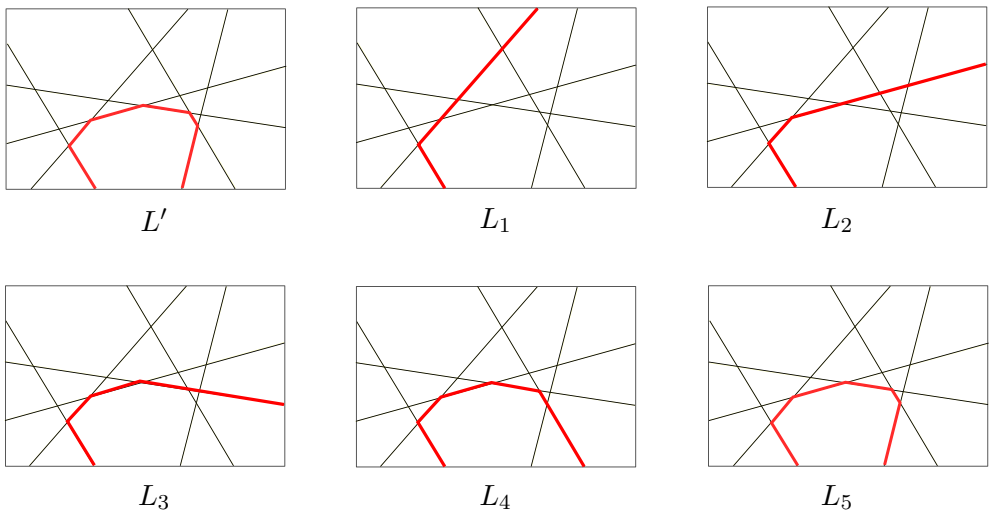

Figure 2.24: Proof of the claim in the case of the example.

End of the proof of theorem 2.2.1. Since L is in Z but not in $\mathcal{U}$, it is homotopic to a boundary component of Z (by definition of $\mathcal{U}$). Hence $\partial\tilde{\mathcal{U}}$ is included in ∂Z, thus Z is included in $\tilde{\mathcal{U}}$ (because they both are intersections of half topological planes). It follows that Z is isotopic to $\tilde{\mathcal{U}}$ relatively to $\mathcal{O}$, hence Z does not intersect $\mathcal{O}$. □

Remark 2.4.2. Note that a stable area is irreducible if and only if it is an irreducible area of the complement of the set of walls. In particular, the isotopy classes of the boundary components of any irreducible area are walls.

2.5 Determinant diagrams and irreducible areas

2.5.1 Determinant diagrams

We prove here propositions 2.2.5, 2.2.6 and 2.2.7. We use the two following lemmas of [35] in the proofs:

Lemma 2.5.1 (Le Roux [35], lemma 1.8)**.** Let $\mathcal{F}$ be a finite family of pairwise disjoint topological lines in the plane. Let h_0 be an orientation preserving homeomorphism of the plane. Let H_{h_0} be the space of orientation preserving homeomorphisms that coincide with h_0 on the union of the elements of $\mathcal{F}$. Then H_{h_0} is arcwise connected.

Lemma 2.5.2 (Le Roux [35], lemma 1.6)**.** The Brouwer mapping class $[h;\mathcal{O}]$ is a fixed point free flow class if and only if it admits a family of pairwise disjoint proper geodesic homotopy streamlines whose union contains $\mathcal{O}$.

Proposition. 2.2.5 *A Brouwer mapping class $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class if and only if no connected component of the complement of the set of walls for $[h;\mathcal{O}]$ is an irreducible area.*

Proof. If $[f;\mathcal{O}]$ is a flow class, then according to lemma 2.5.2 we can choose a family of pairwise disjoint proper geodesic homotopy streamlines whose union contains $\mathcal{O}$. We find reducing lines in the neighborhood of each streamline, hence there is no irreducible area.

We now prove that if the set of walls $\mathcal{W}$ of a Brouwer mapping class $[h;\mathcal{O}]$ is such that no component of the complement of $\mathcal{W}$ is irreducible, then it is a flow class. According to proposition 2.2.3, there exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h;\mathcal{O}]$ disjoint from the walls. According to theorem 2.2.1, every connected component of the complement of $\mathcal{W}$ which contain orbits is a translation area. According to proposition 2.2.4, every backward proper streamline which is included in a translation area is also forward proper: it follows that every $T(\alpha_i^-, h, \mathcal{O})$ is a proper streamline. Lemma 2.5.2 gives us the conclusion. □

Proposition. 2.2.6 *If two flow classes have the same diagram, then they are conjugated.*

Proof. Let $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$ be two flow classes with the same diagram. According to lemma 2.5.2, there exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[f;\mathcal{O}]$ and a nice family $(\beta_i^{\pm})_i$

for $[g;\mathcal{O}']$ such that for every i, α_i^- is isotopic to α_i^+, and β_i^- is isotopic to β_i^+. We set $\alpha_i := \alpha_i^- = \alpha_i^+$ and $\beta_i := \beta_i^- = \beta_i^+$. Since $[f;\mathcal{O}]$ and $[g;\mathcal{O}']$ have the same diagram, $(\alpha_i^\pm)_i$ and $(\beta_i^\pm)_i$ have the same cyclic order at infinity (we permute the numbering of the orbits of $\mathcal{O}'$ if necessary). Thus the Schoenflies theorem provides a homeomorphism of the plane which send $T(\alpha_i, h, \mathcal{O})$ to $T(\beta_i, h, \mathcal{O})$ for every i. Lemma 2.5.1 gives the conclusion. □

Proposition. 2.2.7 *A diagram with walls and without crossing arrows is determinant if and only if there is no irreducible area in the wall complement.*

Proof. Let D be a diagram with walls without crossing arrows. Suppose D is determinant. Since D is without crossing arrows, there exists a flow class $[f;\mathcal{O}]$ whose associated diagram is D (this is lemma 1.7 of [35]). Since $[f;\mathcal{O}]$ is a flow class, every orbit of $\mathcal{O}$ is included in a translation area, hence in a maximal translation area. In this situation, theorem 2.2.1 imply that every connected component of the complement of walls which contains orbit is a maximal translation area. The result follows.

If a diagram with walls D has no irreducible area in the wall complement, then according to theorem 2.2.1, it has only translation areas and areas without orbits. According to proposition 2.2.5, $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class. If $[h';\mathcal{O}']$ is another Brouwer class whose associated diagram with walls is D, then $[h';\mathcal{O}']$ is also a flow class. It follows from proposition 2.2.6 that $[h;\mathcal{O}]$ and $[h';\mathcal{O}']$ are conjugated. Hence the diagram with walls D is determinant. □

2.5.2 Combinatorics of irreducible areas

We first prove a criterion for reducing lines and then use it to prove proposition 2.2.8.

A criterion for reducing lines

Lemma 2.5.3. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let $(\alpha_i^\pm)_i$ be a nice family for $[h;\mathcal{O}]$. If Δ is a topological line of $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$ such that:

1. Δ is a topological line;
2. Both components of $\mathbb{R}^2 - \Delta$ contain points of $\mathcal{O}$;
3. For every i, for every $k \in \mathbb{Z}$, Δ is homotopically disjoint from $h^k(\alpha_i^-)$ relatively to $\mathcal{O}$.

Then Δ is a reducing line for $[h; \mathcal{O}]$.

Proof. We need to show that Δ and $h(\Delta)$ are isotopic relatively to $\mathcal{O}$. Choose a hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - \mathcal{O}$. Taking its image by an isotopy relatively to $\mathcal{O}$ if necessary, we can assume that Δ is geodesic. We denote by f a representative of $[h; \mathcal{O}]$ mapping Δ on $h(\Delta)_\#$. Such an f exists, again according to the straightening principle 2.1.1. Hence Δ and $f(\Delta)$ are geodesic. We need to show that $\Delta = f(\Delta)$. Suppose that $\Delta \neq f(\Delta)$. We know that this two streamlines are in minimal intersection position (because they are geodesic), and we study separately the three possible cases: either Δ and $f(\Delta)$ have several intersection points, either they have only one intersection point, or they do not intersect. Those three cases lead us to contradictions.

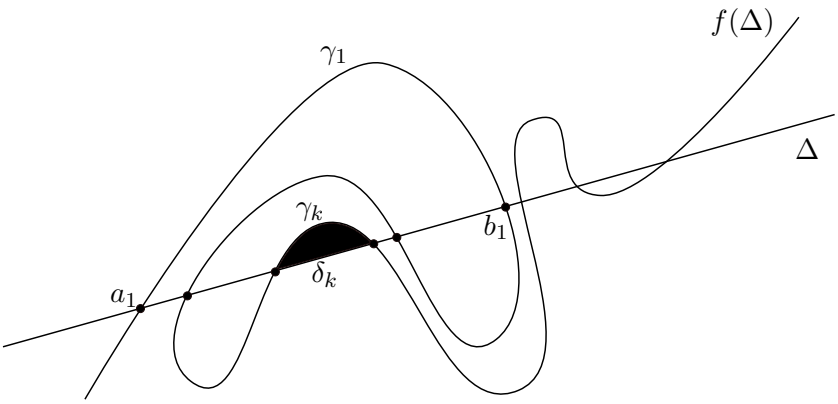

Figure 2.25: Example where Δ and $f(\Delta)$ have several intersection points.

If Δ and $f(\Delta)$ have several intersection points. We consider a subsegment γ_1 of $f(\Delta)$, whose endpoints are intersection points between Δ and $f(\Delta)$, denoted by a_1 and b_1, and such that the open segment $\mathring{\gamma}_1$ is disjoint from Δ (see figure 2.25). Denote by δ_1 the subsegment of Δ between a_1 and b_1. Since δ_1 is compact, it contains finitely many intersection points between Δ and $f(\Delta)$. Denote by n the number of intersections between Δ and $f(\Delta)$. Let us show that we can assume that $n = 0$. If $n > 0$, choose a_2 an intersection point between $\mathring{\delta}_1$ and $f(\Delta)$. Consider the half line $f(\Delta)^+$ defined as the connected component of $f(\Delta) - a_2$ which has a subsegment with endpoint a_2 and which is included in the topological disk bounded by $\gamma_1 \cup \delta_1$. Because $f(\Delta)^+$ is proper, it goes out the topological disk bounded by $\gamma_1 \cup \delta_1$. Hence it intersects again δ_1, because $f(\Delta)$ is without self intersection. Denote by b_2 the first intersection point between $f(\Delta)^+$ and δ_1.

