



HAL
open science

Contrôle des micro-ondes en milieux réverbérants

Matthieu Dupré

► **To cite this version:**

Matthieu Dupré. Contrôle des micro-ondes en milieux réverbérants. Optique [physics.optics]. Université Paris 7, 2015. Français. NNT: . tel-01325120

HAL Id: tel-01325120

<https://theses.hal.science/tel-01325120v1>

Submitted on 1 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Institut Langevin
ONDES ET IMAGES



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

Présentée par

Matthieu Dupré

sous la direction de **Geoffroy Lerosey**

et **Mathias Fink**

à l'Institut Langevin - Ondes et Images

Contrôle des micro-ondes en milieux réverbérants

Le 17 Décembre 2015

Devant le jury composé de :

Ad Lagendijk	Examineur
Christopher Djoma	Examineur
Cyril Decroze	Rapporteur
Geoffroy Lerosey	Directeur de thèse
Mathias Fink	Directeur de thèse
Sylvain Gigan	Examineur
Ulrich Kuhl	Rapporteur
Yves Couder	Examineur

Remerciements

Ces remerciements me permettent de clôturer plus de trois années de travail au sein de l'Institut Langevin. Trois années de sciences, d'apprentissage et d'échanges, qui m'ont fait côtoyer un grand nombre de personnes enrichissantes que je ne pourrai jamais remercier suffisamment dans cette rubrique.

Évidemment, je commence par remercier Geoffroy pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ces trois ans et demi. Toujours disponible et dynamique, je pense que Geoffroy n'est pas loin d'être l'encadrant de thèse idéal, qui se démène énormément pour ses étudiants, que ce soit pour leur trouver un financement de thèse ou les envoyer en conférences. Il contribue grâce à ses qualités humaines (en sus de ses qualités indéniables de chercheur) à nous pousser pour donner le meilleur de nous-même.

Je remercie également Mathias, qui, en plus d'avoir été officiellement mon directeur de thèse, a pu me faire profiter de ses lumières et avec qui j'ai pu partagé d'intéressantes discussions scientifiques. De plus Mathias a la chance d'avoir un mauvais réseau téléphonique en Bretagne, ce qui nous a permis de nous lancer dans cette idée de SMM.

Je remercie sincèrement Fabrice, qui m'a toujours laissé la porte de son bureau grande ouverte depuis qu'il est rentré de post-doctorat. Quand je n'osais pas aller poser une question à Geoffroy, de peur de me prendre un «Enfin, c'est évident! », ou pour des questions de simulations ou de calcul, c'est vers Fabrice que je me tournais, et je ressortais généralement de son bureau avec la solution.

Merci Nadège pour avoir supporté ma finesse légendaire pendant plus de 7 années, de PC à la fin de la thèse en passant par le M2 de matière condensée, pour m'avoir suivi en vélo dans ton pays préféré, la Chine, pour le consulting sur les figures d'articles ou de thèse, ainsi que pour m'avoir aidé à décrypter les pattes de mouche de Geoffroy quand le besoin s'en faisait sentir. C'était toujours un plaisir de travailler avec toi, notamment sur le projet du SMM.

Je remercie également Philipp del Hougne, pour son énorme travail expérimental effectué pendant ses 9 mois de stage à l'Institut, et qui a aboutit à la publication d'un PRL. Merci aussi à Alexis Prel, que j'ai également pu partiellement encadrer pendant son stage, plus court, au début de ma thèse.

Je désire également exprimer ici ma gratitude envers les membres de mon jury, ainsi qu'à mes deux valeureux rapporteurs Cyril et Ulrich. Leurs remarques ont grandement contribué à la qualité de la version finale de mon manuscrit. Je remercie particulièrement Ad pour les discussions fructueuses que nous avons eues lors de ses visites, pendant lesquelles il m'a prodigué de nombreux conseils.

J'ai également une pensée pour tous les thésards (Hugo, Thomas, Nikos, Aumaury, Rémi, Marc...) de l'Institut avec qui j'ai pu avoir des discussions qui m'ont aidé dans mon travail, autour d'un café, ou d'une bière, au labo, dans un bar ou en conférence. J'en profite pour adresser également un grand merci à tous ceux et celles qui ont partagé mon bureau ainsi que les bureaux adjacents, y compris les médiqueux-(ses), pendant ces trois ans et quelques, pour la bonne ambiance et les gâteaux partagés.

Je conclurai en remerciant ma famille et Élisabeth qui m'ont supporté, soutenu tout au long de mes longues études, qui ont contribué à relire certains chapitres de mon manuscrit et bien sûr pour leur aide précieuse lors de la préparation du pot de thèse.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	1
1 Cavités, modes et contrôle des ondes en milieux complexes	5
1.1 Introduction	5
1.2 Des ondes planes aux modes propres	7
1.2.1 Ondes en espace libre	7
1.2.2 Solutions des équations de Maxwell en présence de sources .	10
1.2.3 Cavités et problèmes des conditions aux limites	13
1.2.4 Phénomènes dissipatifs et cavités électromagnétiques réelles .	19
1.3 Degrés de liberté en milieux complexes	24
1.3.1 Milieux réverbérants et degrés de liberté	25
1.3.2 Les milieux multidiffusants en optique	33
1.3.3 Retournement temporel multivoie en cavité ou en milieux multidiffusants : utilisation de degré de liberté spatio-temporels	40
1.4 Conclusion	43
2 Rayonnement de cavités ouvertes	47
2.1 Introduction	47
2.2 Des miroirs semi-réfléchissants en micro-ondes	49
2.2.1 Transmission par une fente de largeur sub-longueur d'onde .	50
2.2.2 Réseaux et ordre de diffraction	51
2.2.3 Transmission d'un réseau de fentes sub-longueur d'onde . . .	54
2.3 Couplage de réseaux de diffraction sub-longueur d'ondes avec une cavité résonante	56
2.3.1 Étude du champ à l'intérieur de la cavité	56
2.3.2 Étude du rayonnement en champ lointain	59
2.3.3 Effets du désordre	64
2.4 Applications	70
2.4.1 Imagerie, détection et communication	70
2.4.2 Bazooka électromagnétique	73
2.4.3 Une fenêtre pour observer le champ dans des cavités	74

2.5	Conclusion	81
3	Contrôle en cavité électromagnétique des degrés de liberté temporels : application à la focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde	83
3.1	Introduction	83
3.2	Limite de la diffraction et super-résolution	85
3.2.1	La diffraction : un filtre spatial	86
3.2.2	Super-résolution et focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde	88
3.2.3	Les métamatériaux et métalentilles	92
3.2.4	Adaptation avec des réseaux de diffraction	96
3.3	Focalisation par retournement temporel à l'aide de fractales	99
3.3.1	Les fractales	99
3.3.2	Les propriétés spectrales des résonateurs fractals	101
3.3.3	La courbe de Hilbert comme résonateur fractal	102
3.3.4	Modes propres d'une fractale de Hilbert	103
3.3.5	Focalisation par retournement temporel dans le champ proche de la fractale	104
3.3.6	Augmentation des degrés de liberté spatiaux	106
3.4	Couplage du résonateur à une cavité et application à la focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde	110
3.4.1	Couplage du résonateur fractal à une cavité résonante	111
3.4.2	Comparaison des mesures expérimentales et des simulations	115
3.4.3	Interprétation : brassage des degrés de liberté spatio-temporels par la cavité	118
3.5	Conclusion	120
4	Contrôle des degrés de liberté spatiaux en milieux réverbérants : les modulateurs spatiaux de microondes	123
4.1	Introduction	123
4.2	Le modulateur spatial de microondes (SMM)	125
4.2.1	Des réseaux d'antennes au modulateur spatial de microondes (SMM)	125
4.2.2	Conception d'un modulateur spatial de micro-ondes	130
4.3	Expérience fondatrice	138
4.3.1	De l'intérêt des mesures statistiques	139
4.3.2	Dispositif expérimental	140
4.3.3	Amélioration de la transmission aux fréquences WIFI	141
4.3.4	Annulation d'un signal	145
4.3.5	Amélioration du signal entre deux antennes hors du champ de vue du SMM	146
4.4	Conclusion	147

5	Le façonnage de front d'ondes en cavités électromagnétiques : vers des cavités reconfigurables	149
5.1	Introduction	149
5.2	Façonnage de front d'ondes en cavité	150
5.2.1	Principe de l'approche	150
5.2.2	Conditions aux limites et façonnage de front d'ondes	152
5.2.3	Degrés de liberté spatiaux en cavité	152
5.2.4	Analogies avec le façonnage de front d'ondes en optique	153
5.2.5	Les trois régimes de contrôle	154
5.2.6	Approche statistique : les <i>phasors</i>	155
5.2.7	Dispositif et protocole expérimental	156
5.3	Les trois régimes de contrôles	158
5.3.1	(i) Cas des cavités de faible facteur de qualité ou de grand volume, $p < N/2$	158
5.3.2	(ii) Cas des cavités intermédiaires, $p \approx N$	166
5.3.3	(iii) Cas des cavités de très haut facteur de qualité, ou de petit volume, $N < 1$	172
5.3.4	Conclusion : les différents régimes de contrôle	176
5.4	Approche numérique	177
5.4.1	La méthode de la matrice de transmission	177
5.4.2	La méthode des potentiels de couche	179
5.4.3	Implémentation et résultats	181
5.5	Conclusion	193
	Conclusion	195
	Bibliographie	199

Introduction

Une onde peut se définir comme la propagation d'une variation locale d'une grandeur physique, par exemple, un champ électromagnétique en optique, la pression en acoustique, la déformation d'une surface ou de la densité d'un milieu en mécanique, ou une densité de probabilité en physique quantique. Les ondes peuvent ainsi véhiculer information et énergie d'un endroit à un autre avec trois grandes conséquences dans notre vie de tous les jours. Avant tout, les ondes nous donnent des outils naturels pour sonder notre environnement à distance, que ce soit avec la vue ou l'ouïe, pour sonder la matière et l'univers avec des télescopes, des capteurs CCD, des microphones, des radars ou des échographes... Ensuite les ondes nous fournissent une grande partie de nos moyens de communication, là encore naturels (la parole et l'ouïe, la vue) ou inventés (téléphonie, radio, Internet...). Enfin l'énergie transportée par une onde peut interagir avec la matière, permettant au soleil de chauffer notre atmosphère, de catalyser des réactions chimiques comme la photosynthèse, à un four micro-onde de cuire de la nourriture ou à la radiothérapie de tuer des cellules cancéreuses.

L'immense champ d'application des ondes explique l'intérêt de la recherche en physique pour contrôler leur propagation et leurs interactions avec la matière dans des milieux de plus en plus divers et compliqués. Les lentilles permettent de focaliser les ondes en espace libre, c'est à dire un milieu homogène comme le vide, l'air ou l'eau. Déjà utilisées pendant l'antiquité pour focaliser la lumière solaire afin d'allumer un feu, les lentilles donnèrent naissance aux loupes et aux ancêtres de nos lunettes de vue au Moyen-Âge, puis aux lunettes d'astronomie et aux objectifs de télescopes à la Renaissance, qui permirent d'expliquer les mouvements des astres et de déterminer notre place dans le système solaire. L'amélioration technologique des composants optiques a finalement montré que leur résolution ne dépend pas uniquement de la qualité de leurs composants, mais qu'elle est également limitée d'une part fondamentalement par la limite de la diffraction [1, 2] : les ondes possèdent une longueur caractéristique, la longueur d'onde, et ne peuvent varier significativement en milieu homogène sur de plus courtes distances ; et d'autre part par le milieu de propagation, les hétérogénéités de l'atmosphère venant par exemple dégrader les images d'astres lointains par exemple.

Un milieu qui possède un grand nombre d'hétérogénéités perturbe fortement les trajectoires des ondes qui y subissent de multiples réflexions et diffusions. Dans ces milieux, les systèmes habituels sont inopérants : on ne peut voir à travers le brouillard ou un verre de lait au delà d'une distance limitée. Leur étude s'est développée à partir des années 50 [3, 4] dans tous les domaines des ondes, notamment sous l'impulsion de la physique mésoscopique [5, 6, 7]. Ces milieux peuvent être classés en deux grands groupes : les milieux multidiffusants et les milieux réverbérants. Dans les premiers, un nombre élevé de particules, comme des gouttelettes d'eau en suspension dans le brouillard, diffusent les ondes se comportant ainsi comme autant de sources secondaires. Les seconds, les milieux réverbérants, sont délimités par des matériaux qui réfléchissent fortement les ondes. Chaque réflexion peut, là encore, être vue comme une nouvelle onde créée par la paroi qui se comporte comme un ensemble de sources secondaires. Que ce soit dans les milieux diffusants ou réverbérants, une multitude d'ondes secondaires viennent s'ajouter à une onde incidente, créant un champ ondulatoire total très complexe et, a priori, marginalement contrôlable.

Cependant ces champs, grâce à leur complexité, supportent un grand nombre de degrés de liberté, qui sont autant de leviers que l'expérimentateur peut actionner. Nous pouvons distinguer les degrés de liberté spatiaux, qui représentent le nombre de sources qui peuvent créer des champs indépendants dans un milieu complexe, des degrés de liberté temporels (ou fréquentiels) qui représentent le nombre de fréquences auxquelles des champs ondulatoires sont décorrélés. Sous l'impulsion de Mathias Fink, l'Institut Langevin (à l'époque le LOA) s'est spécialisé dans le contrôle spatio-temporel des ondes en milieux complexes depuis de nombreuses années. Mathias Fink et son équipe ont montré, que loin d'être un problème, la diffusion et la réverbération peuvent en fait être mises à profit. Un outil puissant pour ce faire est le retournement temporel. Cette technique, basée sur la symétrie par rapport au temps de l'équation des ondes, permet de faire converger une onde vers la source qui l'a créée. Originellement développé en acoustique, le retournement temporel a depuis été transposé aux micro-ondes [8, 9]. Cependant les fréquences des ondes optiques sont beaucoup trop élevées pour en permettre un contrôle temporel suffisamment précis. Dans ce domaine, les modulateurs spatiaux de micro-ondes (SLM), assimilables à un ensemble de miroirs micrométriques contrôlables furent tout d'abord utilisés pour corriger les aberrations atmosphériques en astronomie. En 2007, Ivo Vellekoop et Allard Mosk [10], ont réalisé que chacun des éléments de ces SLM peuvent contrôler un degré de liberté spatial d'un milieu multidiffusant, ce qui leur a permis de focaliser des ondes optiques à travers une couche de peinture, autrement dit un milieu très diffusant. Cette approche, également utilisée à l'Institut Langevin, peut être vue comme le pendant spatial du retournement temporel.

Cette thèse, qui se situe dans la droite ligne des travaux de l’Institut Langevin, porte sur le contrôle des micro-ondes en milieux réverbérants. Ces derniers sont des milieux complexes qui peuvent piéger les ondes pendant des temps longs. Le milieu réverbérant le plus simple possible n’est autre qu’une cavité résonante.

Le chapitre 1, introductif, abordera ainsi la physique des ondes électromagnétiques en milieux réverbérants. Nous reviendrons sur les concepts de fonctions de Green, de cavités, de modes et de fréquences propres, de densité d’états et de dissipation. Nous aborderons ensuite les différentes méthodes de contrôle des ondes en milieux complexes. Nous montrerons comment le retournement temporel monovoie permet de contrôler les degrés de liberté temporels, tandis que le façonnage de front d’onde met en jeu les degrés de liberté spatiaux. Nous verrons, finalement, que le retournement temporel multivoie met à profit ces deux types de degrés de liberté.

Afin de tirer profit de la grande richesse spectrale de ces milieux réverbérants, nous présenterons dans le chapitre 2 une méthode innovante permettant d’ouvrir une cavité sur l’extérieur de manière contrôlée. Nous montrerons que les réseaux de diffraction sub-longueur d’onde constitués de métal et de trous constituent de très bons miroirs partiellement réfléchissants, dont la transmission est accordable en fonction des paramètres géométriques du réseau. Nous étudierons le diagramme de rayonnement de telles cavités ouvertes, ainsi que l’effet du désordre. Ceci nous permettra de mettre à profit les ressources des milieux réverbérants et nous évoquerons diverses applications possibles. Nous montrerons notamment que ces miroirs sont une alternative facile à mettre en place pour étudier et mesurer les champs dans des cavités bidimensionnelles.

Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons au champ extérieur dans l’environnement immédiat de ces réseaux, également appelé champ proche. En nous inspirant de travaux précédemment menés à l’Institut Langevin par Fabrice Lemoult pendant sa thèse [11], nous illustrerons comment utiliser la complexité des milieux réverbérants pour focaliser des ondes sur des dimensions très inférieures à la longueur d’onde. Nous utiliserons pour cela un résonateur fractal apportant, lui-aussi, un grand nombre de degrés de liberté. Nous verrons que focaliser des ondes sur des dimensions sub-longueur d’onde dans le champ proche de la fractale n’est possible qu’à condition de bénéficier d’un grand nombre de degrés de liberté, soit spatiaux comme nous le verrons en simulations, soit en expérience avec des degrés de liberté temporels, apportés par une cavité électromagnétique.

Dans le chapitre 4 nous nous inspirerons des techniques utilisées en façonnage de front d’onde optique pour fabriquer un modulateur spatial de micro-ondes (SMM). Nous détaillerons la fabrication de notre SMM, basée sur les concepts

des réseaux de réflecteurs et de métasurfaces. Nous montrerons qu'en utilisant un SMM, nous pouvons contrôler spatialement les micro-ondes dans des milieux réverbérants, par exemple pour améliorer de façon passive la réception d'un signal dans un bureau à des fréquences WIFI.

Dans le dernier chapitre (5), nous verrons que ce SMM permet de modifier les conditions aux limites d'une cavité. Nous modéliserons l'effet du SMM et le gain apporté, en fonction du nombre de modes dans la cavité et du nombre de degrés de liberté spatiaux contrôlés. Ceci nous mènera à distinguer trois régimes de contrôle différents suivant le volume et le facteur de qualité de la cavité. Pour terminer, nous développerons une méthode de calcul numérique adaptée, d'abord basée sur la matrice de transmission en milieux diffusants [12], puis sur la méthode des potentiels de couches limites.

Chapitre 1

Cavités, modes et contrôle des ondes en milieux complexes

1.1 Introduction

Quel est le point commun entre Georges Brassens, un four micro-onde, un laser et une boîte quantique ? Ils utilisent tous des cavités résonantes. Les cavités sont des espaces clos, de dimensions finies, au sein desquels les ondes sont piégées car réfléchies par les parois pendant des temps longs. Cela permet notamment d'établir des champs de très haute intensité.

Ainsi, la caisse de résonance de la guitare de Georges Brassens amplifie le son de la corde grattée, la cavité du four micro-onde augmente l'intensité du champ électromagnétique issu d'un magnétron pour cuire de la nourriture, le laser utilise une cavité créée par deux miroirs pour amplifier l'émission stimulée à une fréquence unique et les électrons des boîtes quantiques émettent des photons aux longueurs d'onde déterminées par la taille de la boîte (figure 1.1).

Les cavités sont donc logiquement utilisées dans un grand nombre de systèmes physiques, aussi bien appliqués que fondamentaux. L'exemple le plus parlant est certainement celui des instruments de musique. Que ce soit une flûte ou une guitare, l'excitation de la cavité acoustique effectuée en soufflant dans un tube ou en grattant une corde placée sur une caisse de résonance permet d'établir un champ de pression pendant un temps long à une fréquence bien définie : c'est la note de musique. En électromagnétisme, et plus particulièrement dans le domaine microonde, les applications des cavités réverbérantes sont très diverses que ce soit pour chauffer la nourriture avec un four micro-onde, pour faire des tests de compatibilité électromagnétique entre les différents objets recourant ou générant des

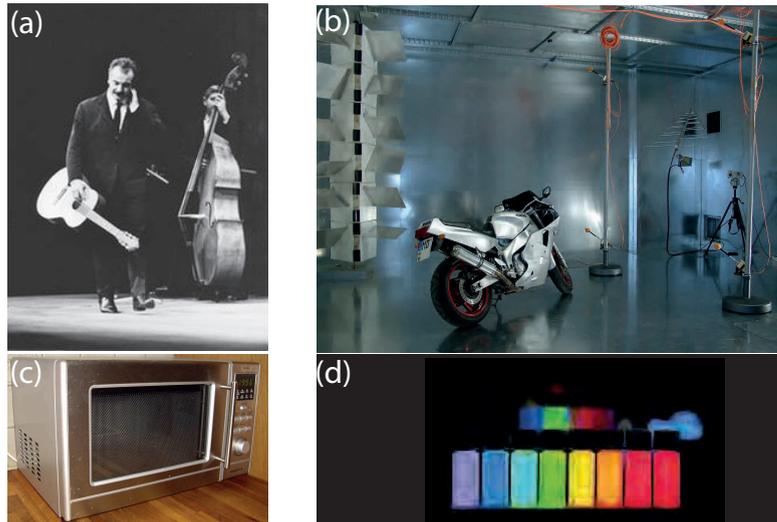


FIGURE 1.1: Exemples de cavités réverbérantes. (a) La guitare de Georges Brassens. (b) Une chambre réverbérante pour les tests de compatibilité électromagnétique. (c) Un four micro-ondes. (d) Des boîtes quantiques produisent des couleurs différentes en fonction de leur dimension.

ondes radio, ou pour exacerber les interactions entre les ondes et la matière en électrodynamique quantique.

Ce chapitre a pour objectif d'introduire la notion de cavités réverbérantes électromagnétiques, ainsi que les concepts et notations qui nous seront utiles tout au long de notre étude. Dans une première partie ce chapitre détaillera la physique des ondes en cavité, en partant de la propagation des ondes en espace libre. Nous verrons que les conditions aux limites sur les parois d'une cavité parfaite (c'est à dire sans dissipation), lui imposent l'existence de champs électromagnétiques à seulement certaines fréquences quantifiées : c'est ce qu'on appelle des modes propres. Ceux-ci ne peuvent être simplement décrits et prédits que pour des géométries particulières (cavités rectangulaires, sphériques ou cylindriques). Nous introduirons ensuite le formalisme de Green et la notion de densité d'état qui nous permettront d'aborder les solutions de l'équation des ondes en présence de sources et en milieux réverbérants. Nous verrons ensuite comment la dissipation influe sur ces solutions d'un point de vue temporel comme d'un point de vue spectral. En effet, les cavités réelles subissent toujours de la dissipation, c'est-à-dire une perte d'énergie. Celle-ci limite le temps de vie de l'énergie stockée dans la cavité, ce qui a des conséquences fondamentales sur la densité d'états, les fonctions de Green et sur la physique des ondes dans la cavité.

Dans une deuxième partie, nous définirons ce qu'on appelle les milieux complexes, qui peuvent aussi bien être des cavités réverbérantes désordonnées, que des milieux multiples diffusants. Ces milieux possèdent des caractéristiques

statistiques communes. En effet, nous montrerons que les réflexions des ondes sur les parois d'une cavité peuvent être interprétées comme des sources secondaires fictives. De façon analogue, les diffuseurs constituant les milieux diffusants sont autant de sources secondaires. Les interférences entre les ondes émises par ces sources secondaires et l'onde incidente créent des champs extrêmement complexes, d'aspect aléatoire que nous appelons *speckle*, d'après le terme anglophone généralement préféré au terme français tavelure. Contrôler les ondes dans ces milieux avec des techniques analogues à celles de l'espace libre (lentilles, miroirs, antennes etc.) se révèle très limité. Cependant, nous verrons qu'ils offrent des avantages si nous savons correctement les exploiter.

Nous introduirons alors le concept de degrés de liberté temporels, en montrant que le retournement temporel est une technique simple et efficace pour contrôler les modes propres qui sont autant de degrés de liberté temporels en milieux réverbérants, notamment en acoustique et dans le domaine microonde. Le retournement temporel, basé sur l'invariance par retournement du temps de l'équation des ondes, permet en effet de faire revivre à une onde son histoire passée, et ainsi la faire reconverger vers la source qui l'a émise. Cependant, le retournement temporel n'est pas directement transposable à l'optique. Dans ce domaine, les chercheurs ont développé une approche analogue mettant cette fois-ci à profit les degrés de liberté spatiaux, c'est à dire le nombre de sources indépendantes accessibles à l'expérimentateur. Nous aborderons alors ces techniques de façonnage de front d'onde, en particulier celles utilisées avec des modulateurs spatiaux de lumière (*Spatial Light Modulators* en anglais) pour contrôler les ondes optiques dans les milieux multidiffusants. Enfin, nous verrons qu'il est possible de tirer simultanément parti des degrés de liberté spatiaux et temporels, que ce soit en acoustique ou dans le domaine microonde, pour améliorer la focalisation aussi bien en milieux réverbérants que multidiffusants. C'est ce que fait naturellement le retournement temporel multivoie.

1.2 Des ondes planes aux modes propres

1.2.1 Ondes en espace libre

Avant d'entrer dans le vif du sujet, à savoir les solutions des équations de Maxwell en cavité, nous nous intéressons aux solutions en espace libre, c'est-à-dire un milieu homogène dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide (ou proches, comme celles de l'air), infini, et sans source. Ce milieu nous permettra ensuite d'introduire les concepts fondamentaux de fonction de Green dans un cas

extrêmement simple. Néanmoins, nous écrivons les équations de Maxwell dans le cadre le plus général possible, pour mieux mettre en évidence les considérations expérimentales et les approximations nécessaires. Les équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday, Maxwell-Thomson, et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où nous introduisons les vecteurs déplacement électrique \mathbf{D} et excitation magnétique \mathbf{H} . Ces derniers sont supposés symétriques et vérifient en régime harmonique dans le vide :

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où nous avons réduit les tenseurs de permittivité diélectrique et perméabilité magnétique à ceux du vide, ϵ_0 et μ_0 , ce qui simplifie grandement les équations.

D'une part, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson imposent les conditions aux interfaces de \mathbf{E} et \mathbf{B} en fonction des matériaux utilisés, et assurent la conservation de la charge. D'autre part, c'est la combinaison des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère qui couple les champs électriques et magnétiques, et qui mène aux équations des ondes pour les champs électrique et magnétique.

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

En l'absence de source ($\rho = 0$ et $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) et en faisant intervenir les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson, nous obtenons les équations des ondes pour les champs électrique et magnétique :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où nous avons fait apparaître la célérité de la lumière dans le vide, $c = c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. L'équation des ondes fait apparaître une symétrie entre l'espace et le temps, puisque la somme des dérivées partielles spatiales d'ordre 2 sont proportionnelles aux dérivées partielles temporelles d'ordre 2. Ces équations et le milieu de propagation sont linéaires et invariants par une translation spatiale ou temporelle arbitraire. Nous allons donc chercher les solutions de l'équation des ondes dans

le domaine de Fourier. Nous nous contentons de chercher les solutions pour le champ électrique : il nous suffira ensuite de trouver le champ magnétique grâce à l'équation de Maxwell-Gauss. Nous posons la convention suivante de transformée de Fourier :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (1.5)$$

L'équation des ondes 1.4 devient l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (1.6)$$

Nous reconnaissons là une équation aux valeurs propres pour l'opérateur Laplacien Δ . Nous appliquons alors une deuxième transformée de Fourier, cette fois-ci spatiale et tridimensionnelle au champ $\tilde{\mathbf{E}}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}^3 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}^3 dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.7)$$

L'équation des ondes (ou de Helmholtz) en est réduite à :

$$\left(\|\mathbf{k}\|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (1.8)$$

Par la suite, nous oublions les \sim pour alléger les notations. Les seules solutions non nulles sont donc données par la relation de dispersion reliant \mathbf{q} à ω :

$$\|\mathbf{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.9)$$

Une base des solutions est donc la base des ondes planes harmoniques de la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{+i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.10)$$

où $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ est un vecteur arbitraire de norme $k = \omega/c$ et représente la direction de propagation de l'onde. Un raisonnement analogue sur le champ magnétique mène à un résultat similaire pour \mathbf{B} . Il est intéressant de noter que cette base est complexe, même si les champs solutions sont réels et composés de ces vecteurs complexes et de leurs conjugués. De plus les trois composantes des constantes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 ne sont pas indépendantes, mais reliées par les équations de Maxwell. L'introduction de l'équation 1.10 et de son pendant magnétique dans les équations de Maxwell mène

au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ces équations nous indiquent que les champs électrique et magnétique sont polarisés dans le plan transverse à la direction de propagation de l'onde \mathbf{k} , et qu'ils sont orthogonaux entre eux. On dit que les ondes planes sont transverses électromagnétiques (TEM). De plus, nous pouvons choisir notre repère de manière à ce que $\mathbf{k} = k \mathbf{z}$ et que $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{x}$. Les constantes électromagnétiques sont alors de la forme :

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{c} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Nous pouvons remarquer que le champ magnétique est déphasé de $\pi/2$ par rapport au champ électrique.

Toute somme d'ondes planes est donc solution de l'équation des ondes de l'espace libre, sans source. Ces ondes sont polarisées dans le plan transverse à la propagation et les champs électrique et magnétique sont déphasés de $\pi/2$. Ces ondes possèdent des extensions spatiale et temporelle infinies. En pratique, ces extensions sont bornées puisque ce sont des sources qui leur donnent naissance à une date et à un endroit bien déterminés. Nous allons donc chercher à présent les solutions des équations de Maxwell en présence de sources.

1.2.2 Solutions des équations de Maxwell en présence de sources

1.2.2.1 Fonctions de Green dyadiques

Une base commode de l'équation des ondes avec un terme source est celle constituée des fonctions de Green. En effet, ces fonctions de Green sont les solutions de l'équation des ondes pour le plus simple des termes source : à une distribution de Dirac. Le principe de superposition, assuré par la linéarité des équations et l'invariance par translation dans le temps et l'espace, permet d'obtenir la solution pour une répartition complexe de sources à partir d'une simple convolution des fonctions de Green avec la distribution complète des sources. Introduire le formalisme de Green nous permettra par la suite de généraliser les concepts de modes et

de cavités quand on ne sait pas expliciter analytiquement les solutions de l'équation de Helmholtz (1.6), ainsi que de formaliser les outils tels que le contrôle de front d'onde et le retournement temporel.

Dans la partie précédente, nous avons négligé le terme source. Cependant, dans le cas général, l'équation des ondes (1.3) pour le champ électrique en régime harmonique se réécrit sous la forme :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 i \omega \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.13)$$

On définit alors la fonction de Green dyadique électrique comme la solution de (1.13) avec un terme source de Dirac :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - k^2 \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{1} \quad (1.14)$$

où $\mathbf{1}$ représente la matrice carrée unité de la dimension du problème d . Une fois $\vec{\mathbf{G}}$ connue et le milieu étant linéaire, on connaît le champ électrique en tout point de l'espace ou du volume :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \omega \mu_0 \int_{\Omega} \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' \quad (1.15)$$

$\vec{\mathbf{G}}$ est une matrice carrée de taille d et a la dimension d'une longueur à la puissance $2 - d$. En espace ouvert il existe deux fonctions de Green : une divergente et une convergente, on choisit alors la solution divergente, dite causale.

Considérons par exemple comme source un dipôle électrique placé en \mathbf{r}' avec un moment dipolaire associé \mathbf{p} . La distribution de courant s'écrit :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = -i \omega \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.16)$$

et l'équation (1.15) devient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{p} \quad (1.17)$$

La fonction de Green relie ainsi le moment dipolaire créé en \mathbf{r}' au champ créé à toute position \mathbf{r} à la fréquence ω .

De plus, la fonction de Green peut être vue comme l'opérateur inverse de l'équation des ondes. En effet, notons $\vec{\mathbf{L}} = \Delta - \frac{\omega^2}{c_0^2}$ et réécrivons le terme source : $\mathbf{S} = -\mu_0 i \omega \mathbf{j}$. Il est alors évident que $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{G}}^{-1}$ car les équations (1.13) et (1.17)

s'écrivent en terme d'opérateur :

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{E} = \mathbf{S} \\ \mathbf{E} = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}\mathbf{S} \end{cases} \quad (1.18)$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ est donc autoadjoint, puisque $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ l'est, ce qui entraîne la réciprocité spatiale de la fonction de Green : $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)$. En d'autres termes, on peut échanger les positions de l'émetteur et du récepteur, la fonction de Green entre ces deux points reste la même. Ce résultat est très général et reste valable tant que le système est linéaire et invariant par translation dans le temps. Ceci reste valable tant que les matériaux mis en jeu ne vérifient pas de propriété magnéto-optique (comme la plupart des diélectriques). Dans le cas contraire, la réciprocité s'applique seulement si il n'y a pas de champ magnétique constant.

1.2.2.2 Fonction de Green en espace libre

La fonction de Green dépend évidemment de la géométrie et de la dimension du problème. Par exemple, en espace libre, l'invariance par translation ajoutée à la réciprocité spatiale implique que $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ ne dépend, en plus de ω que de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. La fonction de Green électromagnétique tridimensionnelle de l'espace libre $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0$ s'écrit :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \text{VP} \left\{ \left[\mathbb{1} + \frac{\nabla \otimes \nabla}{k^2} \right] \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \right\} - \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{3k^2} \mathbb{1} \quad (1.19)$$

où VP désigne la valeur principale de Cauchy, $\mathbb{1}$ la matrice identité et \otimes le produit tensoriel. En notant \mathbf{u} le vecteur unitaire de même sens et direction que $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, cette dernière expression se développe sous la forme :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \text{VP} \left\{ \left[\mathbb{1} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| - 1}{k^2\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^2} (\mathbb{1} - 3\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \right\} - \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{3k^2} \mathbb{1} \quad (1.20)$$

Cette expression met en évidence deux termes. Le premier est le terme habituel en $e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}/\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$, que nous retrouvons dans la fonction de Green scalaire. Ce terme est polarisé uniquement dans le plan transverse à la direction de propagation : nous retrouvons que les ondes rayonnées dans le vide sont transverses électromagnétiques. Le deuxième terme correspond à des corrections de champ proche en $1/\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3$ et fait intervenir les trois polarisations, la plus importante étant celle suivant la direction de propagation \mathbf{u} .

$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0$ permet donc de résoudre l'équation des ondes pour une distribution arbitraire de sources en espace libre. Cependant, l'introduction de matériaux modifie

complètement ces solutions. Par exemple, les métaux imposent aux composantes tangentielles du champ électrique d'être nulles à leur surface aux fréquences microondes. Utiliser des parois métalliques pour clore un volume modifie donc fortement les solutions et fonctions de Green du milieu.

1.2.3 Cavités et problèmes des conditions aux limites

Nous avons introduit les solutions des équations de Maxwell avec et sans sources dans un milieu infini et homogène, l'espace libre. À présent, nous allons nous pencher sur ce que deviennent ces solutions lorsqu'on impose des conditions aux limites autour d'un domaine borné.

1.2.3.1 Modes propres et fréquences propres

Désormais, nous ne considérons plus un espace infini, mais un espace borné, Ω de volume V . Ce domaine est constitué d'un milieu homogène, expérimentalement de l'air et dont les propriétés électromagnétiques sont quasiment identiques à celles du vide. Ce domaine est borné sur son contour $\partial\Omega$ par des parois réfléchissantes, ce qui correspond mathématiquement à des conditions aux limites. Pour une cavité électromagnétique, celles-ci correspondent à des parois métalliques qui imposent l'annulation des composantes tangentielles du champ électrique ainsi que de la composante normale du champ magnétique.

Nous recherchons des solutions pour l'équation de Helmholtz 1.6 respectant les conditions aux limites. Cette équation n'est autre qu'une équation aux valeurs propres $-k_n^2$. On appelle pulsation propre $\omega_n = c_0 k_n$ la fréquence correspondant à la valeur propre $k^2 = k_n^2$. Les solutions de cette équation sont notées ψ_n et forment une base orthogonale de vecteurs propres que nous pouvons normaliser. Pour une fréquence différente de ces fréquences propres, l'unique solution est la solution nulle. En espace libre (milieu de dimension infini, sans conditions aux limites), les modes propres ne sont autres que les ondes planes, avec deux polarisations orthogonales possibles. En ce qui concerne les cavités, une solution analytique n'est connue que pour les géométries les plus simples, de types rectangulaire, sphérique ou cylindrique [13, 14, 15].

De manière générale l'équation de Helmholtz électromagnétique pour des cavités possède deux familles de solutions indépendantes, appelées transverses électriques (TE) et transverses magnétiques (TM) pour une cavité rectangulaire, par analogie aux modes de propagation dans les guides d'ondes, où une direction de

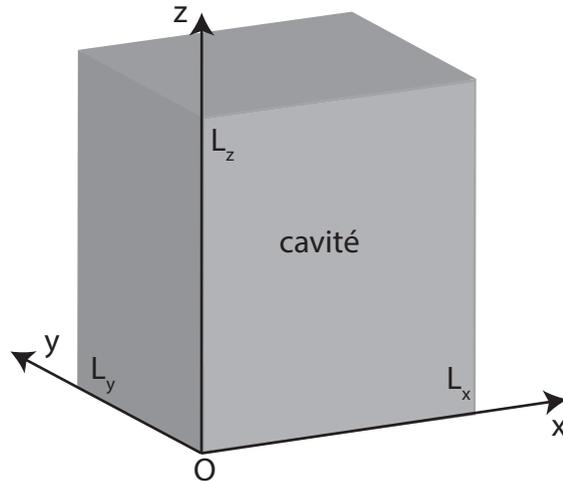


FIGURE 1.2: Axes et notations pour une cavité rectangulaire.

propagation est privilégiée. Dans la suite de cette partie, par convention nous choisissons l'axe \mathbf{z} pour étudier une cavité de géométrie rectangulaire. Tout d'abord parce que c'est une géométrie simple qui nous permettra d'introduire la plupart des concepts dont nous aurons besoin au cours de cette thèse, et d'autre part parce que c'est une géométrie fréquemment utilisée, notamment au cours de notre étude. L'origine du repère est défini sur la figure 1.2. La résolution exacte dans cette géométrie est aisée mais un peu lourde : la résolution indépendante de l'équation (1.6) pour chaque composante du champ électrique permet d'obtenir la solution générale pour \mathbf{E} à une constante multiplicative près pour chaque polarisation. L'utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss permet d'obtenir une équation reliant ces trois polarisations : l'espace des solutions générales est donc un espace vectoriel de dimension 2. Nous avons donc la liberté d'imposer $E_z = 0$ ou $B_z = 0$ pour définir l'ensemble des solutions : c'est ce qu'on appelle respectivement les modes TE et TM. Enfin, nous obtenons aisément le champ magnétique à partir du champ électrique et de l'équation de Maxwell-Faraday. La solution générale s'écrit alors sous la forme suivante pour les modes TE_{nmp} ($E_z = 0$) pour le champ électrique :

$$\begin{cases} E_x(\mathbf{r}) &= V_{TE} k_y \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y(\mathbf{r}) &= -V_{TE} k_x \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z(\mathbf{r}) &= 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Et pour le champ magnétique :

$$\begin{cases} B_x(\mathbf{r}) &= -\frac{V_{TE}}{i\omega} k_x k_z \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \\ B_y(\mathbf{r}) &= -\frac{V_{TE}}{i\omega} k_y k_z \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \\ B_z(\mathbf{r}) &= \frac{V_{TE}}{i\omega} (k_x^2 + k_y^2) \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \end{cases} \quad (1.22)$$

De la même manière, nous pouvons calculer les modes TM_{nmp} ($B_z = 0$) :

$$\begin{cases} E_x(\mathbf{r}) &= -A_{TM} \frac{c_0^2}{i\omega} k_x k_z \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y(\mathbf{r}) &= -A_{TM} \frac{c_0^2}{i\omega} k_y k_z \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z(\mathbf{r}) &= A_{TM} \frac{c_0^2}{i\omega} (k_x^2 + k_y^2) \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases} \quad (1.23)$$

Et pour le champ magnétique :

$$\begin{cases} B_x(\mathbf{r}) &= A_{TM} k_y \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \\ B_y(\mathbf{r}) &= -A_{TM} k_x \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \\ B_z(\mathbf{r}) &= 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

V_{TE} et A_{TM} sont des constantes réelles ayant respectivement les dimensions d'un potentiel scalaire (en V) et d'un potentiel vecteur (en V.s/m). Ces champs, ou modes, vérifient les conditions aux limites, c'est-à-dire l'annulation aux interfaces des composantes tangentielles du champ électrique et des composantes normales du champ magnétique. Ils sont de plus orthogonaux entre eux.

Les conditions aux limites d'annulation aux interfaces des composantes du champ électromagnétique, imposent la quantification des quantités k_x , k_y , k_z :

$$k_x = \frac{n\pi}{L_x} \quad , \quad k_y = \frac{m\pi}{L_y} \quad \text{et} \quad k_z = \frac{p\pi}{L_z} \quad (1.25)$$

Ceci peut être vu comme une somme d'ondes propagatives $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ qui forment des ondes stationnaires quantifiées à cause de la réverbération, c'est-à-dire des réflexions multiples, comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot. Pour les modes TE, seuls m ou n peuvent être nuls mais pas simultanément : le champ serait nul partout. Pour les modes TM, un seul de ces trois entiers peut être nul. Enfin la ré-injection des solutions de (1.21) et (1.24) dans l'équation de Helmholtz (1.6), impose la condition suivante :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.26)$$

Ainsi un champ électromagnétique ne peut exister dans une cavité parfaite (c'est-à-dire sans dissipation) qu'à certaines fréquences quantifiées, dites fréquences propres $\omega_{m,n,p}$.

$$\omega_{m,n,p} = \pi c_0 \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_z}\right)^2} \quad (1.27)$$

Par la suite, nous nous limiterons au champ électrique, et nous normalisons les modes en posant

$$\psi_{m,n,p,\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_{m,n,p,\sigma}(\mathbf{r})}{\sqrt{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{m,n,p,\sigma}(\mathbf{r})\|^2 d\mathbf{r}^3}} \quad (1.28)$$

où σ remplace la polarisation, TM ou TE. Les modes $\psi_{m,n,p,\sigma}$ ont donc la dimension de $V^{-1/2}$ soit une longueur à la puissance $-3/2$.

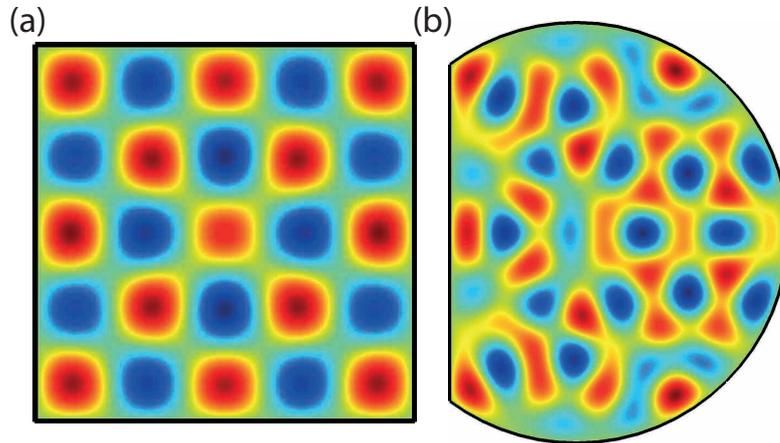


FIGURE 1.3: Parties réelles de modes propres de cavités à 2 dimensions de surface 1 m^2 et au voisinage de 1 GHz . (a) Cavité rectangulaire. (b) Cavité chaotique.

Nous avons illustré ici les solutions de l'équation de Helmholtz avec une cavité rectangulaire. Pour des cavités de géométries ou de conditions aux limites différentes, que ce soit pour des cavités désordonnées ou chaotiques, les solutions de l'équation de Helmholtz conservent les mêmes propriétés générales, à ceci près que la distribution des fréquences propres et la distribution spatiale des modes sont modifiées comme l'illustre la figure 1.3. Ainsi, des solutions n'existent que pour des fréquences propres ω_q , discrètes, auxquelles sont associées des champs propres $\psi_q(\mathbf{r})$, orthogonaux entre eux. Il n'est pas possible d'exciter la cavité en dehors de ces fréquences : l'équation de Helmholtz et les conditions aux limites y imposent un champ électromagnétique nul. Ces modes propres doivent cependant être excités avec une source. Nous devons donc nous intéresser aux fonctions de Green en milieux réverbérants.

1.2.3.2 Développement modal de la fonction de Green

Lorsqu'on introduit une source dans la cavité, celle-ci ne peut être excitée qu'aux fréquences propres : une antenne placée dans la cavité ne rayonne qu'à ces fréquences bien définies. Nous avons vu que l'équation des ondes (1.3) en cavité

prend la forme de l'équation de Helmholtz (1.6) en monochromatique. Ses solutions sont les modes propres ψ_n qui sont associés à des fréquences propres ω_n : c'est la base des solutions générales. La fonction de Green peut donc se développer sur ces modes et s'écrit [16] :

$$\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = c_0^2 \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (1.29)$$

Mathématiquement cette somme infinie est à prendre au sens des distributions, ou, explicitement :

$$\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = c_0^2 \sum_n \psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}) \text{VP} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} + \frac{i\pi}{2\omega_n} \delta(\omega - \omega_n) \right\} \quad (1.30)$$

Nous retrouvons la réponse impulsionnelle après une transformée de Fourier inverse, qui s'écrit :

$$\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = c_0^2 \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n} \sin(\omega_n (t - t')) \quad (1.31)$$

L'univers étant causal, cette expression n'est valable que pour $t > t'$, la fonction de Green temporelle étant nulle sinon.

1.2.3.3 La densité d'états

Les modes propres étant le support de la physique des ondes en cavité comme en témoigne la fonction de Green qui se décompose sur ceux-ci, il est fondamental de s'intéresser à la densité spectrale des modes, autrement dit le nombre de modes présents sur une bande passante donnée. Revenons sur l'exemple de la cavité rectangulaire, pour laquelle les modes et les fréquences propres sont connus (cf. équation 1.27), et vérifient l'équation (1.26) : $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c_0^2$. Pour compter ce nombre de modes, nous nous plaçons dans l'espace réciproque (ω, \mathbf{k}) et nous cherchons à savoir quel est le nombre de modes M dans la sphère de rayon $k = \omega/c_0$ (cf. figure 1.4). Le volume de chacun de ces M modes dans l'espace des impulsions est $\frac{1}{2} \frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{2V}$, le facteur 1/2 comptant pour les modes TM et TE. Le volume total de ces M modes occupe par ailleurs le huitième du volume de la sphère de rayon ω/c_0 soit $\frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi (\omega/c_0)^3$. Entre 0 et ω , le nombre M de modes est :

$$M(\omega) = \frac{1}{3\pi^2} V \frac{\omega^3}{c_0^3} \quad (1.32)$$

Cette loi asymptotique (valable à haute fréquence) est généralisable à toute géométrie de cavité et même à toute fonction mathématique vérifiant l'équation de

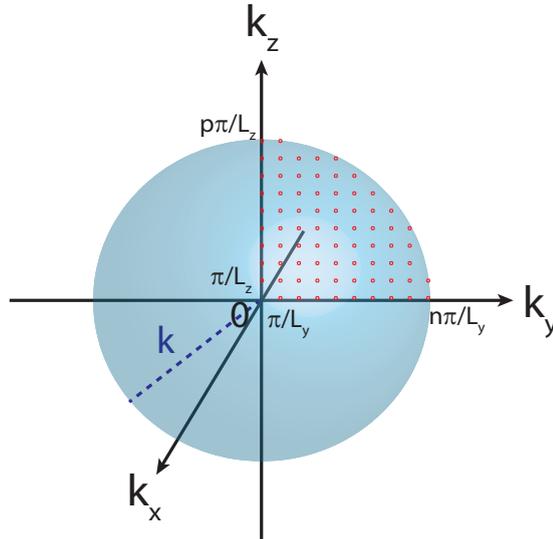


FIGURE 1.4: Représentation schématique du volume spectral de M modes d'une cavité parallélépipédique dans la sphère de rayon $k = \omega/c_0$.

Helmholtz dans un volume fini avec des conditions aux limites imposant son annulation : c'est la loi de Weyl [17, 18]. Cette loi est universelle et reste valable pour des ondes scalaires (à un facteur $1/2$ près), des particules relativistes ou des cavités supraconductrices que ce soit en dimension 2 (à condition de remplacer le volume par l'aire et l'aire par le périmètre) ou 3 [19, 20]. Les corrections d'ordres inférieurs en ω/c_0 dépendent des conditions aux limites. Le terme d'ordre inférieur, en k^2 est ainsi proportionnel à la dimension A des frontières du domaine $\partial\Omega$. Par exemple dans notre cas (cavité micro-onde à 3 dimensions), il est de $-\frac{A\omega^2}{8\pi c_0^2}$ pour des conditions aux limites de Dirichlet (annulation du champ électrique sur $\partial\Omega$) et serait de $+\frac{A\omega^2}{8\pi c_0^2}$ pour des conditions de Neumann (annulation sur $\partial\Omega$ de la dérivée normale du champ électrique). Dans certains cas ce terme est nul, par exemple pour des particules relativistes qui obéissent à l'équation de Dirac. Ce développement peut encore être raffiné et le terme suivant dépend du rayon de courbure de $\partial\Omega$ et des angles éventuels du domaine [21].

Par ailleurs la densité d'états, *Density Of States* en anglais (DOS), est définie par :

$$\rho(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_n) \quad (1.33)$$

La DOS est une distribution qui compte le nombre de modes à fréquence donnée. Nous pouvons remarquer qu'en intégrant la DOS entre la fréquence nulle et celle correspondant au $M^{\text{ème}}$ mode propre, nous obtenons : $\int_0^{\omega(M)} \rho(\omega) d\omega = M$. Ainsi, la DOS peut être approximée à haute fréquence par une fonction continue, assimilable à une moyenne mobile. Au cours de cette thèse, nous approximerons donc la densité

d'état par $dM/d\omega$:

$$\rho(\omega) \approx \frac{V \omega^2}{\pi^2 c_0^3} \quad (1.34)$$

Ainsi sur une bande passante $\Delta\omega \ll \omega$ au voisinage de ω , il y a statistiquement un nombre N de modes :

$$N \approx \frac{dM}{d\omega} \Delta\omega = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c_0^3} \Delta\omega \quad (1.35)$$

Nous verrons dans les chapitres suivant que ces modes jouent un rôle essentiel pour contrôler les ondes dans une cavité.

Enfin, on définit la densité locale d'états (LDOS), par :

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2\omega}{\pi c_0^2} \text{Im} \left[\text{Tr} \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \right] \quad (1.36)$$

Cette densité d'états indique le nombre de modes qui participent à un endroit donné à la physique de la cavité. Autrement dit, c'est le nombre de modes propres non nuls à la position considérée. En utilisant l'expression de la fonction de Green (équation 1.30), on montre que :

$$\rho(\omega) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r}^3 \quad (1.37)$$

1.2.4 Phénomènes dissipatifs et cavités électromagnétiques réelles

Nous venons d'introduire divers concepts pour des cavités parfaites, c'est-à-dire des cavités correspondant à une situation théorique où il n'y aurait aucune dissipation. Cette dernière est cependant inévitable dans des cavités réelles. Nous allons à présent montrer le rôle fondamental joué par la dissipation dans la physique des ondes en milieux réverbérants.

1.2.4.1 Dissipation ohmique

Dans une cavité réelle, plusieurs phénomènes introduisent une dissipation de l'énergie. L'effet Joule en est une des causes principales. En effet, les métaux ne sont pas parfaits et possèdent une conductivité finie σ telle que $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$: c'est la loi d'Ohm. Un champ électrique d'amplitude E_0 incident sur une paroi métallique y excite un courant \mathbf{j} parallèlement à la paroi et sur une profondeur δ appelée

épaisseur de peau. Le courant dans le volume du métal y dissipe de l'énergie par effet Joule. Cette puissance absorbée s'écrit alors de la manière suivante [13, 14] :

$$P_{diss} \propto \frac{S}{\sigma \delta} |E_0|^2 \quad (1.38)$$

où le coefficient de proportionnalité de l'ordre de l'unité dépend du mode considéré. L'épaisseur de peau est donnée par [13] :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \quad (1.39)$$

Aux fréquences micro-ondes, l'épaisseur de peau est de l'ordre de quelques micromètres, pour une conductivité de l'ordre de 10^7 S/m.

1.2.4.2 Couplage de la cavité à l'extérieur

Créer des champs stationnaires dans une cavité nécessite de pouvoir injecter de l'énergie. Pour cela, il faut introduire des antennes ou percer des ouvertures dans la paroi. Plus l'antenne est efficace (i.e. adaptée en impédance) ou plus le trou est grand, et plus le couplage entre la cavité et l'extérieur est important. Cela diminue le temps de vie de l'onde dans la cavité, mais diminue également le temps requis pour charger la cavité en énergie : les constantes de temps de charge et de décharge sont identiques.

Une antenne peut-être modélisée comme un dipôle auquel sont associés un moment dipolaire et une densité de courant. Considérons donc deux dipôles p_a et p_b placés aux positions \mathbf{r}_a et \mathbf{r}_b . Le dipôle en \mathbf{r}_a crée un champ \mathbf{E} dans la cavité, qui se propage et excite le dipôle à la position \mathbf{r}_b . En d'autres termes une antenne excitée par la distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}_a)$ crée une distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}_b)$ sur la deuxième antenne placée en \mathbf{r}_b . Le rapport de ces deux quantités est appelé transmission. C'est expérimentalement la grandeur facilement mesurable en micro-ondes avec un analyseur de réseau. Pour caractériser la transmission entre deux points a et b , on introduit la matrice de propagation \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

La matrice (S_{ab}) permet de relier les grandeurs mesurées en a lorsque le système a été excité en b . Les coefficients S_{aa} et S_{bb} représentent donc des coefficients de réflexion alors que les coefficients S_{ab} et S_{ba} représentent les transmissions de b vers a et a vers b . La matrice \mathbf{S} est reliée relativement simplement à la fonction de

Green modifiée par l'introduction des antennes [22, 23] :

$$S_{ab}(\omega) = \delta_{ab} - 2i |T(k)|^2 G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \omega) \quad (1.41)$$

où T décrit le couplage entre les antennes et la cavité et dépend essentiellement de la fréquence, de la taille et de la géométrie des antennes. C'est l'équivalent de la formule de Breit Wigner connue depuis plus de 80 ans en physique nucléaire [24, 25]. Le point critique soulevé est que la fonction de Green ainsi mesurée est la fonction de Green modifiée par la présence même des antennes qui introduisent donc de la dissipation. Cependant, si on ne s'intéresse qu'à la transmission et qu'on utilise des antennes de faibles dimensions (donc non adaptées en impédance), on considère en général que S_{ab} et $G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \omega)$ sont proportionnelles pour un couple d'antennes choisi.

1.2.4.3 Autres processus dissipatifs

La dissipation ohmique des parois est inéluctable, tandis que le couplage de la cavité à une antenne est généralement nécessaire pour exciter un champ électromagnétique. Cependant d'autres processus dissipatifs peuvent exister. Des ouvertures, qu'elles soient désirées pour rayonner de l'énergie, ou parce que la cavité est mal fermée produisent également de la dissipation, sous forme de pertes radiatives ou de fuites. D'autres matériaux présents dans la cavité peuvent induire de la dissipation. Les diélectriques, par exemple, absorbent toujours une part plus ou moins importante de l'onde qui les traverse. Cette énergie est convertie en chaleur. Les milieux non linéaires se comportent également comme des absorbants pour une onde incidente, mais convertissent l'onde électromagnétique à la fréquence incidente en une onde d'une fréquence différente.

Il existe donc un grand nombre de phénomènes dissipatifs possibles, qu'il faut caractériser au cas par cas. Au cours de cette thèse, nous utiliserons des cavités aux parois métalliques subissant de la dissipation ohmique. Nous y insérerons des antennes qui entraîneront également un couplage. nous percerons des ouvertures, provoquant ainsi une dissipation radiative bien désirée. Nous serons même amenés à introduire des absorbants au chapitre 5 pour diminuer la densité d'état dans la cavité. Pour caractériser les pertes et déterminer les canaux de dissipation principaux, nous introduisons le facteur de qualité.

1.2.4.4 Le facteur de qualité

Un champ électromagnétique excité dans une cavité décroît de manière exponentielle à cause des différentes sources de dissipation, avec un certain temps caractéristique τ . Plus la dissipation est importante, plus le temps de décroissance est faible, et plus le champ électromagnétique devient rapidement nul. Nous ne pouvons plus strictement parler de modes car il faut inclure la dissipation dans l'équation de Helmholtz, et les valeurs propres deviennent complexes. Malgré cela, le champ continue à avoir de fortes amplitudes pour les fréquences avoisinant les fréquences propres : ce sont des résonances. Comme pour un résonateur amorti, ces résonances ont une certaine largeur spectrale, reliée au temps de décroissance du champ $\gamma_n = \frac{2\pi}{\tau_n}$. Les fréquences de résonance ω_n sont inférieures aux fréquences propres correspondantes ω_n^0 , et leurs sont reliées par la relation : $\omega_n = \omega_n^0 - \gamma_n$ [13]. L'intensité du champ est ainsi de forme lorentzienne au voisinage de la résonance :

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_n^0 - \gamma_n)^2 + (\gamma_n/2)^2} \quad (1.42)$$

Le facteur de qualité Q se définit par la quantité d'énergie U stockée dans la cavité moyennée sur une période, divisée par la puissance dissipée. On montre facilement [13] que Q est proportionnel au rapport ω_n sur γ_n :

$$Q = \frac{\omega_n U}{P_{diss}} = \frac{\omega_n}{2\gamma_n} \quad (1.43)$$

Le facteur de qualité caractérise la dissipation dans un milieu réverbérant. C'est l'inverse de la proportion d'énergie perdue par cycle optique. A ce titre, cela permet de comparer des cavités très différentes à plusieurs fréquences. Réciproquement, c'est aussi un paramètre de contrôle de la physique de la cavité. En effet, l'expérimentateur possède un degré de contrôle de la dissipation (en introduisant des matériaux absorbants) et donc du facteur de qualité. Il est alors possible de contrôler la largeur des résonances et donc le nombre de résonances qui contribuent à la physique de la cavité à une fréquence donnée, comme nous le verrons un peu plus loin (paragraphe 1.5).

Revenons à la dissipation ohmique. Pour une cavité métallique on montre que le facteur de qualité dû à la dissipation par effets ohmiques peut se calculer par :

$$Q = \frac{V}{S\delta} K \quad (1.44)$$

avec S la surface de la cavité, δ l'épaisseur de peau du matériau et K un coefficient géométrique de l'ordre de 1 et dépendant de la géométrie et du mode considéré.

Dans le cas de différentes sources de dissipation, le facteur de qualité total se calcule de la manière suivante, en raison du fait que ce sont les puissances dissipées qui s'ajoutent :

$$Q_{tot}^{-1} = Q_{rad}^{-1} + Q_{ohm}^{-1} + Q_{volume}^{-1} + Q_{antennes}^{-1} \dots \quad (1.45)$$

1.2.4.5 Fonction de Green d'une cavité réelle

Par analogie avec un oscillateur amorti, on étend phénoménologiquement la définition de la fonction de Green d'un système fermé aux cavités réelles par :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = c_0^2 \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\gamma_n}{2}} \quad (1.46)$$

Pour simplifier les notations, nous avons ici négligé le décalage des parties réelles des résonances, en réalité, $\omega_n \approx \omega_{0n} - \gamma_n$. En général, la dissipation est faible $\gamma_n \ll \omega_n$, et la formule précédente est fréquemment approximée par la suivante :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{c_0^2}{2\omega} \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n - \omega + i \frac{\gamma_n}{2}} \quad (1.47)$$

1.2.4.6 Influence de la dissipation sur la densité d'états

La LDOS (et donc la DOS) peut se développer sur les résonances de la même manière que la fonction de Green :

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n \frac{|\psi_n(\mathbf{r})|^2}{\pi} \frac{\gamma_n/2}{(\omega_n - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2} \quad (1.48)$$

Ainsi à haut facteur de qualité, la DOS est peu modifiée par rapport au cas sans dissipation (voir figure 1.5 (a)), si ce n'est qu'elle reste finie aux fréquences de résonances. Ces résonances ont également acquis une largeur spectrale γ_n . En revanche, lorsque la dissipation augmente et que la largeur spectrale devient de l'ordre de la distance spectrale entre deux résonances successives, plusieurs résonances contribuent à la DOS (figure 1.5 (b)). Les résonances plus éloignées n'ont pas ou peu d'influences.

Par conséquent le nombre de modes contribuant significativement à la DOS à une fréquence donnée, ou à la fonction de Green monochromatique est donné par la densité spectrale multipliée par la largeur spectrale $2\gamma_n$, soit d'après l'équation 1.35 :

$$N(\omega) \approx \rho(\omega) 2\gamma_n = \frac{2}{\pi^2} \frac{V \omega^3}{Q c_0^3} \quad (1.49)$$

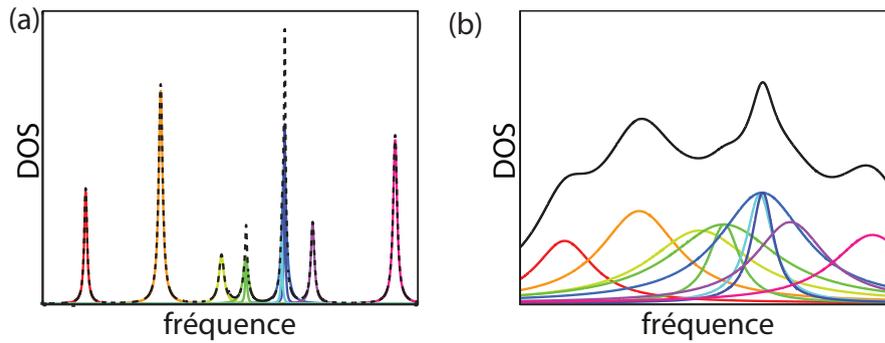


FIGURE 1.5: Effet de la dissipation sur la densité d'état. (a) À haut facteur de qualité. (b) À bas facteur de qualité. En noir : DOS du système, couleurs : contribution de chaque résonance.

En conclusion, à une fréquence donnée, plusieurs modes contribuent à la DOS. Le facteur de qualité Q permet de contrôler le régime de la cavité et de passer d'un régime unimodal à fréquence donnée à un régime multimodal où de nombreux modes contribuent à la DOS. Nous verrons aux chapitres 4 et 5 quelles en sont les conséquences sur le contrôle des micro-ondes en milieux réverbérants.

1.3 Degrés de liberté en milieux complexes

Nous venons de voir que le champ dans la cavité se décompose sur une base de modes propres. Contrôler ces modes permet donc de manipuler le champ ondulatoire. Dans cette partie, nous allons généraliser ce concept aux milieux complexes. Ces derniers sont caractérisés par le fait que les ondes sont réfléchies ou diffusées de nombreuses fois. Cette complexité peut être décrite en terme de degrés de liberté qui sont autant de leviers que l'expérimentateur peut actionner. Ensuite, nous détaillerons deux méthodes utilisant ces degrés de liberté pour contrôler les ondes et que nous utiliserons au cours de cette thèse. La première est celle bien connue et pratiquée à l'Institut Langevin depuis plus de 20 ans pour manipuler des champs acoustiques et électromagnétiques : le retournement temporel. La deuxième est surtout utilisée en optique pour contrôler les ondes en milieux multiples diffusants : c'est le façonnage de fronts d'onde avec des modulateurs spatiaux de lumière (*Spatial Light Modulator* en anglais, SLM). Nous verrons comment adapter cette technique aux micro-ondes en milieux réverbérants dans les derniers chapitres 4 et 5.

1.3.1 Milieux réverbérants et degrés de liberté

1.3.1.1 Théorème des images

Auparavant, nous avons décrit le champ dans les cavités à l'aide de modes propres. C'était une approche purement monochromatique. Une autre manière de voir les choses vient de l'approche temporelle, qui met en évidence des sources virtuelles. En effet, on parle de milieux complexes lorsque les ondes qui s'y propagent subissent des réflexions sur un grand nombre d'inhomogénéités. On dit aussi qu'elles sont diffusées par de nombreux obstacles. Ceci se produit lorsqu'une onde se propage dans un milieu constitué d'un grand nombre de particules diffusantes comme les ondes visibles dans le lait ou le brouillard. Ceci se manifeste également à l'intérieur d'une cavité réverbérante lorsque les ondes se réfléchissent sur les parois métalliques, le champ total devenant diffus après quelques réverbérations. Une manière simple de comprendre ces effets de diffusion, consiste à voir ces particules ou parois comme des sources secondaires de Huygens, excitées par l'onde incidente. Au champ balistique incident s'ajoutent alors les ondes créées par les sources secondaires.

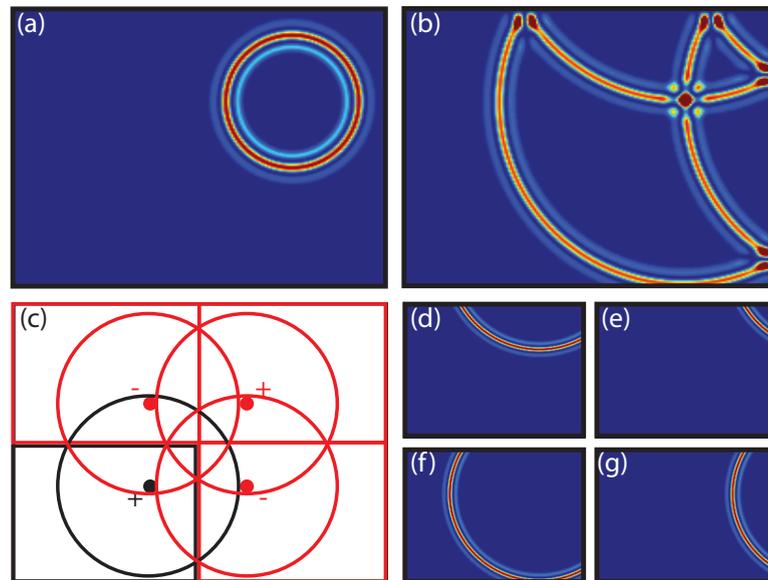


FIGURE 1.6: Évolution du champ électrique peu après l'émission d'une impulsion brève dans la cavité. (a) Aux temps très courts, il n'y a pas de réflexion : tout se passe comme si le champ évoluait en espace libre. (b) Le champ après les réflexions en haut et à droite de la cavité se décompose en quatre ondes (d-g) évoluant comme en espace libre, et créés par (c) la source réelle et des sources fictives symétriques par rapport aux limites de la cavité à la source réelle. La cavité réelle et son antenne sont représentées en noir et les cavités et antennes fictives en rouge.

Le champ peut donc se réécrire comme une contribution de plusieurs sources secondaires. Prenons l'exemple d'une cavité rectangulaire, comme celle de la figure 1.6. Une antenne quasi ponctuelle à la position \mathbf{r}_a émet un signal temporel court (par exemple gaussien), qui se propage dans le reste de la cavité. À des temps très courts, l'onde n'a pas atteint une quelconque paroi de la cavité et se propage comme si elle était en espace libre comme sur la figure 1.6 (a). Lorsque l'onde atteint la paroi de la cavité, cette dernière impose des conditions aux limites, annulant les composantes tangentes à la paroi du champ électrique, ainsi que les composantes normales du champ magnétique. Prenons l'exemple d'un champ électrique polarisé dans la direction hors plan de la figure. Les parois métalliques imposent une condition d'annulation du champ électrique sur la surface. Tout se passe donc comme si une antenne symétrique de la première émettait un champ \mathbf{E}_1 opposé au champ créé par l'antenne à la position \mathbf{r}_a , la somme de ces deux champs étant bien nulle sur la paroi de la cavité. Chaque réflexion de l'onde initiale peut donc s'interpréter comme le champ créé par une antenne fictive à l'extérieur de la cavité et image de l'antenne réelle par un nombre fini de réflexions par rapport aux parois de la cavité. La figure 1.6 (b) représente le champ électrique après que l'onde s'est réfléchi sur les parois à droite et en haut. Tout se passe dans le domaine Ω comme si on était en espace libre avec quatre antennes : l'antenne réelle, représentée en noire sur la figure 1.6 (c), et trois antennes fictives, représentées en rouge. Plus le temps auquel nous voulons étudier le champ augmente, plus il faut considérer d'antennes fictives qui sont de plus en plus éloignées de la cavité. Les modes propres que nous avons introduits précédemment sont constitués de la superposition de toutes ces ondes. Ainsi, plus le facteur de qualité Q augmente, plus il faut considérer des sources fictives d'ordre élevé. Ces sources secondaires peuvent être gênantes si on travaille avec les outils habituels utilisés en espace libre. Mais ce sont également de nouveaux degrés de liberté et nous allons voir par la suite qu'il est possible d'en tirer parti grâce au retournement temporel.

1.3.1.2 Le retournement temporel : principe

Maintenant que nous avons décrit le champ dans la cavité comme une superposition d'ondes qui arrivent successivement, il paraît naturel de traiter ce problème temporellement, et c'est ce qui a été fait par Mathias Fink avec le retournement temporel au laboratoire (à l'époque le LOA) dans les années 1990. De nombreuses publications du laboratoire en expliquent les principes [26, 27, 28]. Les travaux initiés en acoustique ont ensuite été transposés avec succès aux micro-ondes [8, 9, 29]. Malgré la difficulté de contrôler la phase en optique, des simulations à des longueurs d'onde visibles posent les bases d'expériences à venir [30, 31]. L'efficacité du retournement temporel repose sur trois propriétés : le grand nombre de

sources virtuelles des milieux complexes, l'invariance par retournement du temps de l'équation des ondes, et les théorèmes intégrales. En pratique, le retournement temporel consiste à faire converger simultanément en un point les signaux émis par les sources virtuelles, de manière à créer une focalisation spatio-temporelle.

En effet, l'équation temporelle des ondes pour le champ électrique (équation 1.4) ne possède que des dérivées d'ordre 2 par rapport au temps. En conséquence, si $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ est solution cette-ci, alors il existe une solution duale : $\mathbf{E}(\mathbf{r}, -t)$, qui converge vers la source du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Cependant retourner temporellement le champ en tout point du volume est difficile. Le théorème de Helmholtz-Kirchhoff [32] (valable pour une onde scalaire mais généralisable à une onde vectorielle [29]) montre qu'il suffit de retourner temporellement le champ sur une surface entourant la source pour créer la solution duale. Ceci est fait en enregistrant le champ initial sur un grand nombre de capteurs sur cette surface, appelée miroir à retournement temporel, en retournant temporellement par ordinateur les signaux mesurés ($s(t)$ devient $s(-t)$) puis en réemettant ces signaux depuis les capteurs qui font alors office d'émetteurs. Cette surface de capteurs-émetteurs est appelée miroir à retournement temporel (MRT).

1.3.1.3 Le retournement temporel monovoie

Le retournement temporel monovoie (*one channel time reversal* en anglais) n'utilise qu'une unique antenne dans un milieu complexe comme miroir à retournement temporel. C'est la méthode que nous utiliserons au chapitre 2 pour focaliser des ondes sur des dimensions petites devant la longueur d'onde.

