



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE 427
INFORMATIQUE PARIS SUD

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT
SYNTHÈSE EN FRANÇAIS

INFORMATIQUE

par

Mathilde EXCOFFIER

Chance-Constrained Programming Approaches
for Staffing and Shift-Scheduling Problems
with Uncertain Forecasts
Application to Call Centers

Date de soutenance : 30/09/2015

Composition du jury :

Directeur de thèse :	Pr. Steven MARTIN	Université Paris-Sud
Président du jury :	Pr. Alain DENISE	Université Paris-Sud
Rapporteurs :	Pr. Dominique FEILLET	Ecole des Mines de Saint-Etienne
	Dr. Safia KEDAD-SIDHOUM	Université Pierre et Marie Curie
Examineurs :	Dr. Céline GICQUEL	Université Paris-Sud
	Dr. Oualid JOUINI	Ecole Centrale Paris
	Pr. Pierre L'ECUYER	Université de Montréal, Canada

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS

L'optimisation mathématique est la discipline consacrée à l'étude et la formulation de problèmes d'optimisation. Ces problèmes consistent à choisir la meilleure solution au sein d'un ensemble de solutions possibles en fonction d'un objectif annoncé et de certaines contraintes posées sur les variables. Certains sous-domaines, comme l'optimisation stochastique ou l'optimisation robuste, se concentrent sur les problèmes dont les données sont soumises à incertitude.

L'optimisation stochastique a de nombreux sujets d'application dans les problèmes réels. La planification de personnel dans les systèmes de files d'attente, et particulièrement dans les centres d'appels, est l'un d'eux. Un centre d'appels est une infrastructure au sein d'une entreprise composée d'agents employés à répondre aux appels de clients. Ces structures peuvent gérer des appels entrants mais aussi en émettre, et peuvent être étendues à d'autres services comme la gestion d'emails ou la communication par messagerie instantanée. Dans [Brown et al. \[2005\]](#), il est expliqué que les centres d'appels emploient aux États-Unis plus de 3,5 millions de personnes (statistiques de 2002). En raison de son importance croissante dans l'industrie, l'activité des centres d'appels est un sujet très documenté en recherche opérationnelle ([Aksin et al. \[2007\]](#) ou [Gans et al. \[2003\]](#) par exemple, proposent une revue du sujet). Plusieurs disciplines sont sollicitées pour l'étude complète des centres d'appels : les mathématiques, la recherche opérationnelle, le génie industriel, la sociologie, etc.

Les centres d'appels sont de plus en plus présentes dans les grosses organisations de manière à fournir une structure de contact client-entreprise convenable. Selon [Brown et al. \[2005\]](#), les centres d'appels représentent 70% des interactions commerciales totales aux États-Unis en 2002. Par conséquent, que ce soit pour des centres d'urgence ou des hotlines de services clients, ces derniers doivent être servis en un temps très limité. La qualité de service est primordiale dans la gestion des centres d'appels. Ils représentent donc un sujet d'étude critique au regard de la satisfaction client.

De plus, ces structures sont coûteuses pour les entreprises, et le coût de leur masse salariale représente 60% à 80% du budget total opérationnel (Aksin et al. [2007]). Dès lors, une gestion efficace de la main d'œuvre est essentielle afin de garantir la rentabilité de la structure.

Cette thèse est consacrée à l'optimisation des ressources dans une file d'attente sous incertitude, et en particulier à l'optimisation à court-terme du dimensionnement et de la planification de main d'œuvre dans un centre d'appels.

L'optimisation stochastique a pour but de modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation dans lesquels certains paramètres sont sujets à incertitude. Ce domaine est extrêmement sollicité pour gérer les problèmes d'optimisation de la réalité dans lesquels l'incertitude est un facteur présent et très influent. Le but est d'optimiser une fonction-objectif relativement à des réalisations possibles tout en quantifiant ou limitant un risque défini. Les lois de probabilités, discrètes ou continues, font partie intégrantes des problèmes d'optimisation et sont représentées de différentes manières. Lorsque nous ne possédons pas d'informations suffisantes sur les lois de probabilités, les méthodes d'optimisation reposent sur des approches robustes et *distributionally robust*.

L'optimisation sous incertitude est un sujet très vaste et le cadre de cette thèse est défini comme suit : les variables aléatoires sont supposées suivre des lois de probabilité continues. Les problèmes d'optimisation sont des problèmes stochastiques non linéaires mixtes : les variables du problème sont des entiers, les paramètres sont des réels et les contraintes sont non linéaires. Des approches en contraintes en probabilités sont développées autant pour l'approche stochastique que pour l'approche *distributionally robust*.

Ces travaux font appels à des notions d'optimisation combinatoire, d'optimisation sous incertitude, mais aussi à la théorie des files d'attente. La bibliographie est donnée à la fin de cette synthèse mais l'état de l'art détaillé et commenté se trouve dans le mémoire complet rédigé en anglais.

