



HAL
open science

Formulation et mise en oeuvre d'un élément continu de plaque sandwich et de plaque multicouche

Olfa Ghorbel

► **To cite this version:**

Olfa Ghorbel. Formulation et mise en oeuvre d'un élément continu de plaque sandwich et de plaque multicouche. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2016. Français. NNT : 2016SACLC020 . tel-01323950v1

HAL Id: tel-01323950

<https://theses.hal.science/tel-01323950v1>

Submitted on 31 May 2016 (v1), last revised 2 Jun 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

"THESE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE DE SFAX
ET DE L'UNIVERSITE PARIS SACLAY PREPAREE A
CENTRALE SUPELEC"

ÉCOLE DOCTORALE N°579
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences-SMEMAG

Spécialité de doctorat: Génie mécanique

Par

Mme Olfa GHORBEL FEKI

Formulation et mise en oeuvre d'un élément continu de plaque sandwich
et de plaque multicouche

Thèse présentée et soutenue à Paris, le 13 janvier 2016 :

Composition du Jury :

M. Mabrouk, BEN TAHER	Prof. des Universités, Université de technologie de Compiègne	Président
M. Olivier, BAREILLE	Maître de Conférences HDR, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
M. Rachid, NASRI	Prof. des Universités, ENIT-Tunis	Rapporteur
M. Jean-Baptiste, CASIMIR	Maître de Conférences HDR, SUPMECA	Examinateur
M. Mohamed, HADDAR	Prof. des Universités, ENIS-Sfax	Examinateur
M. Imad, TAWFIQ	Prof. des Universités, SUPMECA	Directeur de thèse
M. Lotfi, HAMMAMI	Prof. des Universités, ENIS-Sfax	Co-directeur de thèse

Titre : Formulation et mise en œuvre d'un élément continu de plaque sandwich et de plaque multicouche

Mots clés : Plaques multicouches, Plaques sandwichs, Méthode des éléments continus, Matrice de raideur dynamique.

Résumé : Cette thèse traite le développement d'un élément continu de plaques orthotropes, sandwichs et multicouches. La démarche consiste dans un premier temps à établir la matrice de raideur dynamique de plaques orthotropes pour des conditions aux limites naturelles à partir d'une reformulation des éléments de plaques isotropes développés au laboratoire QUARTZ (EA7393). La démarche est basée d'une part sur la décomposition des conditions aux limites libres décrite par Gorman et d'autre part sur la résolution des équations de mouvement en se basant sur les développements en séries de Levy. La matrice de raideur dynamique est ensuite obtenue par projection des déplacements et des efforts de frontières sur des bases fonctionnelles compatibles avec les opérations d'assemblage.

Dans un second temps, la formulation des éléments sandwichs et multicouches est décrite par superposition des plaques orthotropes précédemment développées.

Les formulations présentées prennent en compte les vibrations de flexion et les vibrations dans le plan, dites vibrations de membrane. La validation de ces éléments est menée par une confrontation systématique de réponses harmoniques non amorties avec celles obtenues par diverses modélisations éléments finis.

Title : Formulation and Implementation of a Continuous Stiffened sandwich plates and multilayer plates Element

Keywords: Multilayer plate, Sandwich plate, Continuous element method, Dynamic stiffness matrix.

Abstract: This thesis deals with the development of a continuous element for orthotropic, sandwich and multilayer plates. This approach is based essentially on the construction of the dynamic stiffness matrix of orthotropic plates using natural boundary conditions from a reformulation of the isotropic plate elements developed in the QUARTZ laboratory (EA 7393). In order to develop the dynamic stiffness matrix of the studied element we resort on the first hand to the decomposition of free boundary conditions described by Gorman, on the second hand to the resolution of the equations of motion by using Levy series expansions. The dynamic stiffness matrix is then obtained by projecting movements and frontier efforts on functional bases compatible with assembly operations.

Finally the continuous sandwich and multilayer plate element is described by superposition of continuous orthotropic plates element previously developed.

The formulations presented takes into account the bending vibration and the vibration in the plane, called membrane vibration. The validation of all obtained results is conducted by a systematic comparison of undamped harmonic responses with those obtained by various finite element models..



Remerciements

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire de thèse a été réalisé en cotutelle entre le Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Productique (LA2MP) à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS- Tunisie) et le Laboratoire QUARTZ à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris (SUPMECA- Paris).

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Monsieur **Lotfi HAMMAMI**, Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, et Monsieur **Imad TAWFIQ**, Professeur des universités à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour avoir assuré la direction de mes travaux et pour la qualité de leur encadrement, leurs conseils et la confiance qu'ils m'ont accordé.

J'adresse aussi mes remerciements et ma très vive gratitude à mes encadreurs Monsieur **Jean Baptiste CASIMIR**, Maître de conférence HDR à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, et Monsieur **Mohamed HADDAR**, Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax pour leurs conseils scientifiques, leurs encouragements et la confiance qu'ils m'ont accordée ainsi que pour les discussions scientifiques et les échanges qui nous ont permis de mieux appréhender le sujet de la thèse.

Je remercie Monsieur **Olivier BAREILLE**, Maître de Conférences HDR à Ecole Centrale de Lyon, ainsi que Monsieur **Rachid NASRI**, Professeur des Universités à Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Mabrouk BEN TAHER**, Professeur des Universités, Université de Technologie de Compiègne pour avoir accepté de prendre part du Jury et être son président.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres de LA2MP et de QUARTZ et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à achever ce travail.

Finalement, je tiens à remercier du fond du coeur ma famille sans qui je ne serais jamais arrivée là.

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Etude bibliographique	5
2.1	Introduction	5
2.2	Etat de l'art de plaques sandwichs et multicouches	5
2.2.1	Définition	5
2.2.2	Intérêt industriel de l'étude	6
2.2.3	Les matériaux composites	10
2.3	Etude vibratoire des plaques	13
2.4	Méthode des éléments continus	16
2.4.1	Généralités	16
2.4.2	Etat de l'art	16
2.4.3	Les autres approches numériques	18
2.4.4	La Méthode des Eléments Continus	22
2.4.5	Les limites de la méthode des éléments continus	25
2.5	Conclusion	26
3	Plaque orthotrope en flexion	27
3.1	Introduction	27
3.2	Flexion de Kirchhoff des plaques orthotropes	27
3.2.1	Définition géométrique	27
3.2.2	Définition de l'orthotropie matérielle	28
3.2.3	Hypothèses cinématiques	28
3.2.4	Relations contraintes-déformations	29
3.2.5	Efforts internes	29
3.2.6	Les équations de mouvement	30
3.2.7	Conditions aux limites	31
3.3	Matrice de raideur dynamique pour une plaque orthotrope	31
3.3.1	Décomposition de la solution	31
3.3.2	Procédure de construction de la matrice de rigidité d'une plaque orthotrope	36
3.3.3	Matrice de raideur dynamique de flexion	50
3.4	Validation numérique du modèle	54
3.4.1	Propriétés matérielles et géométriques	54

3.4.2	Chargement symétrique-symétrique	55
3.4.3	Chargement antisymétrique-antisymétrique	56
3.4.4	Chargement symétrique-antisymétrique	58
3.4.5	Chargement antisymétrique-symétrique	60
3.4.6	Chargement réparti unilatéral	62
3.4.7	Chargement ponctuel	66
3.4.8	Réponse harmonique amortie	68
3.5	Conclusion	69
4	Effets de membrane	71
4.1	Introduction	71
4.2	Vibrations dans le plan des plaques orthotropes	71
4.2.1	Définition de la géométrie	71
4.2.2	Définition de l'orthotropie matérielle	72
4.2.3	Relations contraintes-déformations	72
4.2.4	Efforts internes	73
4.2.5	Equations de mouvement	73
4.3	Matrice de raideur dynamique	75
4.3.1	Décomposition de la solution	75
4.3.2	Solutions en déplacement	76
4.3.3	Procédé de construction de la matrice de raideur	81
4.3.4	Bases fonctionnelles	81
4.3.5	Matrices de raideur des quatre contributions	82
4.3.6	Matrice de rigidité globale	94
4.4	Validation par la méthode des éléments finis	97
4.4.1	Chargement symétrique-symétrique	98
4.4.2	Réponse harmonique pour un chargement réparti unilatéral . .	101
4.4.3	Réponse harmonique pour un chargement ponctuel	103
4.5	Conclusion	106
5	Plaque sandwich et multicouche	107
5.1	Introduction	107
5.2	Plaque sandwich et multicouche	107
5.2.1	Définition géométrique	107
5.2.2	Relations contraintes-déformations	108
5.2.3	Effort internes	109
5.2.4	Equations du mouvement	109
5.2.5	Conditions aux limites	110
5.3	Matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche	110
5.3.1	Décomposition de Gorman	110
5.3.2	Procédure de construction de la matrice de rigidité d'une plaque multicouche	113
5.3.3	Matrice de rigidité de plaque multicouche en flexion	113
5.4	Validation numérique	114
5.4.1	Propriétés géométriques et matérielles	114

5.4.2	Chargement symétrique	115
5.4.3	Chargement réparti	117
5.4.4	Chargement ponctuel	119
5.5	Plaque multicouche sous effet de membrane	120
5.5.1	Définition géométrique et matérielle	120
5.5.2	Relations contraintes-déformations	120
5.5.3	Efforts internes	120
5.5.4	Equations de mouvement	121
5.6	Validation numérique de l'élément de plaque multicouche sous effet de membrane	122
5.6.1	Chargement symétrique	122
5.6.2	Chargement réparti	124
5.6.3	Chargement ponctuel	125
5.7	Conclusion	128
6	Conclusion et perspectives	129

Table des figures

2.1	Plaque multicouche symétrique	6
2.2	Plaque multicouche non-symétrique	6
2.3	Panneaux photovoltaïques	7
2.4	Répartition des matériaux composites [91]	8
2.5	Structure interne d'aile d'avion	8
2.6	Fuselage d'avion	9
2.7	Structure interne d'une pale d'hélicoptère [92]	9
2.8	Bateau en composite	10
2.9	Plaque sandwich	11
2.10	Structure en nid d'abeille	11
2.11	Structure en mousse	12
2.12	Structure en bois de balsa	12
2.13	Modèle Love-Kirchhoff	14
2.14	Modèle de Mindlin	14
2.15	Modèle Zig-Zag	15
2.16	Berceau de submersible	17
3.1	Géométrie de la plaque	28
3.2	Décomposition de Gorman	32
3.3	Côtes de la plaque	52
3.4	Chargement suivant z pour la contribution symétrique-symétrique	55
3.5	Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique	56
3.6	Chargement antisymétrique-antisymétrique	57
3.7	Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-antisymétrique	58
3.8	Chargement symétrique-antisymétrique	59
3.9	Réponse harmonique pour un chargement symétrique-antisymétrique	60
3.10	Chargement antisymétrique-symétrique	61
3.11	Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-symétrique	62
3.12	Chargement réparti unilatéral	63
3.13	Réponse harmonique pour une force répartie	64
3.14	Réponse harmonique pour une force répartie pour une plage de fréquence [160 200]	65
3.15	Convergence avec le nombre de termes de la série de Levy	66
3.16	Chargement ponctuel	67
3.17	Réponse harmonique pour un chargement ponctuel	68

3.18	Réponse harmonique amorties	69
4.1	Plaque orthotrope	72
4.2	Chargement symétrique-symétrique	98
4.3	Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique	99
4.4	Réponse harmonique pour une bande de fréquences [8000 Hz, 9000 Hz]	100
4.5	Force répartie unilatérale	101
4.6	Réponse harmonique pour un chargement réparti unilatéral	102
4.7	Réponse harmonique sur [8000 Hz, 9000 Hz]	103
4.8	Chargement ponctuel en point B(1,1)	104
4.9	Réponse harmonique pour un chargement ponctuel	105
4.10	Réponse harmonique sur [7000 8000]	106
5.1	Plaque multicouche	108
5.2	Réponse harmonique pour une plaque sandwich sous chargement symétrique	116
5.3	Réponse harmonique pour une plaque multicouche pour un chargement réparti	118
5.4	Réponse harmonique de la plaque sandwich pour un chargement ponctuel	119
5.5	Plaque sandwich acier/Carbone-Epoxy/acier	122
5.6	Réponse harmonique de la plaque sandwich dans son plan pour un chargement symétrique	123
5.7	Plaque multicouche à 5 plis et 3 matériaux	124
5.8	Réponse harmonique du multicouche dans son plan pour un chargement réparti	125
5.9	Plaque multicouche à 7 plis et 4 matériaux	126
5.10	Réponse harmonique pour une plaque multicouche à 7 plis dans son plan sous chargement ponctuel	127

Liste des tableaux

3.1	Les propriétés de symétrie pour chaque contribution	33
3.2	Fonctions de base pour la contribution symétrique-symétrique	37
3.3	Fonctions de base pour la contribution antisymétrique-antisymétrique	40
3.4	Fonction de base pour la contribution symétrique-antisymétrique	43
3.5	Fonctions de base pour la contribution antisymétrique-symétrique	47
3.6	Propriétés matérielles et géométriques de la plaque orthotrope	55
4.1	Propriétés de symétrie pour chaque contribution	76
4.2	Fonctions de base pour les déplacements	82
4.3	Fonctions de base pour les efforts	82
4.4	Propriétés matérielles et géométriques de la plaque orthotrope	98
4.5	Temps calculé	101
5.1	Propriétés des matériaux	115
5.2	Propriétés géométriques des plaques multicouches	115
5.3	Temps de calcul (chargement symétrique)	116
5.4	Temps de calcul pour 300 pas fréquentiels (chargement réparti)	118
5.5	Propriétés des matériaux	120
5.6	Temps de calcul	127

1 Introduction générale

Le problème de l'analyse harmonique des structures est traité depuis de très nombreuses années par les ingénieurs et les chercheurs et ceci dans la plupart des secteurs de la construction. Parmi ces secteurs, on peut citer les secteurs du bâtiment et du génie civil, les secteurs de la construction mécanique et en particulier celui des transports couvrant à la fois les domaines civils et militaires : aéronautique, aérospatial, ferroviaire, automobile, construction navale. Ainsi, l'analyse du comportement vibratoire des structures mécanique revêt aujourd'hui une importance capitale dans ces secteurs. Les vibrations sont partout présentes dès l'instant où une structure quelle qu'elle soit est en interaction avec des systèmes de motorisation ou avec des écoulements. Dans le bâtiment ou le génie civil, les sollicitations naturelles telles que celles du vent, de la houle ou encore les séismes nécessitent une analyse précise des comportements dynamiques de manière à satisfaire des critères de résistance et des réglementations de plus en plus contraignantes. En génie civil, le passage de véhicules combiné avec les sollicitations naturelles mentionnées est également source de vibrations qu'il s'agit de prévoir. Dans ces secteurs, la tâche est en partie facilitée par le fait que la plupart des structures sont composées d'éléments structuraux simples tels que des poutres, des coques de géométries variées ou des plaques.

Plusieurs approches permettent de mettre en œuvre une modélisation efficace du comportement vibratoire des structures. La méthode des Eléments Finis reste aujourd'hui la plus connue pour résoudre ces problèmes. Cette méthode consiste à discrétiser le domaine géométrique en sous domaines élémentaires. Cette discrétisation est ce qu'on appelle le maillage de la structure. Les types et la finesse du maillage conditionnent la précision du modèle et le temps de calcul des solutions. Cette méthode numérique reste aujourd'hui la plus efficace et la plus fiable. Elle est néanmoins sujette à certaines limitations et en particulier celle liées à la puissance de calcul des systèmes informatiques. Par ailleurs, la finesse des maillages reste un paramètre prépondérant influant la précision des calculs, y compris à basses et moyennes fréquences lorsque les structures étudiées impliquent des plaques et coques épaisses ou des plaques multicouches et sandwiches.

Des alternatives à cette méthode existent et permettent de s'affranchir des limitations inhérentes à l'opération de maillage. Ce sont en particulier les méthodes dites *meshless*. Ces méthodes sont basées sur une absence de discrétisation ou une discrétisation minimale définie par la topologie même de la structure étudiée sou-

vent constituée d'assemblages plus ou moins complexes d'éléments structuraux. Elles permettent de gagner en performance et en fiabilité lorsque la gamme fréquentielle d'analyse augmente. L'une de ces méthodes, dans laquelle s'inscrit cette thèse, est la *Méthode des Eléments Continus*, également connue sous la dénomination *Dynamic Stiffness Method*.

Plus précisément, l'objet de cette thèse est d'étendre cette formulation aux cas d'éléments structuraux de type plaques anisotropes et plaques multicouches et sandwichs. Le principe commun de cette méthode et de celle des éléments finis se situe au niveau des procédés d'assemblage qui restent identiques. La structure est décomposée en *Eléments* mais dans le cas de la méthode présentée on ne parle pas de maillage. La décomposition est fixée uniquement par la topologie structurelle, si bien qu'un élément de type plaque comme une cloison ou un plancher ne sera pas maillé. Le terme *Continu* fait référence à cette absence de discrétisation.

Le principal avantage de cette approche est la précision des résultats obtenus tout en réduisant les temps de calculs et le volume de données. Cette méthode présente les points forts suivants :

- Une discrétisation minimale de la géométrie étudiée ;
- Des résolutions exactes dans le cas d'éléments unidimensionnels et quasi-exactes dans le cas des éléments de type plaque ;
- Un temps de calcul réduit.
- Une limitation en fréquence uniquement liée à la théorie élastodynamique utilisée.
- Une formulation matricielle semblable à celle de la Méthode des Eléments Finis permettant de reprendre les principes d'assemblage de cette dernière.

Objectif de cette thèse

L'objectif principal de cette thèse est de développer la formulation élémentaire d'un élément continu de plaques sandwichs ou de plaques multicouches. Cet objectif s'inscrit dans le cadre d'une continuation des travaux de recherche réalisés par des équipes en France qui ont d'ores et déjà développé les formulations élémentaires suivantes :

- Poutres gauches : LISMMA, 1997, Casimir ;
- Plaques isotropes de Kirchhoff : LISMMA, 1997, Fleuret et Paris VI, 1998, Ke-vorkian ;

-
- Coques axisymétriques de Kirchhoff et coudes : Ecole Centrale de Nantes, 1998, Le Sourné ;
 - Plaques isotropes de Mindlin et coques axisymétriques de Reissner : LISMMA, 2002, Nguyen ;
 - Coques axisymétriques en couplage fluide-structure : LISMMA, 2010, Khadimallah ;
 - Coques raidies : LISMMA, 2014, Tounsi.

Cette thèse se décompose en quatre chapitres et d'une conclusion :

- Le premier chapitre est consacré à une synthèse concernant l'analyse vibratoire des différentes structures depuis 1870 et les différentes approches numériques connues et développées jusqu'à aujourd'hui. Dans un deuxième temps, le principe de la Méthode des Eléments Continus est présenté en rappelant les principaux travaux de recherches relatifs à cette approche. Cette méthode analytique est comparée par la suite avec les autres approches numériques. A la fin de ce chapitre, un état de l'art concernant l'analyse des structures de plaques multicouches et sandwichs et leurs applications dans différents secteurs industriels sont présentées.
- Le deuxième chapitre est consacré au développement de l'élément continu d'une plaque orthotrope selon la flexion de Kirchhoff. Cette formulation est basée sur une résolution des équations de mouvement utilisant la décomposition de Gorman et les séries de Levy. La validation de cet élément est menée par une confrontation des courbes de réponse obtenues avec celles issues de modélisations éléments finis réalisées par le code de calcul 'IDEAS'. Cette validation a été effectuée pour différents types de chargements.
- Le troisième chapitre est consacré au développement de l'élément continu d'une plaque orthotrope pour les mouvements dans le plan (effets de membrane). Dans ce cadre, la résolution des équations de mouvement sont détaillée. La validation de cet élément est présentée par une comparaison des résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Les modélisations éléments finis ont été réalisées par le code de calcul 'ANSYS'.
- Le dernier chapitre est consacré au développement d'un élément continu d'une plaque multicouche et sandwich. Ce développement a été effectué pour le cas de flexion et membrane pour un nombre de couches quelconque. Ce chapitre se termine par une validation numérique des résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

2 Etude bibliographique

2.1 Introduction

Ce chapitre présente l'état de l'art permettant de définir le cadre général de cette thèse. Il se divise en deux parties distinctes :

- . La première partie est consacrée à la présentation générale des structures de plaques multicouches et sandwichs. Commenant par une étude sur les structures simples de plaques, cette partie se terminera par une synthèse des travaux de recherche sur ce thème sans oublier l'intérêt industriel de ce type de géométrie.
- . La deuxième partie est destinée à une présentation générale de la méthode des éléments continus notée (MEC). Ainsi, on décrira son principe et sa genèse après avoir comparé cette approche aux autres méthodes destinées à l'étude des comportements vibratoires des structures. A la fin de cette partie, des exemples de structures vibrantes analysées par la méthode des éléments continus seront présentés.

2.2 Etat de l'art des structures de plaques sandwichs et multicouches

2.2.1 Définition

Les plaques multicouches et les plaques sandwichs sont habituellement constituées d'un ensemble de plis superposés. Ces plis sont le plus souvent des matériaux isotropes voire orthotropes dont les axes matériels peuvent différer d'une couche à l'autre. Généralement l'épaisseur de ces couches est très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau carbone époxy dans le domaine aéronautique et de l'ordre de 0,3 mm pour celles utilisées dans l'industrie nautique. On distingue deux catégories de plaques multicouches :

- . Les multicouches symétriques pour lesquels il existe un plan de symétrie que l'on note $(O; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ (voir figure 2.1)

- . Les multicouches non symétriques pour lesquels il n'existe aucun plan de symétrie (voir figure 2.2).

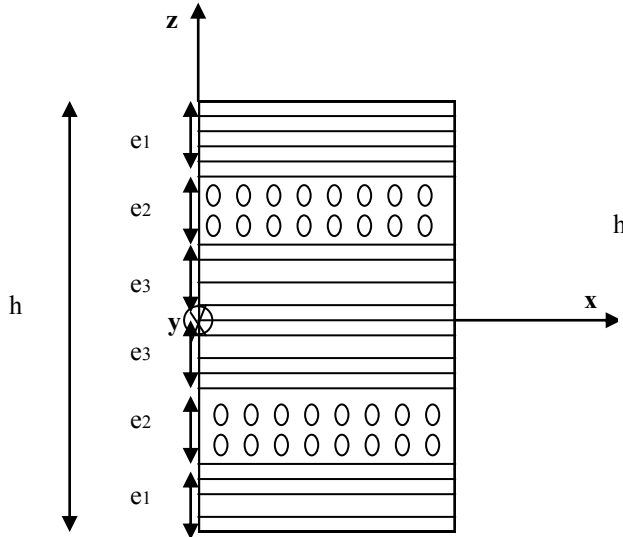


FIGURE 2.1 – Plaque multicouche symétrique

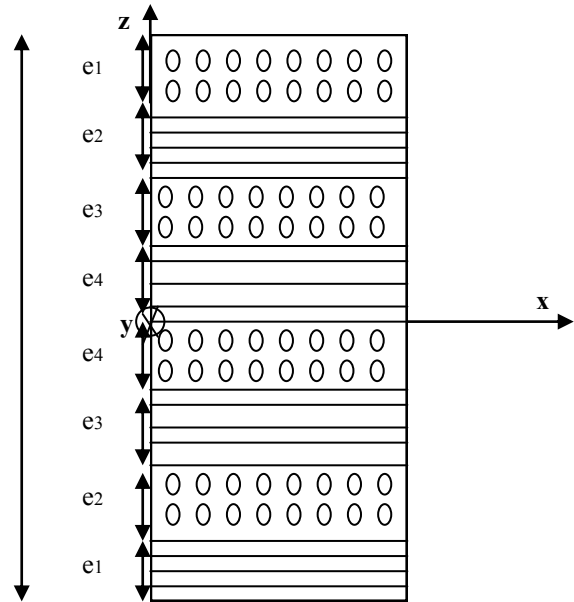


FIGURE 2.2 – Plaque multicouche non-symétrique

L'étude dynamique de ces structures nécessite la compréhension des théories de plaques de Kirchhoff ou de Mindlin. Afin de pouvoir décrire le comportement d'une structure de plaque multicouche, on s'intéresse en premier lieu à l'étude d'un pli orthotrope soumis à des effets de flexion et de membrane. Pour ce qui est de la flexion, on se limitera dans ce mémoire à la théorie de Kirchhoff. Une intégration sur l'épaisseur des comportements de chaque pli orthotrope permet ensuite de décrire le comportement d'un multicouche symétrique du fait de l'absence de couplage membrane/flexion. La prise en compte de ce couplage permet de traiter le problème dans le cas de multicouches non-symétriques.

2.2.2 Intérêt industriel de l'étude

Les plaques multicouches sont des éléments structuraux utilisés dans de nombreux secteurs industriels. On peut noter leur présence par exemple dans les secteurs de la production d'énergie, de la construction aéronautique et de la construction navale.

Production d'énergie

Les plaques multicouches sont utilisées pour la production de panneaux photovoltaïques qui transforment le rayonnement solaire en électricité. Ces structures permettent de supporter des températures très élevées (voir figure 2.3).



FIGURE 2.3 – Panneaux photovoltaïques

Construction aéronautique

Les matériaux composites interviennent de plus en plus dans la conception des avions. Ils peuvent représenter jusqu'à 50% des matériaux pour les avions civils et près de 80% pour les avions militaires. Ci-dessous, la part des matériaux composites sur Boeing 787 :

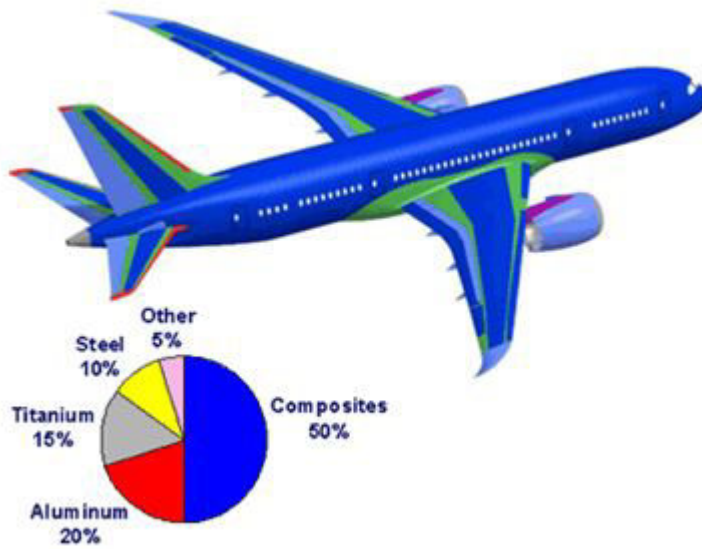


FIGURE 2.4 – Répartition des matériaux composites [91]

Depuis les origines de la construction aéronautique, la structure des ailes peut être assimilée à celle d'une structure sandwich (Figure 2.5).

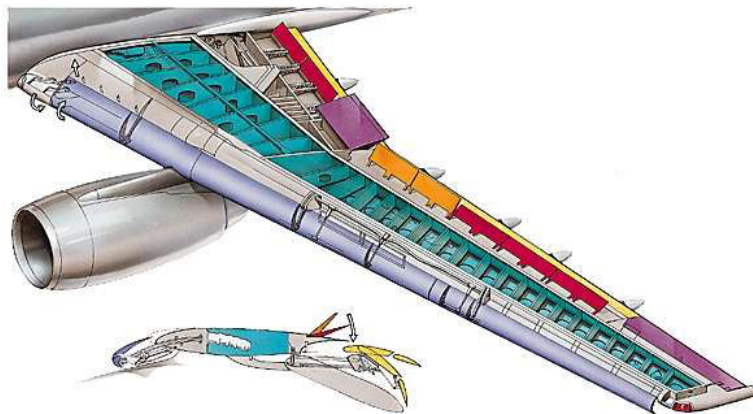


FIGURE 2.5 – Structure interne d'aile d'avion

Les panneaux multicouches sont utilisés au niveau des fuselages pour assurer isolation acoustique, thermique et résistance mécanique (Figure 2.6).



FIGURE 2.6 – Fuselage d'avion

De même, les pales d'un hélicoptère sont fabriquées en matériaux sandwichs de manière à résister à des efforts importants de flexion, de torsion et de compression. Ces pales doivent être à la fois légères et robustes (Figure 2.7).

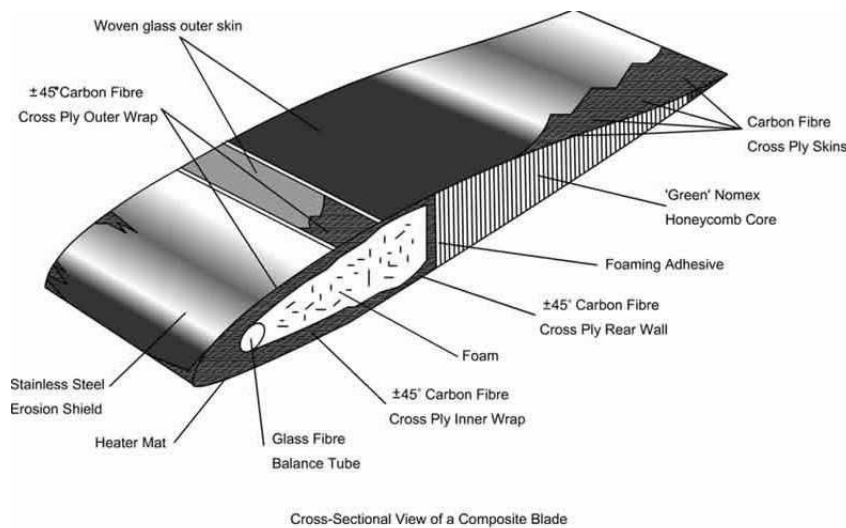


FIGURE 2.7 – Structure interne d'une pale d'hélicoptère [92]

Construction navale

Depuis des dizaines d'années, les ingénieurs cherchent à minimiser le poids des bateaux tout en améliorant leur stabilité dans l'eau. Les matériaux composites constituent une alternative particulièrement attrayante pour la réalisation de structures

navales (Figure 2.8).



FIGURE 2.8 – Bateau en composite

2.2.3 Les matériaux composites

Définition

Depuis des années, les composites prennent une part de plus en plus importante en conception mécanique. Parmi ces composites, les matériaux sandwichs occupent une place importante. En 1820, la structure sandwich a été développée par le français Duleau puis en 1849 par l'anglais Fairbairn. Ces deux chercheurs se sont intéressés à développer un matériau constitué de deux membranes séparées d'une petite distance.

En 1930, le matériau sandwich a été utilisé en Angleterre et aux Etats-Unis pour réaliser des structures complexes. Une structure est dite sandwich (Figure 2.9) si elle est composée de :

- Deux peaux appelées aussi semelles qui sont constituées par un matériau ayant une bonne caractéristique mécanique. Ces caractéristiques sont un module d'élasticité élevé et une bonne résistance à la traction et à la compression.
- Cœur ou âme constitué par un matériau léger et de faible caractéristique mécanique. Ce matériau résiste bien aux efforts de cisaillement.

Les semelles et l'âme sont parfaitement assemblées par collage ou par soudage. Le matériau de cœur et de peau peut être isotrope ou orthotrope, homogène ou inhomogène. Les matériaux composites admettant une bonne rigidité ainsi qu'une résistance à

la fatigue et à la corrosion permettent de concevoir des structures sandwichs optimisés.

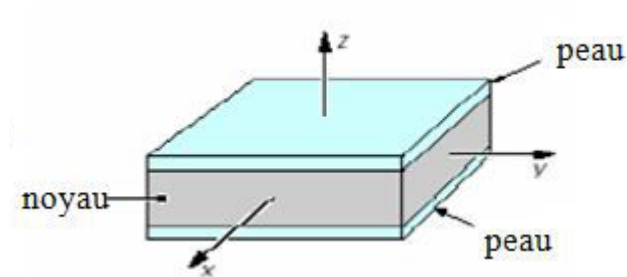


FIGURE 2.9 – Plaque sandwich

Les matériaux les plus utilisés pour l'âme sont en nid d'abeille, en bois de balsa ou en mousse.

L'âme en nid d'abeille

Le matériau en nid d'abeille est constitué par des mailles hexagonales à partir de différents matériaux tels que le papier ou l'aluminium. Les propriétés de ce matériau varient selon l'orientation et les dimensions des mailles. Ainsi, la résistance au cisaillement transversal et longitudinal est influencée par l'épaisseur des parois de l'âme (voir figure 2.10).

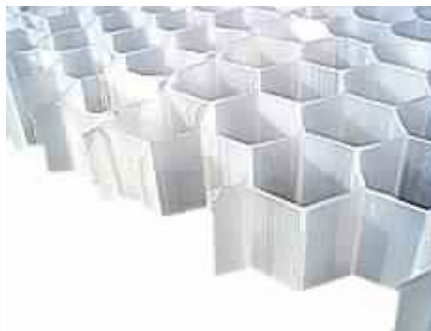


FIGURE 2.10 – Structure en nid d'abeille

L'âme en nid d'abeille ou nommée aussi 'Nida', ses propriétés sont les suivantes :

- L'épaisseur du nid d'abeille varie entre 3 et 150mm.
- La masse volumique varie entre 15 et 160 kg/m^3 .
- Les efforts de cisaillement sont absorbés par l'âme.

L'âme en mousse

La mousse est un matériau plastique rigide ou souple de type thermoplastique ou thermodurcissable (voir figure 2.11).



FIGURE 2.11 – Structure en mousse

Les caractéristiques communes des âmes en mousse sont les suivantes :

- L'épaisseur varie entre 3 et 40mm.
- La masse volumique varie entre 30 et 300 kg/m^3 .
- Le matériau est thermoformable dont on peut réaliser des pièces complexes.

L'âme en bois de balsa

L'âme en bois de balsa admet une bonne résistance à la compression grâce à la direction des fibres du balsa par rapport à la direction des peaux (voir figure 2.12).



FIGURE 2.12 – Structure en bois de balsa

Les caractéristiques communes des âmes en bois de balsa sont les suivantes :

- Fabrication des plaques sandwichs de haute résistance et légères.
- La masse volumique varie entre 40 et 250 kg/m^3
- Le matériau admet une très bonne résistance à la compression.

2.3 Etude vibratoire des plaques

Plusieurs théories de plaque orthotrope peuvent être utilisées pour la formulation d'un modèle de plaque multicouche. Chaque théorie présente certaines hypothèses.

Dans la littérature, il existe différentes configurations de plaques. Ces structures sont classées selon leur géométrie ou selon le type de sollicitation subie. On peut les classer aussi selon leur comportement : membrane ou flexion, prise en compte ou non du cisaillement transverse. En tenant compte de ce dernier aspect, il existe des plaques dont la faible épaisseur permet de négliger les déformations de cisaillement transversal, la théorie utilisée est celle de Love-Kirchhoff. La théorie de Mindlin est utilisée lorsque ces déformations ne sont pas négligées.

Solutions exactes

Les chercheurs ont établi des solutions exactes pour les plaques en imposant un champ cinématique à la plaque d'une part et en appliquant des conditions aux limites simplement appuyées d'autre part. Ces solutions sont basées sur des hypothèses simplificatrices. L'étude vibratoire des plaques a été développée par plusieurs équipes de recherches depuis plus d'un siècle. Les premières solutions ont été établies pour une plaque isotrope. En 1877, Levy [80] a présenté une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion. Pagano ([81], [82],[83]) a concentré son travail de recherche sur les plaques multicouches. Il a donné une solution exacte tridimensionnelle pour des plaques stratifiées et sandwichs [82]. Cette solution est basée sur la résolution d'un système d'équations en utilisant les auto-fonctions de type exponentiel et trigonométrique. Par contre, Kulkani [84] et Srinivas [85], [86],[87] ont donné des solutions exactes pour des plaques dans le cas dynamique. En 1991, Reddy [78] a donné une solution exacte basée sur les équations d'équilibre pour les plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques pour simuler la flexion dans le cas statique. En outre, Nour [79] a présenté des solutions exactes pour ces structures dans le cas dynamique.

Classical laminated plate-Théorie classique des stratifiées (CLT)

Ce modèle constitue une généralisation pour les plaques anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff dans le cas d'une plaque monocouche. Cette théorie a été décrite en 1888. Elle consiste à simplifier la théorie d'élasticité linéaire et est basée sur les hypothèses suivantes [65] :

- Les sections normales au feuillet moyen restent normales après la déformation ; cette hypothèse permet de négliger les effets de cisaillement dans le cas de flexion (figure 2.13).
- L'épaisseur de la plaque est faible ; ceci permet de négliger les contraintes dans

le sens de l'épaisseur.

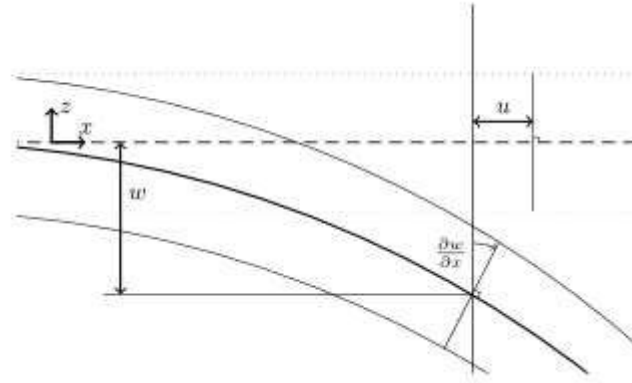


FIGURE 2.13 – Modèle Love-Kirchhoff

First-Order Shear Deformation theory- Théorie de déformation en cisaillement (FSDT)

Cette théorie est nommée aussi 'théorie des plaques épaisses' ou 'Modèle de Mindlin-Reissner'. Ce modèle prend en compte les effets de cisaillement dans l'épaisseur pour la plaque. Reissner [75] a présenté le premier modèle de la plaque où les contraintes de cisaillement transverse sont prises en compte. Puis Mindlin [76] a développé la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur le déplacement. Cette théorie est fondée sur l'hypothèse selon laquelle [65] les sections normales au feuillet moyen ne restent plus normales mais restent planes après la déformation (Figure 2.14).

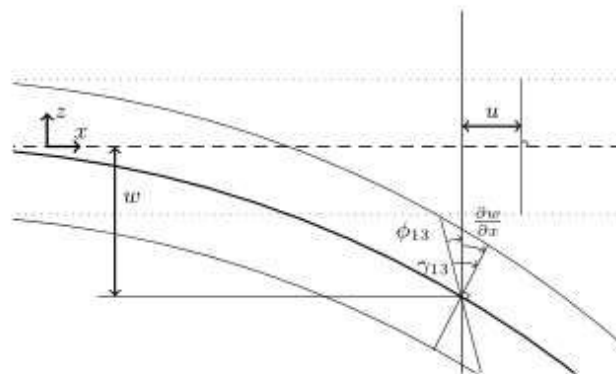


FIGURE 2.14 – Modèle de Mindlin

Hight-order Shear Deformation Theory-Théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT)

Ce modèle a été développé par Reddy [77]. Cette théorie est basée sur la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre. Elle consiste à imposer une petite variation des déformations transverses selon un polynôme de troisième degré. Ce dernier permet d'éliminer les contraintes de cisaillement transverses du stratifié.