La première expérience démontrant la faisabilité du retournement temporel monovoie a été réalisée en 1997 au laboratoire par Mathias Fink et Carsten Draeger [33, 34, 35] puis dans le cadre de la thèse de Julien de Rosny [36, 37]. Dans cette expérience fondatrice, ce sont des ondes élastiques à la surface d'une cavité à 2 dimensions en silicium, de taille caractéristique de 10 cm, qui sont étudiées (figure 1.7). La cavité en forme de D est un cercle coupé par un trait, cette géométrie particulière est chaotique pour une particule classique : il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour qu'une particule, ou un rayon, visite un point donné avec une précision arbitrairement petite. Pour les ondes, cette cavité est très désordonnée à cause de la présence simultanée de zones courbes et droites. On ne peut pas définir précisément de sources virtuelles comme pour la cavité rectangulaire de la figure 1.6 mais cela revient à considérer une distribution complexe et continue de sources secondaires. Le champ en un point de la cavité peut donc se ramener à

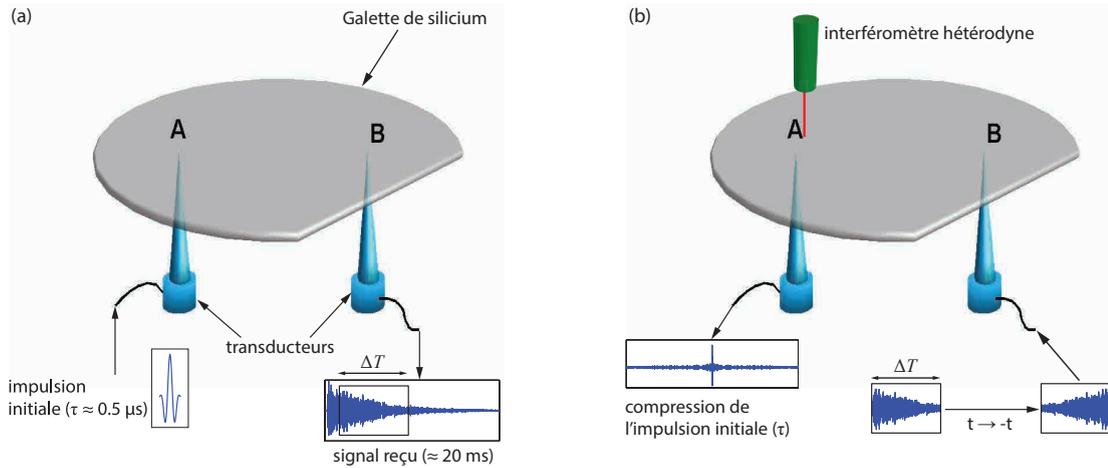


FIGURE 1.7: Retournement temporel monovoie : montage expérimental. (a) Phase d'apprentissage. (b) Phase de retournement temporel et de refocalisation.

la superposition de signaux de phases et de directions aléatoires : la cavité est ergodique et son champ ondulatoire peut éventuellement être modélisé par la théorie des phases aléatoires (RPA : *Random Phase Approximation*).

Deux transducteurs quasi-ponctuels permettent de générer des ondes dans la cavité et de mesurer le déplacement en deux positions A et B. Un interféromètre hétérodyne permet de mesurer le champ de déplacement de la surface au voisinage du point A [38]. Le transducteur A émet un signal court $s(t)$ de durée $\tau = 0,5 \mu\text{s}$ avec une fréquence centrale de 1 MHz (figure 1.7 (a)). Le transducteur B, quant à lui, mesure un signal très long d'environ 20 ms, soit plus de 40000 fois le signal initial (figure 1.7 (b)) : $s_B(t) = G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t) *_{t} s(t)$. Ce signal est donc la signature au point B de l'onde divergente qui avait initialement été créée en A. Il fait évidemment apparaître la succession d'un grand nombre d'échos issus des différentes sources secondaires. En conséquent, ce signal a un aspect aléatoire à cause de la complexité de G mais comporte néanmoins beaucoup d'informations. Sa durée s'explique par la très faible absorption de la cavité de silicium et l'inexistence de dissipation radiative : chaque rayon partant de A se réfléchit plusieurs milliers de fois.

L'idée du retournement temporel consiste alors à faire réémettre par le point B le signal $s(-t)$. Étant donné que $s(t)$ est le signal de l'onde divergente, on espère pouvoir recréer l'onde convergente. Ici, seule une partie de ce signal $40 \mu\text{s} < \Delta T < 1,2 \text{ ms}$ est utilisée pour la refocalisation temporelle. Ce signal de durée ΔT est donc retourné temporellement et réémis en B : $s_{B,RT}^{\Delta T}(t) = G^{\Delta T}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, -t) *_{t} s(-t)$. Le signal en tout point \mathbf{r} de la cavité est alors : $s_{RT}^{\Delta T}(\mathbf{r}, t) = G^{\Delta T}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, -t) *_{t} s(-t) *_{t} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B, t)$.

La figure 1.8 met en évidence l'efficacité de cette approche pour focaliser des ondes en milieu réverbérant : quelques microsecondes avant la refocalisation des ondes en A (à $t < T$), le champ au voisinage de A est assimilable à un bruit isotrope (c'est une figure de *speckle*) ; sur la première (respectivement la dernière) image de la figure 1.8, nous voyons l'onde convergente (respectivement divergente) s'ajouter à la figure de *speckle* ; à la refocalisation ($t = T$), le champ est focalisé en A, c'est-à-dire que la largeur du pic à mi-hauteur a la dimension de la demi longueur d'onde $\lambda/2$ à la fréquence centrale bien qu'une seule antenne ait été utilisée comme MRT. La cavité réverbérante se comporte comme une lentille d'ouverture angulaire maximale. La figure 1.8 illustre également la divergence de l'onde focalisée aux temps longs $t > T$.

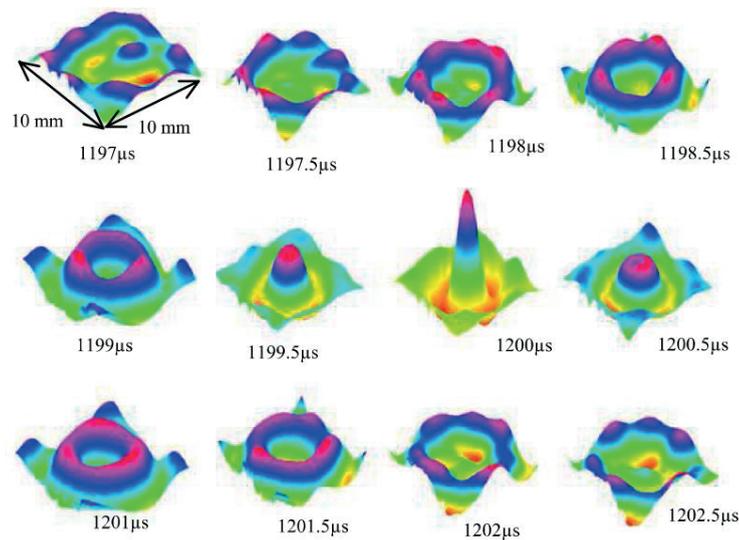


FIGURE 1.8: Retournement temporel monovoie au voisinage des points et instants de refocalisation.

La qualité de la refocalisation à la fois spatiale et temporelle dépend de la durée ΔT du signal utilisé pour le retournement temporel : plus ΔT augmente, plus le signal refocalisé a une amplitude importante et plus le rapport signal sur bruit (SNR : *signal to noise ratio* en anglais) est élevé. Les auteurs mettent même en évidence une simple relation de proportionnalité entre les deux. En effet, dans cette expérience, ΔT est toujours inférieure au temps caractéristique nécessaire pour résoudre les modes, appelé temps d'Heisenberg τ_H . Ce dernier est égale à la DOS, et dans le cas qui nous intéresse, de l'ordre de la dizaine de millisecondes.

Dans ce qui suit, nous interprétons en terme de degrés de liberté ces résultats qui montrent que le retournement temporel est un moyen très efficace pour contrôler les ondes en milieux réverbérants, même avec une unique source. Ceci

nous permet de faire le lien avec les outils mathématiques que nous avons introduits précédemment, comme les modes propres d'une cavité.

1.3.1.4 Interprétation en terme de degrés de liberté fréquentiels

Nous avons vu que le champ ondulatoire dans la cavité peut s'écrire sur la base des modes propres. Lorsque la source émet un signal bref initial (figure 1.9 (a)), celui-ci se décompose à $t > 0$ en une somme de sinusoïdes de fréquences différentes (figure 1.9 (b)). Ce sont les fréquences de résonance des modes de la cavité. Ces différents modes propres (ψ_1, ψ_2 , etc.) (figure 1.9 (d)), initialement en phase en A à $t = 0$, oscillent tous à leurs fréquences propres (ω_1, ω_2 , etc.). Très rapidement ces modes interfèrent donc aléatoirement. Le nombre de modes propres indépendants N_f est donné par la bande passante utilisée $\Delta\omega$ divisée par la fréquence de corrélation du champ $\delta\omega$, et qui est par définition la fréquence moyenne qui sépare deux fréquences pour lesquelles les champs correspondant sont statistiquement indépendants :

$$N_f = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \quad (1.50)$$

Notons que $\delta\omega$ peut être suivant les cas, soit l'écart fréquentielle entre chaque résonance si celles-ci sont distinctes comme sur la figure 1.5 (a), soit la largeur moyenne des résonances si elles sont larges (figure 1.5 (b)).

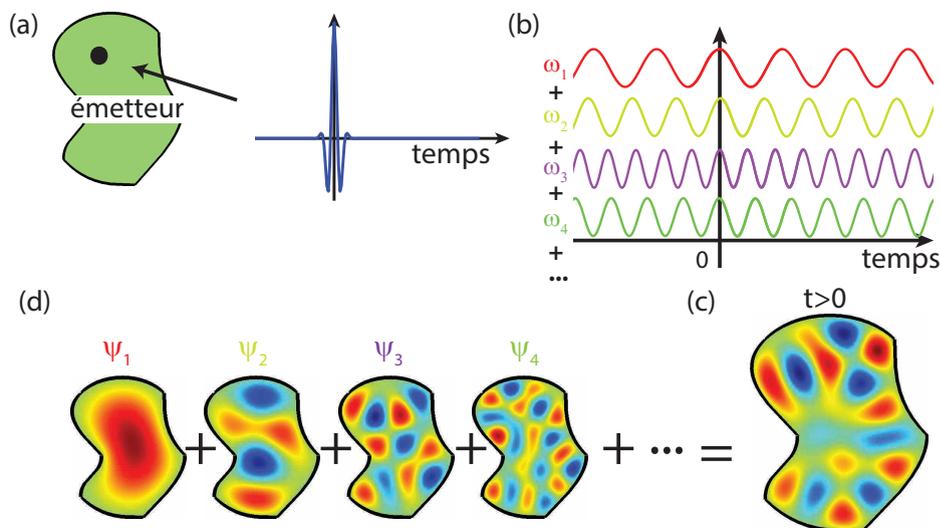


FIGURE 1.9: Les degrés de liberté fréquentiels. (a) La source émet un signal bref. (b) Ce signal se décompose en une somme de sinusoïdes de différentes fréquences qui sont les fréquences propres de la cavité. (c) Les modes propres correspondants se somment de manière incohérente à $t > 0$ (d).

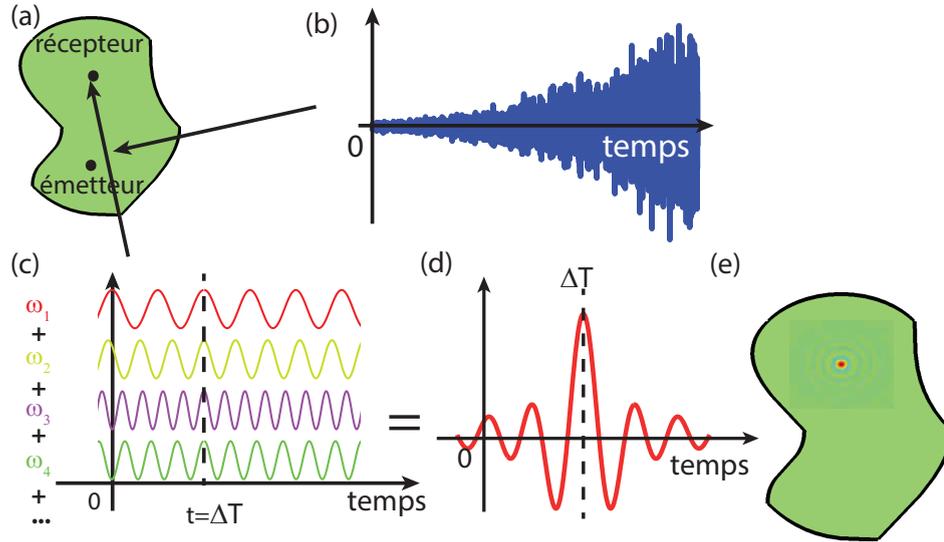


FIGURE 1.10: Focalisation par retournement temporel. (a) Les rôles des émetteur et récepteur sont inversés. (b) Le signal reçu en B est retourné et réémis. (c) En A, les signaux incohérents se synchronisent à $t = \Delta T$. (d) En conséquence, le signal en A est focalisé temporellement mais aussi (e) spatialement.

Le récepteur en B, enregistre la somme incohérente de ces signaux temporels. Ces signaux, une fois retournés temporellement et réémis en B (figure 1.10 (b)), se synchronisent en A après une durée ΔT (figure 1.10 (c)), en vertu de la réciprocité et de la réversibilité de la fonction de Green. La synchronisation de ces modes crée ainsi une tache focale en A (figures 1.10 (d,e)), d'amplitude proportionnelle à N_f , et dont la dimension caractéristique est donnée par la variation spatiale des modes supportés dans la bande passante utilisée. À une date $t > 0$ et en tout point $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_a$ (c'est-à-dire les points \mathbf{r} distants de \mathbf{r}_a d'au moins une demi longueur d'onde), la somme de ces modes est incohérente (figure 1.9 (c)). Le champ est donc proportionnel à la racine carrée de N_f , alors qu'à $t = 0$ et en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$, ces modes se somment de manière cohérente pour donner un champ proportionnel à N_f . En conséquence le SNR est défini comme le rapport de l'énergie du signal au point focal et au temps focal et la moyenne de l'énergie du signal en dehors de la région située à proximité du point focal (région distante de moins d'une longueur de corrélation du focus), et du temps en dehors de la date focale (et de l'intervalle proche défini par la fréquence de corrélation) :

$$SNR = \frac{s^2(\mathbf{r}_A, T)}{s\langle^2(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_A, t \neq T)\rangle} \propto N_f^2/N_f = N_f \quad (1.51)$$

1.3.1.5 Interprétation en terme de degrés de liberté temporels

Nous pouvons également interpréter l'expérience du retournement temporel monocanal en cavité dans le domaine temporel. Nous allons relier le nombre de degrés de liberté fréquentiels à la durée du signal retourné temporellement.

Le théorème des images affirme l'existence de sources virtuelles créées par la réverbération. Chacune procure un degré de liberté temporel supplémentaire permettant de contrôler le champ ondulatoire à l'intérieur de la cavité. Ce nombre N_t de sources virtuelles est donné par le rapport de la durée du signal ΔT mesuré, tant que cette dernière reste inférieure au temps d'Heisenberg τ_H , divisée par la durée de l'impulsion initiale τ :

$$N_t = \frac{\Delta T}{\tau} \quad (1.52)$$

Lorsque $\Delta T > \tau_H$, les sources fictives additionnelles ne sont que des copies des sources fictives précédentes. en effet, l'onde a déjà visité toute la cavité et résolu tous les modes. Le nombre de degré de liberté temporels sature donc à $N_t = \frac{\tau_H}{\tau}$.

1.3.1.6 Équivalence des degrés de liberté fréquentiels et temporels

La dualité temps-fréquence suggère un lien entre les degrés de liberté fréquentiels et temporels. En effet, la bande passante du signal est directement déterminée par la durée de l'impulsion τ : $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. De même, la durée du signal enregistré ΔT est inversement proportionnelle à la résolution spectrale des résonances : $\delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta T}$, tant que $\Delta T < \tau_H$. Dans le cas contraire la résolution spectrale est par définition donnée par $\delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_H}$. Les degrés de liberté temporels et fréquentiels sont égaux et nous avons donc $N_f = N_t \propto \min(\Delta T, \tau_H)/\tau$. Le champ dans la cavité peut ainsi s'écrire aussi bien comme une somme sur les modes de la cavité (équation 1.31), que comme une somme sur les champs créés par les antennes fictives aux positions \mathbf{r}_m :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = c_0^2 \sum_n^{N_s} \frac{\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r})\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_a)}{\omega_n^2 - \omega^2} i\mu_0\omega \mathbf{j}(\mathbf{r}_a, \omega) = \sum_m^{N_t} \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m, \omega) i\mu_0\omega \mathbf{j}(\mathbf{r}_m, \omega) \quad (1.53)$$

avec $\mathbf{j}(\mathbf{r}_m, \omega) = r^p \mathbf{j}(\mathbf{r}_a, \omega)$, où r et p sont respectivement le coefficient et le nombre de réflexions sur les parois et $N_f = N_t$. Ainsi les degrés de liberté fréquentiels et temporels sont équivalentes. Le SNR, le rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit est donc proportionnel à la durée du signal retourné :

$$SNR = \frac{s^2(\mathbf{r}_A, T)}{\langle s^2(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_A, t \neq T) \rangle} \propto N_t = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} = \frac{\Delta T}{\tau} \quad (1.54)$$

la dernière égalité n'étant valable que si $\Delta T < \tau_H$.

Dans cette partie, nous avons défini des degrés de liberté temporels (ou spectraux) qui correspondent aux modes de la cavité. En temps normal, ces modes interfèrent aléatoirement dans le temps et dans l'espace. Cependant, le retournement temporel permet de synchroniser ces modes à une position et à une date donnée, pour les faire interférer constructivement : c'est la focalisation. Ceci a été mis en évidence avec des ondes élastiques en milieu réverbérant. Nous allons voir que d'autres milieux peuvent mettre à profit la notion de degrés de liberté : les milieux multidiffusants. Ceux-ci présentent des degrés de liberté fréquentiels, mais aussi spatiaux. Ce sont sur ces derniers que nous allons nous concentrer dans la partie suivante.

1.3.2 Les milieux multidiffusants en optique

Un milieu multidiffusant est un milieu qui contient une grande densité de particules qui diffusent les ondes. Ces particules, qui peuvent être diélectriques ou métalliques en électromagnétisme, se comportent comme des sources secondaires, et sont analogues aux sources fictives décrites précédemment en milieux réverbérants. Nous allons présenter comment sont contrôlés les champs dans les milieux multidiffusants dans le domaine de l'optique, afin de mettre en évidence le rôle des degrés de liberté spatiaux.

1.3.2.1 Les modulateurs spatiaux de lumière

Les fréquences optiques sont bien supérieures aux fréquences du domaine micro-onde : quelques centaines de THz contre quelques MHz ou dizaines de GHz, soit 10^4 à 10^8 fois plus élevées. Les capteurs et sources optiques sont limités par l'électronique de contrôle qui ne fonctionne qu'à des fréquences maximales de quelques dizaines de GHz. Ces capteurs et sources optiques ne peuvent donc que fournir des valeurs moyennes de l'énergie reçue sur des échelles de l'ordre de la nanoseconde. C'est pourquoi le retournement temporel optique n'est pas, à ce jour, une technique facilement envisageable pour focaliser des ondes. Différentes techniques permettant de contourner ces difficultés ont été développées. Ainsi, la mesure temporelle d'une onde optique se fait par des méthodes interférométriques : la mesure de l'énergie sur un détecteur pour plusieurs différences de marche (quatre en général) entre une onde de référence et l'onde à mesurer permet d'en déduire la phase. Le contrôle de la forme temporelle d'une onde lors de l'émission est plus ardu, et nécessite de façonner l'enveloppe spectrale de la source par exemple avec un laser femtoseconde. Ces techniques de *pulse shaping* sont cependant très complexes à mettre en place et possèdent une résolution spectrale limitée.

En revanche, en optique, on est capable d'enregistrer l'énergie sur un très grand nombre de capteurs. Par conséquent, au lieu d'utiliser le signal temporel reçu sur un unique capteur, la stratégie consiste à utiliser un grand nombre de capteurs monochromatiques. En plus de la phase d'enregistrement, il faut être capable de générer des champs contrôlables spatialement. Cette approche s'est énormément développée récemment avec l'apparition et le développements des modulateurs spatiaux de lumière (*spatial light modulator* en anglais : SLM), initialement utilisés en optique adaptative, par exemple pour corriger les aberrations de l'atmosphère en astronomie.

Les SLM ont depuis évolué et sont utilisés dans de nombreux autres domaines et notamment dans le contrôle des ondes en milieux multiplement diffusants. La zoologie des SLM se divise en deux grandes familles. Les miroirs micro-contrôlables issus des technologies MEMS (pour *microelectromechanical systems*) ne contrôlent qu'un nombre limité de degrés de liberté, ne fonctionnent qu'en réflexion, mais répondent très rapidement à une commande. Ces SLM reposent sur le principe suivant : un champ électrique, ou des pistons, translatent ou déforment localement un miroir micrométrique, ce qui modifie le chemin optique et induit un déphasage à l'onde réfléchi. Une variante de ces *digital micromirror devices* (DMD) est utilisée dans les rétroprojecteurs, et atteint les très hautes définitions vidéo, mais ne permet de ne faire que du façonnage binaire en amplitude. Au contraire, les SLM à cristaux liquides, basés sur la technologie LCD (*liquid crystal display*) fonctionnent en réflexion ou en transmission mais sont plus lents. C'est l'effet de polarisation des cristaux liquides qui est utilisé, ce qui permet de déphaser la lumière incidente sur chaque élément d'une valeur comprise entre 0 et 2π . Ces SLM peuvent atteindre le million de degrés de liberté, mais ne contrôlent qu'une polarisation du champ, ce qui peut générer une perte d'énergie.

1.3.2.2 Longueur de cohérence et degrés de liberté spatiaux

L'utilisation des SLM pour le contrôle des ondes en milieux complexes est récente. En 2007, Ivo Vellekoop et Allard Mosk se sont réappropriés ces concepts d'optique adaptative et de degrés de liberté en milieux complexes pour focaliser de la lumière à travers une couche de peinture, autrement dit un milieu très diffusant [10, 39, 40]. L'idée est d'utiliser les 64 par 64 blocs d'éléments d'un SLM pour façonner la phase de l'onde incidente produite par un laser (donc monochromatique).

On définit la longueur de cohérence du champ optique comme la distance dont il faut déplacer une source à la surface du milieu diffusant pour créer en

transmission ou en réflexion un *speckle* indépendant. Schématiquement, nous divisons ainsi le front d'onde incident en N_s taches de dimension $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$, qui sont autant de sources indépendantes qui produisent des *speckles* décorrélés en sortie du milieu multidiffusant : ce sont les degrés de liberté spatiaux. En pratique, une lentille convergente adapte la taille des blocs de pixels du SLM à celles des grains de *speckle*. Le résultat des interférences entre les N_s *speckles* aléatoires est aussi une figure de *speckle*, telle qu'illustrée sur la figure 1.11.

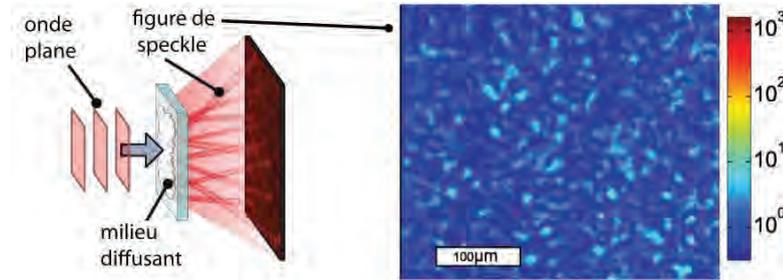


FIGURE 1.11: Une onde plane produit une figure de *speckle* en transmission d'un milieu diffusant. D'après [40].

1.3.2.3 Modulation du front d'onde

Il faut ensuite régler le SLM de manière à ce que chaque élément contrôle une des N_s taches du faisceau incident, ce qui permet de modifier indépendamment la phase des N_s degrés de liberté spatiaux. Chaque élément du SLM se comporte comme une source indépendante dont on peut contrôler la phase, comme nous l'avons schématisé sur la figure 1.12, de la même manière que le retournement temporel permettrait de contrôler la phase des sources fictives dans une cavité. Déphaser un élément du SLM déphase ainsi toute la figure de *speckle* correspondante. En un point donné il est alors possible de sommer tous les degrés de liberté spatiaux en phase en adaptant le déphasage des éléments correspondants du SLM. Ceci a d'abord été réalisé grâce à un procédé d'optimisation.

1.3.2.4 Optimisation

La méthode développée par Allard Mosk est très esthétique puisqu'il suffit d'optimiser l'énergie transmise en un point pour adapter la phase de l'onde incidente. Initialement le faisceau laser incident sur le milieu diffusant peut être approximé par une onde plane (c'est en réalité un faisceau gaussien). Ce faisceau éclaire une certaine aire du milieu diffusant qui correspond à un certain nombre

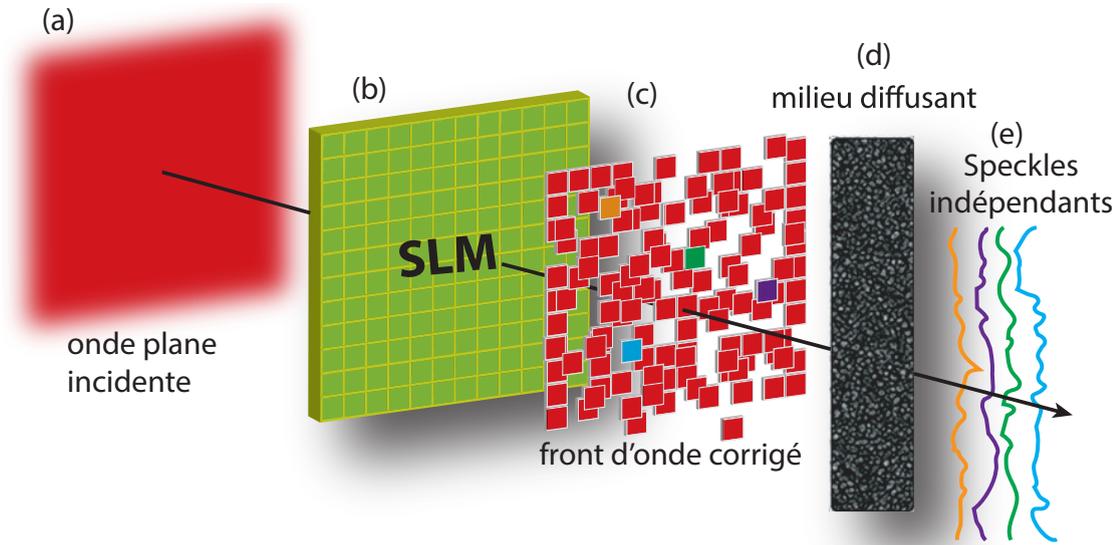


FIGURE 1.12: Représentation de l'effet du SLM sur une onde plane incidente sur un milieu diffusant. (a) Onde plane incidente. (b) SLM. (c) Chaque élément du SLM déphase une petite partie du front d'onde. (d) Milieu diffusant. (e) Chaque élément du front d'onde crée un *speckle* indépendant.

N_s de fois la dimension de la distance de corrélation du milieu. L'expérimentateur dispose alors de N_s degrés de liberté spatiaux, chacun formant en sortie du milieu diffusant une figure de *speckle*. La somme de ces N_s *speckles* indépendants crée également une figure de *speckle* comme illustré par la figure 1.11. Un SLM est ensuite inséré entre le laser et le milieu diffusant, de manière à ce que chacun de ses éléments soit focalisé sur le milieu sur une dimension de l'ordre de la distance de corrélation. Les éléments du SLM sont ensuite optimisés par un algorithme itératif. Une première mesure de l'intensité est effectuée à l'endroit où on veut focaliser la lumière. Le premier élément du SLM est sélectionné, il est déphasé d'une certaine valeur entre 0 et 2π , qui maximise l'énergie au point focal. Une fois la phase de cet élément choisie, l'algorithme optimise l'élément suivant, et ainsi de suite jusqu'à les avoir tous optimisés. Le champ en sortie du milieu diffusant est alors la somme de N_s *speckles* qui ont la même phase à la position choisie et qui interfèrent constructivement sur ce point comme sur la figure 1.13 (b). À plus d'une distance de corrélation du focus, les *speckles* interfèrent aléatoirement, comme sur la figure 1.13 (a). Le champ optique a donc été focalisé comme illustré sur la figure 1.14.

Nous définissons le gain, noté η comme le rapport entre l'énergie optimisée moyennée sur un grand nombre d'expériences et l'énergie initiale moyenne. Le gain correspond donc au rapport signal sur bruit caractérisé dans l'expérience monocanale.

$$\eta = \frac{\langle I_f \rangle}{\langle I_0 \rangle} \quad (1.55)$$

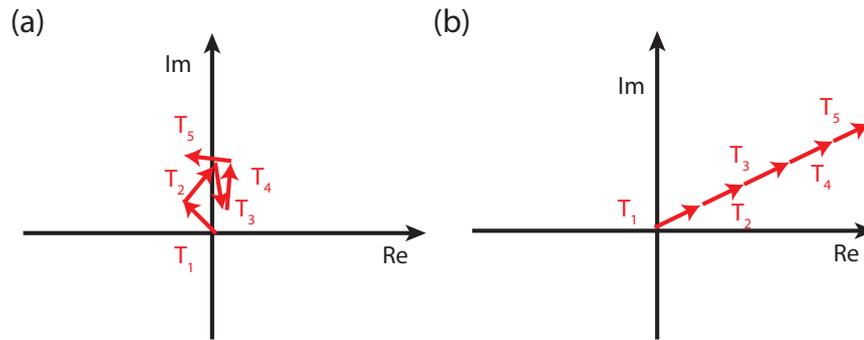


FIGURE 1.13: Représentation de Fresnel des degrés de liberté spatiaux dans le plan complexe. (a) En dehors du point focal $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_A$, les degrés de liberté spatiaux (les modes propres) se somment de manière aléatoire. (b) Au point focal, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$, les degrés de liberté se somment de manière cohérente.

Allard Mosk a montré que ce gain est proportionnel au nombre de degrés de liberté spatiaux et peut atteindre plusieurs ordres de grandeur de fois la variance du champ initial comme le montre la figure 1.14. En effet, avant optimisation, les figures de *speckle* se somment de manière incohérente en tout point du plan d'observation, on a donc $I_0 \propto N_s$. Après optimisation, les figures de *speckle* se somment de manière cohérente, soit $I_f \propto N_s^2$. Le champ au point focal est donc la somme cohérente de N_s figures de *speckle*, alors qu'en tout autre point cette somme est incohérente. Nous retrouvons donc le même SNR que dans l'expérience de retournement temporel précédente. La différence fondamentale réside dans la nature de ces différents *speckles* : précédemment il s'agissait de *speckles* à des fréquences différentes, d'où la notion de degrés de liberté spectraux, alors qu'ici ce sont des *speckles* générés par différentes sources spatiales, d'où la notion de degrés de liberté spatiaux.

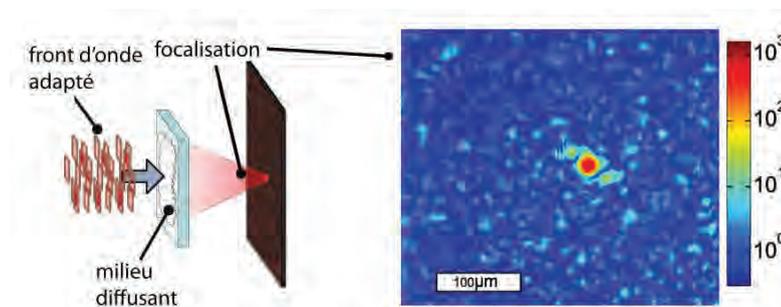


FIGURE 1.14: Après une procédure d'optimisation, le front d'onde est adapté pour se focaliser en sortie du milieu diffusant. D'après [40].

Un calcul plus rigoureux [41] mène à :

$$\eta = 1 + \frac{\pi}{4} (N_s - 1) \quad (1.56)$$

1.3.2.5 La matrice de transmission

Ce calcul nécessite d'introduire la matrice de transmission qui nous sera utile pour interpréter plus rigoureusement ces degrés de liberté spatio-temporels. En effet par linéarité, nous pouvons écrire le champ sur chaque pixel d'un capteur comme le produit d'une matrice de transmission \mathbf{T} et du champ en sortie de chaque élément du SLM :

$$E_m = \sum_{n=1}^{N_s} T_{m,n} E_n \quad (1.57)$$

\mathbf{T} est appelée la matrice de transmission. L'équation 1.57 peut se réécrire sous la forme matricielle en notant \mathbf{E}_{out} le champ en sortie du milieu diffusant et \mathbf{E}_{in} le champ en entrée du SLM :

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{T} \mathbf{E}_{\text{in}} \quad (1.58)$$

En particulier, l'équation 1.57 met bien en évidence la somme sur les N_s éléments du SLM, sources secondaires et degrés de liberté spatiaux qui effectuent initialement une marche aléatoire.

$$|E_m|^2 = \left| \sum_n T_{m,n} E_n \right|^2 = \sum_n |T_{m,n} E_n|^2 + \sum_{n \neq l} T_{m,n} E_n [T_{m,l} E_l]^* \quad (1.59)$$

Le premier terme de l'équation précédente est proportionnel à N_s tandis que le deuxième terme a une moyenne nulle car les $T_{m,n}$ sont des nombres complexes aléatoires. En moyenne, nous avons donc :

$$\langle |E_{m,\text{ini}}|^2 \rangle = N_s \langle |T_{m,n} E_n|^2 \rangle \quad (1.60)$$

Une fois l'optimisation terminée, c'est-à-dire en ayant déphasé chaque champ incident E_n d'un déphasage θ_n , tous les éléments de la somme sont proportionnels, et le deuxième terme n'est plus nul en moyenne :

$$\langle |E_{m,\text{opt}}|^2 \rangle = N_s \langle |T_{m,n} E_n|^2 \rangle + N_s (N_s - 1) \langle |T_{m,n} E_n| \rangle^2 \quad (1.61)$$

Comme \mathbf{T} est la matrice de transmission à travers un milieu diffusant, elle peut être modélisée par une matrice aléatoire de coefficients complexes suivant une statistique circulaire gaussienne [42, 43], ce qui mène finalement à l'équation 1.56.

Ces équations restent valides si l'expérience est réalisée en réflexion et non plus en transmission, à condition de remplacer la matrice de transmission \mathbf{T} par

la matrice de réflexion \mathbf{K} . Au cours de sa thèse, Sébastien Popoff est allé plus loin que l'optimisation proposée par Ivo Vellekoop et Allard Mosk et a mesuré cette matrice de transmission [44, 45, 46]. Une fois \mathbf{T} connue, il suffit de façonner l'onde avec le SLM de manière à réaliser \mathbf{T}^* ou l'inverse régularisée \mathbf{T}^{-1} [45] pour focaliser rapidement le front d'onde voulu en sortie du milieu diffusant, ou pour former une image.

1.3.2.6 Variantes

En pratique le gain réel obtenu est inférieur à ce gain idéal à cause du bruit de la mesure, qui peut conduire l'algorithme à choisir une mauvaise phase à une ou plusieurs itérations de l'optimisation. De plus, seulement une partie des degrés de liberté spatiaux peut être optimisée, ou ces derniers peuvent ne pas être totalement indépendants. L'échantillon diffusant peut également être instable dans le temps, ce qui décorrèle la figure de *speckle* d'un mode donné au cours du temps. Des variantes de l'algorithme précédent ont alors été étudiées [41]. Par exemple, chaque élément peut n'être finalement déphasé qu'une fois tous les éléments testés : cela réduit le rôle des corrélations entre les éléments. En cas de bruit élevé, il peut être intéressant d'optimiser plusieurs éléments à la fois, idéalement $N_s/2$, pour améliorer le SNR. La sélection de cette moitié des éléments peut être réalisée aléatoirement ou en suivant une base de Hadamard. La dynamique de l'optimisation est alors très différente de celle de l'algorithme de base : le gain augmente très rapidement à chaque optimisation au début, mais sature plus rapidement par la suite.

Enfin, optimiser l'amplitude au lieu de la phase permet également de focaliser une onde en utilisant la même procédure [47]. Évidemment le gain est moindre qu'avec une optimisation de la phase, mais reste proportionnel à N_s : seul le coefficient de proportionnalité est modifié. En effet, comme le champ initial en un point est aléatoire, il est composé de termes (des *phasors* en anglais), dont l'amplitude peut être positive ou négative et qui interfèrent destructivement. Annuler les termes d'amplitude négative (par exemple), permet de ne garder que les termes d'amplitude positive qui interfèrent alors constructivement. C'est probablement l'optimisation de front d'onde la plus basique à réaliser et dont nous nous inspirerons pour adapter ces méthodes de façonnage de front d'onde au domaine micro-onde aux chapitres 4 et 5.

Ce contrôle de front d'onde est par conséquent l'équivalent spatial en optique du retournement temporel : dans un cas on contrôle des degrés de liberté spatiaux et dans l'autre des degrés de liberté temporels. Dans les deux cas, nous faisons en sorte de faire interférer constructivement des figures de *speckle* à un endroit donné.

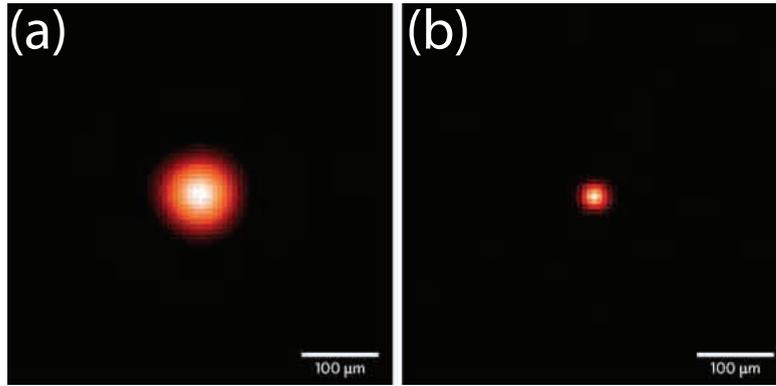


FIGURE 1.15: Focalisation avec un SLM. (a) Dans l'espace libre. (b) Avec un milieu diffusant. Image reproduite de [48].

Ces techniques sont aujourd'hui étudiées dans de nombreux systèmes optiques, que ce soit en imagerie photoacoustique [49], en cryptographie [50], pour contrôler des paires de photons intriquées [51] ou des modes de lasers aléatoires [52], et battre la limite de la diffraction [53].

Ces résultats ont mené la même équipe, dirigée par Ad Lagendijk à montrer en 2010 qu'un milieu très diffusant comme une couche de peinture permet de focaliser des ondes sur des dimensions plus fines que la limite de Rayleigh de la lentille [48], comme sur la figure 1.15. En espace libre, la tache focale en sortie d'une lentille de focale F est égale à $\frac{\lambda F}{D} = \frac{\lambda}{2} \text{ON}$, avec ON l'ouverture numérique. L'utilisation du milieu complexe permet d'augmenter cette ouverture numérique. Ce résultat constitue l'équivalent monochromatique en optique de l'expérience de retournement temporel en milieu diffusant réalisée 15 ans plus tôt [54] et que nous allons décrire dans la partie suivante.

1.3.3 Retournement temporel multivoie en cavité ou en milieux multidiffusants : utilisation de degré de liberté spatio-temporels

1.3.3.1 L'expérience pionnière

Nous avons vu, dans un cas, que nous pouvons focaliser les ondes à l'aide de degrés de liberté temporels, et dans un autre à l'aide de degrés de liberté spatiaux. Pouvons nous combiner ces deux approches? Les degrés de liberté temporels représentent le nombre de fréquences indépendantes du milieu tandis que les degrés de liberté spatiaux représentent le nombre d'émetteurs indépendants.

Dans les parties précédentes nous avons vu comment contrôler les degrés de liberté temporels avec un seul émetteur, soit un seul degré de liberté spatial grâce au retournement temporel, puis comment contrôler les degrés de liberté spatiaux en optique à une fréquence donnée. Nous allons maintenant voir comment peuvent être contrôlés simultanément ces degrés de liberté spatiaux et temporels en réalisant du retournement temporel avec $N_s > 1$ antennes qui sont autant de degrés de liberté spatiaux et des signaux de large bande passante, qui sont donc la superposition de $N_f > 1$ degrés de liberté temporels. En fait une telle étude a été réalisée par Arnaud Derode au laboratoire avec des ondes ultrasonores dans l'eau [54]. Elle est même antérieure aux travaux précédemment décrits.

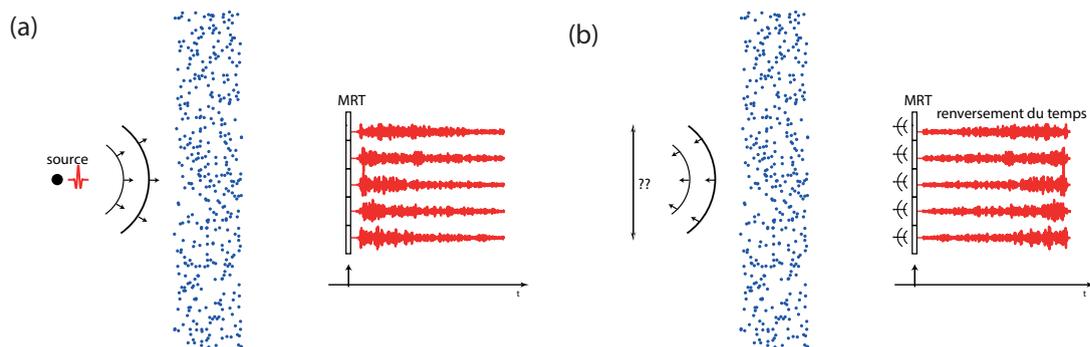


FIGURE 1.16: Retournement temporel en milieu complexe. (a) Un transducteur émet une onde enregistrée par des transducteurs de l'autre côté d'une forêt de tiges métalliques. (b) Les transducteurs réémettent les signaux enregistrés et retournés temporellement.

La source, tout comme les $N = 96$ éléments du miroir à retournement temporel (MRT) sont des transducteurs piézoélectriques. La source et le MRT sont situés de part et d'autre d'une forêt de tiges métalliques de 2000 éléments. La source émet une impulsion courte, de l'ordre de la microseconde, au voisinage d'une fréquence de 3.5 MHz (figure 1.16 (a)). Les éléments du MRT mesurent alors un signal très allongé dans le temps d'environ 120 microsecondes. Cet allongement de la durée du signal est causé par la diffusion multiple des ondes dans le milieu de propagation. La trajectoire d'une onde entre la source et le miroir peut donc être très fortement déviée et s'éloigner de la trajectoire directe, dite balistique.

Cette augmentation de la durée du signal est similaire au phénomène de réverbération dans une cavité. Cette diffusion temporelle du signal permet de stocker de l'énergie dans le milieu réverbérant pendant un temps caractéristique τ_H . Nous pouvons ainsi définir un nombre N_t de degrés de liberté temporels, exactement de la même manière que dans l'expérience de Mathias Fink et Carsten Drager [33].

Dans une deuxième étape, les codas (c'est-à-dire les signaux temporels) enregistrées par les éléments du MRT sont chronologiquement inversées dans la mémoire de l'ordinateur et réémises par les éléments du MRT. Chacun des éléments

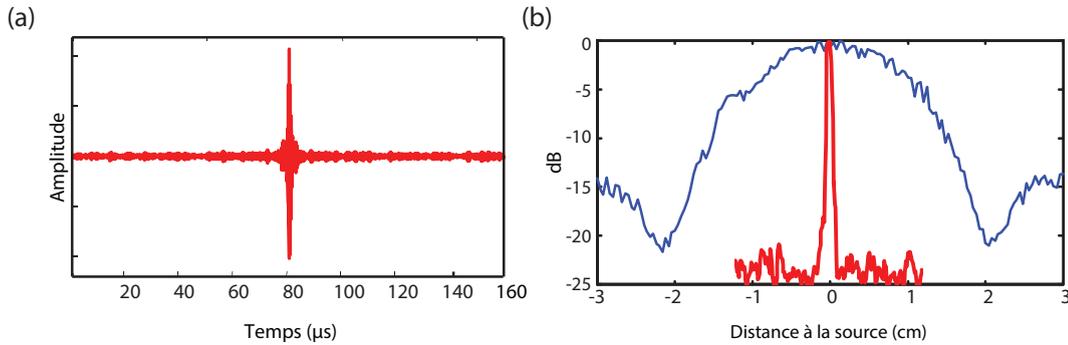


FIGURE 1.17: Retournement temporel en milieu complexe : refocalisation. (a) Refocalisation temporelle. (b) Refocalisation spatiale. En rouge : avec le milieu de fils diffuseurs. En bleu : dans de l'eau sans diffuseur. D'après [54].

du MRT est un degré de liberté spatial, et joue exactement le même rôle que celui joué par les éléments du SLM dans la partie précédente, mais sur une large bande passante. Les ondes parcourent alors le milieu diffusant en sens inverse, en sortent, et se refocalisent temporellement et spatialement sur le transducteur. Ce dernier, qui servait initialement de source fait maintenant office de récepteur, et mesure un signal recompressé sur un temps de l'ordre du signal initial, environ une microseconde (figure 1.17 (a)). Spatialement, nous pouvons également noter un effet intéressant : l'onde a été focalisée sur une dimension plus faible que sans milieu diffuseur (figure 1.17 (b)). Ce dernier agit comme une lentille de très grande ouverture numérique.

Cet exemple a mis en évidence la compression du signal en milieu multiple-ment diffusant grâce à l'utilisation des degrés de liberté spatiaux et temporels, en utilisant simultanément un grand nombre d'émetteurs-récepteurs (96) et une large bande passante. Dans cette expérience, nous tirons donc à la fois profit de degrés de liberté spatiaux (N_s sources) et temporels (N_t).

1.3.3.2 Degrés de liberté spatio-temporels

Durant sa thèse Geoffroy Lerosey a montré des résultats analogues en électromagnétisme dans un milieu réverbérant [55]. Neuf antennes sont placées dans une cavité dont le temps de réverbération est de 160 ns. Huit de ces antennes font office de MRT. Les auteurs ont ensuite effectué du retournement temporel avec les huit antennes et ont étudié l'influence de la bande passante du signal utilisé, ainsi que du nombre d'antennes sur le SNR. Ils ont ainsi montré dans ce cas que le SNR est proportionnel à la largeur de la bande passante utilisée, donc au nombre de degrés de liberté temporels $N_t \propto \Delta\omega$ (figure 1.18 (a)). Ce résultat est identique à celui démontré par Mathias Fink et Carsten Draeger avec des ondes élastiques.

D'autre part, les auteurs ont également montré que le SNR est proportionnel au nombre d'antennes décorréelées du MRT, soit au nombre de degrés de liberté spatiaux N_s (figure 1.18 (b)). Ainsi, comme l'avaient montré Arnaud Derode et ses collègues [54], le SNR est égal au produit des degrés de liberté spatiaux et temporels : $SNR \propto N_s N_t$. Nous pouvons donc définir le nombre total de degrés de liberté spatio-temporels en milieux complexes (milieux diffusants ou réverbérants) comme le produit des degrés de liberté spatiaux et des degrés de liberté temporels : $N_{tot} = N_t N_s$.

Le nombre total de degrés de liberté peut donc être considérable en milieux complexes, ce qui permet contre-intuitivement de focaliser les ondes avec une grande qualité, à la fois temporellement et spatialement. Ceci peut être fait de manière simple et facile avec le retournement temporel.

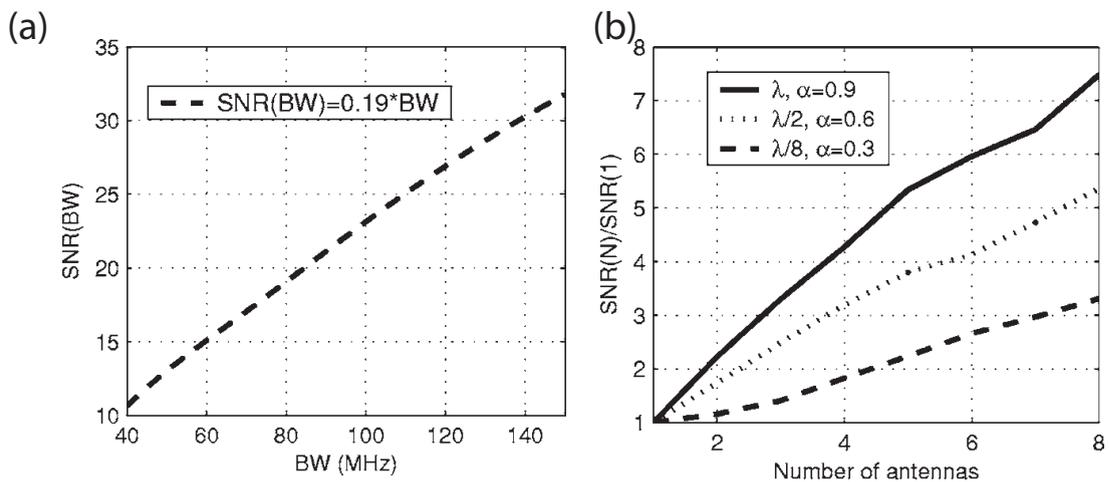


FIGURE 1.18: Retournement temporel et degrés de liberté spatiaux temporels en cavité. (a) SNR en fonction de la bande passante. (b) SNR en fonction du nombre d'antennes pour différents espacements entre les antennes. Les coefficients α sont les valeurs des pentes des courbes. Figure reproduite de [55].

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons introduit un certain nombre de concepts mathématiques. En partant des ondes planes dans le vide, nous avons défini les fonctions de Green qui forment une base de solutions en présence de sources. Ces fonctions de Green relient simplement la distribution de sources au champ créé par ces dernières en tout point de l'espace. Lorsque le domaine est borné par des parois métalliques, ou mathématiquement par des conditions aux

limites, nous avons mis en évidence l'existence des modes des milieux réverbérants, qui forment une base orthogonale des champs ondulatoires dans ces milieux. Chaque mode est défini uniquement à une fréquence particulière, appelée fréquence propre. Les phénomènes dissipatifs élargissent spectralement le domaine d'existence des modes, qui sont alors dénommés résonances. Nous avons défini le facteur de qualité, permettant de quantifier les sources de dissipation. Pour caractériser le nombre de modes, nous avons défini la densité d'états locale (DOS). Cette grandeur est d'une importance capitale, puisque le champ dans la cavité se décompose sur les modes propres. Plus la DOS est élevée et plus un nombre important de modes participent au champ ondulatoire dans une bande passante finie. Dans ce cas, la fonction de Green se développe également sur un nombre fini de modes propres.

Dans une deuxième partie, nous avons souligné le rôle joué par ces modes pour contrôler les ondes en milieux réverbérants. Nous avons montré que les modes propres sont des degrés de libertés aussi bien temporels que fréquentiels. Nous avons ensuite mis en évidence que le retournement temporel monovoie est un moyen efficace pour manipuler ces degrés de libertés temporels. En effet, nous avons vu que cette technique permet de synchroniser les modes à un endroit et à un temps bien définis pour focaliser les ondes. Nous avons ensuite discuté d'une technique analogue en optique, le façonnage de front d'onde avec des SLM (*spatial light modulators*) en milieux multidiffusants. Au lieu de contrôler un grand nombre de degrés de libertés temporels à un endroit donné, le façonnage de front d'onde permet de contrôler un grand nombre de degrés de liberté spatiaux à une fréquence fixée. Ces degrés de liberté spatiaux sont des sources indépendantes qui produisent des *speckles* décorrélés en sortie du milieu multidiffusant. L'utilisation d'un SLM permet de déphaser ces *speckles* pour les faire interférer de manière cohérente à un endroit donné. Après avoir étudié comment contrôler d'une part les degrés de liberté temporels et d'autre part les degrés de liberté spatiaux, nous avons vu que le retournement temporel, multivoie celui-ci, permet de contrôler et de focaliser les ondes acoustiques, ou les micro-ondes dans les milieux complexes en bénéficiant d'un nombre total de degrés de liberté spatio-temporels pouvant être considérables.

Enfin, notons que la frontière entre degrés de liberté spatiaux et temporels n'est pas imperméable. Au cours de sa thèse, Fabrice Lemoult a par exemple montré que relâcher les contraintes temporelles permet d'améliorer la focalisation spatiale [11, 56] en utilisant un algorithme de retournement temporel itératif. Autrement dit, il est possible de convertir les degrés de liberté temporels en degrés de liberté spatiaux.

Dans la suite de cette thèse, nous allons voir comment utiliser ces degrés de

liberté spatio-temporels. Au chapitre 3, nous verrons comment augmenter et manipuler les degrés de liberté temporels pour effectuer une expérience de focalisation sub-longueur d'onde. Aux chapitres 4 et 5, nous nous inspirerons du façonnage de front d'onde en optique pour contrôler les degrés de liberté spatiaux en milieux réverbérants.

Pour explorer la physique des milieux réverbérants il est cependant fondamental de les coupler avec le monde extérieur. Dans le chapitre suivant, nous proposons de les ouvrir avec un réseau de diffraction sub-longueur d'onde. Ceci nous permettra d'une part d'étudier le couplage avec le monde extérieur et le rayonnement de ce système en champ lointain, et d'autre part d'ouvrir une fenêtre d'observation vers l'intérieur de cavités.

Chapitre 2

Rayonnement de cavités ouvertes

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les champs ondulatoires supportés dans les cavités micro-ondes sont des champs stationnaires, appelés modes propres, et qui oscillent à des fréquences propres discrètes et bien déterminées. Tout champ ondulatoire dans ces cavités peut donc s'écrire comme une superposition de ces modes avec certaines relations de phase. Quand les cavités ne subissent pas de dissipation, dans un cas théorique et idéal, ces modes propres possèdent un temps de vie infinie et une amplitude arbitrairement élevée. Bien sûr, les phénomènes dissipatifs limitent cette énergie et réduisent le temps de vie du champ, qui reste néanmoins grand devant la période du champ excité. Cette capacité à stocker des champs de très fortes amplitudes est mise en valeur dans de nombreux domaines, en physique fondamentale comme appliquée. Des cavités micro-ondes sont utilisées en physique quantique pour mesurer un qubit (le spin d'un atome de Rydberg) sans détruire l'état quantique. Un laser conventionnel, ou un maser (un laser dans le domaine micro-onde) est une cavité remplie d'un milieu amplificateur. Dès que la puissance de la pompe du milieu amplificateur dépasse la puissance dissipée, un mode de la cavité est préférentiellement excité. Ce couplage entre la cavité et le milieu à gain produit une onde de puissance très élevée sur une bande de fréquence très étroite correspondant au mode excité.

Cependant, cette onde de forte puissance n'aurait que peu d'intérêt si nous ne pouvions l'utiliser en dehors de la cavité pour transporter des signaux sur des fibres optiques, l'émettre vers l'atmosphère pour quantifier des polluants ou sur des matériaux pour les découper. Il est donc nécessaire d'ouvrir la cavité pour utiliser les champs ondulatoires créés. Les lasers utilisent des miroirs partiellement réfléchissants. La grande majorité d'une onde incidente sur le miroir est réfléchie

par ce miroir et contribue à l'amplification de l'onde dans la cavité, mais une petite fraction de l'onde est transmise à l'extérieur. Ces miroirs sont fabriqués, soit avec un film métallique plus fin que l'épaisseur de peau, soit avec des réseaux de Bragg, qui sont des motifs périodiques de diffuseurs diélectriques qui réfléchissent les ondes [57, 58], ou avec des réseaux de diffraction sub-longueur d'onde [59, 60]. La réflectivité de ces réseaux peut être ajustée grâce à la variation des paramètres géométriques, comme la période, les dimensions ou le taux de remplissage.



FIGURE 2.1: Coupe d'une antenne RADAR utilisée dans la marine, constituée d'un guide d'onde troué.

Dans le domaine des micro-ondes, nous pouvons ouvrir les cavités de deux manières. La première consiste à y insérer des antennes pour y mesurer le champ à un endroit. Cette méthode est adaptée pour y mesurer un signal et étudier la cavité, mais ne permet pas d'émettre simplement le champ créé vers l'extérieur. Les cavités utilisées en tant qu'antennes (appelées *cavity backed slot antennas* ou *slot antennas* en anglais), comme celle représentée sur la figure 2.1, sont donc ouvertes en pratiquant des ouvertures sur leurs parois. Or la directivité de l'antenne dépend de la taille des trous. Plus les ouvertures sont larges et plus l'antenne est directive, ce qui est l'effet recherché pour des antennes radar. Cependant, plus l'ouverture est grande, plus les pertes radiatives sont importantes, ce qui diminue le facteur de qualité et l'effet de la cavité. Ces ouvertures sont souvent faites sans maîtriser leur influence sur le facteur de qualité, et le compromis entre un haut facteur de qualité et une directivité élevée n'est ni facilement identifiable, ni contrôlable.

Dans ce chapitre, nous proposons d'exploiter la physique des milieux réverbérants que nous avons introduite au chapitre précédent. Afin de coupler la cavité avec le monde extérieur, nous allons l'ouvrir en remplaçant une de ses parois par un réseau métallique de diffraction sub-longueur d'onde, en nous inspirant des réseaux utilisés en optique. Nous montrerons à partir de simulations que ces réseaux se comportent comme des miroirs semi-réfléchissants dont la transmission peut

être ajustée en modifiant les paramètres géométriques du réseau, notamment le pas du réseau et le facteur de remplissage (défini par le rapport de la longueur de métal d'un élément par une période). Ainsi, ces paramètres permettent de régler le couplage de la cavité à l'extérieur, ce qui détermine également les pertes radiatives de la cavité. Ouvrir toute une paroi de la cavité avec un tel réseau permet ainsi de bénéficier simultanément d'une directivité maximale ainsi que d'un facteur de qualité qui peut être ajusté précisément.

Nous étudierons ensuite numériquement et expérimentalement le diagramme de rayonnement d'une cavité ouverte par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde. Nous montrerons qu'une telle antenne ne rayonne dans des directions données que pour certaines fréquences bien précises. Nous analyserons l'effet du désordre, selon que nous utilisons un réseau aléatoire ou une cavité désordonnée, sur ce diagramme de rayonnement. Nous verrons que ce dernier tend à devenir statistiquement isotrope.

Dans une dernière partie, nous nous intéresserons aux diverses applications de cette approche. Nous évoquerons l'imagerie, des concepts de bazooka électromagnétique et d'antennes omnidirectionnelles. Nous montrerons également que mesurer le champ proche d'une cavité bidimensionnelle fermée par un réseau sub-longueur d'onde permet d'en mesurer le champ à l'intérieur de manière peu intrusive. Ceci devrait ouvrir de nouvelles perspectives dans l'étude expérimentale de la physique des micro-ondes. Ces travaux ont donné lieu à une publication dans *Physical Review Letters* [61].

2.2 Des miroirs semi-réfléchissants en micro-ondes

Avant de nous intéresser à la physique de la cavité couplée à l'extérieur, nous montrons dans cette partie que les réseaux de diffraction sub-longueur d'onde peuvent constituer de très bons miroirs semi-réfléchissants. C'est pourquoi nous allons les utiliser pour fermer une paroi de la cavité, tout comme les miroirs de Bragg sont utilisés dans les cavités laser. Nous nous contentons d'étudier des réseaux 1D de fentes unidimensionnelles ouvrant des cavités bidimensionnelles. C'est le réseau le plus simple que nous puissions imaginer. Nous étudions tout d'abord la transmission d'une unique fente dans un écran métallique. Cette fente de largeur sub-longueur d'onde constituera ensuite la cellule élémentaire de notre réseau de diffraction sub-longueur d'onde. Nous reviendrons ensuite sur le principe général des réseaux de diffraction, puis mettrons en évidence qu'un réseau sub-longueur d'onde crée un ordre propagatif et de nombreux ordres évanescents. Nous montrons que le contrôle des paramètres géométriques du réseau, sa période Λ , et la

largeur des fentes a , permet d'ajuster la transmission du réseau qui se comporte alors comme un miroir semi-réfléchissant.

2.2.1 Transmission par une fente de largeur sub-longueur d'onde

Les miroirs sont des surfaces métalliques sans imperfection qui réfléchissent les ondes. Comme le champ électrique est nul dans un conducteur parfait, les conditions aux limites à l'interface d'un conducteur imposent l'annulation des composantes tangentielles (dans notre cas suivant x et y) du champ électrique, ainsi que de la composante normale à l'interface du champ magnétique (suivant z dans notre géométrie, comme sur la figure 2.2). La réflexion d'une onde électrique polarisée suivant y : $E_y e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{y}$ génère ainsi une onde réfléchie $-E_y e^{-i(k_z z + \omega t)} \mathbf{y}$, et la somme de ces deux ondes est nulle à l'interface $z = 0$ à tout instant. Ceci crée une onde stationnaire $E_y \sin(\omega t) \sin(k_z z)$ dans tout le demi-espace des $z < 0$, comme représenté sur la figure 2.2 (a).

Que se passe-t-il si un petit trou de dimension a inférieure à la longueur d'onde est percé dans ce miroir ? En dehors de cette petite ouverture, le champ électrique incident doit toujours s'annuler et donner naissance à une onde réfléchie (figure 2.2 (b)). Sur l'ouverture, le champ peut franchir ce petit trou par continuité. Cependant, aux bords, les composantes tangentielles doivent tout de même s'annuler. Or, une fonction trigonométrique e^{ikx} de période λ ne peut pas s'annuler simultanément sur deux positions aussi proches. L'onde n'est donc pas transmise via une onde plane (ni une somme d'ondes planes), mais par un autre type d'onde dont nous n'avons pas encore parlé : les ondes évanescentes. Ces ondes évanescentes sont de la forme $E_y e^{-(\beta z + i\omega t)} \mathbf{y}$: ce sont donc des ondes qui sont exponentiellement décroissantes et qui ne sont pas propagatives. Elles restent localisées au voisinage de l'endroit qui leur a donné naissance, ici la fente sub-longueur d'onde. Cette conversion de l'onde propagative incidente en onde évanescente est un phénomène courant dû à la diffusion de l'onde par une hétérogénéité (ici la fente sub-longueur d'onde dans un écran métallique). Ainsi, une onde est transmise à travers l'écran métallique, où l'onde évanescente est à nouveau diffusée en une onde propagative qui, elle, peut se propager à grande distance de l'interface. Ce phénomène, diffusion en onde évanescente puis rediffusion en onde propagative permet donc une transmission à travers l'écran métallique qui est d'autant plus faible que le trou est petit. En effet le coefficient β des ondes évanescentes est nécessairement de l'ordre de $1/a$ pour pouvoir annuler le champ aux interfaces.

En 1944, Bethe [62], puis Bouwkamp [63] ont montré que la transmission de la polarisation dans le plan suivant x (i.e. dans la direction de la périodicité du

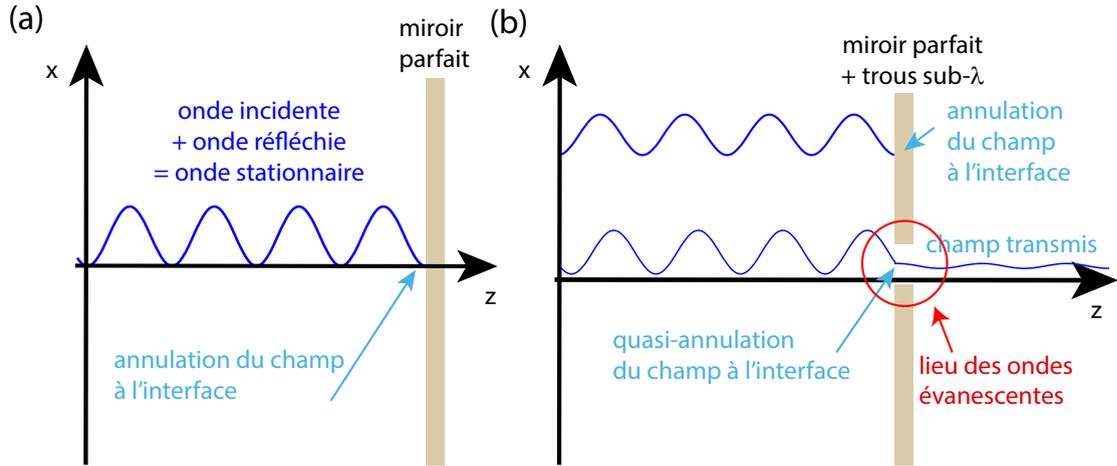


FIGURE 2.2: Transmission à travers un réseau binaire sub-longueur d'onde. (a) Réflexion sur un miroir parfait. (b) Réflexion et transmission sur un miroir parfait percé de trous sub-longueur d'onde.

réseau) est relativement élevée et indépendante de la longueur d'onde au premier ordre. En effet, les conditions aux limites n'imposent pas au champ électrique suivant cette polarisation d'être nul. Cependant la polarisation transverse, suivant y , est faible et dépend de la longueur d'onde, comme nous avons pu le vérifier en simulations (figure 2.5 (a)). Par conséquent la transmission d'une fente s'écrit :

$$T_{1D} \propto \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \quad (2.1)$$

Nous allons utiliser ces fentes qui possèdent une faible transmission pour fabriquer un réseau sub-longueur d'onde. Revenons tout d'abord sur les principes des réseaux de diffraction.

2.2.2 Réseaux et ordre de diffraction

Lorsqu'une onde plane rencontre une interface invariante par translation, elle donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie suivant les lois de Snell-Descartes. Si nous rajoutons un motif périodique à l'interface, nous brisons l'invariance par translation par un vecteur quelconque, et nous obtenons plusieurs ondes réfléchies et transmises. En 1819 Fraunhofer étudia les réseaux de manière approfondie et en déduisit la célèbre formule des réseaux [64], qui donne l'angle des ondes transmises et réfléchies θ_p :

$$n_i \sin \theta_i - n \sin \theta_p = p \frac{\lambda}{\Lambda} \quad (2.2)$$

où θ_i et n_i sont l'angle d'incidence d'une onde plane sur le réseau et l'indice du milieu, tandis que n et θ_p sont l'indice et l'angle de l'onde réfléchie ou transmise, p est un entier relatif appelé ordre de diffraction du réseau, λ la longueur d'onde et Λ le pas du réseau (ou sa période). La formule des réseaux peut se réécrire et s'interpréter sous forme de vecteurs d'ondes :

$$k(n_i \sin \theta_i - n \sin \theta_p) = pK \quad (2.3)$$

avec $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$. Ainsi, nous pouvons interpréter l'interaction entre l'onde incidente et le réseau comme un transfert de vecteur d'onde dans la direction parallèle au réseau. La norme du vecteur d'onde transmis est égale à celle du vecteur d'onde incident (dans le cas où $n_i = n$). La figure 2.3 représente une onde plane de vecteur d'onde k_i et incidente avec un angle θ_i sur un réseau de diffraction. Elle génère plusieurs ondes transmises (de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_{t,p}$) et réfléchies (de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_{r,p}$).

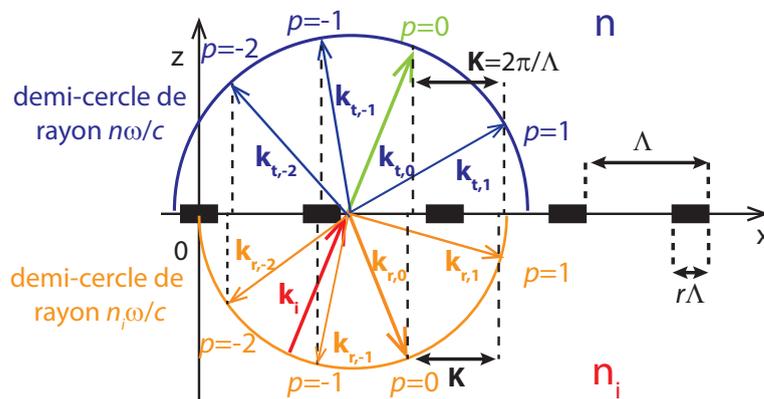


FIGURE 2.3: Réseaux de diffraction : schéma et notations. Une onde plane incidente (en rouge) avec un vecteur d'onde \mathbf{k}_i crée plusieurs ondes transmises (en bleues) de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{t,p}$ et réfléchies (en orange) de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{r,p}$.

Pour simplifier, nous considérons un réseau de diffraction unidimensionnel suivant x et invariant suivant y . L'onde diffractée (ou transmise dans notre cas) se développe en une somme infinie d'ondes planes suivant x , appelée développement de Rayleigh [65]. Les polarisations du champ électrique sont alors de la forme (ici pour la polarisation y) :

$$E_y^d(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_{y_p}^d e^{i(k_p x + \beta_p z)} \quad (2.4)$$

L'onde diffractée d'ordre p est donc propagative suivant x , et propagative suivant z si $k_p^2 \leq k^2$ (β_p est réel), mais évanescence suivant z si $k_p^2 > k^2$ (β_p est imaginaire

pur).

$$\begin{cases} k_p = k \sin \theta_i + pK \\ \beta_p = (k^2 - k_p^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour les ondes propagatives, nous pouvons poser $k_p = k \sin \theta_p$ et nous retrouvons la formule des réseaux. D'autre part les relations de l'équation 2.5 font apparaître un entier p maximum au delà duquel les ordres supérieurs ne donnent naissance qu'à des ondes évanescentes. Sur la figure 2.3, on a $p_{min} = -2$ et $p_{max} = 1$.

Nous allons désormais nous restreindre au cas d'un réseau dont la période est telle que $\Lambda < \lambda/2$ soit $K > 2k$. En raison de son pas (ou période) de dimension inférieure à la demi-longueur d'onde, un tel réseau est dit sub-longueur d'onde. Le seul ordre non évanescent est alors l'ordre $p = 0$, ce qui signifie que chaque onde plane incidente sur le réseau est partiellement transmise, donnant naissance à une onde plane qui se propage dans la même direction (puisque $n_i = n$). Comme le montre la figure 2.4, l'ajout d'un vecteur $\frac{2\pi}{\Lambda}\mathbf{x}$ au vecteur d'onde fait sortir du cercle propagatif de rayon $nk = n\omega/c_0$.

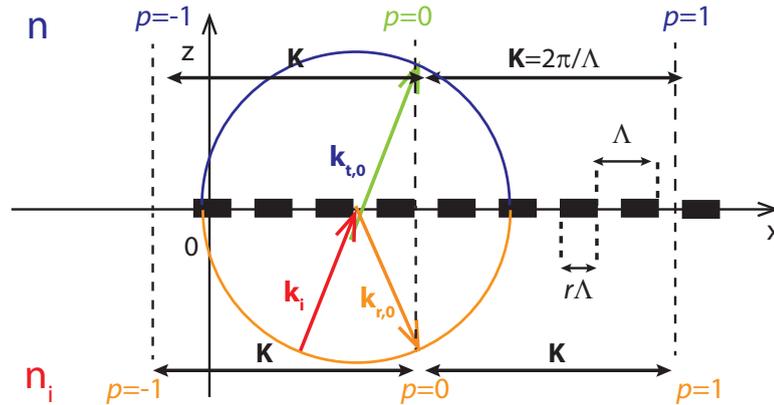


FIGURE 2.4: Réseaux de diffraction sub-longueur d'onde : seul l'ordre 0 transmet des ondes en champ lointain car $K > 2k$. Ici, nous avons représenté un cas pour lequel $n_i = n$.

Un réseau sub-longueur d'onde admet seulement l'ordre 0 comme ordre propagatif. Tous les ordres supérieurs sont évanescents. Un tel réseau fait de métal et de trous se comporte donc nécessairement comme un miroir semi-réfléchissant. À présent, nous allons voir comment contrôler la valeur de la transmission d'un réseau sub-longueur d'onde qui correspond à l'efficacité en transmission de l'ordre 0, à l'aide de la géométrie de la fente étudiée précédemment, ceci dans le but de l'utiliser ensuite pour fermer une paroi de notre cavité.

2.2.3 Transmission d'un réseau de fentes sub-longueur d'onde

Nous avons vu que la transmission d'une fente unique dépend essentiellement de sa largeur a ramenée à la longueur d'onde. Ce résultat peut être généralisé à un ensemble de fentes sub-longueur d'onde, régulièrement espacées, et qui constitue ainsi un réseau de diffraction sub-longueur d'onde. Ceci est confirmé par la figure 2.5 (a), qui représente la transmission normale simulée d'un réseau sub-longueur en fonction de la fréquence de l'onde incidente. Nous pouvons remarquer que la transmission du réseau dépend de la largeur d'une fente (équation 2.1) car $T_{fente} \propto \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$. En première approximation, nous pouvons même considérer que $T_{reseau} \propto T_{fente}$, à condition que les trous soient indépendants (il ne doit pas y avoir de couplage entre ces trous). Or, la largeur des fentes a s'exprime en fonction du facteur de remplissage et de la période du réseau : $a = (1 - r)\Lambda$. Nous en déduisons que le pas du réseau Λ et le facteur de remplissage r (qui se définit comme la longueur de métal sur une période du réseau) gouvernent la transmission. La figure 2.5 (b) présente la transmission d'un réseau sub-longueur d'onde d'une onde en incidence normale, obtenue en simulation avec le logiciel commercial COMSOL. La transmission, proche de l'unité pour un facteur de remplissage nul, chute vers 0 lorsque le taux de remplissage tend vers 1. La transmission peut ainsi être réglée précisément autour d'une fréquence de travail via le facteur de remplissage.

