



HAL
open science

Représentations symboliques musicales et calcul spatial

Louis Bigo

► **To cite this version:**

| Louis Bigo. Représentations symboliques musicales et calcul spatial. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1074 . tel-01326827

HAL Id: tel-01326827

<https://theses.hal.science/tel-01326827>

Submitted on 9 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST
ECOLE DOCTORALE MSTIC

THESE DE DOCTORAT

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Informatique

défendue par

Louis BIGO

Représentations symboliques musicales et calcul spatial

Directeur de thèse : Olivier MICHEL

préparée au LACL et à l'IRCAM

Soutenue le 13 décembre 2013 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	Jean-Marc CHOUVEL	Université de Reims
<i>Rapporteurs :</i>	Myriam DESAINTE-CATHERINE	Université de Bordeaux 1 - LaBRI
	Camilo RUEDA	Pontifica Universidad, Colombie
<i>Examineurs :</i>	Elaine CHEW	QMUL, Royaume-Uni
	Laurent FUCHS	Université de Poitiers
<i>Encadrants :</i>	Antoine SPICHER	Université Paris-Est - LACL
	Moreno ANDREATTA	IRCAM-CNRS
<i>Directeur :</i>	Olivier MICHEL	Université Paris-Est - LACL

Thèse préparée au LACL
(Laboratoire d'Algorithmique, Complexité et Logique)
et à l'IRCAM
(Institut de Recherche et de Coordination Acoustique/Musique)

LACL
Faculté des Sciences et Technologie
61 avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil

IRCAM-CNRS UMR STMS 9912
Équipe Représentations musicales
1 place Igor Stravinsky
75004 Paris

Résumé

La notion d'espace symbolique est fréquemment utilisée en théorie, analyse et composition musicale. La représentation de séquences dans des espaces de hauteurs, comme le *Tonnetz*, permet de capturer des propriétés mélodiques et harmoniques qui échappent aux systèmes de représentation traditionnels. Nous généralisons cette approche en reformulant d'un point de vue spatial différents problèmes musicaux (reconnaissance de style, transformations mélodiques et harmoniques, classification des séries tous-intervalles, etc.). Les espaces sont formalisés à l'aide de collections topologiques, une notion correspondant à la décoration d'un complexe cellulaire en topologie algébrique. Un complexe cellulaire permet la représentation discrète d'un espace à travers un ensemble de cellules topologiques liées les unes aux autres par des relations de voisinage spécifiques. Nous représentons des objets musicaux élémentaires (par exemple des hauteurs ou des accords) par des cellules et construisons un complexe en les organisant suivant une relation de voisinage définie par une propriété musicale. Une séquence musicale est représentée dans un complexe par une trajectoire. L'aspect de la trajectoire révèle des informations sur le style de la pièce et les stratégies de composition employées. L'application d'opérations géométriques sur les trajectoires entraîne des transformations sur la pièce musicale initiale. Les espaces et les trajectoires sont construits à l'aide du langage MGS, un langage de programmation expérimental dédié au calcul spatial, qui vise à introduire la notion d'espace dans le calcul. Un outil, HexaChord, a été développé afin de faciliter l'utilisation de ces notions pour un ensemble prédéfinis d'espaces musicaux.

Mots clés : Calcul spatial, complexes cellulaires, complexes simpliciaux, trajectoire, MGS, *Tonnetz*, collections topologiques, espaces de hauteurs, théorie musicale, analyse musicale, transformations musicales, composition.

Abstract

The notion of symbolic space is frequently used in music theory, analysis and composition. Representing sequences in pitch (or chord) spaces, like the *Tonnetz*, enables to catch some harmonic and melodic properties that elude traditional representation systems. We generalize this approach by rephrasing in spatial terms different musical purposes (style recognition, melodic and harmonic transformations, all-interval series classification, etc.). Spaces are formalized as topological collections, a notion corresponding with the labelling of a cellular complex in algebraic topology. A cellular complex enables the discrete representation of a space through a set of topological cells linked by specific neighborhood relationships. We represent simple musical objects (for example pitches or chords) by cells and build a complex by organizing them following a particular neighborhood relationship defined by a musical property. A musical sequence is represented in a complex by a trajectory. The look of the trajectory reveals some information concerning the style of the piece, and musical strategies used by the composer. Applying geometrical operations on trajectories leads to musical transformations of the initial piece. Spaces and trajectories are computed with MGS, an experimental programming language dedicated to spatial computing, that aims at introducing the notion of space in computation. A tool, HexaChord, has been developed in order to facilitate the use of these notions for a predefined set of musical spaces.

Key words : Spatial computing, cellular complexes, simplicial complexes, trajectory, MGS, *Tonnetz*, topological collections, pitch spaces, musical analysis, musical theory, musical transformations, composition.

Table des matières

1	Introduction	1
1	La pièce musicale comme mouvement dans un espace	1
2	L'approche du calcul spatial	2
3	Objectifs et organisation de cette thèse	3
4	Contributions	6
2	Espaces de hauteurs	9
1	Le <i>Tonnetz</i> : évolution, applications et dérivations	9
1.1	Quelques aspects historiques	9
1.2	Variantes et applications	11
2	<i>Voice-leading spaces</i>	17
3	Outils pour les représentations musicales et le calcul spatial	21
1	Éléments de théorie musicale	21
1.1	Notes et intervalles	21
1.2	Ensembles de classes de hauteurs et <i>Set Theory</i>	24
1.3	Opérations	25
2	Représentations combinatoires	27
2.1	Complexes cellulaires	27
2.2	Complexes simpliciaux	31
2.3	Collection topologique	34
2.4	Inclusion structurelle, pliage et symétrie	35
2.5	Trajectoires	37
2.6	La <i>compliance</i>	38
3	Calcul spatial et MGS	40
3.1	Les collections topologiques	41
3.2	Les transformations	47
3.3	Construction de complexes cellulaires par auto-assemblage	50
4	Spatialisation du calcul des séries tous intervalles	53
1	Différentes énumérations et classifications	53

2	Construction d'un espace dédié à l'énumération des STI	55
2.1	Approche <i>Brute Force</i>	55
2.2	Optimisation de la spécification de la solution	57
2.3	Optimisation de l'espace support	57
3	Une classification spatiale des STI	59
3.1	Notations et définitions	59
3.2	Symétries sur les STI	60
3.3	Caractérisation topologique des STI	64
3.4	Symétries et classification	68
3.5	Clusters de complexes	70
4	Complexes d'intervalles généralisés	73
5	Complexes d'accords	75
1	Représentation simpliciale d'un ensemble d'accords	75
1.1	Complexes et accords	75
1.2	Construction de complexes à l'aide d'un groupe d'intervalles	77
1.3	Construction de complexes par auto-assemblage	77
2	Point de vue spatial sur les classes d'accords	78
2.1	Différents catalogues d'accords	78
2.2	<i>T</i> -complexe et dépliage	83
2.3	Organisations et classifications	86
2.4	Complexes d'accords et <i>voice-leading spaces</i>	90
3	Séquences temporelles d'accords	92
3.1	Chemins et stratégies de composition	93
3.2	Étude à l'échelle d'une pièce entière	95
3.3	Perspectives de l'approche	99
4	Complexité de spécification des espaces d'accords	100
6	Trajectoires	101
1	Séquences musicales et trajectoires	101
1.1	Segmentation d'une pièce	101
1.2	Trajectoires d'une pièce	102
2	Construction de trajectoires	104
2.1	Critères de construction	105

2.2	Algorithme de construction	106
3	Transformation de trajectoires	109
3.1	Transformation d'une pièce	109
3.2	Inclusion structurelle entre espaces support	110
3.3	Trajectoires symétriques	111
3.4	Transformations de trajectoire dans les T -complexes dépliés	112
3.5	Transformations spatiales et transformations musicales	115
4	Compliance d'espace par rapport à une trajectoire	116
4.1	Un exemple intuitif de compliance	117
4.2	Comparaison d'espaces pour une pièce donnée	118
4.3	Classification par critère de compacité	123
7	Développement logiciel	127
1	HexaChord	127
1.1	Modèle de données	127
1.2	L'interface	128
1.3	Visualisation	129
1.4	Calcul de la compacité	133
1.5	Transformations	133
1.6	Perspectives	134
2	PaperTonnetz	134
2.1	Pavages de hauteurs et composition	134
2.2	Étude utilisateur préliminaire	136
2.3	L'application PaperTonnetz	138
2.4	Discussion	141
8	Conclusion	145
1	Résumé des travaux	145
2	Perspectives	147
2.1	Théorie	147
2.2	Analyse	147
2.3	Composition	148
2.4	Performance	150

A	Complexes d'accords définis par une relation d'équivalence	155
1	Complexes d'accords équivalents par transpositions	156
1.1	Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})	156
1.2	Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)	166
2	Complexes d'accords équivalents par transpositions et inversions	167
2.1	Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})	167
2.2	Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)	173
3	Complexes d'accords équivalents par permutations dans la structure inter- vallique	174
3.1	Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})	174
3.2	Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)	177
4	Complexes d'accords équivalents par transformation affine (\mathbb{Z}_{12})	178
	 Bibliographie en relation avec ce travail	 183
	 Bibliographie	 185

Introduction

1	La pièce musicale comme mouvement dans un espace	1
2	L'approche du calcul spatial	2
3	Objectifs et organisation de cette thèse	3
4	Contributions	6

1 La pièce musicale comme mouvement dans un espace

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour point de départ l'hypothèse selon laquelle le déroulement d'une pièce de musique peut être vu comme le déplacement d'un objet dans un espace.

Les espaces que nous utilisons sont appelés *espaces de hauteurs*. Ils sont généralement constitués de notes ou d'accords organisés les uns par rapport aux autres suivant leurs propriétés musicales. Utilisons une métaphore géographique pour illustrer notre approche. L'organisation de ces objets musicaux peut être comparée à la disposition des villes sur une carte géographique. De la même façon que deux villes sont caractérisées par la distance qui les sépare sur la carte, deux notes de musique le sont également par une distance dans un espace de hauteurs. Sur une carte géographique, les villes sont organisées en fonction de leur proximité physique. On peut cependant représenter un ensemble de villes sur des cartes plus abstraites suivant d'autres critères de proximité. On peut par exemple désirer que deux villes soient représentées dans la même région si la taille de leur population est comparable. L'intérêt d'une représentation plutôt qu'une autre dépend du type d'étude pour laquelle elle va être utilisée. De la même manière, un ensemble de notes de musique peut s'agencer de différentes façons, en fonction du critère de proximité qui caractérise l'espace de représentation. La figure 1 illustre deux organisations des 12 notes de la gamme chromatique. Le cercle de gauche représente les notes organisées en fonction de leur hauteur. Il s'agit de la même organisation que celle des touches sur le piano (la note *do* est située entre les notes *si* et *do♯*, etc.). A droite, les notes sont organisées en fonction de leur consonance acoustique¹.

Le but de cet exemple est de mettre en évidence qu'un espace peut se définir à partir d'un ensemble d'éléments et d'une notion de proximité permettant d'organiser ces éléments. Dans la suite, on remplace le terme « notion de proximité » par le terme « relation de voisinage », qui correspond mieux aux espaces que l'on décrira dans ces travaux.

1. La consonance acoustique est définie dans cet exemple par le rapport de fréquences entre les notes.

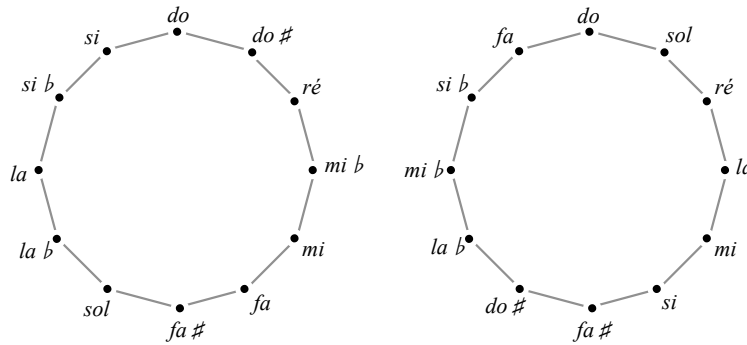


FIGURE 1 – Deux organisations des notes de musique, par critère de hauteur (à gauche) et par critère de consonance acoustique (à droite).

De même qu'un voyage peut être décrit par un itinéraire parcourant successivement plusieurs villes sur une carte, nous représentons le déroulement d'une pièce comme un chemin parcourant des notes et des accords les uns à la suite des autres dans un espace de hauteur. L'allure du chemin dépend de l'organisation des éléments parcourus, et donc de la relation de voisinage définissant l'espace. Les populations des villes de Paris, Lagos (Nigéria) et Nagoya (Japon) étant relativement proches, le passage d'une ville à l'autre dans l'organisation par taille de population se caractérise par un chemin court, alors que sur une carte géographique ce chemin sera long, dû à l'éloignement physique des trois villes. De même, la suite de notes $\{mi \rightarrow fa \rightarrow sol\}$ est représentée par un chemin différent dans les deux espaces figure 1. Interpréter l'aspect d'un chemin nécessite donc de prendre en compte la relation de voisinage définissant l'espace dans lequel il est représenté. La longueur du chemin entre Paris et Nagoya dans le premier espace révèle une propriété d'éloignement géographique alors que sa petite longueur dans le second espace révèle une propriété de proximité démographique entre les deux villes. De la même manière, représenter une pièce musicale par un chemin dans des espaces associés à différentes propriétés musicales permet de révéler des informations de différentes natures sur la pièce.

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour but de proposer des outils pour adapter et développer ce type de *démarche spatiale* dans le cadre de la théorie, de l'analyse et de la composition musicale.

2 L'approche du calcul spatial

Le *Calcul Spatial* est un domaine de recherche émergent qui vise à développer des outils permettant de représenter et de manipuler la notion d'espace en informatique. Nous utilisons ce cadre pour construire des espaces musicaux et y représenter des pièces comme des déplacements dans ces espaces. Nous nous appuyons pour ce faire sur MGS, un langage de programmation expérimental dédié au calcul spatial qui a déjà fait ses preuves en biologie des systèmes spatialisés. Le langage MGS se fonde sur deux notions : celle de *collection topologique*, une nouvelle structure de données reposant sur la notion de *complexe cellulaire* développée en topologie algébrique, et celle de *transformation topologique*,

permettant de manipuler les collections topologiques.

Dans le cadre de cette étude, nous définissons les espaces musicaux comme des complexes cellulaires. Un complexe cellulaire peut être vu comme un ensemble d'objets symboliques (appelés *cellules topologiques*) collés entre eux d'une certaine manière. Les cellules sont de différentes dimensions. Il peut s'agir de points, d'arcs, de surfaces, de volumes, etc. Chaque cellule représente un objet musical (par exemple une note ou un accord). Pour définir un espace de hauteur, nous avons besoin d'un ensemble de cellules et d'une relation de voisinage permettant de les positionner les unes par rapport aux autres. Une fois défini comme un complexe cellulaire, l'espace musical peut être étudié du point de vue de sa forme, et peut servir d'espace support pour l'analyse ou même la composition musicale.

3 Objectifs et organisation de cette thèse

Chapitre 2 : Espaces de hauteurs. Les représentations spatiales ne sont pas nouvelles et uniques. On peut remonter à L. Euler et à son *Speculum Musicum* pour une première formalisation 2D d'un espace de hauteurs. Cet intérêt pour les représentations spatiales connaît un renouveau ces 20 dernières années. Le chapitre 2 propose un tour d'horizon des principaux espaces de hauteurs utilisés en théorie, en analyse et en composition musicale. La plupart de ces espaces sont des graphes dont les sommets sont des accords ou des hauteurs. Nous présentons en particulier le *Tonnetz*, espace de hauteur ayant considérablement inspiré les complexes d'accords généralisés qui seront présentés dans la suite de ces travaux. Le *Tonnetz* est un graphe se présentant sous la forme d'un pavage triangulaire ou hexagonale selon les auteurs. Ses sommets représentent des hauteurs organisées suivant les intervalles de tierces mineures, tierces majeures, et de quintes. Nous présentons différentes variantes de ce modèle, auxquelles nous nous référerons dans la suite du document.

Chapitre 3 : Outils pour les représentations musicales et le calcul spatial. Le chapitre 3 présente un ensemble d'outils théoriques utilisés dans la suite du document. La première partie du chapitre est consacrée aux éléments de théorie musicale utilisés dans ces travaux. Nous abordons les notions de classes de hauteurs, de classes d'intervalles, d'échelle musicale, ainsi que différentes transformations couramment appliquées sur ces structures dans le cadre de la *Set Theory*. Dans un second temps, nous présentons les espaces combinatoires utilisés dans ces travaux, unifiés sous la notion de collection topologique. Les principaux espaces sont des complexes simpliciaux, un cas particulier des complexes cellulaires. Ces complexes sont utilisés dans les chapitre 4 et 5 pour construire différents espaces de hauteurs définis par des propriétés musicales théoriques. Nous évoquons différentes méthodes de calculs que nous emploierons par la suite sur ces structures, ainsi que les notions d'inclusion structurelle, de pliage, de symétrie et d'invariants topologiques.

Nous présentons ensuite la notion de trajectoire permettant la représentation de pièces musicales dans les complexes d'accords, ainsi que la *compliance*, mesure que nous proposons dans ces travaux pour évaluer la propension d'un espace à représenter les propriétés d'un système. Ces deux notions seront largement utilisées dans le chapitre 6.

Enfin, la troisième partie de ce chapitre est consacrée à une présentation du langage de programmation MGS et plus généralement du calcul spatial, qui en constituant le cadre de ces travaux, a inspiré un certain nombre d'idées présentées dans les chapitres suivants. Le langage MGS renouvelle la notion de structure de données sous la notion de *collection topologique*. Les *transformations topologiques* sont utilisées pour contrôler ces structures.

Chapitre 4 : Spatialisation du calcul des séries tous intervalles. Le chapitre 4 propose la construction d'un espace de hauteurs dédié à l'étude des séries tous intervalles. Une série tous intervalles est une série de 12 notes comprenant les 12 classes de hauteurs et les 11 classes d'intervalles exactement une fois. Ces séries de notes sont utilisées par différents compositeurs du XX^{ème} siècle s'inscrivant dans le courant du dodécaphonisme. L'énumération et la classification des STI a fait l'objet de différents travaux. Nous proposons de reformuler le problème d'un point de vue spatial. L'espace que nous utilisons est un complexe cellulaire dans lequel les notes sont représentées par des sommets et les classes d'intervalles par des surfaces. Une série tous intervalles correspond alors à un chemin parcourant chaque sommet et longeant chaque surface une fois exactement. On désigne par le terme $\langle 0, 1 \rangle$ -chemin Hamiltonien un tel chemin. Dans un second temps, nous proposons une modification de cet espace permettant une classification des 3856 STI selon des critères topologiques. Bien que la construction de cet espace soit motivée spécifiquement par l'étude des STI, ce chapitre illustre la démarche générale de l'approche spatiale, où résoudre un problème revient à construire un espace abstrait, dont la structure représente les propriétés cherchées et rend compte des contraintes posées, afin que la construction d'une solution se traduise par la recherche d'un chemin dans cet espace.

Chapitre 5 : Complexes d'accords. Le chapitre 2 présente des espaces d'accords de différentes natures, comprenant plusieurs dérivations du *Tonnetz*. Nous proposons dans le chapitre 5 un système de représentation permettant d'unifier ces différentes approches à l'aide de complexes simpliciaux. Nous proposons de représenter un accord par un simplexe et un ensemble d'accords par un complexe simplicial. Un des principaux avantages de la représentation simpliciale de l'accord est de rendre compte de sa taille de manière structurelle puisqu'elle est associée à la dimension du simplexe. Cette représentation permet d'autre part de représenter chacun des sous-accords compris dans un accord. Les complexes d'accords sont construits à l'aide de deux méthodes différentes. La construction par *auto-assemblage* consiste à fusionner les parties communes d'une population d'accords élémentaires. Ce processus est comparable à une réaction chimique. Une seconde méthode est présentée, consistant à répartir les simplexes suivant des directions associées à des intervalles dans un espace euclidien. Ces deux constructions permettent respectivement d'obtenir les versions pliée et dépliée du *Tonnetz* présentées dans le chapitre 2. Nous établissons différents catalogues de complexes d'accords regroupés par classe d'équivalence définies à l'aide des opérations musicales décrites dans le chapitre 3. Nous nous intéressons par exemple aux complexes constitués d'accords équivalents par transposition et inversion. Nous proposons différentes manières d'organiser et de représenter ces complexes. Les complexes d'accords sont ensuite comparés de manière plus générale avec les *voice-leading spaces* évoqués dans le chapitre 2.

Dans un second temps, nous utilisons cette approche pour construire un complexe à partir des seuls accords d'une pièce de musique. L'espace résultant est alors l'*espace intrinsèque de la pièce*. Les complexes sont construits à l'aide du processus d'auto-assemblage. Nous utilisons la notion de chemin pour représenter l'ordonnement des accords correspondant au déroulement de la pièce. Une étude de ce chemin ainsi que de certains des aspects topologiques du complexe (taille, dimension, connexité, symétries, etc.) peut révéler des informations sur les stratégies de composition caractérisant la pièce, ainsi que sur son style.

Chapitre 6 : Trajectoires. Les espaces dérivés du *Tonnetz* sont utilisés en analyse musicale pour visualiser des progressions harmoniques. Le travail de l'analyste implique souvent en premier lieu de représenter dans l'espace la séquence à analyser. Les séquences musicales pouvant être représentées de différentes manières dans ces espaces, ce processus peut nécessiter des choix. Nous présentons la notion de *trajectoire*, permettant de représenter une pièce musicale dans un complexe d'accords. Une trajectoire est une séquence de collections topologiques chacune étiquetée par une durée. Chaque collection correspond à une région de l'espace support dans lequel des éléments musicaux sont joués. Nous proposons un algorithme déterminant automatiquement la trajectoire représentant une pièce dans un espace. Cet algorithme est paramétrable en fonction de la priorité donnée aux différents critères de représentation. Cette approche permet de systématiser la représentation de pièces musicales dans des espaces, et d'automatiser leur analyse. Nous utilisons la notion de *compliance* pour mesurer la propension d'un complexe d'accords à représenter une pièce. Cet outil mesure la compacité des trajectoires et nous permet de déterminer parmi un ensemble d'espace celui qui est le plus apte à représenter une pièce. Nous utilisons cette approche pour l'analyse de style et la classification automatique.

Dans un second temps, nous proposons d'appliquer des opérations géométriques sur les trajectoires. Ces opérations sont des rotations, des translations ou des homothéties. Mais des transformations peuvent aussi être appliquées à l'espace même servant de support à la trajectoire. En particulier, on propose de déplacer une trajectoire construite dans un espace de départ dans d'autres espaces. Ce type de transformation nécessite une relation d'inclusion structurelle entre les deux espaces. Ces différentes opérations entraînent différentes transformations de la pièce initiale. Certaines de ces transformations correspondent à la traduction spatiale de transformations musicales usuelles, comme les transpositions et inversions dans les domaines diatoniques et chromatiques. D'autres suggèrent de nouvelles transformations musicales.

Chapitre 7 : Développement logiciel. Ce chapitre décrit les deux logiciels qui ont été développés dans le cadre de cette thèse. L'outil *HexaChord* est dédié à l'analyse musicale. Il permet notamment la visualisation de pièces musicales sous la forme de trajectoires dans différents complexes d'accords. Les trajectoires sont calculées à l'aide des algorithmes présentés dans le chapitre 6. Les espaces disponibles correspondent aux complexes d'accords à trois notes admettant un plongement 2D sous la forme d'un pavage triangulaire infini. Les accords constituant l'espace sont constitués dans l'échelle chromatique ou dans l'échelle diatonique, qui est associée aux gammes usuelles (gamme majeure, gamme mineure mélodique et gamme mineure harmonique). Ces complexes sont au nombre de 108.

HexaChord représente en temps réel une pièce musicale sous la forme d'un fichier MIDI par une trajectoire dans ces espaces. La compacité de la pièce dans les différents espaces est calculée de manière automatique et permet de déterminer les espaces les plus adaptés à une séquence musicale. La compacité d'une trajectoire dans les différents espaces est illustrée à l'aide de courbes temporelles permettant d'analyser son évolution au cours du temps. La compacité moyenne d'une trajectoire dans les différents espaces est représentée à l'aide d'histogrammes et peut servir de critère de classification. Enfin, l'outil permet d'effectuer de manière automatique les transformations spatiales de trajectoires présentées dans le chapitre 6 et de générer les fichiers MIDI correspondant à la pièce transformée.

On présente dans une seconde partie PaperTonnetz, un outil dédié à la composition musicale dans les espaces de hauteurs, à l'aide de la technologie du *papier interactif*. Le compositeur dessine sur une feuille des chemins dans les espaces de hauteurs représentables sous la forme de pavages triangulaires et hexagonaux. Le geste du compositeur est automatiquement traduit en une séquence musicale. Les trajectoires constituées par l'utilisateur peuvent être assemblées dans un séquenceur et importées au format MIDI dans différents environnements dédiés à la composition assistée par ordinateur.

4 Contributions

Théorie et formalisation

- J'ai proposé une formulation spatiale originale du problème de l'énumération des *séries tous intervalles*, en représentant une série par un chemin dans un complexe cellulaire. Ce type de chemin possède une double propriété d'hamiltonicité dans le sens où il parcourt chaque sommet et longe chaque surface une fois exactement. J'ai proposé une représentation alternative de ce complexe permettant de classer les séries tous intervalles suivant des critères topologiques. Dans cette classification, les séries sont regroupées par *clusters* et se distinguent en fonction des cycles d'intervalles qu'elles empruntent.
- J'ai proposé une représentation d'accords à l'aide de simplexes. Cette approche permet la représentation d'ensembles et de séquences d'accords sous la forme de complexes simpliciaux. Les complexes sont construits à l'aide de deux méthodes, aboutissant respectivement aux deux versions du *Tonnetz* utilisées en théorie et en analyse musicale. J'ai proposé la notion de dépliage sur les complexes d'accords, offrant une représentation d'un espace d'accords sous la forme d'un plan euclidien infini. J'ai proposé de redéfinir le *Tonnetz* et sa généralisation comme des graphes de Cayley. J'ai dressé quatre catalogues d'espaces associés à des classes d'équivalences d'accords définies par des propriétés musicales et j'ai effectué une analyse automatique de différentes propriétés topologiques de ces espaces. J'ai proposé la notion de *complexe d'une pièce* en étendant cette démarche à des séquences d'accords issus d'une pièce musicale. Cette approche permet de procéder à une analyse à partir d'outils topologiques de l'œuvre. Ce type d'analyse permet de révéler des informations sur le style et sur les stratégies de composition utilisées.

- J’ai proposé et formalisé la notion de *trajectoire* pour représenter une pièce musicale dans les versions pliées et dépliées des complexes d’accords. Une trajectoire correspond à une séquence de collections topologiques correspondant aux régions d’un espace support. J’ai proposé un algorithme d’exploration de l’espace pour la construction automatique de trajectoire à partir d’une pièce musicale. Les espaces support dans lesquels sont construits les trajectoires sont des complexes d’accords.
- J’ai proposée la notion de *compliance* permettant de mesurer la propension d’un espace à représenter une pièce musicale. La compliance est assimilée dans ces travaux à la notion de compacité mais suggère, de par sa définition, plusieurs généralisation pour inclure d’autres critères. J’ai utilisé cette notion pour analyser les stratégies de composition de différents compositeurs et pour classifier un ensemble d’œuvres par style.
- J’ai proposé et formalisé un ensemble de transformations spatiales sur les trajectoires. Ces transformations correspondent à des opérations géométriques, comme la translation et la réflexion, ainsi qu’à des déplacements de trajectoires d’un espace vers un autre. J’ai établi une correspondance entre certaines de ces transformations spatiales et des opérations musicales issues de la théorie musicale. D’autres opérations proposent des nouvelles transformations musicales originales qui n’ont pas encore été étudiées.

Développement

- J’ai développé le logiciel *HexaChord* dédié à l’analyse musicale. Le programme comprend une interface de visualisation pour la représentation de séquences musicales dans les complexes d’accords de 3 notes constitués dans l’échelle chromatique ainsi que différentes échelles diatoniques. Les trajectoires sont visualisées en temps réel pendant la lecture du fichier MIDI. *HexaChord* calcule automatiquement la compacité des trajectoires au cours du temps et de manière globale à l’échelle de la pièce entière. Le programme propose enfin d’appliquer les différentes transformations spatiales sur les trajectoires élaborées dans ces travaux. Un fichier MIDI correspondant à la pièce transformée est automatiquement généré.
- J’ai co-développé le logiciel *PaperTonnetz* dédié à la composition musicale à l’aide de papier interactif. Le développement de cet outil a nécessité une étude utilisateur qui a été réalisée en Juin 2011 au Palais de la Découverte à Paris. L’originalité de ce projet a consisté en particulier à placer au centre de l’application l’interaction du compositeur avec les trajectoires constituées dans les différents espaces.

Publications. Ces travaux ont donné lieu à plusieurs publications dans un journal [BS13a], dans des conférences internationales [BSO10, BSO11a, BGS11, BGSM12, BS13b, BGS13, BAGS13, GBSM13] et dans une conférence nationale [BSO11c]. Ils ont été récompensés par le prix jeune chercheur Science et Musique 2013.

Espaces de hauteurs

1	Le <i>Tonnetz</i> : évolution, applications et dérivations	9
2	<i>Voice-leading spaces</i>	17

Les représentations géométriques d'un ensemble de hauteurs ne sont pas nouvelles et remontent au moins à L. Euler. Dans ce chapitre, nous présentons différents espaces de hauteurs qui ont été conçus et qui partagent des propriétés importantes avec les espaces de hauteurs que nous développons dans nos travaux. La première partie du chapitre est consacrée au *Tonnetz*, espace ayant majoritairement inspiré les travaux de cette thèse. Dans un second temps, nous présenterons quelques autres espaces dont la spécificité, comme le *Tonnetz*, est de représenter efficacement les lignes mélodiques constituées par des séquences d'accords. Ces espaces sont fréquemment désignés sous le terme *voice-leading spaces*, littéralement « espaces de conduite de voix ».

1 Le *Tonnetz* : évolution, applications et dérivations

1.1 Quelques aspects historiques

De par ses multiples évolutions et ses utilisations variables depuis le XVIII^e siècle, la notion de *Tonnetz* se définit et se formalise aujourd'hui de différentes manières. On peut toutefois le caractériser de manière générale comme une organisation spatiale de hauteurs suivant des axes dont la direction est associée à un intervalle. Le *Speculum Musicum* de Leonhard Euler (1739), illustré en figure 1, constitue une des premières représentations de ce type.

Le *Speculum Musicum* se présente comme une matrice 3×4 organisant les 12 hauteurs suivant la quinte (axe horizontal de gauche à droite) et la tierce majeure (axe vertical de haut en bas). Il est important de signaler que ces deux intervalles sont considérés dans cette représentation comme *purs* ce qui signifie qu'on ne se situe pas dans le cadre du tempérament égal mais celui de l'intonation juste¹. Le *Speculum Musicum* a en effet été originellement imaginé par L. Euler afin de représenter les proximités acoustiques entre les hauteurs musicales. Arthur von Oettingen propose en 1866 un modèle où les axes de la tierce majeure et de la quinte sont prolongés de manière à constituer un plan infini (figure 2).

1. Les déplacements suivant la quinte pure et la tierce majeure pure consistent respectivement à multiplier la fréquence par $3/2$ et par $5/4$.

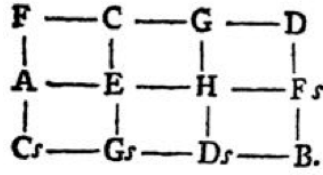


FIGURE 1 – Le *Speculum Musicum* de Leonhard Euler représente les 12 hauteurs organisées par quintes pures (axes horizontaux, vers la droite) et par tierces majeures pures (axes verticaux, vers le bas) dans un espace 2D.

m	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{d}}$	$\overline{\overline{a}}$	$\overline{\overline{e}}$	$\overline{\overline{h}}$	$\overline{\overline{fis}}$	$\overline{\overline{cis}}$	$\overline{\overline{gis}}$	$\overline{\overline{dis}}$	$\overline{\overline{ais}}$	$\overline{\overline{eis}}$	$\overline{\overline{his}}$	$\overline{\overline{fis}}$	$\overline{\overline{cisis}}$	$\overline{\overline{gis}}$	$\overline{\overline{dis}}$
1	$\overline{\overline{as}}$	$\overline{\overline{es}}$	$\overline{\overline{b}}$	$\overline{\overline{f}}$	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{d}}$	$\overline{\overline{a}}$	$\overline{\overline{e}}$	$\overline{\overline{h}}$	$\overline{\overline{fis}}$	$\overline{\overline{cis}}$	$\overline{\overline{gis}}$	$\overline{\overline{dis}}$	$\overline{\overline{ais}}$	$\overline{\overline{eis}}$	$\overline{\overline{his}}$
0	fes	ces	ges	des	as	es	b	f	c	g	d	a	e	h	fis	cis	gis
-1	$\overline{\overline{deses}}$	$\overline{\overline{asas}}$	$\overline{\overline{eses}}$	$\overline{\overline{bb}}$	$\overline{\overline{fes}}$	$\overline{\overline{ces}}$	$\overline{\overline{ges}}$	$\overline{\overline{des}}$	$\overline{\overline{as}}$	$\overline{\overline{es}}$	$\overline{\overline{b}}$	$\overline{\overline{f}}$	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{d}}$	$\overline{\overline{a}}$	$\overline{\overline{e}}$
-2	$\overline{\overline{\overline{bbb}}}$	$\overline{\overline{\overline{feses}}}$	$\overline{\overline{\overline{ceses}}}$	$\overline{\overline{\overline{geses}}}$	$\overline{\overline{\overline{deses}}}$	$\overline{\overline{\overline{asas}}}$	$\overline{\overline{\overline{eses}}}$	$\overline{\overline{\overline{bb}}}$	$\overline{\overline{\overline{fes}}}$	$\overline{\overline{\overline{ces}}}$	$\overline{\overline{\overline{ges}}}$	$\overline{\overline{\overline{des}}}$	$\overline{\overline{\overline{as}}}$	$\overline{\overline{\overline{es}}}$	$\overline{\overline{\overline{b}}}$	$\overline{\overline{\overline{f}}}$	$\overline{\overline{\overline{c}}}$

FIGURE 2 – Le *Tonnetz* de Arthur von Oettingen. Les barres verticales représentent les ajustements de comma syntonique nécessaires pour différencier les hauteurs dans le cadre de l'intonation juste.

Oettingen souligne la proximité dans le *Tonnetz* des hauteurs séparées par un intervalle de tierce mineur et propose de représenter cet intervalle par un troisième axe, en diagonale, afin que les triades majeures et mineures (composées d'une tierce mineure, d'une tierce majeure et d'une quinte) y soient représentées par des triangles. Ce nouveau voisinage entre les hauteurs fit du *Tonnetz* un outil essentiel dans le cadre des théories et analyses *néo-riemanniennes* [Cohn 1997, Cohn 1998] et suggéra de le redéfinir comme une organisation des 12 classes de hauteurs dans le cadre du tempérament égal et non plus de l'intonation juste. La représentation triangulaire des triades permet en effet d'illustrer, sous la forme de symétries entraînant un mouvement minimal, les *transformations néo-riemanniennes*² qui maximisent le nombre de notes communes d'un accord à l'autre (figure 3) :

- la transformation P (*Parallel*) met en relation les triades partageant une quinte (*e.g.*, (C, E, G) et $(C, E\flat, G)$) et entraîne un mouvement d'un demi-ton sur la troisième classe de hauteur ($E \rightarrow E\flat$),
- la transformation L (*Leading-tone*) met en relation les triades partageant une tierce mineure (*e.g.*, (C, E, G) et (B, E, G)) et entraîne un mouvement d'un demi-ton sur la troisième classe de hauteur ($C \rightarrow B$),
- la transformation R (*Relative*) met en relation les triades partageant une tierce majeure (*e.g.*, (C, E, G) et (C, E, A)) et entraîne un mouvement d'un ton sur la troisième classe de hauteur ($G \rightarrow A$).

2. Pour une introduction à la théorie néo-riemannienne, se reporter à [Cohn 1998].

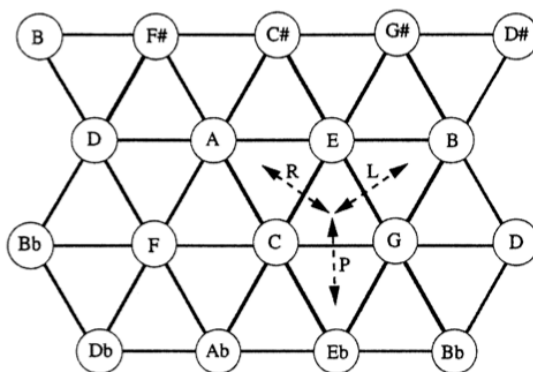


FIGURE 3 – Les transformations d’accords P , L et R représentées dans le *Tonnetz* généré par la quinte (axe horizontal), la tierce mineure et la tierce majeure (diagonales).

Ces trois transformations sont les seules permettant de passer d’une triade majeure à une triade mineure (et vice versa) en ne changeant qu’une seule classe de hauteur. Le fait que ces transformations soient caractérisées par un petit mouvement de la note changeante (un demi-ton pour les opérations P et L et un ton pour l’opération R), permet d’assembler des triades à la suite les unes des autres en respectant des conduites de voix parcimonieuses (règle de composition plus connue sous son nom anglais *parsimonious voice-leading*³). Cette propriété notable considérablement étudiée [Cohn 1997] fait de la triade, qui possède déjà des propriétés acoustiques intéressantes, un objet central en composition musicale⁴.

La représentation des classes de hauteurs en tempérament égal entraîne une double cyclicité dans le *Tonnetz* qui se présente alors sous la forme d’une grille triangulaire toroïdale. Pour plus d’éléments sur l’histoire du *Tonnetz*, se reporter à [Vogel 1993, Mooney 1996, Gollin 2006, Cohn 2011].

1.2 Variantes et applications

1.2.1 *Harmonic Table*

Dans le *Tonnetz*, chaque sommet possède 6 voisins (figure 3). Cette propriété permet de représenter le réseau de hauteurs par un pavage hexagonal connu sous le nom de *Harmonic table* [Chouvel 2009a](voir figure 4). La *Harmonic Table* a connu de nombreuses applications ces dernières années, notamment en industrie où elle a constitué une inspiration nouvelle chez les confectionneurs d’instruments de musique [C-t 2013, dua 2013] et d’applications musicales pour tablettes tactiles [mus 2013, iso 2013]. La réalisation de la *Harmonic Table* sous la forme d’une interface, tangible ou tactile, entraîne la confection d’un instrument isomorphe. Ce type d’instrument a la propriété de permettre la reproduction de motifs mélodiques et harmoniques transposés par des gestes similaires [Maupin 2011].

3. Dans le cadre du *parsimonious voice-leading*, une « voix » étant constituée d’une suite de hauteurs appartenant chacune à une triade successive.

4. Pour plus d’explications à ce sujet, le lecteur est invité à se pencher sur la « sur-détermination » de la triade développée dans [Cohn 1997] et [Cohn 2012].

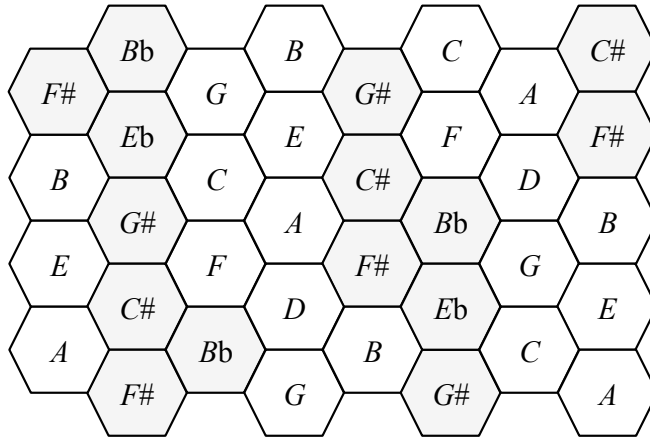


FIGURE 4 – La *Harmonic Table* est une organisation des hauteurs sous la forme d'un pavage hexagonal à l'intérieur duquel les relations de voisinage entre hauteurs sont les mêmes que dans le *Tonnetz*.

Autrement dit, la transposition musicale se traduit systématiquement par une translation spatiale. Cette propriété est déjà présente dans certains instruments de musique, comme la guitare basse et le violon, mais absente dans un grand nombre de cas (*e.g.*, l'alternance des touches noires et blanches du piano ne permet que de rares possibilités de translation dans le jeu).

1.2.2 Complexes simpliciaux d'accords

La figure 5 correspond à un assemblage des sept degrés de la gamme diatonique. Les accords sont représentés par des triangles et les notes par des sommets. La fusion des éléments communs aboutit à un ruban de Möbius [Mazzola 2002]⁵.

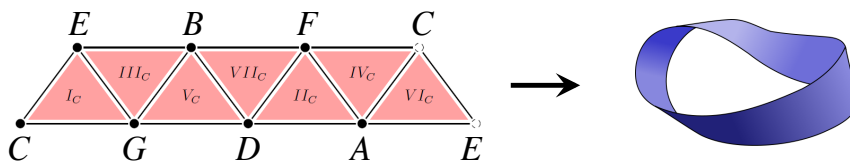


FIGURE 5 – Assemblage des 7 accords à 3 sons constituant les degrés de la gamme diatonique. Les accords sont représentés par des triangles et les notes par des sommets. L'assemblage des parties communes aboutit à un ruban de Möbius.

Dans le *Tonnetz*, les triades majeures et mineures sont représentées par des surfaces triangulaires partageant des arêtes (figure 3). Cette propriété permet de voir le *Tonnetz* comme un ensemble de triangles collés les uns aux autres plutôt qu'une organisation de hauteurs le long de différents axes. Michael J. Catanzaro propose ainsi de formaliser le

5. Cette propriété topologique a initialement été mise en évidence par G. Mazzola sur la structure duale *i.e.*, les accords sont représentés par des sommets et les notes par les surfaces triangulaires.

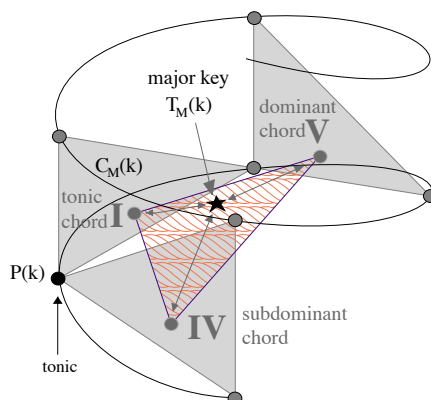


FIGURE 6 – La *spiral array* organisant les hauteurs suivant l’intervalle de quinte juste le long d’une spirale verticale. L’étoile représente une tonalité dont la position est donnée par le barycentre de ses accords de degrés I, IV et V représentés par des triangles pleins.

Tonnetz comme un *complexe simplicial*⁶ résultant de l’assemblage des triades représentées comme des *2-simplexes* (*i.e.*, des triangles) [Catanzaro 2011]. Cette formalisation du *Tonnetz* permet à Catanzaro d’appliquer cette construction aux 11 autres familles d’accords à 3 sons équivalents par transposition et inversion⁷ et d’en étudier les aspects topologiques.

Le chapitre 5 propose une approche simpliciale semblable pour la construction d’espaces d’accords, en fournissant en plus une méthode permettant la généralisation et la systématisation de la construction de complexes, associés à tout type d’accord.

1.2.3 La *Spiral array*

Le modèle connu sous le nom de *spiral array* [Chew 2000] a été développé par Elaine Chew avec pour objectif de représenter dans un même espace géométrique la perception des hauteurs, des accords et de la tonalité au cours de l’évolution d’une œuvre. Le modèle peut se construire de la même manière que le *Tonnetz* mais sans l’hypothèse du tempérament égal. Le *Tonnetz* ne se plie donc que dans un sens, aboutissant à une structure cylindrique et non toroïdale (figure 6). La spirale externe correspond à l’organisation des hauteurs en suivant l’intervalle de quinte juste. Deux hauteurs situées l’une au-dessus de l’autre (dû à la rotation de la spirale) sont séparées par une tierce majeure. Les triades majeures et mineures peuvent être représentées par des triangles sectionnant la spirale. En considérant respectivement les centres de ces triangles, on obtient deux spirales supplémentaires. Enfin, deux dernières spirales, représentant les tonalités majeures et mineures, sont constituées en calculant le barycentre des accords de degrés I, IV et V de chaque tonalité. La *spiral array* a été utilisée pour différentes applications, dont entre autres la recherche automatique de tonalité [Chew 2002].

