HAL
open science

Fusion de données inertielles et magnétiques pour l'estimation de l'attitude sous contrainte énergétique d'un corps rigide accéléré

Aida Makni

To cite this version:

Aida Makni. Fusion de données inertielles et magnétiques pour l'estimation de l'attitude sous contrainte énergétique d'un corps rigide accéléré. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAT025 . tel-01318310

HAL Id: tel-01318310

https://theses.hal.science/tel-01318310v1

Submitted on 19 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Communauté UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Automatique et Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Aida MAKNI

Thèse dirigée par **« Carlos CANUDAS DE WIT »**

préparée au sein du **Laboratoire Gipsa-Lab**
dans **l'École Doctorale EEATS**

Fusion de données inertielles et magnétiques pour l'estimation de l'attitude sous contrainte énergétique d'un corps rigide accéléré

Thèse soutenue publiquement le **« 29 Mars 2016 »**, devant le jury composé de :

M. Gildas BESANÇON, Président
Professeur, Gipsa-Lab, Grenoble INP, Grenoble, France

M. Noureddine MANAMANNI, Rapporteur
Professeur, CReSTIC, Université de Reims Champagne-Ardenne, Reims, France

M. Pascal MORIN, Rapporteur
Professeur contractuel, ISIR, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Mme Valérie RENAUDIN, Examinatrice
Chargée de Recherche (HDR), IFSTTAR, Nantes, France

M. Pierre-Olivier AMBLARD, Examinateur
Directeur de Recherche CNRS, Gipsa-Lab, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

M. Hassen FOURATI, Co-encadrant de thèse
Maître de Conférences, GIPSA-Lab, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

M. Alain KIBANGOU, Co-encadrant de thèse, invité
Maître de Conférences, GIPSA-Lab, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

A mes parents,
à mes chères sœurs,
à mon mari Hamdi,
à mon petit ange Zakaria.

Remerciements

Il me sera bien difficile, faute de place, de remercier tout le monde car ce modeste travail n'a pu aboutir sans l'aide de nombreuses personnes.
Ce jour n'est pas comme les autres puisqu'il signifie l'épilogue de ma vie de thésarde et marque la fin d'une période durant laquelle j'ai vécu une expérience enrichissante tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Carlos Canudas de Wit pour m'avoir accueillie au sein de l'équipe Systèmes et Commande en Réseaux (NeCS). Mes remerciements s'adressent aussi à mes deux co-encadrants de thèse Hassen Fourati et Alain Kibangou, maîtres de Conférences à l'Université Grenoble Alpes : vos idées, vos conseils et soutiens ont été d'une grande importance pour le bon déroulement du travail. J'ai appris beaucoup de choses à vos côtés et j'en suis très reconnaissante.

Mes sincères remerciements aux membres du Jury, qui ont accepté de juger mon travail : Monsieur Gildas Besançon pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance, Monsieur Noureddine Manamanni et Monsieur Pascal Morin pour avoir accepté d'évaluer en profondeur ce mémoire ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs. Que Monsieur Pierre-Olivier Amblard et Madame Valérie Renaudin trouvent ici mes remerciements pour avoir examiné ce travail et assisté à la soutenance.

Un grand merci à mes collègues du laboratoire, avec lesquels j'ai partagé tant de choses et qui ont fait de ma vie au Gipsa une expérience inoubliable. Je pense notamment aux moments les plus agréables lors des miams et des pauses café mais aussi aux gâteaux d'anniversaire que j'ai dû découpés à chaque fois !
Merci à mes co-bureaux Ahmad Altaher, Jonathan, Josué, Raoul, Sebin de m'avoir supportée pendant ces années de thèse, surtout à la fin. Josué, je tiens à te remercier particulièrement pour tout le temps passé à m'aider pour compiler mes documents « Latex » sans oublier tes cours privés de langue espagnole.
Bruno, Mihaly, Insaf, Raouia, Nassim, Rachid, Trung, Maëlle, Swann, Nadia et Diego, Waleed, Taher, Mustapha, Bojan, Dung, Sofiane... bref, toute l'équipe "DAUTO-Doc", merci à vous tous d'avoir fait de cette thèse une aventure humaine fantastique.

Je remercie encore tous les membres du Gipsa, en particuler, le département DAUTO. Je voudrais tous (professeurs, doctorants, services technique et informatique, administration) vous remercier pour tout ce que vous avez fait pour moi. Je vous remercie d'avoir rendu mon séjour à Gipsa tellement agréable, j'en garde que de bons souvenirs.

Pour finir ces remerciements, un immense merci à toute ma famille et ma belle-famille. Merci surtout à mes parents et mes sœurs adorées pour avoir toujours été là et m'avoir soutenue tout au long de cette thèse.
Et enfin, merci à toi, mon Hamdi, d'être là simplement pour moi, de me soutenir et de m'encourager sans cesse. Sans toi, je n'aurais jamais pu y arriver.
Un petit clin d'œil à mon p'tit bout de choux Zakaria, qui était ma source d'énergie.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Généralités et préliminaires sur l'attitude **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Attitude : principe et domaines d'application 6

1.3 Représentations usuelles de l'attitude 12

1.4 Capteurs utilisés pour la détermination de l'attitude 19

1.5 Approches d'estimation de l'attitude 25

1.6 Conclusion 37

2 Estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Énoncé du problème 40

2.3 Classification des mouvements 41

2.4 Estimation de l'attitude par filtrage de Kalman adaptatif 44

2.5 Estimation de l'attitude par filtrage de systèmes singuliers 55

2.6 Conclusion 65

3 Estimation de l'attitude avec utilisation parcimonieuse du gyromètre **67**

3.1 Introduction 67

3.2 Filtre de Kalman adaptatif avec utilisation intermittente du gyromètre 68

3.3 Conclusion 76

4 Application d'estimation de l'attitude en navigation pédestre **79**

4.1 Introduction 79

4.2 Plateforme expérimentale 79

4.3 Implémentation réelle dans le cas de la marche humaine 82

4.4 Conclusion 87

Conclusion générale **89**

A Détermination des paramètres statistiques de la fonction f_k **93**

A.1 Calcul préliminaire 93

A.2 Calcul de la moyenne et de la variance de f_k 94

B Calcul de la matrice de covariance V **97**

C Autres formes de modèle singulier (M-modèle et AM-Modèle) **99**

C.1 M-modèle 99

C.2 AM-modèle 100

Bibliographie **112**

Table des figures

1.1 Repère fixe N et repère mobile B 6

1.2 Attitude d'un corps rigide 7

1.3 Exemples de drones aériens 8

1.4 Exemple de satellite artificiel 9

1.5 Exemples de systèmes de navigation pédestre 10

1.6 Exemples de capture de mouvement humain 11

1.7 Rotations successives des angles de Cardan 14

1.8 Rotation à l'aide d'un quaternion 15

1.9 Principe de fonctionnement d'un accéléromètre 20

1.10 Champ magnétique terrestre 21

1.11 Représentation du champ magnétique terrestre 22

1.12 Principe de fonctionnement d'un gyromètre (a) 1er mode : vibrations naturelles : branches en opposition de phase (b) $2^{\text{ème}}$ mode : vibrations de flexion autour de l'axe longitudinal induites par les forces de Coriolis (mesure de la vitesse de rotation ω) 23

1.13 Structure d'estimation de l'attitude à l'aide de capteurs inertiels et magnétiques 30

2.1 Estimation du quaternion d'attitude 53

2.2 Erreurs d'estimation des angles d'Euler 54

2.3 Détection de l'accélération linéaire 55

2.4 Les performances de détection à travers la probabilité de détection 56

2.5 Erreur d'estimation des angles d'Euler sous des conditions dynamiques différentes 57

2.6 Evolution temporelle des angles d'Euler 63

2.7 Erreur d'estimation des angles d'Euler : (a) QDF vs GDA (b) QDF vs CF (c) QDF vs QKF 64

3.1 Scénario de l'acquisition des mesures du gyromètre 71

3.2 Erreurs d'estimation des angles d'Euler 71

3.3 Comparaison de la valeur de σ des angles d'Euler 72

3.4 Erreurs d'estimation des angles d'Euler 75

4.1 Centrale inertielle MTi (dimensions : 58 x 58 x 22 mm (l x L x H)) 80

4.2 Interface graphique du logiciel MT Manager 81

4.3 Système Vicon dans la plateforme MOCA du laboratoire GIPSA-Lab 82

4.4 Ensemble "centrale MTi-marqueurs" 82

4.5 Trajectoire réalisée au sein de la salle MOCA 83

4.6 Erreurs d'estimation des angles d'Euler dans le cas de la marche humaine . . . 84

4.7 Fonction de distribution cumulative de l'erreur d'estimation des angles d'Euler pour les filtres q-AKF et QKF 85

4.8 Erreur d'estimation des angles d'Euler à partir du QKF et du QDF 86

4.9 Vitesse angulaire sur l'axe z_B 86

4.10 Fonction de distribution cumulative de l'erreur d'estimation des angles d'Euler pour le QDF et le QKF 87

Liste des tableaux

1.1 Synthèse des caractéristiques des représentations de l'attitude [39] 18

2.1 Caractéristiques des bruits des capteurs inertiels et magnétiques 51

2.2 Conditions initiales des quaternions 51

2.3 Erreur quadratique moyenne (RMSE) des angles d'Euler (q-AKF vs QKF) . . . 53

2.4 RMSE des angles d'Euler liée aux approches CF, GDA, QDF et QKF 64

2.5 RMSE des angles d'Euler liée aux approches q-AKF et QDF 65

3.1 Moyennes quadratiques des erreurs d'estimation des angles d'Euler (RMSE) . . 72

3.2 RMSE des erreurs d'estimation des angles d'Euler (comparaison des trois tests) 75

3.3 Consommation d'énergie dans les trois cas de détection 76

4.1 Caractéristiques principales des capteurs de la centrale inertielle MTi 80

4.2 Probabilité d'avoir une erreur d'estimation $< 5°$ sur les angles d'Euler 87

Introduction générale

L'estimation de l'attitude, ou orientation, est devenue au fil du temps un enjeu scientifique important. Déterminer l'attitude d'un corps rigide est l'objet de nombreuses études dans différentes disciplines, comme l'aérospatiale (pour le contrôle de satellites), la robotique (aérienne, marine et terrestre), la capture de mouvement (pour la médecine ou l'animation des avatars pour en jeux vidéo), l'écophysiologie (pour l'étude des réponses comportementales des animaux), etc.
Il existe de nombreuses technologies destinées à fournir des mesures pour l'estimation de l'attitude d'un corps rigide. L'émergence de la technologie MEMS (Micro-Electro-Mechanical-System) a conduit à la conception de capteurs dédiés de taille réduite, ayant une faible consommation en énergie tels que les accéléromètres, les magnétomètres et les gyromètres. Ces capteurs, conçus sous forme d'une triade orthogonale, ont été embarqués par la suite dans des centrales inertielles (appelées encore "Inertial Measurement Units" (IMU)). Le gyromètre mesure la vitesse angulaire, l'accéléromètre mesure la gravité ainsi que l'accélération linéaire et le magnétomètre, quant à lui, mesure le champ magnétique terrestre. Les centrales inertielles sont actuellement très utilisées, seules ou combinées à d'autres technologies, dans diverses applications. De nos jours, ces systèmes sont désormais embarqués dans des appareils mobiles (smartphones et tablettes), offrant ainsi de nouveaux champs d'application. Toute la recherche autour de cette thématique se focalise actuellement sur la proposition de nouvelles approches permettant de fusionner ces données inertielles et magnétiques afin de reconstruire au mieux l'attitude du corps rigide.

Les premières méthodes d'estimation de l'attitude dans les années 70 ont été développées pour trouver une solution au problème de Wahba. Il s'agit de résoudre un problème d'optimisation pour trouver la matrice de rotation en se basant sur la connaissance d'au moins deux vecteurs, exprimés dans un repère mobile lié au corps et dont les projections dans un repère fixe (de référence) sont connues. Les deux vecteurs souvent utilisés sont l'accélération et le champ magnétique terrestre. Les projections de ces deux vecteurs sont mesurées respectivement par un accéléromètre et un magnétomètre. Afin d'obtenir une meilleure estimation de l'attitude, les mesures issues de ces deux capteurs sont fusionnées avec la mesure de la vitesse angulaire issue d'un gyromètre pour rajouter une précision à court terme en compensant le biais sur le gyromètre. Plusieurs méthodes de fusion ont été développées dans ce cadre et les plus populaires sont celles utilisant le filtre de Kalman avec ses variantes ainsi que les observateurs non linéaires. Ces méthodes sont souvent fiables pour estimer l'attitude si l'accéléromètre mesure uniquement la projection du champ de gravité. Cependant, un corps rigide n'est pas toujours en phase statique et se trouve souvent en mouvement. Dans ce cas l'accéléromètre ne mesure pas uniquement la projection du champ de gravité mais également l'accélération linéaire du corps, un terme inconnu difficile à calculer dans ce cas de figure.

C'est dans ce contexte que se situent les travaux de recherche menés dans cette thèse. Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème d'estimation de l'attitude en

cas de mouvement accéléré en ayant recours à une triade orthogonale d'accéléromètres, de magnétomètres et de gyromètres. Nous proposons deux approches d'estimation robuste à l'accélération linéaire. La première consiste en un filtre de Kalman incluant un calcul adaptatif des paramètres statistiques associés au bruit de mesure de l'accéléromètre afin de compenser l'effet de l'accélération linéaire du corps rigide. Dans la deuxième, nous reformulons tout d'abord le problème d'estimation. Contrairement à la formulation classique, où le modèle du processus est défini à partir des mesures du gyromètre et le modèle d'observation est défini à partir des mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre, la nouvelle formulation considère les mesures de l'accéléromètre dans le modèle du processus tandis que les deux autres mesures définissent le modèle d'observation, ce qui conduit à un nouveau modèle singulier. Nous proposons alors de développer un filtre singulier pour l'estimation de l'attitude.
Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la réduction de l'utilisation du gyromètre, un capteur énergivore, comparé à l'accéléromètre et au magnétomètre. Ce challenge énergétique est d'une grande importance surtout pour des applications embarquées dans des dispositifs ayant des ressources d'énergie limitées.
Les études entreprises dans cette thèse sont susceptibles d'avoir diverses retombées à court et moyen termes dans des applications telles que la navigation pédestre et l'aide aux malvoyants ou aux personnes âgées. Ce travail pourrait être également étendu vers des applications en robotique aérienne ou marine pour des problématiques de commande et de stabilisation.

Ce manuscrit de thèse, composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

- Le **chapitre 1** introduit la notion de l'attitude d'un corps rigide et témoigne de l'importance de cette information dans plusieurs domaines d'application. Nous décrivons ensuite les principales formes de représentation de l'attitude, en particulier la matrice de rotation, les angles d'Euler et le quaternion. Dans la suite, nous adopterons le quaternion comme forme de représentation. Nous présentons par la suite les différents capteurs qui seront utilisés dans les approches d'estimation et nous donnons le modèle de mesure de chacun des capteurs. Le système de mesure ainsi considéré est formé par un gyromètre triaxial, un accéléromètre triaxial et un magnétomètre triaxial. Enfin, nous faisons un tour d'horizon des différents estimateurs de l'attitude développés dans la littérature afin d'analyser l'existant et de bien positionner nos contributions.
- Le **chapitre 2** est consacré à nos contributions majeures autour de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré en utilisant des données inertielles et magnétiques. Nous développons dans ce cadre deux approches principales. Dans la première, nous proposons un filtre de Kalman adaptatif qui permet de compenser l'effet des accélérations linéaires du corps, principale source d'erreur, afin d'améliorer la qualité d'estimation. Une loi de détection est déterminée à partir de la norme de l'accélération, pour distinguer les phases dynamiques et statiques du mouvement. Dans la deuxième, nous proposons de reformuler le problème d'estimation en partant d'un nouveau modèle sous la forme d'un système singulier et nous développons par la suite l'estimateur convenable. Des simulations sous Matlab sont proposées à la suite de chaque approche afin d'examiner la performance de chacune à reconstruire le modèle de référence de l'attitude considérée en présence de profils d'accélération variés.
- Le **chapitre 3** traite le problème de la réduction de consommation énergétique lors de l'estimation de l'attitude par des dispositifs ayant des ressources en énergie limitées.

Comme le gyromètre consomme en général beaucoup plus que les deux autres capteurs, nous proposons de recourir à une utilisation intermittente de ce capteur. Une telle approche est particulièrement indiquée dans des applications utilisant des smartphones (par exemple) où l'autonomie en énergie est souvent limitée. L'approche proposée est appliquée dans un premier temps au filtre de Kalman adaptatif. Des tests en simulation numérique ont été réalisés pour analyser et discuter les premiers résultats obtenus.

- Le **chapitre 4** est consacré à la validation expérimentale des approches proposées dans le deuxième chapitre. Nous avons réalisé à cet effet des tests expérimentaux lors de quelques scénarios de marche. Une centrale inertielle est utilisée pour recueillir les données de vitesse angulaire, d'accélération et de champ magnétique. Le quaternion estimé est comparé à chaque fois à un quaternion de référence fourni par un système optique afin d'examiner les performances d'estimation obtenues.

Enfin, une conclusion générale résume nos principaux apports et ouvre quelques perspectives à ce travail. Finalement, une bibliographie et diverses annexes clôturent ce manuscrit.

Ce travail de thèse a donné lieu aux **publications** suivantes :

A. Revues internationales :

1. Makni, A., Fourati, H. and Kibangou, A. Y., Energy-aware Adaptive Attitude Estimation under External Acceleration. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. DOI : 10.1109/TMECH.2015.2509783.
2. Makni, A., Kibangou, A. Y., Fourati, H., Descriptor Systems Modeling and Filtering for Robust Multisensor Attitude Estimation Under External Acceleration. Automatica. (Under second review).

B. Conférences internationales :

1. Makni, A., Fourati, H. and Kibangou, A. Y., June 2014. Adaptive Kalman filter for MEMS-IMU based attitude estimation under external acceleration and parsimonious use of gyroscopes. In : Proceedings of the 13th European Control Conference (ECC). Strasbourg, France, pp. 1379–1384.
2. Makni, A., Kibangou, A. Y., Fourati, H. and Jonathan Dumon, September 2015. Descriptor Approach for Attitude Estimation. In : Proceedings of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC)-IEEE Conference on Control Applications (CCA). Sydney, Australia, pp. 614-619.

Chapitre 1

Généralités et préliminaires sur l'attitude

Sommaire

1.1 Introduction **5**
1.2 Attitude : principe et domaines d'application **6**
1.2.1 Définition de l'attitude d'un corps rigide 6
1.2.2 Domaines d'application 7
1.3 Représentations usuelles de l'attitude **12**
1.3.1 Les matrices de rotation 12
1.3.2 Les angles d'Euler et les angles de Cardan 13
1.3.3 Les quaternions 15
1.3.4 Analyse des représentations de l'attitude et choix 18
1.4 Capteurs utilisés pour la détermination de l'attitude **19**
1.4.1 Les accéléromètres 19
1.4.2 Les magnétomètres 21
1.4.3 Les gyromètres 23
1.4.4 Analyse et discussion sur les systèmes de mesure 24
1.5 Approches d'estimation de l'attitude **25**
1.5.1 Estimation de l'attitude à base de capteurs inertiels et magnétiques . . . 26
1.5.2 Estimation de l'attitude à base de fusion IMU/GPS ou IMU/Vision . . . 34
1.5.3 Estimation de l'attitude à base d'IMU dans le cas de mouvement accéléré 34
1.5.4 Analyse et discussion à propos des estimateurs de l'attitude 35
1.6 Conclusion **37**

1.1 Introduction

Depuis des décennies, l'estimation de l'attitude est une problématique cruciale dans diverses applications incluant, entre autres, l'aéronautique [34], la robotique [12], la navigation pédestre [145], [60], le bio-logging [38], l'analyse des postures du corps humain [65], etc. Ce chapitre, composé de quatre parties, introduit principalement la notion de l'attitude ainsi qu'un état de l'art sur la problématique de l'estimation de l'attitude :

- la première partie définit la notion de l'attitude d'un corps rigide en mouvement dans l'espace 3D, ainsi que les différents domaines d'application ;
- la deuxième partie détaille les différentes représentations de l'attitude, particulièrement le quaternion qui sera utilisé par la suite pour développer les approches d'estimation de l'attitude ;
- la troisième partie présente les systèmes de mesure souvent utilisés pour la détermination de l'attitude. Nous mettons l'accent sur les capteurs inertiels et magnétiques, qui seront par la suite utilisés dans les approches proposées et dont les mesures seront fournies par une centrale inertielle formée par une triade orthogonale de gyromètres, accéléromètres et magnétomètres ;
- la dernière partie établit un état de l'art des principaux estimateurs de l'attitude et positionne notre contribution par rapport à la littérature.

1.2 Attitude : principe et domaines d'application

Dans cette partie, nous définissons tout d'abord l'attitude d'un corps rigide puis illustrons l'intérêt de son estimation dans différentes applications.

1.2.1 Définition de l'attitude d'un corps rigide

L'attitude d'un corps rigide est définie par la façon dont ce dernier est orienté. En général, pour exprimer une attitude, on considère deux repères : un repère de référence fixe, noté $N(x_N, y_N, z_N)$, et un repère mobile, attaché au corps, noté $B(x_B, y_B, z_B)$ comme illustré dans la Figure 1.1. Pour exprimer convenablement l'attitude, les axes du repère B sont choisis

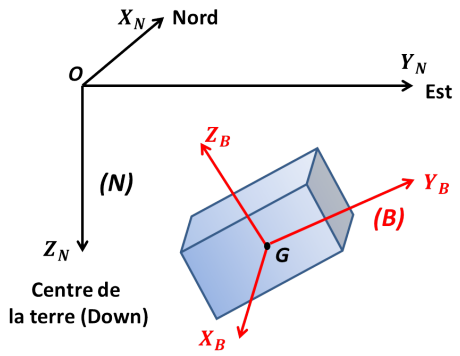


FIGURE 1.1 – Repère fixe N et repère mobile B

alignés avec les axes principaux d'inertie du corps rigide définissant sa rotation. Un repère de référence fixe, souvent utilisé, est celui qui est tangent à la surface de la terre et défini selon la convention NED (North, East, Down). Selon cette convention, les vecteurs unitaires (x_N, y_N, z_N) pointent respectivement vers les directions Nord, Est et la pesanteur (la gravité). Bien qu'il existe une variété de repères de référence fixes [131], nous avons choisi de nous

limiter à l'utilisation du repère NED comme système de référence.

Définition L'attitude (ou orientation) d'un corps rigide en mouvement dans l'espace représente la direction des axes de son repère mobile B par rapport au repère de référence fixe N, comme indiqué dans la Figure 1.2.

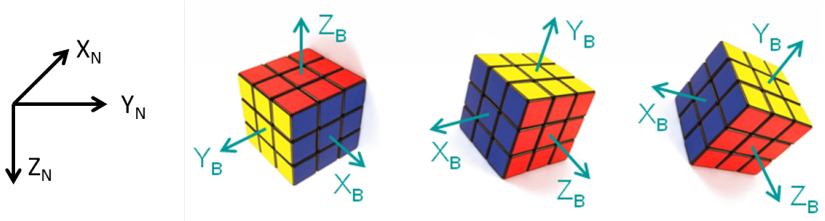


FIGURE 1.2 – Attitude d'un corps rigide

1.2.2 Domaines d'application

Connaître l'attitude d'un objet en mouvement c'est déterminer son orientation dans l'espace en ayant recours à une fusion de données issues de plusieurs systèmes de mesure (optiques, mécaniques, inertiels et magnétiques, etc.). Les applications majeures ayant besoin d'une information permanente sur l'attitude sont variées et se diversifient de plus en plus de nos jours. Nous pouvons distinguer par exemple, l'aérospatiale (satellites), la robotique (aérienne, marine, terrestre), la navigation pédestre, la capture de mouvement humain, le bio-logging, etc. Dans la suite, nous présentons un aperçu des principaux domaines d'application et l'intérêt à utiliser principalement des centrales inertielles à base de mesures inertielles et magnétiques provenant de gyromètre, accéléromètre et magnétomètre. Ce type de système, principale source de mesure pour les approches d'estimation de l'attitude dans ce travail, sera détaillé dans la suite dans ce chapitre.

1.2.2.1 La navigation

La navigation est la science et l'ensemble des techniques qui permettent de déterminer la position, la vitesse et l'attitude d'un corps en mouvement par rapport à un système de référence. Elle permet aussi de calculer toute autre information relative au déplacement du corps mobile (durée, route à suivre pour rejoindre un autre point de coordonnées connues, heure estimée d'arrivée, etc.). Le domaine de la navigation comprend quatre catégories principales : la navigation terrestre (véhicules, robots, humains), la navigation marine, la navigation aérienne (aéronautique) et la navigation dans l'espace (aérospatiale).

La navigation aérienne : En navigation aérienne, maintenir l'avion en vol et maitriser ses déplacements et trajectoires nécessite une information précise sur l'attitude. Quand il s'agit

d'un aéronef commandé par un pilote, l'attitude peut être mesurée à l'aide d'un instrument, appelé horizon artificiel, qui se trouve sur le tableau de bord de l'engin et qui permet de visualiser les angles formés par x_B et y_B avec le plan de l'horizontale : assiette et inclinaison. D'autre part, afin d'identifier la direction de l'avion, le conservateur de cap est généralement utilisé pour mesurer l'orientation de l'avion par rapport au cap magnétique. Ces instruments de mesure (l'horizon artificiel et le conservateur de cap) sont des capteurs mécaniques basés sur des gyroscopes qui sont malheureusement lourds, encombrant et très couteux. Avec l'apparition des capteurs basés sur les technologies MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems), des systèmes de mesure inertiels ont été développés pour déterminer l'attitude de l'aéronef. En effet, ces systèmes de mesure contiennent typiquement des gyromètres, des accéléromètres et des magnétomètres. La fusion de données de ces trois capteurs permet de renseigner sur l'attitude de l'avion ainsi que sa direction par rapport au nord magnétique.
Actuellement, les drones (ou véhicules aériens autonomes) sont une application en pleine expansion dans le domaine de la navigation aérienne. Ils s'agit d'aéronefs sans pilote humain à bord (voir Figure 1.3). L'essor des drones est la preuve de leur importance que ce soit dans le domaine militaire ou encore le domaine civil pour la détection de feux dans les forêts, l'inspection des infrastructures particulières (lignes à haute tension par exemple), la surveillance du trafic routier, la prise de mesures atmosphériques, etc. Ces véhicules peuvent être soit de grande taille ou de taille relativement petite en fonction des applications auxquelles ils sont destinés. De nos jours, ces engins transmettent l'information en temps réel ou quasi-réel. Ils

FIGURE 1.3 – Exemples de drones aériens

sont capables de voler à une altitude élevée et peuvent également évoluer à quelques dizaines de centimètres du sol. Équipé d'une camera, un drone d'aujourd'hui peut aussi bien être utilisé par les particuliers qui s'en servent comme un "jouet", que par des professionnels qui sont à la recherche d'images aériennes inédites. Le contrôle de tous ces véhicules volants repose sur la connaissance d'informations fiables concernant son environnement et les conditions de vol. Ainsi, pour la mise en œuvre d'une stratégie de commande, l'orientation, la vitesse et la position du drone sont des états qui s'avèrent nécessaires [103], [106]. La vitesse linéaire et la position peuvent être obtenues en utilisant un système de positionnement global (GPS), par exemple, alors que la vitesse angulaire peut être obtenue en utilisant un gyromètre attaché au corps. En ce qui concerne l'orientation, il n'y a pas de capteur qui la mesure directement. Elle est généralement obtenue en utilisant des algorithmes d'estimation de l'attitude via une fusion de données inertielles et magnétiques [22], [69], [128].

La navigation aérospatiale : L'estimation de l'attitude est nécessaire pour le tracking et la communication des satellites [55]. En effet, connaître l'attitude d'un satellite permet de comprendre son régime d'accessibilité et de prendre conscience qu'il ne s'agit pas d'un simple récepteur mais d'une machine demandant un contrôle constant depuis le sol pour maintenir sa mission [80], [139], [121]. La terre possède un satellite naturel, la lune, et plusieurs autres satellites artificiels (voir Figure 1.4), conçus et mis en orbite autour de la terre. Aujourd'hui, il y a environ 2500 satellites autour de la terre avec des performances élevées et des objectifs diversifiés. On distingue deux catégories de satellites :

- les satellites d'application, sont mis en œuvre pour prendre en charge les télécommunications, la télédétection, la localisation et la navigation (GPS et Galiléo par exemple) ou encore les satellites militaires ;
- les satellites scientifiques dont les missions peuvent aller de l'étude de l'espace lointain grâce à des télescopes spatiaux jusqu'à la cartographie, la météorologie, l'océanographie, etc.

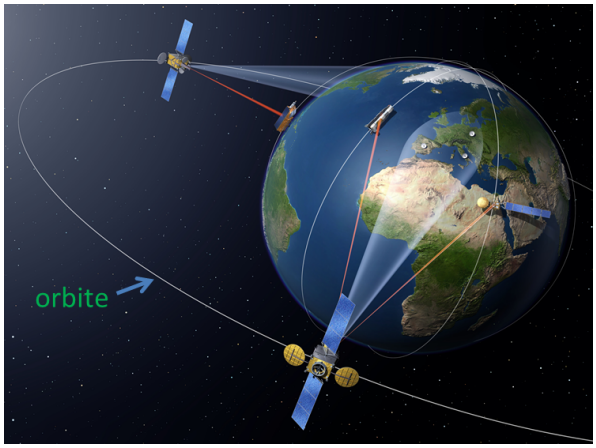


FIGURE 1.4 – Exemple de satellite artificiel

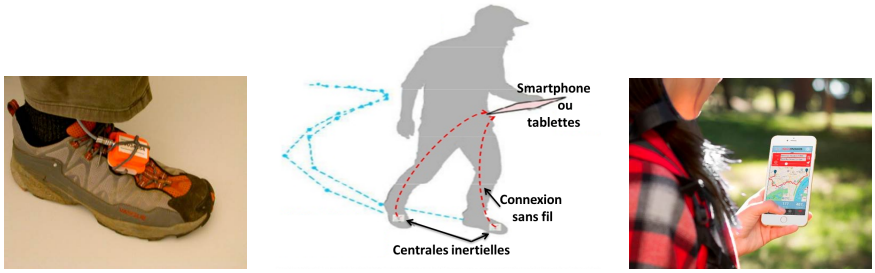
La stabilisation d'un satellite, c'est-à-dire le contrôle de son attitude, est nécessaire pour sa mission. En effet, un satellite laissé à l'abandon sans correction de l'attitude cesserait de pointer correctement ses antennes vers la terre au bout de quelques révolutions d'orbite suite aux facteurs perturbateurs (multitude de forces telles que la freinée par l'atmosphère, l'irrégularité du champ magnétique terrestre, le phénomène de précession de l'orbite). D'autre part, les panneaux solaires, source d'énergie, doivent rester bien éclairées pour assurer une longue durée de vie du satellite. Une stabilisation du satellite consiste alors à satisfaire ces deux contraintes pour qu'il maintienne sa mission. Typiquement, pour déterminer l'attitude d'un satellite, on utilise des capteurs optiques, solaires et aussi inertiels.

La navigation pédestre : La navigation piétonne (ou pédestre) est la discipline qui s'intéresse à calculer la position et la direction en continu de la personne en mouvement. La précision d'un tel calcul est souvent nécessaire surtout lorsqu'il s'agit de personnes malvoyantes ou handicapées se déplaçant dans des environnements clos ou ouverts. Le développement d'un système de navigation à l'estime pédestre (PDR, Pedestrian Dead Reckoning) à partir des données four-

nies par des capteurs inertiels et/ou des systèmes de positionnement global (GNSS [1]), est l'un des challenges actuels [110], [3]. Souvent, la façon la plus adéquate est d'attacher une centrale inertielle au pied de la personne (voir Figures 1.5a et 1.5b). De nos jours, avec l'apparition de la nouvelle génération d'appareils mobiles, cette centrale est intégrée dans un smartphone ou une tablette (voir Figure 1.5c). Ce système de mesure utilisant des algorithmes spécifiques de localisation reste fonctionnel en intérieur et extérieur, contrairement aux systèmes à base de GNSS qui ne sont disponibles qu'à l'extérieur [3], [93]. En effet, le calcul de la position est effectué souvent via deux méthodes différentes :

- une méthode basée sur le calcul de la longueur du pas et l'angle de cap (direction par rapport au nord magnétique).
- une méthode basée sur la double intégration de l'accélération linéaire.

Ainsi, il est clair que le calcul de l'attitude joue un rôle important dans la détermination de la position de la personne. A l'heure actuelle, différentes solutions ont été proposées pour



(a) (b) (c)

FIGURE 1.5 – Exemples de systèmes de navigation pédestre

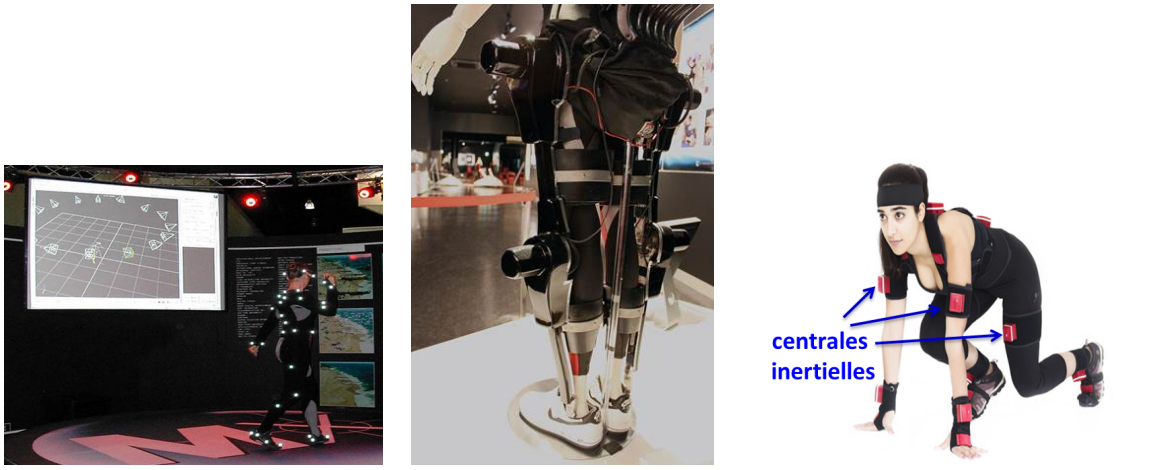
le problème de navigation afin de reconstruire la position et la direction de la personne en mouvement que se soit en milieu extérieur ou intérieur. Cependant, il existe encore des problèmes liés aux capteurs souvent utilisés, notamment les distorsions magnétiques qui affectent la qualité de l'estimation du cap surtout à l'intérieur des bâtiments [110].

1.2.2.2 La capture de mouvement humain

Comprendre et simuler le mouvement humain intéressent un grand nombre de disciplines parmi lesquelles on peut citer l'animation par ordinateur, la biomécanique, les neurosciences, le sport et la médecine.
La capture de mouvement consiste en l'enregistrement des mouvements afin de les analyser et caractériser des postures de référence pour des fins de rééducation, prévention de chute, amélioration de geste sportif, etc. Des mesures issues d'une ou plusieurs technologies sont souvent associées à un modèle biomécanique pour estimer les variations angulaires spécifiques à des membres humains décrivant le mouvement.
De nos jours, différents systèmes de capture de mouvement existent sur le marché selon leurs

1. Global Navigation Satellite Signals. Exemples : GPS, GLONASS, EGNOS, GALILEO

technologies. On distingue trois grands types de technologies : optiques, mécaniques et inertielles. Les systèmes optiques sont basés sur des récepteurs extérieurs (caméras) qui ne sont pas attachés au corps humain et des marqueurs passifs réfléchissants pour collecter les informations sur l'attitude et la position. Les systèmes les plus répandus sont les systèmes Vicon (voir Figure. 1.6a) et la caméra Kinect (utilisée souvent avec la Xbox pour détecter le mouvement des joueurs). Les systèmes de capture mécaniques fonctionnent grâce à un squelette externe construit autour de l'élément à capter du corps humain, et dont chaque articulation est couplée à un codeur angulaire (voir Figure. 1.6b). La valeur de rotation du codeur est enregistrée par un calculateur. En connaissant la position relative de chaque codeur, un logiciel est capable de reconstituer le mouvement complexe d'un squelette contenant en général plusieurs articulations. Ces systèmes permettent de calculer et enregistrer le mouvement humain avec une grande précision mais ils sont souvent chers et restreints au niveau de l'espace de mesure (pour les systèmes optiques) et limités par des contraintes mécaniques (pour les systèmes mécaniques). La capture de mouvement par centrales inertielles permet de calculer l'attitude de



(a) Système optique (Vicon) (b) Système mécanique (c) Modules de capteurs inertiels

FIGURE 1.6 – Exemples de capture de mouvement humain

quelques membres du corps humain, voire même la posture de tout le corps en temps réel tout en évitant les contraintes imposées par les autres technologies. En effet, légers et portables, câblés ou sans-fil, ces capteurs continuent à fonctionner même cachés par d'autres acteurs, habits ou accessoires (voir Figure. 1.6c).
La technique de capture consiste à considérer le corps humain comme une structure articulée. Les modules de mesure sont alors positionnés sur chaque segment du corps. Les mesures fournies par chaque module sont fusionnées via un algorithme spécifique pour calculer l'attitude de chaque segment puis obtenir par la suite la posture de tout le corps. Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés au problème d'estimation de l'attitude (et posture) du corps humain en mouvement en utilisant des mesures inertielles. Nous pouvons citer par exemple, [112], [130], [6], [126] et [114].

1.2.2.3 Le bio-logging

Le bio-logging est le domaine qui s'intéresse à l'étude du comportement de l'animal et de son écophysiologie (localisation et monitoring de ses activités) en utilisant des micro-systèmes électroniques appelés bio-loggers. Ces dernières années, un grand intérêt a été porté à l'estimation de l'attitude en bio-logging à l'aide de mesures inertielles et magnétiques [40], [99] où l'orientation sert au calcul des accélérations corporelles de l'animal. Cette information est souvent nécessaire aux biologistes pour évaluer les dépenses énergétiques de l'animal au cours de ses mouvements [41]. Les approches d'estimation de l'attitude en bio-logging ont été appliquées sur les animaux marins (par exemple les manchots ou les éléphants de mer) comme sur d'autres espèces animales telles que les blaireaux, les chats et les chiens où le bio-logger s'attache au cou ou sur le dos. Toutes ces techniques se basent sur la fusion de mesures issues de gyromètres, accéléromètres et magnétomètres triaxiaux.

1.3 Représentations usuelles de l'attitude

Pour représenter l'orientation du repère mobile B par rapport au repère fixe N, c'est à dire l'attitude du corps, différentes formes de représentation ont été adoptées dans la littérature [119], [33], [102] : les matrices de rotation, les angles d'Euler et de Cardan, les quaternions et les paramètres de Rodrigues. Nous nous limitons ci-dessous à la définition ainsi que les propriétés de chacune des trois premières représentations.

1.3.1 Les matrices de rotation

En géométrie, d'après le théorème de rotation d'Euler, chaque changement de l'orientation entre deux systèmes de coordonnées B et N, peut être produit par une simple rotation de B vers N. En conséquence, cette rotation peut être identifiée par une matrice, appelée matrice de rotation, qui permet de transformer les coordonnées d'un vecteur exprimé dans un système de coordonnées à un autre. Cette matrice est aussi appelée matrice de passage, matrice de cosinus directeurs (DCM) ou encore matrice d'attitude.