Contributions principales de la thèse

Ce document est une synthèse du mémoire de thèse original. Les contributions sont présentées ici mais ne sont pas développées. Cette thèse se concentre sur la proposition de méthodes de résolution en optimisation sous incertitude des problèmes de dimensionnement et de planification en gestion du personnel avec incertitude de la demande. Les modélisations sont mises en application pour le cas des centres d'appels.

Le centre d'appels est modélisé, en accord avec de nombreuses approches déjà publiées, par un système de file d'attente simple. Une fois la décision de dimensionnement prise, les ajustements en temps réel sont interdits. Cela signifie que les problèmes d'optimisation avec recours sont ignorés.

Formulation du problème

Le centre d'appels est considéré comme étant à unique compétence. En effet, les agents sont capables de répondre à tous les appels et par conséquent, nous ne considérons pas les appels comme étant typés. De plus, le système est étudié en multi-période et multi-*shift* (plusieurs emplois du temps sont possibles). L'horizon de temps est habituellement une journée ou une semaine que l'on découpe en courtes périodes de temps. Les agents travaillent ensuite selon des horaires prédéfinis, selon des contraintes légales (temps plein ou temps partiel, pauses déjeuner). L'assemblage des différents emplois du temps couvre complètement l'horizon de planification.

Le modèle de dimensionnement est basé sur une approche utilisant les formules d'Erlang en considérant l'approximation *SIPP* (Stationary Independent Period-by-Period). Les approches Erlang-C (en ignorant les abandons de clients dans la file d'attente) et Erlang-A (modèle étendu incluant une probabilité d'abandon) s'intègrent dans notre formulation de problème. Erlang-A propose une meilleure représentation de la réalité. La qualité de service est définie dans cette thèse par un temps moyen d'attente *EW*T (Expected Waiting Time) limité. Une valeur maximum de *EW*T à ne pas dépasser est fixée : c'est la mesure d'évaluation de performance. Une autre mesure largement utilisée, le *TSF* (Telephone Service Factor), définit une proportion d'appels devant être servis en moins d'une certaine durée fixée. Ces deux mesures ont des limitations et le choix de l'une d'entre elles n'est pas évident. L'*EW*T ne donne pas d'information sur la variabilité des temps d'attente alors que le *TSF* ne renseigne pas sur les temps d'attente effectifs. Une combinaison de ces deux mesures serait intéressante à considérer mais sans nul doute très complexe à calculer.

Les temps d'arrivées dans le système de file d'attente sont supposés être sujet à incertitude pour répondre à une des difficultés principales du problème de dimensionnement de personnel. Les taux d'arrivées moyens sont modélisés par des variables aléatoires à loi de probabilité normale. Les moyennes et variances sont connues.

Le problème de planification est modélisé selon un problème d'optimisation à contrainte

en probabilité jointe. Sous incertitude, les contraintes en probabilité caractérisent le risque maximum autorisé de ne pas déterminer les bonnes valeurs de nombres d'agents requis. Les contraintes sont définies avec une probabilité jointe plutôt que des probabilités individuelles dans le but de garantir un niveau de service défini sur l'ensemble de l'horizon de temps.

Cette formulation permet de considérer un niveau de risque global au lieu de le définir période par période. Nous avons choisi cette approche pour plusieurs raisons. D'une part, dans le cadre de l'application à un problème réel, il est plus aisé pour un responsable de définir un niveau de risque sur une journée ou une semaine plutôt qu'évaluer des valeurs pour chaque courte période de temps (en général 15 minutes, 30 minutes ou 60 minutes). De plus, cette formulation permet d'avoir une valeur de niveau de service garantie sur toutes les périodes. Pour finir, notre approche propose de répartir le risque sur les périodes et d'optimiser cette distribution dans la formulation même du problème d'optimisation. Cette approche permet d'avoir une solution encore plus minimisée.

Approches d'optimisation stochastique des problèmes joints

Plusieurs approches d'optimisation stochastiques sont proposées afin de modéliser le problème caractérisé dans la partie précédente.

Le premier modèle considère le problème en deux étapes : les besoins en agents sont calculés dans une étape de dimensionnement et la planification est ensuite établie par une étape d'optimisation stochastique. Les valeurs de besoins en agents sont déterminées notamment à partir des valeurs de taux d'arrivées, qui sont des variables aléatoires. Par conséquent, ces besoins sont des variables aléatoires. Nous supposons qu'elles suivent des lois de probabilité normales indépendantes.

Le deuxième modèle décrit le problème en une étape : les problèmes de dimensionnement et planification sont résolus ensemble et formulés en un problème d'optimisation. Cette approche est introduite dans le but de fournir une formulation unique, simple et rapide à résoudre, et permettant de réduire les approximations faites entre les deux problèmes. Cette modélisation générale est moins précise que l'emploi de simulations sur données réelles mais propose des outils génériques qui sont facilement adaptables. Au sein des approches par modélisation, notre modèle a l'avantage d'être construit pour réduire les différentes approximations induites par la modélisation et proposer des solutions plus proches de la réalité.