6. Les *complexes simpliciaux* seront présentés dans le chapitre 3.

7. Cette propriété sur les familles d’accords sera présentée plus en détail dans le chapitre 5.

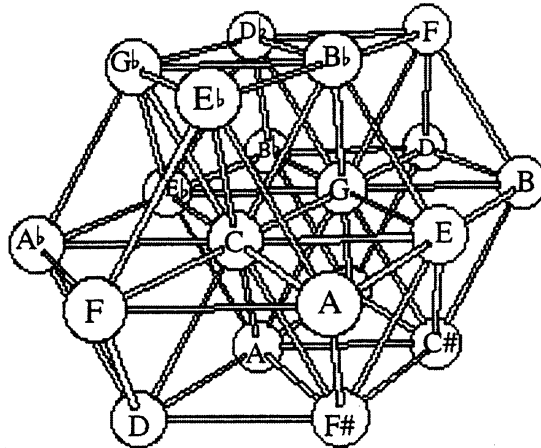


FIGURE 7 – Le *Tonnetz* 3D de Gollin. Les accords septième et demi-diminués sont représentés par des tétraèdres.

1.2.4 *Tonnetz* 3D

Les qualités du *Tonnetz* à représenter les transformations triadiques ont naturellement suggéré la recherche de modèles généralisant l'approche pour des accords à plus de 3 sons. Différents travaux proposent des modèles *tridimensionnels* du *Tonnetz* [Vogel 1993, Lindley 1993, Tymoczko 2012]. En particulier, E. Gollin [Gollin 1998] propose un modèle dans lequel chaque sommet de l'espace peut être atteint à l'aide de 3 coordonnées associées aux axes générés par les intervalles de quinte et de tierce majeure (provenant du *Tonnetz* traditionnel) mais aussi de septième mineure (figure 7). Les accords septième de dominante sont représentés par des tétraèdres pointant vers le haut (par exemple l'accord $\{F, A, C, Eb\}$ dans la figure 7), et les accords demi-diminués par des tétraèdres pointant vers le bas (par exemple l'accord $\{C, Eb, Gb, Bb\}$ dans la figure 7). Le *Tonnetz* traditionnel se retrouve dans cette structure sous la forme d'une coupe horizontale que l'on pourrait visualiser en faisant abstraction des 5 sommets situés respectivement dans la partie supérieure et la partie inférieure de la figure 7. E. Gollin étudie les symétries d'un accord par rapport à un sommet ou une arête et généralise son approche pour des structures similaires générées par n'importe quelle combinaison de 3 intervalles.

1.2.5 Modèle *Planet-4D*

Le re-ploiage toroïdal du *Tonnetz* conserve le voisinage entre les hauteurs ce qui en fait un modèle topologiquement valide. En revanche, le plongement du tore dans l'espace 3D ne permet pas d'attribuer une distance fixe pour chaque intervalle. Afin de procurer un modèle géométrique valide, G. Baroin propose une représentation du *Tonnetz* plongée en 4 dimensions, appelé *modèle Planet* [Baroin 2010, Baroin 2011], dans lequel les intervalles définissant le voisinage entre hauteurs sont la tierce mineure et la tierce majeure. Les cycles de tierces mineures y sont représentés par 3 carrés de tailles et d'orientations identiques (figure 8). Il en est de même pour les 4 cycles de tierces majeures, représentés par des triangles partageant les mêmes propriétés. La distance euclidienne entre deux

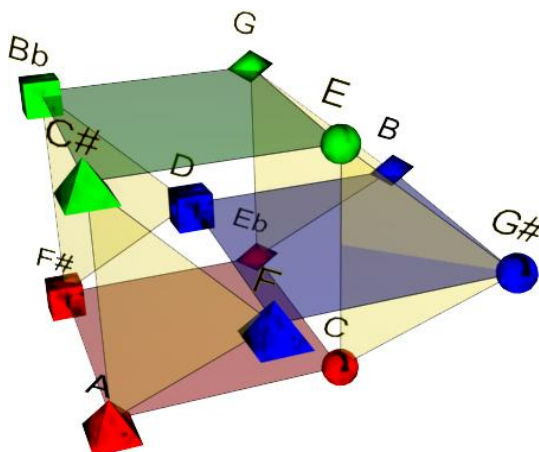


FIGURE 8 – Le modèle *Planet* 4D de Gilles Baroin, plongé en 3 dimensions. Contrairement à la représentation toroïdale classique, les tierces mineures et les tierces majeures y sont représentées.

classes de hauteurs est proportionnelle à la distance en termes de pas dans le graphe de voisinage associé. La forme et la couleur du sommet représentant une classe de hauteur permettent d'identifier respectivement le cycle de tierces majeures et le cycle de tierces mineures auxquels elle appartient. Le *Modèle Planet* a été étendu dans différentes directions, comprenant des applications interactives pour l'improvisation musicale [Baroin 2010].

1.2.6 Représentation duale du *Tonnetz*

Afin de représenter des progressions harmoniques, en particulier dans le cadre d'analyses néo-riemanniennes, le *Tonnetz* est fréquemment représenté sous la forme d'un graphe d'accords correspondant à sa forme duale (voir figure 9). Les sommets de ce graphe correspondent aux triades (représentées sous la forme de surfaces triangulaires dans le *Tonnetz*). Il existe un arc entre les triades partageant 2 notes (*i.e.*, les triades associées à des triangles partageant une face dans le *Tonnetz*). Chaque arc est donc associé à une des 3 opérations néo-riemanniennes P , L ou R . Ce graphe est couramment désigné sous le nom de *Chicken-wire Torus* [Douthett 1998] et a été étudié sous différents aspects (par exemple les chemins hamiltoniens qu'il comprend [Albini 2009]).

1.2.7 *Tonnetz* diatonique

Le *Tonnetz* a été dérivé sous le nom de *Diatonic Tonnetz* [Brower 2008, Cohn 2012] ou encore de *Generic Tonnetz* [Hook 2013]. Le *Diatonic Tonnetz* n'inclut qu'un ensemble de classes de hauteurs correspondant à une tonalité particulière (en l'occurrence une tonalité majeure ou mineure mélodique). Le *Generic Tonnetz* ne représente que sept éléments, pouvant respectivement être interprétés différemment selon le contexte. La figure 10 illustre un *Tonnetz* diatonique associé à la gamme de C majeur. L'axe vertical correspond à l'intervalle de seconde diatonique et les axes diagonaux aux intervalles de tierce et de

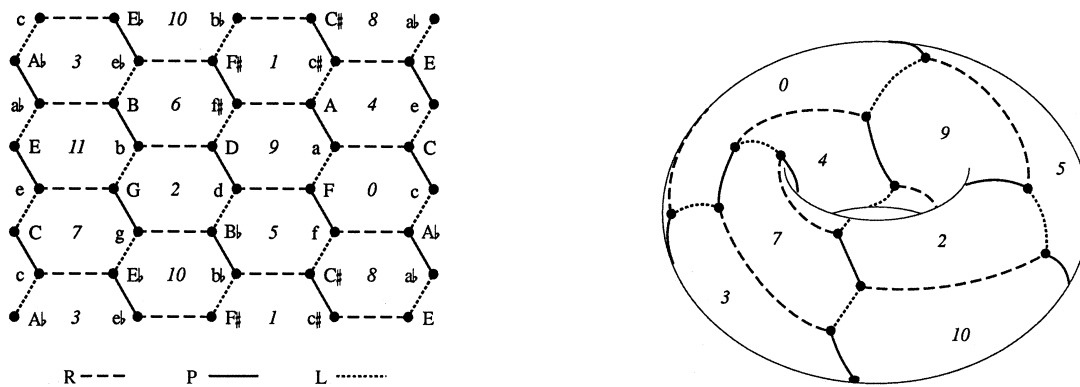


FIGURE 9 – Le *Chicken-wire Torus* (représentation duale du *Tonnetz*) correspond au graphe des 24 triades majeures et mineures liées par les opérations néo-riemanniennes P , L et R . De la même manière que le *Tonnetz*, le graphe se replie sous la forme d'un tore.

quarte diatoniques.

1.2.8 Utilisation en analyse et composition musicale

Le *Tonnetz* (ainsi que ses représentations dérivées) a été considérablement utilisé dans le cadre d'analyses d'œuvres. En particulier, son aptitude à représenter les transformations triadiques néo-riemanniennes en a fait un outil particulièrement adapté pour l'analyse de la musique de la fin du XIX^e siècle [Chouvel 2009a, Chouvel 2009b] mais aussi pour des types de musiques plus populaires [Capuzzo 2004]. Ce type d'analyses consiste typiquement à décomposer les mouvements entre triades en combinaisons des opérations P , L et R . Cette approche permet de représenter une progression harmonique par un *chemin* dans le *Tonnetz* [Hook 2006] et par exemple d'en étudier les aspects géométriques (symétries, circularité, etc.).

Certains compositeurs comme Jean-Marc Chouvel s'intéressent au potentiel des réseaux

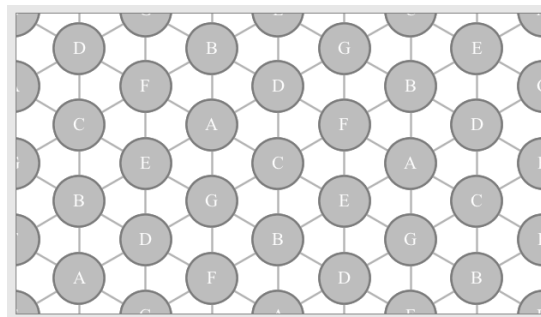


FIGURE 10 – Le *Tonnetz* diatonique correspondant à la tonalité de C majeur. L'espace ne comprend que les classes de hauteurs appartenant à cette tonalité. Chacun des trois axes est associé à un intervalle diatonique.

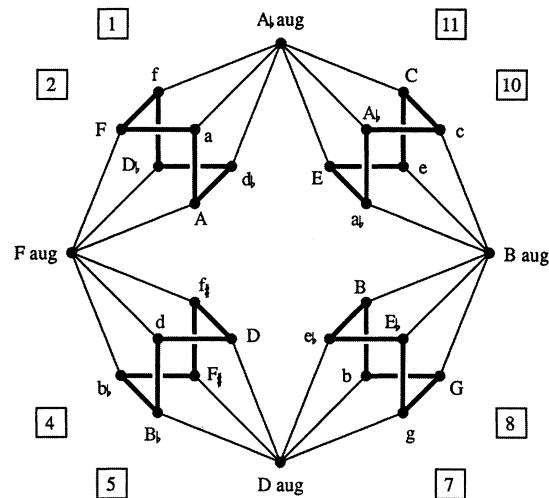


FIGURE 11 – Le *Cube Dance* [Douthett 1998] représentant les 24 triades mineures et majeures ainsi que les 4 triades augmentées. Deux triades sont voisines si il est possible de passer de l’une à l’autre en ne déplaçant qu’une note d’un demi-ton.

de notes pour la composition. La pièce *Traversée du vent et de la lumière* [Chouvel 2009c] en est un exemple. Les aspects compositionnels du *Tonnetz* ont constitué la motivation initiale pour le développement du logiciel *PaperTonnetz* présenté chapitre 7.

2 *Voice-leading spaces*

La figure 11 illustre une organisation des 24 triades mineures et majeures, et des 4 triades augmentées réunies dans un graphe connu sous le nom de *Cube Dance* [Douthett 1998]. Les accords sont reliés par les opérations n’entraînant le mouvement que d’une note et d’un demi-ton. Les arcs en gras correspondent aux opérations P et L entre les triades mineures et majeures⁸. Les autres arcs permettent d’accéder aux triades augmentées. Par exemple, en élevant d’un demi-ton la quinte de l’accord de C majeur (C, E, G), on obtient l’accord C augmenté constitué des mêmes classes de hauteurs que l’accord $A♭$ augmenté.

Par définition, le *Cube Dance* représente de manière voisine deux accords à trois notes dont une unique note diffère d’un demi-ton. Ce type de propriété permet de mettre en évidence les transitions d’accords entraînant des mouvements minimaux entre les classes de hauteurs, permettant ainsi de constituer des séquences d’accords faisant émerger des lignes mélodiques continues. Cette stratégie de composition évoquée par A. Schönberg comme « loi du plus court chemin » [Schoenberg 1978] et plus généralement désignée sous le terme de *parsimonious voice leading*, offre des avantages du point de vue de la performance musicale et respecte une norme esthétique reconnue chez les théoriciens de la musique [Hostinsky 1879, Masson 1971]. Elle facilite en outre la distinction de voix superposées de la part de l’auditeur [Huron 2001].

8. Ces cycles sont connus sous le nom de *hexatonic cycles* [Cohn 1996].

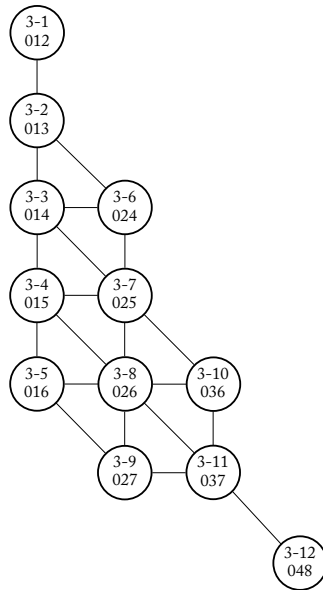


FIGURE 12 – Organisation des 12 types d’accords de taille 3 suivant le critère de déplacement minimum. Deux accords appartiennent à des cellules voisines si on peut passer de l’un à l’autre en ne changeant qu’une seule note d’un demi-ton. Les labels contiennent l’identifiant de la classe de Forte associé au type d’accord (par exemple 3-1) et la forme primaire du type d’accord (par exemple, 012 correspond à l’accord $\{C, C\sharp, D\}$).

Minimiser la variation entre les hauteurs ou les intervalles de deux accords consécutifs constitue donc un critère de voisinage pertinent pour la construction d’espaces d’accords. Ce type de voisinage a donné lieu à l’investigation d’un large ensemble d’espaces pour la théorie et l’analyse musicale, fréquemment désignés sous le terme de *voice-leading spaces*. On peut citer à ce sujet les contributions de J. Roeder [Roeder 1987] et de J. Straus [Straus 2003]. La figure 12 représente les 12 types d’accords⁹ de taille 3 organisés suivant ce critère. Ainsi, transformer une note d’un demi-ton dans n’importe quel accord constitué de trois classes de hauteurs distinctes revient à effectuer un mouvement entre deux sommets voisins dans le graphe figure 12. Nous évoquerons de nouveau cette représentation dans le chapitre 5.

Plus récemment, une nouvelle formalisation de ce type d’espaces sous la forme d’*espaces quotients* (ou *orbifolds*) a été proposée [Tymoczko 2006, Callender 2008]. Dans ce contexte, un orbifold correspond à un espace constitué d’accords d’une certaine taille, regroupés selon différentes classes d’équivalence, comme la transposition ou l’inversion [Callender 2008]. Les figures 13 et 14 illustrent deux orbifolds représentant respectivement les multi-ensembles de trois classes de hauteurs (figure 13), et ce même espace replié sur lui-même à l’aide d’une relation d’équivalence définie par la transposition et l’inversion (figure 14). Le graphe illustré au centre de l’orbifold de gauche correspond au *Cube Dance* illustré figure 11. Les points à l’extérieur de cette région correspondent aux multi-ensembles de

9. On entend ici par type d’accord une classe d’équivalence réunissant les ensembles de classes de hauteurs équivalents par transposition et inversion. Ces classes d’équivalences sont plus connues sous le nom de *Forte Classes* depuis leur énumération par A. Forte au début des années 70 [Forte 1973].

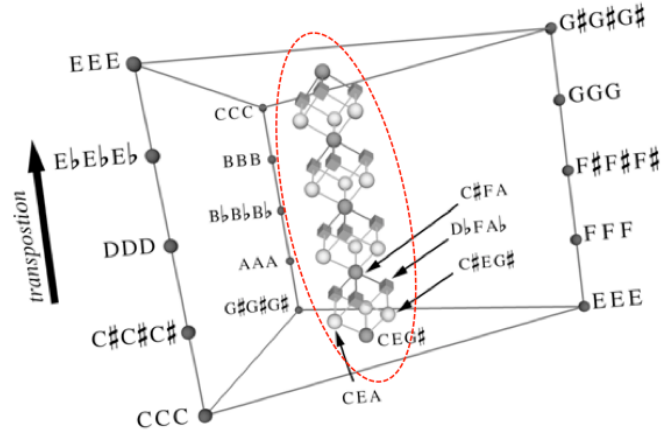


FIGURE 13 – Figure adaptée de [Tymoczko 2011] représentant un orbifold organisant les multi-ensembles de 3 classes de hauteurs. Les quatre cubes entourés au centre de l’espace correspondent au *Cube Dance* de la figure 11.

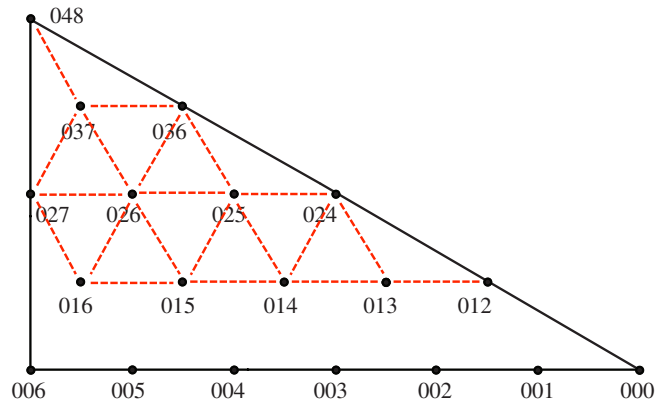


FIGURE 14 – Figure adaptée de [Callender 2008] représentant un orbifold organisant les classes d’équivalences définies par la transposition et l’inversion des multi-ensembles de trois classes de hauteurs. L’organisation des sommets associés aux différentes classes d’accord sans la ligne horizontale inférieure, correspond à l’organisation des classes de Forte figure 12. Les lignes pointillées ont été rajoutées afin de mettre en évidence la relation entre les deux espaces.

trois classes de hauteurs ne correspondant ni à un accord majeur ou mineur, ni à un accord augmenté. On retrouve dans l'orbifold de droite une organisation des classes de Forte équivalente à l'espace illustré figure 12. La présence des accords situés sur la ligne horizontale inférieure dans l'orbifold est due au fait que ce dernier espace organise des multi-ensembles de classes de hauteurs, ce qui signifie qu'on autorise un accord à inclure une classe de hauteur plusieurs fois, ce qui n'est pas le cas dans les représentations précédentes.

Les avantages offerts par les représentations dérivées du *Tonnetz* et des *voice-leading spaces* ont été largement débattus [Tymoczko 2009, Tymoczko 2011, Cohn 2012]. Nous reviendrons chapitre 5 sur ces questions ainsi que sur le positionnement des complexes d'accords élaborés dans ces travaux par rapport à ces espaces. On soulignera entre autres le fait que les graphes d'accords ont pour inconvénient de ne pas représenter par des éléments propres les sous-ensembles des accords.

Outils pour les représentations musicales et le calcul spatial

1	Éléments de théorie musicale	21
2	Représentations combinatoires	27
3	Calcul spatial et MGS	40

Dans ce chapitre, nous introduisons un bestiaire des outils formels utilisés tout au long de ce document.

Nous débutons ce chapitre par la présentation de différents éléments de théorie musicale. Nous introduisons ensuite les différents outils utilisés pour construire des espaces de hauteurs et y effectuer différents calculs. Nous nous intéressons notamment à la notion de complexe cellulaire pour la représentation combinatoire d'espaces. Nous développons également des mesures abstraites pour quantifier l'adéquation d'un espace à représenter une suite donnée de hauteurs ou d'ensembles de hauteurs. Nous terminons avec une brève présentation du calcul spatial, domaine de l'informatique dans lequel se situent ces travaux. On y décrit plus particulièrement le langage MGS qui unifie la notion de structure de données à travers la notion de *collection topologique*. Ce langage permet leurs manipulations grâce aux *transformations*.

1 Éléments de théorie musicale

Les quelques sections qui suivent ont pour objectif de présenter les concepts musicaux les plus fondamentaux (notes, intervalles, accords, etc.) sur lesquels reposent nos travaux. Nous nous intéressons également à leur formalisation classique en informatique musicale (division de l'octave, actions de groupe, *Set Theory*, etc.).

1.1 Notes et intervalles

La hauteur d'une note de musique est décrite d'un point de vue physique par une fréquence. On peut citer par exemple le cas du *La* de référence dont la fréquence est de 440 Hertz. Deux notes de musiques sont séparées par un intervalles d'*octave* si la fréquence de l'une est égale au double de la fréquence de l'autre. Par exemple, le *La* 440 et le *La* 880 sont séparés par une octave. Dans la suite de ce document, nous nous situons exclusivement

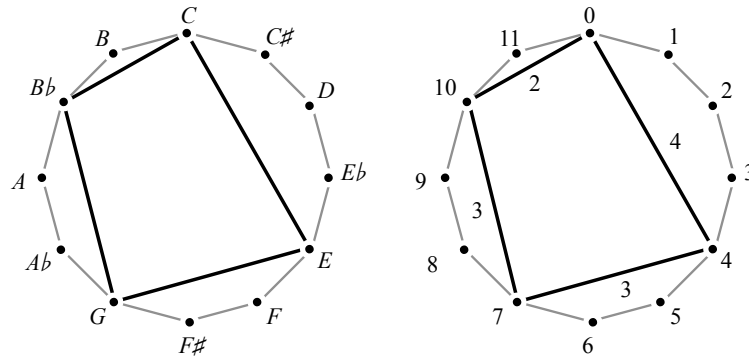


FIGURE 1 – Représentation circulaire de l'accord de Do septième dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}). L'accord est désigné par l'ensemble de ses classes de hauteurs, soit $\{0, 4, 7, 10\}$. Sa structure intervallique est $[4, 3, 3, 2]$.

dans le cadre du tempérament égal, qui consiste à considérer les notes de musique dont la hauteur résulte de la division de l'octave en 12 parties égales.

La perception humaine des fréquences se faisant suivant une échelle logarithmique, les théoriciens de la musique ont généralement recours à une notation des hauteurs, dans le cadre du tempérament égal, sous forme d'entiers calculés à partir de la formule suivante :

$$n = 69 + 12 \times \log_2(f/440)$$

Cette formule permet d'attribuer un entier à chaque note de musique située dans le domaine audible. Le *Do* du milieu sur le piano est par exemple associé à l'entier 60, le *Do#* situé à côté correspond à l'entier 61, etc. Dans la notation par entiers, l'octave est associée à une distance de 12, correspondant aux demi-tons divisant l'octave en 12 parties égales. En théorie de la musique, la division de l'octave est couramment associée à la notion d'échelle. L'échelle chromatique par exemple, résulte de la division de l'octave en 12 demi-tons. Bien qu'il existe une grande variété d'échelles musicales, notamment dans le cadre de la musique microtonale qui divise généralement l'octave en plus de 12 parties, nous nous restreignons dans ces travaux à l'échelle chromatique et à certaines échelles heptatoniques, comme l'échelle diatonique, qui sont majoritairement utilisées en particulier dans le cadre de la musique occidentale traditionnelle.

Il est courant en théorie de la musique de réduire un ensemble de notes à l'aide de classes d'équivalences. Dans le système chromatique par exemple, la réduction à l'octave permet de regrouper l'ensemble des notes à 12 *classes de hauteurs*. Une *classe de hauteur*, dans le système chromatique, regroupe toutes les hauteurs séparées par une distance multiple de 12. De manière plus générale, l'association d'une classe de hauteur à chaque note est possible pour n'importe quelle division de l'octave en N parties. Les classes de hauteurs peuvent être associées aux entiers constituant le groupe cyclique \mathbb{Z}_N . La représentation circulaire du groupe cyclique est alors particulièrement adaptée pour la représentation des accords. La figure 1 illustre la représentation circulaire des 12 classes de hauteurs de l'échelle chromatique. Dans la suite du document, on désigne de manière générale par le terme « note » une classe de hauteur représentée par un entier compris entre 0 et $N - 1$, ce

notation francophone	<i>do</i>	<i>do♯</i>	<i>ré</i>	<i>ré♯</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>fa♯</i>	<i>sol</i>	<i>sol♯</i>	<i>la</i>	<i>la♯</i>	<i>si</i>
notation anglophone	<i>C</i>	<i>C♯</i>	<i>D</i>	<i>D♯</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>F♯</i>	<i>G</i>	<i>G♯</i>	<i>A</i>	<i>A♯</i>	<i>B</i>
\mathbb{Z}_{12}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\mathbb{Z}_7	0		1		2	3		4		5		6

TABLE 1 – Table des classes de hauteurs. Les deux premières lignes indiquent respectivement la notation francophone et anglophone des classes. La ligne 3 correspond à l’association des 12 classes de hauteurs de l’échelle chromatique avec les entiers du groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} . La dernière ligne associe les classes de hauteurs de la tonalité de *Do* majeur, associée à l’échelle diatonique, avec les entiers du groupe cyclique \mathbb{Z}_7 .

qui implique de ne pas prendre en compte ses autres propriétés comme l’octave ou la durée.

La table 1 illustre la correspondance entre les notations francophones et anglophones des classes de hauteurs. Dans la suite, nous adopterons par souci de simplicité la notation anglophone pour désigner les classes de hauteurs¹. La troisième ligne correspond à l’association des 12 classes de hauteurs de l’échelle chromatique avec les entiers constituant le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} . La dernière ligne illustre cette correspondance entre les 7 classes de hauteurs de la tonalité de *Do* majeur et les entiers du groupe cyclique \mathbb{Z}_7 . En effet, la tonalité de *Do* majeur est associée à une échelle heptatonique (plus précisément l’échelle diatonique), c’est-à-dire une division de l’octave en sept parties².

De la même manière, les intervalles se regroupent par classes d’équivalences modulo octave et peuvent être associés à des entiers. La valeur 1 est alors associée au plus petit intervalle du système dans lequel on se situe. Par exemple, l’entier 1 correspond au demi-ton dans le système chromatique. La table 2 indique la notation que nous adoptons dans la suite pour désigner les classes d’intervalles dans le système chromatique.

<i>P1</i>	<i>m2</i>	<i>M2</i>	<i>m3</i>	<i>M3</i>	<i>P4</i>	<i>TT</i>	<i>P5</i>	<i>m6</i>	<i>M6</i>	<i>m7</i>	<i>M7</i>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

TABLE 2 – Table des 12 classes d’intervalles de l’échelle chromatique, allant de l’unisson (*P1*) à la septième majeure (*M7*). La seconde ligne indique la distance entre classes de hauteurs associée à chaque classe d’intervalle.

L’ensemble des classes d’intervalles muni de l’opération d’addition modulo 12 forme un groupe au sens algébrique du terme. Ce groupe est isomorphe à \mathbb{Z}_{12} muni de l’addition. Par exemple, l’intervalle de quinte *P5* peut s’obtenir en juxtaposant une tierce majeure et une tierce mineure. Autrement dit : $m3 + M3 = P5$. La transposition, qui consiste à déplacer une hauteur d’un certain intervalle, peut alors être vue comme une action de groupe des intervalles sur l’ensemble des classes de hauteurs.

1. On conservera tout de même par soucis de lisibilité la notation française pour nommer les accords et les tonalités.

2. Notons ici que, contrairement à l’échelle chromatique, l’échelle diatonique ne correspond pas à une division équitable de l’octave.

1.2 Ensembles de classes de hauteurs et *Set Theory*

La *Set Theory* fournit des outils pour la théorie et l'analyse musicale, dans un cadre où les notes sont associées à des classes de hauteurs. Un accord, correspondant à plusieurs notes jouées simultanément, est associé à un ensemble de classes de hauteurs. Par exemple, on associe n'importe quel accord de *Do* majeur à l'ensemble $\{0, 4, 7\}$. L'étude d'une pièce à l'aide d'une représentation sous forme d'ensembles de classes de hauteurs permet l'utilisation d'un certain nombre d'opérations ensemblistes que nous allons présenter dans la suite. On assimilera dans la suite la notion d'accord à celle d'ensemble de classes de hauteurs.

Un accord se représente facilement par un polygone à l'intérieur du cercle chromatique, comme le montre la figure 1 avec l'accord de *Do* septième représenté par l'ensemble $\{0, 4, 7, 10\}$. Dans la suite, nous présentons différentes propriétés caractérisant les accords ramenés à des ensembles de classes de hauteurs.

Structure intervallique. La structure intervallique d'un accord correspond à la suite d'intervalles entre les classes de hauteurs successives de l'accord. Une propriété découlant de cette définition est que la somme de ces intervalles est toujours égale à N . La figure 1 illustre la structure intervallique de l'accord de *Do* septième. La représentation par structure intervallique offre plusieurs avantages remarquables. Elle permet entre autres de caractériser les renversements d'un accord par simple permutation circulaire. Par exemple, les renversements de l'accord septième de dominante correspondent aux structures intervalliques $[4, 3, 3, 2]$, $[3, 3, 2, 4]$, $[3, 2, 4, 3]$ et $[2, 4, 3, 3]$. La structure intervallique permet aussi de mettre en évidence les symétries internes d'un accord. Les modes à transposition limités d'Olivier Messiaen constituent des exemples typiques d'accords comprenant des symétries internes. Ces modes correspondent à des ensembles de classes de hauteurs stables par certaines transpositions. Par exemple l'accord de *Do* augmenté $\{0, 4, 8\}$ est stable par transposition d'une tierce majeure. En effet, additionner 4 modulo 12 à chaque entier de l'accord donne le même accord. La structure intervallique de ces accords comprend des périodicités internes *i.e.*, des sous-structures intervalliques qui se répètent (de même, une structure intervallique ayant des sous-périodes correspond nécessairement à un mode à transpositions limitées de Messiaen). Une structure intervallique (et ses permutations circulaires) caractérise entièrement un accord et toutes ses transpositions (avec renversements).

Contenu intervallique. Le contenu intervallique d'un accord correspond au multi-ensemble³ constitué par les intervalles associés respectivement à chaque paire possible de notes appartenant à l'accord. Les intervalles constituant un contenu intervallique sont considérés à inversion près (*i.e.*, ils ne sont pas dirigés et sont considérés comme des distances entre les classes de hauteurs). Ainsi les intervalles entre *C* et *G*, et entre *C* et *F* seront tous deux associés à l'entier 5 dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) et à l'entier 3 dans le système diatonique (\mathbb{Z}_7) de la gamme de *Do* majeur. De manière générale, dans un système \mathbb{Z}_N , on distingue $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$ intervalles à inversion près (en comptant l'unisson)⁴. Dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) un intervalle à inversion près est compris entre 0 et 6. Il

3. Un multi-ensemble est un ensemble pouvant contenir plusieurs fois le même élément.

4. On note $\lfloor \cdot / \cdot \rfloor$ la partie entière inférieure d'un réel, *e.g.*, $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$.

est courant d'utiliser le vecteur intervallique pour représenter le contenu intervallique d'un accord. Ce vecteur est composé de $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$ valeurs, indiquant le nombre d'occurrences de chaque intervalle possible dans \mathbb{Z}_N (la première valeur du vecteur étant associée à l'unisson, la seconde à l'intervalle 1, etc.). Le vecteur intervallique de l'accord de *Do* septième illustré figure 1 est $[4, 0, 1, 2, 1, 1, 1]$. Il est facile de voir que deux accords partageant la même structure intervallique partagent forcément le même contenu intervallique. L'inverse en revanche n'est pas vrai. Deux accords partageant le même contenu intervallique sont dits en *Z-relation* [Forte 1973]. Le contenu intervallique ramené à un ensemble correspond à l'ensemble des intervalles, à inversion près, compris une fois au moins dans l'accord. Pour l'accord de *Do* septième, cet ensemble est $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (par convention, l'unisson n'est pas inclus dans cette représentation).

Contenu intervallique généralisé. Le vecteur intervallique d'un accord regroupe les intervalles équivalents que comprend l'accord, autrement dit, tous les sous-ensembles de deux classes de hauteurs possibles. Par analogie, le *k-vecteur* d'un accord groupe par classes d'équivalence tous ses sous-ensembles de cardinalité *k* [Mandereau 2011]⁵. La somme des éléments du *k-vecteur* est égale au nombre de sous-ensembles de taille *k* que comprend l'accord. Deux accords qui partagent le même *k-vecteur* sont dits en *Z^k-relation* [Mandereau 2011]. La représentation simpliciale d'accords proposée dans le chapitre 5 offre une représentation utile pour l'étude des accords en *Z^k-relation*.

1.3 Opérations

On définit quatre opérations sur les ensembles et séquences de classes de hauteurs. Les opérations sur les accords sont illustrées par des exemples à l'aide du cercle chromatique. On détaille pour chaque opération son effet sur la structure intervallique et le contenu intervallique de l'accord.

Transposition. Transposer un accord ou une séquence de notes consiste à faire monter (ou descendre) chacune des notes d'un même intervalle *b*. Cette opération correspond à une fonction du type $T_b(n) \equiv_N n + b$ appliquée sur chacune des classes de hauteur *n* (pour une division de l'octave en *N* parties). La transposition T_b entraîne une rotation de l'accord de *b* pas dans la représentation circulaire (figure 2). Il est facile de voir que cette opération conserve la structure intervallique de l'accord, et par conséquent son contenu intervallique.

Inversion. On opère une inversion sur un accord ou une séquence de classes de hauteurs en transformant chacun des éléments à l'aide de la fonction $I_b(n) \equiv_N N - n$ (pour une division de l'octave en *N* parties). Dans le cercle chromatique, cela revient à réaliser une symétrie d'axe vertical (figure 3). L'inversion entraîne une lecture à l'inverse de la structure intervallique de l'accord, mais conserve son contenu intervallique.

5. Le *k-vecteur* est aussi appelé *M-class-vector* par David Lewin [Lewin 1987](p.106)

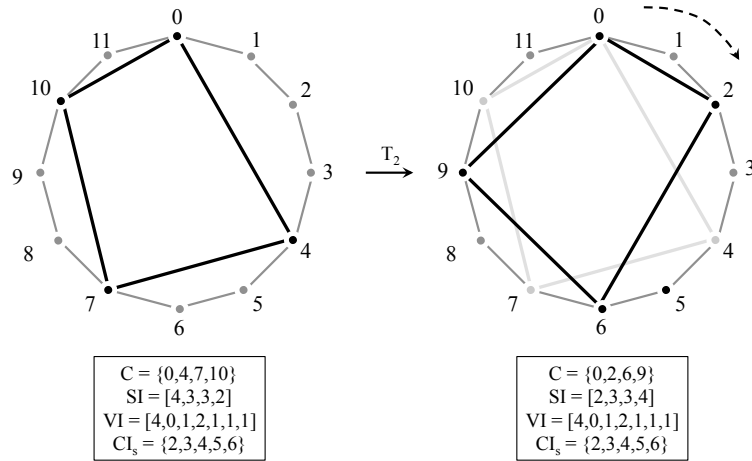


FIGURE 2 – Transposition de deux demi-tons (T_2 dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) de l'accord de D_0 septième. La transposition consiste en une rotation dans la représentation circulaire. Elle conserve la structure intervallique, et donc le contenu intervallique de l'accord.

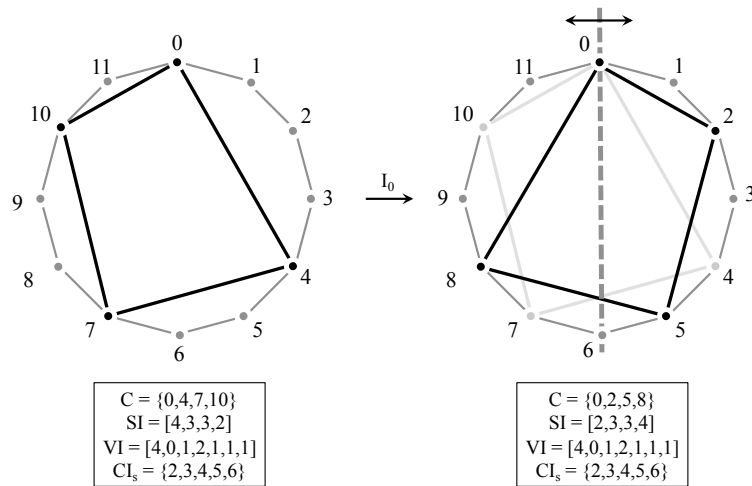


FIGURE 3 – Inversion I_0 dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) de l'accord de D_0 septième. L'inversion consiste en une symétrie axiale dans la représentation circulaire et entraîne une réflexion dans la structure intervallique, qui passe ici de $[4, 3, 3, 2]$ à $[2, 3, 3, 4]$.

Permutation d'intervalles. Cette opération, que nous n'appliquons qu'aux accords, consiste à permuter l'ordre des intervalles constituant la structure intervallique. La structure intervallique est donc conservée à ordre des éléments près. Le contenu intervallique n'est généralement pas conservé (figure 4).

Multiplication. La multiplication (ou homothétie) des classes de hauteurs d'un ensemble ou d'une séquence consiste à appliquer l'opération $H_p(n) \equiv_N pn$ sur chaque élément. Cette opération modifie généralement la structure intervallique d'un accord, ainsi que son contenu intervallique. Afin que cette opération soit bijective, p doit nécessairement être premier avec N . Dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}), seules les multiplications par 1, 5, 7 et 11 ont cette propriété. La multiplication par 1 et par 11 ayant respectivement pour effet l'identité et l'inversion, on s'intéressera essentiellement aux multiplications par 5 et 7 dans le système chromatique. La figure 5 illustre la multiplication par 5 de l'accord de *Do* septième.

Renversement de séquences (ou opération rétrograde). Cette opération s'effectue sur les séquences de classes de hauteurs. Elle consiste à inverser l'ordre des éléments dans la séquence. L'opération rétrograde constitue une des opérations fondamentales de la musique sérielle [Perle 1972].

Les opérations sur les ensembles de classes de hauteurs sont fréquemment utilisées en théorie musicale pour constituer des classes d'équivalences. On peut par exemple s'intéresser à l'ensemble des accords équivalents à transposition près. Ce type d'énumération a abouti à la constitution de différents catalogues. Nous adopterons cette démarche dans le chapitre 5 afin de classer différents espaces d'accords.

2 Représentations combinatoires

Dans cette section, nous présentons les notions générales de *complexes cellulaires* (parfois *simpliciaux*) et de *collections topologiques* utilisées pour définir et manipuler des espaces de façon combinatoire. Nous rappelons ensuite quelques outils pour étudier la topologie de ces espaces et en développons de nouveaux pour analyser leur propension à représenter certaines informations.

2.1 Complexes cellulaires

Un complexe cellulaire est un ensemble d'objets élémentaires de différentes dimensions appelés *cellules topologiques*, ou plus simplement *p-cellules* pour les cellules de dimension p . Classiquement, une *p-cellule* est la représentation abstraite d'un espace « simple ⁶ »

6. On entend par « simple » un espace homéomorphe à la boule ouverte unité de \mathbb{R}^p . Cependant, nous ne nous intéressons ici qu'aux aspects combinatoires des complexes. Dans ce cadre, les cellules topologiques de dimension inférieure à 2 sont obligatoirement homéomorphes à ces boules. Au delà, la caractérisation combinatoire des complexes cellulaires peut engendrer des cellules non-homéomorphes (nous en verrons un exemple chapitre 4). Par ailleurs, il apparaît que savoir si une opération sur un complexe cellulaire n'engendre que des cellules homéomorphes à des boules est indécidable.

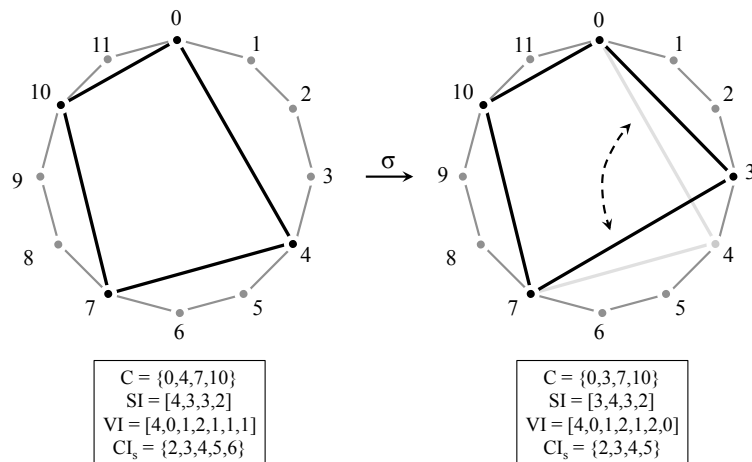


FIGURE 4 – Une permutation d’intervalles dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) au sein de l’accord de *Do* septième. La permutation d’intervalles entraîne généralement une modification du contenu intervallique de l’accord.

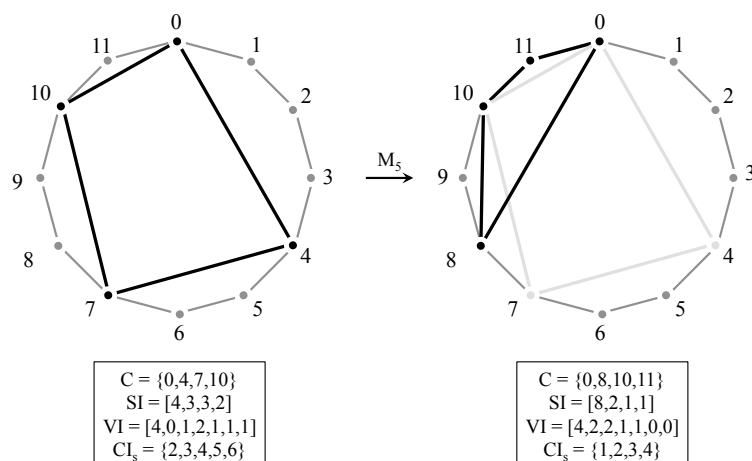


FIGURE 5 – Multiplication par 5 des classes de hauteurs dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) dans l’accord de *Do* septième. La multiplication ne conserve ni la structure intervallique, ni le contenu intervallique.

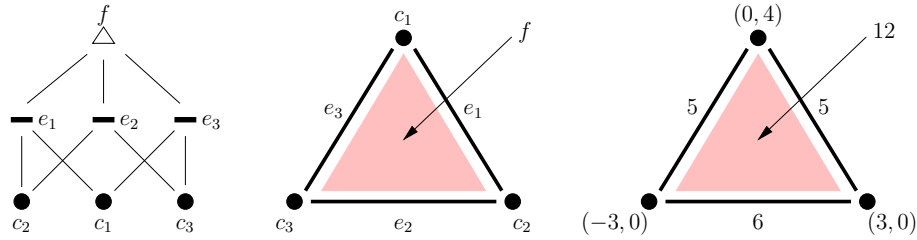


FIGURE 6 – Sur la gauche, le diagramme de Hasse représentant les relations de bord du complexe cellulaire au milieu. Ce complexe est composé de trois 0-cellules (c_1, c_2, c_3), de trois 1-cellules (e_1, e_2, e_3), et d’une 2-cellule f . Le bord de f est constitué de ses cellules incidentes c_1, c_2, c_3, e_1, e_2 et e_3 . Plus particulièrement, les trois arcs sont les faces de f , et par conséquent, f est une coface de e_1, e_2 et e_3 . Sur la droite, des données sont associées aux cellules topologiques : des positions pour les sommets, des longueurs pour les arcs et une aire pour f .

de dimension p : les 0-cellules sont des points, les 1-cellules des courbes, les 2-cellules des surfaces, les 3-cellules des volumes, etc. Pour représenter un domaine arbitrairement compliqué, celui-ci est partitionné en espaces plus simples de dimensions différentes, et chaque élément de cette partition est représenté par une p -cellule où p est la dimension de l’élément en question. Une relation entre les cellules, appelée *relation d’incidence*, est alors définie pour relater l’organisation de la partition, c’est-à-dire l’agencement entre les cellules topologiques. Cette relation repose sur la notion de bord : intuitivement, un triangle apparaissant dans une triangulation est une 2-cellule bordée par trois arcs eux-mêmes liés par trois sommets. De façon informelle, les cellules topologiques *incidentes* à une p -cellule d’un complexe cellulaire sont les cellules apparaissant dans son bord (ayant par conséquent une dimension inférieure à p) et les cellules la contenant dans leur bord (et donc de dimension supérieure à p).

On définit un *complexe cellulaire abstrait* comme un couple $\mathcal{K} = (S, \preceq)$ où S est un ensemble de symboles appelés *cellules topologiques* muni d’un ordre partiel localement fini ⁷ $\cdot \preceq \cdot \subset S \times S$, appelé *relation d’incidence*.