Propriétés des matrices de rotation : Notons par b et r, les coordonnées d'un même vecteur exprimées dans B et N, respectivement. Le vecteur b peut être écrit en terme du vecteur r en utilisant la matrice de rotation, notée R. Ainsi, b est obtenu via l'équation :

$$b = Rr. \tag{1.1}$$

Comme nous considérons que les repères B et N sont des bases orthonormées, alors la matrice de rotation R qui permet de transformer un vecteur de N à B, appartient au groupe spécial orthogonal *SO(3)*, soit : $RR^T = I_3$ et $detR = 1$.
Une étude détaillée sur les propriétés des matrices orthogonales a été proposée dans [94].

Equation dynamique de rotation : En tournant autour du repère N, la vitesse angulaire du repère mobile B n'est pas nulle. En conséquence, la matrice de rotation varie au cours du temps. Soient $R \in SO(3)$ la matrice de rotation décrivant l'orientation du corps rigide et $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ la vitesse angulaire de rotation de B par rapport à N (exprimée dans B). L'équation dynamique de rotation du corps rigide lié à B est alors donnée par :

$$\dot{R} = -[\omega^\times]R, \tag{1.2}$$

où $[\omega^\times]$ désigne le tenseur antisymétrique associé au vecteur vitesse angulaire ω. En général, le tenseur d'un vecteur $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ est defini par :

$$[x^\times] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

1.3.2 Les angles d'Euler et les angles de Cardan

L'utilisation des angles d'Euler est une manière simple et intuitive permettant de représenter l'attitude d'un corps rigide dans l'espace 3D. Dans le cas général, on montre que l'orientation, correspondant au passage du repère N au repère B lié au corps, peut être décrite à l'aide d'une succession de trois rotations élémentaires R1, R2 et R3 autour des trois axes du repère. Shuster dans [119] montre qu'il existe 12 combinaisons de rotations utilisées et pour chaque combinaison, l'ordre des angles varient. Soient les deux groupes de combinaisons possibles :

- les suites symétriques (**ZXZ**, XZX, XYX, ZYZ, YXY, YZY),
- les suites antisymétriques (ZXY, **ZYX**, XYZ, XZY, YXZ, YZX).

Les suites de rotations (ZXZ) et (ZYX) sont les suites les plus utilisées. Dans ce qui suit, nous les décrivons brièvement.

- Rotations ZXZ : Pour cette séquence, les angles de rotation sont connus comme les angles d'Euler classiques. Ils sont notés par (α, β, γ) et appelés Précession, Nutation et Rotation propre. Ainsi, la transformation du repère N vers le repère B est caractérisée par la succession des trois rotations R1, R2, R3, comme suit :
  R1 : rotation d'un angle $\alpha \in [-\pi, \pi]$, autour de l'axe z_N.
  R2 : rotation d'un angle $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, autour du 2ème axe du nouveau repère après avoir effectué la rotation R1.
  R3 : rotation d'un angle $\gamma \in [-\pi, \pi]$, autour du 3ème axe du nouveau repère après avoir effectué R1 et R2.
- Rotations ZYX : Les angles associés à cette suite de rotation, notés par (ϕ, θ, ψ), sont souvent connus comme les angles de Cardan et appelés aussi angles de Tait–Bryan ou angles nautiques [33]. Selon les conventions et les auteurs, ces angles peuvent être aussi appelés les angles d'Euler. Ils sont utilisés dans les domaines de l'aéronautique et la robotique, avec ϕ est le roulis, θ est le tangage et ψ est le lacet. Les rotations qui caractérisent le passage du repère N vers le repère B sont définies par (voir Figure 1.7) :
  R1 : rotation d'un angle $\psi \in [-\pi, \pi]$, appelé lacet, autour de l'axe z_N. Cette rotation fait passer le repère $N(x_N, y_N, z_N)$ à $U(x', y', z' = z_N)$.

R2 : rotation d'un angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, appelé tangage, autour de l'axe y' (2ème axe du repère U). Ici on passe du repère $U(x', y', z_N)$ à $V(x'', y" = y', z'')$.

R3 : rotation d'un angle $\phi \in [-\pi, \pi]$, appelé roulis, autour de l'axe x''. Ici, on tourne de $V(x'', y', z'')$ à $B(x_B = x'', y_B, z_B)$ lié au corps.

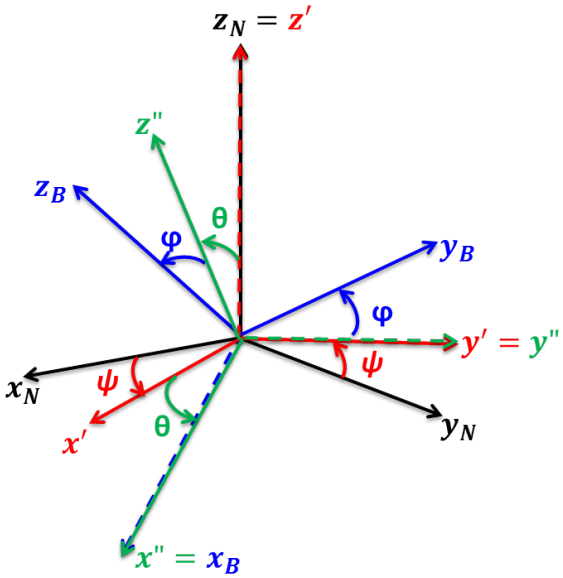


FIGURE 1.7 – Rotations successives des angles de Cardan

Pour simplifier la notation, nous admettons dans ce manuscrit que le vecteur des angles d'Euler est défini par les angles de Cardan. La matrice de rotation R, définie dans le paragraphe 1.3.1, peut être déduite à partir du produit des 3 matrices de rotation correspondant aux 3 rotations autour des 3 axes. Ainsi, R est donnée par [80]:

$$\begin{aligned} R &= R3(\phi)R2(\theta)R1(\psi) \qquad (1.4) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - s\psi c\phi & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi \\ s\psi s\theta + c\psi c\phi s\theta & s\theta s\psi c\phi - c\psi s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où $c = cos(.)$ et $s = sin(.)$.

Remarque 1.1
La matrice de rotation qui décrit le passage de B vers N pour la séquence de rotation ZYX est déterminée par R^T.

Equation dynamique de rotation : Soit $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ la vitesse angulaire de rotation de B par rapport à N. L'équation dynamique de rotation du corps rigide ayant la

vitesse angulaire ω peut s'exprimer en fonction des angles d'Euler [80] comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & tan\theta s\phi & tan\theta c\psi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi(c\theta)^{-1} & c\phi(c\theta)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Remarque 1.2
Le problème de cette représentation est l'existence de singularités : dans certains cas, une même attitude dans l'espace peut être obtenue par une infinité de composition de rotations. Si l'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$, le repère de la troisième rotation est identique à celui de la première rotation. On est alors en présence de ce qui est appelé dans la littérature le Gimbal lock [33].

1.3.3 Les quaternions

D'après le théorème d'Euler, toute rotation dans l'espace peut être définie par une simple rotation d'un angle θ autour d'un axe $\vec{u}$, appelé axe d'Euler [57], [53] (voir Figure 1.8) . Ainsi, la combinaison d'un scalaire et d'un vecteur peut être la base pour représenter l'attitude. Il existe

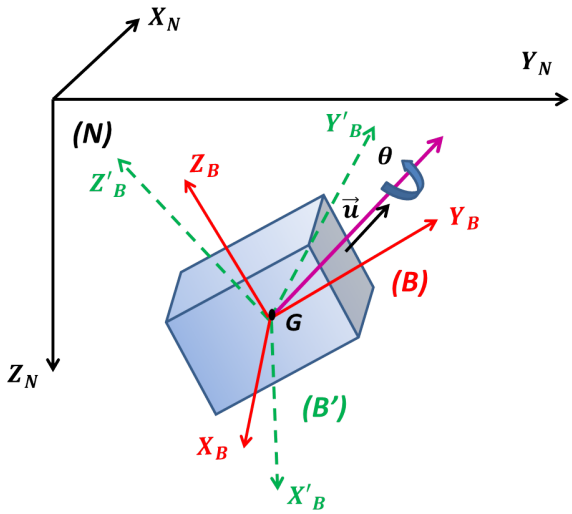


FIGURE 1.8 – Rotation à l'aide d'un quaternion

plusieurs formes mathématiques à 4 dimensions pour représenter l'attitude d'un corps rigide telles que les paramètres d'Euler, les paramètres de Rodrigues et les paramètres de Cayley-Klein. Le lecteur peut se rapporter à [119] où on peut trouver une description succincte de ces représentations. La forme la plus utilisée dans la littérature pour représenter l'attitude est le quaternion.
Ainsi, un quaternion peut être décrit par une rotation d'un angle θ autour d'un axe unitaire $\vec{u}$ [57]:

$$q = \begin{bmatrix} c\frac{\theta}{2} \\ s\frac{\theta}{2}.\vec{u} \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

avec $\|\vec{u}\| = 1$, $c = cos(\cdot)$ et $s = sin(\cdot)$.
Un quaternion unitaire peut être représenté autrement par $q = [q_0 \quad q_v^T]^T$, avec $q_0 \in \mathbb{R}$ et

$q_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ représentent respectivement sa partie scalaire (partie réelle) et sa partie vectorielle (partie imaginaire). Ainsi, l'espace vectoriel des quaternions unitaires est défini par :

$$\mathbb{Q} = \{q = [q_0 \quad q_v^T]^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad | \quad q_0^2 + q_v^T q_v = 1\}. \tag{1.7}$$

Remarque 1.3
Si l'angle de rotation θ est nul, c'est à dire aucune rotation n'a été effectuée, alors le quaternion identité s'exprime par :

$$q_{id} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \tag{1.8}$$

Remarque 1.4
Le quaternion conjugué est donné par :

$$\bar{q} = [q_0 \quad -q_v^T]^T. \tag{1.9}$$

Le produit de deux quaternions unitaires $q_a = [q_{a0} \quad q_{a,v}^T]^T$ et $q_b = [q_{b0} \quad q_{b,v}^T]^T$ est donné par :

$$q_a \otimes q_b = \begin{bmatrix} q_{a0} & -q_{a,v}^T \\ q_{a,v} & q_{a0} I_3 + [q_{a,v}^\times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{b0} \\ q_{b,v} \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

où I_3 est la matrice identité et $[q_{a,v}^\times]$ est le tenseur antisymétrique associé au vecteur $q_{a,v}$ défini par :

$$[q_{a,v}^\times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_{a3} & q_{a2} \\ q_{a3} & 0 & -q_{a1} \\ -q_{a2} & q_{a1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Remarque 1.5
Le produit de deux quaternions n'est pas commutatif.

Remarque 1.6
Puisque le quaternion est unitaire, alors le quaternion inverse $q^{-1} = \bar{q}$.

Propriété 1.1
Soit un quaternion $q = [q_0 \quad q_v^T]^T \in \mathbb{R}^4$ et soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$. Si on définit les matrices $\Xi(q)$ et $\Omega(x)$ par :

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I_3 + [q_v^\times] \end{bmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x^T \\ x & -[x^\times] \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

alors on a l'identité suivante :

$$\Omega(x) q = \Xi(q) x. \tag{1.13}$$

Preuve. La preuve de cette propriété est triviale qui relève de simples multiplications matricielles. ■

Une rotation d'un vecteur dans l'espace peut être réalisée à l'aide de multiplication de quaternions [27]. Soient $b_q = [0 \quad b^T]^T$ et $r_q = [0 \quad r^T]^T$ les quaternions associés aux cordonnées

b et r d'un vecteur x, exprimés dans B et N, respectivement. Ainsi, la rotation exprimant le changement des coordonnées de N vers B peut être exprimée en terme de quaternion par [27]:

$$b_q = q^{-1} \otimes r_q \otimes q. \tag{1.14}$$

La rotation exprimant le changement des coordonnées de B vers N peut être exprimée en terme de quaternion par :

$$r_q = q \otimes b_q \otimes q^{-1}. \tag{1.15}$$

La matrice de rotation R peut être définie en terme de quaternion en utilisant la formule de rotation de Rodrigues :

$$\begin{aligned} R = R(q) &= (q_0^2 - q_v^T q_v) I_3 + 2(q_v q_v^T - q_0 [q_v^\times]) && (1.16) \\ &= \begin{bmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{bmatrix}. && (1.17) \end{aligned}$$

La relation entre les deux vecteurs b et r dans (1.1) peut être définie en utilisant la matrice de rotation par :

$$b = R(q) r. \tag{1.18}$$

Remarque 1.7
Physiquement, une même orientation peut être représentée à l'aide de q et $-q$, correspondant respectivement à des rotations d'angles θ et $2\pi - \theta$ autour des axes $\vec{u}$ et $-\vec{u}$, respectivement. Par conséquent, à partir de (1.16) et (1.17), $R(q) = R(-q)$.

Equation dynamique de rotation : L'équation énoncée dans (1.2) peut être exprimée à l'aide du quaternion unitaire q par [57] :

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \bar{\omega}, \tag{1.19}$$

où $\bar{\omega} = [0 \quad \omega^T]^T$ étant le quaternion associé à la vitesse angulaire ω exprimée dans le repère B. Cette équation peut être réécrite comme suit en utilisant (1.13) :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I_3 + [q_v^\times] \end{bmatrix} \omega && (1.20) \\ &= \frac{1}{2} \Xi(q) \omega = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q. && (1.21) \end{aligned}$$

où

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I_3 + [q_v^\times] \end{bmatrix}, \tag{1.22}$$

et

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -[\omega^\times] \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

1.3.4 Analyse des représentations de l'attitude et choix

Nous avons présenté précédemment trois formes principales pour décrire l'attitude d'un corps rigide. Le Tableau 1.1 [39] résume leurs propriétés :

Formes de représentation	Notations	Caractéristiques
Matrice de rotation	R	• (+) R ne contient pas de fonctions trigonométriques. • (+) Les rotations composites sont directement obtenues à partir d'une multiplication matricielle standard. • (+) L'équation dynamique de rotation (1.2) associée à la matrice de rotation est linéaire. • (+) Absence de singularité géométrique. • (−) Neuf paramètres à estimer. • (−) Six paramètres redondants.
Angles d'Euler	ϕ, θ, ψ	• (+) Trois paramètres à estimer. • (+) Interprétation physique intuitive des rotations dans l'espace. • (+) Absence de paramètres redondants. • (−) Présence de singularité géométrique. • (−) Les rotations composites sont difficiles à exprimer en fonction des angles d'Euler. • (−) Non linéarité de l'équation dynamique de rotation (1.5) associée. • (−) Présence de fonctions trigonométriques. • (−) Singularité de l'équation dynamique de rotation correspondante lorsque le tangage atteint $\theta = \frac{\pi}{2}$ (les axes du roulis et du lacet sont portés par la même direction). Ce problème est connu sous le nom Gimbal lock et engendre la perte d'un angle de liberté.
Quaternions	q	• (+) Quatre paramètres à estimer. • (+) Pas de fonctions trigonométriques. • (+) Les rotations composites sont directement obtenues à partir d'une multiplication de quaternion. • (+) Linéarité de l'équation dynamique de rotation (1.21) associée à un quaternion. • (+) Absence de singularité géométrique. • (+) Un seul paramètre redondant. • (−) (q) et $(-q)$ représentent la même attitude. • (−) Interprétation physique peu intuitive des rotations dans l'espace.

Table 1.1 – Synthèse des caractéristiques des représentations de l'attitude [39]

D'après ce tableau, nous pouvons dire que le quaternion préserve le meilleur compromis puisqu'il permet de calculer l'attitude en utilisant une équation dynamique de rotation linéaire simple, élimine le problème de singularité (Gimbal lock), et réduit le coût et la complexité de calcul. En même temps, il faut bien rappeler que le quaternion unitaire reste un élément abstrait pour décrire physiquement une rotation, représente la même rotation avec q et $-q$ et nécessite toujours une normalisation (souvent non préservée au sein des algorithmes d'estimation de l'attitude). Pour remédier à ces contraintes, des formules simples de passage entre quaternion et angles d'Euler, par exemple, ont été proposées [102] pour mieux exprimer l'attitude estimée. Le quaternion estimé peut être simplement normalisé à la fin de chaque pas d'estimation [28], [11]. Ce travail de thèse se focalise essentiellement sur le développement d'approches d'estimation de l'attitude, pouvant être embarquées facilement sur des smartphones (en termes de coût de calcul et complexité) pour des applications en navigation pédestre et analyse de mouvement. Ainsi, l'analyse précédemment présentée nous a permis de choisir le quaternion pour développer les algorithmes d'estimation de l'attitude.

1.4 Capteurs utilisés pour la détermination de l'attitude

Les avancées technologiques durant ces dernières années ont permis de développer plusieurs systèmes de mesure pour la détermination de l'attitude (optique, Ultra Large Bande, GPS, inertiels et magnétiques, etc. [116]). Chaque système possède ses spécificités d'application ainsi que des limitations d'utilisation. Pour des applications utilisant des smartphones en analyse de mouvement et navigation pédestre, le système de mesure le plus commun et le plus adapté à ce type d'environnement est celui basé sur des capteurs inertiels et magnétiques. Souvent, ce système s'appelle centrale inertielle ou unité de mesure inertielle (Inertial Measurement Unit (IMU)) et contient typiquement un gyromètre pour mesurer la vitesse angulaire, un accéléromètre pour mesurer la force spécifique liée à l'accélération et un magnétomètre qui est souvent rajouté pour mesurer l'intensité du champ magnétique terrestre. Plusieurs paramètres caractérisent le comportement de ces capteurs tels que la sensibilité, la linéarité, l'étendu de mesure, la bande de fréquence, les dimensions, etc. Ce type de système a été bien miniaturisé ces dernières années, surtout avec l'utilisation de la technologie MEMS et a été intégré récemment dans la plupart des smartphones. Une étude comparative des capteurs IMU a été proposée dans [23]. Dans la suite, nous décrivons brièvement les technologies, les propriétés ainsi que les modèles de mesure des trois capteurs mentionnés précédemment. Les approches d'estimation de l'attitude proposées dans cette thèse seront élaborées sur la base d'une fusion de ces trois types de mesure.

1.4.1 Les accéléromètres

Comme son nom l'indique, un accéléromètre est un capteur qui permet de mesurer l'accélération d'un corps auquel il est attaché. Un accéléromètre peut être composé d'un, deux ou trois axes suivant lesquels l'accélération est mesurée. Le principe d'un accéléromètre est basé sur la loi fondamentale de la dynamique $F = m_e a$ (F : force (N), m_e : masse (kg),

a : accélération (m/s^2)). En effet, un accéléromètre est équivalent à une masse M (m_e) attachée à un ressort de raideur k qui est lui-même attaché à un repère fixe (voir Figure 1.9). Une force s'appliquant sur le boîtier de l'accéléromètre engendre le mouvement de la masse M. Par conséquent, une force de rappel s'applique aussi sur la masse pour la maintenir en place. En mesurant simplement le déplacement x de la masse M par rapport à son support, on peut déduire l'accélération subie par ce dernier à travers l'équation : $F = m_e a = -kx$. D'où $a = -\frac{kx}{m_e}$. Selon la technologie et le procédé de fabrication, les accéléromètres diffèrent et changent de caractéristiques. Il existe donc plusieurs techniques pour mesurer le déplacement du corps d'épreuve ainsi que pour transformer l'action de l'accélération sur le capteur en signal électrique. Nous pouvons distinguer les accéléromètres à détection piézoélectrique, piézorésistive, capacitive, etc. [14], [59].

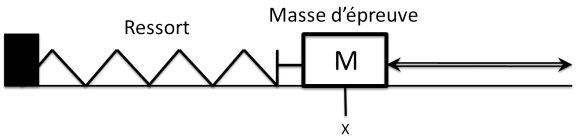


FIGURE 1.9 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre

Modèle de mesure d'un accéléromètre : La mesure d'un accéléromètre triaxial attaché à un corps rigide et dont les axes coïncident avec ceux d'inertie du corps, peut être modélisée par [14]:

$$y_a = R(q)(a_p + G) + \delta_a, \tag{1.24}$$

avec $a_p = [a_{p,x} \quad a_{p,y} \quad a_{p,z}]^T$ l'accélération linéaire du corps, $G = [0 \quad 0 \quad g]^T$ le vecteur de gravité, exprimés dans le repère fixe N. g est la gravité ($g = 9,81 m/s^2$) et δ_a est le vecteur de bruit supposé blanc, Gaussien et dont les composantes ne sont pas corrélées. La matrice $R(q)$ est la matrice de rotation qui est exprimée ici en fonction du quaternion (cette matrice peut être exprimée également en fonction des angles d'Euler).

Remarque 1.8
Dans plusieurs cas où le mouvement du corps n'est pas accéléré, l'accélération linéaire peut être négligée devant le vecteur de gravité ($||a_p|| \ll ||G||$). Ainsi, la mesure du capteur est supposée équivalente à la norme du vecteur de gravité :

$$y_a = R(q)G + \delta_a. \tag{1.25}$$

L'équation de mesure dans (1.25) a été utilisée dans plusieurs approches d'estimation de l'attitude (voir la section suivante). D'autre part, dans le cas où le corps est en mouvement accéléré, l'accélération linéaire ne peut pas être négligée devant le champ de gravité. Du fait que cette accélération est inconnue, cela induit souvent des erreurs sur le calcul de l'attitude. Quelques travaux de la littérature ont traité cette problématique afin de compenser l'effet de cette accélération. Cette problématique sera abordée dans la suite de ce travail.

Remarque 1.9 ([95])
La mesure d'un accéléromètre est définie en m/s^2. Cependant, on normalise souvent le vecteur

de gravité G, soit :

$$G = [0 \quad 0 \quad g]^T / ||G|| = [0 \quad 0 \quad 1]^T. \tag{1.26}$$

Ainsi, les mesures fournies par l'accéléromètre seront données en g.

1.4.2 Les magnétomètres

Un magnétomètre est un capteur qui sert à mesurer la direction et l'intensité du champ magnétique, en particulier, le champ magnétique terrestre. Il est largement utilisé dans le cadre d'études géologiques et de détection d'anomalies magnétiques. Au cours des dernières années, les magnétomètres ont été miniaturisés et intégrés en tant que boussole au sein des smartphones et GPS. En mesurant le champ magnétique terrestre, le magnétomètre détermine son orientation par rapport au nord magnétique. Ainsi, attaché à un corps en mouvement, ce capteur permet de mesurer la projection du champ magnétique terrestre dans le repère mobile B lié au corps.
Le champ magnétique terrestre peut être assimilé au champ magnétique d'un dipôle d'un aimant à barreau, comme le montre la Figure 1.10. Les pôles magnétiques se trouvent sur l'axe de rotation de la terre et se différentient par rapport aux pôles géographiques d'un angle appelé déclinaison. Cet angle varie tout au long de la surface de la terre et également dans le temps car l'axe du champ magnétique terrestre se modifie au cours du temps [42]. L'inclinaison magnétique d'un lieu quant à elle, est définie par l'angle que font les lignes du

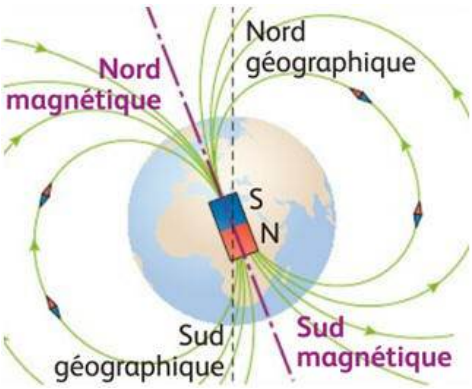
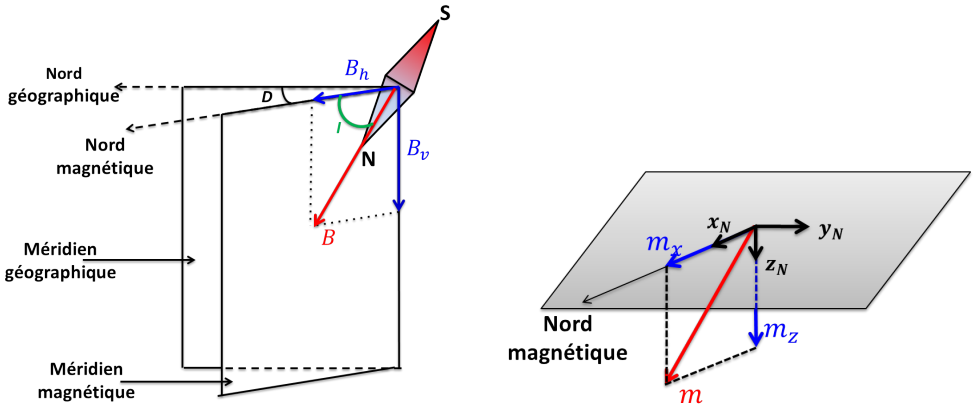


FIGURE 1.10 – Champ magnétique terrestre

champ magnétique terrestre avec l'horizontale.
Selon la position sur la terre, le champ magnétique terrestre varie en termes de direction et intensité. Afin de les déterminer, des méthodes de représentation et de modélisation de ce champ peuvent être appliquées. Le modèle magnétique mondial (WMM) est souvent le modèle le plus utilisé pour calculer le champ magnétique, notamment en navigation [98]. Il propose une expression simplifiée du champ magnétique, représenté par le vecteur B dont les composantes sont données par (voir Figure 1.11a) :

- B_h, la composante horizontale, nulle aux pôles magnétiques.
- B_v, la composante verticale, dirigée vers le centre de la terre, par convention.



(a) Représenation réelle (b) Représentation dans le repère NED

FIGURE 1.11 – Représentation du champ magnétique terrestre

La composante horizontale est très importante en pratique car, dans la plupart des appareils comportant une aiguille aimantée, celle-ci est mobile autour d'un axe vertical et astreinte à rester horizontale. Sur une telle aiguille tout se passe comme si la composante horizontale B_h agissait seule ; elle définit ce que l'on appelle souvent la direction du nord magnétique. L'inclinaison magnétique, définie ci-dessus, peut être représentée par l'angle I formé par les vecteurs B et B_h. Les pôles nord et sud magnétiques sont repérés, respectivement, par une inclinaison $I = 90°$ et $I = -90°$. Dans la suite de ce travail, nous notons le champ magnétique terrestre par m comme représenté dans la Figure 1.11b, exprimé dans le repère fixe N par :

$$m = [m_x \quad 0 \quad m_z]^T = [||m||c(I) \quad 0 \quad ||m||s(I)]^T. \tag{1.27}$$

Les valeurs de l'angle I et de l'intensité de la norme $||m||$ sont obtenues à partir du calculateur en ligne du WMM [98].
Actuellement, il existe plusieurs technologies de magnétomètres pour mesurer l'intensité du champ magnétique terrestre. On distingue alors les magnétomètres à effet Hall, magnétooptique, à bobine d'induction, etc. [44]. Une étude détaillée sur ces technologies est présentée dans [63].

Modèle de mesure d'un magnétomètre : La mesure d'un magnétomètre triaxial attaché à un corps rigide et dont les axes coïncident avec ceux d'inertie du corps, peut être modélisée par [14] :

$$y_m = R(q)m + \delta_m, \tag{1.28}$$

où m est le champ magnétique terrestre exprimé dans le repère fixe N et donné par (1.27), δ_m est un bruit considéré blanc, Gaussien et dont les composantes ne sont pas corrélées et R est la matrice de rotation exprimée dans (1.16).

1.4.3 Les gyromètres

Un gyromètre est un capteur inertiel qui mesure la vitesse angulaire du corps rigide dans le repère mobile B par rapport au repère fixe N. On distingue deux types de gyromètres selon le principe de fonctionnement : les gyromètres optiques [59] où la mesure de la vitesse angulaire est une application de l'effet Sagnac et les gyromètres mécaniques qui se basent sur l'effet Coriolis [101]. Grâce au faible coût et au miniaturisation, les gyromètres vibrants sont actuellement utilisés dans des centrales inertielles.
Ce type de gyromètre est composé de corps vibrant qui produit un signal sinusoïdal d'amplitude constante lorsque le capteur est au repos. Si le capteur est soumis à une rotation, les forces de Coriolis induisent des vibrations dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse angulaire (voir Figure 1.12). Une telle structure de corps vibrant peut posséder plusieurs modes propres de vibration et de fréquences associées [72]. On distingue deux principaux modes : le mode primaire (ou mode pilote) et le mode secondaire (ou de détection). Le mode primaire, qui est appelé aussi mode d'excitation, est maintenu autour de la résonance, par une source d'énergie (piézo-électrique par exemple), pour maximiser l'énergie cinétique du système. Sous ces conditions, un transfert d'énergie vers l'autre mode de détection, apparaît. L'amplitude de ce mode est directement proportionnelle à la vitesse de rotation puisque la force de Coriolis qui excite ce mode est elle-même proportionnelle à la vitesse de rotation.

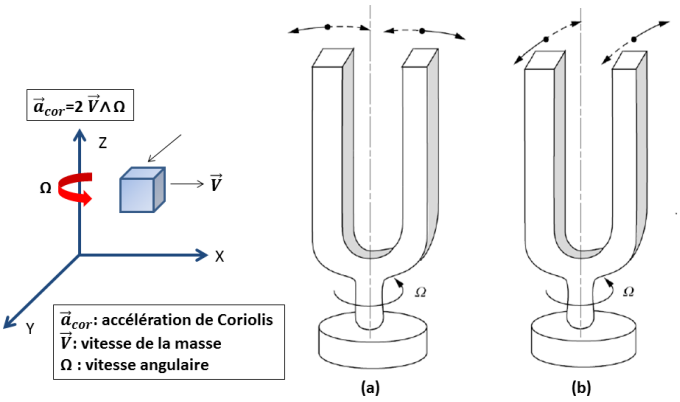


FIGURE 1.12 – Principe de fonctionnement d'un gyromètre (a) 1er mode : vibrations naturelles : branches en opposition de phase (b) $2^{\text{ème}}$ mode : vibrations de flexion autour de l'axe longitudinal induites par les forces de Coriolis (mesure de la vitesse de rotation ω)

Modèle de mesure du gyromètre : La mesure d'un gyromètre triaxial attaché à un corps rigide et dont les axes coïncident avec ceux d'inertie du corps, peut être modélisée par :

$$y_g = \omega + b_g + \delta_g, \tag{1.29}$$

où $\omega \in \mathbb{R}^3$ est la vitesse réelle de rotation, $b_g \in \mathbb{R}^3$ est le biais, une fonction lentement variable dans le temps principalement due à la variation de la température et $\delta_g \in \mathbb{R}^3$ est le bruit lié au capteur, supposé blanc, Gaussien et dont les composantes ne sont pas corrélées.
Le biais peut être considéré constant dans certains cas. Son modèle est donc donné par [84]:

$$\dot{b_g} = 0. \tag{1.30}$$

1.4.4 Analyse et discussion sur les systèmes de mesure

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques propriétés communes aux trois capteurs nécessaires à l'estimation de l'attitude mentionnés précédemment, ainsi que les limitations relatives à chacun d'entre eux.
En général, le choix du capteur repose essentiellement sur l'application visée et sur d'autres paramètres que nous résumons comme suit [141] :

- **le facteur d'échelle ou la sensibilité** : correspond au rapport entre la mesure du capteur et la grandeur d'entrée, il s'exprime donc en $(V/(^\circ/s))$ pour les gyromètres, en (mV/g) pour les accéléromètres et en $(V/Gauss)$ pour les magnétomètres.
- **la densité du bruit** : s'exprime en $(^\circ/s/\sqrt{Hz})$ pour les gyromètres, en $(m/s^2/\sqrt{Hz})$ pour les accéléromètres et en $(Gauss/\sqrt{Hz})$ pour les magnétomètres.
- **la résolution** : correspond au plus petit signal d'entrée mesurable. La résolution est le produit de la densité du bruit par la racine carrée de la bande passante du capteur. Elle est exprimée par $(^\circ/s)$ pour les gyromètres, en (g) pour les accéléromètres et en $(Gauss)$ pour les magnétomètres.
- **l'étendu de mesure** : c'est le paramètre spécifiant le maximum et le minimum du signal que peut mesurer le capteur. Il est exprimé en $(^\circ/s)$ pour les gyromètres, en (g) pour les accéléromètres et en $(Gauss)$ pour le magnétomètre.
- **la gamme de température** : c'est la marge de température dans laquelle le capteur peut opérer.
- **la bande passante** : c'est le nombre de mesure par seconde. Elle est typiquement exprimée en (Hz).

A ces caractéristiques s'ajoute le biais du gyromètre et est défini par :

- **le biais** : c'est le signal de sortie du capteur en l'absence de signal d'entrée (rotation). Une variation du biais au cours du temps due à la variation de température se traduit directement par une erreur de mesure en $(^\circ/s)$.
  Souvent, dans la littérature, le terme inconnu du biais est estimé en même temps que l'attitude, ce qui rend le processus d'estimation plus coûteux en terme de calcul. En pratique, puisque ce terme peut être considéré constant au cours du temps, on peut toutefois le déterminer au début de l'expérimentation lorsque le capteur est statique, en faisant une moyenne des mesures du gyromètre sur une fenêtre bien déterminée. Par la suite, cette moyenne (image du biais) est soustraite des mesures du gyromètre au cours de l'expérimentation. Ainsi, nous ne considérons pas ce terme dans les approches développées par la suite. En revanche, nous l'enlevons lors des expérimentations.

Concernant les limitations de ces capteurs, nous les récapitulons à travers les trois points suivants à prendre en compte lors du processus d'estimation de l'attitude :

- l'accéléromètre : comme nous l'avons indiqué dans la remarque 1.8, la mesure d'un accéléromètre triaxial contient non seulement le vecteur de gravité mais aussi l'accélération linéaire du corps rigide qui est inconnue et non négligeable dans le cas de mouvement accéléré. La qualité d'estimation de l'attitude est désormais affectée à cause de ce terme inconnu. Il est donc nécessaire de compenser l'effet de cette accélération dans le processus d'estimation. Ceci sera l'objet du chapitre 2 de ce manuscrit.
- le magnétomètre : bien que les magnétomètres fonctionnent très bien dans les environnements magnétiques non perturbés (à l'extérieur par exemple), ils sont fortement influencés par les perturbations magnétiques produites par les infrastructures (matériels ferromagnétiques et électromagnétiques) quand il s'agit d'une utilisation à l'intérieur. Dans ce deuxième cas, le champ magnétique terrestre est modifié et une phase de calibration du capteur est nécessaire pour garantir la fiabilité des mesures [109], [46].
- le gyromètre : dans certaines applications d'estimation de l'attitude, où le système fonctionne avec une batterie, (les systèmes de navigation pédestre, par exemple), les gyromètres consomment beaucoup plus d'énergie par rapport aux accéléromètres et aux magnétomètres. A titre d'exemple, le gyromètre L3GD20 de STMicroelectronics consomme $6,1mA$ [124] tandis que la consommation de l'accéléromètre LIS3DH (même constructeur que le gyromètre) est de $11\mu A$ [123]. Il est donc clair que l'estimation de l'attitude en minimisant la consommation de l'énergie, est un enjeu très intéressant. A notre connaissance, cette problématique n'a pas été traitée dans la littérature. Nous traiterons ce problème au chapitre 3.

1.5 Approches d'estimation de l'attitude

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la détermination de l'attitude requiert de l'attention dans plusieurs domaines d'application. N'étant pas directement mesurable, cette information peut être reconstruite à l'aide d'algorithmes d'estimation fusionnant des mesures issues de plusieurs capteurs. Le problème de détermination de l'attitude optimale en utilisant au moins deux paires de vecteurs unitaires mesurés dans deux repères différents, a été formulé initialement par Wahba en 1965 [137].
Le problème de Wahba visait à estimer l'attitude d'un satellite en déterminant la matrice orthogonale optimale (la matrice d'attitude) qui minimise une fonction de coût à l'aide de n paires de vecteurs unitaires où $n \geq 2$. Il s'agit d'un problème des moindres carrés, défini comme suit [39] :
Soient deux ensembles de vecteurs unitaires $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ et $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ où chaque paire (r_i, b_i) correspond aux coordonnées d'un vecteur x_i par rapport aux systèmes de coordonnées N et B, respectivement. Le problème consiste à trouver la matrice de rotation $R \in SO(3)$, qui ramène le premier ensemble dans le second de façon à ce qu'ils coïncident le "mieux possible". Mathématiquement, il s'agit de trouver la matrice R qui minimise la fonction coût suivante :

$$J(R) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i ||b_i - Rr_i||^2, \tag{1.31}$$

où $\{a_i\}$ est un ensemble de poids positifs et n est le nombre total de mesures. En normalisant les poids ($\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$), (1.31) peut s'écrire de la façon suivante :

$$J(R) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^T R r_i = 1 - Tr(RM^T), \tag{1.32}$$

où $Tr(X)$ désigne la trace de la matrice X et M est définie par :

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i r_i^T. \tag{1.33}$$

A partir de (1.32), il est clair que $J(R)$ est minimisée lorsque $Tr(RM^T)$ est maximisée. Plusieurs solutions à ce problème ont été proposées par la suite. Il est bien connu que dans le cas des applications utilisant des capteurs inertiels et magnétiques pour estimer l'attitude, les deux vecteurs liés à la gravité G et au champ magnétique terrestre m sont considérés comme vecteurs de mesure puisque qu'ils sont bien connus dans le repère fixe N. Pour obtenir une meilleure estimation de l'attitude, les mesures d'accélération et de champ magnétique sont fusionnées avec des mesures de vitesse angulaire ou de vitesse linéaire issues de GPS. Nous présentons dans cette section un aperçu des principales approches proposées dans la littérature pour traiter la problématique d'estimation de l'attitude en utilisant les quaternions, les matrices de rotations, ou les angles d'Euler. Nous avons choisi de classer ces approches en trois groupes : le premier se focalise sur les méthodes utilisant des mesures issues d'accéléromètres, de magnétomètres et de gyromètres, le deuxième s'étend vers les méthodes rajoutant en plus des mesures complémentaires fournies par des GPS ou des caméras, et le troisième s'intéresse aux méthodes récentes traitant l'estimation de l'attitude en cas de mouvement accéléré en utilisant une simple centrale inertielle.

1.5.1 Estimation de l'attitude à base de capteurs inertiels et magnétiques

Pour cette classe d'estimateurs, nous distinguons les approches statiques correspondante aux solutions optimales du problème de Wahba et les approches dynamiques incluant les méthodes de filtrage ainsi que les observateurs non linéaires.