Modèle d'ordre supérieur

Le modèle d'ordre supérieur présente une distribution du champ de déplacement non linéaire. Le champ de déplacement de ce modèle est présenté par un développement en série de Taylor. Les chercheurs ont appliqué cette théorie pour différentes structures. Nelson et al. [73] puis Liberscu [72] ont analysé les plaques multicouches en utilisant le modèle d'ordre supérieur. Noor et al [74] ont appliqué cette approche pour faire l'analyse statique et en vibration libre des plaques composites.

Modèle zigzag

Le modèle zigzag (Figure 2.15) a été présenté par les travaux de Carrera [69]. Dans ce modèle, le déplacement est continu selon l'épaisseur. Celui-ci présente une la pente de déplacement différente d'une couche à l'autre. L'avantage de ce modèle est de vérifier les conditions de continuités sans augmenter l'ordre de dérivation des équations. Ce modèle ne nécessite pas de coefficient de correction du cisaillement transverse. Dans ce cadre, plusieurs travaux de recherches ont été menés. Ossadzow [71] et Karama [70] ont utilisé ce modèle pour affiner les efforts de cisaillement en ajoutant une fonction dite *zigzag* à la fonction sinus du déplacement.

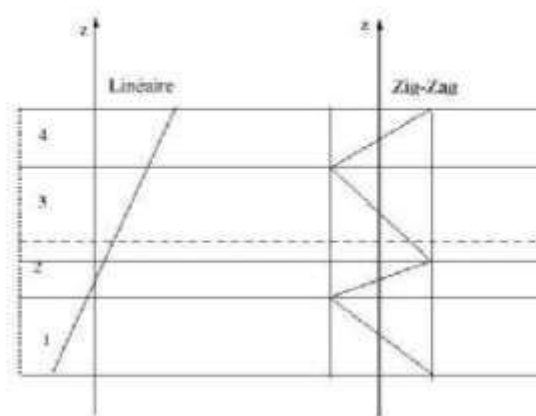


FIGURE 2.15 – Modèle Zig-Zag

Après avoir énoncé les différentes théories de plaques multicouches, nous allons

présenter dans le paragraphe suivant les méthodes numériques ainsi que la méthode des éléments continus qui ont pu être utilisées pour l'étude vibratoire des plaques.

2.4 Méthode des éléments continus

2.4.1 Généralités

Les chercheurs depuis les années soixante-dix ont développé la méthode des éléments continus. Cette approche est une méthode matricielle de calcul de structure dite meshless. L'expression *élément continu* est présentée par P.H Kulla [1]. Cette méthode est connue sous différentes dénominations, on cite par exemple *Dynamic Stiffness Method* [2] ou encore *Continuum Element Method* [3] ou également *Spectral Element Method* [4]. La démarche de cette méthode permet de déterminer une description exacte des structures étudiées dans le cadre des régimes harmoniques établis pour une théorie élastodynamique donnée. De la même façon que la méthode des éléments finis, cette méthode consiste également à représenter le comportement dynamique des structures par des relations matricielles entre les efforts appliqués et les déplacements. Le principe de cette approche est basé sur la construction d'une matrice de raideur dynamique incluant à la fois les effets de raideurs et de masse. Cette matrice permet de déterminer la réponse harmonique des structures étudiées.

Les cadres d'application privilégiés de cette méthode sont les problèmes vibratoires qui nécessitent une grande précision pour des domaines fréquentiels étendus. La discrétion acoustique des sous-marins par exemple nécessite cette approche, l'eau étant un milieu favorable à la propagation des ondes sonores, une grande précision quant à leur niveau est requise. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis restent non performants pour les hautes et les moyennes fréquences. Plusieurs solutions ont été cherchées. Les premières études ont été dédiées à des structures sollicitées par les moyens de propulsion comme les berceaux et les arbres de transmission. La structure de berceau est basée sur un assemblage de poutres. La figure 2.16 présente la topologie et la dimension de telles structures.

2.4.2 Etat de l'art

Comme indiqué au paragraphe précédent, la matrice de raideur dynamique présente de bonnes performances par rapport à la méthode des éléments finis pour certains problèmes de dynamique des structures. R.W. Clough et J. Penzien [2] ont présenté cette méthode dans leur ouvrage en 1975. Un important nombre d'organismes a développé des codes de calcul basés sur cette méthode dans les années 80. Parmi ces codes, on peut citer PFVIBAT [5] : c'est le premier code de calcul qui a été développé par l'équipe du professeur Akesson en Suède. Ce code est limité à la modélisation de structures planes (poutre de type Euler-Bernoulli). Ensuite, on peut citer le code SFVIBAT pour la résolution des analyses des assemblages tridimensionnels de tubes (pour les poutres de Timoshenko). En 1983, au Centre d'Etudes



FIGURE 2.16 – Berceau de sous-marin

de l'Agence Spatiale Européenne, un code de DISTEL (DIStributed ELEment) [6] a été développé pour l'étude de la réponse dynamique des armatures de panneaux de satellites. Ce code permet de déterminer la matrice d'impédance de la structure. A l'université de Cardiff le code VICONOPT a été développé par F.W Williams [7]. Ce code est destiné à l'analyse des plaques prismatiques assemblées. En 1987, la NASA a développé son propre code dénommé BUNIVIS-RG. Ce code est destiné à l'étude des structures suivantes : les poutres de Timoshenko, les sous-structures répétitives et les plaques de formes prismatiques [32]. En Allemagne, le code IDA, développé par Kulla [9], permet d'analyser les assemblages de poutres et l'étude dynamique de plaques.

En France, un code nommé 'ETAPE' (Etude de transmissibilité des Assemblages de Poutres Elastiques) [33] a été développé par l'équipe de la Direction des Constructions Navales (D.C.N). Ce code est basé sur la méthode des éléments continus pour améliorer la précision de la simulation des structures étudiées. Il est utilisé généralement pour faire l'analyse harmonique des structures complexes. Plusieurs éléments ont été développés par la D.C.N comme les éléments de poutres cintrées circulairement ou hélicoïdales, les plaques rectangulaires et les éléments de coques axisymétriques et raidies.

A partir des résultats obtenus par la méthode des éléments continus, les chercheurs se sont convaincus des performances de cette approche par rapport aux autres méthodes numériques. La finesse de maillage est étroitement liée à la précision des résultats des modèles éléments finis. En tant que méthode meshless, la méthode des éléments continus ne dépend que des termes de séries utilisées pour construire la matrice de rigidité dynamique. Pour le cas de la modélisation des plaques, on parle du nombre de série de Levy. Ce nombre peut être important selon la précision de

la structure étudiée, ce qui provoque une augmentation du volume de données. Le temps de calcul est également lié à la richesse des séries.

Au jour d'aujourd'hui, la méthode des éléments continus est capable de résoudre les problèmes des structures assemblées, constituées par des plaques, coques et poutres.

2.4.3 Les autres approches numériques

L'analyse vibratoire des structures est essentielle dans de très nombreux secteurs industriels. Elle peut concerner par exemple la conception des systèmes motorisés soumis à des frottements ou la conception des ouvrages d'art soumis à des sollicitations sismiques. Différentes approches et méthodes d'analyse vibratoire des structures simples ou complexes ont été mises au point. Ce paragraphe présente les méthodes les plus utilisées et les plus connues pour résoudre ces problèmes.

Méthode de Rayleigh-Ritz

Les chercheurs ont résolu le problème de la réponse harmonique des structures par des méthodes basées sur la résolution soit analytique soit numérique de l'équation différentielle de mouvement en tenant compte des conditions aux limites appliquées sur la structure. Ces méthodes donnent des résultats satisfaisants pour les ingénieurs. Parmi ces approches les plus utilisées on trouve la méthode de type Rayleigh-Ritz. Elle permet de déterminer une approximation des modes de la structure dans un espace de N dimensions en choisissant N fonctions. Le choix de ces fonctions conditionne la précision des résultats. Les solutions sont sous écrites sous la forme suivante :

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \cdot \phi_i(x, y) \quad (2.1)$$

où les coefficient A_i sont les coordonnées généralisées.

A l'origine, cette méthode a été développée pour différentes structures simples de types poutres, plaques et coques. Ensuite, les chercheurs se sont intéressés à développer la méthode de Rayleigh-Ritz pour étudier les structures de types complexes telles que les plaques et les coques raidies. Wang et al. [13] ont mené cette approche pour examiner le problème des vibrations libres des coques en tenant compte des variations dans la distribution des raidisseurs circonférentiels. Une étude analytique, expérimentale et numérique a été présentée par Jafari et Bagheri [14] pour analyser le comportement vibratoire d'une coque raidie avec un nombre important de raidisseurs externes. Ces raidisseurs sont espacés non régulièrement le long de la coque. R.B. Bhat [11] a utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour présenter les fréquences propres d'une plaque rectangulaire. En outre, S.M. Dickinson et A. Di Blasio [12] ont obtenu des résultats en utilisant cette approche pour résoudre le problème de flambement d'une plaque rectangulaire de type isotrope et orthotrope. Enfin, Bardell et al. [18] ont développé l'approche de Rayleigh-Ritz pour calculer les fréquences propres d'une

plaque isotrope simplement appuyée.

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode numérique la plus connue et la plus utilisée aujourd'hui. Cette approche permet de résoudre des problèmes très divers tels que les problèmes de la mécanique de milieux continus, les problèmes thermiques, le comportement mécanique et le problème statique des structures. Cette méthode permet de résoudre également des problèmes de dynamique rapide, d'élasto-plasticité, de thermoélasticité tout en tenant compte de comportements des matériaux linéaires ou non.

L'idée de cette approche est de subdiviser le domaine géométrique de la structure en sous domaines élémentaires appelés éléments finis (EF). Une approximation polynômiale présentée sur chaque élément permet de déterminer une solution du problème. Cette approche transforme le problème aux dérivées partielles (EDP) de l'élastodynamique sous forme variationnelle.

Ces équations différentielles sont résolues par la méthode des résidus pondérés qui consiste à approcher l'annulation du résidu d'une équation différentielle pour trouver une solution discrète. Cette méthode permet d'affaiblir un système d'équations pour permettre sa résolution dans le cas où celui-ci présenterait des difficultés d'ordre mathématique (discontinuités, fonction non définie, valeurs infinies ...). Cette méthode s'effectue en deux étapes :

- La première étape consiste à définir le terme résidu noté $R(u)$ tel que :

$$R(u) = L(u) + fv \quad (2.2)$$

où L représente un opérateur différentiel pour le système, u est une fonction inconnue qui vérifie les conditions aux limites et fv représente les sollicitations du système.

- La deuxième étape permet d'éliminer la forme d'intégrale globale en choisissant les fonctions u convenables :

$$W = \int_V \langle \psi \rangle \cdot R(u) dV \quad (2.3)$$

où ψ représente les fonctions de pondération.

Le nombre de fonctions ψ_i correspond dans ce cas au nombre de paramètres inconnus. Le choix de ces fonctions permet de déterminer les différentes méthodes de résolution parmi lesquelles : la méthode de 'Galerkine'. Cette dernière consiste à transformer le problème continu en problème discret. Dans notre cas, elle permet de prendre les fonctions de pondérations ψ_i égales à la variation des fonctions u . Ce choix de fonction

permet d'avoir une forme d'intégrale particulière qui rend stationnaire la fonctionnelle associée. Après avoir déterminé la formulation élémentaire, l'étape assemblage intervient. Cette procédure ramène le problème aux dérivées partielles de élastodynamique linéaire à un problème décrit par un système d'équations différentielles de second ordre comme il est présenté dans l'expression (2.4).

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.4)$$

où :

$[\mathbf{M}]$ représente la matrice masse du système, $[\mathbf{C}]$ la matrice d'amortissement et $[\mathbf{K}]$ la matrice de raideur.

$\{\mathbf{U}\}$ et $\{\mathbf{F}\}$ sont respectivement les vecteurs de déplacements et d'efforts généralisés. $\dot{\mathbf{U}}$ et $\ddot{\mathbf{U}}$ sont respectivement les vecteurs vitesse et accélération.

Dans le cas d'analyse des vibrations, le système libre non amorti, présenté par l'équation de mouvement, permet de déterminer les modes et les fréquences propres de la structure.

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un système forcé non amorti, on résout :

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.6)$$

L'utilisation des méthodes classiques de calcul permet de résoudre ce type d'équation. Pour obtenir une bonne précision de la résolution de ces équations, il y a la méthode dite 'complète'. Cette méthode consiste à inverser le système $([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])$ pour chaque pulsation ω en utilisant la méthode de 'pivot de Gauss' par exemple. La méthode la moins précise mais la plus rapide est celle de superposition modale. Cette méthode est basée sur la projection des équations de mouvement sur une base de vecteurs propres. Cette projection permet de décomposer l'équation (2.6) en n équations découplées comme suit :

$$m_i \ddot{u}_i + k_i u_i = f_i \quad (2.7)$$

où f_i est la force associée pour chaque mode i ; u_i est le déplacement modal en chaque noeud de chaque élément.

La solution générale du système est basée sur la superposition de toutes les solutions élémentaires.

Dans les deux approches que nous venons de détailler, la précision des résultats obtenus est mise en évidence. Ainsi, la méthode de superposition modale est une méthode conditionnée par un nombre défini de modes i qui forment la base. L'autre méthode dite 'complète' est une méthode basée sur la discrétisation du problème.

Elle permet de donner une meilleure précision des résultats retenue.

Plusieurs équipes se sont spécialisées dans le développement de cette méthode. Batoz et Dhatt ont présenté de façon synthétique cette approche pour les types de structures suivants : poutres [15], plaque [16] et coques [17]. O.C Ziekiewicz [19] et al. ont détaillé le principe de la méthode des éléments finis pour les éléments poutre anisotrope, plaque et coque. Prior et Barker [20] sont les premiers chercheurs qui ont développé cette approche pour les stratifiés en tenant compte des déformations de cisaillement transversal. Grover [21] et al. ont appliqué la MEF pour les plaques multicouches composites et les plaques sandwichs. Nguyen-Xuan et al. [22] ont expliqué cette théorie pour les plaques sandwichs en utilisant l'ordre supérieur de déformation de cisaillement. Sciuva [23] a développé la MEF pour les plaques rectangulaires multicouches.

Sur la base des études antérieures, la méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée industriellement parce qu'elle est précise pour l'analyse vibratoire des basses fréquences et a donné lieu au développement de logiciels spécifiques parfaitement adaptés au process industriel de conception. Cependant, cette approche a des inconvénients qui peuvent être un obstacle aux études de l'ingénierie mécanique. Pour les moyennes et les hautes fréquences, le nombre de modes propres sollicités pour l'analyse harmonique augmente ainsi que la densité modale. Ceci amène à des problèmes numériques d'extraction des modes propres.

L'inconvénient majeur de cette méthode est la nécessité de mailler finement au détriment du temps de calcul qui reste un paramètre important pour les ingénieurs. Pour la méthode des éléments finis, l'augmentation de la plage fréquentielle nécessite un maillage très fin. Ceci conduit d'une part, à un temps de calcul important et d'autre part, nécessite l'utilisation des machines de calcul puissantes.

Méthode des éléments de frontières

La méthode des éléments de frontières (BEM) est basée sur la discrétisation de la frontière du domaine étudié pour réduire le nombre de degrés de liberté [24]. Cette approche consiste à transformer les équations différentielles en des équations intégrales en utilisant la *fonction de Green*. Ces équations intégrales permettent d'obtenir une relation entre les champs intérieurs et les quantités sur les bords. Le problème majeur de cette méthode se situe au niveau de la précision numérique des résultats étant donné que la matrice obtenue après la discrétisation de la frontière est pleine, non symétrique mais de petite taille.

La méthode des éléments de frontières consiste à diminuer le maillage puisque la frontière est le seul élément géométrique discrétisé, c'est le principal avantage par rapport à la méthode des éléments finis. Lorsque la fréquence augmente, la BEM donne une meilleure précision que celle de la MEF. Un nombre important de cher-

cheurs ont utilisé cette méthode pour différentes structures. Albuquerque et al. [25], par exemple, ont utilisé cette approche dans l'étude vibratoire d'une plaque orthotrope de Kirchhoff où les bords sont soit simplement appuyés soit encastés.

Comme pour les autres méthodes, cette approche admet quelques inconvénients liés à la complexité de la formulation. Ainsi, l'utilisation des fonctions de Green reste délicate. Un deuxième inconvénient se présente pour la difficulté de résolution de la forme du système matriciel obtenu. En effet, ce système est non symétrique et plein. Il doit être résolu pour chaque fréquence. La précision de cette approche dépend de :

- La finesse de maillage des frontières ;
- Le nombre de termes des séries.

2.4.4 La Méthode des Eléments Continus

L'expression 'élément continu' se décompose en deux termes :

- Le premier terme 'élément' fait référence à des sous-structures simples ou complexes.
- Le deuxième terme 'continu' indique que la formulation élémentaire est continue et que le nombre de degrés de liberté infini.

Plusieurs formulations élémentaires ont été développées selon cette approche :

Elément continu de poutre

Les premiers éléments développés selon cette méthode sont les poutres droites. L'approche est basée sur la notion de matrice de transfert [26] qui relie les déplacements et les efforts généralisés de type : efforts, moments, flèches et rotation aux extrémités de la poutre. Cette matrice permet de résoudre les problèmes de l'analyse harmonique pour les poutres même si la section et le matériau change pour cette structure. Les matrices de transfert permettent d'obtenir la matrice de raideur dynamique. Pour les structures complexes, le principe de l'assemblage de la méthode des éléments finis est remplacé par un principe multiplicatif. La MEC consiste à résoudre un système matriciel qui dépend de la pulsation ω , est sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}(\omega)]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.8)$$

où $[\mathbf{K}(\omega)]$ est la matrice de raideur dynamique, $\{\mathbf{U}\}$ est le vecteur des déplacements et $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur des forces extérieures.

La résolution de ce système matriciel pour chaque pulsation ω dans un intervalle fixé permet de déterminer les déplacements pour un chargement harmonique donné. Dans un régime harmonique, la méthode des éléments continus consiste à déterminer

la matrice de raideur dynamique en fonction de la pulsation ω . Cette matrice dépend à la fois des propriétés élastiques et massiques de la structure. Elle permet la résolution analytique des équations différentielles pour des conditions aux limites dites libres. La matrice de raideur dynamique relie directement les efforts par les déplacements sans faire appel aux modes propres de l'élément.

Dans le cadre de son utilisation, les chercheurs ont développé cette méthode pour les poutres depuis plusieurs années. En Angleterre, Banerjee [34] a présenté la matrice de raideur dynamique pour une poutre de type Bernoulli en tenant compte du couplage flexion-torsion. De même, William et al. [32] ont appliqué la MEC pour déterminer la matrice de rigidité pour une poutre de Bernoulli sur fondations élastiques. Par ailleurs, Benicourt et Duforet [33] ont établi les matrices de raideur dynamique pour les poutres de types Timoshenko où les effets de l'amortissement structural sont pris en compte, les termes de ces matrices sont alors complexes. Capron et Williams [35] ont développé des techniques numériques basées sur l'inversion et la multiplication des matrices pour obtenir des matrices de raideurs dynamiques d'une poutre en torsion plongée dans un milieu élastique. Dans le même cadre, Montalveao [36] a appliqué cette technique pour analyser une poutre circulaire vibrant hors de son plan.

Les avantages de cette méthode ont poussé les chercheurs à appliquer cette approche sur des éléments structuraux complexes en appliquant les hypothèses d'élasto-dynamiques convenables pour des régimes harmoniques. En France, Casimir a constitué une bibliothèque d'éléments continus pour les poutres ([37], [38]). Il a développé une technique pour calculer numériquement les matrices de raideurs dynamiques en utilisant les matrices de transfert. En 2003, ce chercheur a appliqué la méthode des éléments continus pour les poutres courbes et gauches [39]. De même, Tounsi et al. ont développé cette approche pour déterminer la matrice de raideur dynamique pour un anneau circulaire [40]. Lee [4] a appliqué la méthode des éléments spectraux pour présenter un ensemble de formulations élémentaires unidimensionnelles telles que celles des poutres multicouches à plis viscoélastiques ou encore de poutres en rotation.

Dans le cas du comportement vibratoire, Banerjee et al. ([41], [42]) et Howson [43] ont développé la MEC pour les composites et les poutres sandwichs. Kim et al. [44] ont traité l'étude des poutres à parois minces.

Élément continu de plaque

Pour la formulation d'un élément continu de plaque, deux théories ont été mises en œuvre : la théorie de Love-Kirchhoff et la théorie de Reissner-Mindlin. Pour les poutres, la formulation d'un élément continu consiste à utiliser les solutions analytiques exactes, dans le cas des plaques, ces solutions n'existent pas. Il est fait appel à des développements en série.

D.J. Gorman [45] a présenté des travaux pour déterminer les déplacements transverses avec des conditions aux limites quelconques. Cette approche permet de décomposer la plaque en sous-domaine avec des conditions aux limites simples. Les équations différentielles obtenues par cette méthode ont été résolues par une combinaison de séries de Levy. Cette approche permet d'obtenir analytiquement les fréquences et les modes propres de la plaque de type Kirchhoff et Mindlin [46]. Il a ensuite couplé sa technique à la méthode de Galerkin [47].

P. Hagedorn et al. [48] ont utilisé la méthode de Gorman pour déterminer les solutions analytiques pour chaque contribution. Ces solutions sont mises sous la forme de séries composées par des coefficients : A_m , B_m , C_m et D_m . Ces coefficients ont une relation directe avec les efforts généralisés et les déplacements. La construction de la matrice de raideur dynamique consiste ensuite à inverser l'une de ces relations. Dans ce cas, P.H Kulla [1, 55] a utilisé le développement en série de Levy [LEV99] pour déterminer la matrice de raideur dynamique d'une plaque de Kirchhoff en flexion.

En se basant sur les travaux de Gorman et Kulla [55], Fleuret et al. [56] ont donné la matrice de raideur dynamique pour une plaque libre de type Kirchhoff. Par ailleurs, Lee [4] a utilisé les séries de Levy pour présenter la méthode des éléments spectraux. A ce titre, les travaux de Lee se sont limités à une plaque ayant des conditions aux limites simples. De même, Casimir et al [57] ont déterminé les composantes de la matrice de raideur dynamique pour une plaque isotrope de Kirchhoff en utilisant les séries de Levy pour la résolution d'équations de mouvement. Donadon et al. [58] ont appliqué une approche similaire pour l'analyse vibratoire d'une plaque renforcée.

Récemment, Boscolo et Banerjee [59] ont présenté la matrice de raideur dynamique d'une structure plaque dans le cadre d'une théorie du premier ordre de déformation de cisaillement. De plus, ils ont analysé les plaques composites de Mindlin en tenant compte de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur [60]. Dozio [50] a utilisé les séries de Levy [51] pour déterminer la matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche où les bords opposés sont simplement appuyés. Thinh et al. [52] ont utilisé la méthode des éléments continus pour une plaque orthotrope simplement appuyée de type Winkler et Pasternak sur plusieurs sections de fondations élastiques. Thai and Kim [53] ont employé la série de Levy et les théories de plaque de Mindlin pour faire l'analyse harmonique d'une plaque orthotrope. Ils ont choisi les deux bords opposés simplement appuyés et ils ont changé les conditions aux limites pour les deux autres bords. De son côté, Leissa [54] a présenté la matrice de raideur dynamique pour une plaque orthotrope de Kirchhoff où les deux bords opposés sont simplement appuyés.

Eléments continus de coques axisymétriques :

Les éléments de coques sont les structures les plus utilisées dans le domaine industriel. Des approches ont été développées pour la résolution de ce type d'élément.

Ces méthodes sont basées essentiellement sur les deux théories suivantes : théorie de Reissner et théorie de Kirchhoff. Les travaux de Kalnin [61] présentent un modèle analytique de référence basé sur les équations de coques axisymétriques minces et épaisses.

Les équations de ces structures sont exprimées dans le système de coordonnées curvilignes noté (s, θ, φ) associé à la coque. Pour ce type de modèle, les variables se décomposent en trois déplacements nommés u_s, v, w selon s, θ et φ respectivement et deux rotations β_φ et β_θ . Ainsi, cette structure admet trois moments $M_s, M_\theta, M_{s\theta}$ et cinq efforts internes $N_s, N_\theta, N_{s\theta}, T_s, T_\theta$. L'idée générale de la méthode consiste à ramener le problème harmonique à un système différentiel d'ordre 1. Cette approche est basée sur la construction d'un vecteur d'état nommé E constitué des déplacements, des rotations, des efforts internes et des moments. Le système différentiel est présenté par l'équation (2.9) :

$$\frac{d\mathbf{E}_m}{ds} = \Delta_m(s, \omega)\mathbf{E}_m \quad (2.9)$$

Avec : $\mathbf{E} = (u_s, v, w, \beta_\varphi, \beta_\theta, N_s, N_{\theta s}, T_s, M_s, M_{\theta s})^{-1}$

A partir de la résolution du système $\mathbf{T}(\mathbf{0}, \omega) = I$, la matrice de raideur dynamique $\mathbf{K}_m(\omega)$ intervient, elle est présentée par l'expression suivante :

$$[\mathbf{K}_m(\omega)] = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{-1}(\omega)\mathbf{T}_{11}(\omega) & \mathbf{T}_{12}^{-1}(\omega) \\ \mathbf{T}_{21}(\omega) - \mathbf{T}_{22}(\omega)\mathbf{T}_{12}^{-1}(\omega)\mathbf{T}_{11}(\omega) & \mathbf{T}_{22}(\omega)\mathbf{T}_{12}^{-1}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

On peut introduire des termes complexes dans la matrice $[\Delta(\omega)]$ pour obtenir la réponse harmonique de coques amorties. En se référant à cette méthode, le modèle de Le Sourne [62] permet de construire une base d'éléments de coques minces axisymétriques (cylindre et cônes) et des coques toriques telles que des coudes. Les travaux de Casimir et al. [63] portent sur l'étude vibratoire des coques épaisses de type Reissner/Mindlin. Ils ont utilisé la méthode des éléments continus pour déterminer la matrice de raideur dynamique pour ce type d'élément. La formulation qui a été utilisée a pu être validée par une étude expérimentale. Dans le même cadre de recherche, Khadimallah et al. [64] ont introduit l'effet d'un fluide, soit interne soit externe, à la coque axisymétrique.

2.4.5 Les limites de la méthode des éléments continus

La méthode des éléments continus permet de calculer la réponse harmonique de plusieurs structures de géométries simples ou complexes. Cette approche donne, actuellement, des résultats par rapport à ceux obtenus par les autres approches numériques de résolution. Elle génère des résultats sans discrétisation géométrique de la structure. Ceci permet une diminution du temps de calcul sans affecter la précision. Cependant, la méthode des éléments continus a les inconvénients suivants :

- Elle est limitée aux réponses harmoniques de structures pour un comportement linéaire et pour des déformations supposées petites.
- Elle n'est pas encore développée pour les structures tridimensionnelles.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps l'état de l'art de cette thèse concernant les plaques multicouches et leurs utilisations industrielles. Ensuite, nous avons présenté quelques théories des plaques. Enfin, nous avons décrit les différentes méthodes de résolution numérique ainsi que la méthode des éléments continus pour la modélisation du comportement vibratoire de structures. Les avantages de la méthode analytique par rapport aux autres méthodes sont mis en évidence.

Le chapitre suivant sera consacré à la formulation et la mise en œuvre d'un élément continu de plaque orthotrope de Kirchhoff. Cette formulation est un nouveau développement de la méthode des éléments continus qui vient enrichir la bibliothèque élémentaire. Cette formulation est une première étape pour le développement de la matrice de raideur dynamique d'une plaque multicouche. La validation de cet élément est menée par une comparaison des résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

3 Élément continu de plaque orthotrope en flexion

3.1 Introduction

Ce chapitre présente la formulation d'un élément continu de plaque orthotrope selon la théorie de flexion de Kirchhoff. L'approche élément continu a été décrite par Casimir et al. [57] dans le cas d'une plaque isotrope et par Nguyen [88] dans le cadre de sa thèse de doctorat pour la formulation de Mindlin. C'est cette approche qui est étendue ici au cas des comportements orthotropes.

Ce chapitre se décompose en trois parties :

- la première partie présente l'étude théorique d'une plaque orthotrope de Kirchhoff.
- la seconde, la formulation élément continu pour ce type de plaque.
- enfin, la dernière permettra de valider cette approche par comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de modèles élément finis.

3.2 Flexion de Kirchhoff des plaques orthotropes

3.2.1 Définition géométrique

L'élément développé dans ce chapitre est un élément de plaque orthotrope de Kirchhoff de dimension $2a \times 2b$ et d'épaisseur h (figure 3.1). Tout point M de coordonnées (x, y, z) appartenant au volume de cette plaque vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \\ \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.1)$$

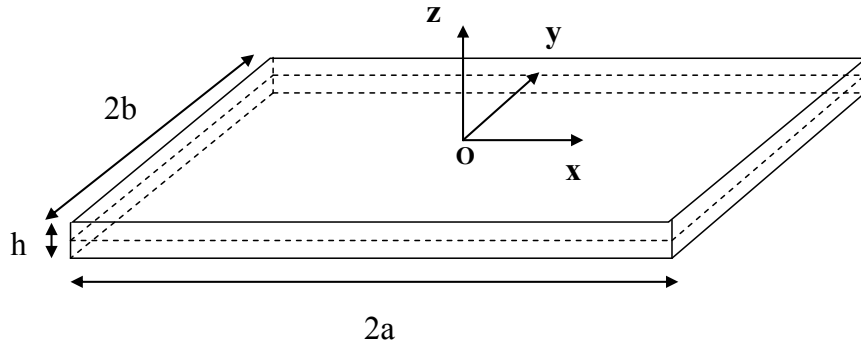


FIGURE 3.1 – Géométrie de la plaque

La surface du feuillet moyen de la plaque est définie par :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \\ z = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2.2 Définition de l'orthotropie matérielle

Le matériau utilisé dans ce chapitre est un matériau orthotrope, ayant les propriétés suivantes :

- E_1 : module de Young longitudinal suivant la direction x
- E_2 : module de Young transversal suivant la direction y
- G_{12} : module de Coulomb
- ν_{12} : coefficient de Poisson
- ρ : masse volumique

Les directions principales d'orthotropie 1 et 2 sont confondues respectivement avec les axes de symétrie géométrique \mathbf{x} et \mathbf{y} .

3.2.3 Hypothèses cinématiques

Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff consistent à considérer que la normale au feuillet moyen reste normale à cette surface au cours de la déformation. Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ situé dans le volume de cette plaque est

alors représenté par l'équation 3.3 :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = W(x, y, t) \end{cases} \quad (3.3)$$

u, v, w sont les déplacements du point M selon les axes \mathbf{x}, \mathbf{y} et \mathbf{z} , respectivement. W est le déplacement suivant z .

Les rotations autour des axes x et y sont notées respectivement par β_x et β_y et se définissent par l'équation 3.4 :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2.4 Relations contraintes-déformations

En considérant les hypothèses de contraintes planes, la relation contrainte déformation pour une plaque orthotrope dans les trois axes (1, 2, 3) est présentée par :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = Q_{11}\epsilon_{11} + Q_{12}\epsilon_{22} \\ \sigma_{22} = Q_{12}\epsilon_{11} + Q_{22}\epsilon_{22} \\ \sigma_{12} = Q_{66}\epsilon_{12} \end{cases} \quad (3.5)$$

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ sont les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy. $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ sont les composantes de tenseur de déformation. Les Q_{ij} sont les constantes qui dépendent des propriétés des matériaux.

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.5 Efforts internes

Les efforts internes d'une plaque orthotrope sont définis, en tout point appartenant au feuillet moyen, par une intégration sur l'épaisseur h des composantes du tenseur de contraintes. Les efforts internes associés aux déplacements sont les suivants :

– Les efforts tranchants :

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (3.7)$$

– Moments de flexion :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz \quad (3.8)$$

– Moment de torsion :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \quad (3.9)$$

Les petites déformations obtenues à partir du champs de déplacement de l'équation (3.5) sont introduites dans les équations (3.8, 3.9) pour obtenir les relations efforts-déplacement.

$$\begin{cases} M_x = -\frac{h^3}{12} Q_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} Q_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ M_y = -\frac{h^3}{12} Q_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} Q_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ M_{xy} = -2\frac{h^3}{12} Q_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.6 Les équations de mouvement

A partir du principe de Hamilton et des hypothèses de Love-Kirchhoff, l'équation du mouvement de la plaque en flexion s'écrit :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

En introduisant la relation effort/déplacement (3.10) dans l'équation de mouvement (3.11), on obtient une équation différentielle pour une plaque orthotrope :

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

où D_x , D_y et D_{xy} sont des constantes qui dépendent des matériaux, elles sont définies par :

$$\begin{cases} D_x = -\frac{h^3}{12} Q_{11} \\ D_{xy} = -\frac{h^3}{6} Q_{12} - 4\frac{h^3}{12} Q_{66} \\ D_y = -\frac{h^3}{12} Q_{22} \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour un régime harmonique établi de pulsation ω , la dépendance temporelle du champ de déplacement W peut être éliminée, on écrit :

$$W(x, y, t) = W_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

D'après les équations (3.14) et (3.12), on obtient alors :

$$D_x \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} = -\rho h \omega^2 W_0 \quad (3.15)$$

$W_0(x, y)$ présente l'amplitude de déplacement W de tout point situé sur le feuillet moyen.

3.2.7 Conditions aux limites

Pour construire une matrice de raideur dynamique, il faut résoudre tout d'abord l'équation de flexion en régime harmonique (3.15) en tenant compte des conditions aux limites de type Neumann. On parle de conditions aux limites naturelles ou encore de conditions aux limites libres. Ce sont des conditions aux limites de type effort qui sont imposées sur les bords de la plaque.

Les efforts imposés sont soit des efforts transverses soit des moments de flexion sur les quatre bords de la plaque. Pour tout mouvement, ces bords restent libres de tout mouvement, c'est à dire qu'aucun déplacement n'est imposé. Ce type de condition s'écrit :

$$\begin{cases} T_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = F_z \\ M_n = \mathcal{M}_n \end{cases} \quad (3.16)$$

où F_z est l'effort transverse imposé et $\mathcal{F}_n + \frac{\partial \mathcal{M}_{ns}}{\partial s}$ l'effort interne effectif. Les deux lettres n et s présentent les coordonnées spatiales le long du bord considéré : s abscisse curviligne le long du bord et n normale au bord.

3.3 Matrice de raideur dynamique pour une plaque orthotrope

La méthode des éléments continus est basée sur le calcul de la matrice de rigidité dynamique. La solution de l'équation dynamique (3.15) pour les conditions aux limites 3.16 permet de déterminer la relation entre les efforts externes et les déplacements pour une fréquence donnée ω .

3.3.1 Décomposition de la solution

La première étape pour résoudre le problème de la réponse harmonique est de le décomposer en sous-problèmes affectés de conditions aux limites plus simples. Ainsi, toute solution peut se décomposer dans un premier temps en quatre contributions aux propriétés de symétrie particulières puis chaque contribution est elle-même décomposée vis à vis de ses conditions aux limites selon une décomposition donnée par Gorman [45]. Les quatre contributions sont notées symétrique-symétrique (SS), antisymétrique-antisymétrique (AA), symétrique-antisymétrique (SA) et antisymétrique-symétrique (AS) (voir figure 3.2).

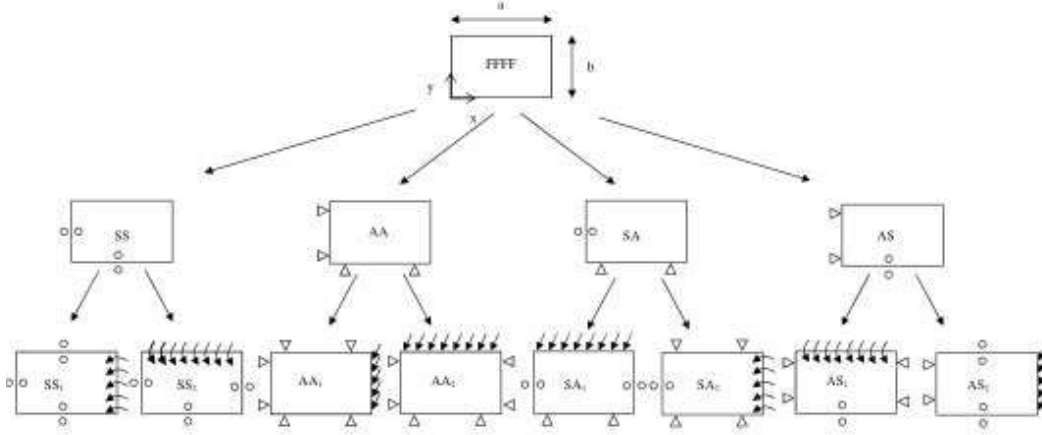


FIGURE 3.2 – Décomposition de Gorman

Les deux cercles superposés indiquent une rotation de section nulle. Les deux triangles présentent un déplacement transverse nul (appui simple). Les flèches courbées signifient un moment non nul selon les axes x et y . Les flèches droites indiquent une force transverse non nulle. Chaque contribution présente ainsi des conditions aux limites plus simples dans la mesure où il y a systématiquement deux bords opposés à conditions identiques. Le déplacement $W(\xi, \eta)$ dans ce cas se décompose comme suit :

$$W_0(\xi, \eta) = W_{SS}(\xi, \eta) + W_{AA}(\xi, \eta) + W_{SA}(\xi, \eta) + W_{AS}(\xi, \eta) \quad (3.17)$$

Les fonctions W_{SS} , W_{AA} , W_{SA} , W_{AS} représentent, respectivement, les contributions symétrique-symétrique, antisymétrique-antisymétrique, symétrique-antisymétrique et antisymétrique-symétrique suivant ξ et η .

D'après l'équation (3.4), et de la même façon, les deux rotations se décomposent comme indiqué dans les équations (3.18) et (3.19).

$$\beta_{x0}(\xi, \eta) = -\frac{\partial W_{SS}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{AA}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{SA}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{AS}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (3.18)$$

$$\beta_{y0}(\xi, \eta) = -\frac{\partial W_{SS}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{AA}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{SA}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{AS}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (3.19)$$

ξ and η sont les coordonnées spatiales de la plaque adimensionnées.

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b \quad (3.20)$$

De même pour les efforts internes :

$$T_x(\xi, \eta) = T_{xSS}(\xi, \eta) + T_{xAA}(\xi, \eta) + T_{xSA}(\xi, \eta) + T_{xAS}(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE
ORTHOTROPE

$$T_y(\xi, \eta) = T_{ySS}(\xi, \eta) + T_{yAA}(\xi, \eta) + T_{ySA}(\xi, \eta) + T_{yAS}(\xi, \eta) \quad (3.22)$$

$$M_x(\xi, \eta) = M_{xSS}(\xi, \eta) + M_{xAA}(\xi, \eta) + M_{xSA}(\xi, \eta) + M_{xAS}(\xi, \eta) \quad (3.23)$$

$$M_y(\xi, \eta) = M_{ySS}(\xi, \eta) + M_{yAA}(\xi, \eta) + M_{ySA}(\xi, \eta) + M_{yAS}(\xi, \eta) \quad (3.24)$$

$$M_{xy}(\xi, \eta) = M_{xySS}(\xi, \eta) + M_{xyAA}(\xi, \eta) + M_{xySA}(\xi, \eta) + M_{xyAS}(\xi, \eta) \quad (3.25)$$

Dans les équations (3.18, 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 et 3.25), le terme SS, AA, SA ou AS n'indique pas le type de symétrie de ces inconnues, mais celui du champ de déplacement W . Par exemple dans le cas où le champ de déplacement est symétrie-symétrie, on a :

$$\beta_{xSS} = -\frac{\partial W_{SS}}{\partial \xi} \quad (3.26)$$

$$\beta_{ySS} = -\frac{\partial W_{SS}}{\partial \eta} \quad (3.27)$$

alors β_{xSS} est un champ symétrie-antisymétrie et le champ β_{ySS} est un champ antisymétrie-symétrie. Ainsi, le tableau (3.1) présente les propriétés de symétrie pour chaque variable.