The subsegments δ_2 and γ_2 of Δ and $f(\Delta)$ with endpoints a_2 and b_2 have the same properties than δ_1 and γ_1, but the number of intersection points between Δ and $f(\Delta)$ on δ_2 is less than the one on δ_1. Hence by recurrence there exits k and two subsegments $\delta_k \subset \Delta$ and $\gamma_k \subset f(\Delta)$ with endpoints a_k and b_k, and such that $\delta_k \cap f(\Delta) = \gamma_k \cap \Delta = a_k \cup b_k$.

Denote by D the topological disk bounded by $\delta_k \cup \gamma_k$. We claim that D does not intersect $\mathcal{O}$: if it contains a point of an orbit $\mathcal{O}_i$, denote by x_i this point. Let $n \in \mathbb{Z}$ be such that x_i is an endpoint of $h^n(\alpha_i^-)$. The family $(h^k(\alpha_i^-))_{k\leq n}$ is proper, because α_i^- is backward proper. Applying again the straightening principle 2.1.1, we find a homeomorphism g isotopic to h, which maps Δ on $h(\Delta)_\# = f(\Delta)$ and $h^k(\alpha_i^-)$ on $(h^{k+1}(\alpha_i^-))_\#$ for every $k \leq n$. Moreover, the family $(h^k(\alpha_i^-))_{k\leq n}$ is homotopically disjoint from Δ, according to the third hypothesis of the lemma. Hence $g^k(\alpha_i)$ is disjoint from Δ and $f(\Delta)$ for every $k \leq n$. It follows that $\{h^k(x_i)\}_{k\leq n}$ is included in D. Since the orbits of a Brouwer homeomorphism are proper, this gives a contradiction: D should be disjoint from $\mathcal{O}$, hence it is a bigone, which is also not possible because Δ and $f(\Delta)$ are in minimal position.

If Δ and $f(\Delta)$ have exactly one intersection point. The set $\Delta \cup f(\Delta)$ splits $\mathbb{R}^2$ into 4 connected components. Each of those connected components contains at least one orbit of $\mathcal{O}$: if not, we can find an isotopy relatively to $\mathcal{O}$ which eliminate the intersection point, hence Δ and $f(\Delta)$ are not in minimal position. Choose an orientation on Δ and consider the induced orientation by f on $f(\Delta)$. Then there exists at least one orbit of $\mathcal{O}$ which is on the left of Δ and on the right of $f(\Delta)$. We claim that this is not possible:

- Δ splits $\mathbb{R}^2$ into two topological half plane, denoted by $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$.
- Δ splits the orbits of $\mathcal{O}$ into two families: the family P is the orbits included in $\mathcal{P}$ and the family Q is the orbits included in $\mathcal{Q}$.
- For every orbit $\mathcal{O}_i$ of $\mathcal{O}$, we have $f(\mathcal{O}_i) = \mathcal{O}_i$.

Then $f(\Delta)$ splits $\mathbb{R}^2$ into $f(\mathcal{P})$ and $f(\mathcal{Q})$, hence the orbits into $f(P) = P$ and $f(Q) = Q$.

If Δ and $f(\Delta)$ have no intersection point. The set $\Delta \cup f(\Delta)$ splits $\mathbb{R}^2$ into three connected components. One of them is between Δ and $f(\Delta)$. This component contains at least one orbit, because Δ and $f(\Delta)$ are not isotopic. Now the same argument than in the previous case leads us to a contradiction: choose

an orientation on Δ and consider the induced orientation by f on $f(\Delta)$. There exists at least one orbit of $\mathcal{O}$ which is on the left of Δ and on the right of $f(\Delta)$. This is not possible. $\square$

Corollary 2.5.4. Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let Z be a stable area for $[h;\mathcal{O}]$ which contains at least two orbits of $\mathcal{O}$. Choose a complete family of adjacency areas for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$. Let Δ be a reducing line for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ which is included in Z and disjoint from every chosen backward adjacency area. Then Δ is a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$.

Proof. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2-\mathcal{O}$. We suppose that the boundary components of Z and Δ are geodesic. The straightening principle 2.1.1 gives us $h'\in[h;\mathcal{O}]$ which preserves Z. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family disjoint from the boundary component of Z, such that every α_i^- of Z is included in an adjacency area of the chosen family.

Since Δ is disjoint from every chosen backward adjacency areas, it is disjoint from α_i^- for every i such that α_i^- is in Z. Hence for every $k\in\mathbb{Z}$, Δ is homotopically disjoint from $h'^k(\alpha_i^-)$ relatively to $\mathcal{O}\cap Z$ (because Δ is isotopic to its image by h' relatively to $\mathcal{O}\cap Z$). Since $h'^k(\alpha_i^-)$ is compact and included in Z, which is preserved by h', we get that Δ and $h'^k(\alpha_i^-)$ are homotopically disjoint relatively to $\mathcal{O}$ (and not only relatively to $\mathcal{O}\cap Z$.

It follows from lemma 2.5.3 that Δ is a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$. $\square$

Proof of proposition 2.2.8

Proposition. 2.2.8 (Combinatorics of irreducible areas). *Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class and let Z be an irreducible area for $[h;\mathcal{O}]$. Then:*

1. *The orbits of Z are not all backward adjacent, neither all forward adjacent for $[h;\mathcal{O}]$;*
2. *Z has at least two boundary components;*
3. *The orbits of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ do not alternate.*

Proof of (1)**.** Assume that Z intersects only one forward adjacency area. According to lemma 2.4.1, every $\alpha_i^-\in Z$ is forward proper. Hence Z is not irreducible.

Proof of (2)**.** Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class. Let Z be a stable area for $[h;\mathcal{O}]$ which has only one boundary component and at least two orbits. Denote

by L this boundary component. Suppose that Z is not a translation area. We will find a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$, included in Z and non isotopic to L. Let $(\alpha_i^{\pm})_i$ be a nice family for $[h;\mathcal{O}]$ disjoint from L. There is a subfamily of $(\alpha_i^{\pm})_i$ which is a nice family for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$. Denote by $(\beta_i^{\pm})_i$ this subfamily. We consider the cyclic order of $(\beta_i^{\pm})_i$, and look where is L in this cyclic order: the position of L in the cyclic order is the position of L in the plane relatively to the half homotopy streamlines generated by the $\beta_i^{\pm}$'s. There are two different cases:

(a). If L is between two backward proper arcs or between two forward proper arcs in the cyclic order of $(\beta_i^{\pm})_i$;

(b). If L is between one backward proper arc and one forward proper arc in the cyclic order of $(\beta_i^{\pm})_i$.

Case (a). If L is between two backward proper arcs or between two forward proper arcs in the cyclic order of $(\beta_i^{\pm})_i$, we claim that there exists an adjacency area for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ which contains L. Indeed, assume that L is between two backward proper arcs (the same proof holds with two forward proper arcs, replacing h by h^{-1} when it is necessary). Denote by β_i^- and β_j^- this two backward proper arcs, and suppose their endpoints are respectively $x_i, h(x_i)$ and $x_j, h(x_j)$. Then there exists an arc γ disjoint from L, whose endpoints are $h(x_i)$ and $h(x_j)$ and such that one connected component of the complement of $T^-(\beta_i^-, h, \mathcal{O}) \cup \gamma \cup T^-(\beta_j^-, h, \mathcal{O})$ does not intersect $\mathcal{O}\cap Z$. This shows what we claimed. Now Handel's theorem 2.3.1 implies that there exists a reducing line Δ for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ which is disjoint from every backward adjacency area. Hence Δ is included in Z, and according to corollary 2.5.4, it is a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$.

Case (b). Assume L is between one backward proper arc and one forward proper arc in the cyclic order of $(\beta_i^{\pm})_i$. Denote by β_i^- and β_j^+ this two arcs. Following the construction 2.3.1, we get a complete family of adjacency areas for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ disjoint from L. Now let Δ be a reducing line for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ given by lemma 2.3.4, i.e. such that the intersection between Δ and the complement of the forward adjacency areas of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ is bounded. It follows that Δ intersects L at most in a finite set (because L is disjoint from the adjacency areas). Isotopying Δ if this set is not empty, we can suppose that $\Delta\cap L=\emptyset$. Since Δ is also disjoint from every backward adjacency areas of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$, according to corollary 2.5.4, it is a reducing line for $[h;\mathcal{O}]$.

Proof of (3)**.** According to proposition 2.2.3, there exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h;\mathcal{O}]$ disjoint from the boundary components of Z. We consider the subfamily $(\alpha_j^{\pm})_{j\in J}$, where J is the set of indices j such that $\alpha_j^{\pm}$ is in Z: $(\alpha_j^{\pm})_{j\in J}$ is the subfamily of arcs corresponding to the orbits of $\mathcal{O}\cap Z$. A backward or forward proper arc relatively to $\mathcal{O}$ is again backward or forward proper relatively to $\mathcal{O}\cap Z$, hence $(\alpha_j^{\pm})_{j\in J}$ is a nice family for $[h;\mathcal{O}\cap Z]$.

By contradiction, assume that the orbits of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ alternate. According to lemma 3.6 of [35], every family of alternating orbits satisfies the uniqueness of homotopy translation arcs. It follows that for every $j\in J$, α_j^- and α_j^+ are isotopic relatively to $\mathcal{O}\cap Z$. Since they are included in Z, they are also isotopic relatively to $\mathcal{O}$. Hence for such a j, $T(\alpha_j^-,h,\mathcal{O})$ is a proper streamline. At least one of the boundary components of a tubular neighborhood of this streamline is a reducing line included in Z. Thus Z is not irreducible. □

2.5.3 Corollaries of proposition 2.2.8

Proof of corollary 2.2.2

Corollary. *2.2.2* Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to r orbits. Denote by $2r'$ the number of adjacency subfamilies of $[h;\mathcal{O}]$. If $r'=1,2$ or r, then $[h;\mathcal{O}]$ is a flow class.