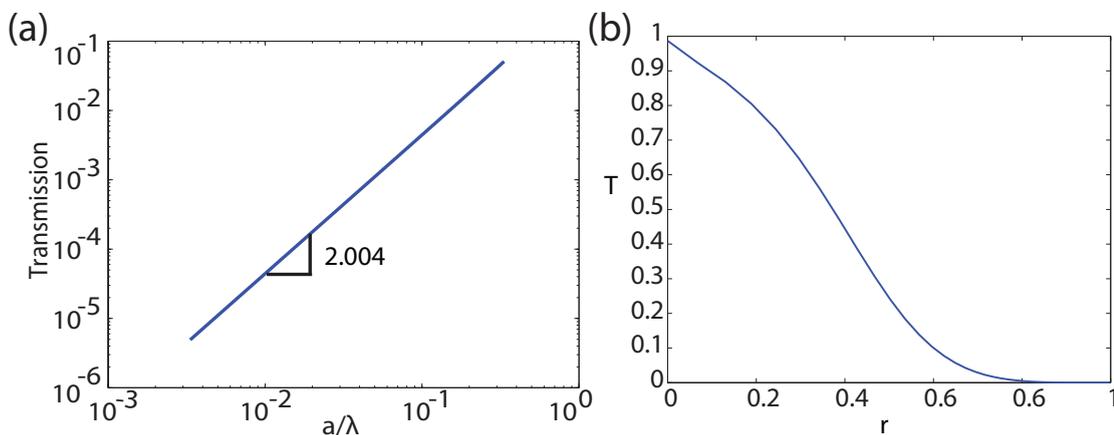


FIGURE 2.5: Transmission normale obtenue par simulation (COMSOL) d'une onde polarisée transverse sur un réseau de diffraction sub-longueur d'onde. (a) Transmission en fonction de la longueur d'onde. Le facteur de remplissage r est de 0.5. (b) Transmission en fonction du facteur de remplissage r variant entre 10^{-3} et $(1 - 10^{-3})$, à 1 GHz soit à $\lambda=30$ cm. $\Lambda = 10$ cm

La transmission dépend également de l'angle d'incidence car la période apparente du réseau est diminuée en $\Lambda \sin \theta_i$. C'est un effet essentiellement géométrique :

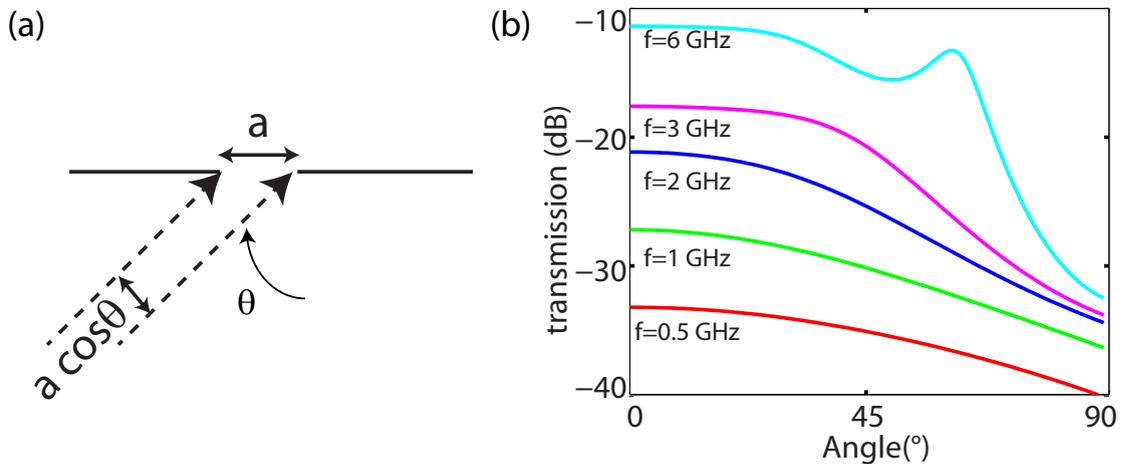


FIGURE 2.6: Effet de l'angle d'incidence sur la transmission. (a) Schéma représentant l'effet géométrique sur la dimension de la fente vue par une onde incidente avec un angle θ . (b) Transmission obtenue par simulation (COMSOL) d'un réseau sub-longueur d'onde de période $\Lambda = 2$ cm et de facteur de remplissage $r = 0,5$ en fonction des angles d'incidence entre 0 et 90° et pour des fréquences allant de 0.5 à 6 GHz, soit des longueurs d'onde respectives de 60 cm à 5 cm.

plus l'angle est élevé, et plus les fentes paraissent étroites du point de vue de l'onde incidente, comme illustré sur la figure 2.6 (a). La figure 2.6 (b), présente la transmission d'un réseau sub-longueur d'onde en fonction de l'angle d'incidence pour des ondes planes incidentes à plusieurs fréquences, et calculée numériquement par éléments finis avec COMSOL. La période du réseau Λ est de 2 cm, avec un facteur de remplissage r de 0,5 : les trous du réseau font donc 1 cm de long. Le réseau a une épaisseur $h = 0,1$ mm, il peut donc être considéré comme infiniment mince par rapport aux autres dimensions du problème. Les longueurs d'onde des ondes planes incidentes sont comprises entre 5 cm et 60 cm, et sont donc toujours largement supérieures au pas du réseau. Plus l'angle d'incidence est important, moins la transmission est élevée. Nous remarquons tout de même que les plus hautes fréquences présentent un comportement irrégulier, voir non monotone avec une transmission qui présente un maximum local au voisinage de 60°. Nous voyons là apparaître les anomalies de Wood, découvertes en 1902 [66], puis utilisées par Ebbesen en 1998 [67]. Cette transmission extraordinaire s'explique par un couplage entre l'onde incidente et une onde de surface sur le métal cannelé. La résonance de ce dernier explique la transmission anormalement élevée d'un réseau de fentes sub-longueur d'onde à certains angles et fréquences. Malgré tout, cette transmission reste assez faible dans l'absolue et inférieure à 10% au maximum. Par la suite, nous négligerons ce phénomène.

Ainsi un réseau de diffraction sub-longueur d'onde binaire transmet une onde plane incidente en une onde plane de même vecteur d'onde avec une transmission

réglable suivant les paramètres géométriques du réseau. Un réseau de diffraction sub-longueur d'onde constitue donc un très bon miroir partiellement réfléchissant, dont le coefficient de réflexion peut être sensiblement ajusté en modifiant légèrement la période et le facteur de remplissage du réseau. Ces résultats sont généralisables à des réseaux à deux dimensions constitués de trous à deux dimensions également et dont la transmission dépend de leur taille a suivant la loi $T_{2D} = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4$ [62]. Nous allons désormais ouvrir des cavités avec ce type de réseaux afin de contrôler leur couplage avec l'extérieur.

2.3 Couplage de réseaux de diffraction sub-longueur d'ondes avec une cavité résonante

Dans la partie précédente, nous avons montré que les réseaux sub-longueur d'onde binaires sont des miroirs semi-réfléchissants aux fréquences micro-ondes, et dont nous pouvons ajuster la transmission en modifiant les paramètres géométriques du réseau. Ici, nous ouvrons une cavité micro-onde avec un tel réseau. Nous commençons par étudier l'influence du réseau sur le champ à l'intérieur de la cavité. Nous nous intéresserons ensuite au champ à l'extérieur de la cavité, rayonné par celle-ci en champ lointain. Puis nous étudierons l'effet du désordre sur ce diagramme de rayonnement.

2.3.1 Étude du champ à l'intérieur de la cavité

Nous ouvrons une cavité métallique bidimensionnelle sur l'extérieur en créant des fentes sur un (ou plusieurs) de ses côtés. La figure 2.7 montre la cavité 2D considérée pour l'étude analytique et numérique ainsi que sa réalisation expérimentale à 3D. Le réseau utilisé est constitué de N fentes, et a une période de 1 cm.

Nous avons vu que le facteur de remplissage r permet de modifier la taille des fentes et donc la transmission du réseau. Ceci augmente donc les pertes radiatives de la cavité, puisqu'une partie de l'énergie stockée dans celle-ci pourra s'en échapper par rayonnement. Pour mettre en évidence cet effet, nous réalisons des simulations numériques. Nous plaçons une source dans la cavité et nous mesurons le spectre d'énergie autour du mode fondamental pour différents facteurs de remplissage. Ces résultats, exposés sur la figure 2.8 (a), sont obtenus en excitant la cavité à une fréquence proche de la résonance fondamentale de la cavité, et pour des facteurs de remplissage r allant de 0.01 à 0.3. Nous observons que plus le facteur de remplissage est faible (plus la fente est large) et plus le fondamental est

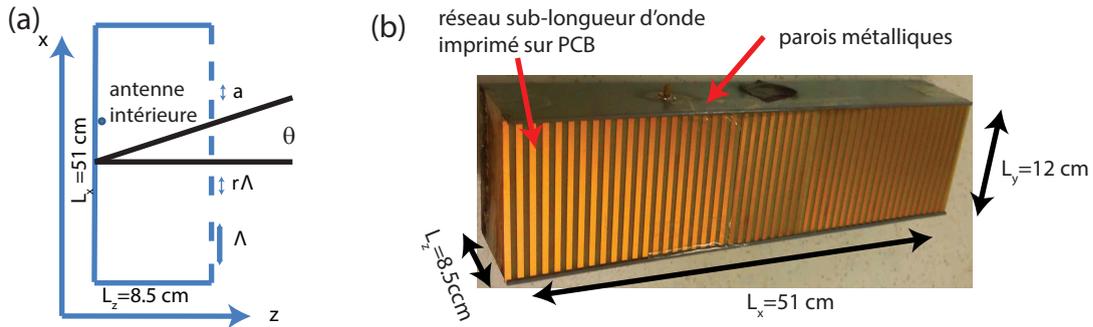


FIGURE 2.7: Cavité couplée à un réseau sub-longueur d'onde. (a) Schéma de la cavité bidimensionnelle. (b) Réalisation expérimentale d'une cavité quasi-2D.

décalé vers les basses fréquences et présente une résonance large en fréquence. En effet, lorsque la dissipation augmente dans une cavité, ou plus généralement pour tout oscillateur amorti, les résonances sont décalées vers les basses fréquences, et acquièrent une largeur spectrale plus importante comme nous l'avons expliqué au chapitre 1. La conséquence évidente de cette augmentation de la dissipation est la diminution du facteur de qualité de la cavité (figure 2.8 (b)).

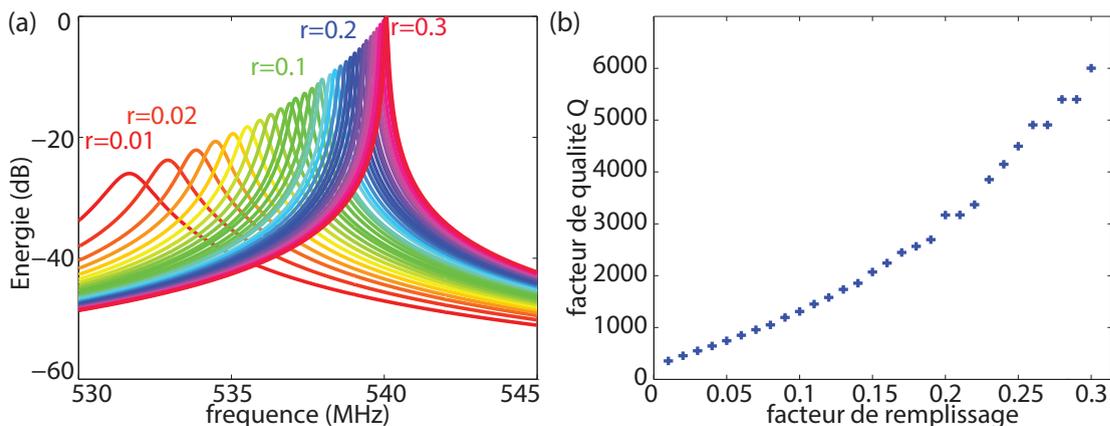


FIGURE 2.8: Effet du facteur de remplissage sur l'énergie dans la cavité par éléments fins. La cavité a des dimensions $L_x = 71$ cm et $L_z = 30$ cm. Le réseau a $N = 30$ fentes de période $\Lambda = 1.5$ cm. La cavité est en métal parfait (de conductivité infinie). (a) Résonance du mode fondamental en fonction du facteur de remplissage. (b) Facteur de qualité en fonction du taux de remplissage.

Le calcul du facteur de qualité est direct si nous négligeons la dissipation ohmique. Cette dernière peut facilement être prise en compte en calculant séparément un facteur de qualité ohmique comme expliqué au chapitre 1. Considérons un champ électrique polarisé et invariant suivant y . Le champ stationnaire dans la cavité fermée se décompose en somme d'une onde propagative vers la droite (z

croissants) et d'une onde contre-propagative.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, \omega) &= E_0 \sin(\pi m x / L_x) \sin(\pi p z / L_z) \mathbf{y} \\ &= \frac{E_0 \sin(\pi p z / L_z)}{2i} (e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}) \mathbf{y} \\ &= [E_0^+(x) e^{ik_z z} + E_0^-(x) e^{-ik_z z}] \mathbf{y}\end{aligned}\quad (2.6)$$

avec $E_0^+ = -E_0^- = \frac{E_0 \sin(\pi m x / L_x)}{2i}$ et $k_z = \frac{\pi p}{L_z}$. Ceci nous permet de calculer l'énergie à l'intérieur de la cavité :

$$U = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(x, y, z)|^2 dx dy dz = \frac{\epsilon_0}{8} |E_0|^2 V \quad (2.7)$$

La puissance dissipée sur un cycle est égale au flux d'énergie à travers le réseau, soit au produit de la transmission du réseau par l'intégrale du vecteur de Poynting sur le réseau. En effet, comme les variations du réseau sont sub-longueur d'onde, nous considérons la transmission homogène sur toute l'étendue du réseau de surface $S = L_x L_y$.

$$P_{diss} = \frac{dU}{dt} = \int_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} \quad (2.8)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est le vecteur de Poynting de l'onde incidente sur le réseau (mais aussi de l'onde transmise à la sortie du réseau), soit E_0^+ . Nous obtenons facilement :

$$\mathbf{\Pi}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} T |E_0^+(x)|^2 \mathbf{z} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin^2(m x / L_x) |E_0|^2 \mathbf{z} T \quad (2.9)$$

où T est la transmission du réseau. Soit, après intégration :

$$P_{diss} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 T S \quad (2.10)$$

Ce qui nous permet d'écrire à partir de la définition du facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega U}{P_{diss}} = \frac{4\pi}{T} \frac{V}{\lambda S} \quad (2.11)$$

avec $TS = T_{1D} S_{trou}$. Cette équation met en évidence le contrôle des pertes radiatives et donc du facteur de qualité par la période du réseau Λ et le facteur de remplissage r . La figure 2.8 (b) montre en effet que faire varier le facteur de remplissage de 1% à 30% permet de modifier le facteur de qualité de 100 à 6 000. La limite de la résolution fréquentielle de la simulation par éléments finis est atteinte pour les plus hauts facteurs de qualité, mais nous pouvons extrapoler ces résultats pour atteindre théoriquement des facteurs de qualité supérieurs à plusieurs milliers. Des facteurs de qualité bien supérieurs peuvent être envisagés, mais la dissipation ohmique devient généralement le canal principal de dissipation (à moins de travailler à très basse température ainsi qu'avec des matériaux

supra-conducteurs).

Ainsi, nous avons mis en évidence le lien entre le facteur de qualité de la cavité et la transmission du réseau, cette dernière étant définie par les paramètres géométriques du réseau. Grâce à l'utilisation d'un réseau sub-longueur d'onde comme paroi d'une cavité, nous pouvons ajuster le facteur de qualité en fonction du nombre de fentes, de la période et du taux de remplissage du réseau. Nous avons vu que ce réseau laisse s'échapper une partie de l'énergie stockée dans la cavité par rayonnement, et nous allons maintenant nous pencher sur l'influence du réseau sur le champ rayonné à l'extérieur.

2.3.2 Étude du rayonnement en champ lointain

Nous savons à présent comment un réseau de diffraction sub-longueur d'onde agit sur le champ lorsqu'il est excité par une onde plane. Dans le cas d'une cavité régulière, le champ stationnaire qui correspond au mode considéré est une superposition d'ondes planes (comme nous l'avons montré au chapitre 1). Nous ne considérons que des champs polarisés suivant \mathbf{y} (la direction verticale), et négligeons les autres polarisations. En faisant l'approximation que le champ s'annule sur le réseau, un mode donné se décompose sur la base des ondes planes de vecteurs d'onde :

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \pm k_x \\ 0 \\ \pm k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\pi m}{L_x} \\ 0 \\ \pm \frac{\pi p}{L_z} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Il y a donc deux ondes planes incidentes sur le réseau, à savoir celles de vecteurs d'ondes en $+k_z$, les deux autres étant les ondes réfléchies de ces dernières par le réseau. Nous déduisons de l'équation précédente que :

- la cavité ne rayonne qu'aux fréquences de résonances,
- la direction d'émission est déterminée par le mode excité.

En particulier, la direction d'émission est donnée par :

$$\tan \theta = \pm \frac{k_x}{k_z} = \pm \frac{m}{p} \frac{L_z}{L_x} \quad (2.13)$$

Le choix du mode propre de la cavité permet donc de déterminer la direction d'émission maximale suivant l'angle θ dans le plan horizontal, déterminé par la relation précédente et défini sur la figure 2.7.

2.3.2.1 Étude numérique

Une étude numérique par éléments finis a été réalisée avec COMSOL. Une source est placée dans la cavité et nous mesurons le champ rayonné par le système. Sur la figure 2.9 (a), nous représentons l'intensité du champ mesuré à 2 m de la cavité (c'est donc le champ lointain) en fonction de la fréquence et de l'angle d'émission. Les résultats sont présentés en décibels et normalisés par le maximum

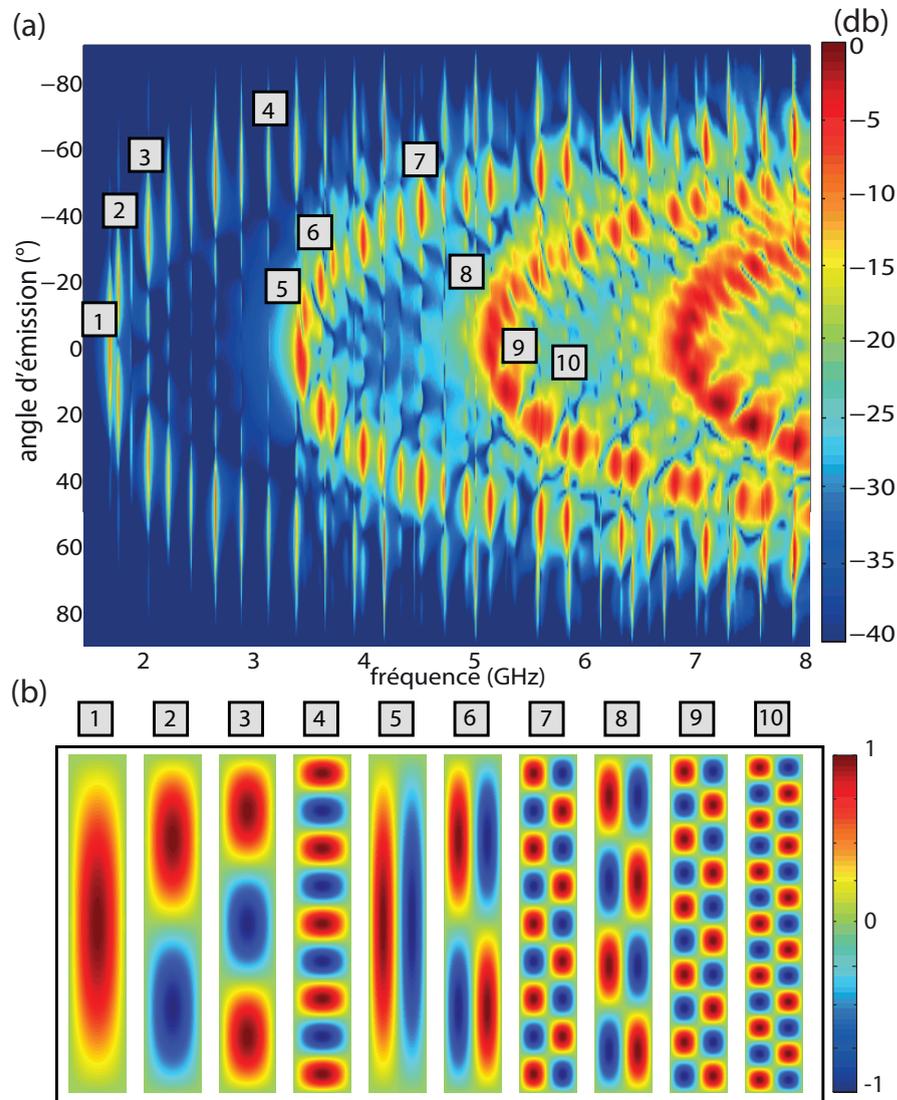


FIGURE 2.9: Simulation par éléments finis avec COMSOL (Harmonic propagation, In plane TE waves). (a) Rayonnement de la cavité en champ lointain (2 m) pour une cavité à deux dimensions ($L_x=51$ cm et $L_z=8,5$ cm, $N=45$, $\Lambda=1$ cm, et $r=0,1$). Des pertes volumiques sont simulées pour diminuer le facteur de qualité, afin de limiter le nombre de simulations à effectuer ($\epsilon_r'' = 1,4 \cdot 10^{-3}$). L'énergie mesurée est représentée en fonction de la fréquence et de l'angle d'émission. (b) Partie réelle des modes correspondants aux numéros du diagramme de rayonnement.

d'émission. Des pertes volumiques ont été ajoutées pour diminuer le facteur de qualité afin d'élargir les résonances pour limiter l'échantillonnage nécessaire en fréquence de la simulation.

Nous pouvons voir vers 1,8 GHz le rayonnement du mode fondamental ($m = 1$, $p = 1$) de la cavité, centré sur l'angle $\theta = 0$, et représenté sur la figure 2.9 (b) par le mode 1. À des fréquences légèrement supérieures, un autre mode ($m = 2$, $p = 1$) apparaît, et émet de l'énergie pour les angles $\theta \approx \pm 18^\circ$. L'angle prévu par l'équation 2.13 donne $\theta \approx \pm 19^\circ$. Ce mode est également représenté sur la sous figure (b). Nous observons des modes suivant x de plus en plus élevés, qui rayonnent vers des angles de plus en plus élevés également et qui se rapprochent asymptotiquement de 90° . Vers 3,2 GHz nous voyons apparaître une nouvelle branche de modes pour $p = 2$ et de nombreuses valeurs de m , puis vers 5,1 GHz les modes indicés par $p = 3$ et à 6,8 GHz ceux indicés par $p = 4$. Plusieurs de ces modes sont représentés sur la figure 2.9 (b). La position de ces rayonnements en fréquence correspond aux résonances attendues de la cavité, et leurs angles sont très bien prédits par l'équation 2.13. Nous remarquons cependant des exceptions : les modes indicés par un entier $m = 1$, rayonnent dans la direction normale au réseau ($\theta = 0$), ce qui ne devrait pas être le cas d'après la formule 2.13 obtenue pour un réseau infini. Nous pouvons remarquer que la symétrie de ces modes (symétriques par rapport à l'axe $\theta = 0$) implique nécessairement un rayonnement maximum en $\theta = 0$. En effet, N sources excitées en phases rayonnent dans la direction normale.

À haute fréquence, nous observons une diminution du facteur de qualité. En effet, nous avons vu que la transmission d'un réseau sub-longueur d'onde augmente avec la fréquence d'après l'équation 2.1. Enfin, nous pouvons noter une petite asymétrie du diagramme de rayonnement à haute fréquence. Celle-ci peut s'expliquer par la position non symétrique de la source à l'intérieur de la cavité. Il est cependant nécessaire de placer la source à une position non symétrique, car les modes symétriques ne pourraient être excités dans le cas contraire : l'antenne serait sur un zéro (un nœud) de ces modes. La plupart des modes présentent des lobes secondaires non expliqués jusqu'à présent. Ceux-ci sont dus à la dimension finie du réseau sub-longueur d'onde. Nous pouvons l'expliquer simplement grâce à l'optique de Fourier comme nous allons le voir un peu plus loin.

2.3.2.2 Vérification expérimentale

En plus de cette étude numérique, nous avons vérifié ces résultats avec une cavité à trois dimensions, ce qui produit quelques différences. La hauteur de notre cavité métallique est de 12 cm, soit de l'ordre des longueurs d'onde utilisées, les autres dimensions restant inchangées. La cavité a également 45 périodes de 1 cm

pour un même facteur de remplissage qu'en simulation ($r = 0.5$). Nous utilisons une petite antenne, inadaptée en impédance, d'environ 1 cm de long, et nous la plaçons sur le plan supérieur de la cavité. Nous obtenons un facteur de qualité plus important (environ 1000). En effet, contrairement aux simulations, il n'y a pas de dissipation dans le volume mais des pertes ohmiques sur les parois, qui sont beaucoup plus faibles. Un analyseur de réseau mesure la transmission entre une petite antenne monopole à l'intérieur, et une antenne cornet en champ lointain, à 2 m de la cavité (figure 2.10 (a)).

La figure 2.10 (b), qui trace le spectre de la transmission suivant trois directions, met en évidence la dépendance de la direction d'émission en fonction de la fréquence. Par exemple pour émettre de l'énergie dans une direction normale ($\theta = 0$), nous choisirons de travailler à 2,9 GHz, mais pour émettre à $\theta = 40^\circ$, nous travaillerons à 4,1 GHz. La disposition des directions d'émission des modes permet de choisir de manière quasi-continue un angle d'émission en fonction de la fréquence.

Sur la figure 2.10 (c), nous retrouvons les directions d'émission d'énergie pour les fréquences et les angles prévus par l'équation 2.13 et l'étude numérique précédente. Nous notons que le facteur de qualité est beaucoup plus élevé qu'en simulation ce qui rend certains modes difficiles à observer. Nous notons également que le facteur de qualité diminue à haute fréquence et que le diagramme de rayonnement est symétrique à quelques détails près, là encore explicables par l'asymétrie de la position de l'antenne dans la cavité. La différence majeure réside en la présence de modes additionnels dus à la direction hors plan, c'est à dire suivant y , de la cavité, et aux modes indicés par un entier $n \neq 0$.

2.3.2.3 Lobes de réseau

Nous avons déjà remarqué que la dimension en réalité finie des réseaux produit des lobes secondaires. Ces lobes d'émission (secondaires et principaux) peuvent être calculés avec une approche d'optique de Fourier [32]. Il faut cependant se restreindre à des petits angles θ pour vérifier l'approximation paraxiale. En posant comme fréquence spatiale dans le plan d'observation situé à la distance z du réseau $f_x = \frac{2\pi x}{\lambda z} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \theta$, le champ s'écrit comme la transformée de Fourier de la transmittance t du réseau convoluée par le champ incident sur le réseau, $E_i = E_0^+$ (cf. équation 2.6) :

$$E(f_x) = \mathcal{F}[t](f_x) * \mathcal{F}[E_i](f_x) \quad (2.14)$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier et $*$ l'opération de convolution. La transmittance t est formée par la somme des N trous du réseau de largeur $a = (1-r)\Lambda$.

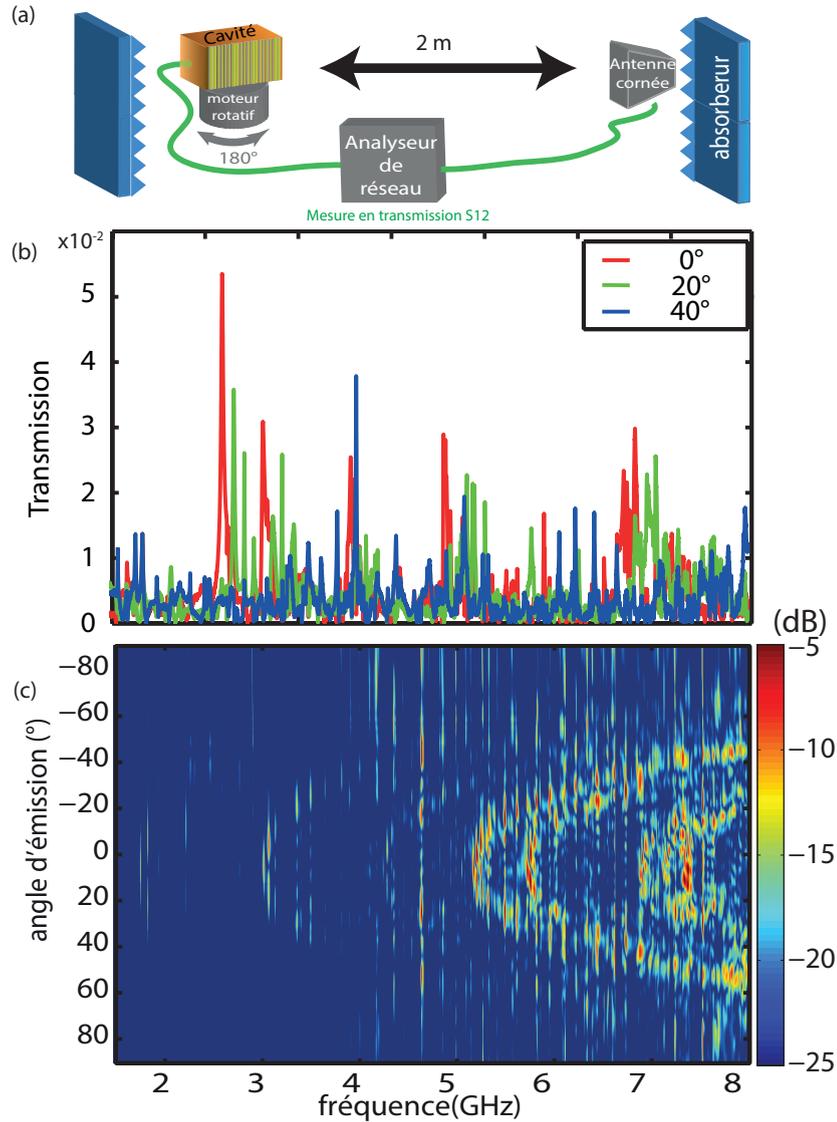


FIGURE 2.10: Mesure expérimentale du rayonnement émis par une cavité ouverte par un réseau de diffraction. (a) Protocole expérimental : la transmission est mesurée entre une antenne monopolaire de m mm de long insérée dans la paroi supérieure de la cavité et une antenne cornet située à 2 m de la cavité, polarisée dans la direction verticale. L'analyseur de réseau mesure la transmission entre 2 et 8 GHz. (b) Diagramme de rayonnement en fonction de la fréquence et de l'angle d'émission. (c) Spectres de transmission en champ lointain pour 3 angles d'émission.

Mathématiquement t est la somme de N fonctions portes de largeur a et d'amplitude T_{1D} , soit la transmission de chaque trou, et décalées de n périodes du réseau Λ :

$$t(x) = T H_a(x) * \sum_{n=1}^N \delta(x - n\Lambda) = T \sum_{n=1}^N H_a(x - n\Lambda) \quad (2.15)$$

où H_a représente la fonction porte qui vaut 1 sur $[-a/2; a/2]$ et 0 ailleurs. Nous obtenons alors :

$$F(f_x) = \mathcal{F}[t(x)](f_x) = aT_{1D} \text{sinc}(af_x/2) \frac{\sin(f_x N \Lambda/2)}{\sin(f_x \Lambda/2)} \quad (2.16)$$

Nous avons déjà vu que le champ incident sur le réseau s'écrit comme :

$$E_0^+(x) \propto \sin k_x x \times H_{L_x=N\Lambda}(x) \quad (2.17)$$

Cependant la somme de fonctions porte de t inclue déjà cet effet de taille fini et la fonction porte sur la longueur du réseau. La transformée de Fourier de E_0 est donc une somme de deux distributions de Dirac :

$$\mathcal{F}[E_i(x)](f_x) \propto [\delta(f_x + k_x) + \delta(f_x - k_x)] \quad (2.18)$$

L'intensité totale s'écrit alors :

$$I(f_x)/I_0 = F(f_x + k_x)^2 + F(f_x - k_x)^2 + 2F(f_x + k_x)F(f_x - k_x) \cos((N-1)\Lambda k_x) \quad (2.19)$$

En particulier I a des maxima si $F(f_x \pm k_x)$ en a, soit pour $f_x = \pm k_x$. Ceci mène à :

$$\tan \theta = \frac{\pm \frac{m}{L_x}}{\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_z}\right)^2}} \quad (2.20)$$

Nous retrouvons aux petits angles avec la formule de l'angle des maxima d'émission trouvée pour un réseau infini un peu plus tôt (équation 2.13). Les positions des maxima secondaires sont données par les maxima du numérateur de F , à savoir de $\sin((f_x \pm k_x)N\Lambda/2)$.

Une cavité régulière ouverte par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde possède un diagramme de rayonnement particulier. La cavité n'émet d'énergie qu'à certaines fréquences et dans certaines directions définies par les fréquences propres et modes propres de la cavité. Des lobes secondaires et des effets dus à la taille finie du réseau et de la cavité perturbent le diagramme de rayonnement théorique prévu par l'équation 2.13. Nous nous demandons si d'autres effets peuvent perturber le diagramme de rayonnement, comme le désordre.

2.3.3 Effets du désordre

Le formalisme de Fourier, permet de mettre en évidence les influences finalement équivalentes de la transmittance et du champ incident, sur le rayonnement

du champ électrique en champ lointain.

$$E(f_x) = \mathcal{F}[t](f_x) * \mathcal{F}[E_i](f_x)$$

Dans le premier chapitre, nous avons montré que le désordre peut avoir des effets intéressants. Ceci peut être étudié en distribuant aléatoirement la largeur et la position des fentes du réseau, ce qui crée un réseau aléatoire et modifie la transmittance t , ou en couplant un réseau à une cavité désordonnée, ce qui influence le champ incident E_i .

2.3.3.1 « Réseau » sub-longueur d'onde aléatoire

Nous fabriquons un réseau aléatoire en altérant la taille et la position de chaque fente. Ainsi, nous tirons $N \approx 45$ fentes (le nombre n'est pas fixé) aléatoirement espacées de $5 \mu\text{m}$ à 2Λ (de moyenne $\Lambda = 1 \text{ cm}$, la pseudo-période, mais de manière à ce que deux trous adjacents ne se chevauchent pas), tout en imposant la condition $\sum_{n=1}^N \Lambda_n \leq L_x$. À chaque fente est ensuite attribuée une largeur suivant un coefficient de remplissage aléatoire r compris entre 0 et 1 (de moyenne 0,5). Nous effectuons une nouvelle étude numérique dont le résultat est présenté sur la figure 2.11 sous la forme d'un diagramme de rayonnement, simulé pour une cavité régulière (celle présentée figure 2.7) couplée à un réseau désordonné. Nous utilisons ici aussi le logiciel commercial COMSOL (In plane waves, harmonic propagation), la cavité est en métal parfait et nous ajoutons des pertes volumiques pour diminuer le facteur de qualité Q . À nouveau, nous ajoutons de l'absorption dans le volume pour diminuer artificiellement le facteur de qualité. L'effet d'un réseau désordonné est marginal et ne modifie que légèrement les hautes fréquences : globalement le réseau conserve son rôle de miroir semi-réfléchissant. Les perturbations du désordre sont très sub-longueur d'onde et n'influencent pas les directions d'émission, mais seulement légèrement le facteur de qualité. En effet, la transmission n'évolue pas linéairement avec la largeur d'une fente, donc, même si en moyenne la taille des trous est comparable à celle d'un réseau périodique, ce n'est pas le cas de la transmission effective qui peut être plus ou moins élevée. En moyennant 40 simulations de manière incohérente, c'est-à-dire en sommant l'énergie, nous retrouvons le diagramme de rayonnement obtenu précédemment pour un réseau périodique. Nous pouvons faire le lien avec le facteur de Debye-Waller en diffraction des rayons X : l'agitation thermique crée une absorption due à la diffusion inélastique des molécules, mais ne modifie pas profondément la figure de diffraction [68, 69, 70]. Le facteur de qualité est diminué comparé au cas d'un réseau périodique, même si cela est surtout visible à haute fréquence (figure 2.11 (b)). Ceci est dû au fait que le système rayonne mieux aux très hautes fréquences car il est de dimension trop sub-longueur d'onde aux plus basses fréquences.

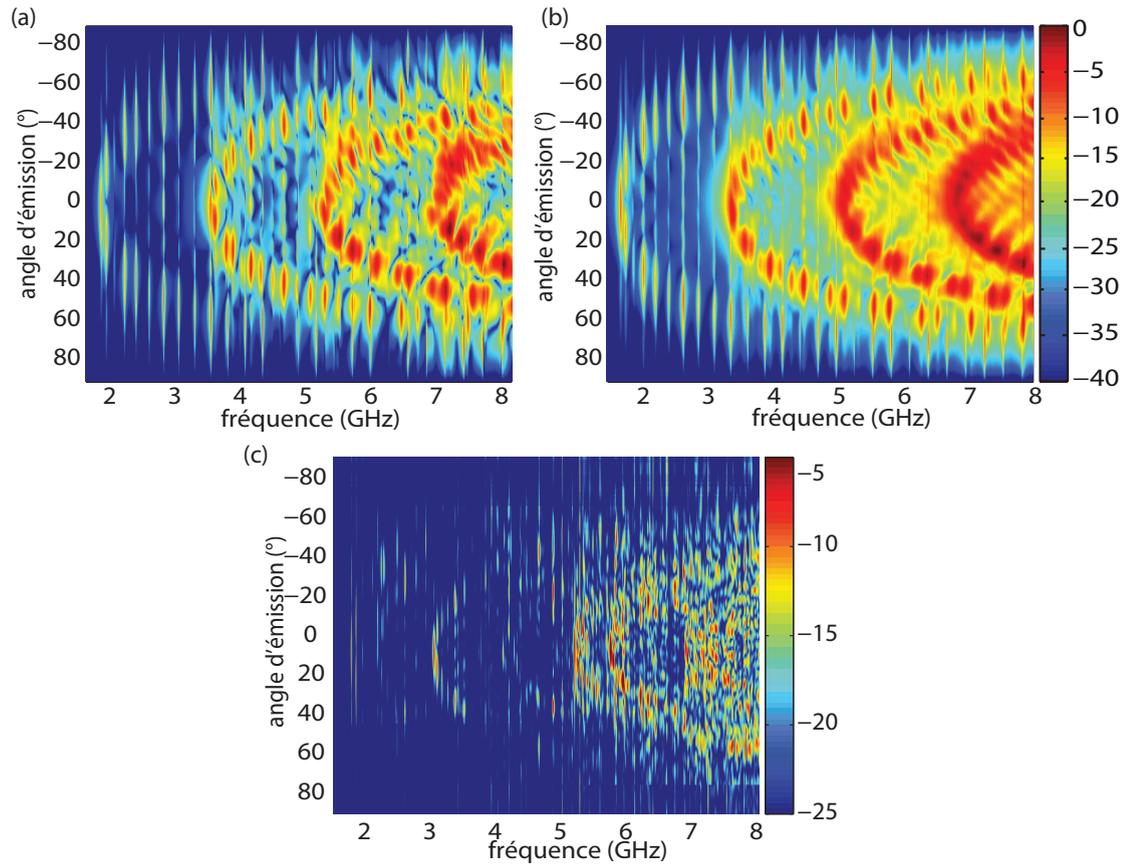


FIGURE 2.11: Diagramme de rayonnement d'une cavité régulière couplée à un réseau de diffraction aléatoire. (a) Simulation (COMSOL, In plane TE waves, Harmonic propagation, cavité en PEC avec ajout d'absorption volumique pour diminuer Q) avec une réalisation de réseau aléatoire. (b) Moyenne sur 40 simulations. (c) Mesure expérimentale avec un réseau aléatoire.

Nous effectuons une mesure expérimentale en imprimant un réseau désordonné sur PCB. Les résultats sont présentés sur la figure 2.11 (c) et ne sont pas visiblement différents des résultats obtenus expérimentalement avec un réseau périodique (figure 2.10 (b)). Ceci démontre finalement que ce système de cavité couplée à un réseau de diffraction sub-longueur d'onde est robuste vis-à-vis du désordre introduit sur le réseau. Le désordre sur le réseau apporte peu de différences, mais nous avons vu qu'il peut augmenter le nombre de degrés de liberté en milieux réverbérants. Voyons ce qu'il en est lorsque c'est la cavité qui est désordonnée.

2.3.3.2 Cavité désordonnée

Pour obtenir une cavité désordonnée, nous avons choisi d'y introduire des diffuseurs métalliques. Ceci nous permet de conserver la même cavité expérimentale, contrairement à une autre solution qui aurait consisté à utiliser une cavité chaotique, et donc à modifier complètement la géométrie. Cela nous permet aussi de contrôler plus finement le désordre induit à volonté en augmentant le nombre de diffuseurs graduellement. L'avantage du diffuseur métallique est qu'il produit un champ désordonné dans la cavité, comme le font les brasseurs de modes en chambre réverbérante, sans introduire de résonance supplémentaire comme le feraient des diffuseurs diélectriques. En simulation, nous introduisons 10 diffuseurs cylindriques en métal parfait de diamètre 1 cm à des positions aléatoires dans la cavité. L'expérience se fait en introduisant 10 diffuseurs en aluminium en forme de croix, et dont chaque segment fait 1 à 2 cm de long. Le nombre de 10 est arbitrairement choisi de manière à ce que le champ soit suffisamment désordonné, sans pour autant remplir la cavité de diffuseurs.

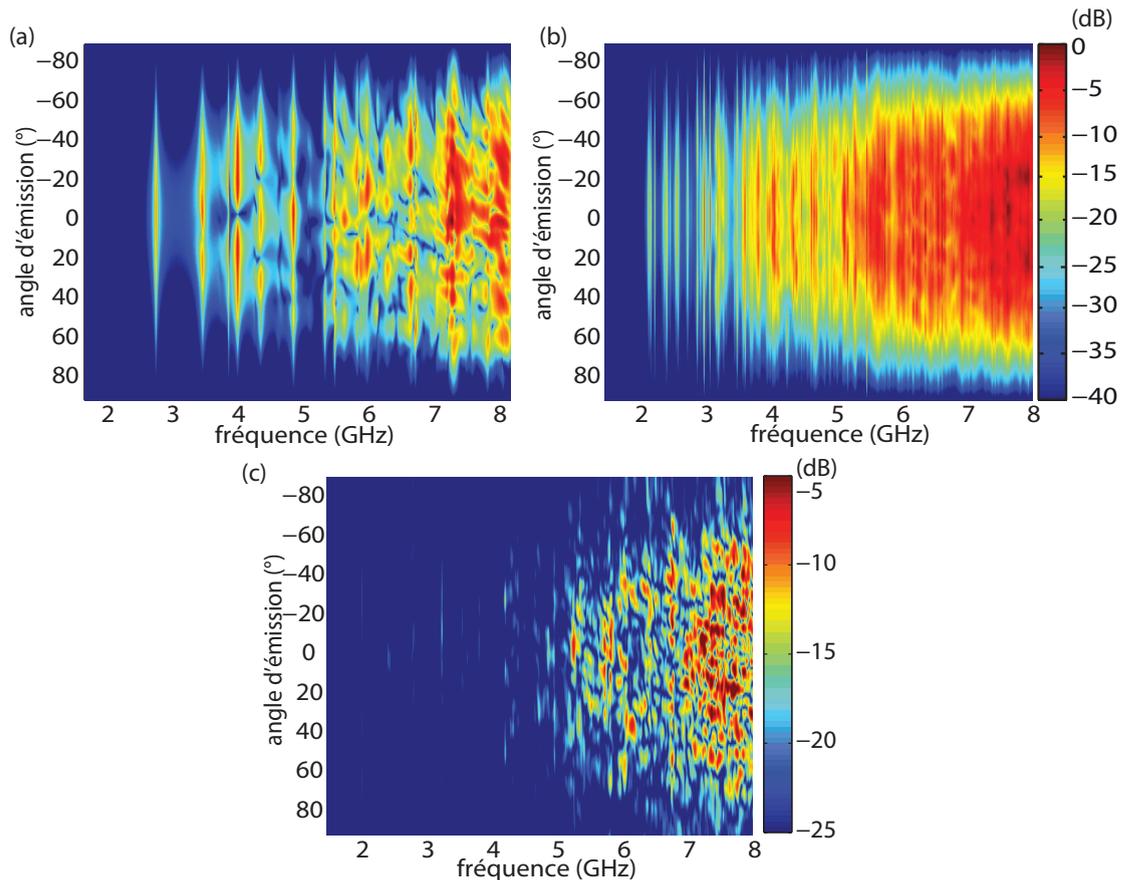


FIGURE 2.12: Cavité désordonnée couplée à un réseau de diffraction périodique. (a) Simulation (COMSOL) avec une réalisation de cavité désordonnée. (b) Moyenne sur 40 simulations. (c) Mesure expérimentale avec une cavité désordonnée.

La figure 2.12, présente des résultats à la fois numériques et expérimentaux pour une cavité désordonnée. Encore une fois, nous avons choisi de présenter une simulation (figure 2.12 (a)), une moyenne effectuée sur 40 simulations (figure 2.12 (b)) et une mesure expérimentale (figure 2.12 (c)).

Les fréquences de résonances sont complètement différentes comparées aux cas précédemment étudiés. Le fondamental est décalé vers les hautes fréquences et la densité de modes est plus faible. Les rayonnements obtenus couvrent un domaine angulaire beaucoup plus large. Cet effet est surtout visible en simulations, mais aussi, dans une moindre mesure, sur la mesure expérimentale aux plus hautes fréquences. À une fréquence de résonance donnée, le champ a spatialement une allure désordonnée, ressemblant à une figure de *speckle*. En conséquence, la moyenne produit un champ très isotrope, à l'exception des plus grands angles. Cette moyenne n'est pas uniquement une considération théorique et peut être réalisée expérimentalement. En effet, de nombreuses antennes placées à l'intérieur peuvent exciter des modes très différents, chacun créant son diagramme de rayonnement. La somme incohérente de ces diagrammes de rayonnement mènerait ainsi à un diagramme de rayonnement isotrope bien qu'aléatoire. Ce procédé est analogue à celui développé par l'équipe de Hui Cao pour concevoir un laser sans *speckle* [71, 72].

Le décalage vers les hautes fréquences du fondamental et la densité de modes inférieure s'expliquent aisément par l'introduction des diffuseurs qui a légèrement diminué le volume de la cavité, lui-même proportionnel à la densité d'états (équation 1.34). Les modes de la cavité désordonnée ne sont plus décomposables en une somme finie d'ondes planes, mais en un continuum. Cette somme de vecteurs d'onde \mathbf{k} continue mène ainsi à un rayonnement sur une distribution angulaire plus large, et donc à un diagramme de rayonnement plus isotrope qu'avec une cavité régulière.

En conclusion une cavité désordonnée produit un diagramme de rayonnement très différent d'une cavité régulière. Tout d'abord, les fréquences d'émission ne sont plus régulièrement espacées, et en moyenne le diagramme de rayonnement ne dépend presque plus de la fréquence. De plus, ce diagramme de rayonnement tend également vers une isotropie angulaire. Nous allons maintenant voir ce qu'il en est lorsque nous couplons un réseau aléatoire à une cavité désordonnée.

2.3.3.3 « Réseau » sub-longueur d'onde aléatoire et cavité désordonnée

Après avoir étudié séparément l'effet d'un réseau aléatoire ou d'une cavité désordonnée, nous couplons un réseau aléatoire à une cavité désordonnée. Les résultats (figure 2.13) ressemblent essentiellement à ceux obtenus avec une cavité

désordonnée et un réseau périodique. Cependant, à hautes fréquences, nous notons une diminution du facteur de qualité et un élargissement spectral des résonances. En effet, nous avons vu que l'utilisation d'un réseau désordonné ne perturbe pas, ou peu, le diagramme de rayonnement, sauf à haute fréquence où le facteur de qualité est notablement diminué. En revanche, l'introduction de désordre au niveau de la cavité produit des effets très sensibles sur la position des modes et sur leur rayonnement. C'est cet effet qui est dominant ici.

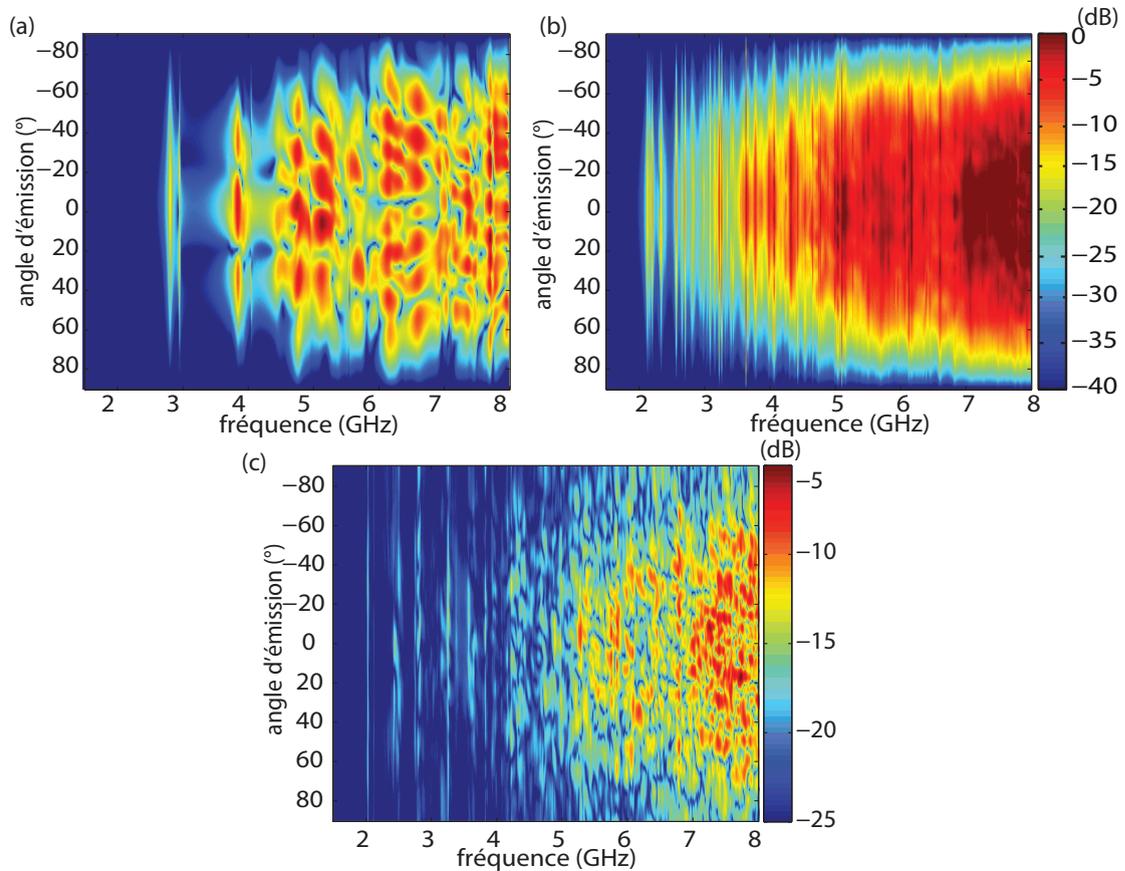


FIGURE 2.13: Cavité désordonnée couplée à un réseau de diffraction aléatoire. (a) Simulation (COMSOL) avec une réalisation de cavité désordonnée et de réseau aléatoire. (b) Moyenne sur 40 simulations. (c) Mesure expérimentale avec une cavité désordonnée et un réseau aléatoire.

L'introduction de désordre rend le diagramme de rayonnement plus isotrope, et cet effet est visible à la fois sur chaque mesure (figure 2.13 (c)) ou simulation (figure 2.13 (a)), que sur les diagrammes de champs lointains moyennés (figure 2.13 (b)).

En conclusion l'influence du désordre se fait beaucoup plus sentir lorsqu'il est induit dans la cavité que sur le réseau. Un réseau sub-longueur d'onde aléatoire

ne modifie pas sensiblement le diagramme de rayonnement par rapport à un réseau périodique. Le seul effet notable est une diminution du facteur de qualité aux plus hautes fréquences. En revanche une cavité désordonnée change en profondeur à la fois les modes de résonances et donc les fréquences d'émission de la cavité, mais aussi les angles vers lesquels ceux-ci rayonnent. Nous obtenons alors des diagrammes de rayonnement très aléatoires et ressemblant à des figures de *speckle*. En moyenne une cavité désordonnée produit un diagramme de rayonnement isotrope. L'insertion de désordre à la fois sur le réseau et dans la cavité produit logiquement les deux effets que nous venons de mentionner, à savoir la diminution du facteur de qualité plus visible aux hautes fréquences et un désordre spatial tendant vers l'isotropie en moyenne.

Que ce soit en présence de désordre ou pas, le diagramme de rayonnement d'une cavité couplée à un réseau de diffraction sub-longueur d'onde possède des propriétés spécifiques qui sont particulièrement intéressantes pour certaines applications. Nous allons à présent décrire quelques exemples d'applications tirant partie de ce système.

2.4 Applications

L'ouverture de cavités par des réseaux sub-longueurs d'onde qui se comportent comme des miroirs partiellement réfléchissants permet d'envisager un certain nombre d'applications. En effet, nous venons de décrire trois propriétés particulièrement intéressantes : la transmission du réseau est accordable et détermine le facteur de qualité de la cavité, la direction d'émission dépend de la fréquence, et le désordre permet de créer un diagramme de rayonnement isotrope. Dans cette partie nous allons montrer l'intérêt du système proposé en donnant quelques exemples d'applications. Nous allons tout d'abord montrer comment nous réaliserions des opérations d'imagerie et de détection, avant d'envisager l'amélioration d'un bazooka électromagnétique précédemment proposé au laboratoire. Enfin, nous montrerons que notre méthode permet d'ouvrir une fenêtre pour observer les champs dans les cavités.

2.4.1 Imagerie, détection et communication

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les cavités supportent un grand nombre de modes dans une bande passante donnée. Ces N_t modes sont des degrés de liberté temporels. De plus, chaque source à l'intérieur d'une cavité désordonnée constitue également un degré de liberté, spatial celui-ci. Ces $N = N_s \times N_t$ degrés de liberté

représentent le nombre de champs indépendants que nous pouvons créer dans et hors de la cavité grâce à des émetteurs. Par réciprocity, ces degrés de liberté représentent également le nombre de champs décorrélés détectables dans et hors de la cavité.

L'utilisation d'un réseau sub-longueur d'onde permet d'ajuster précisément le facteur de qualité de la cavité, ce qui optimise le nombre de degrés de liberté fréquentiels ou temporels. En effet, nous avons vu au chapitre 1, que $N_t = \Delta f / \delta f \propto Q / f$, où Δf est la bande passante et δf la fréquence de cohérence. Utiliser une grande cavité augmente également ce nombre de degrés de liberté temporels car la DOS est proportionnelle au volume de la cavité (équation 1.35). Pour optimiser le nombre de degrés de liberté spatiaux, il faut pouvoir insérer un grand nombre de détecteurs indépendants dans une cavité qui doit donc être désordonnée ou chaotique. Nous pouvons donc choisir le nombre de modes dans une certaine bande passante pour une application spatiale, ou utiliser une technique large bande.

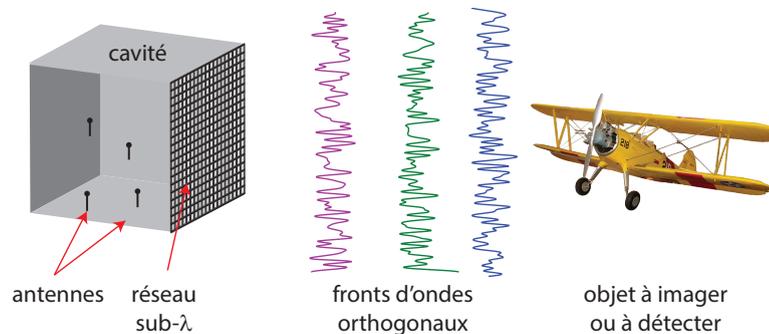


FIGURE 2.14: Des antennes à l'intérieur de la cavité produisent ou détectent des fronts d'onde orthogonaux (spatialement ou fréquentiellement, aléatoires ou périodiques), ce qui permet d'illuminer ou d'imager un objet.

Chaque onde incidente (ω, \mathbf{k}) , que ce soit des ondes planes ou des fronts d'ondes orthogonaux complexes comme sur la figure 2.14, sur le réseau crée des champs différents sur les récepteurs. Nous pouvons ainsi encoder N informations différentes sur nos degrés de liberté. Préalablement à toute application, il est nécessaire d'effectuer une période d'apprentissage. Par exemple, si nous voulons utiliser la cavité pour imager un objet, nous devons apprendre les signaux mesurés par des ondes incidentes sur le réseau avec N vecteurs d'ondes \mathbf{k} différents. Une fois ceci fait, nous projetons les signaux créés par l'objet à imager sur les signaux appris pour synthétiser une image. Cette opération s'apparente à une déconvolution ou à une inversion matricielle. La résolution de cette image est limitée par la directivité de la cavité, c'est à dire par la dimension de son ouverture. Utiliser un réseau de diffraction sub-longueur d'onde permet ainsi de bénéficier simultanément d'une bonne directivité et d'un haut facteur de qualité, donc d'un grand nombre de degrés de liberté temporels pour former une image [73, 74].

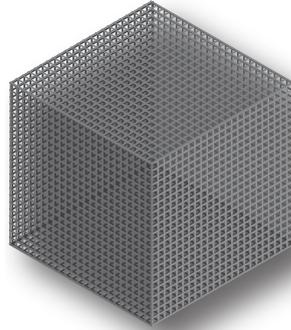


FIGURE 2.15: En remplaçant toutes les parois par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde, nous pouvons fabriquer une antenne omnidirectionnelle.

Un spectromètre dans le domaine infrarouge basé sur ce principe a également été développé dans l'équipe de Hui Cao. Une onde est guidée jusqu'à une cavité désordonnée (un guide d'onde multimode) [71, 75]. La distribution spatiale du champ dans la cavité dépend de la fréquence et les récepteurs ne mesurent pas la même intensité à deux fréquences séparées d'une fréquence de cohérence du milieu. Là encore, une étape d'apprentissage est nécessaire pour enregistrer la matrice de transmission qui relie un vecteur de fréquences au vecteur des intensités mesurées par les capteurs. Une fois celle-ci connue, nous pouvons calculer le spectre de n'importe quelle onde incidente à partir du code des intensités mesurées.

Le système proposé permet également de faire des antennes pour diverses applications. Par exemple, utiliser une cavité désordonnée permet d'avoir un grand nombre de modes spatialement décorrélés qui bénéficieraient à un système MIMO (*multiple input multiple output*). Au contraire, une cavité régulière génère des ondes planes, et peut être utilisée pour des applications radar. La transmission du réseau permet de sélectionner la bande passante utilisée, et ainsi le nombre de degrés de liberté temporels de la cavité. De plus, nous pouvons également envisager d'ouvrir chaque paroi de la cavité par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde, comme sur la figure 2.15. Ceci permettrait de faire une antenne omnidirectionnelle. Utiliser des techniques de retournement temporel permettrait alors d'envoyer de l'énergie dans n'importe quelle direction choisie : nous en ferions une antenne de direction configurable.

Ouvrir une cavité par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde est un moyen efficace de sélectionner le nombre de degrés de liberté du système. Nous venons de montrer comment nous pourrions utiliser ce système pour faire un système d'imagerie, un spectromètre, ou des antennes. Ce concept est généralisable à d'autres types de détecteurs. Nous pouvons ainsi bénéficier de la grande richesse apportée par un grand nombre de degrés de liberté, pour générer ou détecter des

ondes très diverses. Nous allons maintenant décrire une autre application qui bénéficierait de nos miroirs partiellement réfléchissants : le bazooka électromagnétique.

2.4.2 Bazooka électromagnétique

Le principe du bazooka électromagnétique fut proposé initialement par Gabriel Montaldo [76] en acoustique. Ce bazooka utilise la propriété des cavités à accumuler les ondes sur un temps très long grâce au facteur de qualité élevé de la cavité. Le retournement temporel permet de libérer sur un instant très bref cette énergie accumulée. Mathieu Davy et Julien de Rosny [77] ont adapté cette technique d'amplification physique au domaine des micro-ondes. Ils ont donc ouvert une cavité métallique en faisant un trou dans une des parois pour obtenir des impulsions amplifiées physiquement et non électroniquement. Ils ont alors montré que cette technique permet d'obtenir un gain de signal crête de 40 à 50 décibels par rapport à l'émetteur amplifié. L'inconvénient de leur approche est que la dimension de l'ouverture gouverne à la fois le facteur de qualité de la cavité (et donc de la compression temporelle) et sa directivité.

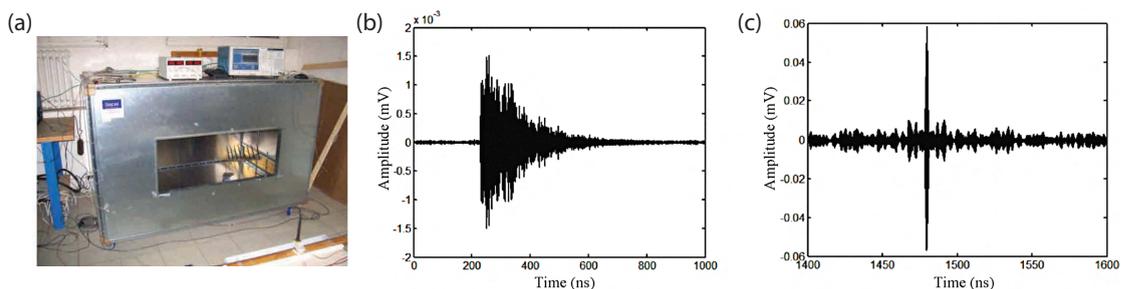


FIGURE 2.16: Bazooka électromagnétique. (a) Cavité utilisée par Davy et al. pour émettre des impulsions élevées. (b) Réponse impulsionnelle. (c) Compression de la réponse par retournement temporel. Figures reproduites de [77].

Remplacer l'ouverture proposée par Mathieu Davy par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde permet de bénéficier simultanément d'une large ouverture angulaire et d'un haut facteur de qualité. Il est alors possible de régler indépendamment la directivité et le facteur de qualité de la cavité. Utiliser un réseau sub-longueur d'onde sur toute une surface de la cavité, améliore la directivité optimale auparavant obtenue pour un trou de la taille de λ^2 [77, 78]. Une demande de brevet PCT a été déposée sur ce concept.

2.4.3 Une fenêtre pour observer le champ dans des cavités

Jusqu'ici, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'étude du rayonnement en champ lointain de la cavité, en utilisant des réseaux sub-longueurs d'onde qui se comportent comme des miroirs partiellement réfléchissants, et dont la réflectivité (ou la transmission) peut être finement réglée grâce aux paramètres du réseau. Cependant l'étude intrinsèque d'un champ électromagnétique à l'intérieur même d'une cavité et non pas de son couplage à l'extérieur comme dans les parties précédentes est aussi d'une importance centrale en physique fondamentale. Citons par exemple l'étude de la localisation d'Anderson [6] en micro-ondes dans un espace à deux dimensions où des diffuseurs diélectriques sont disposés aléatoirement, ou l'étude du chaos ondulatoire dans des cavités à deux dimensions (dont la hauteur est plus faible que la demi-longueur d'onde), appelées billards [79]. Nous revenons sur les méthodes employées pour mesurer les champs dans ces billards, avant de proposer une nouvelle méthode basée sur les réseaux de diffraction sub-longueur d'onde.

2.4.3.1 Mesurer les fonctions de Green d'un billard

Pour étudier ces cavités, il est nécessaire de pouvoir y mesurer le champ électromagnétique sans le perturber sensiblement. Stöckmann, dans son livre sur l'étude expérimentale du chaos quantique [22] propose deux techniques. La première et la plus simple consiste à insérer une antenne dans la cavité en chaque point mesuré. C'est la technique utilisée le plus souvent pour mesurer les fonctions de Green dans les billards chaotiques, comme sur la figure 2.17 (a). Il est également possible de faire un trou dans la paroi à chaque position et de venir y mettre une antenne lors de la mesure, ou de déplacer l'antenne avec toute la paroi supérieur. La deuxième technique est appelée méthode de la bille perturbatrice (*perturbative bead method*). Cette technique consiste à insérer une bille métallique dans la cavité, et à la déplacer grâce à un aimant situé à l'extérieur de la cavité. En se déplaçant, la bille modifie la transmission à l'intérieur de la cavité, ce qui permet de remonter à la fonction de Green à l'emplacement de la bille. C'est la méthode utilisée par exemple par l'équipe de Fabrice Mortessagne [80] pour mesurer des modes localisés dans un milieu aléatoire de diffuseurs. En sus de devoir remonter au champ par une opération complexe, une difficulté expérimentale supplémentaire provient de l'emplacement des diffuseurs. Il faut donc déplacer l'aimant extérieur sur un chemin complexe pré-enregistré. Dans les deux cas, que ce soit l'introduction de nombreuses antennes ou la méthode de la bille perturbatrice, la procédure est lourde expérimentalement, et introduit localement de la dissipation pour chaque antenne introduite.

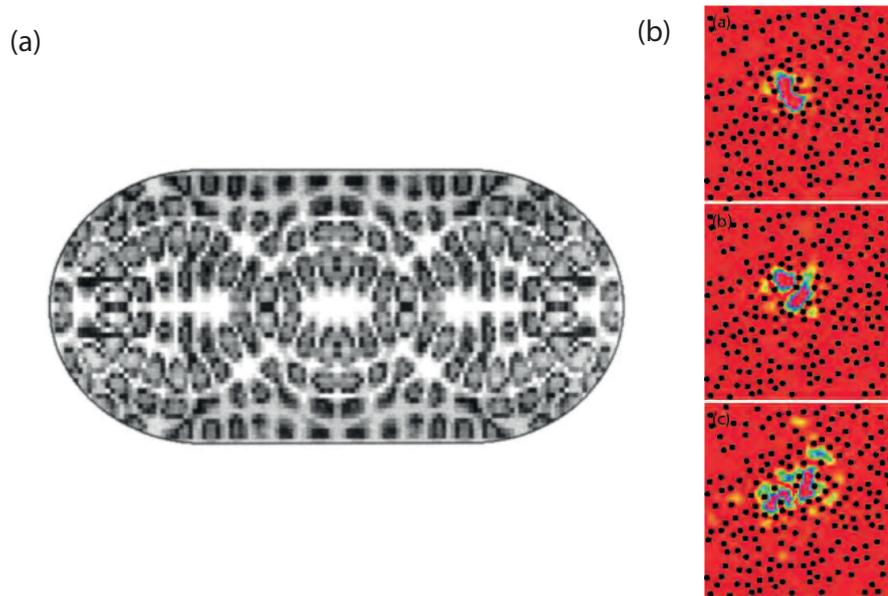


FIGURE 2.17: Mesure du champ à l'intérieur d'une cavité bidimensionnelle. (a) Mesure avec de nombreuses antennes de la fonction de Green d'un billard de Bunimovitch en forme de stade, figure reproduite de [22]. (b) Modes localisés mesurés avec la technique de la bille perturbatrice, l'image est reproduite de [80].

2.4.3.2 Principe

Nous considérons un billard, c'est à dire une cavité dont la hauteur est inférieure à la demi-longueur d'onde. Les deux autres dimensions sont beaucoup plus grandes. Les conditions aux limites imposent alors un seul type de mode : ceux dont le champ électrique est polarisé verticalement (dans cette partie, la direction verticale est suivant z). Nous obtenons ainsi une cavité réellement à deux dimensions.

Nous proposons dans cette partie de remplacer la paroi supérieure (ou inférieure) de la cavité par un réseau métallique bidimensionnel et sub-longueur d'onde. Ceci permet d'en faire un miroir semi-réfléchissant, dont la transmission est accordable en fonction des paramètres du réseau. Pour mesurer le champ à l'intérieur de la cavité, il suffit ensuite de déplacer une sonde dans le champ proche à l'extérieur de la cavité, et de mesurer la transmission entre cette sonde et une antenne placée à l'intérieur de la cavité. Nous mesurons donc le champ excité par l'antenne à l'intérieur, soit la fonction de Green entre ces deux antennes comme expliqué au chapitre 1. La figure 2.18 montre le montage expérimental, avec, à droite, la cavité que nous avons utilisée pour montrer la validité de cette méthode, mais dont nous avons ôté la paroi supérieure. Ses dimensions sont de 30 cm par

18 cm pour 1 cm de hauteur. La hauteur de 1 cm est bien inférieure à la demi-longueur d'onde utilisée pour des fréquences comprises entre 1 et 10 GHz (pour lesquelles λ varie entre 30 et 3 cm).

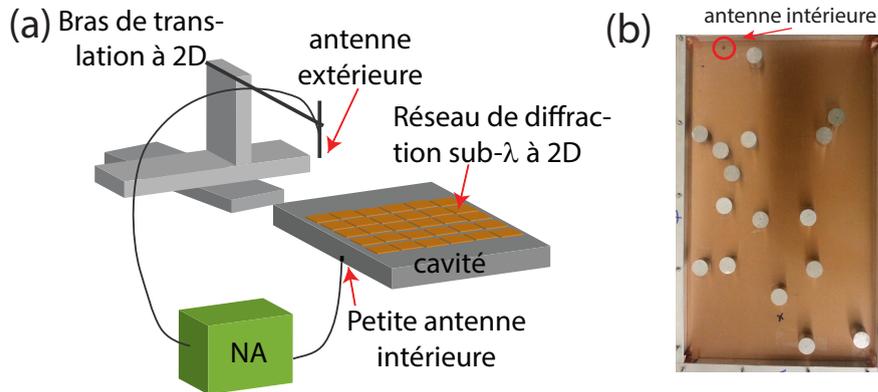


FIGURE 2.18: Mesure du champ à l'intérieur d'une cavité bidimensionnelle. (a) Montage expérimental. L'antenne intérieure est un petit monopole de 5 mm de long. L'antenne extérieure est identique et déplacée à 2 mm de la surface de la cavité. (b) La cavité mesurée est désordonnée avec des diffuseurs métalliques.

La principale difficulté de cette méthode consiste à trouver les bons paramètres (longueur, facteur de remplissage) du réseau pour obtenir le couplage adapté à la cavité. Un couplage trop faible et nous ne mesurons que le bruit à l'extérieur de la cavité. Un couplage trop fort et la cavité subit des pertes additionnelles trop importantes : nous ne mesurerions plus les modes propres désirés. Dans la bande de fréquence utilisée (1-10 GHz), nous avons trouvé qu'une période de réseau de 2 mm et un facteur de remplissage (défini pour un réseau 2D comme la surface de métal sur la surface du réseau), de l'ordre de 75% offrent un bon compromis.