L'étape qui suit consiste à résoudre l'équation différentielle (3.15) satisfaite par

W	β_x	β_y	M_x	M_y	M_{xy}	T_x	T_y
SS	AS	SA	SS	SS	AA	AS	SA
AA	SA	AS	AA	AA	SS	SA	AS
SA	AA	SS	SA	SA	AS	AA	SS
AS	SS	AA	AS	AS	SA	SS	AA

TABLE 3.1 – Les propriétés de symétrie pour chaque contribution

chaque contribution à partir de deux séries de Lévy décrivant le déplacement vertical. Cette résolution permet de trouver une relation entre les efforts extérieurs et les déplacements en fonction de la pulsation ω pour chaque contribution.

Contribution symétrique-symétrique

Le problème se décompose ici en deux sous-problèmes à partir de la décomposition de Gorman. Ces deux sous-problèmes sont résolus à partir de deux séries de Levy en

tenant compte des conditions aux limites décrites dans le tableau (3.1). On a alors :

$$W_{SS}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} {}^1_{SS}W_n(\xi) \cos n\pi\eta + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{SS}W_n(\eta) \cos n\pi\xi \quad (3.28)$$

${}^1_{SS}W_n$ et ${}^2_{SS}W_n$ sont deux fonctions paires, elles sont déterminées à partir de l'équation de mouvement (3.15). En introduisant l'équation (3.28) dans l'équation (3.15), on obtient :

$$\begin{cases} {}^1_{SS}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} + e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} + e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{SS}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} + e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} + e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (3.29)$$

1x_n , 2x_n , 3x_n et 4x_n sont des racines complexes, elles sont définies par :

$$\begin{cases} {}^1x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^2x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^3x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \\ {}^4x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (3.30)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^2}{4D_x^2} \phi^4 (n\pi)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y}{D_x} (n\pi)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{(n\pi)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x} \left(\frac{D_{xy}^2}{4D_x} - D_y \right) - \frac{D_y}{D_x} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (3.31)$$

et $\lambda = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_x}$ et $\phi = \frac{b}{a}$.

Les constantes A_n, B_n, C_n et D_n seront éliminées dans le paragraphe suivant lors de la construction de la matrice de rigidité dynamique de cette contribution.

Contribution antisymétrique-antisymétrique

Comme pour le cas de la contribution SS, le problème se décompose aussi en deux sous-problèmes à partir de la décomposition de Gorman. En tenant compte des conditions aux limites indiquées dans le tableau (3.1), le déplacement W_{AA} se décrit ici comme suit :

$$W_{AA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^1_{AA}W_n(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{AA}W_n(\eta) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \quad (3.32)$$

${}^1_{AA}W_n$ et ${}^2_{AA}W_n$ sont deux fonctions impaires. L'équation (3.29) dans ce cas devient :

$$\begin{cases} {}^1_{AA}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} - e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} - e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{AA}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} - e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} - e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (3.33)$$

avec :

$$\begin{cases} {}^1x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^2x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^3x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \\ {}^4x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (3.34)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^2}{4D_x^2} \phi^4 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y}{D_x} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{((2n-1)\pi\eta)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x} \left(\frac{D_{xy}^2}{4D_x} - D_y \right) - \frac{D_y}{D_x} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (3.35)$$

De même, les constantes A_n, B_n, C_n et D_n seront éliminées dans le paragraphe suivant lors de la construction la matrice de raideur dynamique.

Contribution symétrique-antisymétrique

L'équation 3.28 devient dans le cas symétrique-antisymétrique :

$$W_{SA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^1_{SA}W_n(\xi) \sin\left(\frac{2n-1\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{SA}W_n(\eta) \cos n\pi\xi \quad (3.36)$$

${}^1_{SA}W_n$ est une fonction paire et ${}^2_{SA}W_n$ est une fonction impaire. L'équation (2.25) s'écrit alors :

$$\begin{cases} {}^1_{SA}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} + e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} + e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{SA}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} - e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} - e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

et l'équation (3.38) devient :

$$\begin{cases} 1x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 2x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 3x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \\ 4x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (3.38)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^2}{4D_x^2} \phi^4 \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y}{D_x} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{(n\pi)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x} \left(\frac{D_{xy}^2}{4D_x} - D_y \right) - \frac{D_y}{D_x} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (3.39)$$

De même, les constantes A_n, B_n, C_n et D_n seront éliminées dans le paragraphe suivant.

Contribution antisymétrique-symétrique

D'après le tableau (3.1), on peut déterminer le déplacement W_{AS} , il s'écrit comme suit :

$$W_{AS}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} {}^1_{AS}W_n(\xi) \cos n\pi\eta + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{AS}W_n(\eta) \sin\left(\frac{2n-1\pi\xi}{2}\right) \quad (3.40)$$

${}^1_{AS}W_n$ est une fonction impaire par contre ${}^2_{AS}W_n$ est une fonction paire, l'équation (3.29) devient alors :

$$\begin{cases} {}^1_{AS}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} - e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} - e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{AS}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} + e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} + e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (3.41)$$

avec :

$$\begin{cases} {}^1x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^2x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2\phi^2 D_x} (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^3x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 \frac{2n-1\pi\xi}{2} \pi^2 + \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \\ {}^4x_n^2 = \frac{D_{xy}}{2D_y} \phi^2 \frac{2n-1\pi\xi}{2} \pi^2 - \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (3.42)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^2}{4D_x^2} \phi^4 (n\pi)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y}{D_x} (n\pi)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{\left(\frac{2n-1\pi\xi}{2} \right)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x} \left(\frac{D_{xy}^2}{4D_x} - D_y \right) - \frac{D_y}{D_x} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (3.43)$$

De même, les constantes A_n, B_n, C_n et D_n seront éliminées dans le paragraphe suivant.

3.3.2 Procédure de construction de la matrice de rigidité d'une plaque orthotrope

La détermination de la matrice de raideur dynamique de flexion, notée $[\mathbf{K}]$, consiste en premier lieu à construire la matrice relative à chaque contribution. Cette construction se fait en trois étapes :

- . La première étape consiste à écrire les champs inconnus $W, \beta_x, \beta_y, M_x, M_y, M_{xy}$ en fonction des constantes d'intégration A_m, B_m, C_m et D_m , en utilisant les expressions des champs de déplacement pour chaque contribution.
- . La deuxième étape consiste à projeter les fonctions inconnues définies sur les bords de la plaque sur une base de fonctions convenables pour chaque contribution. Les projections de ces fonctions sont aussi exprimées en fonction des constantes d'intégration.
- . La dernière étape consiste à éliminer ces constantes d'intégration pour obtenir une relation matricielle entre les projections d'effort et de déplacement.

Cas symétrique-symétrique

Les équations (3.3) et (3.28) permettent de déterminer les champs de déplacements sur les bords du quart de la plaque. Ce problème doit être traité numériquement en choisissant N comme un nombre fini pour les séries de Levy. L'équation (3.28) peut

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} W_{SS}(1, \eta) \\ \beta_{xSS}(1, \eta) \\ W_{SS}(\xi, 1) \\ \beta_{ySS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{H}_{10SS}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{H}_{1NSS}(\eta)] \\ [\mathbf{H}_{20SS}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{H}_{2NSS}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

De même pour les équations (3.16) et (3.28), le champ des efforts peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} F_{zSS}(1, \eta) \\ M_{xSS}(1, \eta) \\ F_{zSS}(\xi, 1) \\ M_{ySS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_{10SS}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{G}_{1NSS}(\eta)] \\ [\mathbf{G}_{20SS}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{G}_{2NSS}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Nous allons traiter dans ce qui suit la deuxième étape : la projection des champs inconnus sur une base de fonctions pour le cas symétrique-symétrique. Le tableau (3.2) ci-dessous présente les fonctions de base choisies :

$W_{SS}(1, \eta)$	$W_{SS}(\xi, 1)$	$\beta_{xSS}(1, \eta)$	$\beta_{ySS}(\xi, 1)$	$F_{zSS}(1, \eta)$	$F_{zSS}(\xi, 1)$	$M_{xSS}(1, \eta)$	$M_{ySS}(\xi, 1)$
$\cos(n\pi\eta)$	$\cos(n\pi\xi)$	$\cos(n\pi\eta)$	$\cos(n\pi\xi)$	$\cos(n\pi\eta)$	$\cos(n\pi\xi)$	$\cos(n\pi\eta)$	$\cos(n\pi\xi)$

TABLE 3.2 – Fonctions de base pour la contribution symétrique-symétrique

Les projections sur ces bases sont obtenues par un développement en série de Fourier pour des périodes $2a$ et $2b$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} W_{SS}(1, \eta) \\ \beta_{xSS}(1, \eta) \\ W_{SS}(\xi, 1) \\ \beta_{ySS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{SS}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a}{SS}W_n \cos(n\pi\eta) \\ \frac{a}{SS}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N \frac{a}{SS}\beta_{xn} \cos(n\pi\eta) \\ \frac{b}{SS}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{b}{SS}W_n \cos(n\pi\xi) \\ \frac{b}{SS}\beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{b}{SS}\beta_{yn} \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}W_0 \\ {}^a_{SS}\beta_{x0} \\ {}^b_{SS}W_0 \\ {}^b_{SS}\beta_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}W_N \\ {}^a_{SS}\beta_{xN} \\ {}^b_{SS}W_N \\ {}^b_{SS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b W_{SS}(1, \eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b \beta_{xSS}(1, \eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a W_{SS}(\xi, 1) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \beta_{ySS}(\xi, 1) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b W_{SS}(1, \eta) \cos(n\pi\eta) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xSS}(1, \eta) \cos(n\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{SS}(\xi, 1) \cos(n\pi\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{ySS}(\xi, 1) \cos(n\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

A partir des expressions (3.28) et (3.47), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}W_0 \\ {}^a_{SS}\beta_{x0} \\ {}^b_{SS}W_0 \\ {}^b_{SS}\beta_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}W_N \\ {}^a_{SS}\beta_{xN} \\ {}^b_{SS}W_N \\ {}^b_{SS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{10}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{1M}] d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{20}] d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{2M}] d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{10}] \cos(N\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{1M}] \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{20}] \cos(N\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SS}}\mathbf{H}_{2M}] \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

De même pour les efforts :

$$\begin{pmatrix} F_{zSS}(1, \eta) \\ M_{xSS}(1, \eta) \\ F_{zSS}(\xi, 1) \\ M_{ySS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a_{SS}F_{z0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{SS}F_{zn} \cos(n\pi\eta) \\ {}^a_{SS}M_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{SS}M_{xn} \cos(n\pi\eta) \\ {}^b_{SS}F_{z0} + \sum_{n=1}^N {}^b_{SS}F_{z0} \cos(n\pi\xi) \\ {}^b_{SS}M_{y0} + \sum_{n=1}^N {}^b_{SS}M_{yn} \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}F_{z0} \\ {}^a_{SS}M_{x0} \\ {}^b_{SS}F_{z0} \\ {}^b_{SS}M_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}F_{zN} \\ {}^a_{SS}M_{xN} \\ {}^b_{SS}F_{zN} \\ {}^b_{SS}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b F_{zSS}(1, \eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b M_{xSS}(1, \eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a F_{zSS}(\xi, 1) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a M_{ySS}(\xi, 1) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b F_{zSS}(1, \eta) \cos(n\pi\eta) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xSS}(1, \eta) \cos(n\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a F_{zSS}(\xi, 1) \cos(n\pi\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a M_{ySS}(\xi, 1) \cos(n\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

A partir des expressions (3.16) et (3.50), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}F_{z0} \\ {}^a_{SS}M_{x0} \\ {}^b_{SS}F_{z0} \\ {}^b_{SS}M_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}F_{zN} \\ {}^a_{SS}M_{xN} \\ {}^b_{SS}F_{zN} \\ {}^b_{SS}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}\mathbf{G}_{10}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}\mathbf{G}_{1M}] d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}\mathbf{G}_{20}] d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}\mathbf{G}_{2M}] d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}\mathbf{G}_{10}] \cos(N\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}\mathbf{G}_{1M}] \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}\mathbf{G}_{20}] \cos(N\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}\mathbf{G}_{2M}] \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Les expressions (3.48) et (3.51) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}W_0 \\ {}^a_{SS}\beta_{x0} \\ {}^b_{SS}W_0 \\ {}^b_{SS}\beta_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}W_N \\ {}^a_{SS}\beta_{xN} \\ {}^b_{SS}W_N \\ {}^b_{SS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{H}}_{SS}] \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}F_{z0} \\ {}^a_{SS}M_{x0} \\ {}^b_{SS}F_{z0} \\ {}^b_{SS}M_{y0} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}F_{zN} \\ {}^a_{SS}M_{xN} \\ {}^b_{SS}F_{zN} \\ {}^b_{SS}M_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{G}}_{SS}] \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

La matrice de rigidité dynamique pour la contribution symétrique-symétrique est obtenue alors en éliminant les constantes d'intégration : c'est l'objectif de la dernière étape. Cette matrice, notée \mathbf{K}_{SS} , se présente comme suit :

$$\mathbf{K}_{SS}(\omega) = \mathbf{G}_{SS}(\omega) \mathbf{H}_{SS}(\omega)^{-1} \quad (3.54)$$

Cas antisymétrique-antisymétrique

Les équations (3.3), (3.32) permettent de déterminer les champs de déplacements sur les bords du quart de la plaque. L'équation (3.32) peut être écrite sous la forme

matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} W_{AA}(1, \eta) \\ \beta_{xAA}(1, \eta) \\ W_{AA}(\xi, 1) \\ \beta_{yAA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{H}_{10AA}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{H}_{1NAA}(\eta)] \\ [\mathbf{H}_{20AA}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{H}_{2NAA}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

De même pour les équations (3.16) et (3.32), le champ des efforts peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} F_{zAA}(1, \eta) \\ M_{xAA}(1, \eta) \\ F_{zAA}(\xi, 1) \\ M_{yAA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_{10AA}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{G}_{1NAA}(\eta)] \\ [\mathbf{G}_{20AA}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{G}_{2NAA}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Les fonctions de base pour la contribution antisymétrique-antisymétrique sont présentées dans le tableau (3.3).

$W_{AA}(1, \eta)$	$W_{AA}(\xi, 1)$	$\beta_{xAA}(1, \eta)$	$\beta_{yAA}(\xi, 1)$
$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$
$F_{zAA}(1, \eta)$	$F_{zAA}(\xi, 1)$	$M_{xAA}(1, \eta)$	$M_{yAA}(\xi, 1)$
$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$

TABLE 3.3 – Fonctions de base pour la contribution antisymétrique-antisymétrique

L'équation (3.46) pour la contribution antisymétrique-antisymétrique :

$$\begin{pmatrix} W_{AA}(1, \eta) \\ \beta_{xAA}(1, \eta) \\ W_{AA}(\xi, 1) \\ \beta_{yAA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N {}^a_{AA} W_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^a_{AA} \beta_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AA} W_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AA} \beta_{yn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE
ORTHOTROPE

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}W_1 \\ {}^a_{AA}\beta_{x1} \\ {}^b_{AA}W_1 \\ {}^b_{AA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}W_N \\ {}^a_{AA}\beta_{xN} \\ {}^b_{AA}W_N \\ {}^b_{AA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-b}^b W_{AA}(1, \eta) \sin(\frac{1\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xAA} \sin(\frac{1\pi\eta}{2})(1, \eta) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{AA}(\xi, 1) \sin(\frac{1\pi\xi}{2}) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{yAA}(\xi, 1) \sin(\frac{1\pi\xi}{2}) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b W_{AA}(1, \eta) \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{AA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{yAA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

A partir des expressions (3.32) et (3.58), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}W_1 \\ {}^a_{AA}\beta_{x1} \\ {}^b_{AA}W_1 \\ {}^b_{AA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}W_N \\ {}^a_{AA}\beta_{xN} \\ {}^b_{AA}W_N \\ {}^b_{AA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{10}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{20}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{10}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{1M}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{20}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{H}_{2M}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

De même pour les efforts :

$$\begin{pmatrix} F_{zAA}(1, \eta) \\ M_{xAA}(1, \eta) \\ F_{zAA}(\xi, 1) \\ M_{yAA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N {}^a_{AA}F_{zn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^a_{AA}M_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AA}F_{z0} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AA}M_{yn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}F_{z1} \\ {}^a_{AA}M_{x1} \\ {}^b_{AA}F_{z1} \\ {}^b_{AA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}F_{zN} \\ {}^a_{AA}M_{xN} \\ {}^b_{AA}F_{zN} \\ {}^b_{AA}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-b}^b F_{zAA}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-a}^a F_{zAA}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\ \int_{-a}^a M_{yAA}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b F_{zAA}(1, \eta) \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \int_{-a}^a F_{zAA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \\ \int_{-a}^a M_{yAA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

A partir des expressions (3.16) et (3.61) on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}F_{z1} \\ {}^a_{AA}M_{x1} \\ {}^b_{AA}F_{z1} \\ {}^b_{AA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}F_{zN} \\ {}^a_{AA}M_{xN} \\ {}^b_{AA}F_{zN} \\ {}^b_{AA}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{10}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{20}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{10}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{1M}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{20}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AA}}\mathbf{G}_{2M}] \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Les expressions (3.59) et (3.62) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}W_1 \\ {}^a_{AA}\beta_{x1} \\ {}^b_{AA}W_1 \\ {}^b_{AA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}W_N \\ {}^a_{AA}\beta_{xN} \\ {}^b_{AA}W_N \\ {}^b_{AA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{AA}}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}F_{z1} \\ {}^a_{AA}M_{x1} \\ {}^b_{AA}F_{z1} \\ {}^b_{AA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}F_{zN} \\ {}^a_{AA}M_{xN} \\ {}^b_{AA}F_{zN} \\ {}^b_{AA}M_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{AA}}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

La matrice de raideur dynamique pour la contribution antisymétrique-antisymétrique s'obtient ensuite par :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{AA}}(\omega) = \mathbf{G}_{\mathbf{AA}}(\omega) \mathbf{H}_{\mathbf{AA}}(\omega)^{-1} \quad (3.65)$$

Cas symétrique-antisymétrique

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE
ORTHOTROPE

D'après les équations (3.3) et (3.36), on écrit :

$$\begin{pmatrix} W_{SA}(1, \eta) \\ \beta_{xSA}(1, \eta) \\ W_{SA}(\xi, 1) \\ \beta_{ySA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{H}_{10SA}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{H}_{1NSA}(\eta)] \\ [\mathbf{H}_{20SA}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{H}_{2NSA}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

De même pour les équations (3.16) et (3.36), le champ des efforts s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_{zSA}(1, \eta) \\ M_{xSA}(1, \eta) \\ F_{zSA}(\xi, 1) \\ M_{ySA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_{10SA}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{G}_{1NSA}(\eta)] \\ [\mathbf{G}_{20SA}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{G}_{2NSA}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Le tableau (3.1) devient alors : Les projections sur ces bases sont obtenues par un

$W_{SA}(1, \eta)$	$W_{SA}(\xi, 1)$	$\beta_{xSA}(1, \eta)$	$\beta_{ySA}(\xi, 1)$
$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(n\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(n\pi\xi)$
$F_{zSA}(1, \eta)$	$F_{zSA}(\xi, 1)$	$M_{xSA}(1, \eta)$	$M_{ySA}(\xi, 1)$
$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(n\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(n\pi\xi)$

TABLE 3.4 – Fonction de base pour la contribution symétrique-antisymétrique

développement en série de Fourier pour des périodes $2a$ et $2b$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} W_{SA}(1, \eta) \\ \beta_{xSA}(1, \eta) \\ W_{SA}(\xi, 1) \\ \beta_{ySA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N \frac{a}{SA} W_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \sum_{n=1}^N \frac{a}{SA} \beta_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ \frac{b}{SA} W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{b}{SA} W_n \cos(n\pi\xi) \\ \frac{b}{SA} \beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{b}{SA} \beta_{yn} \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}W_0 \\ {}^b_{SA}\beta_{y0} \\ {}^a_{SA}W_1 \\ {}^a_{SA}\beta_{x1} \\ {}^b_{SA}W_1 \\ {}^b_{SA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}W_N \\ {}^a_{SA}\beta_{xN} \\ {}^b_{SA}W_N \\ {}^b_{SA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-a}^a W_{SA}(\xi, 1) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \beta_{ySA}(\xi, 1) d\xi \\ \int_{-b}^b W_{xSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{SA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{ySA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b W_{SA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{SA}(\xi, 1) \cos(N\pi\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{ySA}(\xi, 1) \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

A partir des expressions (3.36) et (3.69), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}W_0 \\ {}^b_{SA}\beta_{y0} \\ {}^a_{SA}W_1 \\ {}^a_{SA}\beta_{x1} \\ {}^b_{SA}W_1 \\ {}^b_{SA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}W_N \\ {}^a_{SA}\beta_{xN} \\ {}^b_{SA}W_N \\ {}^b_{SA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{20}] d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{2M}] d\xi \\ \int_{-b}^b [\mathbf{SAH}_{10}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [\mathbf{SAH}_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{20}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-b}^b [\mathbf{SAH}_{10}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [\mathbf{SAH}_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{20}] \cos(N\pi\xi) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [\mathbf{SAH}_{2M}] \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

De même pour les efforts :

$$\begin{pmatrix} F_{zSA}(1, \eta) \\ M_{xSA}(1, \eta) \\ F_{zSA}(\xi, 1) \\ M_{ySA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N {}^a_{SA}F_{zn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\ \sum_{n=1}^N {}^a_{SA}M_{xn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\ {}^b_{SA}F_{z0} + \sum_{n=1}^N {}^b_{SA}F_{z0} \cos(n\pi\xi) \\ {}^b_{SA}M_{y0} + \sum_{n=1}^N {}^b_{SA}M_{yn} \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}F_{z0} \\ {}^b_{SA}M_{y0} \\ {}^a_{SA}F_{z1} \\ {}^a_{SA}M_{x1} \\ {}^b_{SA}F_{z1} \\ {}^b_{SA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}F_{zN} \\ {}^a_{SA}M_{xN} \\ {}^b_{SA}F_{zN} \\ {}^b_{SA}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-a}^a F_{zSA}(\xi, 1) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a M_{ySA}(\xi, 1) d\xi \\ \int_{-b}^b F_{zSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a F_{zSA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a M_{ySA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b F_{zSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xSA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a F_{zSA}(\xi, 1) \cos(N\pi\xi) d\xi \\ \int_{-a}^a M_{ySA}(\xi, 1) \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

A partir des expressions(3.16) et (3.72), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}F_{z0} \\ {}^b_{SA}M_{y0} \\ {}^a_{SA}F_{z1} \\ {}^a_{SA}M_{x1} \\ {}^b_{SA}F_{z1} \\ {}^b_{SA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}F_{zN} \\ {}^a_{SA}M_{xN} \\ {}^b_{SA}F_{zN} \\ {}^b_{SA}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{20}] d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{2M}] d\xi \\ \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{10}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \dots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{20}] \cos(\pi\xi) d\xi & \dots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{10}] \sin((2N-1)\pi\eta/2) d\eta & \dots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{1M}] \sin((2N-1)\pi\eta/2) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{20}] \cos(N\pi\xi) d\xi & \dots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{SA}}\mathbf{G}_{2M}] \cos(N\pi\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Les expressions (3.70) et (3.73) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}W_0 \\ {}^b_{SA}\beta_{y0} \\ {}^a_{SA}W_1 \\ {}^a_{SA}\beta_{x1} \\ {}^b_{SA}W_1 \\ {}^b_{SA}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}W_N \\ {}^a_{SA}\beta_{xN} \\ {}^b_{SA}W_N \\ {}^b_{SA}\beta_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{SA}}] \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$\begin{pmatrix} {}^b_{SA}F_{z0} \\ {}^b_{SA}M_{y0} \\ {}^a_{SA}F_{z1} \\ {}^a_{SA}M_{x1} \\ {}^b_{SA}F_{z1} \\ {}^b_{SA}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}F_{zN} \\ {}^a_{SA}M_{xN} \\ {}^b_{SA}F_{zN} \\ {}^b_{SA}M_{yN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{SA}] \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

La matrice de raideur dynamique pour la contribution symétrique-antisymétrique, notée \mathbf{K}_{SA} , est :

$$\mathbf{K}_{SA}(\omega) = \mathbf{G}_{SA}(\omega)\mathbf{H}_{SA}(\omega)^{-1} \quad (3.76)$$

Cas antisymétrique-symétrique

D'après les équations (3.3) et (3.40), on écrit :

$$\begin{pmatrix} W_{AS}(1, \eta) \\ \beta_{xAS}(1, \eta) \\ W_{AS}(\xi, 1) \\ \beta_{yAS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{H}_{10AS}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{H}_{1NAS}(\eta)] \\ [\mathbf{H}_{20AS}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{H}_{2NAS}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

De même pour les équations (3.16) et (3.40), le champ des efforts s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_{zAS}(1, \eta) \\ M_{xAS}(1, \eta) \\ F_{zAS}(\xi, 1) \\ M_{yAS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_{10AS}(\eta)] & \cdots & [\mathbf{G}_{1NAS}(\eta)] \\ [\mathbf{G}_{20AS}(\xi)] & \cdots & [\mathbf{G}_{2NAS}(\xi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Le tableau (3.1) devient alors :

$W_{AS}(1, \eta)$	$W_{AS}(\xi, 1)$	$\beta_{xAS}(1, \eta)$	$\beta_{yAS}(\xi, 1)$
$\cos(n\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(n\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$
$F_{zAS}(1, \eta)$	$F_{zAS}(\xi, 1)$	$M_{xAS}(1, \eta)$	$M_{yAS}(\xi, 1)$
$\cos(n\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(n\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})$

TABLE 3.5 – Fonctions de base pour la contribution antisymétrique-symétrique

Les projections sur ces bases sont obtenues par un développement en série de Fourier pour des périodes $2a$ et $2b$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} W_{AS}(1, \eta) \\ \beta_{xAS}(1, \eta) \\ W_{AS}(\xi, 1) \\ \beta_{yAS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a_{AS}W_0 + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}W_n \cos(n\pi\eta) \\ {}^a_{AS}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}\beta_{xn} \cos(n\pi\eta) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}W_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}\beta_{yn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}W_0 \\ {}^a_{AS}\beta_{x0} \\ {}^a_{AS}W_1 \\ {}^a_{AS}\beta_{x1} \\ {}^b_{AS}W_1 \\ {}^b_{AS}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}W_N \\ {}^a_{AS}\beta_{xN} \\ {}^b_{AS}W_N \\ {}^b_{AS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b W_{AS}(\xi, 1) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b \beta_{xAS}(\xi, 1) d\eta \\ \int_{-b}^b W_{xAS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xAS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{AS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{yAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b W_{AS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-b}^b \beta_{xAS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\ \int_{-a}^a W_{AS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \int_{-a}^a \beta_{yAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

A partir des expressions (3.40) et (3.80), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}W_0 \\ {}^a_{AS}\beta_{x0} \\ {}^a_{AS}W_1 \\ {}^a_{AS}\beta_{x1} \\ {}^b_{AS}W_1 \\ {}^b_{AS}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}W_N \\ {}^a_{AS}\beta_{xN} \\ {}^b_{AS}W_N \\ {}^b_{AS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{20}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{2M}] d\eta \\ \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{10}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{20}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{10}] \cos(N\pi\eta) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{1M}] \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{20}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^{\mathbf{AS}}\mathbf{H}_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

De même pour les efforts :

$$\begin{pmatrix} F_{zAS}(1, \eta) \\ M_{xAS}(1, \eta) \\ F_{zAS}(\xi, 1) \\ M_{yAS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a_{AS}F_{z0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}F_{zn} \cos(n\pi\eta) \\ {}^a_{AS}M_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}M_{xn} \cos(n\pi\eta) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}F_{z0} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}M_{yn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

avec :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}F_{z0} \\ {}^a_{AS}M_{x0} \\ {}^a_{AS}F_{z1} \\ {}^a_{AS}M_{x1} \\ {}^b_{AS}F_{z1} \\ {}^b_{AS}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}F_{zN} \\ {}^a_{AS}M_{xN} \\ {}^b_{AS}F_{zN} \\ {}^b_{AS}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b F_{zAS}(1, \eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-b}^b M_{yAS}(1, \eta) d\eta \\ \int_{-b}^b F_{zAS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xAS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a F_{zAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a M_{yAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \vdots \\ \int_{-b}^b F_{zAS}(1, \eta) \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \int_{-b}^b M_{xAS}(1, \eta) \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a F_{zAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \int_{-a}^a M_{yAS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

A partir des expressions (3.16) et (3.83), on obtient :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}F_{z0} \\ {}^a_{AS}M_{x0} \\ {}^a_{AS}F_{z1} \\ {}^a_{AS}M_{x1} \\ {}^b_{AS}F_{z1} \\ {}^b_{AS}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}F_{zN} \\ {}^a_{AS}M_{xN} \\ {}^b_{AS}F_{zN} \\ {}^b_{AS}M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{20}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{2M}] d\eta \\ \int_{-b}^b [{}^ASG_{10}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^ASG_{20}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-b}^b [{}^ASG_{10}] \cos(N\pi\eta) d\eta & \cdots & \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \cos(N\pi\eta) d\eta \\ \int_{-a}^a [{}^ASG_{20}] \sin((2N-1)\pi\xi/2) d\xi & \cdots & \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \sin((2N-1)\pi\xi/2) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Les expressions (3.81) et (3.84) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}W_0 \\ {}^a_{AS}\beta_{x0} \\ {}^a_{AS}W_1 \\ {}^a_{AS}\beta_{x1} \\ {}^b_{AS}W_1 \\ {}^b_{AS}\beta_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}W_N \\ {}^a_{AS}\beta_{xN} \\ {}^b_{AS}W_N \\ {}^b_{AS}\beta_{yN} \end{pmatrix} = [{}^{\mathbf{H}}_{AS}] \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}F_{z0} \\ {}^a_{AS}M_{x0} \\ {}^a_{AS}F_{z1} \\ {}^a_{AS}M_{x1} \\ {}^b_{AS}F_{z1} \\ {}^b_{AS}M_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}F_{zN} \\ {}^a_{AS}M_{xN} \\ {}^b_{AS}F_{zN} \\ {}^b_{AS}M_{yN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{AS}] \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

La matrice de raideur dynamique pour la contribution antisymétrique-symétrique, notée \mathbf{K}_{AS} , est :

$$\mathbf{K}_{AS}(\omega) = \mathbf{G}_{AS}(\omega)\mathbf{H}_{AS}(\omega)^{-1} \quad (3.87)$$

3.3.3 Matrice de raideur dynamique de flexion

A partir des matrices de raideurs dynamiques de chaque contribution, la matrice de raideur dynamique de flexion est définie par :

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{SS}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{K}_{AA}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\mathbf{K}_{SA}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\mathbf{K}_{AS}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{SS} \\ U_{AA} \\ U_{SA} \\ U_{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{SS} \\ F_{AA} \\ F_{SA} \\ F_{AS} \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

Les champs inconnus $W(\xi, \eta)$, $\beta_x(\xi, \eta)$, $\beta_y(\xi, \eta)$, $F_z(\xi, \eta)$, $M_x(\xi, \eta)$ et $M_y(\xi, \eta)$, obtenus par superposition des contributions, sont exprimés sur les quatre bords de la plaque. Les vecteurs de déplacement sont définis sur les quatre bords comme suit :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} {}^1W_{S0} \\ {}^1\beta_{xS0} \\ {}^2W_{S0} \\ {}^2\beta_{yS0} \\ {}^3W_{S0} \\ {}^3\beta_{xS0} \\ {}^4W_{S0} \\ {}^4\beta_{yS0} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE ORTHOTROPE

Dans le cas général :

$$\mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} {}^1W_{S0} \\ {}^1\beta_{xS0} \\ {}^1W_{S0} \\ {}^1\beta_{yS0} \\ {}^2W_{S0} \\ {}^2\beta_{xS0} \\ {}^2W_{S0} \\ {}^2\beta_{yS0} \\ {}^3W_{S0} \\ {}^3\beta_{xS0} \\ {}^3W_{S0} \\ {}^3\beta_{yS0} \\ {}^4W_{S0} \\ {}^4\beta_{xS0} \\ {}^4W_{S0} \\ {}^4\beta_{yS0} \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

De même pour les forces :

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} {}^1F_{zxS0} \\ {}^1M_{xS0} \\ {}^2F_{zyS0} \\ {}^2M_{yS0} \\ {}^3F_{zxS0} \\ {}^3M_{xS0} \\ {}^4F_{zy0} \\ {}^4M_{yS0} \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

Dans le cas général :

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} {}^1F_{zxS0} \\ {}^1M_{xS0} \\ {}^1F_{zyS0} \\ {}^1M_{yS0} \\ {}^2F_{zxS0} \\ {}^2M_{xS0} \\ {}^2F_{zyS0} \\ {}^2M_{yS0} \\ {}^3F_{zxS0} \\ {}^3M_{xS0} \\ {}^3F_{zyS0} \\ {}^3M_{yS0} \\ {}^4F_{zxS0} \\ {}^4M_{xS0} \\ {}^4F_{zyS0} \\ {}^4M_{yS0} \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

les nombres 1, 2, 3 et 4 présentent les bords de la plaque comme c'est indiqué dans la figure (3.3) :

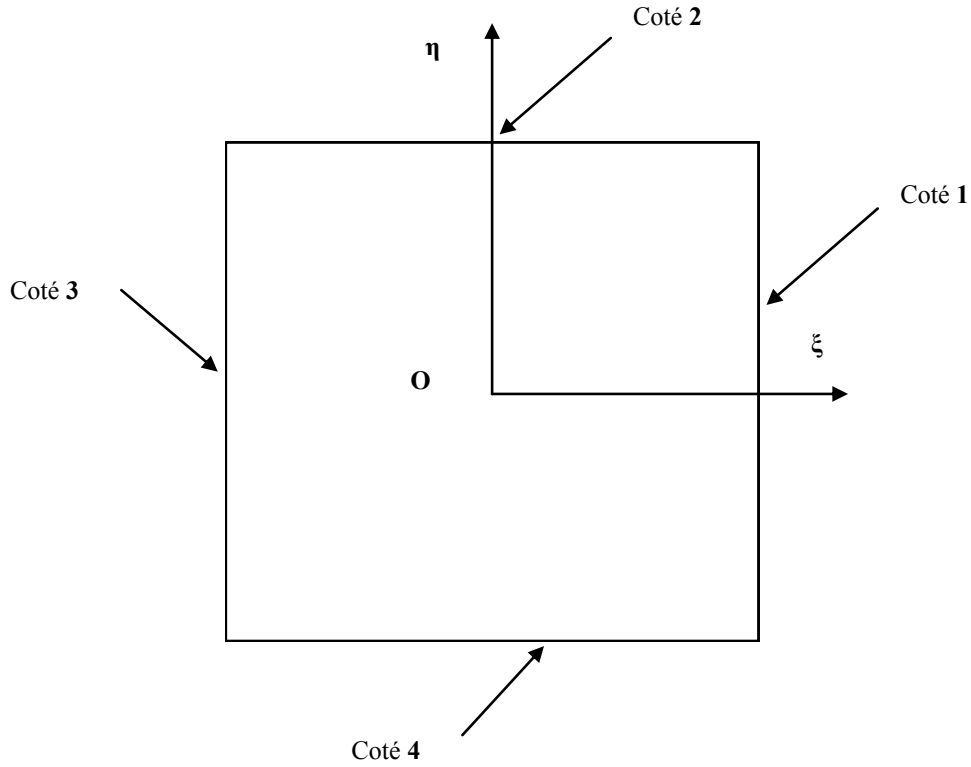


FIGURE 3.3 – Côtes de la plaque

Les efforts extérieurs des cotés (3) et (4) sont opposés aux efforts internes du fait de l'orientation des normales à ces bords.