Proof. If $[h;\mathcal{O}]$ is not a flow, then there is an irreducible area in its wall complement (according to proposition 2.2.5). This irreducible area has at least two boundary components (according to proposition 2.2.8), which are reducing lines. Denote by Δ_1 and Δ_2 those two boundary components. The complement of $\Delta_1\cup\Delta_2$ has three components, denoted by Z_1, Z_2 and Z. Assume that Z is the area in the middle, which contains the irreducible area. Choose a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h;\mathcal{O}]$ which is disjoint from Δ_1 and Δ_2 (use proposition 2.2.3). Since Z contains an irreducible area, according to proposition 2.2.8 it intersects at least two different backward adjacency areas of $[h;\mathcal{O}]$ and at least two different forward adjacency areas of $[h;\mathcal{O}]$, and the orbits of $[h;\mathcal{O}\cap Z]$ do not alternate. Hence the situation is the one of figure 2.26: there exists a subfamily $(\alpha_{i_1}^-,\alpha_{i_2}^+,\alpha_{i_3}^-,\alpha_{i_4}^+)$ of $(\alpha_i^{\pm})_i$ containing only arcs included in Z and such that the cyclic order of this subfamily is $(\alpha_{i_1}^-,\alpha_{i_2}^+,\alpha_{i_4}^+,\alpha_{i_3}^-)$, with Δ_1 between $\alpha_{i_2}^+$ and $\alpha_{i_4}^+$ and Δ_2 between $\alpha_{i_3}^-$ and $\alpha_{i_1}^-$. Since Z_1 and Z_2 contain at least one orbit (because Δ_1 and Δ_2 are reducing lines), there exist a backward proper arc of $(\alpha_i^{\pm})_i$ in Z_1, denoted by $\alpha_{i_5}^-$,

and a forward proper arc of $(\alpha_i^{\pm})_i$ in Z_2, denoted by $\alpha_{i_6}^+$. It follows that $(\alpha_i^{\pm})_i$ has a subfamily of arcs whose cyclic order at infinity is $(\alpha_{i_1}^-, \alpha_{i_2}^+, \alpha_{i_5}^-, \alpha_{i_4}^+, \alpha_{i_3}^-, \alpha_{i_6}^+)$. Hence $r' \geq 3$. It was shown in [35], Lemma 6.6, that $r' < r$. □

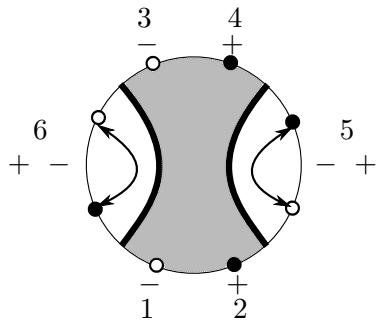

Figure 2.26: Combinatorics of an irreducible area

Proof of corollary 2.2.3

Corollary. ***2.2.3*** Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to r orbits.

1. If $r \geq 3$, there exist at least two disjoint and non isotopic reducing lines for $[h; \mathcal{O}]$;
2. If $r \geq 2$, there exist at least two translation areas for $[h; \mathcal{O}]$ which have exactly one boundary component;
3. There exists a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ and $j \neq k$ such that:
   - Relatively to $\mathcal{O}$, α_j^- is isotopic to α_j^+ and α_k^- is isotopic to α_k^+;
   - In the cyclic order, α_j^- and α_j^+ (respectively α_k^- and α_k^+) are neighbors.

Proof of (1). Let r be greater than 2. Theorem 2.1.3 gives us a first reducing line. This line splits the plane into two stable areas. One of them contains at least two orbits. According to (2) of proposition 2.2.8, every stable area with one boundary component and which contains at least two orbits contains at least one reducing line non isotopic to the boundary component: this gives a second reducing line. □

Proof of (2) *and* (3). If $r = 2$ then any reducing line of $[h; \mathcal{O}]$ splits the plane into two translation areas. If $r \geq 3$ we find two reducing lines as done in the proof of (1). In the complement of these two reducing lines we have in particular two stable areas with one boundary component. In each of these areas, finding again a reducing line in the area as done in (1) if necessary, inductively we find a stable

area with one orbit and one boundary components: this gives (2) and (3). □

2.6 Deflectors

This section is independent of sections 2.3, 2.4 and 2.5. The main result is proposition 2.6.1, that we will need to prove theorem 2.2.5.

Proposition 2.6.1. *Let $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the horizontal translation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$. Let $n \in \mathbb{N}$. Let $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ and $(\beta_i)_{1\leq i\leq n}$ be two families of translation arcs for τ such that:*

- *For every i, α_i and β_i join $(0, i)$ to $(1, i)$.*
- *The α_i's (respectively the β_i's) are mutually disjoint.*

Then there exists a homeomorphism μ of $\mathbb{R}^2$ with a compact support and such that:

1. *$\mu(\mathbb{Z} \times \{1, ..., n\}) = \mathbb{Z} \times \{1, ..., n\}$;*
2. *For every sufficiently large $k \in \mathbb{N}$, for every i, $(\mu\tau)^k(\alpha_i)$ is isotopic relatively to $\mathbb{Z} \times \{1, ..., n\}$ to $\tau^k(\beta_i)$;*
3. *$\mu\tau$ is a Brouwer homeomorphism; More precisely, μ is a finite product of τ-free half twists disjointly supported.*

Definition. Such a homeomorphism is called a *deflector* associated to $(\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq n}$.

Let $\mathcal{C}_n$ be the open vertical cylinder with n marked points at distinct heights. Recall that $\mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ is defined as the quotient of the group of homeomorphisms of the cylinder, fixing each boundary puncture and fixing the set of marked points (not necessary point wise), by its connected component of the identity (for the compact-open topology). In particular, it is the subgroup of the braid group of the $(n + 2)$-punctured sphere $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$ which fixes two punctures.

We use the following lemma in the proof of proposition 2.6.1.

Lemma 2.6.1. Let $(\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$ be a family of mutually disjoint simple closed curves on $\mathcal{C}_n$, such that each curve contains exactly one marked point, and such that each curve is isotopic in the cylinder without marked point to the separating circle. Let $(\gamma'_i)_{1\leq i\leq n}$ be the family of disjoint horizontal circles on the cylinder, such that each γ'_i contains a marked point.

Then there exists $\phi \in \mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ such that:

– For every i, there exists j such that $\phi(\gamma_i)$ is isotopic to γ'_j in $\mathcal{C}_n$;
– ϕ is a finite product of half-twists.

Proof of lemma 2.6.1. We denote again by γ_i, γ'_i the isotopy classes of γ_i, γ'_i when there is no confusion. Let $\varphi \in \mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ such that $(\varphi(\gamma_i))_i = (\gamma'_i)_i$. Then if T is a product of horizontal Dehn twists (around one of the γ'_i's or around a boundary component), $T\varphi$ coincides with φ on the γ_i's.

The group $\mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ as a quotient of a subgroup of the braid group. Denote by B_{n+1} the usual braid group, i.e. the mapping class group of the disk with $n+1$ marked point, denoted by $x_1, ..., x_{n+1}$. Let G be the subgroup of B_{n+1} which fixes x_{n+1}. Thus $\mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ is the quotient of G by the center of B_{n+1} (which is generated by the Dehn twist around the boundary component of the disk).

We will need the three followings to prove the lemma.

(1) Linking number of a pure braid. Denote by P_{n+1} the subgroup of B_{n+1} composed by the pure braids, i.e. the braids which fix point wise the marked point $x_1, ..., x_n$. Let $\rho \in P_{n+1}$ be a pure braid. In the geometric representation of ρ, for every $i \leq n$, the strand from x_i can turn around the strand from x_{n+1} clockwise or counterclockwise. We count $+1$ each time it turns around clockwise, and -1 each time it turns around counterclockwise. We call *linking number of x_i around* x_{n+1} and denote by $\epsilon_i(\rho)$ the sum obtained when we look over the strand from x_i. We define the *total linking number of* ρ as the sum $\epsilon(\rho) := \Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i(\rho)$. Note that ϵ is a morphism from P_{n+1} to $\mathbb{Z}$.

(2) Special form of a pure braid (see for example [30]). The braid $A_{i,j} \in B_{n+1}$ is usually defined as in figure 2.27. More precisely, if we denote by σ_k the usual half twists which generate B_{n+1}, we have:

$$A_{i,j} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}...\sigma_{j+1}\sigma_j^2\sigma_{j+1}^{-1}...\sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^{-1}.$$

Claim A. (see for example [30]) Let $\rho \in P_{n+1}$ be a pure braid. Then ρ can be written as: $\rho = \beta_2...\beta_n\beta_{n+1}$, where every β_k is in the free group generated by $A_{1,k}, ..., A_{k-1,k}$.

(3) Claim B. Let ρ be in the group generated by $A_{1,n+1}, ..., A_{n,n+1}$. Assume that the linking number of ρ is trivial. Then ρ can be written as a finite product of

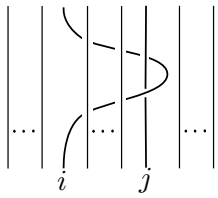

Figure 2.27: The braid $A_{i,j}$.

half twists supported in topological disks disjoint from x_{n+1}.

Proof of claim B. Such an element can be written as:

$$\rho = A_{i_1,n+1}^{k_1} A_{i_2,n+1}^{k_2} ... A_{i_l,n+1}^{k_l} A_{i_{l+1},n+1}^{-(k_1+k_2+...+k_l)},$$

where the k_j's are in $\mathbb{Z}$, the i_j's are integers between 1 and n, and l is a non negative integer. Note that $\epsilon(A_{k,n+1}) = 1$ for every k. Since ϵ is a morphism, $\epsilon(\rho) = 0$ implies that the sum of the powers is trivial.

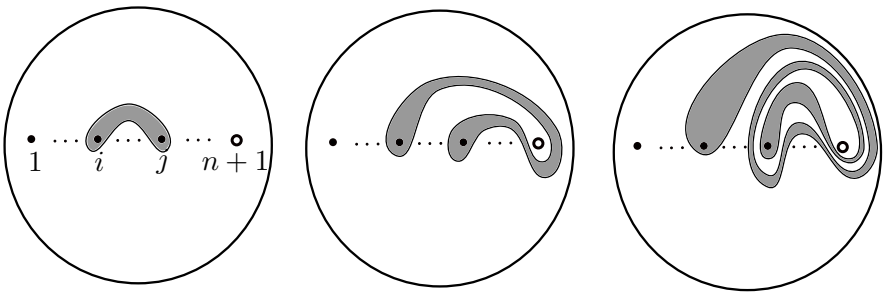

Figure 2.28: Topological disks $D_{i,j}$, $\sigma_{j,n+1}^2(D_{i,j})$ and $\sigma_{j,n+1}^4(D_{i,j})$.