Pour tout complexe \mathcal{K} , on suppose l’existence d’une fonction $dim_{\mathcal{K}} : S \rightarrow \mathbb{N}$, appelée fonction de *dimension*, qui respecte pour chaque σ et σ' de S , $\sigma \prec \sigma' \Rightarrow dim_{\mathcal{K}}(\sigma) < dim_{\mathcal{K}}(\sigma')$ (en d’autres termes, la dimension est une fonction monotone strictement croissante pour la relation d’incidence). On dira qu’un complexe est de dimension finie si la valeur $N = \max_{\sigma \in S} dim(\sigma)$ existe ; N est alors appelée la dimension du complexe. Dans la suite, nous ne considérerons que des complexes de dimension finie. On notera dim la fonction de dimension $dim_{\mathcal{K}}$ lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté sur l’identité de \mathcal{K} .

On écrira $\sigma \in \mathcal{K}$ pour une cellule de S . L’ensemble des opérations ensemblistes sont étendues de façon naturelle aux complexes : par exemple, l’union de deux complexes $\mathcal{K}_1 = (S_1, \preceq_1)$ et $\mathcal{K}_2 = (S_2, \preceq_2)$ est donnée par $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = (S_1 \cup S_2, \preceq_1 \cup \preceq_2)$ si $dim_{\mathcal{K}_1}$ et $dim_{\mathcal{K}_2}$ coïncident sur $S_1 \cap S_2$. De la même façon, un \mathcal{K}_2 est un *sous-complexe* de \mathcal{K}_1 , noté $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$, si $S_2 \subset S_1$ et si $\preceq_2 \subset \preceq_1$ (évidemment $dim_{\mathcal{K}_1}$ et $dim_{\mathcal{K}_2}$ doivent coïncider sur S_2).

7. Un *ordre partiel* sur un ensemble E est une relation de E avec lui-même réflexive, transitive et anti-symétrique. Il est dit *localement fini* lorsque pour tout $\sigma \in E$, l’ensemble $\{\tau | \tau \preceq \sigma \vee \sigma \preceq \tau\}$ est fini.

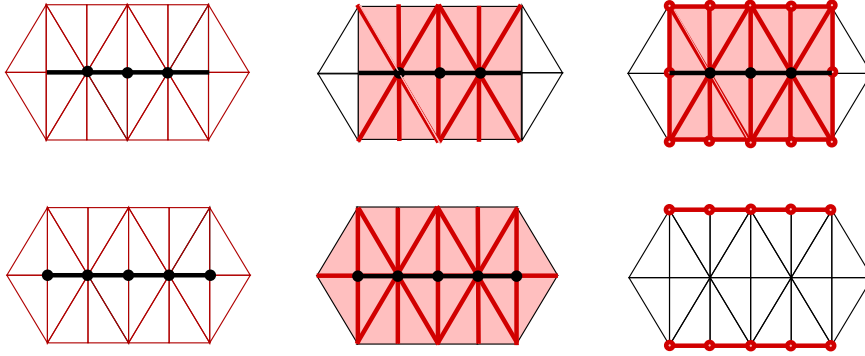


FIGURE 7 – Exemples de *fermeture*, d'*étoile* et de *liaison*. Le sous-ensemble S est composé de quatre 1-cellules et de trois 0-cellules. En haut, S est représenté en gras sur le complexe cellulaire abstrait \mathcal{K} , puis $\text{St } S$ et $\overline{\text{St } S}$. En bas, $\overline{\text{St } S}$, $\text{Lk } \overline{\text{St } S}$ et finalement $\text{Lk } S = \overline{\text{St } S} - \text{St } S$ sont représentés.

Il est commode de représenter la relation d'incidence d'un complexe par son *graphe d'incidence*, c'est-à-dire le diagramme de Hasse de l'ensemble des cellules topologiques partiellement ordonné, où les nœuds sont les cellules topologiques du complexe, et où les arcs dénotent l'incidence entre les cellules. La figure 6 de gauche donne un exemple de complexe cellulaire accompagné de son diagramme de Hasse.

On définit dans les paragraphes qui suivent quelques notions et notations utilisées dans la suite.

Face et coface. L'ensemble des *faces* d'une cellule σ d'un complexe \mathcal{K} est donné par :

$$\{ \tau \in \mathcal{K} \mid \tau \prec \sigma \wedge \dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1 \}$$

On notera $\tau < \sigma$ (ou $\sigma > \tau$) si τ est une face de σ . On dit alors que σ est une *coface* de τ .

n -Squelette. Pour tout entier $n \leq N$, le *n -squelette* d'un complexe cellulaire \mathcal{K} de dimension N est défini par le sous-complexe $\mathcal{S}_n(\mathcal{K})$ constitué des cellules de \mathcal{K} de dimension au plus n et héritant de la relation d'incidence de \mathcal{K} sur ses cellules. En particulier, le 1-squelette d'un complexe correspond au graphe non-orienté constitué de ses sommets et de ses arcs.

Fermeture et étoile. Les opérateurs suivants permettent de parcourir la relation d'incidence d'un complexe de proche en proche. Ces définitions proviennent de [Axen 1998].

Deux premiers opérateurs permettent de désigner l'ensemble des cônes descendants (la *fermeture*) et ascendants (l'*étoile*) dans la relation d'incidence d'un complexe. Formellement, soit \mathcal{K} un complexe et $S \subseteq \mathcal{K}$ un sous-ensemble de cellules de \mathcal{K} . On appelle la *fermeture* de S dans \mathcal{K} , l'ensemble $\overline{S} = \{ \sigma \in \mathcal{K} \mid \exists \tau \in S, \sigma \preceq \tau \}$, et on appelle l'*étoile* de S dans \mathcal{K} , l'ensemble $\text{St } S = \{ \sigma \in \mathcal{K} \mid \exists \tau \in S, \sigma \succeq \tau \}$. On note la fermeture de l'étoile $\overline{\text{St } S} = \overline{\text{St } S}$.

Ces opérateurs peuvent être composés pour désigner des sous-ensembles particuliers de cellules topologiques. La figure 7 (reprise de [Axen 1998]) décrit un exemple d'une telle composition, la *liaison* (*Link* en anglais), définie par $\text{Lk } S = \overline{\text{St } S} - \text{St } \overline{S}$. Ils peuvent également être utilisés pour définir une topologie associée au complexe \mathcal{K} [Kovalevsky 2008]. On peut par exemple utiliser l'opérateur de fermeture pour définir le plus petit fermé contenant un sous-complexe (e.g., $\overline{\sigma}$ représente le plus petit fermé associé à la cellule σ). L'étoile permet alors de calculer le plus petit ouvert contenant un sous-complexe. Nous n'irons pas plus loin dans la description de cette topologie.

Suivant le même type de raisonnement, nous définissons l'opérateur d'*extension* d'un sous-complexe S par $\text{Ext } S = \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \overline{\sigma} \subset \text{St } S\}$. Cet opérateur capture les cellules de \mathcal{K} dont le cône inférieur repose sur les cellules de S . Par exemple, l'extension de trois sommets de \mathcal{K} regroupera, s'ils existent, les trois arcs et le triangle formés par ces sommets. L'opérateur d'extension est utilisé dans le chapitre 6.

Voisinage et chemin. On dira que deux cellules σ_1 et σ_2 d'un complexe sont *voisines* s'il existe une troisième cellule τ différente, à la fois incidente à σ_1 et à σ_2 . On notera que l'opérateur de liaison $\text{Lk } S$ construit l'ensemble des cellules de \mathcal{K} voisines à celles de S par la dimension supérieure (ce qui signifie qu'on impose à τ d'être de dimension supérieure à celles de σ_1 et σ_2)⁸. Axen propose d'ailleurs d'utiliser cet opérateur pour définir la propagation combinatoire d'ondes de proche en proche dans les complexes [Axen 1998].

Deux n -cellules sont dites $\langle n, p \rangle$ -voisines si elles sont incidentes à une même p -cellule. Par exemple, deux sommets sont $\langle 0, 1 \rangle$ -voisins si un arc les relie.

On dira qu'une séquence de cellules est un *chemin* si elles sont voisines deux à deux. S'il existe un tel chemin entre n'importe quelle paire de cellules d'un complexe \mathcal{K} celui-ci est dit *connexe*.

On appelle $\langle n, p \rangle$ -chemin une séquence de n -cellules $\langle n, p \rangle$ -voisines. Ainsi, deux n -cellules voisines consécutives dans un $\langle n, p \rangle$ -chemin ont une p -cellule incidente en commun.

Enfin, on appelle un $\langle n, p \rangle$ -chemin *Hamiltonien* dans un complexe cellulaire, un $\langle n, p \rangle$ -chemin visitant chaque n -cellule du complexe exactement une fois. De la même manière, un $\langle n, p \rangle$ -chemin *Eulérien* est un $\langle n, p \rangle$ -chemin visitant chaque p -cellule exactement une fois.

2.2 Complexes simpliciaux

Comme précisé plus haut, les complexes cellulaires permettent de représenter des espaces de façon combinatoire. Leur définition, héritée de celle des CW-complexes de Whitehead [Whitehead 1949], en fait des objets abstraits, très généraux et pour lesquels il est difficile de vérifier certaines propriétés.

Les *complexes simpliciaux* représentent une classe de complexes cellulaires dont la définition commode en fait un objet de référence en topologie algébrique [Munkres 1984].

⁸. On peut atteindre les cellules voisines par les dimensions inférieures avec l'opérateur dual $\text{coLk } S = \text{St } \overline{S} - \overline{\text{St } S}$.

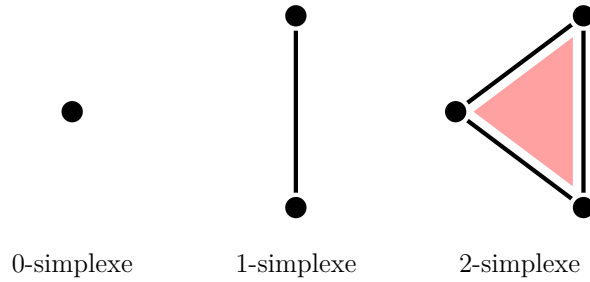


FIGURE 8 – Représentation géométrique de simplexes.

Par exemple, le calcul des groupes d'homologie des complexes simpliciaux est connu et a fait l'objet de nombreux développements.

La définition des complexes simpliciaux repose sur la notion de *simplexe*. On appelle *n-simplexe* un complexe cellulaire \mathcal{K} de dimension n tel que :

- \mathcal{K} est constitué exactement de $\binom{n+1}{p+1}$ p -cellules,
- pour toute p -cellule $\sigma \in \mathcal{K}$, le sous-complexe $\bar{\sigma}$ est un p -simplexe,
- pour toute paire de cellules σ_1 et σ_2 de \mathcal{K} , l'intersection $\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$ est soit vide, soit un simplexe.

Un simplexe est un n -simplexe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, un arc délimité par deux sommets est un simplexe, mais un cube n'en est pas un (un cube est une 3-cellule mais a 6 faces). Les simplexes sont souvent représentés géométriquement comme l'enveloppe convexe de leurs sommets, comme le montre la figure 8. Attention, le terme « simplexe » est aussi fréquemment utilisé pour désigner une cellule. Généralement, le contexte permet de décider à quel objet on réfère et nous avons essayé de réserver le terme de « simplexe » au complexe constitué d'une cellule muni de tous ses bords récursivement (*i.e.*, la fermeture de la cellule).

Un complexe simplicial est un complexe cellulaire \mathcal{K} tel que pour toute p -cellule $\sigma \in \mathcal{K}$, le sous-complexe $\bar{\sigma}$ est un p -simplexe. Ainsi, un complexe simplicial de dimension 0 est une collection de sommets sans structure additionnelle. Un complexe simplicial de dimension 1 est un graphe (les hypergraphes ne sont pas des complexes simpliciaux). La figure 9 illustre un complexe simplicial de dimension 3.

Les définitions suivantes introduisent des outils d'étude des complexes simpliciaux qui nous permettront de caractériser la topologie des espaces que nous rencontrerons au cours de ces travaux (voir les classifications d'espaces musicaux du chapitre 5).

***f*-Vecteur.** Le *f*-vecteur d'un complexe simplicial de dimension n correspond à la suite finie $(f_0 = 1, f_1, \dots, f_{n+1})$ où f_{p+1} est le nombre de p -cellules que comprend le complexe. Le *f*-vecteur du complexe de la figure 9 est $(1, 11, 17, 7, 1)$ car il comprend 11 sommets, 17 arcs, 7 triangles et un tétraèdre. Dans la suite, nous notons $f_n(\mathcal{K})$ le terme f_n du complexe \mathcal{K} .

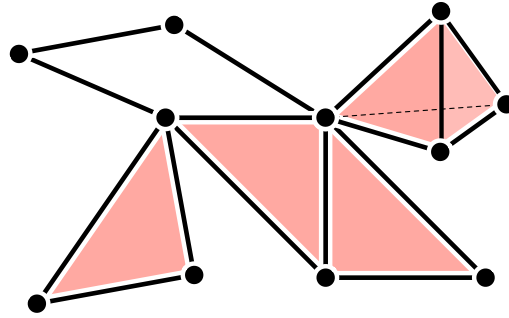


FIGURE 9 – Un complexe simplicial de dimension 3 (ou 3-complexe).

Pseudo-variété [Damiand 2010]. Un complexe simplicial de dimension n est *fortement connexe*⁹ si entre tout couple de n -cellules, il existe un $\langle n, n - 1 \rangle$ -chemin les reliant.

Un complexe simplicial de dimension n est une *pseudo-variété* s'il est fortement connexe, si chaque cellule est incidente à au moins une n -cellule, et si chaque $(n - 1)$ -cellule est la face d'au plus deux n -cellules. La notion de pseudo-variété doit être distinguée de celle de variété.

Nombres de Betti. Les *nombres de Betti* sont des invariants permettant de distinguer la topologie de différents espaces. Le k^{e} nombre de Betti est défini comme le rang du k^{e} groupe d'homologie de l'espace. De manière informelle, on peut le comprendre intuitivement comme le nombre d'obstructions k -dimensionnelles indépendantes, à savoir pour les premières dimensions :

- b_0 est le nombre de composantes connexes,
- b_1 est le nombre de trous « circulaires » de dimension 1,
- b_2 est le nombre de trous ou « vides » de dimension 2,
- etc.

Dans nos travaux, les nombres de Betti des complexes simpliciaux étudiés sont calculés à l'aide de l'API JavaPlex [Tausz 2011].

Caractéristique d'Euler. La caractéristique d'Euler est un invariant topologique classique. Pour un complexe simplicial de dimension n , elle est définie par la somme alternée des éléments de son f -vecteur :

$$\chi = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n$$

où f_i désigne le nombre de cellules de dimension i dans le complexe. Dans le cas de la figure 9, la caractéristique d'Euler du complexe illustré est égale à $11 - 17 + 7 - 1 = 0$.

La caractéristique d'Euler d'un complexe peut également être calculée par la somme

9. La forte connexité se distingue de celle plus classique de la théorie des graphes.

alternée de ses nombres de Betti :

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots$$

La caractéristique d'Euler n'est pas suffisante pour affirmer que deux complexes ont la même topologie mais permet parfois de discriminer deux complexes de topologies différentes : deux espaces de caractéristiques d'Euler différentes ont forcément une topologie différente. Cet invariant permet également de placer un complexe dans une classe restreinte de topologies connues et permet donc d'orienter la recherche, pour les premières dimensions :

- un cercle, un tore, un ruban de Möbius, une bouteille de Klein ($\chi = 0$),
- un segment, un disque ($\chi = 1$),
- une sphère ($\chi = 2$).

La caractéristique d'Euler est *réunion-additive* : la caractéristique de l'union disjointe de deux objets est la somme des caractéristiques de ces objets. Ainsi, dans le cas d'un complexe composé de sous-composantes connexes identiques, la caractéristique d'une composante est obtenue en divisant la caractéristique globale par le nombre de composantes connexes.

2.3 Collection topologique

Une collection topologique \mathcal{C} est un complexe cellulaire décoré. Le terme « collection topologique » est motivé par son utilisation historique dans le cadre du langage de programmation MGS (voir section 3.1) qui a fortement inspiré ces travaux.

Plus formellement, une collection est une fonction qui associe une valeur aux cellules d'un complexe cellulaire (voir figure 6). La notation $\mathcal{C}(\sigma)$ permet d'adresser le label associé à la cellule σ dans \mathcal{C} . On dénote alors $|\mathcal{C}|$ le complexe cellulaire support de la collection \mathcal{C} .

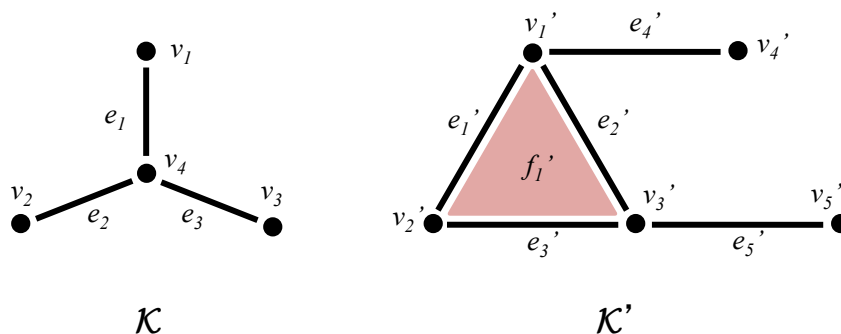
Une collection \mathcal{C} peut être écrite sous la forme d'une somme formelle $\sum_{\sigma \in |\mathcal{C}|} v_\sigma \cdot \sigma$ où $v_\sigma = \mathcal{C}(\sigma)$. Par convention, lorsqu'on écrit la collection \mathcal{C} sous la forme $\mathcal{C} = v_1 \cdot \sigma_1 + \dots + v_p \cdot \sigma_p$, tous les σ_i sont distincts. On notera que cette addition est associative et commutative. Ce type de syntaxe est notamment utilisé dans le langage MGS.

On dit de \mathcal{C}' qu'il s'agit d'une *sous-collection* d'une collection topologique \mathcal{C} si :

- $|\mathcal{C}'| \subset |\mathcal{C}|$, et
- $\mathcal{C}'(\sigma) = \mathcal{C}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in |\mathcal{C}'|$.

Enfin, on désignera par *collection topologique simpliciale* (ou plus simplement *collection simpliciale*) une collection dont le complexe cellulaire support est simplicial.

Dans la suite, il sera souvent nécessaire de parler du complexe support $|\mathcal{C}|$ d'une collection \mathcal{C} . Néanmoins pour alléger l'écriture de certaines formules lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, la notation $|\cdot|$ sera souvent omise.

FIGURE 10 – Le complexe \mathcal{K} est structurellement inclus dans le complexe \mathcal{K}' .

2.4 Inclusion structurelle, pliage et symétrie

Dans la suite, nous serons amenés à nous intéresser à la façon dont un complexe peut être plongé dans un autre ou plié sur lui-même. Afin de pouvoir parler aisément de ces concepts, nous commençons par définir les notions de *morphisme* de complexes et de collections.

Morphismes de complexes et de collections. Soient deux complexes cellulaires \mathcal{K} et \mathcal{K}' . Une fonction $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ est un *morphisme de complexe cellulaire* si pour toutes cellules σ et σ' de \mathcal{K} :

1. $\sigma < \sigma' \Rightarrow \phi(\sigma) < \phi(\sigma')$,
2. $\dim_{\mathcal{K}'}(\phi(\sigma)) = \dim_{\mathcal{K}}(\sigma)$.

La première condition conserve le voisinage et la seconde la dimension des cellules. En d'autres termes, un morphisme de complexes est une fonction entre complexes qui préserve la structure.

Soient deux collections topologiques \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Une fonction $\phi : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{C}'|$ est un *morphisme de collection topologique* si :

1. ϕ est un morphisme de complexe cellulaire,
2. $\mathcal{C}'(\phi(\sigma)) = \mathcal{C}(\sigma)$, pour toute cellule $\sigma \in |\mathcal{C}|$.

En plus de préserver la structure, le morphisme de collection préserve les décorations.

Redécoration de collection. Un morphisme de complexes cellulaires induit sur les collections un moyen de modifier les valeurs associées aux cellules. Soient deux collections topologiques \mathcal{C} et \mathcal{C}' , et $\phi : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{C}'|$ un morphisme de complexes cellulaires du support de \mathcal{C} dans le support de \mathcal{C}' . On note \mathcal{C}^ϕ , la collection topologique de support $|\mathcal{C}|$ telle que pour toute cellule σ de $|\mathcal{C}|$:

$$\mathcal{C}^\phi(\sigma) = \mathcal{C}'(\phi(\sigma))$$

Inclusion structurelle. L'*inclusion structurelle* traduit la façon dont un espace peut être plongé dans un autre. Une *inclusion structurelle* d'un complexe \mathcal{K} dans un complexe \mathcal{K}' est un morphisme injectif¹⁰ de \mathcal{K} dans \mathcal{K}' . L'injectivité du morphisme permet notamment de distinguer dans \mathcal{K}' un sous-complexe isomorphe à \mathcal{K} . On dira alors que \mathcal{K} est en *inclusion structurelle* avec (ou *inclus structurellement dans*) \mathcal{K}' .

La figure 10 illustre un complexe structurellement inclus dans un autre. Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définissent deux inclusions structurelles possibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(v_4) = v'_1 \\ \phi_1(v_1) = v'_4 \\ \phi_1(v_2) = v'_2 \\ \phi_1(v_3) = v'_3 \\ \phi_1(e_1) = e'_4 \\ \phi_1(e_2) = e'_1 \\ \phi_1(e_3) = e'_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \phi_2(v_4) = v'_3 \\ \phi_2(v_1) = v'_1 \\ \phi_2(v_2) = v'_2 \\ \phi_2(v_3) = v'_5 \\ \phi_2(e_1) = e'_2 \\ \phi_2(e_2) = e'_3 \\ \phi_2(e_3) = e'_5 \end{array} \right.$$

On étend naturellement la notion d'inclusion structurelle aux collections topologiques comme l'inclusion structurelle de leurs complexes support en prenant en compte les décorations : une collection \mathcal{C}_1 est incluse structurellement dans une collection \mathcal{C}_2 s'il existe un morphisme injectif entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Pliage de collections topologiques. Différentes collections topologiques peuvent être utilisées pour représenter de différentes manières un même objet. Il est alors possible de passer d'une représentation à l'autre en transformant ces collections. Dans le chapitre 5 nous verrons comment des collections peuvent se « plier » sur elles-mêmes et produire de nouvelles représentations. Afin de parler de ces transformations, nous définissons la notion de *pliage de collections topologiques*.

On dira qu'une collection \mathcal{C} se *plie* en une collection \mathcal{C}' s'il existe un morphisme surjectif¹¹ ϕ de $|\mathcal{C}|$ dans $|\mathcal{C}'|$. En d'autres termes, un pliage consiste à identifier des cellules d'une collection décorées par une même valeur. La figure 11 illustre cette opération.

10. Un morphisme de complexe (ou de collection) est *injectif* si $\forall(\sigma, \sigma') \in \mathcal{K}^2, \sigma \neq \sigma' \Rightarrow \phi(\sigma) \neq \phi(\sigma')$.
 11. Un morphisme de complexe (ou de collection) $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ est *surjectif* si toutes les cellules de \mathcal{K}' sont images d'au moins une cellule de \mathcal{K} par ϕ .

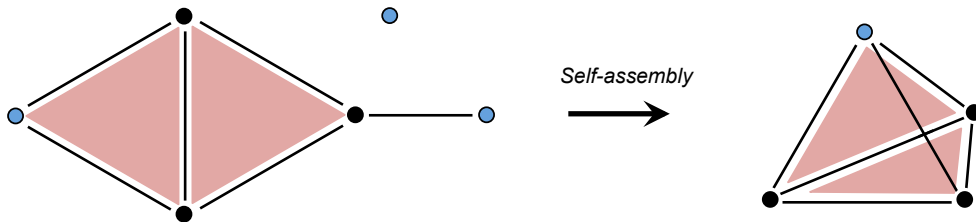


FIGURE 11 – Pliage d'une collection topologique. Les trois sommets en clair présentent le même label et peuvent être fusionnés.

On remarque que le processus de pliage n'a aucun effet sur une collection topologique dont toutes les cellules de même dimension sont décorées par des valeurs différentes. On appellera *collection minimale*, une collection topologique ayant cette propriété (c'est le complexe où l'on a identifié toutes les cellules). De fait, on peut associer une collection minimale (unique à isomorphisme près) à toute collection topologique.

Cette constatation permet d'établir des classes d'équivalences de collections topologiques : deux collections sont équivalentes si elles sont associées à la même collection minimale (à isomorphisme près). Pour illustrer cette propriété il suffit d'imaginer la collection de gauche figure 11 privée de la 0-cellule isolée. Cette nouvelle collection sera également associée à la collection minimale de droite.

En pratique le calcul du pliage d'une collection en sa forme minimale est spécifié en MGS par un mécanisme d'auto-assemblage présenté section 3.3.2.

Symétrie. Il est naturel de parler des automorphismes de complexes cellulaires (*i.e.*, morphisme bijectif d'un complexe dans lui-même). L'ensemble des automorphismes d'un complexe \mathcal{K} représente les symétries dans la structure¹² de \mathcal{K} . Le complexe \mathcal{K} figure 10 comprend trois symétries (ces symétries peuvent se voir de manière intuitive comme des rotations autour du sommet v_4). L'ensemble de ces automorphismes muni de la loi de composition possède une structure de groupe dont l'élément neutre est l'identité.

Les automorphismes de collections sont moins intéressants car les labels ne sont pas modifiés. En revanche, les automorphismes de leur complexe support engendrent des transformations sur les décorations. Cette remarque est le point de départ d'une étude présentée chapitre 6.

2.5 Trajectoires

Nos travaux nous ont amenés à représenter des séquences temporelles d'événements dans des collections. Nous définissons ici la notion de *trajectoire* formalisant ce concept. Les trajectoires sont utiles pour représenter un système en mouvement dans un espace. Dans ces travaux (voir chapitre 6), on utilisera la notion de trajectoire pour représenter l'évolution d'une pièce musicale dans un espace de hauteurs.

Soit une collection \mathcal{C} . On définit une *trajectoire* $T_{\mathcal{C}}$ dans \mathcal{C} comme une séquence de sous-collections de \mathcal{C} chacune étiquetée par un élément d appartenant à un ensemble $(D, +)$ de *durées*¹³ :

$$T_{\mathcal{C}} = [(\mathcal{C}_0, d_0), \dots, (\mathcal{C}_N, d_N)]$$

12. On notera qu'un automorphisme de complexe construit par définition une inclusion structurelle.

13. Nous ne précisons pas plus avant ce qu'est une durée, notre notion de trajectoire restant générique. Nous avons juste besoin de savoir additionner deux durées.

Les sous-collections \mathcal{C}_i constituant la trajectoire représentent les états successifs pris par le système au cours du temps (dans notre cas, une suite d'événements musicaux). Selon les besoins et pour clarifier les écritures, on définira parfois ces trajectoires par $T_C = [(\mathcal{K}_0, d_0), \dots, (\mathcal{K}_N, d_N)]$, la suite des complexes cellulaires support des sous-collections (*i.e.*, $\mathcal{K}_i = |\mathcal{C}_i|$).

Bien que proche dans l'idée de chemin, le concept de trajectoire en diffère par les propriétés suivantes :

- un élément d'une trajectoire est un sous-complexe (non nécessairement restreint à une unique cellule),
- deux éléments successifs dans une trajectoire ne sont pas forcément voisins,
- les éléments de la trajectoire sont étiquetés par une durée.

2.6 La *compliance*

La *compliance* est une notion générale que nous avons proposée pour quantifier la propension d'un espace E à révéler les propriétés d'un système S qu'il représente. Si E est bien choisi, la propriété de S doit se traduire par une propriété, une régularité ou une relation spatiale, par exemple un mouvement rectiligne, une forme symétrique ou compacte, ou tout autre phénomène révélant le caractère non aléatoire du système. Les notions d'espace, de système et de propriété étant abstraites, il s'agit d'un concept vague nécessitant une concrétisation particulière selon le domaine d'application.

Cette démarche peut être comparée à l'utilisation d'indicateurs en chimie. On a en effet fréquemment recours à des indicateurs colorés, comme le *bleu de bromothymol*, qui change de couleur selon l'acidité du milieu dans lequel il est plongé. Dans cet exemple, l'indicateur coloré peut être comparé au système S et le milieu dont on mesure l'acidité à l'espace E . La propriété observée correspond ici au changement de couleur. Dans ce cas précis, le système permet de révéler une information sur l'espace E . Toutefois, la notion de compliance pourrait tout autant être exploitée dans le sens inverse (E révélant une information sur S). Par exemple, la trajectoire prise par une balle rebondissante (le système S) peut être caractérisée par la suite des coordonnées prises par la balle au cours du temps. L'espace E dans lequel le système est plongé, est ici l'espace euclidien à 3 dimensions \mathbb{R}^3 . La nature parabolique des courbes témoigne du caractère non-aléatoire de la trajectoire prise par la balle (en effet celle-ci est soumise aux lois de la physique). Cependant, une représentation dans \mathbb{R}^6 où la vitesse de la balle est considérée en plus de la position, est plus pertinente en terme de modélisation ; en effet, la seconde loi de Newton et la théorie des chocs élastiques font référence formellement à cette nouvelle quantité. De ce point de vue, \mathbb{R}^6 révèle plus de propriétés sur la balle que \mathbb{R}^3 . Nous dirons alors qu'il présente une meilleure *compliance* pour représenter le système.

Là où une propriété spatiale est suffisante pour établir la compliance d'un espace à révéler une propriété vérifiée à un unique instant indépendamment des autres (elle correspondra à une géométrie particulière prise par la représentation du système dans l'espace à un instant donné), cette propriété doit être de nature spatio-temporelle lorsqu'elle porte sur l'évolution du système. En première analyse, on peut simplement s'intéresser à la suite des propriétés observées sur le système à chaque instant successif de façon indépendante.

Certes, cette analyse est incomplète (*e.g.*, le mouvement suivi par la balle rebondissante n'est compris qu'en observant comment la position et la vitesse évoluent au cours du temps, et non en s'intéressant à la représentation de la balle à un unique instant sans se soucier des autres) mais elle reste simple à réaliser dès lors que le cas statique est compris. On se limitera donc à ce cas dans cette première étude de la compliance.

Ainsi, nous nous restreindrons dans nos travaux aux points suivants :

- les espaces sont des complexes simpliciaux,
- les systèmes sont représentés par des simplexes s'ils sont statiques ou des séquences de simplexes s'ils sont dynamiques, et
- la notion de régularité spatiale est réduite à celle de *compacité*.

Les paragraphes suivants introduisent la notion de compliance *via* la compacité d'une représentation dans les complexes simpliciaux dans le cas statique puis dans le cas dynamique. Attention, suite à nos discussions avec différents musiciens, nous avons appelé cette mesure « compacité » bien que celle-ci n'ait rien à voir avec celle que l'on peut trouver en logique [Van Dalen 2011], ou encore la notion de « compacité » et de « compact » développées en topologie [Munkres 1984]. Dans tout ce document, la notion de compacité utilisée est celle que nous définissons et nous ne faisons jamais référence à la notion topologique usuelle.

Cas statique. Soit une collection simpliciale minimale \mathcal{C}_E (*i.e.*, où toutes les cellules de même dimension sont décorées par des labels différents) correspondant à notre espace de représentation. Soit un système S dont on cherche à avoir une représentation dans \mathcal{C}_E .

On suppose que le système S est modélisé comme un simplexe \mathcal{C}_S et qu'une représentation de S dans \mathcal{C}_E consiste en une sous-collection \mathcal{C} de \mathcal{C}_E en inclusion structurelle dans \mathcal{C}_S . La propension de \mathcal{C}_E à représenter S peut être caractérisée par la portion de S apparaissant dans \mathcal{C}_E . En termes géométriques et de façon informelle, cela se traduit par l'étendue de \mathcal{C} dans \mathcal{C}_E . En effet, \mathcal{C}_S étant un simplexe, son diamètre est de 1 (toute cellule est voisine de toutes les autres). Ainsi, si seule une partie de \mathcal{C}_S est représentée par \mathcal{C} dans \mathcal{C}_E , cette partie sera de dimension inférieure à celle de \mathcal{C}_S et pourra présenter un diamètre plus grand. Si S est entièrement représenté, toutes les cellules du simplexe \mathcal{C}_S apparaissent dans \mathcal{C}_E ; la représentation apparaît très dense. A l'inverse, si S est peu représenté, seules des parties déconnectées de \mathcal{C}_S apparaîtront dans \mathcal{C}_E . On cherche donc à quantifier l'aspect compact de \mathcal{C} dans \mathcal{C}_E .

Formellement, on définit la compacité de \mathcal{C} dans \mathcal{C}_E à la dimension d (on parlera par la suite de d -compacité) par :

$$\frac{f_{d+1}(|\mathcal{C}|)}{f_{d+1}(|\mathcal{C}_S|)} = \frac{f_{d+1}(|\mathcal{C}|)}{\binom{f_1(|\mathcal{C}_S|)}{d+1}}$$

On rappelle que, comme définit dans la section 2.2, le terme $f_{d+1}(\mathcal{K})$ désigne le nombre de d -cellules que comprend le complexe \mathcal{K} . En d'autres termes, la d -compacité correspond au rapport entre le nombre de d -simplexes que comprend la représentation de \mathcal{C}_S dans \mathcal{C}_E et le nombre total de d -simplexes dans \mathcal{C}_S ¹⁴. On remarquera que la valeur de la d -compacité

14. Ce calcul rappelle celui du *coefficient d'agglomération global* (ou *global clustering coeffi-*

est comprise entre 0 et 1 quelque soit la dimension d . On définit la d -compacité $\mathcal{C}_d(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_S)$ de \mathcal{C}_S dans \mathcal{C}_E , comme la d -compacité de la meilleure représentation \mathcal{C} possible :

$$\mathcal{C}_d(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_S) = \max_{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_E} \frac{f_{d+1}(|\mathcal{C}|)}{\binom{f_1(|\mathcal{C}_S|)}{d+1}}$$

L'existence dans \mathcal{C} de simplexes de haute dimension entraîne de manière évidente une compacité élevée aux dimensions plus basses. Par exemple, si \mathcal{C} comprend un 3-simplexe (un tétraèdre), il inclut aussi par définition ses 4 sommets, ses 6 arcs et ses 4 triangles. En revanche, la compacité à basse dimension n'implique pas nécessairement une compacité élevée dans les dimensions supérieures. Par exemple, 4 sommets tous reliés par des arcs dans \mathcal{C} ne bordent pas nécessairement un 3-simplexe de \mathcal{C}_E alors qu'ils en bordent un dans \mathcal{C}_S (\mathcal{C}_S est un simplexe).

Cas dynamique. Quand le système S évolue dans le temps, il n'est plus modélisé par un unique simplexe mais par la séquence de simplexes (*i.e.*, des états) pris par S . Cette trajectoire est représentée par une suite de simplexes et de durées $T_S = [(A_0, d_0), \dots, (A_N, d_N)]$. Comme précisé plus haut, nous nous intéressons à la compacité de la représentation de S à chaque instant de façon indépendante. Cependant pour associer une compacité globale à l'ensemble de la trajectoire, nous proposons de la définir comme la compacité moyenne des représentations des états au cours du temps pondérés par leur durée d_i :

$$\mathcal{C}_d(\mathcal{C}_E, T_S) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^N d_i \mathcal{C}_d(\mathcal{C}_E, A_i)$$

où $D = \sum_{i=0}^N d_i$ est la durée totale considérée.

3 Calcul spatial et MGS

Un des objectifs de cette thèse est d'offrir des outils automatiques pour construire certains espaces et y effectuer des calculs. Pour cela, nous nous appuyons sur l'approche du calcul spatial et plus précisément, sur un langage de programmation expérimental, MGS.

Le calcul spatial [De Hon 2006, SCW 2011] tire les conséquences d'un point de vue central en informatique, qui consiste à voir un calcul comme une succession de parcours dans une structure de données. Cette structure de données est formalisée sous la forme d'un espace abstrait qui représente les contraintes liées au problème à résoudre. Ce paradigme a trouvé des applications effectives dans la modélisation et la simulation en biologie des systèmes [Spicher 2011] mais aussi en intelligence artificielle (représentation des connaissances et analogie) [Valencia 1998].

cient) [Holland 1971] qui mesure la « tendance à la grégarité » chez les voisins d'un noeud dans un graphe. L'approche présentée ici est plus large dans le sens où elle s'applique à un ensemble arbitraire d'éléments de l'espace (*i.e.*, pas nécessairement voisins d'un même élément) et dans un complexe simplicial de n'importe quelle dimension (les graphes sont des complexes simpliciaux de dimension 1).

MGS, un langage expérimental dédié au calcul spatial, a été utilisé pour prototyper et/ou développer les travaux présentés dans cette thèse. MGS est fondé sur la constatation que l'ensemble des interactions possibles dans un système s'organise suivant une structure topologique qui permet de spécifier sa description et son évolution. Ce langage s'appuie sur des relations topologiques pour renouveler la notion de structure de données. En MGS, les structures de données sont vues comme des *collections topologiques* et sont manipulées à l'aide de *transformations*. Nous présentons dans les deux sections suivantes ces notions.

3.1 Les collections topologiques

Nous revisitons ici la notion de collection topologique présentée dans la section 2.3 sous l'angle de la programmation et dans le cadre de MGS, dans lequel cette notion a été initialement développée.

3.1.1 Point de vue local des structures de données

MGS utilise comme unique source d'organisation des données le concept de collection topologique. Il offre au programmeur un point de vue topologique pour traiter ses constructions. Le programmeur voit une collection comme un agrégat de données, c'est-à-dire un ensemble de valeurs scalaires ou de (sous-)collections muni d'une organisation précisant comment ces données sont agencées les unes par rapport aux autres. Dans ce contexte, une collection est une *structure de données* au sens algorithmique du terme.

L'origine de l'utilisation des collections dans un cadre algorithmique vient du souhait d'unifier les structures de données standards (telles que les séquences, les (multi)ensembles, les graphes, les tableaux, les matrices, etc.) dans un même cadre conceptuel. La généralité offerte par les collections topologiques provient des « déplacements usuels » effectués dans la structure de données, c'est-à-dire de l'ordre de parcours privilégié de ses éléments. Cet ordre est capturé par une notion de voisinage rapprochant deux éléments contigus dans la structure. Cette relation de voisinage est fondée sur le fait que le choix d'un programmeur pour une structure de données est motivé par l'utilisation algorithmique de l'objet représenté. Pour illustrer cette affirmation, nous proposons d'observer la construction des voisinages pour deux structures de données différentes : les listes et les matrices.

- Les listes, telles qu'elles sont définies dans le langage fonctionnel OCaml, invitent par leur construction inductive à parcourir leurs éléments de gauche à droite, par exemple lors de descentes récursives. Pour que ce parcours soit possible, chaque élément de la liste doit avoir un voisin vers la droite (excepté pour le dernier élément). Ce simple point de vue local sur l'organisation des éléments est suffisant pour définir une collection topologique « émulant » les listes.
- Pour les matrices, il est d'usage¹⁵ de les représenter par un vecteur de lignes ou un vecteur de colonnes. Le choix de l'une ou l'autre de ces deux représentations est influencé par son utilisation : souhaite-t-on parcourir les éléments par lignes ou

15. D'autres représentations sont encore possibles ; on pense en particulier à l'utilisation en analyse numérique de représentations compressées lorsque la matrice présente un nombre important d'éléments nuls.

par colonnes ? La représentation par colonnes facilite évidemment les parcours par colonnes, mais accentue fortement les difficultés de programmation des algorithmes par lignes, et réciproquement. Le point de vue local renverse la situation en capturant ces deux parcours dans une unique notion de voisinage : chaque élément e_{ij} (exceptés les éléments aux bords) possède 4 voisins, $e_{i+1,j}$, $e_{i,j+1}$, $e_{i-1,j}$ et $e_{i,j-1}$. Ce voisinage a été historiquement utilisé par von Neumann. Pour les parcours en diagonale, il suffit de considérer 4 voisins supplémentaires $e_{i+1,j+1}$, $e_{i-1,j-1}$, $e_{i-1,j+1}$ et $e_{i+1,j-1}$, utilisant ainsi le voisinage de Moore.

Toute structure de données peut ainsi être caractérisée par une relation locale entre ses éléments [Giavitto 2002].

3.1.2 Notions de voisinage et d'incidence

Les collections topologiques capturent cette organisation locale des structures de données à l'aide d'une relation de voisinage explicite qui associe à chaque élément de la collection les éléments qui en sont à proximité. Il est commode de représenter cette relation à l'aide d'un *graphe de voisinage* où les nœuds représentent les éléments de la collection et sont donc décorés par leur valeur et les arcs représentent la relation de voisinage. Du point de vue des collections topologiques, la topologie des listes que nous venons de voir peut être décrite par un graphe linéaire où deux nœuds sont liés par un arc si les éléments correspondants sont contigus dans la liste. L'organisation des matrices peut être décrite par un graphe régulier où chaque sommet présente un nombre constant de voisins (4 ou 8 pour notre exemple).

Dans un cadre algorithmique cette approche par graphe de voisinage permet de représenter l'ensemble des structures de données standards qu'on peut attendre d'un langage de programmation. Cependant, cette vision des collections est restreinte à la seule utilisation de graphes où seuls les sommets sont décorés alors que les arcs restent vierges d'information. Un apport important de la notion de complexe cellulaire pour structurer une collection est d'étendre ce point de vue à des structures plus générales permettant d'une part de décorer les arcs, et d'autre part d'augmenter l'expressivité du graphe en y ajoutant des éléments de dimension supérieure à 1 ; on peut ainsi représenter facilement des structures de données plus spécialisées telles que les objets manipulés dans le domaine de la modélisation géométrique (maillage, triangulation, etc.) [Shapiro 2001, Lienhardt 1994], la modélisation d'objets physiques et biologiques pour la simulation [Palmer 1993, Palmer 1994, Tonti 2001, Egli 2004], etc.

Cette façon de procéder se rapproche de la notion de *champ de données* où les données sont indexées par les éléments de \mathbb{Z} [Lisper 1993, Lisper 1994]. Les champs de données utilisés en parallélisme (data-field) correspondent à une généralisation des régions arbitraires de \mathbb{Z}^n et généralisent la notion de tableau. Les collections topologiques permettent d'aller plus loin en considérant des espaces plus structurés et/ou plus complexes que \mathbb{Z}^n , représentés par des complexes cellulaires. Elles décrivent donc des *fonctions partielles* de complexes cellulaires, également appelés dans ce contexte espaces de *positions* ou d'*indices*, vers un ensemble de valeurs (typiquement les valeurs du langage MGS).

Enfin, le cadre offert par les complexes cellulaires permet une manipulation dynamique

de la structure qu'il est possible de modifier pour construire des espaces plus complexes par transformation de relation de voisinage (raffinement, découpage, etc. de l'espace sous-jacent). En autorisant les modifications topologiques, les collections topologiques sont un outil élégant pour supporter les changements de structures dans les modélisations de systèmes dynamiques à structure dynamique [Giavitto 2003, Michel 2009, Spicher 2011].

3.1.3 Quelques voisinages disponibles dans MGS

Bien que leur définition soit générique, MGS propose de classer les collections topologiques pour retrouver et manipuler plus facilement des structures de données déjà connues. Ces différentes classes de collections topologiques sont appelées *types*. Les différents types de collections sont distingués suivant les propriétés vérifiées par la relation d'incidence : en agissant sur celle-ci, on peut introduire une forme de régularité ou d'uniformité dans la structure. Les quelques sections suivantes présentent des collections topologiques spécifiques proposées dans l'interprète MGS. L'objectif n'est pas ici d'établir un manuel d'utilisation du langage (qui est rarement explicitement utilisé dans la suite) mais de s'intéresser à la façon de penser le calcul qu'offre MGS (qui a grandement influencé les présents travaux). On s'intéresse plus particulièrement aux collections monoïdales (séquence, ensemble et multi-ensemble) ainsi qu'aux *GBF* et aux chaînes topologiques. La première famille de collections montre comment on peut définir une topologie sur une structure de données classique¹⁶. Les *GBF* sont des collections plus originales fondées mathématiquement sur des structures de groupe ; nous aurons l'occasion de présenter un grand nombre de structures musicales représentables en MGS par ce type de collection.

Collection leibnizienne et collection newtonienne. Les mathématiciens Leibniz et Newton avaient chacun une conception différente de l'espace. Pour le premier, l'espace est défini à partir des éléments qu'il contient et de leurs « positions » relatives les uns par rapport aux autres : *l'espace est construit de façon relative aux éléments qu'il contient*. À l'inverse, Newton possède une vision de l'espace comme d'un objet ayant une existence indépendante, dans lequel d'autres objets sont placés et se déplacent.