D'après la décomposition de Gorman, le déplacement W_{SS} s'écrit comme suit :

$$W_{SS}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[W(\xi, \eta) + W(-\xi, -\eta) + W(-\xi, \eta) + W(\xi, -\eta)] \quad (3.93)$$

De même pour les autres déplacements :

$$W_{AA}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[W(\xi, \eta) + W(-\xi, -\eta) - W(-\xi, \eta) - W(\xi, -\eta)] \quad (3.94)$$

$$W_{SA}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[W(\xi, \eta) - W(-\xi, -\eta) + W(-\xi, \eta) - W(\xi, -\eta)] \quad (3.95)$$

$$W_{AS}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[W(\xi, \eta) - W(-\xi, -\eta) - W(-\xi, \eta) + W(\xi, -\eta)] \quad (3.96)$$

3.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE
ORTHOTROPE

Le champs de déplacement W_{SS} au coté 1 est défini par :

$$\begin{aligned}
 W_{SS}(1, \eta) &= \frac{1}{4}[W(1, \eta) + W(-1, -\eta) + W(-1, \eta) + W(1, -\eta)] \\
 &= \frac{1}{4}[{}^1W_{S0} + \sum_{k=1}^N {}^1W_{Sk} \cos(k\pi\eta) + \sum_{k=1}^N {}^1W_{Ak} \sin(\frac{(2k-1)\pi\eta}{2})] \\
 &\quad + \frac{1}{4}[{}^3W_{S0} + \sum_{k=1}^N {}^3W_{Sk} \cos(k\pi\eta) - \sum_{k=1}^N {}^3W_{Ak} \sin(\frac{(2k-1)\pi\eta}{2})] \\
 &\quad + \frac{1}{4}[{}^3W_{S0} + \sum_{k=1}^N {}^3W_{Sk} \cos(k\pi\eta) + \sum_{k=1}^N {}^3W_{Ak} \sin(\frac{(2k-1)\pi\eta}{2})] \\
 &\quad + \frac{1}{4}[{}^1W_{S0} + \sum_{k=1}^N {}^1W_{Sk} \cos(k\pi\eta) - \sum_{k=1}^N {}^1W_{Ak} \sin(\frac{(2k-1)\pi\eta}{2})] \\
 &= \frac{1}{2}[{}^1W_{S0} + {}^3W_{S0} + \sum_{k=1}^N ({}^1W_{Sk} + {}^3W_{Sk} + \cos(k\pi\eta))]
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Par identification, on peut écrire :

$${}^a_{SS}W_0 = \frac{1}{2}({}^1W_{S0} + {}^3W_{S0}) \tag{3.98}$$

Et :

$${}^a_{SS}W_k = \frac{1}{2}({}^1W_{Sk} + {}^3W_{Sk}) \tag{3.99}$$

La relation qui relie les composantes U^{JJ} (avec J étant S ou A) et les composantes U_k s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U^{SS} \\ U^{AA} \\ U^{SA} \\ U^{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0^{SS} \\ U_1^{SS} \\ \vdots \\ U_N^{SS} \\ U_1^{AA} \\ \vdots \\ U_N^{AA} \\ U_0^{SA} \\ U_1^{SA} \\ \vdots \\ U_N^{SA} \\ U_0^{AS} \\ U_1^{AS} \\ \vdots \\ U_N^{AS} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{SS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SSN}] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{AAN}] \\ [\mathbf{T}_{SA0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SAN}] \\ [\mathbf{T}_{AS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{ASN}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[\mathbf{T}] \cdot \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

Les expressions (3.21), (3.22),(3.23),(3.24) et (3.25) permettent de déterminer la relation qui relie F^{JJ} et F_k . Par exemple pour la réaction $T_x(1, \eta)$ située sur le coté 1, on a :

$$\begin{aligned}
 T_x(1, \eta) &= T_{xSS}(1, \eta) + T_{xAA}(1, \eta) + T_{xSA}(1, \eta) + T_{xAS}(1, \eta) \\
 &= {}^a_{SS}T_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{SS}T_{xn} \cos(n\pi\eta) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N {}^a_{AA}T_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N {}^a_{SA}T_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\
 &\quad + {}^a_{AS}T_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}T_{xn} \cos(n\pi\eta) \\
 &= {}^a_{SS}T_{x0} + {}^a_{AS}T_{x0} + \sum_{n=1}^N ({}^a_{SS}T_{xn} + {}^a_{AS}T_{xn}) \cos(n\pi\eta) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N ({}^a_{AA}T_{xn} + {}^a_{SA}T_{xn}) \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2})
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Par identification :

$${}^1T_{x0} = {}^a_{SS}T_{x0} + {}^a_{AS}T_{x0} \quad (3.102)$$

$${}^1T_{xSn} = {}^a_{SS}T_{xn} + {}^a_{AS}T_{xn} \quad (3.103)$$

$${}^1T_{xAn} = {}^a_{AA}T_{xn} + {}^a_{SA}T_{xn} \quad (3.104)$$

Sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{SS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SSN}] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{AAN}] \\ [\mathbf{T}_{SA0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SAN}] \\ [\mathbf{T}_{AS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{ASN}] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_0^{SS} \\ F_1^{SS} \\ \vdots \\ F_N^{SS} \\ F_1^{AA} \\ \vdots \\ F_N^{AA} \\ F_0^{SA} \\ F_1^{SA} \\ \vdots \\ F_N^{SA} \\ F_0^{AS} \\ F_1^{AS} \\ \vdots \\ F_N^{AS} \end{pmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} F_0^{SS} \\ F_1^{SS} \\ \vdots \\ F_N^{SS} \\ F_1^{AA} \\ \vdots \\ F_N^{AA} \\ F_0^{SA} \\ F_1^{SA} \\ \vdots \\ F_N^{SA} \\ F_0^{AS} \\ F_1^{AS} \\ \vdots \\ F_N^{AS} \end{pmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} F^{SS} \\ F^{AA} \\ F^{SA} \\ F^{AS} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Les relations (3.88), (3.100) et (3.105) permettent de déterminer la matrice de raideur dynamique de flexion qui relie les vecteurs U_k et F_k .

$$[\mathbf{K}(\omega)] = \frac{1}{2}[\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{SS}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{K}_{AA}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\mathbf{K}_{SA}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\mathbf{K}_{AS}] \end{pmatrix} [\mathbf{T}] \quad (3.106)$$

La matrice d'expansion $[\mathbf{T}]$ est donnée dans l'annexe A.

3.4 Validation numérique du modèle

3.4.1 Propriétés matérielles et géométriques

Dans ce paragraphe, la méthode des éléments continus (MEC) sera validée numériquement en comparant les résultats obtenus par cette approche avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis (MEF), suite à l'utilisant du code de calcul *Ideas*. La réponse harmonique est validée pour une plaque orthotrope pour des conditions aux limites libres pour différents types de chargement. Le tableau suivant présente les propriétés de matériaux utilisées :

TABLE 3.6 – Propriétés matérielles et géométriques de la plaque orthotrope

Module d'Young suivant x	$E_x = 18.1$ GPa
Module d'Young suivant y	$E_y = 50.9$ GPa
Module de cisaillement	$G_{xy} = 11$ GPa
Coefficient de poisson	$\nu_{xy} = 0.5$
Masse volumique	$\rho = 1526$ kg/m ³
Longueur de la plaque (2a)	$L = 1$ m
Largeur de la plaque (2b)	$l = 0.5$ m
L'épaisseur	$h = 0.002$ m

3.4.2 Chargement symétrique-symétrique

Le chargement symétrique-symétrique utilisé est constitué d'une force répartie le long des bords définis par $\xi = 1$ et $\xi = -1$ (voir figure 3.4) :

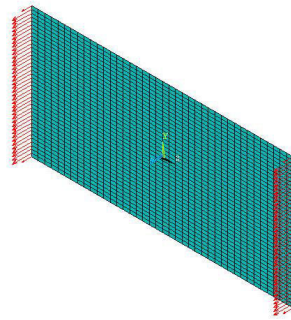


FIGURE 3.4 – Chargement suivant z pour la contribution symétrique-symétrique

Le développement en série de Fourier de cette force est donné par l'expression (3.107) :

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos(n\pi\eta) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

La réponse harmonique au point A(1,0) est :

$$W(1,0) = \frac{a}{s_S} W_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a}{s_S} W_n \quad (3.108)$$

La figure (3.5) présente les résultats obtenus par la MEC pour différents nombre de termes ($n = 4$ et $n = 11$), ainsi que les résultats obtenus par la MEF pour une bande de fréquences qui varie entre $[0, 200]$ Hz.

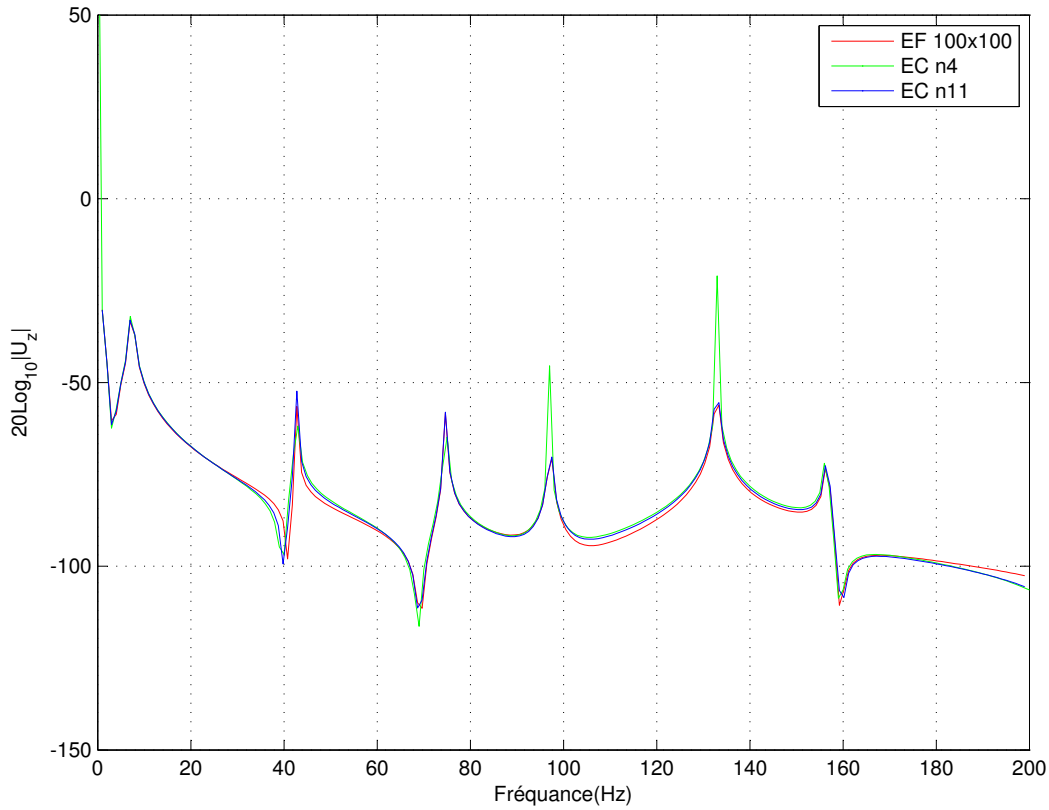


FIGURE 3.5 – Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique

Une bonne convergence est constatée pour les résultats obtenus par la MEC pour $n = 11$ avec ceux obtenus par la MEF pour un maillage 100×100 .

3.4.3 Chargement antisymétrique-antisymétrique

D'après le tableau (3.1), dans le cas où le déplacement W est antisymétrique-antisymétrique, l'effort tranchant suivant x (T_x) est symétrique-antisymétrique. Donc, les efforts externes sont définis dans l'expression (3.109)

$$F_{ext}(-1, \eta) = -T_x(-1, \eta) = -T_x(1, \eta) = -F_{ext}(1, \eta) \quad (3.109)$$

Cet effort est présenté par l'expression suivante :

$$\begin{cases} F_{ext}(1, \eta) = 1, & \eta > 0 \\ F_{ext}(1, \eta) = -1, & \eta < 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

La figure ci-dessous présente le chargement antisymétrique-antisymétrique utilisé :

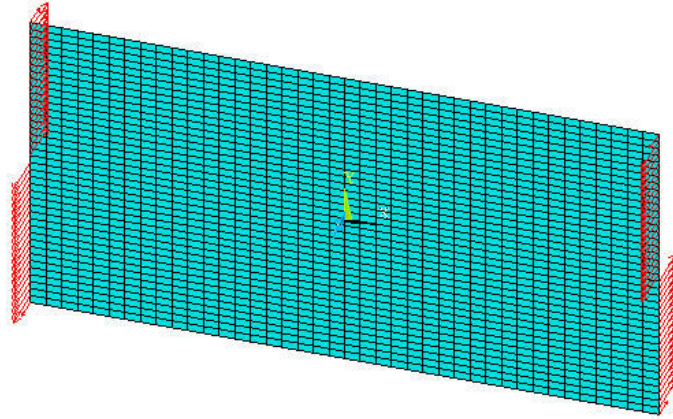


FIGURE 3.6 – Chargement antisymétrique-antisymétrique

Les projections des efforts sont données par un développement en série de Fourier sous la forme :

$$F(\eta) = \sum_{n=1}^N F_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{3\pi} \\ \vdots \\ \frac{4}{(2n-1)\pi} \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

La réponse obtenue en point $A(1, 1)$ s'exprime par :

$$W(1, 1) = \sum_{n=1}^N a_{AA} W_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=1}^N b_{AA} W_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \quad (3.112)$$

La réponse obtenue au point A est présentée par la figure(3.7) :

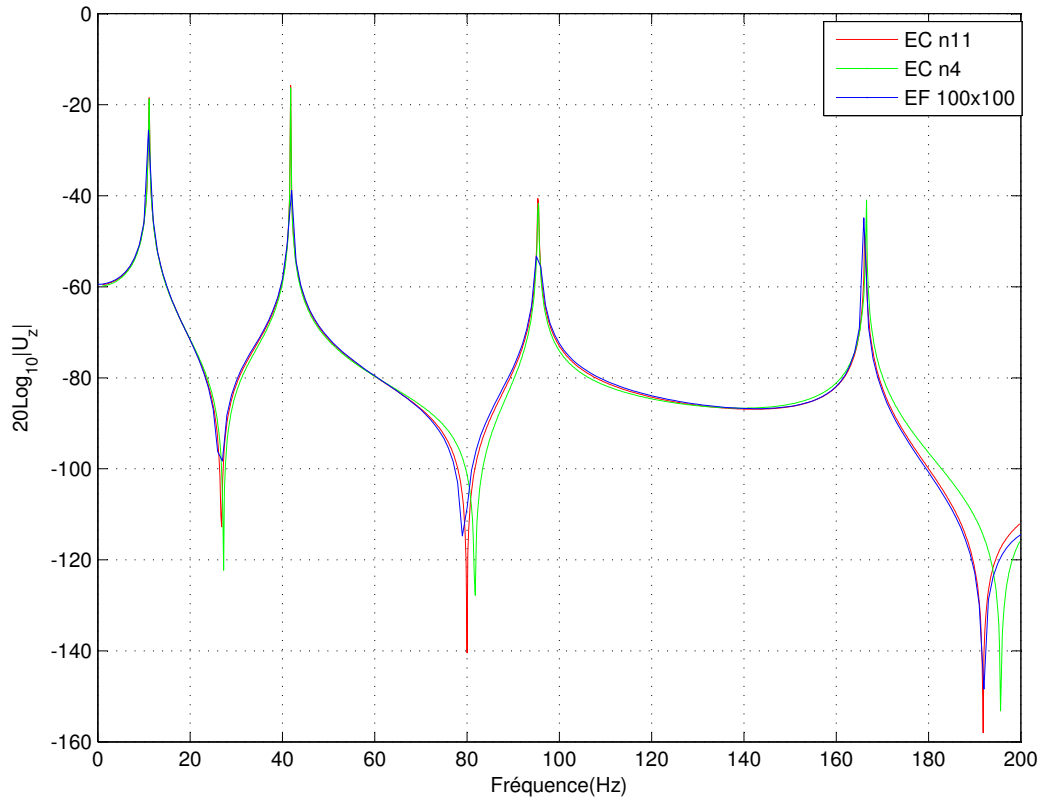


FIGURE 3.7 – Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-antisymétrique

Pour un chargement antisymétrique-antisymétrique, on constate une excellente convergence entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis pour un maillage 100×100 avec ceux obtenus par la méthode des éléments continus pour $n = 11$.

3.4.4 Chargement symétrique-antisymétrique

D'après le tableau (3.1), l'effort interne T_x est dans ce cas antisymétrique-antisymétrique. Alors, l'effort externe s'écrit :

$$F_{ext}(-1, \eta) = -T_x(-1, \eta) = T_x(1, \eta) = F_{ext}(1, \eta) \quad (3.113)$$

Cet effort est présenté par l'expression suivante :

$$\begin{cases} F_{ext}(1, \eta) = 1, & \eta > 0 \\ F_{ext}(1, \eta) = -1, & \eta < 0 \end{cases} \quad (3.114)$$

La figure ci-dessous représente le chargement symétrique-antisymétrique utilisé :

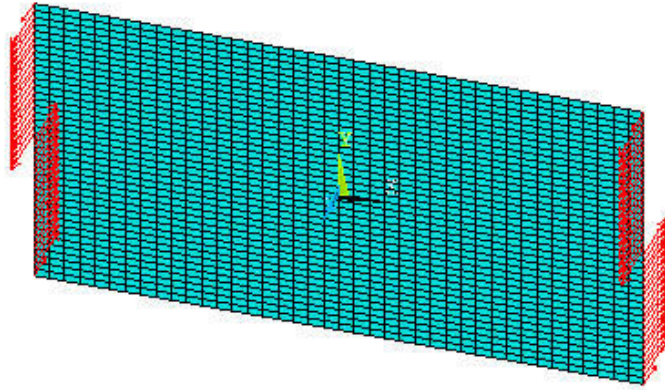


FIGURE 3.8 – Chargement symétrique-antisymétrique

Les projections des efforts sont données par un développement en série de Fourier (3.115) :

$$F(\eta) = \sum_{n=1}^N F_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{3\pi} \\ \vdots \\ \frac{4}{(2n-1)\pi} \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

La réponse obtenue au point $B(1, \frac{1}{2})$ est :

$$W(1, \frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^N a_{SA} W_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{4}\right) \quad (3.116)$$

La réponse obtenue au point B est représentée sur la figure (3.9) :

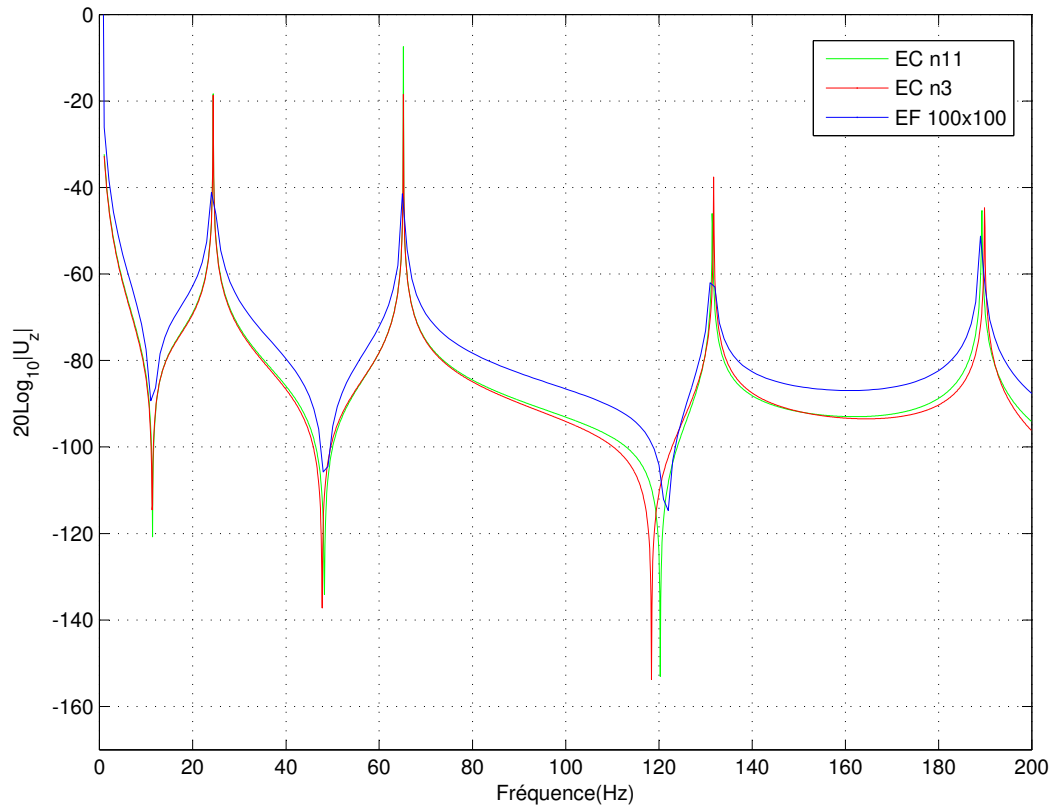


FIGURE 3.9 – Réponse harmonique pour un chargement symétrique-antisymétrique

3.4.5 Chargement antisymétrique-symétrique

L'effort externe est donné par l'expression (3.117) :

$$F_{ext}(-1, \eta) = -T_x(-1, \eta) = -T_x(1, \eta) = -F_{ext}(1, \eta) \quad (3.117)$$

Donc, il est exprimé par :

$$F_{ext}(1, \eta) = 1 \quad (3.118)$$

La figure ci-dessous présente le chargement antisymétrique-symétrique utilisé :

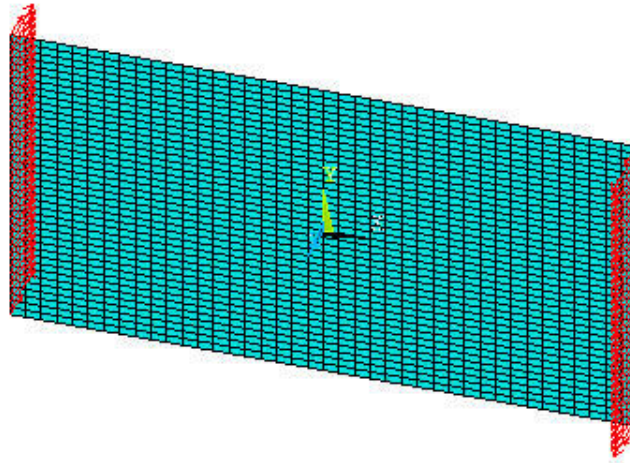


FIGURE 3.10 – Chargement antisymétrique-symétrique

Les projections des efforts sont données par :

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{n=1}^N F_n \cos(n\pi\eta) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

La réponse obtenue au point $A(1, 1)$ est :

$$W(1, 1) = {}^a_{AS}W_0 + \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}W_n \quad (3.120)$$

La réponse obtenue au point A est représentée sur la figure (3.11) :

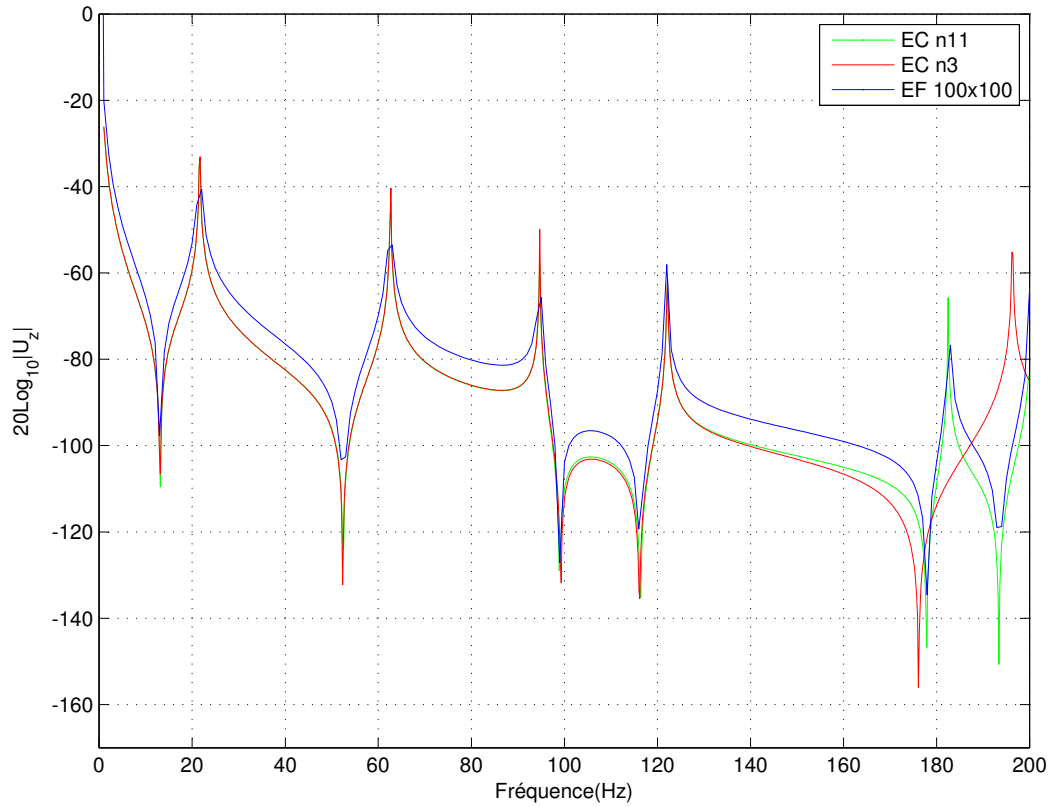


FIGURE 3.11 – Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-symétrique

3.4.6 Chargement réparti unilatéral

On présente ici un chargement qui permet de solliciter plusieurs contributions simultanément. On définit ainsi un chargement réparti sur un seul côté, par exemple :

$$F_{ext} = F(1, \eta) = 1 \quad (3.121)$$

Le chargement réparti pour $\xi = 1$ est représenté par la figure (3.12) :

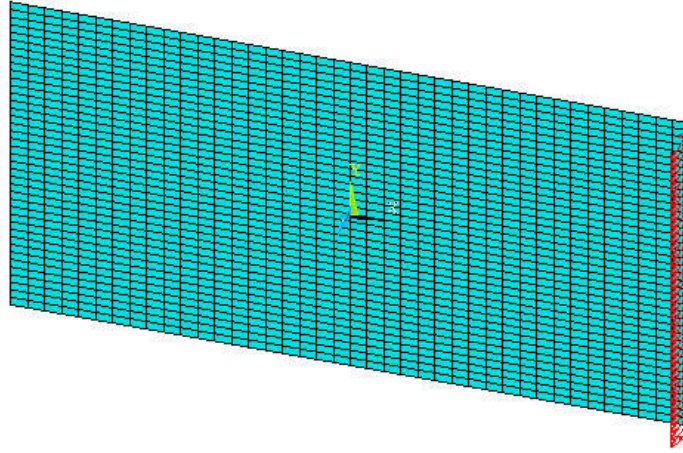


FIGURE 3.12 – Chargement réparti unilatéral

La projection de cette force donne :

$$F(1, \eta) = F_0 + \sum_{m=1}^M F_m^S \cos m\pi\eta + \sum_{m=1}^M F_m^A \sin (2m - 1) \frac{\pi}{2} \eta \quad (3.122)$$

avec : $F_0 = 1$ et $F_m^S = F_m^A = 0$.

La réponse harmonique au point C (1,1) est donné par :

$$W(1, 1) = {}^1_{SS} W_0 + {}^1_{AS} W_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} ({}^1_{SS} W_m + {}^1_{AS} W_m - {}^1_{AA} W_m - {}^1_{SA} W_m) (-1)^m \quad (3.123)$$

La réponse harmonique obtenue en ce point est représentée sur la figure (3.13) :

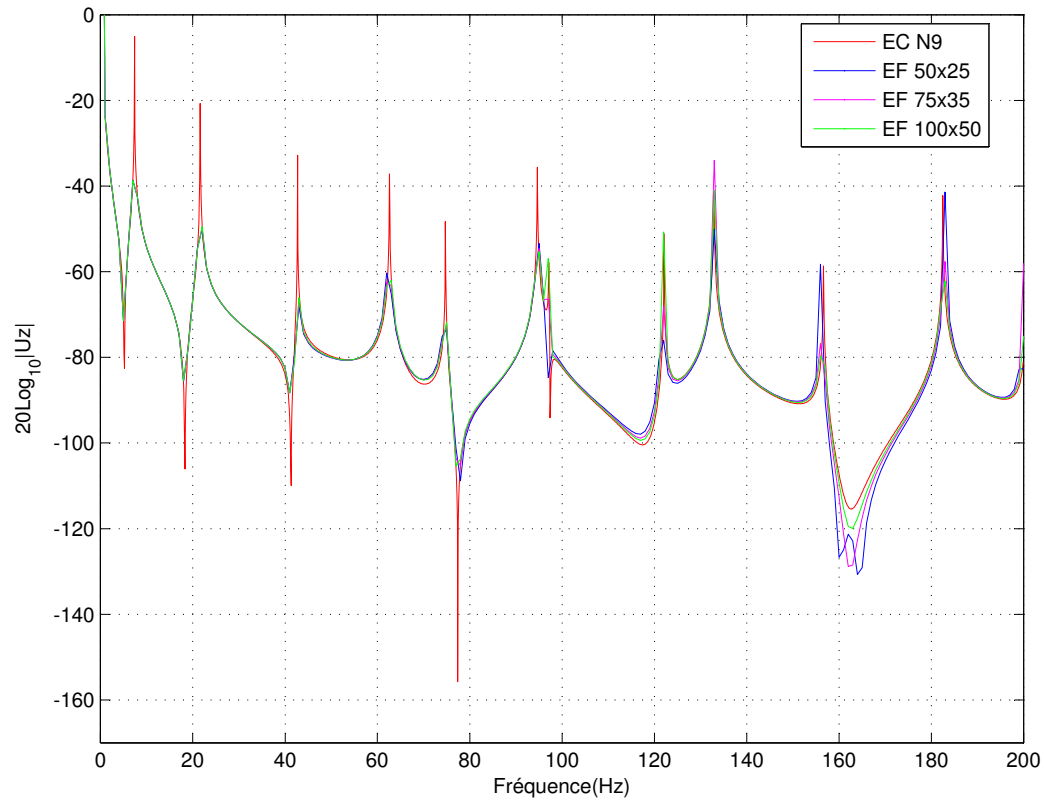


FIGURE 3.13 – Réponse harmonique pour une force répartie

Une excellente convergence entre les résultats obtenus par la MEC avec ceux obtenus par la MEF pour une bande de fréquences qui varie entre $[0, 150]$ Hz. Au-delà de la fréquence 150 Hz, une divergence entre les deux méthodes commence à être observée.

La figure (3.14) suivante présente un détail d'une plage de fréquence qui varie entre $[140, 200]$ Hz.

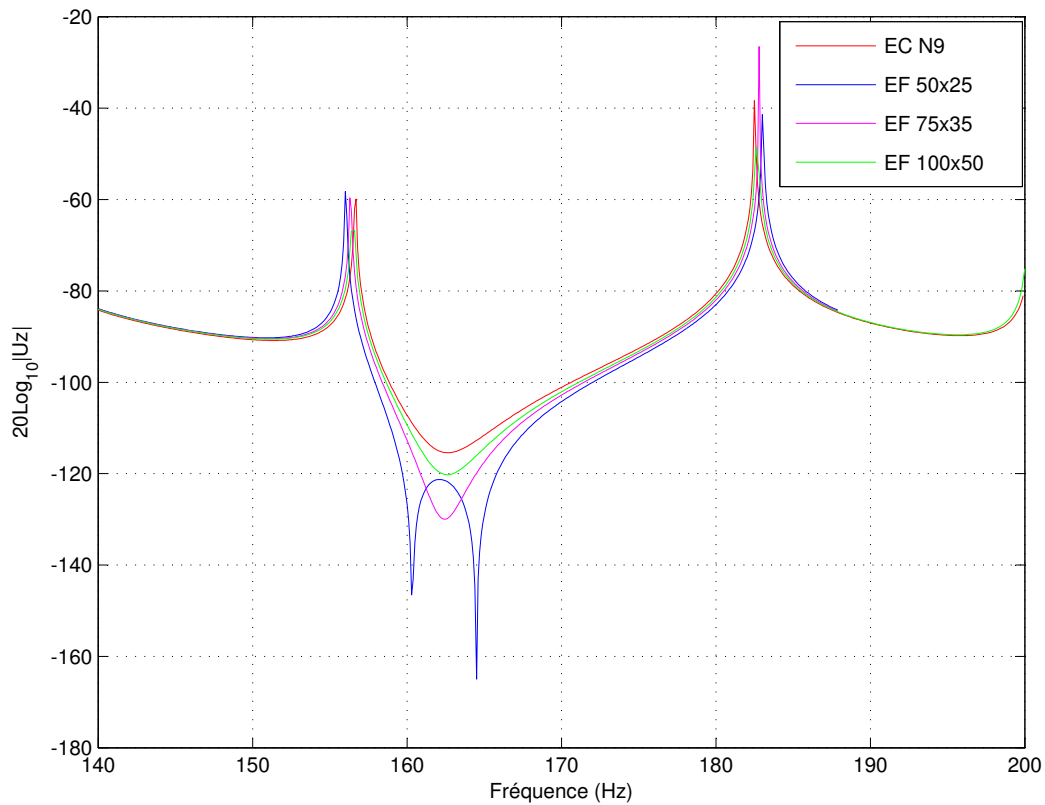


FIGURE 3.14 – Réponse harmonique pour une force répartie pour une plage de fréquence [160 200]

L'affinage du maillage EF augmente la précision pour le modèle éléments finis. Au niveau de 160 Hz, une excellente convergence entre la courbe de maillage 100×50 avec celle obtenue par notre formulation est observée, ce qui permet d'apporter un élément de validation supplémentaire. Par ailleurs, cette figure met en évidence la nécessité d'affiner le maillage EF lorsque la fréquence augmente.

Les deux figures (3.13) et (3.14) sont obtenues pour un nombre de termes $n = 5$. La figure 3.15 représente la convergence du modèle lorsque le nombre de termes de la série de Lévy augmente.

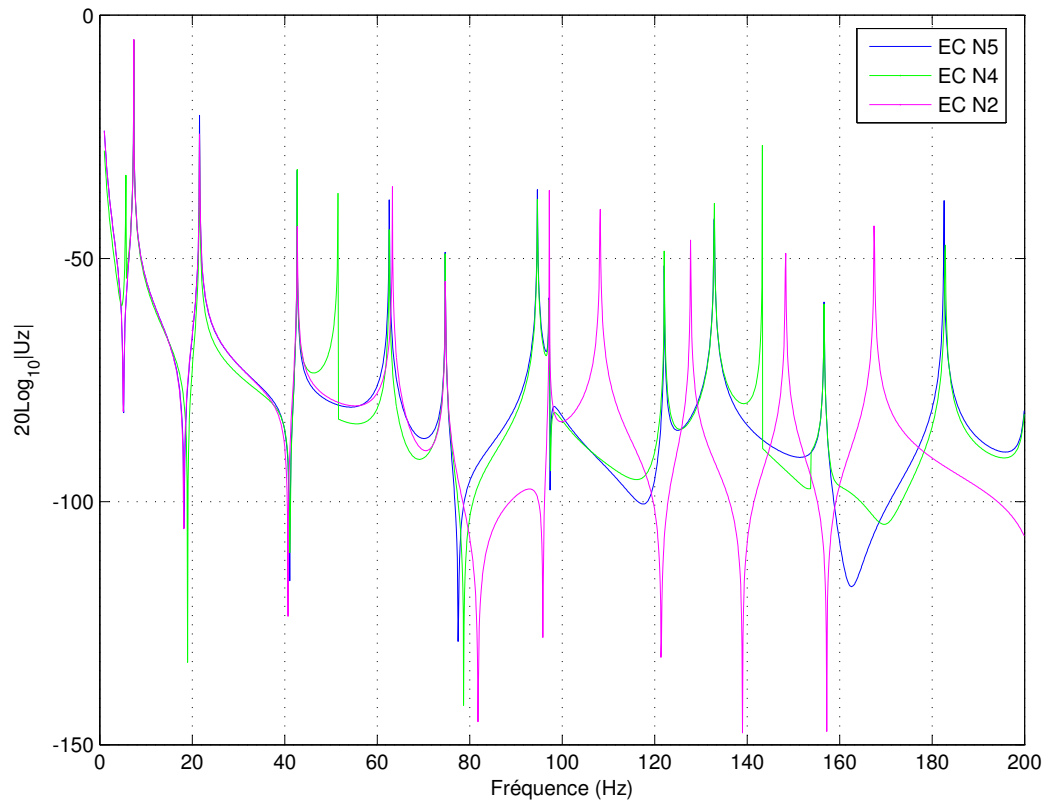


FIGURE 3.15 – Convergence avec le nombre de termes de la série de Levy

3.4.7 Chargement ponctuel

Un chargement ponctuel permet de solliciter la totalité des contributions. Une force ponctuelle localisée au point C de coordonnées (1, 1) est utilisée (voir Figure 3.16) :

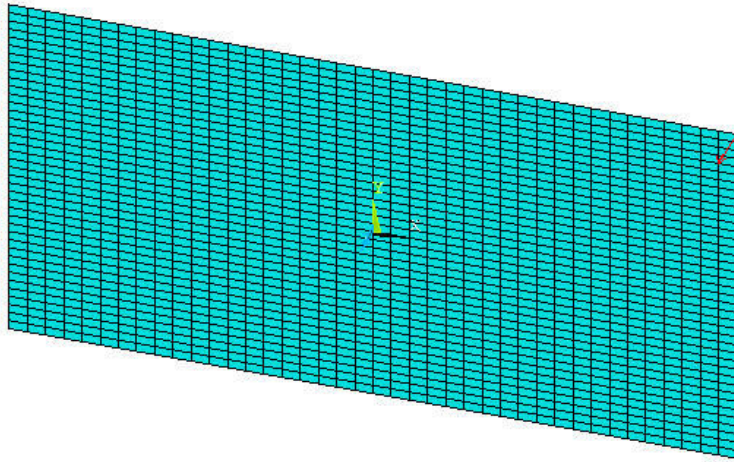


FIGURE 3.16 – Chargement ponctuel

La projection de cette force est donnée par l'équation (3.124) :

$$\begin{cases} F_0 = \frac{1}{2b} \\ F_m^S = \frac{(-1)^n}{b} \\ F_m^A = -\frac{(-1)^n}{b} \end{cases} \quad (3.124)$$

La réponse harmonique obtenue pour ce chargement est représentée sur une plage de fréquence [0 200 Hz] (3.17) :

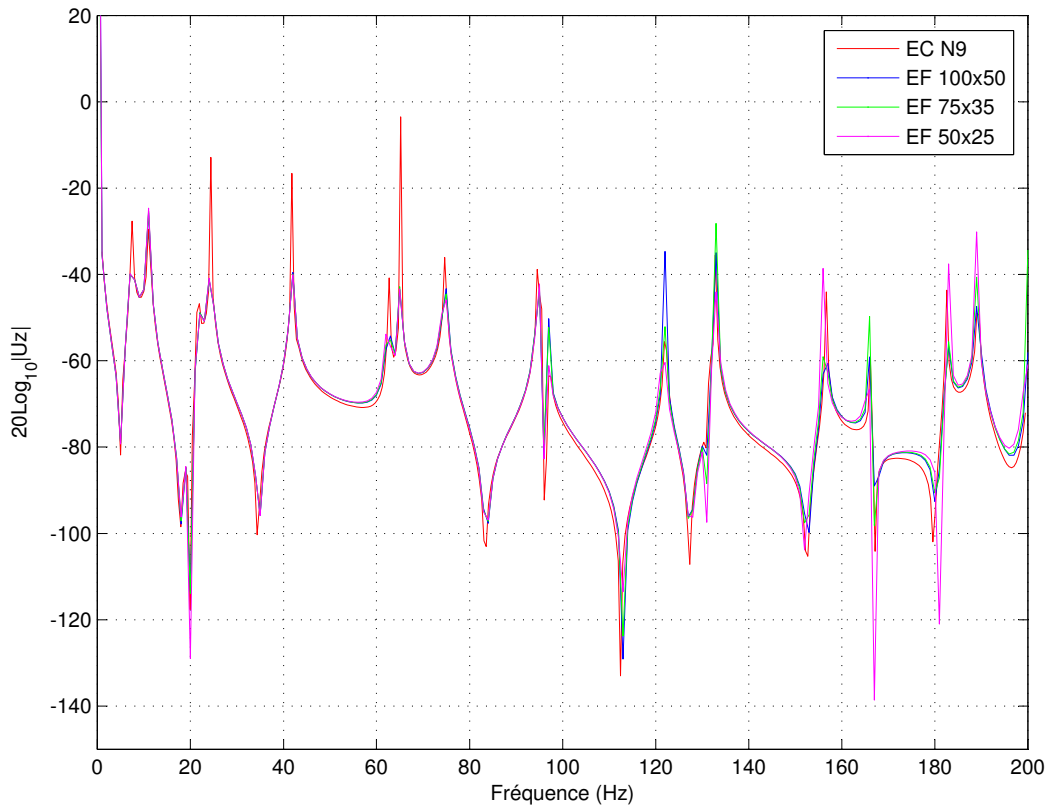


FIGURE 3.17 – Réponse harmonique pour un chargement ponctuel

Une bonne convergence entre les résultats obtenus par les deux méthodes est observée. La nécessité d'un maillage suffisamment fin pour le modèle EF est également mise en évidence.

3.4.8 Réponse harmonique amortie

Toutes les courbes de réponse harmonique présentées jusqu'à présent ont été obtenues sans introduire d'amortissement dans les caractéristiques du matériau. Les réponses non amorties sont très utiles pour obtenir des comparaisons précises entre la MEF et la MEC. La figure (3.18) présente un amortissement structural pour une force ponctuelle au point C pour une gamme de fréquence étendue à [1000 Hz, 2000 Hz].

Deux matériaux ont été utilisés avec un rapport $\delta = \frac{E_R}{E_I}$ différent. E_R présente la partie réelle et E_I présente la partie imaginaire des modules d'Young du matériau.