2.4.3.3 Mesure du champ dans une cavité rectangulaire

Dans un premier temps nous avons mesuré les modes d'une cavité régulière, celle présentée sur la figure 2.18 mais sans les diffuseurs. La figure 2.19 présente le spectre de la transmission au carré moyennée sur toutes les positions de la cavité : c'est donc l'énergie qui peut être stockée à chaque fréquence par la cavité. Nous pouvons clairement y voir les fréquences de résonances. En dessous sont affichés trois mesures spatiales de ces modes. Ces derniers sont de la forme d'un produit de fonctions *sinus* : $\Psi(x, y) = \sin(m\pi x/L_x) \sin(n\pi y/L_y)$. Ils correspondent bien aux modes attendus pour une cavité rectangulaire, à quelques imprécisions de fabrication près, notamment dus aux diffuseurs qui n'ont pas exactement la

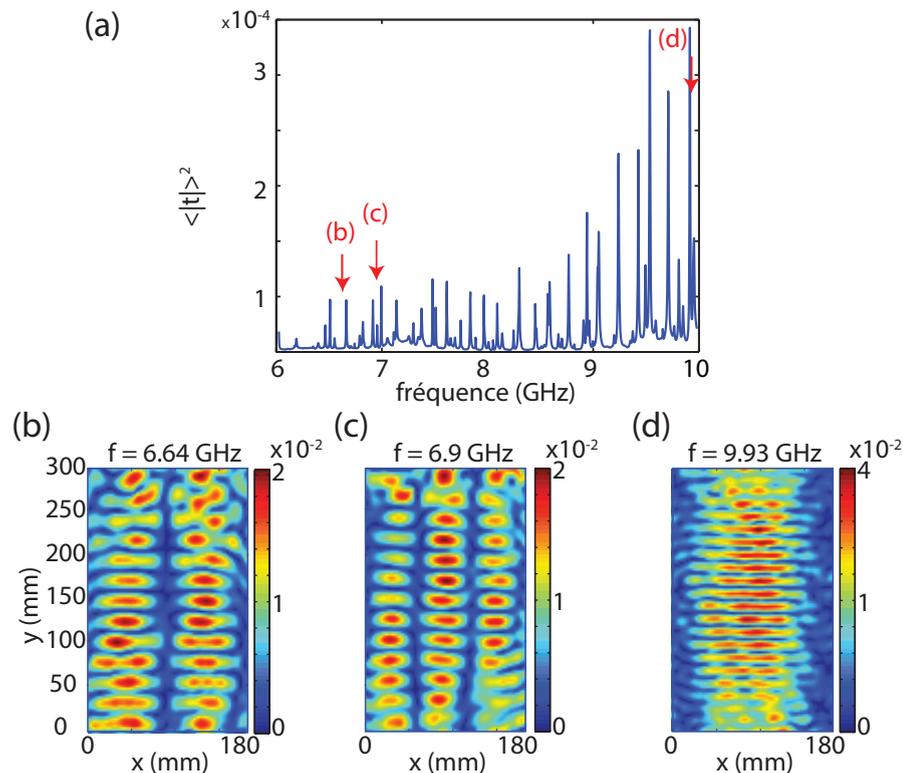


FIGURE 2.19: Mesure en transmission du champ dans la cavité régulière rectangulaire (30 cm de long par 18 cm de large pour 1 cm de hauteur). (a) Spectre moyenné sur toutes les positions. (b,c,d) Intensité normalisée des trois modes repérés par des flèches rouges au-dessus.

hauteur de la cavité, et aux antennes qui se comportent également comme des diffuseurs.

2.4.3.4 Mesure du champ dans un billard désordonné

Dans un deuxième temps, nous avons introduit 16 diffuseurs métalliques dans la cavité, disposés comme représenté sur la figure 2.18 (b). Nous obtenons donc une cavité désordonnée. La figure 2.20 (a) présente également le spectre moyenné sur les positions de cette cavité. Les résonances y sont là-encore clairement identifiables. La figure 2.20 (b) montre six modes à diverses fréquences. Ces modes sont plus ou moins étendus à cause des diffuseurs. En effet, ceux-ci compartimentent la cavité en plusieurs cavités qui se voient plus ou moins, ce qui produit des modes plus ou moins situés sur la source. Afin de valider notre technique de mesure, nous avons effectué des simulations pour comparer les modes mesurés aux modes simulés.

Nous obtenons les cartes de champs présentées sur les figures 2.21 (c,d). Ces cartes sont très désordonnées et sont similaires à celles obtenues lors des mesures

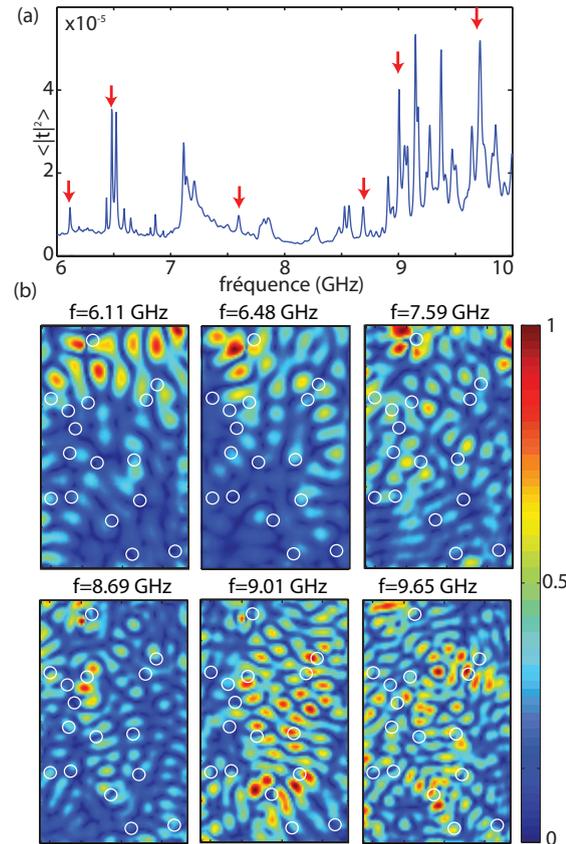


FIGURE 2.20: Mesure en transmission du champ dans la cavité rectangulaire désordonnée par 16 diffuseurs métalliques. (a) Spectre moyenné sur toutes les positions. (b) Intensité normalisée des six modes repérés par des flèches rouges au-dessus. Les cercles blancs indiquent les diffuseurs.

expérimentales, ressemblant à des figures de *speckle*. Nous observons des modes qui peuvent être relativement confinés (c) ou étendus sur toute la cavité (d). Les spectres de transmission correspondant présentent également des similitudes (figure 2.21). Nous remarquons notamment des pics de résonance à 6,1 GHz, comme à 6,5 GHz ou 7,2 GHz. L'accord n'est exact ni en fréquence ni spatialement. En effet, nous avons dû rajouter de la dissipation en simulation et il est difficile de l'égalier parfaitement avec la dissipation en expérience. De plus, les modes sont très sensibles à la position des diffuseurs. La dynamique d'une particule classique devient même chaotique dès qu'il y a plus de deux diffuseurs. Ainsi la sensibilité des modes dépend de manière exponentielle de la précision des conditions initiales et des conditions aux limites. La figure 2.21 (a) montre la matrice des coefficients de corrélation entre les champs simulés et mesurés. La corrélation est relativement forte dans la diagonale avec de nombreux coefficients supérieurs à 0,3. Là encore il faut relativiser ce faible chiffre vis à vis de l'imprécision de la disposition des diffuseurs et de l'inexactitude de l'absorption incluse dans le modèle de simulation.

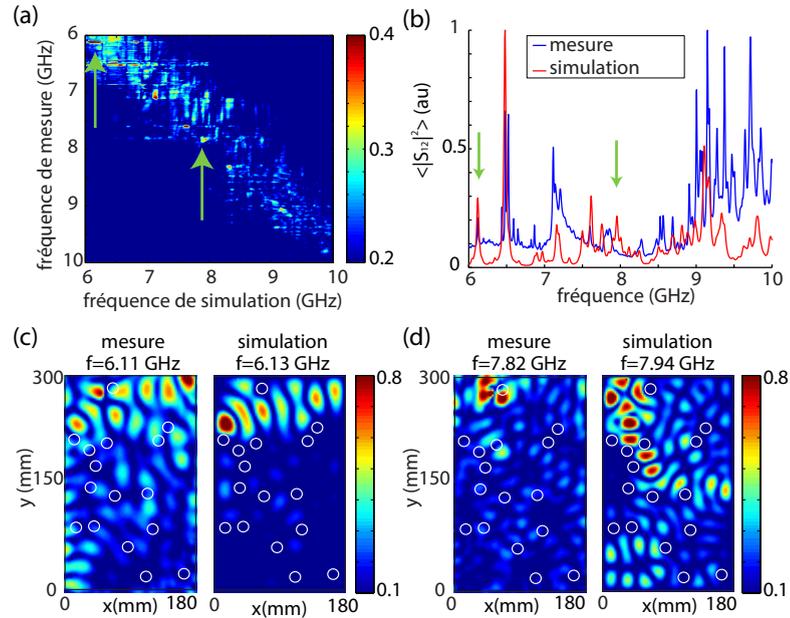


FIGURE 2.21: Comparaison des modes mesurés en expérience avec la simulation par éléments finis. (a) Coefficients de corrélation des champs obtenus en expérience et en simulation. (b) Spectres simulés et mesurés de l'énergie stockée dans la cavité. (c) Comparaison des modes obtenus au voisinage de 6,12 GHz en mesure (à gauche) et en simulation (à droite). (d) Idem que (b) au voisinage de 7,9 GHz.

La méthode que nous avons proposée permet donc de mesurer une grandeur proportionnelle au champ à l'intérieur de la cavité. Sa grande simplicité expérimentale nous a mené à l'utiliser pour effectuer une étude fondamentale au laboratoire.

2.4.3.5 Mesure de modes dans le régime de localisation d'Anderson

Le développement de cette technique a permis à Alexis Prel, durant son stage encadré à l'Institut Langevin par Patrick Sebbah, Geoffroy Lerosey, Marc Dubois et moi-même, d'observer des modes localisés dans un milieu bidimensionnel de diffuseurs diélectriques désordonnés, généreusement prêtés par le LPMC de Nice. Contrairement aux diffuseurs métalliques, ceux-ci possèdent des résonances (de Mie), qui modifient profondément les propriétés de transport d'une onde. L'objectif initial était d'observer des modes en colliers (*necklace state* en anglais) en régime localisé d'Anderson. Ce régime est atteint lorsque le milieu est suffisamment désordonné par rapport à la taille de la cavité [6]. Dans ces conditions, le transport ne se fait plus de manière diffusive : le champ ne peut plus traverser le milieu et reste confiné sur des modes de la taille de la longueur de localisation, qui dans le cas présent correspond à la longueur d'onde. Cependant les modes peuvent se coupler de proche en proche et former des modes étendus en forme de collier. Ces modes

colliers ont été observés dans des systèmes optiques unidimensionnels [81, 82] où ils jouent un rôle fondamental comme canaux de transmission, et lors d'études numériques sur des systèmes 2D [83] mais jamais expérimentalement dans des systèmes à deux dimensions.

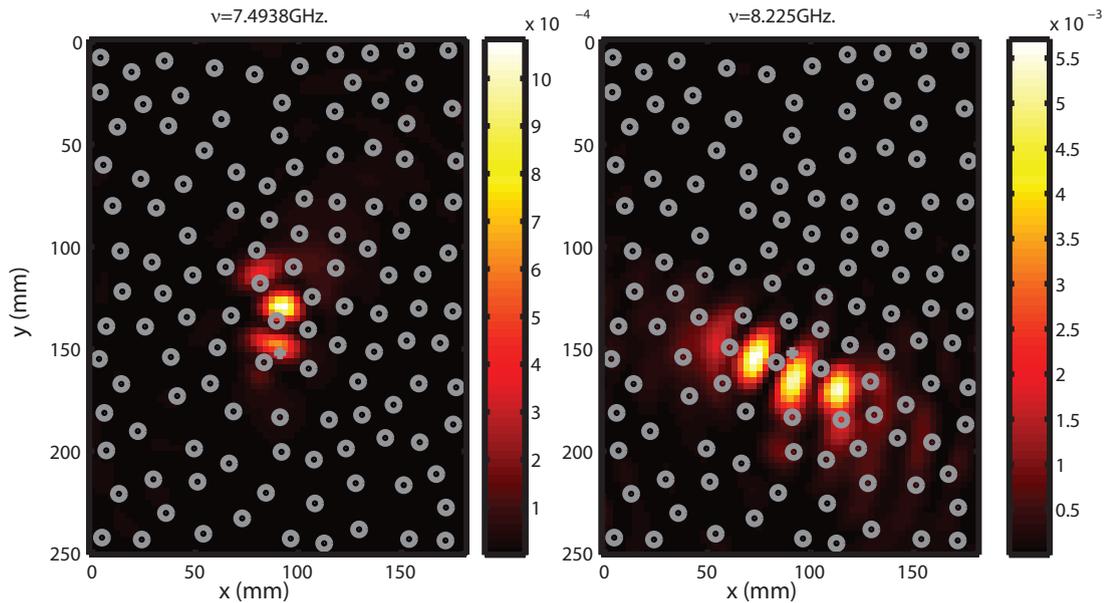


FIGURE 2.22: Observation de modes localisés. Cercles : positions des diffuseurs diélectriques. Croix : position de l'antenne intérieure, monopolaire, longue de 5 mm et orientée dans la direction verticale. L'antenne extérieure est identique et sa pointe est déplacée à 2 mm de la surface de la cavité.

La figure 2.22 montre deux modes localisés. Les ronds sur la figure représentent l'emplacement des diffuseurs et la croix l'emplacement de la sonde placée à l'intérieur de la cavité. Nous n'avons pu y observer que des modes créés au voisinage de cette sonde, et c'est là le principal inconvénient de cette technique. Ceci peut expliquer pourquoi nous n'avons pas vu de modes colliers. Pour maximiser la probabilité d'en observer, il faut déplacer la source pour sonder toute la surface de l'échantillon. Un moyen de surmonter ce problème consisterait à remplacer la paroi inférieure et l'antenne intérieure par un deuxième réseau sub-longueur d'onde et à mesurer la transmission au travers de la cavité depuis chaque côté. La difficulté viendrait alors de la très faible valeur de la transmission à travers les deux réseaux sub-longueurs d'onde par rapport au bruit ambiant, mais surtout par rapport à d'autres canaux de transmission. Il faudrait ainsi prendre garde à isoler ces deux sondes par un grand plan de masse par exemple.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un dispositif innovant constitué d'un réseau sub-longueur d'onde afin d'exploiter la physique des milieux réverbérants que nous avons introduits au chapitre précédent. En effet, ce réseau permet non seulement de coupler des cavités réverbérantes à l'extérieur, mais aussi d'ajuster précisément la valeur de ce couplage en jouant sur les paramètres dudit réseau. Ce réseau de diffraction ne possède qu'un ordre propagatif, l'ordre 0, de très faible transmission. Une onde plane incidente est donc faiblement transmise dans la même direction : le réseau se comporte comme un miroir partiellement réfléchissant. La valeur de la transmission est ajustable grâce à la période et au facteur de remplissage.

Nous avons ensuite utilisé ce miroir semi-réfléchissant comme paroi d'une cavité réverbérante et observé des phénomènes intéressants. Premièrement le point source à l'intérieur de la cavité s'est transformé en une antenne de large ouverture angulaire grâce à la cavité. Deuxièmement, nous avons constaté que cette antenne ne peut rayonner qu'aux fréquences de résonances de la cavité. Troisièmement, à ces fréquences, l'antenne émet de l'énergie dans des directions privilégiées qui dépendent du mode excité à cette fréquence. Varier la fréquence permet donc de changer la direction d'émission. En optimisant la géométrie de la cavité, on pourrait par exemple créer une antenne reconfigurable dont on peut choisir à volonté la direction d'émission et passer de manière quasi-continue de l'une à l'autre en changeant la fréquence de travail.

Nous nous sommes également intéressés à l'introduction de désordre. Nous avons vu qu'utiliser un réseau de diffraction aléatoire, ne modifie que marginalement le diagramme de rayonnement : le réseau continue de se comporter comme un miroir semi-réfléchissant, à quelques détails près visibles à hautes fréquences et à l'élargissement spectral des résonances. En revanche, une cavité désordonnée provoque une très forte modification du diagramme de rayonnement, ce dernier devenant isotrope. En utilisant plusieurs antennes à l'intérieur de la cavité, nous pourrions ainsi fabriquer des diagrammes de rayonnement aussi bien isotropes que complexes. Nous pourrions même envisager de fabriquer une cavité formée uniquement de réseaux sub-longueur d'onde et rayonnant dans toutes les directions.

Nous avons proposé des applications à ce concept. Son intérêt principal est de pouvoir maximiser indépendamment l'ouverture angulaire et le facteur de qualité. Ceci bénéficie à un grand nombre d'applications, comme des antennes RADAR, des systèmes MIMO, des détecteurs ou des générateurs d'impulsion, que nous avons appelé bazooka électromagnétique.

Enfin, nous avons mis en évidence une méthode expérimentale très simple permettant de mesurer les champs électromagnétiques à l'intérieur de cavités bidimensionnelles. Cette méthode utilise un réseau sub-longueur d'onde comme miroir partiellement réfléchissant pour transmettre légèrement le champ à l'intérieur vers l'extérieur de la cavité où il est mesuré. Cette méthode a même été utilisée à l'Institut pour étudier des phénomènes liés à la localisation d'Anderson.

Une grande partie de ces résultats a fait l'objet d'une publication dans *Physical Review Letters* [61], et peut être généralisée à d'autres types d'ondes. Tous les concepts et applications que nous avons présentés ici peuvent être utilisés conjointement avec les SMM (*spatial microwave modulator*) dont le développement et l'utilisation sont détaillés aux chapitres 4 et 5.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au champ à l'intérieur de cavités ou en champ lointain du système. Nous allons maintenant étudier le champ proche. En effet, nous avons déjà mentionné dans ce chapitre que les réseaux de diffraction sub-longueur d'onde possèdent un grand nombre d'ordres évanescents. Leur utilisation devrait ainsi permettre de focaliser les micro-ondes sur des dimensions plus petites que la longueur d'onde, puisque ces informations plus fines que la limite de la diffraction sont justement portées par les ondes évanescentes. Tout ceci est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Contrôle en cavité électromagnétique des degrés de liberté temporels : application à la focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu quel peut être l'intérêt de coupler une cavité à un réseau de diffraction sub-longueur d'onde. Nous y avons essentiellement étudié le champ lointain pour des applications d'antennes ou de détection, mais nous avons également vu que ce système peut permettre de sonder simplement une cavité pour en mesurer le champ interne depuis l'extérieur. Dans ce chapitre, nous continuons à nous intéresser au champ dans la proximité du réseau qui ouvre la cavité. Cette zone est appelée champ proche et peut présenter des ondes dites évanescentes qui n'existent pas à grande distance de la cavité. En effet, seules les ondes propagatives, peuvent se propager à une distance supérieure à une longueur d'onde du réseau.

Nous commencerons donc par définir et nous intéresser à la limite de la diffraction. À une fréquence donnée et en milieu homogène, les ondes planes varient spatialement sur une distance caractéristique appelée longueur d'onde, notée λ . En milieu homogène, il n'est pas possible de générer un champ variant spatialement sur des distances plus courtes que la moitié de la longueur d'onde : c'est là l'origine

de la limite de la diffraction. En revanche une distribution de sources structurée sur des échelles plus petites que la longueur d'onde, ou un réseau de diffraction sub-longueur d'onde, génère des ondes qui ne se propagent pas et qui sont confinées sur le réseau ou la source : ce sont les ondes évanescentes. Contrairement aux ondes propagatives, les ondes évanescentes présentent des variations spatiales beaucoup plus petites que la longueur d'onde, et contiennent ainsi les informations spatiales de la structure sub-longueur d'onde du milieu ou des sources qui les ont générées.

Nous évoquerons des méthodes qui permettent de se passer des ondes évanescentes pour imager des milieux dopés avec des fluorophores. En effet, un émetteur unique peut être localisé très précisément. Nous indiquerons cependant les limites de ces techniques. Nous nous pencherons ensuite sur les approches permettant de manipuler les ondes évanescentes, notamment celles basées sur des matériaux composites structurés à des échelles très inférieures à la longueur d'onde : les métamatériaux. Ces matériaux ont donné naissance à différentes techniques permettant de créer ou d'amplifier les ondes évanescentes comme les super-lentilles, les hyperlentilles et les métalentilles résonantes. Ces dernières ont été utilisées par Geoffroy Lerosey [84] puis par Fabrice Lemoult [30, 11, 85, 86] pour focaliser des ondes acoustiques et électromagnétiques depuis le champ lointain avec des techniques de retournement temporel, sur des dimensions très inférieures à la longueur d'onde ($\lambda/30$).

Au cours de ce chapitre, nous essayerons d'abord l'approche du chapitre 2 pour des applications de champ proche. Pour ce faire, nous commencerons par utiliser un réseau de diffraction sub-longueur d'onde pour créer des ondes évanescentes, et le coupler à une cavité, pour amplifier ces ondes évanescentes. Nous verrons que cette technique ne permet pas de focaliser simplement les ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde. Il faut pour cela utiliser un réseau de diffraction constitué d'éléments résonants, structurés à des échelles inférieures à la longueur d'onde. Contrairement aux travaux précédents, nous n'utiliserons pas de métamatériaux ni de matériaux périodiques, mais des fractales. Celles-ci sont des objets présentant une invariance d'échelle, c'est-à-dire qu'elles paraissent identiques quelle que soit l'échelle (ou le grandissement) sous laquelle on les observe. Ceci implique également une invariance d'échelle sur le spectre du résonateur fractal, qui présente donc un très grand nombre de résonances dans une bande passante. Chacune de ces résonances est un degré de liberté temporel que nous pouvons utiliser pour focaliser les ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde.

Dans le domaine des microondes, nous étudierons les propriétés de transmission d'un résonateur fractal, et plus précisément de la courbe de Hilbert (figure 3.1). Nous verrons qu'utiliser une unique antenne depuis le champ lointain



FIGURE 3.1: Courbe de Hilbert d'ordre 4 en cuivre imprimée sur un support en FR4.

permet d'éclairer des taches de dimensions sub-longueur d'onde, mais pas à proprement parler de focaliser ces ondes. Pour améliorer la qualité de la focalisation, nous augmenterons le nombre de degrés de liberté spatio-temporels. Nous montrerons grâce à des simulations qu'augmenter sensiblement le nombre de degrés de liberté spatiaux permet de focaliser les ondes sur des dimensions très inférieures à la longueur d'onde. Cette procédure se révélerait cependant très lourde à réaliser en pratique. Nous proposerons alors de convertir ces degrés de liberté spatiaux en degrés de liberté temporels grâce à une cavité réverbérante. Ceci permettra d'augmenter considérablement le nombre de degrés de liberté temporels et nous montrerons expérimentalement que nous pouvons focaliser des micro-ondes sur des dimensions aussi petites que $\lambda/15$ à l'aide d'une unique antenne. Cette étude a été soumise à *Physical Review Letters*.

3.2 Limite de la diffraction et super-résolution

Avant de rentrer dans les détails de la focalisation, nous revenons sur l'origine de la limite de la diffraction. En effet la propagation joue le rôle d'un filtre spatial, en supprimant toutes les informations sub-longueur d'onde. Nous allons voir ici comment des techniques astucieuses permettent de restaurer ou d'amplifier les ondes évanescentes transportant les informations des petits détails pour focaliser les microondes sur des dimensions très sub-longueur d'onde. Nous tenterons alors d'adapter le concept de la métalentille aux réseaux de diffraction sub-longueur d'onde.

3.2.1 La diffraction : un filtre spatial

Revenons tout d'abord sur l'origine de la limite de la diffraction et le concept d'ondes évanescentes. Considérons le champ électrique $\mathbf{E}(x, y, z = 0)$ connu dans le plan $z = 0$. A priori, ce champ, que nous supposons monochromatique possède des détails sub-longueur d'onde. Quel serait le champ résultant dans le plan $z = L$, avec $L > \lambda$? Pourquoi aurait-il perdu ses détails sub-longueur d'onde? Pour répondre à ces questions, nous reprenons le formalisme de l'optique de Fourier [32] et repartons de l'équation de Helmholtz (équation 1.6) : $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E} = 0$. Nous effectuons une transformée de Fourier sur les variables x et y , et nous notons \mathbf{E}_0 la transformée de Fourier du champ en $z = 0$. L'équation de Helmholtz devient :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \mathbf{E}(k_x, k_y, z) = 0 \quad (3.1)$$

Les solutions de cette équation sont deux exponentielles :

$$\mathbf{E}(k_x, k_y, z) = \mathbf{E}_1 e^{i\alpha z} + \mathbf{E}_2 e^{-i\alpha z} \quad (3.2)$$

où nous avons posé $\alpha = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Suivant le signe de $k^2 - k_x^2 - k_y^2$, α peut être soit un réel positif, soit imaginaire pur. Comme nous ne nous intéressons qu'à des ondes propagatives vers les z croissants ou qui ne divergent pas à l'infini, nous pouvons poser $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$. En $z = 0$, nous avons $\mathbf{E}(k_x, k_y, z = 0) = \mathbf{E}_0$. Finalement le champ $\mathbf{E}(x, y, z)$ s'écrit à partir du champ en $z = 0$ sous la forme :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(k_x, k_y, z = 0) e^{i[k_x x + k_y y + \alpha(k_x, k_y) z]} dk_x dk_y \quad (3.3)$$

Cette double intégrale peut se séparer sur deux domaines d'intégration Ω_1 pour lequel $k_x^2 + k_y^2 < k^2$, représenté en vert sur la figure 3.2 et Ω_2 pour lequel $k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$,

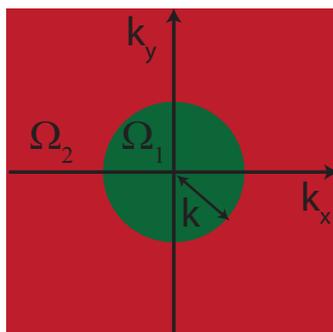


FIGURE 3.2: Illustration des domaines Ω_1 ($k_x^2 + k_y^2 < k^2$) et Ω_2 ($k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$).

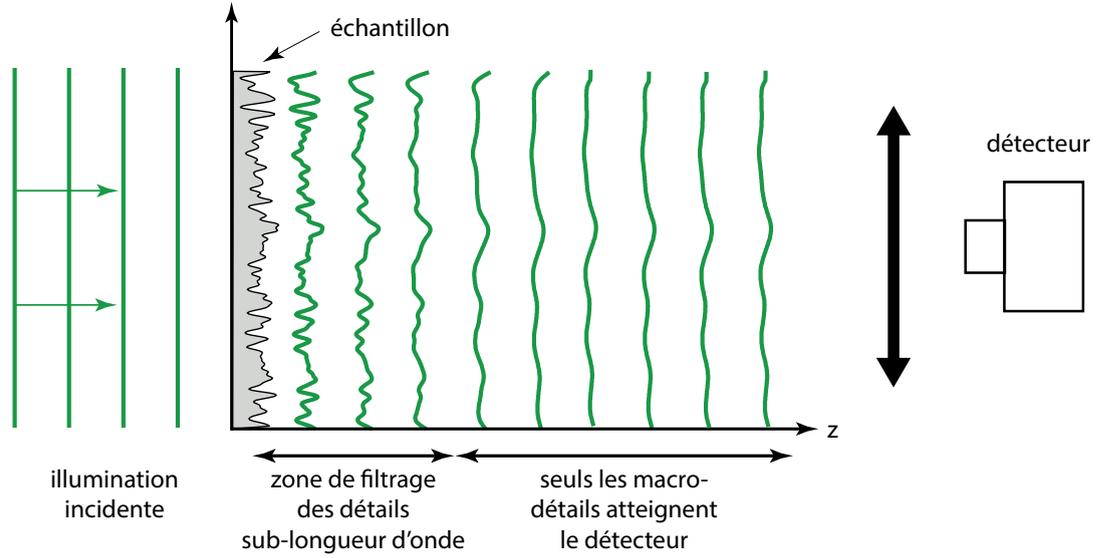


FIGURE 3.3: Les détails de dimensions sub-longueur d'onde sont peu à peu filtrés à mesure qu'on s'éloigne du plan $z=0$.

représenté en rouge sur la figure 3.2. En notant $\gamma = |\alpha|$, nous avons :

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \text{ pour } (k_x, k_y) \in \Omega_1 \\ \alpha = i\gamma \text{ pour } (k_x, k_y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

ce qui nous permet de réécrire le champ dans le plan z sous la forme.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) = & \iint_{\Omega_1} \mathbf{E}(k_x, k_y, z=0) e^{i[k_x x + k_y y + \gamma(k_x, k_y)z]} dk_x dk_y \\ & + \iint_{\Omega_2} \mathbf{E}(k_x, k_y, z=0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-\gamma(k_x, k_y)z} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le premier terme est une somme d'ondes planes propagatives de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, \gamma)$, qui comportent toutes les informations relatives aux grandes variations spatiales (de dimensions supérieures à λ). Le deuxième terme est une somme d'ondes exponentiellement décroissantes avec la distance z , qui ne se propagent pas mais restent au voisinage du plan $z = 0$, et sont dénommées ondes évanescentes. Ces ondes évanescentes contiennent toutes les informations des variations spatiales aux plus petites échelles, car elles correspondent aux grandes valeurs de \mathbf{k}_{\parallel} . À des distances supérieures à λ , ce deuxième terme est nul, à cause de sa décroissance exponentielle avec z .

Nous pouvons également voir cela comme une fonction de transfert H qui filtre les informations dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{E}(k_x, k_y, z) = H(k_x, k_y, z) \mathbf{E}(k_x, k_y, z=0) \quad (3.6)$$

avec H tel que :

$$H(k_x, k_y, z) = \begin{cases} e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}z} & \text{si } k_x^2 + k_y^2 < k^2 \\ e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}z} & \text{si } k_x^2 + k_y^2 \geq k^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi les détails de dimension sub-longueur d'onde sont filtrés exponentiellement au fur et à mesure qu'on s'éloigne du plan leur ayant donné naissance, comme le montre la figure 3.3. Ces détails sont perdus dès que le détecteur est placé à plus d'une longueur d'onde (quelques centaines de nm en optique, quelques cm en microondes).

3.2.2 Super-résolution et focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde

3.2.2.1 La limite de résolution d'un microscope optique

En 1873, Ernst Abbe montra que la résolution des microscopes est limitée par la longueur d'onde [1, 2]. Une onde de longueur d'onde λ se propageant dans un milieu d'indice n et convergeant vers un point avec un angle θ ($n \sin \theta$ représente donc l'ouverture numérique) crée ainsi une tache focale dans le plan focal de dimension $d_{xy} = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}$, et de taille $d_z = \frac{\lambda}{n \sin^2 \theta}$, suivant l'axe optique [64], soit respectivement $\lambda/2$ et λ pour une incidence normale dans le vide. C'est la limite de la diffraction. De plus comme la plupart des lentilles ont une ouverture numérique inférieure à 1,5 la résolution d'imagerie d'un microscope est limitée latéralement à 150 nm et à 500 nm dans l'axe. C'est la limite actuelle d'un microscope optique plein champ.

La super-résolution consiste à imager des sources avec une meilleure résolution. La réciproque consiste à focaliser des ondes sur des dimensions inférieures à $\lambda/4$. En effet, la limite théorique de Abbe peut être battue en augmentant simplement l'angle d'incidence jusqu'à 4π stéradians, par exemple avec des méthodes tomographiques comme celle proposée par Anne Sentennac [87]. La longueur d'onde λ à prendre en considération est celle du milieu au sein duquel est réalisée l'expérience. Les applications de la super-résolution et de la focalisation sont différentes et demandent de mettre en place des techniques différentes suivant que nous voulons imager ou focaliser les ondes. Dans un premier temps, nous revenons sur les techniques utilisées en imagerie qui n'utilisent pas les ondes évanescentes.

3.2.2.2 Les techniques d'imagerie super-résolues qui n'utilisent pas les ondes évanescentes

Des méthodes autres que la manipulation d'ondes évanescentes permettent de battre la limite de la diffraction. On utilise pour cela des fluorophores (des petites molécules fluorescentes ou des boîtes quantiques) qui sont détectées avec des lentilles depuis le champ lointain. Le prix Nobel de chimie 2014 a ainsi récompensé Eric Betzig et William Moerner pour l'invention de la microscopie de molécules uniques [88] ainsi que Stefan Hell pour l'invention de la technique par déplétion stimulée (STED pour *stimulated emission depletion*) [89]. Ces méthodes permettent d'imager des milieux biologiques (cellules, complexes moléculaires...) avec une résolution de 20 nm [88, 90, 91] et ne connaissent pas de limite de résolution théorique [92].

En STED, un premier laser excite des molécules fluorescentes sur une tache focale de dimension limitée par la diffraction (figure 3.4 (a)). Un deuxième laser en forme d'anneau, et dont le zéro central est plus petit que la limite de la diffraction vient empêcher les molécules excitées de fluorescer (figure 3.4 (b)) : la tache obtenue est donc sub-longueur d'onde (figure 3.4 (c)). Une lentille collecte les photons issus de la fluorescence. Un balayage des faisceaux laser sur l'échantillon permet ensuite d'obtenir une image super-résolue. Cette technique a donné naissance à d'autres concepts et techniques analogues : déplétion de l'état fondamental (*ground state depletion* : GSD) [93], la microscopie saturée par illumination structurée (*saturated structured-illumination microscopy* : SSIM) [94, 95] ou sa combinaison avec l'I5M (technique qui vise à augmenter l'ouverture angulaire des deux côtés de l'échantillon) : l'I5S [96].

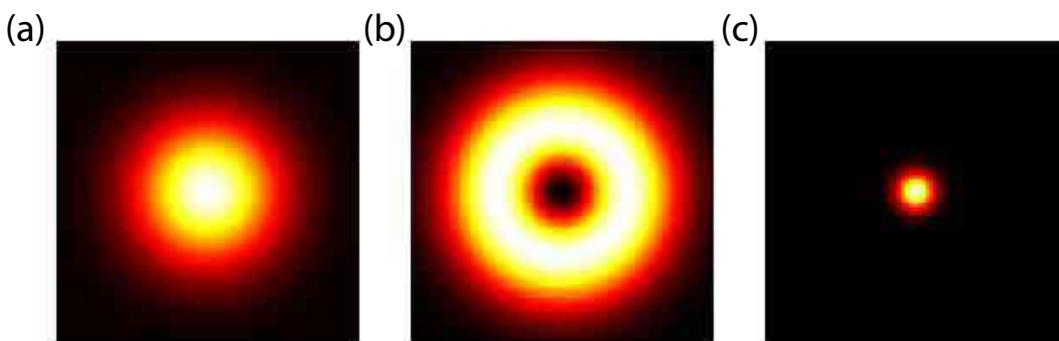


FIGURE 3.4: Technique du STED. (a) Sonde limitée par la diffraction. (b) Anneau de déplétion empêchant la fluorescence. (c) Tache focale obtenue en fluorescence.

La méthode de détection de particule unique repose sur le principe que la limite de la diffraction n'empêche pas de connaître avec une résolution arbitraire

le centre d'une source unique. En effet, la tache focale a une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $\lambda/2$, mais le lieu d'intensité maximum peut être mesuré très précisément. On est ainsi limité uniquement par le rapport signal sur bruit. En revanche, si deux sources sont distantes de moins d'une demi-longueur d'onde, on ne peut voir qu'une large tache circulaire, et encore moins distinguer les deux sources. Il faut donc réaliser un grand nombre d'images où les particules s'allument tour à tour. Cette méthode dénommée microscopie par localisation photo-activée (PALM) [88], a également donné lieu à des variantes comme la microscopie par localisation fluorescente photo-activée (FPALM) [97], et la microscopie par reconstruction optique stochastique (STORM) [91].

Un inconvénient majeur de ces méthodes d'imagerie super-résolues est qu'elles nécessitent d'utiliser des marqueurs fluorescents et des puissances élevées, ce qui dénature l'environnement et perturbe les processus biologiques. Ces méthodes sont de plus limitées à l'imagerie et ne peuvent être utilisées pour focaliser des ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde.

Le phénomène de super-oscillation permet quant à lui de focaliser des ondes planes propagatives depuis le champ lointain sur des dimensions sub-longueur d'onde [57, 98]. Ce phénomène repose sur la surprenante propriété qu'une somme de fonctions périodiques peut localement varier plus vite que la plus rapide de

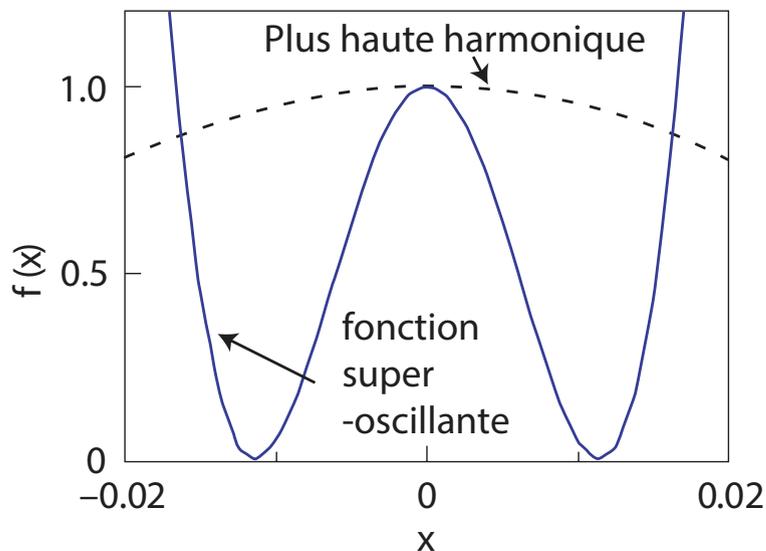


FIGURE 3.5: Tracé de la fonction f au voisinage de $x = 0$. La courbe en pointillé représente la plus haute harmonique de coefficient a_5 et la courbe bleue en trait plein est la fonction super-oscillante. Image reproduite de [57]

ses fonctions constitutives (autrement dit que sa plus grande composante de Fourier) [99, 100, 101]. Par exemple, la figure 3.5 trace la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^5 a_n \cos(2\pi nx) \quad (3.8)$$

avec $a_0 = 1$, $a_1 = 13\,295\,000$, $a_2 = -30\,802\,818$, $a_3 = 26\,581\,909$, $a_4 = -10\,836\,909$ et $a_5 = 1\,762\,818$ au voisinage de zéro. Le désavantage de cette méthode est que l'amplitude de la tache focale est très faible comparée aux lobes secondaires [102]. Cette approche ne permet donc pas de focaliser efficacement de l'énergie, et reste très limitée en résolution.

3.2.2.3 Les techniques utilisant les ondes évanescentes

Pour battre la limite de la diffraction, la plupart des autres techniques utilisent donc les ondes évanescentes. En imagerie, ce sont donc des microscopies de champ proche, dont le principe est analogue à celui du microscope à effet tunnel [103, 104] qui mesure le courant entre un échantillon conducteur et une pointe située dans le champ proche de la surface. Ce courant dépend de manière exponentielle de la distance entre la pointe et l'échantillon, puisque la fonction d'onde des électrons est une onde évanescente localisée à la surface du conducteur. La pointe balaye ensuite un plan point par point pour former une image. La résolution latérale est de 0.1 nm et la résolution verticale de 0.01 nm. Cette invention qui permet d'observer des atomes a également valu un prix Nobel à ses inventeurs Heinrich Rohrer et Gerd Binnig. Ce dernier a ensuite inventé le microscope à force atomique qui permet d'imager des échantillons non conducteurs et qui mesure la force exercée entre une pointe et la surface [105].

En optique, le principe du microscope optique de champ proche (SNOM ou NSOM pour *near field scanning optical microscopy*) a été proposé par Synge dès 1928 [106]. Il proposait d'utiliser une nanoparticule pour diffracter les ondes évanescentes en ondes planes. En effet si une onde plane incidente sur la nanoparticule crée entre-autres des ondes évanescentes, alors par réciprocity une onde évanescente est diffusée par la même nanoparticule en somme d'ondes propagatives et évanescentes. Albert Einstein proposa de remplacer la particule par un simple trou dans un écran. À l'époque, il n'était techniquement pas possible de déplacer cet écran troué avec suffisamment de précision (i.e. avec une précision inférieure à 100 nm) pour en faire un microscope. Il a fallu attendre 1984 pour avoir une démonstration expérimentale aux longueurs d'onde visibles [107, 108], et ce n'est qu'en 1992 qu'Eric Betzig image un milieu biologique avec cette méthode [109].

Une autre expérience en 1994 a donné naissance à un deuxième type de SNOM, sans ouverture celui-ci [110].

Enfin, il faut également mentionner les méthodes plasmoniques. Celles-ci ont recours aux plasmons de surface qui sont des excitations collectives des électrons prenant la forme d'ondes de surface confinées aux interfaces métalliques. Ces ondes guidées ont ainsi des longueurs d'onde plus faibles que dans l'air. En 2005, un premier microscope plasmonique fut proposé battant largement la limite de la diffraction [111]. Une pointe de taille nanométrique, où un plasmon de surface (SPP) est excité par un laser de longueur d'onde de 500 nm, balaye l'échantillon et produit une tache focale de l'ordre de 70 nm. Cette méthode commence à faire ses preuves et a tout récemment permis d'imager des molécules d'ADN uniques [112] ou des protéines en milieux biologiques [113].

Ainsi, pour avoir recours aux ondes évanescentes, il faut utiliser des matériaux capables de les créer, de les supporter, voire de les amplifier. Nous allons voir que les métamatériaux permettent de réaliser ces opérations afin de manipuler les ondes évanescentes de manière très efficace.

3.2.3 Les métamatériaux et métalentilles

3.2.3.1 Les métamatériaux et la super-lentille

Les métamatériaux sont des matériaux artificiels structurés à l'échelle sub-longueur d'onde. Cette structuration apporte à ces matériaux des paramètres effectifs (permittivité et perméabilité) qui n'existent pas à l'état naturel. Afin d'obtenir des paramètres de valeurs élevées, ou proches de zéro voire négatives, les métamatériaux sont fréquemment constitués d'éléments résonants. Cela permet de mettre en œuvre des phénomènes exotiques comme la réfraction négative ou de rendre des objets invisibles aux ondes (*cloaking*).

En 1968, Victor Veselago [114], publie une étude théorique sur un hypothétique matériau présentant simultanément une permittivité et une perméabilité négatives. Il a notamment montré qu'un tel milieu présenterait des propriétés de réfraction négative, permettant par exemple de créer des lentilles plates, comme schématisé sur la figure 3.6. Ce type de matériaux n'existait pas et motiva un grand nombre d'études et de recherches. En 2000, John Pendry démontra, là encore théoriquement, qu'une tranche de matériau d'indice négatif permettrait aussi et surtout d'amplifier exponentiellement les ondes évanescentes : un matériau d'indice de réfraction négatif constitue donc une lentille parfaite qu'il appela super-lentille [115]. Il fit remarquer que peu avant, il avait mis en évidence des matériaux

résonants dans le domaine des microondes, certains présentant une permittivité négative [116, 117, 118] et d'autres une perméabilité négative [119].

Par conséquent le groupe de Smith obtint un méta-matériau possédant simultanément une permittivité et une perméabilité négatives à une fréquence donnée en juxtaposant ces résonances électrique et magnétique [121]. Peu après, une vérification expérimentale vint confirmer la faisabilité de la réfraction négative [120], en utilisant simultanément des anneaux fendus (SRR pour *split rings resonators*) et des fils qui apportent une perméabilité négative pour les uns et une permittivité négative pour les autres (figure 3.7). De nos jours, d'autres méthodes permettent de fabriquer des matériaux à réfraction négative en jouant sur la dispersion de cristaux photoniques [122] ou sur la diffusion multiple dans des métamatériaux [123], aussi bien en électromagnétisme qu'en acoustique, et aussi bien sur des bandes spectrales étroites que larges [124].

Cependant la super-lentille possède également un talon d'Achille : la dissipation. En effet, ce phénomène de réfraction négative a lieu nécessairement à la résonance du matériau, ou dans des bandes plates de la relation de dispersion où les ondes sont très ralenties et passent donc un temps prolongé dans le matériau. Dans tous les cas, elles y subissent une atténuation exponentielle ce qui empêche l'amplification sans limite des ondes évanescentes prédite par Pendry.

Quelques années après la preuve que la super-lentille permet de focaliser des ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde, un autre type de lentille à base de métamatériaux a été inventé : l'hyper-lentille [125, 126]. Contrairement à la lentille de Pendry où une image se forme en champ proche, celle-ci projette l'image en champ lointain. L'hyper-lentille se base sur un méta-matériau dit hyperbolique

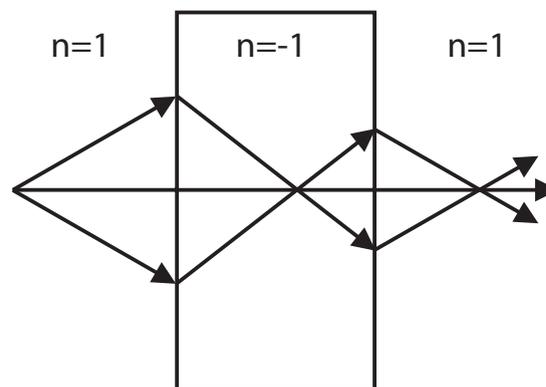


FIGURE 3.6: Illustration de la lentille plate à indice de réfraction négatif. Une source crée une onde divergente. Cette onde est réfractée négativement et se focalise au sein du matériau puis rediverge. Elle est ensuite de nouveau réfractée négativement pour se refocaliser en sortie du milieu négatif.

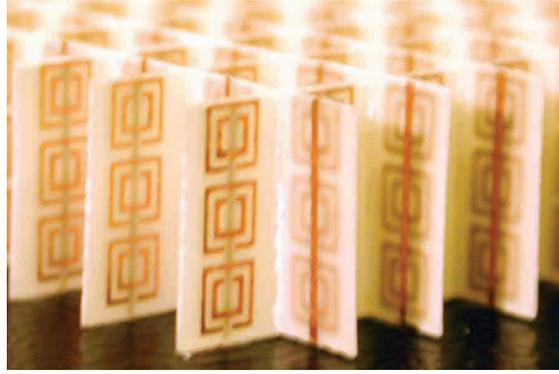


FIGURE 3.7: Photographie du méta-matériau d'anneaux fendus et de fils utilisé pour mettre expérimentalement en évidence la réfraction négative pour la première fois. Image reproduite de [120].

car sa relation de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ l'est. Cette relation de dispersion hyperbolique permet au matériau de supporter des modes propagatifs de très grands moments \mathbf{k} , et qui seraient sans cela évanescents. Ces hyper-lentilles permettent ainsi de convertir efficacement les ondes évanescentes en ondes propagatives.

Enfin, un autre type de lentille basé sur des métamatériaux et convertissant les ondes évanescentes en ondes propagatives fut développé durant la thèse de Fabrice Lemoult à l'Institut Langevin : les métalentilles résonnantes. Celles-ci permettent de focaliser des champs acoustiques ou électromagnétiques en dessous de la limite de la diffraction depuis le champ lointain en utilisant le retournement temporel.

3.2.3.2 La métalentille résonnante

L'expérience fondatrice fut celle effectuée par Geoffroy Lerosey et ses collaborateurs lors de sa thèse au Laboratoire Ondes et Acoustique [9, 84]. Dans une cavité microonde réverbérante, ils placèrent un miroir à retournement temporel, ainsi que des antennes de petites dimensions, sources de champs évanescents. Ces antennes furent placées dans une forêt de tiges métalliques de 3-4 cm de longueur et de diamètre inférieur au mm (figure 3.8 (a)) qui sert de convertisseur d'ondes évanescentes en ondes propagatives. En utilisant des antennes placées dans le champ lointain de ce milieu aléatoire et le retournement temporel, ils obtinrent des taches focales de dimension très sub-longueur d'onde ($\lambda/30$).

Quelques années après, Fabrice Lemoult a poussé encore plus avant ce concept lors de sa thèse encadrée par Geoffroy Lerosey et Mathias Fink [127]. En combinant les approches de métamatériaux et de contrôle des ondes en milieux complexes,

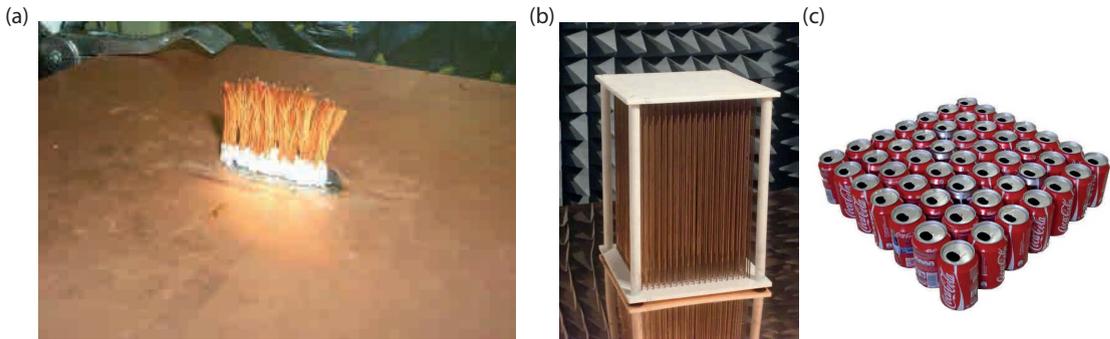


FIGURE 3.8: Les métalentilles utilisées pour les expériences de focalisation. (a) Photographie du milieu aléatoire de fils de cuivre. Image reproduite de [84]. (b) Réseau périodique de tiges de cuivre résonantes dans la direction longitudinale. Image reproduite de [86]. (c) En acoustique : résonateurs de Helmholtz. Image reproduite de [85].

il a mis en évidence les ingrédients nécessaires pour focaliser des ondes acoustiques [85] comme électromagnétiques [30, 11, 86] depuis le champ lointain et sur des dimensions sub-longueur d'onde.

Les ingrédients nécessaires sont les suivants :

- Un milieu de résonateurs sub-longueur d'onde organisés sur une échelle elle-même sub-longueur d'onde comme par exemple ceux de la figure 3.8 (b,c). Ceux-ci supportent des modes qui varient spatialement sur des distances typiques de la taille des résonateurs, soit des distances beaucoup plus petites que la longueur d'onde.
- Une dimension finie pour créer des résonances stationnaires qui rayonnent en champ lointain grâce à la diffraction par les bords de l'échantillon.
- L'effet Purcell [128], créé par le milieu localement résonant qui amplifie l'amplitude des modes sub-longueur d'onde. Plus haut est le moment de l'onde \mathbf{k} plus elle est évanescence, et plus elle est amplifiée par la résonance avant de rayonner. Ce phénomène permet d'obtenir des amplitudes comparables pour toutes les ondes évanescences, tant que la dissipation est faible.
- Une approche large bande passante, qui utilise donc un grand nombre de fréquences. Ceci permet d'utiliser le retournement temporel afin de focaliser les modes sub-longueur comme au chapitre 1 (figure 1.10) mais pour les modes supportés par des métamatériaux résonants qui varient spatialement sur des dimensions très petites devant la longueur d'onde.
- Il est alors pensable d'obtenir des ondes focalisées sur des dimension très sub-longueur d'onde, dépendant du milieu, et de l'ordre de $\lambda/25$.

A partir de simulations, Fabrice Lemoult a proposé une expérience similaire en optique [30]. Nous pouvons également faire un rapprochement avec le travail de l'équipe de Yong Keun Park à Séoul, qui utilise le façonnage de front d'onde (l'analogie spatial du retournement temporel en optique) pour faire de la focalisation sub-longueur d'onde en sommant de manière adéquate les modes en sortie d'un milieu de nanoparticules diffusantes [53, 129].

3.2.4 Adaptation avec des réseaux de diffraction

En nous inspirant de notre approche expérimentale au chapitre 2 où nous avons ouvert une cavité avec un réseau sub-longueur d'onde, nous avons tenté d'adapter la recette de Fabrice Lemoult avec les modifications suivantes :

- Nous remplaçons le milieu de résonateurs sub-longueur d'onde par un réseau de diffraction sub-longueur d'onde à 2 dimensions. Il joue le rôle de générateur d'ondes évanescentes.
- La cavité résonante fournit l'effet Purcell nécessaire à l'amplification des ondes évanescentes.
- Nous conservons l'approche à large bande passante pour faire du retournement temporel, et profiter ainsi de nombreux modes qui varient à une échelle sub-longueur d'onde.

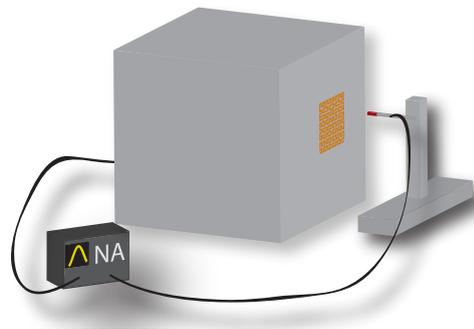


FIGURE 3.9: Montage expérimental : un analyseur de réseau mesure la transmission entre une antenne à l'intérieur de la cavité et la sonde (petit monopole de 5 mm de long) balayant le champ proche du réseau.

Nous insérons alors une antenne dans une cavité d'environ 1 m^3 de volume et nous mesurons le champ proche du réseau depuis l'extérieur avec une petite pointe sensible au champ longitudinal, comme illustré sur la figure 3.9.

Le réseau est constitué de motifs carrés en cuivre imprimé avec une méthode de lithographie conventionnelle sur PCB (*Printed circuit board*) en matériau diélectrique (FR4). Ces carrés ont un côté de 0,7 cm. La période du réseau est de

1 cm. Le facteur de remplissage (surface de métal sur la surface d'une cellule unité) est donc de 0,5.

La sonde de champ proche balaye le plan à une distance $z = 1$ mm du réseau, sur des distances L_x et L_y de 120 mm par pas de 1 mm. La transmission entre l'antenne intérieure et la sonde extérieure est mesurée avec un analyseur de réseau entre 2 GHz et 3 GHz par pas de 50 kHz (soit 20 000 points de fréquence). C'est l'étape d'apprentissage préalable à une expérience de retournement temporel. Nous mesurons donc au point \mathbf{r}_0 dans le champ proche du réseau, le signal :

$$s(\mathbf{r}_0, \omega) = s_{\text{antenne}}(\omega) \times G(\mathbf{r}_0, \omega) \times s_{\text{sonde}}(\omega) \quad (3.9)$$

où G est la fonction de Green de la cavité ouverte entre le point sous entendu $\mathbf{r}_{\text{antenne}}$ et le point \mathbf{r}_0 , et où s_{sonde} et s_{antenne} sont les fonctions de transfert de l'antenne intérieure et de la sonde (ce sont des transmissions et non pas des matrices S complètes). Pour simplifier, nous considérons une fonction de Green scalaire, mais les résultats sont facilement généralisables à condition de remplacer les multiplications par des produits matriciels.

Nous effectuons alors une expérience de focalisation par retournement temporel comme décrit au chapitre 1. Pour focaliser une onde au point \mathbf{r}_0 dans le champ proche du réseau, nous renvoyons le signal précédemment mesuré à cet endroit et retourné temporellement depuis l'antenne située dans la cavité. Le signal temporel en un point \mathbf{r} du champ proche du réseau est alors la convolution temporelle du signal envoyé $s(\mathbf{r}_0, -t)$ avec le signal précédemment mesuré au point \mathbf{r} , $s(\mathbf{r}, t)$:

$$s_{TR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = s(\mathbf{r}_0, -t) \star_t s(\mathbf{r}, t) \quad (3.10)$$

Ceci se traduit dans le domaine fréquentiel par :

$$s_{TR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = s^*(\mathbf{r}_0, \omega) s(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.11)$$

où \star désigne le complexe conjugué. Nous pouvons donc reconstruire numériquement le signal que nous produirions par retournement temporel à partir des mesures précédentes :

$$s_{TR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \mathcal{F}^{-1} [s^*(\mathbf{r}_0, \omega) s(\mathbf{r}, \omega)] \quad (3.12)$$

où \mathcal{F}^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

En tentant de focaliser sur une position du réseau, nous obtenons le résultat de la figure 3.10 : une tache focale à $t = 0$ limitée par la diffraction, de largeur environ égale à $\lambda/2$. Nous distinguons la périodicité du réseau sur cette image. Cependant, ces ordres évanescents ont une amplitude environ 10 dB inférieure à

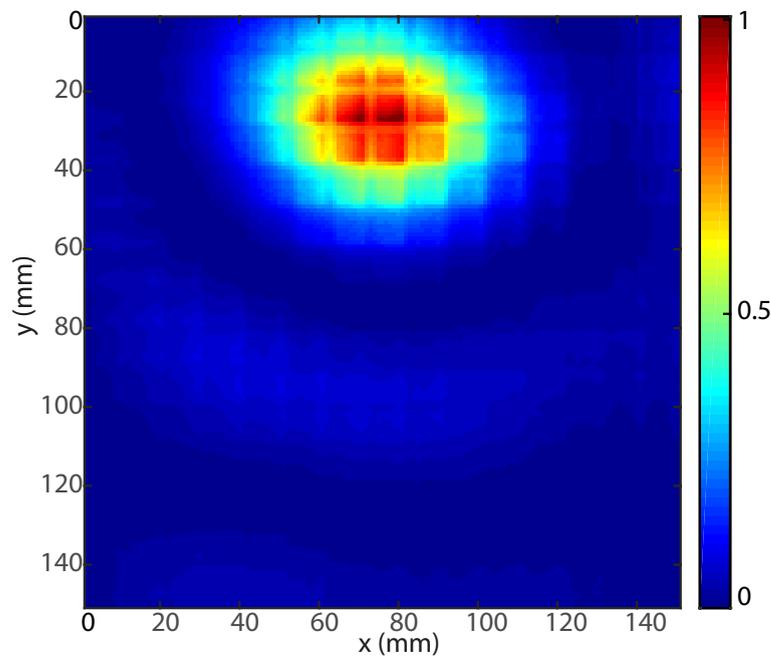


FIGURE 3.10: Focalisation par retournement temporel monocanal.

l'ordre 0, propagatif. La cavité amplifie le champ à l'intérieur, soit le champ incident sur le réseau et augmente ainsi notre rapport signal sur bruit. Cependant cette augmentation du champ n'augmente pas pour autant l'efficacité des ordres évanescents. L'amplification du champ s'applique de la même manière à tous les ordres du réseau, évanescents comme propagatifs. L'efficacité des ordres évanescents étant faible dès le début, elle le reste même en couplant le réseau à la cavité.

D'un autre côté, ces résultats justifient une fois de plus l'approche décrite au chapitre 2 pour mesurer des champs à l'intérieur de la cavité : l'utilisation d'un réseau sub-longueur d'onde ne déforme pas les champs de la cavité, mais permet d'en laisser fuir une partie pour les mesurer depuis l'extérieur. Cette expérience préliminaire montre cependant qu'un simple réseau de diffraction, même sub-longueur d'onde ne permet pas de battre aisément la limite de la diffraction. Il ne suffit pas d'avoir des ondes évanescentes pour focaliser les ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde. Dans la partie suivante, nous proposons une méthode expérimentale simple et efficace pour focaliser des ondes sur des dimensions très sub-longueur d'onde. Il faut un milieu avec une LDOS riche et dont les modes varient sur des dimensions sub-longueur d'onde. Le retournement temporel permet de synchroniser ces modes à une position et à un temps déterminé. Nous proposons de remplacer le réseau de résonateur des métalentilles utilisées par Fabrice Lemoult par des résonateurs plans, des fractales, qui jouent le rôle de réseau de diffraction, ouvrant ainsi la cavité sur l'extérieur. L'utilisation de la cavité permet

d'utiliser le retournement temporel mono-voie, c'est-à-dire avec une seule antenne constituant le miroir à retournement temporel à l'intérieur de la cavité. D'autre part, nous verrons que la cavité sert à résoudre les modes du résonateur corrélés par les pertes radiatives.

3.3 Focalisation par retournement temporel à l'aide de fractales

La technique de focalisation à l'aide d'une métalentille requiert un milieu de résonateurs afin d'obtenir une longueur de cohérence faible ainsi qu'une grande densité d'états, qui sont autant de degrés de liberté utilisables. Ces modes résonants doivent varier sur des dimensions sub-longueur d'onde si nous voulons battre la limite de la diffraction. Nous avons besoin de résonateurs plans pour pouvoir les insérer sur une des parois de la cavité. Enfin ces résonateurs doivent être métalliques pour être facilement fabriqués. Le nombre de résonateurs plans sub-longueur d'onde est relativement restreint. Les *split rings resonators* (SRR) rentrent dans la catégorie recherchée, mais possèdent une bande passante restreinte car ils sont justement sub-longueur d'onde. Au contraire, une fractale possède une bande passante beaucoup plus large, comme nous allons le montrer par la suite. Nous optons donc pour des résonateurs fractals. De plus, au lieu d'utiliser un grand nombre de résonateurs fractals, qui pourraient être également corrélés par couplage fort, nous proposons d'utiliser un unique résonateur de grande dimension mais d'un ordre fractal élevé. Nous revenons dans un premier temps sur les fractales et les résonateurs fractals avant de montrer comment nous pouvons les utiliser pour focaliser des ondes.

3.3.1 Les fractales

En commentant en 1875 les fonctions de Weierstrass continues partout mais dérivables nul-part, le mathématicien allemand Dubois-Reymond plongea le monde des mathématiques dans une crise qui perdura jusqu'en 1925. Il écrivit que « la métaphysique de ces fonctions semble cacher bien des énigmes, et en ce qui me concerne, je ne peux me débarrasser de l'idée qu'elles nous mèneront jusqu'aux limites de notre intellect ». D'autres mathématiciens, comme Peano, Koch, ou Sierpinski inventèrent des objets irréguliers dans d'autres buts, mais ne les étudièrent pas en tant que tel. Un pas important est franchi par Cantor en 1877, puis par Peano en 1890 en inventant une courbe qui remplit le plan. Le dernier pas est

franchi dans les années 1920. Il fallut prendre conscience que la dimension d'un objet ne se résume pas à un ensemble de coordonnées. Felix Hausdorff proposa alors de décrire ces objets par une dimension non entière [130], généralisant le concept que nous avons de la dimension : une courbe ou une ligne a une dimension de 1, le plan a une dimension de 2 et un volume a une dimension de 3. Cependant, ce n'est que dans les années 60 que le mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot relia tous ces concepts, et leur donna un sens [131, 132]. Il leur inventa un nom : objets fractals ou fractales (du latin *fractus* : brisé, irrégulier) [133]. Il remarqua également que les fractales sont présentes partout dans la nature, contrairement aux figures géométriques conventionnelles.

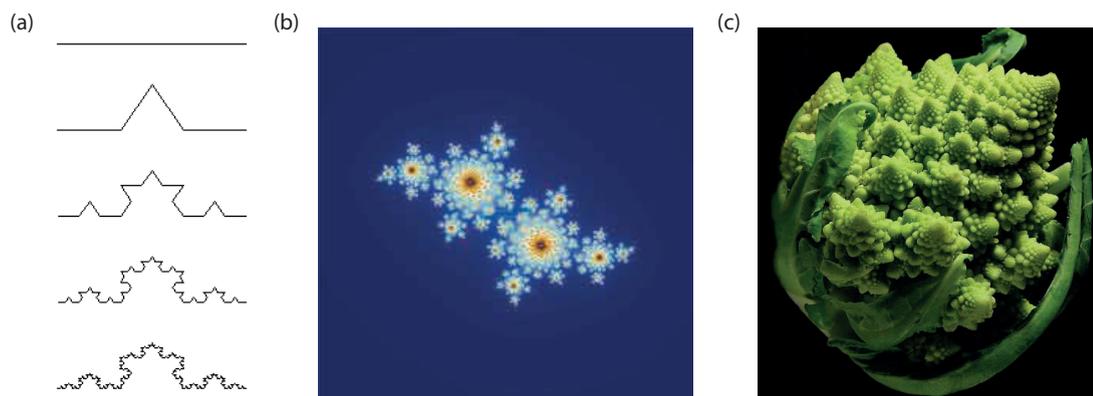


FIGURE 3.11: Exemple de fractales. (a) Premières itérations de la courbe de Koch. (b) Un ensemble de Julia défini par $f_c(z) = z^2 + c$ avec $c = \phi - 2 + (\phi - 1)i$ où ϕ est le nombre d'or. (c) Un chou romanesco.

La figure 3.11 illustre quelques exemples de fractales. La figure 3.11 (a) montre les premières itérations de la courbe de Koch, inventée en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch en 1904 [134]. C'est également une courbe continue partout mais dérivable nul-part. Un ensemble de Julia (du nom de son inventeur Gaston Julia) est représenté sur la figure 3.11 (b). Ce dernier est créé par itération d'une fonction dans le plan complexe. La figure 3.11 (c) présente une fractale qui se mange : un chou romanesco. Ces trois fractales possèdent des propriétés qui sont communes et définissent les fractales en général. Celles-ci sont :

- La dimension de Hausdorff est strictement supérieure à sa dimension topologique. Par exemple la courbe de Koch a une dimension supérieure à 1. Plus l'ordre de la fractale augmente, plus elle se rapproche d'un objet à deux dimensions qui repose dans un plan.
- Cet objet est exactement ou statistiquement autosimilaire : les sous-éléments du chou romanesco ou de l'ensemble de Julia ressemblent à l'objet global.

- Cet objet présente une invariance d'échelle. Cette propriété ressemble à la précédente : quelque-soit le zoom avec lequel on observe un objet, ce dernier apparaît identique. Par conséquent, nous ne pouvons pas déterminer une dimension caractéristique.
- Cet objet est trop irrégulier pour être décrit efficacement par une géométrie traditionnelle : l'ensemble de Julia ne peut pas être facilement pavé par des triangles. Nous ne pouvons pas lui assigner une aire de manière triviale.

En pratique l'invariance d'échelle n'a pas besoin d'être totale. Par exemple le chou romanesco (figure 3.11 (c)) ne possède cette propriété d'invariance d'échelle que sur 4 à 5 itérations. Ces propriétés confèrent aux fractales de nombreux intérêts en physique et en ingénierie comme nous allons le voir.

3.3.2 Les propriétés spectrales des résonateurs fractals

La propriété d'invariance d'échelle des fractales a des conséquences particulièrement intéressantes pour un résonateur de forme fractale. En effet, prenons un résonateur linéaire de taille l_0 , par exemple une tige de cuivre. Son mode fondamental a pour fréquence $f_0 = \frac{c}{2l_0}$ où c est la vitesse de l'onde à la surface du résonateur. Nous effectuons la première itération de la fractale et la longueur totale de la tige devient $l_1 = al_0$ avec $a > 1$. La fréquence du mode fondamental est maintenant $f_1 = \frac{c}{2l_1} = f_0/a$. Par itération, nous pouvons nous attendre à ce que l'ordre n de la fractale ait pour fondamental la fréquence $f_n = f_0/a^n$. Ceci est également vrai pour chacune des harmoniques. Le spectre d'un résonateur fractal possède également une invariance d'échelle. On dit aussi qu'il est log-périodique. En réalité d'autres phénomènes, comme la dissipation ou des corrélations spatiales peuvent venir altérer cette loi stricto-sensu.

Il n'en reste pas moins qu'un résonateur fractal permet de comprimer l'espace et possède un spectre avec de nombreuses résonances. Plus on augmente l'ordre de la fractale et plus la densité d'état augmente [135, 136, 137]. Cela permet de fabriquer des objets de large bande passante comme des métamatériaux [135, 138, 139, 140, 141, 142], des antennes [143, 144], des filtres [136, 145, 146], des cavités ou des diffuseurs [147, 148] en optique, acoustique, micro-ondes et électronique. Nous allons par la suite nous focaliser sur une fractale simple, la courbe de Hilbert. Cela permet également de réaliser ce que nous cherchons à obtenir, à savoir une LDOS riche de modes dont les variations spatiales sont sub-longueur d'onde, le tout sur une très large bande passante, bien plus large qu'avec des métamatériaux usuels.

La courbe de Hilbert est une courbe (donc unidimensionnelle) qui remplit un plan : sa dimension de Hausdorff est 2. Elle ressemble beaucoup à la courbe de Peano, la première du genre, et en partage de nombreuses propriétés. Elle a déjà été utilisée pour faire des métamatériaux [135], où des fractales de Hilbert d'ordre 1 à 3 constituent les cellules unités [135]. De plus cette fractale est relativement homogène et ne présente pas de points avec différentes ramifications, ni de trou. Nous représentons les premières itérations de la courbe de Hilbert sur la figure 3.12. Nous obtenons l'itération suivante en remplaçant chaque segment par 5 segments de longueur inférieure.

3.3.3 La courbe de Hilbert comme résonateur fractal

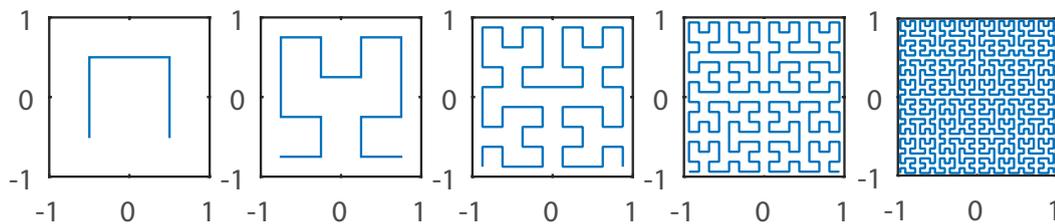


FIGURE 3.12: Les cinq premiers ordres (ou itérations) de la courbe de Hilbert.

En effet, la longueur totale de la fractale de Hilbert est $l_n = l_0(2^n - 2^{-n}) \approx l_0 2^n$ tout en étant contenue dans un carré de côté l_0 . Nous choisissons $l_0 = 120$ mm ce qui correspond à la longueur d'onde λ_0 à 2,5 GHz. En pratique, nous travaillons sur des fractales d'ordre 4 à 7. Notre fractale d'ordre 6 a une longueur totale de 7,68 m, mais est comprimée dans un carré de 0,12 m de côté. Elle constitue donc un résonateur de dimension l_0 très sub-longueur d'onde entre 0 et 4 GHz.

La figure 3.13 présente les résonances de moins de 4 GHz pour les 3 premiers ordres de la fractale de Hilbert. L'augmentation de l'ordre augmente le nombre de résonances ainsi que leur facteur de qualité. Ceci est dû au fait que la longueur de la courbe augmente à chaque itération.

Les courbes de Hilbert que nous utilisons dans notre étude sont imprimées sur PCB comme les réseaux précédemment utilisés. Toutes les courbes de Hilbert ont le même facteur de remplissage $r = 0,5$.

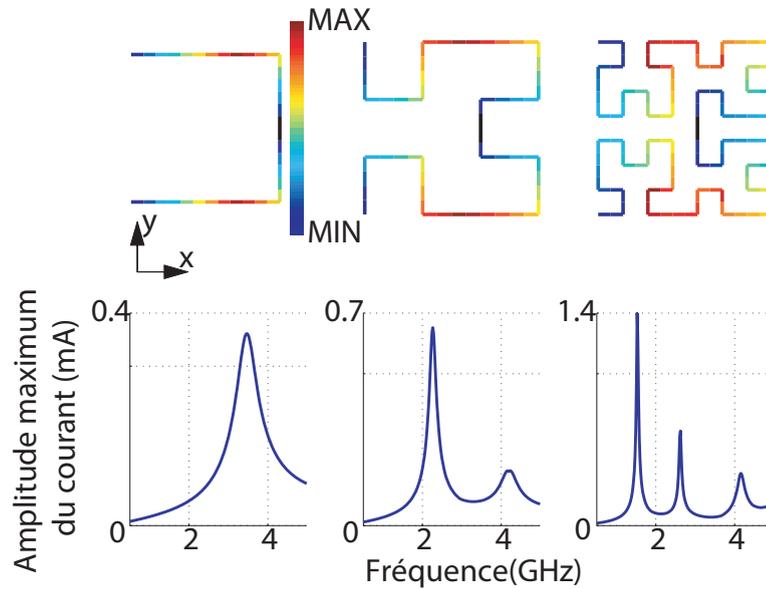


FIGURE 3.13: Distribution de courant (en haut) et résonances (en bas) des 3 premières itérations de la courbe de Hilbert, lorsqu'elle est excitée par une onde plane d'incidence normale et polarisée suivant x . La dimension de la fractale est de 3 cm par 3 cm. Ces résultats sont obtenus en simulation. Figure reproduite de [135].

3.3.4 Modes propres d'une fractale de Hilbert

Dans un premier temps, nous nous intéressons au champ proche de la fractale de Hilbert d'ordre 6. Nous utilisons une antenne cornet polarisée verticalement placée en champ lointain de la fractale (à 1,5 m). De l'autre côté de la fractale, la sonde de champ proche montée sur un banc de translation 3D balaye le champ proche dans un plan situé à 0,5 mm de la fractale. Le montage expérimental est schématisé sur la figure 3.14.