Afin d'aboutir à des formulations en problèmes déterministes linéaires mixtes résolubles, la contrainte en probabilités des problèmes stochastiques est reformulée en contraintes en probabilités individuelles. Le niveau de risque pour chacune des contraintes engendrées est une proportion du niveau de risque global défini sur la contrainte en probabilité jointe. Ces proportions sont dynamiquement allouées. En effet, au lieu de définir la répartition du risque avant de résoudre le problème d'optimisation, la proportion du risque à chacune des périodes est définie par une variable à optimiser que l'on introduit dans la formulation. Cela permet donc de proposer une gestion du risque dynamique qui finalement mène à une solution finale moins coûteuse. Pour finir, les formulations déterministes résolubles sont obtenues par linéarisations par morceaux de fonctions continues convexes. Nous obtenons une borne inférieure et une borne supérieure de la solution optimale.

À notre connaissance, les approches déjà publiées s'appuient sur la discrétisation de la loi de probabilité (ou bien considèrent une loi discrète) de manière à faciliter la modélisation du problème d'optimisation. Dans cette thèse, en opposition aux approches standards, la modélisation est dictée par l'idée de maintenir une formulation à variables continues.

D'une part, les taux d'arrivées moyens sont supposés suivre des lois continues avec moyennes et variances connues. Les applications sont données pour la loi normale, mais la modélisation reste valable pour d'autres lois (Gamma par exemple). Le fait de considérer une loi de probabilité à variable discrète est privilégié dans les approches existantes pour obtenir une modélisation et une résolution plus simple du problème. En revanche, la solution des approches basées sur la discrétisation de ces lois donnent un estimateur biaisé de la solution juste (Robbins and Harrison [2010]). De fait, nous avons décidé de conserver l'idée des variables continues tout au long du processus de modélisation jusqu'au problème linéaire final résoluble.

D'autre part, les formules d'Erlang fournissent des relations afin de calculer le *EWT* (Expected Waiting Time) en fonction de taux d'arrivées, taux de service et nombre d'agents (ou nombre de serveurs). Dans notre problème, la valeur de *EWT* est imposée et fixe. De fait, pour des valeurs de taux d'arrivées et de service donnés, un nombre entier d'agents ne garantit pas d'atteindre exactement le temps moyen *EWT* imposé. Nous proposons alors d'introduire une relation continue entre les paramètres que le modèle d'Erlang ne possède pas. Cette relation permet de déterminer des valeurs réelles de nombres d'agents requis pour atteindre exactement le *EWT* fixé au lieu de ne considérer

qu'une borne inférieure.

Pour finir, les fonctions impliquées dans la formulation de contrainte en probabilité jointe sont linéarisées, afin de toujours conserver l'idée de continuité. La solution finale nous donner des valeurs entières d'agents, même si les membres droits des contraintes sont des variables réelles.

La considération de fonctions continues dans le côté droit des contraintes, alors même que les nombres d'agents de la solution finale sont entiers, est intéressante car nous incluons dans la modélisation une répartition dynamique du risque entre les périodes, et donc entre les contraintes. En effet, il est possible de diminuer le risque sur certaines périodes en faisant varier les valeurs réelles du membre droit tout en conservant la même valeur entière dans la solution finale. Cela permet alors d'augmenter le risque sur d'autres périodes, sur lesquelles ce changement engendre une diminution du nombre d'agents planifiées et donc une diminution du coût de la solution. Notre approche fournit finalement un problème linéaire mixte dont la solution représente des nombres entiers représentant des nombres d'agents. En revanche, il aurait également été possible de proposer une solution en valeurs réelles pour répondre à des problématiques similaires : dans une situation où le temps disponible d'un agent serait considéré comme variable plutôt que l'agent lui-même, nous pourrions allouer des portions du temps total.

En résumé, nous veillons à obtenir une grande flexibilité dans le processus d'optimisation en considérant un niveau de risque global, réparti de manière dynamique, et des relations continues, afin de réduire le coût de la solution finale par rapport à d'autres approches tout en garantissant un temps de calcul limité (de l'ordre de la seconde).

Élaboration d'autres approches stochastiques et comparaisons

L'approche présentée précédemment est basée sur plusieurs idées assemblées pour formuler le problème. Nous avons proposé une formulation des problèmes de dimensionnement et planification en une seule étape avec un problème d'optimisation en contrainte en probabilité jointe, une distribution dynamique du risque sur les périodes et une relation continue permettant de manipuler des nombres d'agents en valeurs réelles. Nous avons alors cherché à confronter nos modèles avec des modèles plus simples, en relâchant une à une ces idées.

