



**HAL**  
open science

# Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre-ruban composite.

François Guinot

► **To cite this version:**

François Guinot. Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre-ruban composite.. Mécanique [physics.med-ph]. Université d'Aix Marseille 1, 2011. Français. NNT: . tel-01311627

**HAL Id: tel-01311627**

**<https://theses.hal.science/tel-01311627v1>**

Submitted on 4 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PROVENCE (AIX-MARSEILLE I)

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I**

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**François GUINOT**

le 5 janvier 2011

Titre :

**DÉPLOIEMENT RÉGULÉ DE STRUCTURES  
SPATIALES : VERS UN MODÈLE  
UNIDIMENSIONNEL DE MÈTRE RUBAN  
COMPOSITE**

---

**Directeur de thèse :**

Bruno COCHELIN

**Co-directeurs :**

Stéphane BOURGEOIS - Christian HOCHARD

---

**JURY**

Mr M. POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Président du jury
Mr P.A. BOUCARD	Professeur, IUT de Cachan	Rapporteur
Mr S. NEUKIRCH	Chargé de Recherche, Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Mr B. MAURIN	Professeur, Université de Montpellier	Examineur
Mr B. COCHELIN,	Professeur, Ecole Centrale Marseille	Directeur de thèse
Mr C. HOCHARD	Professeur, Université de Provence	Co-directeur
Mr S. BOURGEOIS	Maître de Conférences, Ecole Centrale Marseille	Co-directeur
Mr L. BLANCHARD	Ingénieur de Recherche, THALES ALENIA SPACE	Invité



UNIVERSITE DE PROVENCE (AIX-MARSEILLE I)

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I**

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**François GUINOT**

le 5 janvier 2011

Titre :

**DÉPLOIEMENT RÉGULÉ DE STRUCTURES  
SPATIALES : VERS UN MODÈLE  
UNIDIMENSIONNEL DE MÈTRE RUBAN  
COMPOSITE**

---

**Directeur de thèse :**

Bruno COCHELIN

**Co-directeurs :**

Stéphane BOURGEOIS - Christian HOCHARD

---

**JURY**

Mr M. POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Président du jury
Mr P.A. BOUCARD	Professeur, IUT de Cachan	Rapporteur
Mr S. NEUKIRCH	Chargé de Recherche, Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Mr B. MAURIN	Professeur, Université de Montpellier	Examineur
Mr B. COCHELIN,	Professeur, Ecole Centrale Marseille	Directeur de thèse
Mr C. HOCHARD	Professeur, Université de Provence	Co-directeur
Mr S. BOURGEOIS	Maître de Conférences, Ecole Centrale Marseille	Co-directeur
Mr L. BLANCHARD	Ingénieur de Recherche, THALES ALENIA SPACE	Invité



*"L'art de la citation est l'art de ceux qui ne savent pas réfléchir par eux-mêmes ."*  
*- Voltaire -*



## Remerciements

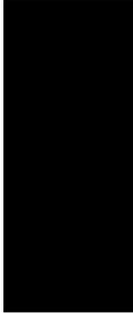
Cette aventure de trois ans, co-financée par la région PACA et la société Thales Alenia Space, a été rendue possible grâce à la participation plus ou moins directe d'un grand nombre de personnes. En particulier, elle ne serait pas arrivée à terme sans la liberté totale qui nous a été laissée par le Service Recherche de Thales Alenia Space dirigé par Frédéric Falzon et dont les membres Laurent Blanchard, Julien Ducarne et Arnaud Allezy ont été des interlocuteurs à l'écoute et très ouverts d'esprit.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mes trois encadrants, Stéphane Bourgeois, Bruno Coche-  
lin et Christian Hochard. Qu'ils sachent que leur patience, leur gentillesse, leurs conseils avisés et leur vision de la recherche qu'ils m'ont transmise, m'ont permis de passer trois années extrêmement enrichissantes. Encore merci. J'espère de tout cœur que nous pourrons continuer à échanger de la sorte dans le cadre de projets communs, présents et futurs. Je remercie également José Penalver d'avoir accepté de participer à la phase expérimentale de ce projet.

Je tiens à souligner la bonne humeur qui a régné (et qui règne encore, j'en suis persuadé) dans les couloirs du plot 6 de l'Ecole Centrale Marseille. Je remercie très chaleureusement les deux comparses Jean Garrigues et Thierry Desoyer pour les conseils prodigués mais aussi pour les conversations plus ou moins saugrenues partagées autour de rafraîchissements... J'ai beaucoup appris à leurs côtés. Cette ambiance n'aurait pas été aussi légère sans la présence des autres membres de cette fine équipe. Merci donc à Stéphane Lejeunes, Adanane Boukamel, Dominique Eyheramendy (sans faute), Olivier Débordes mais aussi aux doctorant(e)s ayant ou non partagé le bureau 109 : Julie, Romain, Elia, Grégory, Farid, Doumé, pour l'ensemble des services rendus et autres ballades en voilier.

Enfin je ne peux oublier ni les fléchiverbistes de passage ni les vététistes du dimanche, non moins amateurs de Chouffe : Jean-Michel, Jean-Marie, Séverin, Geoffroy, OlivierS. Merci à tous pour ces instants passés ensemble!





---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<hr data-bbox="370 1106 1297 1111"/>	
<b>Partie 1 : Structures déployables</b>	<b>3</b>
<hr data-bbox="370 1274 1297 1279"/>	
<b>Chapitre 1 Des structures spatiales déployables aux mètres rubans</b>	
1.1 Déploiement de structures spatiales - généralités . . . . .	7
1.1.1 Déploiement d'éléments 2D . . . . .	8
1.1.2 Déploiement d'éléments 1D . . . . .	11
1.2 Mètres rubans . . . . .	14
1.2.1 Généralités et propriétés . . . . .	14
1.2.2 Structures constituées de mètres rubans . . . . .	16
1.2.3 Rubans bistables . . . . .	21
1.3 Télescopes spatiaux déployables . . . . .	23
1.3.1 Introduction . . . . .	23
1.3.2 Projet Thales Alenia Space . . . . .	24
1.4 Conclusion du premier chapitre . . . . .	25

---

<b>Chapitre 2 Rubans hybrides</b>	<b>27</b>
2.1 Principe . . . . .	29
2.2 Faisabilité du concept . . . . .	31
2.2.1 Essais numériques . . . . .	31
2.2.2 Essais expérimentaux . . . . .	34
2.3 Conclusion du deuxième chapitre . . . . .	36

---

## **Partie 2 : Un modèle de poutre à section fortement déformable** **39**

---

<b>Chapitre 3 Choix de modélisation et enjeux scientifiques</b>	
3.1 Modélisations existantes de mètres rubans . . . . .	43
3.1.1 Modèles de coque résolus par éléments finis . . . . .	43
3.1.2 Modèles unidimensionnels discrets . . . . .	45
3.1.3 Cas particulier du ruban bistable . . . . .	48
3.2 Modélisations de poutres à section déformable . . . . .	54
3.3 Conclusion du troisième chapitre . . . . .	54

---

<b>Chapitre 4 Écriture du modèle</b>	<b>57</b>
4.1 Hypothèses de base et cinématique . . . . .	59
4.2 Mesure des déformations et énergie de déformation . . . . .	61
4.2.1 Mesure des déformations . . . . .	61
4.2.2 Petites déformations de membrane . . . . .	63
4.2.3 Énergie de déformation . . . . .	64
4.3 Énergie Cinétique . . . . .	66
4.4 Principe d'Hamilton et multiplicateur de Lagrange . . . . .	67
4.5 Application au mètre ruban . . . . .	68
4.5.1 Cinématique particulière . . . . .	68
4.5.2 Déformations . . . . .	69
4.5.3 Énergie des efforts extérieurs et conditions limites . . . . .	69
4.6 Conclusion du quatrième chapitre . . . . .	70

<b>Chapitre 5 Exploitation du modèle</b>	<b>71</b>
5.1 Méthode de résolution numérique . . . . .	73
5.1.1 Implémentation dans COMSOL . . . . .	73

---

5.1.2	Choix de maillage et problèmes numériques rencontrés . . . . .	74
5.2	Essais Statiques . . . . .	77
5.2.1	Confrontation à quelques tests de références . . . . .	77
5.2.2	Pliage . . . . .	79
5.2.3	Va-et-vient . . . . .	86
5.2.4	Flambage par flexion . . . . .	87
5.2.5	Flambage par flexion (bis) . . . . .	91
5.2.6	Flambage par compression et influence des conditions limites . . . . .	92
5.2.7	Stockage d'énergie de déformation . . . . .	94
5.3	Essais Dynamiques . . . . .	95
5.3.1	Aplatissement sous gravité . . . . .	95
5.3.2	Lâchés sous gravité et influence des conditions limites . . . . .	97
5.3.3	Déroulement d'un ruban bistable . . . . .	101
5.3.4	Déploiement d'un ruban enroulé . . . . .	103
5.4	Structures multi-rubans . . . . .	104
5.5	Enrichissement de la cinématique . . . . .	104
5.6	Conclusion du cinquième chapitre . . . . .	106

---

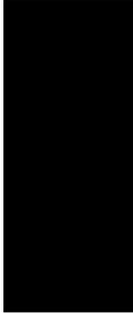
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>107</b>
------------------------------------	------------

---

<b>Annexe - Fonctions caractéristiques pour une section circulaire</b>	<b>111</b>
--	------------

<b>Bibliographie</b>	<b>115</b>
----------------------	------------





---

# Introduction

Les travaux de thèse présentés dans ce document s'inscrivent dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique de Marseille (LMA) et le *Service Recherche Technologie Science et Observation* de la société Thales Alenia Space, qui a pour mission de réfléchir en amont aux nouveaux concepts qui répondront aux futurs enjeux de l'observation spatiale. Un des projets en cours de développement est la conception d'un télescope spatial constitué de deux miroirs dont le secondaire est déployable. L'objectif est de concevoir une structure à la compacité élevée, au déploiement fiable, contrôlable et précis. La concrétisation d'un tel projet passe par l'utilisation et le développement de connaissances dans les domaines de la mécanique des structures, des systèmes dynamiques instables, de la modélisation numérique et de la mise en œuvre des matériaux composites. Il s'agit d'axes de recherche largement abordés au sein des différentes équipes du LMA.

Le thème général de ces travaux concerne l'étude de mètres rubans d'un point de vue expérimental, théorique et numérique. Ces structures minces et souples, présentant une rigidité importante dans leur état déployé, ont la capacité de subir des changements importants de forme tout en restant dans le domaine élastique. Ce sont ces propriétés remarquables qui sont exploitées pour le déploiement de l'hexapode qui constitue la structure du télescope spatial. Il s'avère que les rubans existants à l'heure actuelle ne répondent pas toujours de manière satisfaisante aux attentes et aux exigences de fiabilité. Il est donc nécessaire d'imaginer, de tester et de modéliser un nouveau type de ruban dont on maîtrise parfaitement le comportement.

Ce mémoire est divisé en deux parties. La première, constituée de deux chapitres, traite de généralités sur les structures spatiales déployables et met l'accent sur la proposition d'un nouveau concept de ruban permettant un déploiement régulé. La seconde partie, composée de trois chapitres, est dédiée à la mise au point d'un modèle original de poutre à section fortement déformable pour simuler la dynamique des rubans.

Le premier chapitre permet de cerner le contexte industriel dans lequel s'inscrit le projet de Thales Alenia Space de concevoir un nouveau type de télescope spatial déployable. Une revue des différentes solutions utilisées pour le déploiement de grandes structures spatiales montre que l'emploi de rubans enroulables et déroulables permet à la fois, de minimiser le volume de la structure dans son état compact, et d'assurer une bonne précision lors du déploiement. Néanmoins, les inconvénients liés à l'utilisation de rubans métalliques font naître le besoin de développer un nouveau type de rubans à la vitesse de déroulement maîtrisée.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation d'un nouveau concept breveté de ruban répondant à la problématique dégagée dans le premier chapitre. Ce ruban hybride est la combinaison de deux matériaux : un stratifié de carbone assurant la rigidité de l'ensemble et une (ou plusieurs) couche(s) de matériau visco-élastique, assurant à froid le verrouillage de la position enroulée et permettant un déroulement maîtrisé par un chauffage localisé. Les premiers tests expérimentaux et modélisations par éléments finis ont mis en exergue les phases de blocage et de déroulement d'un tel ruban, mais aussi les limites de ce concept.

Le troisième chapitre a pour but de recenser les méthodes existantes de modélisation de rubans. Afin d'appréhender les enjeux liés à une telle modélisation, l'ensemble des méthodes décrites dans la littérature ont été reproduites. Il apparaît qu'il n'existe pas de méthode satisfaisante qui permettrait une étude fine et simple du comportement mécanique fortement non linéaire et instable des rubans. Il est donc nécessaire de développer un modèle suffisamment simple dont la mise en œuvre serait aisée et suffisamment riche pour décrire le comportement dynamique des rubans.

Le quatrième chapitre présente l'écriture d'un modèle dynamique original de poutre à section fortement déformable en grands déplacements et sa particularisation au cas des mètres rubans. L'approche adoptée est basée sur le calcul des énergies cinétique et de déformation de coque. Une intégration sur la section dont le mouvement est décrit par une cinématique de type *Elastica* permet la réduction du modèle 2D de coque à un modèle 1D de poutre indépendant de la méthode de résolution adoptée par la suite. Le modèle obtenu fait intervenir seulement quatre variables cinématiques, ayant un sens mécanique clair. Ceci permet au travers des équations, d'interpréter les phénomènes de couplage entre les variations de forme de la section et le comportement global de poutre.

Le cinquième et dernier chapitre montre les capacités du modèle à reproduire qualitativement l'ensemble des phénomènes plus ou moins complexes observés expérimentalement. De nombreuses simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis COMSOL qui effectue la différenciation (classiquement appliquée dans le principe d'Hamilton) des expressions des énergies du problème. Des essais statiques (pliages, flambages, enroulement) et dynamiques (lâchés sous gravité, déroulement, déploiement) sur des rubans uniques et sur des systèmes multi-rubans ont été menés à bien.

# Partie 1 : Structures déployables



---

# Des structures spatiales déployables aux mètres rubans

**A** fin de permettre la mise en orbite d'engins de grande taille, l'utilisation de structures spatiales déployables s'est généralisée. Dans ce chapitre, un bref état de l'art des solutions de déploiement existantes est établi afin de cerner le contexte industriel dans lequel s'inscrit le projet de Thales Alenia Space dont le but est de développer un nouveau type de télescope spatial déployable. L'originalité de ce nouveau concept réside dans l'utilisation de six actionneurs à rubans pour assurer le déploiement du miroir secondaire. Une attention particulière est donc portée au ruban en tant qu'élément de structure déployable mais également sur ses propriétés intrinsèques.

## PLAN DU CHAPITRE 1

---

<b>1.1</b>	<b>Déploiement de structures spatiales - généralités</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1.1	Déploiement d'éléments 2D . . . . .	8
1.1.1.a	Articulations motorisées . . . . .	8
1.1.1.b	Structures gonflées . . . . .	9
1.1.1.c	Libération d'énergie élastique stockée . . . . .	10
1.1.2	Déploiement d'éléments 1D . . . . .	11
1.1.2.a	Articulations motorisées . . . . .	11
1.1.2.b	Structures gonflées . . . . .	12
1.1.2.c	Libération d'énergie élastique stockée . . . . .	13
<b>1.2</b>	<b>Mètres rubans</b> . . . . .	<b>14</b>
1.2.1	Généralités et propriétés . . . . .	14
1.2.2	Structures constituées de mètres rubans . . . . .	16
1.2.2.a	Structures déployables . . . . .	16
1.2.2.b	Charnières . . . . .	17
1.2.3	Rubans bistables . . . . .	21
1.2.3.a	Propriétés . . . . .	21
1.2.3.b	Fabrication . . . . .	22
<b>1.3</b>	<b>Télescopes spatiaux déployables</b> . . . . .	<b>23</b>
1.3.1	Introduction . . . . .	23
1.3.2	Projet Thales Alenia Space . . . . .	24
<b>1.4</b>	<b>Conclusion du premier chapitre</b> . . . . .	<b>25</b>

---

## 1.1 Déploiement de structures spatiales - généralités

Les structures déployables sont des structures capables de changer de configuration de manière autonome, le processus de transformation étant ou non réversible. De la plante qui déploie ses feuilles pour capter plus de lumière à la chrysalide qui se métamorphose en un insecte aux ailes dépliées, les mécanismes de déploiement sont extrêmement courants dans la nature [63].



FIGURE 1.1 – Différents scénarios de déploiements naturels.

L'étude de ces mécanismes n'est pas réservée au seul domaine de la biologie mais intéresse au plus haut point les ingénieurs qui s'inspirent régulièrement de la nature pour développer de nouveaux concepts par biomimétisme. Le déploiement de pétales de fleurs ou d'ailes initialement repliées a inspiré la conception des premiers aéronefs ainsi que des antennes spatiales modernes (figures 1.1 et 1.2).



FIGURE 1.2 – L'avion III de Clément Ader directement inspiré des ailes déployées d'une chauve-souris.

Depuis la mise en orbite du tout premier satellite (Spoutnik en 1957), la taille des structures spatiales n'a cessé d'augmenter plus rapidement que le volume disponible dans la coiffe des lanceurs (le compartiment de la fusée Ariane 5 dans lequel sont transportés les satellites a un diamètre de 4.56 m et une longueur avoisinant les 11 m). En plus de la réduction de volume occupé, les structures dans leur configuration compacte sont plus à même d'encaisser les efforts engendrés par la phase de lancement. En revanche, le déploiement est une phase critique qui doit assurer un positionnement précis des instruments. Il s'agit donc de minimiser le ratio (*masse/volume*)/*précision*.

On peut classer les structures spatiales déployables en deux grandes catégories : les structures surfaciques à deux dimensions (les réflecteurs paraboliques par exemple) et les structures dont le déploiement s'effectue dans une direction privilégiée (les mâts par exemple). Ces deux catégories de structures utilisent des technologies de déploiement similaires : des structures aux articulations motorisées, des structures gonflables et des structures souples se déployant grâce à la libération d'énergie élastique préalablement emmagasinée.

### 1.1.1 Déploiement d'éléments 2D

Les surfaces planes déployées dans l'espace regroupent les réflecteurs paraboliques des antennes permettant le transfert d'informations à très haut débit, les panneaux solaires fournissant l'énergie électrique aux satellites et plus récemment les voiles solaires. Ces dernières, toujours à l'état d'expérimentation, ont pour but de propulser des engins spatiaux grâce à la pression exercée par les photons.

#### 1.1.1.a Articulations motorisées

Inspirés de la floraison des plantes, de nombreux concepts d'antennes réflectrices déployables composées de pétales ont vu le jour. Le *Deployable Antenna Integral System* DAISY (figure 1.3) a été développé par l'Agence Spatiale Européenne (ESA). Les panneaux constituant le réflecteur sont connectés à un moyeu central, leur orientation ayant été déterminée par de nombreuses simulations de déploiement afin d'éviter toute interférence. Le démonstrateur construit a vu son diamètre de 8 m dans son état déployé réduit à 4.7 m dans sa configuration compacte [27]. Guest et Pellegrino [27] proposent un nouveau principe d'arrangement de pétales avec le *Solid*

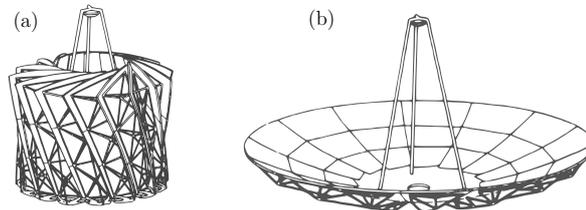


FIGURE 1.3 – DAISY dans les configurations compacte (a) et déployée (b).

*Surface Deployable Antenna* (figure 1.4), concept offrant une réduction importante de taille grâce à leur agencement particulier. Un prototype de 1.5 m de diamètre a été conçu. Ses six pétales déployés par autant de moteurs permettent d'obtenir un diamètre compact de 0.56 m. Les calculs prévisionnels montrent qu'en augmentant le nombre de pétales à 7, le diamètre de stockage avoisine 0.36 m.

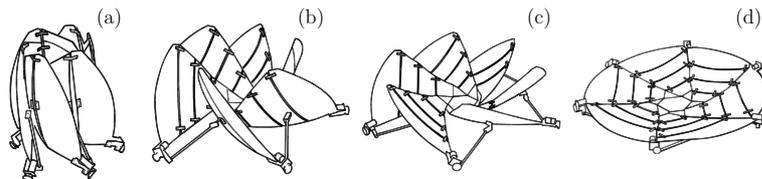


FIGURE 1.4 – Séquences de déploiement des 6 pétales du SSDA.

### 1.1.1.b Structures gonflées

Afin de maximiser la compacité et de minimiser la masse des structures, des antennes gonflables ont été développées ; leur inconvénient majeur réside dans la difficulté à atteindre la précision requise lors du déploiement de la surface réfléchissante. La figure 1.5 présente l'*Inflatable Space Rigidised Structure* (ISRS), une antenne gonflable de 12 m de diamètre composée de Kevlar et de résine époxy et développée par l'ESA et la société *Contraves* [43]. La cuisson de la résine s'effectue lorsque la structure est en orbite et positionnée face au soleil.



FIGURE 1.5 – ISRS, une antenne réflectrice gonflable.

La photographie de la figure 1.6 a été prise en 1996 et présente un autre exemple de structure gonflable de 14 m de diamètre, l'*Inflatable Antenna Experiment*, réalisée à l'aide d'un film de Mylar de  $6.5 \mu\text{m}$  d'épaisseur et dont la masse totale est environ de 60 kg [20].



FIGURE 1.6 – Déploiement de l'IAE dans l'espace.

### 1.1.1.c Libération d'énergie élastique stockée

Le troisième type de technologie utilisée repose sur la seule dissipation de l'énergie élastique emmagasinée lors du stockage. Dans les années 70, la NASA et la société *Lockheed Missiles and Space Company* développèrent le concept de *Wrap-Rib Antenna*. Une antenne dont le principe de stockage est comparable à celui d'un parapluie, la surface réfléchissante étant pliable. Ce type d'antenne est constitué de bandes élastiques enroulées autour d'un moyeu central. Lors de la mise en orbite, le câble de rétention est coupé et les bandes élastiques libèrent l'énergie de déformation élastique et recouvrent leur position originelle. L'antenne ATS-6 présentée à la figure 1.7 est un exemple de ce principe. Ses 48 bandes de fibres de carbone permettent le déploiement de la parabole de 9.1 m de diamètre en environ 2 s.

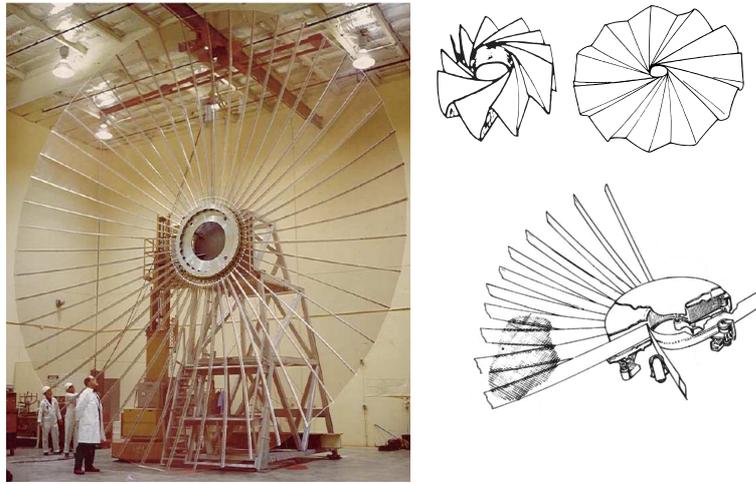


FIGURE 1.7 – Principe de déploiement de l'ATS-6.

La société *Hughes Space and Communication Company* a développé un concept original d'antenne [49], la *Springback Antenna* (SBA), constituée d'une structure en graphite flexible élastiquement à la manière d'un tortilla (figure 1.8). L'inconvénient de cette méthode est que le gain de place est assez faible. En revanche le degré de précision atteint après déploiement est supérieur aux surfaces pliables. S'inspirant du SSDA présenté à la figure 1.4, Tibbalds propose un système

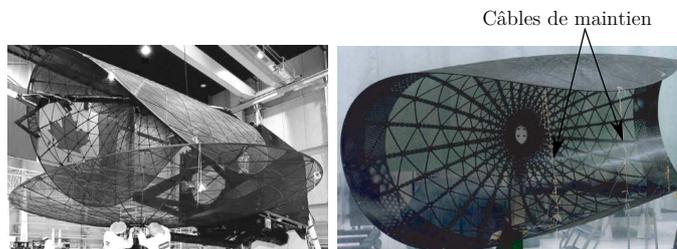


FIGURE 1.8 – L'antenne SBA dans les configurations compacte et déployée.

d'agencement de pétales, non plus déployés à l'aide de moteurs mais de manière élastique (figure 1.9). Un modèle permet d'optimiser la géométrie des pétales ainsi que leur positionnement dans l'état compact [61].

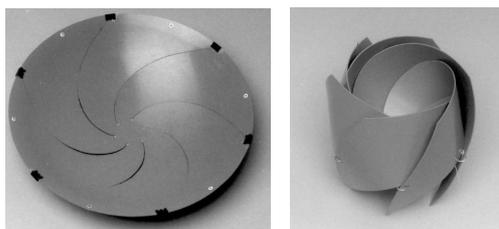


FIGURE 1.9 – Modèle réduit du principe proposé par Tibbalds [61].

### 1.1.2 Déploiement d'éléments 1D

Les mâts sont typiquement utilisés pour éloigner des appareils électroniques afin d'éviter toute interférence ou pour supporter d'autres structures telles que les panneaux ou les voiles solaires. De nombreux concepts de mâts existent et peuvent être également classés selon les trois catégories précédemment citées.

#### 1.1.2.a Articulations motorisées

A la fin des années 60, le mât enroulable a été inventé par Mauch de l'*Astro Research Corporation*. Ce type de mât est constitué de 3 longerons reliés entre eux par des éléments diagonaux et perpendiculaires. Le stockage du mât s'effectue par l'enroulement des longerons. Les mâts enroulables de grande taille sont déployés par un moteur placé dans un coffre à la base du mât. La figure 1.10 (a) est une illustration de l'*Able Deployable Articulated Mast (ADAM)* développé par la société américaine Able Engineering [1] et dont l'état compact a un volume correspondant à moins de 5 % du volume de l'état déployé.

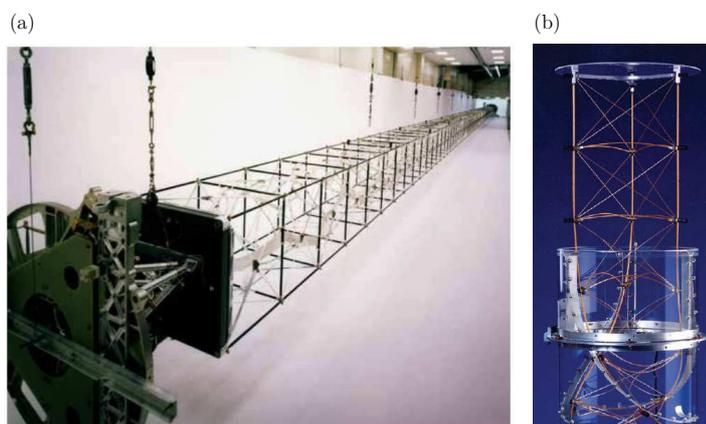


FIGURE 1.10 – Le mât ADAM dans sa configuration déployée (a) ; mât enroulable dans sa phase de déploiement (b).

### 1.1.2.b Structures gonflées

Les mâts gonflables ne peuvent supporter de lourdes charges mais sont idéaux pour le déploiement de cellules solaires et présentent d'excellentes propriétés de compacité. EADS Space Transportation a mis au point un mât constitué de 3 couches de polyimide et de composites à fibres de verre durcis par photo-cuisson [40] et a construit un démonstrateur (figure 1.11).



FIGURE 1.11 – Cellules solaires déployées par un mât gonflable.

Le DLR (centre national allemand de la recherche aérospatiale) a développé un mât gonflable en fibres de carbone dont la demi-section est un oméga [14]. Dans sa configuration compacte, le mât est enroulé sur lui-même et est maintenu en position à l'aide de bandes Velcro. A l'intérieur se trouve une vessie en polymère dans laquelle est injectée la pression (figure 1.12).



FIGURE 1.12 – Mat gonflable de section en forme de double oméga.

### 1.1.2.c Libération d'énergie élastique stockée

De même que pour les antennes paraboliques, certains mâts se déploient de manière autonome par libération d'énergie de déformation élastique. Le *Storable Tubular Extendible Member* (STEM), inventé au début des années 60 [46], est un concept associant motorisation et libération d'énergie de déformation stockée. Le principe est le même que celui du mètre-ruban et est illustré par la figure 1.13. Le déploiement s'effectue par une rotation de l'enrouleur mais la libération de l'énergie élastique permet à la section de se refermer naturellement et d'obtenir un mât tubulaire rigide.

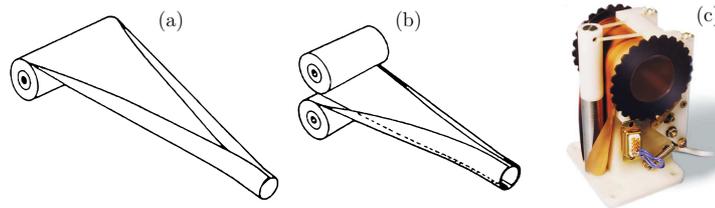


FIGURE 1.13 – Exemple de mâts tubulaires enroulables : STEM (a), bi-STEM (b), stockage d'un STEM [3].

Dans le cadre du programme *Space Technology 8*, initialement prévu en 2009 mais annulé depuis, la NASA a mis au point un mât enroulable nommé *SailMast* qui comme son nom l'indique a pour but le déploiement de voiles solaires [36]. Il est constitué de 3 longerons en fibres de carbone formant un triangle équilatéral reliés entre eux par des "lames" et des éléments diagonaux assurant une rigidité de torsion. La configuration compacte occupe un volume correspondant à moins de 1 % du volume de l'état déployé. L'énergie élastique emmagasinée dans les longerons est suffisante pour assurer un déploiement autonome. La figure 1.14 en présente le principe.

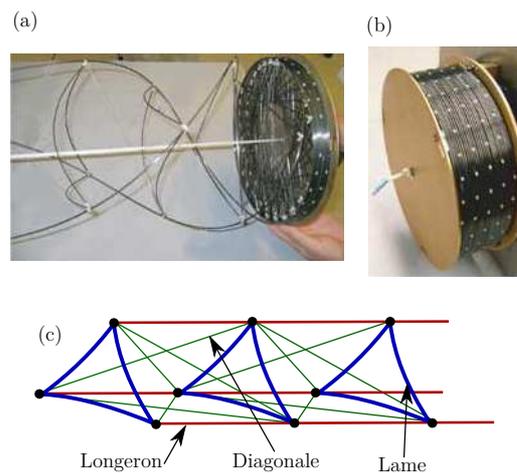


FIGURE 1.14 – Principe du SailMast (c), en phase de déploiement (a), et dans son état compact (b).

L. Puig propose une revue récente et détaillée des mâts déployables [42]. Parmi les éléments déployables basés sur la libération d'énergie, le mètre ruban est largement utilisé. Une étude détaillée de ces structures d'apparence simple permet d'en cerner les avantages.

## 1.2 Mètres rubans

### 1.2.1 Généralités et propriétés

Le mètre-ruban constitue la structure déployable à lame souple la plus simple. Comme le montre la figure 1.15 sa géométrie est parfaitement définie par sa longueur  $L$ , son rayon de courbure  $R$ , son degré d'ouverture  $\beta$  et son épaisseur constante  $h$ .

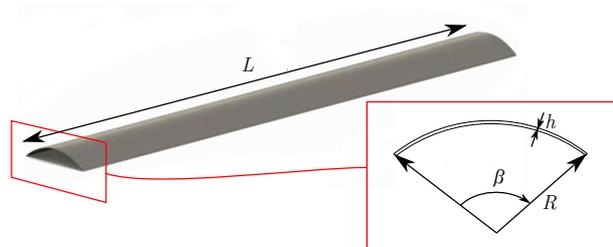


FIGURE 1.15 – Géométrie d'un mètre-ruban.

La courbure transversale introduit une non-linéarité géométrique qui permet à la structure de subir de grandes variations de forme dans le domaine élastique grâce à l'apparition de pliages localisés. Elle permet également d'obtenir une rigidité de flexion importante lorsque le ruban est dans son état déplié. Leur capacité à se déformer et donc à atteindre un niveau de compacité élevé font des rubans une solution parfaitement adaptée au déploiement de structures spatiales. La figure 1.16 (a) met en évidence 3 zones caractéristiques : une portion droite où la courbure transversale reste inchangée, une portion plate où la courbure transversale est nulle et où une courbure longitudinale est apparue, une zone faisant la transition entre la portion non déformée et la portion plate.

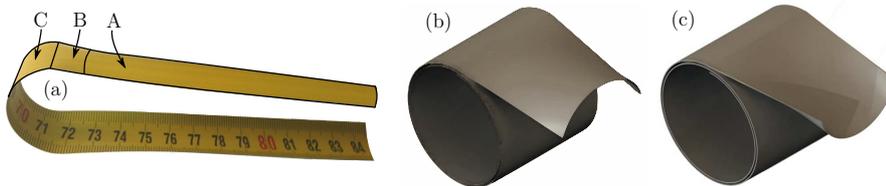


FIGURE 1.16 – Pliage localisé d'un ruban avec une portion non déformée (A), une portion plate (C) et une zone de transition (B) (a); enroulement d'un ruban avec courbures de mêmes signes (b) et de signes opposés (c).

Lorsqu'un ruban est plié, c'est à dire qu'il présente une zone où la courbure transversale est nulle, sa résistance mécanique à des efforts de flexion est quasi nulle. Un tel pliage peut s'obtenir par flambage par flexion, lorsqu'on applique des moments aux deux extrémités d'un ruban. Différents auteurs se sont attachés à déterminer expérimentalement le moment critique de flambage [66][54]. La figure 1.17 (b) présente schématiquement la courbe obtenue pour un essai de flexion d'un mètre ruban (avec courbures de signes opposés) par pilotage de la rotation des sections des extrémités. Lors du chargement, le moment passe par un maximum, diminue ensuite légèrement pour chuter brusquement. C'est à cet instant que se produit le flambage et que le pliage localisé apparaît. L'essai se poursuit à moment constant. Lors du déchargement, la courbe ne suit pas

le même chemin. Cela se traduit visuellement par la persistance d'une zone plate alors que les deux bras ont quasiment retrouvé leur position horizontale initiale. Lors d'un essai de flexion avec courbures de même signe, des instabilités de torsion apparaissent très rapidement et il est extrêmement difficile de mettre en évidence le claquage systématiquement observé pour un essai de flexion avec courbures de signes opposés.

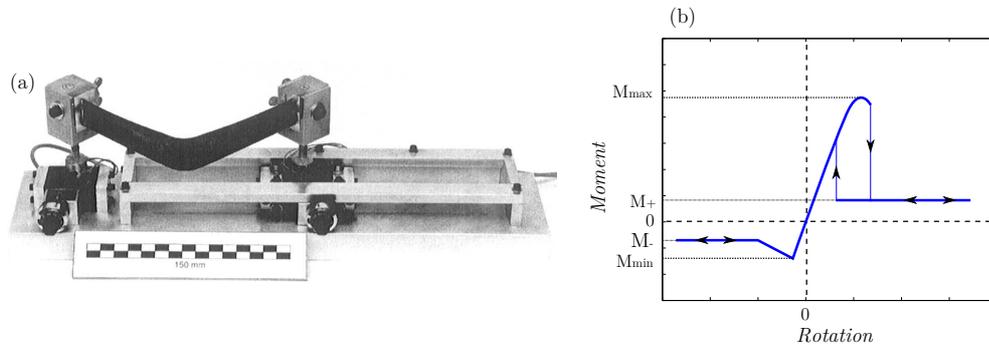


FIGURE 1.17 – Machine de sollicitation 3D de mètres-rubans (a) ; évolution caractéristique du moment en fonction de la rotation de la section pour un essai de flexion (b), (les courbures sont de signe opposé dans les cadrans de droite et de même signe dans ceux de gauche).

Des tests plus complexes ont été menés afin d'étudier leur comportement hors plan et leur comportement dynamique. Par exemple Walker a analysé de manière optique la courbure transversale d'une zone de pliage plan et hors plan afin d'identifier l'influence de la torsion [67]. Il en a conclu que dans le cas d'un pliage 2D, la longueur du ruban n'avait pas d'impact sur la zone de pliage contrairement au pliage 3D. Il a également mis au point un banc d'essai permettant de tester en flexion et en torsion les mètres rubans (figure 1.18) [66].

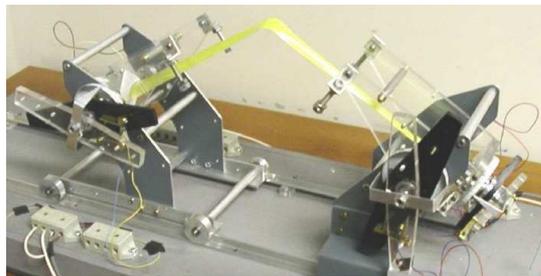


FIGURE 1.18 – Banc d'essais permettant des sollicitations bi-axiales.

Seffen et Pellegrino ont testé expérimentalement des scénarios de déploiement de rubans préalablement enroulés ou pliés dans le but de valider leurs modèles (présentés au paragraphe 3.1) [53]. La figure 1.19 met en évidence le déplacement de la zone de pliage localisé lors d'un essai de lâcher d'un ruban initialement plié.

L'étude et la compréhension du comportement de rubans individuels sont indispensables pour le développement de structures complexes résultant de l'association de plusieurs rubans.