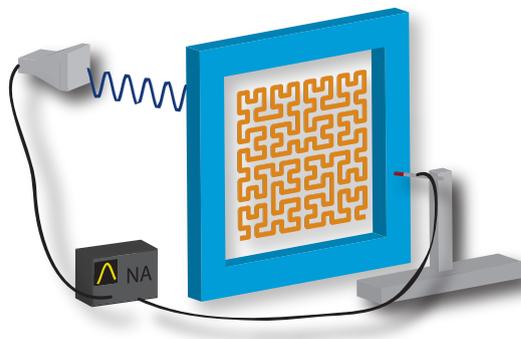


FIGURE 3.14: Montage expérimental : un analyseur de réseau mesure la transmission entre une antenne cornet à 1,5 m et la sonde balayée en champ proche de la fractale.

Ceci nous permet de mesurer le spectre de transmission en chacun des points. La figure 3.15 (a) montre la transmission en énergie moyennée sur toutes les positions. Ce spectre montre de nombreux pics de résonance, même si les résonances ne sont pas clairement résolues. La figure 3.15 (b) représente le signal temporel mesuré en un point. Ce dernier présente un délais de 5 ns qui correspond au temps de vol entre l'antenne cornet et le récepteur de 1,5 m, augmente fortement, puis s'atténue en un temps caractéristique de 15 ns, et devient négligeable après 60 ns. Les

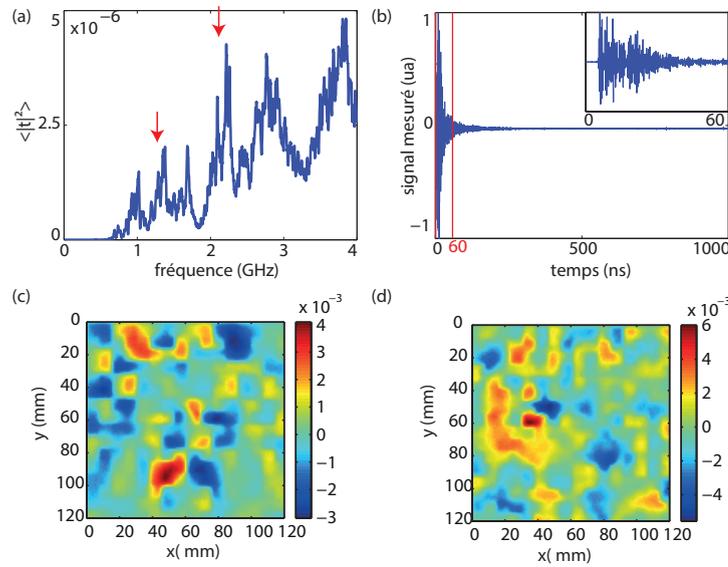


FIGURE 3.15: Transmission d'une fractale de Hilbert d'ordre 6. (a) Spectre moyenné sur les positions. Les deux flèches rouges indiquent les modes représentés en dessous. (b) Signal temporel à une position donnée ($x=33$ mm, $y=60$ mm). (c) Mode à 1,355 GHz ($\lambda = 22$ cm). (d) Mode à 2,216 GHz ($\lambda = 13,54$ cm).

figures 3.15 (c,d) (voir également la figure 3.28 (b,c)) montrent les modes obtenus à deux fréquences de 1,355 GHz et 2,216 GHz. Ces modes présentent visiblement des variations spatiales sur des distances d'environ 5 mm, soit beaucoup moins que les longueurs d'onde correspondantes (respectivement 22 cm et 13 cm). Cela laisse supposer qu'en sommant habilement ces modes, il est possible de focaliser des ondes électromagnétiques sur des dimensions très sub-longueur d'onde.

3.3.5 Focalisation par retournement temporel dans le champ proche de la fractale

Nous avons donc un résonateur qui présente des modes sub-longueur d'onde lorsqu'on l'excite depuis le champ lointain. Nous nous demandons à présent si nous pouvons les utiliser pour focaliser les ondes en dessous de la limite de la

diffraction. Nous réalisons donc une nouvelle fois l'expérience de retournement temporel mono-canal de manière synthétique. Précédemment, nous avons mesuré les signaux $s_f(\mathbf{r}, \omega)$ dans un plan parallèle au plan de la fractale. Nous calculons numériquement le signal suivant pour tenter de focaliser en \mathbf{r}_0 :

$$s_{f_{TR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \mathcal{F}^{-1} [s_f^*(\mathbf{r}_0, \omega) s_f(\mathbf{r}, \omega)] \quad (3.13)$$

en nous restreignant à la bande passante de 1,5 GHz à 3 GHz.

La figure 3.16 présente le maximum sur le temps de la puissance du champ, $\max_t |s_{f_{TR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)|^2$, où \mathbf{r}_0 est la position du point sur lequel nous voulons focaliser les ondes. Cela signifie que pour chaque position \mathbf{r} de l'équation 3.13, nous définissons un t_{max} pour lequel le signal $|s_{f_{TR}}|^2$ est maximal. Les trois expériences de focalisation présentent des taches de dimension sub-longueur d'onde, environ $\lambda/10$. Cependant ces taches ne sont pas nécessairement situées aux endroits voulus. De plus d'autres points chauds sont également excités, le niveau moyen est très bruité, et nous observons des lobes secondaires élevés. Pour quantifier le niveau moyen, nous définissons le SNR (rapport signal sur bruit) à partir des images précédentes comme la valeur de l'énergie au point focal divisée par l'énergie moyennée sur toute la fractale (c'est-à-dire la variance spatiale du champ) :

$$SNR = \frac{\max_t |s_{f_{TR}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, t)|^2}{\left\langle \max_t |s_{f_{TR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)|^2 \right\rangle_{\mathbf{r}}} \quad (3.14)$$

Le SNR de la figure 3.16 (a) est égal à 8. Évidemment le SNR des figures 3.16 (b,c) est inférieur à cause des points chauds supplémentaires et vaut respectivement 3 et 4. La valeur moyenne (sur 100 focalisations) du SNR est de 5,6 : ce n'est pas satisfaisant. En effet nous n'avons utilisé qu'un seul degré de liberté spatial et nous avons vu au chapitre 1 que le SNR est proportionnel au nombre de degrés de liberté. Nous allons donc évaluer le nombre de degrés de liberté temporels.

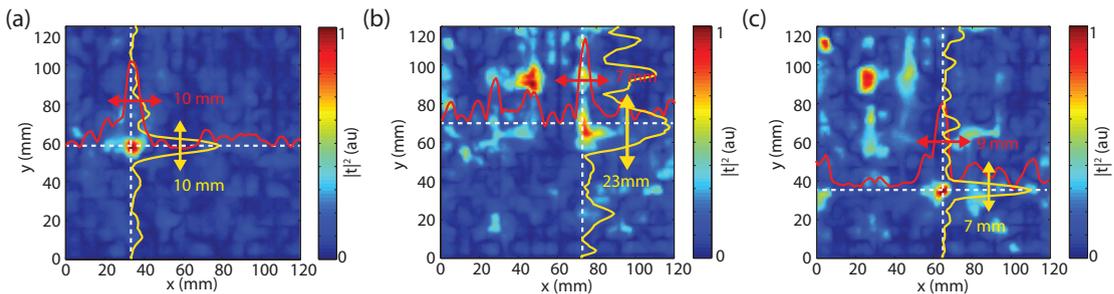


FIGURE 3.16: 3 expériences de focalisation par retournement temporel aux points (a) (33,60) , (b) (73,70) et (c) (66,35).

Les degrés de liberté temporels (ou fréquentiels) peuvent être évalués de la manière suivante : $N_t = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}$, avec $\Delta\omega=1,5$ GHz. Pour calculer $\delta\omega$, nous calculons les coefficients de corrélation fréquence à fréquence des champs spatiaux. Nous obtenons la figure 3.17 (a). En triant chaque ligne par ordre décroissant et en moyennant l'autre dimension, nous obtenons la figure 3.17 (b) qui donne le coefficient de corrélation moyen en fonction de la différence entre deux fréquences. Nous obtenons ainsi une fréquence de corrélation $\delta\omega = 122$ MHz. Nous avons donc $N_t = 12$ degrés de liberté temporels, soit autant de degrés de liberté au total.

Avec ces 12 degrés de liberté temporels, nous obtenons des taches focales dont les dimensions sont sub-longueur d'onde. Cependant les images obtenues sont marquées par un rapport signal sur bruit trop faible, et d'autre part les taches focales ne sont pas à la bonne position, voire multiples. Nous avons donc besoin d'accroître le nombre de degrés de liberté. Dans un premier temps nous choisissons d'augmenter le nombre de degrés de liberté spatiaux.

3.3.6 Augmentation des degrés de liberté spatiaux

Une première solution consiste à augmenter le nombre de degrés de liberté spatiaux en utilisant un nombre d'antennes supérieur pour le retournement temporel. Conceptuellement simple, cette solution est expérimentalement compliquée à mettre en place puisqu'elle nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'antennes disposées en champ lointain. Nous avons alors recours à des techniques numériques avec le logiciel commercial *CST Microwaves Studio*.

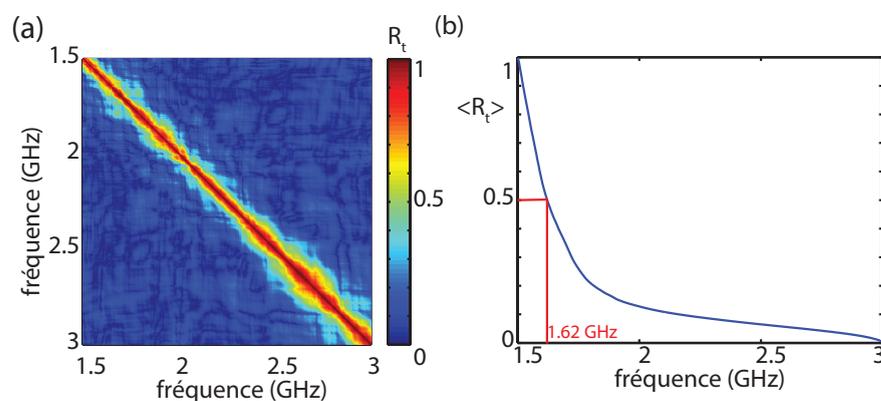


FIGURE 3.17: Degrés de liberté temporels en expérience sans la cavité. (a) Matrice des coefficients de corrélation des champs fréquence à fréquence. (b) Coefficient de corrélation moyen en fonction de la fréquence.

3.3.6.1 Procédure numérique

Nous simulons ainsi 90 ondes planes incidentes, chacune représentant une antenne. Nous définissons les angles d'incidence θ et ϕ comme sur la figure 3.18. Étant donné que la fractale possède un axe de symétrie, nous nous contentons de simuler 5 angles θ d'incidence entre 0 et 85° et 9 angles ϕ entre -85° et 85°. Pour chaque incidence (θ, ϕ) , nous simulons deux polarisations perpendiculaires, soit un total de 90 ondes planes α_i .

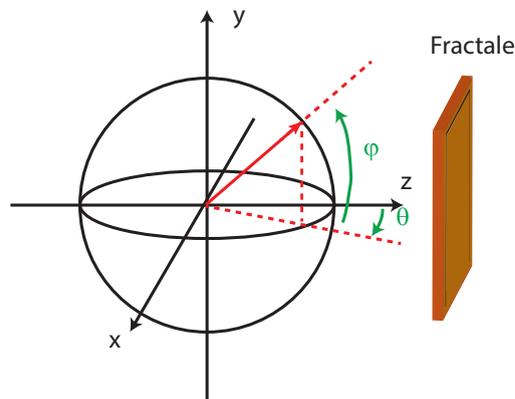


FIGURE 3.18: Définition des angles θ (longitude) et ϕ (latitude).

Chaque onde plane incidente est un signal gaussien, de bande passante comprise entre 1,5 et 3 GHz. Nous enregistrons le champ suivant la polarisation \mathbf{z} de l'autre côté de la fractale, simulée en métal parfait sur un substrat de diélectrique (FR4 $\epsilon_r = 4,3$, $\tan \delta = 10^{-2}$), sur un plan situé à 1 mm.

Pour que ces résultats soient comparables à nos mesures, nous devons prendre en compte la fonction de transfert spatiale de la sonde champ proche utilisée expérimentalement. En effet celle-ci moyenne spatialement les champs. Pour ce faire, nous mesurons la transmission entre deux sondes de champ proche identiques espacées de 1 mm, en balayant l'une des deux dans un champ de 120 par 120 mm par rapport à l'autre. Nous obtenons ainsi l'auto-corrélation spatiale de la fonction de transfert. Nous moyennons ces mesures en fréquence puis nous prenons la racine de la transformée de Fourier. Nous obtenons la fonction de transfert montrée sur la figure 3.19. Nous filtrons alors spatialement tous les champs simulés par cette fonction de transfert : c'est sur ces champs filtrés que nous travaillons par la suite.

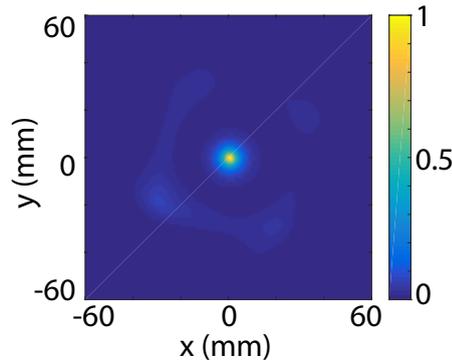


FIGURE 3.19: Fonction de transfert de la sonde de champ proche dans l'espace réel.

3.3.6.2 Évaluation du nombre de degrés de liberté

Les simulations nous fournissent 90 champs sur un plan de 120 mm par 120 mm sur 50,1 ns (par pas de 0,1 ns). Nous allons à présent évaluer le nombre de degrés de liberté spatiaux et temporels. Les simulations sont effectuées dans le domaine temporel, et nous préférons déterminer le nombre de degrés de liberté temporels directement. Pour cela, nous calculons les coefficients de corrélation spatiaux et temporels :

$$\begin{cases} R_s(\alpha_i, \alpha_j) = \left\langle \frac{|\sum_r E_{\alpha_i}(\mathbf{r}, t) E_{\alpha_j}(\mathbf{r}, t)|}{\sqrt{\sum_r |E_{\alpha_i}(\mathbf{r}, t)|^2 \sum_r |E_{\alpha_j}(\mathbf{r}, t)|^2}} \right\rangle_t \\ R_t(t_i, t_j) = \left\langle \frac{|\sum_r E_{\alpha}(\mathbf{r}, t_i) E_{\alpha}(\mathbf{r}, t_j)|}{\sqrt{\sum_r |E_{\alpha}(\mathbf{r}, t_i)|^2 \sum_r |E_{\alpha}(\mathbf{r}, t_j)|^2}} \right\rangle_{\alpha} \end{cases} \quad (3.15)$$

La figure 3.20, qui représente l'évaluation numérique de ces grandeurs, indique qu'en moyenne, chaque antenne produit un champ corrélé avec 8 autres. Nous avons donc 90/9 soit $N_s = 10$ degrés de liberté spatiaux. Ceci correspond approximativement à la surface de la fractale divisée par la longueur de cohérence au carré multiplié par les deux polarisations, soit $\frac{\lambda^2}{(\lambda/2)^2} \times 2 = 8$. De même les figures 3.20 (b,c) montrent que les signaux sont corrélés sur une durée $\delta t = 0,9$ ns. D'autre part, nous évaluons le temps de vie du signal Δt en moyennant les enveloppes des signaux mesurés en tous points, à environ 20 ns. C'est plus long que mesuré précédemment mais du même ordre de grandeur. Les simulations sont lourdes et nous ne pouvons mesurer les signaux sur des temps aussi longs ni avec la même précision qu'en expérience. Il y a donc $N_t = \Delta t / \delta t = 22$ degrés de liberté temporels, mais qui sont probablement un peu surévalués pour les raisons précédentes. Au total, nous avons à présent $N_{tot} = 220$ degrés de liberté spatio-temporels.

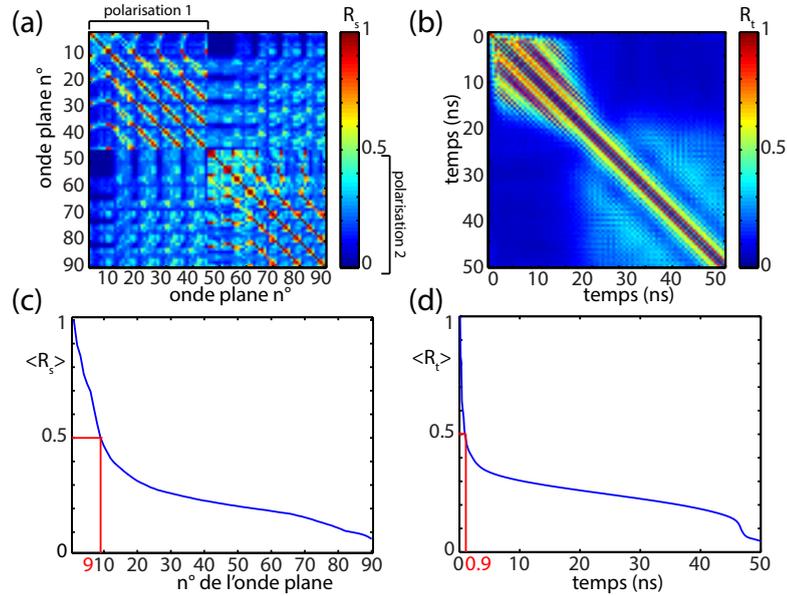


FIGURE 3.20: Degrés de liberté spatiaux et temporels. (a) Matrice des coefficients de corrélation spatiaux. (b) Matrice des coefficients de corrélation temporels. (c) Coefficients de corrélation spatiaux moyennés. (d) Coefficients de corrélation temporels moyennés.

3.3.6.3 Focalisation par retournement temporel multivoie

Nous avons donc augmenté d'un ordre de grandeur le nombre total de degrés de liberté spatio-temporels. Pour focaliser au point \mathbf{r}_0 , il faut retourner temporellement les 90 signaux créés par les 90 différentes ondes planes et mesurés au point \mathbf{r}_0 , et les renvoyer suivant les mêmes directions et polarisations d'incidence. Le signal obtenu en tout point \mathbf{r} est alors la convolution des signaux retournés temporellement $s_\alpha(\mathbf{r}_0, -t)$ avec les signaux mesurés en \mathbf{r} , $s_\alpha(\mathbf{r}, t)$:

$$s_{TR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \sum_{\alpha} s_\alpha(\mathbf{r}, t) \star_t s_\alpha(\mathbf{r}_0, -t) \quad (3.16)$$

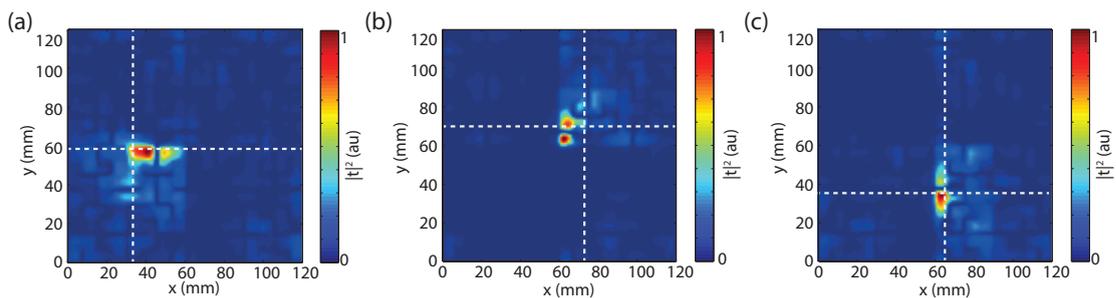


FIGURE 3.21: Focalisation par retournement temporel en champ proche de la fractale illuminée par 90 ondes planes en simulation. (a) en (33,60). (b) en (73,70). (c) en (66,35).

La figure 3.21 montre trois taches focales obtenues avec cette méthode, et dont les positions correspondent à celles du retournement temporel monovoie. Nous observons des taches focales sub-longueurs d'onde. Les lobes secondaires et le niveau moyen sont visiblement beaucoup plus faibles qu'avec une seule antenne. Le SNR a augmenté et vaut 16,5 environ, plutôt que 5,6 avec une seule antenne. Ainsi, depuis le champ lointain uniquement, nous avons réussi en simulation à focaliser le champ sur des dimensions sub-longueur d'onde ($\lambda/10$) sur le champ proche du réseau. Pour ce faire, nous avons utilisé un grand nombre d'ondes planes représentant une dizaine de degrés de liberté spatiaux. Le retournement temporel a permis de synchroniser les modes propres du résonateur à des instants et lieux précis. Nous notons également, que la tache focale n'est pas exactement à l'endroit voulu, car la fractale n'est pas très homogène. Nous allumons donc le point chaud le plus facile à exciter à proximité de l'endroit ciblé.

Cependant, utiliser un grand nombre d'antennes nous mènerait à mettre en place une expérience très lourde. En effet, contrôler 90, voire même seulement 10 antennes indépendantes mènerait à une électronique compliquée. Au lieu d'augmenter le nombre de degrés de liberté spatiaux, nous choisissons en expérience d'augmenter le nombre de degrés de liberté temporels en couplant la fractale à une cavité résonante. Cette méthode est beaucoup plus simple à réaliser car nous n'utilisons qu'une seule antenne. Nous allons voir que la cavité permet de convertir les degrés de liberté spatiaux en degrés de liberté temporels, exploitables par le retournement temporel.

3.4 Couplage du résonateur à une cavité et application à la focalisation sur des dimensions sub-longueur d'onde

Utiliser un grand nombre d'antennes pour augmenter le nombre de degrés de liberté spatiaux est expérimentalement lourd et compliqué. Dans cette partie, nous avons recours à un montage beaucoup plus simple utilisant une cavité réverbérante pour convertir des degrés de liberté spatiaux en degrés de liberté temporels. Nous présentons les résultats ainsi obtenus, les comparons aux méthodes précédentes et nous les interprétons en terme de couplage entre le résonateur fractal et la cavité.

3.4.1 Couplage du résonateur fractal à une cavité résonante

3.4.1.1 Concept

Utiliser un grand nombre d'antennes est difficilement réalisable expérimentalement. Au lieu d'utiliser 90 antennes, nous proposons d'utiliser une seule antenne dans une cavité. Cette cavité d'un mètre cube de volume ($1,45 \times 1 \times 0,75$) est ouverte par la fractale sur un côté comme précédemment montré sur la figure 3.9 pour un réseau de diffraction périodique. Encore une fois nous mesurons la transmission entre l'antenne à l'intérieur de la cavité et la sonde dans le champ proche de la fractale.

L'utilisation de la cavité augmente le nombre de sources fictives d'après le théorème des images vu précédemment au chapitre 1 (figure 1.6). Ces degrés de liberté produisent une large distribution de vecteurs d'onde \mathbf{k} incidents sur la fractale. Ces degrés de liberté a priori spatiaux sont en fait des degrés de liberté temporels. En effet, à un mode propre de la cavité correspond non seulement un vecteur d'onde \mathbf{k} , soit un angle d'incidence de l'onde, mais aussi une fréquence propre ω . Expérimentalement nous n'utilisons qu'une seule antenne dans la cavité et ne disposons donc que d'un seul degré de liberté spatial. Le facteur de qualité de la cavité ouverte par la fractale est de l'ordre de 1 000.

3.4.1.2 Mesures de la transmission du résonateur couplé à une cavité

Le caractère réverbérant de la cavité augmente significativement la durée du signal mesuré en transmission, comme nous le voyons sur la figure 3.22 (a). Nous mesurons un temps caractéristique de décroissance du champ de 300 ns. Le spectre expose un grand nombre de résonances bien mieux résolues (figure 3.22 (b)) que sans cavité (figure 3.15 (b)). Notons que l'enveloppe du spectre est modifiée car nous avons remplacé l'antenne cornet par une antenne WI-FI à l'intérieur de la cavité, qui a une largeur spectrale plus faible, mais présente l'avantage d'être isotrope. Nous observons donc dans le domaine temporel un signal de durée nettement plus longue que sans cavité et dans le domaine fréquentiel des modes beaucoup mieux résolus. Nous avons ainsi nettement augmenté le nombre de degrés de liberté temporels. Nous allons à présent quantifier cette amélioration.

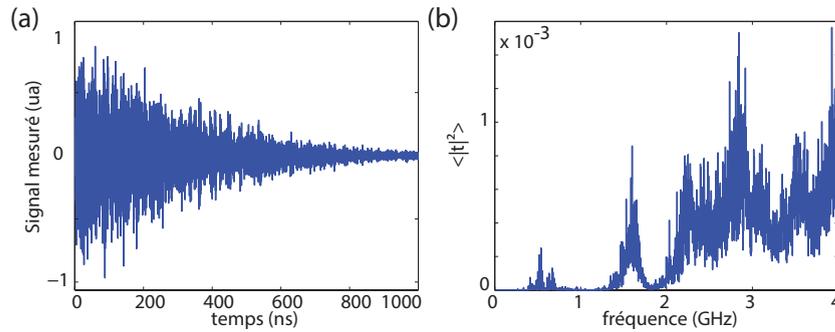


FIGURE 3.22: Mesure en transmission du résonateur fractal d'ordre 6 couplé à la cavité. (a) signal temporel à la position (33,60). (b) Spectre en transmission moyenné sur les positions. L'aspect très piqué du spectre est dû aux nombreuses résonances, et non pas au bruit.

3.4.1.3 Degrés de liberté spatio-temporels

Évidemment avec une seule antenne à l'intérieur de la cavité, nous avons un seul degré de liberté spatial. Comme l'analyseur de réseau mesure directement un spectre nous évaluons le nombre de degrés de liberté temporels dans le domaine spectral en calculant les coefficients de corrélations croisés fréquence à fréquence. La matrice des coefficients de corrélation croisée et leur moyenne sur chaque colonne sont présentés sur la figure 3.23. Nous trouvons ainsi une fréquence

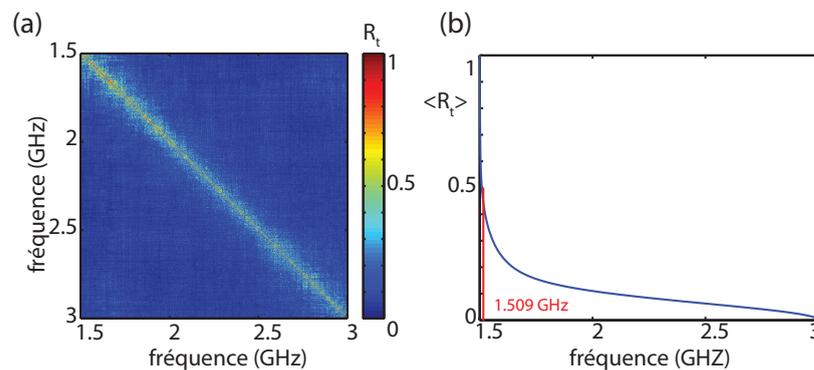


FIGURE 3.23: Degrés de liberté temporels en expérience avec la cavité. (a) Matrice des coefficients de corrélation des champs fréquence à fréquence. (b) Coefficient de corrélation moyen en fonction de l'écart de fréquence.

de corrélation de $\delta f = 9$ MHz sur une bande passante $\Delta f = 1,5$ GHz. Nous en déduisons le nombre de degrés de liberté temporels $N_t = \frac{\Delta f}{\delta f} \approx 150$. Cela signifie que, comparé à la mesure sans cavité ($N_t = 12$), nous avons augmenté le nombre de degrés de liberté temporels ou fréquentiels à 150, soit une amélioration d'un facteur 12 environ. C'est moins qu'en simulation avec de nombreuses sources, nous

avons $N_{tot} = 220$, mais du même ordre de grandeur. Le nombre de degrés de liberté devrait donc être suffisant pour focaliser correctement les micro-ondes sur la fractale.

3.4.1.4 Focalisation par retournement temporel

Nous allons à présent synchroniser ces 150 degrés de liberté grâce au retournement temporel. Nous réalisons à nouveau un calcul synthétique des taches de focalisation par retournement temporel mono-voie en calculant :

$$s_{cav,TR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \mathcal{F}^{-1} [s_{cav}^*(\mathbf{r}_0, \omega) s_{cav}(\mathbf{r}, \omega)] \quad (3.17)$$

La figure 3.24 présente le résultat de 3 expériences de focalisation. Les taches focales ont des tailles très sub-longueur d'onde ($\lambda/15$). C'est beaucoup mieux qu'avec une seule antenne sans cavité, voire même que la simulation avec 90 ondes planes. Ceci résulte de l'augmentation des degrés de liberté temporels apportés par la cavité. Nous observons notamment que :

- La tache focale est toujours précisément placée sur la position souhaitée.
- La tache focale a une dimension très petite devant la longueur d'onde et atteint des dimensions comprises entre 7 à 10 mm, soit en moyenne $\lambda/15$. Nous rappelons que λ est la longueur d'onde centrale de la bande passante [1,5 – 3] GHz.
- Il n'y a pas de lobe secondaire, et le niveau moyen est très bas.
- Ces résultats sont même meilleurs que ceux obtenus en simulation en retournement temporel multivoie.

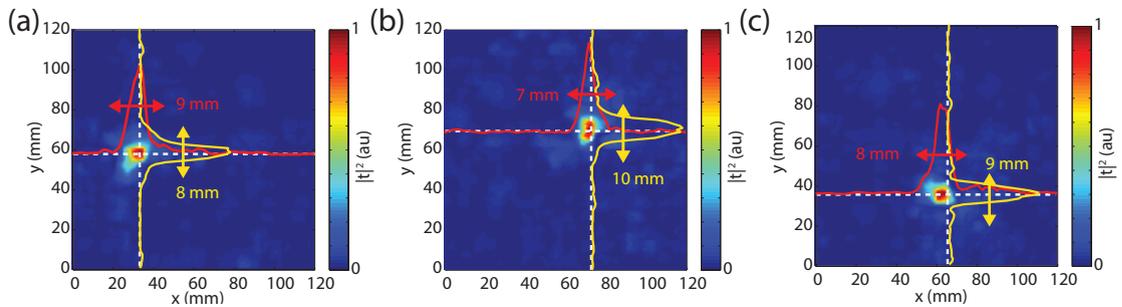


FIGURE 3.24: Focalisation par retournement temporel en champ proche de la fractale couplée à la cavité. (a) en (33,60). (b) en (73,70). (c) en (66,35).

Nous avons donc prouvé expérimentalement que nous pouvons focaliser des micro-ondes où nous voulons sur le résonateur fractal en utilisant une unique antenne située dans le champ lointain du réseau mais dans une cavité. Nous avons

obtenu des taches focales aussi petites que $\lambda/15$ en moyenne avec une courbe de Hilbert d'ordre 6. Cependant, nous n'avons pas encore étudié le rôle joué par l'ordre de la fractale. A priori, augmenter l'ordre de la fractale augmente le nombre de modes dans la bande passante et ainsi le nombre de degrés de liberté temporels. De plus ceux-ci varient sur des dimensions d'autant plus réduites que l'ordre de la fractale est élevé. Augmenter l'ordre de la fractale devrait donc simultanément augmenter le SNR et diminuer la dimension de la tache focale.

3.4.1.5 Influence de l'ordre de la fractale sur la focalisation

Nous nous sommes alors intéressés à l'influence de l'ordre de la fractale sur la qualité de la focalisation. La figure 3.25 indique ainsi que la taille de la tache focale diminue dans un premier temps avec l'augmentation de l'ordre de la fractale. En effet, plus l'ordre de la fractale augmente, plus les modes varient sur des dimensions réduites (comme détaillé au paragraphe 3.3.2). Cependant au delà de l'ordre 6, la dimension de la taille focale sature à $\lambda/15$. Nous pouvons interpréter cela comme une limite de la cavité qui ne parvient plus à résoudre ces nouveaux modes, à cause de son facteur de qualité limité. Une mesure avec une fractale d'ordre 6, mais avec un substrat à faibles pertes (NELTEC : $\tan \delta = 10^{-3}$ au lieu de $\tan \delta = 10^{-2}$ en FR4), permet de focaliser les micro-ondes sur la même dimension, ce qui tend à confirmer que cette limite n'est pas due à la dissipation intrinsèque du résonateur fractal (figure 3.25).

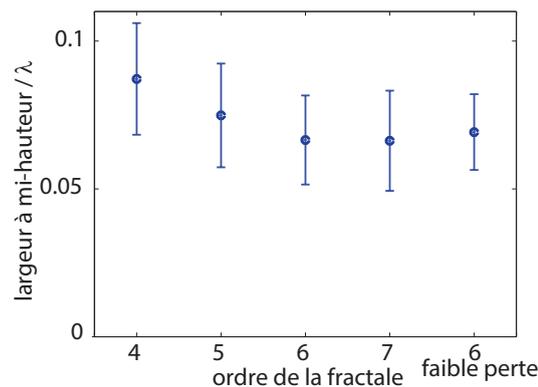


FIGURE 3.25: Comparaison de la taille des taches focales en fonction de l'ordre de la fractale. Le dernier point correspond à une fractale d'ordre 6 imprimée sur un substrat de faibles pertes. Les barres d'erreur indiquent l'écart-type.

Ainsi, nous avons montré qu'augmenter l'ordre de la fractale permet d'augmenter le nombre de degrés de liberté dont nous disposons pour focaliser. La dimension des taches focales diminue donc dans un premier temps. Nous avons

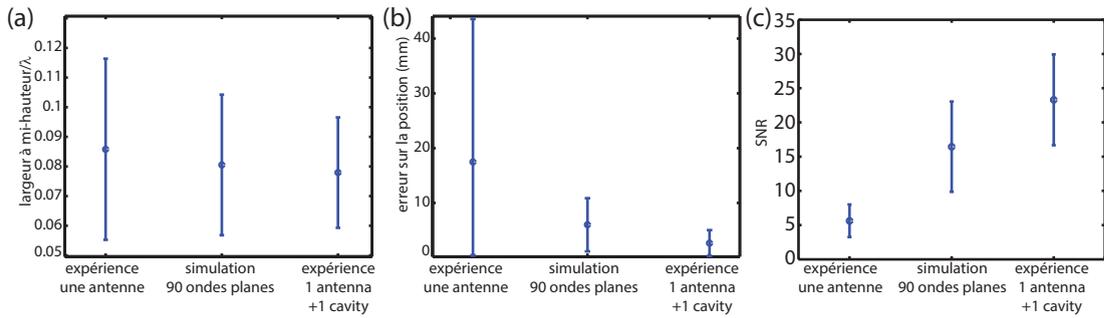


FIGURE 3.26: Comparaison de la focalisation pour nos trois méthodes. Les barres d'erreur indiquent l'écart-type.

également mis en évidence que cet effet sature, dans notre cas à partir de l'ordre 6, et nous avons attribué cela au facteur de qualité fini de notre cavité, qui ne permet pas de résoudre ces nouveaux degrés de liberté.

3.4.2 Comparaison des mesures expérimentales et des simulations

Dans cette partie, nous comparons plus précisément les résultats de focalisation obtenus expérimentalement avec les trois méthodes que nous venons d'exposer : expérimentalement avec une seule antenne, en simulations avec 90 ondes planes et expérimentalement avec une cavité. Nous choisissons alors de comparer 100 taches focales à des endroits pseudo-aléatoires pour les 3 méthodes décrites. La figure 3.27 présente ces taches focales à 9 positions différentes pour les trois méthodes.

Qualitativement, nous notons une nette amélioration de la focalisation avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté, que ce soit en simulations avec 220 degrés de liberté spatio-temporels ou en expérience avec une cavité et 150 degrés de liberté temporels. Ainsi, les taches focales sont plus petites, et le SNR est sensiblement supérieur. Nous pouvons même noter que les performances obtenues semblent être relativement meilleures pour nos mesures avec une cavité que pour les simulations avec 90 ondes planes.

Nous comparons donc la taille moyenne des taches focales, le SNR et l'erreur sur la position de la focalisation pour les trois méthodes sur la figure 3.26. Les largeurs à mi-hauteur se révèlent comparables pour les trois méthodes. Cependant, l'écart-type avec une cavité est plus faible que sans, ce qui est intéressant vis-à-vis d'éventuelles applications pour lesquelles il serait important d'obtenir des

taches focales homogènes. L'erreur sur la position de la tache focale est également inférieure avec un grand nombre de degrés de liberté.

Enfin le SNR augmente nettement avec l'augmentation des degrés de liberté : il est de 16 pour les focalisations obtenues en simulation avec 90 ondes planes, et de 24 pour l'expérience en cavité, alors qu'il est inférieur à 5,6 avec seulement un degré de liberté spatial sans cavité. Ces mesures confirment nos estimations précédentes : les résultats obtenus avec une cavité brassant les degrés de liberté sont meilleurs que ceux obtenus en simulation avec 90 ondes planes, qui sont bien supérieurs à ceux obtenus expérimentalement avec une seule antenne.

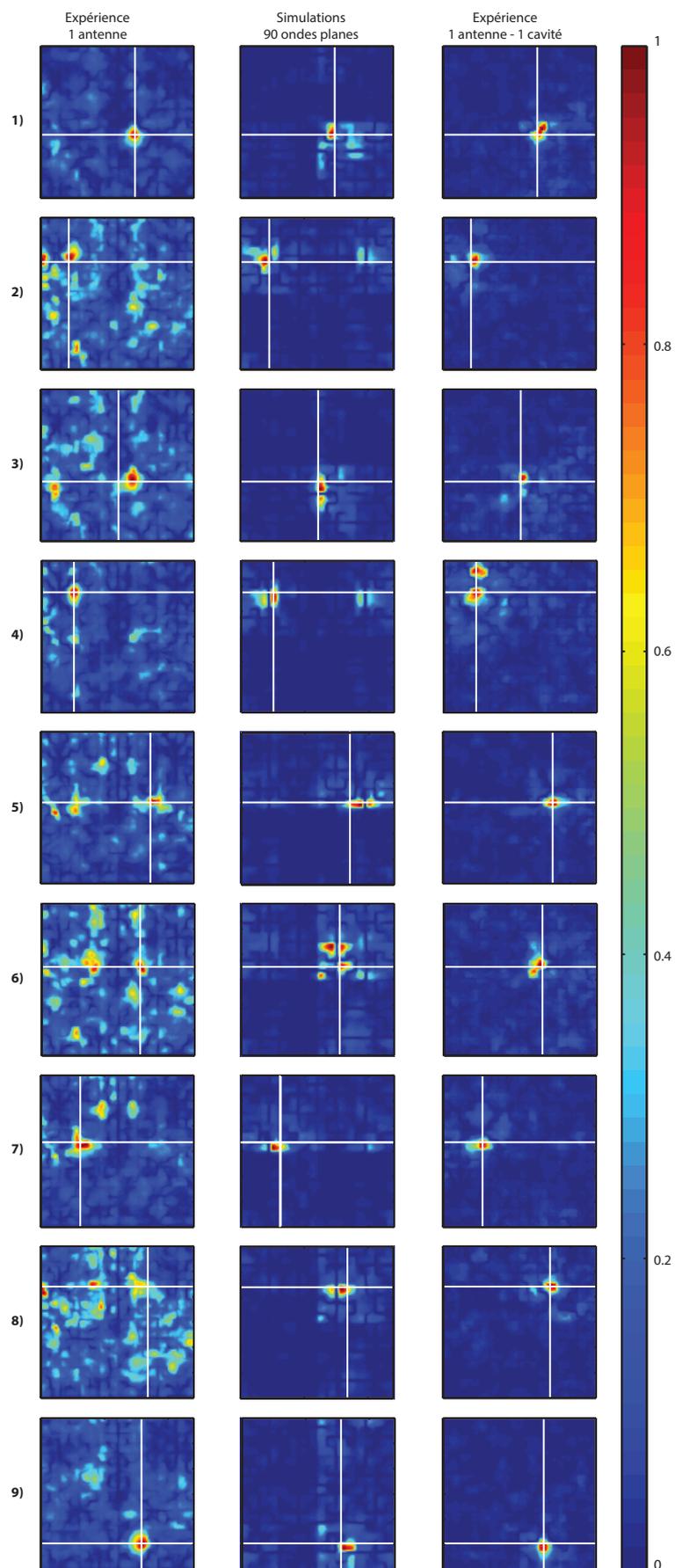


FIGURE 3.27: Taches focales à 9 endroits pour les 3 méthodes.

3.4.3 Interprétation : brassage des degrés de liberté spatio-temporels par la cavité

Coupler une cavité à notre résonateur fractal augmente donc sensiblement le nombre de degrés de liberté et permet de focaliser des micro-ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde, de l'ordre de $\lambda/15$. Cela peut s'interpréter par un couplage entre deux milieux que nous allons expliciter dans cette dernière sous-partie.

Considérons une bande passante donnée comme celle considérée entre 2,20 GHz et 2,23 GHz sur la figure 3.28 (a). Dans cet intervalle, la transmission de la fractale sans cavité est régulière et varie doucement. Les résonances sont trop larges pour que nous puissions les distinguer. Au contraire avec la cavité, nous distinguons un grand nombre de résonances bien résolues. Nous considérons ensuite 10 fréquences qui correspondent à des modes en transmission du résonateur avec la cavité, et symbolisées par des flèches vertes sur la figure 3.28 (a).

Les figures 3.28 (b,c) montrent la phase des champs mesurés correspondant aux fréquences minimum et maximum sélectionnées. Ils sont quasiment identiques à l'œil. Cette impression est confirmée par le calcul des coefficients de corrélation croisés avec des coefficients tous supérieurs à 0,7 (figure 3.28 (d)). Cela signifie que dans cette bande passante et pour l'expérience sans cavité, il n'y a qu'un seul degré de liberté temporel.

Au contraire, les figures 3.28 (e,f) montrent que les champs aux fréquences 1 et 10 sont très différents, laissant entendre que le nombre de degrés de liberté temporels a augmenté lorsqu'on a couplé la fractale à la cavité. Ceci est en effet sous-ligné par la matrice des coefficients de corrélation croisés de ces champs, qui sont tous inférieurs à 0,3 (à l'exception des diagonales bien sûr), et illustrée figure 3.28 (g). À chacune de ces fréquences correspond un degré de liberté temporel. Ceci prouve par ailleurs qu'un degré de liberté temporel sans cavité contient au moins 10 degrés de liberté temporels indépendants en présence de cavité. En espace libre c'est l'utilisation de degrés de liberté spatiaux qui permet de séparer les résonances de la fractale.

Avec une seule antenne, nous ne disposons que d'un seul degré de liberté spatial. Dans la bande passante considérée, le résonateur supporte un certain nombre de résonances, qui sont autant de degrés de liberté temporels potentiels. Mais les pertes radiatives transforment ces modes en résonances larges spectralement. Ainsi à une fréquence donnée, le champ proche de la fractale est formé d'un mélange, ou une superposition, de ces modes, comme nous l'avions déjà expliqué au chapitre 1 (figure 1.5). Deux modes séparés de moins d'une fréquence de corrélation

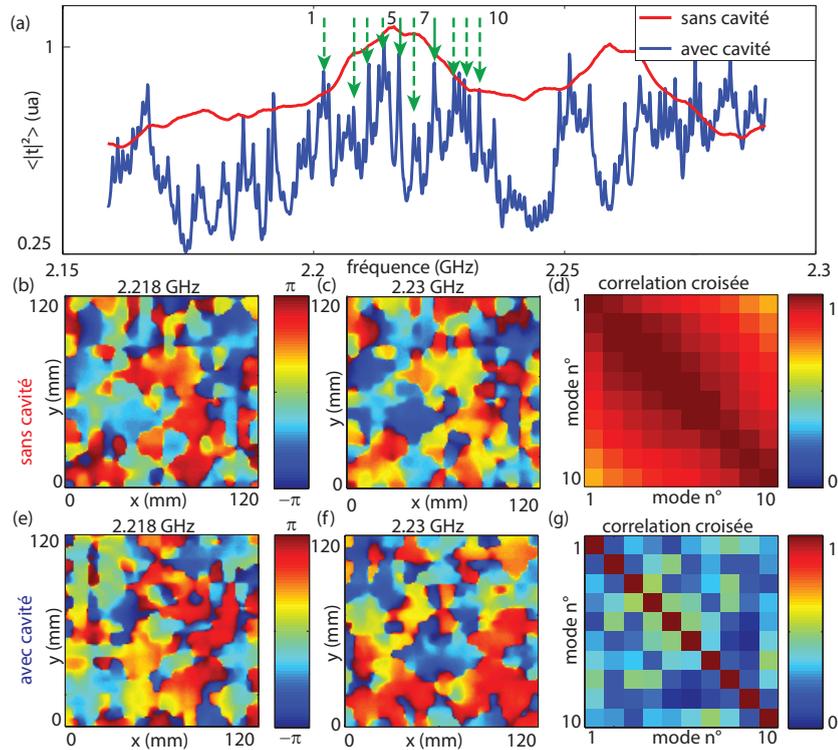


FIGURE 3.28: Degrés de liberté sans et avec cavité. (a) Spectres moyens avec et sans cavité. (b,c) Phase des champs sans la cavité aux fréquences 1 et 10. (d) Matrice des coefficients de corrélation croisée aux 10 fréquences sélectionnées sans la cavité. (e-g) Idem avec la cavité.

ne sont donc pas distinguables : c'est ce qu'illustre la figure 3.28 (a-d). Ces pertes radiatives n'ont pas uniquement un effet néfaste. En effet, il est nécessaire que le résonateur puisse rayonner et convertir les ondes planes en ondes évanescentes et réciproquement, pour pouvoir battre la limite de la diffraction.

En revanche, utiliser un grand nombre de sources permet de contrôler indépendamment chaque mode car ceux-ci sont résolus spatialement. Deux ondes avec des incidences distinctes excitent de manières légèrement différentes le résonateur. Celui-ci produit donc deux champs que nous pouvons distinguer. L'utilisation d'une cavité converti les degrés de liberté spatiaux en degré de liberté temporels. Spectralement, cela se traduit par une diminution de la fréquence de corrélation du champ comme l'illustre la figure 3.28 (a). Cela permet ainsi de distinguer des modes à des fréquences beaucoup plus proches (figures 3.28 (e-g)).

Ainsi nous avons couplé un résonateur qui possède un grand nombre de modes, à un milieu réverbérant de haut facteur de qualité. Non seulement nous avons montré que ceci augmente le nombre de degrés de liberté temporels et permet, entre autre, de battre la limite de la diffraction, mais nous avons également révélé des modes auparavant invisibles et cachés par les pertes radiatives. Cette

méthode est très simple à mettre en œuvre et peut se généraliser à d'autres types d'ondes. Par exemple, en optique un film de nanoparticules d'or à la limite de la percolation (et donc fractal) est également un milieu qui possède des modes structurés à l'échelle sub-longueur d'onde [149, 150]. Nous pourrions y adjoindre un milieu multidiffusant qui remplacerait notre cavité et qui réverbérerait les ondes pour résoudre les modes du film de nanoparticules.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu comment manipuler les degrés de liberté spatio-temporels pour focaliser des ondes sur des dimensions très petites devant la longueur d'onde, depuis le champ lointain vers le champ proche d'un résonateur sub-longueur d'onde. Nous avons choisi de travailler avec un résonateur fractal, une courbe de Hilbert, permettant ainsi de remplir une surface très fine qui ouvre une cavité. L'utilisation d'un résonateur sub-longueur d'onde s'est révélée indispensable après une expérience préliminaire qui a tenté d'adapter de manière ad-hoc l'approche utilisée au chapitre 2, à savoir avec des réseaux sub-longueur d'onde, aux travaux précédents de Geoffroy Lerosey et Fabrice Lemoult.

Nous avons montré qu'une seule antenne qui rayonne sur le résonateur depuis le champ lointain, permet difficilement de créer par retournement temporel des taches de dimension sub-longueur d'onde dans le champ proche du résonateur. Pour augmenter le rapport signal sur bruit et la qualité de la focalisation, nous avons proposé d'utiliser un grand nombre d'ondes planes différentes. Grâce à des simulations, nous avons mis en évidence qu'augmenter ainsi le nombre de degrés de liberté spatiaux permet de battre la limite de la diffraction. Nous avons adopté un montage expérimental beaucoup plus simple et n'utilisant qu'une antenne dans une cavité, ouverte par le résonateur fractal. La cavité permet de convertir les degrés de liberté spatiaux en degrés de liberté temporels. En mettant en jeu des techniques de retournement temporel monovoie, nous avons alors focalisé des micro-ondes sur des dimensions très inférieures à la longueur d'onde, et en moyenne égales à $\lambda/15$. Nous avons comparé la qualité de la focalisation des différentes méthodes et étudié le rôle joué par l'ordre de la fractale. Enfin, nous avons insisté sur le couplage entre la fractale et la cavité. L'augmentation du nombre de degrés de liberté permet de résoudre des modes qui resteraient invisibles sans cela. L'intérêt majeur de la méthode par rapport aux travaux précédent [11, 30, 56, 151] tient à sa grande simplicité expérimentale : nous n'avons besoin de ne contrôler qu'une seule source.

Dans ce chapitre, nous avons essentiellement utilisé des degrés de liberté temporels. Lorsque nous avons mis en évidence le rôle des degrés de liberté spatiaux, en simulation, c'était pour mieux les convertir en degrés de liberté temporels avec la cavité. Dans les chapitres suivants, nous allons montrer qu'utiliser des degrés de liberté spatiaux en milieux réverbérants peut également s'avérer très efficace et utile pour contrôler les micro-ondes en milieux réverbérants.

Chapitre 4

Contrôle des degrés de liberté spatiaux en milieux réverbérants : les modulateurs spatiaux de microondes

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, les milieux réverbérants considérés étaient des cavités métalliques possédant de hauts facteurs de qualité. Cependant, nous rencontrons un grand nombre de milieux réverbérants dans la vie de tous les jours ou dans la nature. Les plaques tectoniques en sismologie, ou une salle de concert en acoustique audible agissent comme des milieux réverbérants. Une piscine réverbère les ondes créées par un nageur ou un objet jeté dedans. Les ondes de gravités (se déplaçant à la surface de l'eau) à une autre échelle, expliquent également le phénomène des marées dans des cavités excitées par deux antennes inefficaces (la lune et le soleil), et dont les dimensions atteignent plusieurs milliers de kilomètres : les océans [152, 153].

Par ailleurs, un milieu urbain se comporte à la fois comme un milieu multi-diffusant et réverbérant pour les ondes électromagnétiques utilisées en télécommunications. Les ondes produites par une antenne de téléphonie, un routeur WIFI ou un ordinateur sont réfléchies par des obstacles comme des murs, des bâtiments, des arbres, des personnes ou des voitures qui sont autant de diffuseurs dont certains sont mêmes mobiles. Ces réflexions produisent alors des modes quasi-stationnaires, particulièrement dans les bâtiments. Ainsi un espace clos, comme un bureau, une

salle, voire une maison ou un immeuble, se comportent comme des cavités de faible facteur de qualité ($Q \approx 50$). Les ondes pénètrent dans ces cavités par leurs ouvertures : portes, fenêtres, et dans une moindre mesure à travers les murs.

Les champs résultant dans ces milieux sont très complexes. En effet, toutes les ondes émises par les sources secondaires, qu'elles soient fictives ou non, interfèrent et créent des champs aléatoires, similaires à des *speckles*. Cela se traduit par des minima et maxima d'intensité résultant des interférences entre les différentes ondes réfléchies par le milieu de propagation, ce qui brouille les signaux de télécommunications. Ainsi, dans bien des cas, lorsque le signal mesuré par un téléphone portable est faible, cela peut être dû à des interférences destructives. En se déplaçant de quelques longueurs d'onde, on peut retrouver une communication claire en passant dans un domaine où les interférences sont constructives. Nous observons également ce phénomène sur une radio qui capte mal : en déplaçant la radio ou des objets à proximité, la réception peut être améliorée. Dans ce cas, nous déplaçons un maximum du champ sur l'antenne qui était avant sur un minimum.

Ce problème de mauvaise couverture réseau en intérieur a conduit Mathias Fink à se demander s'il n'était pas possible d'inventer un dispositif permettant de déplacer des maxima du champ de manière à ne pas avoir à se déplacer soi-même pour téléphoner. Les protocoles de télécommunications basés sur les techniques OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) utilisent des bandes spectrales relativement restreintes [154], quasi-monochromatiques (de quelques MHz seulement). Ainsi nous ne pouvons profiter que des degrés de liberté spatiaux, qui sont d'ailleurs utilisés dans la technologie MIMO, pour *multiple input - multiple output* [154]. Ces approches nécessitent cependant des systèmes d'émission complexes et coûteux à mettre en œuvre sur un grand nombre d'antennes.

Nous avons vu que le retournement temporel permet de tirer partie de la complexité d'un milieu de propagation pour focaliser des ondes dans l'espace et le temps. Cependant, c'est une solution compliquée à mettre en œuvre et de plus inefficace quand les bandes passantes sont limitées. Nous nous sommes donc inspirés des méthodes utilisées en optique pour corriger les aberrations atmosphériques en astronomie, mais aussi pour contrôler les ondes dans les milieux diffusants. Allard Mosk a ainsi montré qu'il est possible d'optimiser la transmission de la lumière à travers un milieu diffusant en utilisant des SLM (*spatial light modulator*). Au chapitre 1, nous nous sommes attachés à montrer les similarités entre les milieux diffusants en optique et les milieux réverbérants dans le domaine microonde. Nous avons décidé d'adapter ces approches aux milieux réverbérants et dans le domaine des microondes. Par analogie avec les SLM, nous allons nous intéresser à la conception de SMM, pour *spatial microwave modulator*.

Dans une première partie nous reviendrons sur les précurseurs des SMM, les réseaux d'antennes et de réflecteurs, qui ont donné naissance aux métasurfaces, des métamatériaux à deux dimensions. Nous verrons ensuite quel est le principe de fonctionnement du modulateur spatial de microonde développé en collaboration avec Nadège Kařna. Nous utiliserons pour cela un réseau d'éléments résonants dont la fréquence de résonance est reconfigurable électroniquement. La résonance ajoute un déphasage supplémentaire de π à l'onde réfléchie, ce qui permet de contrôler les ondes.

Dans une deuxième partie, nous montrerons que nous pouvons utiliser un SMM pour améliorer de presque un ordre de grandeur la transmission d'un signal aux fréquences de télécommunication dans une pièce de bureau, mais aussi annuler le champ à un endroit donné.

Ce travail a donné lieu à deux publications : une première sur la fabrication du SMM a été publiée dans *Optics Express* [155], une deuxième sur l'optimisation d'un signal aux fréquences de télécommunication dans *Scientific Reports* [156]. Nous avons également déposé deux brevets : un porte sur les applications du SMM aux télécommunications, tandis que le deuxième propose de remplacer les plateaux tournants des fours micro-ondes par un SMM, de manière à n'avoir aucune pièce mécanique mobile dans ceux-ci.

4.2 Le modulateur spatial de microondes (SMM)

Nous commençons par introduire les concepts sur lesquels nous avons basé notre SMM : les réseaux d'antennes et de réflecteurs. Nous décrivons ensuite le fonctionnement des éléments du SMM, puis de l'ensemble des 102 éléments du SMM.

4.2.1 Des réseaux d'antennes au modulateur spatial de microondes (SMM)

4.2.1.1 Les réseaux d'antennes

Depuis des siècles les opticiens utilisent des lentilles pour contrôler la propagation des ondes. Les lentilles utilisent les lois de Snell-Descartes pour dévier les rayons afin de les focaliser en un point, appelé foyer. En électromagnétisme, les réseaux d'antennes, appelés *phased array* en anglais, sont utilisés depuis aussi

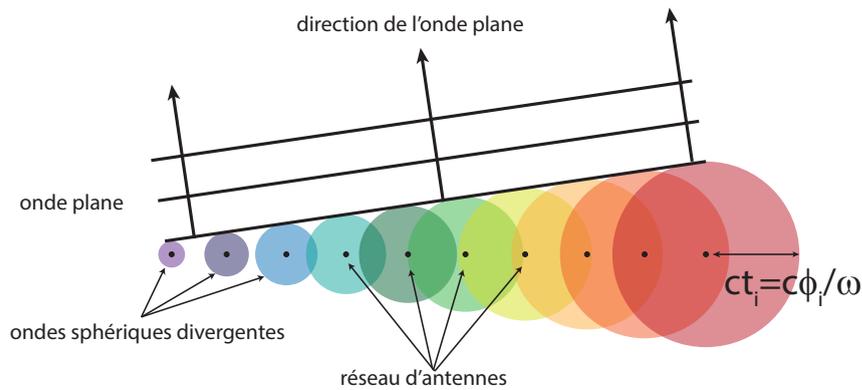


FIGURE 4.1: Principe du réseau d'antennes. Des antennes isotropes créent des ondes sphériques. La relation entre les déphasages ϕ_i de ces antennes crée une onde plane et détermine sa direction de propagation.

longtemps que les ondes radio. En effet, 10 ans après l'expérience de Marconi, Braun montre qu'ajuster les distances entre trois antennes qui émettent des ondes électromagnétiques permet d'augmenter l'émission dans une direction et de la diminuer dans d'autres [157, 158] : le réseau d'antennes était né. Marconi et Braun se partagèrent le prix Nobel de 1909 pour leur contribution au développement de la télégraphie sans fil, aujourd'hui appelée radio. Les réseaux d'antennes électromagnétiques sont à la base des technologies RADAR et MIMO, mais sont également utilisés en acoustique, où la plupart des sondes échographiques utilisent ce principe pour focaliser les ondes et imager les tissus biologiques.

Le principe du réseau d'antenne est simple et illustré sur la figure 4.1 : N antennes émettent un signal identique, mais chacune possède une phase particulière. Ce déphasage peut être statique (par exemple, dû à la disposition des antennes comme dans les premiers réseaux) ou contrôlable électroniquement comme pour les sondes échographiques ou les radars. Ce déphasage détermine la direction de l'onde émise, la taille de l'antenne fixe sa directivité, tandis que le nombre d'antennes donne le nombre et l'amplitude des lobes secondaires.

Les réseaux d'antennes permettent de modifier et de reconfigurer la direction d'émission d'une onde électromagnétique de manière uniquement électronique et d'alléger les structures en évitant d'embarquer des moteurs et des systèmes mécaniques. Ils trouvent logiquement de nombreuses applications dans les domaines des radars, ou des télécommunications. Leur principal inconvénient est qu'il faut déployer un système électronique complexe et cher pour les contrôler, surtout si on a besoin d'un gain très élevé, par exemple pour des télécommunications satellite.

4.2.1.2 Les réseaux de réflecteurs

Afin de palier aux problèmes des réseaux d'antennes, les réseaux de réflecteurs, appelés *reflect arrays* en anglais, furent proposés il y a plus de 50 ans [159]. Une seule et unique antenne excite un réseau de réflecteurs (figure 4.2), chacun d'eux imposant une phase différente à l'onde lors de la réflexion. La distribution de ces déphasages permet ainsi de diriger l'onde dans une direction, à la manière d'un réflecteur parabolique par exemple.

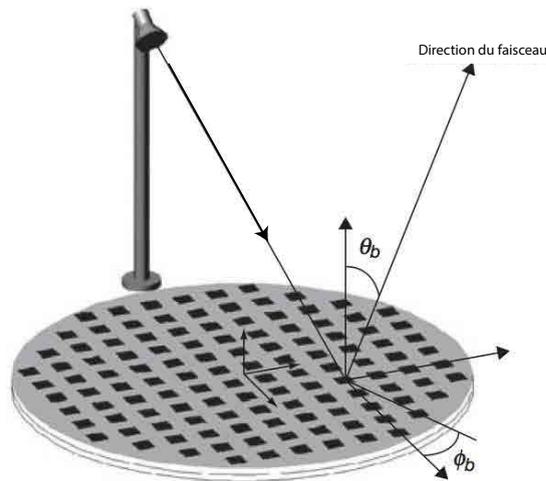


FIGURE 4.2: Les réseaux de réflecteurs réfléchissent passivement une onde dans une direction déterminée.

La solution proposée consiste à utiliser des petits éléments résonants comme réflecteurs. En effet, un résonateur réfléchit une onde incidente au voisinage de la résonance avec un déphasage, comme l'illustre la figure 4.3. À une fréquence inférieure à la résonance, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente. Au contraire à haute fréquence, le résonateur est en opposition de phase avec l'onde incidente (figure 4.3 (a)) et réemet une onde réfléchie en opposition de phase avec ce dernier : le déphasage total de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente est donc de $2 \times \pi$ (figure 4.3 (a)). Entre ces deux extrêmes, la phase varie de manière continue, ce qui permet d'imposer le déphasage voulu à condition de concevoir précisément le résonateur. Modifier les fréquences de résonance des éléments du réflecteur permet d'adapter leur déphasage sur les différents éléments et ainsi de contrôler la direction de propagation de l'onde réfléchie. Les fréquences de résonance sont déterminées et réglées via un simple paramètre géométrique, en général la dimension du résonateur.

Ces réseaux de réflecteurs sont peu chers et faciles à fabriquer, généralement à la manière de circuits imprimés. Les déphasages imposés par les éléments peuvent

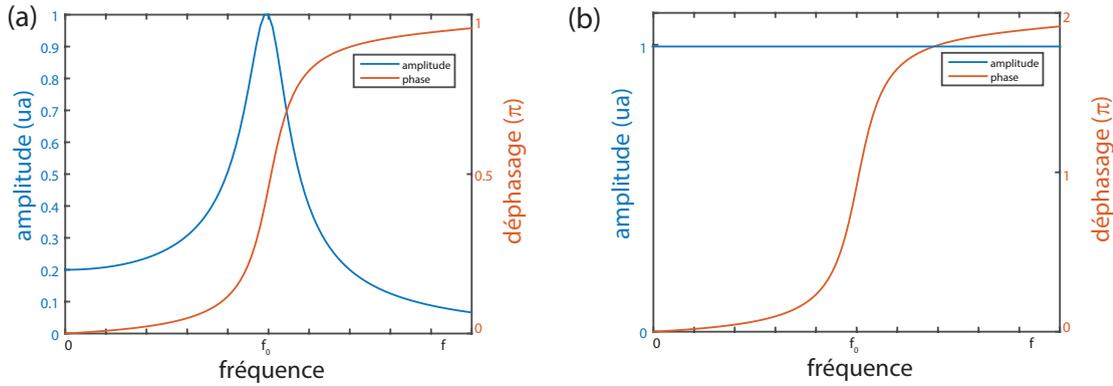


FIGURE 4.3: Amplitude et déphasage (a) d'un résonateur et (b) de l'onde réfléchie aux fréquences proches de la fréquence de résonance.

être précisément adaptés aux besoins et applications. Ils sont de plus purement passifs ce qui limite la consommation d'énergie, et facilement configurables voire électroniquement reconfigurables depuis quelques années. Ils sont très utilisés pour des applications en espace libre nécessitant des gains élevés, essentiellement en communications satellite et dans les systèmes radars. Ce sont les ancêtres des métasurfaces.

4.2.1.3 Les métasurfaces

Les métasurfaces sont des métamatériaux bidimensionnels, c'est-à-dire des matériaux artificiels structurés sur une surface à des échelles plus petites que la longueur d'onde. Par exemple la figure 4.4 montre une métasurface utilisée dans l'infrarouge (pour des longueurs d'onde comprises entre 5 et 10 μm) pour imposer un gradient de déphasage à l'interface. Ceci est utile, par exemple pour transmettre l'onde dans une direction particulière ou pour créer des vortex optiques [160]. Ces dernières années, un grand nombre de métasurfaces ont été inventées pour des longueurs d'onde allant de l'optique aux ondes radio, ainsi qu'en acoustique. Certaines sont même reconfigurables électroniquement [161]. Comparées aux réseaux de réflecteurs, les métasurfaces présentent l'avantage de pouvoir disposer de plus d'éléments sur une longueur d'onde, ce qui apporte plus de degrés de liberté comme la polarisation, une bande passante plus large, etc. Nous pourrions ainsi nous en inspirer pour réaliser un SMM.

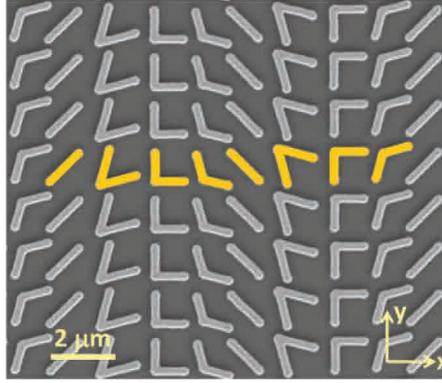


FIGURE 4.4: Image obtenue au microscope électronique (SEM) d'une métasurface créant un gradient de phase à l'interface. La cellule unité est en jaune. Image reproduite de [160].

4.2.1.4 Des réseaux de réflecteurs aux modulateurs spatiaux de micro-ondes : de l'espace libre aux milieux complexes

Les réseaux de réflecteurs sont conçus pour des applications en espace libre comme les communications par satellite. Il est donc nécessaire de contrôler précisément le déphasage imposé par tous les réflecteurs afin d'obtenir le gain le plus élevé possible. La distribution de la taille des résonateurs, qui influe sur leur fréquence de résonance et donc sur le déphasage imposé à une onde, reste néanmoins relativement simple et continue. Par exemple, il suffit d'appliquer un gradient de phase suivant un axe pour réfléchir une onde plane (qui a donc une phase homogène dans la direction transverse) incidente dans une direction bien déterminée. Au contraire, nous avons vu que les champs en milieux complexes varient sur des dimensions déterminées par la longueur de cohérence, qui représente la distance caractéristique sur laquelle le champ ondulatoire change de signe. Mis à part pour les milieux structurés à l'échelle sub-longueur d'onde (métamatériaux, fractales...), cette longueur de cohérence est supérieure ou égale à $\lambda/2$. En d'autres termes, on ne peut disposer que d'un degré de liberté spatial tous les $\lambda/2$. Au delà de cette densité de sources ou de réflecteurs, on introduit des corrélations entre les sources, et le nombre de degré de liberté spatial n'est plus linéaire avec le nombre d'éléments. L'optimum en terme d'efficacité, simplicité et coût consiste donc à disposer un élément tous les $\lambda/2$.

De plus, pour pouvoir contrôler un champ et, par exemple, le focaliser à un endroit donné, il faut synchroniser les différentes ondes à un endroit donné. Cela implique que les ondes provenant des différentes sources doivent idéalement avoir la même phase à cet endroit. Cependant, leur imposer de se sommer avec le même signe est déjà suffisant, en partie parce que cela évite toute interférence destructive. Évidemment, disposer de plus d'états de phase possibles permettrait

d'améliorer les résultats par rapport à un système binaire, mais la conception serait plus compliquée et coûteuse.

Ainsi l'idéal en terme d'efficacité, de coût, et de simplicité consiste à disposer d'éléments tous les $\lambda/2$, et qui peuvent réfléchir une onde avec un coefficient de réflexion de $+1$ ou de -1 .

Afin de mettre en évidence les éventuels gains en terme d'application aux télécommunications, nous avons conçu un SMM fonctionnant dans la bande WIFI, au voisinage de 2,5 GHz. À cette fréquence, la longueur d'onde correspondante est d'environ 12 cm. En plus de fonctionner aux fréquences WIFI et d'être reconfigurable, le SMM devait être simple à fabriquer et peu cher. Nadège Kaïna a fourni un important travail pour mesurer et étudier cette cellule unité, détaillée dans *Optics Express* [155].

Ce modulateur n'est pas réellement une métasurface puisqu'il n'est pas structuré à l'échelle sub-longueur d'onde. De plus la fabrication d'un modulateur binaire permet d'être moins sensible aux défauts de fabrication. Cependant, l'évolution de ce prototype sera vraisemblablement une métasurface pour justement disposer de plus de degrés de liberté dans le contrôle des micro-ondes, avec une plus grande densité d'éléments, plus d'états de phase possibles et contrôlant les différentes polarisations.

4.2.2 Conception d'un modulateur spatial de micro-ondes

Nous avons évoqué les principes généraux qui nous permettront d'utiliser un SMM : le déphasage imposé par ses éléments aux ondes réfléchies permettra de les faire interférer constructivement à un endroit ou dans une direction donnée, à la manière des réseaux de réflecteurs. Nous avons également vu que des éléments résonants permettent de contrôler le déphasage imposé à l'onde réfléchie. Dans ce qui suit, nous détaillons le principe et les propriétés de la cellule unité, puis du SMM complet de 102 éléments, ainsi que de l'algorithme d'optimisation de la transmission.

4.2.2.1 Principe de la cellule unité

Afin de fabriquer un élément qui peut induire un déphasage configurable à une onde, nous allons utiliser le phénomène des résonances ainsi que le couplage de résonateurs. Ce dernier effet est très général et s'applique aussi bien aux

résonateurs mécaniques (de type masse-ressort, pendules...), électroniques ou ondulatoires. Nous avons déjà mentionné qu'une onde incidente sur un résonateur peut être déphasée suivant les fréquences respectives de l'onde incidente et de la résonance f_1 . Ainsi une onde de fréquence f_0 inférieure à la fréquence du résonateur f_1 n'est pas ou peu déphasée. À la résonance, elle subit un déphasage de π , et de 2π à très haute fréquence. Nous approchons maintenant un deuxième résonateur de fréquence de résonance f_2 , du premier, comme sur la figure 4.5 (a). Si la fréquence de résonance f_2 est éloignée de la première, f_1 , les deux résonateurs ne se voient pas (figure 4.5 (b)), et les fréquences de résonance restent inchangées (figure 4.5 (c)). Ainsi, une onde incidente à une fréquence proche de f_1 est déphasée d'environ π , par le résonateur. À ce déphasage s'ajoute le déphasage à la réflexion sur le plan de masse. Le déphasage total est nul : c'est l'état 0.

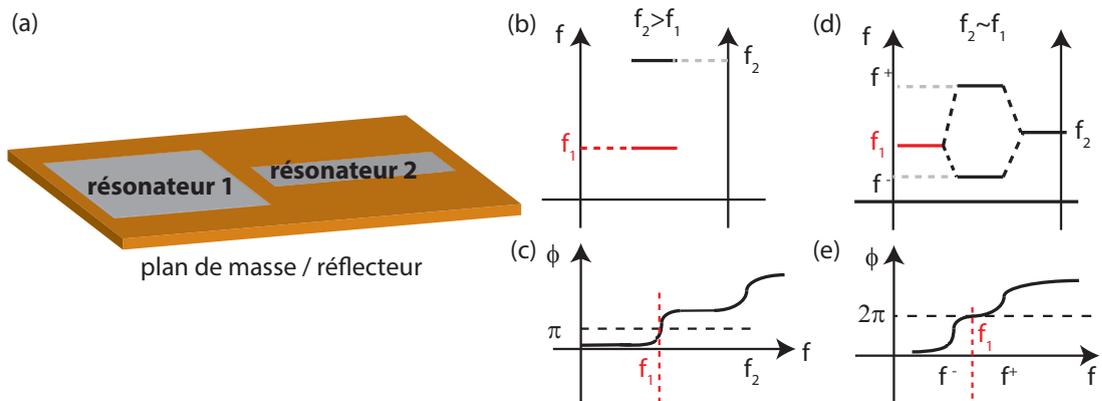


FIGURE 4.5: Couplage de résonance. (a) Deux résonateurs, de fréquences de résonance f_1 et f_2 sont placés au dessus d'un plan de masse. (b) Lorsque $f_2 \gg f_1$, les résonateurs ne se voient pas. (c) Cela se traduit par deux sauts de phase aux fréquences f_1 et f_2 . (d) Lorsque $f_2 \approx f_1$, les résonances se couplent et créent deux modes aux fréquences f^- et f^+ . (e) Par conséquent les deux sauts de phase sont proches de f_1 .

Considérons maintenant le cas pour lequel nous parvenons à diminuer la fréquence du résonateur 2, de telle manière que $f_2 \approx f_1$. Dans ces conditions les deux résonateurs se voient et le couplage des résonances à f_1 et f_2 crée deux nouvelles résonances, la première à une fréquence inférieure à f_1 , que nous dénommons f^- , et une supérieure à f_2 , f^+ (figure 4.5 (d)). À $f_0 \approx f_1$, il n'y a pas de résonance, et le déphasage imposé à l'onde est de 2π soit 0 (figure 4.5 (e)). À ce déphasage s'ajoute celui de la réflexion sur le plan de masse. Le déphasage total est de π : c'est l'état π .