Denote by $\sigma_{i,j}$ the half twist supported in a topological disk $D_{i,j}$ containing x_i and x_j and lying above every other marked points, as the left item of figure 2.28. Note that:

- The conjugate of $\sigma_{i,j}$ by $\sigma_{j,n+1}^{2k}$ is the half twist supported in $\sigma_{j,n+1}^{2k}(D_{i,j})$ (see figure 2.28);
- $A_{i,n+1}^k A_{j,n+1}^{-k} = \sigma_{j,n+1}^{2k} \sigma_{i,j} \sigma_{j,n+1}^{-2k} \sigma_{i,j}^{-1}$ (see figure 2.29).

Thus we know how to realize every $A_{i,n+1}^k A_{j,n+1}^{-k}$ as a product of 2 half twists supported in $D_{i,j}$ and $\sigma_{j,n+1}^{2k}(D_{i,j})$, hence as a product of half twists supported in

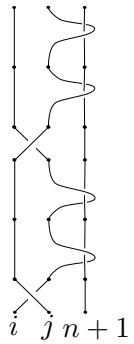

Figure 2.29: $A^2_{i,n+1}A^{-2}_{j,n+1} = \sigma^4_{j,n+1}\sigma_{i,j}\sigma^{-4}_{j,n+1}\sigma^{-1}_{i,j}$.

topological disks disjoint from x_{n+1}. Now remark that ρ can be written as:

$$\rho = A^{k_1}_{i_1,n+1}A^{-k_1}_{i_2,n+1}A^{k_1+k_2}_{i_2,n+1}A^{-(k_1+k_2)}_{i_3,n+1}...A^{k_1+...+k_l}_{i_l,n+1}A^{-(k_1+k_2+...+k_l)}_{i_{l+1},n+1}.$$

Hence we know how to write ρ as a finite product of half twists which are supported in topological disks disjoint from x_{n+1}. □

Back to the proof of lemma 2.6.1. Choose a topological disk K of $\mathcal{C}$ which contains every x_i for $i \leq n$. Every element of B_{n+1} supported in K is in G. Recall that φ is an element of $\mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ satisfying $(\varphi(\gamma_i))_i = (\gamma'_i)_i$. Choose a lift $\hat{\varphi}$ of φ in G. Compose $\hat{\varphi}$ with an element $\sigma \in G$ supported in K and such that $\sigma\hat{\varphi}$ is a pure braid.

(1) Note that the linking number of $\sigma\hat{\varphi}$ does not depend on σ, because its supported in K. Up to composing φ by a finite product of horizontal Dehn twists, we can assume that $\epsilon(\sigma\hat{\varphi}) = 0$.

(2) Since $\sigma\hat{\varphi}$ is a pure braid, according to claim A, we can write it as:

$$\sigma\hat{\varphi} = \beta_2...\beta_n\beta_{n+1},$$

where every β_k is in the free group generated by $A_{1,k}, ..., A_{k-1,k}$.

For every $i \leq k \leq n$, $A_{i,k}$ is supported in K, hence $\beta_2...\beta_n$ is supported K, hence $\epsilon(\beta_k) = 0$ for every $k \leq n$. Since ϵ is a morphism, we have also $\epsilon(\beta_{n+1}) = 0$.

(3) Because the braid group B_n is generated by the usual half twists (see for example [30]), we know how to write any element supported in K as a product of half twists supported in topological disks disjoint from x_{n+1}. Now applying claim

B to β_{n+1}, we also know how to write β_{n+1} as a product of half twists supported in topological disks disjoint from x_{n+1}. Thus we know how to write $\sigma\hat{\varphi}$, hence $\hat{\varphi}$, as a finite product of half twists supported in topological disks disjoint from x_{n+1}. This product defines an element of $\mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ which satisfies the property of the lemma. □

Proof of proposition 2.6.1. Denote by $\mathcal{C}$ the vertical cylinder (quotient of $\mathbb{R}^2$ by τ) and by $\mathcal{C}_n$ the cylinder $\mathcal{C}$ with n marked points (quotient of $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z} \times \{1, ..., n\}$ by τ). Let π be the quotient map. For every i, we denote by $\hat{\alpha}_i$, respectively $\hat{\beta}_i$, the isotopy class of $\pi(\alpha_i)$, respectively $\pi(\beta_i)$, in $\mathcal{C}_n$. There exists $\psi \in \mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ such that $\psi(\hat{\alpha}_i)$ is isotopic in $\mathcal{C}_n$ to the horizontal circle containing the marked point $x_i = \pi(\mathbb{Z} \times \{i\})$. There exists $\chi \in \mathrm{MCG}(\mathcal{C}_n)$ such that $\chi(\hat{\beta}_i)$ is isotopic in $\mathcal{C}_n$ to the horizontal circle containing the marked point $x_i = \pi(\mathbb{Z} \times \{i\})$. We set $\phi := \chi^{-1}\psi$. Hence $\phi(\hat{\alpha}_i)$ is isotopic in $\mathcal{C}_n$ to $\hat{\beta}_i$. According to lemma 2.6.1, we can assume that $\phi := \nu_1 ... \nu_k$ is a finite product of half twists supported in topological disks of $\mathcal{C}$. We want to use ϕ to construct the desired homeomorphism μ (figure 2.30 gives the main idea of the proof).

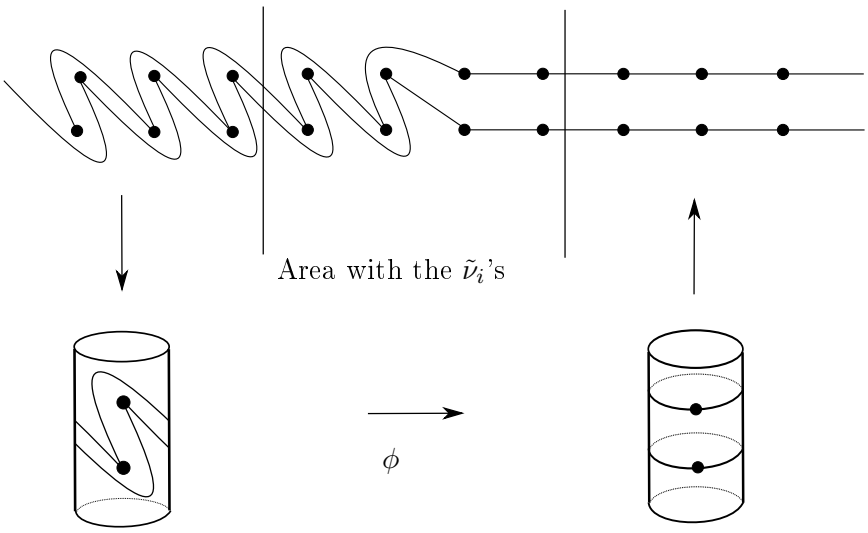

Figure 2.30: Half streamlines $T^+(\alpha_i, \mu\tau, \mathbb{Z} \times \{1, ..., n\})$.

Local lift of a half twist. We first construct a homeomorphism of $\mathbb{R}^2$ which lift the action of *one* half twist of $\mathcal{C}_n$ to the lift of the curves. Let ν be a half twist of $\mathcal{C}_n$. Choose a lift D_ν of the support of ν in $\mathbb{R}^2$. Denote by $\tilde{\nu}$ the homeomorphism of $\mathbb{R}^2$ such that $\pi\tilde{\nu}_{|D_\nu} := \nu\pi_{|D_\nu}$, and such that $\tilde{\nu}$ coincides with Id outside D_ν.

Note that $\mathbb{Z} \times \{1, ..., k\}$ is preserved by $\tilde{\nu}\tau$. We say that $\tilde{\nu}$ is a *local lift of* ν.

Choice of disks. To lift the action of $\phi := \nu_1 ... \nu_k$, we choose a local lift $\tilde{\nu}_k$ of ν_k supported in a disk D_k on the right of the α_i's and for every $1 \leq j < k$, we choose a local lift $\tilde{\nu}_j$ of ν_j supported in a disk D_j on the right of D_{j+1} (and disjoint from D_{j+1}).

Conclusion. Let $\tilde{\mu}$ be $\tilde{\nu}_1 ... \tilde{\nu}_k$. For every x which is on the left of the D_j's, for every n sufficiently large, there exists $(n_j)_j \in \mathbb{N}^{k+1}$ such that:

$$(\tilde{\mu}\tau)^n = \tau^{n_{k+1}} \tilde{\nu}_1 ... \tilde{\nu}_{k-1} \tau^{n_2} \tilde{\nu}_k \tau^{n_1}(x).$$

Moreover, we have the followings:

$$\pi\tilde{\nu} = \nu\pi;$$

$$\pi\tau = \pi.$$

Hence we get:

$$\pi(\tilde{\mu}\tau)^n \alpha_i = \pi\beta_i.$$

□

2.7 Classification relatively to 4 orbits

2.7.1 Identification of the determinant diagrams

Here we want to identify which diagram are determinant diagrams. In the next section, we will study the diagrams which are not determinant. Note that all the diagrams with four orbits are represented in the appendix A.

For every Brouwer mapping class relatively to 4 orbits, we denote by $2r'$ the number of sub-families of adjacency.