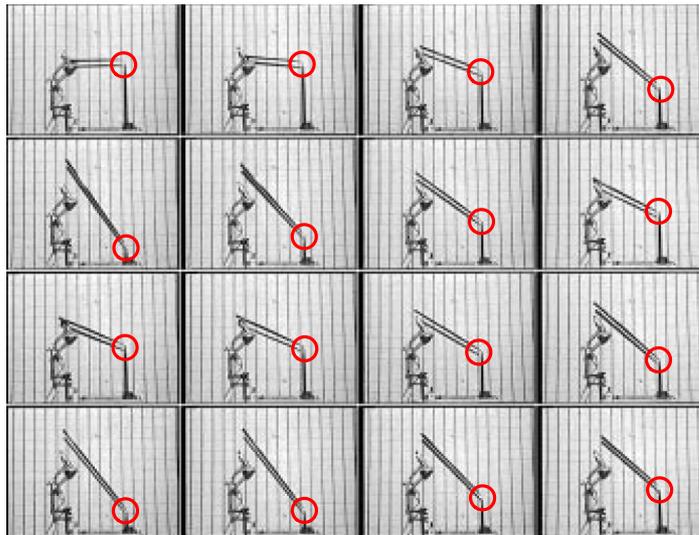


FIGURE 1.19 – Séquence de déploiement (de gauche à droite et de haut en bas) [53] et visualisation en rouge du déplacement de la zone de pliage.

## 1.2.2 Structures constituées de mètres rubans

### 1.2.2.a Structures déployables

Seffen et al. ont étudié le comportement de rubans initialement courbés [54], utilisés pour le déploiement de la *Collapsible Rib-Tensioned Surface* développée par l'ESA [47] (figure 1.20) (La courbure longitudinale permettant de donner à la structure déployée sa forme parabolique). Ils ont montré que cette géométrie particulière ne modifiait pas le comportement global observé pour un ruban initialement droit.

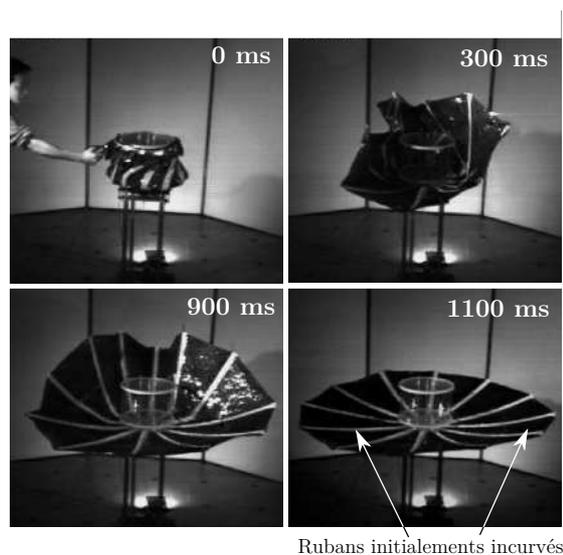


FIGURE 1.20 – Séquence de déploiement de la CRTS [38].

Black a étudié la possibilité d'utiliser des rubans composites pour le déploiement du miroir secondaire d'un télescope de type Cassegrain [12]. Comme le montre la figure 1.21, les rubans ne sont pas enroulés mais pliés. Des tests de répétabilité de déploiement menés sur ce tripode ont montré que les pliages répétés ne dégradait pas la précision. De plus les écarts de positionnement du plateau supérieur entre les différents tests ont été mesurés à  $50\ \mu\text{m}$ , soit deux fois moins que pour un ruban testé seul.



FIGURE 1.21 – Tripode déployé à l'aide de rubans pliés.

Gardi propose une méthode afin d'amortir le déploiement de rubans. Pour cela une couche de polymère visco-élastique a été placée entre deux rubans. Le système tri-couche obtenu est appelé *Visco-Elastically Damped Lenticular Tape-Spring* (VEDLTS) et a été utilisé pour la réalisation d'un prototype de structure de télescope déployable, le *Micro Telescope with a high Resolution* (MITAR). Il est constitué d'un empilement de cinq octogones reliés un à un par huit VEDLTS. La figure 1.22 présente une structure composée de deux octogones espacés à l'aide de lames VEDLTS initialement pliées.

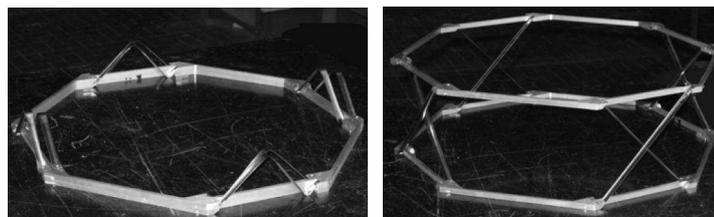


FIGURE 1.22 – Déploiement de deux octogones à l'aide de VEDLTS.

Les rubans peuvent être associés entre eux pour former différents types de charnières élastiques.

### 1.2.2.b Charnières

Différents principes de charnières utilisant des rubans ont été étudiés. En 1968 Vyvyan a breveté une méthode permettant d'augmenter la résistance en flexion (le moment de blocage) d'un ruban en les associant de manière parallèle par trois [65]. Quatre ans plus tard, Schwartz propose une charnière dans laquelle deux rubans sont en vis-à-vis [55]. La figure 1.23 illustre ces deux types de charnières auto-bloquées.

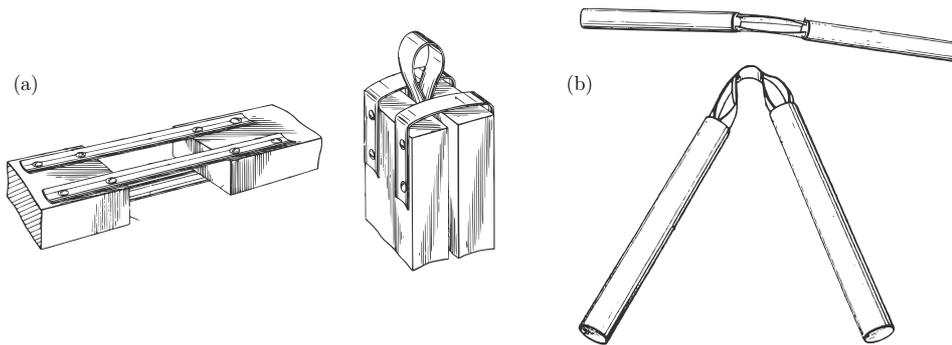


FIGURE 1.23 – Charnières auto-bloquées brevetées par Vyvyan (a) et par Schwartz (b).

Différentes versions améliorées, reposant sur l'association de plusieurs rubans ont vu le jour. L'Aérospatiale a breveté en 1992 la liaison Adèle [33] dont une illustration est présentée à la figure 1.24. Les deux surfaces en roulement permettent de guider le déploiement et de rigidifier la liaison lorsqu'elle est fermée. Les rubans déployés permettent de bloquer la liaison en position ouverte. Sa complexité, son volume et sa masse importante (1.1 kg) sont ses inconvénients majeurs.

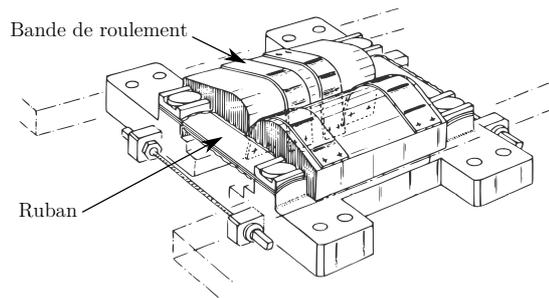


FIGURE 1.24 – Liaison Adèle de l'Aérospatiale.

Pellegrino et Watt proposent une variante de cette liaison avec la *Tape-Spring Rolling Hinge* (TSR) [39] (figure 1.25) qui a été caractérisée par différents tests [68].

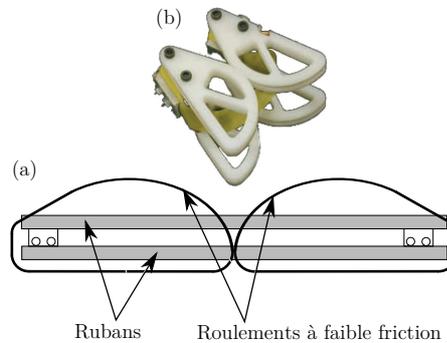


FIGURE 1.25 – Principe de la liaison TSR (a) ; liaison TSR pliée (b).



FIGURE 1.26 – Charnière MAEVA.

La société *Metravibs* et le CNES ont mis au point la charnière MAEVA (figure 1.26, similaire à celle brevetée par Vyvyan et de nombreux tests ont été menés à son sujet [24][56]. Une vingtaine de ces charnières ont été mises en orbite pour déployer panneaux solaires, antennes et mâts. Donzier propose d’amortir le déploiement de cette charnière par le collage d’une couche de matériau visco-élastique afin de diminuer l’énergie cinétique du système[18]. Ce principe a été breveté [10].

Soykasap a exploré différentes associations plus ou moins complexes de rubans et a effectué des mesures d’efforts et de déplacements [58] (figure 1.27).

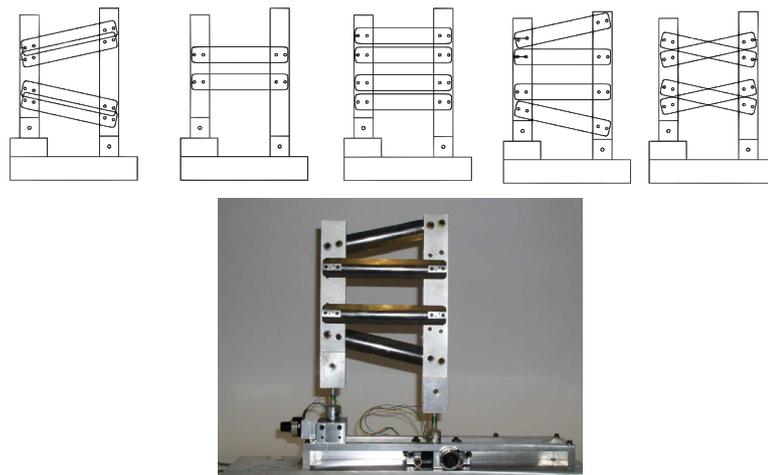


FIGURE 1.27 – Différentes configurations testées.

Boesch a assemblé deux rubans composites de longueurs différentes en vis à vis de telle sorte que la zone de pliage se situe au milieu du ruban le plus grand (figure 1.28) [15]. Utiliser un ruban de faible longueur permet d’accroître la raideur de l’état déployé. Afin d’augmenter la raideur en torsion, quatre de ces charnières ont été associées en parallèle.

Vehar a testé différents types de liaisons et de mécanismes originaux [62]. La figure 1.29 (a) présente un assemblage de 3 mètres-rubans reliés à leurs extrémités qui présente la particularité d’avoir deux états stables (images de gauche et de droite). Utiliser deux paires de rubans de longueurs différentes positionnés alternativement permet d’obtenir une charnière bistable (figure (b)).



FIGURE 1.28 – Charnière composée de deux rubans de longueur différente.

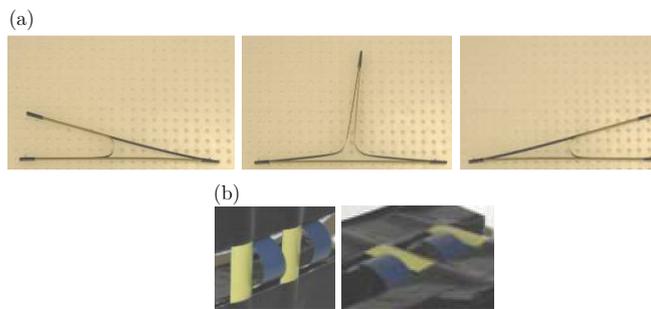


FIGURE 1.29 – Structures bistables.

Soykasap propose une méthode originale pour mettre au point un mât déployable en composite à base de fibres de carbone. Son déploiement est assuré par une charnière de trois rubans qui sont obtenus par enlèvement de matière après fabrication du mât [59]. La figure 1.30 présente deux niveaux de pliage du mât dont la dynamique de déploiement a été finement analysée et comparée à des simulations par la méthode des éléments finis.



FIGURE 1.30 – Mat déployable plié plus ou moins fortement.

### 1.2.3 Rubans bistables

#### 1.2.3.a Propriétés

Les rubans composites bistables ont été breveté en 1996 par Daton-Lovett [17]; ils présentent la propriété d'être stables à la fois dans leur configuration naturelle (état initial, déployé) et dans leur configuration enroulée. Cette propriété a été exploitée industriellement par la société Rolatube (figure 1.31). Un ruban composite est bistable lorsque le stratifié qui le compose est

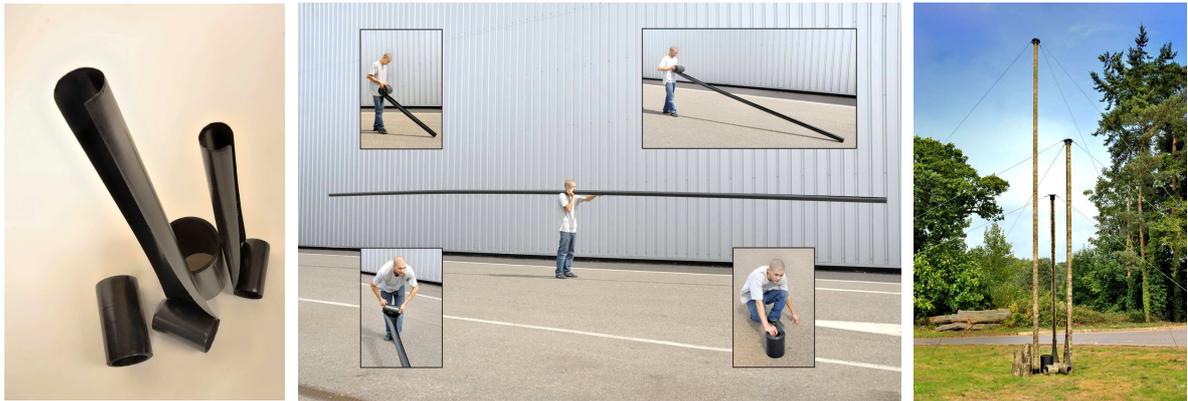


FIGURE 1.31 – Rubans et mâts-antennes bistables produits par la société Rolatube [4].

antisymétrique avec alternance de plis d'orientation opposée. Si on note  $\alpha$  l'orientation des fibres alors le stratifié  $[+\alpha/-\alpha/+\alpha/-\alpha]$  est bistable. Si au lieu d'utiliser un empilement antisymétrique on utilise un empilement symétrique  $([+\alpha/-\alpha/-\alpha/+\alpha])$  alors l'enroulement du ruban se fait en forme d'hélice. En effet, la théorie classique du stratifié [11] montre qu'un empilement symétrique entraîne un couplage entre la flexion et la torsion. Ainsi un ruban qu'on enroule (par flexion) se tord en forme d'hélice.

Iqbal [31] a étudié l'influence de l'orientation des fibres sur le rayon de l'état enroulé de rubans en fibres de verre et matrice polypropylène. Pour  $\alpha = 30^\circ$  le ratio entre le rayon d'enroulement et le rayon de courbure transversale est égal à 3, lorsque  $\alpha = 45^\circ$  il vaut 1.3 et quand  $\alpha = 60^\circ$  il est de 0.5. Dans ce dernier cas la propriété de bistabilité est difficilement observable.

Un ruban bistable, contrairement à un ruban "non-bistable" se déroule de manière progressive comme le montre la figure 1.32. Lorsqu'il est totalement enroulé, le bistable se trouve dans un puits d'énergie de déformation élastique (dont la profondeur dépend de la géométrie du ruban et des propriétés des matériaux dont il est constitué). Un apport d'énergie est nécessaire pour initier le déroulement. Cet apport peut être assuré par la refermeture d'une des deux extrémités.

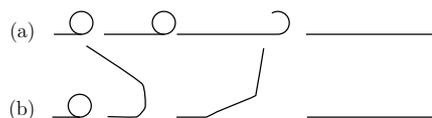


FIGURE 1.32 – Déploiement d'un ruban bistable (a) et d'un ruban "non-bistable" (b).

### 1.2.3.b Fabrication

En vue d'une éventuelle exploitation expérimentale de rubans bistables, nous avons procédé à la réalisation d'un certain nombre de spécimens.

La cuisson de préimprégnés antisymétriques entraîne des déformations d'origine thermique dues à la différence entre les coefficients de dilatation longitudinale et transversale. Afin d'éviter ces désagréments, on utilise une méthode d'infusion à froid dont le principe est illustré par la figure 1.33.

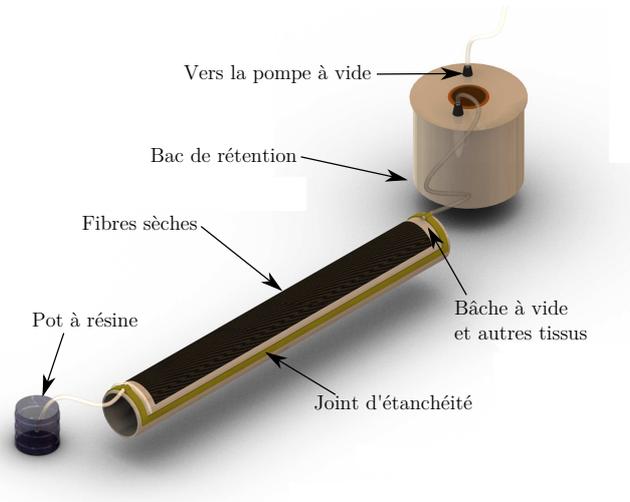


FIGURE 1.33 – Principe du procédé d'infusion utilisé.

Il s'agit de disposer sur un moule cylindrique les différentes couches de fibres sèches sur lesquelles sont placés différents tissus assurant le drainage de la résine. Le tout est mis sous vide et la dépression permet à la résine de se répandre le long du moule et d'imprégner les fibres. La résine SR 8100 et le durcisseur SD 8824 de la société Sicomin constituent le système époxy bicomposant à très faible viscosité utilisé [60]. Il a été associé à des tissus de carbone unidirectionnels de telle sorte à obtenir l'empilement suivant :  $[+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$ .

Plusieurs rubans bistables ont été obtenus de cette manière. Ils présentent un déroulement rapide et violent. Cependant lorsqu'ils restent pendant quelques heures dans leur configuration enroulée ils acquièrent la propriété de stabilité neutre (*neutrally stable*). C'est à dire que toutes les configurations intermédiaires (entre les états enroulé et déroulé) sont elles aussi stables. Si le ruban reste déroulé pendant plusieurs heures, alors cette propriété disparaît. Il semblerait qu'elle soit causée par la relaxation de la résine. Schultz s'est intéressé à cette propriété de stabilité neutre et a montré expérimentalement qu'elle pouvait être obtenue grâce à l'utilisation de résine de très faible rigidité [51]).

## 1.3 Télescopes spatiaux déployables

### 1.3.1 Introduction

Les télescopes spatiaux sont concernés par les deux types de déploiement décrits plus haut. Le déploiement de miroirs de grande taille peut être assimilé au déploiement de surfaces alors que l'écartement de deux miroirs peut s'effectuer par le déploiement de mâts. Parmi les récentes avancées dans le domaine des structures déployables, on recense le *Light Detection And Ranging* (LIDAR) visible à la figure 1.34, un télescope spatial dont le miroir principal est constitué de panneaux réfléchissants se rabattant autour d'un moyeu central [34]. Cette technologie permet de multiplier par 4 la quantité de lumière pouvant être collectée par un miroir monolithique classique. Ce télescope aux dimensions modestes constitue les prémices des futurs grands programmes d'observation.

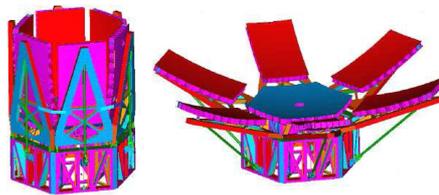


FIGURE 1.34 – Miroir déployable d'un télescope Lidar.

Le *James Webb Space Telescope* (JWST) [16][37] qui prendra la relève du télescope spatial *Hubble* en 2013 possède un miroir principal dont le diamètre de 6.5 m impose une conception en plusieurs éléments. Il est constitué de 18 petits miroirs hexagonaux en béryllium. Ceux situés à la périphérie sont supportés par des panneaux rabattables (figure 1.35 (d)). Le miroir secondaire est déployé à l'aide d'une structure tripode aux bras articulés (figures (a) - (c)).

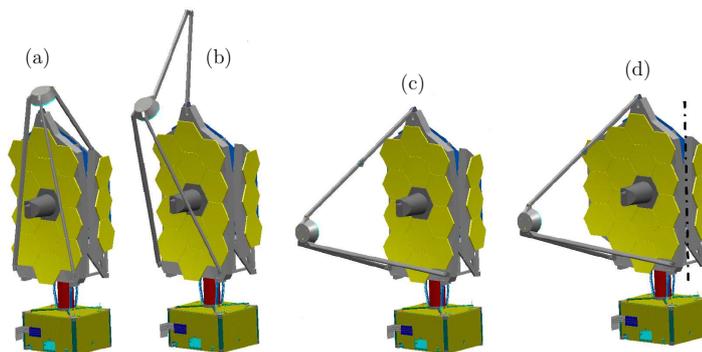


FIGURE 1.35 – Séquences de déploiement du JWST.

M. J. Santer a établi un état de l'art des structures composant les télescopes spatiaux en 2009 [50].

### 1.3.2 Projet Thales Alenia Space

Dans ce contexte où la réponse aux enjeux scientifiques et technologiques passe par l'exploitation de structures déployables, Thales Alenia Space étudie un nouveau concept de télescope spatial déployable. Il s'agit d'un télescope de type Cassegrain déployé en orbite. Le miroir primaire de 40 kg a un diamètre de 1 m alors que le miroir secondaire a un diamètre de 0.250 m pour une masse de 3 kg. Dans la configuration déployée, ces deux miroirs sont séparés par une distance de 2 m. Le déploiement est assuré par le déroulement autonome de 6 rubans libérant l'énergie de déformation élastique emmagasinée lors de leur enroulement. L'alignement final du miroir secondaire est obtenu grâce à 6 actionneurs 1D. Enfin les ultimes corrections sont apportés par l'optique adaptative. Ces principes sont illustrés par la figure 1.36.

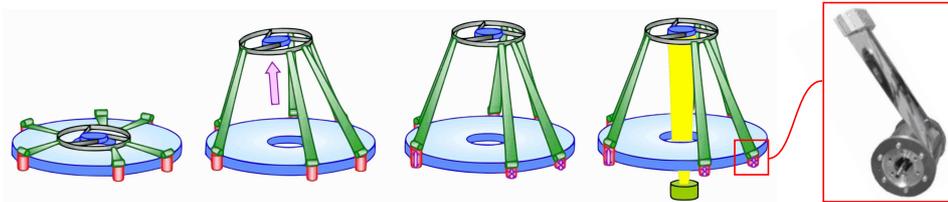


FIGURE 1.36 – Principe de déploiement de l'hexapode et photographie de l'actionneur 1D dans lequel des gorges sont usinées pour accueillir le ruban.

Des travaux précédents exécutés avec le soutien de l'Agence Spatiale Européenne et de l'INRIA ont permis la mise au point d'un prototype à l'échelle 1/4 [13]. Sur la base du prototype présenté à la figure 1.37, le comportement statique et dynamique des actionneurs à rubans ainsi que la réponse de la structure dans son état déployé ont été étudiés. De plus un modèle dynamique de déploiement de l'hexapode a été mis au point [6][7][8][9]. Une des conclusions de ces travaux est que l'utilisation de rubans en acier inoxydable mène à un déploiement trop rapide et cause le déraillement des rubans qui sortent des gorges usinées. Il est donc nécessaire de développer un nouveau type de rubans dont on maîtriserait la vitesse de déroulement.

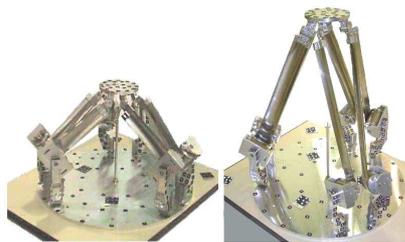


FIGURE 1.37 – Prototype de l'hexapode dans les configurations compacte et déployée.

---

## 1.4 Conclusion du premier chapitre

Dans un contexte où les structures déployables se généralisent, Thales Alenia Space propose un concept innovant de télescope spatial dont le déploiement est assuré par la libération de l'énergie de déformation élastique emmagasinée dans six rubans enroulés. La cinétique et la précision du déploiement ont été correctement prédits par des modèles dont la justesse a été validé à l'aide résultats expérimentaux. Cependant ces tests menés sur un prototype d'hexapode déployable ont montré que l'utilisation de rubans métalliques entraînait un déploiement trop énergétique pouvant être fatal aux optiques supportées. Il est donc primordial de concevoir un type de ruban dont la vitesse de déroulement puisse être contrôlée.

L'utilisation des matériaux composites pour la réalisation de rubans offre plusieurs avantages. Ces matériaux présentent un rapport *rigidité/masse volumique* très intéressant et le choix judicieux d'un couple fibres-résine permet d'obtenir un coefficient de dilatation nul. De plus un empilement particulier des plis confère au stratifié qu'ils constituent la propriété de bistabilité. Les rubans bistables ont les avantages d'être autobloqués dans leur position enroulée et de se dérouler progressivement. Cependant ils requièrent un apport d'énergie suffisant afin d'initier la phase de déroulement, phase durant laquelle l'énergie de déformation libérée doit être dissipée pour éviter un déroulement trop brutal. En revanche un ruban non-bistable n'a besoin d'aucun apport d'énergie pour se dérouler, sa seule position stable étant la position déployée. Mais naturellement il est nécessaire de bloquer sa configuration enroulée.



---

## Rubans hybrides

**D**ans le but de concevoir un type de rubans dont on maîtrise la vitesse de déploiement, une solution exploitant les propriétés d'un matériau visco-élastique collé à même le ruban est proposée dans ce chapitre. Le principe imaginé, permettant à la fois d'assurer un blocage en position enroulée et d'amortir la phase de déroulement, a été breveté [5]. Les tout premiers essais expérimentaux et modélisations numériques ont permis d'observer le déploiement de ces rubans hybrides mais ont également mis en évidence les limites de ce nouveau concept.

## PLAN DU CHAPITRE 2

---

<b>2.1 Principe</b>	<b>29</b>
<b>2.2 Faisabilité du concept</b>	<b>31</b>
2.2.1 Essais numériques	31
2.2.2 Essais expérimentaux	34
<b>2.3 Conclusion du deuxième chapitre</b>	<b>36</b>

---

## 2.1 Principe

Le principe proposé pour assurer le maintien en position enroulée ainsi qu'un déroulement contrôlé du ruban, repose sur les propriétés d'un matériau visco-élastique variant avec la température. Sa rigidité chute au passage de la température de transition vitreuse ( $T_g$ ) alors qu'à cette température on observe un pic de viscosité. La figure 2.1 (f) présente de manière schématisée l'évolution de ces deux propriétés en fonction de la température.

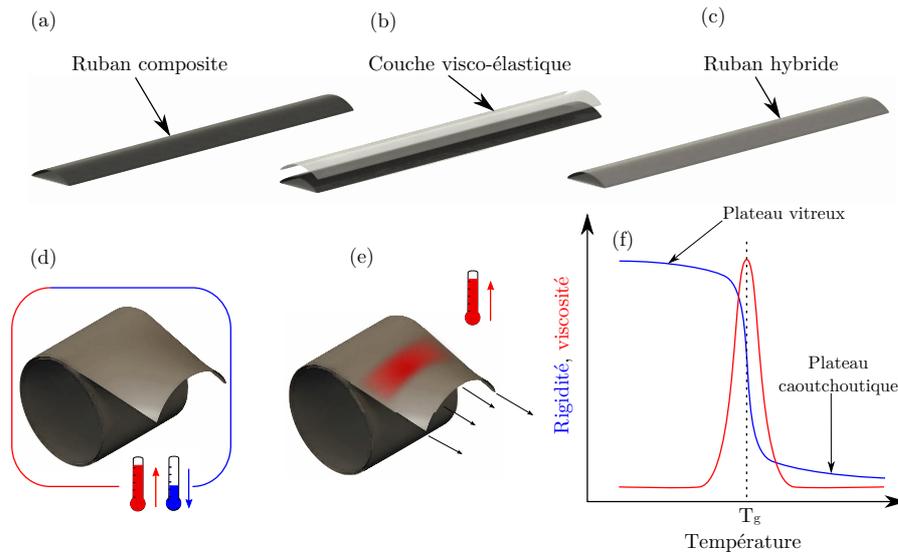


FIGURE 2.1 – Principe du ruban hybride (a)-(e) et évolution de la rigidité et de la viscosité d'un matériau visco-élastique en fonction de la température (f).

Un ruban hybride est constitué d'une couche de matériau visco-élastique collée à froid sur un ruban en matériau composite dans sa configuration initiale. Après l'enroulement, l'ensemble est chauffé à une température supérieure à  $T_g$  et les contraintes dans la couche visco-élastique se dissipent. La température est ensuite fixée à une valeur inférieure à  $T_g$ , le matériau visco-élastique retrouve alors sa rigidité originelle. Lorsque le maintien de la position enroulée est relâché, l'ensemble atteint une position d'équilibre après un retour élastique se traduisant par une augmentation du rayon d'enroulement. Un nouveau chauffage à une température élevée entraîne un retour à la position déployée. Si ce chauffage est localisé alors on observe un déroulement progressif du ruban.

Afin de minimiser l'épaisseur de la couche de matériau visco-élastique, l'énergie de déformation de l'état enroulé doit être minimisée. Elle dépend des propriétés des matériaux et de la géométrie du ruban. En particulier on cherche à minimiser son épaisseur. Comme décrit dans le paragraphe 1.2.3.a, les empilements antisymétriques permettent un enroulement cylindrique (au contraire des empilements symétriques dont l'enroulement a une forme spiralée) car les termes de couplage *flexion/torsion* sont nuls dans la matrice de rigidité de flexion  $\mathbf{D}$  de la théorie classique du stratifié. On se limite donc à l'utilisation de stratifiés antisymétriques composés de deux plis  $[\alpha/-\alpha]$  ou  $[0^\circ/90^\circ]$ . En supposant l'uniformité des courbures et en négligeant la matrice  $\mathbf{B}$  décrivant le couplage entre tension et flexion, Iqbal obtient une expression de la densité linéique

d'énergie de déformation (énergie de déformation stockée dans la section) [31] :

$$U_e = \frac{1}{2} \beta R \left[ D_{11} k_x^2 + 2D_{12} k_x \left( -\frac{1}{R} \right) + D_{22} \left( -\frac{1}{R^2} \right) \right], \quad (2.1)$$

où  $R$ ,  $\beta$  et  $k_x$  définissent respectivement le rayon initial de la section, le degré d'ouverture initial de la section et la courbure de l'état enroulé (figure 2.2). L'épaisseur du ruban ainsi que l'orientation des plis sont pris en compte dans les termes  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  et  $D_{12}$  qui composent la matrice de rigidité de flexion calculée selon la théorie classique du stratifié [11].

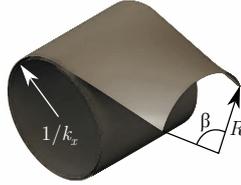


FIGURE 2.2 – Paramètres définissant totalement la géométrie d'un ruban.

La figure 2.3 représente différents niveaux d'énergie obtenus à l'aide de l'équation 2.1. Ces tracés permettent de mettre en évidence d'une part l'existence d'un unique  $\alpha$  qui minimise l'énergie lorsque les deux courbures du ruban sont fixées ( $1/R$  et  $k_x$ ) (figure (a)) et d'autre part l'existence d'un rayon d'enroulement optimal pour un rayon de section donné lorsque l'orientation des fibres est fixée (figure (b)).

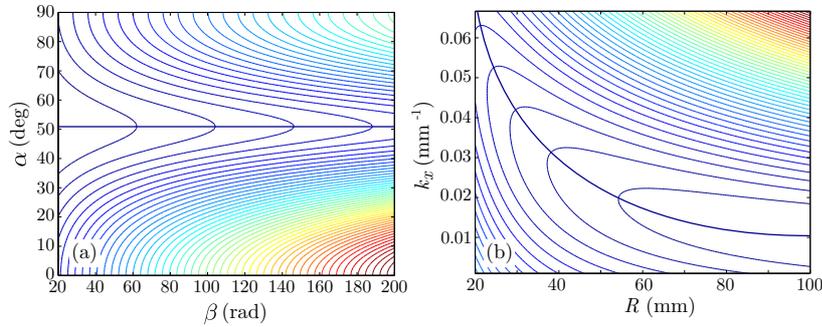


FIGURE 2.3 – Évolution caractéristique des rigidités de flexion pour un stratifié  $[+\alpha/-\alpha]$  (a) et isovaleurs de l'énergie de déformation lorsque  $R$  et  $k_x$  sont fixés (b) et lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés (c).

## 2.2 Faisabilité du concept

Afin de s'assurer de la capacité de la couche visco-élastique à jouer le rôle de verrou et de régulateur du déploiement, des tests numériques et expérimentaux ont été menés.

### 2.2.1 Essais numériques

L'ensemble du scénario (enroulement, chauffage, refroidissement, chauffage et déroulement) a été modélisé à l'aide du logiciel ABAQUS [29]. L'option composite est utilisée afin de définir un empilement de quatre couches : deux plis centraux auxquels on associe les propriétés d'un matériau composite et deux autres plis correspondant à deux couches visco-élastiques. La structure est ensuite discrétisée à l'aide d'éléments de type coque adaptés au calcul thermique  $S4T$ . L'assemblage final est constitué du ruban, d'un cylindre rigide autour duquel s'enroule le ruban et d'un ressort artificiel, attaché à l'extrémité libre du ruban, exerçant une force de rappel permettant un enroulement compact (figure 2.4). La zone de l'enrouleur initialement en contact avec le ruban épouse parfaitement ce dernier. La simulation est composée de six étapes :

- contact entre le ruban et le cylindre, et fixation de l'extrémité du ruban sur le cylindre ,
- enroulement du ruban par pilotage de la rotation du cylindre,
- chauffage,
- refroidissement,
- relâchement des efforts emmagasinés dans le ressort et le cylindre,
- chauffage.

On applique à la section du bord libre du ruban des conditions limites simulant une liaison glissière. Ainsi lors de la dernière phase de chauffage, le ruban retrouve sa position initiale selon un déroulement ordonné.

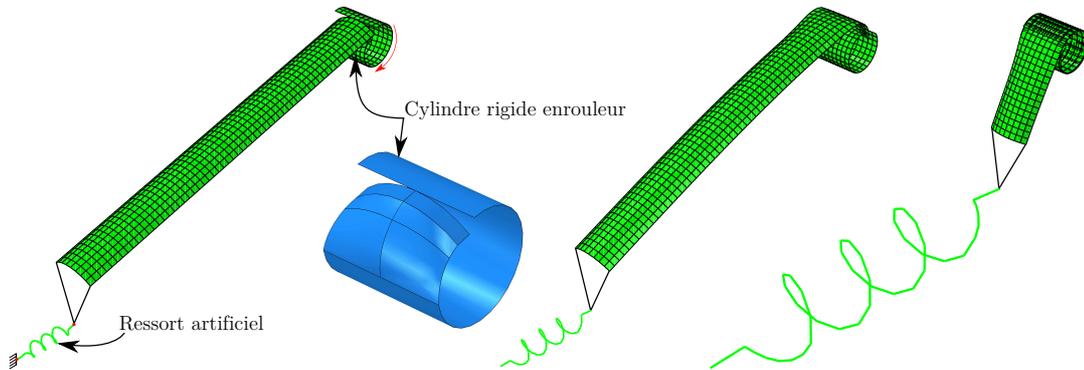


FIGURE 2.4 – Modélisation du ruban hybride et de son enrouleur.

Le comportement du matériau visco-élastique peut être simplement modélisé à l'aide d'un modèle de Maxwell (figure 2.5) dont les paramètres de rigidité et de viscosité varient en fonction de la température. Dans ce modèle le ressort représente la rigidité et l'amortisseur la viscosité. Il est implémenté dans ABAQUS à l'aide d'une subroutine UMAT. Pour cela il est nécessaire d'exprimer la variation du tenseur des contraintes en fonction de la variation du tenseur des déformations :

$$\Delta \bar{\sigma} = f(\Delta \bar{\epsilon}) \quad (2.2)$$

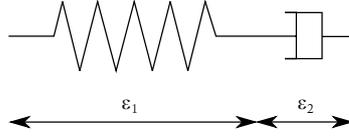


FIGURE 2.5 – Modèle de Maxwell.