Nous avons ainsi conçu deux états possibles, un dans lequel un résonateur impose un déphasage, que nous appelons l'état π , et un autre, l'état 0 dans lequel ce résonateur se couple à un deuxième résonateur. Un phénomène de levée de dégénérescence décale les résonances à une fréquence supérieure et une fréquence

inférieure de la fréquence initiale pour aboutir à un état non-résonant à la fréquence de travail f_0 . Ces deux états réfléchissent une onde avec un déphasage relatif de π , nécessaire pour pouvoir faire interférer localement les ondes de manière cohérente. Nous décidons de contrôler la fréquence du deuxième résonateur parasite, afin de le rendre résonant, ou non résonant, autour de notre fréquence de travail f_0 , et de passer d'un état à l'autre. Nous détaillons ceci dans la partie suivante.

4.2.2.2 Réalisation pratique

La cellule unité du modulateur est schématisée et photographiée sur la figure 4.6. Elle est imprimée en cuivre sur PCB (*printed circuit board*) avec un plan de masse en cuivre. Une épaisseur de diélectrique de 1,5 mm sépare le résonateur du plan de masse. Ce dernier permet de réfléchir l'onde qui ne passe pas par le résonateur. Le diélectrique utilisé est de la catégorie faible dissipation (NELTEC, $\tan \delta = 3 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 3,4$), pour minimiser la dissipation et optimiser le coefficient de réflexion. La cellule unité du modulateur est constituée d'un résonateur rectangulaire plan (en anglais un *patch resonator*), schématisé en noir sur la figure 4.6 (b), et d'un résonateur parasite, en rouge, dont la fréquence de résonance peut être contrôlée. Un champ électrique incident excite un courant résonant à l'interface métal-diélectrique, qui concentre le champ entre les deux plaques de cuivre, dans le PCB. Cet interstice de diélectrique entre deux plaques de cuivre constitue une cavité pour le champ magnétique. Notons également que le résonateur parasite est très fin et ne rayonne presque pas : son seul rôle est de se coupler, ou pas, au résonateur principal.

Pour contrôler la fréquence de résonance du résonateur parasite, nous pouvons utiliser soit une varactance, c'est-à-dire un condensateur de capacité variable avec la tension appliquée continue, soit une diode PIN. Comme nous nous contentons de concevoir un modulateur binaire, nous choisissons la deuxième solution. Une diode PIN, pour *Positive Intrinsic Negative* (dans notre cas une diode Infineon BAR 63-02V) est une diode constituée d'une zone non dopée, dite intrinsèque. Lorsqu'elle est polarisée, cette diode a une très faible impédance : elle se comporte comme un interrupteur fermé. Au contraire, quand elle est polarisée dans l'autre sens, une diode PIN a une impédance très élevée et une capacité très faible : elle est bloquée. En d'autres termes, une diode PIN se comporte comme un simple interrupteur pour les micro-ondes, qui peut être allumé ou éteint en lui imposant, ou non, une tension continue supérieure à 2,5 V.

Nous insérons cette diode au milieu du résonateur parasite (figure 4.6 (b)), et branchons un générateur et la masse de part et d'autre. Lorsque le générateur (en pratique un Arduino Mega 2560) impose +5V, la diode est passante et les

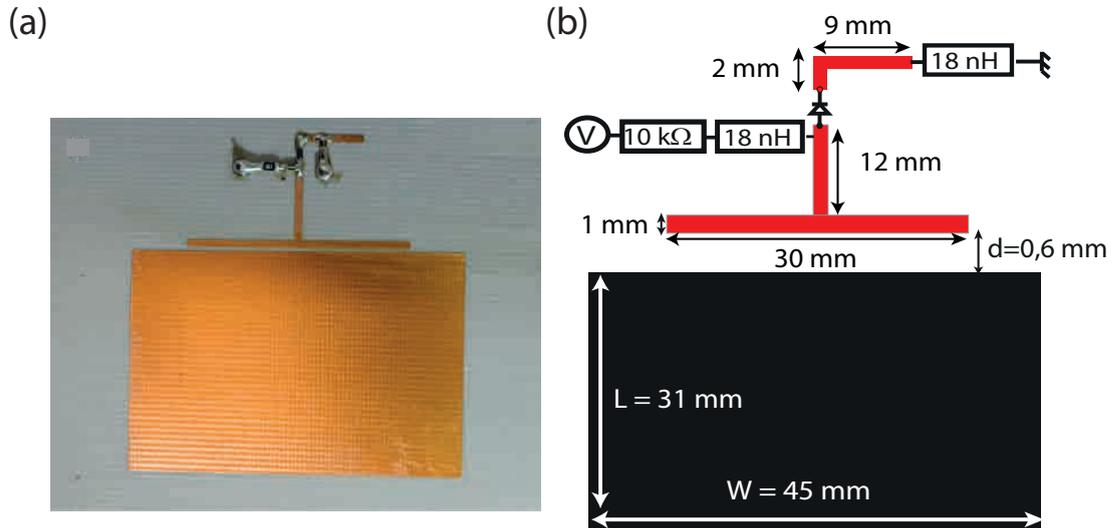


FIGURE 4.6: Cellule unité du modulateur spatial de micro-ondes. (a) En photographie. (b) Schéma.

micro-ondes voient la totalité du résonateur, qui possède alors une fréquence de résonance proche de celle du résonateur principal à 2,47 GHz. Il y a alors hybridation des deux résonances, comme expliqué dans la partie précédente, et l'ensemble ne présente pas de résonance à la fréquence de travail, $f_0 \approx 2,47$ GHz. Une onde incidente est donc simplement réfléchiée par le plan de masse, ce qui correspond à un déphasage de π , ou un coefficient de réflexion de -1 . Au contraire, lorsque la tension imposée est nulle, la diode est bloquante et les micro-ondes ne voient que la moitié du résonateur parasite. La fréquence de résonance de ce dernier est beaucoup plus élevée, et il n'y a pas d'hybridation. Une onde incidente ne voit donc que le résonateur principal, qui est résonant à 2,47 GHz. Cette onde se retrouve est donc déphasée de $\pi/2$, puis se réfléchit sur le plan de masse, ce qui correspond à un déphasage de π , avant d'être une nouvelle fois déphasée de $\pi/2$ par le résonateur. Le déphasage total est alors de 2π soit 0, et le coefficient de réflexion est de 1.

Les bobines de 18 nH visibles sur la figure 4.6 (b) servent à découpler les résonateurs micro-ondes de notre électronique à courant continu. Ces bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts pour un courant périodique, mais comme des interrupteurs fermés pour un courant continu. Sans elles, les micro-ondes se dissiperaient dans le circuit électronique et cela introduirait une source supplémentaire de dissipation. La résistance en série de 10 k Ω sert à diminuer le courant et donc la consommation de la cellule unité ($P_{diss} = U^2/R$). La distance d définie sur la figure 4.6 (b) permet d'ajuster le couplage entre les deux résonateurs.

4.2.2.3 Mesures en guide d'onde des propriétés de réflexion

Afin de nous assurer du bon fonctionnement de la cellule élémentaire, nous avons effectué des mesures en réflexion grâce à un guide d'onde d'un mètre de long, monomode au voisinage de 2,47 GHz (ATM 430-120A-1m-2-2, 1,7-2,6 GHz). Ce montage est représenté sur la figure 4.7 (a). Une antenne adaptée en impédance au guide d'onde crée une onde polarisée verticalement. Notons que lorsque l'élément est tourné de 90° , nous ne remarquons plus de résonance : seul le coefficient de réflexion d'une polarisation est contrôlé par l'élément.

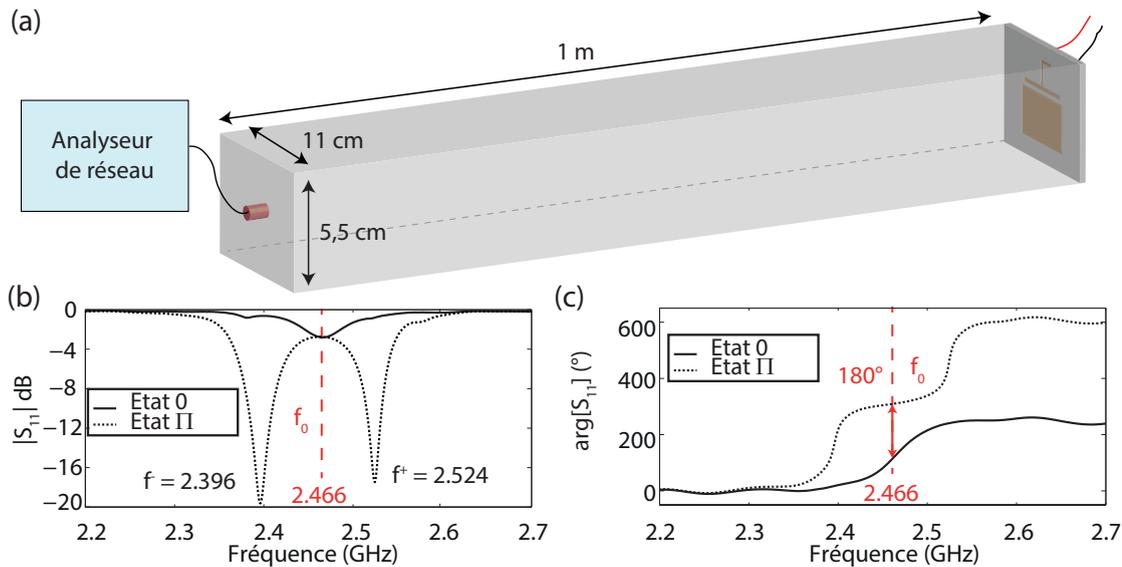


FIGURE 4.7: Mesure des propriétés de réflexion ($S_{11} = r$). (a) Montage expérimental. L'analyseur est fortement couplé au guide d'onde monomode d'un mètre de long et de 5,5 cm par 11 cm de section. (b) Module des coefficients de réflexion des deux états. (c) Phase des coefficients de réflexion.

La figure 4.7 (b) montre l'amplitude (en dB) de la réflexion de la cellule unité. Nous distinguons une résonance à $f_1 = 2,466$ GHz à l'état 0, et deux résonances dans l'état π , une inférieure à f_0 à $f^- = 2,396$ GHz, et une à une fréquence supérieure à $f^+ = 2,524$ GHz. À chaque résonance, le coefficient de réflexion diminue car une partie de l'énergie est dissipée. Cela importe peu à f^+ ou f^- , mais réduit le coefficient de réflexion à f_0 de 3 dB. Notons que nous pourrions réduire cette dissipation en utilisant un substrat absorbant moins d'énergie, et en optimisant la conception et la géométrie des résonateurs ainsi que l'électronique. La figure 4.7 (c) montre la phase relative du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence. L'information essentielle à en retirer est que nous avons un saut de phase de π entre les deux états à la fréquence $f_0 = 2,466$ GHz. À la phase relative tracée sur la figure, il faut ajouter le déphasage de π causé par la réflexion. De plus, les deux

états réfléchissent la même énergie. Passer de l'un à l'autre nous assure uniquement le changement du signe du coefficient de réflexion.

Cette cellule remplit donc bien son rôle et permet de réfléchir une onde avec un coefficient de $+1$ ou de -1 , à une légère atténuation près, et dans une bande passante voisine de la fréquence $f_0=2,47$ GHz. Nous pouvons sélectionner un état ou l'autre simplement grâce à la tension imposée à la diode. Nous avons ensuite assemblé une centaine de ces éléments pour faire un SMM.

4.2.2.4 Le modulateur

Fort de ces résultats, Nadège Kaïna et moi avons fabriqué un modulateur constitué d'un réseau de 102 éléments. La période de ce réseau est de 6 cm soit une demi-longueur d'onde. En pratique, le modulateur se décompose en deux panneaux, respectivement de 48 et 54 éléments. La figure 4.8 présente la photographie d'un de ces deux panneaux.

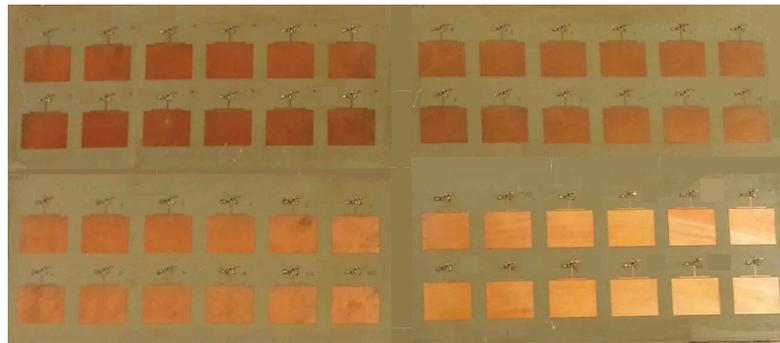


FIGURE 4.8: Photographie du panneau du modulateur de micro-ondes de 48 éléments.

Chaque cellule unité est pilotée numériquement par un *Arduino Mega*. Ce dernier est un petit microcontrôleur bon marché qui peut imposer une tension de 0 ou 5 V à 52 canaux indépendants, avec un faible courant. Nous utilisons donc deux *Arduino* interfacés avec un ordinateur via *Matlab* pour contrôler l'intégralité des éléments de notre SMM.

4.2.2.5 Statistique du modulateur de 102 éléments

Le comportement de ces 102 éléments est un peu différent de celui de chaque cellule unité. En effet, ceux-ci ne sont pas tous strictement identiques. À cause de petits défauts de fabrication, qui apparaissent lors de l'impression sur le PCB ou lors de la soudure des éléments électroniques, qui eux-mêmes ne sont identiques qu'avec une certaine précision, ou à cause d'effets spatiaux comme des

effets de bord, les résonances détaillées précédemment n'ont pas toutes les mêmes fréquences. La figure 4.9 (a) présente l'histogramme des fréquences de résonances, mesurées en champ proche, pour les deux états 0 et π des 102 résonateurs. Les résonances des deux états distincts ne se recoupent presque pas, ce qui est important pour avoir 102 éléments qui peuvent être simultanément dans l'état 0 ou dans l'état π à la fréquence $f_0 = 2,466$ GHz. En revanche, cet histogramme met en évidence une dispersion sur les fréquences de résonance. Cette dispersion a néanmoins un effet bénéfique : elle permet de moduler le coefficient de réflexion sur une bande passante un peu plus grande que le facteur de qualité des résonateurs.

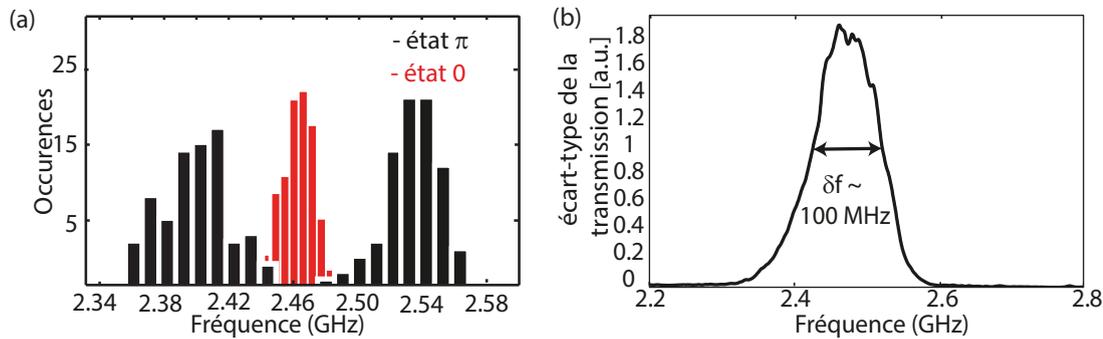


FIGURE 4.9: Statistiques de la réflexion du modulateur de 102 éléments. (a) Histogramme des fréquences de résonances. (b) Déviation standard de la transmission sur 11 000 configurations du SMM (sur les 2^{102} possibles).

Pour évaluer la bande passante dans laquelle le SMM est efficace, nous réalisons l'expérience suivante : nous mesurons dans une pièce (environ 10 m^2) 11 000 fois la transmission entre deux antennes dont une est placée en face du SMM. À chaque mesure, l'état des éléments du modulateur est modifié aléatoirement. La figure 4.9 (b), présente l'écart-type de ces mesures de transmission. Cet écart-type représente donc l'efficacité du SMM. En effet, les fréquences pour lesquelles les coefficients de réflexion ne sont pas modifiés n'induisent aucune variation sur la transmission. Dans ce cas, la transmission est constante quel que soit la configuration imposée au SMM, et l'écart-type mesuré est nul. Au contraire, les fréquences pour lesquelles un nombre élevé d'éléments peuvent imposer deux valeurs bien opposées du coefficient de réflexion, créent des transmissions distinctes pour des configurations décorréées. L'écart-type de la transmission est alors maximal. Comme le montre la figure 4.9 (b), celui-ci est non nul sur une bande passante d'environ 200 MHz entre 2,35 et 2,55 GHz, et présente une allure gaussienne de largeur à mi-hauteur de 100 MHz. Ceci démontre que le SMM peut efficacement modifier la transmission sur une bande passante de 100 MHz, centrée sur 2,47 GHz, ce qui est largement suffisant pour des applications de télécommunication. De plus, le SMM démontre une efficacité optimale, à 2,47 GHz.

Nous avons donc conçu et fabriqué un SMM de 102 éléments contrôlable par ordinateur. Nous allons maintenant présenter l'algorithme permettant d'optimiser, avec notre modulateur, la transmission entre deux antennes placées dans la même pièce que ce dernier.

4.2.2.6 L'algorithme d'optimisation

Notre modulateur possède 102 éléments binaires, soit $2^{102} \approx 5 \times 10^{30}$ états possibles. Si nous pouvions en tester 1000 par secondes (ce qui est optimiste mais réalisable), il faudrait plus de 10^{20} années pour trouver la configuration optimale. En revanche, nous pouvons optimiser la transmission entre deux antennes en utilisant des algorithmes itératifs, comme ceux proposés initialement en optique pour des SLM par l'équipe d'Allard Mosk [40]. Cette configuration optimale peut être trouvée en un nombre d'itérations en général proportionnel au nombre d'éléments, et non plus exponentiel, soit en quelques centaines d'itérations seulement.

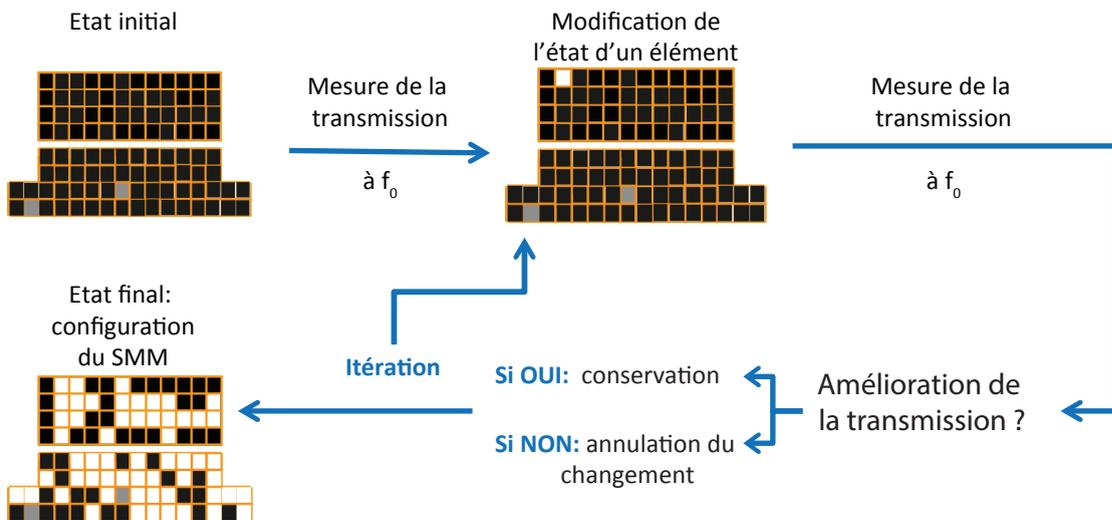


FIGURE 4.10: Description de l'algorithme itératif.

Dans un premier temps, et parce que notre équipement (un analyseur de réseau) s'affranchit bien du bruit, nous avons choisi d'implémenter l'algorithme itératif le plus simple possible, que nous avons représenté sur la figure 4.10 :

- En partant d'un état initial, parmi les 2^{102} possibles, l'algorithme mesure la transmission entre les deux antennes.
- L'algorithme modifie ensuite l'état du premier élément (qui est basculé de l'état 0 à l'état π par exemple).

- L'algorithme mesure une nouvelle fois la transmission. Si celle-ci a augmenté, nous conservons le changement précédent. Sinon, nous remettons l'élément dans son état initial.
- L'algorithme passe ensuite à l'élément suivant et recommence les étapes précédentes jusqu'à ce que tous les éléments aient été optimisés plusieurs fois.
- L'algorithme produit une configuration du SMM optimisée.

Cet algorithme a le mérite d'être simple et rapide, et c'est celui que nous avons choisi pour nos études. Pour de grands nombres d'éléments ou en cas d'un bruit élevé, il pourrait être avantageux d'utiliser des algorithmes modifiant à chaque étape la moitié des éléments [40], par exemple en les sélectionnant au hasard ou suivant une base de Hadamard. La plupart de ces algorithmes présentent cependant un défaut : la transmission sature à une valeur parfois très inférieure à celle d'un algorithme itératif élément par élément. Ce défaut n'est pas partagé par les algorithmes génétiques, également appelés évolutionnaires [162, 163, 164].

4.3 Expérience fondatrice

Nous possédons à présent tous les ingrédients nécessaires à la démonstration de notre approche : le modulateur spatial de micro-ondes, l'algorithme, et nous avons emprunté un bureau de l'Institut Langevin. Nous y avons réalisé trois séries de mesures. Dans la première, nous montrons que nous pouvons optimiser de près d'un ordre de grandeur la transmission entre deux antennes dont l'une est proche du SMM. Dans la deuxième série de mesures, nous avons montré que nous pouvons atténuer la transmission jusqu'au bruit ambiant. Enfin, nous avons montré que même quand les deux antennes sont hors de vue du SMM, ce dernier permet d'améliorer la transmission de manière sensible. Ces résultats ont été publiés dans *Scientific Reports* [156].

La salle où nous avons réalisé ces expériences est représentée sur la figure 4.11 et a des dimensions approximatives de 4 m de long par 2,5 m de large et 2,5 m de haut. Les fenêtres et la porte sont en partie blindées par du papier aluminium pour éviter que le passage de personnes dans le couloir ne perturbe les mesures. Le bureau central est également blindé par du papier aluminium pour minimiser les effets du banc de translation métallique, ainsi que pour empêcher que les deux antennes ne soient en ligne directe. Cette dernière propriété est très importante pour étudier l'optimisation de la transmission entre deux antennes dans une salle ou une cavité de bas facteur de qualité.

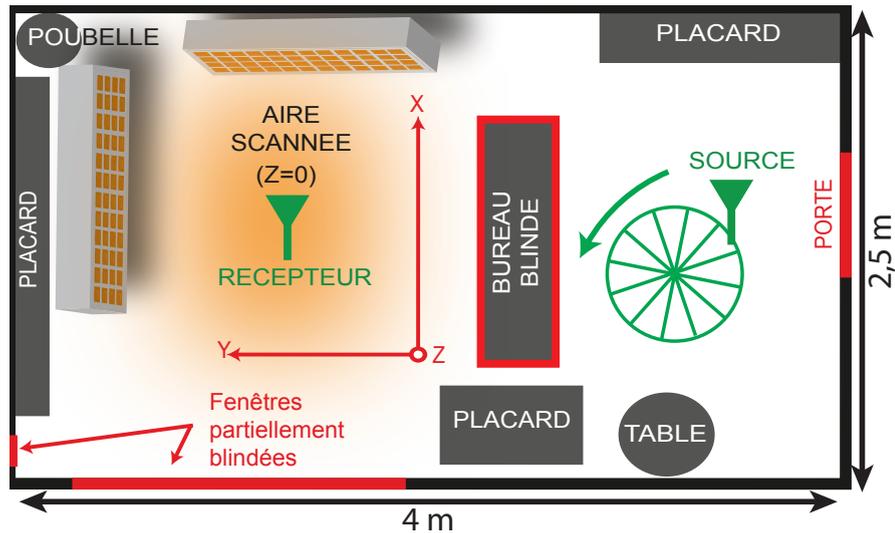


FIGURE 4.11: Schéma du bureau dans lequel s'effectuent les optimisations.

4.3.1 De l'intérêt des mesures statistiques

Nous travaillons dans un environnement désordonné et réverbérant. À une position donnée, le champ peut être élevé ou faible. Ainsi, il est relativement facile d'améliorer de plusieurs ordres de grandeur la transmission d'une antenne située à un zéro du champ. Au contraire, il est plus difficile de sensiblement optimiser la transmission d'une antenne située dès le début de l'expérience sur un maximum local du champ. Nous devons donc recourir à des mesures statistiques afin de définir une valeur moyenne du champ, ainsi qu'une valeur moyenne du gain que nous pouvons obtenir avec notre modulateur.

Nous cherchons donc à réaliser des mesures statistiquement indépendantes. Nous pourrions réaliser une mesure dans une pièce différente à chaque fois. Cependant, nous avons vu que dans un milieu réverbérant, le champ est décorrélé tous les $\lambda/2$: le plus simple est donc de déplacer une des deux antennes dans la pièce. Pour ce faire, nous plaçons l'antenne d'émission sur un bras d'environ 30 cm de long, mis en rotation par un moteur. L'antenne parcourt sur un tour une distance d'environ 30 demies longueur d'onde, ce qui nous fournit donc 30 mesures indépendantes.

Ainsi, dès que le moteur effectue une rotation de 12° , le champ créé par l'antenne dans la pièce est décorrélé de celui créé à la position précédente, ce qui nous permet de mener une nouvelle série de mesure statistiquement indépendante.

4.3.2 Dispositif expérimental

Le montage expérimental complet est présenté sur la figure 4.12. Un ordinateur interfacé avec Matlab pilote l'ensemble des périphériques de l'expérience, à savoir les deux Arduino Mega 2560 (qui contrôlent tous les éléments du SMM), l'analyseur de réseau, le banc de translation et le moteur rotatif. Les Arduinos utilisés sont des microcontrôleurs possédant chacun 52 canaux numériques indépendants et permettant d'imposer une tension de 0 ou 5 V.

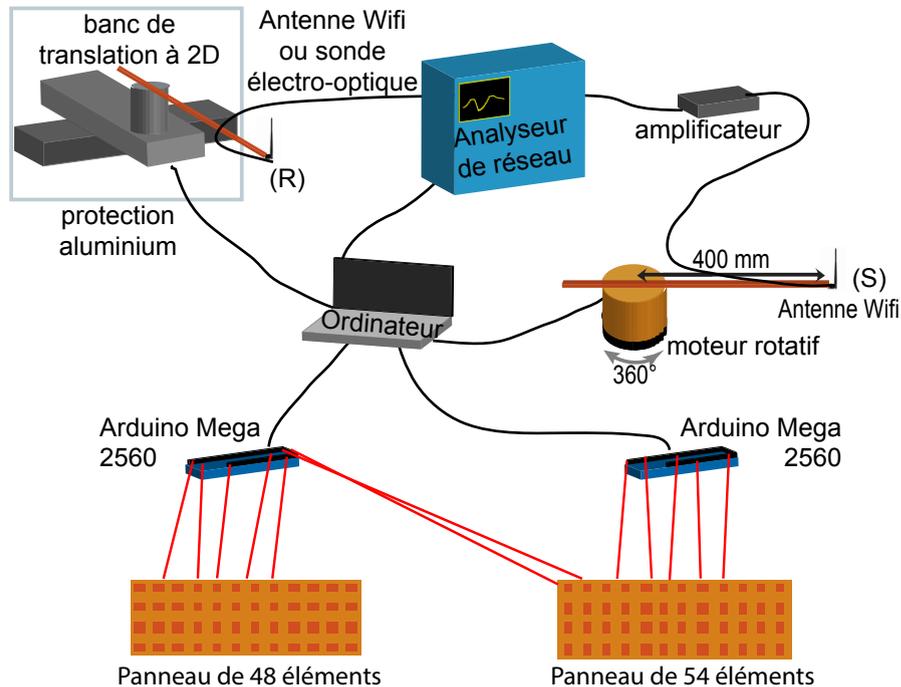


FIGURE 4.12: Montage expérimental complet.

L'analyseur de réseau vectoriel mesure le spectre de la transmission complexe entre les deux antennes, sur une bande passante autour de la fréquence optimisée $f_0 = 2,47$ GHz, et transmet cette information à l'ordinateur à chaque itération de l'optimisation. L'antenne source est placée sur un moteur rotatif, pour obtenir des mesures statistiquement indépendantes comme expliqué dans la partie précédente. En réception, nous utilisons soit une antenne WIFI (Antenne fouet, de type monopole), soit une sonde électro-optique (EFS-105, ENPROBE GmbH). Cette dernière est utilisée pour scanner le champ au voisinage du point focal. Cette sonde est de dimension restreinte (environ 5 mm), et fabriquée dans un diélectrique. Son intérêt est qu'elle ne perturbe pas le champ ondulatoire lorsqu'elle est déplacée dans la pièce, contrairement à une antenne WIFI métallique. Comme sa taille est réduite, cette antenne (qui ne peut servir qu'en réception) est très inefficace. Nous rajoutons donc un amplificateur de micro-ondes en émission (Amplical AMP0.7G4.2.30.29).

La sonde électro-optique est montée sur un bras en plastique déplacé par un banc de translation à deux dimensions. Ce dernier est disposé sous le bureau, lui-même blindé par de l'aluminium afin de minimiser les effets du déplacement sur les modes de la pièce lorsque nous scannons le champ à proximité de l'antenne optimisée.

4.3.3 Amélioration de la transmission aux fréquences WIFI

Pour la première expérience, les conditions sont exactement celles décrites par la figure 4.11. L'antenne de réception est placée à 1 m de chaque module du SMM. Les deux antennes utilisées sont des antennes WIFI. Nous mesurons la transmission t entre les deux antennes et effectuons les étapes de l'algorithme en optimisant le module de la transmission $|t|$ à la fréquence $f_0 = 2,47$ GHz. Nous définissons l'intensité comme $I = |t|^2$, le gain comme $\eta = I/I_{ini}$. Les moyennes portent sur les 30 mesures réalisées pour les différentes positions de la source.

4.3.3.1 Optimisation de la transmission à une fréquence

La figure 4.13 (a) présente un résultat d'optimisation en fonction de l'itération de l'algorithme (elle-même proportionnelle au temps). Nous remarquons que le gain (ou la transmission) augmente régulièrement jusqu'à saturer à environ 8,5 dB. Cette saturation intervient quand tous les éléments du modulateur ont été optimisés, c'est-à-dire pour 102 itérations de l'algorithme.

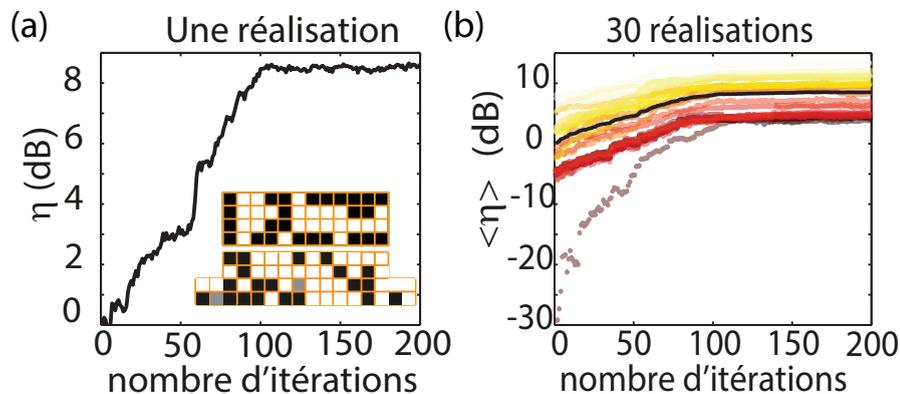


FIGURE 4.13: Optimisation d'un signal WIFI. (a) Amélioration du signal en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour une optimisation. (b) Idem que (a) pour les 30 mesures. Tous les gains sont normalisés par la transmission moyenne initiale en énergie. La courbe noire représente le gain moyen.

La figure 4.13 (b) présente le gain η (en dB) des 30 mesures. De la même manière que pour la figure 4.13 (a), nous remarquons qu'en moyenne (la courbe noire) le gain sature quand les 102 éléments ont été optimisés. Les gains les plus élevés sont atteints pour les valeurs de la transmission initiale les plus faibles, pour atteindre à la fin de l'optimisation, des valeurs réparties autour de la valeur moyenne. Le gain moyen est de 8,5 dB (soit un facteur $\times 7,5$).

4.3.3.2 Effet de l'optimisation sur le spectre de la transmission

Regardons à présent l'effet de l'optimisation sur la transmission aux fréquences proches de la fréquence optimisée.

La figure 4.14 (a) montre les spectres initial (en noir) et final (en rouge) correspondants à cette expérience. Cette figure met en évidence l'amélioration de la transmission au voisinage de 2,47 GHz, sur une bande passante égale à 50 MHz. Cela correspond à la fréquence de cohérence du bureau qui se comporte comme une cavité de faible facteur de qualité ($Q \approx 50$). En dehors de cette bande passante, le spectre n'est pas modifié par l'optimisation. Ainsi, ce n'est pas la bande passante du SMM, précédemment évaluée à 100 MHz qui limite les fréquences optimisées, mais la complexité du milieu de propagation.

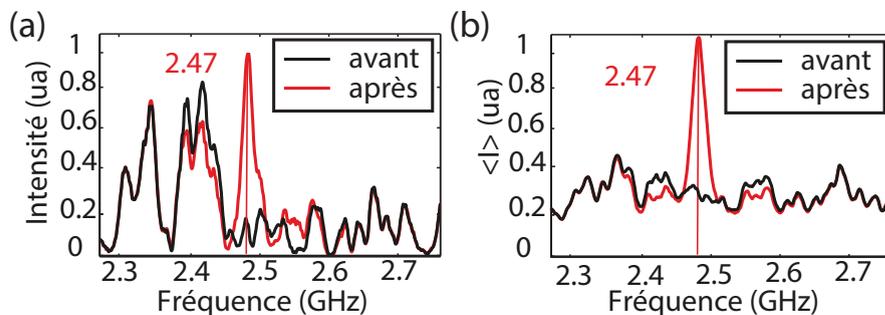


FIGURE 4.14: Effet de l'optimisation sur la transmission. (a) Spectre de transmission avant et après l'optimisation. (b) Idem que (a) mais moyenné sur les 30 mesures.

La figure 4.14 (b) présente la moyenne du spectre, initial et final. La transmission est sensiblement améliorée à 2,47 GHz, ainsi que sur les fréquences avoisinantes sur une bande passante là aussi égale à la fréquence de corrélation (soit environ 50 MHz). En dehors de cette bande de fréquences au sein de laquelle la transmission est améliorée, les spectres sont identiques, et relativement plats. Ceci indique d'une part, que l'optimisation fonctionne sur une bande passante limitée par la fréquence de corrélation, car la bande passante du SMM est plus large et environ égale à 100 MHz d'après la figure 4.9 (b); et d'autre part que la moyenne sur les 30 mesures est bien effectuée grâce à la rotation de l'antenne d'émission,

qui change efficacement les canaux de transmission entre les deux antennes, et moyenne ainsi le spectre de transmission.

4.3.3.3 Influence de la modulation spatiale sur le champ électromagnétique

Les résultats précédents permettent de nous faire une idée de l'efficacité de l'optimisation de la transmission entre deux antennes sur la bande passante au voisinage de la fréquence optimisée. Nous pouvons également nous demander comment se comporte spatialement le champ avant et après l'optimisation. Nous modifions donc légèrement le montage expérimental en remplaçant l'antenne WIFI en réception par une sonde électro-optique qui convertit un signal micro-onde mesuré par un petit dipôle en un signal optique et transmis par fibre optique à l'analyseur de réseau. Cette sonde, entièrement en diélectrique, perturbe le champ de manière négligeable quand elle est déplacée. Nous l'accrochons à un bras en plastique (transparent aux micro-ondes) déplacé par un banc de translation à 2 dimensions, caché sous le bureau et blindé par du papier aluminium. Ainsi déplacer la sonde perturbe peu le champ dans la pièce. Comme la sonde est peu sensible (car très petite, environ 5 mm de long), nous ajoutons un amplificateur de micro-ondes entre l'analyseur de réseau et l'antenne WIFI d'émission. Nous répétons les optimisations précédentes en mesurant le champ de transmission avant et après chaque optimisation sur une surface de 20 cm par 20 cm autour du point où la transmission est optimisée. Nous utilisons la sonde électro-optique à la fois pour cartographier le champ avant et après l'optimisation, mais aussi pour réaliser ladite optimisation. En pratique la transmission mesurée est proportionnelle au champ polarisé suivant la direction hors plan z .

Les résultats sont présentés sur la figure 4.15. Les sous-figures (a) et (b) présentent l'intensité avant et après une optimisation. Les résultats sont normalisés par le maximum du signal optimisé. Le centre de la figure se situe sur un minimum du champ, une zone sombre. Notons l'aspect aléatoire du champ avant, et sa ressemblance avec une figure de *speckle*. Après l'optimisation, nous pouvons voir que la transmission (et donc le champ) a été améliorée sur une tache focale de la taille d'une demi-longueur d'onde, soit d'un grain de *speckle*. Juste à côté du point focal, le *speckle* a été modifié. Nous pouvons également remarquer que la tache focale est isotrope (de géométrie quasi-circulaire), alors que le modulateur est situé en haut et à droite des champs représentés. Ceci est dû à la réverbération dans la pièce : ce ne sont pas seulement les ondes venant du modulateur qui sont optimisées, mais les modes de la cavité qui sont délocalisés sur toute la pièce.

Les figures 4.15 (c) et (d) présentent les intensités normalisées moyennées avant et après l'optimisation. Les effets décrits précédemment pour une optimisation restent valables ici : la transmission a été augmentée en moyenne sur un grain de *speckle*. En dehors de cette tache focale, la valeur moyenne du champ est identique avant et après l'optimisation. Nous en concluons qu'en dehors de la tache focale, le champ n'est pas modifié statistiquement : l'optimisation n'a pas d'effet sur l'énergie dans le reste de la pièce. En effet le nombre total de grains de *speckle* est égal au volume de la pièce divisé par le volume $v = (\lambda/2)^3$ d'un grain de *speckle* soit environ $25/0.06^3 \approx 10^5$. La tache focale a une intensité environ égale à 5 à 10 fois la valeur moyenne du champ. Ceci signifie que nous avons diminué l'énergie des 10^5 grains de *speckle* de 5 fois l'énergie moyenne d'un grain, soit une diminution de 5 pour cent mille, ce qui est négligeable.

Ces mesures prouvent que nous pouvons augmenter la transmission d'un signal WIFI en utilisant un modulateur spatial de micro-onde dans une pièce. Le gain moyen d'un facteur 7,5 est impressionnant si nous considérons la taille restreinte du SMM utilisé comparé à la surface totale de la pièce : $0,36 \text{ m}^2$ pour environ 50 m^2 de parois. Nous ne contrôlons donc seulement que 0,7% de la surface totale de la pièce. De plus, l'optimisation proposée peut s'adapter à un grand nombre de conditions. Pour améliorer un signal de télécommunications, il serait

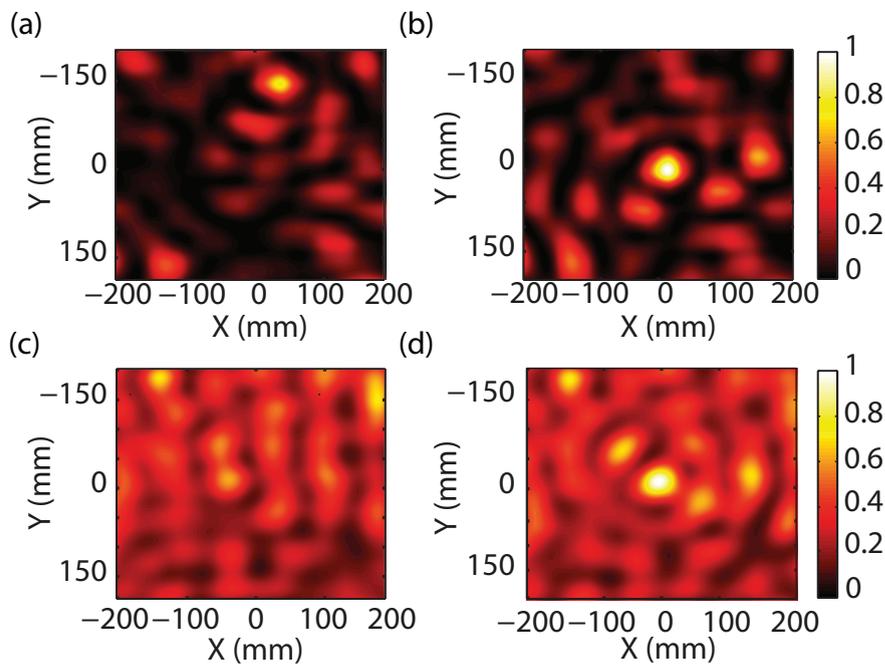


FIGURE 4.15: Intensité du signal mesurée dans le plan horizontal du récepteur. (a) Avant une maximisation. (b) Après. (c,d) Idem que (a,b) mais moyenné sur les 30 mesures. Les résultats sont normalisés par le maximum du signal optimisé (a,b) et par le maximum de la moyenne des intensités (c,d).

plus intéressant de minimiser le taux d'erreur binaire (*binary error rate*), qui limite en pratique le débit d'une communication. Nous pouvons également faire converger la transmission vers n'importe quel point du plan complexe z_0 , et à condition de pouvoir mesurer la phase de la transmission (il faut alors réaliser une optimisation cohérente), en minimisant le module $|t - z_0|$. Dans la partie suivante, nous la faisons converger vers l'origine $z_0 = 0$, afin de minimiser l'intensité des ondes WIFI en un point de l'espace.

4.3.4 Annulation d'un signal

Si nous pouvons maximiser le champ électromagnétique en un point de l'espace, en modifiant légèrement l'algorithme utilisé, nous pouvons également le minimiser. À chaque itération de l'algorithme, il suffit de conserver l'état de l'élément qui minimise la transmission.

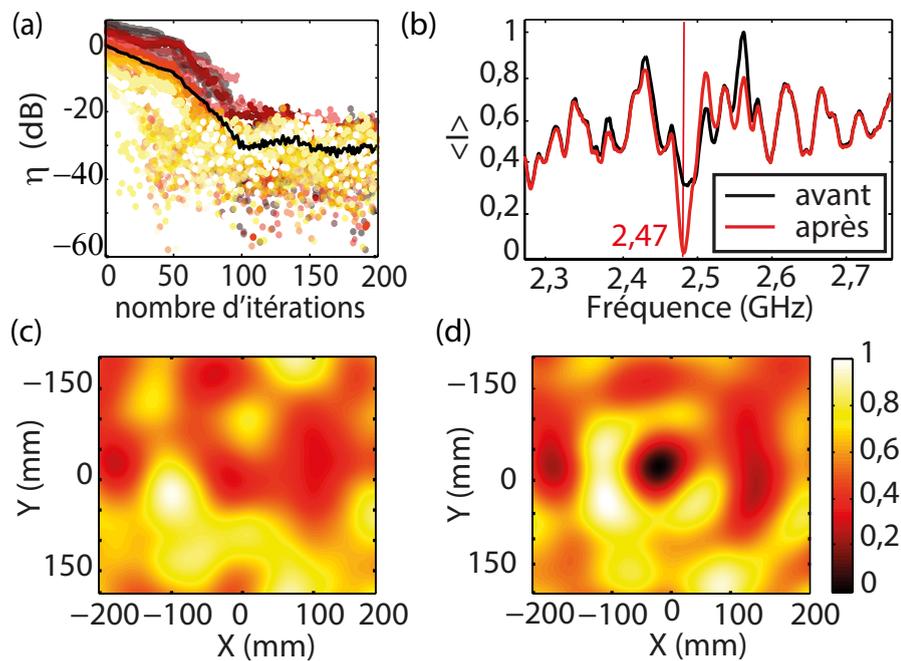


FIGURE 4.16: Minimisation de la transmission. (a) Gain en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme. (b) Comparaison des spectres avant et après minimisation. (c) Carte du champ moyenné avant la minimisation. (d) Carte du champ moyenné après la minimisation.

La figure 4.16 (a) montre la minimisation de la transmission pour les 30 mesures réalisées. Après quelques dizaines d'itérations, la transmission est diminuée et atteint le niveau de bruit de l'appareil. La courbe noire indique le gain moyen de ces minimisations qui est ici de -30 dB. En effet, avant la minimisation, le SNR est de 1000. Un gain de -30 dB indique donc que cette minimisation est

limitée par le bruit. La figure 4.16 (b) présente les spectres moyens initial et final de la minimisation. La transmission est clairement annulée à 2,47 GHz. Comme pour les optimisations, cet effet reste valable sur une fréquence de cohérence de la pièce. En dehors de cette bande de fréquence, les deux spectres sont identiques. Les figures 4.16 (c) et (d) montrent les cartes d'intensité moyenne avant et après la minimisation au voisinage du point minimisé. Nous pouvons constater une annulation du champ sur un point de la taille d'une demie longueur d'onde.

Ces résultats prouvent que la transmission entre deux antennes peut être annulée sur une zone de la dimension d'un grain de *speckle* et sur une bande passante égale à la fréquence de cohérence de la pièce. Ceci pourrait être utilisé dans des dispositifs de brouillage de communications, que ce soit dans des salles de cours, des prisons etc. Nous pouvons également envisager des applications à la protection électromagnétique, par exemple pour une antenne sensible à d'autres canaux de communications à la fréquence souhaitée. Expérimentalement, annuler le champ sur un volume supérieur à un grain de *speckle* peut être difficile. Il faudrait pour cela annuler le champ et sa dérivée sur des antennes situées autour de l'objet à protéger. Le théorème intégrale de Kirchoff impose alors au champ d'être nul à l'intérieur de cette surface.

4.3.5 Amélioration du signal entre deux antennes hors du champ de vue du SMM

Jusqu'à présent nous avons optimisé (maximisé ou minimisé) un signal sur une antenne à proximité du SMM. Que se passe-t-il si les deux antennes, hors de vue l'une de l'autre sont également hors du champ de vue directe du SMM ? Nous reprenons les optimisations avec des antennes WIFI en déplaçant le SMM vers le mur du bas de la figure 4.11.

La figure 4.17 montre 23 courbes de maximisation de la transmission quand les deux antennes WIFI et le SMM sont hors de vue directe les uns des autres. La courbe noire représente la moyenne des 23 optimisations. Après optimisation le gain moyen est de 2,5 dB, soit un facteur 1,8.

Ainsi, notre approche fonctionne même lorsque l'antenne de réception n'est pas en face du modulateur de micro-ondes. Ceci est un effet de la réverbération. En effet, le SMM permet de contrôler les modes de la cavité, qui sont délocalisés dans toute la pièce. Modifier le champ à un endroit modifie donc le champ dans tout le bureau et pas seulement au point focal. Notons que le gain est significatif malgré la proportion de la surface contrôlée dans la pièce, inférieure à 1%. Ce dispositif peut améliorer les signaux WIFI ou cellulaires dans les bâtiments souffrant d'une

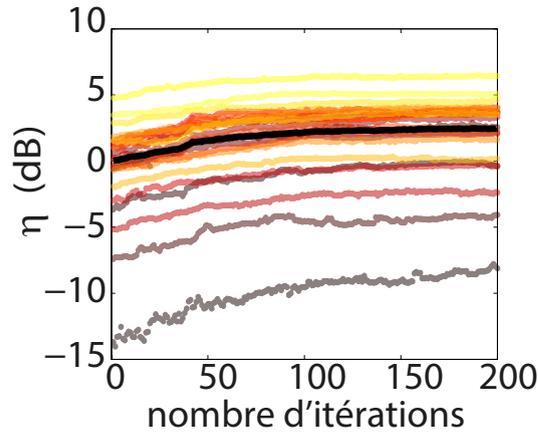


FIGURE 4.17: Maximisation de la transmission quand les deux antennes et le SMM sont hors de vue les uns des autres.

mauvaise connexion. De plus cela permettrait également de diminuer l'énergie nécessaire pour établir une connexion tout en gardant la même qualité de réseau, ce qui mènerait à une diminution de la pollution électromagnétique.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par revenir aux concepts des réseaux de réflecteurs utilisés dans les communications satellites. Nous avons ensuite vu que les différences entre les ondes se propageant en espace libre et dans les milieux complexes, nous permettent de simplifier la conception d'un réseau de réflecteurs reconfigurable adapté aux milieux réverbérants. Nous avons alors conçu un modulateur spatial de micro-ondes, que nous appelons SMM, fabriqué à partir de 102 éléments résonants disposés tous les $\lambda/2$. Ces éléments utilisent l'hybridation entre deux résonateurs, dont la fréquence de l'un est configurable électroniquement. Ceci nous permet de disposer de 102 éléments dont le coefficient de réflexion peut être de -1 ou de +1, et contrôlés par deux Arduino Mega 2560 pilotés sous Matlab. Grâce à la dispersion et à la largeur spectrale des résonances, le SMM est efficace sur une bande passante de 100 MHz autour d'une fréquence centrale de 2,47 GHz. Ce modulateur est peu cher, simple à fabriquer, et facilement transposable à d'autres fréquences.

En utilisant ce SMM, nous avons montré dans un bureau de dimensions usuelles que nous pouvons maximiser, à des fréquences correspondant à celles utilisées en WIFI, la transmission entre deux antennes d'un facteur 7,5 en moyenne, ou la réduire au niveau du bruit, même si la surface du SMM est faible comparée

à la surface totale de la pièce (moins de 1%). Même lorsqu'il est hors de vue directe des deux antennes, le bénéfice apporté par le SMM est sensible, grâce au phénomène de réverbération, apportant un gain de 2,5 dB (facteur $\times 1,8$). Les applications de ce SMM sont très nombreuses en télécommunications, que ce soit pour améliorer des signaux WIFI ou cellulaires, ou pour fournir la même qualité de service pour une énergie moindre.

Les propriétés électromagnétiques du bureau dans lequel nous avons réalisé nos mesures n'étaient pas maîtrisées. Pour étendre notre approche, étudier les effets du SMM dans d'autres régimes, et afin de modéliser le gain que nous pouvons espérer en fonction de la cavité, nous devons réaliser des mesures dans un environnement contrôlable. Ces travaux et les résultats associés sont détaillés dans le prochain et dernier chapitre. Nous interpréterons le SMM dans un milieu réverbérant comme une cavité dont les conditions aux limites sont reconfigurables.

Chapitre 5

Le façonnage de front d'ondes en cavités électromagnétiques : vers des cavités reconfigurables

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé un modulateur spatial dans le domaine des microondes, et nous avons détaillé sa fabrication. Nous avons démontré les concepts de façonnage de fronts d'ondes en milieux réverbérants. Le modulateur peut réfléchir une onde avec un coefficient de réflexion de $+1$ ou -1 , pour les faire interférer constructivement à un endroit choisi. Enfin, nous avons mis en évidence des résultats très prometteurs en termes applicatifs en améliorant un signal aux fréquences WIFI dans un bureau. Cependant, le milieu dans lequel nous avons effectué ces expériences n'était pas contrôlable.

L'invention d'un SMM, puisque cet objet n'existait pas jusqu'à peu, trouve bien d'autres domaines d'applications que les télécommunications sans fil. En effet en physique fondamentale ou appliquée, l'utilisation de cavité réverbérante nécessite de contrôler les modes et fréquences propres de la cavité. Ceci est fait en déplaçant des pièces ou des parois métalliques qui modifient ainsi la géométrie et les conditions aux limites. Dans une chambre réverbérante, on utilise un brasseur de modes, un grand miroir métallique qui change les modes et les fréquences propres quand on le fait tourner. Dans un four micro-onde, un plateau tournant déplace la nourriture alternativement à travers les maxima et minima du champ pour la chauffer de manière homogène. En électrodynamique quantique en cavité (*cavity QED*), domaine qui s'intéresse aux interactions ondes-matière, on utilise encore des vis pour régler sensiblement les fréquences de résonance. L'utilisation

d'un SMM fabriqué d'éléments reconfigurables électroniquement et intégrable aux parois d'un milieu réverbérant pourrait briser ce paradigme.

Nous souhaitons donc quantifier et formaliser le concept de façonnage de front d'ondes en cavité électromagnétique. Dans ce chapitre, nous interpréterons le SMM dans un milieu réverbérant comme une cavité dont les conditions aux limites sont reconfigurables. En effet, nous montrerons d'abord que moduler le coefficient de réflexion à $+1$ ou -1 revient à imposer des conditions de Neumann ou de Dirichlet pour des ondes scalaires dans une cavité. Nous modéliserons ensuite le gain apporté lors d'une optimisation. Cela nous amènera à distinguer trois régimes de contrôle de la cavité et d'utilisation du SMM qui sont autant de domaines différents pour d'éventuelles applications. Le premier régime est celui des cavités comprenant beaucoup de dissipation ou de fuites, ce qui est le cas pour une salle ou un bâtiment aux fréquences de télécommunications. Dans ce cas, de nombreux modes coexistent à une fréquence et interfèrent à cause de l'élargissement spectral. À l'opposé, nous considérerons le régime des cavités de très faible dissipation ou de petit volume. Dans ce cas-là très peu de modes contribuent à la transmission. Il peut même n'y en avoir aucun à une fréquence donnée. Optimiser la transmission revient alors à créer des modes aux bonnes fréquences. Ce régime de contrôle est celui correspondant à la physique fondamentale ou aux filtres microondes. Enfin, entre ces deux régimes s'opère une transition, et dans ces conditions nous contrôlons à peu près autant d'éléments qu'il y a de modes dans la cavité à la fréquence d'optimisation. Ce domaine de fonctionnement intermédiaire peut correspondre à celui des chambres réverbérantes et des fours micro-ondes. Cette étude a donné lieu à une publication dans *Physical Review Letters* [165].

Enfin, dans une dernière partie, nous verrons comment nous pouvons simuler ces cavités de conditions aux limites reconfigurables. Nous analyserons une approche proposée par Heller, inspirée du calcul de fonctions de Green en milieu multidiffusants. Après avoir souligné ses limites, nous développerons une méthode alternative aux éléments finis, basée sur les potentiels de couches limites (en anglais : *boundary layers potentials*).

5.2 Façonnage de front d'ondes en cavité

5.2.1 Principe de l'approche

Nous avons abordé dans les chapitres précédents la notion de degrés de liberté en milieux complexes. Nous avons vu qu'en cavité, lorsque nous ne disposons que d'un couple d'émetteur et récepteur, il n'y a essentiellement que des degrés

de liberté temporels : ce sont les modes propres. Comment interpréter l'effet du SMM, qui est une approche utilisant des degrés de liberté spatiaux, ces derniers permettant de focaliser le champ à une position donnée ? A priori dès qu'un élément change d'état, la cavité électromagnétique est entièrement modifiée. Tous les modes propres et fréquences propres sont donc entièrement différents puisqu'il faut résoudre l'équation de Helmholtz pour de nouvelles conditions aux limites. La prédiction de ces modes et fréquences propres est compliquée et, dans certains cas, modifier seulement un élément d'une cavité régulière suffit à obtenir un champ désordonné. On dit alors que la cavité passe d'un régime intégrable à semi-intégrable.

Cependant, le SMM, et a fortiori chaque élément, peut avoir une surface faible comparée à la surface totale de la cavité. C'était le cas dans les expériences du chapitre précédent, pour lesquelles la surface du SMM représentait moins de 1% de la surface totale de la pièce. Dans ce cas, la modification d'un élément peut simplement perturber les modes et fréquences propres d'un état initial. Le degré de contrôle apporté par le SMM est limité. Au contraire, si toutes les parois de la cavité sont tapissées par des éléments contrôlables, l'expérimentateur contrôle toutes les parois de la cavité, et par conséquent tous les modes et fréquences propres. Le contrôle est total. Nous devons donc déterminer de quelle manière et quels paramètres permettent de passer d'un régime de contrôle minimal à un contrôle total, modéliser le processus physique, et, si nous le pouvons, prévoir le gain obtenu lors d'une optimisation dans ces différents cas.

Le modulateur spatial de microonde est intégré aux parois de la cavité, comme sur la figure 5.1. Nous allons voir à présent que contrôler le coefficient de réflexion revient en fait à imposer des conditions aux limites configurables.

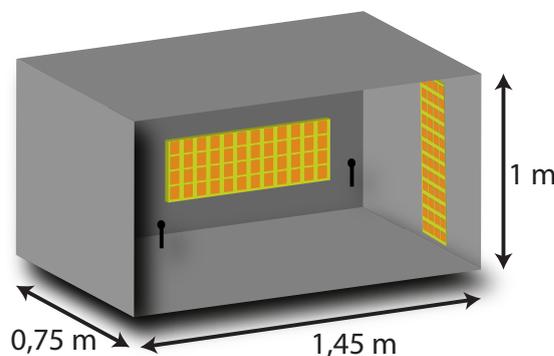


FIGURE 5.1: Cavité électromagnétique contrôlée par un SMM.

5.2.2 Conditions aux limites et façonnage de front d'ondes

Une interface métallique parfaite (c'est-à-dire sans dissipation), également appelée PEC (pour *perfect electric conductor*) impose aux deux composantes tangentielles du champ électrique et à la composante normale du champ magnétique d'être nulles à l'interface. Cette condition aux limites est appelée, pour les ondes scalaires, condition de Dirichlet. C'est aussi la condition imposée à une fonction d'onde incidente sur un potentiel plus élevé que son énergie en mécanique quantique, ou la condition imposée à une surpression acoustique du côté ouvert d'un instrument de musique à vent. Une onde incidente de la forme $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ sur une interface dans le plan (x, y) , est alors réfléchi en : $r E_0 e^{-i(kz + \omega t)}$, où r est appelé coefficient de réflexion en amplitude. Comme la somme de ces deux champs doit être nulle, nous avons nécessairement $r = -1$. Cela correspond donc à un déphasage de π de l'onde réfléchi par rapport à l'onde incidente $r = -1 = e^{i\pi}$.

Si avec notre modulateur, nous imposons localement un déphasage supplémentaire de π , le coefficient de réflexion devient $r = e^{2i\pi} = 1$. L'onde ne s'annule pas à l'interface, au contraire son amplitude est maximale et vaut deux fois l'amplitude de l'onde incidente. En revanche, sa dérivée spatiale, dans la direction normale à l'interface, est nulle (puisque l'amplitude atteint un maximum local). Cette condition aux limites d'annulation de la dérivée spatiale est appelée, pour une onde scalaire, condition aux limites de Neumann. C'est la condition imposée à une surpression acoustique à une interface dure comme le tube d'une flûte. Il n'existe pas de matériau électromagnétique à l'état naturel possédant cette propriété et qui correspondrait à un conducteur magnétique parfait (PMC pour *perfect magnetic conductor*). Nous avons cependant vu que des éléments résonants de notre modulateur peuvent déphaser l'onde réfléchi : c'est le principe utilisé dans la plupart des réseaux de réflecteurs et des métasurfaces.

Moduler de façon binaire des éléments de SMM revient ainsi à imposer localement des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann. Or, modifier les conditions aux limites change les modes propres et fréquences de résonance de la cavité, ce qui nous permet de contrôler le champ.

5.2.3 Degrés de liberté spatiaux en cavité

Le SMM possède 102 éléments qui sont autant de degrés de liberté spatiaux, mais nous pouvons nous contenter d'optimiser seulement p parmi les 102 éléments du SMM. Par ailleurs, le nombre de modes N , qui contribuent significativement à la transmission à la fréquence de travail, est indépendant du nombre d'éléments

optimisés du SMM. Ce nombre ne dépend que des paramètres de la cavité, et notamment de la dissipation qui augmente la largeur spectrale des résonances. En effet, rappelons que N est donné par l'équation 1.49, dérivée de la loi de Weyl :

$$N(\omega) \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{V \omega^3}{Q c_0^3}$$

où V est le volume de la cavité et Q son facteur de qualité. Nous disposons donc de p degrés de liberté spatiaux pour contrôler N modes. Ces modes sont a priori différents dès que le modulateur est modifié, mais en moyenne leur nombre est égal à N , et vérifie la loi de Weyl. Lorsque ceux-ci sont spectralement résolus, ce sont des degrés de liberté fréquentiels, comme nous l'avons vu aux chapitres 1 et 3. Cependant, lorsque tous les modes coexistent à une fréquence à cause de la dissipation, nous pouvons les voir comme des modes spatiaux indépendants qu'il doit être possible de contrôler avec le SMM. Nous postulons pour commencer que chaque degré de liberté spatial du modulateur permet de contrôler un mode en moyenne. Ainsi nous supposons que p degrés de liberté spatiaux indépendants contrôlent p modes. Nous verrons que cette hypothèse se vérifie expérimentalement.

Nous pouvons comprendre cette approximation de la manière suivante : le champ dans la cavité peut s'écrire aussi bien comme une somme sur les modes propres, que comme une somme sur les sources secondaires que sont les éléments du SMM (nous avons détaillé cela au chapitre 1, équation 1.53). Mathématiquement, il existe théoriquement une matrice de passage de la base spectrale à la base spatiale des sources secondaires, même si nous ne pouvons l'écrire simplement. Il est également intéressant de noter que le champ dans des cavités chaotiques peut être modélisé comme une somme d'ondes dont l'amplitude, la direction, et la phase sont aléatoires [166, 167]. Enfin, nous justifions également cette approximation par analogie avec le façonnage de front d'ondes en optique.

5.2.4 Analogies avec le façonnage de front d'ondes en optique

Cette matrice de passage, dans ce cas appelée matrice de transmission, est facilement identifiable en milieux diffusants, où chaque degré de liberté spatial crée un *speckle* indépendant en sortie du milieu diffusant (figure 5.2). Un SLM permet alors d'adapter les phases de chacun de ces degrés de liberté spatiaux, pour sommer les champs de manière cohérente à l'endroit choisi. Sommer de manière cohérente les différents *speckles* permet de focaliser le champ en un point en sortie du milieu diffusant.

En milieux réverbérants, les modes propres jouent le rôle des *speckles* précédents. Ils ont, a priori, des fréquences de résonance distinctes, mais la dissipation leur donne une largeur spectrale, ce qui leur permet de coexister sur une bande passante plus ou moins large (figure 5.2 (c)). Comme ces modes sont caractérisés par des distributions spatiales très diverses, nous pouvons comprendre qu'ils sont affectés différemment par un changement local des conditions aux limites (figure 5.2). Ceci nous permet donc de les contrôler afin d'annuler leur déphasage à un endroit choisi pour les faire interférer de manière constructive (figure 5.2 (c)).

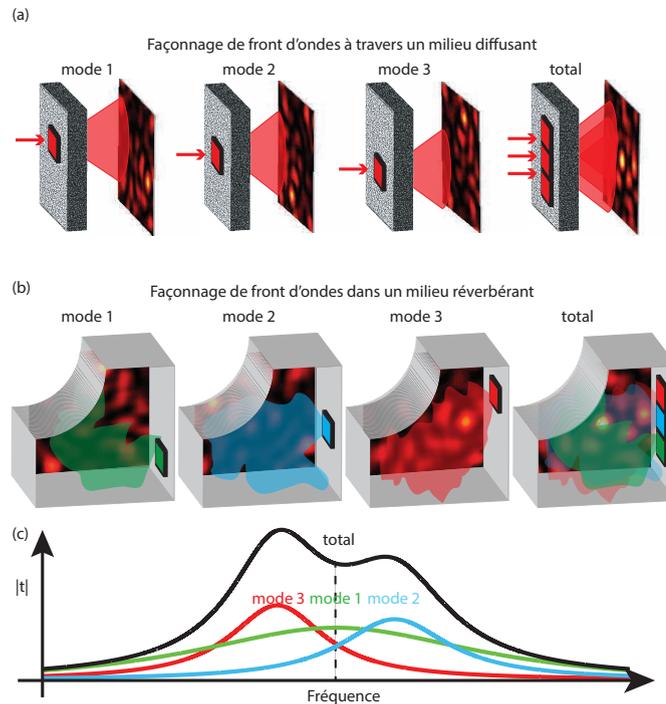


FIGURE 5.2: Analogie entre l'optique des milieux diffusants et les milieux réverbérants. (a) Focalisation en milieux diffusants grâce aux degrés de liberté spatiaux. (b) En milieu réverbérant, chaque degré de liberté spatial contrôle en moyenne, un mode, ce qui permet également de focaliser les ondes. (c) Représentation fréquentielle de la transmission.

5.2.5 Les trois régimes de contrôle

Suivant les valeurs relatives de p et N , qui sont respectivement fonction du SMM et de la cavité, nous pouvons distinguer trois régimes de contrôle :

- i Le premier régime de contrôle de la cavité que nous étudierons se situe à $p < N/2$ (figure 5.3 (a)). Dans ce régime qui se trouve être celui de cavités de bas facteur de qualité, un grand nombre de modes se superposent à une fréquence et nous ne pouvons contrôler qu'une petite partie de ces modes

grâce au SMM. C'est, par exemple, le régime des salles et bâtiments pour les télécommunications, que nous avons déjà partiellement étudié dans le chapitre précédent. Nous allons à présent en formaliser le principe, et nous allons voir que dans ce cas, la transmission peut être modélisée comme une somme de modes aléatoires, dont une partie peut être contrôlée.

- ii Quand le rapport N/p diminue, la cavité atteint un régime intermédiaire, qui fait la transition entre le régime précédent et le régime des cavités à haut facteur de qualité (figure 5.3 (b)). C'est le régime qui pourrait être utilisé pour des cavités comme des fours micro-ondes et des chambres réverbérantes. Ce régime se situe autour du point $p \approx N/2$, quand le SMM contrôle approximativement la moitié des modes de la cavité. Nous allons voir que dans ce régime également, la transmission peut être modélisée comme une somme de modes aléatoires dont la phase d'une partie est contrôlable par le SMM.
- iii Enfin, nous étudierons également un troisième régime, dans lequel il n'y a pas ou peu de modes superposés à fréquence fixée (figure 5.3 (c)). Ce régime est atteint pour les très hauts facteurs de qualité, ou les petits volumes, à $p > 1 \gtrsim N$. C'est le régime utilisé en physique fondamentale, pour faire des MASER ou en QED. La transmission ne peut plus s'interpréter comme une marche aléatoire, étant donné que le nombre de modes est très réduit. Dans ce cas, nous ne pouvons plus modéliser la transmission comme une somme de modes aléatoires.

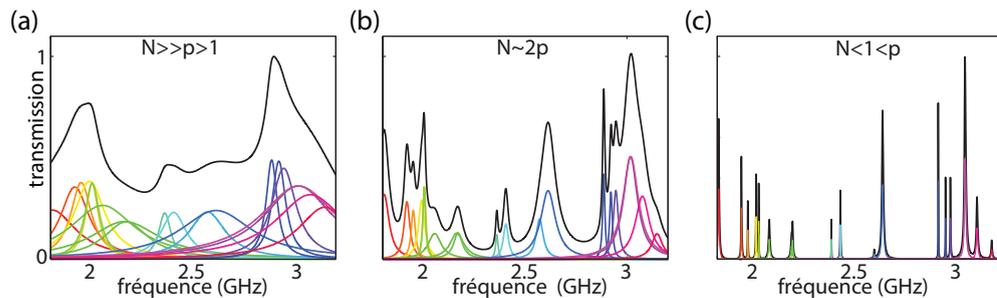


FIGURE 5.3: Spectre de transmission schématisé dans les trois régimes de contrôle. (a) À bas facteur de qualité. De nombreux modes coexistent $N \gg p$. (b) Régime intermédiaire $N \approx p$. (c) À haut facteur de qualité, peu de modes contribuent.

5.2.6 Approche statistique : les *phasors*

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la transmission entre deux antennes est proportionnelle à la fonction de Green entre ces deux points, qui s'écrit comme une somme sur les modes qui contribuent à la densité d'état à la fréquence donnée :

$t(\omega) \propto \sum_{n=1}^{N(\omega)} \frac{\psi_n^*(\mathbf{r}')\psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\gamma_n}{2}}$. La cavité étant désordonnée, la distribution des phases de $\psi(\mathbf{r})$ entre les positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' est aléatoire. La transmission peut donc s'écrire comme la somme de N nombres aléatoires t_n , et nous pouvons les représenter par des vecteurs dans le plan de Fresnel, c'est-à-dire le plan complexe. Ils sont appelés *phasors* en anglais. La somme de ces vecteurs, la transmission, effectue donc une marche aléatoire dans le plan complexe.

Nous contrôlons la phase de manière binaire de p de ces N *phasors*. Ainsi, nous pouvons multiplier par -1 ces p nombres complexes. La transmission se décompose donc en deux termes, une somme de p vecteurs contrôlables, A_c et une somme de $N - p$ vecteurs non contrôlables, A_u :

$$t = A_c + A_u = \sum_{n=1}^p |t_n| e^{i\theta_n} + \sum_{n=p+1}^N |t_n| e^{i\theta_n} \quad (5.1)$$

Selon les cas précédemment définis, l'un ou l'autre de ces deux vecteurs domine la physique de la cavité. Dans le cas (i), pour $p < N/2$, nous avons en moyenne $A_c < A_u$, et la physique est globalement dominée par les modes non contrôlés. Dans le cas (ii), $p \approx N/2$ d'où $A_c \approx A_u$, et nous avons une transition entre les cas pour lesquels la cavité ou le SMM domine. Dans le cas (iii), $p > N$, d'où $A_c > A_u$, et dans ce cas la transmission est entièrement gouvernée par le SMM.

Le SMM ne modifie que A_c , tandis que A_u reste statistiquement fixé. Tourner la position du brasseur dans la cavité revient à changer la cavité aléatoirement, et fait donc varier les deux vecteurs A_u et A_c . Par la suite, nous nous intéressons au calcul du gain moyen. Nous définissons le gain η de la même manière que la valeur utilisée en optique des milieux diffusants, c'est-à-dire par l'énergie finale moyenne après optimisation sur l'énergie initiale moyenne, ce qui se traduit par :

$$\eta = \frac{\langle |t|^2 \rangle}{\langle |t_{ini}|^2 \rangle} \quad (5.2)$$

5.2.7 Dispositif et protocole expérimental

Afin de valider le modèle expérimental, nous conduisons plusieurs séries d'expériences. Le montage expérimental de ces mesures est représenté sur la figure 5.4. Nous plaçons dans une cavité de volume $V = 1 \text{ m}^3$, les deux panneaux du SMM sur deux parois, un à la verticale et un à l'horizontale, de manière à ce que chacun contrôle une polarisation différente. L'équipartition de l'énergie, si le champ est diffus, nous assure que l'énergie est répartie de manière égale entre les différentes polarisations. Au total, 102 éléments sont contrôlables et chacun peut imposer des conditions de Neumann ou Dirichlet sur une surface de dimension $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$, mais nous

pouvons en optimiser un nombre inférieur, p . Des diffuseurs métalliques créent un champ désordonné. L'introduction d'absorbeurs permet de diminuer le facteur de qualité. Le nombre de modes qui contribuent à la transmission à une fréquence donnée étant inversement proportionnel au facteur de qualité, en jouant sur l'absorption nous sommes capables de changer N relativement à p (équation 1.49 : $N(\omega) \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{V}{Q} \frac{\omega^3}{c_0^3}$).