Dans un premier temps, nous avons cherché à valider l'intérêt de la modélisation de l'incertitude en comparant les solutions apportées par notre modèle avec les solutions

de modèles classiques de la littérature : une approche déterministe, une approche en contraintes en probabilités individuelles, et une approche en contrainte en probabilité jointe avec une distribution du risque prédéfinie. Ces modèles ont rapidement montré leurs limites en terme de robustesse et qualité de solution. En effet, l'approche proposée dans cette thèse mène aux solutions les moins chères parmi les solutions satisfaisant les contraintes imposées.

Les modèles en une étape et en deux étapes présentés précédemment ont également été comparés afin de vérifier l'intérêt des efforts informatiques engagés pour établir le modèle en une étape. Les simulations effectuées montrent que le modèle en une étape est plus précis et plus robuste que le modèle en deux étapes. Ces deux modèles restent plus performants que les modèles classiques de la littérature.

Dans un deuxième temps, nous avons établi une approche avec contrainte en probabilité jointe et répartition dynamique du risque en considérant les variables aléatoires des nombres d'agents comme variables entières. Cette approche modifie la relation entre les paramètres de la file d'attente, ainsi que la méthode de modélisation du problème d'optimisation, qui est plus lourde. Finalement, en plus d'avoir un temps d'exécution plus élevé, les solutions de cette méthode sont plus coûteuses que les solutions données par l'approche stochastique continue. L'idée de considérer des variables continues à l'intérieur du problème procure donc un réel avantage.

Ces différentes comparaisons ont contribué à valider l'intérêt des approches stochastiques proposées dans cette thèse. Les choix de modélisation et les différentes formulations ont montré que nous proposons des problèmes d'optimisation finaux rapides à résoudre, fournissant des solutions satisfaisantes en terme de respect des contraintes, tout en réduisant le coût par rapport à d'autres approches.

Extension des modèles

L'approche stochastique établie précédemment invite à évaluer plusieurs perspectives possibles. Nous nous sommes focalisés sur quelques unes.

D'une part, la modélisation d'Erlang-C est ré-évaluée. En effet, ce modèle simple permet d'avoir des expressions mathématiques manipulables mais est limité. En particulier, les formules d'Erlang-C sont contraintes par la stabilité théorique du système. Or, lorsque le système est surchargé, la file d'attente n'est plus stable et ces formules ne peuvent plus être appliquées. De plus, la modélisation de la file $M/M/c$ est standard mais

limite l'adéquation du modèle avec la réalité. Erlang-A permet de résoudre ces défauts : en premier lieu, le système qui prend en compte les abandons de client présente une file stable (montré dans [Green et al. \[2007\]](#)). En second lieu, l'abandon des clients est un aspect important de la gestion opérationnelle de systèmes de files d'attente et affecte significativement la qualité de service par plusieurs aspects (voir [Mandelbaum and Zeltyn \[2007\]](#)). En revanche, les formules d'Erlang-A sont mathématiquement beaucoup plus compliquées à manipuler et longues à calculer que pour Erlang-C. Nous évaluons alors la robustesse de notre approche face au changement de modèle de file d'attente et montrons que le problème reste résoluble en temps très réduit. De plus, grâce à la stabilité de la file d'attente définie avec abandon, l'écart entre les bornes inférieure et supérieure de la solution peut être fortement réduit.

D'autre part, la modélisation de l'incertitude est étendue. En effet, les taux d'arrivées à chaque période sont considérés comme indépendants. Ces périodes sont introduites par l'approximation *SIPP* (Stationary Independent Period-by-Period), nécessaire pour pouvoir utiliser les résultats sur les files d'attentes. Ces périodes couvrent en général une journée, pendant laquelle les nombres d'appels à différents moments de la journée ne sont en fait pas indépendants, comme stipulé dans [Avramidis et al. \[2004\]](#) : une corrélation positive existe entre différentes périodes d'une journée. Lorsqu'une période est très chargée, les autres périodes de la journées ont tendance à l'être également et vice-versa.

Nous proposons d'introduire un *busyness factor* aléatoire permettant de définir la charge aléatoire sur la journée : il représente la dépendance entre les périodes. Les variables aléatoires corrélées deviennent une combinaison du taux d'arrivées aléatoire et de la charge journalière aléatoire.

L'approche stochastique présentée précédemment est partiellement introduite dans ce problème, mais de nombreuses reformulations et linéarisations sont nécessaires pour obtenir finalement un problème non linéaire mixte. Une approche d'optimisation en deux étapes est proposée pour manipuler un problème complètement linéaire.

Une autre approche de l'incertitude : l'optimisation *distributionally robust*

Nous présentons également dans cette thèse la modélisation des problèmes de dimensionnement et planification par une représentation différente de l'incertitude, basée sur l'optimisation *distributionally robust*. Très peu d'approches ont été trouvées dans la litté-

rature existante pour ces problèmes.