Les estimateurs optimaux : solutions du problème de Wahba

Les méthodes les plus anciennes développées pour estimer l'attitude se basent sur des algorithmes qui considèrent les mesures de deux capteurs d'attitude liés au corps rigide sans avoir besoin de définir sa dynamique de rotation. Il s'agit de résoudre le problème mathématique proposé par Wahba pour trouver la matrice de rotation (ou le quaternion) optimale, caractérisant une simple rotation, à partir d'un certain nombre de vecteurs de mesure.
En 1966, Farrel et al. [37] ont proposé les premières solutions du problème de Wahba. Leur méthode consiste en une décomposition polaire de la matrice M [37]. L'introduction de la *q-method* en 1977 [54], a fait apparaître deux classes de solution du problème des moindres

carrées de Wahba. La première classe consiste à déterminer directement la matrice de rotation optimale alors que la deuxième s'intéresse à l'estimation du quaternion optimal associé à la matrice de rotation. Vis-à-vis de leurs structures, ces deux méthodes conduisent à un coût et un temps de calcul différents.
Ainsi, on distingue les algorithmes, *SVD* (Singular Value Decomposition) [78], *FOAM* (Fast Optimal Attitude Matrix) [77], la décomposition polaire (*PD*) [8] et l'algorithme de l'approche d'énergie (EAA) [88].
L'algorithme *SVD* consiste à décomposer la matrice M, définie dans (1.33), en valeurs singulières. Comme reporté dans [78], la décomposition de la matrice M est donnée par :

$$M = USV^T, \tag{1.34}$$

avec U et V sont des matrices orthogonales et $S = diag(s_1, s_2, s_3)$ est la matrice diagonale des valeurs singulières. La matrice d'attitude est ainsi donnée par :

$$R = ULV^T, \tag{1.35}$$

où $L = diag(1, 1, det(U)det(V))$.
En 1993, Markley [77] a proposé une autre version de la méthode *SVD*, connue par *FOAM*. A partir des propriétés de la matrice M, la matrice de rotation peut être calculée par :

$$R = [(\kappa + ||M||^2)M + \lambda adjM^T - MM^TM]/\xi, \tag{1.36}$$

avec *adj* est la matrice adjointe, $||M||^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ et les coefficients κ, λ, et ξ sont les scalaires définis en fonction de s_1, s_2 et s_3 [77].
Dans [77], l'auteur propose un calcul itératif des coefficients scalaires κ, λ et ξ. En effet, λ peut être définie en résolvant l'équation récursive suivante :

$$(\lambda^2 - ||M||^2)^2 - 8\lambda det - 4||adjM||^2 = 0. \tag{1.37}$$

Ainsi, les scalaires κ et ξ peuvent être calculés à partir de la valeur calculée de λ. En comparaison avec l'algorithme *SVD*, l'avantage de l'algorithme *FOAM* est que les coefficients scalaires définis ci-dessus, peuvent être calculés d'une façon itérative sans avoir besoin de définir s_1, s_2 et s_3. Ainsi, l'algorithme *FOAM* est clairement plus rapide en terme de temps de calcul.
La deuxième famille d'estimateurs utilise le quaternion comme représentation de l'attitude. Davenport est le premier à fournir une solution du problème de Wahba en terme de quaternion unitaire. Cette solution s'appelle *q-method* [32]. L'idée est de remplacer la matrice de rotation dans l'expression de la fonction coût (1.32) par le quaternion correspondant en utilisant la relation entre une matrice de rotation et un quaternion, définie dans (1.16). Ainsi, la fonction coût (1.32) est transformée en une fonction quadratique en terme de quaternion :

$$J(q) = 1 - q^T K(M) q, \tag{1.38}$$

avec q le quaternion unitaire et $K \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matrice symétrique définie par :

$$K = \begin{bmatrix} M + M^T - (Tr(M))I_3 & \sum_{i=1}^n a_i(b_i \times r_i) \\ (\sum_{i=1}^n a_i(b_i \times r_i))^T & Tr(M) \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Il est clair que le problème de minimisation de la fonction $J(q)$ est équivalent à la maximisation de $q^T K(M)q$. Le quaternion optimal q_{opt} est donc le vecteur propre normalisé associé à la plus grande valeur propre de K. Cette valeur propre λ_{max} est obtenue en résolvant analytiquement l'égalité $Kq_{opt} = \lambda_{max} q_{opt}$. Ainsi, la fonction coût définie dans (1.38) peut être réécrite comme suit :

$$J(q) = 1 - \lambda_{max}. \tag{1.40}$$

En revanche, la solution de la *q-method* n'est pas unique dans le cas où la plus grande valeur propre de $K(M)$ a une multiplicité supérieure à 1. Ceci montre que les paires de vecteurs ne sont pas suffisantes pour avoir une solution unique au problème [80]. En plus, puisque le principe de cette méthode est de trouver les valeurs et vecteurs propres de la matrice K, cette méthode reste complexe et conduit à des temps de calcul importants.
D'autres solutions alternatives ont été proposées pour résoudre le problème de Wahba. Nous pouvons citer les deux versions de l'algorithme *ESOQ* (EStimation of Optimal Quaternion) développées dans [89], [90] et [81] et l'algorithme *QUEST* (QUaternion ESTimation), proposé par Shuster en 1981 dans [118].
QUEST reste un algorithme populaire pour calculer le quaternion optimal. Contrairement à l'algorithme de *q-method*, *QUEST* repose sur la résolution de l'équation caractéristique qui s'obtient en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton sur la matrice $S = M + M^T$, comme suit :

$$S^3 = Tr(S)S^2 - Tr(adjS)S + det(S)I_3. \tag{1.41}$$

La solution de cette équation est un vecteur optimal y_{opt}, défini par :

$$y_{opt} = X/\gamma, \tag{1.42}$$

avec

$$X = (\alpha I_3 + (\lambda_{max} - \frac{1}{2}Tr(S))S + S^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i \times r_i)), \tag{1.43}$$

et

$$\gamma = (\lambda_{max} + \frac{1}{2}Tr(S))(\lambda_{max}^2 - (\frac{1}{2}Tr(S))^2 + Tr(adjS)) - detS. \tag{1.44}$$

Ainsi, le quaternion optimal lié au vecteur y_{opt} est donné par :

$$q_{opt} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + |X|^2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ X \end{bmatrix}. \tag{1.45}$$

Comme nous pouvons le constater de (1.43) et (1.44), la solution du quaternion optimal dépend de la valeur propre maximale λ_{max} qui doit être définie. Cette valeur est obtenue en résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^4 - (a_\lambda + b_\lambda)\lambda^2 - c_\lambda \lambda + (a_\lambda b_\lambda + \frac{c_\lambda}{2}Tr(S) - d_\lambda), \tag{1.46}$$

avec

$$a_\lambda = (\frac{1}{2}Tr(S))^2 - Tr(adjS)), b_\lambda = (\frac{1}{2}Tr(S))^2 + zz^T, c_\lambda = detS + z^T Sz, d_\lambda = z^T S^2 z, \tag{1.47}$$

et $z = \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i \times r_i)$.
Pour que la valeur propre soit optimale, la fonction coût doit être très faible. Cela conduit

à approximer la valeur de λ_{max} à 1 en se basant sur (1.40). On peut toutefois appliquer la méthode de Newton-Raphson et partir d'une valeur initiale $\lambda = 1$ puis approximer la valeur propre à la première itération.
Théoriquement, *QUEST* est moins robuste que *q-method*, mais clairement plus rapide [81]. D'autres versions de l'algorithme *QUEST* ont été proposées, comme le *QUEST* [117], le *RE-QUEST* (REcursive QUEST) [9] et le *QUEST* étendu (*Extented QUEST*) [104]. Une étude détaillée de ces algorithmes a été élaborée dans [67].
Durant ces dernières années, d'autres méthodes d'estimation de l'attitude en utilisant deux vecteurs de mesure locaux connus, ont été proposées. Elkaim a proposé dans [35] un algorithme des moindres carrées itératifs où deux vecteurs de mesure (appelés encore vecteurs d'observation) issus d'un accéléromètre et d'un magnétomètre triaxiaux sont utilisés pour calculer itérativement l'erreur d'estimation en quaternion pour chaque couple de mesures. Le quaternion est mis à jour à chaque itération jusqu'à la convergence vers une valeur constante [35].
Dans [144], le calcul de l'attitude est basé sur une série de trois rotations. En effet, comme l'attitude du corps est le résultat de trois rotations successives, on calcule chacun des angles de rotation (roulis, tangage et lacet) puis on en déduit les quaternions associés et le quaternion final est égale au produit des trois. Les deux angles de roulis et tangage sont déduits à partir des mesures de l'accéléromètre, tandis que le lacet est calculé à partir du vecteur champ magnétique mesuré. Cet algorithme n'est efficace que lorsque le corps est en phase statique ou quasi-statique.
Nous avons présenté jusqu'à maintenant les méthodes d'estimation de l'attitude qui se basent sur deux vecteurs exprimés dans deux repères différents (fixe et mobile). Ces techniques sont considérées statiques du fait qu'elles ne tiennent pas compte de la dynamique du système. L'attitude est donc calculée indépendamment de la dynamique de rotation du corps rigide. On utilise typiquement le vecteur d'accélération du corps rigide et le vecteur du champ magnétique comme vecteurs de mesure. Toutefois, la qualité d'estimation de l'attitude risque de se dégrader dans certains cas. Par exemple, pour l'accéléromètre, il est très difficile de distinguer le vecteur de gravité de l'accélération linéaire quand le corps est en mouvement accéléré. De même pour le magnétomètre, sa mesure est entachée d'erreur dans le cas de distorsion magnétique. Plusieurs travaux de recherche rajoutent les gyromètres pour améliorer la qualité d'estimation. Ainsi, l'émergence de la théorie de filtrage de Kalman et celles des observateurs non linéaires a conduit à une large classe d'estimateurs d'attitude. Généralement, ces méthodes fusionnent des mesures issues de trois capteurs, typiquement, les gyromètres, les accéléromètres et les magnétomètres. En effet, les mesures de vitesse angulaire permettent de rajouter une information sur la dynamique du corps rigide à travers l'équation dynamique de rotation définie dans (1.21) si on utilise par exemple le quaternion comme représentation de l'attitude. Généralement, deux architectures possibles du processus d'estimation de l'attitude peuvent être envisagées dans le cas de l'estimation avec les trois capteurs (voir Figure 1.13). Dans la première, les mesures issues des trois capteurs sont fusionnées directement au sein de l'algorithme (voir Figure 1.13a) alors que dans la deuxième, l'algorithme de fusion utilise les mesures du gyromètre et l'attitude pré-calculée à partir des mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre via une approche statique (algorithme des moindres carrées, par exemple) (voir Figure 1.13b). Dans ce qui suit, nous faisons un tour d'horizon sur les méthodes de filtrage et les observateurs pour l'estimation de l'attitude. Signalons que notre étude s'est basée

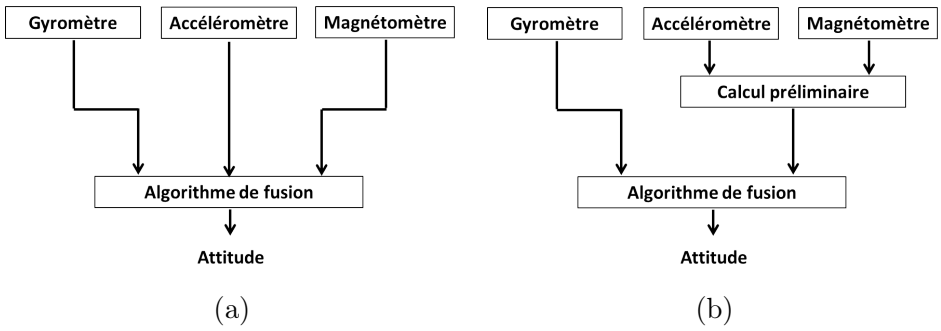


FIGURE 1.13 – Structure d'estimation de l'attitude à l'aide de capteurs inertiels et magnétiques

essentiellement sur les travaux récents développées dans ce cadre : [25], [146], [67], [80].

Filtrage de Kalman

Le filtre de Kalman est une extension des techniques des moindres carrées pour l'estimation d'état d'un système linéaire, évoluant dans le temps, à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Le filtre de Kalman a deux phases distinctes : prédiction et mise à jour. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de l'état courant. Dans la phase de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.
Plusieurs travaux basés sur la théorie de Kalman pour l'estimation de l'attitude ont été proposés dans la littérature en utilisant les représentations usuelles telles que les angles d'Euler [24], les quaternions [62] et les matrices de rotations [61]. Un modèle de processus ainsi qu'un modèle d'observation sont nécessaires pour le filtre de Kalman. Dans le cas de représentation de l'attitude par quaternion, le modèle du processus correspond à l'équation dynamique de rotation en fonction du quaternion définie dans (1.21) tandis que le modèle d'observation est formé par les équations de mesure de l'accéléromètre (1.25) et du magnétomètre (1.28). Il est clair que le problème d'estimation de l'attitude est un problème de filtrage non linéaire vu le modèle d'état qui est parfois non linéaire. Ainsi, le filtre de Kalman étendu (EKF) est parmi les premiers filtres développés dans le cadre d'estimation de l'attitude, avec ses deux versions : le filtre de Kalman étendu additif ($AEKF$) et le filtre de Kalman étendu multiplicatif ($MEKF$). Nous pouvons distinguer également le filtre de Kalman "sans parfum" (Unscented Kalman Filter (UKF)), le filtre de Kalman à cubage (CKF) et le filtre particulaire (PF). D'autres filtres de Kalman linéaires ont été développés aussi pour résoudre le problème d'estimation en apportant des changements sur le modèle d'observation.

- **Filtre de Kalman étendu** : Le filtre de Kalman a été à la base développé pour les systèmes linéaires. Cependant, cette technique peut également être utilisée pour les systèmes non linéaires. Dans ce cas, une linéarisation du système est réalisée à chaque étape, autour du meilleur estimé obtenu à l'étape précédente, c'est le principe

du filtrage de Kalman étendu (*EKF*) [5]. Cette approche a été largement utilisée dans l'estimation de l'attitude en aérospatiale ([79], [11]), la capture de mouvement [143], [113] et les véhicules aériens [15], [13]. Il s'agit de linéariser le modèle de mesure et/ou du processus (dans le cas de l'estimation d'un biais de capteur, par exemple) en utilisant les matrices Jacobiennes des fonctions non linéaires.
Bien que le filtre de Kalman étendu permette de fournir une meilleure estimation de l'attitude par rapport à d'autres approches [82], cet algorithme n'est pas nécessairement optimal à cause de la linéarisation. De plus, il peut diverger si les erreurs initiales sont importantes ou bien si le modèle n'est pas suffisamment précis [120], [25], [105].

- **Filtre de Kalman étendu multiplicatif (*MEKF*)** : Comme nous l'avons mentionné, le quaternion unitaire est une forme de représentation de l'attitude très intéressante, en particulier pour le filtre de Kalman étendu. Cependant, dans la géométrie des quaternions, l'utilisation des termes linéaires $(q - \hat{q})$ n'est pas très significative car elle ne préserve pas la norme unitaire et ne correspond pas réellement à une erreur dans l'algèbre des quaternions. De ce fait, plusieurs travaux ont été développés pour adapter le filtre de Kalman étendu à l'algèbre des quaternions et utiliser le produit de quaternion comme opérateur pour définir l'erreur d'attitude. Le *MEKF* considère que le quaternion d'erreur est le produit d'un vrai quaternion et du quaternion estimé [79] :

$$q_e(a_\phi) = \hat{q}^{-1} \otimes q, \tag{1.48}$$

  $q_e(a_\phi)$ est caractérisée par le vecteur $a_\phi \in \mathbb{R}^3$ qui peut être représenté par plusieurs formes telles le vecteur de rotation du quaternion, le double du vecteur de Gibbs, etc [79]. Le *MEKF* se base sur trois étapes principales : la prédiction, la mise à jour et la remise à zéro. Dans la prédiction, le quaternion prédit ainsi que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sont calculés à partir de l'équation dynamique de rotation (1.21). L'étape de mise à jour du quaternion, quant à elle, passe par l'intermédiaire d'une étape d'estimation de l'erreur, représentée par le vecteur a_ϕ. En pratique, cette erreur est calculée par rapport à un quaternion mesuré (pré-calculé par un autre algorithme statique comme le *QUEST*). Enfin, pour éviter toute redondance amenant à estimer à la fois $\hat{q}$ et $\hat{a}_\phi$ (deux représentations de l'attitude), le vecteur $\hat{a}_\phi$ est remis à zéro ($q_e(a_\phi)$ est égal au quaternion d'identité) avant de recommencer une nouvelle étape de prédiction. Ainsi, il est clair que l'avantage du filtre *MEKF* est la conservation de la norme unitaire du quaternion. Des extensions de ce filtre ont été proposées par [18] et [85].

- **Filtre de Kalman étendu additif (*AEKF*)** : Le filtre de Kalman étendu additif [10] se base sur l'approche classique du filtre de Kalman étendu où les composantes du quaternion sont supposées indépendantes et l'erreur d'estimation est calculée d'une façon linéaire :

$$q_e = q - \hat{q}, \tag{1.49}$$

  q et $\hat{q}$ sont respectivement le vrai quaternion et le quaternion estimé. Dans le *AEKF*, l'étape de mise à jour consiste à ajouter un terme de correction où l'erreur est calculée à partir de (1.49). Puisque cette erreur ne conserve pas la norme unitaire du

quaternion, une étape de normalisation du quaternion estimé est nécessaire.
L'inconvénient du *AEKF* est que la matrice de covariance contient des incertitudes relatives à la norme du quaternion.

- **Filtre de Kalman "sans parfum" (*UKF*)** : Le filtre de Kalman "unscented" est une alternative du filtre de Kalman étendu [25], [142], basée sur une approximation du second ordre (ou d'ordre supérieur) des fonctions non linéaires pour l'estimation de la moyenne et de la covariance du vecteur d'état. L'idée est d'appliquer les équations du filtre de Kalman classique sur un ensemble sigma points pour approximer la loi de distribution de probabilité des variables aléatoires au lieu d'utiliser une distribution Gaussienne locale. L'algorithme commence donc par générer un ensemble de points, appelé sigma points dont la dynamique sera propagée selon les équations non linéaires du système. Par la suite, on approxime la moyenne et la covariance du vecteur d'état en fonction des sigma points choisis. Après avoir défini le vecteur d'observation prédit (calculé en appliquant l'équation d'observation non linéaire sur les sigma points), une étape de mise à jour classique est effectuée pour obtenir l'estimation du quaternion ainsi que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.
  Le filtre *UKF* est clairement plus avantageux que le filtre *EKF* non seulement parce qu'il évite l'étape de linéarisation mais aussi parce qu'il est plus simple et robuste en terme de calcul [132]. Cependant, cette approche possède le même problème de normalisation que le filtre *EKF*, puisqu'elle utilise une addition pour calculer l'état prédit. Pour remédier à ce problème, une approche a été proposée dans [29] pour caractériser le vecteur d'erreur par les paramètres de Rodrigues généralisés (une autre forme de représentation de l'attitude) pour mettre à jour le quaternion.

- **Filtre de Kalman particulaire (*PF*)** : Le filtre particulaire est en quelque sorte une généralisation du filtre *UKF*. Il se base sur l'approximation de la fonction de distribution de probabilité de l'état à l'aide d'un grand nombre d'échantillons aléatoires (ou particules) de l'état. La particularité de ce filtre est que la fonction de distribution n'a pas de forme connue (Gaussienne, par exemple). Son avantage est qu'il est performant dans le cas où le système est fortement non linéaire et quand les mesures sont entachées de bruits non Gaussiens. Cependant, son coût de calcul est très important [25]. Dans la littérature, plusieurs travaux ont traité le problème d'estimation de l'attitude à l'aide du filtre particulaire [26], [20]. Souvent, l'approche par *PF* est très difficile à mettre en œuvre sur des systèmes embarqués (robotique aérienne, par exemple) car ils exigent des coûts de calcul importants pour les processeurs souvent utilisés dans ces applications.

- **Filtre de Kalman à cubage** : Une famille remarquable d'estimateurs d'attitude a été récemment utilisée dans la littérature, les filtres de Kalman à cubage "cubature" [127], [56]. C'est une approximation directe des approches bayésiennes et utilise une règle d'intégration à cubage sphérique radiale de troisième degré ce qui améliore le calcul numérique des intégrales pondérées. Ces filtres permettent d'assurer la stabilité de calcul et de diminuer son coût.

- **Filtre de Kalman linéaire** : Un filtre de Kalman linéaire a été proposé par Choukroun et al. [28], [51]. Une nouvelle approche de modélisation, où le modèle de mesure est linéaire, a été considérée. Ainsi, un filtre de Kalman classique a été utilisé pour estimer l'attitude. Notons que les matrices de covariance des bruits sont dépendantes de l'état (quaternion) et par conséquent, leurs précisions de calcul dépendent de la qualité d'estimation.

Les observateurs non linéaires

Les observateurs non linéaires représentent une autre classe d'approches qui a été introduite récemment comme solution alternative au filtre de Kalman dans le cadre de l'estimation de l'attitude [136], [40], [22], [71], [48], [19]. En général, un observateur permet d'estimer l'état du système qui n'est pas mesurable à partir d'un certain nombre d'observations tout en se basant sur le modèle du système. Ainsi, un observateur prend la forme d'une représentation d'état constituée d'une équation dynamique du processus où l'état est corrigé en utilisant l'écart entre la sortie mesurée et la sortie reconstruite par l'observateur. Contrairement au filtre de Kalman qui propose un calcul bien défini du gain, le réglage du gain d'un observateur n'est pas trivial et nécessite beaucoup de précautions en termes de stabilité globale et convergence.
Dans le cadre de l'estimation de l'attitude, les premiers observateurs ont été proposés dans [115] pour l'estimation de la vitesse angulaire d'un corps rigide et dans [129] pour le calibration des gyromètres pour les satellites et les télescopes.
Ultérieurement, des observateurs classiques ont été synthétisés sur la base de ces approches pour la détermination de l'attitude et éventuellement du biais de gyromètre, en utilisant les quaternions comme représentation de l'attitude [22], [39]. Typiquement, l'observateur est construit à partir de l'équation dynamique de rotation du corps rigide donnée dans (1.19), qui est alimentée par des mesures de vitesse angulaire issues d'un gyromètre. Le terme de correction est le quaternion d'erreur entre le quaternion estimé et celui mesuré à partir d'une autre source complémentaire (quaternion calculé à partir d'une combinaison de mesures issues d'un accéléromètre et d'un magnétomètre). Une analyse de la stabilité globale asymptotique de l'observateur est souvent établie à l'aide de la théorie de Lyapunov. Les filtres complémentaires, ayant une théorie proche des observateurs non linéaires, ont été largement utilisés pour l'estimation de l'attitude [70], [21], [134], [52], [4], [140]. Comme son nom l'indique, un filtre complémentaire fusionne les mesures de plusieurs capteurs ayant des caractéristiques fréquentielles complémentaires afin d'obtenir une meilleure estimation. En effet, il est bien connu que les gyromètres fournissent un calcul peu précis de l'attitude à long terme à cause de l'intégration du terme de biais intrinsèque [70]. En même temps, l'attitude calculée à l'aide des mesures provenant de l'accéléromètre et du magnétomètre est souvent très bruitée quand il s'agit de mouvement accéléré. Ainsi, un filtre complémentaire permet de garantir un meilleur compromis entre fiabilité à court terme fournie par les gyromètres (insensible au biais et aux accélérations linéaires) et fiabilité à long terme assurée par les accéléromètres et magnétomètres (correction de la dérive des gyromètres).

Une autre famille d'observateurs non linéaires, appelée observateurs invariants, a été proposée dans [16], [84], [17], [58]. En général, les observateurs invariants respectent les caractéristiques géométriques du système non linéaire et permettent de préserver ses contraintes et ses symétries naturelles. Ces observateurs convergent localement autour de chaque trajectoire du système et puisque la dynamique d'erreur de l'observateur est indépendante de la trajectoire du système, le domaine de convergence de l'observateur par rapport aux conditions initiales devient très large. Cependant, l'inconvénient de ces approches est lié à la stabilité globale, c'est-à-dire, à l'aide de tels observateurs, il est parfois difficile de garantir la stabilité globale du système [67].

1.5.2 Estimation de l'attitude à base de fusion IMU/GPS ou IMU/Vision

L'estimation de l'attitude a été encore étudiée dans le cas d'une fusion IMU/GPS et IMU/Vision en utilisant des observateurs non linéaires.
La fusion IMU/GPS a été largement traitée en robotique aérienne [136], [133], [83], [47], [111], [68], [43]. En effet le GPS fournit des informations liées à la vitesse et à la position linéaire du drone. Les travaux de Hua et al. [47] concernent l'estimation de l'attitude (sous forme de matrice de rotation) alors que dans [111], l'observateur est synthétisé sur la base du quaternion. Cependant, l'utilisation du GPS reste limitée aux zones couvertes par ce réseau et la précision diminue lors de la navigation à l'intérieur par exemple. Ainsi, la qualité d'estimation de l'attitude avec ces observateurs se dégrade. L'approche proposée par Euston et al. [36] rajoute plutôt un capteur de pression qui permet de mesurer la vitesse de l'air pour estimer la projection du vecteur de gravité et déduire l'attitude du drone en mouvement accéléré.
La fusion IMU/Vision (camera) a été proposée dans [7], [107], [135], [87]. Parmi les applications de ce type d'approche, nous pouvons citer l'estimation de la posture dans le cadre de la navigation inertielle à l'intérieur. En effet, les nouvelles générations de cameras embarquées sur le corps permettent de renseigner directement sur sa vitesse et sa position. Ces informations complètent les mesures inertielles et magnétiques pour estimer au mieux l'attitude. Les travaux développés dans [7], [107], [135] permettent d'estimer par exemple l'attitude et la vitesse de translation.

1.5.3 Estimation de l'attitude à base d'IMU dans le cas de mouvement accéléré

Bien que de nombreuses techniques d'estimation ont été proposées pour la détermination de l'attitude d'un corps rigide, comme celles que l'on vient de citer (les techniques des moindres carrées, les techniques de filtrage de Kalman, les observateurs non linéaires, etc.), le problème lié à l'estimation de l'attitude pendant les phases dynamiques où l'accélération linéaire du corps n'est plus négligeable, a été peu abordé. Deux solutions ont été proposées dans la littérature. La première consiste à rajouter une source complémentaire de mesure (GPS, par exemple) comme présenté dans le paragraphe 1.5.2 et la deuxième se base sur des techniques de compensation de l'effet de l'accélération linéaire du corps rigide sans avoir besoin de rajouter une autre

source complémentaire de mesure. Dans notre cas, nous nous focalisons sur cette deuxième catégorie où on propose d'améliorer les résultats d'estimation à partir de mesures inertielles et magnétiques uniquement. Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.4.4, la mesure de l'accéléromètre devient difficile à exploiter dès que le corps rigide est soumis à des mouvements accélérés ce qui affecte la qualité d'estimation.
Récemment, quelques travaux de recherche ont traité ce problème en minimisant l'effet des accélérations linéaires sur la qualité d'estimation de l'attitude [108], [64], [92], [125], [61]. Par exemple, le travail dans [108] propose une solution pour compenser l'effet des accélérations linéaires en attribuant des valeurs très grandes à la matrice de covariance liée au bruit des accéléromètres. Cette méthode consiste à séparer les phases statiques des phases dynamiques à travers une loi de commutation qui est basée sur la norme de la mesure de l'accéléromètre. En effet, si la norme de l'accélération mesurée est très proche de celle du vecteur de gravité, alors le corps rigide est considéré en phase statique, sinon, en phase dynamique (mouvement accéléré). En se basant sur le même principe de détection, un filtre adaptatif a été développé dans [64] et [92], l'approche consiste à ajuster la matrice de covariance liée au bruit d'observation en changeant sa valeur ou en lui ajoutant une matrice diagonale, pendant les phases dynamiques du mouvement. Toutefois, il est clair que ces approches nécessitent le réglage d'une certaine valeur de seuil de la norme d'accélération, ce qui est très délicat en pratique et dépend de l'application envisagée.
Un algorithme d'estimation de la matrice de covariance liée au terme de l'accélération linéaire a été proposé dans [125]. Contrairement aux approches précédentes, cette méthode consiste à estimer la direction de l'accélération linéaire, c'est-à-dire, l'axe ou les axes de l'accéléromètre où il y a des valeurs importantes d'accélération. Dans ce cas, on attribue moins de poids aux mesures d'accélération correspondant seulement à l'axe détecté et non pas à toutes les mesures des axes de l'accéléromètre. Les résultats de cet algorithme semblent pertinente, cependant, la définition d'un seuil reste nécessaire.
Une autre solution à ce problème a été proposée dans [61]. La méthode consiste à représenter l'accélération linéaire par un modèle de premier ordre pour estimer sa valeur à chaque étape du filtre de Kalman. Bien que la compensation de l'effet de l'accélération linéaire est bien claire pendant des phases dynamiques de courtes durées, cet algorithme perd son efficacité lorsque la norme de l'accélération linéaire est importante ou bien si les phases dynamiques durent une certaine période.

1.5.4 Analyse et discussion à propos des estimateurs de l'attitude

Des variétés d'estimateurs ont été développées dans la littérature pour l'estimation de l'attitude d'un corps rigide. Selon le nombre de capteurs utilisés, on distingue trois grandes catégories : les approches utilisant des capteurs inertiels et magnétiques lors de phases statiques ou quasi-statiques, les approches qui rajoutent une source complémentaire de mesure comme un GPS ou un système de vision et les approches considérant les mêmes capteurs inertiels et magnétiques mais lors de mouvements accélérés.

- Dans la première catégorie, nous distinguons les estimateurs statiques (algorithmes des moindres carrées) et les estimateurs dynamiques (filtrage de Kalman et observateurs

non linéaires).
Les méthodes statiques sont celles qui se basent sur la résolution du problème de Wahba. En général, elles sont dédiées aux applications en aérospatiale. Mathématiquement, les algorithmes les plus robustes sont la *q-method* et la méthode de décomposition en valeurs singulières *SVD* [91]. De point de vue temps de calcul, la *q-method*, où on considère un simple calcul du vecteur propre de la matrice symétrique 4×4, est relativement plus rapide que la *SVD*. Les autres approches (*QUEST* et *FOAM*) sont moins robustes puisqu'elles proposent un calcul de la valeur propre à partir d'une équation caractéristique d'ordre 4, ce qui n'est pas fiable numériquement [81]. La méthode *QUEST* est la plus rapide et assure une bonne précision si les variations des bruits de mesure ne sont pas très importantes.

- Les techniques d'estimation dynamique contiennent essentiellement les filtres de Kalman et ses variantes et les observateurs non linéaires. L'avantage de ces approches par rapport aux précédentes est l'intégration des mesures de vitesse angulaire issues du gyromètre. Ces mesures permettent de renseigner sur la dynamique du corps et corriger les informations éventuellement erronées qui proviennent principalement de l'accéléromètre (dans le cas de mouvement dynamique).

- Les filtres de Kalman nécessitent parfois une étape de linéarisation (dans le cas du filtre de Kalman étendu) ce qui ne garantit pas la convergence globale du filtre. Dans le cas de l'utilisation du quaternion comme représentation de l'attitude, les filtres *MEKF* et *AEKF* se différencient au niveau du le calcul de l'erreur d'estimation dans la phase de mise à jour. Ainsi, le *MEKF* calcule cette erreur en utilisant la multiplication des quaternions ce qui permet d'éviter les problèmes de singularité et de redondance de quelques formes de représentation de l'attitude.

- Les approches par *UKF* et *PF* restent difficiles à mettre en œuvre dans certaines applications car elles exigent des coûts de calcul élevés par rapport aux performances des processeurs utilisés dans ces applications.

- Les observateurs non linéaires demandent moins de calcul par rapport aux filtres de Kalman. Une analyse de stabilité peut être établie dans certains cas en se basant sur la théorie de Lyapunov. De plus, la condition de bruit Gaussien n'est plus nécessaire. Dans ces approches, la condition d'optimalité doit être remplacée par une condition de robustesse par rapport aux bruits.

- Les estimateurs intégrant des sources complémentaires de mesure (GPS ou système de vision) sont généralement des observateurs non linéaires ou encore des filtres complémentaires. L'avantage est l'apport d'une information supplémentaire sur la vitesse ou la position du corps rigide pour en déduire l'accélération linéaire qui est inconnue et non négligeable lors des phases dynamiques du mouvement. Bien que ces méthodes sont très utilisées surtout dans le domaine de la robotique, elles perdent en performance lorsqu'il s'agit d'applications à l'intérieur où le signal GPS n'est plus

disponible.

- Enfin, pour remédier au problème de la détermination de l'attitude en mouvement accéléré, plusieurs filtres ont été développés pour compenser l'effet de l'accélération linéaire en utilisant seulement des données inertielles et magnétiques. Nous constatons que ce problème a été peu abordé dans la littérature malgré son importance.

1.6 Conclusion

Ce chapitre introduit la problématique d'estimation de l'attitude en général. La première partie présente la notion de l'attitude d'un corps rigide et montre son importance dans plusieurs domaines d'application.
Trois différentes formes de représentation de l'attitude (les matrices de rotation, les quaternions et les angles d'Euler) ont été présentées dans la deuxième partie. Après avoir analysé les avantages et les inconvénients de chacune de ces formes, nous avons retenu le formalisme des quaternions unitaires pour développer toutes nos approches dans le reste de ce travail.
Dans la troisième partie, nous avons défini les systèmes de mesure nécessaires. Nous nous sommes limités aux capteurs inertiels et magnétiques. Malgré leurs tailles miniatures et leurs faibles coûts, nous avons soulevé quelques limitations de ces capteurs que nous essayons de traiter dans le reste de notre travail. En particulier, le problème de l'accélération linéaire présente dans les mesures de l'accéléromètre dans le cas de mouvement accéléré du corps rigide et le problème d'utilisation intermittente du gyromètre, le capteur le plus énergivore sur une centrale inertielle. Ces deux problématiques seront l'objet des chapitres 2 et 3, respectivement.
Par la suite, nous avons fait un tour d'horizon sur les différentes approches d'estimation de l'attitude proposées dans la littérature. Il est clair que c'est difficile de favoriser une méthode par rapport à une autre et que le choix doit se baser naturellement sur le type d'application envisagée pour satisfaire ses contraintes.

Chapitre 2

Estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré

Sommaire

2.1 Introduction **39**
2.2 Énoncé du problème **40**
2.3 Classification des mouvements **41**
2.3.1 Approche de détection déterministe 42
2.3.2 Approche de détection stochastique 42
2.3.3 Approche de détection hybride 44
2.4 Estimation de l'attitude par filtrage de Kalman adaptatif **44**
2.4.1 Modèle d'état considéré 44
2.4.2 Filtre de Kalman adaptatif basé sur le quaternion : q-AKF 49
2.4.3 Résultats de simulation et analyse de performances 50
2.5 Estimation de l'attitude par filtrage de systèmes singuliers **55**
2.5.1 Généralités sur les systèmes singuliers 55
2.5.2 Modèle d'état singulier 57
2.5.3 Filtre singulier basé sur le quaternion : QDF 60
2.5.4 Résultats de simulation 62
2.6 Conclusion **65**

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré, une problématique qui reste peu traitée dans la littérature ou souvent simplifiée. Nous proposons deux approches d'estimation dans ce cadre. La première consiste en un filtrage de Kalman adaptatif. Quant à la deuxième, elle concerne le filtrage dans le cas d'un système singulier. Le quaternion sera considéré comme la représentation mathématique de l'attitude. Les deux approches sont validées à l'aide de tests en simulation numérique.

2.2 Énoncé du problème

Avant d'aborder le problème d'estimation de l'attitude, nous rappelons les équations de mesure des capteurs utilisés. En effet, le problème d'estimation est basé sur la fusion de 9 mesures provenant d'une triade orthogonale composée d'un gyromètre triaxial, d'un accéléromètre triaxial et d'un magnétomètre triaxial, attachée à un corps rigide en mouvement dans l'espace 3D. Les signaux issus des 3 capteurs (exprimés dans le repère mobile B), notés y_g, y_a, et $y_m \in \mathbb{R}^3$, sont respectivement donnés par [14]:

$$y_g = \omega + \delta_g, \tag{2.1}$$
$$y_a = R(q)(G + a_p) + \delta_a, \tag{2.2}$$
$$y_m = R(q)m + \delta_m, \tag{2.3}$$

où $R(q)$ est la matrice de rotation exprimée en fonction du quaternion et définie dans (1.16), $a_p \in \mathbb{R}^3$ désigne l'accélération linéaire du corps, $G = [0 \quad 0 \quad g]^T$ est le vecteur de gravité ($g = 9.81m/s^2$), $m = [m_x \quad m_y \quad m_z]^T = [||m||cI \quad 0 \quad ||m||sI]^T$ représente le vecteur de champ magnétique terrestre mesuré dans le repère fixe N et I est l'inclinaison du champ magnétique. Rappelons qu'en réalité, les mesures du gyromètre dans (2.33) contiennent un biais b_g. Ce dernier ne sera pas pris en compte dans le calcul puisqu'on peut le calculer et l'enlever des mesures lors de la phase expérimentale. Comme mentionné dans le paragraphe 1.4.2, la norme $||m||$ et l'angle d'inclinaison I varient selon l'emplacement sur terre et sont accessibles via le calculateur en ligne du modèle magnétique mondial (WMM) [98]. Les bruits des capteurs δ_g, δ_a, et δ_m sont supposés blancs, Gaussiens et mutuellement indépendants. Leurs matrices de covariance sont respectivement définies par :

$$R_g = \sigma_g^2 I_3, \tag{2.4}$$
$$R_a = \sigma_a^2 I_3, \tag{2.5}$$
$$R_m = \sigma_m^2 I_3, \tag{2.6}$$

où σ_g, σ_a et σ_m sont respectivement les écarts types des bruits des trois capteurs.
Dans ce qui suit, nous considérons la représentation en temps discret des équations de mesure (2.1)-(2.3), à savoir :

$$y_{g,k} = \omega_k + \delta_{g,k}, \tag{2.7}$$
$$y_{a,k} = R(q_k)(G + a_{p,k}) + \delta_{a,k}, \tag{2.8}$$
$$y_{m,k} = R(q_k)m + \delta_{m,k}, \tag{2.9}$$

où k correspond à l'instant de l'échantillon.
La variation de l'attitude (exprimée en terme de quaternion) d'un corps rigide par rapport au repère fixe N, est régie par l'équation différentielle de rotation définie dans (1.21) par :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)q. \tag{2.10}$$

La matrice $\Omega(\omega)$ est définie par (1.23) :

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -[\omega^\times] \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

où la variable ω correspond à la vitesse angulaire mesurée par le gyromètre.

Remarque 2.1
Une simple analyse de l'équation (2.2) montre que les mesures de l'accéléromètre sont la projection à la fois du vecteur de gravité G et de l'accélération linéaire a_p. Étant donné que cette accélération est souvent inconnue, dissocier ces deux quantités (G et a_p) devient difficile, surtout lorsque l'accélération linéaire augmente c'est à dire lorsque le corps est en mouvement accéléré. Dans ce cas, le problème de Wahba n'est pas respecté puisqu'un des deux vecteurs de référence n'est pas connu. Cela conduit à des erreurs importantes sur l'estimation de l'attitude dans le cas d'une utilisation mixte d'accéléromètres et magnétomètres ou en rajoutant également des gyromètres.
Pour remédier à ce problème, nous proposons des méthodes de filtrage permettant de compenser l'effet de l'accélération linéaire au sein du processus de l'estimation. Ceci requiert la distinction des phases dynamiques (où a_p n'est pas négligeable devant G) des phases statiques (où a_p est négligeable devant G). Par conséquent, nous proposons parallèlement une méthode intelligente permettant de détecter les phases où le mouvement est accéléré afin d'avoir une meilleure estimation.

2.3 Classification des mouvements

L'objectif ici est de définir une loi de détection pour décider si le corps est en phase dynamique (mouvement accéléré) ou bien statique, étant donné une séquence de mesures accélérométriques $\{y_{a,k}, y_{a,k+1}, ..., y_{a,W+k+1}\}$, donnée dans l'intervalle de temps $[k, k+W+1]$ avec W est la longueur de la fenêtre glissante. Une fois le mouvement accéléré détecté, la compensation de l'effet de l'accélération linéaire peut être appliquée afin que cela ne se répercute sur la qualité d'estimation.
Mathématiquement, le problème de détection est équivalent à un problème de test binaire d'hypothèses dans lequel le détecteur évalue entre deux hypothèses H_0 et H_1 définies comme suit :

- H_0 : le corps est en phase statique,
- H_1 : le corps est en phase dynamique.