La déformation totale est la somme des déformations dans chaque branche :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2 \quad (2.3)$$

Les contraintes dans chaque branche sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} &= \lambda \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}_1) \bar{\bar{G}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}_1 \\ &= \tilde{\lambda} \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}_2) \bar{\bar{G}} + 2\tilde{\mu} \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Elles peuvent être séparées en une partie déviatorique et une partie sphérique :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} \sigma_v \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\sigma}}^d, \quad \text{with } \sigma_v = \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \quad (2.5)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\varepsilon}}^d, \quad \text{with } \varepsilon_v = \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_v = 3k \varepsilon_{1v} = 3\tilde{k} \dot{\varepsilon}_{2v} & , \text{ with } k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{ and } \tilde{k} = \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{3} \\ \bar{\bar{\sigma}}^d = 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}_1^d = 2\tilde{\mu} \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_2^d \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_v = 3\tilde{k} (\dot{\varepsilon}_v - \dot{\varepsilon}_{1v}) = 3\tilde{k} \dot{\varepsilon}_v - \frac{\tilde{k}}{k} \dot{\sigma}_v \\ \bar{\bar{\sigma}}^d = 2\tilde{\mu} \left( \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}^d - \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_1^d \right) = 2\tilde{\mu} \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}^d - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \dot{\bar{\bar{\sigma}}}^d \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_v + \frac{\tilde{k}}{k} \dot{\sigma}_v = 3\tilde{k} \dot{\varepsilon}_v \\ \bar{\bar{\sigma}}^d + \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \dot{\bar{\bar{\sigma}}}^d = 2\tilde{\mu} \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}^d \end{cases} \quad (2.9)$$

L'intégration temporelle est calculée par une méthode de différences centrées :

$$\dot{f}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \quad \text{and} \quad f_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = f_t + \frac{\Delta f}{2} \quad (2.10)$$

Enfin, les variations des contraintes sont exprimées en fonction des variations des déformations :

$$\Delta \sigma_v = \frac{3}{\frac{\Delta t}{2k} + \frac{1}{k}} \Delta \varepsilon_v - \frac{1}{\frac{\Delta t}{2k} + \frac{1}{k}} \frac{\Delta t}{\tilde{k}} \sigma_{v_t} \quad (2.11)$$

$$\Delta\bar{\bar{\sigma}}^d = \frac{2}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \Delta\bar{\bar{\varepsilon}}^d - \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \frac{\Delta t}{\tilde{\mu}} \bar{\bar{\sigma}}_t^d \quad (2.12)$$

et :

$$\Delta\bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} \Delta\sigma_v \bar{\bar{G}} + \Delta\bar{\bar{\sigma}}^d \quad (2.13)$$

Il est également nécessaire de déterminer le Jacobien :

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}} \quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} &= \frac{1}{3} \Delta\sigma_{kk} \delta_{ij} + \Delta\sigma_{ij}^d \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{3}{\frac{\Delta t}{2k + \frac{1}{k}}} \Delta\varepsilon_{kl} - \frac{1}{\frac{\Delta t}{2k} + \frac{1}{k}} \frac{\Delta t}{\tilde{k}} \sigma_{kk} \right) \delta_{ij} + \frac{2}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \left( \frac{3}{3} \Delta\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \frac{\Delta t}{\tilde{\mu}} \sigma_{ij}^d \end{aligned} \quad (2.15)$$

On obtient alors quatre cas différents pour les termes Jacobiens :

$$1. \frac{\partial \Delta\sigma_{aa}}{\partial \Delta\varepsilon_{aa}} : \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial \Delta\varepsilon_{11}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial \Delta\varepsilon_{22}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{33}}{\partial \Delta\varepsilon_{33}} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2k} + \frac{1}{k}} + \frac{4}{3} \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \quad (2.16)$$

$$2. \frac{\partial \Delta\sigma_{aa}}{\partial \Delta\varepsilon_{bb}} : \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial \Delta\varepsilon_{22}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial \Delta\varepsilon_{33}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial \Delta\varepsilon_{11}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial \Delta\varepsilon_{33}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{33}}{\partial \Delta\varepsilon_{11}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{33}}{\partial \Delta\varepsilon_{22}} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2k} + \frac{1}{k}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \quad (2.17)$$

$$3. \frac{\partial \Delta\sigma_{ab}}{\partial \Delta\gamma_{ab}} : \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{12}}{\partial \Delta\gamma_{12}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{13}}{\partial \Delta\gamma_{13}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{23}}{\partial \Delta\gamma_{23}} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{\mu}} \quad (2.18)$$

4. Tous les autres termes sont nuls.

*Remarque : le comportement du matériau visco-élastique n'est pas finement décrit. La valeur du module d'Young est approximée par une simple marche dont le saut intervient à  $T_g$ . Le paramètre de viscosité est quant à lui constant quelque soit la température.*

Afin d'observer le retour du ruban hybride dans sa configuration déployée, deux méthodes de chauffage ont été testées. La première consiste à imposer une élévation de température à l'ensemble du ruban (supérieure à la  $T_g$  du matériau visco-élastique).

La figure 2.6 illustre quelques étapes du déploiement d'un ruban chauffé globalement. On observe

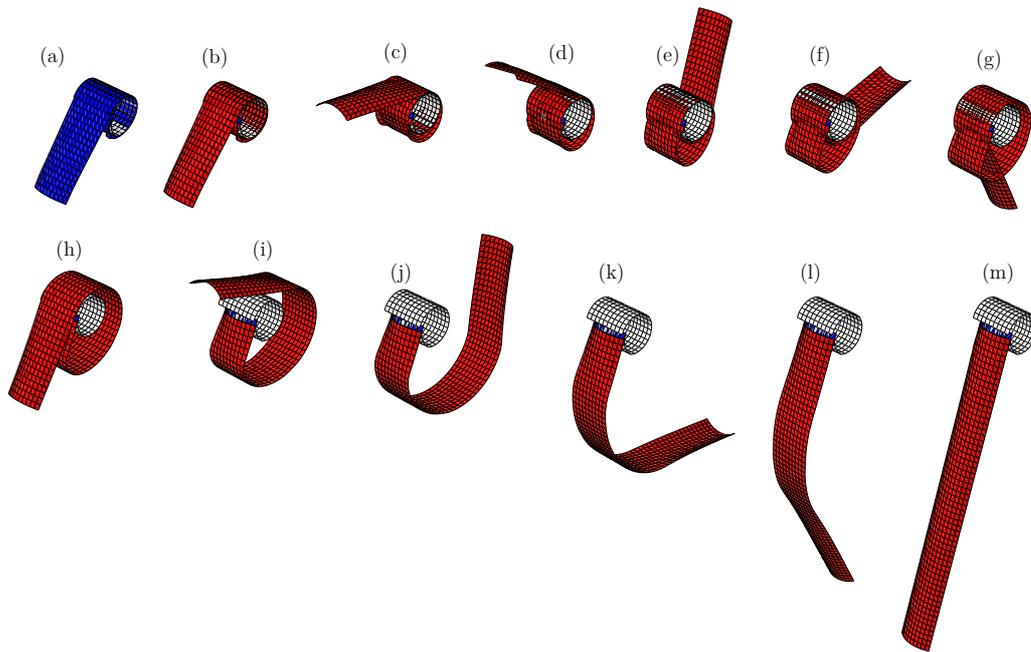


FIGURE 2.6 – Chauffage global.

que la partie enroulée gonfle alors que le bras libre se déploie en tournant autour du rouleau fixe. Les figures (a) et (m) correspondent respectivement à l'état initial figé à froid et à l'état totalement déployé.

La seconde méthode consiste à imposer une élévation locale de température, à l'extrémité libre du ruban, et à résoudre le problème thermo-élastique couplé avec une résolution de l'équation de la chaleur. La figure 2.7 illustre différentes phases de ce déroulement. La couleur rouge correspond à une température supérieure à  $T_g$  du matériau visco-élastique, la bleue à une température inférieure à  $T_g$ . La zone située au niveau de la frontière a une température égale à  $T_g$ . L'enrouleur est libre de tourner sur lui-même et l'extrémité libre du ruban est soumise à une condition limite représentant une liaison pivot montée sur une glissière. Le déroulement débute dès que la zone de transition du ruban atteint une température supérieure à  $T_g$ . Le comportement de la couche visco-élastique devient caoutchoutique et permet au ruban de retrouver sa courbure transversale initiale, déclenchant ainsi le déroulement.

Cette simulation par conduction thermique n'est pas physiquement réaliste car la conductivité thermique des composites à fibres de carbone est très faible. Cette propriété a été ajustée dans le modèle de telle sorte à pouvoir mettre en évidence l'importance de la localisation du chauffage dans la zone de transition pour initier la phase de déroulement. On peut par exemple imaginer un système de chauffage focalisé sur cette zone de transition.

### 2.2.2 Essais expérimentaux

Plusieurs rubans hybrides ont été réalisés dans le but de vérifier la faisabilité du concept. Un tissu équilibré de fibres de carbone  $[0^\circ/90^\circ]$  préimprégné de résine époxy a été utilisé. Le matériau visco-élastique utilisé est un thermoplastique (polyéthylène téréphtalate - PET) dont la  $T_g$  avoisine les  $80^\circ\text{C}$  [2]. Son collage est assuré par un adhésif double face adapté au collage des thermoplastiques

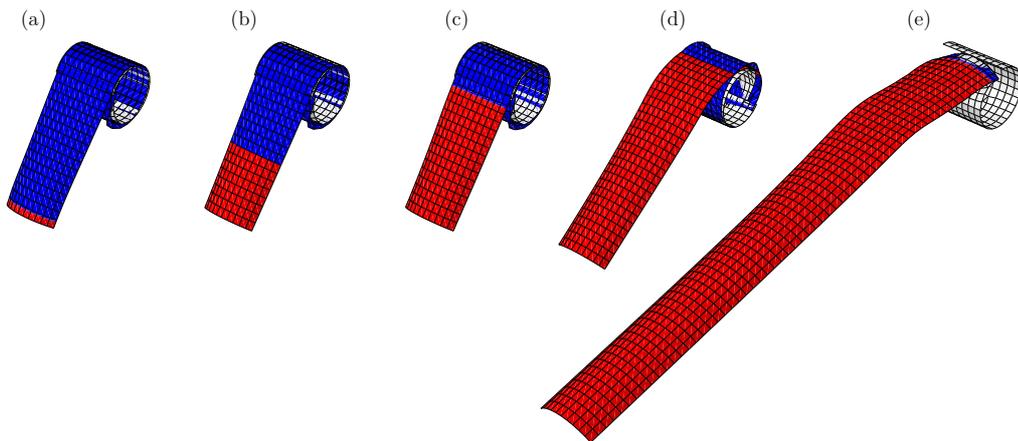


FIGURE 2.7 – Chauffage par diffusion.

(qui sont des matériaux à bas niveau d'énergie de surface et donc difficiles à coller). La figure 2.8



FIGURE 2.8 – Ruban hybride.

montre différentes positions d'équilibre d'un ruban hybride dont le déroulement est assuré par un chauffage localisé. Un banc d'essai permettant de mettre en évidence la capacité d'un ruban hybride à déplacer une charge au cours de son déploiement a été conçu (figure 2.9). La portion déployée du ruban est fixée à un système pivot monté sur une glissière pouvant se déplacer le long d'un rail, l'autre extrémité étant reliée par des mâchoires de serrage à un mécanisme de roulement à billes. Le chauffage est assuré par une lampe infrarouge dont le rayonnement est focalisé par une fenêtre de localisation (non représentée ici).

La figure 2.10 met en évidence deux étapes du déroulement d'un ruban hybride monté sur le démonstrateur. La puissance élevée de la lampe associée à une température de transition vitreuse du matériau thermoplastique peu élevée ont causé une augmentation prématurée du rayon d'enroulement. A l'avenir, il sera nécessaire d'imaginer un système de chauffage nettement plus progressif et dont l'intensité puisse être finement régulé. De plus, utiliser un matériau visco-élastique dont la température de transition vitreuse est plus élevée permettra de maintenir constant le rayon d'enroulement au cours de l'essai.

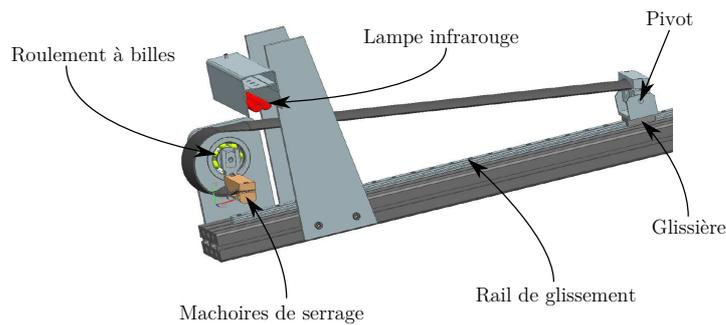


FIGURE 2.9 – Modèle du démonstrateur conçu.

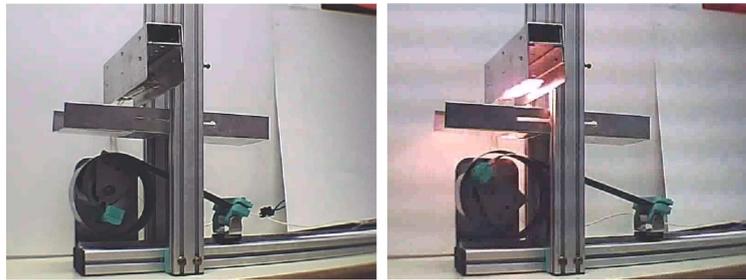


FIGURE 2.10 – Démonstration du déroulement d'un ruban hybride.

## 2.3 Conclusion du deuxième chapitre

Afin d'éviter tout choc lors du déploiement du miroir secondaire de l'hexapode, la nécessité de maîtriser la vitesse du déploiement des rubans nous a conduit à proposer un nouveau type de ruban. La combinaison d'un matériau composite et d'une (ou plusieurs) couche(s) de matériau visco-élastique permet d'une part d'obtenir un ruban dont le ratio *rigidité/poids* est élevé et d'autre part d'assurer le verrouillage du ruban dans sa position enroulée et d'amortir la phase de déploiement.

La faisabilité de ce concept protégé par un brevet, a été testée numériquement et expérimentalement. L'implémentation d'un modèle de Maxwell dans le code éléments finis ABAQUS a permis de modéliser la globalité du processus : enroulement, verrouillage dans la position enroulée, déroulement par chauffage. Néanmoins cette modélisation reste qualitative puisque les propriétés mécaniques du matériau visco-élastique n'ont été qu'approximées. Une caractérisation fine sera nécessaire afin de rendre possible une analyse quantitative.

Les tout premiers essais expérimentaux ont permis d'observer le retour dans sa configuration initiale d'un ruban par chauffage de la couche visco-élastique. Afin de maintenir constant le rayon d'enroulement et d'éviter tout gonflement au cours de la phase de déploiement il est indispensable d'assurer une localisation précise du chauffage dans la zone de transition du ruban.

L'inconvénient majeur de ce principe de ruban hybride réside dans l'apparition inévitable du fluage si le verrouillage en position enroulée est assuré uniquement par la couche de matériau visco-élastique. En effet, le ruban ayant tendance à se dérouler naturellement, il est soumis à des

---

efforts radiaux. Ce phénomène est d'autant plus faible que l'écart entre la température de transition vitreuse du matériau visco-élastique et la température ambiante est grand. Malgré tout, en cas de stockage d'un ruban dans sa configuration enroulée, cette solution semble inadaptée.

Ce problème de fluage pourrait être évité grâce à l'association d'un matériau visco-élastique et d'un ruban bistable. Ce dernier, étant stable dans sa configuration enroulée, n'exerce aucun effort sur la couche visco-élastique qui assure uniquement l'amortissement lors de la phase de déroulement. Il faut cependant apporter l'énergie nécessaire permettant la refermeture d'une des extrémités du ruban assurant l'initiation du déroulement.



## **Partie 2 : Un modèle de poutre à section fortement déformable**



---

## Choix de modélisation et enjeux scientifiques

**B**ien qu'ayant une géométrie simple, le ruban n'en n'a pas moins un comportement mécanique complexe. La compréhension fine des phénomènes rencontrés présente un intérêt certain et passe par la mise au point de techniques astucieuses de simulation numérique. Trop lourdes et peu souples pour certaines, trop simplifiées pour d'autres, les modélisations existantes dédiées à l'étude spécifique de rubans ne sont pas pleinement satisfaisantes pour les applications visées. Cette constatation nous amène à nous pencher sur des méthodes de modélisation plus adaptées comme la modélisation de poutres à section déformable. Ces comparaisons nous permettent d'élaborer les grandes lignes de la stratégie de modélisation adoptée et nous amèneront à la définition d'un modèle original présenté au chapitre 4.

## PLAN DU CHAPITRE 3

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisations existantes de mètres rubans</b>	<b>43</b>
3.1.1	Modèles de coque résolus par éléments finis	43
3.1.2	Modèles unidimensionnels discrets	45
3.1.2.a	Déploiement d'un ruban enroulé	45
3.1.2.b	Déploiement d'un ruban plié	47
3.1.3	Cas particulier du ruban bistable	48
3.1.3.a	Modèle éléments finis	48
3.1.3.b	Modèles basés sur les équations de poutre et de coque	50
3.1.3.c	Modèle énergétique extensionnel	50
3.1.3.d	Modèle énergétique inextensionnel	52
3.1.3.e	Comparaison des différents modèles	53
<b>3.2</b>	<b>Modélisations de poutres à section déformable</b>	<b>54</b>
<b>3.3</b>	<b>Conclusion du troisième chapitre</b>	<b>54</b>

---

## 3.1 Modélisations existantes de mètres rubans

### 3.1.1 Modèles de coque résolus par éléments finis

Afin de simuler le comportement de rubans, on pense naturellement à exploiter les méthodes traditionnelles de modélisation de coques implémentées dans les codes de calculs pour lesquels une utilisation directe est possible. Cependant, la géométrie particulière d'un ruban, entraînant l'apparition d'instabilités, rend la simulation relativement technique. Grâce aux performances

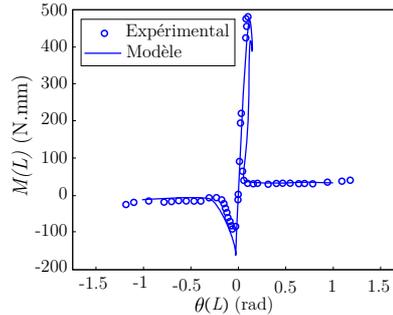


FIGURE 3.1 – Relation  $M(\theta)$  obtenue par Seffen et Pellegrino [53] pour un essai de flambage.

des outils informatiques actuels, Seffen et Pellegrino [53] ont pu comparer des résultats expérimentaux de flambage de ruban par flexion (obtenus grâce à un montage similaire à celui présenté par la figure 3.2) avec une modélisation par éléments finis à l'aide du logiciel ABAQUS et avec des résultats analytiques établis par Mansfield [35]. Le flambage est provoqué par l'application de moments de flexion aux deux extrémités. Le phénomène de claquage apparaissant à partir d'un certain niveau de chargement est l'illustration d'un saut de solution rendant nécessaire le pilotage par longueur d'arc. Afin de suivre la totalité de la branche de solution, la méthode de Riks [44][45] disponible dans ABAQUS est exploitée. La figure 3.1 représente l'évolution du moment appliqué à chacune des 2 extrémités en fonction de la rotation des sections. On remarque que la prédiction numérique est en accord avec les résultats expérimentaux. Seffen et Pellegrino indiquent que pour pouvoir suivre la branche d'équilibre représentée, une imperfection géométrique a dû être introduite. D'autres articles illustrent différentes simulations basées sur

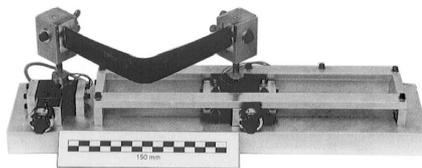


FIGURE 3.2 – Montage expérimental [53].

l'exploitation de modèles de coques implémentés dans des codes industriels : une modélisation de rubans ayant une courbure longitudinale initiale est proposée par Seffen et al. [54]. Seffen [52] a également étudié le comportement de rubans déjà pliés soumis à des efforts de compression. Hoffait et al. [30] ont simulé le comportement dynamique du phénomène d'autoblocage d'un système composé de plusieurs rubans à l'aide du logiciel SAMCEF. Walker et Aglietti [66] ont quant à eux utilisé le logiciel ANSYS afin de décrire le pliage de rubans en 3 dimensions.

En nous inspirant de la méthode proposée par Seffen et Pellegrino, nous avons mené à bien des simulations de flambage de rubans à l'aide de la version 6.9 d'ABAQUS. Une finesse de maillage choisie arbitrairement a permis de suivre la branche d'équilibre sans introduire d'imperfection alors que l'utilisation de maillages plus fins ou plus grossiers a entraîné des problèmes de convergence du solveur.

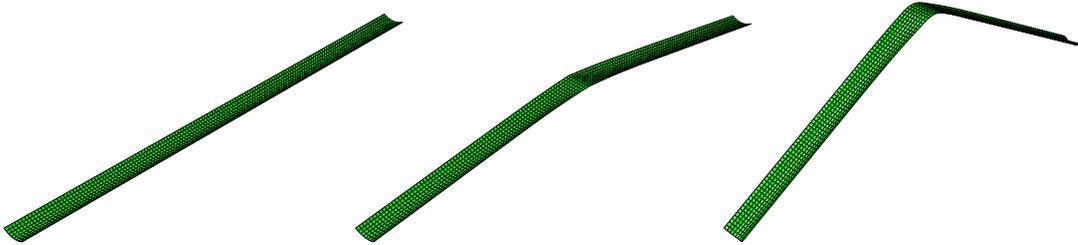


FIGURE 3.3 – Simulation du flambage par flexion avec  $L = 1170$  mm,  $R = 50$  mm,  $\beta^e = 1.2$  rad (degré d'ouverture de la section),  $h = 0.15$  mm,  $E = 210000$  MPa,  $\nu = 0.3$ , 1168 éléments S4R, un moment est appliqué au nœud de références lié à la section de chaque extrémité.

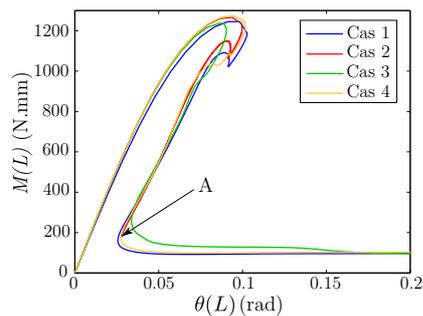


FIGURE 3.4 – Évolution du moment de réaction en fonction de la rotation d'une section au cours d'un essai de flambage.

	Nb éléments	Imperfection géométrique
Cas 1	1168	non
Cas 2	2808	non
Cas 3	2808	oui
Cas 4	2808	oui

TABLE 3.1 – Différents cas testés.

Les propriétés du ruban modélisé à la figure 3.3 sont différentes de celles retenues par Seffen et Pellegrino. Elles permettront par la suite d'effectuer des comparaisons avec la modélisation proposée dans le chapitre 4. Voilà pourquoi les résultats obtenus à la figure 3.4 ne correspondent pas (d'un point de vue quantitatif) à ceux présentés à la figure 3.1. Le tableau 3.1 résume les différents cas testés. Le cas 1 a permis de suivre la branche de solution sans introduction d'imperfection alors que le cas 2 donne lieu à un calcul qui ne décrit pas la totalité de la branche

de solution ; au point  $A$  la courbe rebrousse chemin et illustre un dysfonctionnement de l'algorithme. Dans le cas 3, une imperfection géométrique a été imposée sur tous les nœuds situés sur la section au milieu du ruban alors que dans le cas 4, seuls quelques nœuds de cette section ont subi cette imperfection.

*Remarques :*

- les résultats obtenus dépendent de la localisation et de l'intensité de l'imperfection introduite,
- de très nombreux essais sont nécessaires afin de déterminer quelle imperfection modifie le moins le comportement originel de la structure,
- la connaissance préalable du lieu où l'instabilité apparaît permet d'ajuster au mieux l'imperfection géométrique.

### 3.1.2 Modèles unidimensionnels discrets

Seffen et Pellegrino proposent également une modélisation astucieuse de la dynamique de déploiement de mètre-rubans [53]. Deux types de déploiements sont modélisés :

- le ruban est lâché après avoir été enroulé autour d'un enrouleur cylindrique.
- le ruban est lâché après avoir été plié.

#### 3.1.2.a Déploiement d'un ruban enroulé

Dans ce premier cas, la méthode est basée sur le calcul du Lagrangien  $\mathcal{L}$  et donc des énergies cinétique et potentielle du système composé du ruban et de l'enrouleur. Le ruban est considéré comme étant constitué de deux parties distinctes. La figure 3.5 montre une portion droite déployée qui reste tangente à l'enrouleur et une portion uniformément enroulée. Ces deux parties ont donc une longueur qui varie au cours du déploiement. Les équations du mouvement sont obtenues par l'application des équations de Lagrange. L'énergie potentielle est supposée nulle dans la portion déroulée. L'énergie cinétique du système est obtenue par la sommation de l'énergie cinétique des portions droite et enroulée et de l'énergie cinétique de rotation de l'enrouleur. Elle a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \rho_l \left( \dot{\zeta}^2 r^2 (L - r \Theta) + \left( \dot{\zeta} + \dot{\Theta} \right)^2 \frac{1}{3} (L - r \Theta)^3 + r^3 \Theta \dot{\zeta}^2 \right) + \frac{1}{2} I \dot{\zeta}^2, \quad (3.1)$$

où  $\rho_l$  est la masse linéique du ruban,  $r$  le rayon de l'enrouleur,  $L$  la longueur du ruban,  $\Theta$  l'angle qui décrit la portion de ruban enroulée,  $\zeta$  l'angle entre la droite ( $OC$ ) et l'axe  $\mathbf{e}_1$  et  $I$  le moment polaire d'inertie de l'enrouleur.

L'énergie potentielle du système est la somme de l'énergie de déformation (uniquement emmagasinée dans la partie enroulée du ruban) et de l'énergie potentielle de gravité. L'énergie de déformation est donnée par :

$$U_e = \mu R^2 \beta \Theta, \quad (3.2)$$

où  $\mu = \frac{1}{2} D (k_t^2 + 2\nu k_t k_l + k_l^2)$  est l'énergie de déformation par unité de surface,  $D$  la rigidité de flexion du ruban,  $k_t$  et  $k_l$  les courbures transversale et longitudinale,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $\beta$  l'angle d'ouverture de la section et  $R$  le rayon initial de la section.

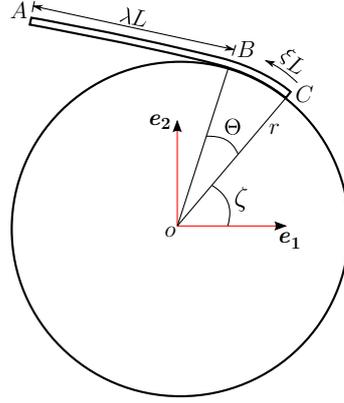


FIGURE 3.5 – Modèle à 2 degrés de liberté ( $\zeta$  et  $\Theta$ ) d'un ruban et de son enrouleur imaginé par Seffen et Pellegrino [53].

L'énergie potentielle de gravitation est la somme de l'énergie potentielle de gravitation des parties déployées et enroulées. L'énergie potentielle totale est alors obtenue :

$$V = \mu R^2 \beta \Theta + 2 \rho_l g r^2 \sin\left(\frac{1}{2} \Theta\right) \sin\left(\zeta + \frac{1}{2} \Theta\right) + \rho_l g (L - r \Theta) \left( r \sin(\Theta + \zeta) + \frac{1}{2} (L - r \Theta) \cos(\Theta + \zeta) \right), \quad (3.3)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Les équations du mouvement sont obtenues par la différentiation du Lagrangien  $\mathcal{L} = T - V$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.4)$$

où les paramètres  $q_i$  sont les coordonnées généralisées du système  $\Theta$  et  $\zeta$  et  $Q_i$  les forces non conservatives agissant sur le système. Le modèle intègre également les frottements de l'air par l'expression d'une force répartie :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} C_D \rho_{air} 2 R \sin\left(\frac{1}{2} \beta\right) (\xi L - r \Theta)^2 (\dot{\zeta} + \dot{\Theta}) \mathbf{e}, \quad (3.5)$$

où  $C_D$  est le coefficient de frottement dans l'air de la section du ruban,  $\rho_{air}$  la masse volumique de l'air,  $\xi$  la coordonnée curvilinéaire d'un point du ruban et  $\mathbf{e}$  le vecteur directeur unitaire de la droite  $(OB)$ . La force  $\mathbf{f}$  peut être remplacée par deux forces  $Q_i$  en dualité avec  $\Theta$  et  $\zeta$  en se basant sur l'égalité du travail dans le cas d'incrémentés infinitésimaux.

Les solutions obtenues par la résolution des équations ont été comparées à des résultats expérimentaux. La figure 3.6 montre une excellente corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats de la simulation pour un essai de déploiement après enroulement autour d'un enrouleur fixe. En outre, Seffen et Pellegrino ont montré que l'influence de la gravité était faible devant celle des frottements de l'air. Des enrouleurs à faible et forte inertie de rotation ont été également testés. De nouveau, la prédiction du modèle quant à l'évolution au cours du temps de la portion de longueur déroulée  $\lambda(t)$ , est en excellent accord avec les résultats expérimentaux. En revanche, on note un écart de 10 % environ sur les valeurs de la rotation de corps rigide  $\zeta(t)$ . L'absence de prise en compte des frottements entre l'enrouleur et le ruban dans les équations du modèle pourrait expliquer cet écart.

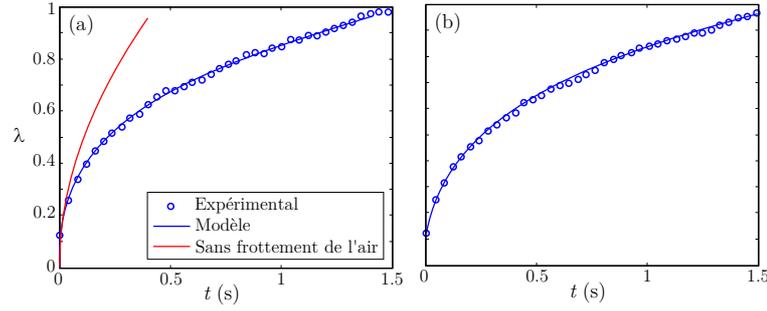


FIGURE 3.6 – Évolution de la portion de longueur déroulée  $\lambda$  obtenue par Seffen et Pellegrino [53] : courbures de signe opposé (a) , courbures de signe égal (b).

### 3.1.2.b Déploiement d'un ruban plié

La figure 3.7 schématise la deuxième modélisation proposée par Seffen et Pellegrino. Le ruban est ici considéré comme étant constitué de trois parties : deux bras rigides déployés et une rotule symbolisant la zone de pliage élastique. Au cours du déploiement, cette zone de pliage se déplace le long du ruban.

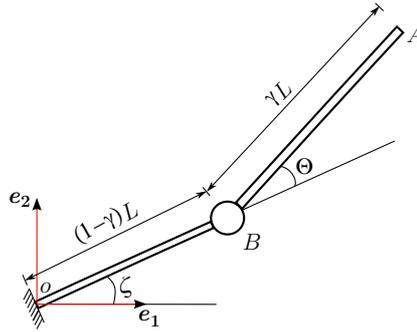


FIGURE 3.7 – Modèle à 2 degrés de liberté ( $\gamma$  et  $\Theta$ ) d'un ruban avec une zone de pliage localisée proposé par Seffen et Pellegrino [53].

On suppose que l'énergie cinétique est négligeable dans la branche  $[OB]$  et vaut :

$$T = \rho_l L^3 \left( \gamma \dot{\gamma}^2 (1 - \cos(\Theta)) + \frac{1}{2} \gamma^2 \dot{\gamma} \dot{\Theta} \sin(\Theta) + \frac{1}{6} \gamma^3 \dot{\Theta}^2 \right). \quad (3.6)$$

On admet que l'énergie de déformation est concentrée dans la zone de pliage au point  $B$ . A partir de l'écriture standard de l'énergie de déformation de flexion par unité de surface dans une coque, Seffen et Pellegrino définissent l'énergie de déformation de la rotule :

$$U_e = \frac{1}{4} D \beta \left( 1 + 4\nu + \frac{r_1}{r_2} + 2 \frac{r_2}{r_2 - r_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right) \Theta, \quad (3.7)$$

où  $r_1$ , qui est une variable du problème, est le rayon de courbure près du support fixe et  $r_2$  le rayon de courbure de la section suffisamment éloignée de la zone de pliage pour pouvoir poser  $r_2 = R$ . A cette énergie de déformation est ajoutée l'énergie potentielle de gravité pour donner

l'énergie potentielle totale du problème :

$$V = \frac{1}{4} D \beta \left( 1 + 4\nu + \frac{r_1}{r_2} + 2 \frac{r_2}{r_2 - r_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right) \Theta + \frac{1}{2} \rho_l g L^2 \left( (1 - \gamma^2) \sin(\zeta) + \gamma^2 \sin(\zeta + \Theta) \right). \quad (3.8)$$

Les équations du mouvement sont de nouveau obtenues par la différentiation du Lagrangien. Considérer que la zone de pliage est ponctuelle et qu'elle se déplace entraîne un saut de vitesse, ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse de la conservation de l'énergie qui est supposée dans les équations de Lagrange.

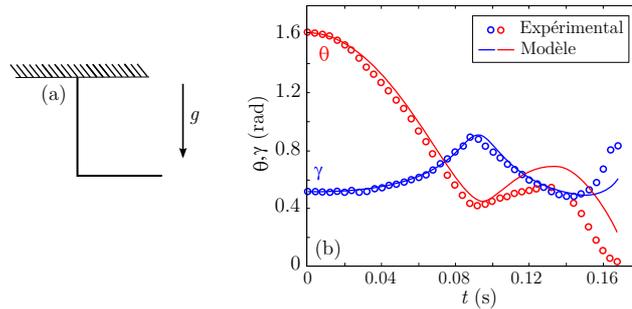


FIGURE 3.8 – (a) configuration testée; (b) comparaison de l'évolution de  $\gamma$  et  $\Theta$  établie par Seffen et Pellegrino [53].

L'assimilation d'un ruban à un système discret donne des prédictions très satisfaisantes sur la dynamique de déploiement. Cependant cet aspect discret entraîne l'obligation de définir *a priori* le nombre de rotules et donc le nombre de zones de pliages pouvant apparaître au cours de la simulation. Un comportement moins prévisible ne peut donc pas être simulé. De plus la paramétrisation rend impropre l'utilisation de méthodes basées sur la conservation de l'énergie. Définir la zone de pliage comme étant le passage progressif d'une zone où la courbure transversale est non nulle à une zone où la courbure transversale est nulle (zone de transition continue) permettrait une utilisation rigoureuse de cette méthode énergétique.

### 3.1.3 Cas particulier du ruban bistable

Dans le cas d'un ruban bistable, les études de la littérature se concentrent sur la caractérisation des états stables. Afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, l'ensemble des études présentées ci après ont été reproduites dans le cadre de ce travail.

#### 3.1.3.a Modèle éléments finis

Iqbal et Pellegrino ont simulé à l'aide du logiciel ABAQUS le passage d'un état stable à l'autre [32]. La coque est modélisée à l'aide d'éléments S4R avec un comportement de type stratifié. Le nœud central de la coque est encastré et une densité linéique de couple est appliquée sur les deux bords droits de la coque dans le but de l'ouvrir. La résolution du modèle dans le cadre de non linéarités géométriques permet d'observer les déformées visibles à la figure 3.9.

La figure 3.10 (a) illustre l'évolution de l'énergie de déformation au cours d'un essai qui comporte trois étapes. L'étape A correspond au passage de l'état initial au second état stable. Après le franchissement du pic énergétique (déformée [5]) et l'amorçage du basculement dans le second

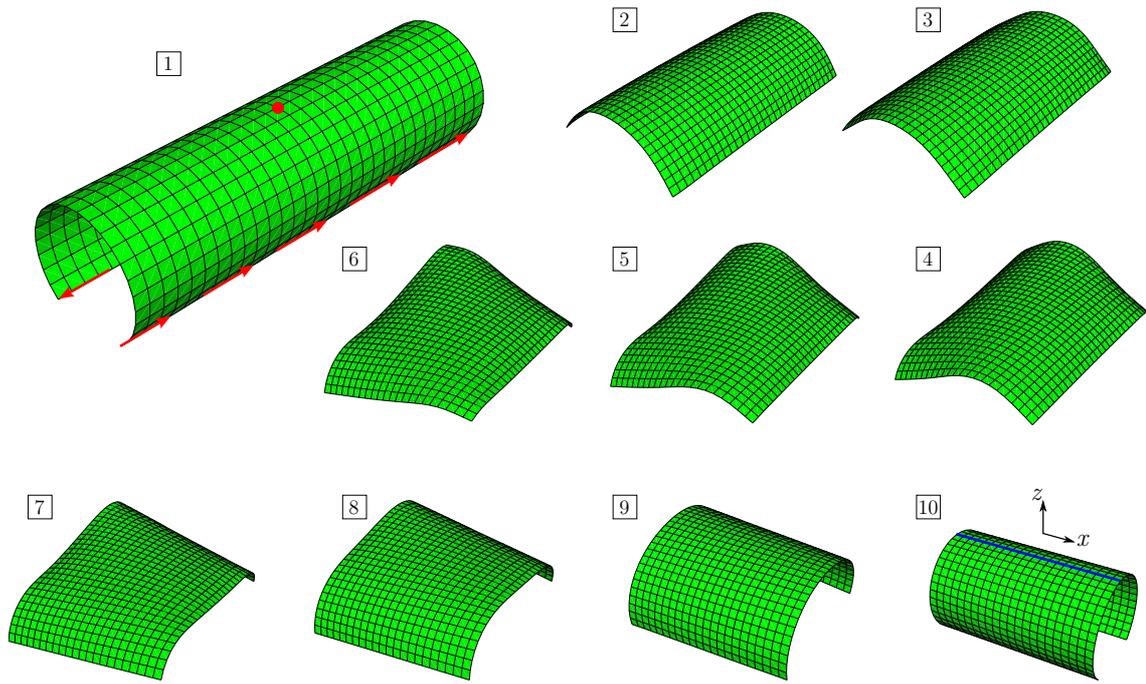
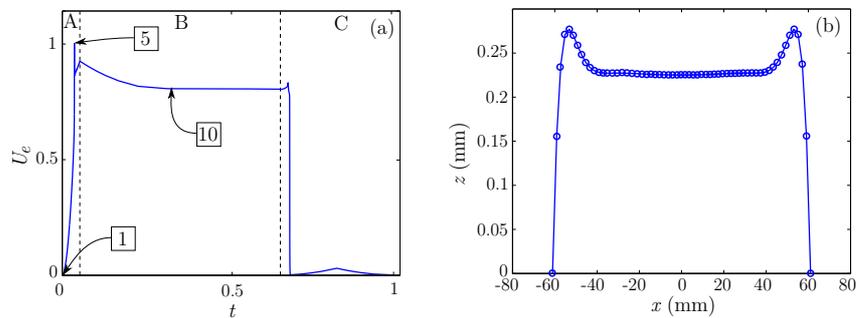


FIGURE 3.9 – Séquence du passage d’un état stable à l’autre pour une coque bistable.

état stable, on observe de nouveau une légère croissance de l’énergie, le chargement étant toujours appliqué. Lorsqu’il n’est plus appliqué, l’énergie diminue de nouveau pour se stabiliser (déformée [10](#)). La coque est alors dans son second état stable. Au cours de l’étape B aucun effort n’est appliqué et le puits d’énergie est bien mis en évidence. L’étape C voit la coque retrouver son état initial grâce à l’application de nouvelles densités linéiques de couple. La figure (b) illustre l’allure de la section de la déformée [10](#). On remarque que la courbure transversale n’est pas nulle aux bords. Cependant l’amplitude des bourrelets est très faible devant la largeur du ruban. Il peut donc être raisonnable d’admettre que le ruban est plat dans sa configuration enroulée.

FIGURE 3.10 – Évolution de l’énergie élastique  $U_e$  au cours du passage d’un état stable à l’autre (a); allure de la section de l’état déformé (b).