Cette distinction apparaît dans les collections MGS. Certaines sont construites sur une relation entre les éléments ; leur structure résulte d'un calcul sur les données qui la composent. Elles sont dites *leibniziennes*. Dans ces collections, il n'est pas possible d'avoir une cellule topologique non décorée. La collection vide ne contient aucune position ; celles-ci sont créées au fur et à mesure de l'ajout des éléments. Les collections *monoïdales*, construites inductivement comme les éléments d'un monoïde dont l'opération est l'ajout d'un élément dans la collection, en font partie. Il s'agit des séquences, des ensembles et des multi-ensembles. La concaténation de deux collections leibniziennes rassemble les éléments des collections et recalcule le voisinage relatif entre les données.

Les collections *newtoniennes* s'opposent aux leibniziennes par la définition *a priori* de leur structure. L'espace engendré est alors décoré par des données. Dans ces collections, les positions existent indépendamment de leur décoration. On associe la valeur spéciale

16. C'est d'ailleurs à cette topologie que l'on fait référence lorsque l'on parle des accords comme ensembles de notes ou des séries comme séquences d'intervalles.



FIGURE 12 – Exemple de séquence : la topologie d’une séquence est un graphe linéaire où chaque sommet représente un élément et chaque arc la contiguïté.

<undef> aux positions non décorées. La collection vide contient donc toutes les positions de l’espace non-décorées. Les GBF, extension de la notion de tableau, et les chaînes abstraites font partie de ces collections. La concaténation de ces collections n’est possible que pour deux topologies partageant le même complexe cellulaire ; les deux collections sont alors superposées, une fonction de collision gère alors les positions décorées dans les deux collections (la concaténation peut par exemple être asymétrique, donnant la priorité aux éléments d’un des opérandes).

Les séquences. Il s’agit d’une collection monoïdale. À la manière des types de données algébriques, à partir de la séquence vide `seq: ()` et de l’opérateur d’ajout `::`, les séquences sont construites par ajouts successifs des données.

Dans une séquence, chaque élément possède un voisin à droite : il s’agit de la tête de la queue sur laquelle il a été ajouté. La topologie induite par ce voisinage est celle d’un complexe cellulaire de dimension 1 linéaire où les sommets sont décorés par les éléments de la séquence et où un arc, orienté d’un sommet à un autre, exprime la contiguïté des éléments dans la séquence. La figure 12 schématise une telle topologie. L’espace des positions est construit au fur et à mesure de l’ajout des éléments : il s’agit d’une collection leibnizienne.

Les multi-ensembles. Les *multi-ensembles* sont des ensembles dans lesquels plusieurs occurrences d’un même élément peuvent coexister. Comme les séquences, il s’agit d’une collection monoïdale. L’opérateur d’ajout est *associatif* et *commutatif* ; l’ordre dans lequel les éléments sont ajoutés n’a donc pas d’importance.

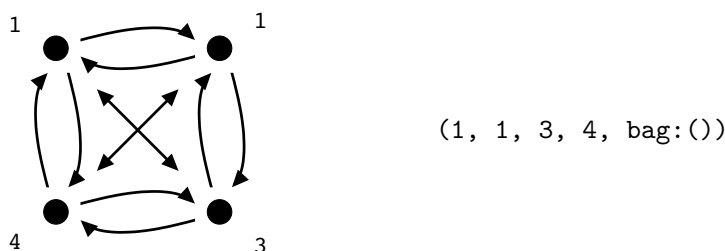


FIGURE 13 – Exemple de multi-ensemble : la topologie d’un multi-ensemble est un graphe complet où chaque sommet représente un élément.

La topologie associée à cette construction est un graphe complet où chaque élément est voisin de tous les autres. Il s’agit d’un complexe cellulaire de dimension 1. La figure 13 schématise une telle topologie. L’espace des positions est construit au fur et à mesure de l’ajout des éléments : il s’agit d’une collection leibnizienne.

Les ensembles. Contrairement aux multi-ensembles, il ne peut y avoir plus d'une occurrence d'un même élément dans un ensemble. L'opérateur d'ajout est donc *associatif*, *commutatif* et *idempotent*.

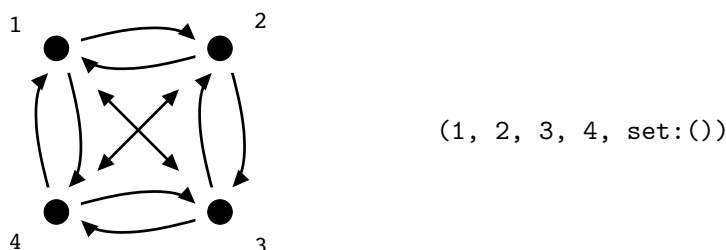
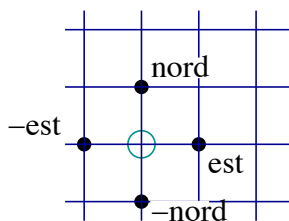


FIGURE 14 – Exemple d'ensemble : la topologie d'un ensemble est un graphe complet où chaque sommet représente un élément.

La topologie associée à cette construction est un graphe complet où chaque élément est voisin de tous les autres et n'apparaît qu'une seule fois. Il s'agit d'un complexe cellulaire de dimension 1. La figure 14 schématise une telle topologie. L'espace des positions est construit au fur et à mesure de l'ajout des éléments : il s'agit d'une collection leibnizienne.

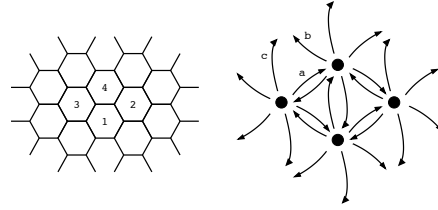
Les collections GBF. L'acronyme GBF signifie *Group Based Field*, ce qui peut être traduit par *champ de données fondé sur une structure de groupe* (voir [Michel 1996b, Giavitto 1996]). Comme son nom l'indique, une collection GBF exhibe une structure construite sur les éléments d'un groupe. On rencontre ce type d'organisation lorsque l'on souhaite manipuler des voisinages réguliers. Par exemple, pour discrétiser un plan par un maillage carré, on utilise le voisinage suivant :



Chaque élément possède un voisin suivant chaque direction *nord*, *sud*, *est* et *ouest*. Pour générer ce maillage, on construit une structure de groupe dont les générateurs sont deux des quatre directions (les deux autres correspondant à leurs inverses).

De façon plus formelle, soit $\mathcal{D} = \{a, b, c, \dots\}$ l'ensemble des directions permettant de se déplacer d'un élément du maillage vers ses voisins ; on note $\mathcal{V}oisin(d, p)$ le voisin suivant la direction d d'un point p . Cette direction d peut être identifiée à l'opération de déplacement élémentaire donnée par la fonction $p \mapsto \mathcal{V}oisin(d, p)$ où $d \in \mathcal{D}$. Ces déplacements peuvent être composés par une opération $+$ induisant une structure de groupe :

- elle est associative,
- pour chaque direction $d \in \mathcal{D}$, il existe un déplacement inverse noté $-d \in \mathcal{D}$,
- et il existe un déplacement nul qui consiste à « ne pas se déplacer ».



```
gbf hexa = < a, b, c ; a + b = c > ;;
(1,2)::(3,4)::seq:() following |a>, |b> ;;
```

FIGURE 15 – Exemple de collection GBF que l’on peut visualiser sous la forme d’un graphe de Cayley. Les deux graphes sont deux représentations duales du graphe de Cayley de la présentation `hexa`.

L’application des déplacements en un point est l’action du groupe sur l’espace des points. Pour définir un espace homogène arbitraire, il faut donc spécifier deux choses :

1. le groupe des déplacements à partir des déplacements élémentaires \mathcal{D} ;
2. l’ensemble des points sur lequel le groupe va agir.

Dans l’interprète MGS, le second point est traité en considérant que le groupe des déplacements agit sur lui-même : un élément du groupe correspond alors à un point de l’espace homogène et l’action du groupe correspond simplement à la loi du groupe : $\mathcal{V}oisin(d, p) = p + d$.

Pour spécifier un GBF, on utilise une *présentation* finie [Michel 1996a] : il s’agit d’une liste de générateurs et d’une liste d’équations entre ces générateurs. La syntaxe d’une présentation est la suivante pour un GBF abélien :

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_n; e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$$

où g_1, g_2, \dots, g_n sont les générateurs et e_1, e_2, \dots, e_m les équations entre générateurs. Tout élément du groupe s’obtient alors comme une somme de générateurs. Ici, ils correspondent aux déplacements élémentaires qui définissent un voisinage homogène.

Dans notre exemple de grille, la présentation du GBF est :

$$\langle nord, est; nord + est = est + nord \rangle$$

À partir de la présentation d’un groupe, le graphe de Cayley fournit la topologie engendrée par le groupe : les nœuds sont les éléments du groupe et deux éléments sont liés par un arc si leurs positions ne diffèrent que de l’ajout ou du retrait d’un générateur. Il s’agit donc d’un complexe cellulaire de dimension 1. La figure 15 schématise une telle topologie. L’espace des positions est toujours déterminé par la présentation du groupe des déplacements indépendante des valeurs : il s’agit d’une collection newtonienne.

Les chaînes abstraites. Cette collection est la plus générale en terme de voisinage arbitraire que l’interprète MGS fournit. Elle correspond à une implantation des complexes

cellulaires qui ont été décrits précédemment. Elles sont donc utilisées, entre autres, pour spécifier les complexes simpliciaux.

Contrairement aux collections présentées jusqu'ici, les chaînes abstraites ne sont pas limitées à un graphe de voisinage où les sommets sont les éléments et les arcs la relation de voisinage. Elles correspondent à la construction de complexes cellulaires de dimension arbitraire. L'espace des positions est défini seul dans un premier temps. Il est ensuite décoré ce qui amène à considérer les chaînes abstraites comme un type de collections newtoniennes.

Un certain nombre d'autres collections topologiques sont disponibles dans le langage MGS. On s'est restreint ici à présenter les collections utilisées dans cette thèse. Pour une présentation des autres collections, se référer à [Spicher 2006].

3.2 Les transformations

Les collections topologiques permettent de représenter un grand nombre de structures de données. Pour les manipuler, MGS fournit une structure de contrôle, appelée *transformation*, permettant la définition par cas de fonctions sur les collections topologiques. La généricité est capturée par l'utilisation de la relation de voisinage locale fournie avec chaque collection. Cette relation est le point de départ pour l'élaboration de motifs filtrant des sous-parties d'une collection. Chaque cas de la transformation est alors une règle de réécriture ; son application correspond à une modification locale de la collection.

Dans les langages de type ML (comme Haskell ou OCaml), il est possible de définir des fonctions par cas sur des constantes. Ce système de définition se rapproche d'une structure d'aiguillage en C ou en MGS (avec le mot clé `switch`). Lors de l'appel de la fonction, un cas est identifié suivant la valeur de l'argument passé à la fonction. La spécification au sein de la fonction de motifs à filtrer rend possible cette identification. Dans les langages Haskell et OCaml, cette spécification de motifs ne se limite pas au filtrage de constantes. La définition par cas permet notamment l'expression de motifs filtrant des objets plus complexes que de simples valeurs scalaires, et construits à partir d'un *type de données algébrique*. Ces objets permettent la représentation de structures définies inductivement (par exemple les arbres binaires). Par cette définition inductive, les valeurs des types de données algébriques correspondent à une organisation hiérarchique construite à partir d'une racine qui permet de parcourir l'ensemble de la structure de données. Contrairement aux types de données algébriques, il n'est pas possible de représenter les collections topologiques par une racine unique permettant de filtrer l'ensemble de ses éléments.

Cependant, en partant d'un des éléments de la collection puis en suivant la relation de voisinage, il est possible de sélectionner une partie de la collection topologique. Là où le filtrage des structures de données algébriques est *global* dans le sens où toute la structure est filtrée, le filtrage des collections topologiques est *local* : une sous-partie est sélectionnée.

Les *transformations* étendent en ce sens la définition par cas de fonctions aux collections topologiques¹⁷. Elles correspondent à une nouvelle structure de contrôle fournie par MGS,

17. Pour une introduction plus détaillée des transformations MGS à l'aide des fonctions définies par cas, se reporter à [Spicher 2006] section 2.3.

définie par cas, où chaque cas est décrit par une règle de réécriture $\alpha \rightarrow \beta$:

- α est un *motif* qui sélectionne par filtrage une sous-partie de la collection, appelée *sous-collection*,
- β est une expression qui calcule une nouvelle collection à substituer en lieu et place de la sous-collection filtrée par α .

Une transformation est définie par un ensemble de règles de réécriture et son application sur une collection topologique correspond aux trois opérations interdépendantes suivantes :

1. l'*application d'une règle* avec :
 - le *filtrage* d'une sous-collection, et
 - l'*évaluation de la partie droite*.
2. la *stratégie d'application des règles*, pour choisir les règles à appliquer et pour gérer les collisions si différentes applications de règles sont possibles sur une même sous-collection, et enfin
3. la *reconstruction*.

La primitive usuelle `map` peut être programmée de cette façon. Soit l'expression `map(f, c)` appliquant la fonction `f` sur tous les éléments de `c`. Détaillons les différents points précisés ci-dessus dans le cadre de cette fonction :

- La règle de réécriture : la transformation locale de la fonction `map` est capturée par la règle de réécriture $x \rightarrow f(x)$. Le motif de la règle est constitué d'une seule variable filtrant un élément x . La partie droite évalue l'application de la fonction `f` sur l'élément filtré.
- La stratégie d'application : elle doit définir dans le contexte de la fonction `map` l'application de la règle partout où cela est possible, c'est-à-dire sur chaque élément de la collection `c`. Parmi les différentes stratégies possibles dans MGS, la stratégie par défaut, appelée *maximale parallèle*, correspond à cette attente.
- La reconstruction : elle consiste ici à recréer une structure identique à celle de la collection `c` et à la décorer avec les valeurs calculées par la partie droite de la règle pour chaque instance de filtre.

Cette transformation est programmée et utilisée en MGS par :

```
trans map[fct] = { x => fct(x) } ;;

map[fct=f, strategy=default](c) ;;
```

La transformation `map` est définie par une seule règle de réécriture. L'argument nommé `fct` correspond à la fonction à appliquer localement. Finalement, l'application de cette transformation sur une collection `c` est faite en précisant en paramètre la fonction `f` à appliquer et la stratégie à utiliser.

Application d'une règle. Ce premier point consiste à définir l'application *locale* d'une règle de la transformation sur la collection. Le motif de la règle spécifie la sélection d'une sous-partie de la collection. Cette étape est appelée *filtrage* et la sous-partie filtrée, *sous-collection*. La partie droite de la règle est une expression MGS qui permet le calcul d'une nouvelle sous-collection. L'application de la règle sur une sous-collection filtrée consiste

alors à évaluer la partie droite. Ainsi, *l'application d'une règle sur une collection retourne un couple (sous-collection filtrée, sous-collection calculée)*.

L'enjeu déterminant de l'application d'une règle consiste à spécifier de façon élégante une sous-collection, c'est-à-dire de développer un langage de spécification de motifs concis et expressif. Deux langages sont développés dans l'interprète MGS et correspondent à deux utilisations différentes des transformations :

1. Les *transformations de chemin* qui permettent la mise à jour des valeurs associées aux cellules topologiques sans modifier la structure de la collection.
2. Les *patches* qui permettent la modification topologique des collections.

Stratégie d'application des règles. Une transformation est composée de plusieurs règles de réécriture. La *stratégie d'application des règles* consiste à choisir quelle règle doit être appliquée, et à quelle partie de la collection. En effet, le même motif peut filtrer plusieurs sous-collections.

On appelle *occurrence de filtre* ou *instance de filtre* une sous-collection susceptible d'être sélectionnée lors de l'application d'une règle. En considérant l'ensemble de toutes les occurrences de filtres de toutes les règles, il est possible de décrire une stratégie d'application suivant les deux critères orthogonaux suivants :

1. *synchrone/asynchrone* : l'application asynchrone d'un ensemble de règles consiste à considérer parmi toutes les occurrences de filtres possibles l'une d'entre elles ainsi que la règle qui a permis de la filtrer ; la règle est alors appliquée une et une seule fois sur l'instance désignée. À l'opposé, une stratégie synchrone consiste à sélectionner plusieurs instances disjointes de filtres, et les règles de réécriture correspondantes, et à les appliquer en parallèle sur les sous-collections désignées.
2. *priorité* : elle caractérise le choix de l'instance parmi l'ensemble de toutes les occurrences de filtres de toutes les règles. Ce choix peut être déterminé de façon prédéfinie (désignant comme prioritaires les instances concernant les règles les plus prioritaires) ou de façon stochastique (les instances sont tirées au sort suivant des probabilités associées à chaque règle).

L'application de plusieurs règles en parallèle étant possible, nous considérons qu'après l'étape de gestion de la stratégie, les règles sont appliquées fournissant une *liste de couples (collection filtrée, collection calculée)*.

Reconstruction. Il s'agit de la dernière étape de l'application de la stratégie. En fonction de la liste des couples (sous-collection filtrée, sous-collection calculée) et du type de la collection, les sous-collections calculées sont réarrangées les unes par rapport aux autres pour construire la collection résultat de l'application.

Les notions présentées dans ces trois derniers paragraphes sont détaillées dans [Spicher 2006].

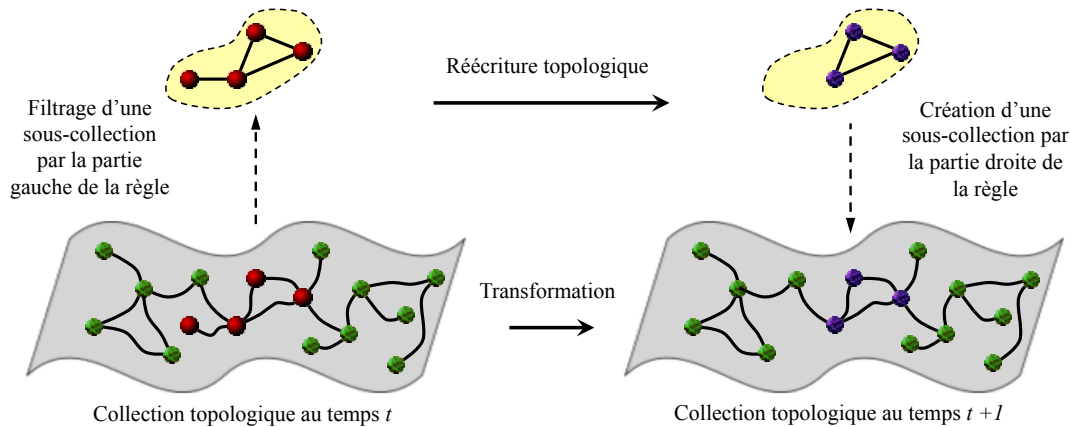


FIGURE 16 – Une collection topologique avant et après une transformation.

3.3 Construction de complexes cellulaires par auto-assemblage

Dans cette section, nous présentons le mécanisme d'auto-assemblage, spécifié comme une transformation MGS, qui a été utilisé pour construire la plupart des espaces utilisés dans cette thèse.

3.3.1 Auto-assemblage par accréation

L'*auto-assemblage* (*self-assembling* en anglais) est un processus qui crée de façon incrémentale des structures spatiales complexes. On trouve dans la nature un grand nombre d'exemples de systèmes auto-assemblés : de la cristallisation en physique jusqu'aux processus de morphogenèse en biologie [Giavitto 2008]. Du point de vue informatique, les processus d'auto-assemblage sont une source d'inspiration particulière. L'organisation dynamique de leurs constituants émerge de façon décentralisée à partir d'interactions uniquement locales, se produisant en parallèle et à différentes échelles de temps et d'espace. Ils ont en particulier inspiré de nouveaux modèles de calcul comme le *calcul amorphe* [Abelson 2000] ou le *calcul par ADN* [Adeleman 1994].

Dans cette thèse, les systèmes auto-assemblés sont vus comme des agrégats d'objets élémentaires (cellules, notes de musique, intervalles, accords etc.) dont le comportement est généralement simple, et qui se coordonnent localement pour former une entité dont la structure et le comportement sont complexes. L'*émergence* de cette structure ne peut être induit à partir des propriétés de ses composants élémentaires. Les processus d'auto-assemblage ont la qualité de faire émerger cette structure globale.

Notre point de vue sur l'auto-assemblage est *combinatoire* et nous nous concentrons sur l'auto-assemblage de complexes cellulaires par *accréation*. Une autre forme d'auto-assemblage, dit par *découpage*, sera évoquée dans le chapitre 5.

L'auto-assemblage par accréation est l'une des formes d'auto-assemblage les plus fondamentales où les objets élémentaires s'unissent pour former une structure complexe par *processus de croissance*. Un processus de croissance incrémental peut être décrit par l'itération

d'agrégations élémentaires : à chaque étape de la croissance, de nouvelles entités sont ajoutées en fonction de l'état de la croissance à l'issue de l'étape précédente [Kaandorp 1994]. L'agrégation dépend des entités disponibles et de la forme de la structure en construction à chaque étape.

L'expression « croissance par accréation » caractérise en particulier les processus de croissance localisés aux frontières du système. Ce type de croissance s'oppose à une « croissance intercalaire » située à l'intérieur du système. La sous-section suivante illustre ce procédé sous la forme d'une transformation MGS modélisant un processus de polymérisation.

3.3.2 Transformation MGS

Dans ces travaux, nous appliquons le processus d'auto-assemblage sur des complexes cellulaires, à l'aide d'une transformation MGS.

Les règles de réécriture locales sont particulièrement adéquates pour la spécification de processus d'auto-assemblages vu qu'elles reflètent fidèlement le mécanisme de construction incrémental et distribué du phénomène réel. Nous proposons un processus générique pour l'auto-assemblage d'une population d'éléments basiques. Ce processus consiste à identifier des éléments topologiquement équivalents (*i.e.*, des cellules partageant le même bord) dans un complexe cellulaire. Cette opération n'est pas élémentaire car l'identification doit se faire à toute dimension. Une manière simple d'accomplir ce calcul est d'appliquer de manière itérative la fusion des cellules topologiques qui partagent exactement les mêmes faces, jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteint. L'opération correspondante peut être exprimée en syntaxe MGS de la manière suivante :

```
patch Self-Assembly [Pred, Label] = {
  x y / (Pred x y) and (faces x = faces y)
  => let c = new_cell (dim x) (faces x)
        (union (cofaces x) (cofaces y))
  in (Label x y) * c
}
```

où la primitive `new_cell p f cf` retourne une nouvelle p -cellule qui a f pour faces et cf pour cofaces. La règle spécifie que deux éléments x et y dont les labels vérifient un prédicat arbitraire $Pred$ (donné comme paramètre) et qui ont les mêmes faces dans leur bords, fusionnent en une nouvelle cellule c (qui a pour cofaces l'union des cofaces de x et y) décorée par une valeur calculée par une fonction arbitraire $Label$ (donnée en paramètre). La figure 17 illustre ce procédé.

Afin d'illustrer l'approche, nous appliquons la transformation *Self-assembly* dans le prochain paragraphe sur une population de monomères. Le chapitre 4 applique cette transformation sur une population constituée de notes, d'intervalles et de classes d'intervalles, respectivement représentés par des 0, 1 et 2-cellules. Le chapitre 5 utilise cette transformation sur des populations d'accords représentés par des simplexes.

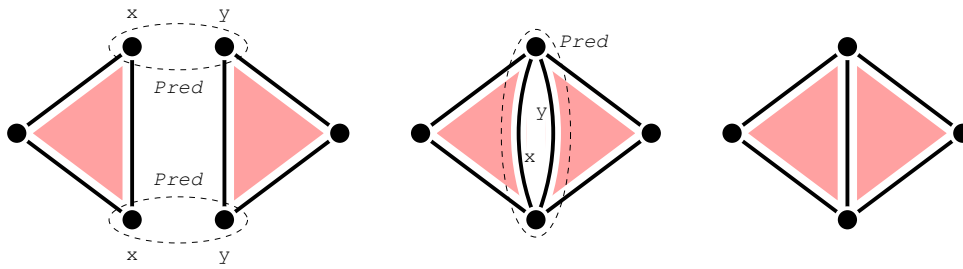


FIGURE 17 – Auto-assemblage de complexes cellulaires à l’aide de la transformation *Self-assembly* : à la première itération, 2 paires de sommets fusionnent ; puis deux arcs sont identifiés, enfin le point fixe est atteint.

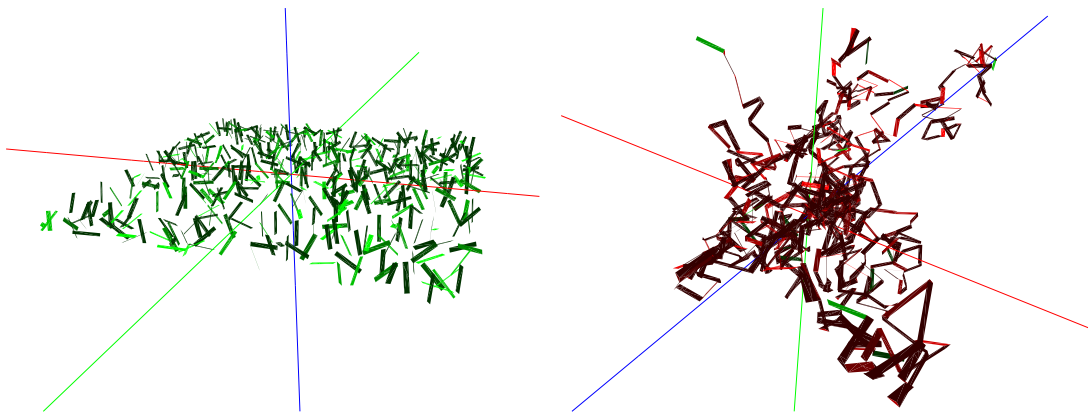


FIGURE 18 – Auto-assemblage de polymères : à gauche la population initiale de monomères ; à droite, le polymère final vu depuis deux différents points de vue.

Polymérisation. La transformation *Self-assembly* peut être utilisée pour modéliser un processus de polymérisation. Il s’agit d’un modèle simplifié du phénomène réel, le but étant d’illustrer la généricité de la transformation et l’aptitude des complexes cellulaires à modéliser des formes arbitraires. Les polymères sont de longues chaînes de molécules appelées monomères. Les monomères réagissent les uns avec les autres pour former des polymères, dans un processus appelé polymérisation. La polymérisation par addition est un cas particulier de polymérisation dans lequel les monomères se combinent avec les polymères dans un processus de croissance par accréation. Les monomères modélisés ici comportent deux sites de connexion. Un monomère est représenté par un complexe cellulaire abstrait de forme rectangulaire, c’est à dire une 2-cellule dont le bord est constitué de quatre arcs et de quatre sommets. Les sites de connexion correspondent à deux arcs opposés étiquetés comme étant actifs. En considérant que deux cellules actives peuvent fusionner (prédicat *Pred*) et qu’elles deviennent aussitôt inactives (fonction *Label*), la transformation *Self-assembly* constitue peu à peu le polymère comme le montre la figure 18.

Spatialisation du calcul des séries tous intervalles

1	Différentes énumérations et classifications	53
2	Construction d'un espace dédié à l'énumération des STI	55
3	Une classification spatiale des STI	59
4	Complexes d'intervalles généralisés	73

Une *série tous intervalles* (STI dans la suite) est une séquence temporelle¹ de 12 notes, comprenant chaque classe de hauteur et chaque classe d'intervalle (la distance séparant 2 classes de hauteurs successives) exactement une fois². Ces séries de notes particulières ont été couramment utilisées comme matériau de composition au cours du XXème siècle.

Les STI ont fait l'objet de nombreuses études. Les théoriciens s'intéressent à la classification de ces structures, mais aussi à leurs propriétés algébriques. Après avoir effectué un tour d'horizon sur ces travaux, nous proposons de reformuler ces problèmes d'un point de vue spatial, en construisant deux espaces, sous la forme de complexes cellulaires, dédiés à l'étude de ces séries. Le premier complexe résulte de l'auto-assemblage de 11 2-cellules représentant les 11 classes d'intervalles. À l'intérieur de cet espace, les STI sont spécifiées en MGS à l'aide d'un chemin exprimé de manière naturelle et intuitive. Le second espace que nous proposons, qui dérive du premier, permet une construction plus efficace et une classification topologique originale des STI.

1 Différentes énumérations et classifications

Introduit par A. Schönberg dans les années 1920, le *dodécaphonisme* a bouleversé les méthodes de composition modernes. Ce courant musical se base sur l'utilisation de séquences de notes appelées *séries dodécaphoniques*. Le dodécaphonisme consiste à donner une importance égale aux 12 classes de hauteurs. Ce principe s'oppose à celui de la tonalité, suivant lequel l'utilisation d'un sous-ensemble particulier de classes de hauteurs est privilégié sur les autres. Le dodécaphonisme est à l'origine de plusieurs courants musicaux du XXème siècle, notamment le *sérialisme*.

1. par séquence temporelle on entend une séquence dont l'ordre des éléments correspond à une succession dans le temps.

2. dans le cas des intervalles, le triton apparaît nécessairement 2 fois. Nous reviendrons sur cette propriété dans la suite.

Une série dodécaphonique est une suite de 12 notes incluant une fois seulement chacune des 12 notes de la gamme chromatique. La gamme chromatique est un exemple trivial de série dodécaphonique :



Il est facile de voir qu'il existe $12! \simeq 479.10^6$ séries dodécaphoniques. Ce nombre correspond à tous les ordonnancements possibles des 12 classes de hauteurs. Différentes classifications proposent une réduction de ce nombre en établissant des classes d'équivalence entre séries par certaines transformations. En particulier, l'équivalence par transposition, inversion et rétrogradation³ réduit l'ensemble des séries dodécaphoniques à 9985920 séries [Reiner 1985]. Étant une séquence de 12 classes de hauteur, la série dodécaphonique comprend 11 intervalles à la suite, soit un intervalle entre chaque paire de classes de hauteurs consécutives. Une STI (ou *cycle équilibré*) est une série dodécaphonique à l'intérieur de laquelle les 11 intervalles (modulo l'octave) sont tous différents. Ces séries sont rares et difficiles à construire de manière systématique. La plus connue est sans doute celle utilisée par A. Berg dans la *Suite lyrique* illustrée figure 1. Dans cette figure, les intervalles sont indiqués *modulo octave*, donc systématiquement dirigés vers le haut. Par exemple, on considère que l'intervalle séparant *D* et *C* est un intervalle de septième mineure (*m7*) et non un intervalle de seconde majeure descendante ($-M2$). Outre A. Berg, plusieurs compositeurs ont utilisé les STI dans leurs travaux. Parmi eux, on peut citer L. Nono (*e.g.*, *Il canto sospeso*) ou encore K. Stockhausen (*e.g.*, *Gruppen*, *Klavierstück IX*).

CH : F E C A G D G# C# D# F# A# B
i : M7 m6 M6 m7 P5 TT P4 M2 m3 M3 m2

FIGURE 1 – La STI utilisée dans la *Suite Lyrique* de A. Berg. La première ligne en dessous de la portée indique l'ordre des 12 classes de hauteurs constituant la série. La seconde ligne indique les 11 intervalles (modulo octave) séparant les classes de hauteurs consécutives.

Parmi la totalité des séries dodécaphoniques, 46272 sont des STI, soit moins de 0,1%. Ce nombre est ramené à 1928 en considérant les classes d'équivalences par les trois transformations évoquées ci-dessus. L'énumération des STI est un problème connu en théorie de la musique et a été étudiée dès le début des années 60 [Riotte 1963, Eimert 1964] puis approfondie en 1974 [Morris 1974]. Avant cela, le même problème, mais ramené aux accords, avait déjà été évoqué [Otterström 1935]. La recherche de STI est rapidement devenu un problème classique d'énumération en programmation par contrainte [Gent 2011].

Les STI possèdent de nombreuses propriétés. L'une d'entre elles est que la première et

3. Ces trois transformations seront détaillées plus loin

la dernière note sont nécessairement séparées par un intervalle de triton (six demi-tons). C'est bien le cas pour la *Suite lyrique* de Berg ci-dessus, pour laquelle la première et la dernière note sont respectivement F et B .

Au delà de leur énumération, plusieurs théoriciens se sont intéressés aux propriétés harmoniques et mélodiques que peuvent renfermer les STI. Par exemple, A. Riotte souligne le fait qu'une STI peut comprendre un groupe de notes successives formant une gamme ou un accord particulier [Riotte 2006]. E. Carter propose une classification relevant les STI incluant successivement l'ensemble des notes incluses dans le *All-Triad Hexachord* (le seul accord à 6 sons comprenant les 12 triades) [Schiff 1983]. La classification topologique présentée dans la dernière section de ce chapitre est motivée par la recherche des STI ayant de telles propriétés. D'autres outils mathématiques, comme la théorie des noeuds, ont été utilisés afin de dresser des classifications de STI [Jedrzejewski 2006].

2 Construction d'un espace dédié à l'énumération des STI

Nous proposons de reformuler d'un point de vue spatial l'énumération des STI. Notre approche repose sur la construction d'un complexe cellulaire favorable à leur analyse combinatoire.

Les STI peuvent être vues comme des objets habitant un espace abstrait conçu spécifiquement pour elles. Nous désignons respectivement cet espace et les objets par les termes *espace support* et *solutions* du calcul. L'énumération des STI consiste à trouver toutes les solutions dans l'espace support. L'espace est considéré comme une *contrainte* guidant la recherche : plus l'espace est structuré, moins l'énumération est coûteuse. Cette idée générale, déjà évoquée dans le chapitre 3, se situe au centre des motivations de la programmation spatiale. Notre objectif consiste à réduire les « calculs inutiles » en construisant un espace correspondant *exactement* au problème.

La notion d'*espace de recherche* dans le domaine des algorithmes de recherche correspond au cas particulier d'espace support dans lequel les réponses possibles sont les points de l'espace. Dans notre cas, plutôt que de construire un espace de recherche trop grand de $12! \simeq 479.10^6$ points et d'y chercher les solutions, nous construisons un espace de recherche bien plus petit composé de 12 sommets (associés aux 12 classes de hauteur) et nous allons y rechercher des chemins ayant certaines propriétés : ici, les chemins représentant des séries dodécaphoniques sont des chemins hamiltoniens.

Nous proposons une première méthode naïve, *Brute Force*, pour expliquer notre approche. On améliore ensuite l'efficacité du calcul, tout en simplifiant sa spécification, en enrichissant l'espace d'un point de vue structurel.

2.1 Approche *Brute Force*

Une approche brute force à notre problème consiste dans un premier temps à considérer l'ensemble des 12 classes de hauteur, à en calculer toutes les permutations possibles et enfin à ne garder que celles possédant exactement 11 différents intervalles.

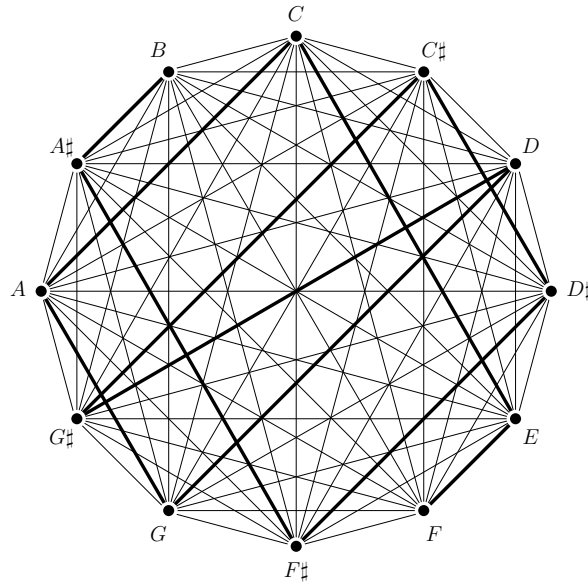


FIGURE 2 – Représentation spatiale de la STI utilisée par Alban Berg (en gras dans le graphe complet).

L'expression de cet algorithme d'un point de vue spatial se fait de manière directe. L'espace support est ici l'ensemble des 12 classes de hauteur. Comme souligné dans le chapitre 3, un ensemble peut être vu comme une collection topologique correspondant au graphe complet : chaque élément de l'ensemble est représenté par un sommet décoré par la valeur de l'élément. La topologie du graphe complet, impliquant la présence d'un arc entre chaque paire de sommets, spécifie qu'il n'y a aucun ordre prédéfini entre les éléments. La figure 2 représente l'espace support que l'on exploite pour le calcul des STI.

Dans cet espace, une permutation correspond à un chemin Hamiltonien dans lequel chaque classe de hauteur apparaît une seule fois. Ces chemins correspondent aux $\langle 0, 1 \rangle$ -chemins de longueur maximale : les éléments sont les 0-cellules qui doivent être voisines par un élément de dimension 1. Un exemple de $\langle 0, 1 \rangle$ -chemin est illustré en gras sur la figure 2. Un tel chemin s'exprime de manière naturelle en MGS par le motif :

$$n_0, n_2, \dots, n_{11} / \text{sti}(n_0, \dots, n_{11})$$

Dans ce motif, la virgule spécifie le $\langle 0, 1 \rangle$ -voisinage. La garde additionnelle $\text{sti}(n_0, \dots, n_{11})$ vérifie si le chemin Hamiltonien filtré par les n_i est une STI ou pas : le prédicat sti est satisfait si ses arguments sont séparés par 11 intervalles distincts. Ainsi, ce motif spécifie exactement les solutions de notre calcul.

L'optimisation d'un algorithme de recherche peut se faire au niveau de la spécification de la solution et/ou au niveau de la définition de l'espace support. Nous proposons dans la suite chacune de ces optimisations.

2.2 Optimisation de la spécification de la solution

On réalise facilement qu'une grande partie du calcul effectué lors de l'approche brute force est inutile. En effet, il est possible de déterminer qu'une série n'est pas une STI avant d'avoir déterminé les 12 notes. Par exemple, du fait de l'unicité nécessaire des intervalles, si l'intervalle entre n_0 et n_1 est le même que l'intervalle entre n_1 et n_2 , il est inutile d'énumérer les 362000 séries commençant par ces 3 notes. En d'autres termes, le prédicat `sti` peut être évalué incrémentalement tout au long de la spécification du chemin dans le motif.

Supposons que les arcs du graphe de la figure 2 soient décorés par l'intervalle correspondant (*e.g.*, l'arc entre E et G est décoré par m_3). Le motif suivant distribue l'évaluation du prédicat `sti` tout au long de la constitution du chemin :

```
n0 < i1 > n1
  < i2 > n2 / (i2!=i1)
  < i3 > n3 / (i3!=i1) / (i3!=i2)
  ...
  < i11 > n11 / (i11!=i1) / ... / (i11!=i10)
```

Ce motif est relativement similaire au précédent. La différence majeure est due à l'utilisation des `< ip >` plutôt que de la virgule pour exprimer le voisinage. La variable `ip` du motif correspond à l'intervalle entre les notes np' et np avec $p' = p - 1$. En supposant que chacun des arcs soit décoré par l'intervalle séparant les 2 notes situées à ses extrémités, le chemin spécifie une STI si toutes les valeurs `ip` sont distinctes⁴.

Cette propriété est garantie par la garde `(ip!=iq)` qui est distribuée tout au long du motif afin d'optimiser la recherche. Ce nouveau motif accélère le calcul des STI *par un facteur 30*.

2.3 Optimisation de l'espace support

La spécification de chemin précédente comprend deux différents types de contraintes : Les *contraintes logiques* et les *contraintes spatiales*. Les contraintes spatiales spécifient quelles sous-parties de l'espace support constituent des candidats structurels dans notre recherche, sans prendre en compte les valeurs décorant les éléments. Les contraintes logiques sont ensuite utilisées pour déterminer les solutions parmi les candidats structurels en vérifiant certaines propriétés sur les décorations des éléments qui les constituent. Les deux motifs précédents sont équivalents d'un point de vue spatial. L'optimisation proposée ci-dessus ne diminue pas le nombre de candidats structurels, mais réduit seulement le nombre de candidats visités de $12!$ à environ 9.10^6 au cours de la recherche, en empêchant de poursuivre la construction d'un chemin s'il s'avère incorrect dès le début.

D'un point de vue spatial, il est plus intéressant d'optimiser la recherche en réduisant le

4. On n'expose pas dans les détails la manière correcte d'orienter les arcs pour cette spécification. On suppose que le motif `c < e > c'` signifie que c (resp. c') est négativement (resp. positivement) orienté en accord avec e .

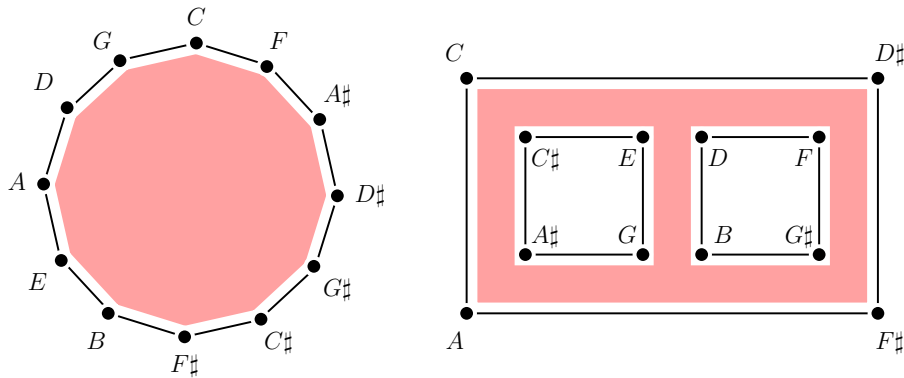


FIGURE 3 – Représentation spatiale des 2-cellules (et de leurs bords) des classes d’intervalles associées à la quarte (à gauche) et à la tierce mineure (à droite).

nombre de candidats structurels. Idéalement, nous recherchons une spécification purement spatiale des STI (sans aucune contrainte logique).

Dans notre exemple, la multiplicité des candidats structurels provient du manque de distinction, d’un point de vue spatial, entre les intervalles. En effet, chaque intervalle est représenté plusieurs fois dans l’espace support : Par exemple, la seconde mineure est représentée par l’arc entre C et C^\sharp , mais aussi par l’arc entre C^\sharp et D , etc.

Nous proposons donc, pour chaque intervalle i , d’ajouter dans l’espace support une 2-cellule dont les faces sont exactement les 1-cellules incidentes à deux notes séparées par i . Cette cellule représente la classe de tous les intervalles i (dans la suite, la *classe d’intervalle* i).

La figure 3 représente les 2-cellules associées à la quarte et à la tierce mineure, ainsi que les cellules contenues dans leurs bords. On remarque que la topologie des classes d’intervalles diffère : dans cet exemple, la tierce mineure comprend deux trous, alors que la quarte n’en comprend aucun. Ces différences de topologie constituent le point de départ de la classification présentée dans la section 3.

L’espace support résultant se construit facilement à l’aide du processus d’auto-assemblage présenté dans le chapitre 3. Dans ce complexe cellulaire, la spécification de la STI est totalement structurale. Chaque intervalle étant l’instance d’une seule classe d’intervalle, un arc appartient au bord d’une unique 2-cellule et un $\langle 0, 1 \rangle$ -chemin induit par conséquent un unique $\langle 0, 2 \rangle$ -chemin. La recherche d’une STI dans cet espace s’exprime par un $\langle 0, 1 \rangle$ -chemin Hamiltonien dont le $\langle 0, 2 \rangle$ -chemin induit est Eulérien. Autrement dit, il s’agit d’un chemin constitué d’arcs, passant exactement une fois par chaque sommet, et longeant exactement une fois chaque surface. La recherche de tels chemins peut se spécifier directement en MGS de la manière suivante :

$$\begin{aligned} n0 &< i1 < I1 > i1 > n1 \\ &< i2 < I2 > i2 > n2 \\ &\dots \\ &< i11 < I11 > i11 > n11 \end{aligned}$$

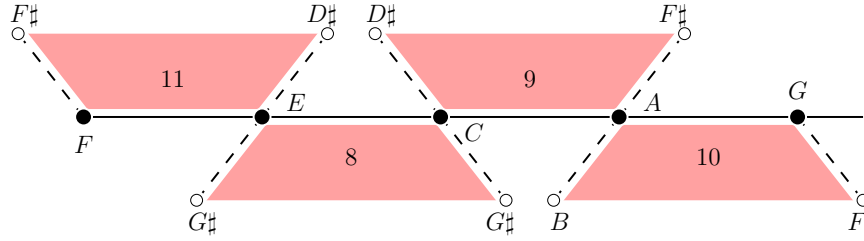


FIGURE 4 – Représentation spatiale des cinq premières notes de la STI utilisée par A. Berg dans la *Suite lyrique*.

Comme définit dans le chapitre 3 section 2.1, on rappelle que la notation $\tau < \sigma$ signifie que la cellule τ est une face de la cellule σ . Cette notation est disponible dans la langage MGS.