Dans le cadre de notre travail, nous proposons trois types de détecteurs qui se basent sur la norme de la mesure de l'accéléromètre à chaque instant [74]. Le premier est déterministe, le deuxième est stochastique et le troisième est hybride. Nous détaillons dans ce qui suit chacun de ces détecteurs.

2.3.1 Approche de détection déterministe

Comme indiqué dans la section précédente, l'accélération linéaire $a_{p,k}$ pendant les phases statiques, est négligeable par rapport au vecteur de gravité G. Dans ce cas, la norme de la mesure de l'accéléromètre $||y_{a,k}||$ est pratiquement égale à celle de la gravité $||G||$. Cependant, pendant les phases dynamiques, $||y_{a,k}||$ devient supérieure ou égale à $||G||$. Ainsi, tant que la norme de la mesure de l'accélération est voisine de celle de la gravité, on peut déduire qu'on est en présence d'une phase statique. Sachant que la mesure est bruitée, on propose deux seuils s_1 et s_2 donnant lieu au test décisionnel suivant :
Test 1 : Soient s_1 et s_2 deux seuils fixés expérimentalement lors d'une phase préliminaire de calibration :

- si $s_1 < ||y_{a,k}|| < s_2 \Rightarrow H_0$: phase statique,
- sinon $\Rightarrow H_1$: phase dynamique.

2.3.2 Approche de détection stochastique

La comparaison de la valeur instantanée de la norme de la mesure de l'accéléromètre aux seuils considérés s'avère très exposée aux fausses alarmes et non-détections. Pour remédier à ce problème, nous proposons ici un deuxième détecteur construit de sorte que la probabilité de détection (PD) des phases dynamiques soit maximisée pour une valeur de probabilité de fausse alarme (PFA) donnée *i.e.*, la probabilité de décider que le corps est en phase dynamique alors qu'il est en phase statique.
A partir de (1.17) et (2.8), et selon les hypothèses de détection, nous pouvons représenter la mesure de l'accéléromètre comme suit :

- $y_{a,k} = gu_k + \delta_{a,k}$, sous H_0,
- $y_{a,k} = gu_k + \bar{a}_{p,k} + \delta_{a,k}$, sous H_1.

où $\bar{a}_{p,k} = R(q_k)a_{p,k}$ et $u_k \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de norme unité, donné par :

$$u_k = \begin{bmatrix} 2q_{1,k}q_{3,k} - 2q_{0,k}q_{2,k} \\ 2q_{2,k}q_{3,k} + 2q_{0,k}q_{1,k} \\ 2q_{0,k}^2 + 2q_{3,k}^2 - 1 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

L'idée est de définir une fonction de détection f_k à partir de $y_{a,k}$ et de la comparer par la suite à une valeur de seuil s, c'est à dire :

- si $f_k(y_{a,k}) < s \Rightarrow H_0$: phase statique,
- si $f_k(y_{a,k}) \geqslant s \Rightarrow H_1$: phase dynamique.

Le problème de test d'hypothèses peut être défini en utilisant la norme carrée de $y_{a,k}$, comme suit :

$$||y_{a,k}||^2 = g^2 + ||\delta_{a,k}||^2 + 2gu_k^T\delta_{a,k}, \quad \text{sous } H_0, \tag{2.13}$$

$$||y_{a,k}||^2 = g^2 + ||\bar{a}_{p,k}||^2 + ||\delta_{a,k}||^2 + 2gu_k^T\delta_{a,k} + 2gu_k^T a_{p,k} + 2\delta_{a,k}^T a_{p,k}, \quad \text{sous } H_1. \tag{2.14}$$

Sous l'hypothèse H_0, puisque le bruit $\delta_{a,k}$ est supposé de moyenne nulle et indépendant de u_k, en appliquant l'opérateur espérance mathématique ($E[\bullet]$) à (2.13), on obtient (voir annexe A) :

$$E[||y_{a,k}||^2 - g^2] = 3\sigma_a^2. \tag{2.15}$$

Cette moyenne peut être approximée par :

$$E[||y_{a,k}||^2 - g^2] - 3\sigma_a^2 \approx f_k = \frac{1}{W} \sum_{i=k-W+1}^{k} (||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2). \tag{2.16}$$

où W est la longueur de la fenêtre glissante définie ci-dessus. D'où la définition de la fonction de détection f_k dont les caractéristiques statistiques sont exprimées par (voir annexe A) :

$$E[f_k] = 0, \tag{2.17}$$

$$\sigma_f^2 = var[f_k] = \frac{1}{W}(6\sigma_a^4 + 4g^2\sigma_a^2). \tag{2.18}$$

Comme nous l'avons mentionné, le test peut se faire en comparant la valeur de f_k à un seuil s donné. Ainsi, le choix de la valeur du seuil s'avère une étape importante pour la bonne décision.

Choix du seuil s : Le calcul du seuil s nécessite la connaissance d'une valeur maximale de PFA.
Dans le cas où $f_k \geq s$ alors que le corps est en phase statique ou quasi-statique, la détection est considérée comme étant une fausse alarme. Le test indique une non détection quand $f_k < s$ alors que le corps est en mouvement accéléré. Le but dans le calcul de s, étant de garantir une PFA inférieure ou égale à un niveau α, *i.e* :

$$PFA = P(f_k \geq s/\text{le corps est en phase statique}) \leq \alpha. \tag{2.19}$$

Pour cela, nous utilisons l'inégalité de Chebyshev que nous rappelons dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Inégalité de Chebyshev [122])
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance finie σ^2. L'inégalité de Chebyshev s'énonce de la façon suivante :

$$P(|X - \mu| \geq s) \leq \sigma^2/s^2. \tag{2.20}$$

En appliquant cette inégalité à f_k, tout en considérant sa moyenne nulle, nous obtenons :

$$PFA = \frac{1}{2}P(|f_k| \geq s) \leq \sigma_f^2/s^2. \tag{2.21}$$

Ainsi, pour déterminer le seuil garantissant notre objectif, il suffit de choisir s tel que : $\alpha = \frac{\sigma_f^2}{s^2}$, ce qui donne :

$$s = \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\alpha}}. \tag{2.22}$$

Finalement, nous proposons le test suivant :
Test 2 : Etant donnée une PFA α :

- si $f_k(y_{a,k}) < \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\alpha}} \Rightarrow H_0$: phase statique,
- si $f_k(y_{a,k}) \geqslant \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\alpha}} \Rightarrow H_1$: phase dynamique.

2.3.3 Approche de détection hybride

La fonction de détection f_k peut être trop lisse, ce qui conduit à un temps de latence sur la détection de certains événements puisque toutes les mesures ont les mêmes poids dans la construction de f_k. Par conséquent, pour donner plus de poids à la valeur actuelle, nous proposons de combiner les deux approches précédentes :
Test 3 : Pour des valeurs données de s_1, s_2 , et α :

- si $f_k(y_{a,k}) < \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\alpha}}$ et $s_1 \leq ||y_{a,k}|| \leq s_2 \Rightarrow H_0$: phase statique,
- sinon $\Rightarrow H_1$: phase dynamique.

En conclusion, le deuxième détecteur permet non seulement de faire le test sur une moyenne d'un nombre donné d'échantillons de la norme $||y_{a,k}||$, mais aussi de calculer la valeur du seuil d'une manière intelligente et adéquate. Le Test 2 est ainsi retenu pour élaborer les algorithmes d'estimation dans la suite de ce travail.
L'évaluation de ce test sera présentée dans le paragraphe 2.4.3.2.

2.4 Estimation de l'attitude par filtrage de Kalman adaptatif

Nous proposons dans cette section un filtre de Kalman qui permet de déterminer l'attitude d'un corps à partir des mesures d'un gyromètre, un accéléromètre et un magnétomètre triaxiaux. Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2, la mesure d'un accéléromètre représente la projection de la somme du vecteur de gravité et de l'accélération linéaire (terme inconnu) du corps rigide. Afin d'éviter toute erreur d'estimation de l'attitude due à ce terme souvent non négligeable, son effet doit être compensé au cours du processus d'estimation. L'idée consiste à adapter la valeur de la matrice de covariance associée aux bruits de mesures de l'accéléromètre à partir du résidu du filtre. En se basant sur la $2^{\text{ème}}$ loi de détection élaborée dans la section 2.3, nous pouvons distinguer les phases statiques et dynamiques du mouvement du corps rigide et par la suite appliquer le processus d'adaptation de la matrice de covariance.

2.4.1 Modèle d'état considéré

La première étape consiste à établir le modèle d'état adéquat pour l'élaboration du filtre. Le modèle du processus est obtenu à partir des mesures du gyromètre tandis que le modèle de mesure est construit à partir des mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre.

2.4.1.1 Modèle du processus

Soit l'équation dynamique de rotation du corps rigide définie dans (2.10) et l'équation de mesure du gyromètre définie dans (2.1). En substituant (2.1) dans (2.10), cette dernière se

réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(y_g - \delta_g)q \\ &= \frac{1}{2}\Omega(y_g)q - \frac{1}{2}\Omega(\delta_g)q. \end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant (1.13) pour le quaternion q et le vecteur de bruit δ_g, on obtient le modèle final du processus :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega(y_g)q + w, \tag{2.24}$$

avec w est le bruit du processus exprimé par :

$$w = -\frac{1}{2}\Xi(q)\delta_g. \tag{2.25}$$

En discret, l'équation différentielle obtenue dans (2.24) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$q_{k+1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]q_k + w_k, \tag{2.26}$$

où q_k est le quaternion défini à l'instant k, Δt est la période d'échantillonnage et Ω_k est la matrice contenant la mesure de la vitesse angulaire $y_{g,k}$ à l'instant k, définie comme suit :

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & -y_{g,k}^T \\ y_{g,k} & -[y_{g,k}^\times] \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

où $[y_{g,k}^\times]$ est le tenseur antisymétrique associé au vecteur vitesse angulaire $y_{g,k}$, défini dans (1.3). w_k est le vecteur de bruit du processus, supposé de moyenne nulle et de covariance Q_k, et est exprimé par :

$$w_k = -\frac{\Delta t}{2}\Xi(q_k)\delta_{g,k}. \tag{2.28}$$

Signalons ici que w_k dépend de l'état *i.e* du quaternion q_k.

2.4.1.2 Modèle de mesure

Le filtre adaptatif proposé dans ce travail est basé sur un modèle de mesure particulier développé par Choukroun et al. [28]. La caractéristique principale de ce modèle est qu'il conduit à un modèle d'état linéaire. Ainsi, les étapes d'un filtre de Kalman classique peuvent être appliquées pour déterminer l'attitude.
Soient b_q et r_q les quaternions associés aux vecteurs b_i et r_i, représentant les coordonnées d'un vecteur x_i dans les repères B et N, respectivement :

$$b_q = [0 \quad b_i^T]^T, \quad r_q = [0 \quad r_i^T]^T. \tag{2.29}$$

Rappelons que ces deux quaternions sont liés par la relation suivante :

$$b_q = q^{-1} \otimes r_q \otimes q. \tag{2.30}$$

En multipliant à gauche (2.30) par q et en utilisant le produit de quaternions donnée par (1.10), nous avons :

$$q \otimes b_q = \begin{bmatrix} 0 & -b_i^T \\ b_i & -[b_i^\times] \end{bmatrix} q, \tag{2.31}$$

$$r_q \otimes q = \begin{bmatrix} 0 & -r_i^T \\ r_i & [r_i^\times] \end{bmatrix} q. \tag{2.32}$$

En soustrayant (2.31) et (2.32), nous obtenons :

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & -(b_i - r_i)^T \\ (b_i - r_i) & -[(b_i + r_i)^\times] \end{bmatrix} q, \tag{2.33}$$

On pose :

$$s_i = \frac{1}{2}(b_i + r_i), \tag{2.34}$$

$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - r_i). \tag{2.35}$$

L'équation (2.33) devient :

$$0 = \bar{H}_i q, \tag{2.36}$$

avec $\bar{H}_i$ est la matrice 4×4, définie par :

$$\bar{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & -d_i^T \\ d_i & -[s_i^\times] \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Il est clair que (2.36) n'est vraie que lorsque le vecteur b_i, qui représente le vrai vecteur d'observation issu du capteur, ne contient pas de termes d'erreur. En effet, on dispose en général d'un vecteur de mesure à chaque instant k, noté b_i^m. Ce vecteur est la somme du vrai vecteur d'observation b_i et d'un terme d'erreur résultant du bruit de mesure. On a donc :

$$b_i^m = b_i + \delta b_i, \tag{2.38}$$

où δb_i correspond au terme d'erreur.
En substituant (2.38) dans (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{H}_i &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(b_i^m - \delta b_i - r_i)^T \\ \frac{1}{2}(b_i^m - \delta b_i - r_i) & -[\frac{1}{2}(b_i^m - \delta b_i^m + r_i)^\times] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(b_i^m - r_i)^T \\ \frac{1}{2}(b_i^m - r_i) & -[\frac{1}{2}(b_i^m + r_i)^\times] \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\delta b_i^T \\ \delta b_i & -[\delta b_i^\times] \end{bmatrix} \\ &= H_i - \frac{1}{2}X(\delta b_i), \end{aligned} \tag{2.39}$$

où

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(b_i^m - r_i)^T \\ \frac{1}{2}(b_i^m - r_i) & -[\frac{1}{2}(b_i^m + r_i)^\times] \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

En appliquant la propriété 1.1 définie dans le paragraphe précédent sur (2.39) et en remplaçant $\bar{H}_i$ dans (2.36), on obtient le modèle de mesure suivant :

$$0 = H_i q - \frac{1}{2}\Xi(q)\delta b_i. \tag{2.41}$$

Dans le cas général, où l'on dispose de plusieurs capteurs (*i.e.* $i = 1...n$), si b_i^m et r_i sont les vecteurs de mesure et de référence, exprimés dans B et N, respectivement, alors (2.36) devient :

$$0 = \bar{\mathbb{H}} q, \tag{2.42}$$

où la matrice $\bar{\mathbb{H}}$ est construite comme suit :

$$\bar{\mathbb{H}} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ . \\ . \\ \bar{H}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4n\times 4}. \tag{2.43}$$

Dans notre cas, nous considérons les deux vecteurs de mesure correspondant aux mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre, notés respectivement par $y_{a,k}$ et $y_{m,k}$. Alors, i=2 et

$$b_1^m = y_{a,k}, \quad r_1 = G, \quad \delta b_1 = \delta_{a,k} + a_{p,k}, \tag{2.44}$$

$$b_2^m = y_{m,k}, \quad r_2 = m, \quad \delta b_2 = \delta_{m,k}. \tag{2.45}$$

Ainsi, en remplaçant les vecteurs b_i^m et r_i par leurs expressions dans (2.41), nous obtenons le modèle de mesure global suivant (en discret) :

$$0_{8\times 1} = H_k q_k + v_k, \tag{2.46}$$

où

$$H_k = \begin{bmatrix} H_{1,k} \\ H_{2,k} \end{bmatrix}, \tag{2.47}$$

avec

$$H_{1,k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(y_{a,k} - G)^T \\ (y_{a,k} - G) & -[(y_{a,k} + G)^\times] \end{bmatrix}, \tag{2.48}$$

$$H_{2,k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(y_{m,k} - m)^T \\ (y_{m,k} - m) & -[(y_{m,k} + m)^\times] \end{bmatrix}, \tag{2.49}$$

et

$$v_k = \begin{bmatrix} w_{acc,k}^q \\ w_{mg,k}^q \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\Xi(q_k)\begin{bmatrix} a_{p,k} + \delta_{a,k} \\ \delta_{m,k} \end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

D'après (2.50), nous remarquons que le terme de bruit de mesure v_k est dépendant de l'état *i.e.* du quaternion. Dans [28], l'auteur a analysé cette expression afin de définir sa matrice de covariance pour montrer l'optimalité d'un filtre de Kalman. Notons aussi que le bruit $w_{mg,k}^q$ lié au magnétomètre est supposé de moyenne nulle et de covariance R_{mg} qui est connue. Cependant, les caractéristiques statistiques du bruit $w_{acc,k}^q$ lié à l'accéléromètre sont inconnues quand le corps rigide est en mouvement accéléré. Une estimation en ligne de la moyenne et de la covariance de $w_{acc,k}^q$, notées respectivement r_k et $R_{acc,k}$, est désormais nécessaire pour le du filtre choisi : le filtre de Kalman adaptatif.
Dans le théorème suivant, nous déterminons les caractéristiques statistiques du bruit $w_{acc,k}^q$.

Théorème 2.2 ([74])
Soit $H_{1,k}$ la matrice d'observation associée aux mesures de l'accéléromètre à l'instant k, et soit $\hat{q}_{k/k-1}$ le quaternion estimé a priori (suite à l'étape de prédiction) à l'instant k. Sans perte de généralité, on suppose que le bruit $w^q_{acc,k}$ est ergodique, alors sa moyenne et sa covariance sont exprimées, respectivement, par :

$$\hat{r}_k = -\frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k} H_{1,j}\hat{q}_{j/j-1}. \tag{2.51}$$

et

$$\hat{R}_{acc,k} = \frac{1}{4}\Xi(\hat{q}_{k/k-1})(R_a + \hat{R}_{p,k})\Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T. \tag{2.52}$$

avec N est un nombre choisi représentant la longueur de la fenêtre glissante et $\hat{R}_{p,k}$ est la matrice 4×4 définie par :

$$\hat{R}_{p,k} = ||2\Xi^{\dagger}(\hat{q}_{k/k-1})\hat{r}_k||^2 I_3. \tag{2.53}$$

où $\Xi^{\dagger}(\hat{q}_{k/k-1})$ est la matrice pseudo-inverse de $\Xi(\hat{q}_{k/k-1})$. ■

Preuve. Nous considérons que la moyenne du bruit $w^q_{acc,k}$ est défini par son espérance mathématique $E[w^q_{acc,k}]$. Puisqu'il est ergodique, on peut approximer la valeur de $E[w^q_{acc,k}]$ par la somme arithmétique des résidus calculés à partir de l'équation de mesure liée à l'accéléromètre $0_{4\times 1} = H_{1,k}q_k + w^q_{acc,k}$. On a alors :

$$E[w^q_{acc,k}] = \frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k} r_j, \tag{2.54}$$

où $r_j = -H_{1,j}q_j$.
Étant donnée que l'état du système n'est pas connu à l'instant k, on le substitue par son estimé *a priori* $\hat{q}_{k/k-1}$. On obtient alors : $r_j = -H_{1,j}\hat{q}_{j/j-1}$. Ainsi, nous pouvons déduire la valeur de la moyenne de $w^q_{acc,k}$ comme suit :

$$\hat{r}_k = E[w^q_{acc,k}] = \frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k} r_j = -\frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k} H_{1,j}\hat{q}_{j/j-1}. \tag{2.55}$$

D'autre part, la matrice de covariance associée au bruit de mesure $w^q_{acc,k}$ est obtenue à travers un calcul direct de la covariance à partir de l'équation de mesure liée à l'accéléromètre dans (2.50) :

$$\hat{R}_{acc,k} = \frac{1}{4}\Xi(\hat{q}_{k/k-1})(R_a + \hat{R}_{p,k})\Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T, \tag{2.56}$$

avec $\hat{R}_{p,k}$ est la matrice de covariance associée l'estimation de l'accélération linéaire $\hat{a}_{p,k}$, elle est approximée par :

$$\hat{R}_{p,k} = ||\hat{a}_{p,k}||^2 I_{3\times 3}. \tag{2.57}$$

Comme nous l'avons mentionné, $a_{p,k}$ n'est pas connue dans le terme du bruit de mesure de l'accéléromètre dans (2.50). Comme le bruit du capteur $\delta_{a,k}$ est supposé Gaussien et de moyenne nulle, la valeur de l'espérance de $w^q_{acc,k}$ dans (2.50) est donnée par :

$$E[w^q_{acc,k}] = -\frac{1}{2}\Xi(q_k)a_{p,k}. \tag{2.58}$$

De plus, en supposant que la matrice $\Xi(q_k)$ est de rang plein, l'accélération linéaire peut être obtenue par :

$$\hat{a}_{p,k} = -2\Xi^{\dagger}(q_k)E[w^q_{acc,k}]. \tag{2.59}$$

En remplaçant $E[w^q_{acc,k}]$ par son expression (2.55), dans (2.59), on obtient :

$$\hat{a}_{p,k} = -2\Xi^{\dagger}(\hat{q}_{k/k-1})\hat{r}_k. \tag{2.60}$$

■

2.4.2 Filtre de Kalman adaptatif basé sur le quaternion : q-AKF

En se basant sur les modèles du processus et de mesure présentés dans les paragraphes précédents, nous développons un filtre de Kalman linéaire adaptatif. Ce filtre permet d'estimer l'attitude tout en compensant l'effet de l'accélération linéaire à travers un calcul en ligne de la matrice de covariance, $\hat{R}_{acc,k}$, associée au bruit de mesure de l'accéléromètre [74]. Selon la nature du mouvement (dynamique ou statique), défini par la loi de détection f_k (section 2.3), $\hat{R}_{acc,k}$ est exprimée par :

$$\begin{cases} \hat{R}_{acc,k} &= \frac{1}{4}\Xi(\hat{q}_{k/k-1})(R_a + \hat{R}_{p,k})\Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T \text{ : en phase dynamique } (\gamma_k = 1), \\ \hat{R}_{acc,k} &= \frac{1}{4}\Xi(\hat{q}_{k/k-1})R_a\Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T \text{ : en phase statique } (\gamma_k = 0). \end{cases} \tag{2.61}$$

où γ_k est la variable binaire de décision.
Supposons que chaque variable inconnue peut être remplacée par son meilleur estimé. Alors, les étapes du filtre de Kalman adaptatif peuvent être résumées comme suit :

1. Initialisation :
   — le quaternion à estimer $\hat{q}_{0/0}$,
   — la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P_{0/0}$,
   — le paramètre de détection γ_0.
   Pour $k \geq 1$:
2. Prédiction de l'état estimé *a priori*

$$\hat{q}_{k/k-1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]\hat{q}_{k-1/k-1}. \tag{2.62}$$

3. Prédiction de la matrice de covariance *a priori* liée à l'erreur d'estimation

$$P_{k/k-1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]P_{k-1/k-1}[I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]^T + Q_k, \tag{2.63}$$

   où

$$Q_k = \frac{\Delta t^2}{4}\Xi(\hat{q}_{k-1/k-1})R_g\Xi(\hat{q}_{k-1/k-1})^T. \tag{2.64}$$

   avec R_g est la matrice de covariance associée au bruit du gyromètre.

4. Calcul du gain du filtre

$$K_k = P_{k/k-1} H_k (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}, \tag{2.65}$$

où

$$R_k = \begin{pmatrix} \hat{R}_{acc,k} \\ R_{mg,k} \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

avec

$$\hat{R}_{acc,k} = \frac{1}{4} \Xi(\hat{q}_{k/k-1})(R_a + \gamma_k \hat{R}_{p,k}) \Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T. \tag{2.67}$$

et

$$R_{mg,k} = \frac{1}{4} \Xi(\hat{q}_{k/k-1}) R_m \Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T. \tag{2.68}$$

H_k est définie dans (2.47) et R_m est la matrice de covariance associée au bruit du magnétomètre.

5. Mise à jour de l'état estimé *a posteriori* :

$$\hat{q}_{k/k} = \hat{q}_{k/k-1} - K_k (H_k \hat{q}_{k/k-1} + \begin{bmatrix} \hat{r}_k \\ 0 \end{bmatrix}). \tag{2.69}$$

6. Mise à jour de la matrice de covariance (*a posteriori*) de l'erreur d'estimation

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}. \tag{2.70}$$

7. Normalisation du quaternion estimé :

$$\hat{q}_{k/k} = \frac{\hat{q}_{k/k}}{||\hat{q}_{k/k}||}. \tag{2.71}$$

Notons que l'étape de normalisation du quaternion estimé permet de garantir la norme unitaire de ce dernier.

2.4.3 Résultats de simulation et analyse de performances

Dans cette partie, nous analysons les performances du filtre de Kalman (q-AKF) proposé à l'aide de simulations numériques en considérant un exemple de variation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement dans l'espace. Trois capteurs (un accéléromètre, un magnétomètre et un gyromètre) sous forme de triade orthogonale sont supposés attachés au corps et dont les axes de chacun sont alignés avec ceux d'inertie du corps, formant ainsi le repère mobile B. Les simulations ont été réalisées sous Matlab pour estimer l'attitude du corps en se basant sur un ensemble de mesures théoriques issues des trois capteurs considérés. Dans un premier temps, nous considérons l'exemple suivant de vitesse angulaire théorique ω_k, issue du gyromètre :

$$\begin{cases} \omega_{x,k} &= 2\cos(1.5k\Delta t) \\ \omega_{y,k} &= -2\sin(0.9k\Delta t). \\ \omega_{z,k} &= 1.5\cos(1.2k\Delta t) \end{cases} \tag{2.72}$$

Nous générons dans ce cas un modèle théorique représentant l'attitude du repère mobile B, tournant à la vitesse angulaire ω_k, par rapport au repère fixe N lié à la terre. Pour cela, on résout l'équation dynamique de rotation (2.26), en utilisant ω_k donnée par (2.72) pour générer les quaternions théoriques q_k. Cet ensemble de quaternions sera considéré comme référence pour le comparer avec les quaternions estimés à partir du filtre. Dans une deuxième étape, les mesures théoriques de l'accéléromètre et du magnétomètre sont créées en utilisant (2.8), (2.9), respectivement, et la matrice de rotation (1.16) (calculée en utilisant le quaternion théorique q_k). La fréquence d'échantillonnage est choisie égale à 100 Hz pour toutes les mesures. Les simulations ont été effectuées en rajoutant des bruits aux différentes mesures. Ces imperfections dans chaque capteur sont représentées par une séquence aléatoire de bruit blanc Gaussien additif. Les caractéristiques du bruit de mesure dans chaque capteur sont montrées dans le Tableau 2.1.

Capteurs	Paramètres	Écarts types	Unités
Accéléromètre	δ_a	0.01	m/s^2
Magnétomètre	δ_m	0.05	$Gauss$
Gyromètre	δ_g	0.05	rad/s

TABLE 2.1 – Caractéristiques des bruits des capteurs inertiels et magnétiques

Afin de représenter les phases accélérées du mouvement, une séquence d'accélération linéaire $a_{p,k}$ est ajoutée aux mesures de l'accéléromètre comme dans (2.8) (voir la partie supérieure de la Figure 2.1).
Les conditions initiales du quaternion estimé $\hat{q}(0)$ ainsi que le quaternion de référence $q(0)$ sont données dans le Tableau 2.2. Notons que ce choix de conditions initiales différentes nous

Modèle théorique	$q(0) = [0.3 \quad -0.6 \quad 0.75 \quad 0.1]^T$
Filtre de Kalman adaptatif	$\hat{q}(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

TABLE 2.2 – Conditions initiales des quaternions

permet d'illustrer la convergence du filtre même lorsque le quaternion estimé initial est "loin" de sa valeur théorique. La valeur initiale de la matrice de covariance est choisie comme suit :

$$P_{0/0} = 0.1 I_{4\times 4}. \tag{2.73}$$

Les paramètres utilisés pour le calcul de la fonction de détection f_k et du seuil s définis dans la section 2.3 sont choisis tels que la longueur de la fenêtre glissante W soit égale à 20 et le seuil de PFA α soit égal à 0.09. Notons que nous avons choisi de montrer les résultats d'estimation du filtre q-AKF en utilisant le Test 2 de détection.
Pour le calcul en ligne de la moyenne $\hat{r}_k$ (2.51) et de la matrice de covariance $\hat{R}_{acc}$ (2.52), la valeur de N est fixée à 100. Afin de montrer la fiabilité du filtre par rapport à l'aspect aléatoire des bruits, nous avons procédé à une simulation Monte Carlo de 100 essais contenant chacun un tirage de bruit différent.

2.4.3.1 Évaluation du filtre q-AKF

Afin d'évaluer la performance globale du filtre, nous avons choisi de présenter les résultats d'estimation de l'attitude sous deux formes mathématiques : les quaternions et les angles d'Euler. Ce choix est justifié par le fait que les angles d'Euler (roulis, tangage, lacet) sont plus intuitifs et simples à interpréter. Les angles d'Euler peuvent être calculés par la transformation mathématique du quaternion comme définie dans la formule suivante [102]:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atan2[(2q_0q_1 + 2q_2q_3), (2q_0^2 + 2q_3^2 - 1)] \\ asin(2q_0q_2 - 2q_1q_3) \\ atan2[(2q_0q_3 + 2q_1q_2), (2q_0^2 + 2q_1^2 - 1)] \end{bmatrix}. \tag{2.74}$$

La qualité d'estimation est ainsi évaluée soit en traçant l'évolution temporelle de l'attitude ou celle de l'erreur de son estimation. De plus, nous avons considéré l'erreur moyenne quadratique (RMSE) de l'estimation des angles d'Euler, comme métrique afin de juger des performances du filtre. La valeur du RMSE est calculée comme suit :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} x_{angle}^2(t)}, \tag{2.75}$$

où T est l'intervalle du temps et x_{angle}, $angle \in \{roulis, tangage, lacet\}$ désigne l'erreur calculée à partir de la différence entre la valeur de référence de chacun des angles et celle estimée. Cette erreur est exprimée par :

$$x_{roulis} = \phi - \hat{\phi}, \quad x_{tangage} = \theta - \hat{\theta} \quad \text{or} \quad x_{lacet} = \psi - \hat{\psi}, \tag{2.76}$$

avec ϕ, θ, ψ désignent les angles de référence du roulis, tangage et lacet, respectivement ; et $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\psi}$ représentent leurs estimés. Dans un premier temps, nous avons tracé dans la Figure 2.1 l'évolution temporelle des quatre composantes des quaternions théorique et estimé. Pour plus de visibilité, nous avons utilisé deux échelles différentes, l'un pour la totalité de la période de simulation et l'autre pour l'intervalle entre $0s$ et $0.1s$. Comme nous pouvons remarquer sur la figure, la convergence du quaternion estimé vers celui de référence est rapide (dès le premier échantillon) bien que les deux quaternions (estimé et théorique) ne soient pas initialisés avec les mêmes valeurs. Nous pouvons ainsi conclure sur la capacité du filtre à estimer l'attitude même pendant les phases accélérées (par exemple entre $2.5s$ et $3s$).
En outre, pour montrer plus la robustesse du filtre par rapport aux accélérations linéaires, nous avons élaboré une étude comparative du q-AKF avec le QKF (Quaternion Kalman Filter) développé par Choukroun et al. dans [28]. Les deux filtres possèdent la structure d'un filtre de Kalman linéaire avec des matrices de covariance dépendantes de l'état. En revanche, la différence réside dans l'interprétation de la mesure d'accélération et le calcul adaptatif de sa matrice de covariance. La Figure 2.2 illustre l'évolution de la valeur absolue de l'erreur d'estimation des angles d'Euler. Cette erreur est calculée par une simple différence entre la valeur estimée et celle de référence. Nous pouvons constater d'après cette figure que l'estimation avec le q-AKF est meilleure et que le QKF perd sa performance lors des phases accélérées. Les valeurs des erreurs quadratiques moyennes des angles d'Euler (RMSE) sont données dans le Tableau 2.3. Il est clair que ces valeurs sont deux à sept fois plus faibles avec le q-AKF

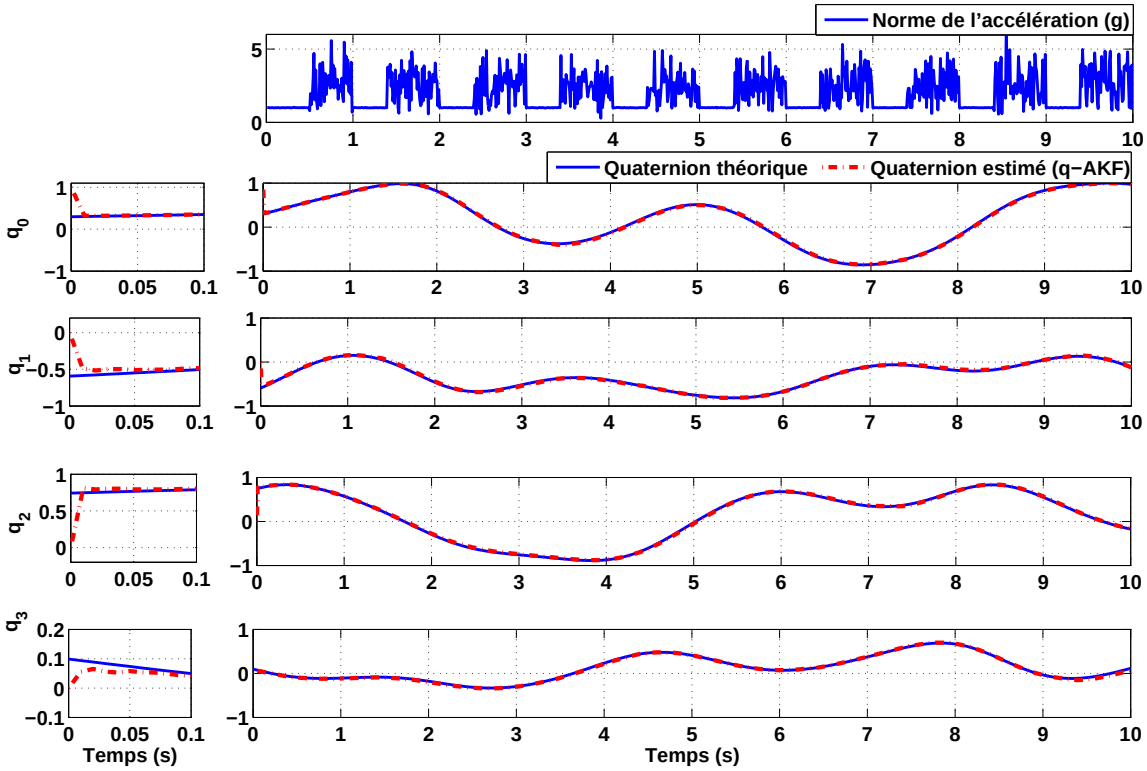


FIGURE 2.1 – Estimation du quaternion d'attitude

qu'avec le QKF. Ce résultat était prévisible puisque le QKF ne tient pas compte de l'effet de l'accélération linéaire contrairement au q-AKF dans lequel l'effet de l'accélération linéaire est compensé à travers le calcul adaptatif de la matrice de covariance.

	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
q-AKF	0.3346	0.5524	0.8562
QKF	2.3174	2.5649	1.7616

TABLE 2.3 – Erreur quadratique moyenne (RMSE) des angles d'Euler (q-AKF vs QKF)

2.4.3.2 Évaluation du détecteur

Dans le but de montrer la pertinence du détecteur que nous avons développé dans la section 2.3, nous traçons dans la Figure 2.3 (haut de la figure) l'évolution de la fonction de détection f_k définie dans le second test de détection. Un zoom sur une partie de la courbe est présenté au milieu de la Figure 2.3 pour illustrer l'efficacité de la loi de détection et sa capacité à suivre le profil d'accélération choisi (voir la partie supérieure de la Figure 2.1). Selon les valeurs de f_k, une fonction binaire décrivant le mode de détection, est définie (voir bas de la Figure 2.3) ;

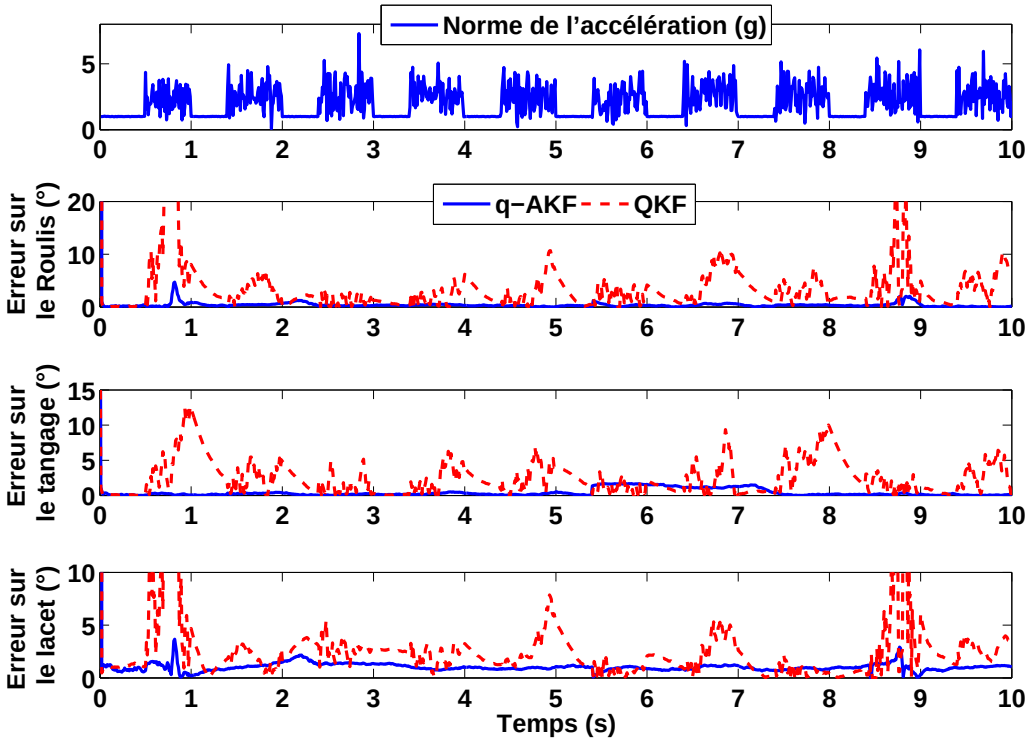


FIGURE 2.2 – Erreurs d'estimation des angles d'Euler

cette fonction est égale à 1 en phases dynamiques et 0 en phases statiques. Également, nous avons comparé les performances du détecteur quant au taux de détection. Pour cela, nous avons tracé la fonction probabilité de détection (PD) en fonction de la valeur maximale de PFA (α) pour différentes valeurs de longueur de la fenêtre glissante W. D'après la Figure 2.4, on constate que la probabilité de détection est monotone en fonction de α et qu'elle est toujours élevée même si PFA augmente. D'autre part, il est bien clair que, plus la longueur de la fenêtre glissante W augmente, plus la loi de détection est efficace mais la différence n'est plus remarquable à partir de $W = 20$. En effet, les courbes correspondant à $W = 20$ et $W = 50$ sont presque confondues (voir Figure 2.4).