Pour cette approche, les lois de probabilités des taux d'arrivées moyens à chacune des périodes sont considérés comme inconnues. Si nous ne connaissons pas ces lois, nous supposons en revanche les moyennes et variances connues. Nous cherchons ici à optimiser le coût de la main d'œuvre avec la condition que les taux d'arrivées sont des variables aléatoires suivant des lois de probabilités inconnues. Par conséquent, le problème d'optimisation consiste à minimiser le coût pour toutes les lois de probabilités possibles ayant les moyennes et variances données. Cela signifie alors optimiser le problème pour la loi la plus défavorable de cette famille. Ce problème est formulé en deux étapes. Les formules d'Erlang-C sont utilisées dans la première partie, mais Erlang-A reste également valable.

Le même raisonnement utilisé pour la formulation d'optimisation stochastique guide notre modélisation : nous considérons un problème d'optimisation à contrainte en probabilité jointe dans le but de considérer le risque sur une échelle globale. La contrainte en probabilité jointe est ensuite séparée en plusieurs contraintes individuelles en exprimant les différentes fonctions de répartition et en distribuant le risque sur les périodes à l'aide de variables de décision. Encore une fois, le niveau de risque est réparti durant le processus d'optimisation dans le problème final ce qui mène à une solution à coût moins élevé qu'une répartition préalable.

La reformulation des contraintes du problème *distributionally robust* permet alors d'obtenir un problème déterministe équivalent. En mettant en avant les propriétés de convexité des membres droits des inégalités des contraintes, nous proposons des approximations linéaires par morceaux (tangentes et sécantes) pour obtenir une borne inférieure et une borne supérieure de la solution optimale. L'écart entre ces bornes peut être très significativement réduit tout en conservant de faibles temps de calculs.

Cette approche, de part l'hypothèse initiale, est manifestement plus conservatrice que l'approche stochastique mais montre bien son intérêt dans le cas où la nature de la loi des taux d'arrivées n'est pas certaine. En effet, dans le cas où une mauvaise décision serait prise sur le choix de la loi de probabilité, les solutions obtenues par l'approche d'optimisation stochastique ne sont pas satisfaisantes.

Perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse invitent à plusieurs extensions très intéressantes pour des recherches futures. Quelques perspectives sont proposées.

D'une part, il est possible d'améliorer les travaux proposés dans le mémoire. En effet, quelques résultats mathématiques complexes pourraient permettre d'étendre les démonstrations. Enrichir les hypothèses choisies pour le modèle *distributionally robust* pourrait permettre de proposer une modélisation plus précise de la réalité. De plus, effectuer des simulations supplémentaires permettraient de préciser les qualités et les limites d'utilisation des modèles. Il serait alors intéressant de confronter nos modèles à des problématiques d'autres domaines. Pour finir, des simulations numériques seraient utile pour évaluer la qualité de l'approche incluant la corrélation des variables aléatoires.

D'autre part, les travaux présentés ici peuvent être utilisés pour comparer avec ou étendre à d'autres approches. Ils pourraient être comparés à d'autres formulations d'optimisation stochastique, comme par exemple une approche basée sur un coût de pénalité. Cette comparaison est néanmoins complexe étant données les considérations très différentes de l'approche en contraintes en probabilité et l'approche par pénalité. D'autres modèles de files d'attente peuvent également être considérés dans les problèmes. Ces modèles rendent rapidement l'approche d'optimisation très complexe et un réel travail est nécessaire pour les adapter.

Bibliographie

- Ahmed, S. and Shapiro, A. (2008). Solving chance-constrained stochastic programs via sampling and integer programming. *Tutorials in Operations Research*, pages 261–269.
- Aksin, Z., Armony, M., and Mehrotra, V. (2007). The modern call center : A multi-disciplinary perspective on operations management research. *Production and Operations Management*, 16 :665–688.
- Aktekin, T. and Soyer, R. (2011). Call center arrival modeling : A bayesian state-space approach. *Naval Research Logistics*, 58(1) :28–42.
- Aldor-Noiman, S., Feigin, P. D., and Mandelbaum, A. (2009). Workload forecasting for a call center : Methodology and a case study. *The Annals of Applied Statistics*, 3(4) :1403–1447.
- Atlason, J., Epelman, M. A., and Henderson, S. G. (2004). Call center staffing with simulation and cutting plane methods. *Annals of Operations Research*, 127(1–4) :333–358.
- Atlason, J., Epelman, M. A., and Henderson, S. G. (2008). Optimizing call center staffing using simulation and analytic center cutting-plane methods. *Management Science*, 54(2) :295–309.
- Avramidis, A. N., Chan, W., Gendreau, M., L'Ecuyer, P., and Pisacane, O. (2010). Optimizing daily agent scheduling in a multiskill call center. *European Journal of Operational Research*, 200(3).
- Avramidis, A. N., Deslauriers, A., and L'Ecuyer, P. (2004). Modeling daily arrivals to a telephone call center. *Management Science*, 50(7) :896–907.
- Baccelli, F. and Hebuterne, G. (1981). On queues with impatient customers. Technical report, Inria. RR-0094.
- Bassamboo, A., Harrison, J. M., and Zeevi, A. (2006). Design and control of a large call center : Asymptotic analysis of an lp-based method. *Operations Research*, 54(3) :419–435.
- Bassamboo, A. and Zeevi, A. (2009). On a data-driven method for staffing large call centers. *Operations Research*, 57(3) :714–726.
- Beale, E. (1961). The use of quadratic programming in stochastic linear programming. Technical report, RAND Corporation, Santa Monica, CA. P-2404.

- Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., and Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton University Press.
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4) :769–805.
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1) :1–13.
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88(3) :411–424.
- Bertsimas, D. and Doan, X. V. (2010). Robust and data-driven approaches to call centers. *European Journal of Operational Research*, 207(2) :1072–1085.
- Bertsimas, D. and Popescu, I. (1998). Optimal inequalities in probability theory : A convex optimization approach. Technical report, Department of Mathematics and Operations Research, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- Bertsimas, D. and Popescu, I. (2005). Optimal inequalities in probability theory : A convex optimization approach. *SIAM Jour. on Optimization*, 15 :780–804.
- Bertsimas, D. and Thiele, A. (2006). Robust and data-driven optimization : Modern decision-making under uncertainty. *INFORMS tutorials in operations research : models, methods, and applications for innovative decision making*, page 137.
- Bhulai, S., Koole, G., and Pot, A. (2008). Simple methods for shift scheduling in multiskill call centers. *Manufacturing & Service Operations Management*, 10(3) :411–420.
- Birge, J. R. and Louveaux, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York.
- Borst, S., Mandelbaum, A., and Reiman, M. I. (2004). Dimensioning large call centers. *Operations Research*, 52(1) :17–34.
- Breton, M. and El Hachem, S. (1995). Algorithms for the solution of stochastic dynamic minimax problems. *Computational Optimization and Applications*, 4(4) :317–245.
- Brown, L., Gans, N., Mandelbaum, A., Sakov, A., Shen, H., Zeltyn, S., and Zhao, L. (2005). Statistical analysis of a telephone call center : A queueing-science perspective. *Journal of the American Statistical Association*, 100 :36–50.
- Calafiore, G. and Campi, M. (2005). Uncertain convex programs : randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 102(1) :25–46.
- Calafiore, G. C. and El Ghaoui, L. (2006). On distributionally robust chance-constrained linear programs. *Jour. of Optimization Theory and Applications*, 130 :1–22.

- Castillo, I., Joro, T., and Li, Y. Y. (2009). Workforce scheduling with multiple objectives. *European Journal of Operational Research*, 196(1) :162–170.
- Cezik, M. T. and L'Ecuyer, P. (2008). Staffing multiskill call centers via linear programming and simulation. *Management Science*, 54 :310–323.
- Charnes, A. and Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. *Management Science*, 6(1) :73–79.
- Chen, B. P. and Henderson, S. G. (2001). Two issues in setting call centre staffing levels. *Annals of Operations Research*, 108(1-4) :175–192.
- Chen, W., Sim, M., Sun, J., and Teo, C.-P. (2010). From cvar to uncertainty set : Implications in joint chance-constrained optimization. *Operations Research*, 58(2) :470–485.
- Cheng, J. and Lisser, A. (2012). A second-order cone programming approach for linear programs with joint probabilistic constraints. *Operations Research Letters*, 40 :325–328.
- Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1(3/4) :197–206.
- Delage, E. and Ye, Y. (2010). Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research*, 58(3) :595–612.
- Dentcheva, D., Lai, B., and Ruszczyński, A. (2003). Efficient point methods for probabilistic optimization problems. Stochastic Programming E-Print Series. Institut für Mathematik.
- Dentcheva, D., Prékopa, A., and Ruszczyński, A. (2000). Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming. *Mathematical Programming*, 89(1) :55–77.
- Dentcheva, D., Prékopa, A., and Ruszczyński, A. (2002). Bounds for probabilistic integer programming problems. *Discrete Applied Mathematics*, 124(1-3) :55–65.
- Dietz, D. C. (2011). Practical scheduling for call center operations. *Omega*, 39(5) :550–557.
- Ding, S. and Koole, G. (2014). Optimal call center forecasting and staffing under arrival rate uncertainty. Working paper.
- El Ghaoui, L. and Lebret, H. (1997). Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(4) :1035–1064.
- El Ghaoui, L., Oustry, F., and Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Jour. on Optimization*, 9(1) :33–52.
- Erdoğan, E. and Iyengar, G. (2007). On two-stage convex chance constrained problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 65 :115–140.