Proposition 2.7.1. *A diagram for a Brouwer mapping class relatively to* 4 *orbits is non determinant if and only if it is one of the seven of figure 2.31.*

Proof. According to proposition 2.2.8, every irreducible area for Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits is as in figure 2.32. □

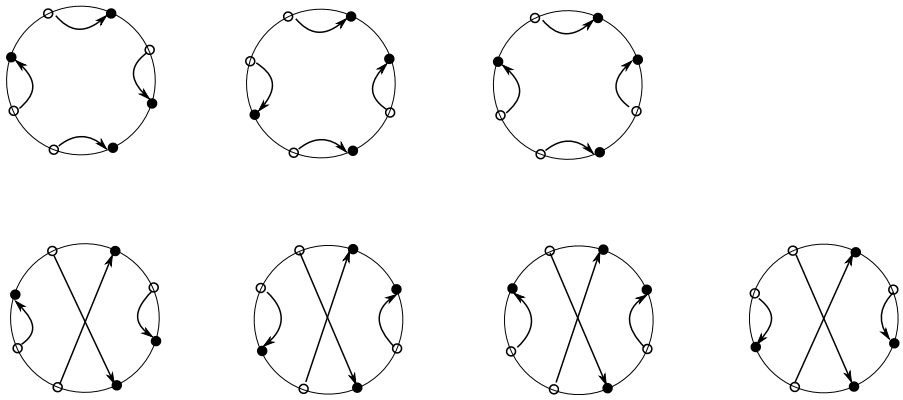

Figure 2.31: Non determinant diagrams for $r = 4$

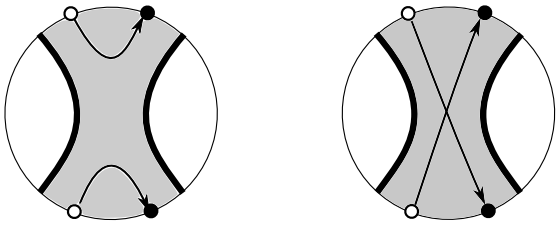

Figure 2.32: Possible irreducible areas for $r = 4$

2.7.2 Study of the non determinant diagrams

Brouwer mapping classes which realize non determinant diagrams

If h is a homeomorphism of the plane, recall that an h-free disk is a topological disk D which is disjoint from every $h^n(D)$, with $n \neq 0$. If $[h; \mathcal{O}]$ is a Brouwer mapping class and if D is an h-free disk containing exactly two points of $\mathcal{O}$, then we call *free half twist* any half twist supported in D and permuting the two points of $D \cap \mathcal{O}$.

Remark 2.7.1. Each non determinant diagram can be realized by a Brouwer mapping class:

- For each non determinant diagram without crossing, there exists a flow having this diagram relatively to some of its orbits (see lemma 1.7 of[35]);
- For each non determinant diagram with crossing, we can obtain it by composing a flow by a free half twist (as in example B of section 2.1).

Tangle of the irreducible area

Let $[h;\mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to 4 orbits which is not a flow class: the diagram with walls of $[h;\mathcal{O}]$ is as in figure 2.33. To simplify the notations, suppose that the two orbits of the irreducible areas are $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$. To define the tangle, we will forget about $\mathcal{O}_3$ and $\mathcal{O}_4$ for a while.

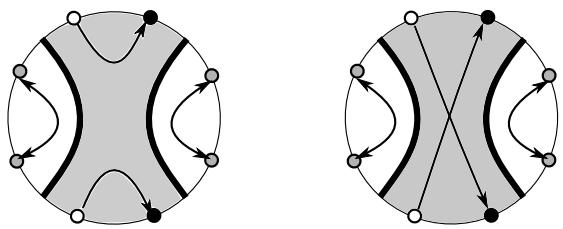

Figure 2.33: Diagrams with an irreducible area for $r = 4$.

Choose a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h;\mathcal{O}]$. Choose a complete hyperbolic metric on $\mathbb{R}^2 - (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$. According to corollary 2.2.2 and proposition 2.2.6 (see also Handel [26]), the diagram relatively to 2 orbits is a total conjugacy invariant, hence $[h;\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2]$ is a translation class. It follows that the 4 homotopic trajectories relative to $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$:

$$T_1^+ := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^k(\alpha_1^+)_\#$$

$$T_1^- := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^k(\alpha_1^-)_\#$$

$$T_2^+ := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^k(\alpha_2^+)_\#$$

$$T_2^- := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^k(\alpha_2^-)_\#$$

are proper homotopic lines. Moreover, the T_i^+'s (respectively the T_i^-'s) are mutually disjoint. Let ϕ be a homeomorphism of the plane that preserves the orientation and sends, for $i = 1, 2$:

- T_i^- on $\mathbb{R} \times \{i\}$;
- $\{x_i\}$ on $(0, i)$ and $\{h(x_i)\}$ on $(1, i)$, where x_i and $h(x_i)$ are the endpoints of α_i^-;
- $\mathcal{O}_i$ on $\mathbb{Z} \times \{i\}$.

Let τ be the horizontal translation of the plane which maps $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ to $(x+1, y)$.

Let π be the quotient map which quotients $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{Z} \times \{1, 2\})$ by τ and let $\mathcal{C}_2$ denotes the quotient pointed cylinder. Note that if we consider $\mathcal{C}_2$ as a vertical cylinder, $\pi(\phi(\alpha_i^-))$ is homotopic in $\mathcal{C}_2$ to a horizontal circle for $i = 1, 2$ (see figure 2.34 for an example).

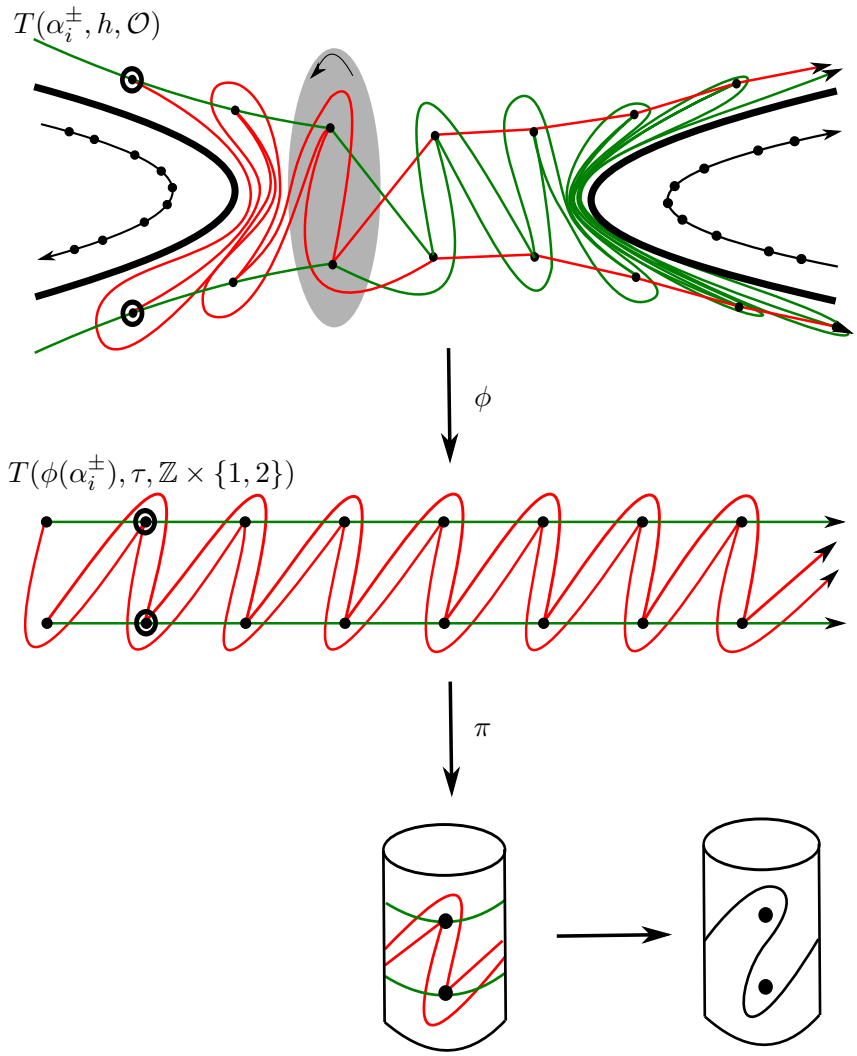

Figure 2.34: Definition of the relative tangle for the example B of section 1 (Brouwer class of the product of a free half-twist with a flow).

Lemma 2.7.1. With the previous notations, the homotopy classes of the arcs $\pi(\phi(\alpha_i^+))$ in $\mathcal{C}_2$ are independent of ϕ.

Proof. If ψ is another homeomorphism with the same properties, then ϕ and ψ

coincide on the two topological lines T_1^- and T_2^-. According to lemma 2.5.1, ϕ and ψ are isotopic relatively to $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, hence $\phi(\alpha_i^+)$ is isotopic to $\psi(\alpha_i^+)$ for $i = 1, 2$. □

Denote by γ a curve which is disjoint from $\pi(\phi(\alpha_1^+))$ and $\pi(\phi(\alpha_2^+))$ and which separates $\mathcal{C}_2$ into two cylinders with puncture, each of them containing one of the $\pi(\phi(\alpha_i^+))$'s. Note that γ is unique up to isotopy in $\mathcal{C}_2$.

Definition. We say that the isotopy class of $\gamma \in \mathcal{C}_2$ is the *tangle of the irreducible area of* $[h; \mathcal{O}]$ *relative to* $(\alpha_i^\pm)_i$.

Remark 2.7.2. Note that γ is never a horizontal circle. Indeed, we could get a horizontal curve only if we had α_i^- isotopic to α_i^+ relatively to $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ for $i = 1, 2$. In this situation we get proper streamlines for every orbit, hence $[h; \mathcal{O}]$ is a flow class: this gives a contradiction because we assumed that there exists an irreducible area for $[h; \mathcal{O}]$.

This relative tangle depend on the choice of the nice family $(\alpha_i^\pm)_i$, hence it is not a conjugacy invariant. However, we have the following lemma:

Lemma 2.7.2. Let $[h; \mathcal{O}]$ be a Brouwer mapping class relatively to 4 orbits. Suppose that $[h; \mathcal{O}]$ is not a flow class. Then if $(\alpha_i^\pm)_i$ and $(\beta_i^\pm)_i$ are two nice families for $[h; \mathcal{O}]$ disjoint from the walls, then for every i there exists n_i such that α_i^-, respectively α_i^+, is isotopic to $h^{n_i}(\beta_i^-)$, respectively $h^{n_i}(\beta_i^+)$ relatively to $\mathcal{O}$.

Proof. This will follow from the description of the adjacency areas of $[h; \mathcal{O}]$. Choose a complete family of adjacency areas for $[h; \mathcal{O}]$ and a representative $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ of the set of walls. For every nice family $(\alpha_i^\pm)_i$ disjoint from $\Delta_1 \cup \Delta_2$, there exists $(m_i, n_i)_i \in (\mathbb{Z}^2)^4$ such that $h^{m_i}(\alpha_i^-)$ and $h^{n_i}(\alpha_i^+)$ are included in adjacency areas. If we fix the endpoints in the adjacency area, there is only one isotopy class of homotopic translation arc included in the chosen adjacency area and disjoint from Δ_1 and Δ_2: indeed there is only one isotopy class of translation arcs for Brouwer class relatively to one orbit (according to corollary 6.3 of Handel [26]). □

We denote by T the left Dehn twist around a separating horizontal circle between the two punctures in $\mathcal{C}_2$.