On remarque dans cette expression que le filtrage en MGS est linéaire : deux variables différentes réfèrent à deux cellules différentes. La propriété pour un $\langle 0, 1 \rangle$ -chemin d'être Hamiltonien et d'induire un $\langle 0, 2 \rangle$ -chemin Eulérien est donc implicitement exprimée dans ce filtre. La figure 4 illustre l'instanciation de ce motif sur les cinq premiers éléments de la STI de A. Berg. On remarque facilement sur cette figure que la contrainte spatiale consiste à faire respecter au chemin une 2-cellule supplémentaire. Plus précisément, deux notes consécutives np' et np avec $p' = (p - 1)$ doivent être $\langle 0, 1 \rangle$ -voisines par ip et $\langle 0, 2 \rangle$ -voisines par Ip et de telle manière que les cellules Ip et ip sont incidentes.

Finalement, le temps de calcul pour l'énumération des STI diminue d'un facteur 4 lors de l'utilisation de ce motif dans l'espace original auquel est ajouté les 2-cellules représentant les classes d'intervalles.

3 Une classification spatiale des STI

On propose de modifier l'espace des classes d'intervalles utilisé dans la section précédente pour une classification des STI basée sur des critères topologiques. Dans ce qui précède, nous nous sommes restreint au cas courant de la gamme chromatique où l'octave est divisée en 12 parties égales. L'étude qui suit est généralisée pour toute division de l'octave en N parties égales.

3.1 Notations et définitions

Une *série dodécaphonique* correspond à une suite de 12 entiers de \mathbb{Z}_{12} tous différents. Dans la suite on s'intéresse aux suites de N entiers de \mathbb{Z}_N tous différents $n_0 n_1 \dots n_{N-1}$, où N est l'entier naturel non nul correspondant au nombre de parties en laquelle l'octave est divisée (*i.e.*, le nombre de classes de hauteurs).

De même, on note i l'intervalle entre n_{j-1} et n_j ou i est égal à la différence $n_j - n_{j-1}$ modulo N ($i \equiv_N n_j - n_{j-1}$). On note $i_1 i_2 \dots i_{N-1}$ la suite d'intervalles associée à une suite de N entiers où $\forall j/1 \leq j < N, i_j \equiv_N n_j - n_{j-1}$. La *Suite Lyrique* illustrée figure 1

peut alors être décrite comme l'indique la figure 5.

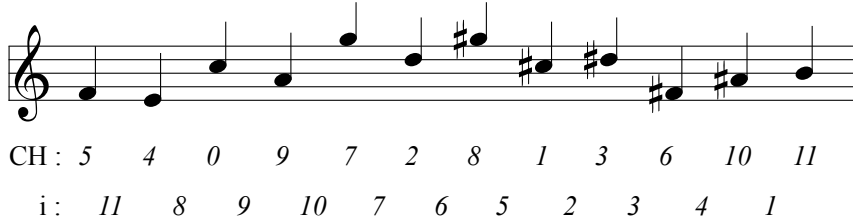


FIGURE 5 – Les suites d'entiers correspondant respectivement à l'ordonnement des classes de hauteurs (ligne du haut) et des classes d'intervalle (ligne du bas) dans la *Suite Lyrique* de A. Berg.

Par ailleurs on a

$$n_j \equiv_N n_0 + \sum_{k=1}^j i_k \equiv_N n_{N-1} - \sum_{k=j+1}^{N-1} i_k$$

Une STI est une suite de N entiers de \mathbb{Z}_N tous différents, dont les éléments de la suite d'intervalles sont tous différents.

Deux STI $n_0 n_1 \dots n_{N-1}$ et $n'_0 n'_1 \dots n'_{N-1}$ sont associées à la même suite d'intervalles si et seulement si elles correspondent chacune respectivement à une transposition de l'autre : *i.e.*, $\exists b \in \mathbb{Z}_N, \forall 0 \leq j < N, n'_j \equiv_N T_b(n_j) \equiv_N n_j + b$.

On remarquera que

- pour N pair, on a $n_{N-1} \equiv_N n_0 + \frac{N}{2}$
- pour N impair, on a $n_{N-1} \equiv_N n_0$

Il existe, pour $N = 12$, 3856 suites d'intervalles différentes correspondant à des STI.

3.2 Symétries sur les STI

Une STI étant associée à une séquence de classes de hauteurs, on peut lui appliquer des transformations du type de celles décrites dans le paragraphe 1.3 du chapitre 3. On présente ici l'application de quatre opérations sur les STI, qui permettent d'obtenir de nouvelles STI [Morris 1974].

3.2.1 Symétries

Transposée. L'application de l'opération de transposition T_b (présentée chapitre 3) sur une STI produit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ telle que

$$n'_j \equiv_N T_b(n_j) \equiv_N n_j + b$$

On montre facilement que la suite d'intervalles correspondante vérifie

$$i'_j \equiv_N i_j$$

On peut donc construire, à partir d'une STI, $N-1$ nouvelles STI qui partageront la même suite d'intervalles.

Homothétie. L'application de la multiplication H_p (présentée chapitre 3) sur une STI produit une nouvelle série $n'_0 \dots n'_{N-1}$ telle que

$$n'_j \equiv_N H_p(n_j) \equiv_N p n_j \quad \text{pour } p \text{ premier avec } N$$

On montre facilement que la suite d'intervalles correspondante vérifie

$$i'_j \equiv_N H_p(i_j) \equiv_N p i_j$$

Dans le cadre des STI, le paramètre p doit être choisi tel que les n'_j (resp. les i'_j) soient tous différents. C'est le cas lorsque p est premier avec N . Les H_p sont alors des automorphismes⁵ de \mathbb{Z}_N . A partir d'une STI, on peut construire $\varphi(N) - 1$ nouvelles suites d'intervalles, $\varphi(N)$ étant l'indicatrice d'Euler *i.e.*, le nombre d'entiers positifs inférieurs à N et premiers avec N .

Renversement. Le *renversement* (ou *rétrogradation*) R d'une STI produit la nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ telle que

$$n'_j \equiv_N n_{N-1-j}$$

On montre que la suite d'intervalles correspondante vérifie

$$\begin{aligned} i'_j &\equiv_N n'_j - n'_{j-1} \\ &\equiv_N n_{N-1-j} - n_{N-1-(j-1)} \\ &\equiv_N -(n_{N-j} - n_{N-j-1}) \\ &\equiv_N -i_{N-j} \end{aligned}$$

Contrairement aux homothéties dont l'équivalence avec les automorphismes garantit que les $\varphi(N)$ suites d'intervalles sont toutes différentes, il se peut qu'un renversement produise la même suite d'intervalles que celle de la STI initiale. La *Suite Lyrique* de A. Berg illustre cette propriété. Elle correspond à la suite d'entiers

5 4 0 9 7 2 8 1 3 6 10 11

qui est associée à la suite d'intervalles

11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1

Cette suite devient après renversement R

11 10 6 4 1 8 2 7 9 0 4 5

5. *i.e.*, un isomorphisme de \mathbb{Z}_N dans lui-même

qui correspondant à la même suite d'intervalles.

Décalage. On appelle *décalage*, l'application Q qui produit la nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ telle que, si $i_\omega = N/2$:

$$n'_j \equiv_N n_{j+\omega \bmod N}$$

On montre que la suite d'intervalles associée vérifie

$$i'_j \equiv_N n'_j - n'_{j-1}$$

$$\equiv_N n_{j+\omega \bmod N} - n_{j+\omega-1 \bmod N}$$

$$\equiv_N i_{j+\omega \bmod N}$$

en posant que $i_0 = i_N = N/2$. Le décalage produit toujours une nouvelle STI.

3.2.2 Algèbre des symétries

Voici quelques propriétés des symétries sur les STI :

- $T_b \circ T_{b'} = T_{b''}$ avec $b'' \equiv_N b + b'$. Cette relation découle de la transitivité de la transposition.
- $H_p \circ H_{p'} = H_{p''}$ avec $p'' \equiv_N pp'$ et $\gcd(p'', N) = 1$ (la composition de deux automorphismes est un automorphisme). Cette propriété découle de la transitivité de l'homothétie.
- $R^2 = Id$. Le renversement R est une opération involutive.
- $Q^2 = Id$. Le décalage Q est une opération involutive.
- $H_p \circ T_b = T_{pb} \circ H_p$
- $R \circ T_b = T_b \circ R$. La composition d'une transposition et d'un renversement est commutative.
- $H_p \circ R = R \circ H_p$. La composition d'une homothétie et d'un renversement est commutative.
- $Q \circ H_p = H_p \circ Q$ car $p \frac{N}{2} \equiv_N \frac{N}{2}$. La composition d'une homothétie et d'un décalage est commutative.
- $Q \circ T_b = T_b \circ Q$. La composition d'une transposition et d'un décalage est commutative.
- $R \circ Q = Q \circ R$. La composition d'un renversement et d'un décalage est commutative.

Ces règles permettent de traduire toutes compositions de transformations de série en $T_b \circ R^\varepsilon \circ Q^{\varepsilon'} \circ H_p$, où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$. Si on ne considère pas les décalages et les transpositions, les transformations possibles de STI sont $\{H_p | \gcd(p, N) = 1\} \cup \{R \circ H_p | \gcd(p, N) = 1\}$ ⁶. Cet ensemble contient $2\varphi(N)$ transformations qui génèrent soit $2\varphi(N) - 1$, soit $\varphi(N) - 1$ séries d'intervalles différentes⁷. Le deuxième cas apparaît lorsque le renversement est inutile, c'est-à-dire s'il existe p, p' et b tels que :

6. $\gcd(a, b)$ désigne le plus grand commun diviseur des entiers naturels a et b , soit le plus grand entier qui divise simultanément ces deux entiers. Le terme vient de l'acronyme anglais *greatest common divisor*.

7. Comme définit dans le paragraphe 3.2.1, la fonction $\varphi(N)$ correspond à l'indicatrice d'Euler *i.e.*, le nombre d'entiers positifs inférieurs à N et premiers avec N .

$$(\mathbf{R} \circ \mathbf{H}_p)(n_0 \dots n_{N-1}) = (\mathbf{T}_b \circ \mathbf{H}_{p'}) (n_0 \dots n_{N-1})$$

En multipliant à droite et à gauche par p'^{-1} , on obtient la condition équivalente :

$$(\mathbf{T}_{-b} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{H}_p)(n_0 \dots n_{N-1}) = (n_0 \dots n_{N-1})$$

En traduisant cette condition sur chaque note de la série, on obtient :

$$n_j \equiv_N p n_{N-1-j} - b$$

On en déduit la valeur suivante pour b :

$$b \equiv_N p n_{N-1} - n_0 \equiv_N n_0 - n_0 + \sum_{k=1}^{N-1} p i_k$$

Or la multiplication par p est un automorphisme et donc la somme se fait sur tous les entiers de 1 à $N - 1$. Ainsi, $b \equiv_N \frac{(N-1)N}{2}$. Cette valeur a la propriété notable d'être indépendante de la série et des autres paramètres.

Pour les intervalles, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} i_j &\equiv_N n_j - n_{j-1} \\ &\equiv_N p n_{N-1-j} - b - p n_{N-1-j+1} + b \\ &\equiv_N -p(n_{N-j} - n_{N-j-1}) \\ &\equiv_N -p i_{N-j} \end{aligned}$$

Exemple avec la *Suite lyrique*. On reprend la série de A. Berg présentée plus haut. Pour rappel, elle correspond à la suite de classes de hauteurs 5 4 0 9 7 2 8 1 3 6 10 11 et est associée à la suite d'intervalles 11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1. On vérifie facilement que l'opération $\mathbf{T}_{-6} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{H}_1$ correspond à l'identité et conserve donc le contenu intervallique. On s'attend donc à observer une redondance dans les séries symétriques. Après application des différentes symétries on obtient les suites d'intervalles suivantes.

– Sans renversement :

\mathbf{H}_1	11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1
\mathbf{H}_5	7 4 9 2 11 6 1 10 3 8 5
\mathbf{H}_7	5 8 3 10 1 6 11 2 9 4 7
\mathbf{H}_{11}	1 4 3 2 5 6 7 10 9 8 11

– Avec renversement :

$R \circ H_1$	11 8 9 10 7 6 5 2 3 4 1
$R \circ H_5$	7 4 9 2 11 6 1 10 3 8 5
$R \circ H_7$	5 8 3 10 1 6 11 2 9 4 7
$R \circ H_{11}$	1 4 3 2 5 6 7 10 9 8 11

Le renversement n'apporte pas de solution supplémentaire. Il n'y a que $\varphi(12) = 4$ suites d'intervalles équivalentes par symétrie (et non $2\varphi(12) = 8$).

3.3 Caractérisation topologique des STI

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons défini les STI comme des chemins spécifiques dans un espace topologique particulier consistant en un graphe complet des 12 classes de hauteur (les arcs représentant les intervalles entre toutes les paires de classes de hauteur) auquel ont été ajoutées les 11 *surfaces intervalliques*, c'est-à-dire des 2-cellules représentant les classes d'intervalle (hormis l'unisson) et dont le bord est constitué par les arcs correspondants aux instances de cette classe d'intervalle. Ainsi, l'arc reliant les classes de hauteur C et G faisait partie du bord de la quinte (de C vers G) et de la quarte (de G vers C).

Une propriété de certaines de ces 2-cellules (celles représentant des classes d'intervalles non-premiers avec 12) est de posséder plusieurs bords, et donc des trous. Par exemple, la tierce majeure est bordée par les 4 cycles $(C - E - G\sharp)$, $(C\sharp - F - A)$, $(D - F\sharp - A\sharp)$ et $(D\sharp - G - B)$. Cette 2-cellule peut se représenter par une surface triangulaire possédant 3 trous. Bien que de telles constructions soient autorisées dans les complexes cellulaires abstraits [Guntram 2000] ou encore dans le contexte des algèbres d'incidence, elles ne sont pas conformes du point de vue de la topologie algébrique (qui impose que chaque cellule de dimension n soit homéomorphe à la boule $\mathcal{B}_n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\|^2 \leq 1\}$, et de bord homéomorphe à la sphère $\mathcal{S}_n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\|^2 = 1\}$).

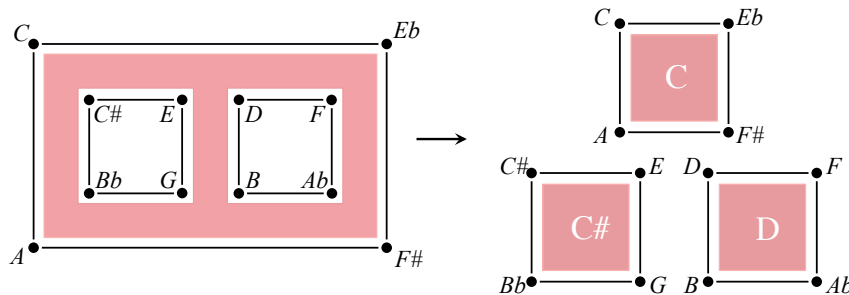


FIGURE 6 – La classe d'intervalle de tierce mineure, représentée par trois 2-cellules non connectées.

Plutôt que de considérer tous les bords simultanément, on peut les interpréter comme des alternatives. Ainsi, si on reprend l'exemple de la tierce majeure, on n'aura plus 4 cycles formant le bord, mais 4 possibilités de bords différents. Pour l'intervalle de tierce mineure, on passe d'une 2-cellule comprenant deux trous à trois 2-cellules distinctes (figure 6). En choisissant pour chaque intervalle un de ces bords possibles, on construit un complexe cellulaire bien formé du point de vue de la topologie algébrique. Les intervalles présents dans

une STI fixant le choix du bord, chaque STI appartient à un seul complexe. L'ensemble des complexes permet donc une classification des STI.

3.3.1 Construction des complexes

Soit un intervalle $i \in [1..N - 1]$. L'entier $d_i = \text{gcd}(i, N)$ représente le nombre de bords possibles de l'intervalle i . En effet, il existe deux entiers x_N et x_i tels que :

$$\begin{aligned} N &= x_N d_i \\ i &= x_i d_i \\ x_i &< x_N \\ \text{gcd}(x_i, x_N) &= 1 \end{aligned}$$

Les cycles possibles sont :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 + i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 + (x_N - 1)i \\ 1 & \longrightarrow & 1 + i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 1 + (x_N - 1)i \\ \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\ (d_i - 1) & \longrightarrow & (d_i - 1) + i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (d_i - 1) + (x_N - 1)i \end{array}$$

Cela nous permet de générer pour l'intervalle i un tableau de exactement N notes (il n'y a pas de doublon car x_i et x_N sont premiers entre eux). Les cycles peuvent être identifiés par leur première note (de 0 et $d_i - 1$, qui sont en fait les notes les plus petites des cycles dans \mathbb{Z}_N).

Nous avons donc d_i alternatives de bords pour chaque classe d'intervalle i . Le tableau ci-dessous indique ces nombres pour $N = 12$. Le nombre de complexes possibles est $\prod_{i=1}^{N-1} d_i$ (égal à 3456 pour $N = 12$). Notons qu'un complexe ne comprend pas nécessairement de STI. Un complexe peut en effet inclure 0, 1 ou plusieurs STI.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_i	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1

Tout complexe peut être identifié par une suite de $N - 1$ entiers $c_1 c_2 \dots c_{N-1}$, avec c_i correspondant au cycle choisi pour l'intervalle i (on a donc $0 \leq c_i < d_i$). En particulier, si i et N sont premiers entre eux, on a systématiquement $c_i = 0$ car la classe d'intervalle i ne comprend qu'un seul cycle ($d_i = 1$). On associe la suite des c_i à l'entier id par la bijection suivante :

$$id = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \prod_{j=i+1}^{N-1} d_j$$

3.3.2 Équivalence entre complexes par transposition

Comme évoqué plus haut, l'énumération des STI inclut N fois chaque suite d'intervalles. Il est possible de retrouver toutes les séries d'intervalles une seule fois en procédant

de deux façons différentes :

- en cherchant uniquement les STI commençant par 0,
- en identifiant les complexes à transposition près.

Un complexe C (identifié par la suite $c_1 \dots c_{N-1}$) est équivalent à transposition près à un autre complexe C' (identifié par la suite $c'_1 \dots c'_{N-1}$) si ce dernier peut être obtenu par transposition d'un intervalle $b \in [1..N-1]$. En d'autres termes, on dit que si :

$$c'_1 \dots c'_{N-1} = (c_1 + b \bmod d_1) \dots (c_{N-1} + b \bmod d_{N-1})$$

alors C et C' appartiennent à la *classe de complexes* de $c_1 \dots c_{N-1}$. L'identification des complexes à transposition près permet de réduire le nombre de complexes à explorer à $\frac{\prod_{i=1}^{N-1} d_i}{N}$ (égal à 288 pour $N = 12$).

3.3.3 Recherche de complexes par critères musicaux

Le but de ce paragraphe est d'illustrer par un exemple comment cette approche spatiale permet la recherche de STI comprenant une sous séquence de notes liée à un objet musical particulier. Cette motivation étend la démarche d'André Riotte qui s'est intéressé aux STI comprenant, à la suite les unes des autres, les notes d'une triade particulière ou d'une gamme [Riotte 2006]. Notre démarche consiste à utiliser les propriétés de l'objet musical cible afin de suggérer certains complexes plutôt que d'autres pour la recherche de STI.

Dans notre exemple, l'objet musical cible est la gamme de *Do* mineur harmonique $C D E^b F G A^b B$. (On se place donc dans le cadre chromatique traditionnel où $N = 12$). On propose de rechercher des STI comprenant l'ensemble des classes de hauteurs de cette gamme comme une sous-séquence.



La recherche de complexes requiert de choisir un cycle pour chaque classe d'intervalle. Les entiers 1,5,7 et 11 étant premiers avec 12, les classes d'intervalles associées ne comprennent qu'un unique cycle. Ainsi, les valeurs c_1, c_5, c_7 et c_{11} sont égales à 0.

On peut récapituler les contraintes de cycle que l'on se pose pour chaque classe d'intervalle avec le tableau 1. La première ligne correspond aux 11 intervalles, la seconde au nombre de cycles qui leurs sont associés, et la troisième à l'identifiant du cycle utilisé dans la STI, pour chacun de ces intervalles.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_i	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1
c_i	0	?	?	?	0	?	0	?	?	?	0

TABLE 1 – Cycles d'intervalles employés pour une STI. Lorsqu'un intervalle ne comprend qu'un unique cycle ($d_i = 1$), c_i est forcément égal à 0.

La gamme de *Do* mineur harmonique a pour propriété intéressante de contenir dans ses notes un cycle de tierces mineures ($D F Ab B$) et un cycle de tierces majeures ($Eb G B$). On propose donc de n'effectuer notre recherche que dans les complexes dont les cycles de tierce mineure et de tierce majeure sont respectivement les deux évoqués plus haut (*i.e.*, $c_3 = 2$ et $c_4 = 3$). On propose de choisir $c_2 = 1$ car il s'agit du cycle de seconde majeure qui contient le plus de notes de la gamme. On choisit $c_6 = 5$ car les deux notes F et B constituant ce cycle de triton sont toutes les deux incluses dans la gamme. Comme le montre le tableau 2, il reste encore 3 cycles à déterminer.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_i	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1
c_i	0	1	2	3	0	5	0	?	?	?	0

TABLE 2 – Choix du cycle pour les intervalles de tierce mineure, tierce majeure, et triton.

Parmi les combinaisons possibles de ces 3 cycles, on ne garde que les complexes comprenant des STI (comme évoqué plus haut, un complexe ne comprend pas systématiquement de STI). Il en existe 4 (tableau 3).

3432	0	1	2	3	0	5	0	0	0	0	0	21
3434	0	1	2	3	0	5	0	0	1	0	0	26
3444	0	1	2	3	0	5	0	2	0	0	0	26
3446	0	1	2	3	0	5	0	2	1	0	0	21

TABLE 3 – Les quatre complexes respectant les contraintes de cycle d'intervalles évoquées ci-dessus. La première colonne contient l'identifiant du complexe. Les colonnes suivantes correspondent aux cycles associés à chaque intervalle. La dernière colonne indique le nombre de STI que comprend le complexe.

Nous verrons plus tard que les couples (3432; 3446) et (3434; 3444) sont liés par les symétries que nous avons définies plus haut. Les complexes compris dans la classe de complexes de 3434 sont énumérés dans le tableau 4.

11	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0
2484	0	1	1	1	0	1	0	2	0	0	0	+1
1509	0	0	2	2	0	2	0	3	1	1	0	+2
2236	0	1	0	3	0	3	0	0	2	0	0	+3
679	0	0	1	0	0	4	0	1	0	1	0	+4
3158	0	1	2	1	0	5	0	2	1	0	0	+5
311	0	0	0	2	0	0	0	3	2	1	0	+6
2760	0	1	1	3	0	1	0	0	0	0	0	+7
1209	0	0	2	0	0	2	0	1	1	1	0	+8
1960	0	1	0	1	0	3	0	2	2	0	0	+9
979	0	0	1	2	0	4	0	3	0	1	0	+10
3434	0	1	2	3	0	5	0	0	1	0	0	+11

TABLE 4 – Complexes constituant la classe de complexes à laquelle appartient le complexe 3434. La dernière colonne indique l'addition effectuée sur les cycles d'intervalles pour obtenir les autres complexes de la classe.

Cette classe de complexes contient 26 STI différentes. La figure 7 illustre un exemple intéressant de STI parmi ces solutions où les notes de la gamme de *Do* mineur harmonique se suivent.

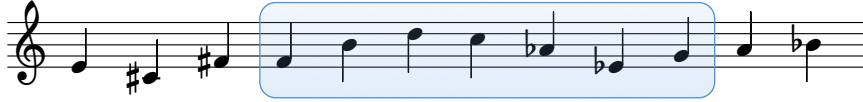


FIGURE 7 – STI comprenant les 7 notes de la gammes de *Do* mineur harmonique à la suite.

3.4 Symétries et classification

L'objectif de cette section est d'observer les effets des symétries sur les classes de complexes que nous venons de présenter.

On commencera par remarquer que pour une STI $n_0 \dots n_{N-1}$ dont la suite d'intervalles est $i_1 \dots i_{N-1}$, on a :

$$c_{i_j} \equiv_{d_{i_j}} n_j \equiv_{d_{i_j}} n_{j-1}$$

3.4.1 Transposition d'une STI

Soit la STI $n_0 \dots n_{N-1}$ associée à la suite d'intervalles $i_1 \dots i_{N-1}$. La transposée T_b construit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ de suite d'intervalles $i'_1 \dots i'_{N-1}$ telle que

$$\begin{cases} n'_j \equiv_N n_j + b \\ i'_j \equiv_N i_j \\ c'_i \equiv_{d_i} c_i + b \end{cases}$$

Concernant le dernier point, on a en effet :

$$d_{i'_j} = \gcd(i'_j, 12) = \gcd(i_j, 12) = d_{i_j}$$

et

$$c'_{i'_j} = n'_j \bmod d_{i'_j}$$

$$= n_j + b \bmod d_{i_j}$$

$$= c_{i_j} + b \bmod d_{i_j}$$

$$= c_{i'_j} + b \bmod d_{i'_j}$$

Cela confirme bien que les STI d'une même classe de complexes sont équivalentes à transposition près.

On peut se demander si l'ensemble des complexes d'une classe sont différents. On cherche donc un b tel que $\forall i \ c_i \equiv_{d_i} c_i + b$, ce qui revient à chercher $b \equiv_{d_i} 0$ pour chaque intervalle (ce qui est indépendant du choix de la classe). Ainsi si $b = \text{lcm}(d_i) < N^8$, on aura $\frac{N}{\text{lcm}(d_i)}$ STI différentes associées à la même suite d'intervalles. Pour $N = 12$ on a $\text{lcm}(d_i) = \text{lcm}(1, 2, 3, 4, 6) = 12$. On a donc 1 seule copie de chaque suite d'intervalles. Pour $N = 8$ en revanche, on a 2 copies de chaque suite d'intervalles car $\text{lcm}(d_i) = \text{lcm}(1, 2, 4) = 4$.

3.4.2 Homothétie d'une STI

Soit la STI $n_0 \dots n_{N-1}$ associée à la suite d'intervalles $i_1 \dots i_{N-1}$. L'homothétie H_p construit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ de suite d'intervalles $i'_1 \dots i'_{N-1}$ telle que

$$\begin{cases} n'_j & \equiv_N \ p n_j \\ i'_j & \equiv_N \ p i_j \\ c'_i & \equiv_{d_i} \ p c_{p^{-1}i} \end{cases}$$

Pour le dernier point, on a en effet :

$$d_{i'_j} = \gcd(i'_j, 12) = \gcd(p i_j, 12) = \gcd(i_j, 12) = d_{i_j}$$

et

$$\begin{aligned} c'_{i'_j} &= n'_j \pmod{d_{i'_j}} \\ &= p n_j \pmod{d_{i_j}} \\ &= p c_{i_j} \pmod{d_{i_j}} \\ &= p c_{p^{-1}i'_j} \pmod{d_{p^{-1}i'_j}} \end{aligned}$$

3.4.3 Renversement d'une STI

Soit la STI $n_0 \dots n_{N-1}$ associée à la suite d'intervalles $i_1 \dots i_{N-1}$. Le renversement R construit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ de suite d'intervalles $i'_1 \dots i'_{N-1}$ telle que

$$\begin{cases} n'_j & \equiv_N \ n_{N-1-j} \\ i'_j & \equiv_N \ -i_{N-j} \\ c'_i & \equiv_{d_i} \ c_{-i} \end{cases}$$

Pour le dernier point, on a en effet :

$$d_{i'_j} = \gcd(-i_{N-j}, 12) = \gcd(i_{N-j}, 12) = d_{i_{N-j}}$$

8. $\text{lcm}(A)$, où A est un ensemble d'entiers naturels, correspond au plus petit commun multiple des éléments de A , c'est à dire le plus petit entier strictement positif qui soit simultanément multiple de tous les éléments de A . L'acronyme *lcm* vient du terme anglais *least common multiple*.

et

$$\begin{aligned}
c'_{i'_j} &= n'_{j-1} \bmod d_{i'_j} \\
&= n_{N-1-j+1} \bmod d_{i_{N-j}} \\
&= c_{i_{N-j}} \bmod d_{i_{N-j}} \\
&= c_{-i'_j} \bmod d_{i'_j}
\end{aligned}$$

3.4.4 Composition des symétries précédentes

Soit la STI $n_0 \dots n_{N-1}$ associée à la suite d'intervalles $i_1 \dots i_{N-1}$. La symétrie $T_b \circ R \circ H_p$ construit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ de suite d'intervalles $i'_1 \dots i'_{N-1}$ telle que

$$\begin{cases} n'_j \equiv_N p n_{N-1-j} + b \\ i'_j \equiv_N -p i_{N-j} \\ c'_{p i} \equiv_{d_i} p c_{-i} + b \end{cases}$$

On obtient ces résultats en composant les précédents.

3.4.5 Décalage d'une STI

Soit la STI $n_0 \dots n_{N-1}$ associée à la suite d'intervalles $i_1 \dots i_{N-1}$. Le décalage Q construit une nouvelle STI $n'_0 \dots n'_{N-1}$ de suite d'intervalles $i'_1 \dots i'_{N-1}$ telle que, en supposant que $i_\omega = \frac{N}{2}$ et en posant $i_0 = i_N = \frac{N}{2}$

$$\begin{cases} n'_j \equiv_N n_{j+w} \\ i'_j \equiv_N i_{j+w} \\ c'_i \equiv_{d_i} \begin{cases} c_i & \text{si } i \neq \frac{N}{2} \\ n_{N-1} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Pour le dernier point, il suffit de voir que tout est conservé sauf la classe d'intervalle $\frac{N}{2}$: au lieu d'être situé entre $n_{\omega-1}$ et n_ω , elle se trouve entre n_{N-1} et n_0 .

Contrairement aux symétries précédentes, le complexe d'arrivée dépend de la série et non uniquement du complexe de départ (à cause du fait que $c_{\frac{N}{2}} = n_{N-1}$).

3.5 Clusters de complexes

On désire connaître le nombre minimum de complexes permettant l'étude de l'ensemble des STI. Il s'agit donc d'étudier les symétries de l'espace des complexes modulo les transformations Q, T_b , R et H_p . Les complexes respectifs de STI équivalentes par ces opérations appartiennent au même cluster de complexes.

3.5.1 Repliage modulo décalage

Afin de ne pas étudier plusieurs fois les mêmes STI (dont les suites d'intervalles sont invariantes par transposition), on se restreint usuellement aux STI commençant par 0. Il est facile d'observer qu'une telle STI appartient à exactement un complexe. Néanmoins, du point de vue des complexes, la note initiale d'une STI n'est pas une information pertinente : cette classification se concentre sur les classes des intervalles et non l'ordre des notes. Notamment, dans un souci de conserver autant que possible l'aspect *structurel* de notre approche, on privilégie une étude de l'ensemble des chemins associés à des STI plutôt que ceux commençant par 0 uniquement.

On peut néanmoins partir du constat suivant. Considérons une STI n_0, \dots, n_{N-1} appartenant au complexe c_1, \dots, c_{N-1} , telle que $n_0 = 0$ (et donc $n_{N-1} = \frac{N}{2}$). Le cycle $c_{\frac{N}{2}}$ ne peut pas être 0. On en déduit qu'aucun complexe de signature $c_1, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}, 0, c_{\frac{N}{2}+1}, \dots, c_{N-1}$ ne contient de STI commençant par 0. En revanche, ces complexes contiennent l'ensemble de toutes STI décalées. En effet,

$$0, \dots, n + \frac{N}{2}, n, \dots, \frac{N}{2} \in c_1, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}, c_{\frac{N}{2}}, c_{\frac{N}{2}+1}, \dots, c_{N-1}$$

est équivalent à :

$$n, \dots, \frac{N}{2}, 0, \dots, n + \frac{N}{2} \in c_1, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}, 0, c_{\frac{N}{2}+1}, \dots, c_{N-1}$$

Il nous suffit donc de regarder les complexes où $c_{\frac{N}{2}}$. A ce stade, nous avons donc $\Gamma = \left(\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} d_i \right)^2$ clusters (contenant chacun $\frac{N}{2}$ complexes), soit 576 pour $N = 12$.

Il reste cependant encore trop de STI dans ces complexes. En effet, les STI de type $n_0, \dots, 0, \frac{N}{2}, \dots, n_0 + \frac{N}{2}$ y sont également présentes. On remarque que cette STI est le renversement et/ou la transposition de $\frac{N}{2}$ d'une STI de type $n_0 + \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, 0, \dots, n_0$, qui appartient également à un complexe pour lequel $c_{\frac{N}{2}} = 0$. Les deux repliages suivants permettent l'étude de ces symétries.

3.5.2 Repliage modulo transposition de $\frac{N}{2}$

Nous nous penchons dans un premier temps sur la transposition de $\frac{N}{2}$. Cette transformation soit scinde l'ensemble des complexes caractérisés par $c_{\frac{N}{2}} = 0$ exactement en 2 parties, soit ne permet pas de replier l'espace.

Soit un tel complexe $c_1, \dots, 0, \dots, c_{N-1}$. L'application de $T_{\frac{N}{2}}$ produit le complexe $c_1 + \frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, c_{N-1} + \frac{N}{2}$. Il est clair que la transposition produit une série de notes différentes mais une série d'intervalles identique. Cependant, on ne sait pas si la nouvelle série appartient au même complexe. On cherche donc à savoir si on a $\forall i \quad c_i \equiv_{d_i} c_i + \frac{N}{2}$.

Cela se produit lorsque $\forall i \quad \frac{N}{2} \equiv 0 \pmod{d_i}$. On remarque que cette propriété n'est pas dépendante du complexe mais uniquement du choix de N . Par exemple, pour $N = 8$ les transposées sont dans le même complexe. Pour $N = 12$, les transposées sont dans un complexe différent. Nous avons déjà vu ce cas auparavant.

3.5.3 Repliage modulo renversement

Il faut maintenant observer comment les complexes se comportent quant à l'opération de renversement R . Le comportement diffère suivant la valeur de N .

Cas de la transposée de $\frac{N}{2}$ inutile. Dans ce cas, si $k = c_1, \dots, 0, \dots, c_{N-1}$, on a $k = T_{\frac{N}{2}}(k)$.

L'étude est simple : on cherche à savoir quels sont les complexes vérifiant $k = R(k)$; pour les autres, l'un des deux complexes suffira pour l'étude. D'après ce que nous avons vu plus haut, on a $R(k) = c_{N-1}, \dots, 0, \dots, c_1$. On aura donc l'égalité pour les complexes de signature palindromique. Il existe $\gamma = \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} d_i$ palindromes (une fois la moitié de la signature choisie, le reste est fixé). On a donc γ clusters de taille $\frac{N}{2}$ et $\frac{\Gamma-\gamma}{2}$ de taille N .

Cas de la transposée de $\frac{N}{2}$ utile. Dans ce cas, si $k = c_1, \dots, 0, \dots, c_{N-1}$, on a $k \neq T_{\frac{N}{2}}(k)$. Pour simplifier les écritures, on pose $k' = T_{\frac{N}{2}}(k)$.

La réduction par la transposée de $\frac{N}{2}$ nous a permis de réduire le nombre de clusters à $\frac{\Gamma}{2}$ (de taille N). Chaque cluster peut être identifié par un couple de complexe $\{k, k'\}$. On étudie donc le comportement du couple $\{k, k'\}$ pour le renversement. Trois cas peuvent se présenter, les deux premiers correspondant à une invariance et le dernier à un repliage :

- $R(k) = k$ (et donc $\{k, k'\} = \{R(k), R(k')\}$) : il s'agit du cas où k (et donc forcément k') est un palindrome. En reprenant le même raisonnement que précédemment, il y a γ complexes palindromiques et donc $\frac{\gamma}{2}$ couples de ce type.
- $R(k) = k'$ (et donc $\{k, k'\} = \{R(k), R(k')\}$) : là encore, une fois la moitié de la signature choisie, le reste est fixé, il s'agit d'un palindrome avec transposition $c_1, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}, 0, c_{\frac{N}{2}-1} + \frac{N}{2}, \dots, c_1 + \frac{N}{2}$. Il y a donc également γ possibilité de complexes et donc $\frac{\gamma}{2}$ couples de ce type.
- $\{k, k'\} \neq \{R(k), R(k')\}$: il s'agit du sous-ensemble qu'il est possible de replier. Il reste après repliage $\frac{\Gamma-2\gamma}{4}$.

Pour résumer, on a $\frac{\gamma}{2}$ clusters de taille N (où les renversements sont invariants), $\frac{\gamma}{2}$ clusters de taille N (où renversement et transposition s'identifient) et $\frac{\Gamma-2\gamma}{4}$ clusters de taille $2N$. Pour $N = 12$, on obtient un total de 156 clusters.

3.5.4 Repliage modulo homothétie

L'étude est ici plus compliqué. Il est difficile de donner ici un résultat général. On peut tout de même faire les calculs de façon brutale et cela nous ramène à 72 clusters. Cependant il est difficile d'en regarder la forme.

4 Complexes d'intervalles généralisés

Les complexes cellulaires présentés dans le paragraphe 2.3 permettent la représentation de l'ensemble des instances d'une classe d'intervalle. On appelle ici ensemble des instances d'une classe d'intervalle un ensemble d'intervalles entre deux hauteurs, équivalents à transposition près. Un intervalle pouvant être défini par un ensemble de deux hauteurs, on peut généraliser notre approche à des ensembles de n hauteurs. De la même manière qu'on représente une classe d'intervalle par une 2-cellule, on représente une classe d'accords à n sons par une n -cellule. Le bord de cette n -cellule est constitué par l'ensemble des instances de cette classe d'accords. Chaque accord constituant le bord de cette cellule est représenté par une $(n - 1)$ -cellule. Les ensembles de deux notes, constituant les bords des surfaces intervalliques présentées plus haut, sont des 1-cellule, c'est-à-dire des arcs. Les accords à trois sons sont représentés par des 2-cellules, c'est-à-dire des triangles. Le *Tonnetz* présenté dans le chapitre 2 correspond au bord d'une 3-cellule de forme toroïdale représentant la classe des accords majeurs et mineurs. Nous reviendrons sur cette propriété dans le chapitre suivant, qui propose de généraliser cette représentation à différentes classes d'accords, constituées d'accords de différentes tailles.

Cette généralisation suggère naturellement d'étendre notre approche par rapport aux séries tous intervalles à des espaces plus variés, pour la construction de séries de différents types. La contrainte d'Hamiltonicité, généralisée à n'importe quelle dimension, aboutit à des résultats dépendant de la définition de l'espace sur lequel elle est imposée. Par exemple, la recherche de $\langle 2, 1 \rangle$ -chemins Hamiltoniens dans le *Tonnetz* permet de constituer des séquences d'accords comprenant exactement une fois chaque accord mineur et chaque accord majeur, tout en respectant le fait que deux accords successifs partagent deux notes en commun [Albini 2009]. L'auto-assemblage des complexes représentant les différentes classes d'accord à 3 sons aboutit à un espace dans lequel un $\langle 2, 1 \rangle$ -chemin, induisant un $\langle 2, 3 \rangle$ -chemin Eulérien, permet de constituer une séquence d'accords à trois sons, dans laquelle deux accords successifs partagent deux notes, et dans laquelle chaque classe d'accords est instanciée exactement une fois.

Cette généralisation sur la construction de l'espace des STI constitue une perspective importante de ce travail.

Complexes d'accords

1	Représentation simpliciale d'un ensemble d'accords	75
2	Point de vue spatial sur les classes d'accords	78
3	Séquences temporelles d'accords	92
4	Complexité de spécification des espaces d'accords	100

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier des espaces d'accords, d'un point de vue théorique puis dans un cadre analytique. Pour cela, nous choisissons de représenter les espaces d'accords sous la forme de complexes simpliciaux. La première approche consiste à étudier des espaces d'accords construits à l'aide de relations d'équivalence entre accords. Puis, nous étudions et comparons des espaces construits directement à partir de pièces musicales choisies.

1 Représentation simpliciale d'un ensemble d'accords

Dans cette première partie du chapitre, nous nous intéressons à la représentation spatiale des accords et des ensembles d'accords.

1.1 Complexes et accords

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, le cadre de la *Set Theory* formalise les accords par des ensembles de classes de hauteurs. L'un des avantages de cette représentation réside dans le fait qu'un sous-ensemble d'un accord correspond à un sous-accord qu'il contient. Par exemple, dans l'étude d'une progression harmonique, il est parfois intéressant d'observer un accord complexe à 5 ou 6 notes comme une combinaison de triades.

Il nous semble important de conserver cette propriété dans la représentation des accords par un complexe cellulaire. La structure d'un d -simplexe (voir chapitre 3, section 2.2) s'impose donc d'elle-même pour être associée à un accord de $d + 1$ notes ; chaque p -cellule, $p \leq d$, correspond à un sous-accord à $p + 1$ notes. La relation d'incidence reflète le treillis d'inclusion entre ses sous-accords.

Soit un accord C vu comme l'ensemble de $d + 1$ classes de hauteurs $\{n_0, \dots, n_d\}$ prises dans \mathbb{Z}_N (on se place dans le cadre d'une division de l'octave en N parties). L'accord C est représenté par la collection simpliciale A définie par :

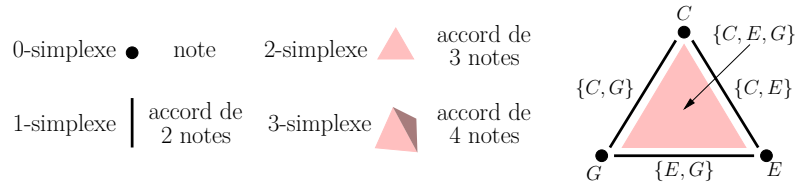


FIGURE 1 – Représentation d'un accord par un simplexe décoré. La collection de droite correspond à l'accord de C majeur $\{C, E, G\}$ ainsi que l'ensemble des notes et accords à deux sons qui y sont inclus.

- $|A|$ est un simplexe de dimension d ,
- chaque 0-cellule σ de $|A|$ est décorée de façon unique par l'une des classes de hauteurs

$$\exists! i \quad A(\sigma) = n_i,$$

- chaque p -cellule σ de $|A|$ (avec $0 < p \leq d$) est décorée par

$$A(\sigma) = \{ A(\tau) \mid \tau \prec \sigma \wedge \dim(\tau) = 0 \}.$$

La figure 1 illustre cette construction pour un accord à 3 sons. On peut montrer facilement que A est une collection minimale. En d'autres termes, pour tout sous-accord C' de C , il existe une unique cellule $\sigma \in A$ décorée par C' . De plus, la sous-collection de support $\bar{\sigma}$ est un simplexe représentant l'accord C' . On notera que $\dim(\sigma) = \text{Card}(C') - 1$. Chaque arc de $|A|$ représente exactement un élément du contenu intervallique de C . De manière plus générale, les p -cellules de $|A|$ sont en bijection avec l'ensemble de ses sous-accord de taille $p+1$, et donc avec les éléments de son $(p+1)$ -vecteur¹. Par exemple, les faces triangulaires de A représentent respectivement les éléments du 3-vecteur de A . Pour un accord C donné, on notera la collection associée $\mathcal{S}(C)$.

Un *complexe d'accords* est défini comme une collection simpliciale telle que chaque sous-collection dont le support est un simplexe représente un accord. Ainsi, pour tout complexe d'accords \mathcal{K} , on a :

- $\forall \sigma \in |\mathcal{K}|$, le sous-complexe d'accords de support $\bar{\sigma}$ est isomorphe² à la collection $\mathcal{S}(\mathcal{K}(\sigma))$,
- $\forall \sigma, \sigma' \in |\mathcal{K}|, \sigma \prec \sigma' \Rightarrow \mathcal{K}(\sigma) \subseteq \mathcal{K}(\sigma')$.

Il est important de noter que bien que pour chaque accord représenté dans le complexe d'accords la sous-collection correspondante est minimale, le complexe d'accords dans sa globalité n'est pas forcément minimal.

Les deux sections suivantes présentent chacune une méthode pour construire des complexes d'accords. La première méthode classique génère un complexe d'accords régulier potentiellement infini. La seconde utilise un calcul fondé sur un processus d'auto-assemblage pour réaliser un complexe d'accords minimal à partir d'une population d'accords.

1. Cette illustration spatiale du k -vecteur avait déjà été utilisée par David Lewin [Lewin 1987](p.110).

2. On rappelle que l'isomorphisme de collections est défini chapitre 3, section 2.4.

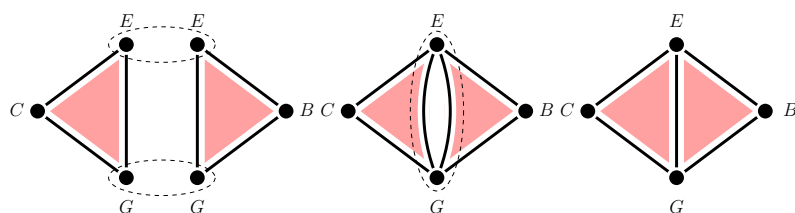


FIGURE 2 – Processus d'auto-assemblage appliqué à un ensemble constitué des accords de C majeur $\{C, E, G\}$ et E mineur $\{E, G, B\}$.