### 3.1.3.b Modèles basés sur les équations de poutre et de coque

Galletly et Guest ont développé deux modèles de poutre et de coque permettant de caractériser le second état stable [21][22][23]. Dans le premier cas, on considère trois modes de déformations de type poutre : l'extension, la flexion et la torsion. Les déformations locales de coque sont alors écrites en fonction de ces déformations globales à partir d'une cinématique inspirée de la théorie des poutres. A partir des déformations locales et des contraintes locales associées (calculées par la théorie du stratifié), les efforts globaux peuvent être calculés. La coque est en équilibre si chacun des efforts globaux est nul. La stabilité des positions d'équilibre doit être vérifiée en s'assurant que la matrice tangente locale est définie positive. Le second modèle est basé sur le même principe mais exploite directement les déformations de coque.

### 3.1.3.c Modèle énergétique extensionnel

Cet état est également décrit par Iqbal et al. qui proposent un modèle basé sur le calcul de l'énergie de déformation élastique [31]. Ce modèle prend en compte à la fois l'énergie de déformation de flexion et de membrane. La figure 3.11 présente les deux étapes permettant de passer d'un état stable à l'autre. Les déformations de membrane n'interviennent que dans la seconde étape (figure (c)).

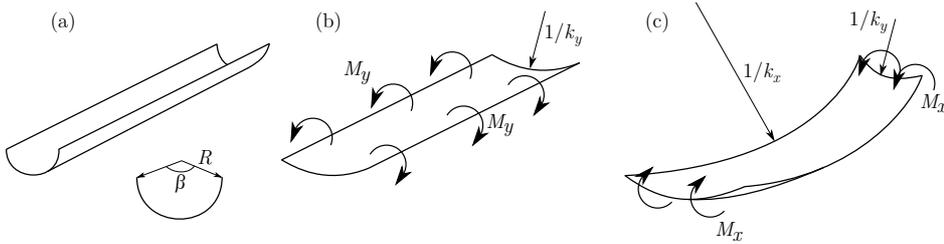


FIGURE 3.11 – État initial de la coque bistable (a) ; variation de courbure transversale (b) ; variation de courbure longitudinale (c).

L'énergie de déformation par unité de surface est donc donnée par :

$$U_e = U_b + U_s = \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.9)$$

avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{D}$  les matrices de rigidité de membrane et de flexion associées aux vecteurs de variation de courbure  $\mathbf{k}$  et de déformation de la surface moyenne  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Après simplification et intégration sur la section de la coque, les auteurs obtiennent l'expression finale :

$$U_e = \frac{1}{2} \beta R \left[ D_{11} k_x^2 + 2D_{12} k_x \left( k_y - \frac{1}{R} \right) + D_{22} \left( k_y - \frac{1}{R} \right)^2 \right] + \frac{A_{11}}{2} \left[ \frac{\beta R}{2} \frac{k_x^2}{k_y^2} + \frac{\sin(\beta R k_y)}{2} \frac{k_x^2}{k_y^3} - \frac{4 \sin^2(\beta R k_y/2)}{\beta R} \frac{k_x^2}{k_y^4} \right]. \quad (3.10)$$

Cette expression n'est fonction que de deux variables :  $k_x$  et  $k_y$  étant respectivement la courbure longitudinale et la courbure transversale de la coque. La figure 3.12 représente différents niveaux d'iso-énergie en fonction de ces deux variables pour un stratifié antisymétrique bistable ( $[+\alpha/-\alpha/+ \alpha/-\alpha]$ ). On remarque l'existence de deux minimums locaux. Le point A correspond à

l'état initial (la courbure longitudinale est nulle); le point  $B$  correspond au second état stable dont on peut déterminer la courbure.

L'inconvénient de cette modélisation est qu'elle ne prend pas en compte les éventuelles déformations de torsion. En effet, si on modélise un stratifié symétrique ( $[+\alpha/-\alpha/-\alpha/+\alpha]$ ), on obtient les mêmes courbes alors que les termes de couplage flexion/torsion sont non nuls. On ne peut donc pas étudier la stabilité en torsion. Si l'on souhaite uniquement étudier le second état stable, les configurations dignes d'intérêt sont celles pour lesquelles  $k_x k_y = 0$ , c'est-à-dire des configurations pour lesquelles l'énergie de déformation de membrane est nulle.

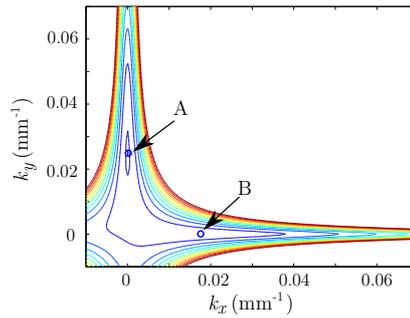


FIGURE 3.12 – Courbes typiques représentant les niveaux d'énergie de déformation en fonction des courbures transversale et longitudinale.

### 3.1.3.d Modèle énergétique inextensionnel

Afin d'étudier la stabilité en torsion, Guest et Pellegrino introduisent une variable la décrivant, et considèrent que la coque est inextensible [28]. Ainsi le passage d'un état stable à l'autre ne s'effectue plus par l'application d'efforts de flexion mais par une rotation autour d'un cylindre imaginaire représenté à la figure 3.13.

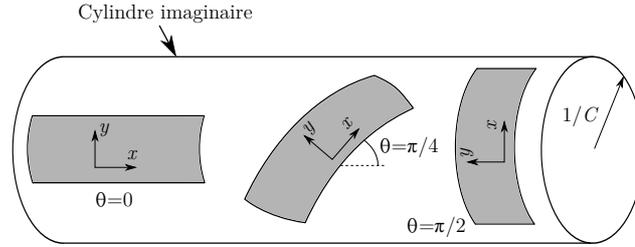


FIGURE 3.13 – Passage d'un état stable à l'autre par rotation de la coque autour d'un cylindre imaginaire.

Ici, seule l'énergie de déformation de flexion intervient, les auteurs l'expriment à l'aide de variables adimensionnées :

$$\hat{U}_e = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.11)$$

avec  $\hat{U}_e = \frac{UR^2}{D_{11}}$ ,  $\hat{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{D}}{D_{11}}$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = R\mathbf{k} = \frac{CR}{2} \begin{bmatrix} 1 - \cos(2\theta) \\ \cos(2\theta) + 1 - \frac{2}{RC} \\ 2 \sin(2\theta) \end{bmatrix}$ ,  $\hat{C} = CR$ , où  $C$  est la

courbure de l'état final,  $R$  le rayon de l'état initial et  $\theta$  l'angle de rotation de la coque par rapport à l'axe longitudinal du cylindre. Les positions d'équilibre sont obtenues pour les valeurs de  $C$  et  $\theta$  vérifiant :

$$\frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial C} = 0. \quad (3.12)$$

Ces positions d'équilibre sont stables si elles correspondent à un minimum local d'énergie. Pour cela, il faut que la matrice

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{U}_e}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \hat{U}_e}{\partial \theta \partial \hat{C}} \\ \frac{\partial^2 \hat{U}_e}{\partial \theta \partial \hat{C}} & \frac{\partial^2 \hat{U}_e}{\partial \hat{C}^2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

soit définie positive. On peut alors tracer des représentations polaires des niveaux d'énergie en fonction de  $\hat{C}$  et  $\theta$ .

La figure 3.14 représente les niveaux d'énergie d'une coque antisymétrique bistable ( $[+\alpha/-\alpha/+ \alpha/-\alpha]$ ). Les points  $A$  et  $B$  correspondent respectivement aux états initiaux et finaux. Les points  $E$  et  $F$  sont également des points d'équilibre mais ne vérifient pas les conditions de stabilité. Ce modèle peut traiter les coques isotropes, auquel cas il n'existe que deux positions d'équilibre, la seconde n'étant pas stable. Dans le cas des coques composites symétriques, le point  $B$  ne se trouve pas sur l'axe horizontal à cause de la torsion induite par le couplage flexion/torsion.

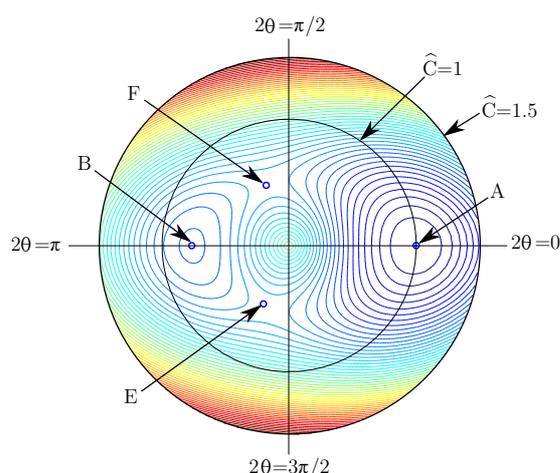


FIGURE 3.14 – Courbes typiques représentant les niveaux d'énergie de déformation en fonction de  $\theta$  et  $\hat{C}$ .

### 3.1.3.e Comparaison des différents modèles

Le tableau 3.2 présente une comparaison des rayons de courbure du second état stable obtenus expérimentalement et par les modèles décrits plus haut. On remarque que les deux modèles énergétiques donnent les mêmes résultats. En effet, dans les deux cas, seule l'énergie de déformation de flexion caractérise l'état enroulé. Le modèle de coque, ayant les hypothèses les moins sévères, fournit naturellement les résultats les plus proches de ceux obtenus par la modélisation par éléments finis.

Géométrie initiale				Mesure du rayon de courbure final				
$\alpha$	$R$	Épaisseur	$\beta$	Expérimentale	Modèles			
					E.F.	Énergétiques	Poutre	Coque
45	29	1.05	280	30	39.6	37.8	38.5	40
			200		40.5			40.7
			120		43			42.7
			90		45.7			45.1
30	25	1,09	180	74	-	79.8	83.3	97.6
1,03		34		36.8		40.9		
45		0.95	149	30		36.1	37	41.6
		90	26	38.4			49	
60	25	1,05	155	13	23,8	25	28,8	

TABLE 3.2 – Comparaison des rayons de courbure du second état stable de différents rubans ( $\alpha$  est l'orientation des fibres et  $\beta$  le degré d'ouverture de la section. Ces deux valeurs sont exprimées en degrés, les autres en millimètres).

## 3.2 Modélisations de poutres à section déformable

Afin de pallier la lourdeur des calculs induite par une modélisation de type coque, certains auteurs décrivent le comportement de structures auxquelles les rubans peuvent être apparentées, à l'aide de modèles de poutres dont la section est déformable. L'idée majeure est d'introduire des paramètres cinématiques supplémentaires permettant de décrire les comportements dans le plan et hors plan. Les différences principales résident dans la manière dont les variations de la section sont paramétrisées (méthode de Ritz, méthode des éléments finis) et dans la manière dont on passe d'un modèle 3D à un modèle 1D. Par exemple, Živković et al. proposent une approche par éléments finis : des nœuds additionnels et des fonctions de forme sont utilisés pour décrire les changements locaux de la section [69]. La réduction des degrés de libertés additionnels est effectuée par une méthode classique de condensation et l'élément final comporte six degrés de liberté par nœud. Pimenta et Campello utilisent quant à eux des fonctions de forme et des degrés de liberté globaux pour décrire les variations de section [41]. Ils définissent des contraintes et déformations généralisées dans la section et réduisent le modèle 3D à un modèle 1D de manière analytique. L'élément de poutre obtenu a  $6 + n$  degrés de liberté, où  $n$  correspond au nombre de fonctions de forme introduites. Cette approche concerne les poutres à section pleine plutôt qu'à parois minces. Plus récemment, Gonçalves et al. [25] ont enrichi la théorie de poutre géométriquement exacte de Reissner et Simo [57] avec des modes de déformation de la section. Cette théorie concerne les poutres à parois minces et permet de retrouver la théorie classique de Vlassov [64].

## 3.3 Conclusion du troisième chapitre

Les observations faites dans les paragraphes précédents permettent de classer en 3 grandes catégories les méthodes qui permettent la modélisation de rubans :

### 1. Modélisation de type « coque » (*Full Computational*)

- *Avantages* : il s'agit de l'approche la plus complète possible (si l'on excepte une description 3D vraiment inadaptée ici). L'ensemble des phénomènes pouvant intervenir peuvent être modélisés (instabilités, pliages 3D, dynamique) plus ou moins aisément en fonction de la robustesse et des possibilités offertes par le code exploité.
- *Inconvénients* : le pendant à cette utilisation directe d'un logiciel commercial est la difficulté à interpréter la physique intrinsèque au comportement du ruban puisque les équations de coque sont résolues brutalement. De plus le grand nombre de degrés de libertés introduits dans ce type de modèle, les fortes non-linéarités et la prise en compte éventuelle des effets dynamiques impliquent inévitablement des temps de calcul importants.

### 2. Modélisation de type poutre à section déformable

- Élément fini de poutre à section déformable
  - *Avantages* : la réduction du nombre de degrés de liberté permet d'obtenir un modèle moins lourd tout en permettant la description en 3D du comportement.
  - *Inconvénients* : cette approche purement « éléments finis » ne donne pas d'informations relatives à la physique intrinsèque du ruban.

- Cinématique de poutre associée à des fonctions de forme décrivant le comportement la section
  - *Avantages* : il s'agit d'une description qui introduit « plus de physique » à l'aide de peu de paramètres.
  - *Inconvénients* : le modèle proposé reste cependant trop riche et la méthode adoptée nécessite l'écriture manuelle de la discrétisation par éléments finis du système.

### 3. Modélisation à l'aide de portions rigides et de rotules

- *Avantages* : cette stratégie est basée sur l'observation directe de rubans. Le peu de degrés de liberté introduits permet d'une part d'obtenir facilement l'influence des différents paramètres et d'autre part de réduire considérablement les temps de calcul. Cela conduit tout de même à des prédictions de cinétique de déploiement très précises.
- *Inconvénients* : le peu de degrés de liberté utilisés et le grand nombre d'hypothèses empêchent la simulation de l'ensemble des phénomènes possibles. De plus il est nécessaire de connaître *a priori* le nombre de pliages susceptibles d'intervenir afin de définir un nombre de variables adapté.

Finalement, on souhaite proposer un modèle réunissant les avantages d'un modèle de poutre à section déformable qui prenne en compte les spécificités des rubans : structure mince et section déformable. Il doit être suffisamment riche pour être capable de décrire les phénomènes complexes (claquage, dynamique) tout en ayant peu de paramètres cinématiques. Par ailleurs, on veillera à ce que l'exploitation du modèle puisse s'effectuer simplement sans avoir à développer un algorithme de résolution dédié.



---

## Écriture du modèle

**L**e chapitre précédent nous a permis de cerner les avantages et les lacunes des différentes méthodes de modélisations existantes de rubans. Dans ce chapitre nous proposons un modèle de poutre à section fortement déformable qui se veut en être un compromis. Partant d'une théorie de coque en grands déplacements, grandes déformations et en dynamique, on ajoute des hypothèses cinématiques et sthéniques adaptées aux structures de type mètre ruban. Les grands déplacements dans la section sont décrits à l'aide d'une cinématique *Elastica* et la contrainte de tension axiale est supposée prépondérante devant les autres contraintes de membrane. Les équations locales de coques étant complexes et lourdes à manipuler, on adopte une approche énergétique basée sur le principe d'Hamilton. Par une intégration dans la section, le modèle 2D est réduit à un modèle 1D et on obtient ainsi l'expression des énergies potentielle et cinétique du modèle de poutre à section fortement déformable. Ces énergies seront par la suite directement introduites dans le logiciel COMSOL qui les différenciera numériquement et résoudra les équations intégrales obtenues par la méthode des éléments finis. Cette étude a donné lieu à la rédaction d'un article soumis à un journal international à comité de lecture.

## PLAN DU CHAPITRE 4

---

<b>4.1</b>	<b>Hypothèses de base et cinématique</b>	<b>59</b>
<b>4.2</b>	<b>Mesure des déformations et énergie de déformation</b>	<b>61</b>
4.2.1	Mesure des déformations	61
4.2.2	Petites déformations de membrane	63
4.2.3	Énergie de déformation	64
<b>4.3</b>	<b>Energie Cinétique</b>	<b>66</b>
<b>4.4</b>	<b>Principe d'Hamilton et multiplicateur de Lagrange</b>	<b>67</b>
<b>4.5</b>	<b>Application au mètre ruban</b>	<b>68</b>
4.5.1	Cinématique particulière	68
4.5.2	Déformations	69
4.5.3	Energie des efforts extérieurs et conditions limites	69
<b>4.6</b>	<b>Conclusion du quatrième chapitre</b>	<b>70</b>

---

## 4.1 Hypothèses de base et cinématique

On considère un espace tridimensionnel muni d'un repère orthonormé fixe  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dans lequel évolue une coque. Dans sa configuration initiale non déformée, on suppose que la géométrie de cette coque peut être décrite par l'extrusion suivant  $\mathbf{e}_1$ , d'une courbe contenue dans le plan  $(O, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . La coque est donc assimilable à une poutre droite d'axe  $\mathbf{e}_1$  et de section droite invariante définie par une "courbe section". De plus, on suppose que cette courbe est symétrique par rapport au plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  et on définit la ligne de référence comme étant l'intersection de la coque avec le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . Le repère fixe  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est choisi de telle manière que l'axe  $(O, \mathbf{e}_1)$  contienne cette ligne de référence (figure 4.1).

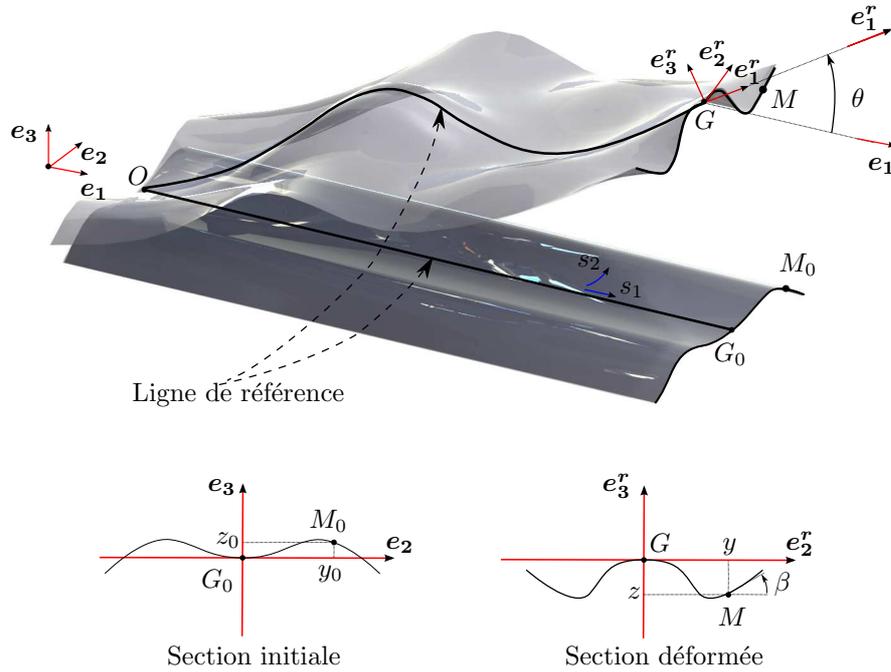


FIGURE 4.1 – Description de la cinématique

Soit  $M$  un point matériel attaché à la coque. Dans la configuration initiale, sa position est donnée par le vecteur  $\mathbf{OM}_0$  qui peut se décomposer en deux parties :

$$\mathbf{OM}_0 = \mathbf{OG}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{M}_0, \quad (4.1)$$

où  $G_0$  est le point d'intersection de la ligne de référence et de la section contenant le point  $M$ . La coque est paramétrée par  $s_1$  et  $s_2$  qui sont respectivement la coordonnée curviligne le long de la ligne de référence et de la courbe section :  $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a/2, a/2]$  où  $L$  est la longueur initiale de la ligne de référence et  $a$  la longueur initiale de la courbe section. On définit les coordonnées locales  $y_0(s_2)$  et  $z_0(s_2)$  du point  $M_0$  dans le plan de la section non déformée  $(G_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de telle sorte à ce que l'on ait :

$$\begin{aligned} \mathbf{OG}_0 &= s_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{G}_0\mathbf{M}_0 &= y_0(s_2) \mathbf{e}_2 + z_0(s_2) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Par la suite et par souci de simplicité on suppose que la déformée de la ligne de référence est contenue dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . De plus on considère que la section reste symétrique par rap-

port au plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  lors de la déformation.

Les 3 hypothèses cinématiques du modèle sont alors :

- (i) la section est contenue dans un plan après déformation,
- (ii) le plan de la section est orthogonal au vecteur tangent à la déformée de la ligne de référence,
- (iii) la section est considérée inextensible.

De la même manière, on définit le vecteur position du point  $M$  à l'instant  $t$  par :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}, \quad (4.3)$$

où  $G$  est l'image de  $G_0$ . En introduisant les translations  $u_1(s_1, t)$  et  $u_3(s_1, t)$  nous obtenons :

$$\mathbf{OG} = (s_1 + u_1) \mathbf{e}_1 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (4.4)$$

Pour décrire le comportement de la section dans son plan (cf. hypothèse (i)), considérons un repère tournant  $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$  où  $\mathbf{e}_1^r$  est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la section dans la configuration déformée :  $\mathbf{e}_2^r = \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3^r = \mathbf{e}_1^r \times \mathbf{e}_2^r$ . Dans le repère local  $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ , les coordonnées du point  $M$  sont notées  $y(s_1, s_2, t)$  et  $z(s_1, s_2, t)$  pour obtenir :

$$\mathbf{GM} = y \mathbf{e}_2^r + z \mathbf{e}_3^r. \quad (4.5)$$

Si la rotation du plan de la section autour de  $\mathbf{e}_2$  est décrite par  $\theta(s_1, t)$ , les vecteurs du repère local peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^r &= \cos(\theta) \mathbf{e}_1 - \sin(\theta) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^r &= \sin(\theta) \mathbf{e}_1 + \cos(\theta) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'hypothèse (ii) implique que le vecteur  $\mathbf{e}_1^r$  soit tangent à la ligne de référence dans la configuration déformée. Si  $\mathbf{a}_1^r$  représente le vecteur tangent et  $j^r$  sa norme alors nous avons :

$$\mathbf{a}_1^r = \mathbf{OG}_{,1} = j^r \mathbf{e}_1^r, \quad (4.7)$$

où la notation  $X_{,i}$  correspond à la dérivée partielle de  $X$  par rapport à  $s_i$ . D'après les équations (4.4), (4.6) et (4.7), la rotation  $\theta$  et les déplacements  $u_1$  et  $u_3$  ne sont pas indépendants :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{j^r} (1 + u_{1,1}), \quad \sin(\theta) = -\frac{1}{j^r} (u_{3,1}), \quad (4.8)$$

avec

$$j^r = \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2}. \quad (4.9)$$

Respecter l'hypothèse (iii) revient à assimiler la courbe section à un *Elastica*. Il s'agit du nom donné par Jacques Bernoulli en 1691 au modèle de poutre inextensible en grands déplacements. Les premières études ont été publiées par Euler en 1744 [19]. Depuis, l'*Elastica* a donné lieu à de nombreuses publications. Une revue historique des études menées à ce sujet a été publiée par Goss [26]. Dans le cas présent, cette hypothèse se traduit par :

$$\mathbf{GM}_{,2} \cdot \mathbf{GM}_{,2} = (y_{,2})^2 + (z_{,2})^2 = (y_{0,2})^2 + (z_{0,2})^2 = 1. \quad (4.10)$$

Les coordonnées  $y(s_1, s_2, t)$  et  $z(s_1, s_2, t)$  d'un point de la section déformée s'écrivent alors très simplement à l'aide d'un angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  illustré en bas à droite de la figure 4.1 :

$$\begin{cases} y_{,2} = \cos(\beta), \\ z_{,2} = \sin(\beta). \end{cases} \quad (4.11)$$

Par cette hypothèse d'inextensibilité, on suppose que le phénomène majeur qui gouverne le changement de section du ruban, est l'adaptation de l'inertie de flexion de la poutre. Ainsi, on admet que les déformations transversales sont négligeables et qu'il est suffisant de décrire l'allure générale de la courbe section. Il s'agit là d'une hypothèse habituellement admise dans les théories classiques de poutres qui ne prennent pas en compte l'effet local du coefficient de Poisson dans l'évaluation de l'inertie de flexion. Dès lors, l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  joue un rôle fondamental puisqu'il est le seul paramètre cinématique qui décrit l'allure de la section. Dans le but de réduire ce modèle 2D à un modèle 1D, on introduit des fonctions  $N_i(s_2)$ ,  $i = 1..n$ ;  $\beta(s_1, s_2, t)$  peut alors être décomposé de la manière suivante :

$$\beta = \sum_{i=1}^n N_i(s_2) q_i(s_1, t), \quad (4.12)$$

où les paramètres  $q_i(s_1, t)$  sont les coordonnées généralisées liées à la ligne de référence. Finalement, la variation de la section est donc décrite à l'aide d'une méthode de Ritz [48]. Les coordonnées  $y$  et  $z$  d'un point de la section s'expriment grâce à la procédure d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} y(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \cos \beta(s_1, \xi, t) d\xi, \\ z(s_1, s_2, t) &= \int_0^{s_2} \sin \beta(s_1, \xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La cinématique ne contient donc que des paramètres variant uniquement selon  $s_1$  : deux translations  $u_1$  et  $u_3$ , un angle  $\theta$  et  $n$  coordonnées généralisées  $\beta$  décrivant la section. De manière générale, un choix quelconque des fonctions de forme  $N_i$  intervenant dans 4.12 conduit à l'impossibilité d'intégrer analytiquement l'expression 4.13. Cependant si  $\beta$  est choisi linéaire par morceaux, alors cette intégration analytique est possible. Cela revient à adopter une approche éléments finis à interpolation linéaire pour décrire l'évolution de l'angle  $\beta$ . C'est l'approche retenue pour l'étude du mètre ruban.

## 4.2 Mesure des déformations et énergie de déformation

### 4.2.1 Mesure des déformations

Définissons tout d'abord le repère local, associé au point  $M$  constitué des vecteurs tangents à la surface de la coque  $\mathbf{a}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) et du vecteur normal  $\mathbf{a}_3$ . Les vecteurs tangents sont décomposés en 2 parties : une composante liée à la poutre (exposant  $r$ ) et une autre à la section (exposant  $s$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{O}M_{,\alpha} = \mathbf{O}G_{,\alpha} + \mathbf{G}M_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha^r + \mathbf{a}_\alpha^s, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{j} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $j$  est le Jacobien de la surface :

$$j = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|. \quad (4.15)$$

La description de la cinématique conduit à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1^r &= (1 + u_{1,1}) \mathbf{e}_1 + (u_{3,1}) \mathbf{e}_2 = j^r \mathbf{e}_1^r, \\
\mathbf{a}_2^r &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{a}_1^s &= z \theta_{,1} \mathbf{e}_1^r + y_{,1} \mathbf{e}_2^r + z_{,1} \mathbf{e}_3^r, \\
\mathbf{a}_2^s &= \cos(\beta) \mathbf{e}_2^r + \sin(\beta) \mathbf{e}_3^r.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Le tenseur de Green-Lagrange permet de déterminer les déformations de membrane. En voici les composantes :

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{a}_{0\alpha} \cdot \mathbf{a}_{0\beta}) \tag{4.17}$$

Les déformations de flexion sont quant à elles définies par la différence du tenseur des courbures initiales et du tenseur des courbures courantes :

$$k_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{0\alpha\beta} \tag{4.18}$$

avec

$$\begin{aligned}
b_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \\
&= \frac{1}{j} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Le vecteur normal à la coque dans l'état déformé vérifie :

$$\begin{aligned}
j \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \\
&= (y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)) \mathbf{e}_1^r + (j^r + z \theta_{,1}) (-\sin(\beta) \mathbf{e}_2^r + \cos(\beta) \mathbf{e}_3^r) \\
&= (y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)) \mathbf{e}_1^r + (j^r + z \theta_{,1}) \mathbf{n}^s,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

où  $\mathbf{n}^s$  est le vecteur normal à la section dans le plan de la section. La dérivation des vecteurs tangents présents dans l'expression 4.19 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{1,1} &= \mathbf{a}_{1,1}^r + \mathbf{a}_{1,1}^s \\
&= \left( j_{,1}^r + (z \theta_{,1})_{,1} + z_{,1} \theta_{,1} \right) \mathbf{e}_1^r + y_{,11} \mathbf{e}_2^r + (z_{,11} + (j^r + z \theta_{,1}) \theta_{,1}) \mathbf{e}_3^r, \\
\mathbf{a}_{1,2} &= \mathbf{a}_{1,2}^s \\
&= \sin(\beta) \theta_{,1} \mathbf{e}_1^r + \beta_{,1} (-\sin(\beta) \mathbf{e}_2^r + \cos(\beta) \mathbf{e}_3^r) \\
&= \sin(\beta) \theta_{,1} \mathbf{e}_1^r + \beta_{,1} \mathbf{n}^s, \\
\mathbf{a}_{2,2} &= \mathbf{a}_{2,2}^s \\
&= \beta_{,2} (-\sin(\beta) \mathbf{e}_2^r + \cos(\beta) \mathbf{e}_3^r) \\
&= \beta_{,2} \mathbf{n}^s.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Les hypothèses futures, présentées au paragraphe 4.31, nous permettent de ne calculer que la déformation axiale  $e_{11}$ . Grâce aux équations 4.14 à 4.17 nous avons :

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left( (j^r)^2 - 1 \right) + j^r z \theta_{,1} + \frac{1}{2} (z \theta_{,1})^2 + \frac{1}{2} \left( (y_{,1})^2 + (z_{,1})^2 \right). \quad (4.22)$$

Les équations 4.18 à 4.21 permettent d'écrire les déformations de flexion :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{j} \left( (y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)) \left( j_{,1}^r + (z \theta_{,1})_{,1} + z_{,1} \theta_{,1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j} (j^r + z \theta_{,1}) (z_{,11} \cos(\beta) - y_{,11} \sin(\beta) - (j^r + z \theta_{,1}) \theta_{,1} \cos(\beta)) \right), \\ k_{22} &= \frac{1}{j} (j^r + z \theta_{,1}) \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\ k_{12} &= \frac{1}{j} (\sin(\beta) (y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)) \theta_{,1} + (j^r + z \theta_{,1}) \beta_{,1}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les expressions 4.22 et 4.23 sont établies dans le cadre des grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations. Lorsque l'épaisseur de la coque est très faible devant la longueur de la section, les flambages locaux et globaux empêchent l'apparition de grandes déformations. C'est pour cela qu'il est opportun d'introduire l'hypothèse des petites déformations de membrane afin de simplifier l'écriture des déformations.

#### 4.2.2 Petites déformations de membrane

Sous l'hypothèse des petites déformations de membrane, les variations de longueur et d'aire dans le plan de la coque sont petites et nous pouvons supposer :

$$\begin{aligned} j^r &= 1 + \varepsilon^r \text{ with } |\varepsilon^r| \ll 1 \\ |z \theta_{,1}| &\ll 1 \\ j &= 1 + \varepsilon^s \text{ with } |\varepsilon^s| \ll 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le premier terme de l'expression 4.24 signifie que la longueur de la ligne de référence varie peu. Le second terme signifie qu'en chaque point de la section, la déformation de membrane due à la courbure globale et à l'altitude du point par rapport à la ligne de référence est également petite. Enfin le dernier terme caractérise la faible variation de la surface de la coque. D'après l'équation 4.9 et les deux premières hypothèses de l'expression 4.24, la déformation axiale de membrane 4.22 devient :

$$e_{11} = u_{1,1} + z \theta_{,1} + \frac{1}{2} \left( (u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right) + \frac{1}{2} \left( (y_{,1})^2 + (z_{,1})^2 \right) \quad (4.25)$$

En considérant la norme de l'expression 4.20 et les deux premières hypothèses de 4.24, on obtient :

$$|y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)| \ll 1 \quad (4.26)$$

Nous supposons de plus que le terme  $j_{,1}^r + (z \theta_{,1})_{,1} + z_{,1} \theta_{,1}$  est suffisamment petit pour négliger le produit

$(y_{,1} \sin(\beta) - z_{,1} \cos(\beta)) (j_{,1}^r + (z \theta_{,1})_{,1} + z_{,1} \theta_{,1})$  dans le premier terme de 4.23. Cela implique que

les variations des déformations  $\varepsilon^r$  et  $z\theta_{,1}$  sont limitées. Finalement, les déformations de flexion se limitent à :

$$\begin{aligned} k_{11} &= -\theta_{,1} \cos(\beta) + (z_{,11} \cos(\beta) - y_{,11} \sin(\beta)), \\ k_{22} &= \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\ k_{12} &= \beta_{,1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les déformations 4.25 et 4.27 peuvent être décomposées en déformations relatives au comportement global de poutre (exposant  $r$ ) et en déformations relatives à la cinématique locale de coque (exposant  $s$ ) :

$$\begin{aligned} e^r &= u_{1,1} + \frac{1}{2} \left( (u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right), \\ k^r &= \theta_{,1}, \\ e^s &= \frac{1}{2} \left( (y_{,1})^2 + (z_{,1})^2 \right), \\ k_{11}^s &= z_{,11} \cos(\beta) - y_{,11} \sin(\beta), \\ k_{22}^s &= \beta_{,2} - \beta_{0,2}, \\ k_{12}^s &= \beta_{,1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Les expressions 4.25 et 4.27 peuvent donc être réécrites :

$$\begin{aligned} e_{11} &= e^r + z k^r + e^s, \\ k_{11} &= -k^r \cos(\beta) + k_{11}^s, \\ k_{22} &= k_{22}^s, \\ k_{12} &= k_{12}^s. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les déformations  $e^r$  et  $k^r$  dépendent uniquement de  $u_1$ ,  $u_3$  et  $\theta$ . Dans 4.28 on retrouve leur expression classiquement utilisée dans les déformations de tension et de courbure dans le cadre de la théorie des poutres en grandes rotations. Les déformations  $e^s$  et  $k_{\alpha\beta}^s$ , qui ne dépendent que de l'angle  $\beta$ , sont quant à elles moins classiques et prennent en compte l'évolution de la forme de la section le long de la ligne de référence. On remarque également que la déformation de flexion  $k_{11}$  est composée d'une flexion de poutre et d'une flexion locale due à la variation de section. Par ailleurs, les deux autres déformations de flexion ne sont pas influencées par le comportement de type poutre.

### 4.2.3 Énergie de déformation

Classiquement l'énergie de déformation élastique d'une coque est donnée par :

$$U_e(u_1, u_3, \theta, \beta) = \int_0^L \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) \, ds_2 \, ds_1. \quad (4.30)$$

où  $N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  sont respectivement les contraintes de membrane et les moments de flexion. Comme la longueur  $a$  de la section est petite devant la longueur axiale  $L$ , les hypothèses classiques de la théorie des poutres supposant que  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$  deviennent ici :

$$N_{22} = N_{12} = 0. \quad (4.31)$$

ce qui implique :

$$U_e(u_1, u_3, \theta, \beta) = \int_0^L \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} (e_{11} N_{11} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) \, ds_2 \, ds_1. \quad (4.32)$$

L'hypothèse 4.31 est un point important du modèle proposé. En effet si les termes  $e_{12} N_{12}$  et  $e_{22} N_{22}$  ne sont pas négligés, alors des phénomènes de verrouillage numérique apparaissent et empêchent l'obtention de résultats satisfaisants. Par exemple, on n'observe pas la localisation de la zone de pliage. Ces problèmes auxquels nous avons été confrontés sont tout à fait similaires à ceux rencontrés habituellement dans la modélisation par éléments finis de poutre avec cisaillement ??.

La coque est supposée élastique orthotrope sans couplage entre les comportements en membrane et en flexion. Ainsi, la loi de comportement peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N_{11} &= A e_{11}, \\ M_{11} &= D_1 k_{11} + D_3 k_{22}, \\ M_{22} &= D_3 k_{11} + D_2 k_{22}, \\ M_{12} &= D_4 (2 k_{12}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

où  $A$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  sont les constantes d'élasticité. Dans le cas d'une coque d'épaisseur constante  $h$ , constituée d'un matériau isotrope de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , nous avons :

$$A = E h, \quad D_1 = D_2 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_3 = \nu D_1 \text{ et } D_4 = \frac{E h^3}{24(1+\nu)}. \quad (4.34)$$

En combinant les expressions 4.33 et 4.29 avec 4.32 on obtient l'écriture de l'énergie de déformation qui peut être décomposée de la manière suivante :

$$U_e = U_e^r + U_e^s + U_e^{rs} \quad (4.35)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} U_e^r &= \int_0^L \frac{1}{2} \left( A a e^{r^2} + \left( A \overline{z^2} + D_1 \overline{\cos^2(\beta)} \right) k^{r^2} + 2 A \overline{z} e^r k^r \right) ds_1 \\ U_e^s &= \int_0^L \frac{1}{2} \left( A \overline{e^{s^2}} + D_1 \overline{k_{11}^s} + D_2 \overline{k_{22}^s} + 2 D_3 \overline{k_{11}^s k_{22}^s} + 4 D_4 \overline{k_{12}^s} \right) ds_1 \\ U_e^{rs} &= \int_0^L \left( A e^r \overline{e^s} + A k^r \overline{z e^s} - k^r \left( D_1 \overline{\cos(\beta) k_{11}^s} + D_3 \overline{\cos(\beta) k_{22}^s} \right) \right) ds_1 \end{aligned} \right. \quad (4.36)$$

où la notation surlignée représente une intégration suivant  $s_2$  :

$$\overline{X}(s_1, t) = \int_{-a/2}^{a/2} X(s_1, s_2, t) \, ds_2 \quad (4.37)$$

$U_e^r$  représente l'énergie de déformation classique d'une poutre. Le premier terme  $A a e^{r^2}$  caractérise l'énergie de tension. Dans le second terme,  $A \overline{z^2} + D_1 \overline{\cos^2(\beta)}$  est la rigidité de flexion dans laquelle on retrouve la contribution classique du moment quadratique d'inertie  $\overline{z^2}$ . Le terme  $D_1 \overline{\cos^2(\beta)}$  traduit la flexion locale dans la section due à la cinématique locale de coque. Dans le troisième et dernier terme,  $A \overline{z}$  est la rigidité de couplage entre la déformation de membrane et de flexion. On peut noter que dans un modèle de poutre classique à section indéformable, si la ligne de référence choisie est la ligne qui passe par les barycentres des sections alors le terme de couplage disparaît ( $\overline{z} = 0$ ). Ici les moments linéaire et quadratique  $\overline{z}$  et  $\overline{z^2}$  varient avec la forme de la section. Pour une section plate, lorsque  $\beta(s_2) = z(s_2) = 0$ , le moment quadratique est nul et la rigidité de flexion de la poutre est égale à celle d'une coque plate de largeur  $a$ .