- Ertogral, K. and Bamuqabel, B. (2008). Developing staff schedules for a bilingual telecommunication call center with flexible workers. *Computers & Industrial Engineering*, 54(1) :118–127.
- Excoffier, M., Gicquel, C., Jouini, O., and Lisser, A. (2014). Comparison of stochastic programming approaches for staffing and scheduling call centers with uncertain demand forecasts. In *Communications in Computer and Information Science*, Lecture Notes in Computer Science. Springer. To appear.
- Gans, N., Koole, G., and Mandelbaum, A. (2003). Telephone call centers : Tutorial, review, and research prospects. *Manufacturing & Service Operations Management*, 5 :79–141.
- Gans, N., Shen, H., and Zhou, Y.-P. (2012). Parametric stochastic programming models for call-center workforce scheduling. Working paper.
- Garnet, O., Mandelbaum, A., and Reiman, M. (2002). Designing a call center with impatient customers. *Manufacturing & Service Operations Management*, 4(3) :208–227.
- Green, L. V. and Kolesar, P. J. (1991). The pointwise stationary approximation for queues with nonstationary arrivals. *Management Science*, 37 :84–97.
- Green, L. V. and Kolesar, P. J. (1997). The lagged psa for estimating peak congestion in multiserver markovian queues with periodic arrival rates. *Management Science*, 43(1) :80–87.
- Green, L. V., Kolesar, P. J., and Soares, J. (2001). Improving the sipp approach for staffing service systems that have cyclic demands. *Operations Research*, 49(4) :549–564.
- Green, L. V., Kolesar, P. J., and Soares, J. (2003). An improved heuristic for staffing telephone call centers with limited operating hours. *Production and Operations Management*, 12(1) :46–61.
- Green, L. V., Kolesar, P. J., and Whitt, W. (2007). Coping with time-varying demand when setting staffing requirements for a service system. *Production and Operations Management*, 16(1) :13–39.
- Green, L. V. and Soares, J. (2007). Computing time-dependent waiting time probabilities in $m(t)/m/s(t)$ queueing systems. *Manufacturing & Service Operations Management*, 9(1) :54–61.
- Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., and Harris, C. M. (2008). *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley Series.
- Gurvich, I., Luedtke, J., and Tezcan, T. (2010). Staffing call centers with uncertain demand forecasts : A chance-constrained optimization approach. *Management Science*, 56 :1093–1115.
- Harrison, J. M. and Zeevi, A. (2005). A method for staffing large call centers based on stochastic fluid models. *Manufacturing & Service Operations Management*, 7(1) :20–36.
- Henderson, S. G., Mason, A. J., Ziedins, I., and Thomson, R. (1999). A heuristic for determining efficient staffing requirements for call centres. Technical Report 594.

- Henrion, R. and Strugarek, C. (2008). Convexity of chance constraints with independent random variables. *Computational Optimization and Applications*.
- Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (1986). *Introduction to Operations Research, 4th Ed.* Holden-Day, Inc.
- Ibrahim, R., Ye, H., L'Ecuyer, P., and Shen, H. (2015). Modeling and forecasting call center arrivals : A literature survey. Working paper.
- Ingolfsson, A., Haque, M. A., and Umnikov, A. (2002). Accounting for time-varying queueing effects in workforce scheduling. *European Journal of Operational Research*, 139(3) :585–597.
- Jongbloed, G. and Koole, G. (2001). Managing uncertainty in call centers using poisson mixtures. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 17 :307–318.
- Kall, P. and Mayer, J. (2011). *Stochastic Linear Programming*. Springer.
- Kall, P. and Wallace, S. W. (1995). *Stochastic Programming*. Wiley.
- Koole, G. and van der Sluis, E. (2003). Optimal shift scheduling with a global service level constraint. *IIE Transactions*, 35(11) :1049–1055.
- Lagoa, C. (1999). On the convexity of probabilistically constrained linear programs. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 516–521.
- Liao, S., Koole, G., van Delft, C., and Jouini, O. (2012). Staffing a call center with uncertain non-stationary arrival rate and flexibility. *OR Spectrum*, 34 :691–721.
- Liao, S., van Delft, C., and Vial, J.-P. (2013). Distributionally robust workforce scheduling in call centers with uncertain arrival rates. *Optimization Methods and Software*, 28 :501–522.
- Liberti, L., Cafieri, S., and Tarissan, F. (2009). Reformulations in mathematical programming : A computational approach. In Abraham, A., Hassanien, A.-E., Siarry, P., and Engelbrecht, A., editors, *Foundations of Computational Intelligence Volume 3*, volume 203 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 153–234. Springer Berlin Heidelberg.
- Luedtke, J. and Ahmed, S. (2008). A sample approximation approach for optimization with probabilistic constraints. *SIAM Jour. on Optimization*, 19(2) :674–699.
- Luedtke, J., Ahmed, S., and Nemhauser, G. (2010). An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints. *Mathematical Programming*, 122(2) :247–272.
- Mandelbaum, A. and Zeltyn, S. (2005). Service engineering in action : The palm/erlang-a queue, with applications to call centers. In *Advances in Services Innovations*, pages 17–48. Springer-Verlag.
- Mandelbaum, A. and Zeltyn, S. (2007). Service engineering in action : The palm/erlang-a queue, with applications to call centers. In Spath, D. and Fähnrich, K.-P., editors, *Advances in Services Innovations*, pages 17–45. Springer Berlin Heidelberg.