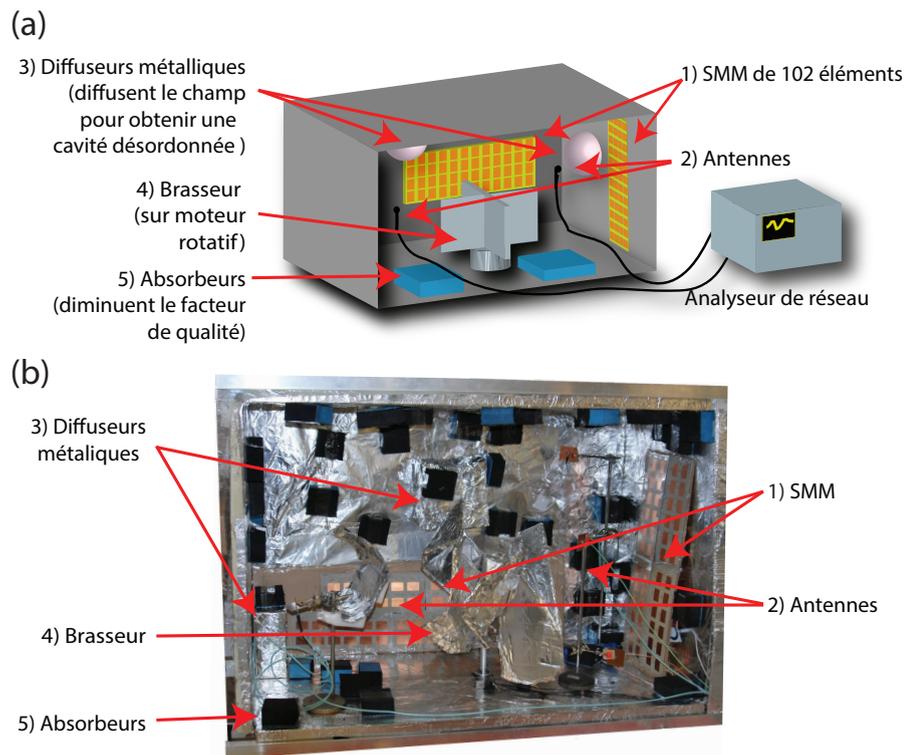


FIGURE 5.4: Montage expérimental. (a) Schéma. (b) Photographie.

Dans le chapitre précédent, nous déplaçons la source pour modifier la relation de phase entre les modes et ainsi effectuer des mesures statistiques. Ici, nous plaçons 4 antennes dans la cavité. Une antenne sert d'émetteur et les 3 autres de récepteurs. Cela nous permet de moyennner et d'étudier la statistique de la transmission. Afin d'augmenter le nombre de mesures indépendantes possibles, nous ajoutons également un brasseur de modes. Ce dernier est un diffuseur métallique sans axe de symétrie. Lorsqu'il est tourné autour d'un axe de rotation, le brasseur modifie les conditions aux limites et les modes de la cavité. Plus le brasseur est grand, et plus l'angle de décorrélation est faible. Le brasseur est d'autant plus efficace que la cavité est désordonnée, et il peut ainsi être nécessaire d'introduire également des diffuseurs métalliques sphériques [168, 169]. En pratique nous avons mesuré que quand ce dernier est tourné de 12° , la transmission est décorrélée de la mesure précédente. De plus, le SMM influe également sur les modes de la cavité.

Il est donc nécessaire de réaliser des expériences pour différents états initiaux du SMM.

5.3 Les trois régimes de contrôles

À présent, nous étudions et décrivons les propriétés des trois cas que nous avons distingué. Nous commençons par étudier le cas (i) pour lequel $p > N/2$, c'est-à-dire $A_c < A_u$.

5.3.1 (i) Cas des cavités de faible facteur de qualité ou de grand volume, $p < N/2$

5.3.1.1 Approche qualitative

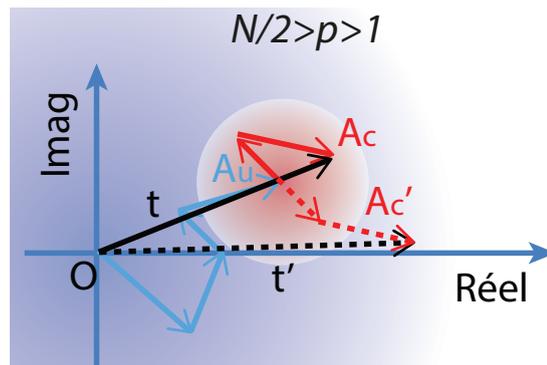


FIGURE 5.5: Représentation de la transmission dans le plan de Fresnel pour le cas (i). En bleu : modes non contrôlés par le SMM. En rouge : modes contrôlés. Traits plein : avant optimisation, tirets : après.

Nous rappelons que la transmission s'écrit comme une somme de nombres complexes aléatoires, et que cela peut être représenté comme une marche aléatoire :

$$t = A_c + A_u = \sum_{n=1}^p |t_n| e^{i\theta_n} + \sum_{n=p+1}^N |t_n| e^{i\theta_n}$$

Avant toute optimisation, les phases des vecteurs sont distribuées aléatoirement. La transmission est donc, en moyenne, proportionnelle à la racine carrée du nombre d'éléments, N :

$$\langle |t_{ini}|^2 \rangle = \langle |A_u + A_c|^2 \rangle \propto N \quad (5.3)$$

Nous remarquons que comme tous les éléments sont aléatoires, il n'y a pas de terme d'interférences entre A_u et A_c :

$$\langle |t_{ini}|^2 \rangle = \langle |A_u|^2 \rangle + \langle |A_c|^2 \rangle \propto (\sqrt{N-p})^2 + (\sqrt{p})^2 \quad (5.4)$$

À la fin d'un procédé d'optimisation, les vecteurs non contrôlés sont inchangés : $A_u \propto \sqrt{N-p}$. En revanche les vecteurs contrôlés ont idéalement la même phase, d'où $A_c \propto p$. La somme A_c des vecteurs optimisés s'aligne avec les vecteurs non optimisés A_u . Il y a donc à présent une corrélation entre A_u et A_c , c'est-à-dire un terme d'interférences constructives. La transmission en amplitude est alors en moyenne proportionnelle à $\sqrt{N-p} + p$. Le gain final est donné par l'équation suivante :

$$\eta \approx \left(\frac{\sqrt{N-p} + p}{\sqrt{N}} \right)^2 \quad (5.5)$$

Il est clair d'après ce calcul simplifié que nous pouvons améliorer sensiblement la transmission lors de l'optimisation, malgré une faible proportion de modes contrôlés. Cette approche approximative suffit à saisir le mécanisme de l'optimisation dans ce cas (i) et contient les idées générales du calcul qui suit.

5.3.1.2 Calcul exact du gain

Le modèle précédent est approximatif, en particulier, nous n'avons pas pris en compte que le contrôle de la phase n'est fait que de manière binaire. Dans cette partie, nous développons une approche plus rigoureuse pour calculer le plus précisément possible le gain théorique.

La transmission initiale (avant optimisation) s'écrit comme une somme sur N nombres complexes de parties réelles et imaginaires aléatoires, mais de moyennes et écarts-types bien définis. Nous supposons la statistique isotrope dans le plan complexe et centrée sur l'origine. Ainsi les moyennes des parties réelles et imaginaires sont égales à 0, et leurs écarts-types sont égaux entre eux, de valeur σ . La fonction de densité de probabilité de la phase de ces vecteurs est uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Leurs modules suivent une loi de densité de probabilité de Rayleigh [43], représentée sur la figure 5.6 :

$$\begin{cases} p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } \theta \in [-\pi, \pi] \\ p_{|t_k|}(|t_k|) = \frac{|t_k|}{\sigma^2} e^{-\frac{|t_k|^2}{2\sigma^2}} \end{cases} \quad (5.6)$$

Par conséquent les parties réelle et imaginaire de la transmission vérifient le théorème central limite et la transmission suit une statistique gaussienne circulaire [42]. La transmission moyenne en énergie est alors donnée par [42] :

$$\langle |t_{ini}|^2 \rangle = N \langle |t_k|^2 \rangle = N2\sigma^2 \quad (5.7)$$

Calculons à présent les amplitudes A_u et A_c après optimisation. A_u est la somme des modes non contrôlés et reste inchangée. Nous avons donc :

$$\langle |A_u|^2 \rangle = (N - p)2\sigma^2 = (N - p) \langle |t_k|^2 \rangle \quad (5.8)$$

La valeur quadratique moyenne de A_u est égale à :

$$\tilde{A}_u = \sqrt{\langle |A_u|^2 \rangle} = \sqrt{2(N - p)} \sqrt{\langle |t_k|^2 \rangle} \quad (5.9)$$

Nous voyons apparaître une limite mathématique à ce modèle lorsque p devient proche de N .

Pour calculer la valeur moyenne de A_c , revenons aux fonctions de densité de probabilité de la phase et des amplitudes. Le modulateur n'agit que de manière binaire sur la phase. La fonction de densité de probabilité du module des vecteurs reste donc la même, c'est une statistique de Rayleigh. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que A_u se situe sur l'axe réel et que l'algorithme tend donc à aligner les t_k vers cet axe. Si la phase θ_k ne se situe pas dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, alors le modulateur rajoute $\pm\pi$ à θ_k . Ainsi la fonction de densité de

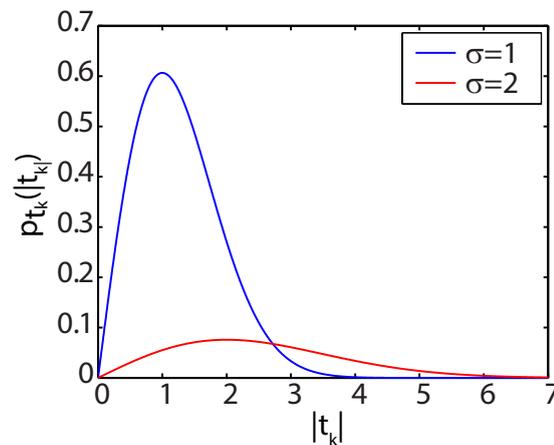


FIGURE 5.6: Représentation de deux fonctions de densité de probabilité de Rayleigh pour deux écarts-types $\sigma = 1$ et $\sigma = 2$.

probabilité de la phase devient, après optimisation :

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi} \text{ pour } \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (5.10)$$

Comme les phases ne sont plus uniformément réparties sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on dit que le *speckle* est partiellement développé [42]. L'énergie de ce *speckle* peut se calculer grâce aux fonctions caractéristiques M_θ , qui ne sont que les transformées de Fourier de la fonction de densité de probabilité p_θ [42] :

$$\langle |A_c|^2 \rangle = p \langle |t_k|^2 \rangle + p(p-1) \langle |t_k|^2 \rangle^2 M_\theta(1)M_\theta(-1) \quad (5.11)$$

Un calcul direct donne :

$$M_\theta(1) = M_\theta(-1) = 2/\pi, \text{ et } \langle |t_k|^2 \rangle^2 = \frac{\pi}{4} \langle |t_k|^2 \rangle \quad (5.12)$$

soit :

$$\langle |A_c|^2 \rangle = p \left(1 + \frac{p-1}{\pi} \right) \langle |t_k|^2 \rangle \quad (5.13)$$

La moyenne quadratique de A_c est alors donnée par :

$$\tilde{A}_c = \sqrt{\langle |A_c|^2 \rangle} = \sqrt{p \left(1 + \frac{p-1}{\pi} \right) \langle |t_k|^2 \rangle} \quad (5.14)$$

La transmission est la somme de ces deux vecteurs du plan complexe A_u et A_c . La transmission en énergie moyenne est donnée par la norme au carré de la somme de ces deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \langle |t|^2 \rangle &= |\tilde{A}_c e^{i\phi} + \tilde{A}_u|^2 \\ &= \tilde{A}_c^2 + \tilde{A}_u^2 + 2\tilde{A}_c \tilde{A}_u \langle \cos \phi \rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

où ϕ représente l'angle entre les deux vecteurs A_u et A_c (figure 5.7 (a)). Comme A_u est sur l'axe réel, ϕ est la phase de A_c . Cette fonction dépend essentiellement du nombre de vecteurs constituant A_c . Par la suite, nous notons $C(p) = \langle \cos \phi \rangle$. Finalement, le gain η après optimisation s'écrit :

$$\eta = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{p(p-1)}{N} + \frac{2C(p)}{N} \sqrt{(N-p)p} \sqrt{1 + \frac{1}{\pi}(p-1)} \quad (5.16)$$

Rappelons que cette expression n'est valide que pour $p < N/2$, sinon les éléments du SMM ne sont pas réellement indépendants. Notons que formellement pour $p = N$, nous retrouvons un résultat précédemment dérivé par Allard Mosk [10, 47], et qui annule le terme d'interférence (car A_u est nul).

La fonction C peut se calculer grâce à la définition de la valeur moyenne :

$$C(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi p_\phi(\phi) \cos \phi \quad (5.17)$$

où p_ϕ est la fonction de densité de probabilité de ϕ . Nous nous attendons à ce qu'elle soit centrée sur 0, de moyenne nulle, et à valeurs dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Dans le cas où $p = 1$, nous avons tout simplement $p_\phi = p_\theta$. Un calcul simple mène alors à $C(1) = 2/\pi$. Lorsque p devient très grand, on s'attend à ce que l'écart à la moyenne $\langle \phi \rangle = 0$ devienne faible, et donc à ce que $p_\phi(\phi) \approx \delta(\phi)$, soit à $C(+\infty) = 1$.

Pour les valeurs intermédiaires de p , nous calculons C numériquement. Le résultat est présenté sur la figure 5.7 (b). Nous vérifions que C a pour valeur initiale et minimale $2/\pi$. Cette fonction est monotone, croit très rapidement et tend vers 1. Notons que pour $p > 30$, $C(p)$ a atteint plus de 95% de sa valeur finale. Nous pouvons donc généralement considérer que $C(p) = 1$ dans la formule 5.16.

5.3.1.3 Vérification expérimentale

Optimisation pour un nombre variable de degrés de liberté spatiaux

Dans la première série de mesures, nous optimisons, à $Q \approx 850$ fixé, la transmission entre deux antennes en faisant varier le nombre d'éléments p contrôlés sur le SMM. L'expérience est réalisée avec 3 positions d'antennes de réception, 3 états initiaux aléatoires du SMM et 30 positions du brasseur, puis nous moyennons les résultats obtenus. Chaque courbe est ainsi le résultat de 270 optimisations, représentant à peu près 24 h de mesures. La figure 5.8 illustre la transmission pour les différents p en fonction de l'itération de l'algorithme. Les valeurs finales de

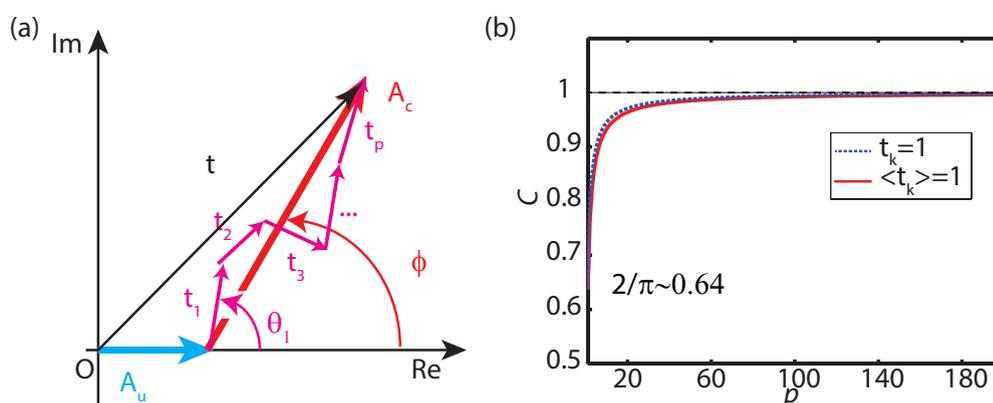


FIGURE 5.7: (a) Définition géométrique de ϕ . (b) Représentation de la fonction C pour deux fonction de densité de probabilité du module des vecteurs, une constante (en bleue) et une qui suit une statistique de Rayleigh (en rouge).

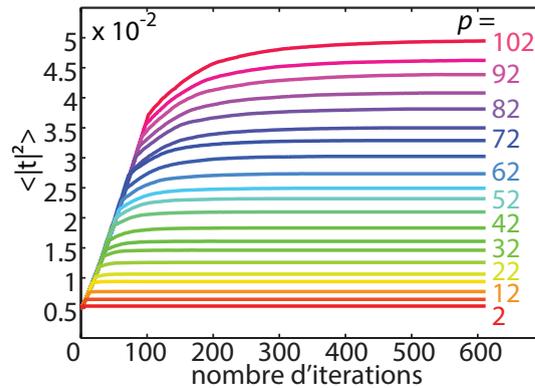


FIGURE 5.8: Optimisation de la transmission en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour différents degrés de liberté spatiaux p à $Q = 850$ (soit $N \approx 33$).

la transmission sont croissantes avec p . La transmission augmente rapidement à chaque itération de l'algorithme tant que tous les éléments n'ont pas été optimisés. Une fois ce point atteint, la vitesse d'optimisation diminue et la transmission sature. Notons que quand nous utilisons tous les éléments du SMM, la transmission finale a été améliorée d'un facteur 10 par rapport à la transmission initiale. Nous pouvons également noter un changement de dynamique, c'est-à-dire l'évolution du gain η en fonction des itérations successives de l'optimisation, entre les courbes mesurées pour un nombre p élevé ou faible de degrés de liberté. En effet, à faible p , le gain sature dès que p itérations ont été réalisées. À haut p , le gain continue à augmenter après p itérations, puis s'infléchit jusqu'à saturer. Nous pouvons attribuer ce changement de dynamique aux corrélations du champ entre les éléments. Plus nous contrôlons d'éléments, et plus les corrélations entre éléments sont importantes. L'étude des corrélations dépasse cependant le cadre de cette thèse.

Optimisations pour différents facteurs de qualité

Dans une deuxième série de mesures, nous optimisons la transmission à $p = 102$ fixé pour différentes valeurs de Q . Le nombre d'optimisations réalisées est aussi de 270 pour chaque courbe afin d'obtenir un résultat statistiquement fiable. Les résultats sont représentés sur la figure 5.9. La transmission augmente presque linéairement jusqu'à 102 itérations, puis sature à bas facteur de qualité. À haut facteur de qualité, nous observons également une inflexion des courbes à 102 itérations, même si la transmission continue d'augmenter plus doucement. Ce changement de la dynamique, entre les hauts et bas facteurs de qualité est, ici aussi, vraisemblablement lié aux corrélations entre les éléments que nous avons jusque là négligées. En effet, à haut facteur de qualité, la cavité est très réverbérante. Après réflexion sur un élément, l'onde se réverbère à plusieurs reprises dans la cavité et rencontre d'autres éléments du SMM. Ainsi à haut facteur de qualité, changer l'état d'un élément modifie le champ dans toute la cavité, et notamment

le champ reçu sur tous les autres éléments, ce qui ralentit le processus d'optimisation. Notons encore une fois une amélioration d'un facteur 10 entre l'état initial et l'état final de la transmission.

Comparaison du gain théorique et du gain expérimental

Le rapport des transmissions finales et initiales de la figure 5.8 (respectivement la figure 5.9), permet de tracer le gain η en fonction de p sur la figure 5.10 (a) (respectivement le gain η en fonction de Q sur la figure 5.10 (b)). La courbe $\eta(p)$ est une courbe monotone croissante d'aspect convexe, dont le minimum est 1 et atteint logiquement pour $p = 0$. Les points expérimentaux correspondent très bien à la courbe théorique (équation 5.16) à condition d'ajuster cette dernière avec un coefficient α devant le paramètre p . Nous remplaçons donc p par αp dans la formule 5.16, et la régression nous donne $\alpha = 0,27$. Cela signifie que le nombre de degrés de liberté est diminué, puisque, en moyenne, il faut plus de 3 éléments du modulateur pour contrôler un mode. Cette diminution de l'efficacité est essentiellement attribuée à la dissipation par les éléments du modulateur, car ceux-ci ne réfléchissent que 50% de l'énergie incidente. De plus, la dispersion des fréquences de résonance des éléments, due à la fabrication manuelle, diminue également leur efficacité à la fréquence centrale. Nous pouvons également nous demander quel est le rôle joué par les corrélations du champ, jusqu'à présent négligées. Diminuent-elles le nombre effectif de mode contrôlé, ou ne font-elles que modifier la dynamique de l'optimisation ? Cette question dépasse le cadre de cette thèse et fera l'objet d'études ultérieures.

La courbe $\eta(Q)$ (figure 5.10 (b)) est également croissante mais sature à partir de $Q \approx 800$. En effet, à plus haut facteur de qualité, le nombre de modes

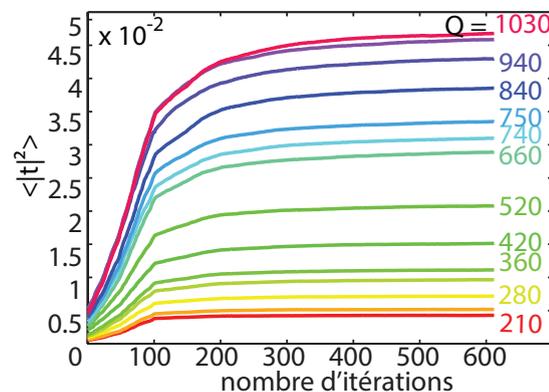


FIGURE 5.9: Optimisation de la transmission en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour différents facteurs de qualité (entre 250 et 1030 ce qui correspond à des valeurs de N respectives de 112 et 26), et pour un nombre maximum de degrés de liberté $p = 102$.

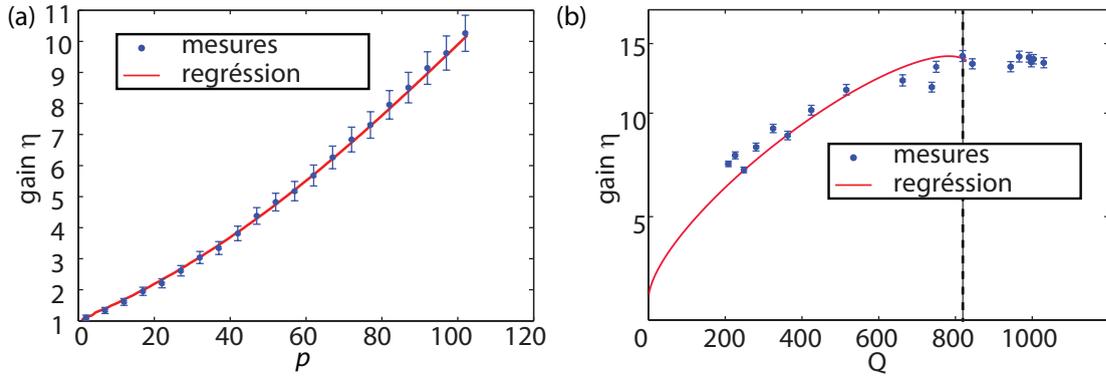


FIGURE 5.10: Validation du modèle. (a) Optimisation de la transmission en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour différents degrés de liberté spatiaux p à $Q = 850$. (b) Optimisation de la transmission en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour différents facteurs de qualité Q pour un nombre maximum de degrés de liberté $p = 102$.

qui contribuent à la transmission diminue. À une valeur légèrement supérieure à $Q = 800$, le nombre N de modes devient inférieur au nombre de modes contrôlés αp : c'est la limite de notre modèle. Ici aussi, nous devons effectuer une régression sur le coefficient α pour ajuster la courbe théorique. L'ajustement optimal est trouvé pour $\alpha = 0,32$ ce qui est cohérent avec la mesure précédente de la courbe représentée sur la figure 5.10 (a). Nous obtenons une nouvelle fois un très bon accord entre les mesures et le modèle précédemment développé.

En conclusion ces mesures corroborent et valident notre modèle théorique. Cela justifie l'hypothèse qu'en moyenne, un élément du SMM contrôle un nombre de modes à la fréquence optimisée (2,47 GHz) proportionnel au nombre d'éléments du SMM. Le coefficient de proportionnalité, de 1 en théorie, est réduit à $\alpha \approx 0,3$ à cause de la dissipation et de la dispersion en fréquence des éléments du SMM. Diminuer cette absorption permettrait d'améliorer significativement le gain atteignable. D'autre part, ce régime correspond à celui de l'optimisation d'un signal dans un bureau étudié dans le chapitre précédent. Nous avons alors montré que ce régime permet de focaliser les ondes sur l'émetteur et le récepteur pour améliorer un signal aux fréquences WIFI. Le modèle proposé ici permet donc de prédire le comportement d'un tel système. Nous avons également vu qu'au delà d'un trop grand facteur de qualité situé vers $Q = 850$ pour $p = 102$ éléments dans notre cavité, le modèle atteint sa limite. Nous entrons dans le régime (ii), pour lequel le nombre de modes à la fréquence de travail est approximativement égal au nombre d'éléments du SMM et que nous allons étudier à présent.

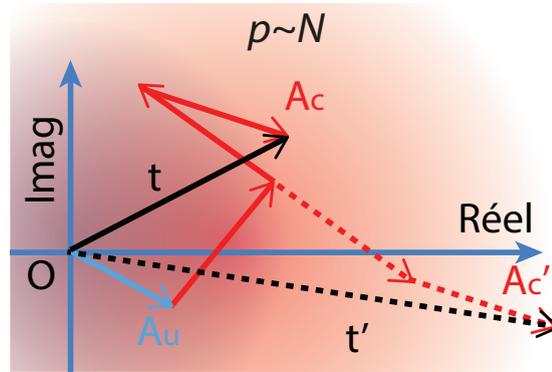


FIGURE 5.11: Représentation de la transmission dans le plan de Fresnel pour le cas ii. En bleu : modes non contrôlés par le SMM. En rouge : modes contrôlés. Traits plein : avant optimisation, tirets : après.

5.3.2 (ii) Cas des cavités intermédiaires, $p \approx N$

5.3.2.1 Approche qualitative

Notre modèle précédent reposant sur une marche aléatoire de vecteurs indépendants, se limite à l'étude de la transmission tant que le nombre d'éléments contrôlés du SMM est inférieur au nombre de modes dans la cavité, soit encore $A_c < A_u$. Cette limite est franchie lorsque le facteur de qualité est suffisamment élevé, ou lorsque le SMM est suffisamment grand, comme pour le cas schématisé sur la figure 5.11. Évidemment, à $p > N$, nous ne pouvons pas contrôler plus de modes qu'il n'y en a dans la cavité. Nous en déduisons que les éléments du SMM sont corrélés. A priori, le modèle n'est donc plus valide. Nous appelons \tilde{p} le nombre de modes contrôlés par p éléments du SMM. Par analogie avec la partie précédente, nous définissons un coefficient α , qui dépend a priori de p , tel que : $\tilde{p} = \alpha p$. En fait la transition entre les deux régimes a lieu à des valeurs de \tilde{p} inférieures à N , à l'égalité des rayons quadratiques moyens des vecteurs A_u et A_c : $\tilde{A}_c \approx \tilde{A}_u$. C'est aussi le point où le modulateur permet de contrôler la moitié des modes de la cavité ($\tilde{p} \approx N/2$).

La figure 5.12 (a) représente le cas précédent pour lequel $\tilde{A}_c \ll \tilde{A}_u$. Dans une cavité donnée, un état aléatoire du masque de phase imposé au SMM produit une marche aléatoire des vecteurs composant A_c . Cette marche aléatoire est représentée en rouge. D'autre part, A_u est une marche aléatoire déterminée par la cavité, de rayon quadratique moyen beaucoup plus grand que le rayon quadratique moyen de A_c (car $N - \tilde{p} \gg p$). Pour une cavité donnée et quel que soit l'état du SMM, nous pouvons considérer A_u comme un vecteur constant. Cette marche aléatoire est représentée en bleu. Un processus d'optimisation incohérent (qui maximise l'énergie) tend à aligner A_c avec A_u pour optimiser la norme de $t = A_u + A_c$. Ainsi,

le SMM ne permet de contrôler la transmission que sur une zone restreinte du plan complexe, centrée sur A_u . Si nous supposons A_u aligné avec l'axe réel, seules des valeurs de la transmission de parties réelles positives peuvent être atteintes, même après optimisation. Les angles complexes extrêmes sont de l'ordre de $\tan \theta_{max} = \frac{\tilde{A}_c}{A_u}$ et centrés sur $\theta = 0$.

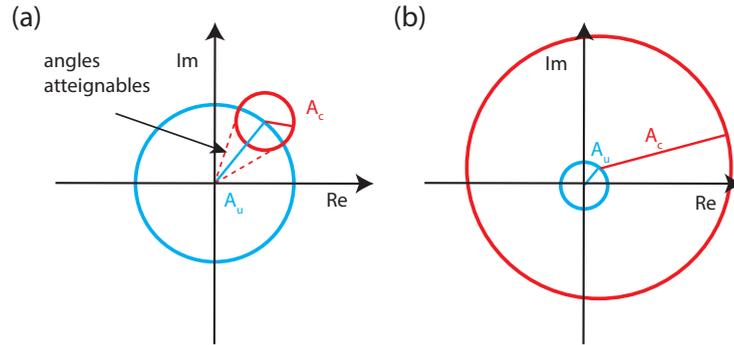


FIGURE 5.12: Schématisation des deux régimes d'optimisation en terme de marche aléatoire dans le repère de Fresnel. (a) Cas $p \approx \tilde{p} \ll N$. (b) Cas $N > \tilde{p} > N/2$.

Dans le cas qui nous intéresse à présent \tilde{A}_u est, initialement, de l'ordre de \tilde{A}_c , et $N - \tilde{p} \approx \tilde{p}$, soit $\tilde{p} \approx N/2$. Les marches aléatoires effectuées par A_u et A_c ont alors des extensions équivalentes dans le plan complexe. Statistiquement, A_c peut donc annuler l'effet de A_u et la transmission peut avoir une partie réelle négative. La transmission a alors accès à tous les angles complexes possibles.

Si le nombre d'éléments contrôlés sur le SMM est encore augmenté, alors $A_c \gg A_u$. Ce cas est représenté sur la figure 5.12 (b). À ce stade, le vecteur constant A_u , de rayon \tilde{A}_u (en bleu) n'influe presque plus sur la transmission et le processus d'optimisation. Ce dernier est entièrement dominé par le SMM et le vecteur A_c de rayon quadratique moyen \tilde{A}_c . Le contrôle du SMM sur la cavité est total et la phase de la transmission peut prendre n'importe quelle valeur sur $[-\pi, \pi]$. La transmission peut atteindre n'importe quelle valeur complexe dans un domaine du plan complexe, uniquement limitée par le nombre de modes contrôlés. Nous allons voir qu'il est possible d'explorer ces cas avec notre dispositif expérimental.

5.3.2.2 Approche expérimentale

La figure 5.13 illustre expérimentalement les prédictions précédentes. Ces 700 résultats sont obtenus en ne faisant varier à chaque expérience que l'état du modulateur, en tirant un masque de phase $[-1,1]$ initial aléatoire à chaque optimisation. Comme le brasseur n'est pas utilisé, le vecteur A_u est constant tout

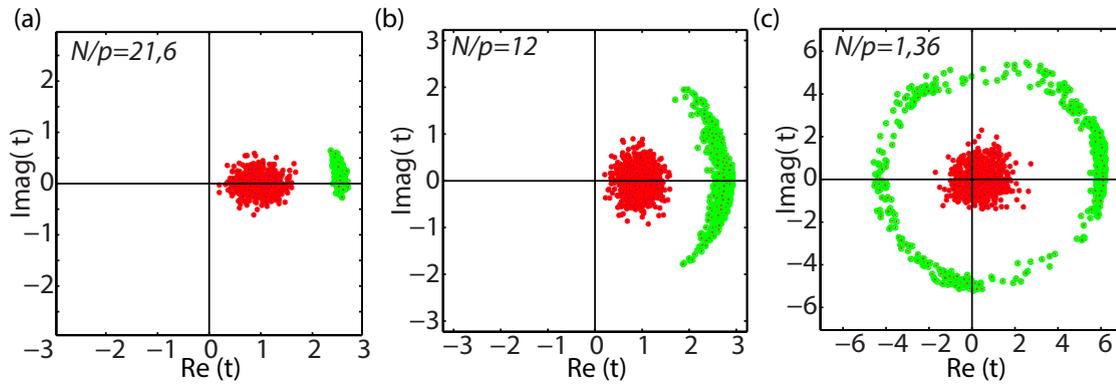


FIGURE 5.13: (a,b,c) Transmissions avant (en rouge) et après optimisation (en vert) pour des états initiaux aléatoires du SMM et pour des rapports $N - \tilde{p}/\tilde{p} \approx \tilde{A}_u/\tilde{A}_c$ décroissants, correspondants à des valeurs de $N/2\tilde{p}$ de 21,6, 12 et 1,36. La transmission est normalisée par le module de la moyenne des transmissions initiale.

au long de l'expérience, et seul A_c est modifié lorsque le masque de phase du modulateur est changé. Puis, nous optimisons la transmission et nous obtenons pour chaque valeur initiale (en rouge) une valeur finale, optimisée (en vert). Ce nuage de points rouges illustre la marche aléatoire représentée par un cercle rouge sur la figure 5.12 (a) et centré sur le vecteur constant A_u . Seule une petite partie des angles du plan complexe est atteinte. Le nuage de points verts montre la transmission après optimisation. La dispersion de ce nuage de points est réduite par rapport à leur valeur moyenne. Nous notons également que l'optimisation s'est faite dans la direction donnée par les transmissions initiales. Les angles atteignables par la transmission optimisée sont donc réduits, peu ou prou, aux mêmes valeurs que les angles de la transmission initiale.

La figure 5.13 (b) expose ce phénomène lorsque le rapport N/\tilde{p} (c'est-à-dire \tilde{A}_u/\tilde{A}_c) est diminué. La norme du vecteur constant devient faible, et le centre de la marche aléatoire contrôlée par le SMM se rapproche de l'origine. Par conséquent, l'angle complexe maximal atteignable est sensiblement augmenté.

Enfin, la figure 5.13 (c) présente les résultats correspondant à $A_u < A_c$. Contrairement aux cas précédents, certains points initiaux possèdent une partie réelle négative. Ainsi, tous les angles du plan complexe sont initialement représentés. Cela se répercute sur la transmission après optimisation : les points verts correspondants décrivent un cercle presque centré sur l'origine du repère. N'importe quelle valeur de la transmission située à l'intérieur de ce cercle est atteignable. Le SMM contrôle complètement la transmission dans la cavité.

Cette représentation de la transmission dans le repère de Fresnel permet de mettre en évidence un régime dans lequel le SMM permet de transformer une cavité en une autre statistiquement indépendante. Dans ce régime un SMM pourrait

remplacer un brasseur dans une chambre réverbérante, ou le plateau tournant d'un four micro-onde. Notons que les masques de phase du SMM après optimisation évoluent également grandement en fonction de N/\tilde{p} . En effet pour $N/\tilde{p} = 21,6$, ils sont très corrélés après optimisation. Au contraire, ils diffèrent tous dans le cas $N/\tilde{p} = 1,36$.

La transition entre le régime dans lequel le SMM n'a qu'un contrôle limité, et le régime dans lequel le contrôle est total, est ainsi identifiable dans le repère de Fresnel (le plan complexe) et illustrée sur les figures 5.13 (a,b,c). Cela induit également une transition en terme de fonctions de densité de probabilité de l'intensité et de la phase de la transmission. Ces fonctions traduisent la probabilité que la marche aléatoire du SMM produise une transmission d'une certaine intensité I et d'une certaine phase θ .

5.3.2.3 Interprétation probabiliste

Les figures 5.14 contiennent les histogrammes de l'intensité de la transmission des mesures précédentes. Ces histogrammes représentent une évaluation des fonctions de densité de probabilité (FDP) de la transmission. Pour $N \gg p$, soit encore pour $\tilde{A}_u \gg \tilde{A}_c$, la FDP d'intensité présente un minimum en 0, augmente jusqu'à la valeur moyenne de l'intensité, puis diminue rapidement de manière asymptotique à la valeur nulle (figures 5.14 (a,b)). Au contraire, à $N \ll p$, la FDP d'intensité est toujours décroissante, également asymptotique à 0 (figure 5.14 (c)).

En ce qui concerne la phase, les figures 5.14 (d,e,f) présentent les histogrammes de la phase des mesures précédentes (qui sont une évaluation des FDP de la phase). Pour $N \gg \tilde{p}$, soit encore pour $\tilde{A}_u \gg \tilde{A}_c$, la FDP de phase est nulle sauf autour de d'angle $\theta = 0$ où elle présente un aspect gaussien (figures 5.14 (d,e)). Lorsque le rapport N/\tilde{p} diminue, la courbe s'élargit. À $N \ll p$, la FDP d'intensité est relativement plate, et non nulle à tous les angles (figure 5.14 (f)). Ceci traduit le fait que dans ce cas, la phase de la transmission peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, de manière quasi-équiprobable.

Pour interpréter ces résultats, nous revenons à l'approche statistique de la marche aléatoire. Nous négligeons le fait que le SMM ne contrôle la phase que de manière binaire. Les N vecteurs possèdent des parties réelles et imaginaires de valeurs moyennes nulles et d'écart-type σ_0 . En conséquent, la transmission qui est la somme de ces N vecteurs (qui effectuent une marche aléatoire pour une cavité donnée), possède une densité de probabilité jointe gaussienne circulaire. La transmission a la densité de probabilité (d'avoir simultanément une partie réelle

de valeur R et imaginaire de valeur I) suivante :

$$p_{R,I}(R, I) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} e^{-\frac{R^2+I^2}{2\sigma_1^2}} \quad (5.18)$$

où la variance s'exprime en fonction de la variance des parties réelles et imaginaires : $\sigma_1^2 = N\sigma_0^2$. Ceci découle directement du théorème central limite [42].

À présent, nous ne modifions que le SMM, c'est-à-dire que nous considérons une marche aléatoire A_c de p vecteurs qui s'ajoutent à un vecteur constant A_u . Par soucis de simplicité et sans perte de généralité, nous supposons A_u réel positif. Pour se ramener au cas général, il suffit de faire une rotation dans le plan complexe. À présent, le maximum de probabilité que la transmission ait les valeurs (R, I) est translaté autour du point $R = A_u$, ce qui donne :

$$p_{R,I}(R, I) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(R-A_u)^2+I^2}{2\sigma^2}} \quad (5.19)$$

où la variance σ^2 est donnée par : $\sigma^2 = p\sigma_0^2$. Un simple changement de variable permet alors d'obtenir la FDP jointe d'amplitude $A = \sqrt{R^2 + I^2} > 0$ et de phase $\theta = \arctan \frac{I}{R} \in [-\pi, \pi]$:

$$p_{A,\theta}(A, \theta) = \frac{A}{2\sigma^2} e^{-\frac{A^2+A_u^2-2AA_u \cos \theta}{2\sigma^2}} \quad (5.20)$$

Pour obtenir les FDP en amplitude et en phase il suffit d'intégrer la FDP jointe respectivement sur la phase et l'amplitude. Un deuxième changement de variable simple ($I = A^2$) permet d'obtenir la FDP d'intensité à partir de la FDP d'amplitude. Nous obtenons [42] :

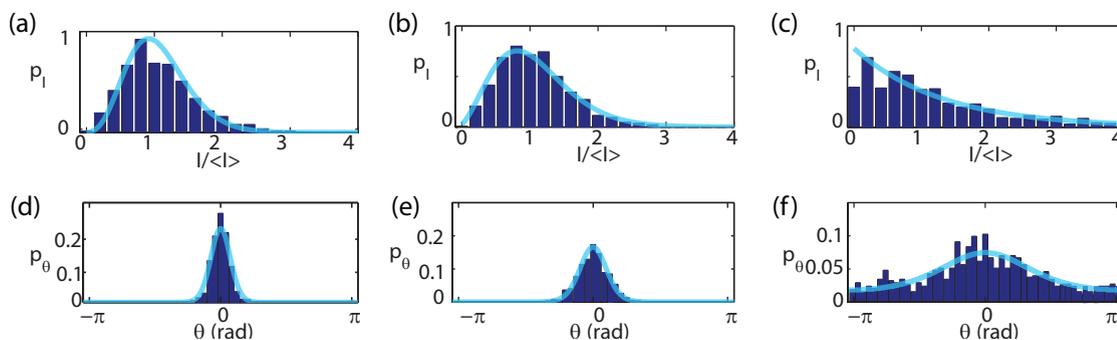


FIGURE 5.14: (a,b,c) Fonctions de densité de probabilité de l'intensité de la transmission pour les 3 rapports N/\tilde{p} précédents, respectivement $N\tilde{p} = 21, 6$, $N\tilde{p} = 12$, $N/\tilde{p} = 1, 36$. (d,e,f) Idem pour les fonctions de densité de probabilité de la phase de la transmission. Courbes bleues continues : courbes correspondantes aux FDP théoriques données par les équations 5.21.

$$\begin{cases} p_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2+A_u^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{AA_u}{\sigma^2}\right) \\ p_I(I) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I+A_u^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\sqrt{I}A_u}{\sigma^2}\right) \\ p_\theta(\theta) = \frac{e^{-\frac{A_u^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{A_u}{\sigma} e^{-\frac{A_u^2}{2\sigma^2} \sin^2 \theta} \cos \theta \frac{1+\text{Erf}\left(\frac{A_u \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{2} \end{cases} \quad (5.21)$$

où I_0 est une fonction de Bessel modifiée qui vérifie $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} dt$, et où Erf est la fonction erreur définie par : $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

La FDP p_A suit une statistique ricienne, alors que p_I suit une statistique appelée ricienne modifiée. Deux quantités interviennent pour définir ces FDP, A_u et $\sigma = \tilde{A}_c/\sqrt{2}$. Pour $A_u \gg \sigma$, les FDP en amplitude et en intensité sont non triviales. En revanche la FDP p_θ peut être approximée par une gaussienne :

$$p_\theta(\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/A_u} e^{-\frac{\theta^2}{2(\sigma/A_u)^2}} \quad (5.22)$$

Au contraire, pour $A_u \ll \sigma$, A_u devient négligeable. Les équations 5.21 deviennent les FDP attendues pour une simple somme de vecteurs aléatoires, sans vecteur constant supplémentaire, soit des FDP de Rayleigh pour l'amplitude, une FDP exponentiellement décroissante pour l'intensité et une FDP uniforme pour la phase :

$$\begin{cases} p_A(A) \approx \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \\ p_I(I) \approx \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} \\ p_\theta(\theta) \approx \frac{1}{2\pi} \end{cases} \quad (5.23)$$

À partir des mesures de transmission avant optimisation présentées sur les figures 5.13 (a,b,c), nous pouvons évaluer la moyenne et la variance de ces transmissions :

$$\begin{cases} A_u = \langle t \rangle \\ \sigma^2 = \langle |t - A_u|^2 \rangle \end{cases} \quad (5.24)$$

Sans paramètre d'ajustement, nous superposons les courbes théoriques obtenues (équation 5.21) aux histogrammes des figures 5.14 (a-f). Ces courbes théoriques correspondent remarquablement bien aux mesures expérimentales représentées sous forme d'histogrammes. En particulier, notons la très bonne correspondance entre la FDP ricienne modifiée et les histogrammes pour lesquels $A_u \gg \sigma$ (figures 5.14 (a,b)), qui devient une FDP exponentielle décroissante à $A_u \ll \sigma$ (figure 5.14 (c)), c'est-à-dire la FDP attendue pour une marche aléatoire sans vecteur constant. De même, nous observons une très bonne correspondance de la

FDP de la phase quasi-gaussienne à $A_u \gg \sigma$ aux histogrammes expérimentaux (figures 5.14 (d,e)), et qui devient une FDP quasi-uniforme à $A_u \ll \sigma$ (figure 5.14 (f)), c'est-à-dire la FDP attendue pour une marche aléatoire sans vecteur constant.

Nous avons ainsi mis en évidence une transition entre deux régimes. Cette transition a lieu lorsque les corrélations entre les éléments du SMM sont importantes. Le nombre de modes contrôlés n'est plus directement donné par le nombre d'éléments du modulateur p . Cependant, l'interprétation en terme de marches aléatoires reste remarquablement valable. Lorsque le nombre de modes contrôlés, \tilde{p} est inférieur à $N/2$ la cavité est dominée par un vecteur constant A_u qui dépend de la cavité. Le contrôle du SMM est marginal dans ce cas. La transmission reste limitée à une petite partie du plan complexe et les FDP correspondent à une somme de vecteurs aléatoires avec un vecteur constant. Au contraire, pour $\tilde{p} > N/2$, le SMM contrôle plus de la moitié des modes de la cavité. Dans ce cas, la transmission est dominée par le SMM dont le contrôle est maximal. Une optimisation permet d'atteindre une transmission dans n'importe quelle partie du plan complexe. Les FDP de la transmission tendent dans ce cas vers les FDP d'une somme de vecteurs aléatoires. Ceci nous permet de quantifier les conditions requises pour que le SMM contrôle le champ dans une cavité. Les applications envisageables dans ce régime seraient celles de brasseurs de modes, par exemple en chambre réverbérante ou dans un four micro-onde.

Nous allons à présent nous pencher sur ce qui arrive au delà de cette transition, lorsque la densité modale décroît encore

5.3.3 (iii) Cas des cavités de très haut facteur de qualité, ou de petit volume, $N < 1$

5.3.3.1 Concept

Que se passe-t-il si le nombre de modes N contribuant à la DOS à une fréquence donnée est encore diminué, jusqu'à ce qu'en moyenne, il soit inférieur à 1 ? Cela signifie que la transmission initiale est très faible, uniquement canalisée par la résonance la plus proche de manière inefficace. Il n'y a plus de modes dans la cavité, et nous ne pouvons plus parler de marches aléatoires (figure 5.15). Le processus d'optimisation peut-il encore fonctionner ? Une telle optimisation est réalisable si le nombre de modes N est diminué. Ceci peut être obtenu avec une cavité de volume restreint ou un facteur de qualité très élevé.

Pour répondre à cette question, nous avons effectué une autre série de mesures. Malheureusement notre SMM possède une dissipation intrinsèque qui limite

les facteurs de qualité que nous pouvons atteindre, même avec une cavité de coefficient Q très élevé. L'introduction du SMM dans la cavité diminue Q irrémédiablement vers 1100. Cependant le nombre de modes n'est pas uniquement déterminé par le facteur de qualité, mais aussi par le volume de la cavité : $N(\omega) \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{V}{Q} \frac{\omega^3}{c_0^3}$. Nous allons donc utiliser une cavité de dimension restreinte pour atteindre ce régime.

5.3.3.2 Vérification expérimentale à petit volume

Nous fabriquons une petite cavité de dimension 12 cm par 12 cm par 24 cm. Nous remplaçons une paroi de 24 cm par 12 cm par un petit SMM de 8 éléments. Nous insérons également un petit brasseur de modes, et deux antennes de dimensions très petites (donc inadaptées en impédance et qui ne sont pas source de dissipation notable). Mis à part ses dimensions réduites, ce montage expérimental (représenté sur la figure 5.16 (a)) est identique à celui utilisé précédemment (figure 5.4). Nous tentons d'en optimiser le facteur de qualité et de diminuer toutes les sources de dissipation. Nous parvenons à atteindre une valeur de $N \approx 2$ à une fréquence de travail de 2,47 GHz.

Nous procédons alors à l'optimisation de la transmission entre les deux antennes avec le mini-SMM. Les spectres de la transmission à plusieurs itérations sont représentés sur la figure 5.16 (b). Comme le SMM n'a que 8 éléments, la transmission est optimisée après seulement 8 itérations en moyenne. A chacune de ces itérations, la transmission à 2,47 GHz augmente, pour une transmission finale égale à 3 fois la transmission initiale, soit un gain η d'environ 9. La conclusion de cette expérience est que l'approche d'optimisation reste valide, même à faible densité modale. Il semble ainsi que l'on puisse créer une résonance à la fréquence

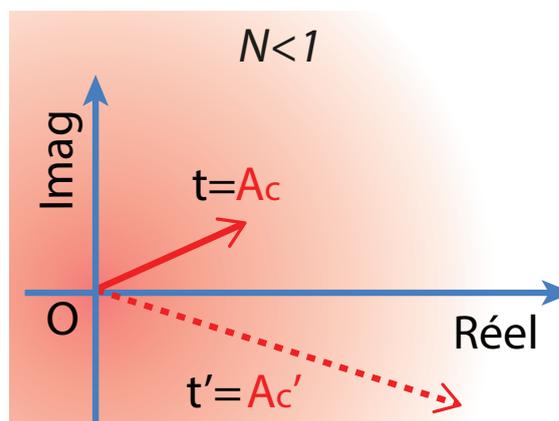


FIGURE 5.15: Représentation de la transmission dans le plan de Fresnel pour le cas iii. Un unique mode est contrôlé par le SMM. Trait plein : avant optimisation. Tirets : après.

de travail dans une cavité, puisque nous avons obtenu un spectre de transmission piqué à la fréquence de travail en partant d'un spectre plat.

Nous avons montré expérimentalement que l'approche reste valide pour un nombre limité de modes dans la cavité. Cependant, nous l'avons vérifié à faible volume et faible facteur de qualité, c'est-à-dire dans des conditions présentant peu de corrélations dues à la réverbération. Nous ne pouvons pas vérifier si cela reste valable à plus hauts facteurs de qualité en expérience à cause de la dissipation intrinsèque du SMM. Nous avons alors recours à des simulations numériques.

5.3.3.3 Vérification numérique à haut facteur de qualité

Comme en expérience nous sommes limités par la dissipation du SMM, nous menons une série de simulation avec le logiciel commercial COMSOL pour atteindre $N \ll 1$. Comme nous pouvons obtenir des très hauts facteurs de qualité en simulation, supérieurs à 10^5 , nous augmentons le volume de la cavité (sa surface en fait). La cavité est un billard à deux dimensions en forme de D qui est ergodique (figure 5.17 (a)). Le rayon du cercle tronqué est de 20λ et la paroi est divisée en éléments de dimensions $\lambda/2$. Parmi ceux-ci nous sélectionnons aléatoirement 20 éléments qui constituent notre SMM, et dont nous modifions la condition aux limites de PEC à PMC.

Les spectres obtenus aux étapes successives de la simulation de l'optimisation sont représentés sur la figure 5.17 (b). Nous pouvons observer une faible densité

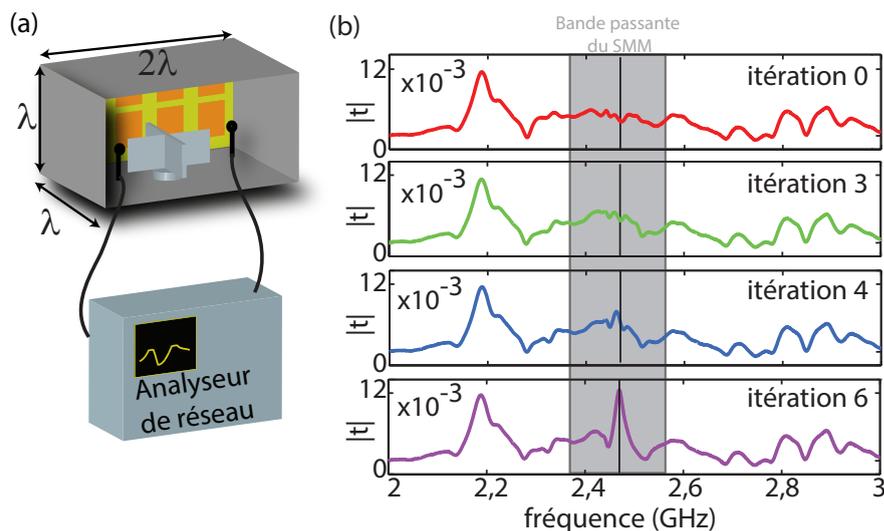


FIGURE 5.16: Optimisation de la transmission à faible densité modale ($N \approx 2$). (a) Montage expérimental. (b) Spectres de transmission à plusieurs étapes de l'optimisation.

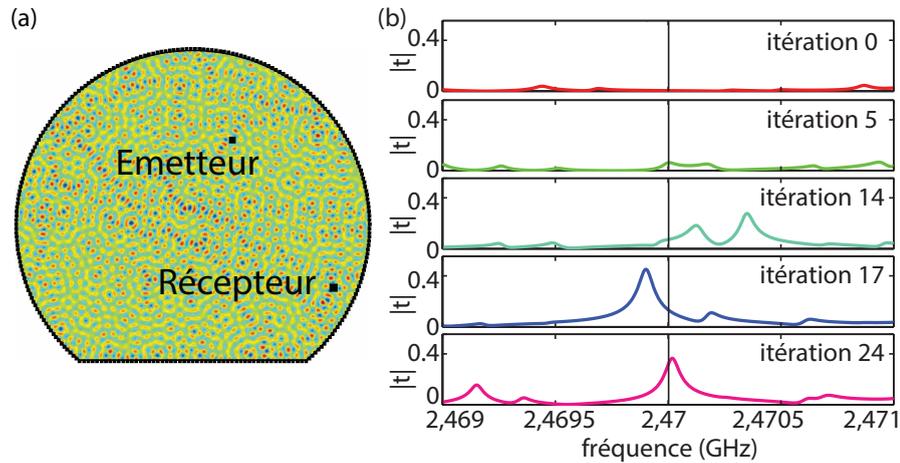


FIGURE 5.17: Optimisation de la transmission en simulation à faible densité modale. (a) Cavité 2D simulée de rayon 20λ et de facteur de qualité $Q = 10^5$ ($N \approx 10^{-6}$). Le SMM possède 20 éléments. (b) Spectres de transmission à plusieurs étapes de l'optimisation.

modale et nous évaluons $N \approx 0,1$. Avant l'optimisation le spectre est plat et la transmission nulle à la fréquence désirée $f_0 = 2,47$ GHz. Nous voyons apparaître une résonance à f_0 à la cinquième itération, ce qui augmente légèrement la transmission. La résonance est amplifiée à l'itération 14, mais la fréquence associée est trop éloignée de f_0 pour accroître suffisamment la transmission. À l'itération 17, une autre résonance est trouvée, de fréquence plus proche mais inférieure à f_0 . Enfin, à la 24^e itération, l'algorithme trouve une résonance très proche de f_0 , et très efficace. Après cela, l'algorithme sature sans plus trouver de solution améliorant la transmission. Le gain total est supérieur à 100, car le facteur de qualité de la résonance est élevé.

Ces résultats numériques achèvent de valider notre approche dans les cas pour lesquels la densité modale est très faible. Même si nous ne pouvons plus parler de marche aléatoire, et même si initialement il n'y a pas de modes au voisinage de la fréquence de travail. L'optimisation crée justement des modes et permet de régler finement leurs fréquences de résonance.

5.3.3.4 Vers des cavités à hauts facteurs de qualité reconfigurable

À chaque itération, l'algorithme change les conditions aux limites, et teste une nouvelle cavité. L'optimisation revient donc simplement à trouver la cavité qui possède des résonances les plus proches possibles de la fréquence d'optimisation. En d'autres termes cette approche permet de choisir ou de modifier la fréquence de résonance d'une cavité à volonté et de manière configurable.

Ceci ouvre la voie à des applications intéressantes en physique fondamentale pour concevoir des cavités de fréquences de résonance reconfigurables. Il reste cependant des progrès techniques à faire avant d'en arriver là. Ceci nécessite de concevoir de meilleurs SMM, sans dissipation, et contrôlant plusieurs déphasages sur une bande passante plus large. Nous pourrions alors imaginer des cavités monomodes reconfigurables, par exemple pour exacerber des interactions ondes-matières à des longueurs d'onde variables. Nous pourrions alors trouver des conditions permettant de passer de manière continue d'une fréquence de résonance à une autre.

5.3.4 Conclusion : les différents régimes de contrôle

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à modéliser et à identifier trois régimes de contrôle de la cavité. Le mode de fonctionnement du SMM et son contrôle sur la transmission dans la cavité dépend essentiellement de deux paramètres : le nombre d'éléments contrôlés et le nombre moyen de modes à la fréquence de travail. Lorsque la densité de modes est élevée (à bas facteur de qualité ou grand volume), chaque élément du SMM contrôle en moyenne un mode. L'optimisation de la transmission est alors très analogue à celles effectuées en optique des milieux diffusants, bien que dans notre cas, nous modifions le milieu au fur et à mesure de l'optimisation. Lorsque le nombre de modes dans la cavité est diminué, nous avons observé et étudié une transition qui a lieu lorsque le SMM contrôle la moitié des modes de la cavité. Le SMM pilote alors complètement la transmission dans la cavité. Si le nombre de modes est encore drastiquement diminué, nous avons vu que nous ne pouvons plus considérer que la transmission effectue une marche aléatoire sur les modes, mais que notre approche d'optimisation reste valable et revient à créer une résonance à la fréquence désirée en trouvant la cavité qui correspond le mieux.

De nombreux points intéressants et interrogations ont été laissés en route. Quel est le rôle des corrélations de champ dans la cavité ? Pouvons-nous décrire la dynamique (l'évolution du gain en fonction des itérations successives de l'algorithme) de l'optimisation ? Répondre à ces questions nécessite de faire des mesures à de très hauts tout comme à de bas facteurs de qualité. Ces facteurs de qualité ne sont pas facilement réalisables en expérience à cause de la dissipation intrinsèque du SMM. Ils sont également difficiles à obtenir en simulations par éléments finis, qui nécessitent d'échantillonner excessivement bien le domaine. Cela produit des calculs très longs et lourds, même pour des cavités théoriques à seulement deux dimensions. La mémoire nécessaire et le temps requis dépassent largement les outils dont nous disposons.

Nous avons donc cherché à développer une méthode plus rapide que les éléments finis pour calculer les modes et la transmission dans une cavité dont les conditions aux limites sont un mélange de conditions de Neumann et de Dirichlet.

5.4 Approche numérique

L'objectif de cette partie est de présenter une méthode permettant de calculer plus efficacement qu'avec des méthodes de types éléments finis les modes et la fonction de Green d'une cavité. Les conditions aux limites de cette cavité peuvent être mixtes (en partie Neumann, en partie Dirichlet, voire une superposition des deux).

Dans un premier temps nous analysons une approche intéressante proposée par Heller [12]. Cette approche propose de simuler les conditions aux limites d'une cavité avec des diffuseurs. En effet, nous avons déjà remarqué au cours de cette thèse que les conditions aux limites et les diffuseurs se comportent comme des sources secondaires. Cette méthode permet de calculer la fonction de Green dans une cavité qui possède des conditions aux limites de Dirichlet à une fréquence donnée et pour un facteur de qualité arbitraire en une simple inversion de matrice. Nous verrons que cette approche se révèle cependant erronée pour le cas qui nous intéresse.

Grâce aux conseils de Josselin Garnier, nous avons alors développé une méthode basée sur les potentiels de couche, qui permet de trouver les modes propres d'une cavité pour des conditions aux limites mixtes. Nous présentons cette méthode, montrons qu'elle permet de retrouver les modes propres attendus pour des cavités de petites dimensions et de conditions aux limites simples (uniquement de Neumann ou de Dirichlet). Pour finir, nous exposons quelques résultats obtenus avec cette méthode pour des cavités de plus grandes dimensions avec des conditions aux limites mixtes, avant de souligner les limites de cette approche.

5.4.1 La méthode de la matrice de transmission

Au chapitre 1, nous avons souligné un certain nombre de similarités existant entre les milieux réverbérants et multidiffusants. Entre autres, les conditions aux limites des milieux réverbérants se comportent comme des sources secondaires, tout comme les diffuseurs des milieux diffusants.

Or, il existe une méthode efficace pour calculer la fonction de Green d'un milieu diffusant, basée sur la formule de Lippman-Schwinger [170]. Cette formule

permet d'écrire le champ à un endroit comme la somme du champ incident et du champ diffusé. Chaque diffuseur est modélisé par un potentiel \mathcal{V} qui représente l'efficacité de la diffusion, et qui diffuse le champ total. Le champ à la position \mathbf{r} s'écrit donc comme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d\mathbf{r}'^3 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{V}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (5.25)$$

où $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0$ est la fonction de Green de l'espace libre (sans diffuseurs), et \mathbf{E}_0 le champ incident.

La résolution dans le cas général de cette équation n'est pas simple. Une méthode consiste à poser $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, puis à réitérer l'écriture de l'équation jusqu'à un ordre suffisant pour obtenir une approximation du champ \mathbf{E} .

Un cas particulièrement intéressant est celui pour lequel les diffuseurs sont ponctuels (ou peuvent être considérés comme tels car ils sont de taille très inférieure à la longueur d'onde). Dans ce cas le potentiel \mathcal{V} s'écrit comme une somme de distribution de Dirac : $\mathcal{V}(\mathbf{r}') = \sum_n \gamma_n \delta(\mathbf{r}')$. γ_n représente le coefficient de diffusion du n^e diffuseur, et doit vérifier certaines conditions comme le théorème optique pour respecter la conservation de l'énergie. L'équation 5.25 devient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_n \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \gamma_n \mathbf{E}(\mathbf{r}_n) \quad (5.26)$$

où \mathbf{r}_n est la position du diffuseur indicé par n . En particulier le champ aux positions \mathbf{r}_n peut s'écrire comme un vecteur $\mathbf{E} = (\mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \dots)$. En posant γ la matrice diagonale des coefficients γ_n , l'équation précédente devient sous forme matricielle :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0 \gamma \mathbf{E} \quad (5.27)$$

soit simplement :

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{1} - \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0 \gamma \right)^{-1} \mathbf{E}_0 \quad (5.28)$$

Ainsi une simple inversion de matrice permet de connaître le champ total sur chaque diffuseur en fonction du champ incident \mathbf{E}_0 , puis en tout point du milieu.

Da Luz, Lupu-Sax et Heller proposent de s'inspirer de cette méthode pour simuler une cavité avec des diffuseurs ponctuels [12]. En effet, un diffuseur ponctuel rayonne de manière isotrope, et une partie de l'onde incidente est réfléchie vers la source. Ici le diffuseur remplace les conditions aux limites, et n'a pas besoin de vérifier la conservation de l'énergie et le théorème optique : il suffit donc d'augmenter le coefficient γ pour simuler efficacement une cavité. Ainsi, nous faisons tendre γ vers l'infini pour obtenir une cavité parfaite, tandis que pour $\gamma = 0$, nous retrouvons le champ incident. Nous considérons donc la surface de la cavité

$\partial\Omega$ comme un ensemble de diffuseurs ponctuels. Pour simplifier, le champ est supposé scalaire. Afin de généraliser à différentes conditions aux limites, le potentiel proposé est le suivant :

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} d\mathbf{r}'^2 \gamma(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \alpha(\mathbf{r}') - [1 - \alpha(\mathbf{r}')] \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla}{k} \right\} \quad (5.29)$$

où $\mathbf{n} \cdot \nabla$ est le gradient pris normalement à la surface $\partial\Omega$. α est un coefficient entre 0 et 1 qui dépend du type de conditions aux limites. Par exemple $\alpha = 1$ mène à des conditions aux limites de Dirichlet (annulation de E sur $\partial\Omega$), tandis que $\alpha = 0$ mène à des conditions aux limites de Neumann ($\mathbf{n} \cdot \nabla E = 0$).

Cette méthode est très esthétique et efficace d'un point de vue numérique : il suffit d'inverser une matrice pour connaître le champ à une fréquence donnée en tout point de la cavité, et le coefficient γ permet de faire varier la dissipation dans la cavité, soit encore le facteur de qualité. Cela aurait été idéal dans notre cas car la transmission est directement donnée par la fonction de Green (équation 1.41). Cependant, si les auteurs montrent que cette méthode fournit des résultats solides pour des cavités à 2D aux conditions aux limites de Dirichlet [12], malheureusement, ils ne vérifient pas cette approche pour des conditions de Neumann. Or, la formule de Lippman-Schwinger, n'est valable que pour un potentiel scalaire, ce qui n'est pas le cas de l'opérateur dérivé [171]. Le potentiel proposé est faux et ne permet pas de simuler des conditions aux limites de Neumann, même sur un cas très simple comme un plan infini parfait. La raison est que l'opérateur $\mathbf{n} \cdot \nabla$ n'est pas inversible en pratique. De plus, il ne suffit pas de changer le signe de γ pour passer de conditions aux limites de Dirichlet à Neumann.

Cette méthode n'est donc pas applicable en l'état à l'étude de nos cavités possédant des conditions aux limites mixtes. Nous ne sommes pas parvenus à la corriger. Josselin Garnier nous a alors soumis l'idée d'utiliser une méthode alternative adaptée aux cavités, et qui utilise la méthode des potentiels de couche.

5.4.2 La méthode des potentiels de couche

La méthode des potentiels de couche est connue et permet de trouver les fréquences et valeurs propres de cavités qui possèdent des conditions aux limites de Neumann [172]. Cette approche est purement monochromatique et valable pour des cavités parfaites (sans dissipation). Cette idée est étendue ici aux conditions aux limites mixtes. Une fois les modes connus, nous en déduisons la fonction de Green et incluons l'effet de la dissipation en attribuant une largeur spectrale à ces modes grâce à l'équation 1.46. $\partial\Omega_D$ désigne les parois où des conditions aux

limites de Dirichlet s'appliquent et $\partial\Omega_N$ les conditions aux limites de Neumann. Nous notons $\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{r}_c)} = \mathbf{n}(\mathbf{r}_c) \cdot \nabla$, avec \mathbf{r}_c un point de $\partial\Omega$.

Nous définissons les fonctionnelles \mathcal{S} et \mathcal{D} appelées respectivement les potentiels de simple et double couche :

$$\begin{cases} \mathcal{S}[\phi](\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') d\sigma(\mathbf{r}'), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \mathcal{D}[\phi](\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \phi(\mathbf{r}') d\sigma(\mathbf{r}'), & \mathbf{r} \in \Omega \end{cases} \quad (5.30)$$

où $\sigma(\mathbf{r}')$ représente la surface élémentaire de la paroi en \mathbf{r}' . On peut montrer que [173] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}[\phi]}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})}(\mathbf{r}) = -\frac{\phi(\mathbf{r})}{2} + \kappa^*[\phi](\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial\Omega \\ \mathcal{D}[\phi](\mathbf{r}) = \frac{\phi(\mathbf{r})}{2} + \kappa[\phi](\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.31)$$

où nous avons défini les fonctionnelles κ et κ^* :

$$\begin{cases} \kappa^*[\phi](\mathbf{r}) = \text{VP} \left\{ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})} \phi(\mathbf{r}') d\sigma(\mathbf{r}') \right\}, & \mathbf{r} \in \partial\Omega \\ \kappa[\phi](\mathbf{r}) = \text{VP} \left\{ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r}')} \phi(\mathbf{r}') d\sigma(\mathbf{r}') \right\}, & \mathbf{r} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.32)$$

Si (ω, ψ) est un couple de fréquence et vecteur propre, alors le théorème de Green implique :

$$\psi(\mathbf{r}) = -\mathcal{S}[\partial_{\mathbf{n}}\psi](\mathbf{r}) + \mathcal{D}[\psi](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (5.33)$$

Nous notons u la restriction de ψ à $\partial\Omega$: $u = \psi|_{\partial\Omega}$ (u est donc nulle sur $\partial\Omega_D$). De même nous notons $v = \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{r})}\psi|_{\partial\Omega}$ qui est nulle sur $\partial\Omega_N$. Ces fonctions u et v doivent alors satisfaire le système :

$$\begin{cases} \frac{v(\mathbf{r})}{2} + \kappa^*[v](\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r})}\mathcal{D}[u](\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial\Omega_D \\ \frac{u(\mathbf{r})}{2} - \kappa[u](\mathbf{r}) - \mathcal{S}[v](\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial\Omega_N \end{cases} \quad (5.34)$$

En pratique, il faut discrétiser la frontière $\partial\Omega$ en N_C éléments. Le calcul des fonctionnelles se ramène alors à des produits matriciels et l'équation précédente à un système de N_C équations à N_C inconnues. Ce système admet une solution différente de la solution triviale nulle seulement si son déterminant est nul. Cette solution non triviale est le vecteur propre du système matriciel précédent relatif à la valeur propre nulle. Une fois ψ connue sur le contour $\partial\Omega$, nous avons u en tout point de Ω grâce au théorème de Green et à l'équation 5.33.

Une fois les fréquences ω_n et les modes propres ψ_n connus, il nous suffit de les sommer et de définir une largeur spectrale Γ moyenne pour obtenir la fonction

de Green entre deux points de la cavité (équation 1.46) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \approx c_0^2 \sum_n^{\infty} \frac{\psi_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\Gamma}{2}}$$

Dans la partie suivante, nous montrons comment mettre numériquement en pratique ces résultats.

5.4.3 Implémentation et résultats

5.4.3.1 Calcul du système linéaire d'équations

Pour simplifier un peu l'algorithme, nous nous contentons d'étudier une cavité à 2D dans un premier temps. Nous adoptons la convention utilisée par les mathématiciens pour la fonction de Green. La fonction de Green de l'espace libre à deux dimensions s'écrit :

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = -\frac{i}{4} H_0^1(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (5.35)$$

où H_0^1 est une fonction de Hankel de premier type, et dont les dérivées d'ordres un et deux sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dH_n^{(1)}(x)}{dx} = n \frac{H_n^{(1)}(x)}{x} - H_{n+1}^{(1)}(x) \\ \frac{dH_0^1(x)}{dx} = -H_1^{(1)}(x) \\ \frac{d^2 H_0^1(x)}{dx^2} = -\frac{H_1^{(1)}(x)}{x} + H_2^{(1)}(x) \end{cases} \quad (5.36)$$

Nous considérons donc une cavité bidimensionnelle de dimension L_x par L_y . Nous discrétisons son périmètre en éléments de dimension $\lambda/2p$, avec p un entier strictement supérieur à 1. Nous obtenons ainsi N_C éléments sur le contour, dont N_D imposent des conditions de Dirichlet et N_N des conditions de Neumann. Le nombre total d'éléments de la surface de la cavité est donné par $N = \frac{L_x L_y}{(\lambda/2p)^2}$. Nous notons la position du centre du n^e élément surfacique ou du contour \mathbf{r}_n . Nous notons $\tilde{v} = (v(\mathbf{r}_1), v(\mathbf{r}_2), \dots)$ et $\tilde{u} = (u(\mathbf{r}_1), u(\mathbf{r}_2), \dots)$ pour $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \in \partial\Omega^{N_C}$.

L'équation 5.34 devient pour tout élément m du contour :

$$\begin{cases} \frac{v(\mathbf{r}_m)}{2} + \sigma \sum_{n=1}^{N_D} K_{m,n}^* v(\mathbf{r}_n) - \sigma \sum_{n=1}^{N_N} D_{m,n}^2 u(\mathbf{r}_n) = 0 \\ \frac{u(\mathbf{r}_m)}{2} - \sigma \sum_{n=1}^{N_N} K_{m,n} u(\mathbf{r}_n) - \sigma \sum_{n=1}^{N_D} S_{m,n} v(\mathbf{r}_n) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

où σ désigne la longueur de chaque élément du contour ($\lambda/2p$). Les matrices \mathbf{K} , \mathbf{K}^* , \mathbf{S} et \mathbf{D}^2 sont données par :

$$\begin{cases} S_{m,n} = G_0(\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|) \\ K_{m,n}^* = K_{n,m} = \frac{i}{4}k \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_m) H_1^{(1)}(k\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|) \\ D_{m,n}^2 = -\frac{ik}{4} \mathbf{n}(\mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_n) \left[\frac{H_1^{(1)}(k\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|)}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|} - kH_2^{(1)}(k\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n\|) \right] \end{cases} \quad (5.38)$$

Nous approximations les éléments diagonaux de S à 0 : c'est beaucoup plus rapide que de calculer la valeur moyenne de la fonction de Green G_0 sur la surface de l'élément correspondant.

Les valeurs diagonales de \mathbf{K} sont inversement proportionnelles au rayon de courbure de la paroi, et sont donc rigoureusement nulles pour une cavité rectangulaire (sauf les angles qu'il faut éviter ou arrondir).

Nous posons \mathbf{w} le vecteur colonne $w = {}^T(\tilde{u}_{|\partial\Omega_N}, \tilde{v}_{|\partial\Omega_D})$. Le système d'équation précédente (5.37) s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\mathbf{W}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

où \mathbf{W} est la matrice définie par blocs comme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}_{N_D}}{2} + \mathbf{K}_{N_D}^* \sigma & -\mathbf{D}_{(N_D, N_N)}^2 \sigma \\ \mathbf{S}_{(N_N, N_D)} \sigma & \frac{\mathbf{1}_{N_N}}{2} - \mathbf{K}_{N_N} \sigma \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

où nous avons indiqué en indice la dimension de chaque matrice.

Comme nous recherchons une solution \mathbf{w} non nulle, \mathbf{w} doit être un vecteur propre de \mathbf{W} relatif à la valeur propre nulle, ce qui n'est possible que pour certaines fréquences.