$U_e^s$  ne dépend que de la variable  $\beta$  et représente l'énergie de déformation induite par le changement de forme de la section, indépendamment du comportement de poutre. Dans ce modèle la variation pure de la forme de la section ( $e^r = k^r = 0$ ) est traduite par une énergie de déformation quadratique qui prend en compte la déformation locale de membrane  $e^s$  et les courbures de flexion locale  $k_{\alpha\beta}^s$ .

$U_e^{rs}$  fait intervenir des termes liés au couplage entre la cinématique globale de poutre et la cinématique locale de coque.

### 4.3 Energie Cinétique

L'énergie cinétique du modèle correspond à celle d'une coque dont on néglige la contribution de l'inertie de rotation :

$$T(u_1, u_3, \theta, \beta) = \int_0^L \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} \rho^s \left( \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)^2 j ds_2 ds_1 \quad (4.38)$$

où  $\rho^s$  est la densité surfacique et  $j$  le Jacobien de la surface. L'hypothèse des petites déformations de membrane permet de négliger ce dernier terme ( $j \approx 1$ ). On suppose également que la variation de la densité surfacique est négligeable. De la même manière que pour l'énergie de déformation, l'énergie cinétique peut être décomposée en 3 parties :

$$T = T^r + T^s + T^{rs} \quad (4.39)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} T^r = \int_0^L \frac{1}{2} \left( \rho^s a (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) + \rho^s \overline{z^2} \dot{\theta}^2 \right) ds_1 \\ T^s = \int_0^L \frac{1}{2} \rho^s \left( \overline{\dot{y}^2} + \overline{\dot{z}^2} \right) ds_1 \\ T^{rs} = \int_0^L \rho^s \left( -\dot{u}_1 \left( \overline{\dot{z} \sin(\theta)} \right) + \dot{u}_3 \left( \overline{\dot{z} \cos(\theta)} \right) \right) ds_1 \end{array} \right. \quad (4.40)$$

où la notation  $\dot{X}$  correspond à la dérivée temporelle de la grandeur  $X$ . Le terme  $T^r$  correspond à l'énergie cinétique habituelle de poutre dans laquelle on trouve les termes d'inertie liés aux translations et rotation globales.  $T^s$  est la contribution de la variation de géométrie de la section. Enfin  $T^{rs}$  caractérise les effets de couplage entre la cinématique globale de poutre et le

changement de l'allure de la section.

Hormis l'énergie des efforts extérieurs qui sera introduite dans le paragraphe 4.5.3, les ingrédients nécessaires à l'application du principe d'Hamilton sont désormais connus. Nous verrons dans le chapitre suivant que les énergies peuvent directement être implémentées dans le logiciel COMSOL qui se charge d'effectuer une différentiation numérique de l'Hamiltonien. Les relations 4.6 montrent que  $u_1$ ,  $u_3$  et  $\theta$  ne sont pas indépendants. Il est bien sûr indispensable de prendre en compte cette dépendance dans le modèle. Ceci est possible par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange.

## 4.4 Principe d'Hamilton et multiplicateur de Lagrange

L'application du principe d'Hamilton, ou principe de moindre action, consiste à déterminer les conditions de stationnarité de la fonctionnelle :

$$\mathcal{H} = \int_{t_1}^{t_2} T - P dt. \quad (4.41)$$

Ainsi, les équations du problème sont obtenues lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$\delta\mathcal{H} = 0. \quad (4.42)$$

L'écriture de l'équation 4.41 n'est pas suffisante pour obtenir l'ensemble des équations du modèle. En effet il faut y ajouter la contrainte qui lie les translations  $u_1$  et  $u_3$  à la rotation de la section  $\theta$ . Pour cela, un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est introduit et la fonctionnelle  $\mathcal{H}$  devient :

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \lambda C ds_1 dt. \quad (4.43)$$

où  $C$  est la contrainte à respecter. Différentes manières d'écrire la contrainte  $C$  sont possibles :

$$C_1 = \cos(\theta) - \frac{1 + u_1'}{j^r}, \quad (4.44)$$

$$C_2 = -\sin(\theta) + \frac{u_3'}{j^r}. \quad (4.45)$$

Dans le premier cas (équation 4.44), la configuration non déformée de la coque impose comme condition initiale à  $t_0$  :  $\theta_{t=t_0} = \theta_{initial} = 0$ . Lors de la résolution numérique, dès le premier pas de temps, nous allons inévitablement avoir  $\theta_{t=t_1} = \theta_{initial} \pm \varepsilon$ . Or  $\cos(0 + \varepsilon) = \cos(0 - \varepsilon)$ . Donc deux valeurs différentes de  $\theta$  vérifient simultanément la contrainte  $C_1$ . Dans le second cas (équation 4.45) le même problème numérique intervient lorsque  $\theta = \pm\pi/2$  car  $\sin(\pm\pi/2 + \varepsilon) = \sin(\pm\pi/2 - \varepsilon)$ . Finalement la contrainte à respecter est donnée par la combinaison de  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C = -\sin(\theta) \frac{1 + u_1'}{j^r} - \cos(\theta) \frac{u_3'}{j^r}. \quad (4.46)$$

Résoudre le modèle revient donc à déterminer les conditions vérifiant :

$$\delta\mathcal{H}^* = 0. \quad (4.47)$$

## 4.5 Application au mètre ruban

### 4.5.1 Cinématique particulière

Le mètre-ruban n'est qu'un cas particulier de la géométrie décrite à la figure 4.1. En effet, dans la configuration initiale, le ruban a une section circulaire comme le montre la figure 4.2

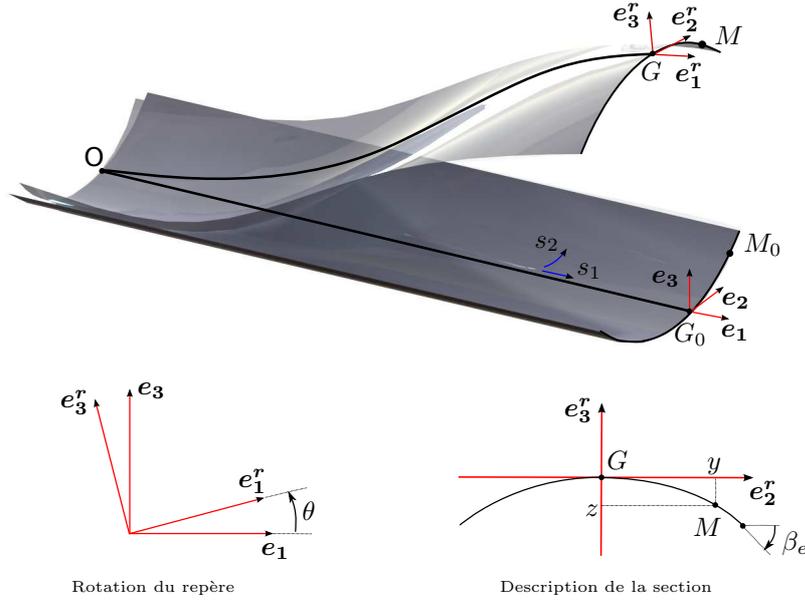


FIGURE 4.2 – Description de la cinématique d'un ruban

Nous supposons que la section du ruban conserve une géométrie d'arc de cercle dont le rayon peut varier le long de la ligne de référence et au cours du temps. L'angle  $\beta$  introduit dans les équations 4.11, 4.12 et 4.13 est donc linéaire suivant  $s_2$ . À une section donnée pour une valeur de  $s_1$  on introduit l'angle  $\beta^e$  à l'extrémité de la section (pour  $s_2 = a/2$ ) afin d'obtenir :

$$\beta(s_1, s_2, t) = 2\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a} \quad (4.48)$$

La section est donc entièrement décrite par un seul paramètre et les coordonnées d'un point de la section initialement exprimées par les relations 4.13 deviennent alors :

$$\begin{cases} y = \frac{a}{2\beta^e} \sin\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right) \\ z = \frac{a}{2\beta^e} \left(1 - \cos\left(2\beta^e \frac{s_2}{a}\right)\right) \end{cases} \quad (4.49)$$

### 4.5.2 Déformations

Les déformations liées aux mouvements de la section ne dépendent que de la variable  $\beta^e$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^s = \frac{1}{2\beta^{e4}} \left( a^2 \sin^2 \left( \frac{s_2 \beta^e}{a} \right) + s_2 \beta^e \left( s_2 \beta^e - a \sin \left( \frac{2s_2 \beta^e}{a} \right) \right) \right) \beta_{,1}^{e2} \\ k_{11}^s = \frac{1}{a\beta^{e3}} \left( 2 \left( s_2^2 \beta^{e2} - a^2 \sin^2 \left( \frac{s_2 \beta^e}{a} \right) \right) \beta_{,1}^{e2} + a^2 \sin^2 \left( \frac{s_2 \beta^e}{a} \right) \beta^e \beta_{,11}^e \right) \\ k_{22}^s = \frac{2}{a} (\beta^e - \beta_0^e) \\ k_{12}^s = \frac{2}{a} \beta_{,1}^e s_2 \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Dans le système 4.50, la présence des dérivées de  $\beta^e$  par rapport à  $s_1$  montre que le modèle peut rendre compte d'une évolution non uniforme de l'allure de la section le long du ruban. Une variation de  $\beta^e$  entraîne l'apparition de déformations locales de tension, de flexion et de torsion. Si la variation de  $\beta^e$  est nulle, alors seule  $k_{22}$  persiste.

A l'aide des expressions 4.48 et 4.49, les intégrations en  $s_2$  introduites dans les énergies 4.40 et 4.36 sont aisées et sont détaillées dans l'annexe.

### 4.5.3 Energie des efforts extérieurs et conditions limites

Les conditions limites qui peuvent être imposées sur les extrémités du ruban sont relatives aux degrés de liberté du modèle :

- les translations  $u_1$  et  $u_3$  du point de référence lié aux sections des extrémités du ruban,
- la rotation  $\theta$  de la section,
- l'angle  $\beta^e$  qui décrit la géométrie de la section,
- la première dérivée  $\beta_{,1}^e$  décrivant la rotation locale de chaque point de la section (à imposer nulle (en plus des 3 variables précédentes) pour simuler un véritable encastrement).

Par souci de simplicité on ne considère que 3 types d'efforts répartis :  $f_1$  et  $f_2$  les densités de forces dirigées suivant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  ainsi que  $c_\beta$  une densité de moment associée à l'angle  $\beta^e$  qui caractérise l'ouverture de la section. Leur travail est donné par :

$$W_{ext} = \int_0^L (f_1 u_1 + f_2 u_2 + c_\beta \beta_e) ds_1 ds_2 \quad (4.51)$$

## 4.6 Conclusion du quatrième chapitre

La complexité des équations locales des théories de coques classiques et la possibilité d'exploiter simplement le principe d'Hamilton à l'aide de COMSOL, ont motivé l'approche énergétique utilisée pour la définition d'un modèle de poutre à section fortement déformable, en grands déplacements et en dynamique. Une cinématique à quatre paramètres permet d'établir l'énergie de déformation selon une théorie de coque. Une intégration sur la section, dont les grands déplacements sont décrits à l'aide d'un seul paramètre, permet la réduction du modèle 2D à un modèle 1D. La particularisation de ce modèle au cas du mètre-ruban, à l'aide d'hypothèses simplificatrices, permet d'identifier l'influence de chaque paramètre cinématique sur le couplage entre les comportements local et global.

---

## Exploitation du modèle

**L**e but de ce chapitre est de démontrer les capacités du modèle développé dans le chapitre précédent, à simuler des scénarios complexes de pliages et de déploiement de rubans. La grande facilité de pilotage ainsi que les temps de calculs réduits permettent facilement de balayer une large gamme d'essais qui mettent en évidence certains phénomènes constatés expérimentalement et relatés dans la littérature. La cinématique à quatre paramètres permet une première approche qualitative des instabilités et son enrichissement permet une augmentation notable de la précision des résultats. Enfin, les premières modélisations de structures multi-rubans sont présentés.

## PLAN DU CHAPITRE 5

---

<b>5.1</b>	<b>Méthode de résolution numérique</b>	<b>73</b>
5.1.1	Implémentation dans COMSOL	73
5.1.1.a	Géométrie	73
5.1.1.b	Matériau	73
5.1.1.c	Énergies et multiplicateur de Lagrange	73
5.1.1.d	Conditions limites	74
5.1.1.e	Solveurs	74
5.1.2	Choix de maillage et problèmes numériques rencontrés	74
5.1.2.a	Détermination d'un essai représentatif	75
5.1.2.b	Détermination du type d'éléments	75
5.1.2.c	Problème numérique rencontré et développements limités	76
<b>5.2</b>	<b>Essais Statiques</b>	<b>77</b>
5.2.1	Confrontation à quelques tests de références	77
5.2.2	Pliage	79
5.2.2.a	Mise en évidence des zones caractéristiques	79
5.2.2.b	Influence des paramètres géométriques	82
5.2.2.c	Pliage opposé	85
5.2.3	Va-et-vient	86
5.2.4	Flambage par flexion	87
5.2.4.a	Influence des paramètres géométriques	89
5.2.5	Flambage par flexion (bis)	91
5.2.6	Flambage par compression et influence des conditions limites	92
5.2.6.a	Rotations libres	92
5.2.6.b	Rotations bloquées	93
5.2.7	Stockage d'énergie de déformation	94
<b>5.3</b>	<b>Essais Dynamiques</b>	<b>95</b>
5.3.1	Aplatissement sous gravité	95
5.3.2	Lâchés sous gravité et influence des conditions limites	97
5.3.2.a	Pliage d'une petite longueur	97
5.3.2.b	Pliage et encastrement	98
5.3.2.c	Pliage et courbure transversale libre	100
5.3.3	Déroulement d'un ruban bistable	101
5.3.4	Déploiement d'un ruban enroulé	103
<b>5.4</b>	<b>Structures multi-rubans</b>	<b>104</b>
<b>5.5</b>	<b>Enrichissement de la cinématique</b>	<b>104</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion du cinquième chapitre</b>	<b>106</b>

---

## 5.1 Méthode de résolution numérique

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode adoptée pour la résolution numérique du modèle par éléments finis : choix du code de calcul et implémentation, choix d'un maillage adapté grâce à l'exploitation d'un essai représentatif et problèmes numériques liés à la formulation du modèle. Ces étapes sont indispensables afin de disposer d'un outil *suffisamment* fiable en vue de mettre en évidence les capacités du modèle.

### 5.1.1 Implémentation dans COMSOL

Le système d'équations aux dérivées partielles que l'on obtiendrait par la différentiation formelle de  $\mathcal{H}$  serait très complexe et présenterait de fortes non linéarités. Développer un code de calcul dédié à sa résolution serait très coûteux en temps. Certains logiciels offrent un environnement de calcul qui intègre la possibilité de réaliser une différentiation numérique. C'est le cas de COMSOL. La robustesse des algorithmes et la flexibilité d'utilisation font de COMSOL le logiciel idéal pour la résolution de ce problème par éléments finis.

Le module *équations aux dérivées partielles sous forme faible* est ici exploité. On définit les 5 variables du problèmes : `u1`, `u3`, `theta`, `betae` et `L` le multiplicateur de Lagrange qui ne dépendent que d'un seul paramètre `x` correspondant à l'abscisse curviligne  $s_1$  associée à la ligne de référence du ruban.

#### 5.1.1.a Géométrie

Sauf précision contraire, les propriétés géométriques des rubans testés sont celles énoncées ci-après. La ligne de référence du ruban est représentée par un segment de longueur  $L = 1170$  mm. La largeur `a`, l'épaisseur `h` et l'angle d'ouverture initial de la section sont respectivement fixés à 60 mm, 0.15 mm et 0.6 rad dans l'onglet dédié à la définition des constantes.

#### 5.1.1.b Matériau

La plupart des tests ont été effectués avec un matériau isotrope. Le module d'Young `E`, le coefficient de Poisson `nu` et la masse volumique `rho` sont précisés dans l'onglet *constantes*. Sauf indications contraires, ils prennent respectivement les valeurs suivantes : 210000 MPa, 0.3 et  $2.7 \cdot 10^{-9} \text{ t}\cdot\text{mm}^{-3}$ .

#### 5.1.1.c Énergies et multiplicateur de Lagrange

La fonction `test` permet à COMSOL de différencier numériquement les expressions des énergies. Ainsi dans l'onglet *expressions globales*, on introduit les expressions de l'énergie de déformation `Ue` et la contrainte `C` liée au multiplicateur de Lagrange qui ont été obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel MAPLE. Finalement, les équations appliquées au domaine sont définies simplement dans le champ *weak* de l'onglet *systèmes d'équations* du menu *physique* par l'expression `test(-Ue+C*L)`.

L'énergie cinétique n'est pas prise en compte aussi simplement car sa différentiation nécessite une intégration par parties par rapport au temps. Cette différentiation doit donc être effectuée

au préalable. Après calcul, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta T &= \int_{t_1}^{t_2} E_1 \delta \dot{u}_1 + E_2 \delta \dot{u}_3 + E_3 \delta \beta^e + E_4 \delta \dot{\beta}^e + E_5 \delta \theta + E_6 \delta \dot{\theta} dt \\
&= [E_1 \delta u_1]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_1 \delta u_1 dt + [E_2 \delta u_3]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_2 \delta u_3 dt + \\
&\quad [E_4 \delta \beta^e]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_4 \delta \beta^e dt + [E_6 \delta \theta]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_6 \delta \theta dt + \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} E_3 \delta \beta^e + E_5 \delta \theta dt \\
&= [E_1 \delta u_1]_{t_1}^{t_2} + [E_2 \delta u_3]_{t_1}^{t_2} + [E_4 \delta \beta^e]_{t_1}^{t_2} + [E_6 \delta \theta]_{t_1}^{t_2} + \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} -\dot{E}_1 \delta u_1 - \dot{E}_2 \delta u_3 + (E_3 - \dot{E}_4) \delta \beta^e + (E_5 - \dot{E}_6) \delta \theta dt \tag{5.1}
\end{aligned}$$

or  $\delta u_1(t_1) = \delta u_1(t_2) = \delta u_3(t_1) = \delta u_3(t_2) = \delta \beta^e(t_1) = \delta \beta^e(t_2) = \delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0$  , donc :

$$\delta T = \int_{t_1}^{t_2} -\dot{E}_1 \delta u_1 - \dot{E}_2 \delta u_3 + (E_3 - \dot{E}_4) \delta \beta^e + (E_5 - \dot{E}_6) \delta \theta dt, \tag{5.2}$$

où les coefficients  $E_i$  correspondent aux termes facteurs des variations de chacune des variables cinématiques. Dans le champ *dweak* on définit alors la contribution de l'énergie cinétique après avoir précisé les coefficients  $E_i$  dans l'onglet *expressions globales* :

```

-(test(u1)*(-diff(E1,t))+test(u3)*(-diff(E2,t))+test(betae)*(E3-diff(E4,t))+
test(theta)*(E5-diff(E6,t)))

```

Les efforts extérieurs généralisés peuvent être directement introduits dans le champ *weak*. Pour appliquer une force verticale  $f_{u_3}$  (suivant  $\mathbf{e}_3$ ) répartie, on ajoute `test(u3)*fu3`. Il est possible d'agir directement sur le degré d'ouverture de la section en écrivant `test(betae)*fbetae`.

#### 5.1.1.d Conditions limites

Des conditions limites généralisées en force ou en déplacement sont appliquées aux extrémités du segment. On peut par exemple imposer une force ponctuelle de tension  $F_{u_1}$  en écrivant `test(u1)*Fu1` dans le champ *weak* de l'onglet *boundary conditions*. Imposer une rotation de la section de deux tours se traduit par l'écriture de `theta-4*pi` dans le champ *constraints*.

#### 5.1.1.e Solveurs

L'utilisation du solveur temporel permet d'effectuer des calculs incrémentaux dans lesquels  $t$  correspond soit au facteur de charge dans le cas d'essais statiques, soit au temps dans le cas d'essais dynamiques. Ainsi, `test(u3)*Fu3*t` permet d'appliquer progressivement une force suivant  $\mathbf{e}_3$ . COMSOL offre une multitude d'options pouvant être ajustées mais ce sont les valeurs par défaut qui ont été utilisées avec le solveur de systèmes linéaires UMFPACK.

### 5.1.2 Choix de maillage et problèmes numériques rencontrés

Avant de réaliser des séries de tests plus ou moins complexes, il est important de choisir le type d'éléments et la finesse de maillage à utiliser. Ce choix doit s'opérer grâce à un essai caractéristique du comportement d'un ruban.

### 5.1.2.a Détermination d'un essai représentatif

Le comportement global du ruban lié à la cinématique de poutre et le comportement de la section sont fortement couplés. Ainsi si on aplatit un ruban à une de ses extrémités on observe une flèche induite à l'autre extrémité. C'est ce simple essai d'aplatissement mettant en évidence ce couplage intrinsèque au ruban qui est ici exploité. La figure 5.1 qui présente la reconstruction en 3D de la déformée du ruban, illustre le phénomène de redressement observé. Lorsque la couleur tend vers le bleu,  $\beta$  tend vers 0 et lorsque la couleur tend vers le rouge,  $\beta$  tend vers  $\beta_0^e$ , l'angle d'ouverture initiale. L'influence du type de maillage sur la mesure de la flèche à l'extrémité libre du ruban est étudiée ; l'autre extrémité étant soumise aux conditions limites suivantes :  $u_1 = u_3 = \theta = \beta^{e'} = 0$ . Outre les propriétés géométriques et matériau définies précédemment, on donne à la section l'ouverture initiale suivante :  $\beta_0^e = 3$  rad. La section est aplatie par une variation de courbure :  $\beta = \beta_0^e (1 - t/100)$ . Selon cette formule, la section est aplatie au bout d'un temps de 100 s. Pourtant on se contente ici d'un aplatissement partiel de 80 % (le temps final de simulation n'est pas de 100 s mais de 80 s ; la raison de cet aplatissement partiel est donnée dans le paragraphe 5.1.2.c).

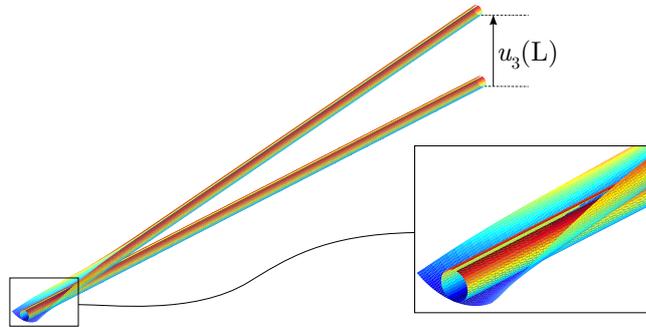


FIGURE 5.1 – Essai d'aplatissement partiel.

### 5.1.2.b Détermination du type d'éléments

Les tableaux 5.1 à 5.5 permettent de visualiser l'influence du choix d'éléments et de leur nombre (Nb elts) et donc du nombre de degrés de liberté (Nb DDL) sur la flèche de l'extrémité libre du ruban ( $u_3(L)$ ).

Nb elts	15	30	60	120	240	480	960
Nb DDL	80	155	305	605	1205	2405	4805
$u_3(L)$ (mm)	102.93	119.97	132.26	138.3	140.85	141.1	142
Tps calcul (s)	5.2	9.8	15.5	23.1	41	79.1	205.5

TABLE 5.1 – Éléments Lagrange linéaires.

Par la suite et afin de privilégier la richesse des éléments, on utilisera un maillage constitué d'éléments Hermite quintiques.

Nb elts	15	30	60	120	240	480
Nb DDL	155	-	605	1205	2405	4805
$u_3$ (L) (mm)	125.12		136.4	138.68	139.61	139.55
Tps (s)	9.52		21.3	32.5	58	164

TABLE 5.2 – Éléments Lagrange quadratiques.

Nb elts	15	30	60	120	240
Nb DDL	380	755	1505	3005	6005
$u_3$ (L) (mm)	136.86	139.8	140.51	140.23	139.88
Tps calcul (s)	17.6	16.77	53.4	68.18	174

TABLE 5.3 – Éléments Lagrange quintiques.

Nb elts	15	30	60	120	240
Nb DDL	-	310	610	1210	2410
$u_3$ (L) (mm)		136.9	139	140.01	140.58
Tps calcul (s)		13.8	17.8	24	88

TABLE 5.4 – Éléments Hermite cubiques.

Nb elts	15	30	60	120
Nb DDL	310	610	1210	2410
$u_3$ (L) (mm)	136.7	139.87	140.69	140.69
Tps calcul (s)	10.3	29.5	33.8	93.7

TABLE 5.5 – Éléments Hermite quintiques.

### 5.1.2.c Problème numérique rencontré et développements limités

Dans certaines composantes des énergies de déformation et cinétiques, la variable  $\beta^e$  apparaît au dénominateur de certaines fractions, ce qui pose naturellement des problèmes numériques lorsque la courbure du ruban tend vers 0. C'est la raison pour laquelle l'essai d'aplatissement modélisé n'est que partiel : un aplatissement total n'est pas possible si on utilise les expressions exactes des énergies de déformation et cinétique. Cela limite très fortement le nombre et le type de tests pouvant être menés à bien. L'introduction de développements limités autour de  $\beta^e = 0$  en lieu et place des expressions exactes permet de pallier ce problème. Seuls les premiers termes de ces développements sont pris en compte. Le tableau 5.6 présente l'influence du nombre de ces termes utilisés dans les composantes de l'énergie de déformation et du nombre d'éléments Hermite quintiques utilisés.  $\beta_0^e = 3$  rad est un degré d'ouverture très pénalisant puisqu'elle décrit une section quasiment fermée. Ainsi la taille nécessaire des développements limités déterminée dans le cas de cette section pénalisante garantit un niveau de précision au moins équivalent pour des sections plus ouvertes (donc pour des sections similaires à celles de mètres-rubans).

Il semblerait que pour que le calcul aboutisse il faille effectuer des développements limités avec un nombre pair de termes. Il est sans doute possible d'ajuster précisément l'ordre des développements limités pour chacune des expressions développées afin de diminuer les temps de calcul tout en gardant une précision acceptable.

Taille DL	1	2	3	4			5	6		
Nb elts				30	60	120		30	60	120
$u_3(L)$ (mm)	-	-	-	140.9	141.7	141.7	-	139.9	140.7	140.7
Tps calcul (s)				12	12	39		15	22	57

TABLE 5.6 – Influence de la taille des développements limités.

Par la suite un maillage uniforme composé de **60 éléments Hermite quintiques** ainsi que des développements limités composés de **4 termes** seront utilisés.

## 5.2 Essais Statiques

### 5.2.1 Confrontation à quelques tests de références

L'objectif de ce premier paragraphe est d'illustrer la capacité du modèle à simuler avec précision des essais classiques sur de simples plaques planes et de retrouver les résultats attendus. Il s'agit donc d'une première phase de validation. On considère donc une plaque de longueur  $L = 1170$  mm, de largeur  $a = 60$  mm et d'épaisseur  $h = 0.15$  mm. La courbure transversale initiale est nulle :  $\beta_0^e = 0$  rad. Trois types d'essais sont effectués. L'essai de flexion consiste à encastrier la poutre à une de ses extrémités ( $u_1 = u_3 = \theta = \beta_{,1}^e = 0, \beta^e = \beta_0^e$ ) et à appliquer une force verticale dirigée vers le bas à l'autre extrémité :  $F_{u_3} = 8.510^{-5}$  N. L'essai de tension consiste à appliquer un effort horizontal  $F_{u_1} = 5000$  N sur une plaque encadrée. Enfin l'essai de flexion pure consiste à imposer un couple à une extrémité  $M = 60$  N.mm.

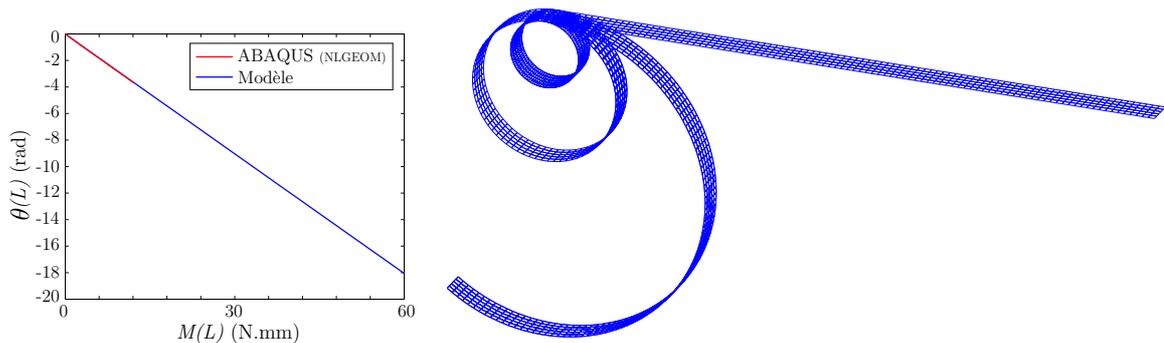


FIGURE 5.2 – Évolution de la rotation de la section à l'extrémité droite du ruban pour l'essai de flexion pure.

Les figures 5.2 et 5.3 montrent que les résultats des tests de flexion obtenus à l'aide du modèle et d'ABAQUS sont similaires en ce qui concerne la rotation de la section à l'extrémité ou de la flèche. La figure 5.4 montre que malgré l'hypothèse des petites déformations de membrane supposée au paragraphe 4.2.2, le modèle reste en accord avec les résultats donnés par ABAQUS. En effet, en traction pure, le modèle reste un modèle de grandes déformations.

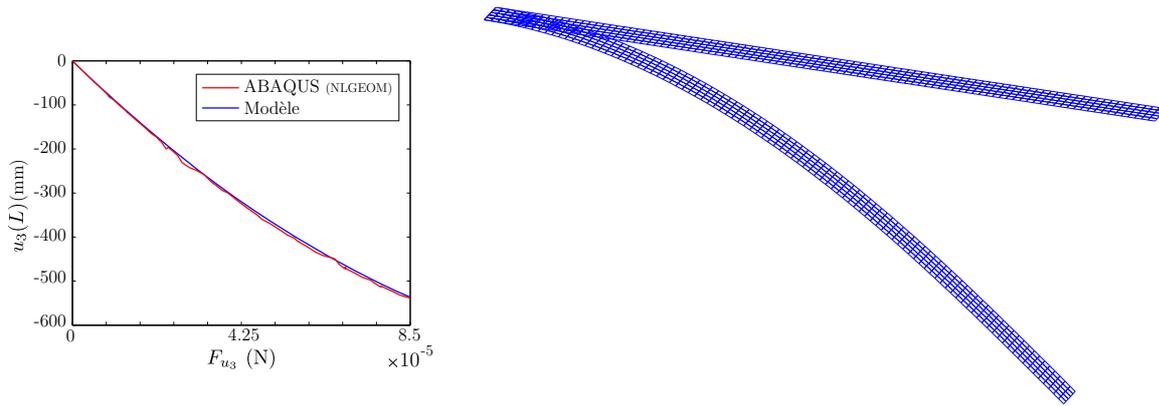


FIGURE 5.3 – Évolution de la flèche à l’extrémité droite du ruban pour l’essai de flexion d’une plaque encastree soumise à un effort tranchant à son extrémité.

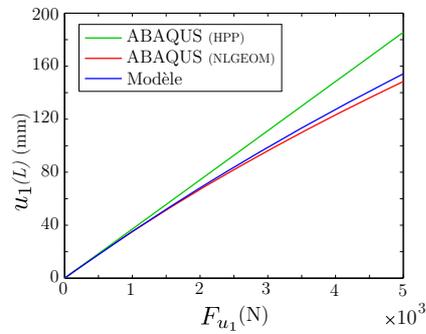


FIGURE 5.4 – Évolution du déplacement horizontal de l’extrémité droite du ruban pour l’essai de tension d’une plaque encastree.

On remarque tout de même une petite divergence qui croît pour des déplacements très grands.

Avant d’étudier l’apparition d’instabilités, le flambage ou le déploiement, il est intéressant de se pencher d’abord sur des phénomènes élémentaires comme la localisation et le déplacement d’une zone de pliage. C’est l’objet des 2 paragraphes suivants.

## 5.2.2 Pliage

### 5.2.2.a Mise en évidence des zones caractéristiques

Le simple pliage d'un ruban (figure 5.5) permet de mettre en évidence l'apparition de trois zones caractéristiques (b) : deux portions droites non déformées (zone A), une zone plate où la courbure transversale est nulle (zone C) et deux zones de transitions (zone B) qui assurent le passage de la zone non déformée à la zone plate. Étant données les hypothèses cinématiques définies dans le paragraphe 4.5.1, le ruban conserve une section en forme d'arc de cercle dont le rayon varie en fonction de  $s_1$  dans la zone B. L'essai numérique de pliage peut s'effectuer en trois

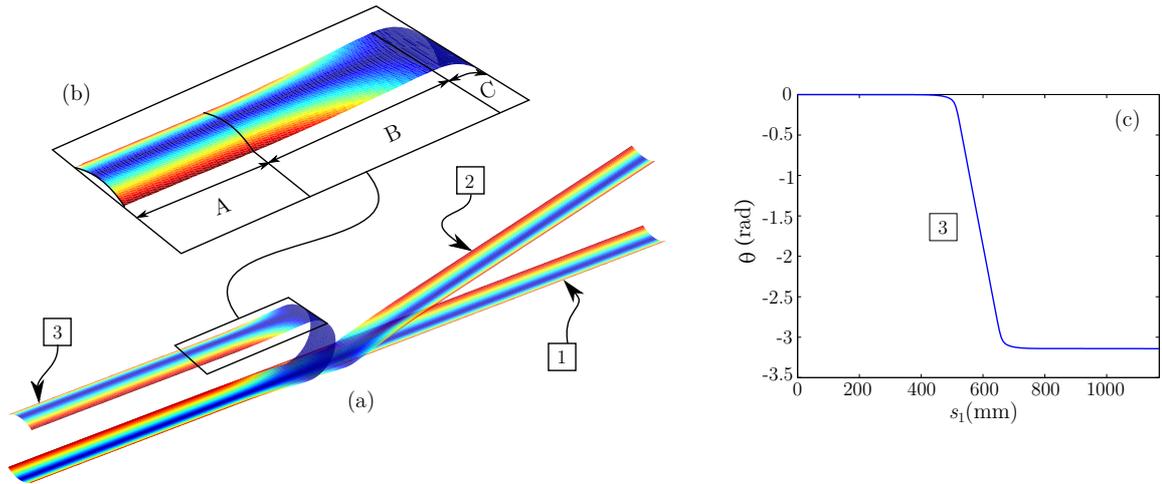


FIGURE 5.5 – Essai de pliage (a) et mise en évidence des trois zones caractéristiques d'un ruban (b). Les couleurs correspondent aux iso-valeurs de  $\beta$  qui varie de 0 pour le bleu à  $\beta_0^e$  pour le rouge.

étapes. La première phase consiste à aplatir le ruban en son centre. L'aplatissement est piloté par l'application d'un moment généralisé associé à la variable  $\beta^e$  localisé au centre du ruban. Comme le ruban est encastré à gauche ( $u_1 = u_3 = \theta = \beta_{,1}^e = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$ ) on observe une flèche à droite (figure 5.5 (a), déformée [2]). La seconde phase consiste à bloquer la rotation de la section à droite tout en annulant progressivement l'effort d'aplatissement. La troisième phase consiste à piloter la rotation de la section située à l'extrémité droite jusqu'à obtenir deux bras parallèles ( $\theta(L) = -\pi$ ) (déformée [3]). A l'issue du pliage on remarque que  $\theta$  est linéaire dans la zone plate ce qui indique que le rayon de pliage  $R$  est constant, en effet  $R = 1/\theta_{,1}$ .

La figure 5.6 présente le niveau d'ouverture de la section du ruban au cours des différentes phases de l'essai. La phase d'aplatissement est délimitée par les courbes [1] et [2]. La courbe [3] correspond à l'état plié et met clairement en évidence la délimitation des trois zones caractéristiques. Au cours de la phase de pliage, on remarque que la longueur de la zone plate augmente.

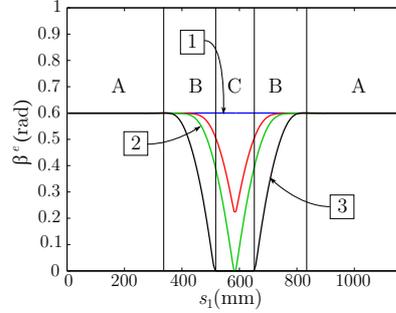


FIGURE 5.6 – Évolution de  $\beta^e$  en fonction de  $s_1$ .

Les expressions 4.36 définissent la densité linéique des quantités énergétiques mises en jeu dans ce modèle. La figure 5.7 montre que la densité d'énergie de déformation  $U_e$  est nulle partout sauf dans la zone de pliage où elle est croissante dans la zone de transition et constante dans la zone plate. On note la présence de pics énergétiques à la frontière entre la zone de transition et la zone plate pour chacune des trois composantes. Au cours du pliage proprement dit, le niveau global de l'énergie de déformation s'accroît mais les courbes conservent la même allure. Les figures 5.8 à 5.10 mettent en évidence la contribution de chacun des termes entrant en compte dans le calcul de l'énergie totale de déformation. On remarque que toutes les quantités faisant intervenir  $\overline{k_{11}^s}$  sont négligeables pour cet essai de pliage. On pourrait imaginer ainsi simplifier la résolution du problème en ne les prenant pas en compte.