- Mandelbaum, A. and Zeltyn, S. (2009). Staffing many-server queues with impatient customers : Constraint satisfaction in call centers. *Operations Research*, 57(5) :1189 – 1205.
- Mehrotra, V., Ozlü, O., and Saltzman, R. (2010). Intelligent procedures for intra-day updating of call center agent schedules. *Production and Operations Management*, 19(3) :353–367.
- Nemirovski, A. and Shapiro, A. (2006a). Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Jour. on Optimization*, 17(4) :969–996.
- Nemirovski, A. and Shapiro, A. (2006b). Scenario approximations of chance constraints. In Calafiore, G. and Dabbene, F., editors, *Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty*, pages 3–47. Springer London.
- Ooura, T. (2006). <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ooura/index.html>.
- Prékopa, A. (1970). On probabilistic constrained programming. In *Proceedings of the Princeton symposium on mathematical programming*, pages 113–138. Princeton, New Jersey : Princeton University Press.
- Prékopa, A. (1995). *Stochastic Programming*, volume 324 of *Mathematics and Its Applications*. Springer Netherlands.
- Prékopa, A. (2003). Probabilistic programming. In Ruszczyński, A. and Shapiro, A., editors, *Handbooks in operations research and management science*, volume 10, chapter 5, pages 267–351. Elsevier.
- Robbins, T. R. (2007). *Managing Service Capacity under Uncertainty*. PhD thesis, The Pennsylvania State University.
- Robbins, T. R. and Harrison, T. P. (2010). A stochastic programming model for scheduling call centers with global service level agreements. *European Journal of Operational Research*, 207 :1608–1619.
- Roubos, A., Bhulai, S., and Koole, G. (2011). Flexible staffing for call centers with non-stationary arrival rates. Working paper.
- Ruszczynski, A. (2002). Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedra. *Mathematical Programming*.
- Ruszczynski, A. and Shapiro, A. (2003). *Stochastic Programming*, volume 10 of *Handbooks in operations research and management science*. Elsevier.
- Saltzman, R. M. and Mehrotra, V. (2007). Managing trade-offs in call center agent scheduling : Methodology and case study. *Proceedings of the 2007 Summer Computer Simulation Conference*, pages 643–651.
- Scarf, H., Arrow, K., and Karlin, S. (1958). A min-max solution of an inventory problem. *Studies in the mathematical theory of inventory and production*, 10 :201–209.
- Shapiro, A. (2009). Statistical inference. In Shapiro, A., Dentcheva, D., and Ruszczyński, A., editors, *Lectures on Stochastic Programming : Modeling and Theory*.

- Shapiro, A. and Ahmed, S. (2004). On a class of minimax stochastic programs. *SIAM Jour. on Optimization*, 14(4) :1237–1249.
- Shapiro, A., Dentcheva, D., and Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on Stochastic Programming : Modeling and Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5) :1154–1157.
- van Ackooij, W., Henrion, R., Möller, A., and Zorgati, R. (2014). Joint chance constrained programming for hydro reservoir management. *Optimization and Engineering*, 15(2) :509–531.
- Wallace, R. B. and Whitt, W. (2005). A staffing algorithm for call centers with skill-based routing. *Manufacturing & Service Operations Management*, 7(4) :276–294.
- Whitt, W. (1999). Dynamic staffing in a telephone call center aiming to immediately answer all calls. *Operations Research Letters*, 24 :205–212.
- Whitt, W. (2006). Staffing a call center with uncertain arrival rate and absenteeism. *Production and Operations Management*, 15(1) :88–102.
- Yue, J., Chen, B., and Wang, M.-C. (2006). Expected value of distribution information for the newsvendor problem. *Operations Research*, 54(6) :1128–1136.
- Žáčková, J. (1966). On minimax solutions of stochastic linear programming problems. *Časopis pro pěstování matematiky*, 91(4) :423–430.
- Zeltyn, S., Marmor, Y. N., Mandelbaum, A., Carmeli, B., Greenshpan, O., Mesika, Y., Wasserkrug, S., Vortman, P., Shtub, A., Lauterman, T., Schwartz, D., Moskovitch, K., Tzafirir, S., and Basis, F. (2011). Simulation-based models of emergency departments : : Operational, tactical, and strategic staffing. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 21(4) :24 :1–24 :25.