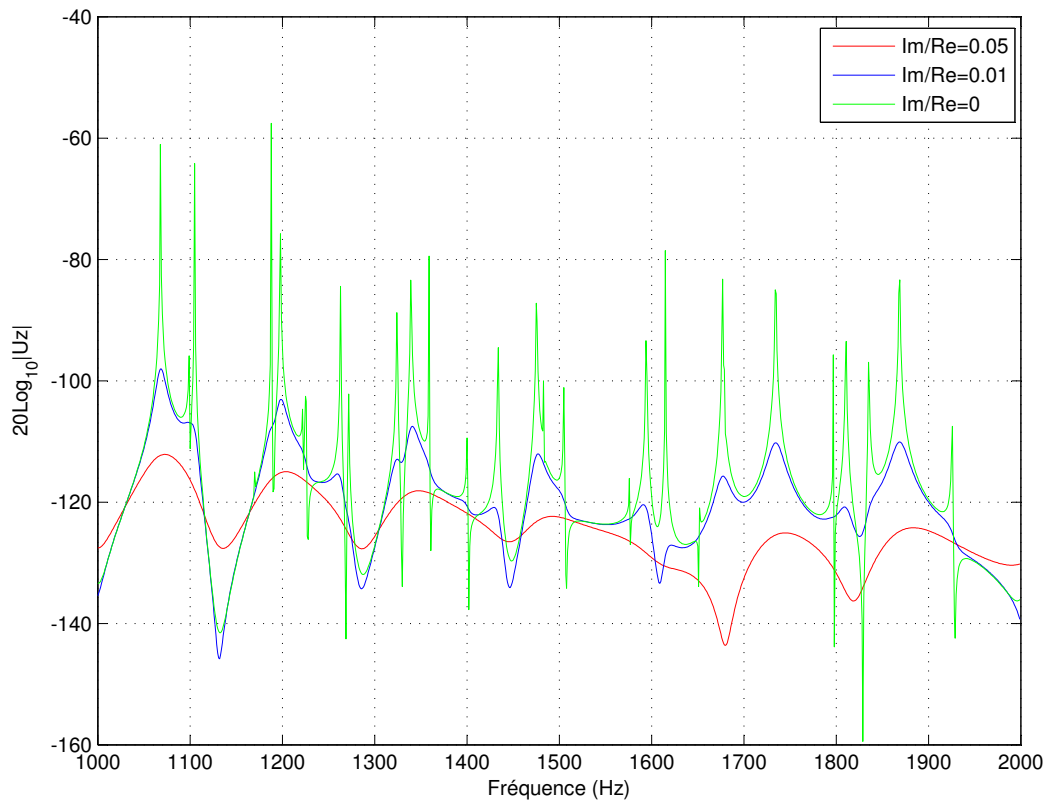


FIGURE 3.18 – Réponse harmonique amorties

3.5 Conclusion

Ce chapitre présente le développement d'un élément continu pour une plaque orthotrope de Kirchhoff. L'objectif est de construire des matrices de raideur dynamique en utilisant la décomposition de Gorman et les séries de Levy pour une plaque sous des conditions aux limites libres. Quelques types de chargement ont été présentés et validés par des résultats obtenus en utilisant une modélisation éléments finis. Le troisième chapitre de cette thèse expliquera le principe de développement d'une plaque orthotrope sous effet de membrane.

4 Élément continu de plaque orthotrope sous effet de membrane

4.1 Introduction

Le présent chapitre s'intéresse au développement d'un élément continu d'une plaque orthotrope sous effet de membrane. L'approche utilisée est une extension de celle présentée au chapitre précédent concernant la flexion. Elle a déjà été mise en œuvre avec succès pour les comportements isotropes (Casimir et al.[89]).

Nous nous intéressons en premier lieu à présenter la géométrie et la théorie des plaques orthotropes vibrant dans leur plan, ce qu'on dénomme de manière classique *les effets de membrane*. Dans un second temps, les procédures de la formulation élémentaire sont développées. Enfin, nous terminons ce chapitre par une validation du modèle par comparaison des résultats obtenus pour différents types de chargement avec ceux issus de modélisations éléments finis sous ANSYS.

L'objectif principal est de définir une procédure de construction de la matrice de rigidité dynamique d'une plaque orthotrope libre représentative du comportement vibratoire dans son plan. L'approche est semblable au cas des mouvements de flexion hors du plan. Les équations du mouvement pour des conditions aux limites naturelles sont résolues à partir de développement en séries de Levy et une décomposition de Gorman des conditions aux limites. Les champs inconnus sur les frontières de la plaque sont, quant à eux, décrits par des développements en série de Fourier.

4.2 Vibrations dans le plan des plaques orthotropes

4.2.1 Définition de la géométrie

On considère une plaque orthotrope de dimensions $2a \times 2b$ et d'épaisseur h . On note Ox and Oy les axes de symétrie de la plaque qui permettent de repérer un point du feuillet moyen par ses coordonnées cartésiennes x et y . En l'absence de flexion, le déplacement dans le plan de tout point M du volume est identique à celui de sa projection P sur le feuillet moyen. On note u et v les déplacements selon x et y respectivement (voir figure 4.1).

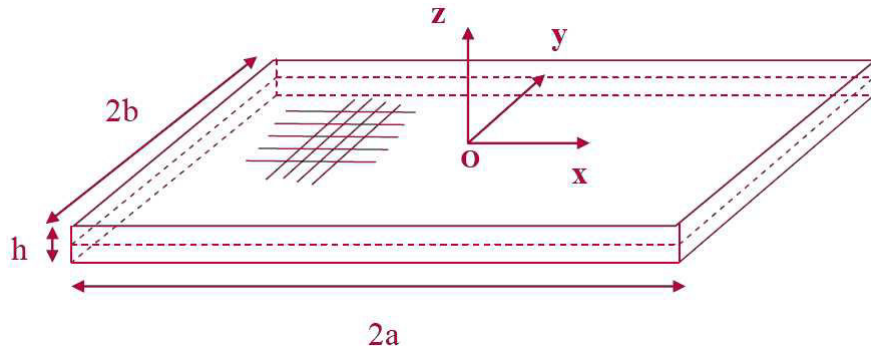


FIGURE 4.1 – Plaque orthotrope

4.2.2 Définition de l'orthotropie matérielle

Le matériau constitutif de la plaque est orthotrope. Il est fait l'hypothèse que les axes principaux d'orthotropie sont confondus avec les axes de symétrie de la plaque. Cette hypothèse conduit à un découplage des mouvements de flexion et de membrane. Ainsi, les propriétés élastodynamiques intervenant dans les équations du mouvement dans le plan sont limitées à :

- un module de Young longitudinal selon la direction x noté E_x ,
- un module de Young transversal selon la direction y noté E_y ,
- un module de Coulomb dans le plan (x, y) noté G_{xy} ,
- des coefficients de Poisson dans le plan (x, y) notés ν_{xy} et ν_{yx} ,
- et une masse volumique notée ρ .

4.2.3 Relations contraintes-déformations

La relation entre les composantes des tenseurs de contraintes de Cauchy et de petites déformations est exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_x = D_x \epsilon_x + D_1 \epsilon_y \\ \sigma_y = D_1 \epsilon_x + D_y \epsilon_y \\ \sigma_{xy} = D_{xy} \epsilon_{xy} \end{cases} \quad (4.1)$$

σ_x , σ_y et σ_{xy} sont les composantes de tenseur de contraintes. ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} sont les composantes de tenseur de déformation. Elles sont elle-même définies par :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

D_x , D_y et D_{xy} ne sont fonctions que des constantes élastiques du matériau. Ces

quantités sont données par :

$$\begin{cases} D_x = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ D_1 = \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ D_y = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ D_{xy} = G_{xy} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2.4 Efforts internes

En tout point $P(x, y)$ du feuillet moyen sont définis des efforts internes obtenus par intégration sur l'épaisseur du champ des contraintes. Ces efforts sont les suivants :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (4.4)$$

A partir des équations (4.1), et (4.4), les relations efforts-déplacement deviennent :

$$N_x = h \times \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.5)$$

$$N_y = h \times \left(D_1 \frac{\partial u}{\partial x} + D_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

$$N_{xy} = h \times \left(D_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + D_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.7)$$

4.2.5 Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton permet d'obtenir les équations de l'équilibre dynamique dans le plan de la plaque :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Les équations (4.1), (4.3), (4.4) et (4.8) permettent ensuite d'obtenir les équations du mouvement (4.9).

$$\begin{cases} D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ D_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Le problème de la réponse harmonique qui nous intéresse limite la dépendance temporelle du champ de déplacement à la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = U(x, y)e^{j\omega t} \\ v(x, y, t) = V(x, y)e^{j\omega t} \end{cases} \quad (4.10)$$

$U(x, y)$ et $V(x, y)$ présentent les amplitudes dans le plan du déplacement harmonique. Le système d'équations (4.8) est alors réécrit conformément au système d'équations (4.11) :

$$\begin{cases} D_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\rho\omega^2 U \\ D_y \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\rho\omega^2 V \end{cases} \quad (4.11)$$

Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles couplé satisfait par les champs inconnus U et V . Des dérivations successives de ce système permettent néanmoins un découplage des équations satisfaites par chacune des inconnues de déplacement. On obtient ainsi les équations de mouvement (4.11) suivantes :

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + A_2 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + A_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + A_4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_6 U = 0 \\ B_1 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} + B_3 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B_5 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + B_6 V = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Les constantes A_i et B_i sont données ci-dessous pour $i = \{1..6\}$:

$$A_1 = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$

$$A_2 = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$

$$A_3 = G_{xy} + \frac{E_x E_y}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})^2} - \frac{(G_{xy}(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) + \nu_{xy} E_y)^2}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})^2 G_{xy}}$$

$$A_4 = -\left(\frac{-E_x \rho \omega^2}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) G_{xy}} - \rho \omega^2\right)$$

$$A_5 = -\left(\frac{-E_y \rho \omega^2}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) G_{xy}} - \rho \omega^2\right)$$

$$A_6 = \frac{\rho^2 \omega^4}{G_{xy}}$$

$$B_1 = G_{xy}$$

$$B_2 = G_{xy} \frac{E_y}{E_x}$$

$$B_3 = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} + \frac{G_{xy}^2(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x} - \frac{(\frac{\nu_{xy} E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} + G_{xy})^2(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x}$$

$$B_4 = -\left(\frac{-G_{xy} \rho \omega^2 (1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_L} - \rho \omega^2\right)$$

$$B_5 = -\left(\frac{-E_y \rho \omega^2}{E_x} - \frac{G_{xy} \rho \omega^2 (1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x}\right)$$

$$B_6 = \frac{\rho^2 \omega^4 (1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x}$$

4.3 Matrice de raideur dynamique d'une plaque orthotrope sous effet de membrane

4.3.1 Décomposition de la solution

Le problème se décompose en quatre sous problèmes de la même façon que pour le cas de flexion. Les différentes contributions de cette décomposition sont symétrique-symétrique (SS), antisymétrique-antisymétrique (AA), symétrique-antisymétrique (SA) et antisymétrique-symétrique (AS). Les conditions aux limites varient pour chaque contribution. La solution globale en déplacement est alors décrite par :

$$U(\xi, \eta) = U_{SS}(\xi, \eta) + U_{AA}(\xi, \eta) + U_{SA}(\xi, \eta) + U_{AS}(\xi, \eta) \quad (4.13)$$

ξ et η représentent ici des coordonnées adimensionnées dans le repère local de la plaque. Ils sont définis par :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad , \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (4.14)$$

Le premier indice S ou A indique si le déplacement est symétrique ou antisymétrique par rapport à ξ . Le deuxième indice donne la propriété de symétrie selon η .

Le système couplé (4.9) permet aussi de déterminer les propriétés respectives de symétrie de chacun des champs inconnus U et V . Il s'avère ainsi les règles suivantes. Si le champ U est symétrique par rapport à l'axe (ξ) alors le champ V est antisymétrique par rapport à cet axe et vice versa. On convient d'indicer les expressions qui suivront vis à vis des propriétés de symétrie du champ U . Ainsi, le déplacement V s'écrit de la même façon :

$$V(\xi, \eta) = V_{SS}(\xi, \eta) + V_{AA}(\xi, \eta) + V_{SA}(\xi, \eta) + V_{AS}(\xi, \eta) \quad (4.15)$$

mais les indices sont relatifs aux propriétés de symétrie de U . V_{AA} est alors la contribution symétrique-symétrique de V puisque pour cette contribution U est symétrique-symétrique.

S'agissant des efforts internes, les deux équations (4.1) et (4.4) permettent d'établir les relations entre les efforts internes et les déplacements. Ces efforts sont décomposés de la même façon que les champs de déplacement. On écrit :

$$N_x(\xi, \eta) = N_{xSS}(\xi, \eta) + N_{xAA}(\xi, \eta) + N_{xSA}(\xi, \eta) + N_{xAS}(\xi, \eta) \quad (4.16)$$

$$N_y(\xi, \eta) = N_{ySS}(\xi, \eta) + N_{yAA}(\xi, \eta) + N_{ySA}(\xi, \eta) + N_{yAS}(\xi, \eta) \quad (4.17)$$

$$N_{xy}(\xi, \eta) = N_{xySS}(\xi, \eta) + N_{xyAA}(\xi, \eta) + N_{xySA}(\xi, \eta) + N_{xyAS}(\xi, \eta) \quad (4.18)$$

L'indice SS , AS , SA et AA de ces contributions représentent toujours la propriété de symétrie du champ inconnu U . Le tableau suivant récapitule les propriétés de symétrie pour chacune de ces contributions. Il est obtenu par analyse des relations efforts/déplacement.

U	V	N_x	N_y	N_{xy}
SS	AA	AS	AS	SA
AA	AA	SA	SA	AS
SA	AS	SS	SS	AA
AS	SA	AA	AA	SS

TABLE 4.1 – Propriétés de symétrie pour chaque contribution

4.3.2 Solutions en déplacement

Contribution symétrique-symétrique

Pour chaque contribution, les déplacements U et V vérifient l'équation dynamique (4.9) du régime harmonique. Dans le cas symétrique-symétrique, on choisit un développement similaire à celui des séries de Lévy pour la flexion. Les développements retenus pour les déplacements U_{SS} et V_{SS} sont :

$$\begin{cases} U_{SS}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{SS}U_n(\xi) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{SS}U_n(\eta) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\xi \\ V_{SS}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{SS}V_n(\xi) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{SS}V_n(\eta) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\xi \end{cases} \quad (4.19)$$

Le choix du facteur $\frac{4n-3}{4}$ est lié à l'ordre de dérivation de ces fonctions qui permet d'obtenir les efforts. Les conditions aux limites libres doivent autoriser l'annulation de ces efforts sur les frontières de la plaque. Les fonctions ${}^1_{SS}U_n(\xi)$ et ${}^2_{SS}U_n(\eta)$ sont des fonctions paires et les fonctions ${}^1_{SS}V_n(\xi)$ et ${}^2_{SS}V_n(\eta)$ sont des fonctions impaires. En intégrant l'équation (4.19) dans le système découplé (4.13), on obtient un système différentiel satisfait par les fonctions ${}^1_{SS}U_n(\xi)$, ${}^2_{SS}U_n(\eta)$, ${}^1_{SS}V_n(\xi)$ et ${}^2_{SS}V_n(\eta)$ (4.20) :

$$\begin{cases} \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{SS}U_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{A_3}{A_1} + \phi^2 b^2 \frac{A_4}{A_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{SS}U_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{A_2}{A_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{A_5}{A_1} + b^4 \frac{A_6}{A_1} \right) {}^1_{SS}U_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{SS}U_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{A_3}{A_2} + b^2 \frac{A_5}{A_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{SS}U_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{A_1}{A_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{A_4}{A_2} + b^4 \frac{A_6}{A_2} \right) {}^2_{SS}U_n = 0 \\ \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{SS}V_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{B_3}{B_1} + \phi^2 b^2 \frac{B_4}{B_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{SS}V_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{B_2}{B_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{B_5}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^1_{SS}V_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{SS}V_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{B_3}{B_2} + b^2 \frac{B_5}{B_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{SS}V_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{B_1}{B_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{B_4}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^2_{SS}V_n = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

avec $\phi = \frac{b}{a}$ et $k_{1n} = k_{2n} = \frac{(4n-3)\pi}{4}$.

Les solutions de ces équations différentielles sont alors :

$$\begin{cases} {}^1_{SS}U_n(\xi) = {}^1e_n \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1f_n \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SS}U_n(\eta) = {}^2e_n \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2f_n \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^2_{SS}V_n(\eta) = {}^2g_n \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2h_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^2_{SS}V_n(\eta) = {}^2g_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) + {}^2h_n \left(e^{2\kappa_n\eta} - e^{-2\kappa_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

${}^1\beta_n$, ${}^2\beta_n$, ${}^1\gamma_n$ et ${}^2\gamma_n$ sont des nombres complexes dont les expressions sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} {}^1\beta_n = \frac{k_{1n}^2(B_1 + \frac{A_1A_2}{B_1} + \frac{A_3}{B_1}) - \frac{(A_1b^2\rho\omega^2)}{B_1} - b^2\rho\omega^2}{\phi^2} + \sqrt{\Delta_1}/\phi^4 \\ {}^2\beta_n = \frac{k_{2n}^2(B_1 + \frac{A_1A_2}{B_1} + \frac{A_3}{B_1}) - \frac{(A_1b^2\rho\omega^2)}{B_1} - b^2\rho\omega^2}{\phi^2} - \sqrt{\Delta_1}/\phi^4 \\ {}^1\gamma_n = \frac{k_{1n}^2(B_1 + \frac{A_1A_2}{B_1} + \frac{A_3}{B_1}) - \frac{(A_1a^2\rho\omega^2)}{B_1} - a^2\rho\omega^2}{\phi^2} + \sqrt{\Delta_2}/2 \\ {}^2\gamma_n = \frac{k_{2n}^2(B_1 + \frac{A_1A_2}{B_1} + \frac{A_3}{B_1}) - \frac{(A_1a^2\rho\omega^2)}{B_1} - a^2\rho\omega^2}{\phi^2} - \sqrt{\Delta_2}/2 \end{cases} \quad (4.22)$$

avec

$$\begin{cases} c = A_1\phi^4 \\ d = -\phi^2k_{1n}^2A_3 + \phi^2b^2A_4 \\ e = k_{1n}^4A_2 - b^2k_{1n}^4A_5 + A_6b^4 \\ \Delta_1 = d^2 - 4ce \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} o = A_2 \\ p = -\phi^2k_{2n}^2A_3 + \phi^2b^2A_5 \\ q = k_{2n}^4A_1 - b^2k_{2n}^4A_4 + A_6b^4 \\ \Delta_2 = o^2 - 4pq \end{cases} \quad (4.24)$$

En utilisant les expressions (4.21) dans le système couplé (4.11), on obtient des relations entre les constantes d'intégration ie_n , if_n , ig_n et ih_n pour $i=1$ ou 2 . Pour le cas SS qui nous intéresse ici, on obtient :

$$\begin{cases} {}^1e_nL_{1n} = -{}^1g_n\phi^1\beta_n \\ {}^1f_nL_{2n} = -{}^1h_nk_{1n} \\ {}^2e_nL_{3n} = {}^2g_n\phi k_{2n} \\ {}^2f_nL_{4n} = {}^2h_n{}^2\gamma_n \end{cases} \quad (4.25)$$

les constantes L_{in} sont données en annexe B1.

Le système (4.21) devient :

$$\begin{cases} {}^1_{SS}U_n(\xi) = A_n\beta_{1n}\phi \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + B_nk_{1n} \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SS}U_n(\eta) = C_nk_{2n}\phi \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + D_n{}^2\gamma_n \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{SS}V_n(\xi) = -A_nL_{1n} \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) - B_nL_{2n} \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SS}V_n(\eta) = C_nL_{3n} \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + D_nL_{4n} \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.26)$$

Contribution antisymétrique-antisymétrique

La solution pour la contribution antisymétrique-antisymétrique est écrite sous la

forme du développement suivant :

$$\begin{cases} U_{AA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{AA}U_n(\xi) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{AA}U_n(\eta) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\xi \\ V_{AA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{AA}V_n(\xi) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{AA}V_n(\eta) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\xi \end{cases} \quad (4.27)$$

Pour ce cas, les fonctions ${}^1_{AA}U_n(\xi)$ et ${}^2_{AA}U_n(\eta)$ sont des fonctions impaires et les fonctions ${}^1_{AA}V_n(\xi)$ et ${}^2_{AA}V_n(\eta)$ sont paires.

En intégrant l'équation (4.27) dans le système découplé (4.12), on obtient le système différentiel satisfait par les fonctions ${}^1_{AA}U_n(\xi)$, ${}^2_{AA}U_n(\eta)$, ${}^1_{AA}V_n(\xi)$ et ${}^2_{AA}V_n(\eta)$ (4.28)

$$\begin{cases} \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{AA}U_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{A_3}{A_1} + \phi^2 b^2 \frac{A_4}{A_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{AA}U_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{A_2}{A_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{A_5}{A_1} + b^4 \frac{A_6}{A_1} \right) {}^1_{AA}U_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{AA}U_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{A_3}{A_2} + b^2 \frac{A_5}{A_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{AA}U_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{A_1}{A_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{A_4}{A_2} + b^4 \frac{A_6}{A_2} \right) {}^2_{AA}U_n = 0 \\ \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{AA}V_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{B_3}{B_1} + \phi^2 b^2 \frac{B_4}{B_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{AA}V_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{B_2}{B_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{B_5}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^1_{AA}V_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{AA}V_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{B_3}{B_2} + b^2 \frac{B_5}{B_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{AA}V_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{B_1}{B_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{B_4}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^2_{AA}V_n = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Les solutions de ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} {}^1_{AA}U_n(\xi) = {}^1e_n \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1f_n \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AA}U_n(\eta) = {}^2e_n \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2f_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{AA}V_n(\xi) = {}^1g_n \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1h_n \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AA}V_n(\eta) = {}^2g_n \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2h_n \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.29)$$

Les nombres complexes ${}^1\beta_n$, ${}^2\beta_n$, ${}^1\gamma_n$ et ${}^2\gamma_n$ sont identiques à ceux du cas symétrique-symétrique.

En utilisant les expressions (4.29) dans le système couplé (4.11), on obtient des relations entre les constantes d'intégration ie_n , if_n , ig_n et ih_n pour $i=1$ ou 2 :

$$\begin{cases} {}^1e_n L_{1n} = {}^1g_n \phi^1 \beta_n \\ {}^1f_n L_{2n} = {}^1h_n k_{1n} \\ {}^2e_n L_{3n} = -{}^2g_n \phi k_{2n} \\ {}^2f_n L_{4n} = -{}^2h_n {}^2\gamma_n \end{cases} \quad (4.30)$$

Les constantes L_{in} sont données en annexe B1.

Le système (4.29) devient alors :

$$\begin{cases} {}^1_{AA}U_n(\xi) = A_n {}^1\beta_n \phi \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) + B_n k_{1n} \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AA}U_n(\eta) = -C_n {}^1n \phi \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) - D_n {}^2\gamma_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{AA}V_n(\xi) = A_n L_{1n} \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + B_n L_{2n} \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AA}V_n(\eta) = C_n L_{3n} \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + D_n L_{4n} \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.31)$$

Contribution symétrique-antisymétrique

Pour la contribution symétrique-antisymétrique, le développement choisi est :

$$\begin{cases} U_{SA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{SA}U_n(\xi) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{SA}U_n(\eta) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\xi \\ V_{SA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{SA}V_n(\xi) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{SA}V_n(\eta) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\xi \end{cases} \quad (4.32)$$

Pour ce cas, les fonctions ${}^1_{SA}U_n(\xi)$ et ${}^2_{SA}V_n(\eta)$ sont des fonctions paires et les fonctions ${}^1_{SA}V_n(\xi)$ et ${}^2_{SA}U_n(\eta)$ sont impaires.

En intégrant l'équation (4.32) dans le système (4.12), le système différentiel satisfait par ces fonctions s'écrit :

$$\begin{cases} \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{SA}U_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{A_3}{A_1} + \phi^2 b^2 \frac{A_4}{A_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{SA}U_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{A_2}{A_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{A_5}{A_1} + b^4 \frac{A_6}{A_1} \right) {}^1_{SA}U_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{SA}U_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{A_3}{A_2} + b^2 \frac{A_5}{A_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{SA}U_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{A_1}{A_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{A_4}{A_2} + b^4 \frac{A_6}{A_2} \right) {}^2_{SA}U_n = 0 \\ \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{SA}V_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{B_3}{B_1} + \phi^2 b^2 \frac{B_4}{B_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{SA}V_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{B_2}{B_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{B_5}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^1_{SA}V_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{SA}V_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{B_3}{B_2} + b^2 \frac{B_5}{B_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{SA}V_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{B_1}{B_4} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{B_4}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^2_{SA}V_n = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$\begin{cases} {}^1_{SA}U_n(\xi) = {}^1e_n \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1f_n \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SA}U_n(\eta) = {}^2e_n \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2f_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{SA}V_n(\xi) = {}^1g_n \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1h_n \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SA}V_n(\eta) = {}^2g_n \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2h_n \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.34)$$

Les nombres complexes ${}^1\beta_n$, ${}^2\beta_n$, ${}^1\gamma_n$ et ${}^2\gamma_n$ restent les mêmes que pour les deux précédentes contributions.

Dans le cas présent SA , les relations entre les constantes d'intégrations sont données par :

$$\begin{cases} {}^1e_n L_{1n} = {}^1g_n \phi^1 \beta_n \\ {}^1f_n L_{2n} = {}^1h_n k_{1n} \\ {}^2e_n L_{3n} = {}^2g_n \phi k_{2n} \\ {}^2f_n L_{4n} = {}^2h_n {}^2\gamma_n \end{cases} \quad (4.35)$$

Les constantes L_{in} sont données en annexe B1.

Le système (4.34) s'écrit alors :

$$\begin{cases} {}^1_{SA}U_n(\xi) = A_n\phi^1\beta_n \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + B_nk_{1n} \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SA}U_n(\eta) = C_nk_{1n}\phi \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + D_n{}^2\gamma_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{SA}V_n(\xi) = A_nL_{1n} \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) + B_nL_{2n} \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{SA}V_n(\eta) = C_nL_{3n} \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + D_nL_{4n} \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.36)$$

Contribution antisymétrique-symétrique

La solution pour de cette contribution est définie par le développement :

$$\begin{cases} U_{AS}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{AS}U_n(\xi) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{AS}U_n(\eta) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\xi \\ V_{AS}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1_{AS}V_n(\xi) \cos \frac{4n-3}{4}\pi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2_{AS}V_n(\eta) \sin \frac{4n-3}{4}\pi\xi \end{cases} \quad (4.37)$$

Les fonctions ${}^1_{AS}U_n(\xi)$ et ${}^2_{AS}V_n(\eta)$ sont des fonctions impaires et les fonctions ${}^1_{AS}V_n(\xi)$ et ${}^2_{AS}U_n(\eta)$ sont paires.

Le système différentiel satisfait par ces fonctions est défini par :

$$\begin{cases} \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{AS}U_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{A_3}{A_1} + \phi^2 b^2 \frac{A_4}{A_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{AS}U_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{A_2}{A_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{A_5}{A_1} + b^4 \frac{A_6}{A_1} \right) {}^1_{AS}U_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{AS}U_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{A_3}{A_2} + b^2 \frac{A_5}{A_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{AS}U_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{A_1}{A_2} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{A_4}{A_2} + b^4 \frac{A_6}{A_2} \right) {}^2_{AS}U_n = 0 \\ \phi^4 \frac{d^4 {}^1_{AS}V_n}{d\xi^4} + \left(-\phi^2 k_{1n}^2 \frac{B_3}{B_1} + \phi^2 b^2 \frac{B_4}{B_1} \right) \frac{d^2 {}^1_{AS}V_n}{d\xi^2} + \left(k_{1n}^4 \frac{B_2}{B_1} - k_{1n}^2 b^2 \frac{B_5}{B_1} + b^4 \frac{B_6}{B_1} \right) {}^1_{AS}V_n = 0 \\ \frac{d^4 {}^2_{AS}V_n}{d\eta^4} + \left(-\phi^2 k_{2n}^2 \frac{B_3}{B_2} + b^2 \frac{B_5}{B_2} \right) \frac{d^2 {}^2_{AS}V_n}{d\eta^2} + \left(k_{2n}^4 \phi^4 \frac{B_1}{B_2} - k_{2n}^2 b^2 \phi^2 \frac{B_4}{B_2} + b^4 \frac{B_6}{B_2} \right) {}^2_{AS}V_n = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$\begin{cases} {}^1_{AS}U_n(\xi) = {}^1e_n \left(e^{1\beta_n\xi} - e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1f_n \left(e^{1\gamma_n\xi} - e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AS}U_n(\eta) = {}^2e_n \left(e^{2\beta_n\eta} + e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2f_n \left(e^{2\gamma_n\eta} + e^{-2\gamma_n\eta} \right) \\ {}^1_{AS}V_n(\xi) = {}^1g_n \left(e^{1\beta_n\xi} + e^{-1\beta_n\xi} \right) + {}^1h_n \left(e^{1\gamma_n\xi} + e^{-1\gamma_n\xi} \right) \\ {}^2_{AS}V_n(\eta) = {}^2g_n \left(e^{2\beta_n\eta} - e^{-2\beta_n\eta} \right) + {}^2h_n \left(e^{2\gamma_n\eta} - e^{-2\gamma_n\eta} \right) \end{cases} \quad (4.39)$$

Les nombre complexes ${}^1\beta_n$, ${}^2\beta_n$, ${}^1\gamma_n$ et ${}^2\gamma_n$ restent les mêmes que pour les contributions précédentes.

Les relations entre les constantes d'intégrations sont ici :

$$\begin{cases} {}^1e_n L_{1n} = -{}^1g_n \phi^1 \beta_n \\ {}^1f_n L_{2n} = -{}^1h_n k_{1n} \\ {}^2e_n L_{3n} = -{}^2g_n \phi k_{2n} \\ {}^2f_n L_{4n} = -{}^2h_n {}^2\gamma_n \end{cases} \quad (4.40)$$

Les constantes L_{in} sont données en annexe B1.

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} {}^1_{AS}U_n(\xi) = -A_n {}^1\beta_n \phi \left(e^{1\beta_n \xi} - e^{-1\beta_n \xi} \right) - B_n k_{1n} \left(e^{1\gamma_n \xi} - e^{-1\gamma_n \xi} \right) \\ {}^2_{AS}U_n(\eta) = -C_n k_{2n} \phi \left(e^{2\beta_n \eta} + e^{-2\beta_n \eta} \right) - D_n {}^2\gamma_n \left(e^{2\gamma_n \eta} + e^{-2\gamma_n \eta} \right) \\ {}^1_{AS}V_n(\xi) = A_n L_{1n} \left(e^{1\beta_n \xi} + e^{-1\beta_n \xi} \right) + B_n L_{2n} \left(e^{1\gamma_n \xi} + e^{-1\gamma_n \xi} \right) \\ {}^2_{AS}V_n(\eta) = C_n L_{3n} \left(e^{2\beta_n \eta} - e^{-2\beta_n \eta} \right) + D_n L_{4n} \left(e^{2\gamma_n \eta} - e^{-2\gamma_n \eta} \right) k \end{cases} \quad (4.41)$$

Pour chacune des quatre contributions présentées, les constantes d'intégration A_n , B_n , C_n et D_n seront déterminées à partir des conditions aux limites naturelles appliquées sur la frontière de la plaque.

4.3.3 Procédé de construction de la matrice de raideur

La méthode présentée permet de construire la matrice de raideur dynamique pour chacune des quatre contributions. Elle s'effectue en trois étapes.

- La première étape consiste à introduire les expressions des équations (4.16), (4.17) et (4.18) dans les équations (4.5), (4.6) et (4.7) pour obtenir les champs des efforts internes N_x , N_y et N_{xy} en fonction des constantes d'intégration A_n , B_n , C_n et D_n .
- La deuxième étape consiste à projeter le champ de déplacements et les efforts internes apparaissant sur les frontières de la plaque sur une base de fonctions propre à chacun des bords.
- La dernière étape permet d'éliminer les constantes A_n , B_n , C_n et D_n pour obtenir une forme matricielle qui relie les projections sur la base précédente des efforts internes et les déplacements.

4.3.4 Bases fonctionnelles

Les forces extérieures et les déplacements sont projetés sur une base de fonctions. Ces fonctions sont définies pour chaque bord de la plaque et pour chaque contribution. Par exemple pour la contribution symétrique-symétrique, la fonction de base pour le bord $\xi = 1$ est $\cos m\pi\eta$ pour $m \in \{1, \dots, N\}$.

Le tableau (4.2) présente les fonctions de base utilisées pour chaque contribution et pour chaque bord.

	SS	AA	SA	AS
$U(1, \eta)$	$\cos(m\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$
$V(1, \eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$	$\cos(m\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$
$U(\xi, 1)$	$\cos(m\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(m\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$
$V(\xi, 1)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(m\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(m\pi\xi)$

TABLE 4.2 – Fonctions de base pour les déplacements

De la même façon, les efforts extérieurs, qui s'identifient aux efforts internes sur les bord définis par $\xi = 1$ et $\eta = 1$, sont projetées sur ces bases fonctionnelles.

	SS	AA	SA	AS
$N_x(1, \eta)$	$\cos(m\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$
$N_{xy}(1, \eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$
$N_{xy}(\xi, 1)$	$\cos(m\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\eta}{2})$	$\cos(m\pi\eta)$
$N_y(\xi, 1)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$	$\cos(m\pi\xi)$	$\cos(m\pi\xi)$	$\sin(\frac{(2m-1)\pi\xi}{2})$

TABLE 4.3 – Fonctions de base pour les efforts

Ces bases respectent les propriétés de symétrie de chaque inconnue pour chacune des contributions.