Dans un deuxième temps, nous avons choisi de tester les performance du filtre q-AKF sous différentes conditions dynamiques où l'accélération linéaire change au niveau de l'intensité ainsi que la durée. Ainsi, nous avons réalisé un autre test de simulation dans lequel l'accélération linéaire prend des valeurs très importantes (pouvant atteindre $10g$) et peut être présente pendant de longues durées ($25s$ par exemple). Un exemple de profil d'accélération linéaire est montré dans le haut de la Figure 2.5. Sinon, nous avons considéré la même dynamique et les mêmes conditions de simulations que précédemment. Dans la Figure 2.5, nous avons tracé l'évolution de l'erreur d'estimation des angles d'Euler pour les deux filtres QKF et q-AKF. Notons que notre approche permet de compenser l'effet de l'accélération linéaire même si elle est présente pendant une longue durée et avec une intensité importante. On garde ainsi une meilleure estimation par rapport au QKF. Cela nous permet de conclure que le filtre q-AKF est robuste aux conditions dynamiques de mouvement différentes et qui peuvent changer selon

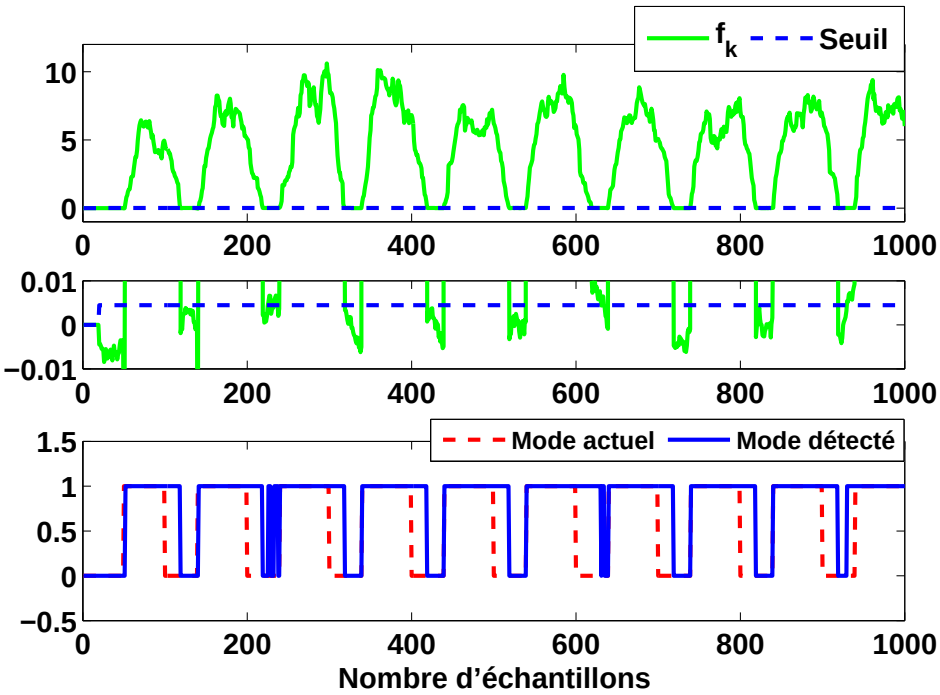


FIGURE 2.3 – Détection de l'accélération linéaire

l'application.

2.5 Estimation de l'attitude par filtrage de systèmes singuliers

L'objectif de cette partie est de proposer une nouvelle approche de modélisation du problème de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré. Dans le nouveau modèle, l'équation du processus est formée à partir des mesures de l'accéléromètre tandis que l'équation de mesure est basé sur les données provenant des autres capteurs, c'est à dire, le gyromètre et le magnétomètre. Le système résultant prend la forme d'un système singulier. En se basant sur ce nouveau modèle, nous allons développer un estimateur de l'attitude que nous appellerons *Quaternion Descriptor Filter (QDF)*. La particularité de cette approche est que le terme d'accélération linéaire est considéré comme entrée inconnue dont l'effet sera naturellement compensé dans le filtre.

2.5.1 Généralités sur les systèmes singuliers

Les systèmes singuliers également appelés systèmes algèbro-différentiels, implicites, descriptor systems ou singular systems (appellation anglo-saxone) [86], constituent une classe importante de systèmes d'intérêts théorique et pratique. Ils ont été introduits pour faire face aux systèmes dont la représentation d'état ordinaire n'est pas applicable. C'est un outil puis-

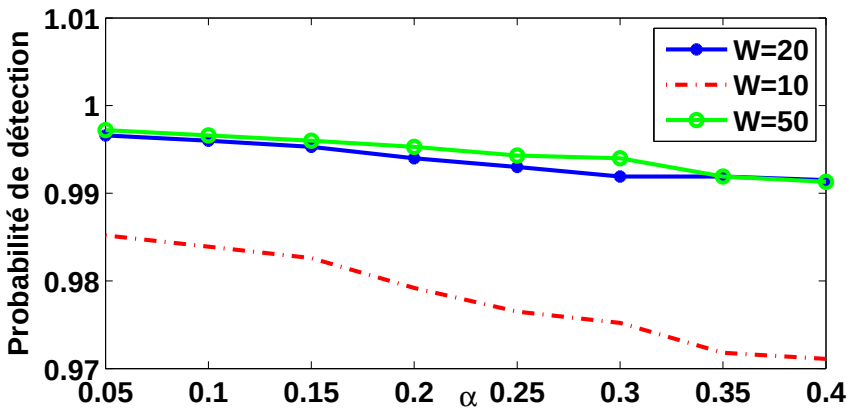


FIGURE 2.4 – Les performances de détection à travers la probabilité de détection

sant de modélisation dans la mesure où un système singulier peut décrire à la fois la dynamique du système et les contraintes sur les variables. On les rencontre dans des domaines aussi variés que les industries chimiques et minérales, la robotique et le domaine électrique. En général, le modèle mathématique d'un système singulier en temps discret, est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} M_{k+1}x_{k+1} &= A_k x_k + u_k \\ s_{k+1} &= F_{k+1}x_{k+1} + r_k \end{aligned} \tag{2.77}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $s_{k+1} \in \mathbb{R}^p$, désignent respectivement les vecteurs d'état et de sortie, $M_{k+1} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $A_k \in \mathbb{R}^{l\times n}$, et $F_{k+1} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices connues, $rang(M_{k+1}) = r < n$. u_k et r_k sont des bruits blancs Gaussiens de moyennes nulles dont les matrices de covariance sont définies par Q_k et R_k :

$$E\left[\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}^T\right] = \begin{bmatrix} Q_k & S_k \\ S_k^T & R_k \end{bmatrix}, \tag{2.78}$$

où S_k est la matrice de corrélation entre u_k et r_k.
Le problème d'estimation d'état pour les systèmes singuliers a été abordé dans plusieurs travaux de recherche durant ces dernières décennies. Dans le cas de systèmes linéaires, les techniques de filtrage (filtre de Kalman) ainsi que celles basées sur les observateurs linéaires ont été largement utilisées. Dans [138], le critère de minimum de covariance a été utilisé pour estimer $M_{k+1}x_{k+1}$ au lieu de x_{k+1}. Cette solution ne peut exister que si le système est causal. Un filtre de Kalman (Descriptor Kalman Filter (DKF)) a été proposé dans [30] en résolvant une fonction des moindres carrées déterministe. Ce filtre peut être utilisé pour estimer des entrées inconnues dans le cas de systèmes ordinaires (non singuliers) [31]. En effet, il est désormais établi qu'un système ordinaire à entrées inconnues peut être converti en un système singulier en considérant un état étendu constitué par la concaténation de l'état du système ordinaire et des entrées inconnues. Dans [97], une solution sous forme de matrices pseudo-inverses triangulaires a été proposée pour l'estimation des systèmes singuliers sous la forme la plus générale. L'approche est basée sur le concept d'estimation de maximum de vraisemblance. Dans [50] et [49], les auteurs proposent un filtre, un lisseur ainsi qu'un prédicteur pour les systèmes singuliers. D'autres approches basées sur les observateurs linéaires ont été développées,

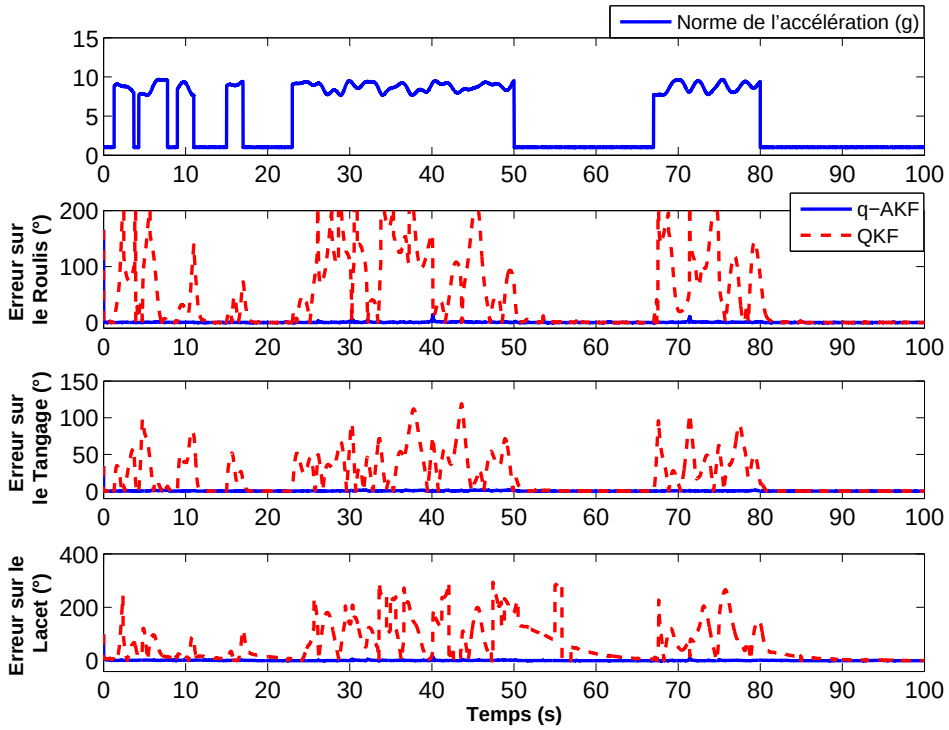


FIGURE 2.5 – Erreur d'estimation des angles d'Euler sous des conditions dynamiques différentes

citons par exemple [45], [100] où les conditions de stabilité et de détectabilité sont bien établies.

Propriété 2.1
Une condition nécessaire pour construire un estimateur de x_k, à minimum de variance finie, est que la matrice $\begin{bmatrix} M_{k+1} \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$ *soit de rang colonne plein [97], c'est à dire :*

$$rang \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = n. \tag{2.79}$$

2.5.2 Modèle d'état singulier

Comme nous l'avons mentionné au début de cette section, notre objectif est de proposer un nouveau modèle sur lequel on se basera pour traiter le problème d'estimation de l'attitude d'un corps rigide dont le mouvement peut contenir des phases accélérées. Nous gardons toujours la même configuration de capteurs utilisés, à savoir la triade composée de gyromètre, accéléromètre et magnétomètre. Le modèle du processus dans ce cas est défini à partir des mesures de l'accéléromètre (nous l'appellerons par la suite A-modèle) alors que le modèle de mesure est défini à partir des mesures du gyromètre et du magnétomètre [75]. On considère

l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.1
L'accélération linéaire du corps $a_{p,k}$ évolue selon un modèle de marche aléatoire donné par :

$$a_{p,k+1} = a_{p,k} + \epsilon_{p,k}, \tag{2.80}$$

avec $\epsilon_{p,k}$ l'erreur de modélisation,caractérisée par une matrice de covariance R_p.

Le modèle d'état global est défini par la proposition suivante :

Proposition 2.1
Soient les mesures des capteurs $y_{g,k}$, $y_{a,k}$ et $y_{m,k}$ (définies dans (2.7)-(2.9)) et soit q_k^ω le quaternion estimé résultant de l'intégration des mesures du gyromètre à partir de (2.26). Sous l'hypothèse 2.1, les variations du quaternion décrivant les rotations du corps, en temps discret, sont définies par le modèle d'état suivant, nommé A-modèle :

$$H_{acc,k+1}q_{k+1} = H_{acc,k}q_k - \tilde{a}_{p,k+1} + v_{k+1}, \tag{2.81}$$

$$z_k = N_k q_k + n_k, \tag{2.82}$$

où q_k est le quaternion à l'instant k, $H_{acc,k}$ est la matrice 4×4 contenant les mesures de l'accéléromètre $y_{a,k}$, donnée par :

$$H_{acc,k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(y_{a,k} - G)^T \\ (y_{a,k} - G) & -[(y_{a,k} + G)^\times] \end{bmatrix}, \tag{2.83}$$

$\tilde{a}_{p,k+1} \in \mathbb{R}^3$ est une entrée inconnue qui dépend de l'accélération linéaire $a_{p,k}$. Elle est exprimée par :

$$\tilde{a}_{p,k+1} = -\frac{1}{2}\Lambda(q_{k+1} - q_k)a_{p,k}, \tag{2.84}$$

$$\Lambda(q_k) = \begin{bmatrix} -q_{v,k}^T \\ -[q_{v,k}^\times] + q_{0,k}I_3 \end{bmatrix}. \tag{2.85}$$

v_{k+1} est le bruit du processus défini par :

$$v_{k+1} = \frac{1}{2}\Xi(q_{k+1})\delta_{a,k+1} - \frac{1}{2}\Xi(q_k)\delta_{a,k} + \frac{1}{2}\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{p,k}, \tag{2.86}$$

avec

$$\Xi(q_k) = \begin{bmatrix} -q_{v,k}^T \\ [q_{v,k}^\times] + q_{0,k}I_3 \end{bmatrix}. \tag{2.87}$$

et z_k, N_k et n_k sont respectivement le vecteur, la matrice et le bruit de mesure, exprimés comme suit :
$z_k = \begin{bmatrix} q_k^\omega \\ 0_{4\times1} \end{bmatrix}$, $N_k = \begin{bmatrix} I_4 \\ H_{mg,k} \end{bmatrix}$, $n_k = \begin{bmatrix} w_{g,k}^q \\ w_{mg,k}^q \end{bmatrix}$, *où $H_{mg,k}$ est la matrice 4×4 contenant les mesures du magnétomètre $y_{m,k}$, donnée par :*

$$H_{mg,k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(y_{m,k} - m)^T \\ (y_{m,k} - m) & -[(y_{m,k} + m)^\times] \end{bmatrix}. \tag{2.88}$$

Les vecteurs de bruits $w^q_{g,k}$ et $w^q_{mg,k}$ liés aux gyromètre et magnétomètre sont respectivement donnés par :

$$w^q_{g,k} = -\frac{\Delta t}{2}\Xi(q_k)\delta_{g,k}, \tag{2.89}$$

$$w^q_{mg,k} = -\frac{1}{2}\Xi(q_k)\delta_{m,k}, \tag{2.90}$$

où Δt, $\delta_{g,k}$ et $\delta_{m,k}$ sont respectivement la période d'échantillonnage et les bruits des capteurs (définis dans (2.7) et (2.9)).

Preuve. Soit la mesure de l'accéléromètre $y_{a,k}$ définie dans (2.8). $y_{a,k}$ peut être réécrite comme suit : $y_{a,k} = y_{T,k} + \delta_{a,k}$, où $y_{T,k}$ est l'accélération réelle. On considère les quaternions $Y_{a,k} = [0 \quad y^T_{T,k}]^T$, $G^q = [0 \quad G^T]^T$ et $a^q_{p,k} = [0 \quad a^T_{p,k}]^T$ associés respectivement à $y_{T,k}$, G et $a_{p,k}$. En appliquant (1.14) qui exprime la transformation d'un vecteur du repère fixe N au repère mobile B, sur $Y_{a,k}$, nous obtenons :

$$Y_{a,k} = q_k^{-1} \otimes (G^q + a^q_{p,k}) \otimes q_k, \tag{2.91}$$

où $q_k^{-1} = [q_{0,k} \quad -q_{1,k} \quad -q_{2,k} \quad -q_{3,k}]^T$ est le quaternion conjugué de q_k. Multiplions à gauche (2.91) par q_k, faisons la différence entre les deux côtés de l'équation obtenue et substituons $y_{T,k}$ par $y_{a,k} - \delta_{a,k}$. Nous obtenons ainsi :

$$0_{4\times 1} = H_{acc,k}q_k - \frac{1}{2}\Lambda(q_k)a_{p,k} + w^q_{acc,k}, \tag{2.92}$$

où $w^q_{acc,k}$ est le vecteur de bruit dépendant du quaternion lié aux mesures de l'accéléromètre :

$$w^q_{acc,k} = -\frac{1}{2}\Xi(q_k)\delta_{a,k}. \tag{2.93}$$

On considère (2.92) définie aux deux instants consécutifs k et $k+1$. En faisant la différence entre les deux équations et en supposant que l'accélération linéaire est donnée par (2.80) , on obtient directement (2.81) où v_{k+1} et $\tilde{a}_{p,k+1}$ sont respectivement le bruit du processus (2.86) et l'entrée inconnue (2.84).
D'autre part, à partir de l'équation différentielle (2.26), nous pouvons calculer le quaternion q^ω_k, qui constitue le premier vecteur de mesure et qui est défini par :

$$q^\omega_k = q_k + w^q_{g,k}. \tag{2.94}$$

Supposons que l'erreur liée au processus d'intégration est de moyenne nulle et de variance négligeable. Nous pouvons conclure que la moyenne et la covariance de $w^q_{g,k}$ peuvent être approximées par celles du bruit défini dans (2.89).
Ainsi, (2.81) et (2.82) définissent le modèle d'état complet. Ce dernier est un système singulier par construction puisque la matrice $H_{acc,k+1}$ est de rang déficient ($rang(H_{acc,k+1}) = 2$). ■

Par ailleurs, signalons que le terme $\tilde{a}_{p,k+1}$ est inconnu. Par conséquent, nous considérons dans ce qui suit, l'estimation de l'état constitué par le quaternion et le vecteur inconnu défini

à partir de l'accélération linéaire soit $x_{k+1} = \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ \tilde{a}_{p,k+1} \end{bmatrix}$. Ainsi, le modèle d'état global défini par (2.81) et (2.82), peut être réécrit par :

$$E_{k+1}x_{k+1} = A_k x_k + v_{k+1}, \tag{2.95}$$
$$z_k = \bar{N}_k x_k + n_k, \tag{2.96}$$

avec $E_{k+1} = [H_{acc,k+1} \quad I_4]$, $A_k = [H_{acc,k} \quad 0_{4\times4}]$ et $\bar{N}_k = \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4\times4} \\ H_{mg,k} & 0_{4\times4} \end{bmatrix}$.

Remarque 2.2
Le quaternion de mesure q^ω, résultant de l'intégration de (2.26), est supposé connu à l'instant initial, considéré comme phase statique. Sa valeur est obtenue à partir des mesures initiales de l'accéléromètre $y_a(0)$ et du magnétomètre $y_m(0)$ via la formule suivante :

$$q^\omega(0) = \begin{bmatrix} c\frac{\phi_0}{2}c\frac{\theta_0}{2}c\frac{\psi_0}{2} + s\frac{\phi_0}{2}s\frac{\theta_0}{2}s\frac{\psi_0}{2} \\ s\frac{\phi_0}{2}c\frac{\theta_0}{2}c\frac{\psi_0}{2} - c\frac{\phi_0}{2}s\frac{\theta_0}{2}s\frac{\psi_0}{2} \\ c\frac{\phi_0}{2}s\frac{\theta_0}{2}c\frac{\psi_0}{2} + s\frac{\phi_0}{2}c\frac{\theta_0}{2}s\frac{\psi_0}{2} \\ c\frac{\phi_0}{2}c\frac{\theta_0}{2}s\frac{\psi_0}{2} - s\frac{\phi_0}{2}s\frac{\theta_0}{2}c\frac{\psi_0}{2} \end{bmatrix}, \tag{2.97}$$

avec

$$\phi_0 = atan2[y_{a,y}(0), y_{a,z}(0)] \tag{2.98}$$
$$\theta_0 = asin[\frac{-y_{a,x}(0)}{norm(y_a(0))}] \tag{2.99}$$
$$\psi_0 = atan2[y_{m,z}(0)sin(\phi_0) - y_{m,y}(0)cos(\phi_0), y_{m,x}(0)cos(\theta_0) + (y_{m,y}(0)s\phi_0 + y_{m,z}(0)c\phi_0)s\theta_0]. \tag{2.100}$$

2.5.3 Filtre singulier basé sur le quaternion : QDF

Après avoir défini le modèle d'état global dans (2.95) et (2.96), nous synthétisons le filtre QDF. L'idée est d'estimer le vecteur d'état x_{k+1} en se basant sur l'état estimé $\hat{x}_k$ à l'instant k et le vecteur de mesure z_{k+1} défini dans (2.96). Soit l'erreur d'estimation de l'état ϵ_k telle que $\epsilon_k = x_k - \hat{x}_k$. Il s'agit de transformer toutes les équations du modèle d'état ((2.95) et (2.96)) en observations. Ainsi, nous obtenons le nouveau modèle de mesure suivant :

$$y_{k+1} = F_{k+1}x_{k+1} + \beta_{k+1}, \tag{2.101}$$

où

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k\hat{x}_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix}, F_{k+1} = \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ \bar{N}_{k+1} \end{bmatrix} \text{ et } \quad \beta_{k+1} = \begin{bmatrix} -A_k\epsilon_k - v_{k+1} \\ n_{k+1} \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

La matrice de covariance de β_{k+1} est donnée par $V = diag(V_1, V_2, V_3)$, où *diag(.)* désigne la matrice bloc diagonale. A l'aide d'un calcul direct de la covariance, qui est détaillé dans

l'annexe B, nous obtenons les expressions des matrices V_1, V_2 et V_3 comme suit :

$$\begin{aligned}
V_1 &= H_{acc,k}P_k^q H_{acc,k}^T + \frac{1}{2}\Xi(q_k)R_a\Xi^T(q_k) + \frac{3}{4}\sigma_\alpha^2(\sigma_a^2+\sigma_p^2)I_4 + \frac{1}{4}\Lambda(q_k)R_p\Lambda^T(q_k),\\
V_2 &= \frac{\Delta t^2}{4}\Xi(q_k)R_g\Xi^T(q_k) + \frac{3}{4}\Delta t^2\sigma_g^2\sigma_\alpha^2 I_4,\\
V_3 &= \frac{1}{4}\Xi(q_k)R_m\Xi^T(q_k) + \frac{3}{4}\sigma_m^2\sigma_\alpha^2 I_4. \qquad (2.103)
\end{aligned}$$

où P_k^q est la matrice de covariance de ϵ_k^q, l'erreur d'estimation du quaternion définie par $\epsilon_k^q = q_k - \hat{q}_k$. σ_α et σ_p sont les valeurs de l'écart-type correspondant à la différence entre q_{k+1} et q_k et à l'erreur $\epsilon_{p,k}$, respectivement. Avant de synthétiser l'estimateur, vérifions tout d'abord la condition d'existence d'un estimateur linéaire du système, définie par la propriété 2.1. On a : $Rang\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ \bar{N}_{k+1}\end{bmatrix} = Rang\begin{bmatrix} H_{acc,k} & I_4 \\ I_4 & 0_{4\times4} \\ H_{mg,k} & 0_{4\times4}\end{bmatrix} = 8$, par construction.
L'estimateur du quaternion est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 2.2
Etant donnée l'état estimé $\hat{x}_k$ et la matrice de covariance P_k liée à l'erreur d'estimation, alors le meilleur estimateur linéaire non biaisé du vecteur d'état x_{k+1} composé par le quaternion q_{k+1} et l'entrée inconnue $\tilde{a}_{p,k+1}$, est donnée par :

$$\hat{x}_{k+1} = P_{k+1}\begin{bmatrix} H_{acc,k+1}^T V_1^{-1} H_{acc,k}\hat{q}_k + V_2^{-1} q_{k+1}^\omega \\ V_1^{-1} H_{acc,k}\hat{q}_k \end{bmatrix}, \qquad (2.104)$$

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2}\end{bmatrix}^{-1}, \qquad (2.105)$$

où

$$\begin{aligned}
P_{1,1} &= H_{acc,k+1}^T V_1^{-1} H_{acc,k+1} + V_2^{-1} + H_{mg,k+1}^T V_3^{-1} H_{mg,k+1}\\
P_{1,2} &= H_{acc,k+1}^T V_1^{-1}\\
P_{2,1} &= V_1^{-1} H_{acc,k+1}\\
P_{2,2} &= V_1^{-1}. \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Preuve. On considère l'équation (2.101) où F_{k+1} est de rang plein par construction ($\text{rang}(F_{k+1}) = 8$). D'après le théorème de Gauss-Markov, le meilleur estimateur non biaisé de l'état x_{k+1} et la matrice de covariance P_{k+1} est donné par [96]:

$$\hat{x}_{k+1} = (F_{k+1}^T V^{-1} F_{k+1})^{-1} F_{k+1}^T V^{-1} y_{k+1}, \qquad (2.107)$$
$$P_{k+1} = (F_{k+1}^T V^{-1} F_{k+1})^{-1}. \qquad (2.108)$$

En remplaçant F_{k+1}, V et y_{k+1}, on obtient :

$$P_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{acc,k+1}^T & I_4 & H_{mg,k+1}^T \\ I_4 & 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \\ & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & V_2^{-1} & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} & V_3^{-1}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_{acc,k+1} & I_4 \\ I_4 & 0_{4\times4} \\ H_{mg,k+1} & 0_{4\times4}\end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_{k+1} = P_{k+1} \times \begin{bmatrix} H_{acc,k+1}^T V_1^{-1} & V_2^{-1} & H_{mg,k+1} V_3^{-1} \\ V_1^{-1} & 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \hat{x}_k \\ q_{k+1}^{\omega} \\ 0_{4\times1} \end{bmatrix}.$$

En faisant une multiplication matricielle et en inversant la matrice P_{k+1}^{-1}, nous obtenons $\hat{x}_{k+1}$ et P_{k+1} comme dans (2.104) et (2.105). ■

Remarque 2.3
Il est clair que le calcul du quaternion dans (2.104) ne conserve pas la norme unitaire de celui-ci. Ainsi, une normalisation du quaternion estimé s'avère nécessaire après chaque étape de calcul de $\hat{q}_{k+1}$.

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{\hat{q}_{k+1}}{||\hat{q}_{k+1}||}. \tag{2.109}$$

2.5.4 Résultats de simulation

Nous présentons un exemple de simulation numérique afin d'illustrer les performances du filtre QDF proposé. Pour cela, nous avons suivi les mêmes étapes effectuées dans le cas des simulations du filtre adaptatif q-AKF (voir paragraphe 2.4.3). Les mesures des capteurs sont échantillonnées à $100Hz$ et la durée de simulation est choisie égale à $100s$. La première étape consiste à générer le quaternion théorique (de référence) q_k à l'aide d'une vitesse angulaire donnée (non bruitée) et en résolvant l'équation différentielle (2.10). L'évolution de la vitesse angulaire durant la période de simulation est choisie comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{x,k} &= 0.2\cos(1.5k\Delta t) \\ \omega_{y,k} &= -0.02sin(k\Delta t). \\ \omega_{z,k} &= 0.5cos(1.2k\Delta t) \end{cases} \tag{2.110}$$

où Δt correspond à la période d'échantillonnage. Les mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre sont calculées en utilisant (2.8) et (2.9) respectivement, et la matrice de rotation (1.16) est calculée en fonction de q_k. Notons qu'un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle est ajouté aux mesures de chacun des capteurs selon (2.7)-(2.9). Les écarts types des bruits sont choisis comme dans le Tableau 2.1 ($\sigma_a = 0.01m/s^2$ pour l'accéléromètre, $\sigma_m = 0.05Gauss$ pour le magnétomètre et $\sigma_g = 0.05rad/s$ pour le gyromètre).
Pour étudier la robustesse du filtre pendant les phases dynamiques, nous avons considéré une séquence d'accélération linéaire $a_{p,k}$ avec différentes valeurs d'amplitude et de durée (voir partie supérieure de la Figure 2.6). Cette séquence est rajoutée à la mesure de l'accéléromètre comme indiqué dans (2.8). Suivant l'intervalle de temps considéré, la moyenne de l'amplitude $||a_{p,k}||$ change. D'abord, durant $4.3s$-$11s$, $15s$-$17.5s$ et 60-$80s$, $||a_{p,k}||$ est choisie égale à $2.33g$. Ensuite, entre 20 et $30s$, l'accélération linéaire est supposée d'amplitude constante $||a_{p,k}|| = 5g$. Finalement, durant les intervalles $26s$-$36s$ et 42-$47s$, on choisit une fonction croissante de l'accélération linéaire en fonction du temps et ayant une valeur maximale égale à $10g$.
Les valeurs initiales du quaternion estimé $\hat{q}(0)$ et de référence $q(0)$ sont choisies telles que : $\hat{q}(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ et $q(0) = [0.3 \quad 0.6 \quad 0.75 \quad 0.1]^T$. La matrice de covariance de l'erreur d'estimation est initialisée telle que $P(0) = 0.1I_8$ et l'écart type lié à la différence entre q_{k+1} et q_k est égale à $\sigma_\alpha = 0.006$.

Afin d'évaluer la qualité d'estimation à l'aide du filtre QDF, nous avons tracé dans la Figure 2.6 l'évolution temporelle des angles d'Euler calculés à partir du quaternion en utilisant la transformation mathématique définie dans (2.74). La partie gauche de la Figure 2.6 montre les courbes d'évolution de ces angles pendant les 50 premières ms alors que la partie droite montre l'évolution pendant toute la période de simulation. Ceci nous permet d'illustrer la convergence rapide du filtre. Ces résultats prouvent la fiabilité d'estimation de l'attitude et la robustesse du filtre QDF surtout lors des phases accélérées. En effet, même si l'accélération linéaire atteint une amplitude élevée pendant une longue durée (par exemple, durant 60-80s), l'erreur d'estimation reste toujours faible (inférieure à 2°).

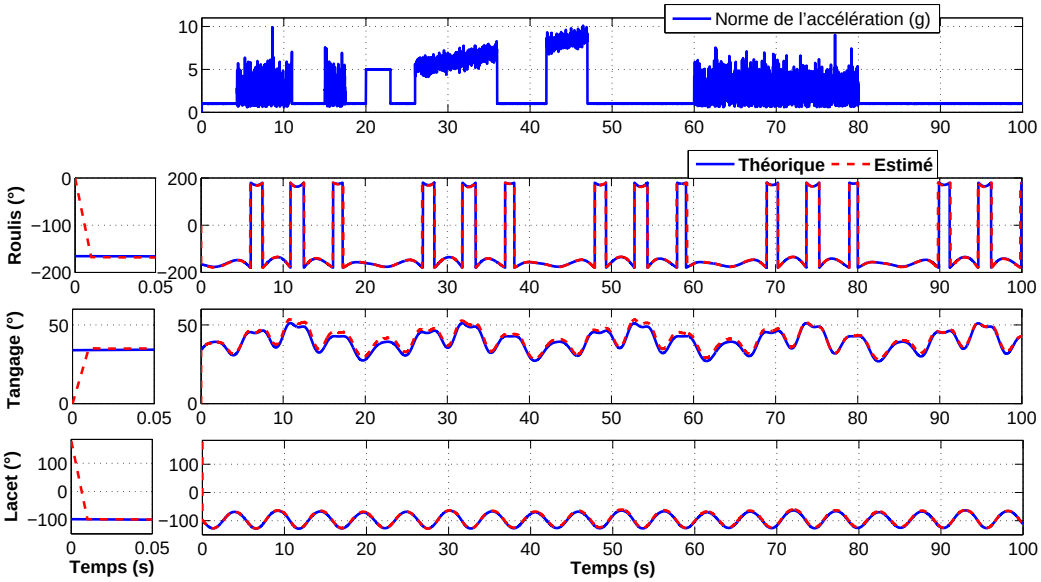


FIGURE 2.6 – Evolution temporelle des angles d'Euler

Etude comparative

Pour évaluer la qualité d'estimation de l'attitude à l'aide du QDF par rapport à la littérature, ce dernier est comparé au filtre QKF développé dans [28], le GDA (Gradient Descent Algorithm) proposé dans [66] et le filtre complémentaire CF (Complementary Filter) proposé dans [69]. Tous les filtres sont initialisés avec la même valeur du quaternion $\hat{q}(0)$. La matrice de covariance est initialisée à $P(0) = 0.1I_4$ pour chacun des filtres QDF et QKF. Dans la Figure 2.7, nous avons tracé l'évolution des erreurs d'estimation des angles d'Euler. Les trois colonnes de la figure représentent respectivement la comparaison du filtre QDF avec GDA, QKF et CF. Comme nous le remarquons, le filtre QDF permet d'avoir une estimation plus fine contrairement aux autres approches qui perdent la précision dès qu'une phase dynamique est détectée (par exemple, durant 23-37s). De plus, afin d'évaluer la capacité du filtre à estimer l'attitude du modèle de référence considéré, nous avons calculé les valeurs de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) sur les angles, à partir de (2.75). Le Tableau 2.4 montre les valeurs des RMSE pour les quatre filtres considérés. Nous remarquons que le filtre

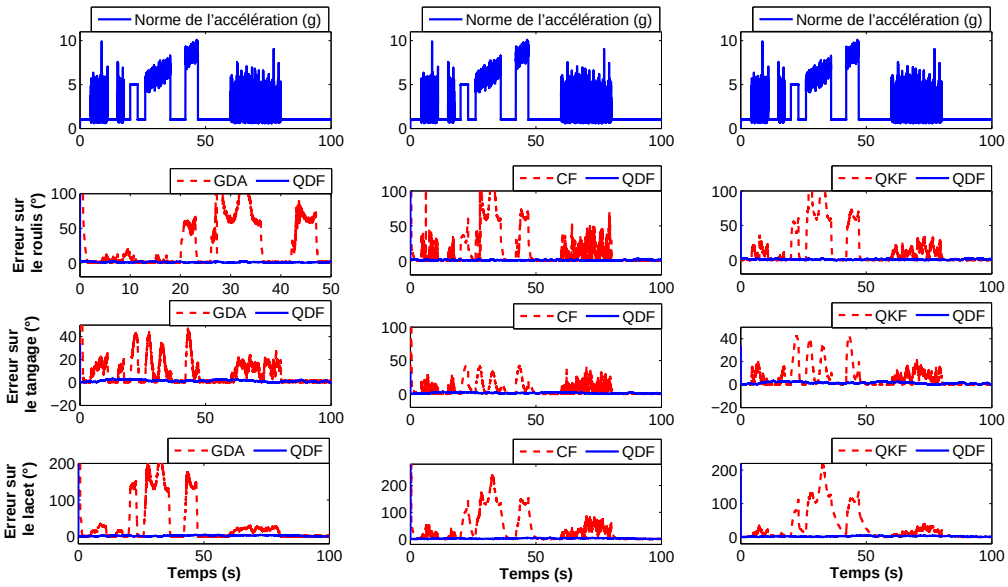


FIGURE 2.7 – Erreur d'estimation des angles d'Euler : (a) QDF vs GDA (b) QDF vs CF (c) QDF vs QKF

QDF permet d'obtenir la plus petite valeur de RMSE. En effet, en l'absence d'accélération linéaire, c'est à dire, pendant les phases statiques, tous les filtres ont quasiment le même comportement puisque le vecteur de gravité G domine dans les mesures de l'accéléromètre. Cependant, lors des phases accélérées, le GDA, le QKF et le CF n'assurent plus une estimation fiable de l'attitude à cause du terme non négligeable de l'accélération linéaire dont l'effet n'est pas compensé.

	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
CF	23.5174	6.6012	35.9623
GDA	20.7900	8.0621	30.6316
QKF	21.8380	5.9015	30.3437
QDF	0.9828	1.4434	2.0688

TABLE 2.4 – RMSE des angles d'Euler liée aux approches CF, GDA, QDF et QKF

Comparaison avec le q-AKF

Dans le but de comparer le QDF au filtre q-AKF, développé dans la section 2.4, nous considérons l'exemple précédent de vitesse angulaire (2.110) pour générer un quaternion théorique ainsi que les mesures de l'accélération et du champ magnétique.

La comparaison porte sur deux critères : la qualité de l'estimation et le temps de calcul. De point de vue performance, nous calculons les erreurs d'estimation sur les angles d'Euler obtenus à partir des deux filtres et nous comparons leurs moyennes quadratiques. Le Tableau 2.5 montre ces résultats. D'après les valeurs des RMSE des angles d'Euler, nous constatons que

	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
q-AKF	0.9945	0.8210	2.17
QDF	1.31	0.84	2.13

TABLE 2.5 – RMSE des angles d'Euler liée aux approches q-AKF et QDF

les deux filtres permettent d'estimer l'attitude avec des erreurs faibles et que les valeurs de ces erreurs pour chacun des angles sont très proches. Ainsi, nous concluons que le QDF et le q-AKF ont les mêmes performances et sont tous les deux robustes aux accélérations linéaires. D'autre part, pour évaluer le QDF et le q-AKF en terme de complexité, nous déterminons le temps de calcul, noté T_c, de chacun des filtres :

$$\begin{aligned} T_c(\text{q-AKF}) &= 14.10^{-4}s, \\ T_c(\text{QDF}) &= 7.10^{-4}s. \end{aligned}$$

Il est donc clair que le QDF est plus rapide en terme de calcul que le q-AKF ($T_c(\text{q-AKF}) = 2T_c(\text{QDF})$. Dans ce dernier, on calcule la matrice de covariance associée à l'accélération linéaire ainsi que la fonction de détection f_k selon une fenêtre glissante, à chaque itération.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème d'estimation de l'attitude d'un corps rigide en exploitant des données inertielles et magnétiques provenant d'un accéléromètre, un gyromètre et un magnétomètre, en particulier, quand le système est en mouvement accéléré. Dans ce cas, la mesure de l'accéléromètre devient difficile à interpréter puisque elle représente non seulement la projection du vecteur gravité mais aussi l'accélération linéaire du corps, qui reste inconnue. Ceci impacte évidemment la qualité d'estimation. Ce problème a été partiellement résolu dans la littérature puisque les solutions proposées pour compenser l'effet de l'accélération linéaire du corps ne sont efficaces que pendant des périodes temporelles courtes ou bien lorsque les amplitudes des accélérations ne sont pas très importantes.
Notre contribution dans ce cadre, s'articule autour de deux principales approches. Dans la première, nous avons développé un filtre de Kalman adaptatif, nommé q-AKF dont la structure est celle d'un filtre de Kalman classique mais qui rajoute une estimation de la matrice de covariance liée à l'accélération linéaire. Étant donné que ce terme est inconnu pendant les phases dynamiques du mouvement, son effet est compensé en ligne via un calcul adaptatif de la matrice de covariance. Trois lois de détection ont été aussi développées pour distinguer d'une façon automatique les différentes phases de mouvement (phases statiques et dynamiques). La

première est statique et se base sur les valeurs instantanées de la norme de l'accélération, la deuxième est dynamique (ou fluide) étant donnée qu'elle se base sur le calcul de la moyenne des valeurs d'accélération selon une fenêtre glissante, quant à la troisième, elle est hybride et combine les deux précédentes. Ainsi, des simulations numériques ont été présentées pour valider l'algorithme proposé dans la première partie du chapitre ainsi que la loi de détection choisie.

La deuxième approche d'estimation de l'attitude dans ce chapitre, consiste à proposer un nouveau modèle dans lequel les mesures de l'accéléromètre définissent le modèle du processus alors que les mesures du gyromètre et du magnétomètre définissent le modèle de mesure. Ce modèle, nommé A-modèle, prend la forme d'un système singulier. L'intérêt de cette configuration est que l'accélération linéaire est traitée comme entrée inconnue et le problème se ramène donc à un problème d'estimation d'état avec entrée inconnue. D'où le développement d'un estimateur linéaire non biaisé pour les systèmes singuliers, nommé QDF et qui se base sur l'approche du maximum de vraisemblance. L'algorithme proposé a été testé et validé avec des données simulées. De plus, une comparaison du filtre QDF avec les algorithmes QKF [28], GDA [66] et du CF [69], a été présentée. Ainsi, la robustesse du filtre vis-à-vis de l'accélération linéaire a été montrée.