1.2 Construction de complexes à l'aide d'un groupe d'intervalles

Cette méthode de représentation, directement inspirée du *Tonnetz* présenté dans le chapitre 2, consiste à attribuer un intervalle à certaines directions dans un espace euclidien puis à plonger des accords dans cet espace, sous la forme de simplexes dont les arcs (*i.e.*, les intervalles) reposent sur ces différents axes. En général, ces complexes ne sont pas minimaux dans la mesure où chaque accord contenu est représenté une infinité de fois et à fréquence régulière le long des axes associés à son contenu intervallique. Cependant, ils peuvent être repliés sur eux-mêmes jusqu'à obtenir un complexe minimal fini (le nombre de décoration possibles pour les sommets (*i.e.*, des classes de hauteurs) est fini). On les qualifiera dans la suite de *complexes dépliés*. Nous reviendrons sur ces espaces, et plus particulièrement sur la structure de leurs 1-squelettes, un peu plus loin dans le chapitre.

1.3 Construction de complexes par auto-assemblage

Cette seconde méthode de construction utilise le processus d'auto-assemblage présenté chapitre 3, section 3.3.2. Partant d'une population de simplexes représentant chacun un accord, ce processus permet de fusionner les cellules topologiques présentant des décorations identiques. Une fois le processus parvenu au point fixe, la structure résultante est un complexe simplicial représentant l'ensemble des accords et la manière dont ils s'intersectent. La figure 2 illustre ce procédé sur un ensemble constitué de 2 accords.

Le processus d'auto-assemblage assure la construction de complexes d'accords minimaux finis. En effet, à l'issue du calcul, deux cellules topologiques décorées par le même ensemble de classes de hauteurs dans la population initiale ont forcément fusionné. Cette propriété permet notamment d'affirmer qu'en se plaçant dans un système à N divisions de l'octave, il n'existe qu'un nombre fini de complexes d'accords minimaux possibles. Cet ensemble inclut en particulier le complexe vide, noté \mathcal{K}_\emptyset , ainsi que le complexe complet correspondant au $(N - 1)$ -simplexe $\mathcal{S}(\{0, \dots, N - 1\})$. Ces complexes d'accords sont les complexes minimaux de ceux construits dans le paragraphe 1.3.

2 Point de vue spatial sur les classes d'accords

Dans cette section, nous nous intéressons à des complexes d'accords construits à partir des catalogues d'accords couramment utilisés en théorie musicale. Ces catalogues reposent sur les classes d'équivalence associées aux transformations d'accords présentées chapitre 3 (comme par exemple la transposition ou l'inversion). Ces complexes sont classés et organisés en fonction de leurs caractéristiques topologiques ou des propriétés musicales partagées par les accords qui les constituent.

2.1 Différents catalogues d'accords

Une classification d'accords consiste à partitionner un ensemble d'accords en plusieurs sous-ensembles, à l'aide de relations d'équivalence. Une relation d'équivalence représente une propriété partagée par les notes des accords, leurs structures intervalliques ou encore leurs contenus intervalliques. Ces relations ont parfois la particularité de pouvoir être exprimées comme des actions de groupe sur le groupe cyclique \mathbb{Z}_N [Andreatta 2003].

Les catalogues qui sont présentés dans la suite sont constitués de complexes construits à partir d'accords ramenés à des sous-ensembles de \mathbb{Z}_N . Pour une division de l'octave en N parties, on dénombre $\binom{n}{N}$ accords de taille n . Par exemple, il existe 220 accords de taille 3 dans le système chromatique (*i.e.*, 3 notes parmi $N = 12$). Bien que notre étude soit généralisée à toute division de l'octave, nous illustrerons de manière privilégiée les actions de groupe sur les groupes cycliques \mathbb{Z}_{12} et \mathbb{Z}_7 qui peuvent respectivement être associés à l'échelle chromatique et aux échelles heptatoniques (incluant l'échelle diatonique caractérisant les tonalités majeure et mineure mélodique) majoritairement utilisées dans le cadre de la musique traditionnelle occidentale.

2.1.1 Accords équivalents par transposition

La transposition musicale est couramment interprétée en théorie de la musique comme une action du groupe cyclique sur lui-même. À partir des années 1960, I. Xenakis déclare [Xenakis 1965] :

On peut affirmer qu'avec les vingt-cinq siècles d'évolution musicale, on aboutit à une formulation universelle en ce qui concerne la perception des hauteurs, qui est la suivante : l'ensemble des intervalles mélodiques est muni d'une structure de groupe avec comme loi de composition l'addition.

L'énumération des classes des transpositions d'accords est équivalente à l'étude des orbites des parties de \mathbb{Z}_N (les accords) sous l'action de \mathbb{Z}_N (les intervalles). Dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) ces orbites sont au nombre de 352 (en incluant l'ensemble vide) [Andreatta 2003]. Les 352 classes correspondantes constituent le catalogue d'accords établie à une transposition près. On retrouve ce catalogue, dont les aspects mathématiques ont été étudiés indépendamment par le Polonais Maciej Zalewski [Zalewski 1972] et par le Roumain Anatol Vieru [Vieru 1980], chez plusieurs théoriciens de la musique tels que E. Costère [Costère 1954].

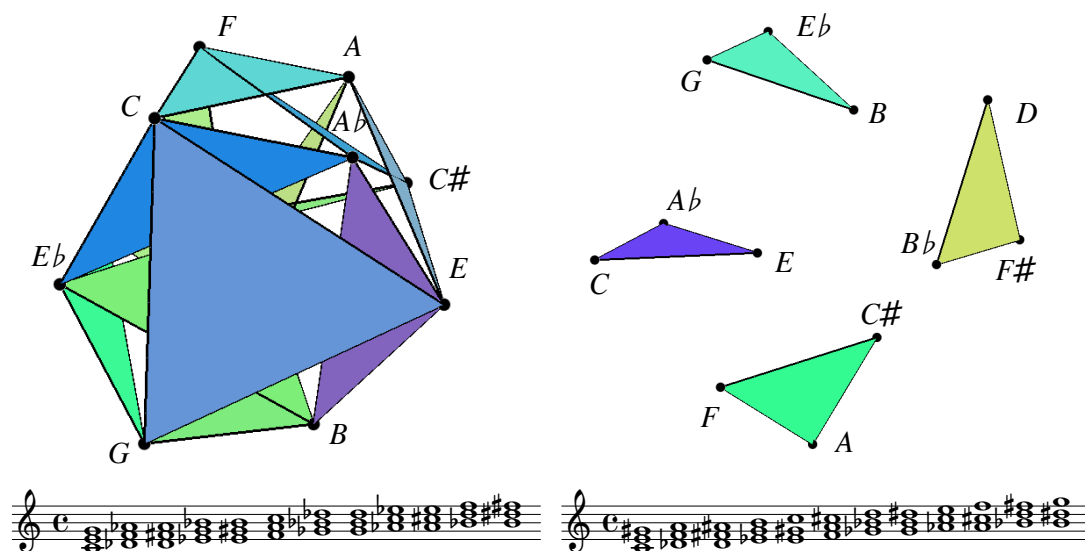


FIGURE 3 – A gauche le complexe simplicial $\mathcal{K}_T[4, 3, 5]$ résultant de l'auto-assemblage des 12 accords majeurs. A droite, le complexe $\mathcal{K}_T[4, 4, 4]$ des 12 accords augmentés.

L'ensemble des 12 accords majeurs constitue un exemple de classe d'accords équivalents à transposition près. En effet, en faisant agir \mathbb{Z}_{12} sur un des accords majeurs, par exemple C majeur, on obtient les 11 autres accords majeurs. Cela revient à effectuer les 12 rotations possibles de l'accord majeur dans le cercle chromatique. La classe d'équivalence est donc, dans le cas de la transposition, caractérisée par une structure intervallique : deux accords sont équivalents par transposition s'ils ont la même structure intervallique. Ainsi les accords majeurs étant les seuls à partager la structure intervallique $[4, 3, 5]$, constituent bien une classe d'équivalence. Pour cette raison, on propose de noter un complexe d'accords équivalents à transposition près $\mathcal{K}_T[X]$ où X est la structure intervallique partagée par les accords.

L'énumération des 352 complexes résultant de l'assemblage d'accords équivalents par transposition dans le système chromatique, est présentée en annexe A1.1. Les complexes sont énumérés par dimension croissante (*i.e.*, par taille croissante des accords). Les complexes comprenant moins de 12 accords de taille maximale (3ème colonne) correspondent aux modes à transposition limitées évoqués dans le chapitre 3, paragraphe 1.2. On les repère facilement car leur structure intervallique contient au moins une périodicité. Le premier nombre de Betti b_0 indique le nombre de composantes non connexes constituant le complexe. De manière générale, dans une approche de classification modulo transposition, le complexe comprend plusieurs composantes si aucun des intervalles du contenu intervallique associé n'est premier avec N .

La figure 3 illustre le complexe $\mathcal{K}_T[4, 3, 5]$ associé à l'ensemble des accords majeurs, et le complexe $\mathcal{K}_T[4, 4, 4]$ constitué par les accords augmentés. Ces complexes sont de dimension 2 puisqu'ils sont constitués d'accords à 3 notes. L'accord majeur exhibant une quarte (*i.e.*, 5 demi-tons) dans son contenu intervallique, le complexe ne comprend qu'une seule composante connexe (5 et 12 étant premiers entre eux). Ce n'est pas le cas pour

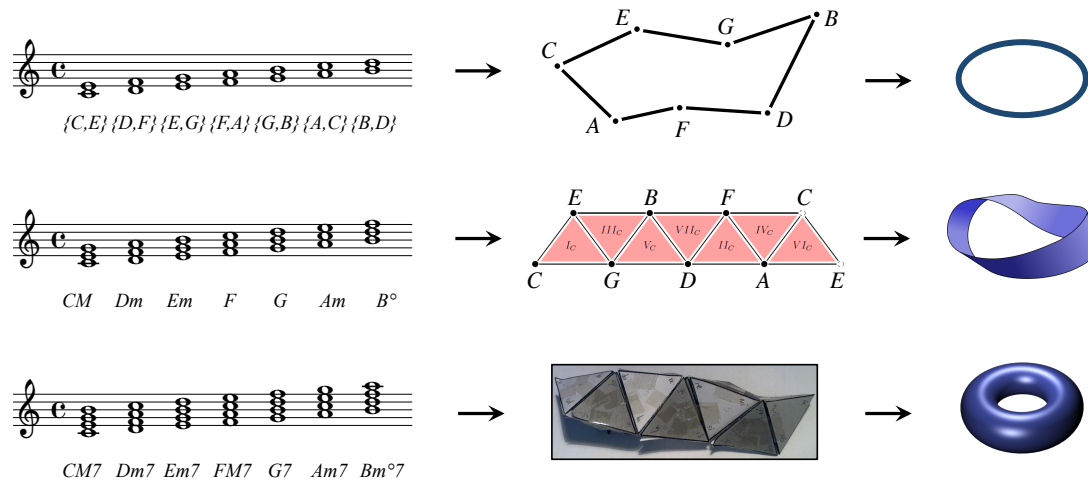


FIGURE 4 – Construction des complexes $\mathcal{K}_T[2, 5]$, $\mathcal{K}_T[2, 2, 3]$ et $\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2]$ en assemblant les degrés de la tonalité de C majeur [Mazzola 2002].

l'accord augmenté, dont le contenu intervallique ne comprend que des tierces majeures (4 et 12 ne sont pas premiers entre eux). Ainsi, les 12 accords augmentés se réduisent à 4 ensembles de notes distincts sans aucune intersection.

L'énumération des classes d'équivalence dans une échelle heptatonique (correspondant à l'action de \mathbb{Z}_7 sur ses sous-ensembles) aboutit à un catalogue de 20 classes d'accords à transposition près. L'annexe A1.2 correspond à l'énumération des complexes associés. Les représentations duales des complexes $\mathcal{K}_T[2, 5]$, $\mathcal{K}_T[2, 2, 3]$ et $\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2]$ (dont les topologies respectives sont celles de cercle, de ruban de Möbius et de tore) sont présentées par G. Mazzola comme des interprétations des gammes majeures et mineures ([Mazzola 2002] p.337). En effet, ces complexes peuvent être obtenus respectivement en assemblant les accords correspondant aux degrés à 2 notes (les tierces), à 3 notes (les triades) et à 4 notes de la gamme diatonique, comme le montre la figure 4. L'unique bord du ruban de Möbius $\mathcal{K}_T[2, 2, 3]$ correspond au cercle des quintes diatoniques, autrement dit au complexe $\mathcal{K}_T[3, 4]$. La surface toroïdale englobant $\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2]$ correspond à $\mathcal{K}_{TT}[1, 2, 4]$ (les complexes du type $\mathcal{K}_{TT}[\cdot]$ sont présentés dans la section suivante). Le 1-squelette³ de ce dernier complexe est un graphe complet (*i.e.*, chaque classe de hauteurs est voisine de toutes les autres). Cette propriété remarquable est discutée et exploitée par J. Hook dans [Hook 2013]. Nous nous y intéresserons également dans le chapitre 6. Les caractéristiques d'Euler (6ème colonne des tableaux en annexe) des complexes catalogués ont bien pour valeur 0 conformément à la définition du ruban de Möbius et du tore. Bien qu'on ne connaisse pas leur topologie précise, on constate que les complexes des degrés à 5 sons ($\mathcal{K}_T[2, 2, 1, 1, 1]$) et à 6 sons ($\mathcal{K}_T[2, 1, 1, 1, 1, 1]$) sont aussi de caractéristique d'Euler nulle. Les degrés à 7 sons, qui comprennent toutes les notes de la gamme diatonique, et qui sont par conséquent isomorphes, forment le complexe $\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ dont la caractéristique d'Euler est 1. En effet, le complexe formé inclut tous les sous-ensembles possibles de notes de la gamme diatonique ; il s'agit donc d'un 6-simplexe. Ce complexe est par définition

3. Le n -squelette d'un complexe est défini chapitre 3.

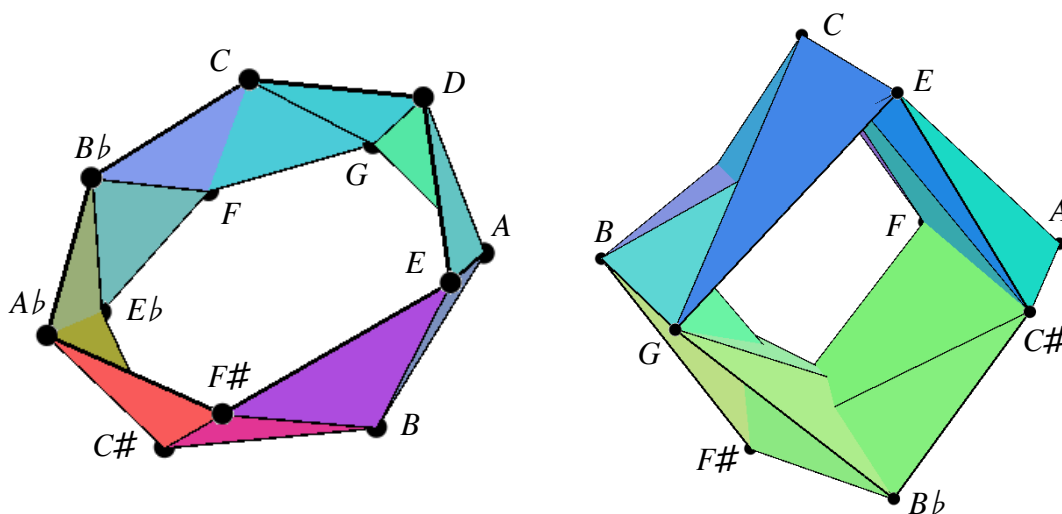


FIGURE 5 – A gauche, le complexe des accords sus4 ($\mathcal{K}_{TI}[2, 5, 5]$), de taille 12. A droite, le complexe des accords majeurs et mineurs ($\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$), de taille 24, dont le 1-squelette correspond au *Tonnetz*. Le premier complexe correspond à un ruban, le second à un tore.

homéomorphe à la boule de dimension n , et donc de caractéristique d'Euler égale à 1.

2.1.2 Accords équivalents par transposition et inversion

L'énumération des classes d'accords équivalents par transposition et inversion revient à énumérer les orbites de l'action du groupe diédral \mathbb{D}_N sur les parties de \mathbb{Z}_N . Ce groupe est en effet constitué de N éléments correspondant aux rotations (transpositions) et de N éléments correspondant aux réflexions (inversions).

L'ajout de l'inversion dans la relation d'équivalence associée au catalogue précédent a pour conséquence de réduire le nombre de classes d'accords dans le système chromatique de 352 à 224. Ces 224 classes d'accords sont plus connues sous le nom de *Classes de Forte* et constituent le catalogue d'Allen Forte [Forte 1973]. Elles sont équivalentes aux 224 orbites de l'action de \mathbb{D}_{12} sur \mathbb{Z}_{12} . Les classes d'équivalence par transposition et inversion peuvent être identifiées par une structure intervallique à réflexion près. Pour cette raison, on note $\mathcal{K}_{TI}[X]$ le complexe des accords partageant la structure intervallique X à réflexion près.

Une conséquence notable de cette propriété est l'équivalence de l'accord majeur et de l'accord mineur. Ainsi, le complexe $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ des accords mineurs et majeurs correspond à l'union des complexes $\mathcal{K}_T[4, 3, 5]$ et $\mathcal{K}_T[3, 4, 5]$. Les 224 complexes associés à ce catalogue sont énumérés en annexe 2.1.

La topologie des complexes d'accords de taille 3 dans le système chromatique (de $\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 10]$ à $\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$) a été étudiée de manière exhaustive par Michael J. Catanzaro [Catanzaro 2011]. Parmi ces complexes, on retrouve $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$, cité précédemment, dont le 1-squelette correspond au *Tonnetz*. La figure 5 représente ce complexe à droite. Le complexe $\mathcal{K}_{TI}[2, 5, 5]$ résultant de l'assemblage des accords sus4 est illustré à gauche.

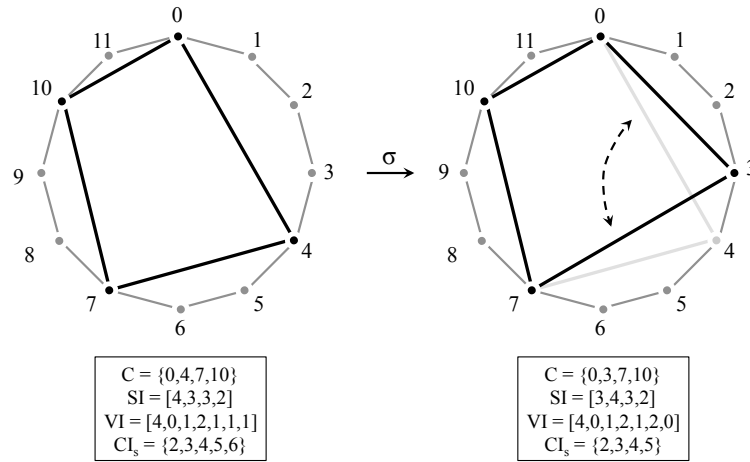


FIGURE 6 – Une permutation d’intervalles dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) au sein de l’accord de C septième. La permutation d’intervalles entraîne généralement une modification du contenu intervallique de l’accord.

de la figure. Le 1-squelette de $\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 3, 4]$ correspond au *Tonnetz* tridimensionnel étudié dans [Gollin 1998]. L’union des complexes $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ (triades majeures et mineures) et $\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$ (triades augmentées) est un tore, correspondant au *Tonnetz*, dont le volume intérieur est compartimenté en quatre parties respectivement séparées par les quatre 2-simplexes représentant les triades augmentées. Chacun des compartiments est constitué par le volume intérieur d’un octaèdre régulier⁴, comportant huit faces triangulaires constituées de six triades majeures et mineures, et deux triades augmentées. Pour cette raison, le *Tonnetz* peut être vu comme un cercle d’octaèdres obtenu en remplaçant chaque cube du *Cube Dance* [Douthett 1998] présenté dans le chapitre 2 par son octaèdre dual [Tymoczko 2012]. Pour les structures intervalliques stables par inversion (par exemple l’accord augmenté $[4, 4, 4]$), on va retrouver des complexes de taille inférieure ou égale à N identiques à ceux du catalogue des classes de transposition (e.g., $\mathcal{K}_T[4, 4, 4] = \mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$).

Concernant le système diatonique (\mathbb{Z}_7), l’introduction de l’inversion dans la relation d’équivalence réduit le nombre de classes de 20 à 18. Le catalogue correspondant est détaillé dans l’annexe A2.2. Le complexe $\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 4]$ évoqué dans la section précédente est utilisé pour la représentation de *séquences génériques* par J. Hook [Hook 2013] et est désigné sous le terme de *generic Tonnetz* dû au fait que l’échelle heptatonique, contrairement à l’échelle chromatique, peut être associée à différentes combinaisons de classes de hauteurs.

2.1.3 Accords équivalents par permutation d’intervalles

Dans cette classification, deux accords appartiennent à la même classe d’équivalence si leurs structures intervalliques sont équivalentes à permutation près. La figure 6 illustre comment deux accords peuvent être liés par cette relation d’équivalence. On peut remar-

4. L’octaèdre régulier est le polyèdre dual du cube. Il s’obtient à partir d’un cube en remplaçant chaque face par un sommet et en reliant par un arc les sommets correspondant à des faces adjacentes dans le cube. Il correspond à deux pyramides collées par leur base.

quer que la transposition et l'inversion sont des cas particuliers de permutation d'intervalles. En effet, la transposition laisse inchangée la structure intervallique et correspond donc à la permutation identité. De même on remarque que la réflexion d'une séquence constitue une permutation particulière de ses éléments ; on voit facilement qu'une relation d'équivalence incluant la permutation d'intervalles inclut nécessairement l'opération d'inversion. Pour cette raison, on peut affirmer que relation d'équivalence modulo permutation d'intervalles englobe la précédente. Autrement dit, deux accords appartenant à une même classe dans le catalogue précédent appartiennent nécessairement à la même classe dans ce catalogue. On note $\mathcal{K}_{TP}[X]$ le complexe constitué des accords partageant la structure intervallique X défini à permutation près de ses éléments. Le catalogue correspondant peut être obtenu en listant les orbites des partitions de \mathbb{Z}_N sous l'action du groupe symétrique \mathbb{S}_N .

Les classes obtenues ne diffèrent de celles obtenues à l'aide du groupe \mathbb{D}_N qu'à partir des accords de taille 4 (en effet, une permutation dans une séquence de moins de 4 éléments est équivalente à une permutation circulaire sur cette même séquence). Ainsi, pour toute structure intervallique X de taille inférieure à 4, on a $\mathcal{K}_{TI}[X] = \mathcal{K}_{TP}[X]$. Les catalogues de complexes associés, pour le système chromatique et le système diatonique, sont détaillés en annexe 3.1 et 3.2. Chaque classe est identifiée par une structure intervallique définie à permutation près de ses éléments. Les classes d'accords associées aux complexes du catalogue pour le système chromatique correspondent aux 77 « textures » de J. Estrada [Estrada 2011]. Les textures sont en bijection avec les 77 partitions de \mathbb{Z}_{12} .

2.1.4 Accords équivalents par transformation affine

La transformation affine consiste à appliquer à chaque classe de hauteur n d'un accord l'opération $a \times n + b$. La figure 7 illustre cette transformation d'accord avec $a = 5$ et $b = 0$. L'équivalence entre accords par cette transformation conduit à un catalogue de 158 classes d'équivalence dans le système chromatique [Morris 1987, Mazzola 2002]. Les classes d'équivalence peuvent être obtenues en énumérant les orbites de \mathbb{Z}_N sous l'action du groupe affine Aff_N . La figure 7 montre que la multiplication entraîne un changement de la structure intervallique de l'accord. Il n'est donc pas possible d'identifier une classe d'équivalence par une structure intervallique comme dans les catalogues d'accords précédents. Il est d'usage pour ce catalogue d'identifier une classe par un de ses accords sous la forme primaire, c'est-à-dire contenant la classe de hauteurs 0. On note donc ces complexes $\mathcal{K}_M[C]$ ou C est un tel accord.

2.2 T -complexe et dépliage

On désigne par le terme T -complexes les complexes d'accords minimaux \mathcal{K} tel que si un accord A est représenté dans \mathcal{K} , toutes les transpositions de A sont également représentées dans \mathcal{K} . Les complexes d'accords des catalogues $\mathcal{K}_T[\cdot]$, $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ et $\mathcal{K}_{TP}[\cdot]$ étant chacun construit à partir d'une relation d'équivalence conservant la structure intervallique, sont des T -complexes. En revanche, les accords du catalogue $\mathcal{K}_M[\cdot]$ ne sont pas nécessairement des T -complexes.

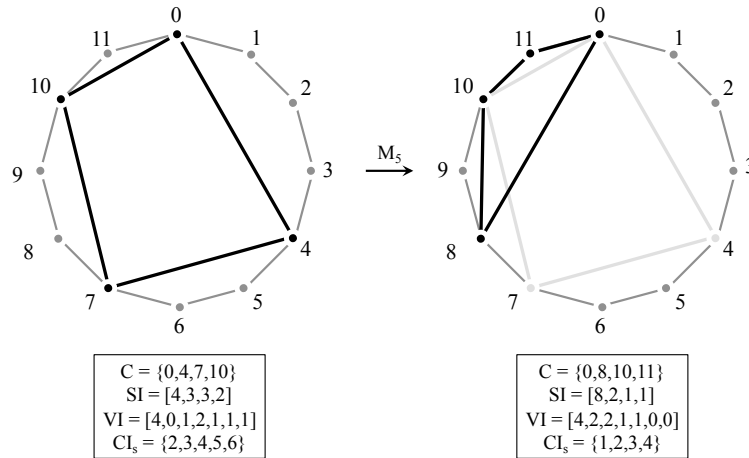


FIGURE 7 – Multiplication par 5 des classes de hauteur dans le système chromatique (\mathbb{Z}_{12}) dans l'accord de *Do* septième. La multiplication ne conserve ni la structure intervallique, ni le contenu intervallique.

Les T -complexes possèdent un 1-squelette régulier auquel on peut attacher une structure de groupe. Ils constituent alors la classe des complexes d'accords minimaux correspondants aux complexes dépliés vus section 1.2.

2.2.1 1-Squelettes et GBF

La transposition agit sur les notes des accords, et par conséquent sur toutes les instances d'intervalles⁵ incluses dans l'accord. Ainsi, dans un T -complexe \mathcal{K} , si un sommet, représentant une classe de hauteurs n , appartient au bord d'un arc représentant une instance de la classe d'intervalles I , alors *chaque* sommet de \mathcal{K} est nécessairement incident à un arc représentant une instance de I . De même, le sommet est également incident à un autre arc associé à la classe d'intervalles $-I$; cette seconde propriété découle directement de la première puisqu'il s'agit de l'arc associé à la classe d'intervalles I pour le sommet représentant la classe de hauteurs $n - I$. Le 1-squelette d'un T -complexe présente donc une structure régulière qui peut être caractérisée par l'ensemble des classes d'intervalles représentées; cet ensemble est lui-même caractérisé par les classes d'intervalles appartenant aux contenus intervalliques des accords qu'il comprend.

Formellement, cette régularité est traduite par l'action du groupe des classes d'intervalles représentées dans le complexe sur l'ensemble des notes. Lorsque le T -complexe ne présente qu'une seule composante connexe (*i.e.*, $b_0 = 1$), son 1-squelette correspond exactement au graphe de Cayley de la présentation du groupe des classes d'intervalles (voir chapitre 3, section 3.1.3). Par exemple, $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5])$ (*i.e.*, le *Tonnetz*) est obtenu en considérant le graphe de Cayley associé à la présentation du groupe abélien des intervalles

5. On rappelle qu'une classe d'intervalles est à une instance d'intervalle ce qu'est une classe de hauteurs à une hauteur. Par exemple, la tierce majeure est un intervalle, $\{C, E\}$ et $\{F, A\}$ en sont deux instances possibles.

de tierces mineure $m3$ et majeure $M3$, et de quarte $P4$:

$$\langle m3, M3, P4 \mid m3 + M3 + P4, 4 \times m3, 3 \times M3, 12 \times P4 \rangle$$

Dans le cas où le 1-squelette n'est pas connexe, chaque composante est une copie du même graphe de Cayley. D'une certaine manière, on peut dire qu'il s'agit de *l'action* du graphe de Cayley associé à la présentation des classes d'intervalles considérée sur l'ensemble des notes. Les collections topologiques de GBF du langage MGS se prêtent bien à une implantation de T -complexes.

Il est intéressant de noter que dans les complexes des catalogues $\mathcal{K}_T[\cdot]$ et $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ les accords partagent le même contenu intervallique. En revanche, les contenus intervalliques des accords d'un complexe de $\mathcal{K}_{TP}[\cdot]$ varient.

2.2.2 Représentations dépliées de T -complexes

Soit \mathcal{K} un T -complexe de dimension d . La minimalité de \mathcal{K} est assurée par la cyclicité du système \mathbb{Z}_N dans lequel on se place. Le dépliage de \mathcal{K} consiste à travailler dans \mathbb{Z} pour relâcher cette contrainte. Par exemple, en reprenant le cas précédent du complexe $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$, cela revient à considérer la présentation du groupe suivante :

$$\langle m3, M3, P4 \mid m3 + M3 + P4 \rangle$$

On obtient la présentation classique d'un graphe de Cayley correspondant à une grille hexagonale infinie.

En généralisant cette opération à toute présentation de classes d'intervalles, on peut associer à tout T -complexe \mathcal{K} un complexe d'accords \mathcal{K}^u défini par la procédure suivante :

1. on construit le graphe de Cayley associé à la présentation des classes d'intervalles en travaillant dans \mathbb{Z} ,
2. on décore par la note C l'un des sommets du graphe choisi arbitrairement,
3. on propage les labels dans l'ensemble du graphe en se déplaçant de proche en proche et en respectant les classes d'intervalles associées à chaque arc par la présentation,
4. on construit enfin pour chaque clique du graphe correspondant à un accord dans \mathcal{K} le simplexe associé.

La figure 8 illustre cette construction avec les complexes $\mathcal{K}_T^u[3, 4, 5]$, $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}^u[2, 3, 3, 4]$ correspondant respectivement aux dépliages de $\mathcal{K}_T[3, 4, 5]$, $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 3, 4]$. On remarquera en particulier que $\mathcal{K}_T^u[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ partagent le même 1-squelette qui correspond au *Tonnetz*. Le 1-squelette du troisième est étudié dans [Gollin 1998].

Les complexes d'accords construits ainsi correspondent exactement aux complexes dépliés de la section 1.2. En conséquence les T -complexes constituent la classe des complexes minimaux associés aux complexes dépliés. La différence majeure entre les complexes \mathcal{K} et \mathcal{K}^u est que dans le premier cas chaque ensemble de classes de hauteurs n'est représenté qu'une unique fois alors que le second les représente à un nombre infini de positions. Un des

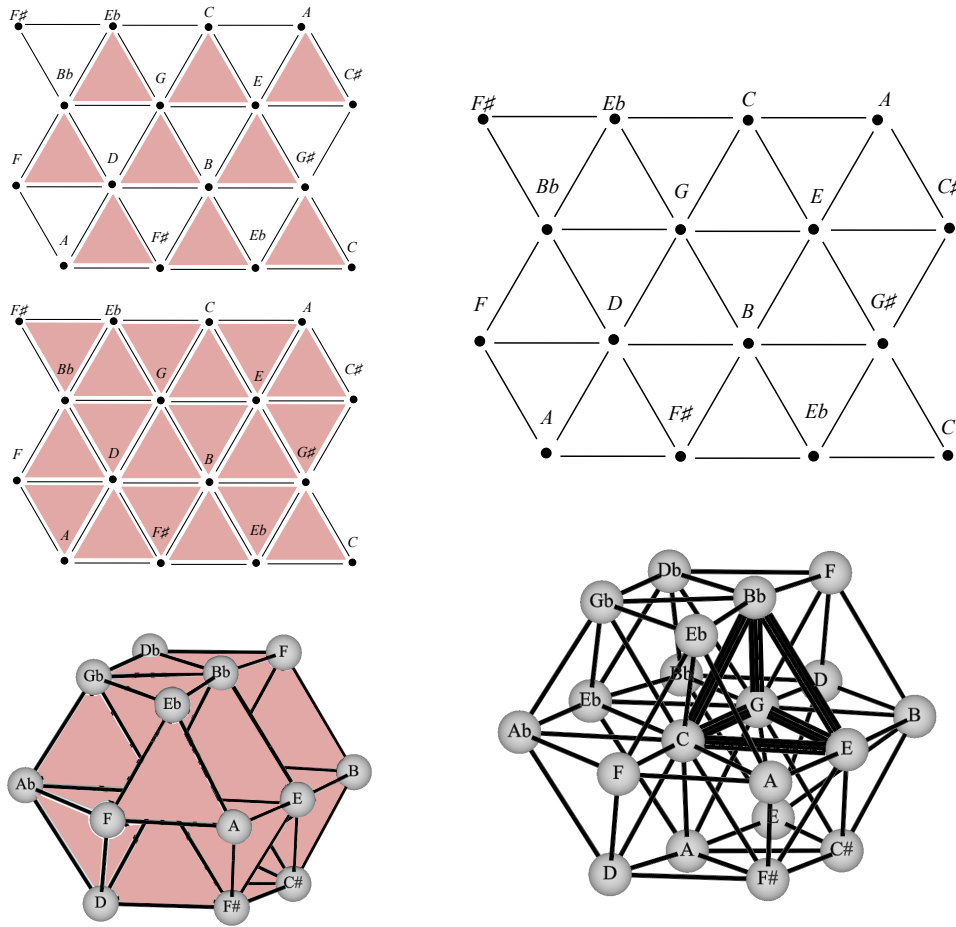


FIGURE 8 – A gauche, de haut en bas, des régions des complexes infinis $\mathcal{K}_T^u[3, 4, 5]$, $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}^u[2, 3, 3, 4]$. A droite les régions correspondantes de leurs 1-squelettes $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_T^u[3, 4, 5]) = \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5])$ équivalent au *Tonnetz* [Cohn 1997] et $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_{TI}^u[2, 3, 3, 4])$ [Gollin 1998].

avantages majeur des complexes dépliés est de permettre un plongement dans un espace euclidien (en suivant l'idée présentée section 1.2). Ainsi, un complexe déplié de dimension d permettra une représentation d -dimensionnelle en associant à chaque classe d'intervalles une direction dans l'espace assurant une représentation géométrique où les simplexes ne s'entrecoupent pas. Cela facilite notamment la visualisation des voisinages dans les complexes de dimension inférieure à 4. Cette propriété a été exploitée pour la conception du logiciel HexaChord présenté chapitre 7.

2.3 Organisations et classifications

Les complexes d'accords précédents représentent chacun une classe d'accords particulière; on cherche maintenant à considérer un voisinage entre les complexes. Par exemple, les catalogues en annexe A regroupent les complexes d'accords par dimension. Il existe cependant d'autres critères d'organisation des complexes présentant un intérêt combinatoire

ou musical. Dans la suite nous proposons quelques unes de ces organisations.

2.3.1 Mouvements minimaux entre accords

Dans cette représentation des complexes d'accords équivalents par transposition et inversion, deux complexes \mathcal{K}_{TI} et \mathcal{K}'_{TI} sont voisins s'il existe deux accords C et C' tel que $\mathcal{S}(C) \subseteq \mathcal{K}_{TI}$ et $\mathcal{S}(C') \subseteq \mathcal{K}'_{TI}$ et s'il est possible de passer de C à C' en ne modifiant qu'une note, d'un seul demi-ton. Ce critère est pertinent d'un point de vue musical dans le sens où il permet de mettre en évidence des progressions d'accords caractérisées par des mouvements minimaux. On aboutit à des espaces équivalents à ceux connus sous le nom de *voice-leading spaces* (figure 12 chapitre 1) récemment reconsidérés sous la forme d'orbifolds [Callender 2008], qui illustrent le voisinage entre les types d'accords par déplacements minimaux. La figure 9 illustre ce voisinage pour les complexes d'accords à trois notes équivalents à transposition et inversion près. Cette représentation est commode pour la visualisation de transformations minimales dans une progression d'accords. Le Prélude 4 op. 28 de F. Chopin comprend une séquence d'accords qui respecte ce type de règle. La séquence de complexes associée est représentée figure 9 par un chemin dans lequel deux complexes se succédant sont voisins. On reviendra sur cette propriété remarquable dans le chapitre 6.

La figure 10 illustre l'organisation suivant le même critère, des 15 complexes d'accords équivalents à permutation d'intervalles près, de dimension 3.

2.3.2 Regroupement par n -squelettes

Différents complexes peuvent partager le même n -squelette. En particulier, on voit de manière évidente que deux complexes partageant le même n -squelette partagent aussi le même m -squelette pour $m < n$.

Comme évoqué dans la sous-section 2.2.1, le 1-squelette d'un T -complexe, se caractérise par un ensemble d'intervalles défini à inversion près (*i.e.*, appartenant à $\{1, \dots, N/2\}$). Dans \mathbb{Z}_{12} , il existe $2^6 = 64$ ensembles possibles d'intervalles. Parmi ces 64 combinaisons, 30 permettent de définir les 1-squelettes des 224 complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$. Ces ensembles d'intervalles sont illustrés par le diagramme de Hasse donné figure 11. Les flèches correspondent à la relation d'inclusion (par soucis de lisibilité on ne représente l'inclusion qu'entre deux ensembles de tailles voisines; les autres sont obtenues par fermeture transitive du diagramme). Ce graphe d'inclusion peut facilement être mis en relation avec des treillis issus de l'analyse formelle de concepts [Schlemmer 2013].

Les 34 combinaisons absentes représentent des ensembles d'intervalles ne correspondant au contenu intervallique d'aucun accord dans \mathbb{Z}_{12} . Par exemple, il n'existe aucun accord composé exactement de tierces mineures et de tierces majeures, d'où l'absence de la combinaison d'intervalles $\{3, 4\}$. Le nombre de n -squelettes distincts pour le catalogue des complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ dans le système chromatique est donné dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n -squelettes	30	86	176	158	132	84	48	19	7	1	1

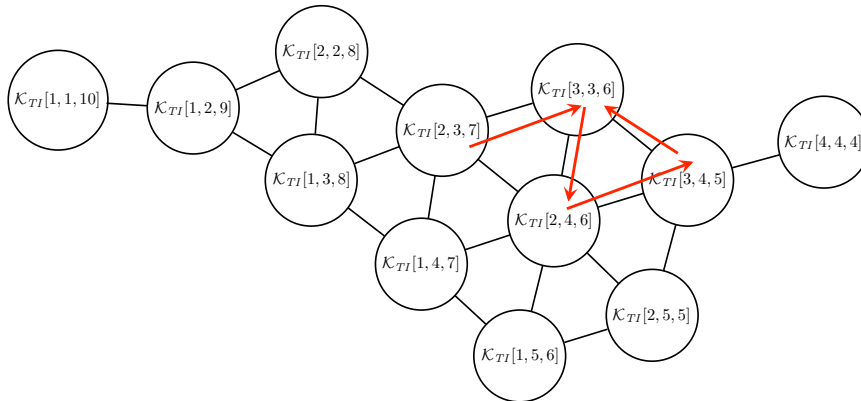


FIGURE 9 – Les 12 complexes d'accords équivalents à transposition et inversion près de dimension 2. Deux complexes sont voisins si on peut passer d'un accord de l'un à un accord de l'autre en ne changeant qu'une note d'un seul demi-ton. Les flèches indiquent une partie du chemin associé à une séquence d'accords extraite du Prélude 4 op. 28 de F. Chopin.

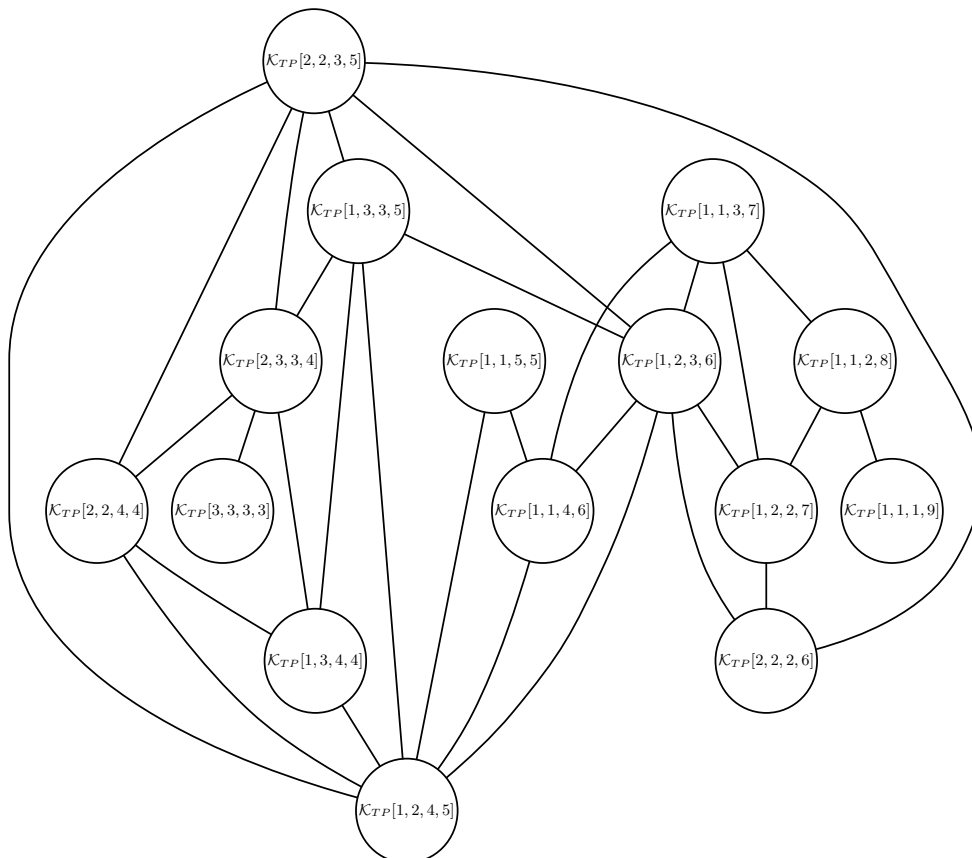
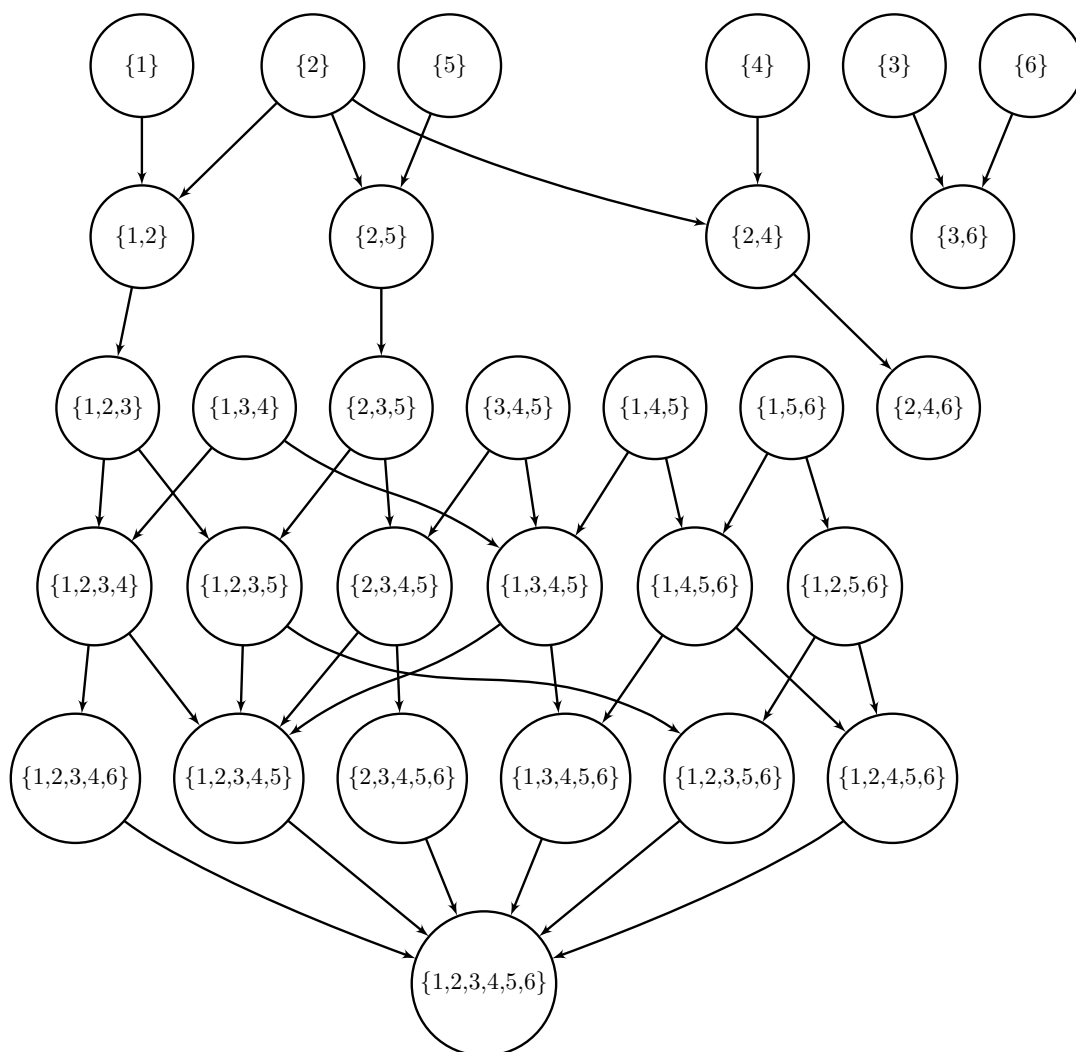


FIGURE 10 – Les 15 complexes d'accords de dimension 3 équivalents à permutation d'intervalles près. Deux complexes sont voisins si on peut passer d'un accord de l'un à un accord de l'autre en ne changeant qu'une note d'un seul demi-ton.