4.3.5 Matrices de raideur des quatre contributions

Contribution symétrique-symétrique

Efforts et déplacements définis sur les frontières sont développés sur les bases indiquées précédemment selon :

$$\begin{pmatrix} U_{SS}(1, \eta) \\ V_{SS}(1, \eta) \\ U_{SS}(\xi, 1) \\ V_{SS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a_{SS}U_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{SS}U_n \cos(n\pi\eta) \\ \sum_{n=1}^N {}^a_{SS}V_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\ {}^b_{SS}U_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{SS}U_n \cos(n\pi\xi) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{SS}V_n \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SS}U_0 \\
 {}^b_{SS}U_0 \\
 {}^a_{SS}U_1 \\
 {}^a_{SS}V_1 \\
 {}^b_{SS}U_1 \\
 {}^b_{SS}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{SS}U_{N-1} \\
 {}^a_{SS}V_{N-1} \\
 {}^b_{SS}U_{N-1} \\
 {}^b_{SS}V_{N-1} \\
 {}^a_{SS}V_N \\
 {}^b_{SS}V_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b U_{SS}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a U_{SS}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{SS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{SS}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{SS}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{SS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b U_{SS}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{SS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{SS}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{SS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b V_{SS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a V_{SS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

En factorisant ces développements par chacune des constantes d'intégrations, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SS}U_0 \\
 {}^b_{SS}U_0 \\
 {}^a_{SS}U_1 \\
 {}^a_{SS}V_1 \\
 {}^b_{SS}U_1 \\
 {}^b_{SS}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{SS}U_{N-1} \\
 {}^a_{SS}V_{N-1} \\
 {}^b_{SS}U_{N-1} \\
 {}^b_{SS}V_{N-1} \\
 {}^a_{SS}V_N \\
 {}^b_{SS}V_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}](1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] \sin((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{11}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}H_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{21}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}H_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

De même pour les forces :

$$\begin{pmatrix}
 N_{xSS}(1, \eta) \\
 N_{xySS}(1, \eta) \\
 N_{xySS}(\xi, 1) \\
 N_{ySS}(\xi, 1)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 {}^a_{SS}N_{x0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{SS}N_{xn} \cos(n\pi\eta) \\
 \sum_{n=1}^N {}^a_{SS}N_{xyn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\
 {}^b_{SS}N_{xyn0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{SS}N_{xyn} \cos(n\pi\xi) \\
 \sum_{n=1}^N {}^b_{SS}N_{yn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right)
 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SS}N_{x0} \\
 {}^b_{SS}N_{xy0} \\
 {}^a_{SS}N_{x1} \\
 {}^a_{SS}N_{xy1} \\
 {}^b_{SS}N_{xy1} \\
 {}^b_{SS}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{SS}N_{xN-1} \\
 {}^a_{SS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SS}N_{yN-1} \\
 {}^a_{SS}N_{xyN} \\
 {}^b_{SS}N_{yN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b N_{xSS}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a N_{xySS}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xSS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xySS}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xySS}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{ySS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b N_{xSS}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xySS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2*N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xySS}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{ySS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2*N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xySS}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2*N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{ySS}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2*N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

puis par factorisation, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SS}N_{x0} \\
 {}^b_{SS}N_{xy0} \\
 {}^a_{SS}N_{x1} \\
 {}^a_{SS}N_{xy1} \\
 {}^b_{SS}N_{xy1} \\
 {}^b_{SS}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{SS}N_{xN-1} \\
 {}^a_{SS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SS}N_{yN-1} \\
 {}^a_{SS}N_{xyN} \\
 {}^b_{SS}N_{yN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}](1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] \sin((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{11}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SS}G_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{21}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SS}G_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Les deux expressions (4.44) et (4.47) s'écrivent sous les formes matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}U_0 \\ {}^b_{SS}U_0 \\ {}^a_{SS}U_1 \\ {}^a_{SS}V_1 \\ {}^b_{SS}U_1 \\ {}^b_{SS}V_1 \\ \vdots \\ {}^a_{SS}U_{N-1} \\ {}^a_{SS}V_{N-1} \\ {}^b_{SS}U_{N-1} \\ {}^b_{SS}V_{N-1} \\ {}^a_{SS}V_N \\ {}^b_{SS}V_N \end{pmatrix} = [\mathbf{H}_{SS}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SS}N_{x0} \\ {}^b_{SS}N_{xy0} \\ {}^a_{SS}N_{x1} \\ {}^a_{SS}N_{xy1} \\ {}^b_{SS}N_{xy1} \\ {}^b_{SS}N_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SS}N_{xN-1} \\ {}^a_{SS}N_{xyN-1} \\ {}^b_{SS}N_{xyN-1} \\ {}^b_{SS}N_{yN-1} \\ {}^a_{SS}N_{xyN} \\ {}^b_{SS}N_{yN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{SS}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

D'après les deux expressions (4.48) et (4.49) la matrice de raideur relative à la contribution symétrique-symétrique s'écrit :

$$[\mathbf{K}_{SS}] = [\mathbf{H}_{SS}] \cdot [\mathbf{G}_{SS}]^{-1} \quad (4.50)$$

Contribution antisymétrique-antisymétrique :

Pour la contribution antisymétrique-antisymétrique, l'équation (4.42) devient :

$$\begin{pmatrix} U_{AA}(1, \eta) \\ V_{AA}(1, \eta) \\ U_{AA}(\xi, 1) \\ V_{AA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N {}^a_{AA}U_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\ {}^a_{AA}V_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{AA}V_n \cos(n\pi\eta) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AA}U_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \\ {}^b_{AA}V_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{AA}V_n \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AA}V_0 \\
 {}^b_{AA}V_0 \\
 {}^a_{AA}U_1 \\
 {}^a_{AA}V_1 \\
 {}^b_{AA}U_1 \\
 {}^b_{AA}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{AA}U_{N-1} \\
 {}^a_{AA}V_{N-1} \\
 {}^b_{AA}U_{N-1} \\
 {}^b_{AA}V_{N-1} \\
 {}^a_{AA}U_N \\
 {}^b_{AA}U_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b V_{AA}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a V_{AA}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{AA}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{AA}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AA}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{AA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b U_{AA}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{AA}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{AA}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{AA}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

En intégrant les constantes d'intégrations, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AA}V_0 \\
 {}^b_{AA}V_0 \\
 {}^a_{AA}U_1 \\
 {}^a_{AA}V_1 \\
 {}^b_{AA}U_1 \\
 {}^b_{AA}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{AA}U_{N-1} \\
 {}^a_{AA}V_{N-1} \\
 {}^b_{AA}U_{N-1} \\
 {}^b_{AA}V_{N-1} \\
 {}^a_{AA}U_N \\
 {}^b_{AA}U_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] (1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{11}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}H_{1M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{21}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}H_{2M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

De même pour les forces :

$$\begin{pmatrix}
 N_{xAA}(1, \eta) \\
 N_{xyAA}(1, \eta) \\
 N_{xyAA}(\xi, 1) \\
 N_{yAA}(\xi, 1)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \sum_{n=1}^N {}^a_{AA}N_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\
 {}^a_{AA}N_{xy0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{AA}N_{xyn} \cos(n\pi\eta) \\
 \sum_{n=1}^N {}^b_{AA}N_{xyn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}) \\
 {}^b_{AA}N_{yn0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{AA}N_{yn} \cos(n\pi\xi)
 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AA}N_{xy0} \\
 {}^b_{AA}N_{y0} \\
 {}^a_{AA}N_{x1} \\
 {}^a_{AA}N_{xy1} \\
 {}^b_{AA}N_{xy1} \\
 {}^b_{AA}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{AA}N_{xN-1} \\
 {}^a_{AA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AA}N_{yN-1} \\
 {}^a_{AA}N_{xN} \\
 {}^b_{AA}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b N_{xyAA}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a N_{yAA}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xyAA}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAA}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{yAA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b N_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xyAA}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{yAA}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xAA}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAA}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

En intégrant les constantes d'intégrations pour le vecteur force, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AA}N_{xy0} \\
 {}^b_{AA}N_{y0} \\
 {}^a_{AA}N_{x1} \\
 {}^a_{AA}N_{xy1} \\
 {}^b_{AA}N_{xy1} \\
 {}^b_{AA}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{AA}N_{xN-1} \\
 {}^a_{AA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AA}N_{yN-1} \\
 {}^a_{AA}N_{xN} \\
 {}^b_{AA}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}](1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{11}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AA}G_{1M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{21}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AA}G_{2M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Les deux expressions (4.53) et (4.56) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}V_0 \\ {}^b_{AA}V_0 \\ {}^a_{AA}U_1 \\ {}^a_{AA}V_1 \\ {}^b_{AA}U_1 \\ {}^b_{AA}V_1 \\ \vdots \\ {}^a_{AA}U_{N-1} \\ {}^a_{AA}V_{N-1} \\ {}^b_{AA}U_{N-1} \\ {}^b_{AA}V_{N-1} \\ {}^a_{AA}U_N \\ {}^b_{AA}U_N \end{pmatrix} = [\mathbf{H}_{AA}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AA}N_{xy0} \\ {}^b_{AA}N_{y0} \\ {}^a_{AA}N_{x1} \\ {}^a_{AA}N_{xy1} \\ {}^b_{AA}N_{xy1} \\ {}^b_{AA}N_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AA}N_{xN-1} \\ {}^a_{AA}N_{xyN-1} \\ {}^b_{AA}N_{xyN-1} \\ {}^b_{AA}N_{yN-1} \\ {}^a_{AA}N_{xN} \\ {}^b_{AA}N_{xyN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{AA}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

La matrice de rigidité pour la contribution antisymétrique-antisymétrique s'écrit :

$$[\mathbf{K}_{AA}] = [\mathbf{H}_{AA}] \cdot [\mathbf{G}_{AA}]^{-1} \quad (4.59)$$

Contribution antisymétrique-symétrique :

Les équations (4.42) pour le cas antisymétrique-symétrique deviennent :

$$\begin{pmatrix} U_{AS}(1, \eta) \\ V_{AS}(1, \eta) \\ U_{AS}(\xi, 1) \\ V_{AS}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a_{AS}U_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{AS}U_n \cos(n\pi\eta) \\ \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}V_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}U_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \\ {}^b_{AS}V_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{AS}V_n \cos(n\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AS}U_0 \\
 {}^b_{AS}V_0 \\
 {}^a_{AS}U_1 \\
 {}^a_{AS}V_1 \\
 {}^b_{AS}U_1 \\
 {}^b_{AS}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{AS}U_{N-1} \\
 {}^a_{AS}V_{N-1} \\
 {}^b_{AS}U_{N-1} \\
 {}^b_{AS}V_{N-1} \\
 {}^a_{AS}V_N \\
 {}^b_{AS}U_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b U_{AS}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a V_{AS}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{AS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{AS}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AS}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{AS}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b U_{AS}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{AS}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AS}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{AS}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b V_{AS}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{AS}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

En intégrant les constantes d'intégrations, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AS}U_0 \\
 {}^b_{AS}V_0 \\
 {}^a_{AS}U_1 \\
 {}^a_{AS}V_1 \\
 {}^b_{AS}U_1 \\
 {}^b_{AS}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{AS}U_{N-1} \\
 {}^a_{AS}V_{N-1} \\
 {}^b_{AS}U_{N-1} \\
 {}^b_{AS}V_{N-1} \\
 {}^a_{AS}V_N \\
 {}^b_{AS}U_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] (1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{11}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{AS}H_{1M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{21}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{AS}H_{2M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

De même pour les forces :

$$\begin{pmatrix}
 N_{xAS}(1, \eta) \\
 N_{xyAS}(1, \eta) \\
 N_{xyAS}(\xi, 1) \\
 N_{yAS}(\xi, 1)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \sum_{n=1}^N {}^a_{AS}N_{xn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}) \\
 {}^a_{AS}N_{xy0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{AS} \\
 {}^b_{AS}N_{xyn0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{AS}N_{xyn} \cos(n\pi\xi) \\
 \sum_{n=1}^N {}^b_{AS}N_{yn} \sin(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2})
 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AS}N_{xy0} \\
 {}^b_{AS}N_{y0} \\
 {}^a_{AS}N_{x1} \\
 {}^a_{AS}N_{xy1} \\
 {}^b_{AS}N_{xy1} \\
 {}^b_{AS}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{AS}N_{xN-1} \\
 {}^a_{AS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AS}N_{yN-1} \\
 {}^a_{AS}N_{xN} \\
 {}^b_{AS}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b N_{xyAS}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a N_{yAS}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xAS}(1, \eta) \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xyAS}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAS}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{yAS}(\xi, 1) \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b N_{xAS}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xyAS}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAS}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{yAS}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xAS}(1, \eta) \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xyAS}(\xi, 1) \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

En intégrant les constantes d'intégrations pour le vecteur force, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{AS}N_{xy0} \\
 {}^b_{AS}N_{y0} \\
 {}^a_{AS}N_{x1} \\
 {}^a_{AS}N_{xy1} \\
 {}^b_{AS}N_{xy1} \\
 {}^b_{AS}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{AS}N_{xN-1} \\
 {}^a_{AS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AS}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{AS}N_{yN-1} \\
 {}^a_{AS}N_{xN} \\
 {}^b_{AS}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}](1, \xi) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \sin(\frac{\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \sin(\frac{\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \sin(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^ASG_{11}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta & \dots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^ASG_{1M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^ASG_{21}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi & \dots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^ASG_{2M}] \sin(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Les deux expressions (4.62) et (4.62) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}U_0 \\ {}^b_{AS}V_0 \\ {}^a_{AS}U_1 \\ {}^a_{AS}V_1 \\ {}^b_{AS}U_1 \\ {}^b_{AS}V_1 \\ \vdots \\ {}^a_{AS}U_{N-1} \\ {}^a_{AS}V_{N-1} \\ {}^b_{AS}U_{N-1} \\ {}^b_{AS}V_{N-1} \\ {}^a_{AS}V_N \\ {}^b_{AS}U_N \end{pmatrix} = [\mathbf{H}_{AS}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{AS}N_{xy0} \\ {}^b_{AS}N_{y0} \\ {}^a_{AS}N_{x1} \\ {}^a_{AS}N_{xy1} \\ {}^b_{AS}N_{xy1} \\ {}^b_{AS}N_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{AS}N_{xN-1} \\ {}^a_{AS}N_{xyN-1} \\ {}^b_{AS}N_{xyN-1} \\ {}^b_{AS}N_{yN-1} \\ {}^a_{AS}N_{xN} \\ {}^b_{AS}N_{xyN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{AS}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

La matrice de rigidité pour la contribution antisymétrique-symétrique s'écrit :

$$[\mathbf{K}_{AS}] = [\mathbf{H}_{AS}] \cdot [\mathbf{G}_{AS}]^{-1} \quad (4.68)$$

Contribution symétrique-antisymétrique :

L'équation (4.42) pour le cas symétrique-antisymétrique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U_{SA}(1, \eta) \\ V_{SA}(1, \eta) \\ U_{SA}(\xi, 1) \\ V_{SA}(\xi, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N {}^a_{SA}U_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\ {}^a_{SA}V_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{SA}V_n \cos(n\pi\eta) \\ {}^b_{SA}U_0 + \sum_{n=1}^{N-1} {}^b_{SA}U_n \cos(n\pi\xi) \\ \sum_{n=1}^N {}^b_{SA}V_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SA}V_0 \\
 {}^b_{SA}U_0 \\
 {}^a_{SA}U_1 \\
 {}^a_{SA}V_1 \\
 {}^b_{SA}U_1 \\
 {}^b_{SA}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{SA}U_{N-1} \\
 {}^a_{SA}V_{N-1} \\
 {}^b_{SA}U_{N-1} \\
 {}^b_{SA}V_{N-1} \\
 {}^a_{SA}U_N \\
 {}^b_{SA}V_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b V_{SA}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a U_{SA}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{SA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{SA}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{SA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{SA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b U_{SA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-b}^b V_{SA}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a U_{SA}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a V_{SA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b U_{SA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a V_{SA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

En intégrant les constantes d'intégrations, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SA}V_0 \\
 {}^b_{SA}U_0 \\
 {}^a_{SA}U_1 \\
 {}^a_{SA}V_1 \\
 {}^b_{SA}U_1 \\
 {}^b_{SA}V_1 \\
 \vdots \\
 {}^a_{SA}U_{N-1} \\
 {}^a_{SA}V_{N-1} \\
 {}^b_{SA}U_{N-1} \\
 {}^b_{SA}V_{N-1} \\
 {}^a_{SA}U_N \\
 {}^b_{SA}V_N
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}](1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{11}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}H_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{21}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}H_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

De même pour les forces :

$$\begin{pmatrix}
 N_{xSA}(1, \eta) \\
 N_{xySA}(1, \eta) \\
 N_{xySA}(\xi, 1) \\
 N_{ySA}(\xi, 1)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 {}^a_{SA}N_{x0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^a_{SA}N_{xn} \cos(n\pi\eta) \\
 \sum_{n=1}^N {}^a_{SA} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) \\
 \sum_{n=1}^N {}^b_{SA}N_{xyn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \\
 {}^b_{SA}N_{y0} + \sum_{n=1}^N {}^b_{SA}N_{yn} \cos(n\pi\xi)
 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

avec :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SA}N_{x0} \\
 {}^b_{SA}N_{y0} \\
 {}^a_{SA}N_{x1} \\
 {}^a_{SA}N_{xy1} \\
 {}^b_{SA}N_{xy1} \\
 {}^b_{SA}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{SA}N_{xN-1} \\
 {}^a_{SA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SA}N_{yN-1} \\
 {}^a_{SA}N_{xyN} \\
 {}^b_{SA}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b N_{xSA}(1, \eta) d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a N_{ySA}(1, \xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xSA}(1, \eta) \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xySA}(1, \eta) \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xySA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{ySA}(\xi, 1) \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots \\
 \int_{-b}^b N_{xSA}(1, \eta) \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b N_{xySA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xySA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-a}^a N_{ySA}(\xi, 1) \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b N_{xySA}(1, \eta) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a N_{xySA}(\xi, 1) \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

En intégrant les constantes d'intégrations pour le vecteur force, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^a_{SA}N_{x0} \\
 {}^b_{SA}N_{y0} \\
 {}^a_{SA}N_{x1} \\
 {}^a_{SA}N_{xy1} \\
 {}^b_{SA}N_{xy1} \\
 {}^b_{SA}N_{y1} \\
 \vdots \\
 {}^a_{SA}N_{xN-1} \\
 {}^a_{SA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SA}N_{xyN-1} \\
 {}^b_{SA}N_{yN-1} \\
 {}^a_{SA}N_{xyN} \\
 {}^b_{SA}N_{xyN}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] d\eta \\
 \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}](1, \xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] \cos(\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] \cos(\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}] \cos(\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] \cos(\pi\xi) d\xi \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] \cos((N-1)\pi\eta) d\eta \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-3)\pi\xi}{2}\right) d\xi \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] \cos((N-1)\pi\xi) d\xi \\
 \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{11}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-b}^b [{}^{SA}G_{1M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\eta}{2}\right) d\eta \\
 \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{21}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-a}^a [{}^{SA}G_{2M}] \sin\left(\frac{(2N-1)\pi\xi}{2}\right) d\xi
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 \vdots \\
 A_N \\
 B_N \\
 C_N \\
 D_N
 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Les deux expressions (4.71) et (4.74) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SA}V_0 \\ {}^b_{SA}U_0 \\ {}^a_{SA}U_1 \\ {}^a_{SA}V_1 \\ {}^b_{SA}U_1 \\ {}^b_{SA}V_1 \\ \vdots \\ {}^a_{SA}U_{N-1} \\ {}^a_{SA}V_{N-1} \\ {}^b_{SA}U_{N-1} \\ {}^b_{SA}V_{N-1} \\ {}^a_{SA}U_N \\ {}^b_{SA}V_N \end{pmatrix} = [\mathbf{H}_{SA}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

$$\begin{pmatrix} {}^a_{SA}N_{x0} \\ {}^b_{SA}N_{y0} \\ {}^a_{SA}N_{x1} \\ {}^a_{SA}N_{xy1} \\ {}^b_{SA}N_{xy1} \\ {}^b_{SA}N_{y1} \\ \vdots \\ {}^a_{SA}N_{xN-1} \\ {}^a_{SA}N_{xyN-1} \\ {}^b_{SA}N_{xyN-1} \\ {}^b_{SA}N_{yN-1} \\ {}^a_{SA}N_{xyN} \\ {}^b_{SA}N_{xyN} \end{pmatrix} = [\mathbf{G}_{SA}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

La matrice de rigidité pour la contribution symétrique-antisymétrique s'écrit :

$$[\mathbf{K}_{SA}] = [\mathbf{H}_{SA}] \cdot [\mathbf{G}_{SA}]^{-1} \quad (4.77)$$

4.3.6 Matrice de rigidité globale

Après avoir déterminé les matrices de rigidité pour chaque contribution, la matrice de rigidité globale est construite comme suit :

$$\begin{pmatrix} [K_{SS}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{AA}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{SA}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{AS}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{SS} \\ U_{AA} \\ U_{SA} \\ U_{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{SS} \\ F_{AA} \\ F_{SA} \\ F_{AS} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

La dimension de la matrice de raideur dynamique de membrane est $16N \times 16N$.

Lors de la validation de la méthode des éléments continus avec la méthode des éléments finis, les champs inconnus $U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$, $N_x(\xi, \eta)$, $N_y(\xi, \eta)$ et $N_{xy}(\xi, \eta)$ présentent la superposition des contributions exprimées sur les quatre bords de la plaque. En outre, les efforts des cotés (1) et (2) sont opposés par rapport des cotés (3) et (4). Les projections du vecteur déplacement sont définies, ainsi, par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} {}^1U_{S0} \\ {}^1V_{xS0} \\ {}^2U_{S0} \\ {}^2V_{yS0} \\ {}^3U_{S0} \\ {}^3V_{xS0} \\ {}^4U_{S0} \\ {}^4V_{yS0} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Pour les efforts :

$$F_0 = \begin{pmatrix} {}^1N_{xS0} \\ {}^1N_{xyS0} \\ {}^2N_{xyS0} \\ {}^2N_{yS0} \\ {}^3N_{xS0} \\ {}^3N_{xyS0} \\ {}^4N_{xy0} \\ {}^4N_{yS0} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Pour le cas général :

$$U_k = \begin{pmatrix} {}^1U_{Sk} \\ {}^1U_{Ak} \\ {}^1V_{Sk} \\ {}^1V_{Ak} \\ {}^2U_{Sk} \\ {}^2U_{Ak} \\ {}^2V_{Sk} \\ {}^2V_{Ak} \\ {}^3U_{Sk} \\ {}^3U_{Ak} \\ {}^3V_{Sk} \\ {}^3V_{Ak} \\ {}^4U_{Sk} \\ {}^4U_{Ak} \\ {}^4V_{Sk} \\ {}^4V_{Ak} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Et :

$$F_k = \begin{pmatrix} {}^1N_{xSk} \\ {}^1N_{xAk} \\ {}^1N_{xySk} \\ {}^1N_{xyAk} \\ {}^2N_{xySk} \\ {}^2N_{xyAk} \\ {}^2N_{ySk} \\ {}^2N_{yAk} \\ {}^3N_{xSk} \\ {}^3N_{xAk} \\ {}^3N_{xySk} \\ {}^3N_{xyAk} \\ {}^4N_{xySk} \\ {}^4N_{xyAk} \\ {}^4N_{ySk} \\ {}^4N_{yAk} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

1, 2, 3 et 4 présentent les bords de la plaque comme indiqué sur la figure (3.5).
En suivant la démarche décrite pour la flexion, on peut déterminer la relation qui relie les composantes des vecteurs U^{JJ} avec celles des vecteurs U^k :

$$\begin{pmatrix} U^{SS} \\ U^{AA} \\ U^{SA} \\ U^{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0^{SS} \\ U_1^{SS} \\ \vdots \\ U_N^{SS} \\ U_0^{AA} \\ U_1^{AA} \\ \vdots \\ U_N^{AA} \\ U_0^{SA} \\ U_1^{SA} \\ \vdots \\ U_N^{SA} \\ U_0^{AS} \\ U_1^{AS} \\ \vdots \\ U_N^{AS} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{SS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SSN}] \\ [\mathbf{T}_{AA1}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{AAN}] \\ [\mathbf{T}_{SA0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SAN}] \\ [\mathbf{T}_{AS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{ASN}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{T}] \cdot \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

De même, pour les forces :

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ F^1 \\ \vdots \\ F^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{SS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SSN}] \\ [\mathbf{T}_{AA1}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{AAN}] \\ [\mathbf{T}_{SA0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{SA1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{SAN}] \\ [\mathbf{T}_{AS0}] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{T}_{AS1}] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\mathbf{T}_{ASN}] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_0^{SS} \\ F_1^{SS} \\ \vdots \\ F_N^{SS} \\ F_0^{AA} \\ F_1^{AA} \\ \vdots \\ F_N^{AA} \\ F_0^{SA} \\ F_1^{SA} \\ \vdots \\ F_N^{SA} \\ F_0^{AS} \\ F_1^{AS} \\ \vdots \\ F_N^{AS} \end{pmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} F_0^{SS} \\ F_1^{SS} \\ \vdots \\ F_N^{SS} \\ F_0^{AA} \\ F_1^{AA} \\ \vdots \\ F_N^{AA} \\ F_0^{SA} \\ F_1^{SA} \\ \vdots \\ F_N^{SA} \\ F_0^{AS} \\ F_1^{AS} \\ \vdots \\ F_N^{AS} \end{pmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} F_{mSS} \\ F_{mAA} \\ F_{mSA} \\ F_{mAS} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Les relations (4.83) et (4.84) permettent de déterminer la matrice de raideur dynamique de membrane qui relie les vecteurs U_k et F_k .

$$[\mathbf{K}(\omega)] = \frac{1}{2} [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} [K_{SS}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{AA}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{SA}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{AS}] \end{pmatrix} [\mathbf{T}] \quad (4.85)$$

La matrice d'expansion $[\mathbf{T}]$ est présentée dans l'annexe B2.

4.4 Validation par la méthode des éléments finis

Après avoir fait une étude analytique de la réponse harmonique d'une plaque orthotrope, une comparaison a été effectuée entre les résultats issus de notre modèle et ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Le tableau (4.4) présente les propriétés matérielles et géométriques choisies pour les cas tests.

La validation est menée pour différents types de chargement. Ce sont successivement :

- un chargement symétrique-symétrique ;
- un chargement réparti sur le bord défini par $\xi = 1$;
- un chargement ponctuel.

TABLE 4.4 – Propriétés matérielles et géométriques de la plaque orthotrope

Module d'Young suivant x	$E_x = 18.1$ GPa
Module d'Young suivant y	$E_y = 50.9$ GPa
Module de cisaillement	$G_{xy} = 11$ GPa
Coefficient de Poisson	$\nu_{xy} = 0.8$
Masse volumique	$\rho = 1526$ kg/m ³
Longueur de la plaque (2a)	$L = 1$ m
Largeur de la plaque (2b)	$l = 0.5$ m
L'épaisseur	$h = 0.002$ m

4.4.1 Chargement symétrique-symétrique

Pour la contribution symétrique-symétrique, la force symétrique-symétrique est présentée dans le plan pour $\xi = 1$ et $\xi = -1$, elle est définie comme suit :

$$F_x(1, \eta) = F_x(-1, \eta) = 1 \quad (4.86)$$

La figure ci-dessous présente la localisation de cet effort dans ce cas pour des conditions aux limites convenables.

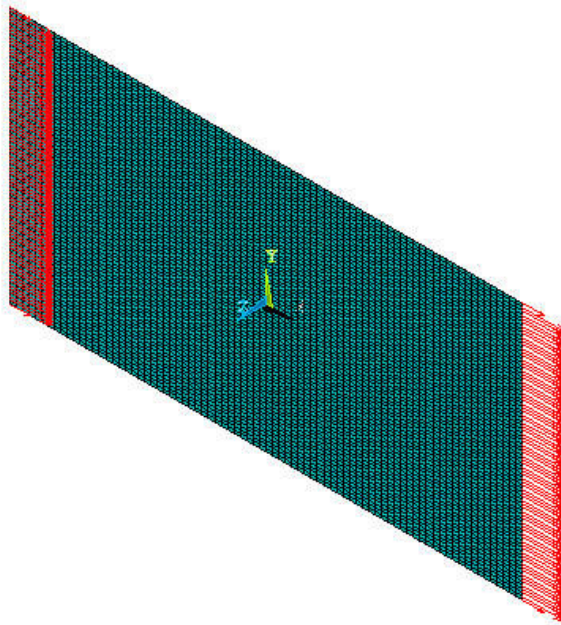


FIGURE 4.2 – Chargement symétrique-symétrique

La projection de ce chargement sur les fonctions de base permet d'obtenir :

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos(n\pi\eta) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

La réponse est calculée pour $n = 9$ au point A de coordonnées (1,0) comme suit :

$$U(1,0) = a_{SS}U_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_{SS}U_n \quad (4.88)$$

La réponse obtenue pour un chargement symétrique-symétrique par la méthode des éléments continus est validée avec la méthode des éléments finis pour différents maillages et pour une bande de fréquences [0 10000] Hz. Cette structure est maillée à l'aide d'un élément à 4 nœuds (Shell 63) et six degrés de libertés par nœud. La figure suivante présente la comparaison des courbes de réponse obtenues par la méthode des éléments finis et par celle des éléments continus.

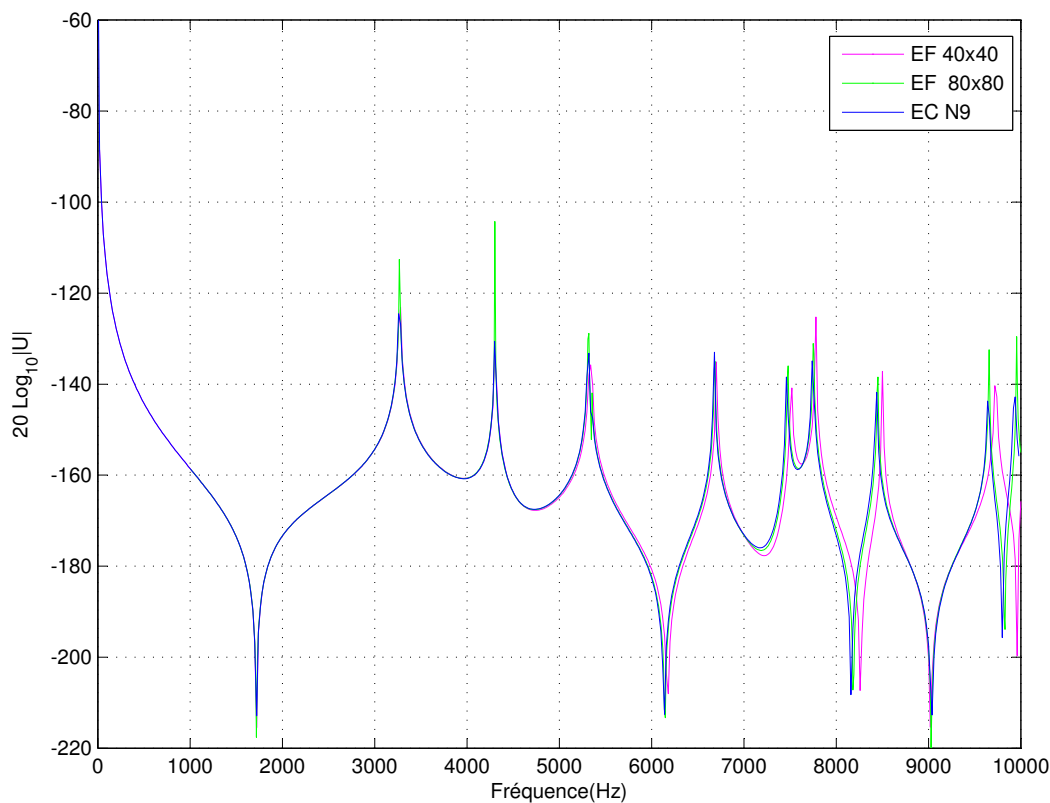


FIGURE 4.3 – Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique

Les résultats obtenus par la méthode des éléments continus convergent avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis pour une plage de fréquences qui varie entre $[0, 6000]$ Hz. Au-delà de 6000 Hz, la précision de la méthode des éléments finis diminue du fait d'un maillage trop grossier. La figure (4.4) présente la réponse harmonique pour une bande de fréquences $[8000, 9000]$ Hz en utilisant un maillage de plus en plus fin. La convergence des deux méthodes est ainsi mise en évidence.

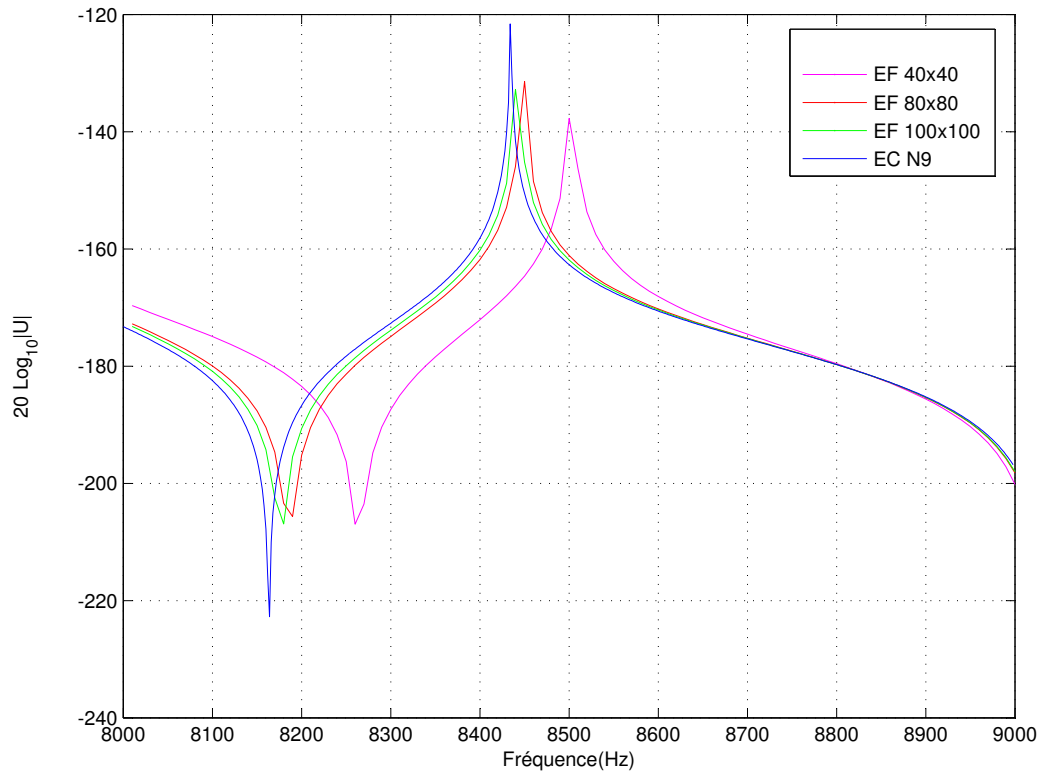


FIGURE 4.4 – Réponse harmonique pour une bande de fréquences $[8000 \text{ Hz}, 9000 \text{ Hz}]$

Le temps de calcul joue un rôle important dans un contexte industriel. Le tableau suivant présente les performances de la méthode des éléments continus vis à vis de la méthode des éléments finis.

Modèle	Temps calculé pour 1 fréquence
1 MEC	0.014 s
20 × 20 MEF	0.015 s
40 × 40 MEF	0.069 s
80 × 80 MEF	0.45 s
100 × 100 MEF	1.2 s

TABLE 4.5 – Temps calculé

4.4.2 Réponse harmonique pour un chargement réparti unilatéral

La figure (4.5) présente le cas d'une force répartie sur le côté défini par $\xi = 1$.

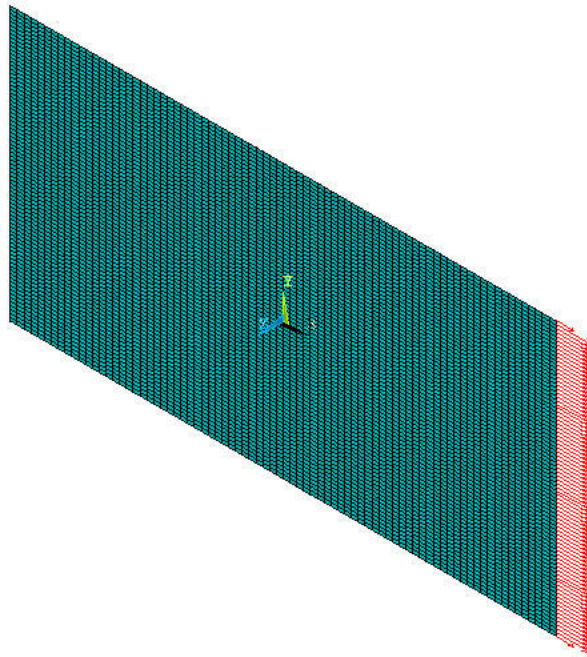


FIGURE 4.5 – Force répartie unilatérale

Le développement en série de Fourier est donné par :

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos(n\pi\eta) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

La réponse est calculée pour $n = 9$ au point A de coordonnées (1,0) comme suit :

$$U(1,0) = {}^1U_{S0} + \sum_{n=1}^{N-1} {}^1U_{Sn} \quad (4.90)$$

La figure (4.6) présente une comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments continus avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis pour différents maillages et pour une plage de fréquences de [0, 10000] Hz. Le maillage utilisé est quadratique selon différentes finesses de maillage.

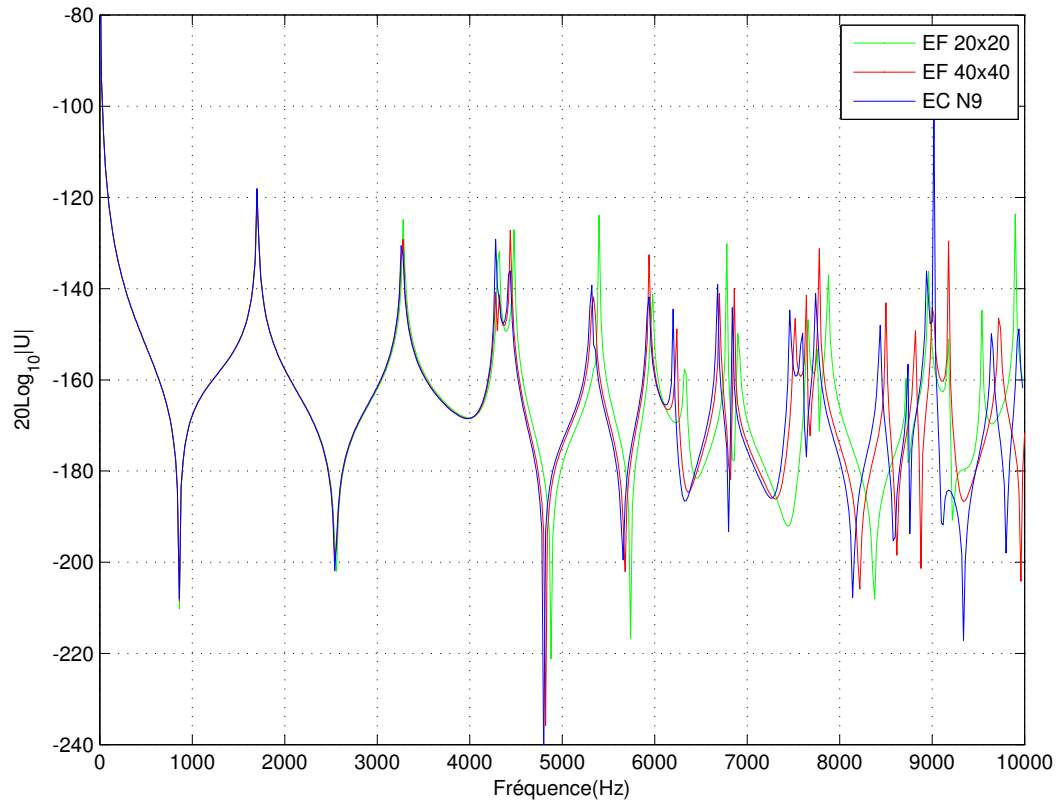


FIGURE 4.6 – Réponse harmonique pour un chargement réparti unilatéral

On observe sur la figure (4.6) une convergence entre la méthode des éléments finis et celle des éléments continus. Cependant, la convergence au-delà de la fréquence 5000 Hz n'est plus assurée du fait d'un maillage EF trop grossier. La figure (4.7) présente la réponse sur la plage de fréquences [8000 Hz, 9000 Hz] avec des maillages EF plus fins.

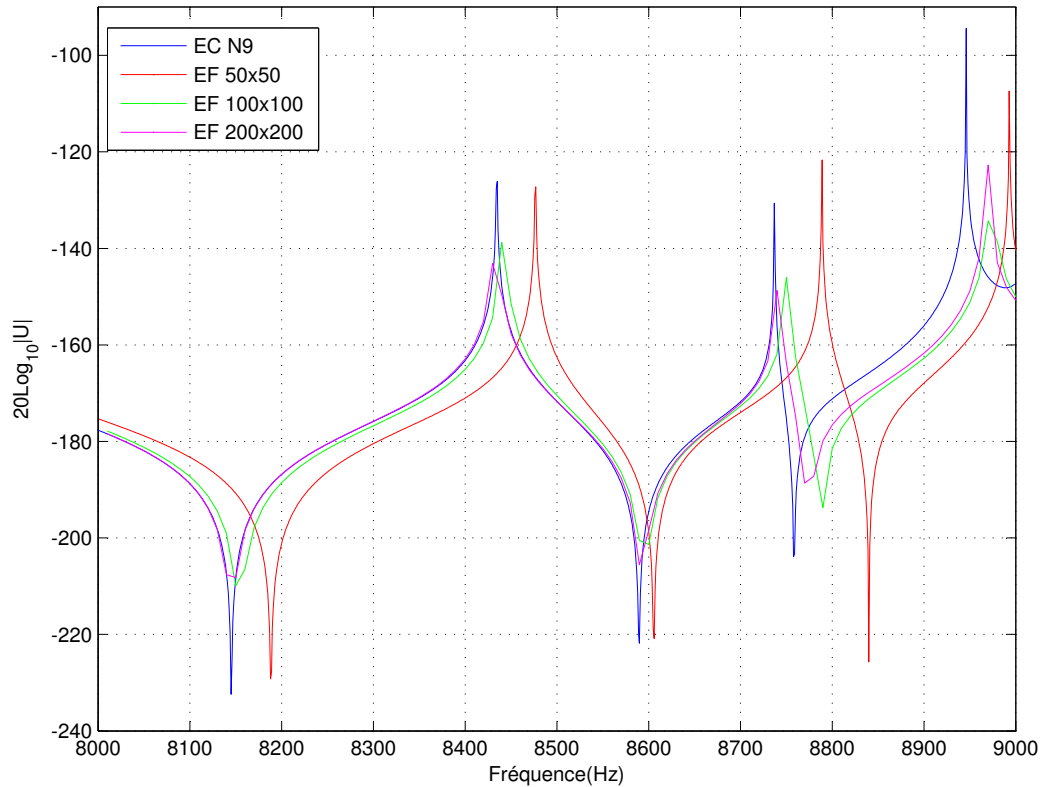


FIGURE 4.7 – Réponse harmonique sur [8000 Hz, 9000 Hz]

D'après la figure (4.7), on remarque que la courbe obtenue pour un maillage 200×200 converge vers celle obtenue par la méthode des éléments continus.

4.4.3 Réponse harmonique pour un chargement ponctuel

La prochaine étape consiste à valider la méthode des éléments continus avec celle des éléments finis pour une force ponctuelle localisée en point B (1,1). L'intérêt d'un tel chargement est de solliciter tous les harmoniques et toutes les contributions.