Notons que le QDF est clairement moins complexe que le q-AKF. En effet, dans ce dernier, le calcul de la matrice de covariance associée à l'accélération linéaire ainsi que celui de la loi de détection sont désormais nécessaires à chaque étape de calcul.

D'autre part, une extension de la formulation A-modèle peut être envisagée dans le sens où on peut utiliser les données des capteurs différemment pour reformuler le problème et ainsi améliorer la qualité de l'estimation. En effet, à côté du problème de l'accélération linéaire, se rajoutent les perturbations magnétiques qui peuvent affecter l'estimation de l'attitude, notamment l'angle du lacet. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, ces perturbations proviennent soit de la structure du magnétomètre lui même, soit des éléments ferromagnétiques situés dans son voisinage. Ainsi, le problème d'estimation de l'attitude en présence de perturbations magnétiques, reste un challenge à relever. Dans notre cas, nous proposons de remédier au problème d'une façon analogue à celle de l'accélération linéaire, c'est à dire, de définir le modèle du processus à l'aide des mesures du magnétomètre, d'où un M-modèle. Ceci est présenté dans l'annexe C [76]. Pour aller plus loin, une combinaison des deux configurations (A-modèle et M-modèle) peut être aussi envisagée, ce qui donne un AM-modèle, où le modèle du processus est défini par les mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre, alors que le modèle de mesure est défini par les mesures du gyromètre. Ceci est aussi présenté dans l'annexe C.

Chapitre 3

Estimation de l'attitude avec utilisation parcimonieuse du gyromètre

Sommaire

3.1 Introduction **67**
3.2 Filtre de Kalman adaptatif avec utilisation intermittente du gyromètre **68**
3.2.1 Commutation temporelle 68
3.2.2 Commutation par loi de détection 73
3.3 Conclusion **76**

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide dans l'espace 3D à partir des mesures fournies par un accéléromètre triaxial, un magnétomètre triaxial et un gyromètre triaxial. En particulier, nous nous sommes focalisés sur le problème lié à l'accélération linéaire pendant les phases accélérées du mouvement. Dans ce chapitre, nous mettons l'accent sur un autre problème lié au gyromètre. En effet, ce capteur est relativement plus gourmand en énergie par rapport à l'accéléromètre et au magnétomètre. Par exemple, pour les nouveaux capteurs de chez STMicroemectronics, le gyromètre triaxial (I3G4250D) consomme $6.1mA$ en mode standard alors que l'accéléromètre de la même famille (IIS328DQ) consomme $250\mu A$ seulement. Ce problème est surtout remarquable dans les systèmes alimentés par des batteries comme les smartphones, les tablettes ou les centrales inertielles sans fil. L'enregistrement en continu sur de longues périodes de ces trois mesures, en vue d'une estimation de l'attitude, conduit à un déchargement plus rapide de la batterie et à son épuisement dans un temps relativement court. Ainsi, la question qui se pose ici, serait-il possible de réduire l'utilisation de mesures du gyromètre lors du processus d'estimation de l'attitude ?
Ainsi, nous proposons une méthode pour réduire l'utilisation du gyromètre tout en gardant une bonne estimation de l'attitude. Cette méthode sera appliquée sur le filtre q-AKF puis évaluée avec des tests en simulation numérique.

3.2 Filtre de Kalman adaptatif avec utilisation intermittente du gyromètre

On se focalise dans cette section sur le développement d'un filtre de Kalman basé sur le même modèle d'état établi à la section 2.4 du chapitre précédent, tout en réduisant l'utilisation du gyromètre. L'idée consiste à diminuer autant que possible l'acquisition des mesures de vitesse angulaire en commutant entre deux modes de fonctionnement du capteur [73], [74]. Signalons que les nouvelles générations de capteurs inertiels disposent d'un mode veille où la consommation de l'énergie diminue significativement. A titre d'exemple, pour le gyromètre I3G4250D, on passe de $6.1mA$ en mode standard à $1.5mA$ en mode veille et à $5\mu A$ quand le capteur est éteint. Deux façons pour réaliser la commutation ont été envisagées dans le cadre de notre travail. La première est la commutation temporelle, elle consiste à mettre en veille le capteur périodiquement. La deuxième se base sur la loi de détection développée dans la section 2.3 du chapitre 2 où la décision de commuter entre les deux modes de veille et de fonctionnement standard, se fait selon la nature de mouvement du corps.
Dans ce qui suit, nous présentons les deux approches en détaillant pour chacune, les modifications apportées sur le modèle d'état ainsi que sur le filtre.

3.2.1 Commutation temporelle

Afin de réduire l'utilisation du gyromètre, nous proposons dans un premier temps de mettre en veille le capteur périodiquement pendant un intervalle de temps fixe. On obtient ainsi un scénario contenant une alternance régulière et périodique entre les deux modes de fonctionnement (mode veille et mode standard). En l'absence de mesures de vitesse angulaire, nous gardons la dernière mesure disponible juste avant la mise en veille du capteur. Dans ce qui suit, nous détaillons les modifications apportées au modèle d'état donné par (2.26) et (2.46).

Modèle d'état considéré

Avant de détailler le modèle d'état, il est judicieux de rappeler que dans la formulation initiale (donnée dans le paragraphe 2.4.1 du chapitre 2), le modèle du processus défini par (2.26) est construit à partir des mesures de vitesse angulaire, tandis que le modèle de mesure (2.46) est établi à partir des mesures issues des autres capteurs (accéléromètres et magnétomètres). Ainsi, il est clair que l'utilisation intermittente de gyromètre n'affectera que le modèle du processus ; le modèle d'observation étant inchangé.
Selon le mode de fonctionnement du gyromètre, le modèle du processus est défini par deux expressions différentes, comme suit :

- Si le capteur est en mode standard :

$$q_{k+1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]q_k + w_k, \tag{3.1}$$

- Si le capteur est en mode veille :

$$q_{k+1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k^{last}]q_k + \bar{w}_k. \tag{3.2}$$

Où Ω_k est la matrice définie par les mesures de vitesse angulaire (2.27) et w_k est le bruit du processus lorsque le capteur est en mode actif (2.28).
Ω_k^{last} est la matrice contenant la dernière valeur de vitesse angulaire $y_{g,k}^{last}$ avant la mise en veille du gyromètre :

$$\Omega_k^{last} = \begin{bmatrix} 0 & -(y_{g,k}^{last})^T \\ y_{g,k}^{last} & -[y_{g,k}^{last\times}] \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

$\bar{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \hat{Q}_k)$ désigne le vecteur de bruit du processus en l'absence de mesures de vitesse angulaire. Dans ce cas, nous considérons que sa matrice de covariance $\hat{Q}_k$ varie selon une fonction exponentielle :

$$\hat{Q}_k = Q_k^{last} \exp(\mu k \Delta t) \tag{3.4}$$

avec μ une constante préalablement choisie et Q_k^{last} la dernière valeur de la matrice de covariance de bruit du processus calculée avant la mise en veille du gyromètre.
Un modèle généralisé obtenu à partir de (3.1) et (3.2), est donné par [73]:

$$q_{k+1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}(\gamma_k \Omega_k + (1-\gamma_k)\Omega_k^{last})]q_k + \gamma_k w_k + (1-\gamma_k)\bar{w}_k \tag{3.5}$$

où γ_k est la variable binaire définie par :

- $\gamma_k = 1$: si le capteur est en mode standard,
- $\gamma_k = 0$: si le capteur est en mode veille.

Maintenant, rappelons l'expression du modèle de mesure donné par (2.46) :

$$0_{8\times 1} = H_k q_k + v_k, \tag{3.6}$$

où H_k est la matrice contenant les mesures de l'accélération et du champ magnétique (2.47) et v_k représente le bruit de mesure (2.50).
Ainsi, le modèle d'état global est obtenu à partir de (3.5) et (3.6).

Filtre q-AKF avec utilisation intermittente du gyromètre

Étant données les modifications apportées au modèle du processus, nous allons analyser dans cette partie les changements sur le filtre q-AKF développé dans la section 2.4 du chapitre précédent. Notons que le calcul de la matrice de covariance liée au bruit de l'accéléromètre reste toujours le même pour la compensation des accélérations linéaires si elles ne sont pas négligeables (voir théorème 2.2). Ainsi, les étapes du filtre adaptatif q-AKF avec utilisation intermittente du gyromètre sont résumées par :

1. Initialisation du quaternion estimé $\hat{q}_{0/0}$ et de la matrice de covariance $P_{0/0}$ de l'erreur d'estimation ($e = q - \hat{q}$).
2. Prédiction : calcul du quaternion estimé $\hat{q}_{k/k-1}$ et de la matrice de covariance $P_{k/k-1}$:

$$\hat{q}_{k/k-1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}(\gamma_k \Omega_k + (1-\gamma_k)\Omega_k^{last})]\hat{q}_{k-1/k-1}. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} &= [I_4 + \frac{\Delta t}{2}(\gamma_k \Omega_k + (1-\gamma_k)\Omega_k^{last})]P_{k-1/k-1} \\ & [I_4 + \frac{\Delta t}{2}(\gamma_k \Omega_k + (1-\gamma_k)\Omega_k^{last})]^T[\gamma_k Q_k + (1-\gamma_k)\hat{Q}_k], \end{aligned} \tag{3.8}$$

où

$$Q_k = \frac{\Delta t^2}{4}\Xi(\hat{q}_{k-1/k-1})R_g\Xi(\hat{q}_{k-1/k-1})^T, \tag{3.9}$$

et $\hat{Q}_k$ est donnée par (3.4).

3. Calcul du gain du filtre

$$K_k = P_{k/k-1}H_k(H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}, \tag{3.10}$$

où

$$R_k = \begin{pmatrix} R_{mg,k} \\ \hat{R}_{acc,k} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

et

$$R_{mg,k} = \frac{1}{4}\Xi(\hat{q}_{k/k-1})R_m\Xi(\hat{q}_{k/k-1})^T. \tag{3.12}$$

4. Mise à jour du quaternion estimé et de la matrice de covariance

$$\hat{q}_{k/k} = \hat{q}_{k/k-1} - K_k(H_k\hat{q}_{k/k-1} + [0^T \quad \hat{r}_k^T]^T). \tag{3.13}$$

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k)P_{k/k-1}. \tag{3.14}$$

Notons que la matrice $\hat{R}_{acc,k}$ et la moyenne $\hat{r}_k^T$ sont calculées à partir du théorème 2.2 pour tenir compte de l'accélération linéaire du corps.
R_g, R_a, R_m sont les matrices de covariance des bruits des trois capteurs, comme définis dans (2.4)-(2.6).

Résultats de simulation

Afin d'illustrer les performances du filtre q-AKF lors d'une utilisation intermittente des mesures de vitesse angulaire, nous avons réalisé plusieurs tests en simulation numérique dont nous choisissons l'exemple ci-après. Initialement, pour générer le quaternion de référence q, on considère une variation de l'attitude à partir du scénario suivant de la vitesse angulaire :

$$\begin{cases} \omega_x(t) &= 2\cos(1.5t) \\ \omega_y(t) &= -2\sin(0.9t) \\ \omega_z(t) &= 1.5\cos(1.2t) \end{cases} \tag{3.15}$$

Ensuite, nous procédons de la même façon que dans le chapitre précédent pour générer les mesures de l'accélération et du champ magnétique (à partir de (2.8) et (2.9) et du quaternion de référence q_k). Signalons que l'on ajoute une fonction d'accélération linéaire $a_{p,k}$ aux mesures accélérométriques, dont l'évolution temporelle est tracée en le haut de la Figure 3.2. Les imperfections des capteurs sont représentées par des bruits blancs Gaussiens dont les variances sont égales à $\sigma_a^2 = 0.05m/s^2$ pour l'accéléromètre, $\sigma_g^2 = 0.05rad/s$ pour le gyromètre et

$\sigma_m^2 = 0.05m/s^2$ pour le magnétomètre. Le quaternion de référence ainsi que celui estimé sont initialisés avec deux valeurs différentes pour examiner la convergence du filtre : $q(0) = [0.3 \quad -0.6 \quad 0.75 \quad 0.1]^T$ et $\hat{q}(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. La période d'échantillonnage et la période de simulation sont égales à $\Delta t = 0.01s$ et $T = 30s$, respectivement. Enfin, pour mettre en œuvre la réduction de l'utilisation des mesures du gyromètre, nous considérons un scénario où le capteur commute périodiquement entre deux modes de fonctionnement (standard et veille). Il est en mode actif pendant $M_1 = 20$ échantillons puis en mode veille pendant $M_2 = 20$ échantillons (voir Figure 3.1). A la fin de la période M_1, on garde la dernière valeur mesurée de la vitesse angulaire, notée ω_{last} pour l'utiliser durant la période de mise en veille M_2 où la matrice de covariance de l'erreur du processus $\hat{Q}_k$ est calculée selon (3.4) avec $\mu = 20$. Ceci est répété périodiquement pendant toute la période de simulation. Dans la Figure 3.2, nous

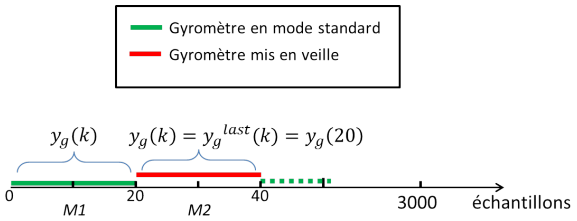


FIGURE 3.1 – Scénario de l'acquisition des mesures du gyromètre

avons tracé l'erreur d'estimation des angles d'Euler dans le cas où l'on réduit l'utilisation du gyromètre ($\gamma_k \in \{0, 1\}$) et dans le cas où l'on utilise les mesures du capteur pendant toute la période de simulation ($\gamma_k = 1$). Dans ce cas, nous avons supposé que le corps n'est pas en mouvement accéléré (cas statique). Les moyennes quadratiques des erreurs d'estimation des angles (RMSE) sont aussi calculées dans le Tableau 3.1. Ainsi, nous constatons que le filtre garde une qualité acceptable d'estimation de l'attitude même si on perd 50% des observations des vitesses angulaires (on dispose seulement de 1500 mesures au lieu de 3000 mesures).

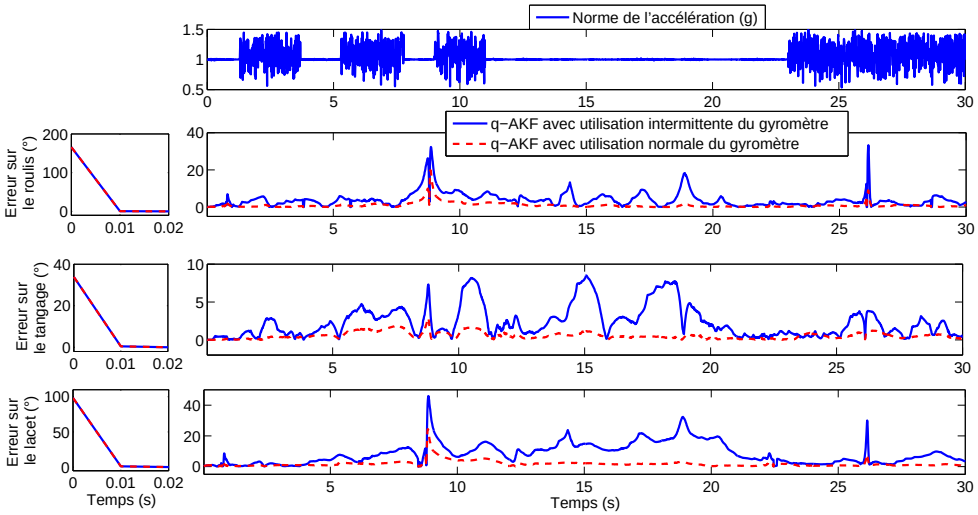


FIGURE 3.2 – Erreurs d'estimation des angles d'Euler

	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
q-AKF avec utilisation intermittente du gyromètre	7.9201	4.8571	14.3085
q-AKF avec gyromètre en mode standard	1.5108	0.4992	2.3276

TABLE 3.1 – Moyennes quadratiques des erreurs d'estimation des angles d'Euler (RMSE)

Pour vérifier la limite de la robustesse du filtre par rapport à la réduction de l'utilisation des gyromètres, nous avons testé le filtre avec différentes valeurs de M_2 (période où le capteur est mis en veille). Pour cela, on définit un scalaire σ qui représente la variation de la moyenne quadratique de l'erreur d'estimation des angles (RMSE) par le nombre de mesures acquises l durant le test. Ainsi :

$$\sigma = \frac{RMSE}{l}. \tag{3.16}$$

La Figure 3.3 montre l'évolution de σ en fonction de M_2. Notons que les courbes dans cette figure font apparaître un compromis entre la précision de l'estimation et la durée de mise en veille du gyromètre. D'après la figure, nous pouvons conclure que la qualité d'estimation reste acceptable jusqu'à $M_2 = 30$ échantillons. Cette valeur permet ainsi de gagner au niveau de la consommation de l'énergie en réduisant au maximum l'acquisition des mesures de vitesse angulaire, tout en gardant des performances satisfaisantes d'estimation de l'attitude.

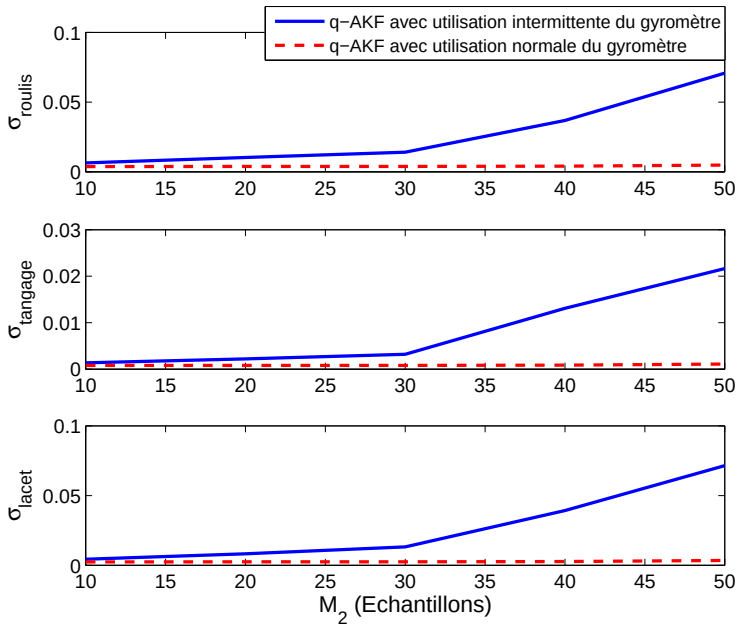


FIGURE 3.3 – Comparaison de la valeur de σ des angles d'Euler

En conclusion, cette approche constitue une première tentative pour diminuer l'utilisation du gyromètre en vue d'une réduction de la consommation de l'énergie. Cependant, c'est une commutation temporelle forcée. Pour aller plus loin dans notre étude, nous allons, dans la

suite, considérer une autre approche de commutation.

3.2.2 Commutation par loi de détection

Dans cette partie, nous proposons une façon automatique de décider sur l'utilisation intermittente du gyromètre. Rappelons que pendant les phases statiques, où le corps n'est pas soumis à des accélérations élevées, l'attitude peut être calculée en se basant seulement sur les mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre. Dans ce cas, les mesures de vitesse angulaire ne sont plus indispensables dans le processus d'estimation et le gyromètre peut être mis en veille. Ainsi, la décision de commutation entre les deux modes de fonctionnement du capteur est directement liée à la nature du mouvement du corps (statique ou dynamique) [74].
Pour ce faire, nous proposons de garder la même loi de décision développée dans la section 2.3 du chapitre 2 afin de décider si le corps est en mouvement accéléré ou pas. Par conséquent, la commutation entre les deux modes de fonctionnement du capteur se fait selon la décision fournie par le détecteur suivant :

- Si $f_k(y_{a,k}) < s \Rightarrow H_0$: phase statique,
- Si $f_k(y_{a,k}) \geqslant s \Rightarrow H_1$: phase dynamique,

où f_k désigne la fonction de détection calculée à partir de (2.16) et s est la valeur du seuil calculée dans (2.22). D'une façon similaire à l'approche de commutation temporelle, présentée dans le paragraphe précédent, nous détaillons les modifications apportées au modèle d'état et au filtre suite à la réduction de l'utilisation des mesures de vitesse angulaire. Initialement, on considère le modèle d'état donné par (2.26) et (2.46). Évidemment, l'absence de mesures de vitesse angulaire engendre un changement sur le modèle du processus. En effet, si le capteur est en mode standard alors la variation du quaternion est décrite par (2.26). Dès que le capteur est mis en veille (ce qui correspond aux phases statiques de mouvement), cette équation n'est plus valable et la variation du quaternion est supposée décrite par un modèle de marche aléatoire. Dans ce cas, nous avons :

$$q_{k+1} = q_k + w_k^{'}, \tag{3.17}$$

où $w_k^{'}$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et dont la matrice de covariance est notée par $Q_k^{'}$.
Soit la variable binaire γ_k définie dans le paragraphe précédent ($\gamma_k = 1$: le capteur est en mode standard et $\gamma_k = 0$: le capteur est en mode veille). Maintenant, cette variable caractérise aussi la décision fournie par le détecteur, soit [74] :

- $\gamma_k = 0$: le corps rigide est en phase statique (H_0) $\Rightarrow$ le gyromètre est est en mode veille,
- $\gamma_k = 1$: le corps rigide est en phase dynamique (H_1) $\Rightarrow$ le gyromètre est en mode standard.

Ainsi, le modèle du processus peut se réécrire, en fonction de γ_k, comme suit [74]:

$$q_{k+1} = A(\gamma_k)q_k + b(\gamma_k), \tag{3.18}$$

avec $A(\gamma_k)$ et $b(\gamma_k)$ représentent respectivement la matrice de transition et le bruit du processus, définis par :

$$A(\gamma_k) = (\frac{\Delta t}{2}\Omega_k)\gamma_k + I_4, \tag{3.19}$$

$$b(\gamma_k) = \gamma_k w_k + (1-\gamma_k) w_k^{'}. \tag{3.20}$$

La matrice de covariance de $b(\gamma_k)$ est donc donnée par :

$$\bar{Q}_k(\gamma_k, q_k) = \gamma_k Q_k(q_k) + (1-\gamma_k) Q_k^{'}. \tag{3.21}$$

où Q_k correspond à la matrice de covariance du bruit w_k lorsque le gyromètre est en mode standard et dont l'expression est donnée par :

$$Q_k(q_k) = \frac{\Delta t^2}{4} \Xi(q_k) R_g \Xi(q_k)^T, \tag{3.22}$$

avec R_g est la matrice de covariance du bruit de mesure du gyromètre (2.4) et $\Xi(q_k)$ est définie dans (2.87).
Concernant le filtre, nous gardons le q-AKF développé dans le chapitre précédent mais avec des changements sur l'étape de prédiction, à savoir l'équation de calcul du quaternion et de la matrice de covariance *à priori* ((3.7) et (3.8)). Nous avons :

$$\hat{q}_{k/k-1} = A(\gamma_k) \hat{q}_{k-1/k-1}. \tag{3.23}$$

$$P_{k/k-1} = A(\gamma_k) P_{k-1/k-1} A(\gamma_k)^T + \bar{Q}_k(\gamma_k, q_{k/k-1}). \tag{3.24}$$

Évaluation du filtre

Cette partie est dédiée à l'évaluation du filtre q-AKF en simulation numérique, dans le cas d'une utilisation intermittente du gyromètre. Les commutations entre les deux modes de fonctionnement se font selon la décision de la loi de détection calculée dans la section 2.3 du chapitre 2. Rappelons que dans cette section, nous avons présenté trois tests de décision :

- Test 1 : C'est un test déterministe dans le sens où l'on compare la valeur de la norme de l'accélération $||y_{a,k}||$ à deux valeurs de seuil (inférieur et supérieur) pour décider si le corps est en phase statique ou dynamique.
- Test 2 : La décision est prise par rapport à une comparaison d'une fonction de détection f_k (calculée en se basant sur un nombre W de mesures précédentes de l'accélération) avec un seuil calculé en fonction des probabilités données (on donne une valeur seuil de la PFA α).
- Test 3 : Ce test combine les deux tests précédents.

Ainsi, nous utiliserons dans cette partie les trois tests pour décider sur la réduction de l'utilisation du gyromètre. Une comparaison des performances du filtre dans les trois cas sera également présentée. Notons que cette comparaison est basée sur deux principaux critères, à savoir le taux de consommation de l'énergie et la qualité de l'estimation. Selon ces deux critères, nous essayons de choisir le test le plus convenable pour trouver le meilleur compromis.
Pour le scénario de simulation, nous considérons l'exemple précédent de vitesse angulaire (3.15) et nous générons ainsi les mesures des capteurs de la même façon et avec les même paramètres statistiques (même valeurs de variances utilisées dans la paragraphe 3.2.1). Cependant, nous avons changé le profil de l'accélération linéaire $a_{p,k}$ de telle façon qu'il soit le plus proche possible à un profil de la marche humaine, prise comme exemple d'application.

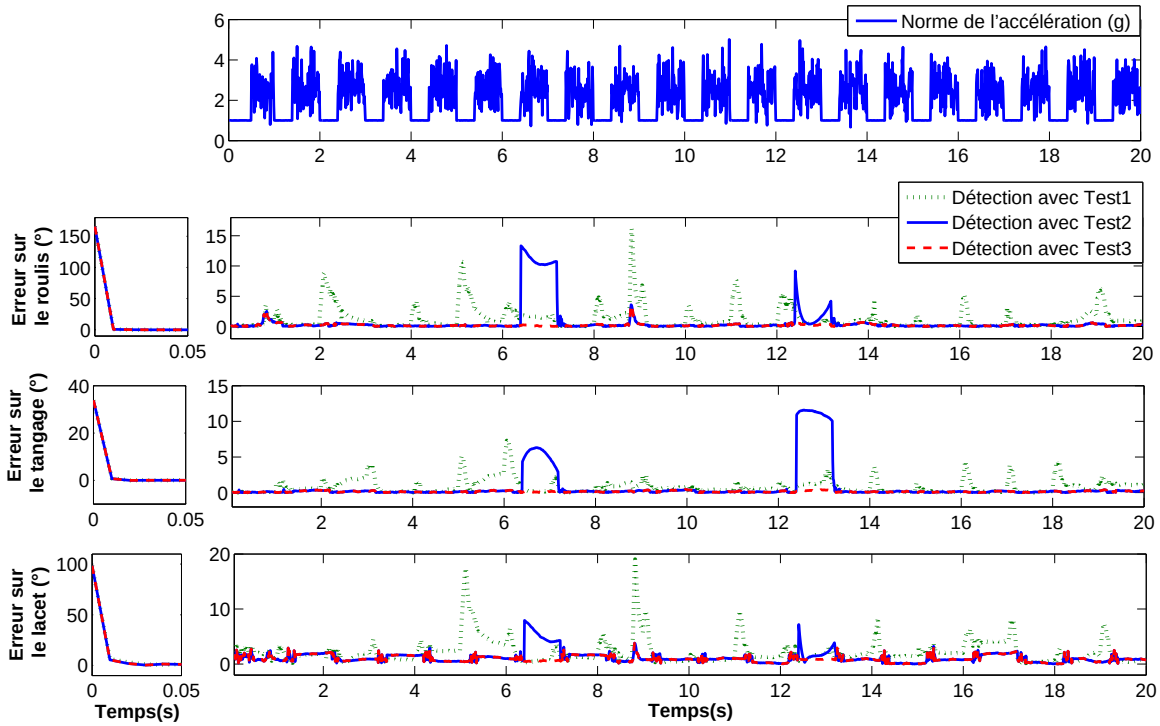


FIGURE 3.4 – Erreurs d'estimation des angles d'Euler

Les paramètres W (longueur de la fenêtre glissante) et α (valeur maximale de PFA), à ajuster pour le calcul de la fonction de détection f_k et du seuil s, sont choisis tels que $W = 20$ et $\alpha = 0.09$ dans les Tests 2 et 3. Pour les seuils supérieur et inférieur du Test 1, nous avons choisi $s_1 = 0.996$ et $s_2 = 1.004$. La Figure 3.4 et le Tableau 3.2 montrent les erreurs d'estimation

	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
Test 1	2.6529	2.3853	3.6288
Test 2	0.2158	0.2602	1.4148
Test 3	0.2220	0.2598	1.4139

TABLE 3.2 – RMSE des erreurs d'estimation des angles d'Euler (comparaison des trois tests)

des angles d'Euler et leurs moyennes quadratiques en utilisant le filtre q-AKF avec réduction de l'acquisition des mesures de vitesse angulaire dans chacun des cas de test (Tests 1, 2 et 3). D'après la Figure 3.4 et le tableau des RMSE, il est clair que l'estimation en utilisant le Test 3 est meilleure par rapport aux deux autres tests. En effet, l'erreur d'estimation calculée dans le cas des Tests 1 et 2 présentent des pics sur les trois angles (voir Figure 3.4). Ceci est dû à la non détection de la phase dynamique à ces instants. Notons que le nombre de pics est beaucoup plus important avec le Test 1, c'est à dire, la probabilité de non détection avec le Test 2 est plus faible qu'avec le Test 1 ; ce qui justifie l'avantage du calcul automatique de la fonction de détection f_k et du seuil s.

Évaluation du filtre en terme de consommation d'énergie

Comme le but principal de l'utilisation intermittente du gyromètre est de réduire la consommation de l'énergie, il nous semble crucial d'évaluer le filtre de point de vue consommation d'énergie. Pour cela, nous proposons dans ce paragraphe de calculer le taux total de la consommation du courant du capteur pour chacun des tests pendant la période de simulation considérée. On définit les variables A, B et C, comme suit :

- A : Consommation de l'énergie du gyromètre en mode standard,
- B : Consommation de l'énergie du gyromètre en mode veille,
- C : Consommation pendant la commutation entre les deux modes de fonctionnement.

Ainsi la consommation totale de l'énergie pendant toute la durée de simulation est donnée par :

$$E = n_1 A + n_2 B + n_3 C, \tag{3.25}$$

où n_1, n_2, n_3 correspondent respectivement à la durée (nombre d'échantillons) où le gyromètre est en mode standard, veille ou en commutation entre les deux modes. Notons que les valeurs de A et B sont déterminées à partir de la fiche technique du capteur. Dans notre cas, nous considérons le gyromètre triaxial L3GD20 de STMicroelectronics comme exemple. A et B sont donc données par [124] : $A = 5.4\ mA$ et $B = 2.7\ mA$. Par contre, la valeur de C n'est pas toujours disponible dans les fiches techniques. Cependant, nous considérons que $C \ll A$ et $C \ll B$.

Dans le Tableau 3.3 nous présentons les valeurs de n_1, n_2, n_3, ainsi que E calculées pour les trois tests. Ainsi, nous constatons que le détecteur qui se base sur la valeur instantanée de la norme de l'accélération $||y_{a,k}||$ (Test 1) est le plus performant de point de vue consommation de l'énergie contrairement aux deux autres tests (Tests 2 et 3). Dans ces derniers, la consommation de l'énergie est presque égale. De plus, étant donnée que le Test 3 est le meilleur en terme de précision d'estimation de l'attitude (voir Tableau 3.2), nous concluons que ce Test est plus performant par rapport au Test 2 puisqu'il permet de compenser les non-détections (PND=0) grâce à la condition $s_1 \leq ||y_{a,k}|| \leq s_2$.

	Test 1	Test 2	Test 3
n_1	1191	1550	1551
n_2	809	450	449
n_3	39	39	39
$E(mA)$	8615.7+ $39C$	9585+ $39C$	9587.7+ $39C$

TABLE 3.3 – Consommation d'énergie dans les trois cas de détection

3.3 Conclusion

Ce chapitre concerne l'estimation de l'attitude avec minimisation de la consommation de l'énergie. D'après une analyse des fiches techniques de nouveaux capteurs inertiels et magné-

tiques MEMS, il s'avère que le gyromètre est le capteur le plus gourmand en énergie par rapport à l'accéléromètre et au magnétomètre. Nous avons proposé dans ce chapitre une méthode de réduction de l'utilisation du gyromètre dans le processus d'estimation en le mettant en veille le plus longtemps possible. Deux façons de commutation ont été envisagées : une commutation temporelle où l'on fixe les périodes de fonctionnement standard et veille du capteur, et une commutation intelligente basée sur la nature de mouvement du corps rigide (cas statique ou cas dynamique). Le filtre de Kalman adaptatif, développé dans le chapitre précédent, a été modifié au niveau du calcul du quaternion a priori ainsi que la matrice de covariance liée au bruit du processus. Les résultats de simulation montrent que le filtre garde une qualité d'estimation satisfaisante malgré l'intermittence appliquée sur les vitesses angulaires.

Chapitre 4

Application d'estimation de l'attitude en navigation pédestre

Sommaire

4.1 Introduction **79**
4.2 Plateforme expérimentale **79**
4.2.1 La centrale inertielle MTi-IMU 80
4.2.2 Le système de capture optique Vicon 81
4.3 Implémentation réelle dans le cas de la marche humaine **82**
4.3.1 Processus expérimental suivi 82
4.3.2 Evaluation du filtre q-AKF 84
4.3.3 Evaluation du filtre QDF 85
4.4 Conclusion **87**

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la validation expérimentale des algorithmes développés dans ce travail pour la détermination de l'attitude. Nous nous intéressons à la navigation pédestre comme exemple d'application. Dans cette dernière, la connaissance de l'attitude permet de reconstituer la position 3D du corps à l'aide de techniques différentes telles que la navigation à l'estime (Dead Reckoning) qui consiste à déduire la position d'un mobile à partir de sa dernière position connue. Dans la première partie du chapitre, nous allons décrire les outils nécessaires pour l'expérimentation. Ensuite, nous allons présenter les essais effectués et nous montrerons les résultats de l'estimation de l'attitude obtenus à l'aide de nos algorithmes dans la suite du chapitre.

4.2 Plateforme expérimentale

Afin de montrer la viabilité des approches d'estimation de l'attitude sur un vrai système physique, nous avons effectué des essais expérimentaux dans le cadre de la marche humaine au sein de la plateforme MOCA du laboratoire GIPSA-Lab. Nous avons utilisé principalement

une centrale inertielle (MTi Xsens) qui fournit des mesures de vitesse angulaire, d'accélération et de champ magnétique et un système optique Vicon qui fournit l'attitude du corps et que nous considérons comme référence de comparaison.

4.2.1 La centrale inertielle MTi-IMU

L'estimation de l'attitude se base sur la fusion de données inertielles et magnétiques. Ces mesures sont typiquement issues des capteurs intégrés dans une centrale inertielle. Nous avons choisi d'utiliser la centrale inertielle MTi (voir Figure 4.1) de *Xsens Technologies* [1]. De petite taille et légère cette centrale peut être utilisée dans plusieurs domaines tels que la commande et la stabilisation des systèmes aéronautiques, la reconstitution de mouvements humains ainsi que la réalité augmentée. Elle est capable de mesurer en temps réel l'accélération (en m/s^2), la vitesse angulaire (en rad/s) et le champ magnétique terrestre (en $Gauss$) d'un objet et de calculer son orientation par rapport à un repère de référence fixe. Ainsi, elle regroupe 3 capteurs prnicipaux de type MEMS : un gyromètre triaxial, un accéléromètre triaxial et un magnétomètre triaxial. Les principales caractéristiques des capteurs de cette centrale inertielle sont résumées dans le Tableau 4.1.

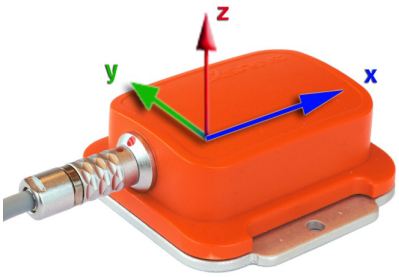


FIGURE 4.1 – Centrale inertielle MTi (dimensions : 58 x 58 x 22 mm (l x L x H))

Paramètres	Gyromètre	Accéléromètre	Magnétomètre
Étendue de mesure	$\pm 300 deg/s$	$\pm 50 m/s^2$	$\pm 750 mGauss$
Densité de bruit	$0.05 deg/s/\sqrt{Hz}$	$0.002 m/s^2/\sqrt{Hz}$	$0.5 mGauss/\sqrt{Hz}$
Bande passante	$40 Hz$	$30 Hz$	$10 Hz$
Gamme de température	$0° - 55°$	$0° - 55°$	$0° - 55°$

TABLE 4.1 – Caractéristiques principales des capteurs de la centrale inertielle MTi

La centrale MTi est vendue dans boitier en plastique de protection pour garder une température homogène des capteurs. Un câble USB est fourni pour assurer le transfert de données entre la centrale et le processeur de calcul (ordinateur). Ces données sont traitées via un logiciel MT Manager permettant de configurer les capteurs (notamment la calibration des magnétomètres), de récupérer les mesures brutes des capteurs, et de les afficher en temps réel.

Il permet aussi de visualiser et d'enregistrer l'orientation de la centrale en temps réel (voir Figure 4.2). Notons que toutes les mesures de la centrale sont échantillonnées avec une fréquence égale à $100Hz$. Cette centrale possède, en interne, un algorithme d'estimation de l'attitude,

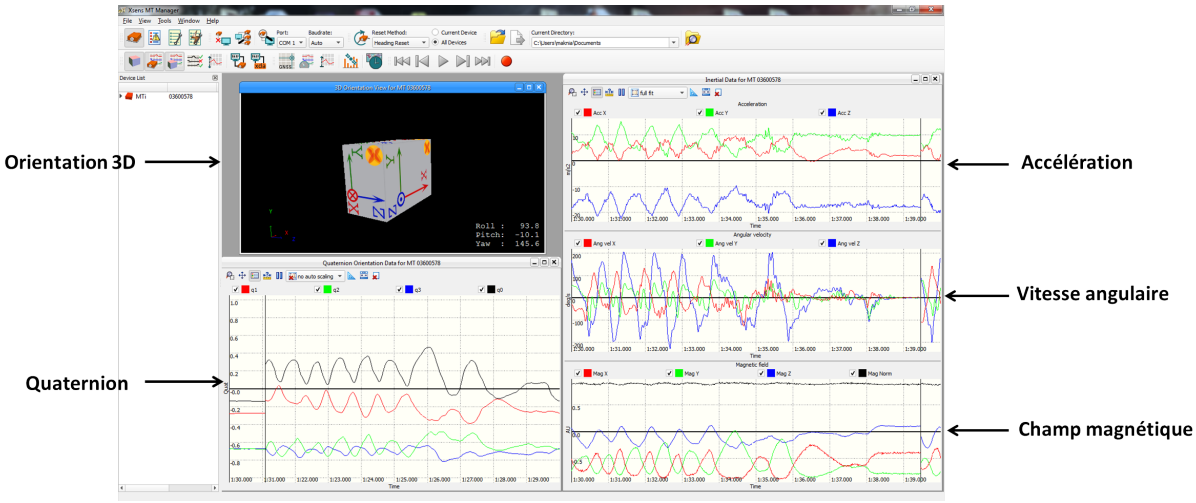


FIGURE 4.2 – Interface graphique du logiciel MT Manager

le Xsens Kalman Filter. On peut donc récupérer à la fois les données brutes (utilisées par nos propres algorithmes) et l'attitude estimée représentée sous forme de quaternion, angles d'Euler ou alors matrice de rotation.
Enfin, notons que tous les vecteurs de mesure des 3 capteurs sont donnés dans un repère orthogonal et direct dont les axes sont parallèles aux bords du boitier de la centrale. Ce repère est considéré comme repère mobile, noté B (voir Figure 4.1). De plus, l'orientation fournie par la centrale est donnée par rapport à un repère fixe N défini par la convention *NED*.
D'autre part, on considère que les données fournies par les capteurs sont préalablement calibrées. Une étape de calibration est réalisée par le constructeur pour limiter les erreurs et les dérives possibles (dues au non alignement, biais, bruit, etc). Un certificat de calibration est joint avec la centrale contenant les différents paramètres qui assurent le passage des données brutes à celles calibrées.