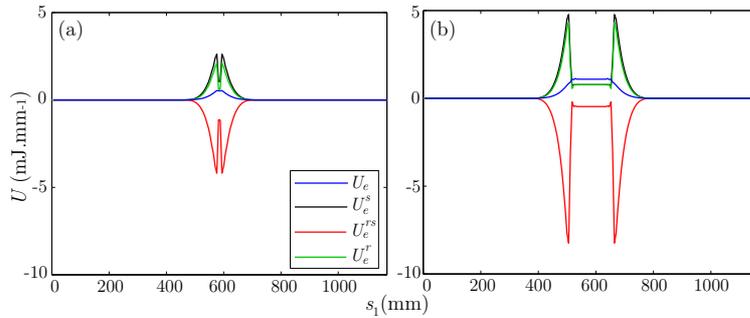


FIGURE 5.7 – Répartition de la densité linéique d'énergie de déformation  $U_e$  et de ses composantes  $U_e^r$ ,  $U_e^s$ ,  $U_e^{rs}$  à l'issue de la phase d'aplatissement (a) et de pliage (b).

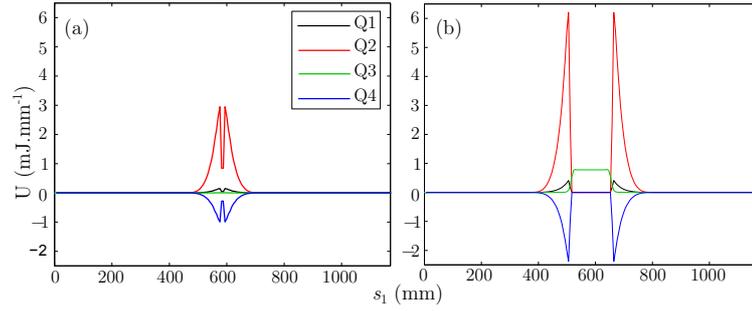


FIGURE 5.8 – Quantités énergétiques à l’issue de la phase d’aplatissement (a) et de pliage (b) liée à la composante  $U_e^r$  avec  $Q1 = \frac{1}{2} (A a e^{r^2})$ ,  $Q2 = \frac{1}{2} (A z^2) k^{r^2}$ ,  $Q3 = \frac{1}{2} (D_1 \overline{\cos^2(\beta)}) k^{r^2}$ ,  $Q4 = -A \bar{z} e^r k^r$ .

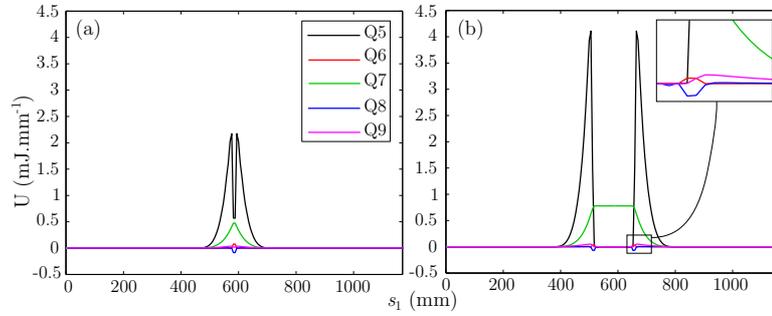


FIGURE 5.9 – Quantités énergétiques à l’issue de la phase d’aplatissement (a) et de pliage (b) liée à la composante  $U_e^s$  avec  $Q5 = \frac{1}{2} (A e^{s^2})$ ,  $Q6 = \frac{1}{2} (D_1 \overline{k_{11}^{s^2}})$ ,  $Q7 = \frac{1}{2} (D_2 \overline{k_{22}^{s^2}})$ ,  $Q8 = D_3 \overline{k_{11}^s k_{22}^s}$ ,  $Q9 = 2 D_4 \overline{k_{12}^s}$ .

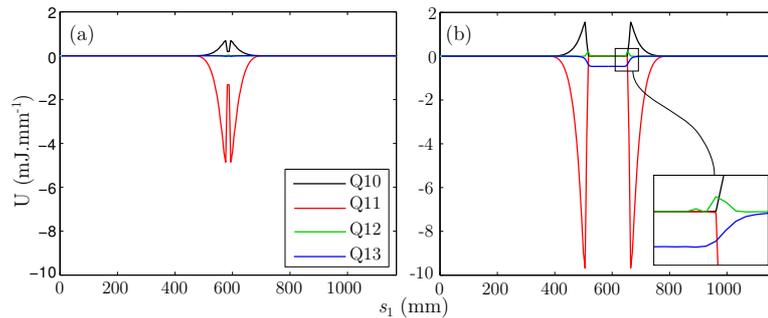


FIGURE 5.10 – Quantités énergétiques à l’issue de la phase d’aplatissement (a) et de pliage (b) liée à la composante  $U_e^{rs}$  avec  $Q10 = A e^r \overline{e^s}$ ,  $Q11 = -A k^r \overline{z e^s}$ ,  $Q12 = k^r D_1 \overline{\cos(\beta) k_{11}^s}$ ,  $Q13 = k^r D_3 \overline{\cos(\beta) k_{22}^s}$ .

### 5.2.2.b Influence des paramètres géométriques

#### Longueur du ruban

La figure 5.11 (a) montre que la longueur des zones de pliage et de transition est indépendante de la longueur totale du ruban, tout comme le rayon de pliage (figure (b)).

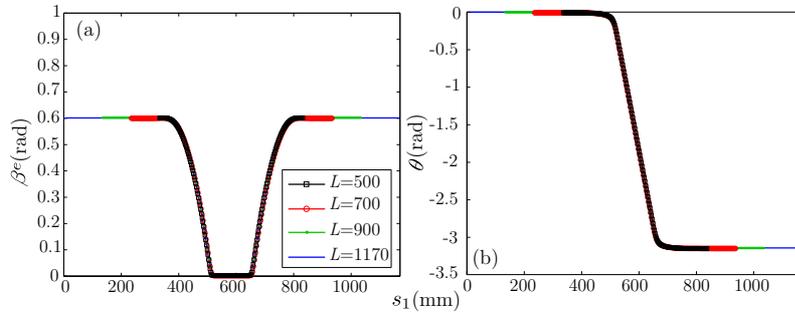


FIGURE 5.11 – Influence de la longueur du ruban sur la longueur des zones caractéristiques (a) et sur le rayon de pliage (b) ( $\beta_{e0}$  et  $a$  sont fixés).

#### Degré de fermeture de la section

La figure 5.12 montre que le rayon de pliage et la longueur de la zone plate décroissent fortement pour des faibles valeurs de  $\beta_0^e$  et tendent vers une asymptote horizontale pour des valeurs élevées de  $\beta_0^e$ . En revanche la longueur de la zone de transition augmente linéairement avec le degré de fermeture de la section.

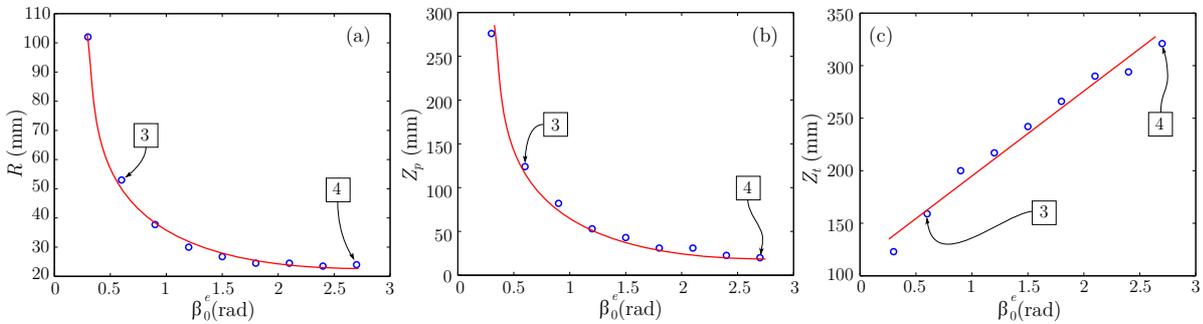


FIGURE 5.12 – Influence de la courbure transversale initiale  $\beta_{e0}$  sur les valeurs du rayon de pliage (a), de la longueur de la zone plate (b), de la longueur de la zone de transition (c).

Les figures 5.13 et 5.14 illustrent l'impact d'une section fortement fermée sur les différentes longueurs caractéristiques et sur l'intensité des différentes quantités énergétiques. Les courbes représentant la répartition des quantités énergétiques le long de la ligne de référence ont la même allure que celles présentées dans les figures 5.7 à 5.10. Cependant, les intensités observées sont naturellement nettement plus élevées.

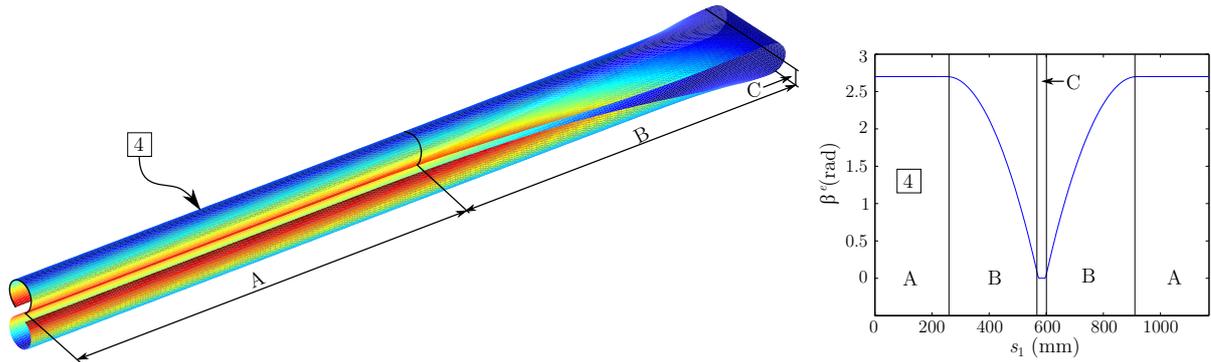


FIGURE 5.13 – Pliage d'un ruban à section fortement fermée ( $\beta_0^e = 2.7$  rad).

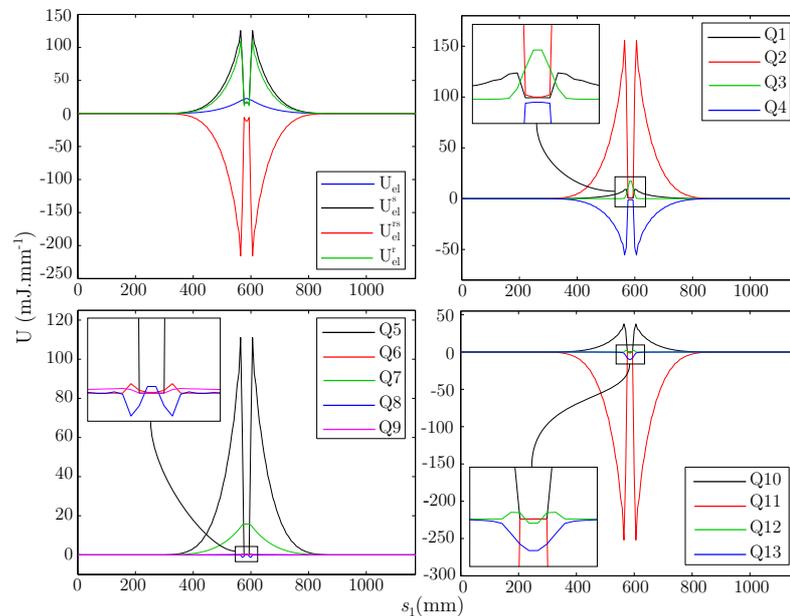


FIGURE 5.14 – Quantités énergétiques finales pour le pliage d'un ruban à section fortement fermée. ( $\beta_0^e = 2.7$  rad).

### Largeur de la section

Les valeurs du rayon de pliage, des longueurs des zones plates et de transitions augmentent linéairement avec la longueur de la section  $a$  (figure 5.15). Pour une valeur de  $a$  très faible, la figure 5.16 montre que les deux bras du ruban ont un comportement s'apparentant à celui d'une poutre,  $\theta$  y évoluant linéairement. En effet, pour de très faibles valeurs de  $a$ , l'influence de la courbure transversale diminue et le comportement de la structure est principalement gouverné par la cinématique de poutre du modèle.

### Épaisseur de la section

La figure 5.17 montre que l'augmentation de l'épaisseur du ruban a une influence différente pour chacune des trois zones caractéristiques. La mesure du rayon de pliage met en évidence deux régimes différents. Pour de faibles épaisseurs,  $R$  évolue linéairement. Pour des épaisseurs plus

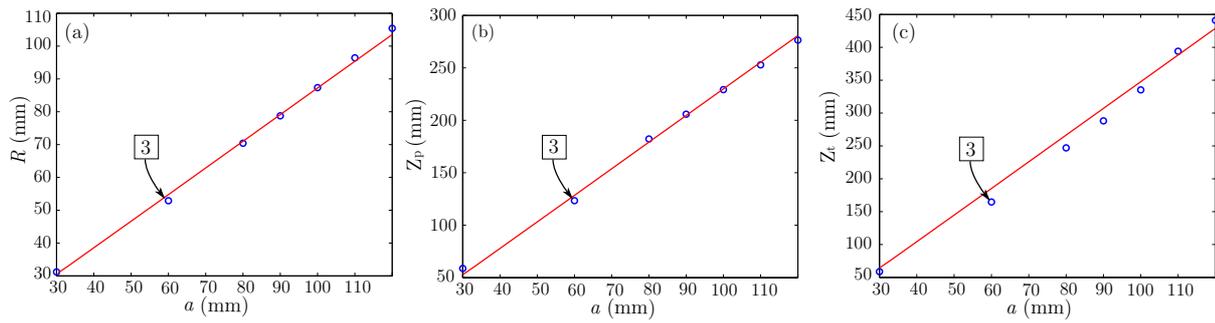


FIGURE 5.15 – Influence de la longueur de la section  $a$  sur les valeurs du rayon de pliage (a), de la longueur de la zone plate (b), de la longueur de la zone de transition (c).

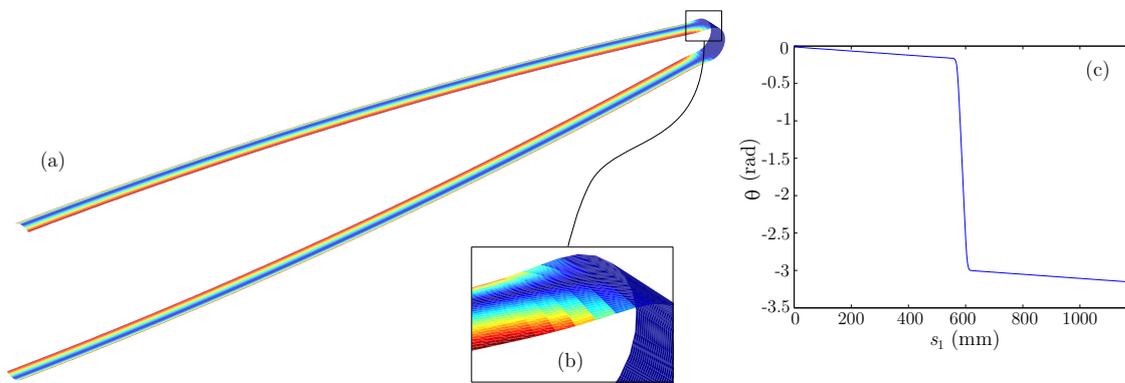


FIGURE 5.16 – Pliage d’un ruban à section de faible longueur ( $a = 15$  mm).

importantes l’évolution est non linéaire. Cette discontinuité n’a, à ce jour, pas d’explication. La valeur de  $h$  n’a aucune influence sur la longueur de la zone plate qui reste constante. La longueur de la zone de transition décroît fortement pour de faibles valeurs de  $h$  et semble tendre vers une asymptote horizontale pour des épaisseurs plus importantes.

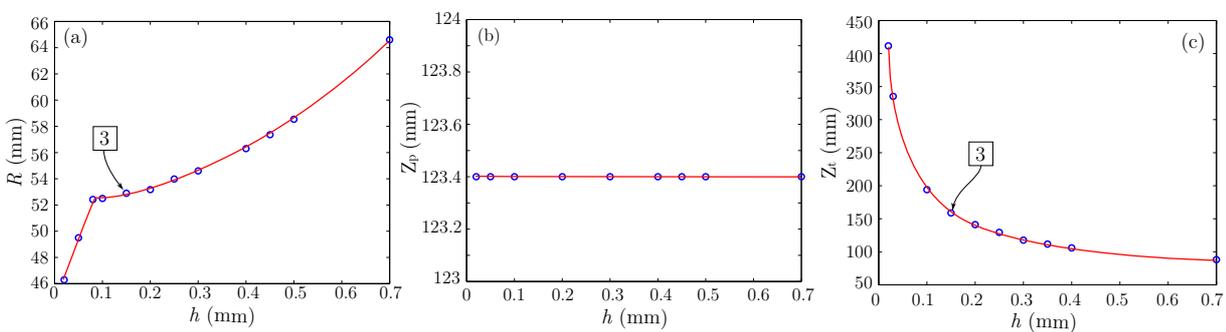


FIGURE 5.17 – Influence de l’épaisseur de la section sur les valeurs du rayon de pliage (a), de la longueur de la zone plate (b) et de la longueur de la zone de transition (c).

Lorsque la section est épaisse ( $h = 1$  mm), le ruban a tendance à se comporter comme une poutre hors de la zone de pliage. En effet, la figure 5.18 (a) montre que, comme pour le cas d'un ruban dont le rapport d'élanement est élevé (figure 5.16), les bras rigides fléchissent avec un rayon de courbure constant. On remarque également qu'à proximité des zones de transition, le ruban a tendance à se refermer (b). Ces bourrelets sont d'autant plus visibles que l'épaisseur augmente.

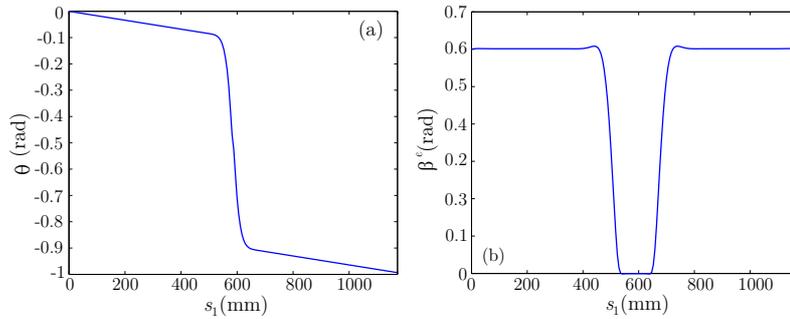


FIGURE 5.18 – Pliage d'un ruban à section épaisse ( $h = 1$  mm).

### 5.2.2.c Pliage opposé

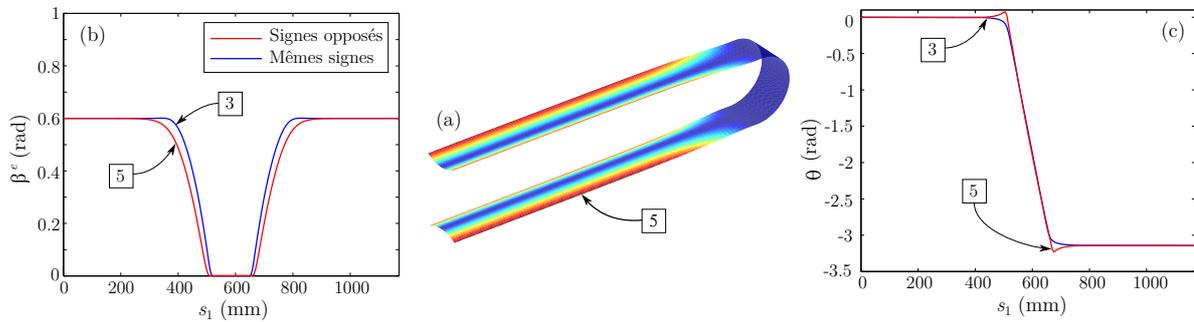


FIGURE 5.19 – Pliage avec courbures de signes opposés (a) et influence du signe des courbures sur l'allure de  $\beta^e$  (b) et sur  $\theta$  (c) (dans le cas du pliage avec courbures de signes opposés, c'est  $-\theta(s_1)$  qui est représenté).

Comme le montre la figure 5.19 (a) le pliage du ruban peut également s'effectuer de telle sorte que les courbures transversale et longitudinale soient de signe opposé. On remarque à la figure 5.19 (b) que dans ce cas, les longueurs de la zone de transition et de la zone plate sont légèrement plus grandes que pour un pliage avec courbures de mêmes signes. De plus on remarque à la figure (c) que les rayons de courbure sont identiques pour les deux sens de pliage. On peut également noter une flexion locale dans la zone de transition. La figure 5.20 (a) montre que dans la zone plate l'énergie totale de déformation est environ 2 fois plus importante que dans le cas d'un pliage avec des courbures de mêmes signes. Cela est dû au fait que dans cette zone, la composante de couplage est cette fois positive. En effet, sur la figure (d) la quantité  $Q_{13} = k^r D_3 \cos(\beta) k_{22}^s$  est positive car  $k^r$  qui caractérise la courbure liée au comportement de poutre est ici positif.

On peut noter également que l'intensité des pics énergétiques est plus faible. Enfin, les termes faisant intervenir  $k_{11}^s$  sont toujours négligeables.

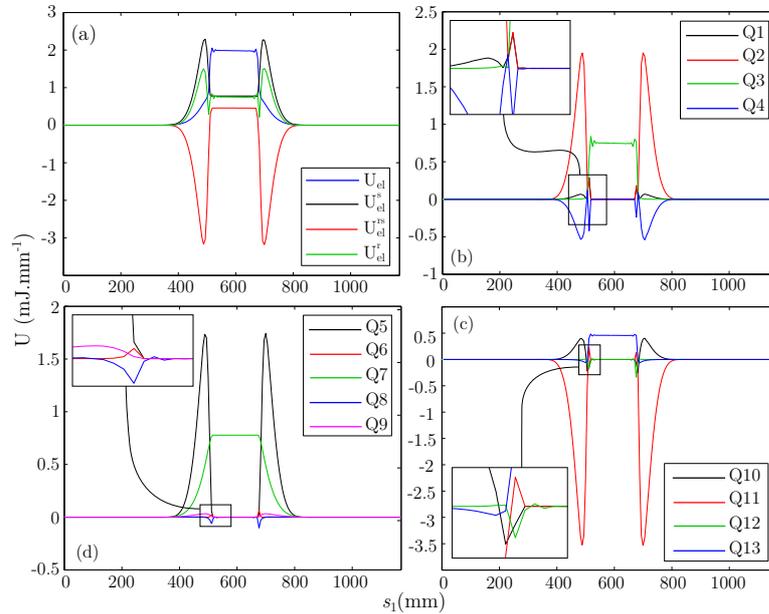


FIGURE 5.20 – Quantités énergétiques finales pour un pliage avec courbures de signes opposés.

### 5.2.3 Va-et-vient

Les essais précédents ont mis en évidence la capacité du modèle à localiser et à faire croître des zones de pliage. L'essai de « va-et-vient » (figure 5.21) permet d'illustrer les déplacements de cette zone de pliage. Les conditions initiales de cet essai sont les conditions finales de l'essai de pliage. Une des extrémités est encastree alors que l'autre subit un déplacement horizontal  $u_1$  tout en étant bloqué verticalement,  $\beta^e$  et  $\theta$  étant laissés libres. La figure 5.22 représente l'évolution de la densité linéique d'énergie de déformation au cours du chargement ( $t$  est le facteur de chargement qui représente son intensité). Elle montre que le va-et-vient se déroule à énergie constante et met en évidence le déplacement de la zone de pliage dans laquelle se concentre toute l'énergie.

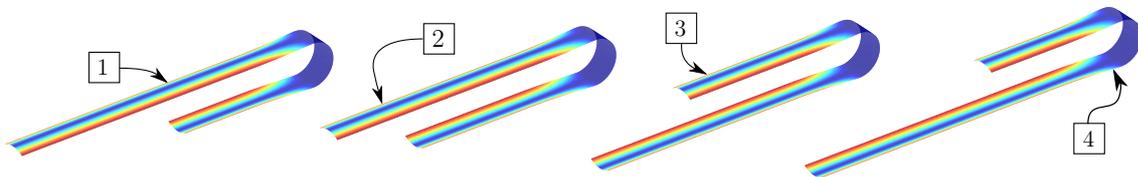


FIGURE 5.21 – Essai de « va-et-vient ».

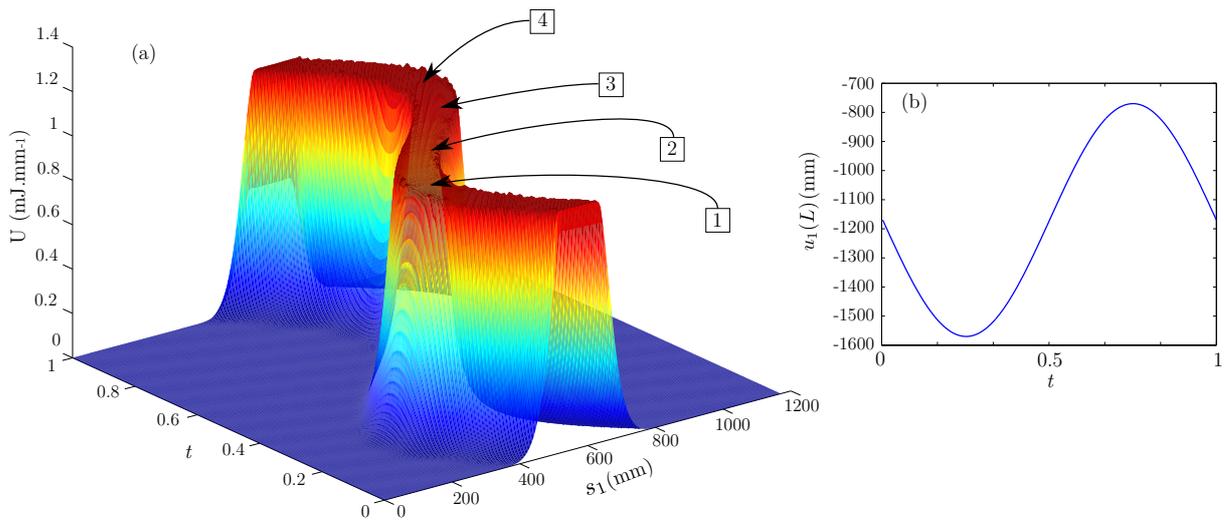


FIGURE 5.22 – Évolution de la densité linéique de l'énergie de déformation (a) et illustration du déplacement imposé à l'extrémité du ruban (b) au cours d'un essai de « va-et-vient ».

#### 5.2.4 Flambage par flexion

L'essai de pliage par flexion permet de mettre simplement en évidence les trois zones caractéristiques d'un ruban. La localisation de la zone de pliage peut également être obtenue grâce à un essai de flambage par flexion avec les conditions limites suivantes :  $u_1 = u_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$  à l'une des extrémités et  $u_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$  à l'autre extrémité. On impose des rotations de signe opposé à chaque section. La figure 5.24 (a) montre qu'au début de l'essai le ruban a un comportement qui s'apparente à celui d'une poutre, l'évolution du moment en fonction de la rotation de la section étant linéaire. On observe qu'à l'instant précédant le flambage, la section est ouverte sur toute la longueur du ruban (excepté aux extrémité dont le degré d'ouverture est fixé) (déformée [2]). Lorsque la rotation des sections aux extrémités devient trop importante on observe le phénomène de claquage proprement dit avec une localisation de la déformation. La figure (a) met en évidence la non-linéarité de la relation entre  $M$  et  $\theta$ , contrairement à ce que prédisent les théories classiques de poutre pour des sections indéformables. Le phénomène de claquage intervenant juste après le point [2] met en évidence le passage d'une branche de solution à une autre.

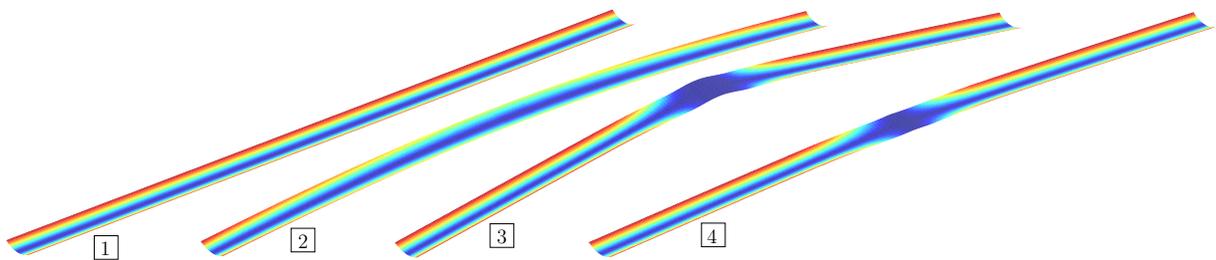


FIGURE 5.23 – Quelques déformées caractéristiques d'un essai de flambage par flexion.

Lors de la phase de déchargement, une autre branche de solution est suivie et le pliage est

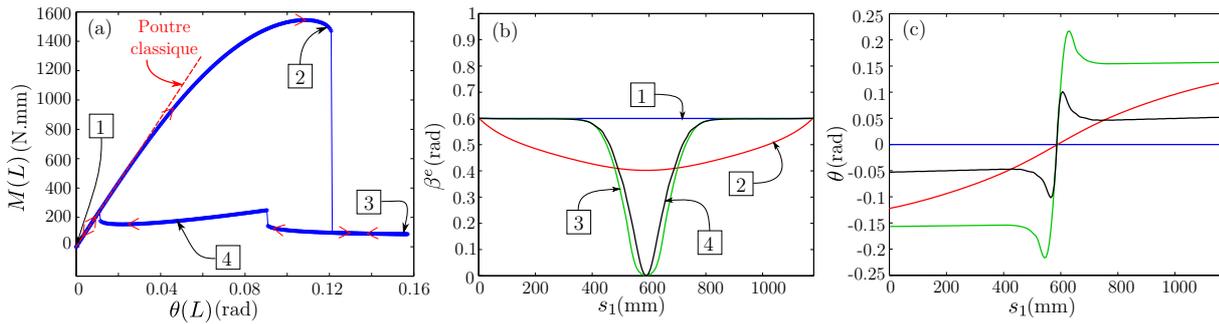


FIGURE 5.24 – Relation  $M(\theta)$  (a); évolution du degré de fermeture de la section au cours du chargement (b); évolution de la courbure longitudinale au cours du chargement pour un essai de flambage par flexion.

toujours visible pour de faibles valeurs de  $\theta$  (déformée [4](#)). La figure 5.25 (a) montre que la densité linéique d'énergie de déformation est répartie sur toute la longueur du ruban tant que le flambage n'a pas eu lieu. On observe ensuite une concentration d'énergie dans la zone de pliage.

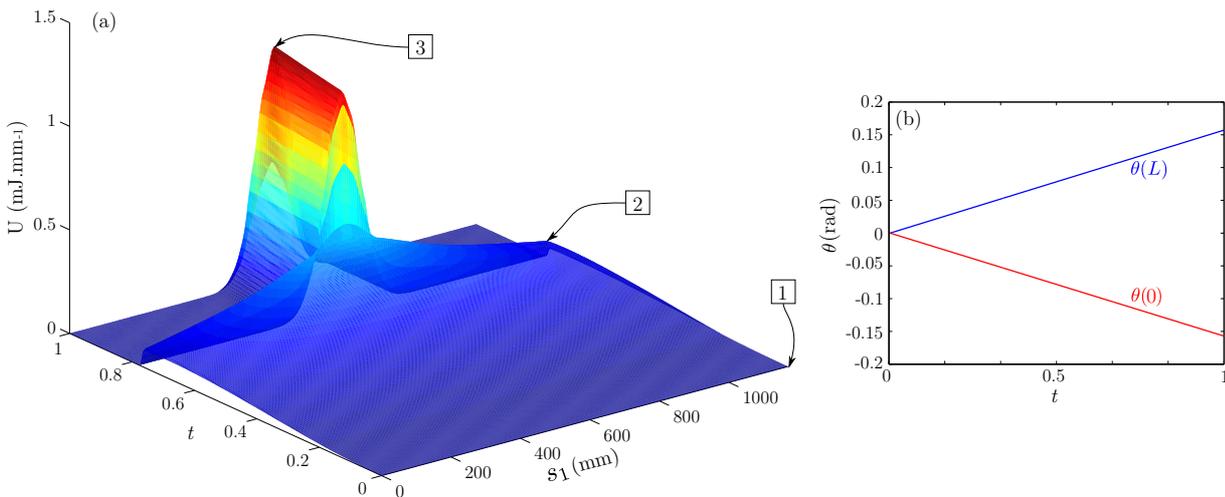


FIGURE 5.25 – Évolution de la densité linéique d'énergie de déformation au cours du chargement.

### 5.2.4.a Influence des paramètres géométriques

Les propriétés géométriques ont une influence notable sur la taille des différentes zones remarquables d'un ruban. Leur impact sur les valeurs maximales de  $M$  et  $\theta$  avant flambage est ici étudié.

#### Longueur du ruban

La figure 5.26 montre qu'à partir d'une certaine longueur, le moment critique de flambage est constant alors que l'angle critique évolue linéairement avec la longueur.

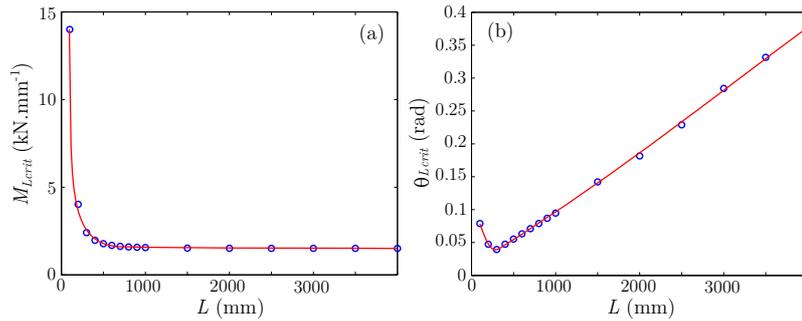


FIGURE 5.26 – Influence de la longueur du ruban sur le moment critique (a) et sur la rotation critique des sections (b) pour un essai de flambage par flexion.

#### Degré de fermeture de la section

La figure 5.27 montre qu'un accroissement de  $\beta^e$  entraîne une augmentation de plus en plus rapide du moment critique de flambage (a). On remarque que la valeur critique de rotation des sections atteint un palier pour un degré de fermeture d'environ 0.1 rad. En deçà, on observe une décroissance de cette valeur avec l'augmentation de la fermeture (b).

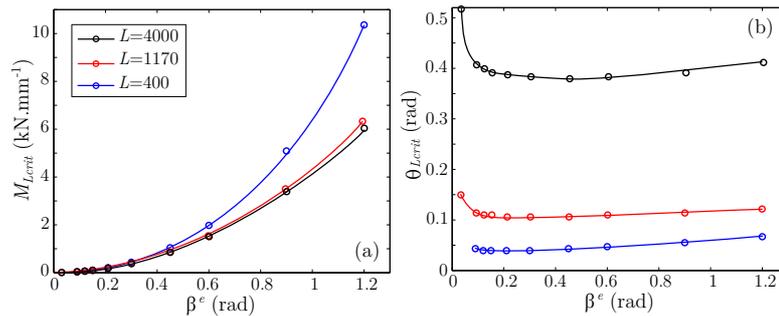


FIGURE 5.27 – Influence du degré de fermeture de la section sur le moment critique (a) et sur la rotation critique des sections (b) pour un essai de flambage par flexion et pour 3 longueurs de ruban.

### Largeur de la section

Lorsque la largeur du ruban augmente alors l'angle critique de flambage semble tendre vers une valeur limite tandis que le moment critique augmente de manière quasi linéaire (figure 5.28)

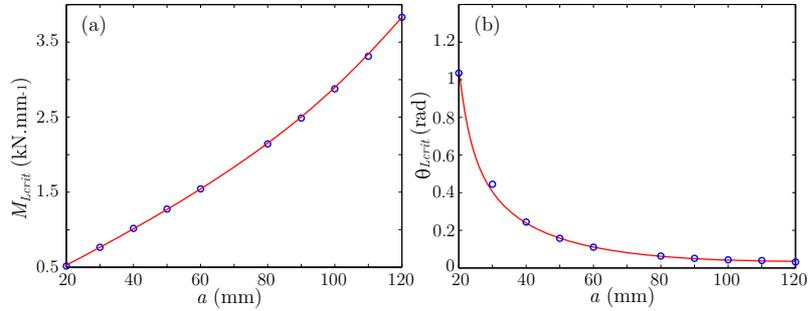


FIGURE 5.28 – Influence de la largeur de la section sur le moment critique (a) et sur la rotation critique des sections (b) pour un essai de flambage par flexion.

### Épaisseur de la section

Une augmentation de l'épaisseur du ruban entraîne une augmentation linéaire de l'angle critique de flambage (figure 5.29 (b)).

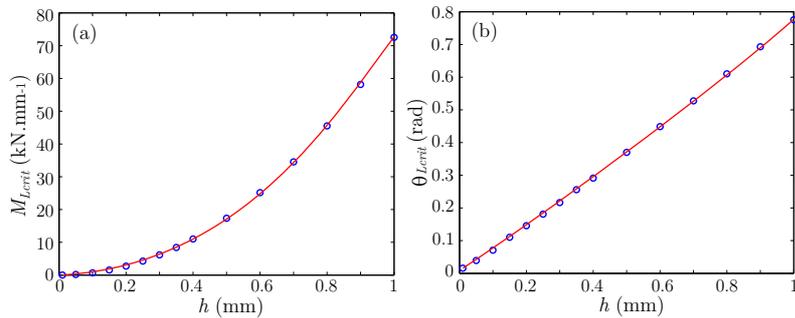


FIGURE 5.29 – Influence de l'épaisseur de la section sur le moment critique (a) et sur la rotation critique des sections (b) pour un essai de flambage par flexion.

### 5.2.5 Flambage par flexion (bis)

L'essai de flambage présenté ci-dessus permet d'observer l'apparition soudaine d'une zone de pliage localisé. Si on poursuit la rotation des sections aux extrémités du ruban, alors on retrouve la configuration finale de l'essai de pliage décrit dans le paragraphe 5.2.2. Ce sont ces conditions qui sont appliquées au début de ce deuxième test de flambage (configuration pliée avec courbures de même signe). Les deux extrémités ont leurs deux degrés de liberté en translation et la courbure transversale bloquée et une rotation leur est imposée (de  $0$  à  $\pi/2$  pour l'une et de  $-\pi$  à  $-3\pi/2$  pour l'autre).