Lemma 2.7.3. With the previous notations, if $\gamma \in \mathcal{C}_2$ (respectively $\gamma' \in \mathcal{C}_2$) is the tangle of the irreducible area of $[h; \mathcal{O}]$ relative to $(\alpha_i^\pm)_i$ (respectively $(\beta_i^\pm)_i$), then there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $\gamma = T^n \gamma'$.

Proof. This is a consequence of lemma 2.7.2: this lemma implies that if ϕ is as in the previous notations, for $i = 1, 2$ we have:

$$T(\phi(\alpha_i^{\pm}), \tau, \mathbb{Z} \times \{1, 2\}) = T(\phi(h^{n_i}(\beta_i^{\pm})), \tau, \mathbb{Z} \times \{1, 2\}) = T(\phi(\beta_i^{\pm}), \tau, \mathbb{Z} \times \{1, 2\}).$$

Moreover, we have $\phi(h^{n_i}(x_i)) = \tau^{n_i}(\phi(x_i))$.
Since $\phi(x_i) = (0, i)$, it follows that $\phi(h^{n_i}(x_i)) = (n_i, i)$, hence:

$$\pi(\phi(\beta_i^{\pm})) = T^{n_1 - n_2}(\pi(\phi(\alpha_i^{\pm}))).$$

□

Definition. With the previous notations, we define the *tangle of* $[h; \mathcal{O}]$ to be the isotopy class $\gamma \in \mathcal{C}_2$ up to composition by T.

By convention, we set that every flow mapping class has trivial tangle.

Corollary 2.7.4. The couple `(Diagram with walls, Tangle)` is a conjugacy invariant for Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits.

We will need the following result in the section 2.7.3.

Lemma 2.7.5. With the previous notations, let γ be the tangle of the irreducible area of $[h; \mathcal{O}]$ relative to $(\alpha_i^{\pm})_i$, and let γ' be $T^n(\gamma)$ for some $n \in \mathbb{Z}$, where T is the left Dehn twist as above. Then there exists a nice family $(\beta_i^{\pm})_i$ for $[h; \mathcal{O}]$ such that the tangle of the irreducible area of $[h; \mathcal{O}]$ relative to $(\beta_i^{\pm})_i$ is the isotopy class of γ'.

Proof. Define $(\beta_i^{\pm})_i$ as $\beta_1^{\pm} := h^n(\alpha_1^{\pm})$ and $\beta_i^{\pm} := \alpha_i^{\pm}$ for $i = 2, 3, 4$. □

Realized couples (diagram with walls, tangle)

In section 2.7.3, we will show that the couple `(Diagram with walls, Tangle)` is a total conjugacy invariant. Here we find which couples are realized by Brouwer mapping classes relatively to four orbits.

Necessary condition to be realized. Not every couple (Diagram with walls, Tangle) can be realized by a Brouwer mapping class. Indeed, some tangles are associated to non determinant diagram with crossing arrows, and some other tangles are associated to non determinant diagram without crossing arrows. To

be more precise, denote by p and q the two marked points of $\mathcal{C}_2$, and suppose that p is above q. If γ is a curve of $\mathcal{C}_2$ representing the tangle, the marked point of $\mathcal{C}_2$ which is *above* γ (i.e. in the connected component of the complementary of γ which contains the top of the cylinder $\mathcal{C}_2$) can be p or q, depending on the tangles.

Moreover, this point represents the orbit whose forward half streamline is above on the picture, hence whose arrow ends above the other on the diagram. It follows that if this point is p, then the diagram is without crossing, and if this point is q, the diagram has a crossing. We say that such a tangle *adapted* to the diagram. See figure 2.35 for two examples:

- On the tangle of the left, p is above γ, hence it is the tangle of a diagram without crossing;
- On the tangle of the right, q is above γ, hence it is the tangle of a diagram with crossing.

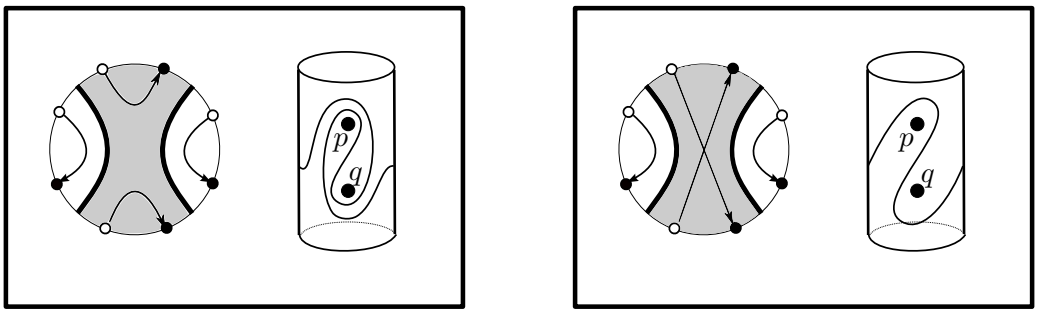

Figure 2.35: Examples of two diagrams with adapted tangles.

Note that there are infinitely many tangles adapted to each diagram.

Realizing the adapted tangles. Given a couple (diagram, tangle) such that the tangle is adapted to the diagram, we can produce a Brouwer homeomorphism which realizes this couple as follow. Denote by (D, τ) the given couple.

1. (a) If the diagram D does not have crossing arrows, then we define $D' = D$;
   (b) If the diagram D has crossing arrows, we consider the diagram D' obtained by exchanging the ends of the two crossing arrows. This is a diagram without crossing arrows;
2. We choose a flow f which realizes the diagram D' without walls and such that there exists a f-free disk which contains one point of each orbit $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ (as in example A of section 2.1), where $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ are the two orbits of the irreducible area of D;

3. By reversing the process of the definition of the tangle given in section 2.7.2, we get two families of translation arcs. Proposition 2.6.1 provides us a finite product μ of mutually disjointly supported f-free half twists such that the tangle of $[\mu f; \mathcal{O}]$ is τ. Note also that the diagram associated to $[\mu f; \mathcal{O}]$ is D.

Infinitely many Brouwer mapping classes relatively to four orbits

Proposition 2.7.2. *Up to conjugacy, there are (countably) infinitely many Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits.*

Proof. There are infinitely many tangles adapted to each non determinant diagram (see figure 2.35 for examples). Each of them is realized by a product of a flow with finitely many free half twist disjointly supported (using proposition 2.6.1, see the second paragraph of section 2.7.2). It follows from corollary 2.7.4 that there are infinitely many Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits. □

2.7.3 A total conjugacy invariant

In this section we want to show theorem 2.2.5, namely that two Brouwer mapping classes relatively to four orbits are conjugated if and only if they have the same invariant couple:

`(Diagram with walls, Tangle).`

The following lemma 2.7.6 together with lemma 2.7.5 give the proof of theorem 2.2.5: indeed if $[h; \mathcal{O}]$ and $[h'; \mathcal{O}']$ have the same invariant couple, then lemma 2.7.5 provides us a nice family $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h; \mathcal{O}]$ and a nice family $(\beta_i^{\pm})_i$ for $[h'; \mathcal{O}']$ such that $[h; \mathcal{O}]$ and $[h'; \mathcal{O}']$ have the same tangle relative to their nice family. Hence they satisfy the hypothesis of lemma 2.7.6, which says that they are conjugated.

Lemma 2.7.6. Let $[h; \mathcal{O}]$ and $[h'; \mathcal{O}']$ be two Brouwer mapping classes relatively to 4 orbits such that:

- They have the same diagram with walls;
- There exist two nice families $(\alpha_i^{\pm})_i$ for $[h; \mathcal{O}]$ and $(\beta_i^{\pm})_i$ for $[h'; \mathcal{O}']$ such that the two Brouwer mapping classes have the same relative tangle relative to their nice family;

Then $[h; \mathcal{O}]$ and $[h'; \mathcal{O}']$ are conjugated.

Proof. Note that if the diagram with walls of $[h;\mathcal{O}]$ has crossing arrows, then this two crossing arrows are in an irreducible area: indeed they are in the same connected component of the walls, which is not a translation area, hence it is an irreducible area (according to theorem 2.2.1). If the diagram with walls is without any irreducible area, then $[h;\mathcal{O}]$ and $[h';\mathcal{O}']$ are conjugated (this is proposition 2.2.7).

Let us consider the case when there exists an irreducible area. We suppose that the orbits which intersect this area are indexed by 1 and 2. Denote by Z and Z' the irreducible areas of $[h;\mathcal{O}]$ and $[h';\mathcal{O}']$ respectively. We assume that h preserves Z and h' preserves Z'. Denote by τ the translation of the plane which maps every $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ to $(x+1,y)$. Denote by ϕ a homeomorphism of the plane as needed to define the tangle for $[h;\mathcal{O}]$, i.e. which maps:

- $T_1^- \cup T_2^-$ on $\mathbb{R}\times\{1,2\}$;
- $\{x_1,x_2\}$ on $\{0\}\times\{1,2\}$, where x_i and $h(x_i)$ are the endpoints of α_i^-;
- $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ on $\mathbb{Z}\times\{1,2\}$;

where $T_i^\pm := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^k(\alpha_i^\pm)_\#$.

Likewise, denote by ψ a homeomorphism which maps:

- $T_1'^- \cup T_2'^-$ on $\mathbb{R}\times\{1,2\}$;
- $\{x_1',x_2'\}$ on $\{0\}\times\{1,2\}$, where x_i' and $h(x_i')$ are the endpoints of β_i^-;
- $\mathcal{O}_1'\cup\mathcal{O}_2'$ on $\mathbb{Z}\times\{1,2\}$;

where $T_i'^\pm := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h'^k(\alpha_i'^\pm)_\#$.

Since the two classes have the same tangle relatively to their nice families, by definition of ϕ and ψ we have: $(\phi\alpha_i^\pm)_\# = (\psi\beta_i^\pm)_\#$ for $i=1,2$. Denote by $\gamma_i^\pm$ these arcs.

Claim 1. There exists $\phi'\in[\phi;\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2]$ and $\psi'\in[\psi';\mathcal{O}_1'\cup\mathcal{O}_2']$ such that $\phi' Z = \psi' Z'$.