4.2.2 Le système de capture optique Vicon

Les performances des algorithmes développés ont été validés en expérimentation en comparant l'attitude calculée avec celle obtenue à partir du système optique *Vicon* disponible dans la plateforme MOCA du laboratoire GIPSA-Lab (voir Figure 4.3) [2]. *Vicon* est un système de capture de mouvement contenant 12 caméras T40, un système informatique ,un logiciel dédié et des marqueurs fixés sur le corps. Les cameras sont disposées en cercle autour du volume de travail et sont connectées à un serveur et au logiciel permettant de calculer l'attitude et/ou la position d'un corps se déplaçant dans le champ des caméras. Les marqueurs passifs sont des petites sphères qui réfléchissent la lumière (proche infra-rouge) envoyée par les projecteurs. La

position des sphères dans l'espace est calculée à partir des images produites par les caméras.

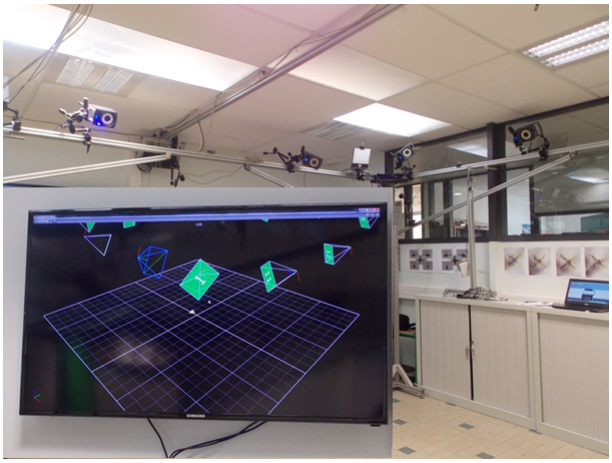


FIGURE 4.3 – Système Vicon dans la plateforme MOCA du laboratoire GIPSA-Lab

4.3 Implémentation réelle dans le cas de la marche humaine

4.3.1 Processus expérimental suivi

Nous avons testé nos algorithmes d'estimation de l'attitude au cours du déplacement d'un sujet humain. Les expériences ont été réalisées dans la salle MOCA du laboratoire GIPSA-lab. La centrale MTi a été utilisé pour recueillir et enregistrer les mesures inertielles et magnétiques pendant un épisode de marche de quelques minutes. La plateforme est équipée du système de capture *Vicon* qui nous a servi pour générer un quaternion de référence. Ainsi, une triade de marqueurs passifs est rigidement attachée à la centrale MTi et est alignée avec celle des capteurs de la centrale pour synchroniser les données du *Vicon* et celles du filtre (voir Figure 4.4). Afin d'éviter les erreurs d'alignement, l'ensemble "centrale MTi-marqueurs" est attaché

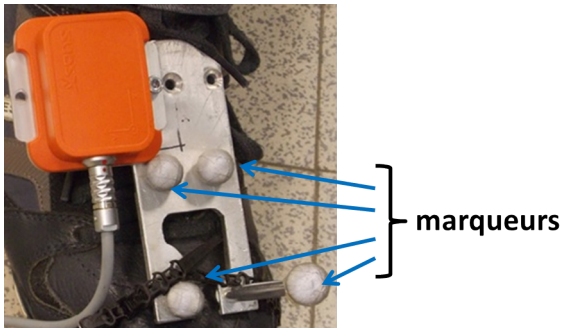


FIGURE 4.4 – Ensemble "centrale MTi-marqueurs"

au pied de telle façon que ses axes coïncident avec les axes principaux du pied. Avant de commencer l'expérience, une étape de calibration du système optique est nécessaire. Elle consiste à effectuer un mouvement aléatoire de baguette d'étalonnage dans l'ensemble du volume de la salle et permet au système de calculer les positions relatives et les orientations des différentes caméras et de les linéariser. Notons que les données du système *Vicon* sont fournies par rapport au repère fixe de la salle, noté N_V. Ce dernier est défini selon la convention NWU où l'axe x_V pointe vers le Nord, l'axe y_V pointe vers l'Ouest et z_V pointe vers le haut. Le repère N_V et celui utilisé par la centrale (NED) n'étant pas alignés, l'angle entre x_V et x_N est égal à 30°. Cette rotation, autour de l'axe z_N, est prise en compte dans l'estimation de l'angle du lacet.
D'autre part, la calibration du gyromètre de la centrale consiste à enlever la valeur du biais des mesures de vitesse angulaire, à chaque instant, après avoir l'identifier. Pour cela, la centrale est laissée immobile pendant une période de 1 min dans une position angulaire quelconque. La valeur du biais correspond à la moyenne des vitesses angulaires mesurées pendant cette période.
Par ailleurs, l'expérience consiste à réaliser une marche le long d'un chemin rectangulaire dans la salle pendant $3min$. Le rectangle est de largeur $2m$ et de longueur $3m$ situé dans un plan parfaitement horizontal comme le montre la Figure 4.5. Une fois recueillies, les données de la

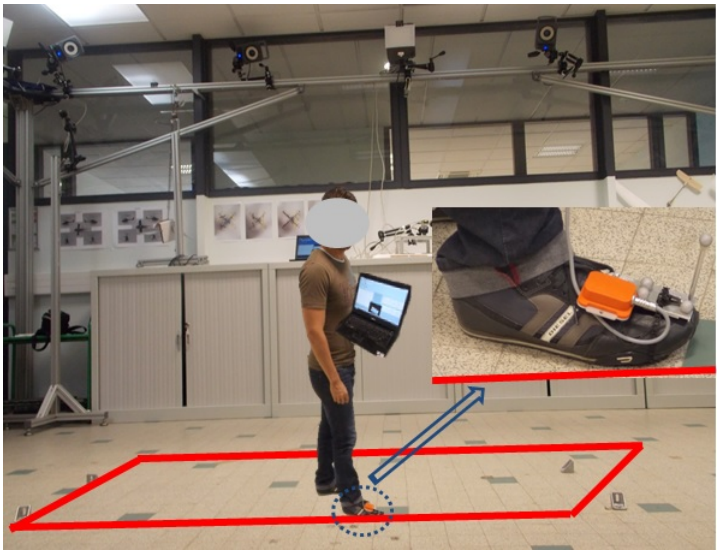


FIGURE 4.5 – Trajectoire réalisée au sein de la salle MOCA

centrale sont traitées hors ligne sous Matlab pour calculer le quaternion en utilisant l'un des filtres (q-AKF ou QDF) développés dans le chapitre 2. Ce quaternion est comparé au quaternion de référence obtenu directement à partir du système $Vicon$. Similairement à l'évaluation en simulation numérique, nous avons choisi de montrer les résultats en angles d'Euler obtenus à partir de la transformation mathématique définie par (2.74).

4.3.2 Evaluation du filtre q-AKF

Afin d'évaluer les performances du filtre q-AKF, une étude comparative entre ce dernier et le filtre QKF, développé par Choukroun et al. dans [28], a été menée. Nous avons tracé l'erreur d'estimation des angles d'Euler dans la Figure 4.6. Les erreurs sont calculées à partir de la valeur absolue de la différence entre les angles estimés (obtenus à partir du quaternion estimé) par chacun des filtres et les angles de référence fournis par le système *Vicon*.

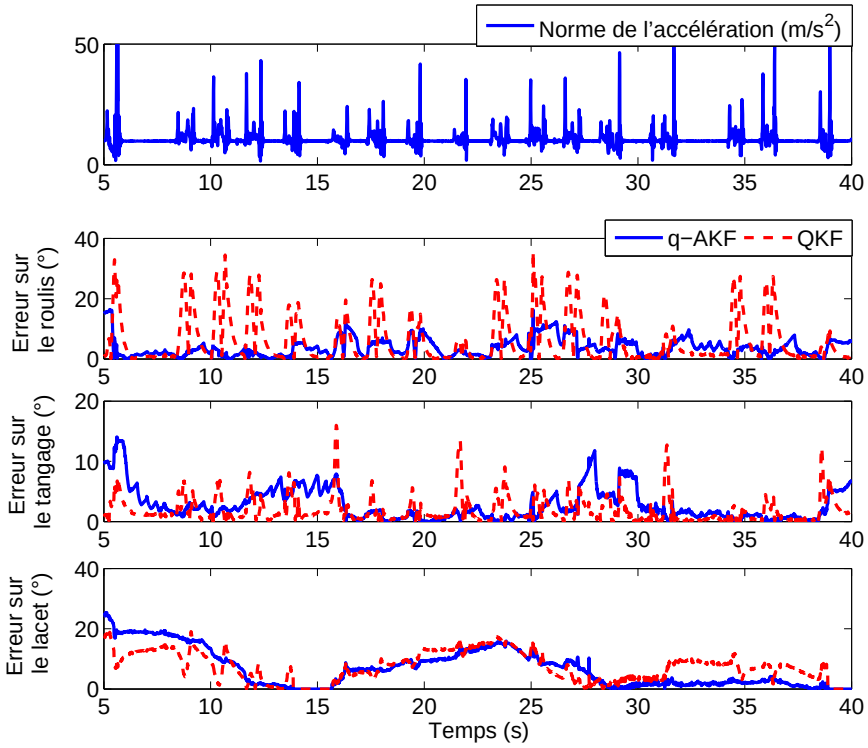


FIGURE 4.6 – Erreurs d'estimation des angles d'Euler dans le cas de la marche humaine

D'après la Figure 4.6 nous remarquons que les erreurs d'estimation sont plus importantes en utilisant le QKF. Les courbes d'évolution des erreurs obtenues par ce dernier présentent des pics importants dès la détection d'une phase dynamique ($a_{p,k}$ est élevée). Cependant, nous remarquons aussi sur les courbes que l'erreur d'estimation du lacet est plus importante par rapport au roulis et au tangage. Ceci est justifié par les perturbations magnétiques causées par la présence d'éléments ferromagnétiques dans la salle. Notons que ces perturbations affectent les mesures du magnétomètre et par conséquent la qualité d'estimation du lacet se dégrade. Dès que ces perturbations disparaissent (par exemple entre $28s$ et $40s$), la valeur de l'erreur devient très faible (inférieure à 5°). Ce problème survient surtout dans le cas d'estimation à l'intérieur contrairement à l'estimation à l'extérieur où les distorsions magnétiques sont négligeables.

Pour une meilleure interprétation des résultats d'estimation, nous avons tracé, dans la Figure 4.7, la fonction de distribution cumulative de l'erreur d'estimation sur chacun des angles dans le cas des deux filtres (q-AKF et QKF). D'après la figure, l'estimation avec le q-AKF est

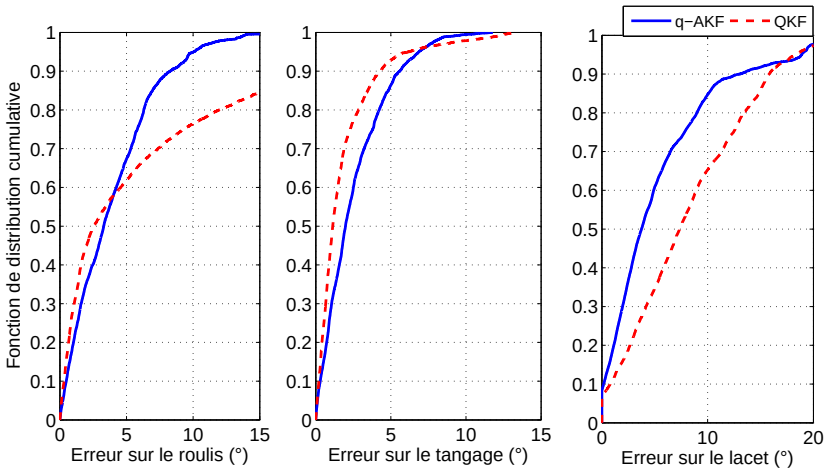


FIGURE 4.7 – Fonction de distribution cumulative de l'erreur d'estimation des angles d'Euler pour les filtres q-AKF et QKF

meilleure que celle obtenue avec le QKF. En effet, la probabilité d'avoir une erreur d'estimation inférieure à 5°, pour le lacet par exemple, est égale à 35 % pour le QKF alors qu'elle est égale à 60 % pour le q-AKF. Nous remarquons aussi que 90% du temps, l'erreur d'estimation sur le lacet est inférieur à 10°.
En conclusion, les résultats montrent que le q-AKF permet de compenser l'effet de l'accélération linéaire au cours de l'estimation de l'attitude. L'amélioration est plus remarquable sur les angles de roulis et tangage que sur le lacet, étant donnée que l'accélération linéaire est plus importante sur ces deux angles dans le cas de la marche humaine.

4.3.3 Evaluation du filtre QDF

Dans le but d'examiner les performances du QDF proposé dans le chapitre 2, nous considérons les mêmes essais expérimentaux dans le cadre de la marche humaine. De la même façon que le q-AKF, nous avons comparé les performances de notre approche avec celles du QKF en traçant les erreurs d'estimation des angles d'Euler pour chacun des deux filtres, dans la Figure 4.8. D'après cette figure, il est clair que l'erreur d'estimation est plus importante en utilisant le QKF que le QDF. Ce dernier permet de compenser l'effet de l'accélération linéaire contrairement au QKF. En effet, les courbes relatives au QKF présentent des pics aux moments de détection des phases dynamiques (qu'on peut les observer sur la courbe d'évolution de la norme de l'accélération dans le haut de la Figure 4.8). A titre d'exemple, durant les intervalles de temps [20s-30s] et [60s-70s], l'erreur d'estimation est inférieure à 5° avec le QDF, tandis qu'elle atteint une valeur maximale de 50° (sur le roulis et le lacet) et 15° (sur le tangage) avec le QKF. Néanmoins, nous signalons que l'erreur d'estimation du tangage et du roulis augmente (d'une valeur maximale de 5°) à certains instants et reste constante pendant un intervalle de temps (entre 22s et 32s par exemple) puis elle redescend et devient très faible (autour de zéro). Ce phénomène est répétitif pour chacun des deux angles (roulis et tangage). Nous avons analysé ces instants de remontée de l'erreur et nous avons constaté que ces évé-

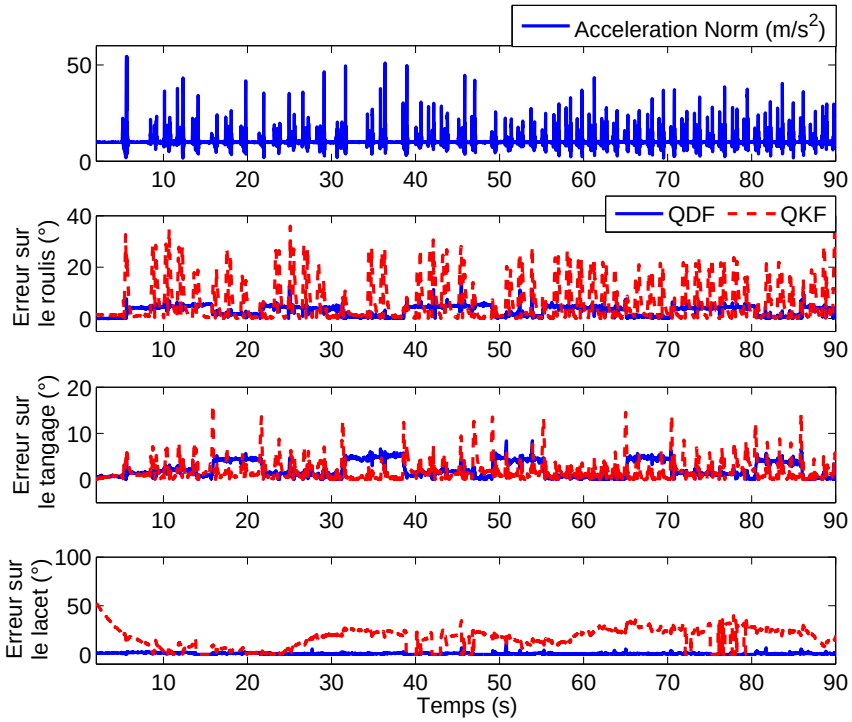


FIGURE 4.8 – Erreur d'estimation des angles d'Euler à partir du QKF et du QDF

nements correspondent à des pics sur les mesures du gyromètre (notamment sur l'axe z_B) où la vitesse angulaire dépasse l'étendu de mesure du capteur, soit $\pm 300\ °/s$ (voir Figure 4.9).

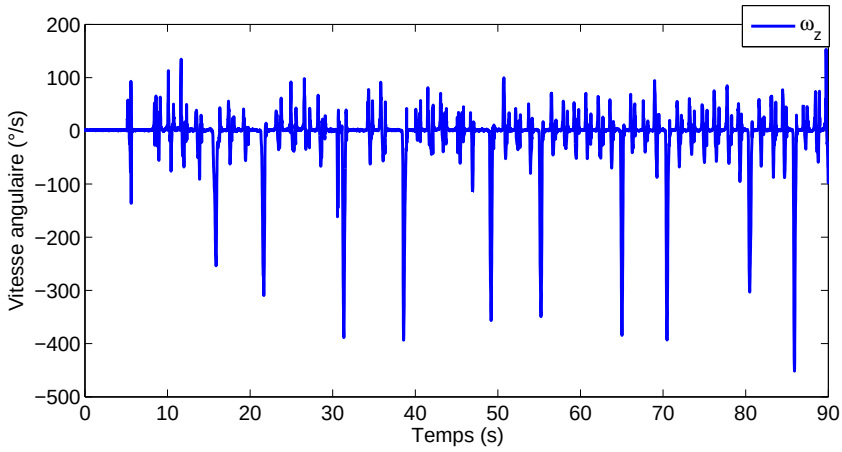


FIGURE 4.9 – Vitesse angulaire sur l'axe z_B

D'autre part, les performances du QDF ont été aussi illustrées à partir du tracé de la fonction cumulative de distribution de l'erreur d'estimation des angles d'Euler, pour les QDF et QKF. La Figure 4.10 montre ces courbes. Les valeurs de la probabilité d'avoir une erreur inférieure à 5° pour les angles d'Euler, calculées à partir des deux filtres, sont résumées dans le Tableau

4.2. Nous constatons que le QDF est clairement plus performant que le QKF. Ceci est justifié par la robustesse de notre approche par rapport aux phases accélérées présentes au cours du déplacement du sujet humain.

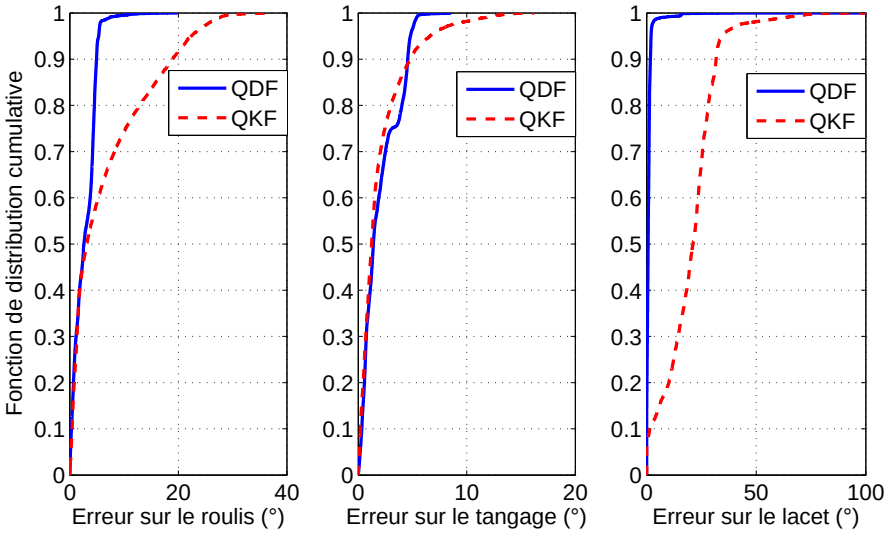


FIGURE 4.10 – Fonction de distribution cumulative de l'erreur d'estimation des angles d'Euler pour le QDF et le QKF

	Roulis	Tangage	Lacet
QKF	59%	90%	15%
QDF	91%	96%	98%

TABLE 4.2 – Probabilité d'avoir une erreur d'estimation $< 5°$ sur les angles d'Euler

4.4 Conclusion

Ce chapitre s'articule autour de la mise en œuvre et la validation expérimentale des approches d'estimation de l'attitude proposées dans ce travail. Nous nous sommes intéressés à l'application de la navigation pédestre. Dans la première partie, les outils nécessaires pour le processus expérimental ont été présentés : une centrale inertielle MTi a été utilisée pour fournir les mesures inertielles et magnétiques et un système optique *Vicon* permet de fournir un quaternion de référence. Ensuite, nous avons décrit le processus de l'expérience dans le cadre de la marche humaine. Les deux approches (q-AKF et QDF) ont été évaluées et comparées au filtre QKF. Les résultats sont satisfaisants pour les deux filtres et la compensation de l'effet de l'accélération linéaire est bien observée.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement accéléré avec une contrainte énergétique, en utilisant une fusion de capteurs inertiels et magnétiques. Partant de la problématique bien établie de l'impact négatif des accélérations linéaires sur l'estimation de l'attitude, le premier objectif de cette thèse était de proposer des solutions efficaces quel que soit la nature de l'accélération subie par le corps rigide. Le second objectif était de proposer des solutions peu gourmandes en énergie afin de faciliter leur implémentation sur des dispositifs ayant des ressources d'énergie limitées, comme c'est le cas des smartphones.

Pour bien aborder ce travail, le **chapitre 1** de ce manuscrit a introduit la notion de l'attitude et présenté différents domaines d'application. Ensuite, nous avons décrit les outils nécessaires pour la détermination de l'attitude, à savoir ses formes de représentation et les capteurs (nature des mesures) utilisés. En particulier, nous nous sommes focalisés sur les centrales inertielles formées par un gyromètre triaxial, un accéléromètre triaxial et un magnétomètre triaxial. Une discussion autour de ces outils nous a permis d'une part de choisir le quaternion comme représentation de l'attitude et d'autre part d'analyser la nature des mesures issues des capteurs. Ce chapitre se termine par un état de l'art sur les différentes approches développées dans la littérature pour l'estimation de l'attitude. Ainsi, il s'avère que le problème d'estimation en phases accélérées de mouvement, bien que crucial, n'est que très peu abordé dans la littérature, les solutions existantes étant très peu satisfaisantes.

Les **chapitres 2 et 3** contiennent nos principales contributions théoriques. Tenant compte du premier objectif, deux algorithmes ont été proposés :

- un filtre de Kalman adaptatif basé sur les quaternions (q-AKF), permettant de fusionner les trois modalités de mesure et d'estimer l'attitude d'un corps rigide. Dans ce cas, l'accélération linéaire est considérée comme un terme de bruit non négligeable. Son effet est compensé à travers un calcul adaptatif de sa matrice de covariance et de sa moyenne. Une loi de détection a été développée afin de distinguer les phases statiques des phases dynamiques et décider ainsi sur le maintient (ou pas) du calcul adaptatif.
- un filtre singulier (QDF) qui combine les mêmes modalités de mesure mais qui est élaboré sur la base d'un nouveau modèle (appelé A-modèle) dans lequel le modèle du processus est définit à partir des mesures issues de l'accéléromètre alors que le modèle d'observation est établi sur la base des mesures de magnétomètre et gyromètre. Ce nouveau modèle nous conduit à un problème d'estimation avec entrée inconnue (l'accélération linéaire dans ce cas). Par conséquent, l'estimateur basé sur ce modèle tient compte de cette accélération et permet de compenser son effet par construction.

Les deux méthodes ont été validées avec des simulations numériques réalisées sous Matlab. Les résultats obtenus montrent que les approches proposées minimisent bien l'effet de l'accélération linéaire sur la qualité d'estimation de l'attitude. Bien que le q-AKF permette de reconstruire correctement l'attitude, il a une complexité de calcul bien plus élevée, comparé au QDF. En effet, par rapport au q-AKF, le QDF n'exige pas de calcul associé à l'étape de détection ni celui de la matrice de covariance rendant ainsi l'algorithme plus rapide.

S'agissant du second objectif, nous avons abordé dans le **chapitre 3** la problématique d'estimation de l'attitude avec utilisation intermittente des mesures de gyromètre, un capteur qui d'après la littérature consomme énormément d'énergie. Nous visons ainsi à réduire la consommation d'énergie dans les centrales inertielles tout en gardant une qualité acceptable d'estimation de l'attitude. C'est une problématique émergente motivée par le développement récent des smartphones et autres dispositifs mobiles embarquant des centrales inertielles. Les gyromètres actuels ayant un mode de fonctionnement intermédiaire entre le mode standard (actif) et le mode éteint (veille), nous avons proposé de commuter entre ces deux modes en cas de besoin. Pour ce faire, un détecteur a été développé en vue de discriminer les deux types de mouvement que subit le corps (accéléré ou statique). La méthode développée a été appliquée sur le q-AKF puis validée en simulation.
Finalement, le **chapitre 4** a été consacré à des expérimentations variées avec des scénarios de marche de sujets humains. Une centrale inertielle a été utilisée pour enregistrer les mesures inertielles et magnétiques. Ces mesures ont par la suite été utilisées pour estimer l'attitude à partir des algorithmes développés dans cette thèse. Dans ce cadre, un système optique a été également utilisé comme référence pour l'attitude.

A l'issue de ce travail, plusieurs **perspectives** sont à soulever dont nous citons quelques unes ci-après :

- Une première piste est liée à la problématique de perturbations magnétiques qui peuvent affecter la qualité de l'estimation. En particulier, dans les applications de navigation à l'intérieur des bâtiments, la présence d'éléments ferromagnétiques est très fréquente et perturbe significativement les mesures du magnétomètre. Ainsi, une déviation importante entre le vrai vecteur champ magnétique terrestre et celui mesuré est observée. En terme d'estimation de l'attitude, cela conduit à des erreurs importantes essentiellement sur le lacet. Il serait donc judicieux de tenir compte de ces perturbations dans le processus d'estimation, probablement, d'une façon analogue à celle des accélérations linéaires.
- Une deuxième piste concerne la prise en compte des accélérations linéaires, supposées être des incertitudes. Dans ce cas, il serait judicieux de traiter la problématique d'estimation avec des techniques de filtrage robuste.
- Une troisième piste serait d'étendre l'estimation de l'attitude avec le modèle singulier. Cette nouvelle formulation nous a permis de développer un estimateur robuste aux accélérations linéaires. Cependant, il serait intéressant de l'étendre vers une utilisation intermittente des gyromètres. Ainsi, dans ce cas, nous serons face à un problème d'estimation d'état avec des données manquantes pour un système singulier. Une étude des conditions d'admissibilité et de régularité du système peut compléter ce travail.
- Une quatrième piste concerne la prise en compte du biais du gyromètre au sein des estimateurs en basculant vers une estimation en parallèle avec celle de l'attitude. L'idée serait d'étendre les algorithmes proposés pour combiner les trois problématiques liées aux capteurs (accélération linéaire, biais sur le gyromètre et perturbations magnétiques).
- Une cinquième piste intéressante est d'étudier la problématique d'estimation de l'attitude en présence de défauts sur les capteurs utilisés afin de les détecter et corriger à partir d'algorithmes de diagnostic.
- Une sixième piste serait d'approfondir l'approche d'utilisation intermittente des me-

sures du gyromètre. La solution proposée dans ce travail est prometteuse, cependant nous pensons à définir un modèle de consommation de l'énergie par le gyromètre durant le processus d'estimation. Selon ce modèle, un critère d'optimisation pourrait être établi. Aussi, on pourrait lier cette intermittence à la charge/décharge de la batterie (par exemple dans le cas d'un smartphone pour une application en navigation pédestre).
Lors de la mise en veille du gyromètre, la vitesse angulaire est inconnue, alors on décrit la dynamique d'évolution de cette mesure par un processus du premier ordre. Cette hypothèse doit être enrichie en considérant plusieurs possibilités de modèles d'évolution de la vitesse angulaire. Une approche d'estimation par modèles multiples interconnectés (IMM) serait donc envisageable.

Annexe A

Détermination des paramètres statistiques de la fonction f_k

A.1 Calcul préliminaire

Soit la variable $x_k = ||y_{a,k}||^2 - g^2$. Cherchons sa moyenne et sa variance.

Moyenne de x_k : On a u_k et $\delta_{a,k}$ sont indépendants. Ainsi, nous calculons la moyenne de x_k comme suit :

$$\begin{aligned} E[x_k] &= E[||y_{a,k}||^2 - g^2] \\ &= E[||\delta_{a,k}||^2 + 2gu_k^T\delta_{a,k}] \\ &= E[||\delta_{a,k}||^2] = E[\delta_{a,k}^T\delta_{a,k}] \\ &= E[Tr(\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T)] = Tr(E[\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T]) \\ &= Tr(\sigma_a^2 I_3) = 3\sigma_a^2, \end{aligned} \tag{A.1}$$

avec $Tr(M)$ désigne la trace de la matrice M.

Variance de x_k : La variance de x_k s'écrit :

$$\begin{aligned} var(x_k) &= E[x_k^2] - (E[x_k])^2 \\ &= E[||\delta_{a,k}||^4 + 4g||\delta_{a,k}||^2 u_k^T\delta_{a,k} + 4g^2(u_k^T\delta_{a,k})^2] - 9\sigma^4 \\ &= E[||\delta_{a,k}||^4] + 4g^2E[(u_k^T\delta_{a,k})^2] - 9\sigma^4, \end{aligned} \tag{A.2}$$

avec

$$\begin{aligned} E[||\delta_{a,k}||^4] &= E[(\delta_{a,k}^x)^4] + E[(\delta_{a,k}^y)^4] + E[(\delta_{a,k}^z)^4] \\ &+ 2E[(\delta_{a,k}^x)^2]E[(\delta_{a,k}^y)^2] + 2E[(\delta_{a,k}^x)^2]E[(\delta_{a,k}^z)^2] + 2E[(\delta_{a,k}^y)^2]E[(\delta_{a,k}^z)^2] \end{aligned} \tag{A.3}$$

Rappelons que le moment centré d'ordre r d'une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ^2 est défini par :

$$\begin{cases} \mu_r = E[(X-\mu)^r] = \frac{r!\sigma^r}{2^{\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!}, \text{ si } r \text{ est pair} \\ \mu_r = 0, \text{ si } r \text{ est impair} \end{cases} \tag{A.4}$$

Dans notre cas, les moments d'ordre 4 de $\delta^x_{a,k}$, $\delta^y_{a,k}$ et $\delta^z_{a,k}$ sont définis par :

$$E[(\delta^x_{a,k})^4] = E[(\delta^y_{a,k})^4] = E[(\delta^z_{a,k})^4] = 3\sigma_a^4.$$

Ainsi,

$$E[||\delta_{a,k}||^4] = 15\sigma_a^2. \tag{A.5}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E[(u_k^T(\delta_{a,k})^T] &= E[(u_k^T(\delta_{a,k})^T(u_k^T\delta_{a,k})] \\ &= E[Tr((u_k^T\delta_{a,k})(u_k^T\delta_{a,k})^T)] \\ &= E[Tr(u_k^T\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T u_k)] \\ &= E[Tr(u_k u_k^T\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T)] \\ &= Tr(E[u_k u_k^T]E[\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T]) = \sigma_a^2 Tr(E[u_k u_k^T]]) \\ &= \sigma_a^2 E[Tr(u_k^T u_k)]) = \sigma_a^2 E[||u_k||^2]) = \sigma_a^2. \end{aligned} \tag{A.6}$$

En substituant les équations (A.5) et (A.6) dans (A.2), on obtient :

$$var(x_k) = 6\sigma_a^4 + 4g^2\sigma_a^2. \tag{A.7}$$

A.2 Calcul de la moyenne et de la variance de f_k

Considérons la fonction de détection f_k définie dans (2.16) par :

$$f_k = \frac{1}{W}\sum_{i=k-W+1}^{k}(||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2). \tag{A.8}$$

La moyenne et la variance de f_k sont données par :

Moyenne de f_k :

$$\begin{aligned} E[f_k] &= E[\frac{1}{W}\sum_{i=k-W+1}^{k}(||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2)] \\ &= \frac{1}{W}\sum_{i=k-W+1}^{k}(E[||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2]) \\ &= \frac{1}{W}\sum_{i=k-W+1}^{k}(E[||y_{a,i}||^2] - \frac{1}{W}\sum_{i=k-W+1}^{k}(g^2 + 3\sigma_a^2) = 0. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Variance de f_k :

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= \frac{1}{W^2} var(\sum_{i=k-W+1}^{k} (||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2) \\
&= \frac{1}{W^2} \sum_{i=k-W+1}^{k} var(||y_{a,i}||^2 - g^2 - 3\sigma_a^2) \\
&= \frac{1}{W^2} \sum_{i=k-W+1}^{k} var(||y_{a,i}||^2) \\
&= \frac{1}{W^2} \sum_{i=k-W+1}^{k} (6\sigma_a^4 + 4g^2\sigma_a^2) \\
&= \frac{1}{W}(6\sigma_a^4 + 4g^2\sigma_a^2). \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

Annexe B

Calcul de la matrice de covariance V

Nous détaillons dans cette annexe le calcul de la matrice de covariance $V = diag(V_1, V_2, V_3)$ définie dans le paragraphe 2.5.3 du chapitre 2, correspondant à l'estimation de l'attitude par modèle singulier.
Rappelons que la matrice V correspond à la covariance du vecteur d'erreur β_{k+1} (2.102). Dans ce qui suit, nous allons calculer V_1, la matrice de covariance du vecteur bruit $-A_k\epsilon_k - v_{k+1}$. On a :

$$V_1 = E[(-A_k\epsilon_k - v_{k+1} - E[-A_k\epsilon_k - v_{k+1}])(-A_k\epsilon_k - v_{k+1} - E[-A_k\epsilon_k - v_{k+1}])^T] \tag{B.1}$$

avec $E[\bullet]$ est l'opérateur de l'espérance mathématique .
Puisque $E[v_{k+1}] = 0$, alors :

$$V_1 = E[A_k\epsilon_k\epsilon_k^T A_k^T] + E[v_{k+1}v_{k+1}^T] + 2E[A_k\epsilon_k v_{k+1}^T] - E[A_k\epsilon_k]E[A_k\epsilon_k]^T. \tag{B.2}$$

En remplaçant v_{k+1} par son expression définie dans l'équation (2.86), on obtient :

$$\begin{aligned} V_1 &= E[A_k\epsilon_k\epsilon_k^T A_k^T] + \frac{1}{4}E[\Xi(q_{k+1})\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1})] + \frac{1}{4}E[\Xi(q_k)\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T\Xi^T(q_k)] \\ &+\frac{1}{4}E[\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{p,k}\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{k+1})] - E[A_k\epsilon_k]E[A_k\epsilon_k]^T \\ &+E[A_k\epsilon_k(\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1}) - \delta_{a,k}^T\Xi^T(q_k))] + E[A_k\epsilon_k\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{q+1})]. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Comme le filtre n'est pas biaisé ($E[\epsilon_k] = 0$), alors :

$$E[A_k\epsilon_k] = 0, \quad \text{puisque } A_k \text{ est supposée déterministe.} \tag{B.4}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1 &= A_kP_kA_k^T + \frac{1}{4}E[\Xi(q_{k+1})\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1})] + \frac{1}{4}E[\Xi(q_k)\delta_{a,k}\delta_{a,k}^T\Xi^T(q_k)] \\ &+\frac{1}{4}E[\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{p,k}\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{k+1})] + E[A_k\epsilon_k(\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1}) - \delta_{a,k}^T\Xi^T(q_k))] \\ &+E[A_k\epsilon_k\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{q+1})]. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Suppposons que $q_{k+1} = q_k + q_\alpha$ et que q_α est un bruit blanc dont la matrice de covariance est : $\sigma_\alpha^2 I_4$. Les erreurs ϵ_k et $\epsilon_{p,k}$ sont supposées indépendants, alors :

$$E[A_k\epsilon_k(\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1}) - \delta_{a,k}^T\Xi^T(q_k))] = 0, \tag{B.6}$$

$$E[A_k \epsilon_k \epsilon_{p,k}^T \Lambda^T(q_{q+1})] = 0, \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} E[\Xi(q_{k+1})\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1})] &= \\ E[\Xi(q_k+q_\alpha)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_k+q_\alpha)] &= \\ E[(\Xi(q_k)+\Xi(q_\alpha))\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T(\Xi^T(q_k)+\Xi^T(q_\alpha))] &= \\ E[\Xi(q_k)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_k)+\Xi(q_\alpha)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_\alpha)] &= \\ E[\Xi(q_k)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_k)] + E[\Xi(q_\alpha)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_\alpha)]. & \end{aligned} \tag{B.8}$$

Définissons maintenant : $\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{pmatrix}$, et écrivons $\Xi(q_k)$ et $\Xi(q_\alpha)$ selon l'équation (1.22).

Supposons que q_α et $\delta_{a,k+1}$ sont indépendants et que $\delta_{a,k+1}$ est identiquement indépendant (i.e. $E[bc] = E[cd] = E[bd] = 0$), alors :

$$E[\Xi(q_k)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_k)] = \Xi(q_k)R_a\Xi^T(q_k), \tag{B.9}$$

et

$$E[\Xi(q_\alpha)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_\alpha)] = diag(A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}), \tag{B.10}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sigma_a^2 E[q_{\alpha,1}^2 + q_{\alpha,2}^2 + q_{\alpha,3}^2], \\ A_{22} &= \sigma_a^2 E[q_{\alpha,0}^2 + q_{\alpha,2}^2 + q_{\alpha,3}^2], \\ A_{33} &= \sigma_a^2 E[q_{\alpha,1}^2 + q_{\alpha,0}^2 + q_{\alpha,3}^2], \\ A_{44} &= \sigma_a^2 E[q_{\alpha,1}^2 + q_{\alpha,2}^2 + q_{\alpha,0}^2]. \end{aligned} \tag{B.11}$$

L'expression de la variance liée à q_α est donnée par :

$$E[q_{\alpha,0}^2] = E[q_{\alpha,1}^2] = E[q_{\alpha,2}^2] = E[q_{\alpha,3}^2] = \sigma_\alpha^2. \tag{B.12}$$

On a alors :

$$E[\Xi(q_\alpha)\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_\alpha)] = 3\sigma_\alpha^2\sigma_a^2 I_4. \tag{B.13}$$

En utilisant les équations (B.9) et (B.13), l'équation (B.8) peut être obtenue par :

$$E[\Xi(q_{k+1})\delta_{a,k+1}\delta_{a,k+1}^T\Xi^T(q_{k+1})] = \Xi(q_k)R_a\Xi^T(q_k) + 3\sigma_\alpha^2\sigma_a^2 I_4. \tag{B.14}$$

Calculons aussi l'expression de $\frac{1}{4}E[\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{p,k}\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{k+1})]$:

$$\frac{1}{4}E[\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{p,k}\epsilon_{p,k}^T\Lambda^T(q_{k+1})] = \frac{3}{4}\sigma_\alpha^2\sigma_p^2 I_4 + \frac{1}{4}\Lambda(q_k)R_p\Lambda^T(q_k). \tag{B.15}$$

Finalement, en substituant A_k par son expression $[H_{acc,k} \quad 0_{4\times4}]$ dans (B.1), alors on obtient la matrice de covariance V_1 comme suit :

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{acc,k}P_k^q H_{acc,k}^T + \frac{1}{2}\Xi(q_k)R_a\Xi^T(q_k) + \frac{3}{4}\sigma_\alpha^2(\sigma_a^2+\sigma_p^2)I_4 \\ &\quad + \frac{1}{4}\Lambda(q_k)R_p\Lambda^T(q_k). \end{aligned} \tag{B.16}$$

D'autre part, pour calculer les matrices V_2 et V_3, nous avons appliqué les mêmes étapes de calcul que celles de V_1.