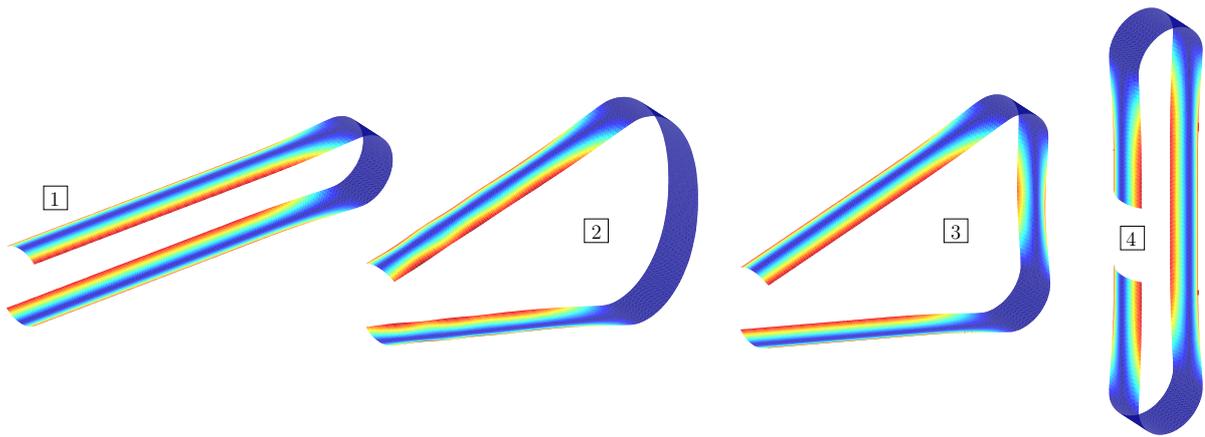


FIGURE 5.30 – Apparition d'une deuxième zone de pliage par flambage.

La première phase d'écartement (déformée  $\boxed{1}$  à  $\boxed{2}$  de la figure 5.30) cause un agrandissement de la zone plate ainsi que du flambage localisé (traduit par les oscillations visibles sur la courbe 2 de la figure 5.31 (a)) du à des efforts de compression. Le claquage apparaissant entre l'étape  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$  permet la disparition de ces efforts de compression et la création de deux zones de pliages. On remarque que la zone située entre les deux plis retrouve un degré de fermeture égal à celui de la configuration initiale. On peut vérifier que les longueurs des deux zones plates et que les rayons de pliage sont identiques. Une observation de la courbe  $\boxed{2}$  de la figure (a) permet de repérer les prémices du claquage avec un très léger début de refermeture au centre du ruban. La figure 5.32 met en évidence la concentration de l'énergie de déformation dans les deux zones

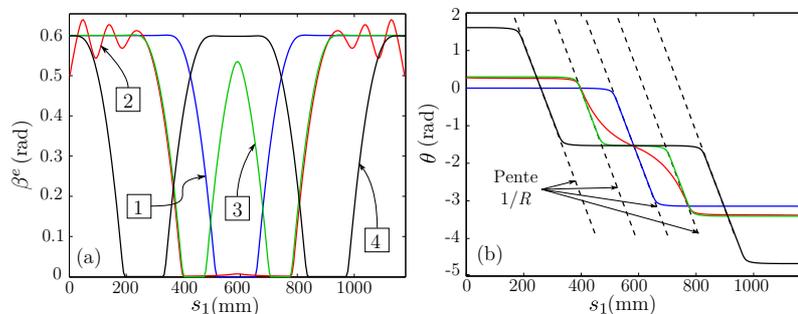


FIGURE 5.31 – Évolution de  $\beta^e$  et  $\theta$  au cours du chargement lors de l'apparition d'une deuxième zone de pliage.

de pliages créés. Avant le claquage on remarque que cette énergie est uniformément répartie dans la zone plate et que des pics énergétiques sont présents dans les zones de transition. On remarque également qu'à proximité des extrémités, l'énergie de déformation est non nul pendant les premières phases du chargement. Il s'agit de l'influence des efforts de compression décrits plus haut. Cette compression est à l'origine des instabilités de torsion intervenant lorsqu'on réalise cet essai expérimentalement.

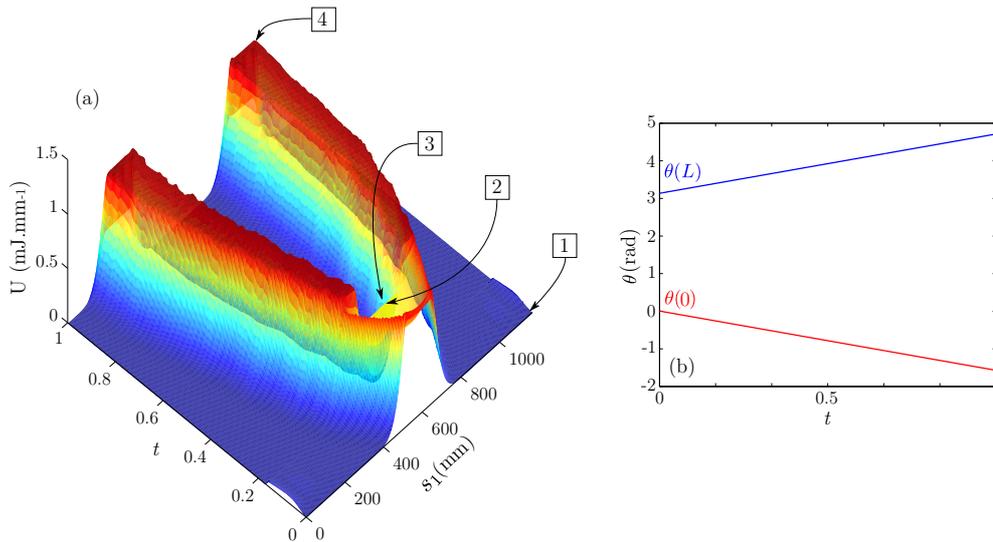


FIGURE 5.32 – Évolution de la densité linéique d'énergie de déformation lors de l'apparition d'une deuxième zone de pliage.

## 5.2.6 Flambage par compression et influence des conditions limites

L'essai de flambage par compression illustre le rôle que jouent les conditions limites dans le comportement du ruban. En particulier, les comportements sont radicalement différents si les rotations des sections sont bloquées ou non.

### 5.2.6.a Rotations libres

Dans ce premier test, les deux degrés de liberté en translation sont bloqués à une des extrémités alors que l'autre extrémité subit un déplacement horizontal imposé tout en étant bloquée verticalement. La courbure transversale est quant à elle bloquée de chaque côté. Pour rendre possible l'apparition du flambage, il est nécessaire d'imposer un défaut préexistant. En l'occurrence, une force verticale d'une intensité de  $10^{-4}$  N est appliquée au centre du ruban. La figure 5.33 (a) illustre un nouveau saut de solution et la capacité du modèle à simuler un claquage obtenu différemment que celui décrit dans le paragraphe 5.2.4. Cette différence est clairement visible à la figure (b) qui compare l'allure de  $\beta^e$  le long du ruban juste avant l'apparition du phénomène de claquage pour des flambages par flexion et par compression. Dans le cas du flambage par compression, on remarque une localisation de l'ouverture au centre du ruban alors qu'à proximité des extrémités, la section conserve son degré de fermeture initial.

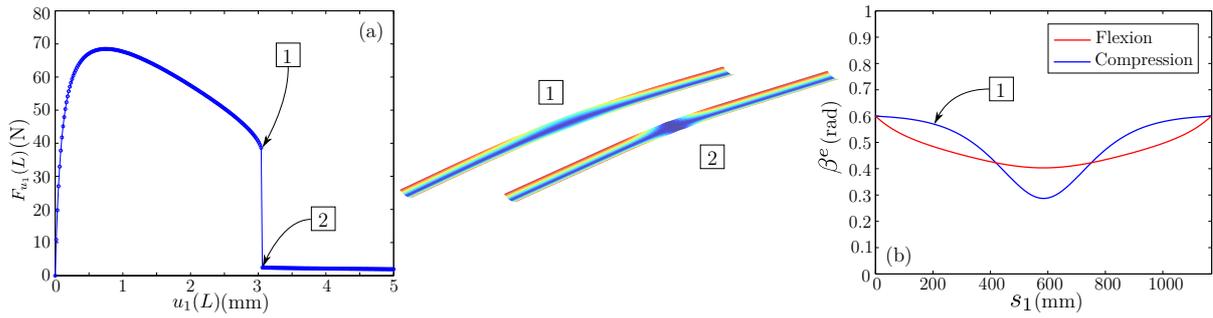


FIGURE 5.33 – Essai de flambage par compression avec rotation libre des extrémités.

### 5.2.6.b Rotations bloquées

Contrairement au test précédent on bloque la rotation aux deux extrémités. On remarque dès le tout début de l'essai deux aplatissements localisés à proximité des extrémités du ruban (déformée [2] de la figure 5.34) clairement visibles à la figure 5.35. On remarque également un début d'ouverture au centre du ruban. Cette dernière s'amplifie (déformée [3]) menant à un claquage causant la diminution des deux ouvertures périphériques (déformée [4]). En outre on observe d'importantes oscillations sur la courbe illustrant l'allure de  $\beta^e$ , oscillations dues aux efforts de compressions induits par le flambage. La poursuite de l'essai rétablit les deux pliages périphériques, fait disparaître les efforts de compression et augmente la taille de la zone de pliage centrale. La figure 5.36 met en évidence les deux claquages intervenant ; le premier menant à

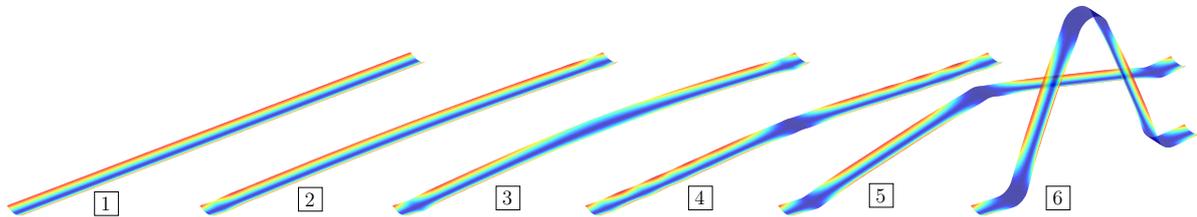
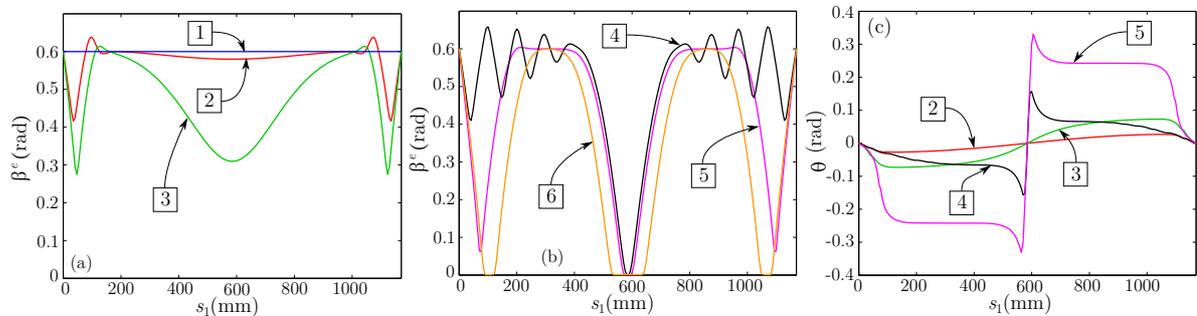


FIGURE 5.34 – Essai de flambage par compression avec blocage des rotations des extrémités.

FIGURE 5.35 – Évolution de  $\beta^e$  et de  $\theta$  au cours de l'essai de flambage par compression avec blocage des rotations des extrémités.

l'apparition des deux zones de pliage périphériques et le second à l'origine du pliage central. Une comparaison avec la figure 5.33 (a) montre que lorsque les extrémités ont leur rotation de libre le ruban peut subir un déplacement axial environ 10 fois supérieur à celui que peut admettre un ruban dont la rotation des extrémités est bloquée. En revanche ce dernier peut encaisser des efforts axiaux environ cinq fois supérieurs.

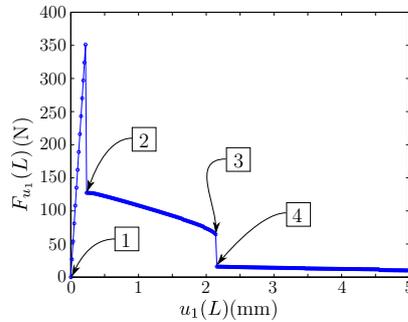


FIGURE 5.36 – Évolution de la force de réaction en fonction du déplacement imposé.

### 5.2.7 Stockage d'énergie de déformation

L'exploitation du modèle rend possible la détection d'instabilités au cours de chargements plus ou moins complexes. Elle permet également de modéliser différents scénarios permettant le stockage de l'énergie de déformation, qui une fois libérée permet un déploiement du ruban.

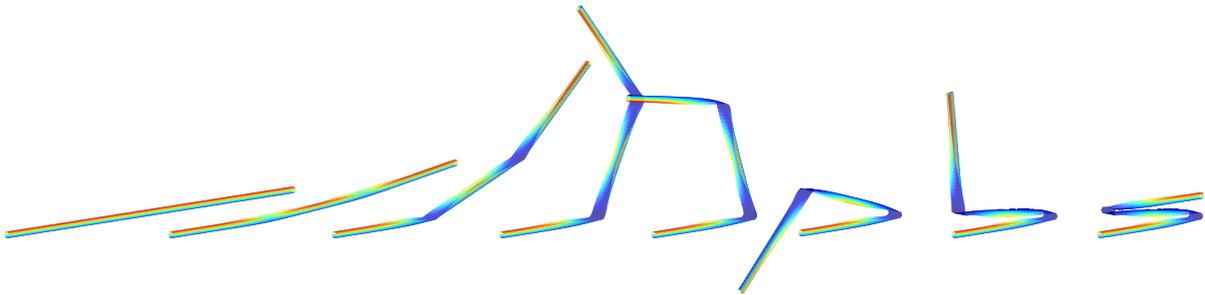


FIGURE 5.37 – Essai de pliage en accordéon.

La figure 5.37 est une illustration des nombreuses possibilités qu'offre le modèle en terme de pliages multiples. L'application de forces relatives à la variable  $\beta^e$  permet des ouvertures localisées puis différents pilotages de la rotation des sections permettent d'atteindre une multitude de configurations pliées. Il est également très simple de modéliser l'enroulement d'un ruban (figure 5.38). Il suffit d'aplatir et de maintenir aplatie une des deux extrémités puis d'imposer une rotation à la section. La figure 5.39 (b) montre que le ruban s'enroule avec un rayon constant et uniforme. La courbe [4] de la figure 5.39 (a) montre que lorsque la partie enroulée arrive à proximité de l'extrémité gauche, la section dont l'ouverture n'est pas fixée a tendance à s'ouvrir.

Le relâchement instantané du chargement appliqué entraîne un déploiement brutal du ruban. Il est alors nécessaire de prendre en compte les effets inertiels. La partie suivante est donc dédiée à l'étude dynamique des rubans.

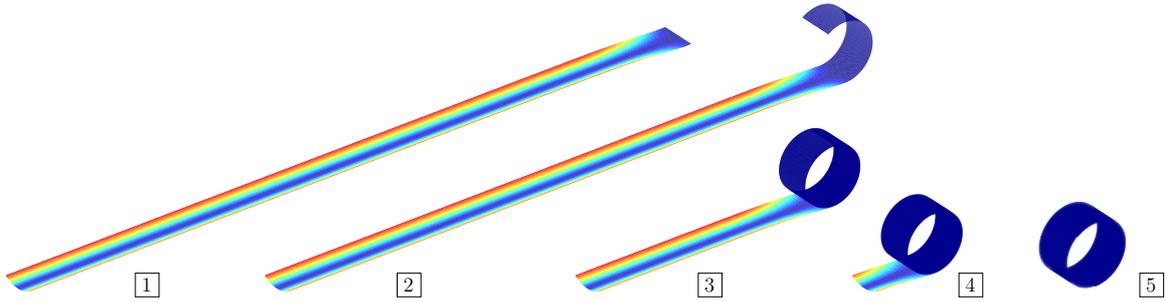


FIGURE 5.38 – Essai d'enroulement.

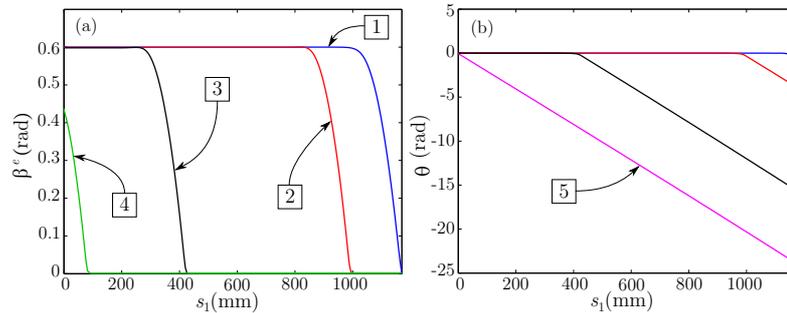


FIGURE 5.39 – Essai d'enroulement.

## 5.3 Essais Dynamiques

La dynamique est ici exploitée pour résoudre des problèmes dans lesquels les phénomènes mis en jeu sont très rapides (phénomènes oscillatoires, lâchés, déploiement, déroulement, effets d'inertie, ...). On introduit dans COMSOL l'énergie cinétique définie par les expressions 4.40 et 5.2.

### 5.3.1 Aplatissement sous gravité

La première étape de l'essai consiste à appliquer la gravité à un ruban dont une des extrémités est encastrée. Elle est modélisée par l'application d'un chargement uniformément réparti dont le sens d'application est dirigé suivant  $\mathbf{e}_3$  :

$$f_g = \rho^s a g, \quad (5.3)$$

où  $g = -9810 \text{ mm.s}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur. Dans COMSOL il suffit d'ajouter la ligne suivante : `test(u3)*rho*h*a*g`. L'extrémité encastrée est alors aplatie par un pilotage de  $\beta^e$  tout en conservant ses degrés de liberté en translation et en rotation bloqués. On observe tout d'abord un redressement du ruban (déjà décrit au paragraphe 5.1.2.a). Sous l'effet de la gravité le ruban chute alors et oscille autour de sa position d'équilibre.

La déformée [1] de la figure 5.40 caractérise l'instant où le ruban s'est redressé au maximum et précède le début de la chute. L'énergie de déformation atteint alors un maximum local avant de diminuer lorsque le ruban retrouve sa position horizontale. La chute se poursuit jusqu'à la déformée [2] où la longueur de la zone plate est maximale. C'est au cours de cette phase que le ruban atteint sa vitesse maximale (à environ  $t = 10 \text{ s}$ ). En position [2], la vitesse est nulle

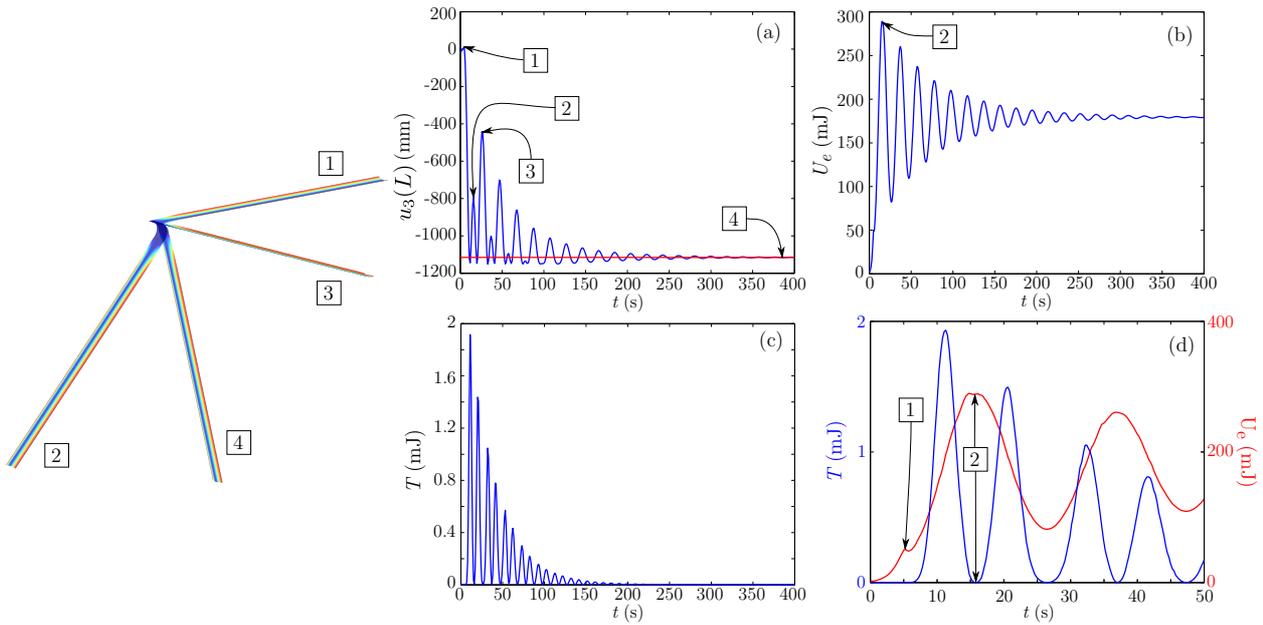


FIGURE 5.40 – Essai dynamique d’aplatissement sous gravité. Évolution au cours du temps de la flèche (a), de l’énergie de déformation et de l’énergie cinétique (b) à (d).

tout comme naturellement l’énergie cinétique. La courbe rouge de la figure (a), correspond à la déflexion observée dans le cas d’un essai statique ; c’est autour de cette position d’équilibre qu’oscille le ruban.

L’instant auquel débute la chute ne correspond pas forcément au moment précis où l’extrémité est totalement aplatie. La vitesse d’aplatissement joue un grand rôle. La figure 5.41 présente l’influence de la vitesse d’aplatissement, c’est à dire du temps nécessaire pour passer de  $\beta^e = \beta_0^e$  à  $\beta^e = 0$ . Une vitesse d’aplatissement relativement lente entraîne une flèche importante qui se continue de croître alors que l’extrémité est plate. Une vitesse d’aplatissement plus rapide entraîne des ondulations du ruban dues à la propagation d’onde de chocs. De plus le ruban chute plus rapidement tout en oscillant.

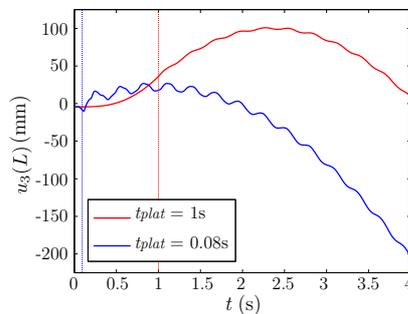


FIGURE 5.41 – Influence de la vitesse d’aplatissement d’une des extrémités sur la flèche d’un ruban soumis à son poids propre ( $t_{plat}$  correspond à l’instant où la section est totalement aplatie).

### 5.3.2 Lâchés sous gravité et influence des conditions limites

Le test mené par Seffen et Pellegrino [53] présenté au paragraphe 3.1.2.b a permis la comparaison entre les résultats obtenus grâce au modèle qu'ils ont établi et les résultats expérimentaux d'un essai de lâché d'un ruban plié. Ce test a mis en évidence le déplacement de la zone de pliage le long du ruban.

#### 5.3.2.a Pliage d'une petite longueur

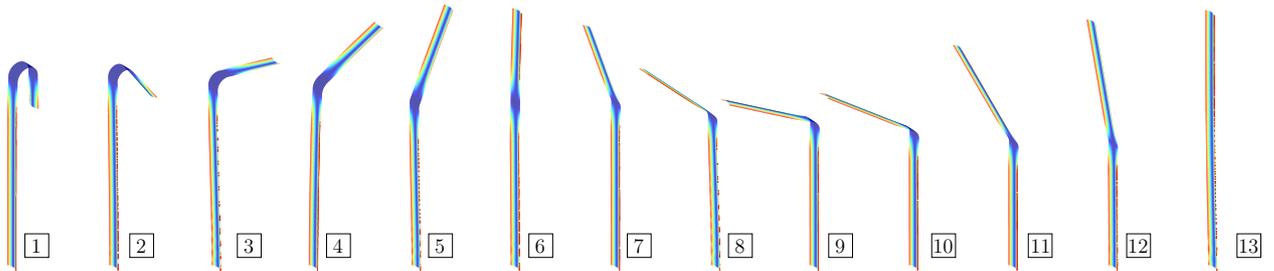


FIGURE 5.42 – Essai de lâché d'un ruban dont une petite portion a été préalablement pliée.

L'essai présenté à la figure 5.42 consiste à lâcher un ruban préalablement plié sur une petite zone. La configuration pliée est obtenue par la méthode décrite au paragraphe 5.2.2 : après un aplatissement localisé, l'extrémité haute du ruban est piloté en rotation alors que l'effort d'aplatissement est progressivement relâché et que l'autre extrémité est encastrée. L'essai de lâché consiste à libérer instantanément la rotation de l'extrémité haute du ruban. Pendant la première phase de remontée (déformées [1] à [6]) on observe un déplacement vers le bas de la zone de pliage. Le bras vertical subit quant à lui des ondulations entraînant des efforts de compressions traduits par des oscillations de  $\beta^e$  à proximité de l'encastrement (figure 5.43 (a)). L'inertie du ruban entraîne des efforts de compression lorsque le bras libre du ruban passe par la position verticale et cause un nouveau pliage dans l'autre sens. Peu avant le passage à la position verticale, on observe une refermeture du ruban (courbe [6]) dans la zone de pliage. C'est dans cette zone que le pliage dans l'autre sens se développe. Au cours des phases de descente et de remontée qui suivent, la zone de pliage se déplace également vers le bas. Le ruban retrouve sa configuration non-déformée après un claquage et quelques oscillations autour de la position finale.

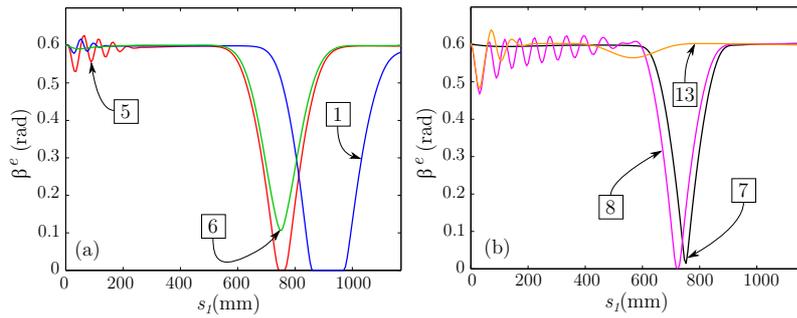


FIGURE 5.43 – Évolution de  $\beta^e$  au cours d'un essai de lâché pour un ruban dont une petite portion a été préalablement pliée.

5.3.2.b Pliage et encastrement

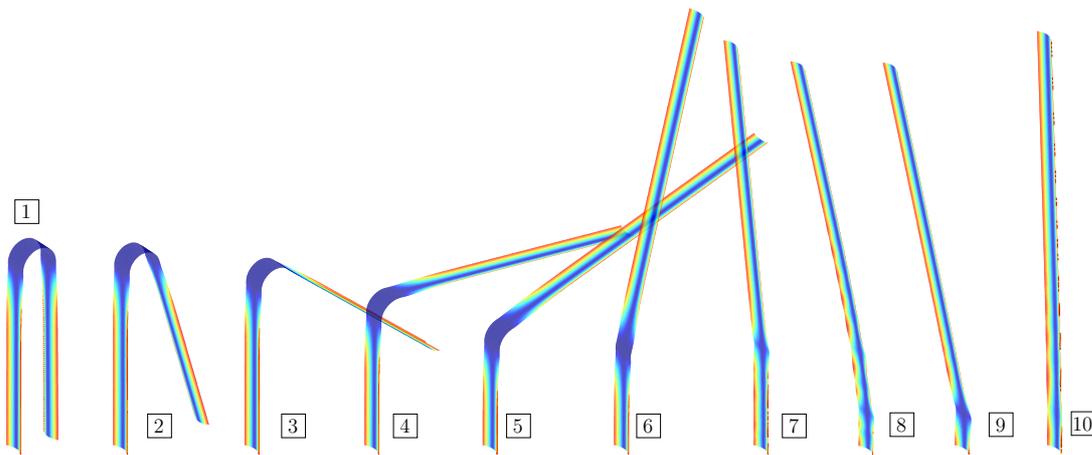


FIGURE 5.44 – Essai de lâché d'un ruban initialement plié.

La zone de pliage initiale est ici positionnée au milieu du ruban. Jusqu'à l'étape [7] de la figure 5.44, le comportement est similaire à l'essai précédent. Le pliage de la déformée [8] n'est pas issu du déplacement de celui de la déformée [7] qui lui disparaît suite à un claquage intervenant entre les figure 5.45 (a) et (b). Le pliage de la déformée [8] apparaît suite à la croissance d'une des imperfections causées par ce claquage. Entre les figures (b) et (g), l'évolution se déroule continûment. La figure 5.46 montre que l'énergie de déformation décroît de manière quasi-linéaire au

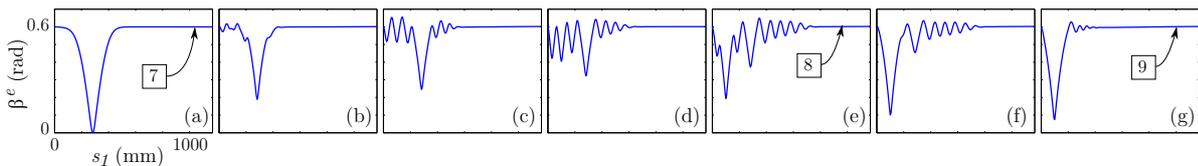


FIGURE 5.45 – Évolution de  $\beta^e$  lors de l'apparition du deuxième pliage.

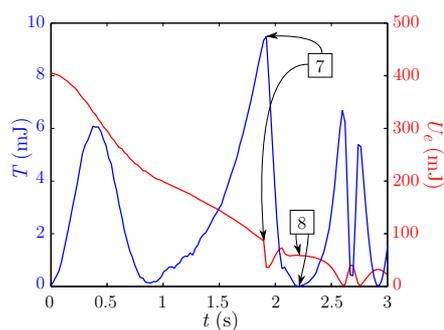


FIGURE 5.46 – Évolution des énergies de déformation et cinétique au cours d'un essai de lâché.

cours du temps. On note la présence de deux singularités : la première est l'illustration du claquage intervenant entre les déformées **7** et **8**. Durant ce phénomène, l'énergie de déformation chute brutalement avant de retrouver un niveau qui, semble-t-il, aurait été le sien sans claquage. De la même manière, on observe une chute brutale de l'énergie cinétique qui s'annule lorsque le ruban atteint sa position de pliage maximum et qu'il s'apprête à remonter. Auparavant, l'énergie cinétique est passée par un minimum local (à  $t = 0.9$  s environ. Cet instant correspond au moment où la zone de pliage cesse de se déplacer vers le bas. La deuxième singularité décrit la première oscillation autour de la position d'équilibre entre 2.5 et 3 s (position droite non déformée).

### 5.3.2.c Pliage et courbure transversale libre

Contrairement à l'essai précédent, la courbure transversale de l'extrémité basse n'est pas bloquée. Les comportements sont similaires jusqu'à la déformée [7] de la figure 5.47 (a). Comme pour l'essai précédent, le claquage intervient entre les figures 5.48 (a) et (b) et cause une refermeture brutale du ruban ainsi que des instabilités à proximité de l'extrémité qui est le lieu privilégié du développement, par croissance d'une imperfection, de la nouvelle zone de pliage. La base du ruban n'ayant alors plus aucune rigidité, il chute et oscille autour de sa position d'équilibre (déformée [14]). Les figures 5.49 (b) et (c) montrent la parfaite coïncidence des comportements pour les deux types de conditions limites jusqu'au claquage.

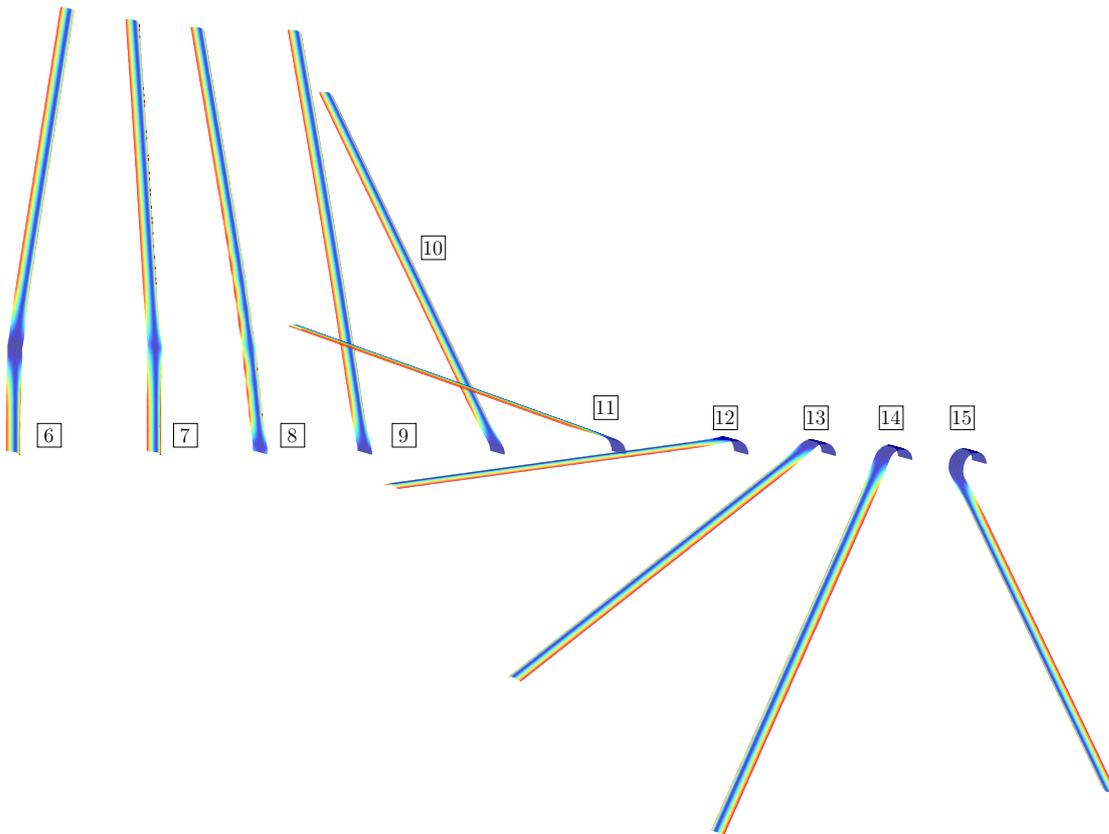


FIGURE 5.47 – Essai de lâché d'un ruban initialement plié.

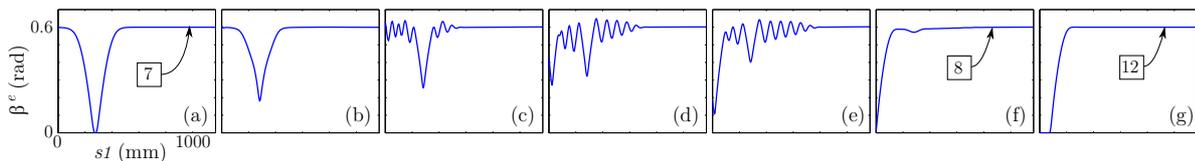


FIGURE 5.48 – Évolution de  $\beta^e$  lors de l'apparition du deuxième pliage.

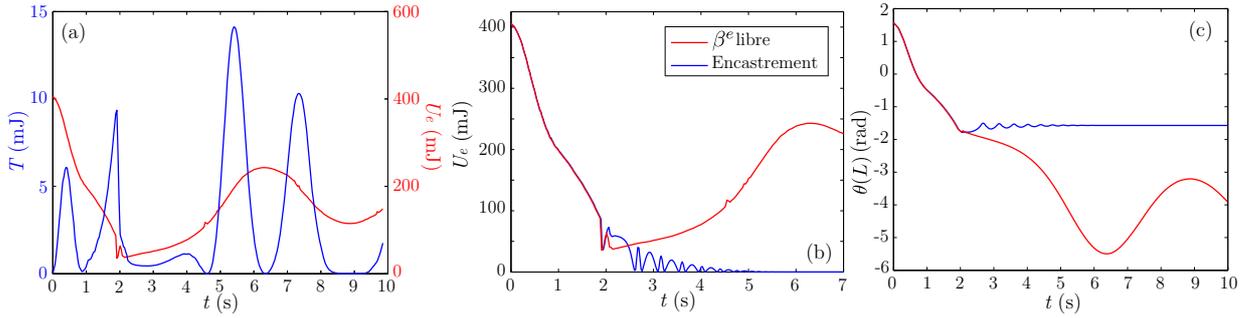


FIGURE 5.49 – Évolution des énergies de déformation et cinétique (a) ; comparaison des énergies de déformation (b) et des rotations des sections aux extrémités (c) pour les 2 essais de lâché.

### 5.3.3 Déroulement d'un ruban bistable

La bistabilité d'un ruban composite dépend de la séquence particulière d'empilement des plis (chapitre 1). On utilise ici les propriétés d'un stratifié de verre et de polypropylène, dont l'empilement est antisymétrique  $[+45^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$ , données par Guest et Pellegrino [28].