Proof of the claim. Denote by Δ_1, respectively Δ_2, the boundary component of Z which is disjoint from $T_1^-\cup T_2^-$, respectively disjoint from $T_1^+\cup T_2^+$. Since they are disjoint, we may assume that $\phi(\Delta_1)$ is included in the left half plane and $\phi(\Delta_2)$ is included in the right half plane. Similary, we denote by Δ_1' and Δ_2' the boundary components of Z', disjoint respectively from $T_1'^-\cup T_2'^-$ and $T_1'^+\cup T_2'^+$, and we assume that $\psi(\Delta_1')$ is included in the left half plane and $\psi(\Delta_2')$ is included in the right half plane. Now $\phi(\Delta_1)$ and $\psi(\Delta_1')$ are lines included in the half left strip between $\mathbb{R}\times\{1\}$ and $\mathbb{R}\times\{2\}$: there exists a homeomorphism

λ_1 supported in this half strip and which sends $\phi(\Delta_1)$ on $\psi(\Delta_1')$. Similary there exists a homeomorphism λ_2 supported in the right half strip between $\bigcup_{n\geq 0}\tau^n(\gamma_1)$ and $\bigcup_{n\geq 0}\tau^n(\gamma_2)$ and sending $\phi(\Delta_2)$ on $\psi(\Delta_2')$. It follows that $\lambda_1\lambda_2\phi(Z)=\psi(Z')$. Since $\lambda_1\lambda_2$ is isotopic to the identity relatively to $\mathbb{R}\times\{1,2\}$, $\lambda_1\lambda_2\phi$ is isotopic to ϕ. □

Back to the proof of lemma 2.7.6. Up to isotopying ϕ relatively to $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ and ψ relatively to $\mathcal{O}_1'\cup\mathcal{O}_2'$ as in claim 1, we may assume that $\phi Z=\psi Z'$.

According to proposition 2.6.1, there exists a finite product of τ-free half twists disjointly supported and such that for every sufficiently large $k\in\mathbb{N}$, $(\mu\tau)^k(\gamma_i^-)$ is isotopic relatively to $\mathbb{Z}\times\{1,2\}$ to $\tau^k(\gamma_i^+)$ for $i=1,2$. Since μ is compactly supported, we can suppose that this support is included in $\phi(Z)=\psi(Z')$.

Claim 2. With the previous notations, we claim that $[\phi^{-1}\mu\phi h;\mathcal{O}]$ and $[\psi^{-1}\mu\psi h';\mathcal{O}']$ are flow classes.

Proof of the claim. We do the proof for $[\phi^{-1}\mu\phi h;\mathcal{O}]$: relatively to $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$, for every sufficiently large $k\in\mathbb{N}$, for $i=1,2$, $(\phi^{-1}\mu\phi h)^k(\alpha_i^-)$ is isotopic to $h^k(\alpha_i^+)$. Because μ is supported in $\phi(Z)$, $\phi^{-1}\mu\phi$ is supported in Z, and since h preserves Z, it follows that $\phi^{-1}\mu\phi h$ also preserves Z. Since α_i^- is included in Z, and since $\mathcal{O}_3$ and $\mathcal{O}_4$ do not intersect Z, $(\phi^{-1}\mu\phi h)^k(\alpha_i^-)$ is isotopic to $h^k(\alpha_i^+)$ relatively to $\mathcal{O}$ (and not only relatively to $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$). Since α_i^+ is a forward proper arc for $[h;\mathcal{O}]$, it follows that $T(\alpha_i^-,\phi^{-1}\mu\phi h,\mathcal{O})$ is a proper streamline. Since $\phi^{-1}\mu\phi$ is supported in Z, h is equal to $\phi^{-1}\mu\phi h$ outside Z, hence for $j=3,4$, $T(\alpha_j^-,\phi^{-1}\mu\phi h,\mathcal{O})=T(\alpha_j^-,h,\mathcal{O})$, thus is also a proper streamline. By lemma 2.5.2, it follows that $[\phi^{-1}\mu\phi h;\mathcal{O}]$ is a flow class. □

Back to the proof of lemma 2.7.6. Denote by f and g two flows such that:

$$[f;\mathcal{O}]=[\phi^{-1}\mu\phi h;\mathcal{O}]\ \texttt{and}\ [g;\mathcal{O}']=[\psi^{-1}\mu\psi h';\mathcal{O}'].$$

For every i, denote by T_i, respectively by T_i', the proper streamline $T(\alpha_i^-,f,\mathcal{O})$, respectively $T(\beta_i^-,g,\mathcal{O}')$. Changing ψ in the complement of Z' if necessary, we assume that $\phi^{-1}\psi$ maps T_3' on T_3, $\mathcal{O}_3'$ on $\mathcal{O}_3$, T_4' on T_4 and $\mathcal{O}_4'$ on $\mathcal{O}_4$. This is possible because the diagrams of $[h;\mathcal{O}]$ and $[h';\mathcal{O}']$ are the same. Note that for every $k\in\mathbb{Z}$, $\phi^{-1}\psi(\psi^{-1}\mu\psi h')^k(\beta)$ is isotopic to $(\phi^{-1}\mu\phi h)^k(\alpha_i^-)$ relatively to $\mathcal{O}$ for

$i = 1, 2$. Hence $T_i = \phi^{-1}\psi(T'_i)$ for every i. According to lemma 2.5.1, we get:

$$[\phi^{-1}\psi g\psi^{-1}\phi; \mathcal{O}] = [f; \mathcal{O}].$$

Composing both parts by $\phi^{-1}\mu^{-1}\phi$, we can check that:

$$[(\phi^{-1}\psi)h'(\phi^{-1}\psi)^{-1}; \mathcal{O}] = [h; \mathcal{O}].$$

Hence $[h; \mathcal{O}]$ and $[h'; \mathcal{O}']$ are conjugated. $\square$

Appendix A

Diagrams with four orbits

Here we represent all the diagrams with four orbits (figures A.1, A.2, A.3 and A.4). If a diagram can be obtained with a Brouwer mapping class, then we also draw the possible sets of walls, and color in grey the eventual irreducible areas. We put together in the same dashed box the diagrams which are the same without walls but which have different possible sets of walls. We get three different types of diagrams:

1. The full-framed diagrams are the ones with a Handel's cycle: according to Handel's fixed point theorem (theorem 2.3 of [26]), they cannot be obtained with Brouwer homeomorphisms. Also we forget them to describe Brouwer mapping classes relatively to four orbits;
2. The diagrams without irreducible areas are the determinant ones. Every of them can be realized by a Brouwer mapping class (according to lemma 1.7 of [35]). Moreover, up to conjugation, this Brouwer mapping class is unique and it is a flow class (propositions 2.2.5 and 2.2.6);
3. The diagrams with an irreducible area (in grey) are the eight non determinant ones. Up to conjugation, every of them can be realized by infinitely many Brouwer mapping classes. For those diagrams, the tangle allows us to differentiate the different Brouwer mapping classes (see sections 2.7.2 and 2.7.3).

We still denote by $2r'$ the number of families of adjacency.

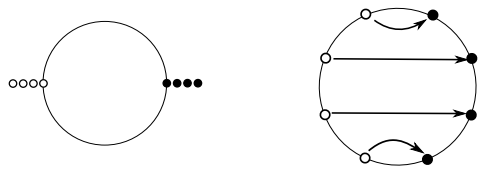

Figure A.1: Diagram for $r = 4$ and $r' = 1$.

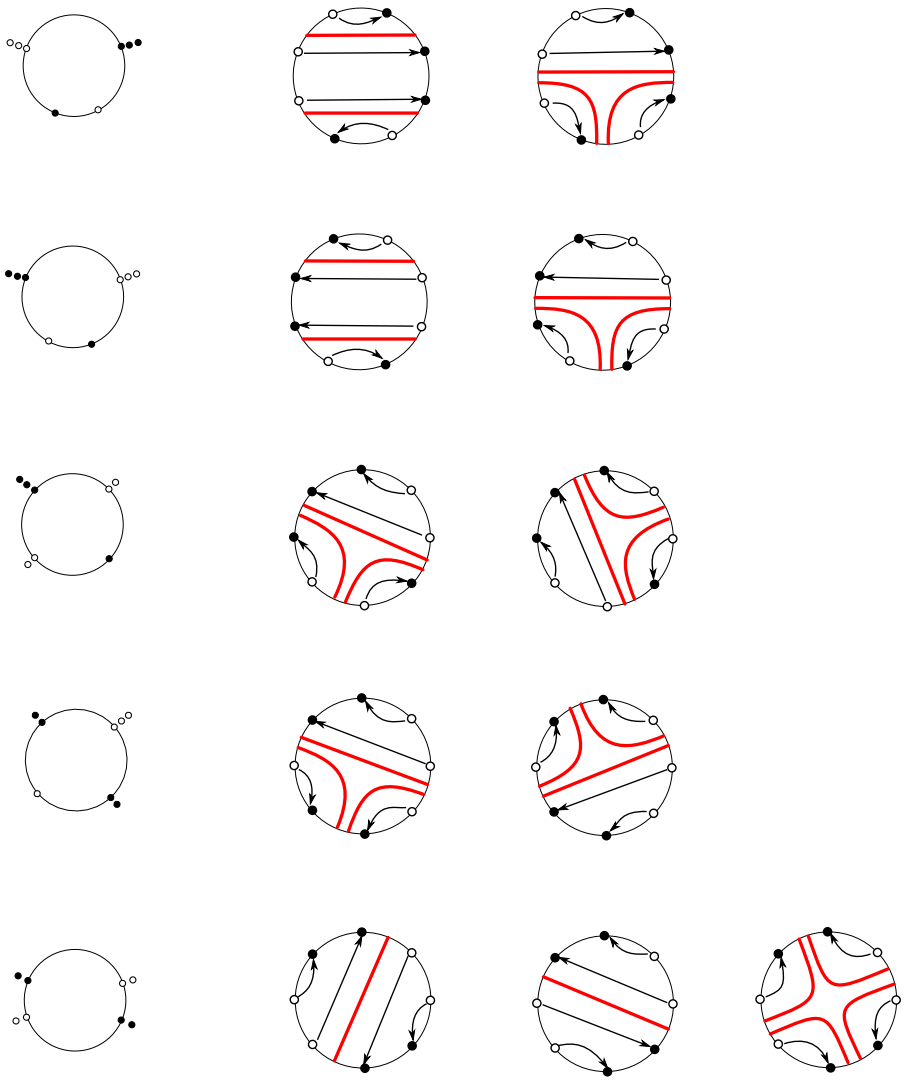

Figure A.2: Diagrams for $r = 4$ and $r' = 2$.