Annexe C

Autres formes de modèle singulier (M-modèle et AM-Modèle)

C.1 M-modèle

Le modèle mathématique décrivant la dynamique de rotation du corps rigide en mouvement peut être formulé en changeant la disposition des capteurs. La façon classique consiste à définir le modèle du processus à partir des mesures du gyromètre et le modèle d'observation à l'aide des mesures issues d'accéléromètre et de magnétomètre. Afin de compenser l'effet de l'accélération linéaire dans le processus d'estimation de l'attitude, nous avons présenté dans le chapitre 2 une nouvelle formulation dans laquelle le modèle du processus est établi à l'aide des accéléromètres (A-modèle).
Nous pouvons traiter le problème des perturbations magnétiques d'une façon similaire. Dans ce cas, l'équation de sortie du magnétomètre peut se réécrire :

$$y_m = R(q)(m + m_p) + \delta_m, \tag{C.1}$$

où m_p est le terme correspondant aux perturbations magnétiques, supposé inconnu. En discret, m_p est donné par :

$$m_{p,k+1} = m_{p,k} + \epsilon_{m,k}, \tag{C.2}$$

avec $\epsilon_{m,k}$ est l'erreur de modélisation,caractérisée par une matrice de covariance R_m. Ainsi, un modèle (M-modèle) est formulé en utilisant les mesures issues du magnétomètre pour établir le modèle du processus et les mesures du gyromètre et de l'accéléromètre pour définir le modèle d'observation :

$$H_{mg,k+1}q_{k+1} = H_{mg,k}q_k - \tilde{m}_{p,k+1} + v_{m,k+1}, \tag{C.3}$$

$$z_{m,k} = N_{m,k}q_k + n_{m,k}, \tag{C.4}$$

où q_k est le quaternion à l'instant k, $H_{mg,k}$ est la matrice 4×4 contenant les mesures du magnétomètre $y_{m,k}$ définie dans (2.88). $\tilde{m}_{p,k+1} \in \mathbb{R}^3$ est le terme correspondant aux perturbations magnétiques $m_{p,k}$, exprimé par :

$$\tilde{m}_{p,k+1} = -\frac{1}{2}\Lambda(q_{k+1} - q_k)m_{p,k}, \tag{C.5}$$

$\Lambda(q_k)$ est donné par (2.85) et $v_{m,k+1}$ est le bruit du processus défini par :

$$v_{m,k+1} = \frac{1}{2}\Xi(q_{k+1})\delta_{m,k+1} - \frac{1}{2}\Xi(q_k)\delta_{m,k} + \frac{1}{2}\Lambda(q_{k+1})\epsilon_{m,k}, \tag{C.6}$$

avec $\Xi_k(q_k)$ est définie dans (2.87).
$z_{m,k}$, $N_{m,k}$ et $n_{m,k}$ sont respectivement le vecteur, la matrice et le bruit d'observation, exprimés comme suit :
$z_{m,k} = \begin{bmatrix} q_k^\omega \\ 0_{4\times 1} \end{bmatrix}$, $N_{m,k} = \begin{bmatrix} I_4 \\ H_{acc,k} \end{bmatrix}$, $n_{m,k} = \begin{bmatrix} w_{g,k}^q \\ w_{acc,k}^q \end{bmatrix}$, avec q_k^ω le quaternion estimé résultant de l'intégration des mesures des gyromètres à partir de l'équation (2.10) et $H_{acc,k}$ est la matrice 4×4 contenant les mesures de l'accéléromètre $y_{a,k}$ donnée dans (2.83). Les vecteurs de bruits $w_{g,k}^q$ et $w_{acc,k}^q$ liés aux gyromètre et accéléromètre sont respectivement donnés par :

$$w_{g,k}^q = -\frac{\Delta t}{2}\Xi(q_k)\delta_{g,k}, \tag{C.7}$$

$$w_{acc,k}^q = -\frac{1}{2}\Xi(q_k)\delta_{a,k}, \tag{C.8}$$

où Δt, $\delta_{g,k}$ et $\delta_{a,k}$ sont respectivement la période d'échantillonnage et les bruits des capteurs (définis dans les équations (2.1) et (2.2)).

C.2 AM-modèle

Dans cette partie, nous proposons une autre possibilité de modèle d'état, toujours sous forme de système singulier. Il s'agit de combiner les deux modèles élaborés précédemment : le modèle-A et le modèle-M établis dans le chapitre 2 et dans la section précédente, respectivement. Dans ce cas, le modèle de processus est défini par les mesures de l'accéléromètre et magnétomètre alors que le modèle d'observation est défini par les mesures du gyromètre.

C.2.1 Modèle du processus :

Ce modèle est formé par les deux équations (2.81) et (C.3) :

$$\begin{aligned} H_{acc,k+1}q_{k+1} &= H_{acc,k}q_k - \tilde{a}_{p,k+1} + v_{k+1}, && \text{(C.9)} \\ H_{mg,k+1}q_{k+1} &= H_{mg,k}q_k - \tilde{m}_{p,k+1} + v_{m,k+1}, && \text{(C.10)} \\ & && \text{(C.11)} \end{aligned}$$

avec $\tilde{a}_{p,k+1}$ et $\tilde{m}_{p,k+1}$ sont définis dans (2.84) et (C.5) et représentent respectivement l'accélération linéaire et les perturbations magnétiques.
v_{k+1} et $v_{m,k+1}$ sont les bruits liés à l'accéléromètre et magnétomètre, donnés par (2.86) et (C.6), respectivement.
Ainsi, on obtient le modèle du processus suivant :

$$E_{k+1}^{AM}x_{k+1}^{AM} = A^{AM}x_k^{AM} + v_{k+1}^{AM}, \tag{C.12}$$

où x^{AM} est le vecteur d'état formé par le quaternion et les deux entrées inconnues liées à l'accélération linéaire et aux perturbations magnétiques :

$$x_k^{AM} = \begin{bmatrix} q_k \\ \tilde{a}_{p,k} \\ \tilde{m}_{p,k} \end{bmatrix}. \tag{C.13}$$

E_{k+1}^{AM} et A^{AM} sont les matrices définies par :

$$E_{k+1}^{AM} = \begin{bmatrix} H_{acc,k+1} & I_4 & 0 \\ H_{mg,k+1} & 0 & I_4 \end{bmatrix}, \quad A^{AM} = \begin{bmatrix} H_{acc,k} & 0 & 0 \\ H_{mg,k} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{C.14}$$

Le vecteur de bruit du processus v_{k+1}^{AM} est donné par :

$$v_{k+1}^{AM} = \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ v_{m,k+1} \end{bmatrix}. \tag{C.15}$$

C.2.2 Modèle d'observation :

Dans le cas du modèle-AM, le modèle d'observation est défini par les mesures de vitesse angulaire fournies par le gyromètre, comme suit :

$$q_{k+1}^{\omega} = [I_4 \quad 0 \quad 0] x_{k+1}^{AM} + w_{g,k+1}^{q}, \tag{C.16}$$

où $w_{g,k+1}^{q}$ est le bruit d'observation lié aux mesures du gyromètre, défini dans l'équation (C.7).

C.2.3 Modèle d'état :

A partir des équations (C.12) et (C.16), nous obtenons le modèle d'état (AM-modèle) suivant :

$$E_{k+1}^{AM} x_{k+1}^{AM} = A^{AM} x_k^{AM} + v_{k+1}^{AM} \tag{C.17}$$

$$q_{k+1}^{\omega} = [I_4 \quad 0 \quad 0] x_{k+1}^{AM} + w_{g,k+1}^{q} \tag{C.18}$$

Bibliographie

[1] URL: http://www.xsens.com (cit. on p. 80).

[2] URL: http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/recherche/plates-formes.php?id_plateforme=79 (cit. on p. 81).

[3] Ali, A. and El-Sheimy, N. "Low-Cost MEMS-Based Pedestrian Navigation Technique for GPS-Denied Areas." In: *Journal of Sensors,* 2013 (2013) (cit. on p. 10).

[4] Allgeuer, P. and Behnke, S. "Robust sensor fusion for robot attitude estimation." In: *14th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids).* IEEE. 2014, pp. 218–224 (cit. on p. 33).

[5] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., eds. *Optimal Filtering.* Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1979 (cit. on p. 31).

[6] Bachmann, E. R. *Inertial and magnetic tracking of limb segment orientation for inserting humans into synthetic environments.* Tech. rep. DTIC Document, 2000 (cit. on p. 11).

[7] Baldwin, G. et al. "Complementary filter design on the Special Euclidean group SE (3)." In: *European Control Conference (ECC).* IEEE. 2007, pp. 3763–3770 (cit. on p. 34).

[8] Bar-Itzhack, I. Y. "Polar decomposition for attitude determination from vector observations." In: *NASA CONFERENCE PUBLICATION.* NASA. 1993, pp. 243–243 (cit. on p. 27).

[9] Bar-Itzhack, I. Y. "REQUEST : a recursive QUEST algorithm for sequential attitude determination." In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 19.5 (1996), 1034–1038 (cit. on p. 29).

[10] Bar-Itzhack, I. Y., Deutschmann, J, and Markley, F. L. "Quaternion normalization in additive EKF for spacecraft attitude determination." In: *AIAA paper,* (1991), pp. 91–2706 (cit. on p. 31).

[11] Bar-Itzhack, I. Y. and Oshman, Y. "Attitude Determination from Vector Observations : Quaternion Estimation." In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* 21.1 (1985), pp. 128–136 (cit. on pp. 19, 31).

[12] Barshan, B. and Durrant-Whyte, H. F. "Inertial navigation systems for mobile robots." In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* 11.3 (1995), pp. 328–342 (cit. on p. 5).

[13] Batista, P., Silvestre, C., and Oliveira, P. "Sensor-based globally asymptotically stable filters for attitude estimation : Analysis, design, and performance evaluation." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 57.8 (2012), pp. 2095–2100 (cit. on p. 31).

[14] Beeby, S. *MEMS Mechanical Sensors.* Artech House, 2004 (cit. on pp. 20, 22, 40).

[15] Bijker, J. and Steyn, W. "Kalman filter configurations for a low-cost loosely integrated inertial navigation system on an airship." In: *Control Engineering Practice,* 16.12 (2008), pp. 1509–1518 (cit. on p. 31).

[16] Bonnabel, S. "Left-invariant extended Kalman filter and attitude estimation." In: *IEEE conference on decision and control.* 2007, pp. 1027–1032 (cit. on p. 34).

[17] Bonnabel, S., Martin, P., and Rouchon, P. "Non-linear symmetry-preserving observers on Lie groups." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 54.7 (2009), pp. 1709–1713 (cit. on p. 34).

[18] Bonnabel, S., Martin, P., and Salaün, E. "Invariant Extended Kalman Filter : theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem." In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, held jointly with the 28th Chinese Control Conference. (CDC/CCC).* IEEE. 2009, pp. 1297–1304 (cit. on p. 31).

[19] Brás, S. et al. "Global attitude and gyro bias estimation based on set-valued observers." In: *Systems & Control Letters,* 62.10 (2013), pp. 937–942 (cit. on p. 33).

[20] Carmi, A. and Oshman, Y. "Fast particle filtering for attitude and angular-rate estimation from vector observations." In: *Journal of guidance, control, and dynamics,* 32.1 (2009), pp. 70–78 (cit. on p. 32).

[21] Carreira, F. P. N. d. F. et al. "Complementary Filter Design with Three Frequency Bands : Robot Attitude Estimation." In: *International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions (ICARSC),* IEEE. 2015, pp. 168–173 (cit. on p. 33).

[22] Castellanos, F. G. "Estimation de l'attitude et commande bornée en attitude d'un corps rigide : application à un mini hélicoptère à quatre rotors." PhD thesis. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2008 (cit. on pp. 8, 33).

[23] Chao, H. et al. "A comparative evaluation of low-cost IMUs for unmanned autonomous systems." In: *IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI).* IEEE. 2010, pp. 211–216 (cit. on p. 19).

[24] Cheng, J. L. C. F. L. M. Y. "Attitude Determination by Kalman Filtering." In: *Automatica,* 6 (1970), pp. 419–430 (cit. on p. 30).

[25] Cheng, J. L. C. F. L. M. Y. "Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods." In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 30.1 (2007), pp. 12–28 (cit. on pp. 30–32).

[26] Cheng, Y. and Crassidis, J. L. "Particle filtering for sequential spacecraft attitude estimation." In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit.* AIAA Reston, VA. 2004, pp. 16–19 (cit. on p. 32).

[27] Chou, J. C. "Quaternion kinematic and dynamic differential equations." In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* 8.1 (1992), pp. 53–64 (cit. on pp. 16, 17).

[28] Choukroun, D., Bar-Itzhack, I. Y., and Oshman, Y. "Novel quaternion Kalman filter." In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* 42.1 (2006), pp. 174–190 (cit. on pp. 19, 33, 45, 47, 52, 63, 66, 84).

[29] Crassidis, J. L. and Markley, F. L. "Unscented filtering for spacecraft attitude estimation." In: *Journal of guidance, control, and dynamics,* 26.4 (2003), pp. 536–542 (cit. on p. 32).

[30] Darouach, M., Zasadzinski, M., and Mehdi, D. "State estimation of stochastic singular linear systems." In: *International Journal of Systems Science,* 24.2 (1993), pp. 345–354 (cit. on p. 56).

[31] Darouach, M. et al. "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems." In: *International journal of systems science,* 26.10 (1995), pp. 2015–2028 (cit. on p. 56).

[32] Davenport, P. B. *A vector approach to the algebra of rotations with applications.* Tech. rep. TN D-4696, NASA, 1968 (cit. on p. 27).

[33] Diebel, J. "Representing attitude : Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors." In: *Matrix,* 58 (2006), pp. 15–16 (cit. on pp. 12, 13, 15).

[34] Egeland, O and Godhavn, J.-M. "Passivity-based adaptive attitude control of a rigid spacecraft." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 39.4 (1994), pp. 842–846 (cit. on p. 5).

[35] Elkaim, G. "System Identification for Precision Control of a Wingsailed Gps-Guided Catamaran." PhD thesis. Stanford University, 2002 (cit. on p. 29).

[36] Euston, M. et al. "A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing UAV." In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS).* IEEE. 2008, pp. 340–345 (cit. on p. 34).

[37] Farrell, J. L. et al. "A Least Squares Estimate of Satellite Attitude (Grace Wahba)." In: *SIAM Review,* 8.3 (1966), pp. 384–386 (cit. on p. 26).

[38] Fourati, H. et al. "A Nonlinear Filtering Approach for the Attitude and Dynamic Body Acceleration Estimation Based on Inertial and Magnetic Sensors." In: *IEEE Sensors Journal,* 11.1 (2011), pp. 233–244 (cit. on p. 5).

[39] Fourati, H., Manamanni, N., and Handrich, Y. *Fusion de données, estimation de la posture et navigation à l'estime : Application au Bio-logging.* Mathématiques. Editions Universitaires Européennes, Feb. 2012, p. 208 (cit. on pp. 18, 25, 33).

[40] Fourati, H. et al. "A quaternion-based Complementary Sliding Mode Observer for attitude estimation : application in free-ranging animal motions." In: *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* IEEE. 2010, pp. 5056–5061 (cit. on pp. 12, 33).

[41] Fourati, H. et al. "Reconstitution de l'orientation et des accélérations corporelles à l'aide de capteurs inertiels et magnétiques : Application à l'écophysiologie de l'animal sauvage." In: *Conférence Internationale Francophone d'Automatique.* 2010, pp–1 (cit. on p. 12).

[42] *Glossaire Aéronautique.* URL: `http://www.captainjanse.com/glossaire` (cit. on p. 21).

[43] Grip, H. F., Saberi, A., and Johansen, T. A. "Observers for interconnected nonlinear and linear systems." In: *Automatica,* 48.7 (2012), pp. 1339–1346 (cit. on p. 34).

[44] Guilbert, D. "Analyse et classification des signatures des véhicules provenant de capteurs magnétiques pour le développement des algorithmes «Intelligents» de gestion du trafic." PhD thesis. UNIVERSITE DE NANTES, 2015 (cit. on p. 22).

[45] Gupta, M., Tomar, N., and Bhaumik, S. "Observer design for descriptor systems with Lipschitz nonlinearities : An LMI approach." In: *Nonlinear Dynam. Syst. Theory,* 14.3 (2014), pp. 292–302 (cit. on p. 57).

[46] Hu, J.-S. and Sun, K.-C. "A Robust Orientation Estimation Algorithm Using MARG Sensors." In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,* 64.3 (2015), pp. 815–822 (cit. on p. 25).

[47] Hua, M.-D. "Attitude estimation for accelerated vehicles using GPS/INS measurements." In: *Control Engineering Practice,* 18.7 (2010), pp. 723–732 (cit. on p. 34).

[48] Hua, M.-D. et al. "Implementation of a nonlinear attitude estimator for aerial robotic vehicles." In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* 22.1 (2014), pp. 201–213 (cit. on p. 33).

[49] Ishihara, J. Y., Terra, M. H., and Bianco, A. F. "Recursive linear estimation for general discrete-time descriptor systems." In: *Automatica,* 46.4 (2010), pp. 761–766 (cit. on p. 56).

[50] Ishihara, J. Y., Terra, M. H., and Campos, J. C. "Optimal recursive estimation for discrete-time descriptor systems." In: *International journal of systems science,* 36.10 (2005), pp. 605–615 (cit. on p. 56).

[51] Jahanchahi, C. and Mandic, D. P. "A class of quaternion Kalman filters." In: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,* 25.3 (2014), pp. 533–544 (cit. on p. 33).

[52] Jensen, K. J. "Generalized nonlinear complementary attitude filter." In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 34.5 (2011), pp. 1588–1593 (cit. on p. 33).

[53] Jia, Y.-B. "Quaternions and rotations." In: *Com S 477/577 Notes* 1 (2014) (cit. on p. 15).

[54] Keat, J. E. *Analysis of Least-Squares Attitude determination routine DOAOP.* Tech. rep. Computer Sciences Corporation, 1977 (cit. on p. 26).

[55] Khan, N. et al. "Recovery of information through linear prediction technique in attitude estimation of spacecraft systems." In: *Measurement,* 66 (2015), pp. 253–262 (cit. on p. 9).

[56] Kiani, M. and Pourtakdoust, S. H. "Adaptive Square-Root Cubature–Quadrature Kalman Particle Filter for satellite attitude determination using vector observations." In: *Acta Astronautica,* 105.1 (2014), pp. 109–116 (cit. on p. 32).

[57] Kuipers, J. B. *Quaternions and rotation sequences.* Vol. 66. Princeton university press Princeton, 1999 (cit. on pp. 15, 17).

[58] Lageman, C., Trumpf, J., and Mahony, R. "Gradient-like observers for invariant dynamics on a Lie group." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 55.2 (2010), pp. 367–377 (cit. on p. 34).

[59] Lawrence, A. *Modern inertial technology : navigation, guidance, and control.* Springer Science & Business Media, 2012 (cit. on pp. 20, 23).

[60] Lee, J. K. and Park, E. J. "Quasi real-time gait event detection using shank-attached gyroscopes." In: *Medical & biological engineering & computing,* 49.6 (2011), pp. 707–712 (cit. on p. 5).

[61] Lee, J. K., Park, E. J., and Robinovitch, S. N. "Estimation of attitude and external acceleration using inertial sensor measurement during various dynamic conditions." In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,* 61.8 (2012), pp. 2262–2273 (cit. on pp. 30, 35).

[62] Lefferts, E., Markley, F. L., and Shuster, M. D. "Kalman filtering for spacecraft Attitude Estimation." In: *AIAA of Aerospace Sciences Meeting.* 1982 (cit. on p. 30).

[63] Lenz, J. E. "A review of magnetic sensors." In: *Proceedings of the IEEE,* 78.6 (1990), pp. 973–989 (cit. on p. 22).

[64] Li, W. and Wang, J. "Effective adaptive Kalman filter for MEMS-IMU/magnetometers integrated attitude and heading reference systems." In: *Journal of Navigation,* 66.01 (2013), pp. 99–113 (cit. on p. 35).

[65] Ligorio, G. and Sabatini, A. "A Novel Kalman Filter for Human Motion Tracking With an Inertial-Based Dynamic Inclinometer." In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering,* 62.8 (2015), pp. 2033–2043 (cit. on p. 5).

[66] Madgwick, S., Harrison, A., and Vaidyanathan, R. "Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm." In: *IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR).* 2011, pp. 1–7 (cit. on pp. 63, 66).

[67] Madinehi, N. "Rigid body attitude estimation : An overview and comparative study." PhD thesis. The University of Western Ontario, 2013 (cit. on pp. 29, 30, 34).

[68] Mahony, R et al. "A non-linear observer for attitude estimation of a fixed-wing unmanned aerial vehicle without GPS measurements." In: *Transactions of the Institute of Measurement and Control,* 33.6 (2011), pp. 699–717 (cit. on p. 34).

[69] Mahony, R., Hamel, T., and Pflimlin, J.-M. "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 53.5 (2008), pp. 1203–1218 (cit. on pp. 8, 63, 66).

[70] Mahony, R., Hamel, T., and Pflimlin, J.-M. "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 53.5 (2008), pp. 1203–1218 (cit. on p. 33).

[71] Mahony, R. et al. "Nonlinear attitude observers on SO (3) for complementary and compatible measurements : A theoretical study." In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, held jointly with the 28th Chinese Control Conference (CDC/CCC).* IEEE. 2009, pp. 6407–6412 (cit. on p. 33).

[72] Maisonnet, J. "Optimisation et réalisation d'un micro-gyromètre deux axes à poutres vibrantes en silicium." PhD thesis. Université de Franche-Comté, 2009 (cit. on p. 23).

[73] Makni, A., Fourati, H., and Kibangou, A. Y. "Adaptive kalman filter for MEMS-IMU based attitude estimation under external acceleration and parsimonious use of gyroscopes." In: *European Control Conference (ECC).* IEEE. 2014, pp. 1379–1384 (cit. on pp. 68, 69).

[74] Makni, A., Fourati, H., and Kibangou, A. Y. "Energy-aware Adaptive Attitude Estimation Under External Acceleration for Pedestrian Navigation." In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics,* PP.99 (2015), pp. 1–1 (cit. on pp. 41, 48, 49, 68, 73).

[75] Makni, A., Kibangou, A. Y., and Fourati, H. "Descriptor Systems Modeling and Filtering for Robust Multisensor Attitude Estimation Under External Acceleration." In: *Automatica* (under review) (cit. on p. 57).

[76] Makni, A. et al. "Descriptor approach for attitude estimation." In: *IEEE Conference on Control Applications (CCA).* IEEE. 2015, pp. 614–619 (cit. on p. 66).

[77] Markley, F. L. "Attitude determination using vector observations : a fast optimal matrix algorithm." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 41.2 (1993), 261–280 (cit. on p. 27).

[78] Markley, F. L. "Attitude determination using vector observations and the Singular Value Decomposition." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 36.3 (1988), 245–258 (cit. on p. 27).

[79] Markley, F. L. "Attitude Error Representations for Kalman Filtering." In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 26.2 (2003), pp. 311–317 (cit. on p. 31).

[80] Markley, F. L. and Crassidis, J. L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control.* Springer Science and Business Media New York, 2014 (cit. on pp. 9, 14, 15, 28, 30).

[81] Markley, F. L. and Mortari, D. "Quaternion attitude estimation using vector observations." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 48.2 (2000), 359–380 (cit. on pp. 28, 29, 36).

[82] Marques, S., Roberts, C., and Pedro, L. "Comparison of small satellite attitude determination methods." In: (2000) (cit. on p. 31).

[83] Martin, P. and Salaün, E. "Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system." In: *Control Engineering Practice,* 18.7 (2010), pp. 712–722 (cit. on p. 34).

[84] Martin, P. and Salaün, E. "Invariant observers for attitude and heading estimation from low-cost inertial and magnetic sensors." In: *46th IEEE Conference on Decision and Control.* 2008, pp. 1039–1045 (cit. on pp. 24, 34).

[85] Martin, P., Salaün, E., et al. "Generalized Multiplicative Extended Kalman Filter for aided attitude and heading reference system." In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.* 2010, p. 8300 (cit. on p. 31).

[86] Marx, B. "Contribution à la commande et au diagnostic des systèmes algébro-différentiels linéaires." PhD thesis. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2003 (cit. on p. 55).

[87] Moeini, A. and Namvar, M. "Global estimation of rigid-body attitude/position using a single landmark and biased velocity measurements." In: *53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC).* IEEE. 2014, pp. 667–672 (cit. on p. 34).

[88] Mortari, D. "Energy approach algorithm for attitude determination from vector observations." In: *Advances in the Astronautical Sciences,* 89 (1995), pp. 773–773 (cit. on p. 27).

[89] Mortari, D. "ESOQ : A closed-form solution to the Wahba problem." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 45.2 (1997), 195–204 (cit. on p. 28).

[90] Mortari, D. "Second estimator for the optimal quaternion." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 23.4 (2000), 885–888 (cit. on p. 28).

[91] Mortari, D. and Markley, F. L. "How to estimate attitude from vector observations." In: *Advances in the Astronautical Sciences,* 103 (1999), 1979–1996 (cit. on p. 36).

[92] Munguia, R. and Grau, A. "Attitude and heading system based on ekf total state configuration." In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE).* IEEE. 2011, pp. 2147–2152 (cit. on p. 35).

[93] Munoz Diaz, E. et al. "Evaluation of AHRS algorithms for inertial personal localization in industrial environments." In: *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT).* IEEE. 2015, pp. 3412–3417 (cit. on p. 10).

[94] Murray, R. M. et al. *A mathematical introduction to robotic manipulation.* CRC press, 1994 (cit. on p. 12).

[95] Nguyen, H. v. "Estimation d'attitude et diagnostic d'une centrale d'attitude par des outils ensemblistes." PhD thesis. Grenoble, 2011 (cit. on p. 20).

[96] Nikoukhah, R., Willsky, A., and Levy, B. "Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems." In: *IEEE Trans. on Automatic Control,* 37.9 (1992), pp. 1325–1342 (cit. on p. 61).

[97] Nikoukhah, R., Willsky, A. S., and Levy, B. C. "Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 37.9 (1992), pp. 1325–1342 (cit. on pp. 56, 57).

[98] *NOAA.* URL: `http://www.ngdc.noaa.gov` (cit. on pp. 21, 22, 40).

[99] Noda, T. et al. "Animal-mounted gyroscope/accelerometer/magnetometer : In situ measurement of the movement performance of fast-start behaviour in fish." In: *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology,* 451 (2014), pp. 55–68 (cit. on p. 12).

[100] Osorio-Gordillo, G.-L., Darouach, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. "H_∞ dynamical observers design for linear descriptor systems. Application to state and unknown input estimation." In: *European Journal of Control,* (2015) (cit. on p. 57).

[101] Parent, A. "Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des microgyromètres vibrants." PhD thesis. Université Paris Sud-Paris XI, 2008 (cit. on p. 23).

[102] Phillips, W., Hailey, C., and Gebert, G. "Review of attitude representations used for aircraft kinematics." In: *Journal of Aircraft,* 38.4 (2001), pp. 718–737 (cit. on pp. 12, 19, 52).

[103] Plinval, H. et al. "Visual servoing for underactuated VTOL UAVs : a linear, homography-based framework." In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* 24.16 (2014), pp. 2285–2308 (cit. on p. 8).

[104] Psiaki, M. L. "Attitude-Determination Filtering via Extended Quaternion Estimation." In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 23.2 (2000), pp. 206–214 (cit. on p. 29).

[105] Psiaki, M. L. "Backward-smoothing extended Kalman filter." In: *Journal of guidance, control, and dynamics,* 28.5 (2005), pp. 885–894 (cit. on p. 31).

[106] Pucci, D. et al. "Nonlinear feedback control of axisymmetric aerial vehicles." In: *Automatica,* 53 (2015), pp. 72–78 (cit. on p. 8).

[107] Rehbinder, H. and Ghosh, B. K. "Pose estimation using line-based dynamic vision and inertial sensors." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 48.2 (2003), pp. 186–199 (cit. on p. 34).

[108] Rehbinder, H. and Hu, X. "Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies." In: *Automatica,* 40.4 (2004), pp. 653–659 (cit. on p. 35).

[109] Renaudin, V., Afzal, M. H., and Lachapelle, G. "New method for magnetometers based orientation estimation." In: *IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS).* IEEE. 2010, pp. 348–356 (cit. on p. 25).

[110] Renaudin, V. and Combettes, C. "Magnetic, Acceleration Fields and Gyroscope Quaternion (MAGYQ)-Based Attitude Estimation with Smartphone Sensors for Indoor Pedestrian Navigation." In: *Sensors,* 14.12 (2014), pp. 22864–22890 (cit. on p. 10).

[111] Roberts, A. and Tayebi, A. "On the attitude estimation of accelerating rigid-bodies using GPS and IMU measurements." In: *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC).* IEEE. 2011, pp. 8088–8093 (cit. on p. 34).

[112] Roetenberg, D., Slycke, P. J., and Veltink, P. H. "Ambulatory position and orientation tracking fusing magnetic and inertial sensing." In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering,* 54.5 (2007), pp. 883–890 (cit. on p. 11).

[113] Sabatini, A. M. "Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing." In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering,* 53.7 (2006), pp. 1346–1356 (cit. on p. 31).

[114] Sabatini, A. M. "Estimating Three-Dimensional Orientation of Human Body Parts by Inertial/Magnetic Sensing." In: *Sensors,* 11.2 (2011), pp. 1489–1525 (cit. on p. 11).

[115] Salcudean, S. "A globally convergent angular velocity observer for rigid body motion." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 36.12 (1991), pp. 1493–1497 (cit. on p. 33).

[116] Salmeron-Quiroz, B. B. "Fusion de données multicapteurs pour la capture de mouvement." PhD thesis. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2007 (cit. on p. 19).

[117] Shuster, M. D. "A simple Kalman filter and smoother for spacecraft attitude." In: *Journal of the Astronautical Sciences,* 37.1 (1989), 89–106 (cit. on p. 29).

[118] Shuster, M. D. and Oh, S. D. "Three-Axis Attitude Determination from vector Observations." In: *Journal of Guidance and Control,* 4.1 (1981), pp. 70–77 (cit. on p. 28).

[119] Shuster, M. D. "A survey of attitude representations." In: *Navigation,* 8.9 (1993), pp. 439–517 (cit. on pp. 12, 13, 15).

[120] Song, Y. and Grizzle, J. W. "The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems." In: *American Control Conference.* IEEE. 1992, pp. 3365–3369 (cit. on p. 31).

[121] Springmann, J. C. "Satellite Attitude Determination with Low-Cost Sensors." PhD thesis. University of Michigan, 2013 (cit. on p. 9).

[122] Steliga, K. and Szynal, D. "On Markov-type inequalities." In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 58.2 (2010), pp. 137–152 (cit. on p. 43).

[123] STMicroelectronics. *MEMS digital output motion sensor ultra low-power high performance three-axis "nano" accelerometer.* Tech. rep. STMicroelectronics (cit. on p. 25).

[124] STMicroelectronics. *"MEMS motion sensor :three-axis digital output gyroscope.* Tech. rep. STMicroelectronics (cit. on pp. 25, 76).

[125] Suh, Y. S. "Orientation estimation using a quaternion-based indirect Kalman filter with adaptive estimation of external acceleration." In: *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* 59.12 (2010), pp. 3296–3305 (cit. on p. 35).

[126] Sun, S. et al. "Adaptive Kalman filter for orientation estimation in micro-sensor motion capture." In: *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion (FUSION).* IEEE. 2011, pp. 1–8 (cit. on p. 11).

[127] Tang, X., Liu, Z., and Zhang, J. "Square-root quaternion cubature Kalman filtering for spacecraft attitude estimation." In: *Acta Astronautica,* 76 (2012), pp. 84–94 (cit. on p. 32).

[128] Tayebi, A, Roberts, A, and Benallegue, A. "Inertial measurements based dynamic attitude estimation and velocity-free attitude stabilization." In: *American Control Conference (ACC).* IEEE. 2011, pp. 1027–1032 (cit. on p. 8).

[129] Thienel, J and Sanner, R. M. "A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise." In: *IEEE Transactions on Automatic Control,* 48.11 (2003), pp. 2011–2015 (cit. on p. 33).

[130] Tian, Y., Wei, H., and Tan, J. "An adaptive-gain complementary filter for real-time human motion tracking with marg sensors in free-living environments." In: *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering,* 21.2 (2013), pp. 254–264 (cit. on p. 11).

[131] Titterton, D. and Weston, J. L. *Strapdown inertial navigation technology.* Vol. 17. IET, 2004 (cit. on p. 6).

[132] Van Der Merwe, R., Wan, E. A., Julier, S., et al. "Sigma-point Kalman filters for nonlinear estimation and sensor-fusion : Applications to integrated navigation." In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation & Control Conference.* 2004, pp. 16–19 (cit. on p. 32).

[133] Vasconcelos, J. F. et al. "Discrete-time complementary filters for attitude and position estimation : Design, analysis and experimental validation." In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* 19.1 (2011), pp. 181–198 (cit. on p. 34).

[134] Vasconcelos, J. F., Silvestre, C., and Oliveira, P. J. "A nonlinear observer for rigid body attitude estimation using vector observations." In: *World Congress.* Vol. 17. 1. 2008, pp. 8599–8604 (cit. on p. 33).

[135] Vasconcelos, J. F. et al. "A nonlinear position and attitude observer on SE (3) using landmark measurements." In: *Systems & Control Letters,* 59.3 (2010), pp. 155–166 (cit. on p. 34).

[136] Vik, B., Fossen, T., et al. "A nonlinear observer for GPS and INS integration." In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* Vol. 3. IEEE. 2001, pp. 2956–2961 (cit. on pp. 33, 34).

[137] Wahba, G. "A Least Squares Estimate of Satellite Attitude." In: *SIAM Review,* 7.3 (1965) (cit. on p. 25).

[138] Wang, X.-M. and Bernhard, P. "Filtrage et lissage des systèmes implicites discrets." In: (1989) (cit. on p. 56).

[139] Wertz, J. R. *Spacecraft attitude determination and control.* Vol. 73. Springer Science & Business Media, 2012 (cit. on p. 9).

[140] Widodo, R. B., Edayoshi, H., and Wada, C. "Complementary filter for orientation estimation : Adaptive gain based on dynamic acceleration and its change." In: *7th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems (SCIS) held jointly with Advanced 15th International Symposium on Intelligent Systems (ISIS).* IEEE. 2014, pp. 906–909 (cit. on p. 33).

[141] Yazdi, N., Ayazi, F., and Najafi, K. "Micromachined inertial sensors." In: *Proceedings of the IEEE,* 86.8 (1998), pp. 1640–1659 (cit. on p. 24).

[142] Yuan, X. et al. "Quaternion-Based Unscented Kalman Filter for Accurate Indoor Heading Estimation Using Wearable Multi-Sensor System." In: *Sensors,* 15.5 (2015), pp. 10872–10890 (cit. on p. 32).

[143] Yun, X. and Bachmann, E. R. "Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based Kalman filter for human body motion tracking." In: *IEEE Transactions on Robotics,* 22.6 (2006), pp. 1216–1227 (cit. on p. 31).

[144] Yun, X., Bachmann, E. R., and McGhee, R. B. "A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements." In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,* 57.3 (2008), pp. 638–650 (cit. on p. 29).

[145] Yun, X. et al. "Self-contained position tracking of human movement using small inertial/magnetic sensor modules." In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation.* IEEE. 2007, pp. 2526–2533 (cit. on p. 5).

[146] Zamani, M., Trumpf, J., and Mahony, R. E. "Nonlinear Attitude Filtering : A Comparison Study." In: *CoRR,* abs/1502.03990 (2015) (cit. on p. 30).

Résumé — Dans ce travail de thèse on s'intéresse à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en mouvement dans l'espace 3D en utilisant les quaternions comme représentation. Cette problématique a été largement étudiée dans la littérature sous divers domaines d'application. L'objectif de la thèse est de proposer de nouvelles méthodes de fusion de données en combinant des mesures inertielles et magnétiques. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'attitude en cas de mouvement accéléré où l'accélération linéaire du corps n'est plus négligeable devant la gravité. Deux approches ont été proposées dans ce cadre. La première utilise un filtre de Kalman adaptatif pour la compensation des accélérations linéaires. Précisément, des lois de détection ont été développées pour distinguer d'une façon automatique les différentes phases de mouvement (statiques et dynamiques). Ainsi, la matrice de covariance associée à l'accélération linéaire est estimée afin d'ajuster le gain du filtre. La deuxième approche consiste à intégrer un filtre singulier élaboré sur la base d'un nouveau modèle, dans lequel le modèle du processus est défini en se basant sur les mesures issues de l'accéléromètre tandis que le modèle d'observation est défini par les mesures issues du gyromètres et du magnétomètres. Cette formulation permet de prendre en compte l'effet des accélérations linéaires d'une manière efficace. Dans un deuxième temps, on s'est focalisé sur l'estimation de l'attitude avec utilisation intermittente de gyromètres, considérés comme capteurs énergivores. Nous avons étudié dans ce cas la façon la plus adéquate afin de réduire l'acquisition des mesures de vitesse angulaire tout en gardant une qualité acceptable de l'estimation de l'attitude. Toutes les approches développées ont été validées par des simulations numériques ainsi que des expérimentations utilisant des données réelles.
Mots clés : Estimation de l'attitude, quaternion, filtre de Kalman, capteurs inertiels et magnétiques, phases dynamique et statique, systèmes singuliers.

Abstract — In this PhD. thesis we deal with attitude estimation of accelerated rigid body moving in the 3D space using quaternion parameterization. This problem has been widely studied in the literature in various application areas. The main objective of this thesis is to propose new methods for data fusion to combine inertial and magnetic measurements. The first challenge concerns attitude estimation during dynamic cases, in which external acceleration of the body is not negligible compared to the Gravity. Two main approaches are proposed in this context. First, a quatenion-based adaptive Kalman filter (q-AKF) was designed in order to compensate for such external acceleration. Precisely, a smart detector is designed to decide whether the body is in static or dynamic case. Then, the covariance matrix of the external acceleration is estimated to tune the filter gain. Second, we developed descriptor filter based on a new formulation of the dynamic model where the process model is fed by accelerometer measurements while observation model is fed by gyros and magnetometer measurements. Such modeling gives rise to a descriptor system. The resulting model allows taking the external acceleration of the body into account in a very efficient way. The second challenge is related to the energy consumption issue of gyroscope, considered as the most power consuming sensor. We study the way to reduce the gyro measurements acquisition by switching on/off the sensor while maintaining an acceptable attitude estimation. The efficiency of the proposed methods is evaluated by means of numerical simulations and experimental tests.
Keywords : Attitude estimation, Kalman filter, inertial and magnetic sensors, dynamic and static cases, singular systems.

Laboratoire GIPSA-lab - ENSE3 - BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, FRANCE.