Ainsi nous avons :  $A = A_{11} - (A_{12}^2/A_{22}) = 8758 \text{ MPa}\cdot\text{mm}$ ,  $D_1 = D_{11} = 868 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^3$ ,  $D_2 = D_{22} = 848 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^3$ ,  $D_3 = D_{12} = 665 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^3$ ,  $D_4 = D_{33} = 681 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^3$ . L'essai mené sur ce ruban bistable se décompose en trois phases : l'enroulement (dont la procédure est similaire à celle présentée au paragraphe 5.2.7), le relâchement des efforts d'enroulement permettant au ruban de se retrouver dans le second état stable et enfin le déroulement proprement dit. Le déroulement du ruban est initié par la refermeture de la section située à son extrémité gauche. Les déformées **1** et **2** de la figure 5.50 (b) caractérisent le début et la fin de l'aplatissement. La phase d'enroulement est caractérisée par une augmentation linéaire de l'énergie de déformation (figure (a)). L'enroulement s'achève par un claquage traduisant l'aplatissement brutal de la section située à l'extrémité gauche du ruban (déformée **4**). La figure (c) montre que l'enroulement s'effectue à rayon constant ( $\theta$  est linéaire dans la portion enroulée). La déformée **5** correspond au second état stable obtenu par le relâchement brutal du pilotage de la rotation de la section de l'extrémité droite. Le ruban se trouve alors dans un puits d'énergie visible à la figure (a). Le niveau énergétique de ce puits correspond parfaitement aux prédictions de Guest et Pellegrino (courbe rouge).

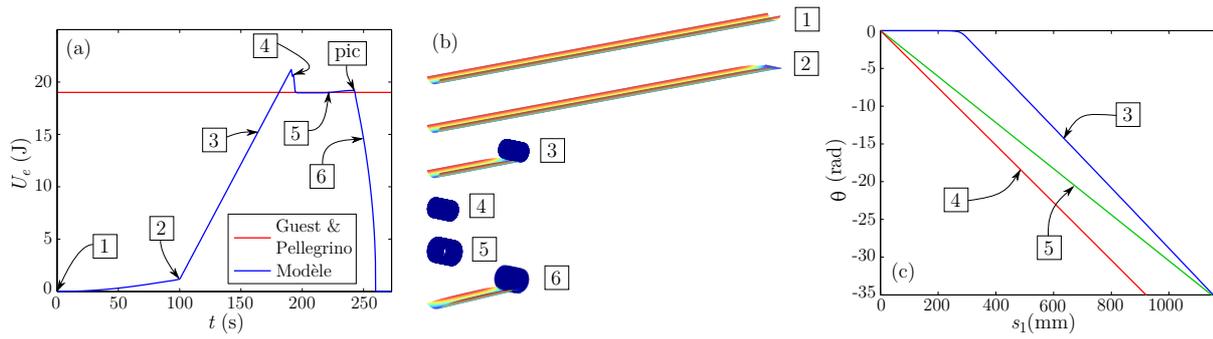


FIGURE 5.50 – Évolution de l'énergie de déformation d'un ruban bistable au cours de son enroulement et de son déroulement (a); enroulement puis déroulement d'un ruban bistable (b); allure de  $\theta(s_1)$  à différents instants de l'essai (c).

Afin d'initier le déroulement du ruban, une fermeture progressive de la section gauche permet l'apport d'énergie suffisant pour franchir le pic énergétique. La figure 5.51 (j) montre que le ruban est entièrement déroulé alors que la section gauche n'a pas retrouvé sa courbure originelle. On remarque qu'il existe une valeur critique de  $\beta^e$  pour laquelle le ruban commence à se dérouler (figure (f)). Cette valeur correspond à la moitié environ de la courbure originelle. En dessous de cette valeur, l'apport en énergie est insuffisant et le ruban reste emprisonné dans le puits énergétique. La profondeur du puits et donc la quantité d'énergie nécessaire à l'initiation du déroulement d'un ruban bistable (qui caractérise donc le niveau de stabilité du second état stable) est directement liée aux caractéristiques du stratifié constituant le ruban; on peut donc imaginer ajuster ses propriétés de telle sorte à obtenir un ruban *plus ou moins bistable*.

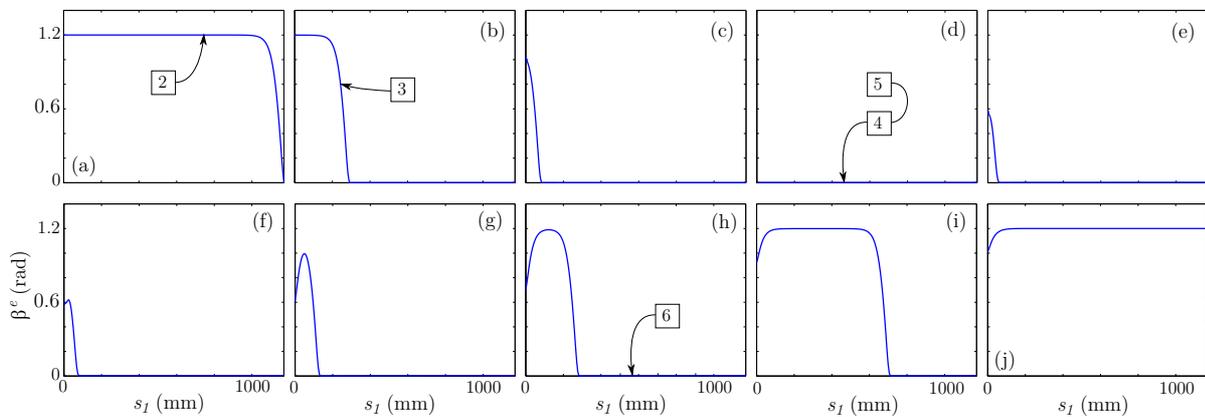


FIGURE 5.51 – Évolution de la courbure transverse au cours de l'enroulement et du déroulement d'un ruban bistable.

### 5.3.4 Déploiement d'un ruban enroulé

Si un ruban est partiellement enroulé avec rayon d'enroulement correspondant au rayon de sa section, alors la portion enroulée conserve un rayon constant lors de la phase de déploiement du bras non déformé [53]. La figure 5.52 illustre la capacité du modèle à retrouver d'un point de vue qualitatif les résultats expérimentaux obtenus par Seffen et Pellegrino.

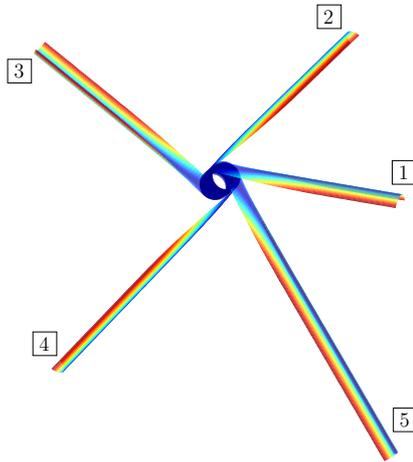


FIGURE 5.52 – Scénario de déploiement d'un ruban non bistable partiellement enroulé.

## 5.4 Structures multi-rubans

La souplesse d'utilisation offerte par COMSOL permet de définir autant de domaine souhaité. On peut par exemple modéliser des systèmes constitués de trois rubans apparentés aux charnières MAEVA décrites dans le paragraphe 1.2.2.b. Afin de simuler un mouvement de corps rigide, on impose des relations entre les degrés de libertés des extrémités de chacun des rubans. Ainsi le comportement global de la structure est influencé par le comportement individuel de chaque ruban.

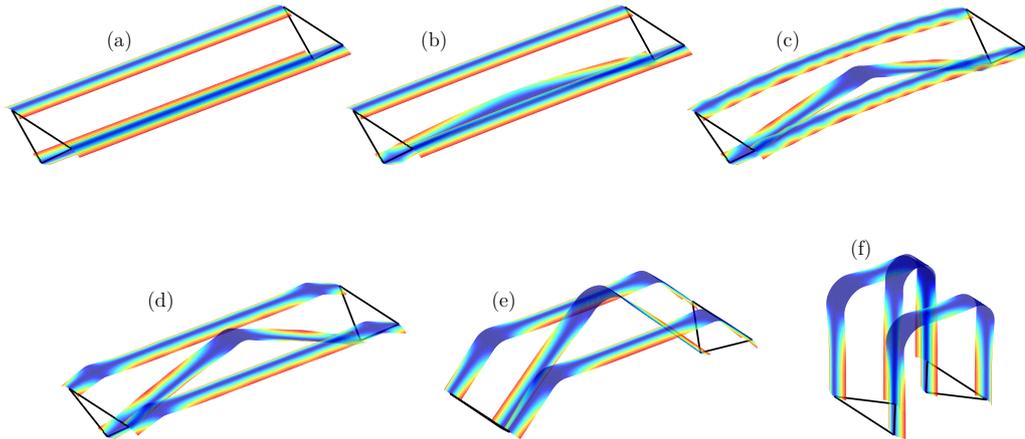


FIGURE 5.53 – Pliage d’une charnière à trois rubans.

Les tout premiers tests menés sur ce type de structures ont permis de simuler le pliage par rotation des extrémités des rubans. Ces rotations sont imposées aux points  $B$  et  $E$ . Contrairement au point  $B$ , le point  $E$  est libre de se déplacer horizontalement. La figure 5.53 illustre les étapes importantes de ce pliage. Très rapidement, on observe un flambage à proximité des extrémités du ruban inférieur (figure (b)). On observe ensuite un flambage au centre du ruban alors que les deux rubans supérieurs sont soumis à de la compression (figure (c)). Les instabilités engendrés à proximité des extrémités de ces deux rubans s’amplifient et entraînent un aplatissement dans cette zone (figure (d)). L’essai se poursuit avec la refermeture des extrémités du ruban inférieur (figures (e)-(f)). Ces premières modélisations de structures multi-rubans laissent entrevoir la possibilité d’exploiter le modèle en tant qu’outil de conception permettant par exemple de déterminer quel agencement de ruban assure un moment de blocage optimal. Cependant, dans le but d’obtenir des résultats exploitables quantitativement il est nécessaire d’améliorer la précision du modèle.

## 5.5 Enrichissement de la cinématique

Jusqu’à présent, la section du ruban n’était décrite que par une seule variable cinématique  $\beta^e$ . Cette approche idéalisée a permis de rendre compte de l’ensemble des phénomènes observables expérimentalement. Cependant d’un point de vue quantitatif, la simplicité de la cinématique ne permet pas une description fine de la zone de transition. Afin d’améliorer la précision des résultats, des premiers tests dans lesquels l’angle  $\beta$  décrivant la section inextensible est discrétisé par deux arcs de cercle au lieu d’un seul. Le point  $H$  (figure 5.54 (a)) divise une demi section de ruban en deux sous sections gouvernées respectivement par  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . L’exploitation des formules

générales 4.12 et 4.13 permet de calculer les différentes énergies du modèle composé désormais de cinq variables cinématiques.

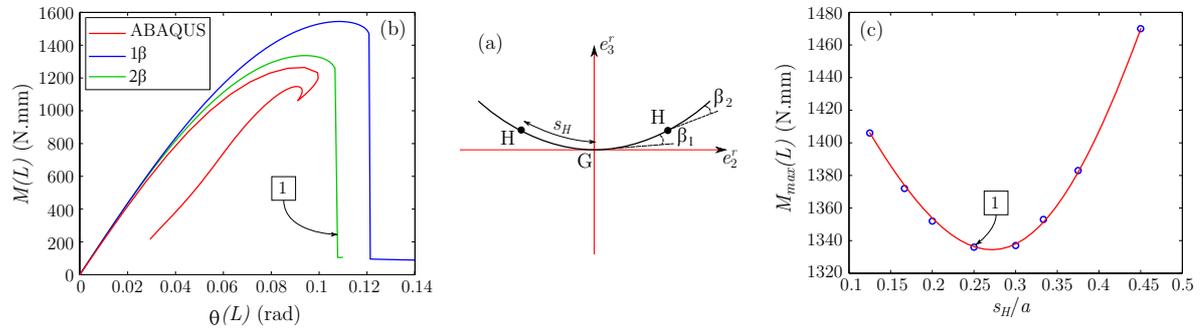


FIGURE 5.54 – Enrichissement de la cinématique (a) ; évolution du moment en fonction de la rotation de la section à une extrémité au cours d’un essai de flambage par flexion (b) ; influence de la position du point  $H$  sur le moment maximal de flexion (c).

La figure 5.54 (b) illustre l’influence de l’enrichissement de la cinématique lors d’un essai de flambage par flexion. La courbe rouge est identique à celle de la figure 3.3. La figure (c) montre l’influence de la position du point  $H$  sur la valeur du moment critique de flambage. On remarque que la valeur la plus basse (celle qui est donc la plus proche du résultat de référence donné par ABAQUS) est obtenue lorsque  $H = a/4$  partage la demi section en deux portions de même longueur. Ces premiers résultats sont encourageants et on imagine que l’introduction d’une troisième variable enrichissant la cinématique décrivant la section pourrait permettre d’affiner la précision des résultats.

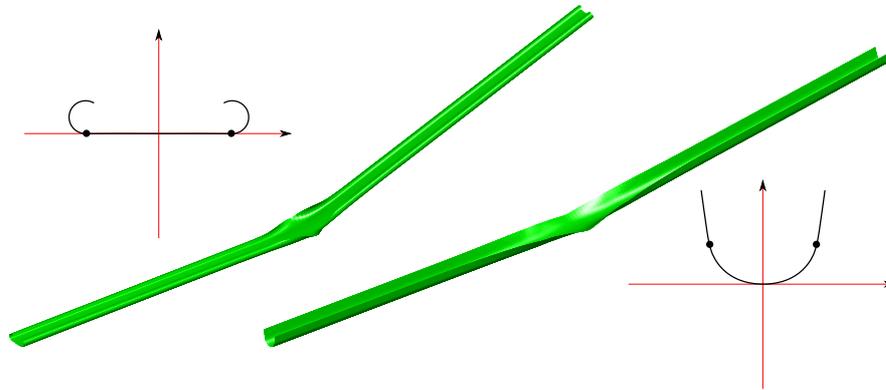


FIGURE 5.55 – Modélisation de poutres de sections variées.

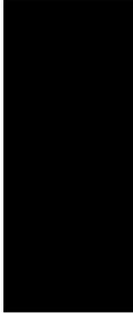
## 5.6 Conclusion du cinquième chapitre

La résolution du modèle de poutre à section fortement déformable défini au chapitre précédent, est rendu particulièrement aisée par l'utilisation du logiciel COMSOL. En effet seules les expressions des énergies mises en jeu sont requises. La différentiation inhérente au principe d'Hamilton est effectuée numériquement et le problème est résolu par la méthode des éléments finis.

La simplicité du modèle, avec uniquement quatre variables cinématiques, a permis de piloter très simplement les nombreuses simulations réalisées. Ces dernières ont, d'une part, mis en évidence de manière qualitative l'ensemble des phénomènes plus ou moins complexes observés expérimentalement (flambage, comportements bistables, effets dynamiques) et d'autre part, permis de retrouver précisément certaines grandeurs obtenues au cours d'études précédentes (rayon naturel d'enroulement). De plus l'influence, sur certaines grandeurs caractéristiques (moment critique de flambage), des paramètres géométriques du ruban, a été testée.

La souplesse d'utilisation de COMSOL autorise la modélisation de structures composées de plusieurs rubans et permet d'envisager des modélisations de structures au comportement complexe telles que les charnières.

Même si les premiers résultats restent qualitatifs, l'enrichissement de la cinématique dans la section a montré la capacité du modèle à approcher de manière quantitative les modélisations classiques de mètres rubans par éléments finis.



---

## Conclusions et perspectives

La volonté de Thales Alenia Space de développer un nouveau concept de télescope spatial s'inscrit dans un contexte d'utilisation généralisée de structures déployables. Parmi les nombreux systèmes utilisés pour assurer le déploiement, le mètre ruban présente le double avantage d'offrir à la fois un degré de compacité élevé lorsqu'il est enroulé et une précision importante lors de la phase de déploiement. Des études antérieures ont montré qu'à cause de la quantité importante d'énergie de déformation élastique emmagasinée lors de l'enroulement, le déroulement de rubans métalliques est trop violent. Il est donc nécessaire d'imaginer un nouveau type de ruban dont on maîtriserait la vitesse de déroulement et dont on pourrait anticiper le comportement.

En plus d'un rapport rigidité / masse volumique élevé, l'utilisation de matériaux composites permet d'obtenir des rubans présentant un faible niveau d'énergie de déformation dans leur état enroulé. Certains rubans réalisés à l'aide d'empilements de plis dont les orientations sont judicieusement choisies, possèdent la propriété de bistabilité. Ces rubans sont stables à la fois dans leur configuration enroulée et déroulée. Leur déroulement s'effectue de manière ordonnée, mais nécessite un apport suffisant d'énergie pour l'initier. La fabrication d'un certain nombre de spécimen a mis en évidence un déroulement trop violent. Un ruban composite non bistable tend naturellement à retrouver sa configuration déployée. Un bridage est indispensable au maintien de sa position enroulée mais aucun apport d'énergie n'est nécessaire pour initier son déploiement qui est très désordonné. Ces deux solutions ne sont donc pas pleinement satisfaisantes.

Afin de répondre à cette problématique, un nouveau concept de ruban hybride a été développé. Le principe proposé, qui a été breveté, consiste à associer le comportement amortissant d'un matériau visco-élastique à un ruban non bistable. Concrètement, une ou plusieurs couches de matériau visco-élastique sont collées à même le ruban. A froid le matériau visco-élastique joue le rôle de verrou mécanique et permet le maintien en position enroulée du ruban qui souhaite retrouver naturellement sa configuration déroulée. Un chauffage localisé et des conditions limites adaptées permettent un déroulement contrôlé du ruban. Les premiers essais expérimentaux et numériques menés sur ces rubans hybrides ont permis de mettre en avant l'importance d'un

chauffage parfaitement localisé et maîtrisé afin d'observer un déroulement progressif. L'inconvénient majeur de ce procédé est lié aux propriétés intrinsèques des matériaux visco-élastiques. Si le maintien en position enroulée est assuré uniquement par la couche visco-élastique, alors la tendance naturelle du ruban à vouloir se dérouler engendre le fluage du matériau visco-élastique. L'augmentation du rayon d'enroulement est donc inévitable en cas de stockage prolongé de la structure.

À l'avenir on pourrait essayer de combiner les avantages d'un ruban bistable (maintien naturel en position enroulée et déroulement progressif) avec celui d'un ruban hybride (déroulement régulé thermiquement). Il faudra alors imaginer la solution qui apportera suffisamment d'énergie pour initier le déroulement.

L'utilisation optimale de structures reposant sur le déploiement de rubans passe par la mise au point de techniques de modélisations performantes, parfaitement maîtrisées et capables de décrire la formation de pliages localisés en tenant compte de comportements non linéaires, dynamiques et instables. Les méthodes relatées dans la littérature ne sont pas pleinement satisfaisantes. Les modélisations par éléments finis de type coque sont trop lourdes alors que les méthodes à base de barres et de rotules ne peuvent décrire l'apparition d'instabilités.

Nous proposons donc un modèle capable de simuler le comportement dynamique de poutre à section mince qui présente de fortes variations de géométrie. Ce modèle repose sur une cinématique de section de type *Elastica* qui permet la prise en compte de grands déplacements à l'aide d'une seule fonction, où même d'un seul paramètre dans le cas de sections circulaires. Le calcul des énergies obtenues à l'aide d'une théorie de coque puis leur intégration sur la section permet la réduction du modèle de coque 2D au modèle de poutre 1D à quatre paramètres. La formulation énergétique adoptée est totalement indépendante de la méthode de résolution choisie par la suite.

Le logiciel de modélisation par éléments finis COMSOL est parfaitement adapté à l'implémentation du modèle car il permet une différentiation numérique des énergies cinétique et de déformation du modèle de poutre inhérentes au principe d'Hamilton. Un premier modèle simple, décrivant la géométrie de la section avec un seul paramètre, a été mis en œuvre. Son exploitation a permis de réaliser facilement un grand nombre d'essais numériques avec des temps de calcul réduits, et de retrouver qualitativement l'ensemble des phénomènes observés expérimentalement et décrits dans la littérature (pliages, flambages, comportements bistables, lâchés dynamiques). Sur certains essais, on observe un certain écart entre les prédictions du modèle de poutre et les prédictions des modèles classiques de coques. Nous avons montré qu'enrichir la cinématique de la section d'un paramètre supplémentaire diminuait très sensiblement cet écart. Introduire une nouvelle variable réduira encore cette différence et permettra des analyses quantitatives. Nous avons également procédé aux premières simulations de structures composées de plusieurs rubans que sont les charnières. Par la suite il est tout à fait envisageable de modéliser le comportement de structures plus complexes comme des hexapodes.

Afin de simplifier certaines expressions intervenant dans le modèle, des hypothèses relatives aux petites déformations de membrane ont été admises. Cependant, l'écriture du modèle ne s'inscrit pas totalement dans le cadre des petites déformations. Une mesure des déformations effectuée dans un repère tournant lié à la rotation de la section pourrait éventuellement permettre de prendre en compte totalement l'hypothèse des petites déformations. Cette voie reste totalement à explorer.

Le modèle développé fait l'hypothèse d'un comportement plan du ruban ne prenant notamment pas en compte la torsion qui s'avère capitale dans l'étude des instabilités. Il paraît nécessaire d'enrichir la cinématique afin d'étendre le modèle au comportement hors plan.

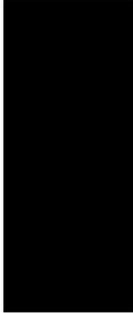
Dans le but de simuler l'influence de l'ajout d'une couche de matériau visco-élastique à l'aide de ce modèle de poutre à section déformable, il sera nécessaire d'introduire l'énergie de dissipation liée à la viscosité. Les tout premiers tests menés sur un simple modèle de poutre hybride à section non déformable ont montré la possibilité de résoudre le problème de maintien en position enroulée puis de retour en position déployée à l'aide de COMSOL.

Les essais numériques menés ont montré l'apparition de nombreuses instabilités. Ainsi, il pourrait être envisager d'exploiter des méthodes de résolution numérique permettant le suivi complet des branches de solutions.

A plus long terme, les idées développées dans ce modèle paraissent suffisamment générales pour être étendues à d'autres types de problèmes : sections fermées, auto-contact, application au monde du vivant (déploiement de végétaux, ...).

L'ensemble des perspectives décrites ci-dessus seront abordées dans une nouvelle thèse qui débute actuellement et qui pérennise la collaboration entre Thales Alenia Space et le LMA.





---

## Annexe - Fonctions caractéristiques pour une section circulaire

On définit l'angle  $\beta$  :

$$\beta = 2\beta^e \frac{s_2}{a} \quad (1)$$

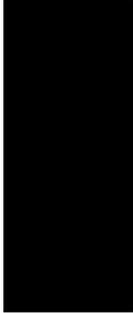
En introduisant cette expression dans les équations 4.36 et 4.40, l'intégration sur la courbe section est aisée :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\overline{z^2} = a^3 I_{z^2} \\
\overline{\cos^2(\beta)} = a I_{c^2} \\
\overline{z} = a^2 I_z \\
\overline{e^{s^2}} = a^5 I_{d^4} (\beta_{,1}^e)^4 \\
\overline{k_{11}^{s^2}} = a^3 \left( I_{k'^4} (\beta_{,1}^e)^4 + I_{k'^2 k''} (\beta_{,1}^e)^2 \beta_{,11}^e + I_{k''^2} (\beta_{,11}^e)^2 \right) \\
\overline{k_{22}^{s^2}} = \frac{4}{a} (\beta^e - \beta_0^e)^2 \\
\overline{k_{11}^{s^2} k_{22}^{s^2}} = a \left( I_{k'^2} (\beta_{,1}^e)^2 + I_{k''} \beta_{,11}^e \right) (\beta^e - \beta_0^e) \\
\overline{k_{12}^{s^2}} = \frac{a}{3} (\beta_{,1}^e)^2 \\
\overline{e^s} = a^3 I_{d^2} (\beta_{,1}^e)^2 \\
\overline{z e^s} = a^4 I_{ze} (\beta_{,1}^e)^2 \\
\overline{\cos(\beta) k_{11}^s} = a^2 \left( I_{ck'^2} (\beta_{,1}^e)^2 + I_{ck''} \beta_{,11}^e \right) \\
\overline{\cos(\beta) k_{22}^s} = I_c (\beta^e - \beta_0^e) \\
\overline{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 2 a^3 I_{d^2} (\dot{\beta}^e)^2 \\
\overbrace{\overline{z \sin(\theta)}} = \dot{z} \sin(\theta) + \overline{z} \cos(\theta) \dot{\theta} \\
= a^2 \left( I_{z'} \sin(\theta) \dot{\beta}^e + I_z \cos(\theta) \dot{\theta} \right) \\
\overbrace{\overline{z \cos(\theta)}} = \dot{z} \cos(\theta) - \overline{z} \sin(\theta) \dot{\theta} \\
= a^2 \left( I_{z'} \cos(\theta) \dot{\beta}^e - I_z \sin(\theta) \dot{\theta} \right)
\end{array} \right. \quad (2)$$

où les fonctions géométriques  $I_{\bullet}$  ne dépendent que de  $\beta^e$  et caractérisent l'allure de la section :

$$\left\{ \begin{array}{l}
I_{z^2}(\beta^e) = \frac{6\beta^e - 8\sin(\beta^e) + \sin(2\beta^e)}{16(\beta^e)^3} \\
I_{c^2}(\beta^e) = \frac{\beta^e + \sin(\beta^e)\cos(\beta^e)}{2\beta^e} \\
I_z(\beta^e) = \frac{\beta^e - \sin(\beta^e)}{2(\beta^e)^2} \\
I_{d^4}(\beta^e) = \frac{2(\beta^e)^5 - 10(\beta^e)^2(16\sin(\beta^e) + \sin(2\beta^e)) + 5(32\sin(\beta^e) + 5\sin(2\beta^e))}{640(\beta^e)^9} \\
\quad + \frac{20(\beta^e)^3(2\cos(\beta^e) + 1) - 30\beta^e(8\cos(\beta^e) + \cos(2\beta^e) - 2)}{640(\beta^e)^9} \\
I_{k'^4}(\beta^e) = \frac{\beta^e(3(\beta^e)^4 - 20(\beta^e)^2 + 90) + 15\sin(2\beta^e) + 60((\beta^e)^2 - 4)\sin(\beta^e) + 120\beta^e\cos(\beta^e)}{60(\beta^e)^7} \\
I_{k'^2k''}(\beta^e) = \frac{\beta^e((\beta^e)^2 - 3\beta^e\sin(\beta^e) - 6\cos(\beta^e) - 9) - 3\sin(\beta^e)(\cos(\beta^e) - 6)}{6(\beta^e)^6} \\
I_{k'^2}(\beta^e) = \frac{(\beta^e)^3 - 6\beta^e + 6\sin(\beta^e)}{3(\beta^e)^4} \\
I_{k''}(\beta^e) = \frac{\beta^e - \sin(\beta^e)}{(\beta^e)^3} \\
I_{d^2}(\beta^e) = \frac{(\beta^e)^3 - 12\sin(\beta^e) + 6\beta^e(\cos(\beta^e) + 1)}{24(\beta^e)^5} \\
I_{ze}(\beta^e) = \frac{4(\beta^e)^3 - 12(\beta^e)^2\sin(\beta^e) - 48\sin(\beta^e) + 9\sin(2\beta^e) - 6\beta^e(\cos(2\beta^e) - 6)}{192(\beta^e)^6} \\
I_{ck'^2}(\beta^e) = \frac{2(\beta^e)^2\sin(\beta^e) - 8\sin(\beta^e) + \sin(2\beta^e) + \beta^e(4\cos(\beta^e) + 2)}{4(\beta^e)^4} \\
I_{ck''}(\beta^e) = -\frac{2\beta^e - 4\sin(\beta^e) + \sin(2\beta^e)}{8(\beta^e)^3} \\
I_c(\beta^e) = \frac{2\sin(\beta^e)}{\beta^e} \\
I_{z'} = -\frac{\beta^e(\cos(\beta^e) + 1) - 2\sin(\beta^e)}{2(\beta^e)^3}
\end{array} \right. \quad (3)$$





---

## Bibliographie

- [1] Able engineering. <http://www.aec-able.com/>.
- [2] Goodfellow. <http://www.goodfellow.com/F/Polyethylene-terephthalate-Film.html>.
- [3] Northrop grumman. <http://www.northropgrumman.com/>.
- [4] Rolatube. <http://www.rolatube.com/>.
- [5] A. Allezy, L. Blanchard, C. Hochard, and F. Guinot. Measuring tape with thermal deployment and deployable structure comprising said measuring tape, February 2010.
- [6] G. Aridon, A. Al Majid, L. Blanchard, D. Rémond, and R. Dufour. A Self-Deployment Hexapod Model for a Space Application. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4 :011002, 2009.
- [7] G. Aridon, L. Blanchard, A. Allezy, D. Rémond, and R. Dufour. On the correction capability of a deployed tape-spring hexapod. *Mechanism and Machine Theory*, 43(8) :1009–1023, 2008.
- [8] G. Aridon, L. Blanchard, D. Rémond, and R. Dufour. Modal identification for modeling a deployed tape-spring hexapod. In *48th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2006.
- [9] G. Aridon, D. Remond, F. Morestin, L. Blanchard, and R. Dufour. Self-deployment of a tape-spring hexapod : experimental and numerical investigation. *Journal of Mechanical Design*, 131(2) :021003, 2009.
- [10] A. Sicre J. Duperray B. Donzier. Automotive, self-locking and damping articulated joint and articulation equipped with same, January 2001.
- [11] J.M. Berthelot. *Matériaux composites Comportement mécanique et analyse des structures*. Tec et Doc , Hermès - Lavoisier, 2005.

- 
- [12] J.T. Black, J.A. Whetzal, B.J. DeBlonk, J.J. Massarello, and KENTUCKY UNIV LEXINGTON. Deployment Repeatability Testing of Composite Tape Springs for Space Optics Applications. 2006.
- [13] L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, J.P. Merlet, and ALCATEL SPACE INDUSTRIES CANNES LA BOCCA (FRANCE). Deployable hexapod using tape-springs. 2005.
- [14] J. Block, M. Straubel, and M. Wiedemann. Ultralight deployable booms for solar sails and other large gossamer structures in space. *Acta Astronautica*, 2010.
- [15] C. Pereira R. John T. Schmidt K. Seifart J. M. Lautier C. Boesch. Ultra light self-motorized mechanism for deployment of light weight reflector antennas and appendages. In *Proceedings of the 12th European Space Mechanisms & Tribology Symposium (ESMATS)*, 2004.
- [16] M. Clampin. The James Webb Space Telescope. In *Frontiers in Optics*. Optical Society of America, 2008.
- [17] Andrew J. (London GB) Daton-lovett. An extendible member, 1996.
- [18] A. Donzier and J. Sicre. Self actuating damped hinge. In *European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 7 th, Noordwijk, Netherlands*, pages 277–279, 1997.
- [19] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. apud Marcum-Michaelem Bousquet, 1744.
- [20] R. E. Freeland, G. D. Bilyeu, G. R. Veal, M. D. Steiner, and D. E. Carson. Large inflatable deployable antenna flight experiment results. *Acta Astronautica*, 41(4-10) :267–277, 1997. Developing Business.
- [21] DA Galletly and SD Guest. Equilibrium and stability analysis of bistable composite slit tubes. 2000.
- [22] D.A. Galletly and S.D. Guest. Bistable composite slit tubes. I. A beam model. *International Journal of Solids and Structures*, 41(16-17) :4517–4533, 2004.
- [23] D.A. Galletly and S.D. Guest. Bistable composite slit tubes. II. A shell model. *International Journal of Solids and Structures*, 41(16-17) :4503–4516, 2004.
- [24] D. Givois et al. A low cost hinge for appendices deployment : design, test and applications. In *9th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, volume 480, pages 145–151, 2001.
- [25] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa, and D. Camotim. A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1627–1643, 2010.
- [26] V.G.A. Goss. The History of the Planar Elastica : Insights into Mechanics and Scientific Method. *Science & Education*, 18(8) :1057–1082, 2009.
- [27] S.D. Guest and S. Pellegrino. A new concept for solid surface deployable antennas. *Acta astronautica*, 38(2) :103–113, 1996.
- [28] S.D. Guest and S. Pellegrino. Analytical models for bistable cylindrical shells. *Proceedings of the Royal Society A*, 462 :839–854, 2006.

- 
- [29] D. Hibbitt, B. Karlsson, and P. Sorensen. ABAQUS/Standard User's Manual, version 6.7, ABAQUS. Inc., Pawtucket, RI, 2007.
- [30] S. Hoffait, O. Bruls, D. Granville, F. Cugnon, and G. Kerschen. Dynamic analysis of the self-locking phenomenon in tape-spring hinges. *Acta Astronautica*, 2009.
- [31] K. Iqbal, A. Daton-Lovett, and S. Pellegrino. Bi-stable composite slit tubes. 2000.
- [32] K. Iqbal and S. Pellegrino. Bi-stable composite shells. In *Proc. 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, pages 3–6, 2000.
- [33] J. Bertheux P. Blanc E. De Mollerat Du Jeu T. Foucras J. Louis M. Mareello G. Poveda P. Roux C. Auternaud J. Barteveian. Self-motorized antifriction joint and an articulated assembly, such as a satellite solar panel, equipped with such joints, February 1992.
- [34] M.S. Lake and Langley Research Center. *A deployable primary mirror for space telescopes*. Citeseer, 1999.
- [35] E.H. Mansfield. Large-deflexion torsion and flexure of initially curved strips. *Proceedings of the Royal Society A*, 334 :279–298, 1973.
- [36] M.E. McEachen, T.A. Trautt, and D.M. Murphy. The ST8 SAILMAST Validation Experiment. In *46 th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1–13, 2005.
- [37] J. Nella, P.D. Atcheson, C.B. Atkinson, D. Au, A.J. Bronowicki, E. Bujanda, A. Cohen, D. Davies, P.A. Lightsey, R. Lynch, et al. James webb space telescope (JWST) observatory architecture and performance. In *Proceedings of SPIE*, volume 5487, page 576, 2004.
- [38] S. Pellegrino. CRTS reflectors. *Proc. 25th ESA Anfenno Workhop on Solellire Anrenno Technologv. ESTEC, The Netherlands, 2002*, 2002.
- [39] S. Pellegrino, C. Green, SD Guest, and A. Watt. SAR advanced deployable structure. *Technical Report, Department of Engineering, University of Cambridge*, 2000.
- [40] V. Peypoudat, B. Defoort, D. Lacour, P. Brassier, O.L. Couls, S. Langlois, S. Liénard, M. Bernasconi, and M. Gotz. Development of a 3.2 m-long inflatable and rigidizable solar array breadboard. In *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005*, volume 581, page 99, 2005.
- [41] P.M. Pimenta and E.M.B Campello. A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1(1) :119, 2003.
- [42] L. Puig, A. Barton, and N. Rando. A review on large deployable structures for astrophysics missions. *Acta Astronautica*, 67(1-2) :12–26, 2010.
- [43] GG Reibaldi and MC Bernasconi. QUASAT program : the ESA reflector. *Acta Astronautica*, 15(3) :181–187, 1987.
- [44] E. Riks. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. (*American Society of Mechanical Engineers, 1972.*) *ASME, Transactions, Series E- Journal of Applied Mechanics*, 39 :1060–1065, 1972.

- 
- [45] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7) :529–551, 1979.
- [46] FPJ Rimrott. Storable tubular extendible member : a unique machine element. *Machine Design*, 37(28) :156–165, 1965.
- [47] W. Rits. A multipurpose deployable membrane reflector- A new design concept. *Esa Bulletin*, (88) :66–71, 1996.
- [48] W. Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 1909(135) :1–61, 1909.
- [49] Stephen A. Robinson. Simplified spacecraft antenna reflector for stowage in confined envelopes, November 1996.
- [50] M.J. Santer and K.A. Seffen. Optical space telescope structures : The state of the art and future directions. *Aeronautical Journal*, 113(1148) :633, 2009.
- [51] M.R. Schultz, M.J. Hulse, P.N. Keller, and D. Turse. Neutrally stable behavior in fiber-reinforced composite tape springs. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(6) :1012–1017, 2008.
- [52] K.A. Seffen. On the behavior of folded tape-springs. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 68(3) :369–375, 2001.
- [53] K.A. Seffen and S. Pellegrino. Deployment dynamics of tape springs. *Proceedings of the Royal Society A*, 455 :1003–1048, 1999.
- [54] K.A. Seffen, Z. You, and S. Pellegrino. Folding and deployment of curved tape springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(10) :2055–2073, 2000.
- [55] Rubin Charles P. Schwartz Seymour S. Self actuating self locking flexible hinge, June 1972.
- [56] J. Sicre, D. Givois, and A. Emerit. Application of" MAEVA" hinge to myriade micro-satellites deployments needs. In *11th European Space Mechanisms and Tribology Symposium/ESMATS*, pages 21–23, 2005.
- [57] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 27(3) :371–393, 1991.
- [58] O. Soykasap. Analysis of tape spring hinges. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(7) :853–860, 2007.
- [59] O. Soykasap. Deployment analysis of a self-deployable composite boom. *Composite Structures*, 89(3) :374–381, 2009.
- [60] SICOMIN Fiche Technique. Sr 8100 systèmes époxydes pour injection basse pression.
- [61] B. Tibbalds, SD Guest, and S. Pellegrino. Inextensional Packaging of Thin Shell Slit Reflectors. *Technische Mechanik*, 24(3-4) :211–220, 2004.

- 
- [62] C. Vehar, S. Kota, and R. Dennis. Closed-loop tape springs as fully compliant mechanisms—preliminary investigations. In *Proceedings of the DETC 2004, International Design Engineering Technical Conference*. Citeseer, 2004.
- [63] J.F.V. Vincent. Deployable structures in nature. *Courses And Lectures-International Centre For Mechanical Sciences*, pages 37–48, 2001.
- [64] B.Z. Vlassov. *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles, Paris, 1962.
- [65] Wesley W. Vyvyan. Self-actuating, self-locking hinge, June 1968.
- [66] S.J.I. Walker and G.S. Aglietti. Experimental investigation of tape springs folded in three dimensions. *AIAA Journal*, 44(1) :151–159, 2006.
- [67] S.J.I. Walker and G.S. Aglietti. A study of tape spring fold curvature for space deployable structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G (Journal of Aerospace Engineering)*, 221(G3) :313–325, 2007.
- [68] A.M. Watt and S. Pellegrino. Tape-spring rolling hinges. In *Proceedings of the 36th Aerospace Mechanisms Symposium*, pages 15–17, 2002.
- [69] M. Zivkovic, M. Kojic, R. Slavkovic, and N. Grujovic. A general beam finite element with deformable cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(20-21) :2651–2680, 2001.