FIGURE 11 – Ensembles d'intervalles associés aux 1-squelettes des 224 complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$.

Chacune de ces classes permet de regrouper les complexes ayant un même n -squelette. Bien que cela soit peut fréquent, un complexe peut correspondre *exactement* au n -squelette d'un autre. Dans le catalogue des complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$, huit complexes vérifient cette propriété :

- $\mathfrak{S}_1(\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]) = \mathcal{K}_{TI}[4, 8]$,
- $\mathfrak{S}_2(\mathcal{K}_{TI}[1, 5, 1, 5]) = \mathcal{K}_{TI}[1, 5, 6]$,
- $\mathfrak{S}_2(\mathcal{K}_{TI}[2, 4, 2, 4]) = \mathcal{K}_{TI}[2, 4, 6]$,
- $\mathfrak{S}_2(\mathcal{K}_{TI}[3, 3, 3, 3]) = \mathcal{K}_{TI}[3, 3, 6]$,
- $\mathfrak{S}_4(\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 1, 3, 1, 3]) = \mathcal{K}_{TI}[1, 3, 1, 4, 3]$,
- $\mathfrak{S}_4(\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 2, 2, 2]) = \mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 2, 4]$,
- $\mathfrak{S}_6(\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2]) = \mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 1, 3, 2]$,
- $\mathfrak{S}_{10}(\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]) = \mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$.

On remarque que les complexes possédant un squelette dans le catalogue ont tous la propriété de correspondre à un mode à transposition limitée, ce qui ne semble pas être une propriété découlant de la théorie.

Les autres squelettes de complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ correspondent à des réunions de complexes de plus basse dimension. Comme indiqué dans le paragraphe 1.2 du chapitre 3, le 1-squelette d'un complexe $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$, c'est-à-dire le complexe réduit à ses sommets et arcs, peut être constitué à partir du contenu intervallique ramené à un ensemble de la classe d'accords associée. De manière générale, le k -vecteur (défini chapitre 3, section 1.2) ramené à un ensemble (*i.e.*, on ne considère que la présence et non le nombre d'occurrences de chaque type de sous-accord) du type d'accord représenté dans un complexe $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$, correspond au $(k - 1)$ -squelette de ce complexe. Par exemple on a $\mathcal{S}_2(\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 4, 3]) = \mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5] \cup \mathcal{K}_{TI}[2, 3, 7]$. Le complexe $\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 4, 3]$ résulte en effet de l'assemblage des accords mineur septième. Leur 3-vecteur est bien $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0]$, où les deux valeurs non nulles correspondent respectivement aux classes d'accords associées aux complexes $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 7]$. De même, $\mathcal{S}_2(\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 3, 4]) = \mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5] \cup \mathcal{K}_{TI}[2, 3, 7] \cup \mathcal{K}_{TI}[2, 4, 6] \cup \mathcal{K}_{TI}[3, 3, 6]$ (intuitivement les 4 types d'accords correspondent aux 4 faces des tétraèdres constituant le complexe). Ce complexe résulte de l'assemblage des accords septième de dominante et de leurs inverses, les accords demi-diminués (accords fréquemment désignés par « accord de Tristan » en référence à la pièce *Tristan et Isolde* de Wagner dans laquelle ils sont particulièrement utilisés). Le 3-vecteur de ces deux types d'accords est $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]$ où les 4 valeurs non nulles correspondent aux classes d'accords associées aux 4 2-complexes ci-dessus. De manière réciproque, deux types d'accords possédant le même k -vecteur (autrement dit, deux types d'accords en Z^k -relation), sont associés à des complexes ayant le même $(k - 1)$ -squelette.

Enfin, le 1-squelette d'un T -complexe étant caractérisé par un ensemble d'intervalles, certains complexes peuvent avoir un 1-squelette équivalent à une multiplication près. Par exemple, la multiplication par 2 des classes d'intervalles à inversion près caractérisant $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 9])$ aboutit à $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_{TI}[2, 4, 6])$.

2.4 Complexes d'accords et *voice-leading spaces*

L'objet de ce paragraphe est de donner certains éléments de comparaisons entre les complexes d'accords minimaux que nous avons présentés jusqu'ici et les espaces de conduite de voix (*voice-leading spaces*) désignés sous le terme d'*orbifolds* et évoqués dans le chapitre 2.

La différence la plus remarquable entre les deux types d'espace correspond à la manière dont sont représentés les accords qui les constituent et leurs relations de voisinage. Dans un orbifold, les accords sont représentés par des sommets alors qu'ils sont représentés par des simplexes dans un complexe d'accords. La représentation simpliciale de l'accord a l'avantage de contenir l'information sur sa taille de manière structurelle (il s'agit en effet de sa dimension). Cette propriété facilite la représentation d'accords de tailles différentes dans un même complexe, contrairement aux orbifolds qui ne représentent que des accords d'une même taille. Cette dernière condition résulte du critère de voisinage définissant ces espaces. (Les difficultés survenant dans les espaces à conduite de voix composés d'accords de taille différente sont discutées dans [Rockwell 2009, Tymoczko 2010]). Cet avantage des

complexes d'accords nous permettra dans le chapitre 6 de systématiser la représentation d'une pièce par une trajectoire à l'aide d'un processus de segmentation. La représentation d'une séquence musicale dans un orbifold nécessite au contraire une analyse *a priori* afin d'en extraire une séquence d'accords de même taille. La représentation simpliciale garantie lorsqu'un accord est représenté, que tous ses sous-accords le sont aussi. La pertinence musicale de cette propriété se justifie de manière directe : lorsqu'un accord est joué, tous ses sous-accords le sont aussi. Il semble donc fondé de les représenter au même titre. Dans un orbifold, caractérisé par une taille d'accords n , n'importe quel accord de taille n est associé à un point précis. Dans un complexe d'accords, un accord n'est complètement représenté par une cellule que s'il fait partie de la population initiale utilisée pour la construction de l'espace. Les accords ne faisant pas partie de cet ensemble sont soit totalement absents, soit représentés par des sous-complexes (correspondant aux sous-accords communs avec ceux de la population initiale) dont les propriétés topologiques/géométriques (connexité, compacité, etc.) révèlent des informations sur la dualité entre espace et accords. Nous montrerons que ces représentations alternatives d'accords constituent des avantages pour l'analyse de pièces dans le chapitre 6.

La seconde différence entre les deux types d'espace correspond au critère de voisinage permettant d'organiser les accords entre eux. La distance la plus courte entre deux accords dans un orbifold survient pour les paires d'accords entre lesquels une unique note diffère d'un pas minimum (un demi-ton si on se situe dans le cadre chromatique). Dans un complexe d'accords, un voisinage entre deux accords est représenté par le simplexe correspondant à l'intersection des deux accords, en termes de notes communes⁶. La dimension de ce simplexe représente la taille de cette intersection, et par conséquent un degré de voisinage entre les deux accords. Dans un orbifold, le degré de voisinage entre deux accords est caractérisé par une distance métrique.

Le choix du critère de voisinage entre accords définissant les deux types d'espace est discutable sur le plan musical. Notre opinion est qu'aucun critère de voisinage ne prévaut sur l'autre. Le choix de l'espace le plus adapté dépend naturellement du type d'analyse que l'on veut effectuer. Une analyse contrapuntique, tendant à étudier les lignes mélodiques constituées par les notes des accords, gagnera typiquement à être effectuée dans un espace de conduite de voix. Les complexes d'accords offriront en revanche une approche plus générique pour une analyse se concentrant sur des transitions d'accords de taille variable.

Enfin, les orbifolds diffèrent des complexes d'accords par leur construction. Notre première constatation est que les deux types d'espaces nécessitent pour être construits la définition de deux critères :

- Une relation d'équivalence entre accords permet de définir les éléments constituant l'espace. Cette relation est définie dans les deux types d'espace par les mêmes opérations musicales (transposition, inversion, etc.)⁷.
- Un critère de voisinage, que l'on vient de comparer pour les deux types d'espace, permet d'organiser les accords entre eux.

Il est intéressant de comparer la manière dont sont utilisés ces critères pour la construction

6. Ce critère est fréquemment désigné dans la littérature par le terme *pitch retention*.

7. Les relations d'équivalence pour les orbifolds, désignés par les lettres OPTIC sont détaillés dans [Callender 2008].

	orbifolds	complexes d'accords
accords	sommets	simplexes
voisinage	distances	simplexes
critère de voisinage	<i>voice-leading</i>	intersection
définition de l'espace initial	critère de voisinage	relation d'équivalence
définition de la transformation de l'espace	relation d'équivalence	critère de voisinage

TABLE 1 – Quelques différences entre les orbifolds et les complexes d'accords.

des deux types d'espace. Concernant les complexes, la relation d'équivalence est utilisée pour constituer un espace initial (une population de complexes), puis le critère de voisinage est utilisé pour transformer l'espace. On se sert en effet des parties semblables des complexes (*i.e.*, les intersections entre accords) pour construire l'espace (il s'agit du processus d'auto-assemblage décrit dans le paragraphe 1.3). La démarche inverse est utilisée pour construire un orbifold. L'espace initial est défini par la relation de voisinage qui organise la totalité des accords d'une taille donnée. Puis, on utilise la relation d'équivalence pour transformer l'espace (on replie successivement l'espace sur lui-même en identifiant les éléments appartenant aux mêmes classes d'équivalence). Le tableau 1 synthétise la comparaison des espaces évoqués dans cette discussion.

Les espaces de conduite de voix possèdent un avantage incontesté pour leur aptitude à représenter les lignes mélodiques caractérisées par des petits mouvements, majoritairement employés dans la musique occidentale traditionnelle. Ils constituent de cette manière des espaces théoriques robustes pour l'illustration de stratégies de composition prédominantes. Les complexes d'accords sont moins adaptés pour représenter les conduites de voix au cours de pièces musicales traditionnelles. En revanche la méthode de construction des complexes d'accords possède l'avantage de pouvoir être généralisée à partir de n'importe quel ensemble d'accords. Cette propriété permet notamment de représenter une pièce par un espace et non pas un mouvement dans un espace. Les possibilités offertes par cette approche sont détaillées dans la deuxième partie de ce chapitre. En outre, le fait de pouvoir y représenter une pièce par une trajectoire permet d'autres types d'applications, comme les transformations et calculs de compacité présentés dans le chapitre 6.

Pour d'autres éléments de comparaisons entre les espaces à conduite de voix et les espaces dérivés du *Tonnetz*, se reporter à [Tymoczko 2011] p.412 et à [Cohn 2012] p.66.

3 Séquences temporelles d'accords

Dans la section précédente, les espaces d'accords considérés sont construits à partir d'un ensemble d'accords choisi pour ses propriétés algébriques. Dans cette section, on propose d'appliquer le même type de constructions mais sur des ensembles d'accords issus de segments de pièces musicales, dont la longueur varie entre *l'instant* caractérisé par un ensemble de notes jouées simultanément, et la durée totale de la pièce.

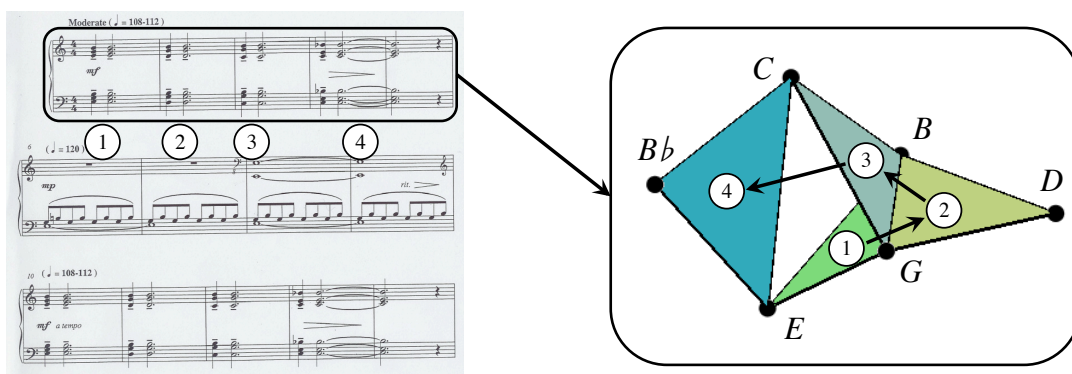


FIGURE 12 – Représentation simpliciale des premières mesures de la pièce *Metamorphosis I* de Philip Glass. Les trois flèches dans le complexe représentent l'ordre dans lequel les accords sont joués.

La figure 12 illustre le complexe résultant de l'assemblage des quatre accords introductifs de la pièce pour piano *Metamorphosis I* de Philip Glass. Ces accords de trois notes sont plaqués l'un après l'autre au cours des cinq premières mesures de la pièce. Chacun des accords est représenté par un 2-simplexe.

Le processus d'auto-assemblage appliqué à l'ensemble des accords constituant une pièce fusionne les simplexes présentant des sous-accords communs jusqu'à constituer un complexe d'accords représentant le segment. La première conséquence de cette construction est, qu'en opposition à la partition, la représentation simpliciale ne fournit aucune information à propos des durées, de l'ordonnement ou encore du nombre d'occurrences des accords (en effet, deux accords identiques joués à des instants différents sont représentés par un même simplexe). La représentation simpliciale se contente de mettre en évidence les ensembles de notes qui sont jouées simultanément (à au moins un instant durant le segment), et la manière dont ils s'intersectent.

L'ordre dans lequel sont joués les ensembles de notes peut toutefois être représenté par une trajectoire dans le complexe. Les flèches à l'intérieur du complexe de la figure 12 illustrent le chemin représentant l'ordre des quatre premiers accords de la pièce de P. Glass. Dans cette séquence, chaque transition se fait entre deux accords possédant un élément commun. Pour les deux premières transitions, il s'agit de l'accord à deux notes $\{G, B\}$ (représenté par un arc incident aux trois 2-cellules) et pour la dernière transition de la note C (représentée par un sommet partagé par deux 2-cellules). De manière générale, une transition entre deux accords représentés par des simplexes p -voisins conserve $(p + 1)$ classes de hauteurs. Pour un segment temporel élargi à la taille de la pièce, on appelle le complexe résultant *l'espace de la pièce*, la pièce se concrétisant par une trajectoire qui parcourt une fois au moins chaque élément de l'espace.

3.1 Chemins et stratégies de composition

La figure 13 représente le complexe associé à une séquence de 14 accords issue du Prélude 4 op. 28 de F. Chopin.

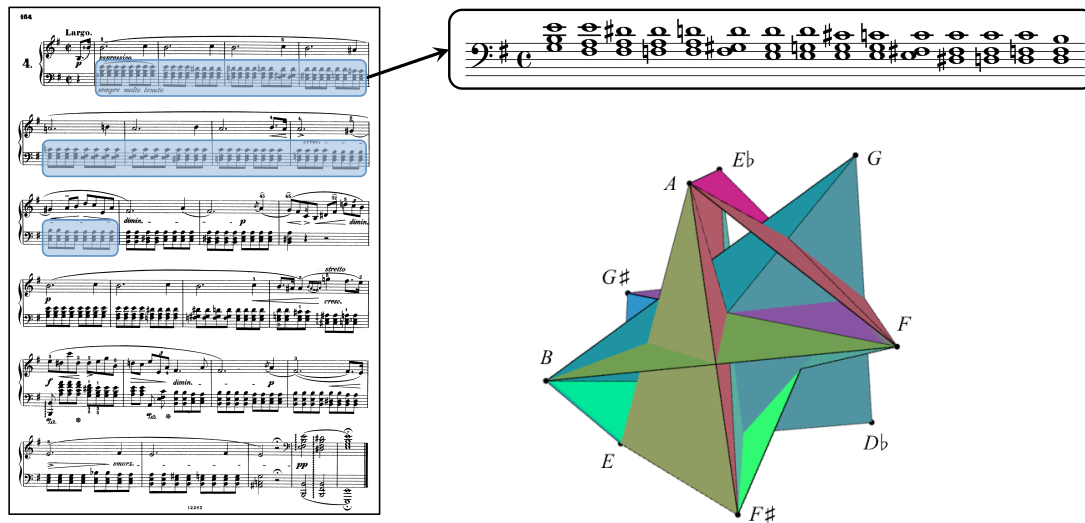


FIGURE 13 – Représentation simpliciale d’une séquence de 14 accords extraite du Prélude 4 op. 28 de F. Chopin.

Tout chemin dans le complexe correspond à un ordonnancement particulier des accords utilisés dans le prélude. Il existe en particulier 120 chemins $(2, 1)$ -Hamiltoniens dans ce complexe (voir chapitre 3, section 2.1). Dans un $(2, 1)$ -chemin, deux 2-simplexes consécutifs ne diffèrent que d’un sommet. Cette différence peut s’interpréter comme le mouvement d’une note d’un accord au suivant. En caractérisant ce mouvement par la distance intervalle séparant les deux notes, on peut classer les 120 chemins hamiltoniens par la somme des mouvements effectués. Dans ce classement, le chemin hamiltonien entraînant les plus petits mouvements correspond à l’ordre des accords utilisé par F. Chopin pour composer son Prélude. Cette propriété illustre une stratégie de composition courante, fréquemment désignée par le terme de *parsimonious voice leading* évoqué chapitre 1, paragraphe 2.3.1. La figure 14 illustre une région de ce chemin. Dans cette région, les notes en mouvement, d’un 2-simplexe au suivant, correspondent aux transitions $(E \rightarrow Eb)$, $(F\sharp \rightarrow F)$, $(Eb \rightarrow D)$ et $(A \rightarrow G\sharp)$. Chacun de ces mouvements correspond au plus petit intervalle possible, à savoir le demi-ton. On remarquera également que la trajectoire utilisée par F. Chopin « tourne » autour de notes pivots. Par exemple, on observe sur la figure 14 une rotation autour de la note A suivie ensuite d’une rotation autour de F . Ce type de rotation dans un espace d’accords comme le *Tonnetz*, est désigné par le terme *pitch retention loop* par R. Cohn [Cohn 2012].

Cet exemple montre qu’il est possible d’exprimer certaines stratégies de composition en termes spatiaux uniquement. Ce type de démarche nécessite toutefois d’établir une traduction délicate entre propriétés spatiales et propriétés musicales.

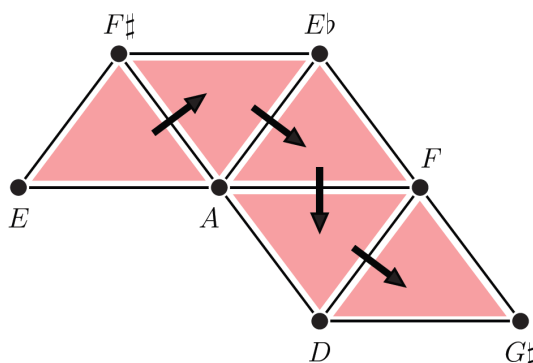


FIGURE 14 – Une partie du chemin associé à l'ordonnancement des accords dans le Prélude.

3.2 Étude à l'échelle d'une pièce entière

Un complexe représentant un segment temporel d'une pièce (comme c'est le cas des deux exemples que nous venons de voir) peut faire l'objet de différentes études. On peut par exemple s'intéresser à sa connexité, sa dimension, ainsi qu'à d'autres de ses propriétés topologiques. Si certaines de ces propriétés se traduisent de manière évidente sur le plan musical, d'autres sont plus difficiles à interpréter. Par exemple la dimension du complexe est associée au nombre maximal de notes jouées simultanément au cours du segment. D'autres caractéristiques topologiques, comme la présence de trous, soulèvent des questions plus délicates.

L'élargissement du segment à la taille totale d'une pièce aboutit à un complexe pouvant représenter des accords qui sont éloignés dans le temps par un même simplexe, ou par des simplexes voisins. Afin d'étendre notre approche à des pièces dans leur totalité, on propose plutôt de faire glisser une fenêtre d'une certaine largeur tout au long de la pièce, et d'étudier chaque complexe associé. Cette démarche nécessite un choix judicieux pour la largeur de la fenêtre. En effet, une fenêtre trop étroite ne capturera qu'un unique ensemble de notes jouées simultanément. La séquence de complexes consistera alors en une séquence de simplexes ne pouvant révéler aucune information sur les progressions harmoniques. À l'inverse, une fenêtre trop large donnera lieu à des complexes réunissant des éléments trop éloignés dans le temps, réduisant ainsi la pertinence de l'étude.

Dans la suite nous mettons à profit ce type d'étude sur différentes pièces pour observer comment évoluent certains paramètres topologiques tels que la dimension ou la connexité et comment ils peuvent être utilisés pour distinguer différents styles de composition.

3.2.1 Dimension

La dimension du complexe correspond au nombre maximum de notes jouées simultanément durant le segment représenté. Du point de vue de la dimension, l'assemblage dans un même complexe d'éléments espacés dans le temps n'apporte pas d'informations supplémentaires que l'étude du complexe associé à chaque instant de la pièce pris de manière indépendante. Cette mesure naïve permet tout de même de mettre en évidence des

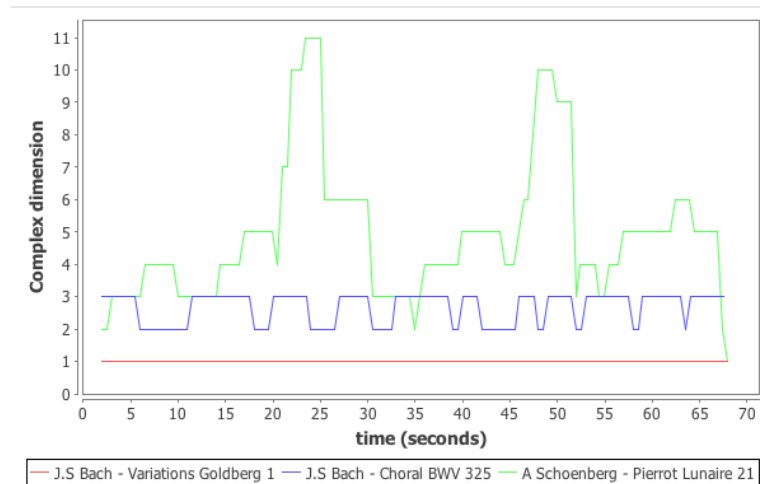


FIGURE 15 – Évolution de la dimension du complexe au cours du temps pour trois pièces.

comportements typiques associés à des pièces respectant certaines règles sur la taille des accords utilisés.

La figure 15 illustre l'évolution de la dimension des complexes représentant les segments d'une longueur de 2 secondes au cours des 60 premières secondes de la première des variations Goldberg BWV 988 et du choral BWV 325 de J.-S. Bach, ainsi que le dernier poème du *Pierrot Lunaire* de A. Schönberg (*O Alter Duft*). La fenêtre est décalée d'une demi seconde à chaque glissement. La première pièce consiste dans son intégralité en une superposition de deux voix. On a donc quasiment à tout moment deux notes simultanées, représentées par un 1-simplexe. Un segment est donc représenté par un complexe de dimension 1 constitué de 1-simplexes. Le choral de J.-S. Bach, composé de 4 voix, est constitué dans sa majorité d'accords à 3 ou 4 sons, d'où une dimension variant entre 2 et 3. Enfin on remarque dans la pièce de A. Schönberg une multiplicité des notes jouées simultanément beaucoup plus hétérogène, allant jusqu'au total chromatique (la présence simultanée des 12 classes de hauteurs aboutit à un complexe de dimension 11).

3.2.2 Taille

On définit la taille d'un complexe à la dimension d comme le nombre de d -simplexes que comprend ce complexe (autrement dit, il s'agit de la taille de son d -squelette). Ainsi, un complexe de grande taille à une dimension d pour une petite fenêtre révèle une circulation rapide des différents accords à $d + 1$ notes. Ce type d'analyse a été mené dans [Tymoczko 2011] pour les classes de hauteurs. Dans le cadre de notre approche, cela consiste à analyser la taille des complexes à la dimension 0. Nous proposons de généraliser cette approche pour n'importe quelle dimension.

La figure 16 illustre la taille des complexes à différentes dimensions en fonction de la taille de la fenêtre, pour 4 pièces : le second mouvement du Quatuor op. 28 de A. Webern, le choral BWV 292 de J.-S. Bach, *Metamorphosis I* de P. Glass et la première des deux

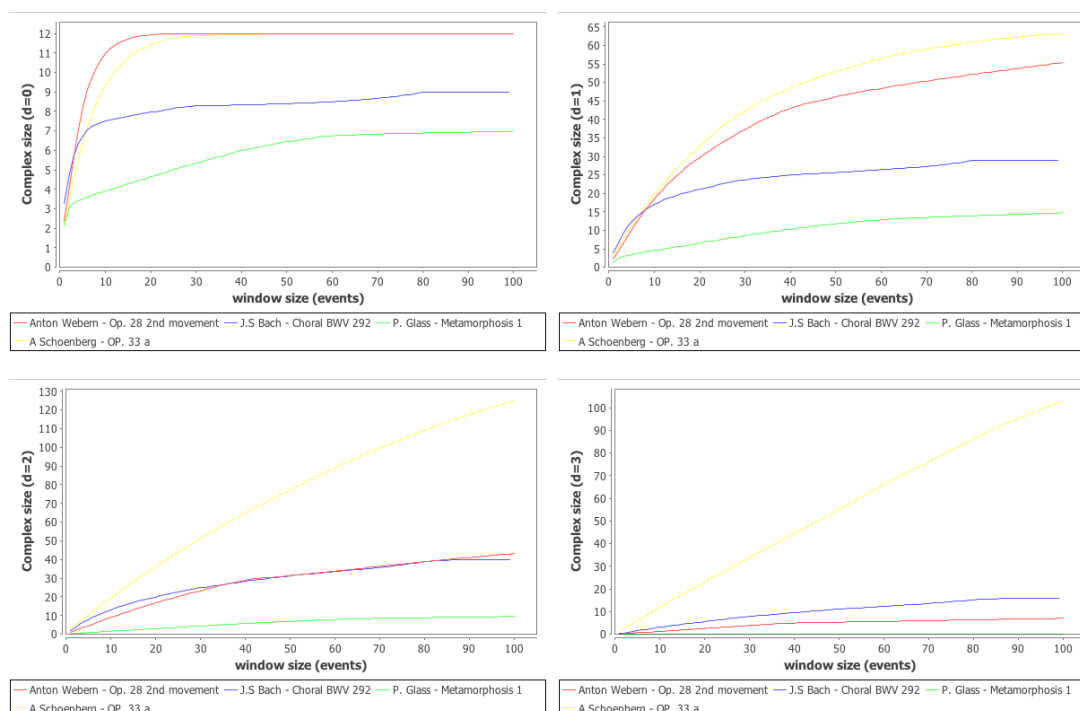


FIGURE 16 – Taille des complexes aux dimensions 0,1,2 et 3 en fonction de la longueur de la fenêtre pour quatre pièces.

pièces pour piano op. 33 de A. Schönberg. A la dimension 0, la taille maximale d'un complexe est 12 (les 12 classes de hauteurs). Cette taille maximale pour des petite fenêtres dans les pièces de A. Schönberg et A. Webern s'explique par leur caractère atonal et la volonté des compositeurs de ne pas privilégier un sous-ensemble particulier de notes. La taille des complexes associés à ces deux pièces sont comparables jusqu'à la dimension 2, à partir de laquelle la pièce de A. Schönberg se démarque par une utilisation plus diversifiée des accords d'au moins 3 notes. La pièce minimaliste de P. Glass au contraire, est associée à des complexes dont la taille maximale à la dimension 1, 2 et 3 est clairement plus petite que pour les autres pièces, ce qui illustre la tendance typiquement minimaliste, à réutiliser au cours du temps un même ensemble de notes et d'accords servant de matériau de base. Les complexes de cette pièces sont de taille 0 en dimension 3 ce qui est dû à l'absence d'accords de plus de 3 notes au cours de la pièce. Enfin, la taille des complexes représentant l'évolution du choral de J.-S. Bach se situe sans surprise généralement entre le cas minimal et le cas atonal. Il est tout de même intéressant de remarquer un taux de circulation des accords à 3 sons relativement comparable entre le choral de J.-S. Bach et la pièce de A. Webern.

Si cette approche nous permet de mesurer le taux de circulation des accords d'une certaine taille, elle ne nous donne en revanche aucune information sur les relations liant ces accords. On ne peut pas savoir, par exemple, si plusieurs accords de même taille apparaissant dans un complexe appartiennent à une même classe d'équivalence au sens où on l'a défini dans la section précédente. Afin de déterminer cette information, on pourrait

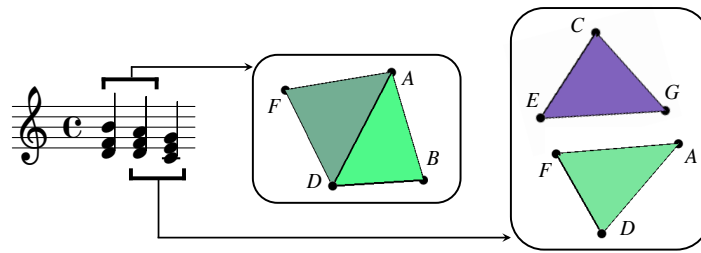


FIGURE 17 – La conservation de notes dans une transition d'accords entraîne la connexité du complexe associé.

soit plonger le complexe dans un espace intervallique généralisé (comme celui évoqué à la fin du chapitre 4), soit calculer la taille de l'intersection du complexe avec les différents complexes du catalogue présenté précédemment. Nous reviendrons sur ce second point en début du chapitre 6.

3.2.3 Connexité

La connexité du complexe associé à une suite d'accords peut donner des informations sur la tendance à conserver des éléments entre des accords successifs. La figure 17 illustre ce phénomène avec deux exemples de transition d'accords, la première conservant deux notes et étant représentée par un complexe connexe, la seconde n'en conservant aucune et étant représentée par un complexe non-connexe.

La figure 18 illustre le nombre de composantes connexes des complexes représentant les mêmes quatre pièces en fonction de la longueur de la fenêtre. Il est évident qu'à mesure qu'augmente la taille de la fenêtre, le nombre de composantes connexes tend vers 1. Les pièces de A. Schönberg et A. Webern se différencient ici par une connexité moins élevée, pour des fenêtres raisonnablement petites. En effet, la conservation des hauteurs dans les progressions d'accords correspond à une stratégie de composition typiquement utilisée dans la musique tonale, mais pas forcément dans la musique atonale.

3.2.4 Inclusion *structurelle* de complexes issues d'une pièce

Soient \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 deux complexes construits respectivement à partir des accords de deux pièces P_1 et P_2 . La pièce P_1 est représentée dans \mathcal{K}_1 par une trajectoire parcourant la totalité des éléments de \mathcal{K}_1 . Il en est de même pour la pièce P_2 avec une trajectoire parcourant l'ensemble des éléments de \mathcal{K}_2 . L'existence d'une fonction définissant une inclusion structurelle⁸ entre deux pièces révèle le recours à un système combinatoire d'accords similaire. Il ne s'agit pas forcément des mêmes accords, mais ils s'intersectent de la même manière. Une telle propriété est intéressante du point de vue compositionnelle dans le sens où elle révèle le recours à une stratégie combinatoire d'accords comparables. Nous reviendrons sur cette propriété, qui suggère intuitivement l'idée de « jouer une pièce dans l'espace

8. L'inclusion structurelle entre complexes est définie chapitre 3, section 2.4

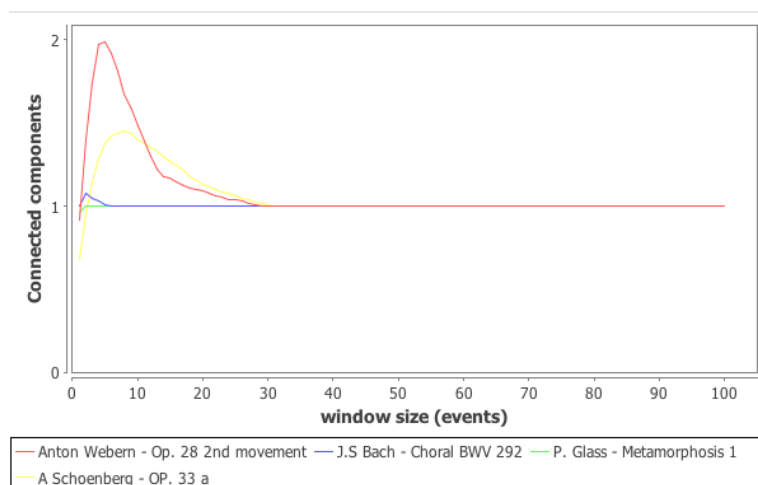


FIGURE 18 – Nombre moyen de composantes non connexes des complexes en fonction de la longueur de la fenêtre pour quatre pièces.

d'une autre », chapitre 6, hésitons 3.2. Nous illustrerons cette idée sur deux chorales de J.-S. Bach liés par plusieurs inclusions structurelles.

3.3 Perspectives de l'approche

L'approche présentée dans cette section est motivée à la base par la volonté de construire *l'espace d'une pièce* du point de vue des ensembles de classes de hauteurs qu'elle emploie. L'espace correspond bien à la pièce dans le sens où il est constitué exactement des accords joués durant la pièce. La relation de voisinage entre les éléments est définie par leurs intersections. La construction d'un espace combinatoire représentant différentes valeurs survenant au cours de la pièce pourrait être étendue à d'autres paramètres que les hauteurs. On pourrait par exemple construire de tels espaces pour la représentation des timbres, ou encore des intensités de jeu employées au cours de la pièce. De manière générale, la difficulté de traduire une propriété spatiale dans les espaces résultant par une propriété musicale rend leur étude topologique délicate. À défaut d'y entrer, l'objectif de cette section est d'ouvrir ce champ en fournissant des outils destinés à des analyses plus poussées, notamment sur des corpus d'œuvres plus larges.

Quel que soit la nature du paramètre musical constituant l'espace, cette approche ne représente pas de manière structurelle l'évolution temporelle des valeurs prises par le paramètre. L'exemple du Prélude de F. Chopin dans le paragraphe 3.1 montre que nous avons besoin de la notion de trajectoire pour représenter l'ordonnancement des éléments dans la pièce. Le chapitre 6 a pour objet d'approfondir la notion de trajectoire dans les complexes d'accords.



FIGURE 19 – Organisation des espaces d'accords de ce chapitre suivant la complexité de leur spécification.

4 Complexité de spécification des espaces d'accords

Les complexes d'accords que nous avons présentés dans ce chapitre se divisent en deux catégories. Dans la section 2, les complexes sont construits à partir d'un ensemble d'accords défini par une relation d'équivalence entre accords, qui est elle-même déterminée par un ensemble d'opérations musicales théoriques. La construction de ces complexes s'inscrit donc dans une démarche de théorie musicale. À l'inverse, les complexes présentés dans la section 3 sont définis à partir d'une pièce musicale. La construction d'un complexe de ce type nécessite donc une démarche compositionnelle. Ces deux types de complexes se différencient également du point de vue de leur complexité. Les complexes d'accords théoriques se définissent uniquement à l'aide de deux éléments : un entier correspondant à une taille d'accords, et un ensemble de transformations musicales qui sont définies par des opérations algébriques sur les entiers. Le complexe vide et le complexe complet sont des cas particuliers dans le sens où la taille d'accord (0 pour le complexe vide et N pour le complexe complet) suffit à les définir. En revanche, les complexes compositionnels ne peuvent se définir autrement que par l'ensemble des accords qui les constituent. La différence dans la méthode de construction des deux types de complexes permet de les distinguer du point de vue de la complexité de Kolmogorov [Li 1997]. La complexité de Kolmogorov d'un objet correspond à la quantité minimum d'instructions nécessaires pour spécifier cet objet. Malgré le fait que la complexité de Kolmogorov soit difficilement calculable, elle nous permet intuitivement de classer les complexes d'accords en fonction du coût de leur spécification. La figure 19 illustre cette classification.

Trajectoires

1	Séquences musicales et trajectoires	101
2	Construction de trajectoires	104
3	Transformation de trajectoires	109
4	Compliance d'espace par rapport à une trajectoire	116

Dans le chapitre 5, nous avons proposé différentes méthodes pour la construction de complexes d'accords. Ces espaces représentent des accords de manière statique et ne sont donc pas capables de révéler d'informations relatives à la temporalité, et donc au déroulement d'une pièce musicale¹. Nous proposons dans ce chapitre de répondre partiellement à ce problème grâce à la notion de *trajectoire* présentée dans le chapitre 3. Une trajectoire représente le déroulement d'une pièce musicale dans un complexe d'accords. On désigne alors un tel complexe par le terme *espace support*. L'aspect de la trajectoire dépend de son espace support. Les espaces non-minimaux ont la propriété de pouvoir représenter une pièce par différentes trajectoires. Nous proposons différents critères pour choisir dans cet ensemble une trajectoire facilitant l'analyse d'une pièce et l'algorithme de construction associé. Nous présentons ensuite différentes transformations de trajectoires et de leur espace support, leurs effets, ainsi que leurs interprétations musicales. On propose enfin une méthode pour mesurer la *compacité* d'une trajectoire, un critère géométrique permettant d'évaluer la propension d'un espace à représenter une pièce. Cette notion correspond à celle de *compliance* introduite dans le chapitre 3. Nous utilisons enfin cet outil de mesure pour la classification de pièces.

1 Séquences musicales et trajectoires

1.1 Segmentation d'une pièce

Représenter une pièce par une trajectoire dans un espace consiste à définir par des sous-espaces de cet espace les *états* successifs de la pièce. Une telle représentation nécessite donc une segmentation du temps de la pièce. La segmentation est un enjeu en soi pour effectuer de bonnes analyses musicologiques. Nous ne détaillons pas de technique particulière pour segmenter une pièce mais nous cherchons simplement à décrire la forme que doit prendre une telle segmentation pour s'adapter à nos travaux.

1. Certaines pistes dans cette direction ont tout de même été présentées dans le paragraphe 3.1 du chapitre 5.

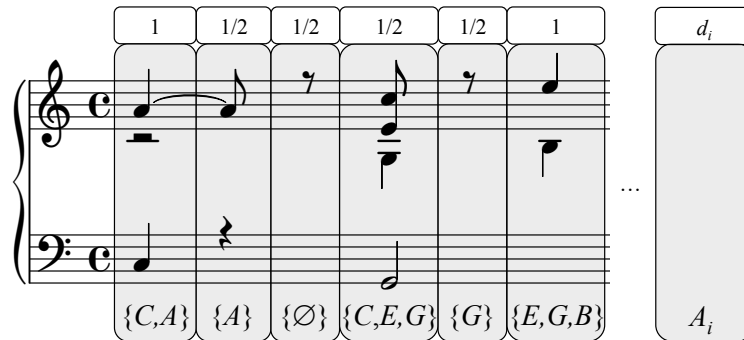


FIGURE 1 – Segmentation d’une séquence en fonction de l’ensemble de classes de hauteurs joué. Un nouveau segment est entamé chaque fois qu’une nouvelle classe apparaît ou disparaît. L’unité de durée correspond ici à la noire.

Les espaces support sont restreints aux complexes d’accords tels que définis dans le chapitre 5. Comme ils décrivent des relations de voisinage entre des ensembles de classes de hauteurs, nous considérons qu’une segmentation d’une pièce est définie comme une succession d’ensembles de classes de hauteurs, c’est-à-dire une succession d’accords. Plus formellement, on réduit une pièce P en une séquence d’ensembles de classes de hauteurs chacun étiqueté par une durée relative. On a ainsi $P = [(A_0, d_0), \dots, (A_N, d_N)]$ où A_i est l’ensemble de classes de hauteurs « actives » pendant une durée d_i .

Une façon simple de procéder pour obtenir une telle segmentation est fondée sur les classes de hauteurs jouées : l’état de la pièce à un instant t est défini par les notes jouées à cet instant. Cela implique la considération d’un nouveau segment à chaque fois qu’au moins une nouvelle classe de hauteurs est jouée ou stoppée. Chaque segment est associé à sa durée relative par rapport aux autres. La figure 1 illustre une telle segmentation. Le logiciel HexaChord utilise par défaut cette segmentation (voir chapitre 7).

1.2 Trajectoires d’une pièce

Soient \mathcal{K} un complexe d’accords. Une trajectoire dans un complexe \mathcal{K} , définie chapitre 3, section 2.5, est une séquence de sous-collections de \mathcal{K} , chacune étiquetée par une durée. Soient $T_{\mathcal{K}} = [(\mathcal{K}_0, d_0), \dots, (\mathcal{K}_N, d_N)]$ une trajectoire dans \mathcal{K} et $P = [(A_0, d'_0), \dots, (A_N, d'_N)]$

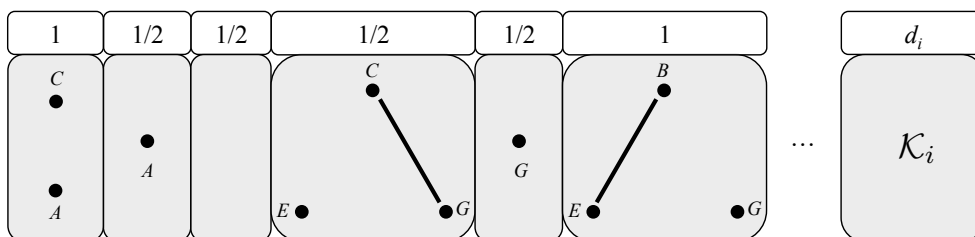


FIGURE 2 – Une trajectoire associée à la représentation de la séquence de la figure 1 dans $\mathcal{K}_T[5, 7]$.

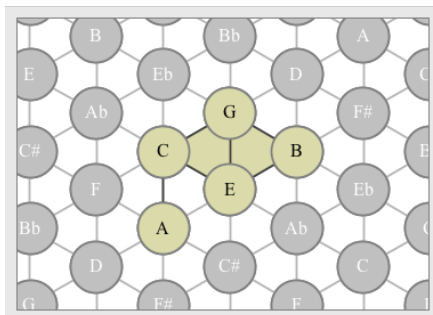


FIGURE 3 – Trace associée à une trajectoire représentant la séquence de la figure 1 dans $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$.

une pièce. On dit que $T_{\mathcal{K}}$ représente P si pour tout i , $d_i = d_i'$ et \mathcal{K}_i est une sous-collection simpliciale² telle que :

$$\forall \sigma \in |\mathcal{K}_i|, \quad \mathcal{K}(\sigma) \subseteq A_i$$

Cela signifie que la sous-collection \mathcal{K}_i ne représente que des ensembles de notes considérées dans le i^{e} segment de la pièce. La figure 2 illustre une trajectoire représentant la pièce de la figure 1 dans $\mathcal{K}_T[5, 7]$ (*i.e.*, le complexe d'accord minimal correspondant au cercle des quintes). On appelle *trace* d'une trajectoire $T_{\mathcal{K}}$, la sous-collection $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{K}$ constituée des cellules topologique comprises dans $T_{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{T} = \bigcup_{(\mathcal{K}_i, d_i) \in T_{\mathcal{K}}} \mathcal{K}_i$$

La figure 3 illustre la trace associée à une trajectoire représentant la séquence de la figure 1 dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$.