Une fois un \mathbf{w} trouvé, nous avons le vecteur d'onde sur le contour. Nous en déduisons le mode propre dans tout le domaine Ω grâce à l'équation 5.33 :

$$\psi = -\sigma \mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}} + \sigma \mathbf{D}^1 \tilde{\mathbf{v}} \quad (5.41)$$

où les éléments de \mathbf{D}^1 se calculent formellement comme :

$$D_{m,n}^1 = \frac{1}{2} \delta_{m,n} + \sigma K_{m,n} \quad (5.42)$$

Nous avons décrit, calculé et identifié le système linéaire à résoudre. Nous allons à présent détailler l'algorithme permettant de calculer la fonction de Green ou la transmission dans la cavité pour des conditions aux limites données.

5.4.3.2 Description des étapes de l'algorithme

L'inconvénient majeur du calcul précédent est qu'il n'est valable que pour une cavité sans dissipation. Nous présentons à présent l'algorithme utilisé pour obtenir la fonction de Green entre deux points distincts situés dans la cavité.

- Dans un premier temps, nous avons besoin de définir un segment de nombre d'onde $[k_{min}, k_{max}]$, centré sur la fréquence optimisée et correspondant à $k_0 = \omega_0/c_0$, autour duquel nous allons chercher les modes propres. Le nombre moyen de modes sur cette gamme de fréquence peut être évalué par la loi de Weyl pour une cavité 2D et une onde scalaire :

$$N(k_0) \approx \frac{1}{\pi^2} L_x L_y k_0 \Delta k \quad (5.43)$$

où $\Delta k = k_{max} - k_{min}$. Nous devons nous assurer d'avoir au moins un mode dans la bande passante définie par Δk , même à haut facteur de qualité. Cependant, la loi de Weyl ne donne pas un nombre de modes exact, mais seulement une estimation, une espérance mathématique. Si il n'y a pas de modes dans la bande passante choisie, on trouve une transmission nulle, alors qu'elle est assurée par un mode en dehors de cette bande passante qui a une forme lorentzienne. Pour augmenter la probabilité d'avoir au moins un mode dans la bande passante, nous cherchons à avoir 10 modes en moyenne. Nous pouvons ainsi définir une bande passante minimale :

$$\Delta k_1 = \frac{10\pi^2}{L_x L_y k_0} \quad (5.44)$$

D'autre part, l'amplitude donnée a fortiori à ces modes est semblable à une lorentzienne de largeur Γ pour un facteur de qualité de $Q = \frac{k_0}{c_0\Gamma}$. Suivant la précision désirée, nous pouvons choisir une bande passante plus ou moins large. Nous choisissons donc de chercher des modes jusqu'à plus ou moins $4c\Gamma$. Nous définissons ainsi une deuxième bande passante minimale :

$$\Delta k_2 = 8c_0\Gamma \quad (5.45)$$

La bande-passante sur laquelle nous devons chercher les modes propres est finalement donnée par :

$$\Delta k = \max(\Delta k_1, \Delta k_2) \quad (5.46)$$

ce qui définit par la même occasion k_{max} et k_{min} .

- Trouver précisément les zéros (dont le nombre est inconnu) d'une fonction à valeur complexe est un problème algorithmique compliqué, même en se restreignant à un intervalle borné Δk . La méthode choisie est la plus simple : nous calculons le module du déterminant de la matrice \mathbf{W} pour un grand nombre de fréquences de la bande passante, et nous regardons pour quelles valeurs de k cette fonction est proche de zéro. Nous avons donc besoin de discrétiser l'intervalle en un grand nombre de fréquences. Il nous faut minimum 10 points par modes, soit un nombre total de points $N_f = 10N(k_0) = \frac{10}{\pi^2} L_x L_y k_0 \Delta k$.
- Pour tous les k définis précédemment, nous calculons $f(k) = |\det \mathbf{W}(k)|$. La fonction f ne s'annule jamais exactement. Elle présente cependant un certain nombre de minima locaux qui correspondent aux fréquences propres attendues dans les cas connus (c'est-à-dire avec une cavité avec des conditions aux limites entièrement de Neumann ou entièrement de Dirichlet).
- Aux k pour lequel f présente un minimum local, nous calculons le vecteur propre correspondant à la valeur propre nulle : c'est le mode propre correspondant ψ sur le contour.
- Nous en déduisons ψ en tout point de la cavité.
- Nous en déduisons la fonction de Green entre deux points de la cavité : $G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \omega_0)$.

Dans la partie suivante, nous montrons que cet algorithme permet de retrouver les modes propres attendus et calculables analytiquement pour une cavité rectangulaire.

5.4.3.3 Validation à basse fréquence

Nous considérons des cavités rectangulaires et la méthode précédente est implémentée sous Matlab. Nous centrons l'étude des modes propres au voisinage de $f_0 = 2,47$ GHz, ce qui correspond à une longueur d'onde d'environ $\lambda_0 = 12,1$ cm. Dans un premier temps, nous étudions une petite cavité de dimension $L_x = \lambda_0/\sqrt{2}$ et $L_y = \sqrt{2}\lambda_0$, pour des conditions aux limites soit entièrement de Neumann, soit entièrement de Dirichlet. Comme la cavité est de petite dimension, nous discrétisons spatialement la cavité avec une grande précision, à $\lambda_0/20$. De même, nous adoptons un pas fréquentiel très fin en calculant $\det \mathbf{W}$ pour 1 000 fréquences pour des k entre 0 et 100 rad.m⁻¹, ce qui représente une dizaine de modes seulement.

Les figures 5.18 (a,c) présentent le module du déterminant (en bleu) calculé avec l'algorithme présenté précédemment pour les basses fréquences, et les compare aux valeurs théoriques attendues (en noir). Les figures 5.18 (b,d) illustrent les 8 premiers modes calculés avec la méthode précédente.

Nous pouvons observer un très bon accord entre les valeurs numériques trouvées et correspondant aux minima du module du déterminant de \mathbf{W} avec les valeurs théoriques attendues, que ce soit pour des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann. Nous pouvons observer l'augmentation de la densité spectrale de mode lorsque la fréquence augmente.

En supposant l'origine du repère au centre de la cavité, les modes de Dirichlet trouvés sont de la forme $\psi^D(x, y) = \cos \frac{\pi n_x x}{L_x} \cos \frac{\pi n_y y}{L_y}$ avec $(n_x, n_y) \in \mathbb{N}^{*2}$. Les modes s'annulent sur la paroi et correspondent bien aux modes théoriques attendus. Les modes de Neumann sont de la forme $\psi^N(x, y) = \sin \frac{\pi n_x x}{L_x} \sin \frac{\pi n_y y}{L_y}$ avec $(n_x, n_y) \in \mathbb{N}^2$. Nous pouvons observer des maxima du champ sur la paroi et donc en déduire une annulation de la dérivée normale. Dans les deux cas ces modes correspondent bien aux modes propres théoriques à basse fréquence.

Pour finir, nous utilisons cette méthode pour calculer les modes d'une cavité dont les conditions aux limites sont mixtes, représentées dans l'encadré sur la figure 5.18 (e). Les figures 5.18 (e,f) montrent respectivement le déterminant du système et les premiers modes propres de cette cavité. Nous notons que les modes obtenus sont cohérents avec les conditions aux limites imposées.

Ainsi, les résultats présentés sur la figure 5.18 reflètent avec précision les résultats théoriques, et valident l'approche numérique décrite dans ce chapitre. Cependant, nous pouvons déjà observer une limite à cette approche.

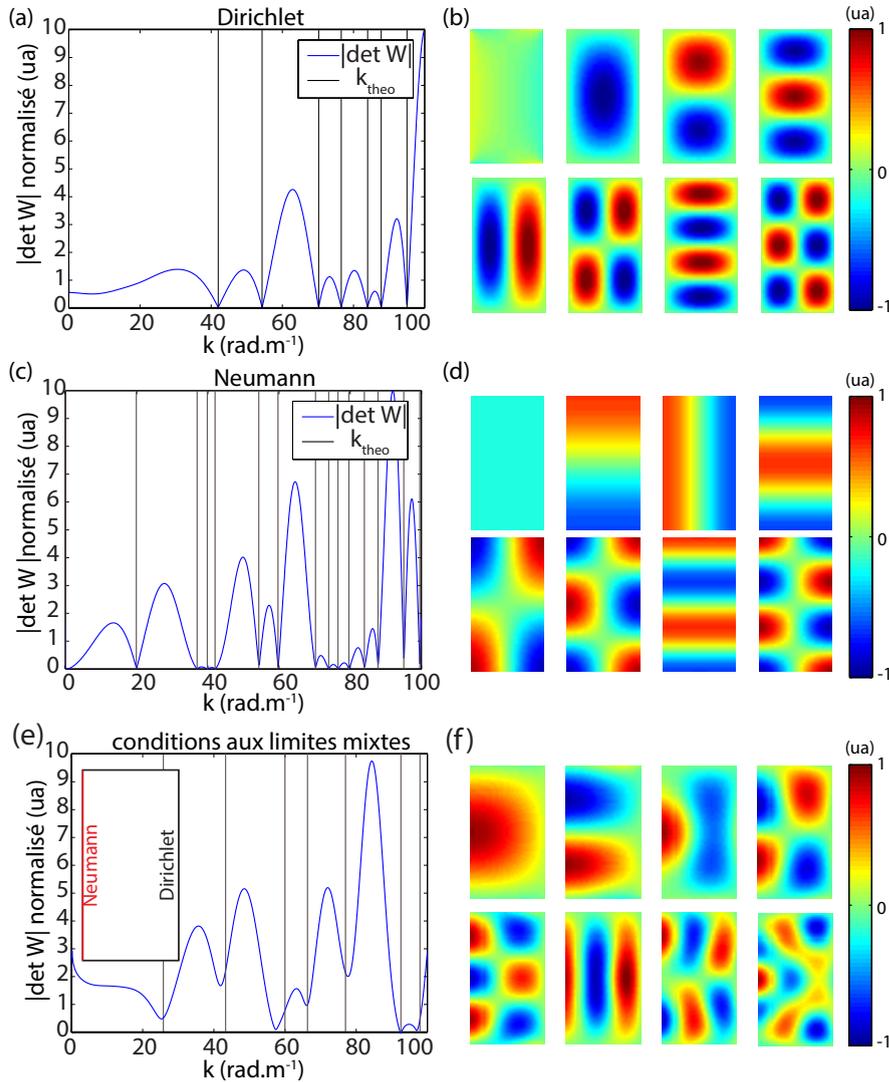


FIGURE 5.18: Comparaison de la méthode proposée à la théorie à basse fréquence. (a) Déterminant de la matrice \mathbf{W} pour des conditions aux limites de Dirichlet (courbe bleue). En noir : vecteurs d'onde théoriques. (b) Les 8 modes trouvés et correspondant aux minima locaux de la courbe précédente. (c,d) Idem que (a,b) pour des conditions aux limites de Neumann. (e,f) Idem avec des conditions aux limites mixtes.

À haute fréquence, la DOS augmente sensiblement avec la fréquence et les modes sont de plus en plus proches. Statistiquement quand la fréquence augmente, il est donc de plus en plus probable que deux modes soient séparés d'une fréquence inférieure à la fréquence de résolution du calcul. Dans ce cas, l'algorithme n'identifie qu'un seul de ces deux modes.

Ainsi si la méthode proposée trouve avec exactitude les fréquences propres et les modes propres de cavités connues, il arrive que l'algorithme ne parvienne pas à identifier certains modes. Dans ce qui suit, nous allons caractériser ces erreurs commises à plus hautes fréquences.

5.4.3.4 Caractérisation à haute fréquence

Les erreurs commises par l'algorithme peuvent être pour la plupart évitées, à condition de discrétiser la cavité et la bande passante de manière assez fine. Cela a évidemment un coût en terme de puissance de calcul et en temps. Comme souvent en simulation numérique, il faut alors faire un compromis entre la précision désirée et le temps de calcul. Afin d'optimiser ce compromis, nous caractérisons ici la proportion de modes manqués à haute fréquence, c'est-à-dire pour une grande cavité dont les dimensions font plusieurs dizaines de fois la longueur d'onde, et qui possède une DOS beaucoup plus élevée que dans la partie précédente.

Caractérisation en fonction de la discrétisation spatiale

Nous considérons à présent une cavité de dimension $L_x = 19\lambda_0$ et $L_y = 23\lambda_0$, avec des conditions aux limites de Neumann. Nous imposons un faible facteur de qualité ($Q = 100$), pour avoir statistiquement un grand nombre de modes à prendre en compte au voisinage de f_0 . Nous faisons varier les discrétisations spatiales et fréquentielles pour étudier leurs influences sur la proportion de modes qui ne sont pas identifiés par l'algorithme. Nous appelons N_f le nombre de fréquences auxquelles nous calculons $\det \mathbf{W}$ et N_{eig} le nombre de modes propres identifiés numériquement dans la bande passante considérée $[k_0(1 - 2/Q), k_0(1 + 2/Q)] = [49, 7; 53, 83]$ rad.m⁻¹. Cette géométrie de cavité étant intégrable, nous connaissons exactement le nombre théorique de modes dans cette bande passante : $N_{theo} = 219$. En effet, rappelons que les modes d'une cavité à deux dimensions de conditions aux limites de Dirichlet ont des fréquences propres vérifiant : $\omega = \pi c_0 \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2}$, où n_x et n_y sont des entiers non nuls.

Dans un premier temps nous posons $N_f \approx 10N$, et nous faisons varier la discrétisation spatiale en modifiant le nombre de cellules p remplissant une demi-longueur d'onde. La figure 5.19 représente le nombre de modes identifiés par l'algorithme en fonction du nombre d'éléments simulés par demi-longueur d'onde p . Sur la même figure, nous représentons le temps de calcul nécessaire en fonction de ce même p .

Le nombre de modes identifiés est très faible pour $p = 1$, ce qui représente un élément par demi-longueur d'onde. Ce n'est pas étonnant puisque dans ce cas nous sommes à la limite du critère de Shannon. Ensuite lorsque p augmente, le nombre de modes identifiés augmente également puis sature à une valeur de $N_{eig} = 185$ obtenue pour $p = 3$. Augmenter encore le nombre d'éléments n'apporte aucun bénéfice supplémentaire. Cela signifie que la méthode étudiée ne parvient pas à identifier 15% des modes propres. Ceci est du à l'échantillonnage fréquentiel insuffisant et à la présence de modes quasi-dégénérés. Le coût en temps de calcul

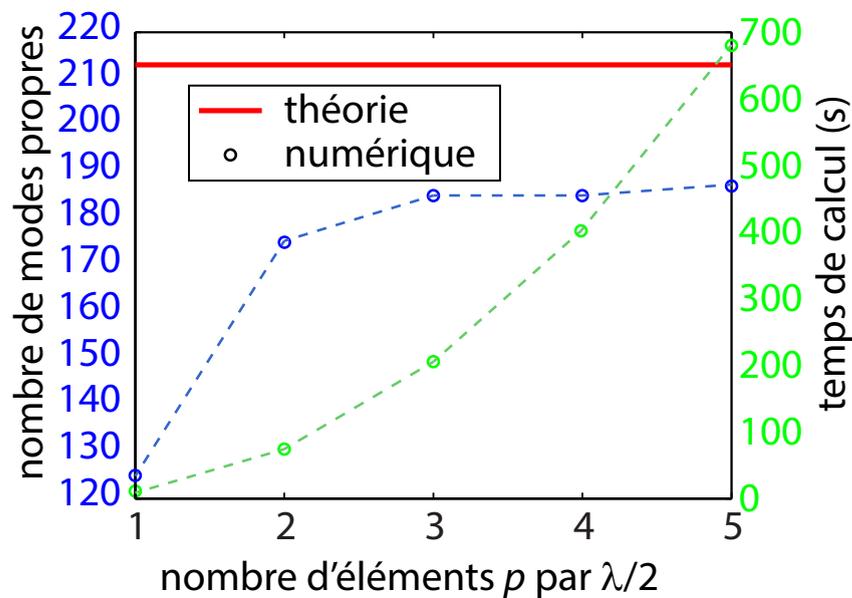


FIGURE 5.19: Nombre de modes trouvés (en bleu) en fonction du nombre d'éléments par demi-longueur d'onde à $N_f = 10N$. En rouge : nombre théorique de modes dans la bande passante. En vert : temps de calcul nécessaire ($t \propto p^{2,27}$).

est important à chaque augmentation du nombre d'éléments : une régression révèle que le temps de calcul est proportionnel à $t \propto p^{2,27}$.

Caractérisation en fonction de la discrétisation fréquentielle

Nous effectuons une deuxième série de simulation pour caractériser le nombre de modes non identifiés, en maintenant p fixé, et en faisant varier N_f entre 10 et 100. Ces résultats sont tracés sur la figure 5.20. De manière similaire à l'étude précédente, le nombre de modes identifiés augmente sensiblement pour les faibles valeurs de N_f puis sature au delà de $N_f = 40$. La valeur de N_f à laquelle ce phénomène de saturation intervient apparaît être indépendant de la valeur du pas spatial (p).

Ceci met en évidence qu'il faut améliorer simultanément les discrétisations spatiale et temporelle. Ainsi, le taux d'erreur descend à 10% pour $p = 3$ et $N_f = 40$ contre un taux d'erreur de 20% pour $p = 2$ et $N_f = 10$. Cependant cette amélioration s'effectue au prix d'une augmentation considérable du temps de calcul d'un facteur 10 (862 s contre 82 s).

En conclusion, la méthode numérique proposée est très efficace pour calculer les modes propres d'une cavité de petite dimension présentant des conditions aux limites mixtes. À haute fréquence (ou à grande dimension), il est difficile de résoudre tous les modes à cause de leur trop forte densité. L'algorithme ne parvient

alors pas à identifier certains modes. Trouver une très grande partie des modes (plus de 90%) d'une unique cavité demeure cependant réalisable à condition d'augmenter la discrétisation spatiale (p) et fréquentielle (N_f). Le temps de calcul suit une évolution telle que : $t \propto N_f \times p^{2,27}$, et peut donc se révéler très long.

Cette méthode permet de trouver la fonction de Green d'une cavité, mais ne se révèle pas être un algorithme très efficace pour simuler le fonctionnement de notre SMM avec exactitude. En effet, pour simuler une optimisation, il est nécessaire de calculer la transmission entre deux antennes à chaque itération de l'algorithme, ce qui représente une centaine de cavités par optimisation. De plus, il faut également simuler un grand nombre de processus (en pratique quelques centaines) d'optimisations pour obtenir une moyenne significative du gain η . Ainsi, pour calculer le gain numériquement nous avons besoin de simuler plusieurs milliers ou dizaines de milliers de cavités. Nous devons donc diminuer le temps de calcul pour chaque cavité, ce qui implique de réduire la précision des résultats obtenus. La méthode décrite peut donc nous fournir des résultats uniquement qualitatifs. Dans la partie suivante, nous décrivons certains résultats ainsi obtenus.

5.4.3.5 Résultats numériques

Taille des éléments du SMM

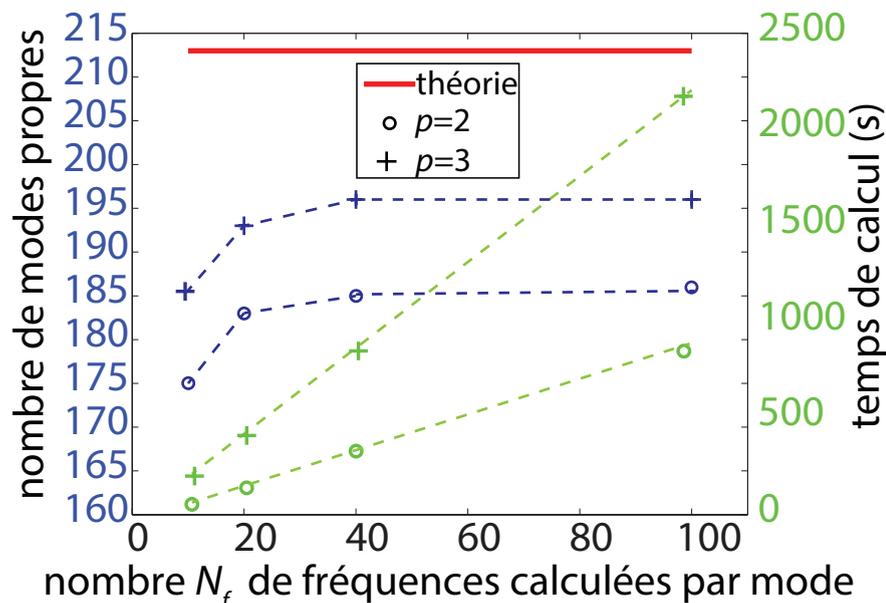


FIGURE 5.20: Nombre de modes trouvés (en bleu) en fonction du nombre moyen de fréquences calculées par nombre de modes, à $p = 2$ et $p = 3$. En rouge : nombre théorique de modes dans la bande passante. En vert : temps de calcul nécessaire ($t \propto N_f$).

Le SMM utilisé dans les parties précédentes possède des éléments résonants disposés tous les $\lambda/2$, c'est-à-dire à la fréquence de corrélation de la cavité. Une première question que nous pouvons nous poser est : quel gain obtiendrions-nous en disposant des éléments tous les $\lambda/4$? Nous pourrions mettre deux fois plus d'éléments sur une même surface, ou utiliser autant d'éléments sur une surface moitié.

Un premier élément de réponse peut être apporté par l'étude des corrélations en fonction de la taille des éléments. Nous simulons une cavité de dimension $L_x = 23\lambda_0$ et $L_y = 19\lambda_0$. Comme nous devons simuler des éléments de dimension $\lambda/4$, nous discrétisons notre surface en éléments de dimension $\lambda/8$. Ensuite, nous sélectionnons aléatoirement à chaque optimisation $N = 20$ éléments parmi les éléments du contour de la cavité. Ce seront ces éléments dont nous allons changer la condition aux limites et qui constituent le SMM. Tous les autres éléments ont la condition aux limites de Dirichlet. Nous effectuons deux séries de calculs. Dans la première, nous simulons des optimisations avec un SMM composé d'éléments disposés tous les $\lambda/2$, puis dans la deuxième avec des éléments disposés tous les $\lambda/4$. Nous avons gardé le même nombre d'éléments entre les deux premières séries. Nous imposons $Q = 1000$ et les optimisations sont moyennées 320 fois. La troisième courbe est obtenue pour 40 éléments de dimension $\lambda/4$. Pour accélérer le calcul, nous nous sommes contentés de discrétiser la cavité avec une précision de $\lambda/4$, et de moyenner sur 120 situations seulement.

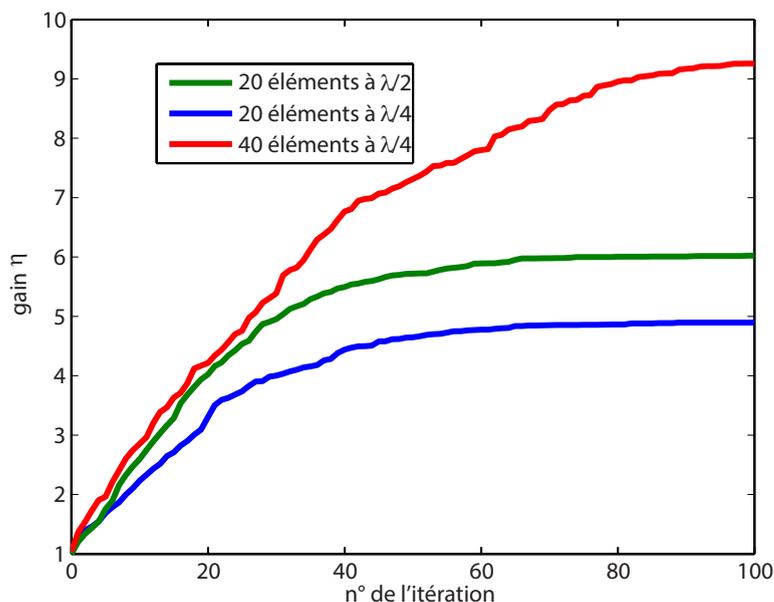


FIGURE 5.21: Comparaison de l'efficacité d'un SMM en fonction de la taille des éléments.

La figure 5.21 montre trois courbes de gain obtenues avec notre méthode. Le gain augmente en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme puis sature. Les

profils des deux premières courbes sont similaires, si ce n'est que l'optimisation faite avec des éléments de taille $\lambda/4$ sature à une valeur inférieure à l'optimisation réalisée avec des éléments de taille $\lambda/2$. En effet, les éléments étant de dimension réduite, ils modifient moins les conditions aux limites et le champ dans la cavité. Ces courbes sont également semblables à celles obtenues expérimentalement pour des facteurs de qualité et de densités modales équivalents (figure 5.10 (a,b)). Nous notons que le rapport des gains finaux est de 1,3 alors que le SMM d'éléments de largeur $\lambda/4$ est deux fois plus petit que le SMM d'éléments de largeur $\lambda/2$. Utiliser un SMM de 40 éléments de taille $\lambda/4$ permettrait donc d'améliorer sensiblement le gain maximum. C'est aussi ce qu'illustre la troisième courbe de gain, obtenue pour un tel SMM. Cette courbe sature plus lentement que les deux précédentes car le SMM possède le double d'éléments. Nous notons une augmentation sensible du gain, de près d'un facteur 1,5 par rapport au SMM de 20 éléments de taille $\lambda/2$.

Cependant le gain ramené au nombre d'éléments est inférieur avec un SMM composé d'éléments plus petits. Ceci indique que réduire la taille des éléments augmente la corrélation entre les éléments. Néanmoins, cela indique qu'il y a bien un intérêt à faire des éléments plus petits. Il faudrait faire l'expérience sur des SMM composés d'éléments adjacents pour s'assurer de cet avantage, mais cela deviendrait plus compliqué de simuler des cavités statistiquement indépendantes. En pratique, ceci ne serait valable qu'à condition de pouvoir fabriquer des éléments plus petits sans pour autant augmenter la dissipation.

Dynamique de l'optimisation

Une autre question que nous pouvons nous poser est celle de la dynamique (évolution du gain en fonction du nombre d'itération) : comment est-elle modifiée en fonction du facteur de qualité ? Pouvons-nous étudier numériquement la transition observée expérimentalement (figure 5.10 (a,b)) ? Nous avons remarqué qu'à bas facteurs de qualité, la courbe du gain augmente linéairement au début, puis sature lorsque tous les éléments ont été optimisés. Au contraire à plus hauts facteurs de qualité, la transition entre l'augmentation et la saturation est beaucoup moins abrupte. Nous menons alors une nouvelle série de calculs. Nous diminuons la qualité de la discrétisation ($p = 2$) et considérons un SMM de 100 éléments de taille $\lambda/2$, comme en expérience. L'optimisation est ainsi simulée pour plusieurs valeurs du facteur de qualité Q et moyennée 120 fois. Les résultats sont présentés sur la figure 5.22.

Contrairement à l'étude expérimentale, nous ne voyons pas de transition entre les deux régimes, toutes les courbes d'optimisation saturent de manière asymptotique. Cependant, il faut de plus en plus d'itérations en fonction de Q

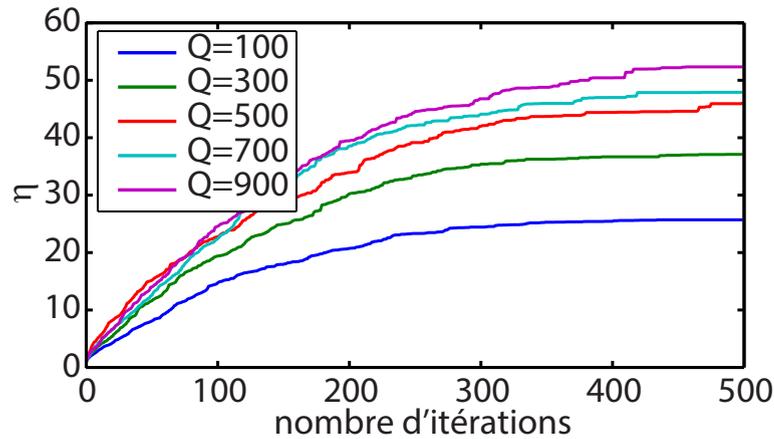


FIGURE 5.22: Gain en fonction du nombre d'itérations pour plusieurs facteurs de qualité de la cavité.

pour atteindre le plateau. Cette tendance est bonne, mais n'est pas quantitative. Ceci est vraisemblablement dû au fait que nous n'avons pas suffisamment bien discrétisé la cavité spatialement, à $\lambda/4$. Cette étude est encore en cours.

5.4.3.6 Perspectives

La méthode numérique développée ici se révèle lourde à mettre en place pour des cavités de grandes dimensions. En effet, cette méthode produit des résultats peu adéquats en des temps restreints. Il faut alors améliorer la discrétisation ce qui augmente considérablement les temps de calcul. Un de ses avantages est qu'elle permet facilement de passer à un cas à trois dimensions. Pour cela il suffit de remplacer la fonction de Green de l'espace libre à deux dimensions par celle à trois dimensions. En revanche, l'inconvénient du 3D est que cela augmente le nombre d'éléments et donc la puissance et le temps de calcul nécessaire. Pour avoir des solutions exactes à 3D il faudrait également considérer des champs vectoriels et non plus scalaires. Calculer les modes pour des cavités de formes un peu plus compliquées est également quelque chose assez facile à adapter et implémenter. Il devrait être également possible de calculer les modes de la cavité pour des conditions aux limites intermédiaires aux conditions de Dirichlet et Neumann, appelées conditions de Robin, donc qui induisent un déphasage quelconque et non plus limité à 0 ou à π . Ceci n'est cependant pas immédiat et il faudra apporter une attention particulière à l'ajustement des équations 5.34.

Nous pouvons envisager quelques améliorations pratiques pour accélérer les calculs. La première consisterait à utiliser un langage plus rapide que MATLAB,

par exemple FORTRAN ou C. Une autre possibilité serait d'utiliser les ressources des cartes graphiques, adaptées aux calculs de systèmes linéaires.

Enfin, rappelons que la méthode de la matrice de transmission aurait été optimale, car une simple inversion de la matrice nous donne directement la fonction de Green entre deux points à une fréquence donnée $G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \omega)$. Nous n'avons cependant pas réussi à l'adapter pour simuler des cavités pour des conditions aux limites de Neumann.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que les degrés de liberté spatiaux du SMM permettent de contrôler des degrés de liberté fréquentiels en milieux réverbérants, c'est-à-dire les modes propres de la cavité. Ceci peut sembler surprenant au premier abord, puisque nous avons interprété l'effet du SMM comme la modification des conditions aux limites. Ainsi, au cours d'une procédure d'optimisation, nous modifions le système au fur et à mesure. Nous avons identifié trois régimes de contrôle en fonction du rapport du nombre de degrés de liberté spatiaux optimisés et du nombre de modes contribuant à la densité d'états à la fréquence à laquelle la transmission est optimisée. Lorsque le nombre de modes propres est élevé par rapport au nombre d'éléments contrôlés, l'optimisation s'effectue de manière très similaire à l'optique en milieux multidiffusants où le champ ondulatoire est contrôlé à l'aide de SLM. Dans ce cas, la transmission est alors modélisée comme une marche aléatoire sur les modes de la cavité. Le SMM permet de multiplier par -1 un nombre \tilde{p} de modes afin d'optimiser la transmission. Le nombre de modes contrôlés est environ égale au nombre d'éléments optimisés du SMM divisé par 3 : $\tilde{p} = p/3$. Le facteur $1/3$ est en grande partie dû à la dissipation et à la dispersion en fréquence des éléments du SMM. Diminuer cette absorption et la dispersion permettrait d'améliorer sensiblement le gain atteignable avec notre modulateur. Ce régime correspond également à celui du chapitre 4. Les SMM devraient trouver des applications dans le domaine des télécommunications, pour améliorer des signaux WIFI ou téléphoniques en intérieur, ou pour diminuer la puissance des transmissions tout en assurant la même couverture de réseau. Une start-up est en cours de création pour valoriser cette invention.

Nous avons ensuite montré que lorsque le nombre de modes propres diminue, nous observons une transition dans le contrôle de la cavité, qui passe d'un régime marginalement contrôlé par le SMM à un régime majoritairement dominé par le SMM. Dans ce cas, la transmission peut être modifiée à n'importe quelle valeur du plan complexe à l'intérieur d'un cercle de rayon limité par le nombre d'éléments

contrôlés et centré sur l'origine. Les applications liées à ce régime touchent au contrôle des modes en cavité, et nous pouvons imaginer utiliser un SMM comme brasseur de mode dans une chambre réverbérante ou un four micro-onde.

Enfin, le troisième régime de contrôle est atteint pour des facteurs de qualité encore supérieurs, ou pour des cavités de petites dimensions. Dans ce cas, les résonances sont bien distinctes sur le spectre de transmission. Peu ou pas de modes peuvent être présents au voisinage de la fréquence optimisée. Utiliser le SMM pour optimiser la transmission revient alors à modifier les conditions aux limites pour trouver une cavité qui possède une fréquence de résonance à la valeur désirée. Ceci pose les bases vers la conception de cavités à haut facteur de qualité et reconfigurables, à condition développer un SMM beaucoup moins dissipatif.

Dans une dernière partie, nous avons développé une méthode numérique permettant de calculer les modes d'une cavité dont les conditions aux limites mélangent les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Nous avons tenté d'adapter une approche proposée par Heller et reposant sur la matrice de transmission en milieux multidiffusants, qui nous aurait permis d'obtenir directement la fonction de Green entre deux points et à une fréquence et à facteur de qualité Q donnés. Nous avons ensuite adopté et développé une approche basée sur les potentiels de couche. Très performante pour calculer les modes et fréquences propres ainsi que pour modéliser la transmission pour des cavités de tailles réduites, cette méthode se révèle lourde pour des cavités de dimensions grandes devant la longueur d'onde, et nous n'avons pu obtenir que des résultats qualitatifs.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à des aspects très divers du contrôle des microondes en milieux réverbérants. Nous nous sommes restreints, pour des raisons essentiellement expérimentales, à une bande limitée du spectre électromagnétique. Cependant la plupart des concepts développés sont applicables à d'autres types d'ondes. Ainsi, une grande partie de ce travail a d'ailleurs trouvé son inspiration dans des techniques originellement développées en acoustique, comme le retournement temporel, ou en optique, comme les miroirs partiellement réfléchissants fabriqués avec des réseaux de diffraction, ou le SMM inspiré des SLM.

Nous avons d'abord introduit les concepts des fonctions de Green, et des modes et fréquences propres en milieux réverbérants. Ces modes propres sont des degrés de liberté fréquentiels, et tout champ dans une cavité se décompose sur cette base orthogonale. Nous avons également identifié des degrés de liberté spatiaux qui représentent le nombre de sources créant des champs statistiquement indépendants. Les degrés de liberté, qu'ils soient spatiaux ou temporels, sont des leviers indépendants sur lesquels l'expérimentateur peut agir pour contrôler les ondes. Ainsi, utiliser un grand nombre de sources polychromatiques offre de multiples degrés de liberté. Nous avons discuté de deux moyens permettant de contrôler ceux-ci : le retournement temporel et le façonnage de front d'onde, et nous avons montré que, loin d'être un inconvénient, la complexité des milieux réverbérants et multidiffusants peut être un atout pour focaliser les ondes.

En nous inspirant des miroirs utilisés en optique, par exemple pour fabriquer des lasers, nous avons proposé d'utiliser des réseaux binaires métalliques, dont la période est sub-longueur d'onde pour ouvrir des cavités réverbérantes. Nous avons montré que ces réseaux se comportent comme des miroirs partiellement réfléchissants, dont la transparence peut être ajustée en jouant sur les paramètres géométriques du réseau. Nous avons ensuite étudié le diagramme de rayonnement de ce système, qui présente des maxima d'émission seulement aux fréquences de résonances de la cavité, et qui émettent dans des directions définies par les modes propres de la cavité. Nous nous sommes intéressés à l'influence du désordre sur ce

diagramme de rayonnement qui tend alors à devenir isotrope. Nous avons proposé quelques exemples d'applications de nos miroirs semi-réfléchissants. Leur intérêt majeur est de permettre de régler indépendamment l'ouverture angulaire de la cavité et du facteur de qualité afin de sélectionner le nombre adéquat de degrés de liberté temporels. Enfin, nous avons montré qu'utiliser de tels miroirs simplifie grandement des mesures et des montages expérimentaux pour étudier des billards en physique fondamentale.

Dans le chapitre 3, nous avons voulu utiliser ces miroirs pour focaliser les micro-ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde. En effet le champ proche de ces réseaux présente un grand nombre d'ondes évanescentes, créées par la diffraction, qui peuvent varier sur des échelles spatiales très faibles. En nous inspirant de travaux menés antérieurement au laboratoire en acoustique et en micro-ondes, nous avons remplacé ces miroirs périodiques par un résonateur fractal prenant la forme d'une courbe de Hilbert. Nous avons ainsi focalisé des micro-ondes sur des dimensions très sub-longueur d'onde ($\lambda/15$). Nous avons alors souligné l'importance d'utiliser soit un grand nombre de degrés de liberté spatiaux grâce à des simulations, soit un grand nombre de degrés de liberté temporels qui peuvent être obtenus expérimentalement en couplant le résonateur fractal à une cavité. Nous avons interprété ces résultats comme la conversion par la cavité des degrés de liberté temporels en degrés de liberté spatiaux, et mis en évidence que cette approche permet de résoudre des modes du résonateurs qui étaient auparavant corrélés par les pertes radiatives.

Dans le quatrième chapitre, nous avons conçu et fabriqué un modulateur spatial de micro-ondes, que nous avons appelé SMM, par analogie aux SLM en optique, afin de contrôler les degrés de liberté spatiaux des champs électromagnétiques dans des milieux réverbérants. Encore une fois, c'est la culture scientifique très transverse du laboratoire qui a guidé nos recherches. Ce SMM est conçu sur le principe des réseaux de réflecteurs, constitués d'éléments résonants qui déphasent les ondes incidentes en fonction de leur fréquence respective par rapport à la fréquence de résonance de l'élément. Nous avons ensuite démontré que ce modulateur spatial de micro-ondes permet d'améliorer la réception d'un signal à des fréquences utilisées en télécommunications sans fil dans un bâtiment. Nous avons ainsi ouvert un nouveau domaine de la physique : le façonnage de champs électromagnétiques en milieux réverbérants, ainsi que le chemin vers de nombreuses applications.

Enfin, nous avons montré que ces SMM, lorsqu'ils sont intégrés à une cavité, peuvent être interprétés comme des conditions aux limites reconfigurables, permettant de passer de conditions aux limites de Neumann à des conditions aux limites de Dirichlet. Nous avons identifié trois régimes de contrôle très différents du modulateur sur la cavité en fonction du nombre de degrés de liberté spatiaux

comparé au nombre de degrés de liberté temporels dont nous disposons. Nous avons montré que ces degrés de liberté spatiaux permettent de contrôler les modes propres du milieu réverbérant. Autrement dit, nous contrôlons les degrés de liberté temporels avec des degrés de liberté spatiaux. Dans une dernière partie, nous avons développé une nouvelle méthode pour calculer les modes propres d'une cavité de géométrie arbitraire, avec des conditions aux limites mixtes. Très efficace pour des cavités dont les dimensions font quelquefois la longueur d'onde, cette méthode s'est révélée très lourde pour de plus grandes cavités. Le SMM développé est perfectible et ses applications sont nombreuses. Par exemple, il serait intéressant de l'utiliser en combinaison des miroirs semi-réfléchissants développés au chapitre 2, pour faire une antenne reconfigurable, voire un bazooka électromagnétique.

Ce dernier sujet de ma thèse pose de nombreuses questions, tant en physique appliquée que fondamentale. L'influence des corrélations du champ sur l'optimisation et sa dynamique (c'est-à-dire l'évolution du gain en fonction du nombre d'itérations de la procédure d'optimisation) à haut facteur de qualité n'est pas encore comprise. Nous pouvons également nous demander si la transmission peut être optimisée à un temps donné au lieu d'une fréquence. Enfin, le SMM permettra d'étudier d'intéressants phénomènes nouveaux. Par exemple, nous pouvons envisager d'exciter le mode fondamental d'une cavité, puis avec le SMM, modifier rapidement les conditions aux limites de manière à changer la fréquence du mode fondamental. Que devient l'énergie précédemment chargée, qui ne peut plus exister à cette fréquence ? Change-t-elle de fréquence grâce à un procédé non linéaire, lié à un apport d'énergie lors du changement de conditions aux limites ? Ces questions méritent, parmi d'autres, d'être approfondies lors de travaux futurs.

Au cours de notre étude, nous nous sommes appliqués à constamment établir un lien direct sur l'intérêt pratique de nos recherches. Ainsi, les différents travaux menés durant cette thèse sont porteurs d'innovations et d'applications dans de très nombreux domaines. Nous avons proposé des concepts pour simplifier des mesures expérimentales, concevoir des bazookas électromagnétiques, améliorer des systèmes nano-lithographiques ou des canaux de communications sans fil en temps réel, mais aussi et surtout, confectionner des fours micro-ondes sans plateau tournant.

Bibliographie

- [1] E. Abbe, “Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung,” *Archiv für mikroskopische Anatomie*, vol. 9, pp. 413–418, Dec. 1873.
- [2] E. Abbe, “A Contribution to the Theory of the Microscope and the Nature of Microscopic Vision,” *Proceedings of the Bristol Naturalists’ Society*, vol. 1, pp. 200–261, 1874.
- [3] L. L. Foldy, “The Multiple Scattering of Waves. I. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers,” *Physical Review*, vol. 67, pp. 107–119, Feb. 1945.
- [4] M. Lax, “Multiple Scattering of Waves,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 23, pp. 287–310, Oct. 1951.
- [5] R. Landauer, “Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction,” *IBM Journal of Research and Development*, vol. 1, pp. 223–231, July 1957.
- [6] P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices,” *Physical Review*, vol. 109, pp. 1492–1505, Mar. 1958.
- [7] E. Akkermans and G. Montambaux, *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. Les Ulis, France : EDP Sciences, Oct. 2004.
- [8] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink, “Time Reversal of Electromagnetic Waves,” *Physical Review Letters*, vol. 92, p. 193904, May 2004.
- [9] G. Lerosey, *Retournement temporel d’ondes électromagnétiques et application à la télécommunication en milieux complexes*. Thèse de doctorat, ESPCI ParisTECH, Dec. 2006.
- [10] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, “Focusing coherent light through opaque strongly scattering media,” *Optics Letters*, vol. 32, pp. 2309–2311, Aug. 2007.
- [11] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey, “Revisiting the wire medium : an ideal resonant metalens,” *Waves in Random and Complex Media*, vol. 21, pp. 591–613, Nov. 2011.

- [12] M. G. E. da Luz, A. S. Lupu-Sax, and E. J. Heller, “Quantum scattering from arbitrary boundaries,” *Physical Review E*, vol. 56, pp. 2496–2507, Sept. 1997.
- [13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics Third Edition*. New York : Wiley, 3 edition ed., Aug. 1998.
- [14] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*. New Jersey : <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>, 2014.
- [15] D. A. Hill, “Electromagnetic theory of reverberation chambers,” *NIST Technical note*, vol. 1506, pp. 1–55, 1998. NIST Manuscript Publication Search.
- [16] R. J. Glauber and M. Lewenstein, “Quantum optics of dielectric media,” *Physical Review A*, vol. 43, pp. 467–491, Jan. 1991.
- [17] H. Weyl, “Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.,” in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 110–117, Berlin : Weidmannsche Buchhandlung, 1911.
- [18] R. Balian and B. Duplantier, “Electromagnetic waves near perfect conductors. I. Multiple scattering expansions. Distribution of modes,” *Annals of Physics*, vol. 104, pp. 300–335, Apr. 1977.
- [19] M. V. Berry and R. J. Mondragon, “Neutrino Billiards : Time-Reversal Symmetry-Breaking Without Magnetic Fields,” *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 412, pp. 53–74, July 1987.
- [20] B. Dietz, T. Klaus, M. Miski-Oglu, A. Richter, M. Bischoff, L. von Smekal, and J. Wambach, “Fullerene C60 Simulated with a Superconducting Microwave Resonator and Test of the Atiyah-Singer Index Theorem,” *Physical Review Letters*, vol. 115, p. 026801, July 2015.
- [21] W. Arendt, R. Nittka, W. Peter, and F. Steiner, “Weyl’s Law : Spectral Properties of the Laplacian in Mathematics and Physics,” in *Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity* (W. Arendt and W. P. Schleich, eds.), pp. 1–71, Weinheim : Wiley, Mar. 2009.
- [22] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos : An Introduction*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [23] J. Barthélemy, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Complete S matrix in a microwave cavity at room temperature,” *Physical Review E*, vol. 71, p. 016205, Jan. 2005.
- [24] G. Breit and E. Wigner, “Capture of Slow Neutrons,” *Physical Review*, vol. 49, pp. 519–531, Apr. 1936.
- [25] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*. Springer Science & Business Media, Dec. 2012.

- [26] M. Fink, "Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 39, pp. 555–566, Sept. 1992.
- [27] M. Fink, "Time Reversed Acoustics," *Physics Today*, vol. 50, pp. 34–40, Jan. 2008.
- [28] M. Fink, J. de Rosny, G. Lerosey, and A. Tourin, "Time-reversed waves and super-resolution," *Comptes Rendus Physique*, vol. 10, pp. 447–463, June 2009.
- [29] R. Carminati, R. Pierrat, J. d. Rosny, and M. Fink, "Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields," *Optics Letters*, vol. 32, no. 21, p. 3107, 2007.
- [30] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey, "A polychromatic approach to far-field superlensing at visible wavelengths," *Nature Communications*, vol. 3, p. 889, June 2012.
- [31] X. Li and M. I. Stockman, "Highly efficient spatiotemporal coherent control in nanoplasmonics on a nanometer-femtosecond scale by time reversal," *Physical Review B*, vol. 77, p. 195109, May 2008.
- [32] J. W. Goodman, *Introduction To Fourier Optics*. Englewood, Colo : Roberts and Company Publishers, 3rd revised edition ed., 2005.
- [33] C. Draeger and M. Fink, "One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2d-Silicon Cavity," *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 407–410, July 1997.
- [34] C. Draeger and M. Fink, "One-channel time-reversal in chaotic cavities : Theoretical limits," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 105, pp. 611–617, Feb. 1999.
- [35] C. Draeger, J.-C. Aime, and M. Fink, "One-channel time-reversal in chaotic cavities : Experimental results," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 105, pp. 618–625, Feb. 1999.
- [36] J. De La Gorgue de Rosny, *Milieux réverbérants et réversibilité*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2000.
- [37] J. de Rosny and M. Fink, "Overcoming the Diffraction Limit in Wave Physics Using a Time-Reversal Mirror and a Novel Acoustic Sink," *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 124301, Aug. 2002.
- [38] D. Royer and E. Dieulesaint, "Mesures optiques de déplacements d'amplitude 10^{-4} à 10^2 Angström. Application aux ondes élastiques," *Revue de Physique Appliquée*, vol. 24, no. 8, pp. 833–846, 1989.
- [39] E. G. van Putten, I. M. Vellekoop, and A. P. Mosk, "Spatial amplitude and phase modulation using commercial twisted nematic LCDs," *Applied Optics*, vol. 47, p. 2076, Apr. 2008.

- [40] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, "Phase control algorithms for focusing light through turbid media," *Optics Communications*, vol. 281, pp. 3071–3080, June 2008.
- [41] I. M. Vellekoop, *Controlling the propagation of light in disordered scattering media*. Thèse de doctorat, University of Twente, Twente, Apr. 2008.
- [42] J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics : Theory and Applications*. Roberts and Company Publishers, 2007.
- [43] J. W. Goodman, *Statistical Optics*. New York : Wiley, Sept. 2000.
- [44] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, "Measuring the Transmission Matrix in Optics : An Approach to the Study and Control of Light Propagation in Disordered Media," *Physical Review Letters*, vol. 104, p. 100601, Mar. 2010.
- [45] S. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, "Image transmission through an opaque material," *Nature Communications*, vol. 1, p. 81, Sept. 2010.
- [46] M. Popoff, Sébastien, *Spatio-temporal control of light in complex media*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII, Dec. 2011.
- [47] D. Akbulut, T. J. Huisman, E. G. van Putten, W. L. Vos, and A. P. Mosk, "Focusing light through random photonic media by binary amplitude modulation," *Optics Express*, vol. 19, p. 4017, Feb. 2011.
- [48] I. M. Vellekoop, A. Lagendijk, and A. P. Mosk, "Exploiting disorder for perfect focusing," *Nature Photonics*, vol. 4, pp. 320–322, May 2010.
- [49] T. Chaigne, O. Katz, A. C. Boccara, M. Fink, E. Bossy, and S. Gigan, "Controlling light in scattering media non-invasively using the photoacoustic transmission matrix," *Nature Photonics*, vol. 8, pp. 58–64, Jan. 2014.
- [50] S. A. Goorden, M. Horstmann, A. P. Mosk, B. Škorić, and P. W. H. Pinkse, "Quantum-secure authentication of a physical unclonable key," *Optica*, vol. 1, p. 421, Dec. 2014.
- [51] H. Defienne, M. Barbieri, B. Chalopin, B. Chatel, I. A. Walmsley, B. J. Smith, and S. Gigan, "Nonclassical light manipulation in a multiple-scattering medium," *Optics Letters*, vol. 39, p. 6090, Nov. 2014.
- [52] N. Bachelard, S. Gigan, X. Noblin, and P. Sebbah, "Adaptive pumping for spectral control of random lasers," *Nature Physics*, vol. 10, pp. 426–431, June 2014.
- [53] J.-H. Park, C. Park, H. Yu, J. Park, S. Han, J. Shin, S. H. Ko, K. T. Nam, Y.-H. Cho, and Y. Park, "Subwavelength light focusing using random nanoparticles," *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 454–458, June 2013.

- [54] A. Derode, P. Roux, and M. Fink, "Robust Acoustic Time Reversal with High-Order Multiple Scattering," *Physical Review Letters*, vol. 75, pp. 4206–4209, Dec. 1995.
- [55] G. Lerosey, J. d. Rosny, A. Tourin, A. Derode, and M. Fink, "Time reversal of wideband microwaves," *Applied Physics Letters*, vol. 88, p. 154101, Apr. 2006.
- [56] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink, "Manipulating Spatio-temporal Degrees of Freedom of Waves in Random Media," *Physical Review Letters*, vol. 103, p. 173902, Oct. 2009.
- [57] F. M. Huang, Y. Chen, F. J. G. d. Abajo, and N. I. Zheludev, "Optical super-resolution through super-oscillations," *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, vol. 9, p. S285, Sept. 2007.
- [58] Y. Zhou, *Subwavelength High-contrast Grating (HCG) and Its Applications in Optoelectronic Devices*. University of California, Berkeley, 2008.
- [59] C. Mateus, M. Huang, Y. Deng, A. R. Neureuther, and C. Chang-Hasnain, "Ultrabroadband mirror using low-index cladded subwavelength grating," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, pp. 518–520, Feb. 2004.
- [60] C. Mateus, M. Huang, L. Chen, C. Chang-Hasnain, and Y. Suzuki, "Broadband mirror (1.12-1.62 μm) using a subwavelength grating," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, pp. 1676–1678, July 2004.
- [61] M. Dupré, M. Fink, and G. Lerosey, "Using Subwavelength Diffraction Gratings to Design Open Electromagnetic Cavities," *Physical Review Letters*, vol. 112, p. 043902, Jan. 2014.
- [62] H. A. Bethe, "Theory of Diffraction by Small Holes," *Physical Review*, vol. 66, pp. 163–182, Oct. 1944.
- [63] C. J. Bouwkamp, "Diffraction Theory," *Reports on Progress in Physics*, vol. 17, no. 1, p. 35, 1954.
- [64] M. Born, E. Wolf, A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman, and W. L. Wilcock, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 7 ed., Oct. 1999.
- [65] R. Petit, ed., *Electromagnetic Theory of Gratings*, vol. 22 of *Topics in Current Physics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1980.
- [66] R. W. Wood, "XLII. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum," *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 4, pp. 396–402, Sept. 1902.
- [67] T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio, and P. A. Wolff, "Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays," *Nature*, vol. 391, pp. 667–669, Feb. 1998.

- [68] P. Debye, "Interferenz von Röntgenstrahlen und Wärmebewegung," *Annalen der Physik*, vol. 348, pp. 49–92, Jan. 1913.
- [69] I. Waller, "Zur Frage der Einwirkung der Wärmebewegung auf die Interferenz von Röntgenstrahlen," *Zeitschrift für Physik*, vol. 17, pp. 398–408, Dec. 1923.
- [70] H. J. Lipkin, "Physics of Debye-Waller Factors," *arXiv :cond-mat/0405023*, May 2004. arXiv : cond-mat/0405023.
- [71] B. Redding and H. Cao, "Using a multimode fiber as a high-resolution, low-loss spectrometer," *Optics Letters*, vol. 37, p. 3384, Aug. 2012.
- [72] B. Redding, H. Cao, and M. A. Choma, "Speckle-Free Laser Imaging with Random Laser Illumination," *Optics and Photonics News*, vol. 23, p. 30, Dec. 2012.
- [73] T. Fromenteze, O. Yurduseven, M. F. Imani, J. Gollub, C. Decroze, D. Carsenat, and D. R. Smith, "Computational imaging using a mode-mixing cavity at microwave frequencies," *Applied Physics Letters*, vol. 106, p. 194104, May 2015.
- [74] T. Fromenteze, C. Decroze, and D. Carsenat, "Waveform Coding for Passive Multiplexing : Application to Microwave Imaging," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, pp. 593–600, Feb. 2015.
- [75] B. Redding, S. F. Liew, R. Sarma, and H. Cao, "Compact spectrometer based on a disordered photonic chip," *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 746–751, Sept. 2013.
- [76] G. Montaldo, P. Roux, A. Derode, C. Negreira, and M. Fink, "Ultrasound shock wave generator with one-bit time reversal in a dispersive medium, application to lithotripsy," *Applied Physics Letters*, vol. 80, pp. 897–899, Feb. 2002.
- [77] M. Davy, J. de Rosny, J.-C. Joly, and M. Fink, "Focusing and amplification of electromagnetic waves by time reversal in an leaky reverberation chamber," *Comptes Rendus Physique*, vol. 11, pp. 37–43, Jan. 2010.
- [78] M. Davy, J. de Rosny, and M. Fink, "Focusing and amplification of electromagnetic waves by time-reversal in an leaky reverberation chamber," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI '09*, pp. 1–4, June 2009.
- [79] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. New York : Springer, Aug. 1991.
- [80] D. Laurent, O. Legrand, P. Sebbah, C. Vanneste, and F. Mortessagne, "Localized Modes in a Finite-Size Open Disordered Microwave Cavity," *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 253902, Dec. 2007.

- [81] J. Bertolotti, S. Gottardo, D. S. Wiersma, M. Ghulinyan, and L. Pavesi, “Optical Necklace States in Anderson Localized 1d Systems,” *Physical Review Letters*, vol. 94, p. 113903, Mar. 2005.
- [82] A. Peña, A. Girschik, F. Libisch, S. Rotter, and A. A. Chabanov, “The single-channel regime of transport through random media,” *Nature Communications*, vol. 5, Mar. 2014.
- [83] C. Vanneste and P. Sebbah, “Complexity of two-dimensional quasimodes at the transition from weak scattering to Anderson localization,” *Physical Review A*, vol. 79, p. 041802, Apr. 2009.
- [84] G. Lerosey, J. d. Rosny, A. Tourin, and M. Fink, “Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal,” *Science*, vol. 315, pp. 1120–1122, Feb. 2007.
- [85] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey, “Acoustic Resonators for Far-Field Control of Sound on a Subwavelength Scale,” *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 064301, Aug. 2011.
- [86] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey, “Far-field sub-wavelength imaging and focusing using a wire medium based resonant metalens,” *Waves in Random and Complex Media*, vol. 21, pp. 614–627, Nov. 2011.
- [87] T. Zhang, Y. Ruan, G. Maire, D. Sentenac, A. Talneau, K. Belkebir, P. C. Chaumet, and A. Sentenac, “Full-polarized Tomographic Diffraction Microscopy Achieves a Resolution about One-Fourth of the Wavelength,” *Physical Review Letters*, vol. 111, p. 243904, Dec. 2013.
- [88] E. Betzig, G. H. Patterson, R. Sougrat, O. W. Lindwasser, S. Olenych, J. S. Bonifacino, M. W. Davidson, J. Lippincott-Schwartz, and H. F. Hess, “Imaging Intracellular Fluorescent Proteins at Nanometer Resolution,” *Science*, vol. 313, pp. 1642–1645, Sept. 2006.
- [89] S. W. Hell and M. Kroug, “Ground-state-depletion fluorescence microscopy : A concept for breaking the diffraction resolution limit,” *Applied Physics B*, vol. 60, pp. 495–497, May 1995.
- [90] G. Donnert, J. Keller, R. Medda, M. A. Andrei, S. O. Rizzoli, R. Lührmann, R. Jahn, C. Eggeling, and S. W. Hell, “Macromolecular-scale resolution in biological fluorescence microscopy,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 103, pp. 11440–11445, Jan. 2006.
- [91] M. J. Rust, M. Bates, and X. Zhuang, “Sub-diffraction-limit imaging by stochastic optical reconstruction microscopy (STORM),” *Nature Methods*, vol. 3, pp. 793–796, Oct. 2006.
- [92] M. Fernández-Suárez and A. Y. Ting, “Fluorescent probes for super-resolution imaging in living cells,” *Nature Reviews Molecular Cell Biology*, vol. 9, pp. 929–943, Dec. 2008.

- [93] S. W. Hell and J. Wichmann, "Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission : stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy," *Optics Letters*, vol. 19, p. 780, June 1994.
- [94] R. Heintzmann, T. M. Jovin, and C. Cremer, "Saturated patterned excitation microscopy—a concept for optical resolution improvement," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 19, no. 8, p. 1599, 2002.
- [95] M. G. L. Gustafsson, "Nonlinear structured-illumination microscopy : Wide-field fluorescence imaging with theoretically unlimited resolution," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 102, pp. 13081–13086, Sept. 2005.
- [96] L. Shao, B. Isaac, S. Uzawa, D. A. Agard, J. W. Sedat, and M. G. L. Gustafsson, "I5s : Wide-Field Light Microscopy with 100-nm-Scale Resolution in Three Dimensions," *Biophysical Journal*, vol. 94, pp. 4971–4983, June 2008.
- [97] S. T. Hess, T. P. K. Girirajan, and M. D. Mason, "Ultra-High Resolution Imaging by Fluorescence Photoactivation Localization Microscopy," *Biophysical Journal*, vol. 91, pp. 4258–4272, Dec. 2006.
- [98] N. I. Zheludev, "What diffraction limit?," *Nature Materials*, vol. 7, pp. 420–422, June 2008.
- [99] Y. Aharonov, J. Anandan, S. Popescu, and L. Vaidman, "Superpositions of time evolutions of a quantum system and a quantum time-translation machine," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 2965–2968, June 1990.
- [100] M. V. Berry and S. Popescu, "Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves," *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 39, p. 6965, June 2006.
- [101] M. V. Berry and M. R. Dennis, "Natural superoscillations in monochromatic waves in D dimensions," *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 42, p. 022003, Jan. 2009.
- [102] P. Ferreira and A. Kempf, "Superoscillations : Faster Than the Nyquist Rate," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, pp. 3732–3740, Oct. 2006.
- [103] G. Binnig and H. Rorher, "The Scanning Tunneling Microscope," *Scientific American*, vol. 253, no. 2, 1985.
- [104] G. Binnig and H. Rorher, "Scanning tunneling microscopy," *IBM Journal of Research and Development*, vol. 30, no. 4, pp. 279–293, 1986.
- [105] G. Binnig, C. F. Quate, and C. Gerber, "Atomic Force Microscope," *Physical Review Letters*, vol. 56, pp. 930–933, Mar. 1986.
- [106] E. H. Synge, "A suggested method for extending microscopic resolution into the ultra-microscopic region," *Philosophical Magazine*, vol. 6, pp. 1798–1977, 1928.

- [107] D. W. Pohl, W. Denk, and M. Lanz, "Optical stethoscopy : Image recording with resolution $\lambda/20$," *Applied Physics Letters*, vol. 44, pp. 651–653, Apr. 1984.
- [108] A. Lewis, M. Isaacson, A. Harootunian, and A. Muray, "Development of a 500 Angström spatial resolution light microscope : I. light is efficiently transmitted through $\lambda/16$ diameter apertures," *Ultramicroscopy*, vol. 13, no. 3, pp. 227–231, 1984.
- [109] E. Betzig and J. K. Trautman, "Near-Field Optics : Microscopy, Spectroscopy, and Surface Modification Beyond the Diffraction Limit," *Science*, vol. 257, pp. 189–195, Oct. 1992.
- [110] F. Zenhausern, M. P. O'Boyle, and H. K. Wickramasinghe, "Apertureless near-field optical microscope," *Applied Physics Letters*, vol. 65, pp. 1623–1625, Sept. 1994.
- [111] I. I. Smolyaninov, C. C. Davis, J. Elliott, and A. V. Zayats, "Resolution enhancement of a surface immersion microscope near the plasmon resonance," *Optics Letters*, vol. 30, p. 382, Feb. 2005.
- [112] H. Yu, X. Shan, S. Wang, H. Chen, and N. Tao, "Plasmonic Imaging and Detection of Single DNA Molecules," *ACS Nano*, vol. 8, pp. 3427–3433, Apr. 2014.
- [113] K. Syal, W. Wang, X. Shan, S. Wang, H.-Y. Chen, and N. Tao, "Plasmonic imaging of protein interactions with single bacterial cells," *Biosensors and Bioelectronics*, vol. 63, pp. 131–137, Jan. 2015.
- [114] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu," *SOVIET PHYSICS USPEKHI*, vol. 10, no. 4, 1968.
- [115] J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens," *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 3966–3969, Oct. 2000.
- [116] D. F. Sievenpiper, M. E. Sickmiller, and E. Yablonovitch, "3d Wire Mesh Photonic Crystals," *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 2480–2483, Apr. 1996.
- [117] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures," *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 4773–4776, June 1996.
- [118] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Low frequency plasmons in thin-wire structures," *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 10, p. 4785, June 1998.
- [119] J. Pendry, A. Holden, D. Robbins, and W. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 2075–2084, Nov. 1999.

- [120] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental Verification of a Negative Index of Refraction," *Science*, vol. 292, pp. 77–79, June 2001.
- [121] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, "Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity," *Physical Review Letters*, vol. 84, pp. 4184–4187, May 2000.
- [122] C. Luo, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, and J. B. Pendry, "All-angle negative refraction without negative effective index," *Physical Review B*, vol. 65, p. 201104, May 2002.
- [123] N. Kaina, F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey, "Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials," *Nature*, vol. 525, pp. 77–81, Sept. 2015.
- [124] M. Dubois, E. Bossy, S. Enoch, S. Guenneau, G. Lerosey, and P. Sebbah, "Time-Driven Superoscillations with Negative Refraction," *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 013902, Jan. 2015.
- [125] Z. Jacob, L. V. Alekseyev, and E. Narimanov, "Optical Hyperlens : Far-field imaging beyond the diffraction limit," *Optics Express*, vol. 14, no. 18, p. 8247, 2006.
- [126] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang, "Far-Field Optical Hyperlens Magnifying Sub-Diffraction-Limited Objects," *Science*, vol. 315, pp. 1686–1686, Mar. 2007.
- [127] F. Lemoult, *Focalisation et contrôle des ondes en milieux complexes et localement résonants*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII, Dec. 2011.
- [128] E. Purcell, "Proceedings of the American Physical Society," *Physical Review*, vol. 69, pp. 674–674, June 1946.
- [129] C. Park, J.-H. Park, C. Rodriguez, H. Yu, M. Kim, K. Jin, S. Han, J. Shin, S. H. Ko, K. T. Nam, Y.-H. Lee, Y.-H. Cho, and Y. Park, "Full-Field Sub-wavelength Imaging Using a Scattering Superlens," *Physical Review Letters*, vol. 113, p. 113901, Sept. 2014.
- [130] F. Hausdorff, "Dimension und äußeres Maß," *Mathematische Annalen*, vol. 79, pp. 157–179, Mar. 1918.
- [131] B. Mandelbrot, "Formes nouvelles du hasard dans les sciences," *Economie appliquée*, vol. 26, pp. 307–319, 1973.
- [132] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1 ed., 1984.
- [133] B. Mandelbrot, *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension*. Champs sciences, Paris : Flammarion, 1974.

- [134] H. Von Koch, "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire," *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, vol. 1, pp. 681–904, 1904.
- [135] N. Engheta and R. W. Ziolkowski, *Metamaterials : Physics and Engineering Explorations*. John Wiley & Sons, June 2006.
- [136] W. Wen, L. Zhou, J. Li, W. Ge, C. T. Chan, and P. Sheng, "Subwavelength Photonic Band Gaps from Planar Fractals," *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 223901, Nov. 2002.
- [137] D. Tanese, E. Gurevich, F. Baboux, T. Jacqmin, A. Lemaître, E. Galopin, I. Sagnes, A. Amo, J. Bloch, and E. Akkermans, "Fractal Energy Spectrum of a Polariton Gas in a Fibonacci Quasiperiodic Potential," *Physical Review Letters*, vol. 112, p. 146404, Apr. 2014.
- [138] B. Hou, H. Xie, W. Wen, and P. Sheng, "Three-dimensional metallic fractals and their photonic crystal characteristics," *Physical Review B*, vol. 77, p. 125113, Mar. 2008.
- [139] W. Wen, L. Zhou, B. Hou, C. T. Chan, and P. Sheng, "Resonant transmission of microwaves through subwavelength fractal slits in a metallic plate," *Physical Review B*, vol. 72, p. 153406, Oct. 2005.
- [140] H.-X. Xu, G.-M. Wang, M. Q. Qi, L. Li, and T. J. Cui, "Three-Dimensional Super Lens Composed of Fractal Left-Handed Materials," *Advanced Optical Materials*, vol. 1, pp. 495–502, July 2013.
- [141] G. Volpe, G. Volpe, and R. Quidant, "Fractal plasmonics : subdiffraction focusing and broadband spectral response by a Sierpinski nanocarpet," *Optics Express*, vol. 19, pp. 3612–3618, Feb. 2011.
- [142] X. Huang, S. Xiao, D. Ye, J. Huangfu, Z. Wang, L. Ran, and L. Zhou, "Fractal plasmonic metamaterials for subwavelength imaging," *Optics Express*, vol. 18, pp. 10377–10387, May 2010.
- [143] S. Best and J. Morrow, "The effectiveness of space-filling fractal geometry in lowering resonant frequency," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 112–115, 2002.
- [144] D. Werner and S. Ganguly, "An overview of fractal antenna engineering research," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 45, pp. 38–57, Feb. 2003.
- [145] M. Barra, C. Collado, J. Mateu, and J. O'Callaghan, "Miniaturization of superconducting filters using Hilbert fractal curves," *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 15, pp. 3841–3846, Sept. 2005.
- [146] W. Wen, Z. Yang, G. Xu, Y. Chen, L. Zhou, W. Ge, C. T. Chan, and P. Sheng, "Infrared passbands from fractal slit patterns on a metal plate," *Applied Physics Letters*, vol. 83, pp. 2106–2108, Sept. 2003.

- [147] D. L. Jordan, R. C. Hollins, and E. Jakeman, "Experimental measurements of non-Gaussian scattering by a fractal diffuser," *Applied Physics B*, vol. 31, pp. 179–186, July 1983.
- [148] P. D'Antonio and T. Cox, "Two Decades of Sound Diffusor Design and Development, Part 1 : Applications and Design," *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 46, pp. 955–976, Nov. 1998.
- [149] V. Krachmalnicoff, E. Castanié, Y. De Wilde, and R. Carminati, "Fluctuations of the Local Density of States Probe Localized Surface Plasmons on Disordered Metal Films," *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 183901, Oct. 2010.
- [150] A. Cazé, R. Pierrat, and R. Carminati, "Spatial Coherence in Complex Photonic and Plasmonic Systems," *Physical Review Letters*, vol. 110, p. 063903, Feb. 2013.
- [151] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink, "Resonant Metalenses for Breaking the Diffraction Barrier," *Physical Review Letters*, vol. 104, p. 203901, May 2010.
- [152] S. W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise of natural Philosophy*, vol. 1. Oxford : Publishers of the University of Oxford, 1867.
- [153] H. Poincaré, *Leçons de Mécanique Céleste professées à la Sorbonne*, vol. III. Théorie des marées. Paris : Gauthier-Villars, 1910.
- [154] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications*. Cambridge University Press, 1 edition ed., June 2008.
- [155] N. Kaina, M. Dupré, M. Fink, and G. Lerosey, "Hybridized resonances to design tunable binary phase metasurface unit cells," *Optics Express*, vol. 22, pp. 18881–18888, Aug. 2014.
- [156] N. Kaïna, M. Dupré, G. Lerosey, and M. Fink, "Shaping complex microwave fields in reverberating media with binary tunable metasurfaces," *Scientific Reports*, vol. 4, p. 6693, Oct. 2014.
- [157] F. Braun, "Die Strassburger Versuche über gerichtete drahtlose Telegraphie," *Elektrotechnische und Polytechnische Rundschau*, no. 1, 1905.
- [158] F. Braun, "The Nobel Prize lecture," 1909.
- [159] D. Berry, R. Malech, and W. Kennedy, "The reflectarray antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 11, pp. 645–651, Nov. 1963.
- [160] N. Yu, P. Genevet, M. A. Kats, F. Aieta, J.-P. Tetienne, F. Capasso, and Z. Gaburro, "Light Propagation with Phase Discontinuities : Generalized Laws of Reflection and Refraction," *Science*, vol. 334, pp. 333–337, Oct. 2011.

- [161] T. Hand and S. Cummer, "Reconfigurable Reflectarray Using Addressable Metamaterials," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 9, pp. 70–74, 2010.
- [162] O. Katz, E. Small, and Y. Silberberg, "Looking around corners and through thin turbid layers in real time with scattered incoherent light," *Nature Photonics*, vol. 6, pp. 549–553, Aug. 2012.
- [163] D. B. Conkey, A. N. Brown, A. M. Caravaca-Aguirre, and R. Piestun, "Genetic algorithm optimization for focusing through turbid media in noisy environments," *Optics Express*, vol. 20, pp. 4840–4849, Feb. 2012.
- [164] X. Zhang and P. Kner, "Binary wavefront optimization using a genetic algorithm," *Journal of Optics*, vol. 16, p. 125704, Dec. 2014.
- [165] M. Dupré, M. Fink, and G. Lerosey, "Releasing spatiotemporal degrees of freedom from dissipation for subwavelength focusing using time reversal," *Physical Review Letter*, no. submitted, 2015.
- [166] M. V. Berry, "Semi-Classical Mechanics in Phase Space : A Study of Wigner's Function," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 287, pp. 237–271, Oct. 1977.
- [167] M. V. Berry, "Regular and irregular semiclassical wavefunctions," *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 10, no. 12, p. 2083, 1977.
- [168] J.-B. Gros, *Spatial statistics of open chaotic cavities : Applications to electromagnetic cavities*. These de doctorat, Univeristé Nice Sophia Antipolis, Dec. 2014.
- [169] J.-B. Gros, O. Legrand, F. Mortessagne, E. Richalot, and K. Selemani, "Universal behaviour of a wave chaos based electromagnetic reverberation chamber," *Wave Motion*, vol. 51, pp. 664–672, June 2014.
- [170] B. A. Lippmann, "Variational Principles for Scattering Processes. II. Scattering of Slow Neutrons by Para-Hydrogen," *Physical Review*, vol. 79, pp. 481–486, Aug. 1950.
- [171] P. Martin, "Acoustic Scattering by Inhomogeneous Obstacles," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 64, pp. 297–308, Jan. 2003.
- [172] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations. II : Qualitative Studies of Linear Equations*. New York : Springer, 1996.
- [173] H. Ammari, H. Kang, and H. Lee, *Layer Potential Techniques in Spectral Analysis*. American Mathematical Soc., 2009.