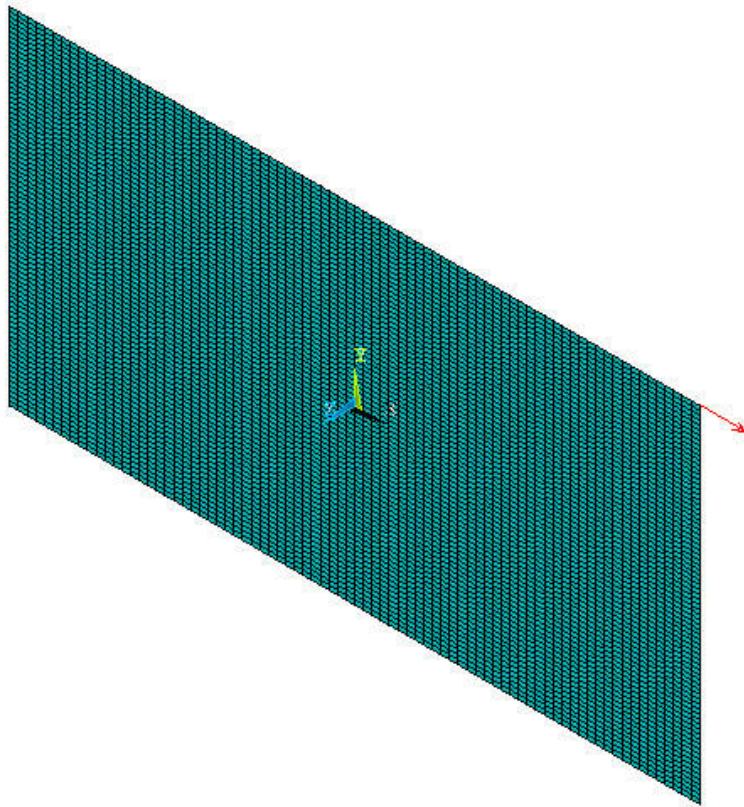


FIGURE 4.8 – Chargement ponctuel en point B(1,1)

La projection de la force ponctuelle sur les bases de fonction est définie par l'équation (4.91).

$$\begin{cases} F_0 = \frac{1}{2b} \\ F_m^S = \frac{(-1)^n}{b} \\ F_m^A = -\frac{(-1)^n}{b} \end{cases} \quad (4.91)$$

La réponse harmonique au point B (1,1) est exprimée par :

$$U(1,1) = {}^1U_{S0} + \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n1} U_{Sn} \quad (4.92)$$

La figure (4.9) présente une comparaison entre des résultats obtenus par la méthode analytique et la méthode numérique pour des maillages (20x20) et (40x40) et pour une plage de fréquences de [0, 10000] Hz.

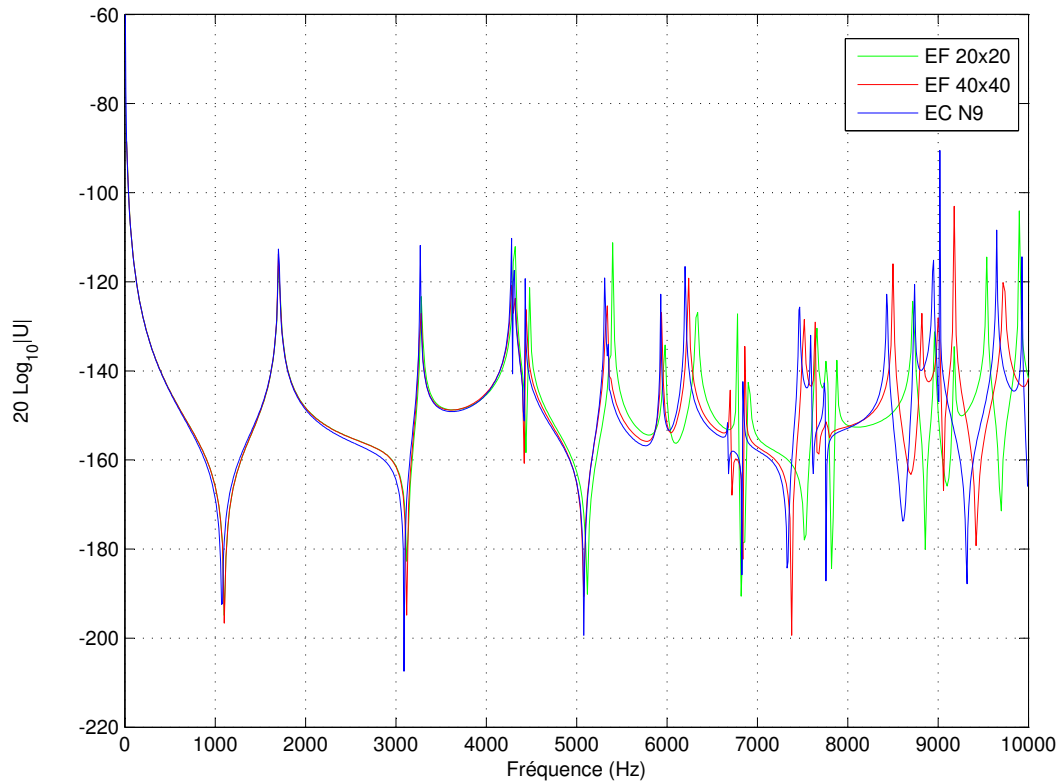


FIGURE 4.9 – Réponse harmonique pour un chargement ponctuel

Cette figure montre une convergence entre la méthode des éléments finis pour un maillage (40x40) et celle des éléments continus. Cependant, les deux courbes se divergent au delà de la fréquence 6000 Hz.

La figure (4.10) présente la réponse harmonique pour un chargement ponctuel au point B pour la plage de fréquences [7000, 8000] Hz :

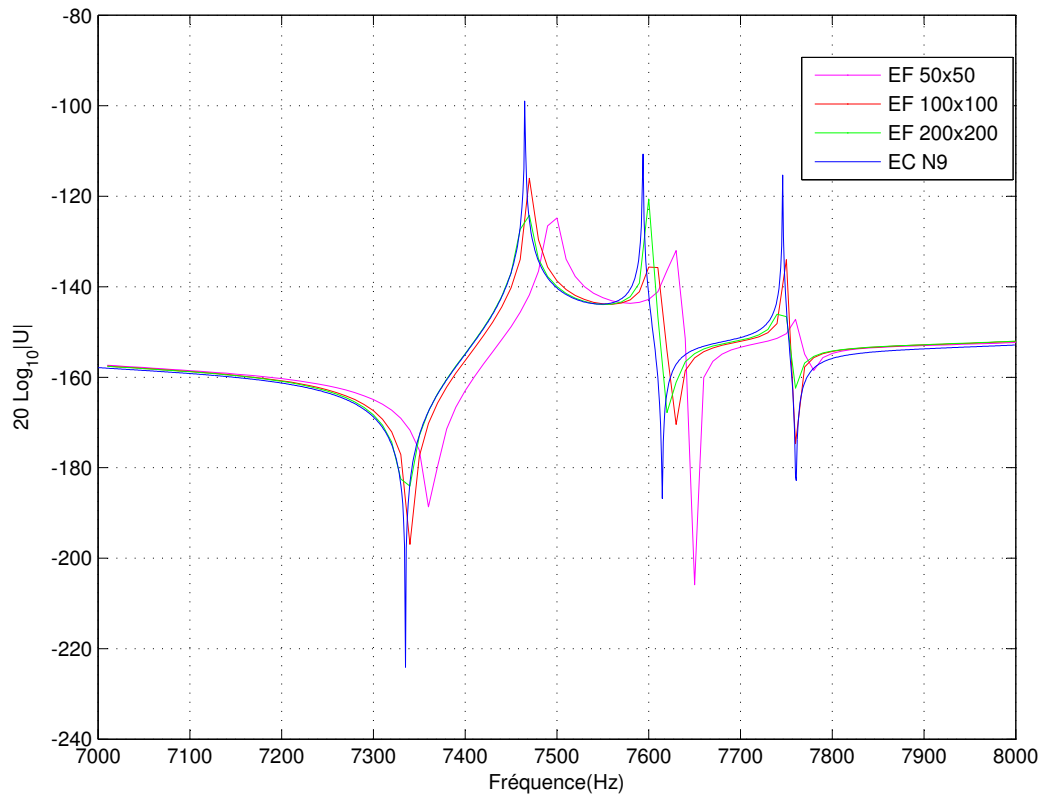


FIGURE 4.10 – Réponse harmonique sur [7000 8000]

Les courbes obtenues par la méthode des éléments finis convergent vers la courbe obtenue par la méthode des éléments continus. La nécessité d'affiner le maillage EF pour atteindre un niveau de précision équivalent est mise en évidence.

4.5 Conclusion

Ce chapitre présente le développement de la méthode des éléments continus dans le cas d'une plaque orthotrope relativement aux effets de membrane. L'approche est validée par comparaison des réponses harmoniques obtenues avec celles issues de modélisations éléments finis et ceci pour plusieurs cas de chargement.

L'élément de plaque orthotrope membrane/flexion non couplé est ainsi établi. Il servira de base à la construction d'un élément multicouche : c'est l'objectif du chapitre suivant.

5 Elément continu de plaque sandwich et multicouche

5.1 Introduction

Ce chapitre présente le travail principal de la thèse, à savoir, la formulation d'un élément continu de plaque multicouche et de plaque sandwich symétrique. Deux théories sont présentées :

- la théorie des plaques multicouches et sandwichs symétriques sous effet de flexion de Kirchhoff.
- la théorie des plaques multicouches et sandwichs symétriques sous effet de membrane.

Ce chapitre se décompose en deux parties distinctes :

- La première partie présente tout d'abord la procédure de construction de la matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche en utilisant, de la même façon qu'au deuxième chapitre, les équations de mouvement et le principe de superposition de Gorman pour le cas de la flexion de Kirchhoff. Enfin, elle se terminera par une validation de la méthode par comparaison de réponses harmoniques éléments finis. Le code de calcul *Abaqus* est utilisé pour cette validation.
- La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à une construction de la matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche sous effet membranaire. La validation est réalisée par comparaison de réponses harmoniques éléments finis obtenues par le code de calcul *Ansys* pour différents types de chargements.

5.2 Plaque sandwich et multicouche

5.2.1 Définition géométrique

L'élément présenté dans ce chapitre est un élément de plaque multicouche et sandwich symétrique. Ce type de plaque est caractérisé par un matériau constitué

d'un ensemble de plis. Le pli i a pour épaisseur h_i (voir figure 5.1). Le plan (O, x, y) est un plan de symétrie vis à vis de ces plis qui sont par ailleurs supposés parfaitement collés. Par ailleurs, on fera l'hypothèse que les directions d'orthotropie de chaque pli

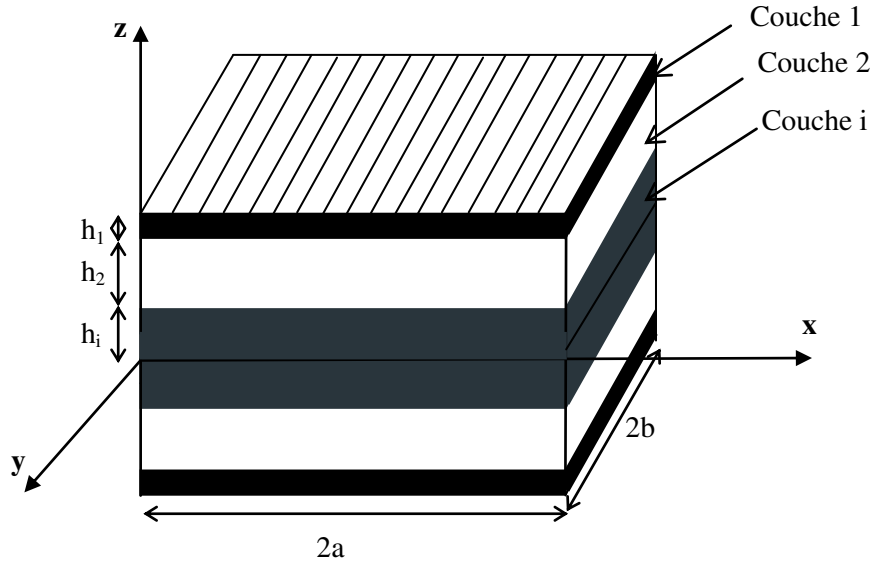


FIGURE 5.1 – Plaque multicouche

sont parallèles aux côtés de la plaque, c'est à dire confondus avec les axes x et y .

5.2.2 Relations contraintes-déformations

Les hypothèses cinématiques de la plaque multicouche en flexion sont les identiques à celles qui ont été présentées au chapitre 2. Les relations contraintes-déformations pour le cas d'une plaque multicouche symétrique de flexion s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x^{(i)} & Q_1^{(i)} & 0 \\ Q_1^{(i)} & Q_y^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{xy}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

σ_x , σ_y et σ_{xy} représentent les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy. $Q_x^{(i)}$, $Q_1^{(i)}$, $Q_y^{(i)}$ et $Q_{xy}^{(i)}$ sont des constantes matérielles du pli i . Elles sont définies par les

équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 Q_x^{(i)} &= \frac{E_1^i}{1-\nu_{12}^i \nu_{21}^i} \\
 Q_y^{(i)} &= \frac{E_2^i}{1-\nu_{12}^i \nu_{21}^i} \\
 Q_1^{(i)} &= \frac{\nu_{12}^i E_2^i}{1-\nu_{12}^i \nu_{21}^i} = \frac{\nu_{21}^i E_1^i}{1-\nu_{12}^i \nu_{21}^i} \\
 Q_{xy}^{(i)} &= G_{12}^i
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.3 Effort internes

Les efforts internes d'une plaque multicouche s'écrivent :

$$M = [H_f] \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

avec :

$$[H_f] = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{(i+1)}^3 - z_i^3) [H]_i \tag{5.4}$$

$[H]_i$ représente la matrice $[H]$ du pli i .

$$[H] = [T]^T [H_1] [T] \tag{5.5}$$

Les matrices $[T]$, $[H_1]$ et $[H]$ sont présentées en annexe C.

5.2.4 Equations du mouvement

Le principe de Hamilton permet de déterminer l'équation du mouvement d'une plaque multicouche ou sandwich sous l'effet de flexion, de la même façon qu'une plaque orthotrope en flexion. Cette équation dépend tout d'abord du nombre de plis et de leur matériau constitutif. Elle s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho_f \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{5.6}$$

avec :

$$\rho_f = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) \rho_i \tag{5.7}$$

ρ_i représente la masse volumique du pli i .

Les moments fléchissant M_x , M_y et M_{xy} sont définis par l'équation (5.3).

A partir des équations (5.3) et (5.6), l'équation de mouvement d'une plaque multicouche est donnée par l'expression 5.8 :

$$D_x^i \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{xy}^i \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y^i \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \rho_f \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (5.8)$$

avec : D_x^i , D_y^i et D_{xy}^i constantes qui dépendent des propriétés des matériaux du pli 'i'. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} D_x^i = - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) H_{ll}^i \\ D_y^i = - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) H_{tt}^i \\ D_{xy}^i = - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) H_{lt}^i - 4 \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) G_{lt}^i \end{cases} \quad (5.9)$$

En régime harmonique, le déplacement W s'écrit :

$$W(x, y, t) = W_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (5.10)$$

D'après les équations (5.8) et (5.10), on obtient :

$$D_x^i \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + D_{xy}^i \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y^i \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} = -\omega^2 \rho_f W_0 \quad (5.11)$$

5.2.5 Conditions aux limites

Les plis sont supposés parfaitement collés, ainsi, il y a absence de glissement entre les différents plis. Les conditions aux limites pour ce type de plaque en flexion en régime harmonique permettent d'imposer des efforts verticaux ou des moments fléchissant sur les bords de la plaque pour obtenir des conditions aux limites dites libre, c'est à dire libres de tout déplacement. Ces conditions définies dans le deuxième chapitre (3.16) restent les mêmes que dans le cas présent.

5.3 Matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche

En se référant au paragraphe (2.3), la formulation de la méthode des éléments continus est basée sur la résolution de l'équation de mouvement (5.6) pour chaque fréquence.

5.3.1 Décomposition de Gorman

La première étape de résolution consiste à décomposer le problème en quatre contributions. Ces contributions sont nommées symétrique-symétrique, antisymétrique-antisymétrique, antisymétrique-symétrique et symétrique-antisymétrique. Le champ de déplacement de la plaque multicouche W_m est décomposé comme indiqué dans l'expression suivante :

$$W_m(\xi, \eta) = W_{mSS}(\xi, \eta) + W_{mAA}(\xi, \eta) + W_{mAS}(\xi, \eta) + W_{mSA}(\xi, \eta) \quad (5.12)$$

5.3. MATRICE DE RAIDEUR DYNAMIQUE POUR UNE PLAQUE MULTICOUCHE

Les fonctions $W_{mSS}(\xi, \eta)$, $W_{mAA}(\xi, \eta)$, $W_{mSA}(\xi, \eta)$ et $W_{mAS}(\xi, \eta)$ représentent le déplacement pour chaque contribution. De même pour les rotations β_{mx} et β_{my} :

$$\beta_{xm}(\xi, \eta) = -\frac{\partial W_{mSS}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{mAA}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{mSA}(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial W_{mAS}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (5.13)$$

$$\beta_{ym}(\xi, \eta) = -\frac{\partial W_{mSS}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{mAA}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{mSA}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{mAS}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (5.14)$$

La méthode des éléments continus est ensuite menée par résolution de l'équation de mouvement (5.6) à l'aide de séries de Levy adaptées à chaque contribution.

Contribution symétrique-symétrique (SS)

Pour la contribution SS, le champ de déplacement W_{mSS} est symétrique par rapport ξ et η . Ce champ s'écrit alors :

$$W_{mSS}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} {}^1_{mSS} W_n(\xi) \cos n\pi\eta + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{mSS} W_n(\eta) \cos n\pi\xi \quad (5.15)$$

En introduisant l'équation (5.15) dans l'équation (5.11), on obtient :

$$\begin{cases} {}^1_{mSS} W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} + e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} + e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{mSS} W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} + e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} + e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (5.16)$$

Les racines complexes 1x_n , 2x_n , 3x_n et 4x_n sont données par :

$$\begin{cases} {}^1x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^2x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^3x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \\ {}^4x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (5.17)$$

Avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^{i2}} \phi^4 (n\pi)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y^i}{D_x^i} (n\pi)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{(n\pi)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x^i} \left(\frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^i} - D_y^i \right) - \frac{D_y^i}{D_x^i} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (5.18)$$

Contribution antisymétrique-antisymétrique

Comme pour le cas de la contribution SS, le problème se décompose aussi en deux sous problèmes à partir de la décomposition de Gorman. Le déplacement W_{mAA} s'écrit alors :

$$W_{mAA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^1_{mAA} W_n(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{mAA} W_n(\eta) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\right) \quad (5.19)$$

${}^1_{mAA}W_n$ et ${}^2_{mAA}W_n$ sont deux fonctions impaires. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} {}^1_{mAA}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} - e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} - e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{mAA}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} - e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} - e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (5.20)$$

avec :

$$\begin{cases} 1x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 2x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 3x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \\ 4x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (5.21)$$

et :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^{i2}} \phi^4 \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y^i}{D_x^i} \left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x^i} \left(\frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^i} - D_y^i \right) - \frac{D_x^i}{D_y^i} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (5.22)$$

Le paragraphe suivant présente la matrice de rigidité d'une plaque multicouche pour la contribution symétrique-antisymétrique.

Contribution symétrique-antisymétrique

Dans le cas symétrique-antisymétrique l'équation (5.15) devient :

$$W_{mSA}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^1_{mSA}W_n(\xi) \sin\left(\frac{2n-1\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{mSA}W_n(\eta) \cos n\pi\xi \quad (5.23)$$

${}^1_{mSA}W_n$ est une fonction paire et ${}^2_{mSA}W_n$ est une fonction impaire. Elles s'écrivent alors :

$$\begin{cases} {}^1_{mSA}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} + e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} + e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{mSA}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} - e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} - e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (5.24)$$

Les racines complexes sont définies par l'expression (5.25) :

$$\begin{cases} 1x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 2x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ 3x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \\ 4x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (5.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^{i2}} \phi^4 \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y^i}{D_x^i} \left(\frac{2n-1\pi\eta}{2} \right)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{(n\pi)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x^i} \left(\frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^i} - D_y^i \right) - \frac{D_x^i}{D_y^i} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (5.26)$$

Contribution antisymétrique-symétrique

Le déplacement W_{mAS} pour le cas antisymétrique-symétrique s'écrit :

$$W_{mAS}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} {}^1_{mAS}W_n(\xi) \cos n\pi\eta + \sum_{n=0}^{+\infty} {}^2_{mAS}W_n(\eta) \sin\left(\frac{2n-1\pi\xi}{2}\right) \quad (5.27)$$

${}^1_{mAS}W_n$ est une fonction impaire, par contre ${}^2_{mAS}W_n$ est une fonction paire, l'équation (5.15) s'écrit alors :

$$\begin{cases} {}^1_{mAS}W_n(\xi) = A_n \left(e^{1x_n\xi} - e^{-1x_n\xi} \right) + B_n \left(e^{2x_n\xi} - e^{-2x_n\xi} \right) \\ {}^2_{mAS}W_n(\eta) = C_n \left(e^{3x_n\xi} + e^{-3x_n\xi} \right) + D_n \left(e^{4x_n\xi} + e^{-4x_n\xi} \right) \end{cases} \quad (5.28)$$

avec :

$$\begin{cases} {}^1x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} (n\pi)^2 \pi^2 + \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^2x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2\phi^2 D_x^i} (n\pi)^2 \pi^2 - \frac{1}{\phi^4} \sqrt{\Delta_1} \\ {}^3x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 \left(\frac{2n-1\pi\xi}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \\ {}^4x_n^2 = \frac{D_{xy}^i}{2D_y^i} \phi^2 \left(\frac{2n-1\pi\xi}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{D_x^i}{D_y^i} \sqrt{\Delta_2} \end{cases} \quad (5.29)$$

et :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^{i2}} \phi^4 (n\pi)^4 \pi^4 - \phi^4 \left(\frac{D_y^i}{D_x^i} (n\pi)^4 \pi^4 + \phi^4 \lambda^4 \right) \\ \Delta_2 = \frac{(2n-1\pi\xi)^4 \pi^4 \phi^4}{D_x^i} \left(\frac{D_{xy}^{i2}}{4D_x^i} - D_y^i \right) - \frac{D_x^i}{D_y^i} \phi^4 \lambda^4 \end{cases} \quad (5.30)$$

5.3.2 Procédure de construction de la matrice de rigidité d'une plaque multicouche

Les procédures de construction de la matrice de rigidité d'une plaque ont été détaillées dans le paragraphe (3.3.2) du deuxième chapitre. Dans ce paragraphe, on présente une plaque constituée de 'n' plis comme étant une seule plaque orthotrope. \mathbf{K}_{mSS} , \mathbf{K}_{mAA} , \mathbf{K}_{mAS} et \mathbf{K}_{mSA} sont les matrices de raideurs dynamiques pour une plaque multicouche sous effet de flexion. Elles sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mSS}(\omega) &= \mathbf{G}_{mSS}(\omega) \mathbf{H}_{mSS}(\omega)^{-1} \\ \mathbf{K}_{mAA}(\omega) &= \mathbf{G}_{mAA}(\omega) \mathbf{H}_{mAA}(\omega)^{-1} \\ \mathbf{K}_{mAS}(\omega) &= \mathbf{G}_{mAS}(\omega) \mathbf{H}_{mAS}(\omega)^{-1} \\ \mathbf{K}_{mSA}(\omega) &= \mathbf{G}_{mSA}(\omega) \mathbf{H}_{mSA}(\omega)^{-1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.3.3 Matrice de rigidité de plaque multicouche en flexion

Le principe de la construction de la matrice de rigidité d'une plaque multicouche sous effet de flexion est le même que dans le cas d'une simple plaque orthotrope

présenté au paragraphe (3.3.3) du deuxième chapitre. Cette matrice est définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{mSS}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mAA}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mSA}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mAS}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{SS} \\ \mathbf{U}_{AA} \\ \mathbf{U}_{SA} \\ \mathbf{U}_{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{SS} \\ \mathbf{F}_{AA} \\ \mathbf{F}_{SA} \\ \mathbf{F}_{AS} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

L'équation (3.106) devient alors dans le cas d'une plaque multicouche :

$$[\mathbf{K}_m(\omega)] = \frac{1}{2} [\mathbf{T}]^T \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{mSS}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mAA}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mSA}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{mAS}] \end{pmatrix} [\mathbf{T}] \quad (5.33)$$

La matrice d'expansion $[\mathbf{T}]$ est donnée dans l'annexe A.

5.4 Validation numérique

Après avoir déterminé la matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche, la validation de cet élément s'effectue par une comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments continus avec ceux obtenus avec la méthode des éléments finis. La validation de cette plaque s'effectue pour trois types de chargement :

- Chargement symétrique ;
- Chargement réparti ;
- Chargement ponctuel.

5.4.1 Propriétés géométriques et matérielles

Les structures étudiées dans ce chapitre sont des plaques multicouches. Les plis sont constitué d'un Carbone/Epoxy orthotrope, d'un acier isotrope et d'un matériau léger constitutif du cœur du matériau sandwich décrit dans [90]. Les propriétés de ces matériaux sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Matériaux	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	ρ
Carbone/Epoxy	18.1	50.9	11	0.5	1526
Acier	$2.1 \cdot 10^2$	$2.1 \cdot 10^2$	$0.8077 \cdot 10^2$	0.3	7800
Matériau léger	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	0.01	97

TABLE 5.1 – Propriétés des matériaux

La géométrie est celle décrite sur la figure (5.1). Les dimensions sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Longueur de la plaque (2a)	$L = 1\text{m}$
Largeur de la plaque (2b)	$l = 0.5\text{m}$
L'épaisseur	$h = 0.002\text{m}$

TABLE 5.2 – Propriétés géométriques des plaques multicouches

5.4.2 Chargement symétrique

Un chargement symétrique transverse est appliqué sur une plaque sandwich constituée d'un cœur en acier et de deux peaux en Carbone/Epoxy orientée à 90° . Le cœur est deux fois plus épais que chacune des peaux. Le développement en série de Fourier pour ce type de chargement est donné par l'expression (5.34) :

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos(n\pi\eta) \Rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Ce chargement est celui représenté sur la figure 3.4.

La réponse harmonique transversale au point A(1, 0) est donnée par l'expression (5.35) :

$$W(1, 0) = \frac{a}{s_S} W_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a}{s_S} W_n \quad (5.35)$$

et est représentée sur la figure (5.2). Cette figure permet de comparer cette réponse avec les réponses harmoniques obtenues pour les modèles éléments finis pour différentes finesses de maillage (20x20), (50x50) et (100x100). Les résultats sont présentés pour la bande de fréquences [1, 1000] Hz.

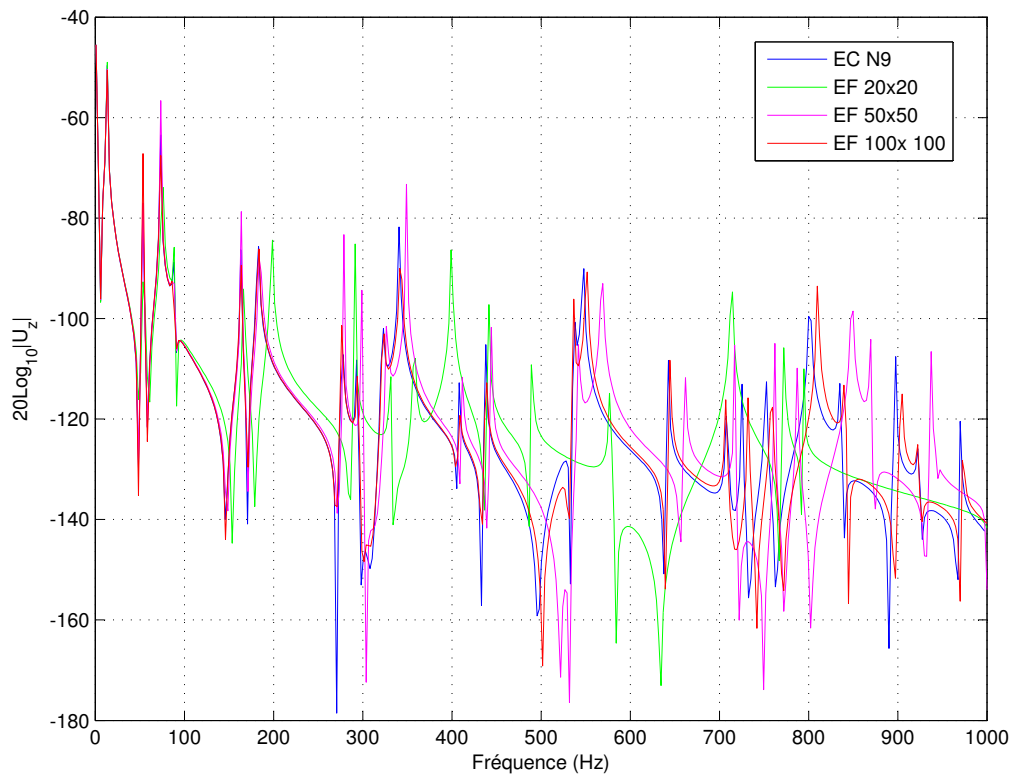


FIGURE 5.2 – Réponse harmonique pour une plaque sandwich sous chargement symétrique

On observe une excellente convergence des réponses EF vers celle obtenue par notre modèle. Cette observation est d’une part un élément de validation de la formulation et d’autre part met en évidence la nécessité d’affiner les maillages EF lorsque la fréquence augmente.

La rapidité de traitement numérique est également un point clé dans un contexte industriel d’avant-projet. Le tableau (5.3) permet de comparer les temps de calcul des formulations mises en œuvre.

Modèle	Temps de calcul pour 1 fréquence
1 MEC	0,03 s
20 × 20 MEF	0,06 s
50 × 50 MEF	0,6 s
100 × 100 MEF	1,5 s

TABLE 5.3 – Temps de calcul (chargement symétrique)

Ce tableau montre clairement le gain en temps de calcul obtenu par la formulation élément continu. A ce titre, le temps de calcul est 0,03 s pour la méthode des éléments continus contre 1,5 s pour la méthode des éléments finis.

5.4.3 Chargement réparti

Le deuxième cas traité est celui d'un chargement réparti sur le côté situé en $\xi = 1$. Le sandwich soumis à ce chargement est identique à celui du cas précédent. L'expression (5.36) donne le développement en série de Fourier de ce chargement.

$$F(1, \eta) = F_0 + \sum_{m=1}^M F_m^S \cos m\pi\eta + \sum_{m=1}^M F_m^A \sin (2m - 1)\frac{\pi}{2}\eta \quad (5.36)$$

avec : $F_0 = 1$ et $F_m^S = F_m^A = 0$.

Ce chargement est représenté sur la figure 3.12.

La réponse harmonique est calculée au point de coordonnée (1,1). Elle est donnée par l'expression (5.37) :

$$W(1, 1) = {}_{SS}^1 W_0 + {}_{AS}^1 W_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} ({}_{SS}^1 W_m + {}_{AS}^1 W_m - {}_{AA}^1 W_m - {}_{SA}^1 W_m) (-1)^m \quad (5.37)$$

La réponse harmonique obtenue par les modélisations éléments finis sont issues d'une résolution complète afin de maximiser la précision des résultats. La figure (5.3) présente les réponses harmoniques pour diverses modélisations EF et pour notre formulation. Plusieurs maillages EF ont été réalisés (20, 50, 100 éléments finis) de manière à observer la convergence des résultats.

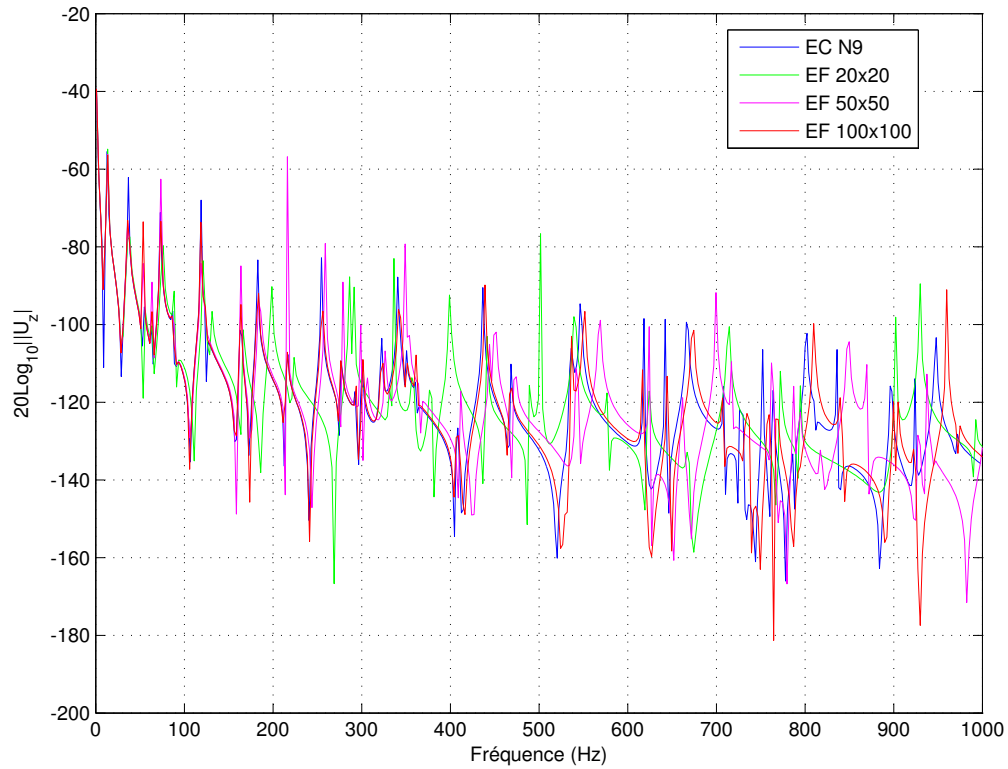


FIGURE 5.3 – Réponse harmonique pour une plaque multicouche pour un chargement réparti

La figure ci-dessus permet d’observer une bonne convergence des résultats EF vers ceux de notre modèle. En termes de temps de calcul, le gain est également significatif. Le tableau (5.4) présente les temps de calcul mesurés pour chaque approche. Ces temps ont été mesurés pour la plage de fréquences $[1, 1000]$ Hz discrétisée par 300 pas fréquentiels sur un PC Pentium cadencé à 2.53 GHz.

Modèle	Temps de calcul pour 300 fréquences
1 MEC	61.5 s
20×20 MEF	1.62 s
50×50 MEF	90 s
100×100 MEF	468 s

TABLE 5.4 – Temps de calcul pour 300 pas fréquentiels (chargement réparti)

5.4.4 Chargement ponctuel

Pour ce chargement, la plaque étudiée est un multicouche symétrique constitué de 5 plis superposés selon l'ordre suivant : carbone/époxy, acier, matériau léger, acier, carbone/époxy. L'épaisseur du pli en matériau léger est le double des quatre autres. Le pli en carbone/époxy est orienté à 90° .

Cette plaque est soumise à un chargement ponctuel appliqué au point C (1,1). Ce chargement est représenté mathématiquement par le développement en série de Fourier donné par l'expression (5.38) :

$$\begin{cases} Fz_0 = \frac{1}{2b} \\ Fz_m^S = \frac{(-1)^n}{b} \\ Fz_m^A = -\frac{(-1)^n}{b} \end{cases} \quad (5.38)$$

Ce chargement est représenté sur la figure 3.16. La validation est menée en comparant la réponse harmonique avec celle obtenue par la méthode des éléments finis. Cette courbe de réponse est donnée pour la plage de fréquences $[0, 1000]$ Hz. La figure (5.4) présente ces réponses.

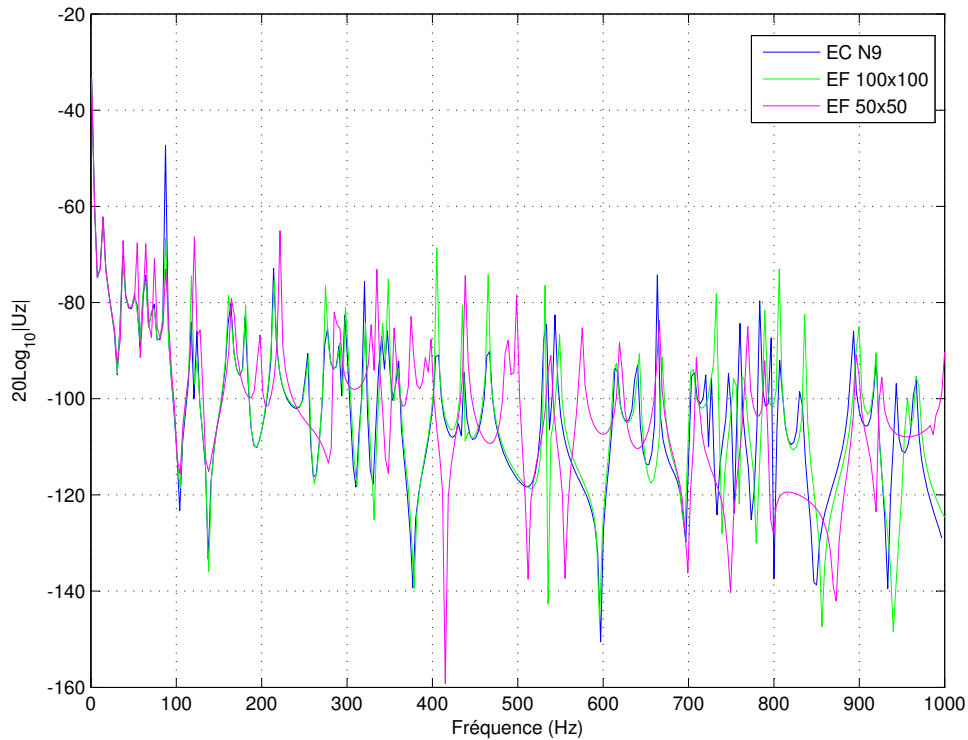


FIGURE 5.4 – Réponse harmonique de la plaque multicouche pour un chargement ponctuel

Une excellente convergence des résultats est encore observée lorsque le maillage EF s'affine.

5.5 Plaque multicouche sous effet de membrane

5.5.1 Définition géométrique et matérielle

La géométrie de la plaque multicouche est celle décrite dans la première partie de ce chapitre. Quatre matériaux seront utilisés pour la validation qui suivra. Ils sont définis dans le tableau (5.5) ci-dessous.