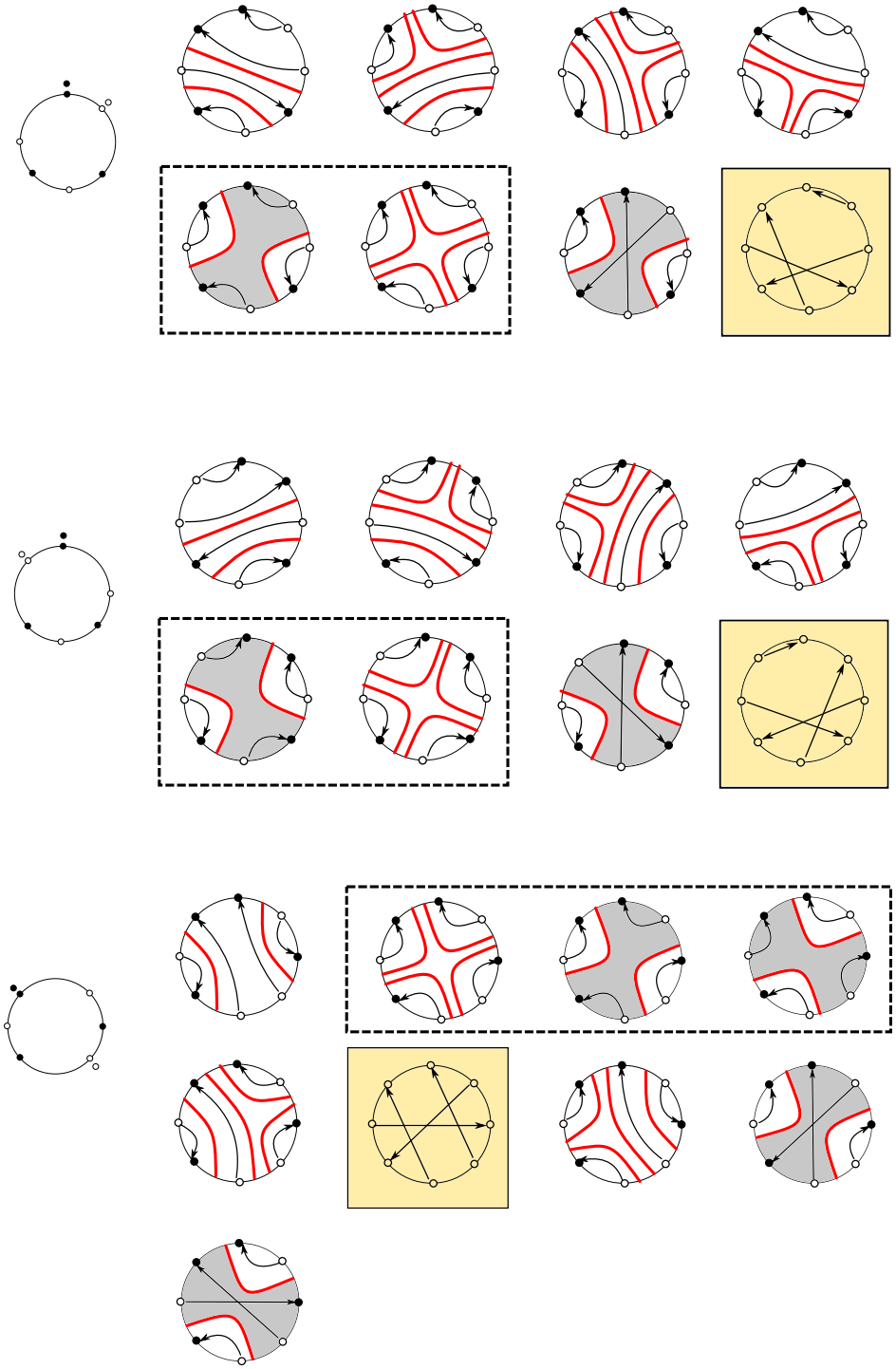

Figure A.3: Diagrams for $r = 4$ and $r' = 3$.

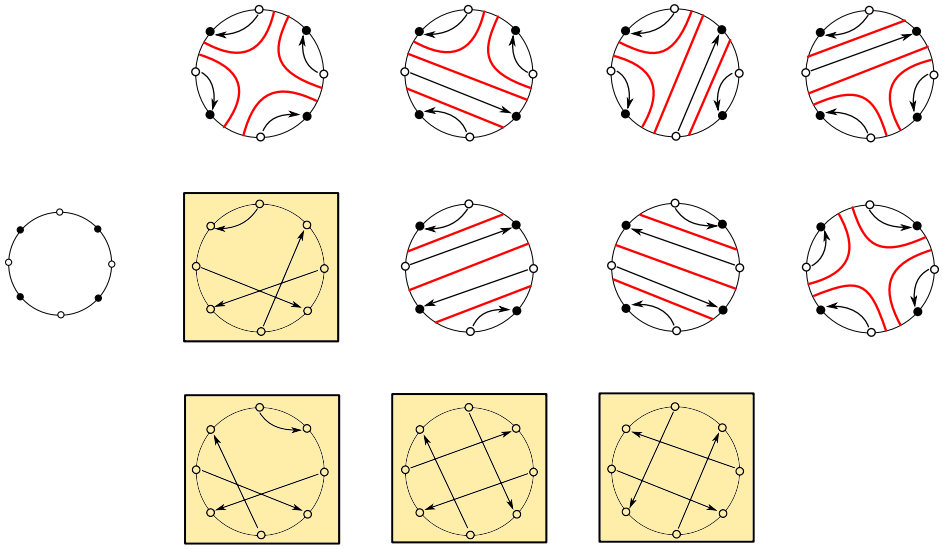

Figure A.4: Diagrams for $r = 4$ and $r' = 4$.

Bibliographie

[1] Jean Barge and Étienne Ghys. Surfaces et cohomologie bornée. *Invent. Math.*, 92(3) :509–526, 1988.

[2] Christophe Bavard. Longueur stable des commutateurs. *Enseign. Math. (2)*, 37(1-2) :109–150, 1991.

[3] Juliette Bavard. Conjugacy invariants for brouwer mapping classes. *arXiv :1507.02960, à paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

[4] Juliette Bavard. Hyperbolicité du graphe des rayons et quasi-morphismes sur un gros groupe modulaire. *arXiv :1409.6566, à paraître dans Geometry & Topology.*

[5] François Béguin, Sylvain Crovisier, and Frédéric Le Roux. Construction of curious minimal uniquely ergodic homeomorphisms on manifolds : the Denjoy-Rees technique. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(2) :251–308, 2007.

[6] M. Bestvina, K. Bromberg, and K. Fujiwara. Stable commutator lenght on mapping class groups. arXiv :1306.2394.

[7] Mladen Bestvina and Koji Fujiwara. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 6 :69–89 (electronic), 2002.

[8] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] Robert Brooks. Some remarks on bounded cohomology. In *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 53–63. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[10] M. Burger and N. Monod. Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(2) :199–235, 1999.

[11] Danny Calegari. Big mapping class groups and dynamic. `http://lamington.wordpress.com/2009/06/22/big-mapping-class-groups-and-dynamics/`, 2009.

[12] Danny Calegari. *scl*, volume 20 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[13] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[14] H. Endo and D. Kotschick. Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups. *Invent. Math.*, 144(1) :169–175, 2001.

[15] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.*, 115 :83–107, 1966.

[16] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 2011.

[17] John Franks and Michael Handel. Area preserving group actions on surfaces. *Geom. Topol.*, 7 :757–771 (electronic), 2003.

[18] John Franks and Michael Handel. Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms. *Geom. Topol.*, 7 :713–756 (electronic), 2003.

[19] Koji Fujiwara. The second bounded cohomology of a group acting on a Gromov-hyperbolic space. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 76(1) :70–94, 1998.

[20] Louis Funar, Christophe Kapoudjian, and Vlad Sergiescu. Asymptotically rigid mapping class groups and Thompson's groups. In *Handbook of Teichmüller theory. Volume III*, volume 17 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 595–664. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.

[21] Louis Funar and Yurii. Neretin. Diffeomorphisms groups of cantor sets and thompson-type groups. arXiv :1411.4855.

[22] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4) :329–407, 2001.

[23] Peter Greenberg and Vlad Sergiescu. An acyclic extension of the braid group. *Comment. Math. Helv.*, 66(1) :109–138, 1991.

[24] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56) :5–99 (1983), 1982.

[25] Lucien Guillou. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology*, 33(2) :331–351, 1994.

[26] Michael Handel. A fixed-point theorem for planar homeomorphisms. *Topology*, 38(2) :235–264, 1999.

[27] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C.H. Webb. Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. arXiv :1301.5577v1.

[28] Sebastian Hurtado and Emmanuel. Militon. Distortion and tits alternative in smooth mapping class groups. arXiv :1506.02877.

[29] Nikolai V. Ivanov. Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces. In *Progress in knot theory and related topics*, volume 56 of *Travaux en Cours*, pages 113–120. Hermann, Paris, 1997.

[30] Christian Kassel and Vladimir Turaev. *Braid Groups*, volume 247 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.

[31] Erica Klarreich. The boundary at infinity of the curve complex and the relative teichmüller space, preprint, 2009.

[32] Mustafa Korkmaz. Stable commutator length of a Dehn twist. *Michigan Math. J.*, 52(1) :23–31, 2004.

[33] Patrice Le Calvez. Une nouvelle preuve du théorème de point fixe de Handel. *Geom. Topol.*, 10 :2299–2349 (electronic), 2006.

[34] Patrice Le Calvez and Fabio Tal. Forcing theory for transverse trajectories of surface homeomorphisms. arXiv :1503.09127.

[35] Frédéric Le Roux. An index for Brouwer homeomorphisms and homotopy Brouwer theory. *arXiv :1401.2333, à paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

[36] Frédéric Le Roux. An introduction to Handel's homotopy Brouwer theory. arXiv :1208.0985, 2012.

[37] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1) :103–149, 1999.

[38] S. Matsumoto. Arnold conjecture for surface homeomorphisms. In *Proceedings of the French-Japanese Conference "Hyperspace Topologies and Applications" (La Bussière, 1997)*, volume 104, pages 191–214, 2000.

[39] R. L. Moore. Concerning upper semi-continuous collections of continua. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 27(4) :416–428, 1925.