Matériaux	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	ρ
Matériau 1 (Carbone/Epoxy)	18.1	50.9	11	0.5	1526
Matériau 2 (acier)	$2.1 \cdot 10^2$	$2.1 \cdot 10^2$	$0.8077 \cdot 10^2$	0.3	7800
Matériau 3 (Graphite/Epoxy)	10.34	131	6.985	0.22	1627
Matériau léger	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$6.89 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	0.01	97

TABLE 5.5 – Propriétés des matériaux

5.5.2 Relations contraintes-déformations

La relation entre les composantes du tenseur des contraintes et des déformations est exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_x = D_x^i \epsilon_x + D_1^i \epsilon_y \\ \sigma_y = D_1^i \epsilon_x + D_y^i \epsilon_y \\ \sigma_{xy} = D_{xy}^i \epsilon_{xy} \end{cases} \quad (5.39)$$

σ_x , σ_y et σ_{xy} sont les composantes du tenseur des contraintes. ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} sont les composantes du tenseur des déformations. D_x^i , D_y^i et D_{xy}^i sont les constantes des matériaux. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} D_x^i = \frac{E_x^i}{1 - \nu_{xy}^i \nu_{yx}^i} \\ D_1^i = \frac{\nu_{xy}^i E_y^i}{1 - \nu_{xy}^i \nu_{yx}^i} = \frac{\nu_{yx}^i E_x^i}{1 - \nu_{xy}^i \nu_{yx}^i} \\ D_y^i = \frac{E_y^i}{1 - \nu_{xy}^i \nu_{yx}^i} \\ D_{xy}^i = G_{xy}^i \end{cases} \quad (5.40)$$

5.5.3 Efforts internes

Les efforts résultants pour le cas d'une plaque multicouche s'écrivent :

$$N_x = \sum_{i=1}^{N_c} (z_{i+1} - z_i) \sigma_x dz, \quad (5.41)$$

$$N_y = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) \sigma_y dz, \quad (5.42)$$

$$N_{xy} = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) \sigma_{xy} dz \quad (5.43)$$

La relation efforts-déplacements devient :

$$N_x = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) (D_x^i \frac{\partial u}{\partial x} + D_1^i \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (5.44)$$

$$N_y = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) (D_1^i \frac{\partial u}{\partial x} + D_y^i \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (5.45)$$

$$N_{xy} = \sum_{i=1}^{Nc} (z_{i+1} - z_i) (D_{xy}^i \frac{\partial u}{\partial y} + D_{xy}^i \frac{\partial v}{\partial x}) \quad (5.46)$$

5.5.4 Equations de mouvement

Les équations de l'équilibre dynamique pour une plaque multicouche sous effet de membrane sont données par l'expression (5.47) :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{Nc} \rho_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \sum_{i=1}^{Nc} \rho_i \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.47)$$

Par développement des efforts internes, l'équation de mouvement (5.47) devient :

$$\begin{cases} D_x^i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_1^i \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{Nc} \rho_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ D_y^i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_1^i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{Nc} \rho_i \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.48)$$

Dans le cas du régime harmonique, le temps est éliminé. D'après les équations (5.48) et (4.10), on peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} D_x^i \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D_1^i \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\rho \omega^2 U \\ D_y^i \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D_1^i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + D_{xy}^i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\rho \omega^2 V \end{cases} \quad (5.49)$$

5.6 Validation numérique de l'élément de plaque multicouche sous effet de membrane

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la validation de l'élément continu de plaque multicouche et sandwich sous effet de membrane. Cette validation a été menée pour les chargements suivants :

- Chargement symétrique ;
- Chargement réparti ;
- Chargement ponctuel.

5.6.1 Chargement symétrique

Un chargement symétrique est appliqué sur une plaque sandwich constituée d'un cœur carbone/époxy orienté à 90° et de deux peaux en acier. L'épaisseur du cœur est double de celle des peaux (Figure 5.5).

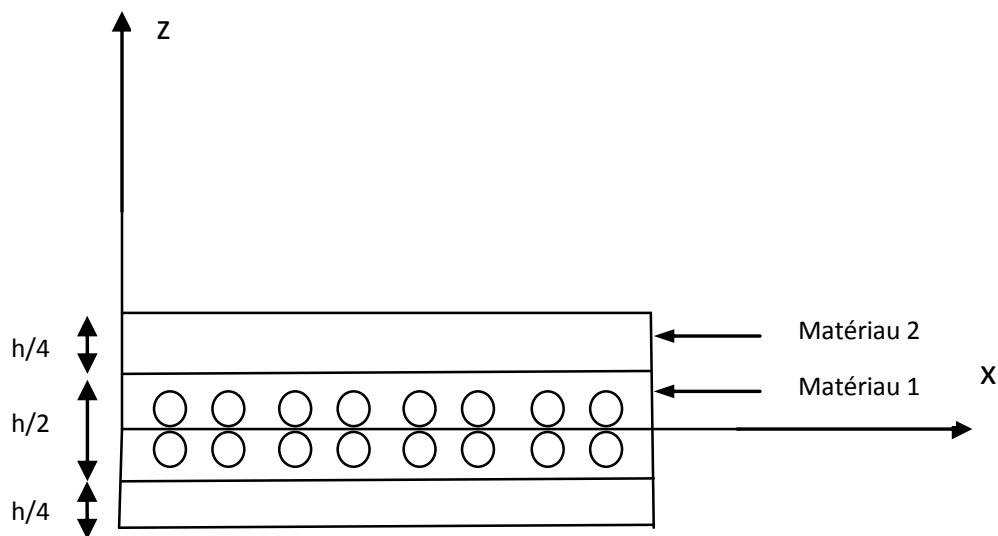


FIGURE 5.5 – Plaque sandwich acier/Carbone-Epoxy/acier

5.6. VALIDATION NUMÉRIQUE DE L'ÉLÉMENT DE PLAQUE MULTICOUCHE SOUS EFFET DE MEMBRANE

Les conditions aux limites pour cette plaque sont libres. La réponse harmonique de cette structure est déterminée au point $A(1, 0)$ sur la plage de fréquences $[0, 10000]$ Hz.

Le modèle des éléments finis exploite un élément de 8 nœuds à 4 degrés de liberté (shell 281). La courbe de réponse de ce modèle est obtenue par une résolution complète afin de maximiser la précision des résultats pour différents maillages (figure 5.6).

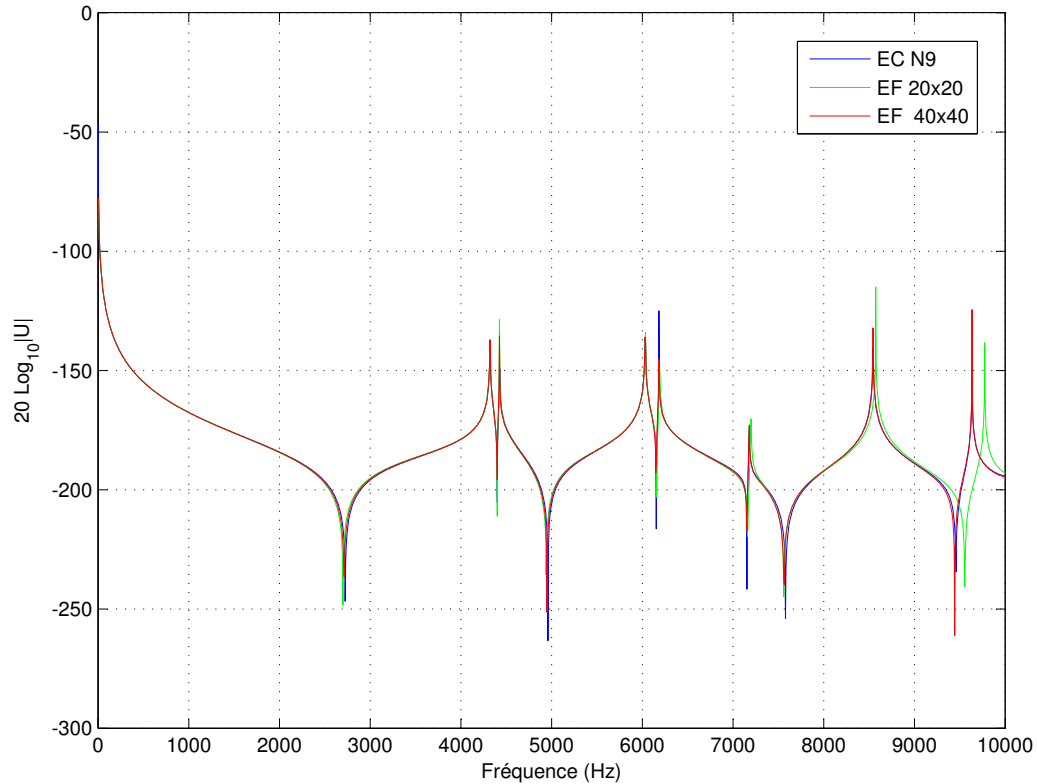


FIGURE 5.6 – Réponse harmonique de la plaque sandwich dans son plan pour un chargement symétrique

En comparant les deux courbes de la figure (5.6) obtenues par la MEC et la MEF pour un maillage (40x40), on constate une excellente convergence, ce qui conforte la validation de cet élément.

5.6.2 Chargement réparti

Pour le chargement réparti qui suit, on charge une plaque multicouche constituée de cinq plis et trois matériaux différents (deux matériaux orthotropes et un matériau isotrope). L'orientation des matériaux par rapport à l'axe x est $(90\ 0\ 90\ 0\ 90)$. Les épaisseurs des plis sont égales sauf pour le pli central qui est d'épaisseur double (figure 5.7).

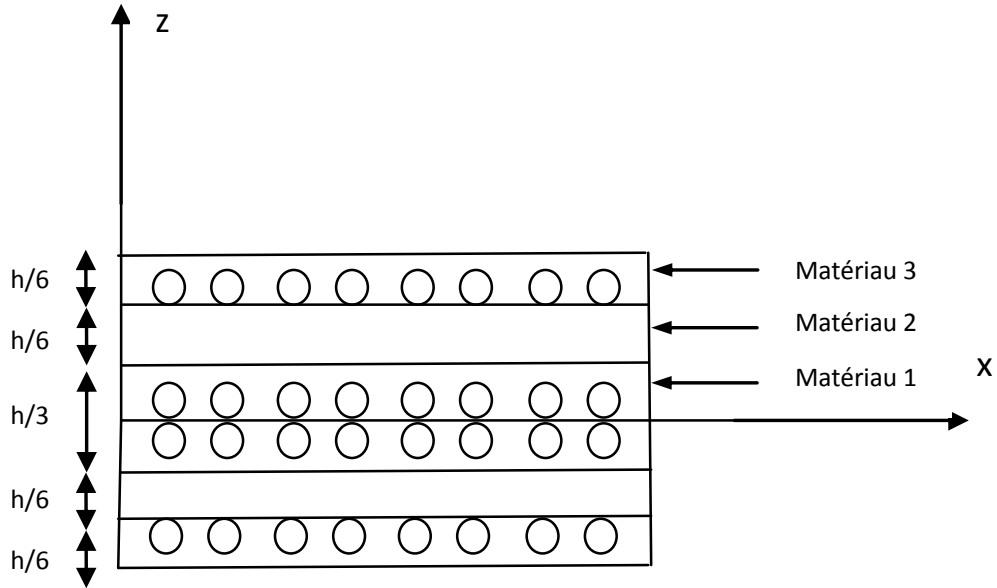


FIGURE 5.7 – Plaque multicouche à 5 plis et 3 matériaux

5.6. VALIDATION NUMÉRIQUE DE L'ÉLÉMENT DE PLAQUE MULTICOUCHE SOUS EFFET DE MEMBRANE

La figure suivante (5.8) présente les courbes des réponses obtenues par la méthode des éléments continus et la méthode des éléments finis.

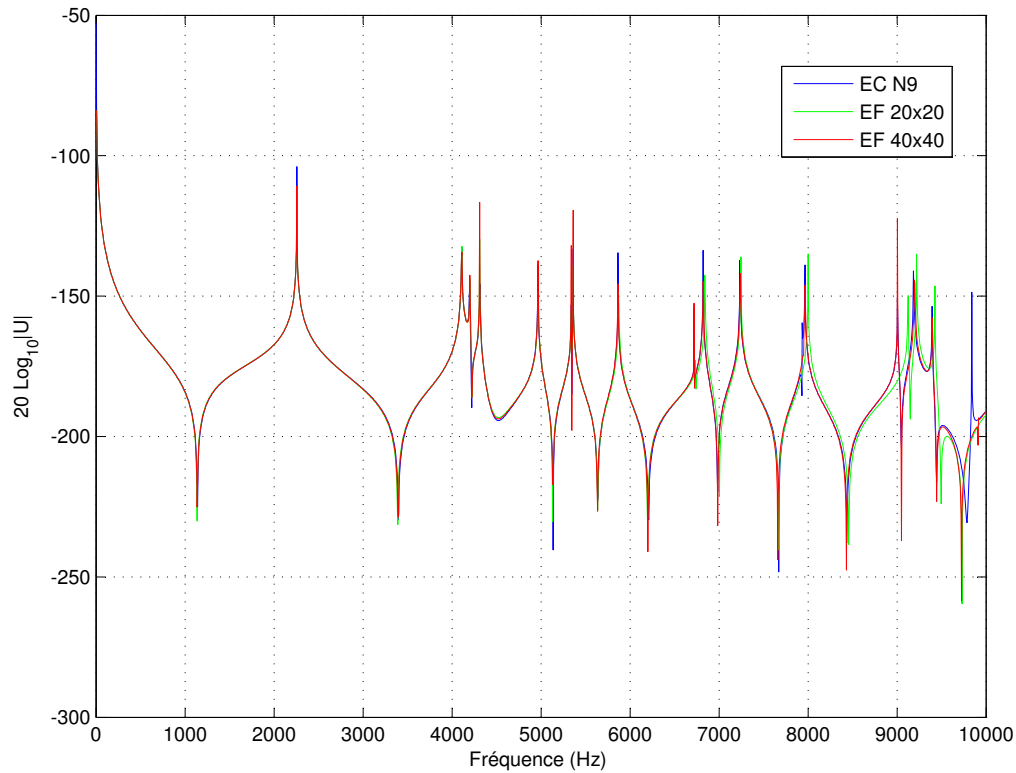


FIGURE 5.8 – Réponse harmonique du multicouche dans son plan pour un chargement réparti

Une bonne convergence des résultats est observée pour un maillage EF (40×40), ce qui conforte la validation de la formulation.

5.6.3 Chargement ponctuel

Pour le chargement ponctuel testé, on charge une plaque multicouche constituée de sept plis et quatre matériaux différents (deux matériaux orthotropes et deux matériaux isotropes). L'orientation des matériaux par rapport à l'axe x est $(0 \ 90 \ 0 \ 0 \ 0 \ 90 \ 0)$. Les épaisseurs des plis sont égales sauf pour le pli central qui est d'épaisseur double (figure 5.9).

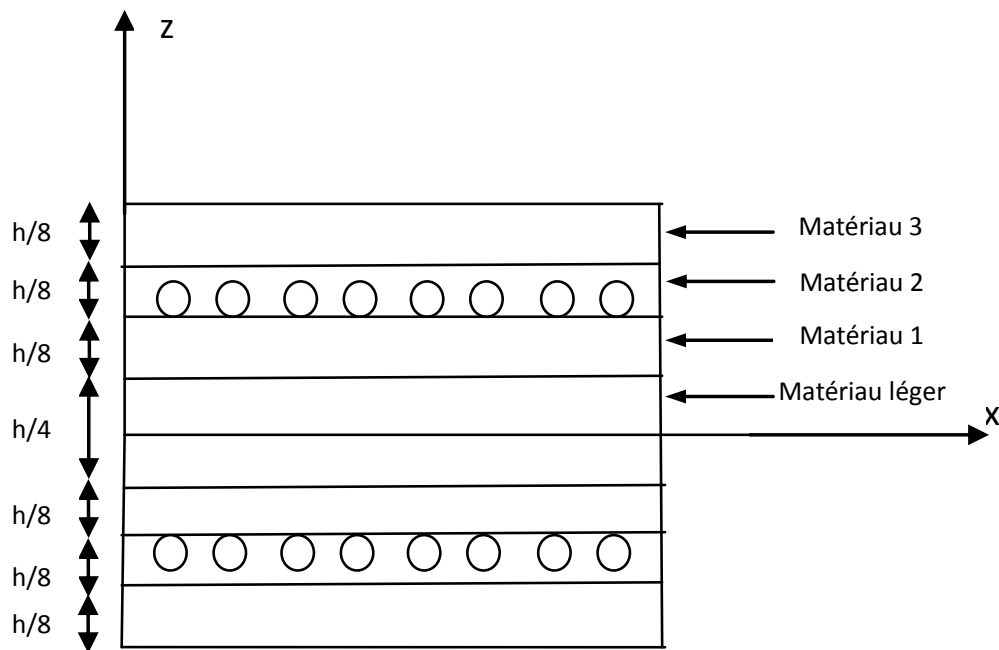


FIGURE 5.9 – Plaque multicouche à 7 plis et 4 matériaux

La courbe de réponse obtenue par la méthode des éléments continus est présentée sur la figure (5.10). Cette courbe est comparée avec les courbes de réponse obtenues par la méthode des éléments finis pour différents maillages.

5.6. VALIDATION NUMÉRIQUE DE L'ÉLÉMENT DE PLAQUE MULTICOUCHE SOUS EFFET DE MEMBRANE

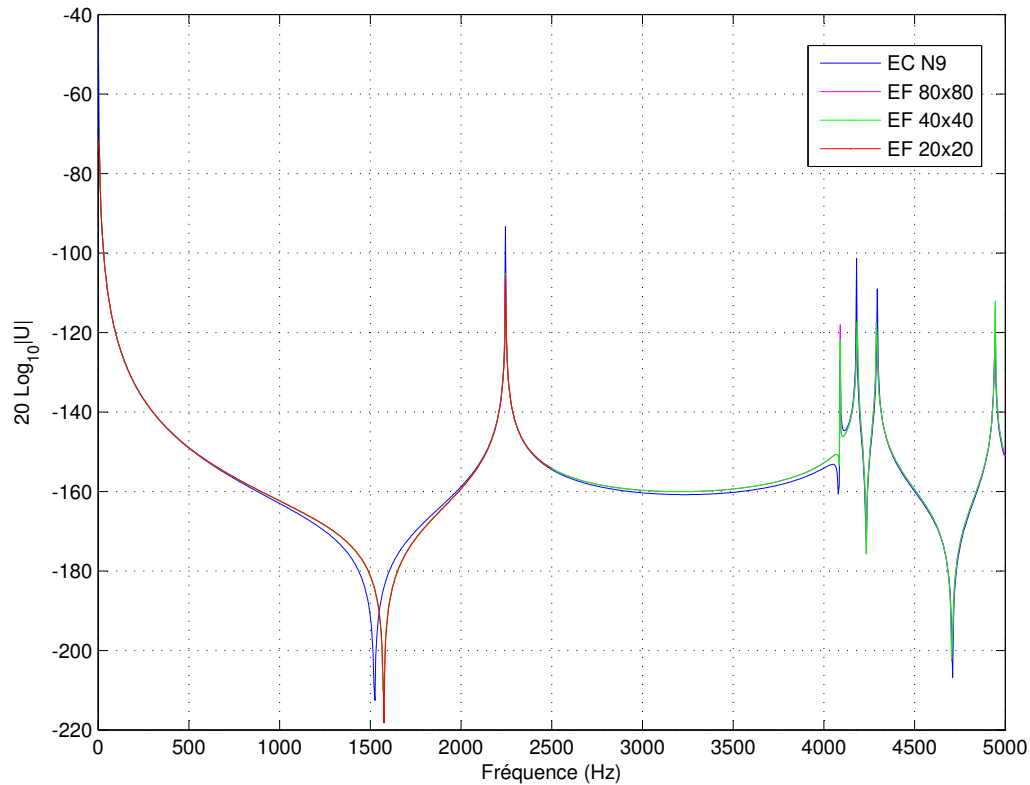


FIGURE 5.10 – Réponse harmonique pour une plaque multicouche à 7 plis dans son plan sous chargement ponctuel

La figure (5.10) présente une excellente convergence des résultats obtenus par EF avec ceux obtenus par EC. Ici encore, la nécessité de maillage est mise en évidence pour la méthode EF.

Le temps de calcul est aussi un critère de performance important. Le tableau ci-dessous détaille les temps de calcul nécessaires pour chaque méthode et pour chaque maillage.

Modèle	Temps calculé pour 1 fréquence
1 MEC	0.024 s
20 × 20 MEF	0.0328 s
40 × 40 MEF	0.12 s
80 × 80 MEF	0.444 s

TABLE 5.6 – Temps de calcul

5.7 Conclusion

Ce chapitre permet de fournir une présentation détaillée de la formulation de la matrice de rigidité dynamique de plaque multicouche et sandwich. La validation de la formulation présentée est faite en déterminant la réponse harmonique obtenue suite à l'application de différents types de chargements et en la comparant avec celle obtenue par la MEF.

6 Conclusion et perspectives

Jusqu'à aujourd'hui la méthode des éléments finis est la méthode la plus connue et la plus utilisée pour l'analyse vibratoire des structures simples ou complexes. Cependant, la précision des résultats obtenus par cette approche dépend de la finesse de maillage et du choix des fonctions d'interpolation. Ceci présente un problème puisque la discrétisation est corrélée à la gamme de fréquence d'étude. Dans ce cadre, nous avons présenté dans cette thèse de recherche un nouveau développement d'une méthode analytique de type meshless dénommée méthode des éléments continus. Cette approche est basée sur la résolution des équations d'équilibre de manière à construire une matrice de raideur dynamique dépendant de la fréquence du régime harmonique. Cette matrice relie le vecteur d'efforts généralisés au vecteur des déplacements généralisés. La précision de cette méthode ne dépend que du nombre de termes pris en compte dans le développement des solutions de l'équation du mouvement. Pour les éléments de plaques développés, il s'agit du nombre de termes dans des développements en série de Lévy.

Dans cette thèse, la méthode des éléments continus a été appliquée aux plaques sandwichs et multicouches symétriques. Deux matrices de raideurs dynamiques ont été établies : la première concerne l'élément de plaque multicouche de type Kirchhoff qui néglige les effets du cisaillement transversal et la seconde concerne l'élément de plaque multicouche ou sandwich sous effet de membrane. Ainsi, les courbes de réponses harmoniques obtenues par cette méthode analytique ont été confrontées avec celles obtenues par la méthode des éléments finis. Ces comparaisons ont pu montrer que la méthode développée permet de s'affranchir des problèmes de discrétisation. On a ainsi pu conclure que la méthode des éléments continus appliquée aux plaques sandwichs et multicouches constitue une approche efficace pour l'étude du comportement dynamique de ce type de structure.

Perspectives

Dans le cadre de cette recherche, les perspectives de développement de la méthode des éléments continus sont :

- L'application de cette approche à des structures plus complexes telles que les plaques multicouches non-symétriques et les plaques raidies, les coques multicouches ...

- L'utilisation des nos modèles dans des processus d'optimisation pour lesquels le nombre de pas de calcul est important. Le gain espéré en termes de temps de calcul présenterait un avantage éminent pour la diffusion de cette méthode.

Bibliographie

- [1] P.H. Kulla *Continuous elements, some practical examples, ESTEC Workshop Proceedings : Modal Representation of Flexible Structures by Continuum Methods*, 1989
- [2] R.W. Clough and J. Penzien *Dynamic of structures* Mc-Graw Hill Inc, 1975
- [3] A.Y.T. Leung *Dynamic Stiffness and substructures* Springer-Verlag, 1993
- [4] U. Lee *Spectral Element Method in Structural Dynamics* John Wiley and Sons, 2009
- [5] B.A. Akesson *Pfvibat - A computer program for plane frame vibration analysis by an exact method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 10, Pages 1221-1331, 1976
- [6] D. Poeleart *DISTEL, a Distributed Element Program for dynamic Modelling and Response Analysis of flexible Structures* Dans 4 th VPI SU /AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Structures, Blacksburg, 1983
- [7] F.W. Williams, P.N. Bennett and D. Kennedy *Theory, software and new results for vibration of prismatic plate assemblies*. Dans-ESA International Workshop on Advanced Mathematical Methods in Dynamics of Flexible Bodies, ESTEC, Noordwijk, Pages 47-58, 1996
- [8] F.W. Williams, M.S. Anderson and BUNVIS-RG *Exact frame buckling and vibration program with repetitive geometry and substructuring*, Journal of spacecraft and Rockets, Volume 24, No.4, Pages 353-361, 1987
- [9] P.H. Kulla : *IDA A Program Package for Interactive Dynamic Analysis*, Journal of spacecraft and Rockets, Volume 24, Pages 353-361, 1987
- [10] C. Duforet *Dynamic study of an assemblage of rods in medium and higher frequency range computer code ETAPE* The third colloquium on new trends in structure calculations, Bstia, Corsica, Pages 229-246, 1985
- [11] R.B. Bhat *Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in rayleigh-ritz method*, Journal of Sound and Vibration, Volume 102, Issue 4, Pages 493-499, 22 October 1985
- [12] S.M. Dickinson, A. Di Blasio *On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, Volume 108, Issue 1, Pages 51-62, 8 July 1986

-
- [13] C.M. Wang, S. Swaddiwudhipong, J. Tian *Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners* J. Eng. Mech, Volume ASCE 123, Pages 134-142, 1997
- [14] A.A. Jafari and M. Bagheri *Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods* Thin walled structures, Volume 44, Pages 82-90, 2006
- [15] J.L. Batoz and G. Dhatt *Modélisation des structures par éléments finis : 1-Solides élastiques*, Hermès Paris, 1990
- [16] J.L. Batoz and G. Dhatt *Modélisation des structures par éléments finis : 2-Poutres et Plaques*, Hermès Paris, 1990
- [17] J.L. Batoz and G. Dhatt *Modélisation des structures par éléments finis : 3-Coques*, Hermès Paris, 1990
- [18] N.S. Bardell, R.S. Langley , J.M. Dunsdon *On the free in-plane vibration of isotropic the rectangular plate*, Journal of Sound and Vibration, Volume 191(3), Pages 459-467, 1996
- [19] O.C. Ziekiewicz, R.L. Taylor *The Finite Element Method*, fourth edition, Volume.1 and 2, Mc Graw Hill, London, 1989-91.
- [20] C. W. Prior Jr, R.M. Barker, *A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates*, AIAA Journal 9 (5), Pages 912-917, 1971
- [21] N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti, *Analytical and finite element modeling of laminated composite and sandwich plates : an assessment of a new shear deformation theory for free vibration response*, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 67, Pages 89-99, 2013
- [22] H. Nguyen-Xuan, C.H. Thai, T. Nguyen-Thoi, *Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory*, Composites : Part B 55, Pages 558-574, 2013
- [23] M. di Sciuva, *Development of an anisotropic, multilayered shear-deformable rectangular plate element*, Computers and Structures 21(4), Pages 789-796, 1985
- [24] De. Langre, *Calcul de vibrations de plaques par équation intégrales*, Book CEA, Pages 89-443, 1989
- [25] E.L. Albuquerque, P. Sollero, W.S. Venturini, M.H. Aliabadi, *Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plate*, International Journal of Sound and Structures 43, Pages 4029-4046, 2006
- [26] E.C. Pestel, F.A. Leckie *Matrix Methods in Elastomechanics*, Journal McGraw-Hill, New York, Volume 35, 1963
- [27] V. Kolousec *Structural dynamics of continuous beams and frame systems*, PRague, 1950
- [28] B.A. Akeson *PFVIBAT, A Computer program for plane frame vibration analysis by an exact method*, Journal of numerical in engineering, Volume 10, 1976
-

-
- [29] W.L Haullauer, R.Y.L Liu, *Beam bending-torsion dynamic stiffness method for calculation exact vibration modes*, Journal of Sound and Vibration, Volume 85, Pages 105-113, 1982
- [30] P.H. Kulla, *Analytical finite elements*, Journal Sym aeroelasticity and struct. Dyn, 1985
- [31] J.R. Banerjee, *Coupled Bending -Torsional Dynamic stiffness Matrix for Beam Element*, Journal International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 28, 1989
- [32] F.W. Williams, D. KENNEDY, *Exact Dynamic Member Stiffnesses for a Beam on an Elastic Foundation*, Journal arthquake Engineering and structural Dynamics, Volume 15, 1987
- [33] C. Duforet, *Dynamic study of an assembling of rods in medium and higher frequency rangecomputer code ETAPE*, booktitle the third colloquium on new trends in structure calculations, Bstia , Corsica, Pages 229-246, 1985
- [34] J.R. Banerjee, *Coupled Bending -Torsional Dynamic stiffness Matrix for Beam Element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 28, 1989
- [35] M.D. Capron and F.W. Williams, *Exact dynamic stiffness for an axially loaded uniform Timoshenko member embedded in an elastic medium*, Journal of sound and vibration, Volume 124, Pages 453-466, 1988
- [36] J.M. Montalvao and A.P. V Silva, *Out of plane dynamic response of curved beams, an analytical model*, International Journal of Solids and Structures, Volume 24, 1988
- [37] J.B. Casimir, C. Duforet and T. Vinh, *Eléments continus numériques (applications au calcul de réponses dynamiques des poutres*, booktitle : Journée " Chocs et vibrations" du GAMI, Lyon, Juin 1996
- [38] J.B. Casimir and C. Duforet, *Eléments continus de poutres courbes en analyse harmonique*, booktitle : Dans Actes du 3ème colloque National en calcul des structures, mai 1997
- [39] J.B. Casimir, C. Duforet and T. Vinh, *Dynamic behavior of structures in large frequency range by continuous element method*, Journal Sound of Vibration, Volume 267, Pages 1085-1106, 2003
- [40] D. Tounsi, J.B. Casimir, M. Haddar, *Dynamic stiffness formulation for circular rings*, *Computers and structures*, Volume 112-113, Pages 258-265, 2012
- [41] J.R. Banerjee and A.J. Sobey, *Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a three-layered sandwich beam*, Journal Int .Journal. Solids Structure, Volume 42, Pages 2181-2197, 2005
- [42] J.R. Banerjee and H. Su, *Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam*, Journal Computers and Structures, Volume 84, Pages 1208-1214, 2006
-

-
- [43] W.P. Howson and A. Zare, *Exact dynamic stiffness matrix for flexure vibration of three-layered sandwich beams*, Journal Sound of Vibration, Volume 282, Pages 753-767, 2005
- [44] N.I. Kim, J.H. Lee and M.Y. Kim., *Exact dynamic stiffness of non-symmetric thin - walled beams on elastic foundation using power series method*, Journal Adv Eng Softw, Volume 36, Pages 518-532, 2005
- [45] D.J. Gorman, *Free vibration analysis of rectangular plates*, Elsevier, 1982
- [46] D.J. Gorman and W. Ding, *Accurate free analysis of the completely free rectangular Mindlin plate*, Journal of Sound and Vibration, Volume 189, Pages 341-353, 1996
- [47] D.J. Gorman and W. Ding, *The superposition - Galerkin method for free vibration analysis of rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, Volume 194, Pages 187-198, 1996
- [48] P. Hagedorn, K. Kelnel and J. Wallaschek, *Vibration and impedance of rectangular plates with free boundaries*, Journal Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, 1986
- [49] P.H. Kulla, *Continuous element formulation for rectangular plate with point support*, ESTEC Workshop Proceeding , Modal Representation of flexible Structures by Continuum Method, Pages 299-310, 1992
- [50] L. Dozio, *Exact vibration solutions for cross-ply laminated plates with two opposite edges simply supported using refined theories of variable order*, Journal of Sound and Vibration, Volume 333 (8), Pages 2347-2359, 2014
- [51] L. Dozio, *Exact free vibration analysis of Lévy FGM plate with higher-order shear and normal deformation theories*, Composite Structures, Volume 111, Pages 415-425, 2014
- [52] T.I. Thinh, M.C. Nuguen, D.G. Ninh, *Dynamic stiffness formulation for vibration analysis of thick composite plates resting on non-homogenous foundations*, Composite Structures 108, Pages 684-695, 2014
- [53] H. Thai, S.E. Kim, *Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory*, Applied Mathematical Modeling, 36, Pages 3870-3882, 2012
- [54] A.W. Leissa, *Vibration of Plate*, NASASP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Washington DC, 1969
- [55] P.H. Kulla, *Continuous element formulation for rectangular plate with point support*, ESTEC Workshop Proceeding , Modal Representation of flexible Structures by Continuum Method, Pages 299-310, 1992
- [56] J.S. Fleuret and C. Duforet, *Eléments continus de plaques en régime harmonique*, actes du 3ème colloque national en calcul des structures, Giens Volume I, Pages 81-92, 1997
- [57] J.B. Casimir, S. Kevorkian, T. Vinh, *The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements- application to kirchhoff's plate continuous element*, Journal Sound and Vibration, Volume 287, Page 571-89, 2005
-

-
- [58] L.V. Donadon, E.L. Albuquerque, *Modelling reinforced plates using the spectral element method*, Arruda.J.R.F, the 33rd international congress exposition on noise control engineering INTRT NOISE, 2004
- [59] M. Boscolo and J.R. Banerjee, *Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory*, Journal Computers and structures, Volume 89,(3-4), Pages 395-410, 2011
- [60] M. Boscolo and J.R. Banerjee, *Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part I : Theory*, Journal Comput and Struct, Volume 96-97, Pages 61-73, 2012
- [61] A. Kalnins, *Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and non-symmetrical loads*, Journal of Applied Mechanics, Volume 31, Pages 467-476, 1964
- [62] H. Le Sourne, *Développement des éléments Continus de coques axisymétriques et courbes*, Thèse de doctorat, l'université de Nantes, 1998
- [63] J.B. Casimir, M.C. Nguyen and I. Tawfiq, *Thick shells of revolution : Derivation of the dynamic stiffness matrix of continuous elements and application to a tested cylinder*, Journal Computers and structures, Volume 85, Pages 1845-1857, 2007
- [64] M.A. Khadimallah, J.B. Casimir and H. Smaoui, *Dynamic stiffness matrix of an axisymmetric shell and response to harmonic distributed loads*, Journal Computures and Structures, Volume 89, Pages 467-475, 2011
- [65] J.F. Remacle, *Mécanique des structures*, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences appliquées, Unité de génie civil et environnemental, 2002
- [66] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells Theories and analysis*, 2004
- [67] L. Jaouen, *Vibrations de flexion des plaques*, 2002, Université de Sherbrooke
- [68] N.J. Pagano, *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates*, Journal of composite Materials, Volume 4, Pages 20-35, 1970
- [69] E. Carrera, *Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells*. Appl Mech Rev, Volume 56(3), Pages 287-308, 2003
- [70] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou, and S. Caperaa, *Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model*, Composite Part B : Engineering, Volume 29 (3), Pages 223-234, 1998
- [71] C. Ossadzow and M. Touratier, *An improved shear-membrane theory for multilayered shells*, Composite Structures, Volume 52(1), Pages 85-95, 2001
- [72] L. Librescu, *Elastostatics and kinematics of anisotropic and heterogeneous shell type structures*, The Netherlands : Noordhoff, 1975
- [73] R.B. Nelson and D.R. Lorch, *A refined theory for laminated orthotropic plates*, Journal of Applied Mechanics, Volume 41 (171), Pages 177-183, 1974
- [74] A.K. Noor and W.S. Burton, *Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates*, Appl Mech Rev, Volume 42(1), Pages 1-18, 1989
-

-
- [75] E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, Journal. appl.Mech 12.2, Pages 69-77, 1945
- [76] R. Mindlin, *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, Journal of Applied Mechanics 18.1, Pages 31-38, 1951
- [77] J.N Reddy, *A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plate*, Journal of Applied Mechanics 51.4, Pages 745-752, 1985
- [78] K.J. REDDY, K. VIJAYAKUMAR and K. S. NAGARAJA, *New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates*, AIAA Journal 29.11, Pages 1960-1966, 1991
- [79] A.K. NOOR and W.S. BURTON, *Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates*, Journal of Applied Mechanics 59.4, Page 868, 1992
- [80] M. LÉVY, *Memoire sur la theorie des plaques elastique planes*, Journal de mathématiques pures et appliquées 3.3, Pages 219-306, 1877
- [81] N.J. PAGANO, *Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending*, Journal of Composite Materials 3.3, Pages 398-411, 1969
- [82] N.J. PAGANO, *Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates*, Journal of Composite Materials 4.1, Pages 20-34, 1970
- [83] N.J. PAGANO, *Influence of Shear Coupling in Cylindrical. Bending of Anisotropic Laminates*, Journal of Composite Materials 4.3, Pages 330-343, 1970
- [84] S.V. KULKARNI and N.J. PAGANO, *Dynamic characteristics of composite laminates*, Journal of Sound and Vibration 1, Pages 127-143, 1972
- [85] S. SRINIVAS, A.K. RAO and C.V. Joga RAO, *Flexure of Simply Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Pages 449-458, 1969
- [86] S. SRINIVAS and A.K. RAO, *Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates*, International Journal of Solids and Structures 6.11, Pages 1463-1481, 1970
- [87] S. SRINIVAS, C.V. JOGA RAO and A.K. RAO, *An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration 12.2, Pages 187-199, 1970
- [88] M.C. Nguyen, *Eléments Continus de plaques et coques avec prise en compte du cisaillement transverse - Application à l'interaction fluide-structure* Thèse de Doctorat - Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI), 2003
- [89] J.B. Casimir, *In-plane dynamic stiffness matrix of plates*, Mécanique et Industries, Volume 1, Issue 4, Pages 423 – 429, July 2000
- [90] H. Altenbach, V.A. Eremeyev, *Shell-like Structures : Non-classical Theories and Applications*, 2011
- [91] B. Emilie and D. Astrid, *aviondufutur.e-monsite.com*
- [92] *forum.reopen911.info*
-

Annexe A

$$[\mathbf{T}_{\text{SSo}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SSk}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{AAk}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SAo}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SAk}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{ASo}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SSk}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Annexe B1

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1n} = \frac{\phi^2 D_x^1 \beta_n^2 - k_{1n}^2 Dxy + \rho\omega^2 b^2}{(D_{xy} + D_1)k_{1n}} \\ L_{2n} = \frac{\phi^2 D_x^1 \gamma_n^2 - k_{1n}^2 Dxy + \rho\omega^2 b^2}{(D_{xy} + D_1)\phi^1 \gamma_n} \\ L_{3n} = \frac{-\phi^2 D_x k_{2n}^2 + Dxy^2 \beta_n^2 + \rho\omega^2 b^2}{-(D_{xy} + D_1)^2 \beta_n} \\ L_{4n} = \frac{-\phi^2 D_x k_{2n}^2 + Dxy^2 \gamma_n^2 + \rho\omega^2 b^2}{-(D_{xy} + D_1)\phi k_{2n}} \end{array} \right. \quad (8)$$

Annexe B2

$$[\mathbf{T}_{\text{SSo}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SSk}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SSN}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{AAo}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{AAk}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{AAN}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SAo}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SAk}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{SAN}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{ASo}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{ASk}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$[\mathbf{T}_{\text{ASN}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Annexe C

$$[\mathbf{H}_1] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\cos(\theta) \sin(\theta) \\ -2 \cos(\theta) \sin(\theta) & 2 \cos(\theta) \sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} C^2(C^2H_{11} + S^2H_{12}) + S^2(C^2H_{12} + S^2H_{22}) + 4C^2S^2G_{12} & S^2(C^2H_{11} + S^2H_{12}) + C^2(C^2H_{12} + S^2H_{22}) + 4C^2S^2G_{12} & CS(C^2H_{11} + S^2H_{12}) - CS(C^2H_{12} + S^2H_{22}) - 2CS(C^2 - S^2)G_{12} \\ C^2(S^2H_{11} + C^2H_{12}) + C^2(S^2H_{12} + C^2H_{22}) - 4C^2S^2G_{12} & S^2(S^2H_{11} + C^2H_{12}) + C^2(S^2H_{12} + C^2H_{22}) + 4C^2S^2G_{12} & CS(S^2H_{11} + C^2H_{12}) - CS(S^2H_{12} + C^2H_{22}) + 2CS(C^2 - S^2)G_{12} \\ C^2(CSH_{11} - CS_{H_{12}}) + S^2(CSH_{12} + CS_{H_{22}}) - 2CS(C^2 - S^2)G_{12} & S^2(CSH_{11} - CS_{H_{12}}) + C^2(CSH_{12} - CS_{H_{22}}) + 2CS(C^2 - S^2)G_{12} & CS(CSH_{11} + CS_{H_{12}}) - CS(CSH_{12} - CS_{H_{22}}) + (C^2 - S^2)(C^2 - S^2)G_{12} \end{bmatrix} \quad (23)
\end{aligned}$$

Avec $S = \sin(\theta)$ et $C = \cos(\theta)$