La définition de la représentation d'une pièce est peu restrictive et autorise un grand nombre de trajectoires à représenter une même pièce P dans un même complexe \mathcal{K} . Suivant l'espace support et l'utilisation qu'on prévoit de faire de la trajectoire, on peut restreindre ce nombre en imposant des critères de qualité supplémentaires. Voici deux exemples de tels critères (nous étendrons cette liste lors de la présentation de l'algorithme de construction section 2.1) :

Critère 1 : tout sous-ensemble de notes ne peut être représenté que par un unique simplexe dans un élément de la trajectoire :

$$\forall \sigma, \sigma' \in |\mathcal{K}_i|, \quad \mathcal{K}(\sigma) \neq \mathcal{K}(\sigma')$$

En d'autres termes, les \mathcal{K}_i doivent être des sous-collections minimales.

² La définition de collection simpliciale est donnée chapitre 3. Elle implique ici la fermeture de la représentation simpliciale des ensembles de notes représentés : tout sous-ensemble de notes sera également représenté.

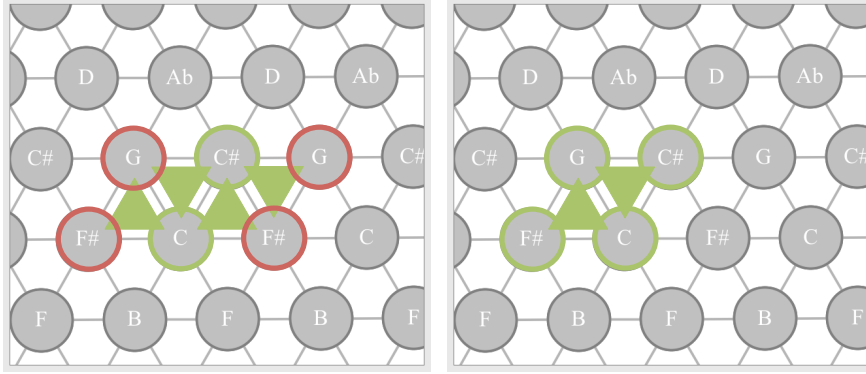


FIGURE 4 – Deux représentations de l'accord $\{C, C\#, F\#, G\}$ dans $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 5, 6]$. La représentation de gauche viole le critère 1 (des simplexes sont représentés plusieurs fois), la représentation de droite viole le critère 2 (tous les simplexes ne sont pas représentés, $\{C, C\#, F\#\}$ et $\{C\#, F\#, G\}$ sont manquants).

Critère 2 : tout sous-ensemble de notes doit être représenté au moins une fois si l'espace support le permet :

$$\forall B \subseteq A_i, \quad \exists \sigma \in |\mathcal{K}|, \mathcal{K}(\sigma) = B \Rightarrow \exists \tau \in |\mathcal{K}_i|, \mathcal{K}(\tau) = B$$

Par définition, une trajectoire dans un complexe d'accords minimal vérifie le critère 1. Il est facile de voir qu'en imposant également le critère 2, une pièce est représentée dans un complexe minimal par une trajectoire unique.

En revanche, dans les complexes non minimaux, il peut arriver que les critères 1 et 2 soient incompatibles. La figure 4 illustre le problème avec la représentation de l'accord $\{C, C\#, F\#, G\}$ dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 5, 6]$. Les quatre sous-accords à 3 sons de cet accord sont représentés dans $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 5, 6]$ par des 2-simplexes. La figure montre que le respect du critère 2, qui impose la représentation dans la trajectoire des quatre 2-simplexes, oblige les sommets $F\#$ et G à être représentés plus d'une fois, ce qui ne satisfait pas le critère 1. Ce problème se comprend en observant la topologie du complexe plié correspondant, $\mathcal{K}_{TI}[1, 5, 6]$. En effet, les quatre sous-accords forment dans ce complexe le bord d'un 3-simplexe et il n'est pas possible de déplier le patron d'un tétraèdre sans représenter certains sommets plusieurs fois.

2 Construction de trajectoires

L'objet de cette section est de proposer une méthode de construction pour associer à une pièce $P = [(A_0, a_0), \dots, (A_N, a_N)]$ une trajectoire $T_{\mathcal{K}} = [(\mathcal{K}_0, a_0), \dots, (\mathcal{K}_N, a_N)]$ dans un complexe d'accords \mathcal{K} donné. Le problème revient donc à déterminer chaque sous-collection \mathcal{K}_i .

2.1 Critères de construction

Les problématiques liées à la construction d'une trajectoire diffèrent suivant la minimalité de l'espace \mathcal{K} . Dans le cas des complexes minimaux, nous proposons d'imposer systématiquement le critère 2, le critère 1 étant nécessairement satisfait dans ces complexes. La définition des sous-collections \mathcal{K}_i est alors donnée par :

$$\mathcal{K}_i = \{ \sigma \in \mathcal{K} \mid \mathcal{K}(\sigma) \subseteq A_i \}$$

Cette méthode est implantée dans le logiciel HexaChord (voir chapitre 7). Nous ne la détaillerons pas d'avantage dans cette section.

Dans le cas de complexes non-minimaux, cette définition des \mathcal{K}_i viole le critère 1. La multiplicité des simplexes représentant un même sous-ensemble de notes impose de faire un choix³ pour chaque \mathcal{K}_i parmi l'ensemble des possibilités (potentiellement infini) offert par \mathcal{K} . Nous proposons de répondre à ces choix par l'utilisation de différents critères avec la prise en compte de *priorités*. La priorité permet d'éviter les contradictions entre critères telles que celle soulignée plus haut pour les critères 1 et 2. L'algorithme *Trajectoire \mathcal{K}* proposé ci-dessous repose sur ces deux critères auxquels on adjoint les trois suivants :

Critère 3 : \mathcal{K}_i doit être « proche » de \mathcal{K}_{i-1} . Ce critère permet de minimiser la distance parcourue par la trajectoire et de faciliter la visualisation des transitions entre accords. Pour être pris en compte, ce critère nécessite de définir une distance entre deux sous-collections dans un complexe. La méthode proposée dans l'algorithme qui suit consiste à calculer les chemins les plus courts séparant deux à deux les simplexes qui les composent respectivement.

Critère 4 : \mathcal{K}_i doit être le plus compact possible. La prise en compte du critère de compacité permet de maximiser la représentation des sous-accords et de leurs intersections. J.-M. Chouvel souligne l'importance de cet aspect à propos de la question de la représentation d'un accord dans le *Tonnetz* [Chouvel 2009a] :

La difficulté réside ici, pour un accord, de déterminer la figure la plus « compacte » possible, car c'est souvent celle qui aura la meilleure lisibilité analytique.

Ce critère pourra être pris en compte à l'aide de la mesure de la compacité présentée dans le chapitre 3.

Critère 5 : \mathcal{K}_i réutilise des simplexes utilisés dans les sous-collections antérieures. Ce critère limite la divergence de la trajectoire en la maintenant dans sa propre trace. Ce critère est discutable d'un point de vue musical. D'un point de vue perceptif il peut sembler logique qu'un retour à un « état musical » passé soit représenté par un retour dans une région déjà parcourue. Par exemple, ce comportement de la trajectoire sera probablement le plus attendu lors d'une cadence se répétant plusieurs fois successivement⁴. En revanche, un retour trop systématique dans les régions parcourues a pour conséquence de briser la continuité de l'espace, et donc de certains

3. Une autre solution aurait été de s'intéresser à l'arbre des possibilités et de générer l'ensemble des trajectoires. Nous avons opté pour la construction d'une seule trajectoire pour des raisons d'implantation.

4. Ce type de comportement survient fréquemment dans la musique tonale, par exemple pour clôturer le mouvement d'une pièce.

mouvements. La trajectoire de gauche sur la figure 10 illustre cette remarque. Le fait d'imposer à chaque classe de hauteurs de n'être représentée qu'à un endroit aurait eu pour conséquence de couper la trajectoire en son milieu et n'aurait pas permis de mettre en évidence son caractère rectiligne.

Ces quelques critères pourraient être complétés et précisés. Il est intéressant de noter qu'ils ne relèvent pas tous du même type d'analyse. Les critères 1, 2 et 4 s'intéressent à la configuration de la pièce sur un segment donné indépendamment des autres segments ; en revanche, les critères 3 et 5 ont la propriété de nécessiter la prise en compte des segments passés dans la trajectoire. Néanmoins, ils relèvent tous d'une analyse perceptive : ils respectent la causalité induite par l'écoute de la pièce.

En opposition, on pourrait imaginer des critères privilégiant la représentation de la démarche de composition utilisée. On pourrait par exemple prendre en compte les accords futurs (et non uniquement les accords passés) voire la pièce dans sa globalité⁵ afin d'augmenter d'avantage notre contrôle sur l'aspect final de la trajectoire. Par exemple, certaines pièces élaborées sur des structures palindromiques, comme dans *L'Offrande musicale* de J.-S. Bach, pourraient être représentées par une trajectoire en « aller-retour ». Ce type d'approche a cependant l'inconvénient de ne pas pouvoir être effectuée en temps réel lors du déroulement de la pièce puisqu'elle nécessite, lorsqu'un ensemble de notes est joué, de connaître les notes jouées dans le futur.

2.2 Algorithme de construction

La description de l'algorithme de construction repose sur le système de notations suivant :

- \mathcal{K} correspond au complexe d'accords constituant l'espace support,
- \mathcal{K}_{-1} correspond à une sous-collection de \mathcal{K} composée uniquement de sommets, chacun d'eux étant choisi arbitrairement dans l'une des composantes connexes de \mathcal{K} ; cette sous-collection permet de désigner les positions de \mathcal{K} autour desquelles commencera la future trajectoire,
- A_i correspond au i^{e} accord de la pièce ; on pourra assimiler A_i à sa représentation simpliciale $\mathcal{S}(A_i)$,
- \mathcal{K}_i est la sous-collection de \mathcal{K} correspondant à la représentation du i^{e} segment de la pièce,
- $presence_{\mathcal{K},d}(A)$ est une fonction associant à un accord A l'ensemble de ses sous-accords de taille au plus $d + 1$ représentés par au moins un simplexe dans \mathcal{K} :

$$presence_{\mathcal{K},d}(A) = \{ B \subseteq A \mid \exists \sigma \in |\mathcal{K}|, dim(\sigma) \leq d \wedge \mathcal{K}(\sigma) = B \},$$

- $choix(E)$ est une fonction retournant l'un des éléments d'un ensemble E non-vide choisi au hasard.

Pour faciliter les écritures, comme nous ne manipulons que des sous-collections de l'espace support \mathcal{K} , les sous-collections sont définies uniquement par leur support.

5. En effet, attribuer plus de souplesse aux critères pour la recherche de \mathcal{K}_i peut dans certains cas permettre de respecter d'avantage les critères pour \mathcal{K}_j .

L'algorithme de construction est décrit à travers deux procédures de calcul : *Trajectoire \mathcal{K}* et *Recherche \mathcal{K}* . Dans la suite nous commençons par décrire ces deux procédures, puis nous montrons comment elles respectent les critères de construction imposés.

Description de l'algorithme *Recherche \mathcal{K}* . Cet algorithme a pour objet le calcul de la représentation dans \mathcal{K} du i^e segment de la pièce. En d'autres termes, il construit \mathcal{K}_i . Le paramètre R représente l'ensemble des accords devant être représentés par \mathcal{K}_i ; R doit donc regrouper des accords représentables dans \mathcal{K} (cette propriété est assurée par l'appelant *Trajectoire \mathcal{K}* que nous décrivons plus loin). Le second paramètre, \mathcal{D} représente la sous-collection de \mathcal{K} dans laquelle \mathcal{K}_i doit se situer en priorité.

Algorithme *Recherche \mathcal{K}* (R, \mathcal{D})

```

1: si  $R \neq \emptyset$  alors
2:    $\Gamma = \{ \sigma \in \mathcal{D} \mid \mathcal{K}(\sigma) \in R \wedge \sigma \text{ maximise } \text{Card}(\mathcal{K}(\sigma)) \}$ 
3:    $\Gamma' = \{ \sigma \in \Gamma \mid \sigma \text{ minimise } f_1(\mathcal{K}_i \cup \bar{\sigma}) \}$ 
4:   si  $\Gamma' = \emptyset$  alors
5:      $\text{Recherche}_{\mathcal{K}}(R, \overline{\text{St}} \mathcal{D})$ 
6:   sinon
7:     si  $\exists j < i, \sigma \in \Gamma' \quad \sigma \in \mathcal{K}_j$  alors
8:        $\Gamma' \leftarrow \{ \sigma \in \Gamma' \mid \exists j < i, \sigma \in \mathcal{K}_j \}$ 
9:     fin si
10:     $\sigma = \text{choix}(\Gamma')$ 
11:     $\mathcal{K}_i \leftarrow \text{Ext}(\mathcal{K}_i \cup \bar{\sigma})$ 
12:     $\text{Recherche}_{\mathcal{K}}(R \setminus \mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i)$ 
13:   fin si
14: fin si

```

Il s'agit d'une procédure récursive cherchant à construire \mathcal{K}_i élément par élément à partir d'une zone de recherche dont le diamètre grandit progressivement jusqu'à ce que la représentation soit complète. Son fonctionnement est simple : si l'ensemble des accords à représenter est vide, \mathcal{K}_i est défini. Si ce n'est pas le cas, on cherche dans la sous-collection \mathcal{D} des cellules candidates pour représenter des accords de R . Les lignes 2 et 3 effectuent ce calcul : la ligne 2 spécifie une recherche des sous-accords les plus grands d'abord et la ligne 3, des sous-accords les plus présents dans la solution \mathcal{K}_i déjà considérée. (Nous reviendrons sous peu sur ces deux lignes et sur leurs conséquences sur le respect des critères.) Si aucun candidat n'est trouvé, la recherche est relancée (voir ligne 5) sur un domaine plus étendue donné par $\overline{\text{St}} \mathcal{D}$ (les opérateurs de fermeture et d'étoile sont définis chapitre 3). Si, au contraire, plusieurs candidats sont trouvés, l'un d'eux est choisi et utilisé pour étendre la définition de \mathcal{K}_i . Cet incrément est obtenu par le calcul $\text{Ext}(\mathcal{K}_i \cup \bar{\sigma})$. Il correspond à l'ajout du simplexe induit par le candidat choisi ; l'utilisation de l'opérateur d'extension (voir chapitre 3 section 2.1) assure qu'une cellule de \mathcal{K} dont les faces font partie de \mathcal{K}_i sera également dans \mathcal{K}_i . Les éléments ajoutés par l'extension correspondront par définition à des sous-accords de A_i . Finalement, une nouvelle recherche est lancée sur les accords de R qui ne sont pas représentés dans \mathcal{K}_i (les sous-accords nouvellement représentés sont retirés) et en prenant \mathcal{K}_i comme nouveau domaine de recherche (voir ligne 12).

La terminaison de la procédure est assurée par la diminution de l'ensemble R des

accords à représenter ou par l'extension du domaine de recherche \mathcal{D} . Comme les accords de R sont tous représentables dans \mathcal{K} , la croissance petit à petit du domaine de recherche assure que des représentations possibles seront nécessairement visitées.

Description de l'algorithme $Trajectoire_{\mathcal{K}}$. Cette seconde procédure itère $Recherche_{\mathcal{K}}$ pour chaque segment en suivant l'ordre de la pièce : pour chaque segment i , la sous-collection \mathcal{K}_i est initialisée à la sous-collection vide, puis la procédure de construction du segment est lancée. Les valeurs d'initialisation de la procédure récursive (voir ligne 3) sont données par :

- $presence_{\mathcal{K},d}(A_i)$ pour l'ensemble d'accords à représenter R : il s'agit des sous-accords de A_i que \mathcal{K} représente au moins à un endroit par un simplexe. Ces sous-accords sont recherchés en priorité. S'ils sont représentés dans \mathcal{K} , alors ils sont représentés par exactement un simplexe dans \mathcal{K}_i .
- \mathcal{K}_{i-1} pour le domaine de recherche \mathcal{D} : la recherche de cellules pour la construction de \mathcal{K}_i tente de réutiliser en premier lieu les cellules provenant du dernier segment construit \mathcal{K}_{i-1} . Le cas $i = 0$ utilise pour initialiser la recherche les sommets arbitraires désignés par la sous-collection \mathcal{K}_{-1} définie plus haut. Une autre solution aurait pu être d'utiliser l'ensemble des cellules déjà présentes dans la trace de la trajectoire $\bigcup_{k < i} \mathcal{K}_k$.

Cette procédure prend évidemment en argument la pièce P à représenter mais également une dimension d . Cette dernière permet de spécifier que seuls les accords d'au moins $d + 1$ notes n'apparaîtront qu'une seule fois (il s'agit d'affaiblir le critère 1 aux cellules de dimension au moins d). Tous les sous-accords de dimensions inférieures seront représentés par fermeture de la représentation simpliciale des accords (mais possiblement plusieurs fois) ; une partie des sous-accords de dimensions supérieures seront représentés exactement une fois grâce à l'utilisation de l'opérateur d'extension dans $Recherche_{\mathcal{K}}$. Ainsi, appeler $Trajectoire_{\mathcal{K}}$ avec $d = 0$ a pour conséquence de représenter exactement une seule fois par segment toute classe de hauteurs jouée. Par conséquent, toute cellule de plus haute dimension ne peut elle aussi être représentée qu'au plus une fois. Il s'agit de la situation représentée par la trajectoire de droite figure 4. A l'inverse, poser $d = dim(\mathcal{K})$ permet de maximiser la dimension et la taille (à cette dimension) des complexes de la trajectoire. On se situe alors dans le cas de la trajectoire de gauche figure 4.

Respect des critères de construction. L'algorithme de construction proposé respecte les critères 1 et 2 en priorité. Cependant, une priorité stricte de l'un sur l'autre ne permet pas de produire des trajectoires satisfaisantes. Afin de profiter au mieux de ces deux critères, nous proposons de les affaiblir en les restreignant aux d -simplexes. Comme nous venons de le discuter, faire varier le paramètre d de l'algorithme $Trajectoire_{\mathcal{K}}$ entre

Algorithme $Trajectoire_{\mathcal{K}}(P, d)$

- 1: **pour** $i = 0$ à $N - 1$ **faire**
 - 2: $\mathcal{K}_i \leftarrow \emptyset$
 - 3: $Recherche_{\mathcal{K}}(presence_{\mathcal{K},d}(A_i), \mathcal{K}_{i-1})$
 - 4: **fin pour**
-

0 et $\dim(\mathcal{K})$ permet de retrouver les différents cas de figure et autorise une souplesse d'utilisation de l'algorithme.

Le critère 3, imposant de construire la sous-collection \mathcal{K}_i à proximité de \mathcal{K}_{i-1} , est assuré par l'initialisation du domaine de recherche \mathcal{D} à \mathcal{K}_{i-1} (ligne 3 de l'algorithme *Recherche \mathcal{K}*) et par l'expansion de ce domaine par l'opérateur $\overline{\text{St}} \mathcal{D}$ (ligne 5 de l'algorithme *Trajectoire \mathcal{K}*). Après n appels à cet opérateur, les nouvelles cellules incorporées au domaine de recherche sont à distance n du domaine initial [Axen 1998].

La ligne 3 de l'algorithme *Recherche \mathcal{K}* assure le respect du critère 4, le critère de compacité. En effet, parmi toutes les cellules de \mathcal{D} représentant un accord de R , on choisit celles qui minimisent $f_1(\mathcal{K}_i \cup \bar{\sigma})$. Cette quantité représente le nombre de sommets (voir la définition du f -vecteur chapitre 3) obtenus en ajoutant le simplexe $\bar{\sigma}$ à \mathcal{K}_i . Plus on réutilise des sommets déjà existant, moins la forme de \mathcal{K}_i sera étalée dans \mathcal{K} . On remarquera également que lors de l'appel récursif ligne 12, l'espace de recherche est réinitialisé à \mathcal{K}_i assurant également de rechercher les prochains simplexes dans une zone la plus compacte possible autour de \mathcal{K}_i .

Les lignes 7 à 9 de l'algorithme *Recherche \mathcal{K}* cherchent à restreindre l'ensemble des candidats à l'ajout dans \mathcal{K}_i aux cellules déjà apparues pour représenter un précédent segment. Cela permet de limiter la divergence de la trajectoire. On assure par ce procédé le respect du critère 5. Naturellement, ce critère étant le moins prioritaire, cette restriction est effectuée si elle ne réduit pas les candidats à l'ensemble vide.

Enfin, si le crible imposé par l'ensemble des critères ne réduit pas l'ensemble des candidats à une unique possibilité, la ligne 10 spécifie un choix aléatoire parmi ces candidats. Ce recours au hasard rend l'algorithme non-déterministe. On pourrait raréfier le recours à cet aléa de différentes manières, par exemple en rajoutant d'autres critères de sélection à ceux que nous avons vus. Certains critères sont suggérés dans [Chouvel 2009a].

3 Transformation de trajectoires

Dans cette section, on propose différentes transformations de pièces musicales, définies par opérations spatiales sur les trajectoires. Ces opérations peuvent être des rotations, des translations, ou encore des transformations de l'espace support. Certaines transformations spatiales correspondent à des opérations musicales connues, par exemple la transposition ou l'inversion. Certaines autres ne possèdent pas d'interprétation connue. Ces transformations reposent formellement sur le concept de morphisme de complexes cellulaires présenté chapitre 3 section 2.4.

3.1 Transformation d'une pièce

Soient P une pièce, \mathcal{K} et \mathcal{K}' deux complexes d'accords, et $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$ la trace d'une trajectoire $T_{\mathcal{K}}$ représentant la pièce P dans \mathcal{K} . Soit ϕ une inclusion structurelle de $|\mathcal{T}|$ dans $|\mathcal{K}'|$. Le morphisme ϕ permet de redécorer les cellules topologiques de \mathcal{K} pour former une trace \mathcal{T}^{ϕ} dans \mathcal{K}' . Il induit alors une transformation \mathcal{T}_{ϕ} de la pièce P en une pièce P'

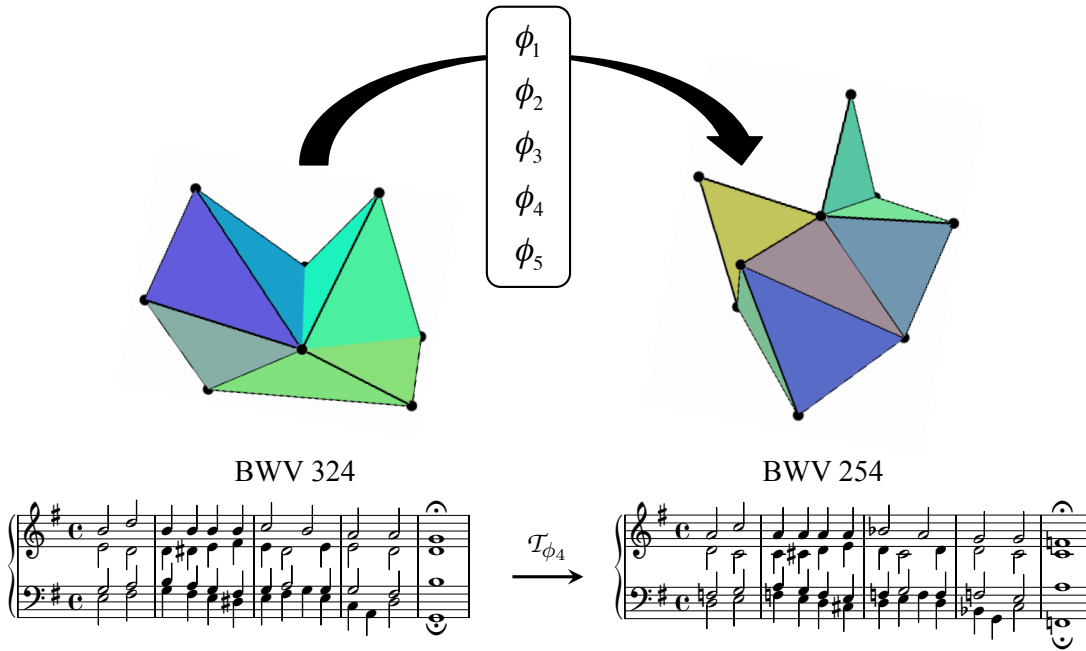


FIGURE 5 – Première ligne montre que le complexe d'accords issu de l'assemblage des accords choral BWV 324 de J.-S. Bach (à gauche) est inclus cinq fois dans le complexe des accords du choral BWV 254 (à droite). La seconde ligne montre comment l'application de l'inclusion structurelle ϕ_4 transforme la première pièce en la seconde. Cette transformation correspond à une transposition du choral d'une seconde majeure vers le bas.

définie par :

$$\mathcal{T}_\phi(A_i, d_i) = (\{n \in \mathbb{Z}_N \mid \exists \sigma \in \mathcal{S}_0(\mathcal{K}_i), \mathcal{T}^\phi(\sigma) = n\}, d_i)$$

où \mathcal{K}_i représente A_i dans $T_{\mathcal{K}}$.

La notation \mathcal{T}_ϕ rappelle que la transformation dépend uniquement de la fonction ϕ (et aucunement de la pièce P). On remarque qu'il est suffisant d'appliquer la transformation \mathcal{T}_ϕ aux sommets afin de déterminer le contenu du nouvel ensemble de classes de hauteurs. Pour produire une nouvelle pièce P' à partir de la segmentation donnée par \mathcal{T}_ϕ , il est nécessaire de préciser une octave pour chaque classe de hauteurs transformée. Dans les exemples suivants, nous proposons de choisir l'octave de la note transformée de manière à minimiser sa distance avec la note originale. Ainsi, une transformation affecte les classes de hauteurs sans modifier de manière trop importante le registre dans lequel évolue la nouvelle pièce.

3.2 Inclusion structurelle entre espaces support

Soient \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 deux complexes d'accords, et ϕ une inclusion structurelle de $|\mathcal{K}_1|$ dans $|\mathcal{K}_2|$. La fonction ϕ peut être appliquée de manière évidente à toute trajectoire dans \mathcal{K}_1 . Ce type de transformation peut intuitivement être compris comme le plongement dans un complexe d'une trajectoire provenant d'un autre complexe.

Espaces support résultants d'une pièce. On suppose que les complexes \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont respectivement construits à partir des accords de deux pièces P_1 et P_2 , à l'aide de la méthode présentée dans le chapitre 5 section 3. La pièce P_1 est représentée dans \mathcal{K}_1 par une trajectoire parcourant la totalité des éléments de \mathcal{K}_1 . Il en est de même pour la pièce P_2 représentée dans \mathcal{K}_2 par une trajectoire parcourant l'ensemble de ses éléments. L'inclusion structurelle ϕ^6 permet de construire une pièce P'_1 par l'application de la transformation \mathcal{T}_ϕ . La pièce P'_1 peut être interprétée comme une « reconstitution structurelle » de la pièce P_1 dans l'espace de la pièce P_2 .

Une recherche d'inclusions structurelles entre les complexes construits à partir de chorals de J.-S. Bach nous a permis de relever des inclusions structurelles reliant différents chorals. La figure 5 illustre le fait qu'il existe cinq fonctions définissant une inclusion structurelle du complexe issu de l'assemblage des accords du choral BWV 324 dans le complexe issu du choral BWV 254. Ces fonctions permettent chacune de définir une transformation du choral BWV 324. Une de ces cinq transformations a la propriété d'avoir le même effet qu'une transposition d'une seconde majeure vers le bas (figure 5). Les quatre autres transformations ne peuvent pas être interprétées de manière aussi directe. Cette propriété inattendue montre que le premier complexe est *inclus* (et non seulement structurellement inclus), à transposition près, dans le second. Ce sous-complexe peut être interprété comme un support théorique générique utilisé par le compositeur dans ces deux chorales.

Isomorphismes entre espaces support. Lorsque ϕ définit un isomorphisme entre les deux complexes \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 , la transformation \mathcal{T}_ϕ associe à toute trajectoire de \mathcal{K}_1 une trajectoire \mathcal{K}_2 , et vice-versa. Ce type d'isomorphismes est fréquent entre les complexes dépliés présentés section 2.2.2 du chapitre 5. Ces complexes sont en effet souvent liés par des propriétés d'isomorphisme par leur construction (plus précisément, deux complexes dépliés représentant respectivement des ensembles d'accords de même taille et liés par la même relation d'équivalence, sont isomorphes). La figure 6 illustre le plongement dans $\mathcal{K}_{TI}^u[2, 3, 7]$ d'une trajectoire représentant dans $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ les premières mesures du choral BWV 256 de J.-S. Bach.

3.3 Trajectoires symétriques

Un automorphisme ϕ du support d'une trace \mathcal{T} correspond à une symétrie dans la trajectoire. La transformation \mathcal{T}_ϕ associée entraîne une permutation dans le temps des ensembles de hauteurs constituant la pièce originale. La trajectoire de gauche sur la figure 10 comprend une telle symétrie. Plus précisément, il s'agit d'une symétrie centrale dont le centre est situé au milieu de l'arc liant les sommets G et Bb . La transformation associée a pour effet d'inverser l'ordre des accords (les décorations du premier accord sont transformées en celles du dernier, etc.).

6. Il s'agit de la relation entre complexes issues des accords d'une pièce évoquée dans le paragraphe 3.2.4 du chapitre 5.

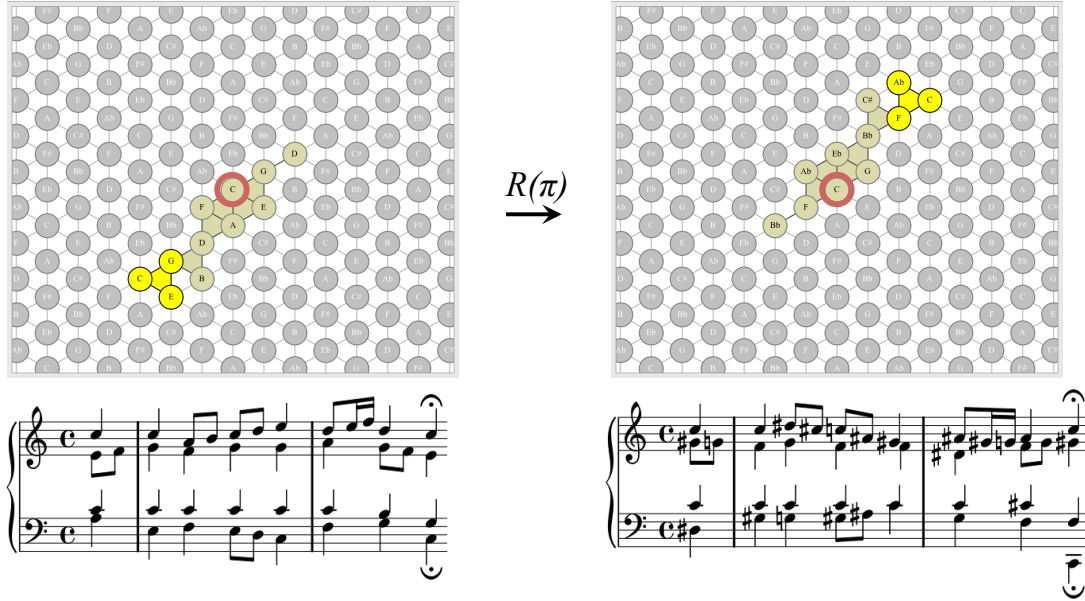


FIGURE 7 – À gauche, une trajectoire représentant les premières mesures du choral *BWV256* dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$. Les symétries de cet espace permettent d'appliquer à la trajectoire, ou bien à son espace support, une symétrie centrale. Le centre de symétrie correspond au sommet entouré. Cette transformation aboutit au même résultat qu'une inversion sur chaque classe de hauteurs.

Translation dans un T -complexe. Soient un T -complexe déplié \mathcal{K} , et deux 0-cellules σ_1 et σ_2 de \mathcal{K} . La translation ϕ transformant σ_1 en σ_2 est caractérisée par la classe d'intervalles i transformant les classes de hauteurs associées à ces sommets : $i = \mathcal{K}(\sigma_2) - \mathcal{K}(\sigma_1)$. On remarquera que pour toute classe de hauteurs n , peu importe la 0-cellule σ choisie telle que $\mathcal{K}(\sigma) = n$, le sommet transformé $\phi(\sigma)$ sera décoré par la classe de hauteurs $n + i$. On obtient donc pour toute pièce P :

$$\mathcal{T}_\phi(A_i, d_i) = (\{(n + i) \bmod N \mid n \in A_i\}, d_i)$$

L'application d'une translation sur une trajectoire dans un complexe de $\mathcal{K}_{T^*}^u[\cdot]$ correspond à une transposition. Cette transposition s'interprète différemment suivant le système considéré : une translation dans un système chromatique (*i.e.*, $N = 12$) entraîne une transposition classique (c'est-à-dire un ajout à chaque note d'un même intervalle $i \in \mathbb{Z}_{12}$). En revanche, une translation dans un complexe diatonique (*i.e.*, l'ajout d'un intervalle $i \in \mathbb{Z}_7$) entraîne une transposition modale. Ce changement de mode se fait sur la tonalité associée au complexe diatonique. Si cette tonalité est la même que celle de la pièce, la transformation entraîne un changement de mode dans la pièce.

Symétries centrales dans un T -complexe. La symétrie centrale dans un T -complexe déplié \mathcal{K} a pour conséquence de transformer chaque intervalle générateur de $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ en son inverse. Cela s'explique par le fait que chaque direction dans un T -complexe correspond à

un sous-groupe de $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ généré par une classe d'intervalles. La transformation entraîne donc une inversion de chaque classe de hauteurs, par rapport à la classe de hauteurs associée au centre de la symétrie. Là encore, pour toute classe de hauteurs n , peu importe la 0-cellule σ choisie telle que $\mathcal{K}(\sigma) = n$, le sommet transformé $\phi(\sigma)$ sera décoré par la classe de hauteurs $m - n$, où m est la classe de hauteurs associée au centre de la symétrie. On obtient alors pour toute pièce P :

$$\mathcal{T}_{\phi}(A_i, d_i) = (\{(m - n) \bmod N \mid n \in A_i\}, d_i)$$

La figure 7 illustre une symétrie centrale appliquée à une trajectoire représentant les premières mesures du choral *BWV256* de J.-S. Bach.

Transformations semi-régulières dans les T -complexes. Comme nous l'avons fait remarquer, les deux types de transformations précédents (translation et symétrie centrale) ont pour propriété d'être entièrement spécifiée par la transformation qu'elles occasionnent sur les classes de hauteurs, peu importe la cellule considérée pour la transformation. Il est donc possible de spécifier le morphisme ϕ associé par une simple bijection $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$. Nous appelons ce type de transformations *transformations régulières*.

Par opposition aux transformations régulières, il existe des morphismes ϕ ne pouvant pas être spécifiés aussi simplement sur les classes hauteurs. Par exemple, les symétries axiales et les rotations d'angle quelconque qu'on s'attend à appliquer dans le *Tonnetz* déplié de dimension 2 (*i.e.*, $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$) peuvent transformer certains sommets décorés par la même classe de hauteurs en sommets associés à des classes de hauteurs différentes.

Cependant, parmi toutes les transformations irrégulières certaines peuvent être spécifiées par une fonction agissant sur les intervalles générant le 1-squelette du T -complexe. Tout automorphisme $f : \mathcal{I}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ du groupe $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ induit une transformation dans \mathcal{K} . Bien que cette transformation ne conserve pas les images des classes de hauteurs, tout couple de classes de hauteurs séparées par l'intervalle i sera forcément transformé en un couple de classes de hauteurs séparées par l'intervalle $f(i)$. Nous appelons ce type de transformations *transformations semi-régulières*. En particulier, pour les T -complexes dépliés de dimension 2, ces transformations s'apparentent à des rotations : dans les complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[i_1, i_2, i_3]$ correspondant à des grilles triangulaires infinies, une rotation d'angle $\pi/3$ (resp. $2\pi/3$) correspond à l'automorphisme de groupe défini par $f(i_k) = i_{(k+1) \bmod 3}$ (resp. $f(i_k) = i_{(k+2) \bmod 3}$).

Nous appellerons *transformation irrégulière*, toute transformation ϕ ni régulière ni semi-régulière.

Homothétie dans les T -complexes. Effectuer une homothétie dans une trajectoire implique de multiplier chaque intervalles séparant deux notes par un entier fixé. Lorsque cet entier est premier avec N , la transformation résultante est semi-régulière. Dans le cas contraire, elle est irrégulière.

Contrairement aux transformations vues précédemment, l'homothétie n'est pas une isométrie. Il est cependant intéressant de remarquer qu'une telle transformation équivaut

Transformation sur l'espace	Transformation sur la trajectoire	Transformation musicale	Régularité
$\mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{chro}}] \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{chro}}]$	Translation	Transposition chromatique	Régulier
	Symétrie centrale	Inversion chromatique	Régulier
	Rotation d'angle $\neq \pi$ Symétrie axiale	-	Semi-régulier
	Homothétie ($\Leftrightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{chro}}] \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X'_{\text{chro}}]$)	-	Semi-régulier
$\mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}} \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}}$	Translation	Transposition modale	Régulier
	Symétrie centrale	Inversion modale	Régulier
	Rotation d'angle $\neq \pi$ Symétrie axiale	-	Semi-régulier
	Homothétie ($\Leftrightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}} \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X'_{\text{hep}}]_{\text{T}}$)	-	Semi-régulier
$\mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{chro}}] \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X'_{\text{chro}}]$	Plongement	-	Semi-régulier
$\mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}} \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X'_{\text{hep}}]_{\text{T}}$	Plongement	-	Semi-régulier
$\mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}} \rightarrow \mathcal{K}^u_{Tl}[X_{\text{hep}}]_{\text{T}}$	Plongement	Transposition chromatique (+ transposition modale)	Régulier
Trace \rightarrow Trace	Isométrie	Permutation dans le temps des ensembles de notes	Irrégulier
$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$	Isométrie	-	Irrégulier
$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$	Plongement	-	Irrégulier

FIGURE 9 – Transformations de trajectoires et leurs interprétations musicales.

avec les autres afin de produire un grand nombre de transformations à partir d'une pièce originale. Différentes transformations ou compositions de transformations de ce tableau peuvent dans certains cas aboutir à des résultats similaires sur une pièce. Par exemple, le plongement d'une trajectoire d'un complexe diatonique dans un autre peut être équivalente à une translation dans un complexe chromatique. En effet, le changement de tonalité entraîné par le changement de complexe diatonique peut être obtenu en effectuant une transposition chromatique. Il en est de même pour certaines homothéties.

Les transformations présentées dans ce chapitre sont disponibles dans l'outil HexaChord qui a été développé dans le cadre de cette thèse et qui est présenté dans le chapitre 7. Ces transformations ont aussi été appliquées dans le *Modèle Planet* dans le cadre d'une collaboration avec G. Baroin [Baroin 2013].

4 Compliance d'espace par rapport à une trajectoire

Comme définie dans le chapitre 3, la compliance est une mesure quantifiant la propension d'un espace E à révéler les propriétés d'un système S . Dans cette section nous

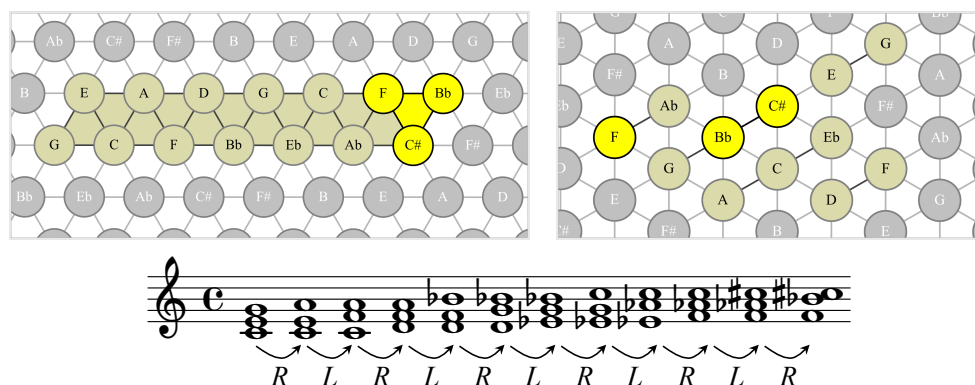


FIGURE 10 – Séquence d’accords extraite du *Scherzo* de la *9ème Symphonie* de L. van Beethoven. La ligne du bas montre que la séquence d’accords peut être obtenue en appliquant successivement les opérations néo-riemanniennes L et R présentées dans le chapitre 2. La première ligne fournit la représentation de cette séquence d’accords dans les complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ (à gauche) et $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$ (à droite). Les cellules grisées représentent la trace de la trajectoire (*i.e.*, les accords et notes joués dans le passé).

tentons de mesurer la qualité d’un complexe d’accords à révéler certaines propriétés d’une séquence musicale vue comme une trajectoire.

4.1 Un exemple intuitif de compliance

Les mesures 143 à 176 du *Scherzo* de la *9ème Symphonie* de L. van Beethoven ont fréquemment été analysées à la lumière de la théorie néo-riemannienne [Cohn 1991, Cohn 1992]. En effet, ce passage peut être réduit à une progression d’accords (cf. figure 10) que l’on obtient en appliquant successivement les opérations néo-riemanniennes R et L présentées dans le chapitre 2.

La figure 10 illustre des trajectoires représentant cette séquence d’accords dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$, dont le 1-squelette correspond au *Tonnetz*, et dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$. Dans le premier cas, la trajectoire se manifeste sous la forme d’une forme compacte (ici un triangle) évoluant de façon rectiligne (figure 10 à gauche). En revanche, aucune régularité particulière ne ressort de la représentation dans le second complexe (figure 10 à droite). De manière générale, on dira que la trajectoire de gauche est *régulière* et que par conséquent l’espace $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ est *compliant* avec cette progression d’accord. Nous voyons deux raisons principales à cette régularité :

- les triades utilisées dans la séquence sont représentées dans cet espace par des 2-simplexes, donc par des objets compacts (ce qui n’est par exemple pas le cas de la représentation de la dernière triade $(C\sharp, F, Bb)$ dans $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$ comme le montre la figure 10),
- l’alternance régulière entre les opérations R et L représente la séquence comme une trajectoire rectiligne⁹.

9. Il s’agit là d’une propriété intrinsèque de cet espace due sa relation avec le *Tonnetz*. Les qualités du

La première propriété est d'ordre statique car elle peut être évaluée sur chaque accord de manière indépendante. En revanche, la deuxième est d'ordre dynamique car elle porte sur les transitions entre chaque paire d'accords. Cette particularité rappelle la discussion du chapitre 3 section 2.6.

Nous proposons dans la suite de ce chapitre d'appliquer cette approche pour mesurer la compliance d'un complexe d'accords avec une séquence musicale. Dans le cadre de notre étude, nous réduisons la définition de la compliance de la manière suivante :

- l'espace E est un complexe d'accords \mathcal{K} au sens où on l'a défini dans le chapitre 5,
- le système S est une pièce musicale P , réduite à séquence d'ensembles de notes étiquetés par une durée,
- la pièce P est représentée dans le complexe \mathcal{K} par une trajectoire au sens défini de ce chapitre,
- \mathcal{K} révèle une propriété de P si cette propriété se manifeste sous la forme d'une « régularité » de la trajectoire représentant P dans \mathcal{K} .

Notre approche est motivée par la volonté de pouvoir associer à une pièce les propriétés musicales intrinsèques d'un espace dans lequel elle est décrite par une trajectoire régulière. De manière générale, la régularité d'une trajectoire se caractérise par une singularité quelconque de sa géométrie (trajectoire rectiligne, symétrique, périodique, compacte, etc). Cette démarche, restreinte aux espaces de hauteurs sous formes de grilles carré, est adoptée dans [Brown 2003]. Nous désirons ici l'étendre aux complexes d'accords définis dans le chapitre 5. Dans cette section, nous nous intéressons exclusivement à la compacité des représentations.

4.2 Comparaison d'espaces pour une pièce donnée

Nous proposons de comparer la compacité de la trajectoire associée à une pièce dans différents espaces minimaux. Le fait de se limiter aux espaces minimaux facilite l'étude dans le sens où, comme on l'a vu précédemment, une pièce est représentée dans ces espaces par une trajectoire unique. Il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte la méthode utilisée pour construire la trajectoire afin de mesurer la compliance d'un espace avec une pièce. Nous utilisons les formules présentées dans le chapitre 3 pour calculer la d -compacité (ou compacité à la dimension d) d'une pièce au cours du temps dans un espace, puis la d -compacité moyenne de la pièce.

4.2.1 Espaces support

La recherche de complexes d'accords représentant de manière compacte une pièce suggère de manière évidente deux complexes en premiers lieux :

- le complexe complet \mathcal{C}_c , dans lequel sont représentés toutes les notes et tous les accords,
- le complexe résultant des accords de la pièce (défini chapitre 5 section 3).

Tonnetz à représenter les opérations néo-riemanniennes sont détaillées dans [Cohn 1997]

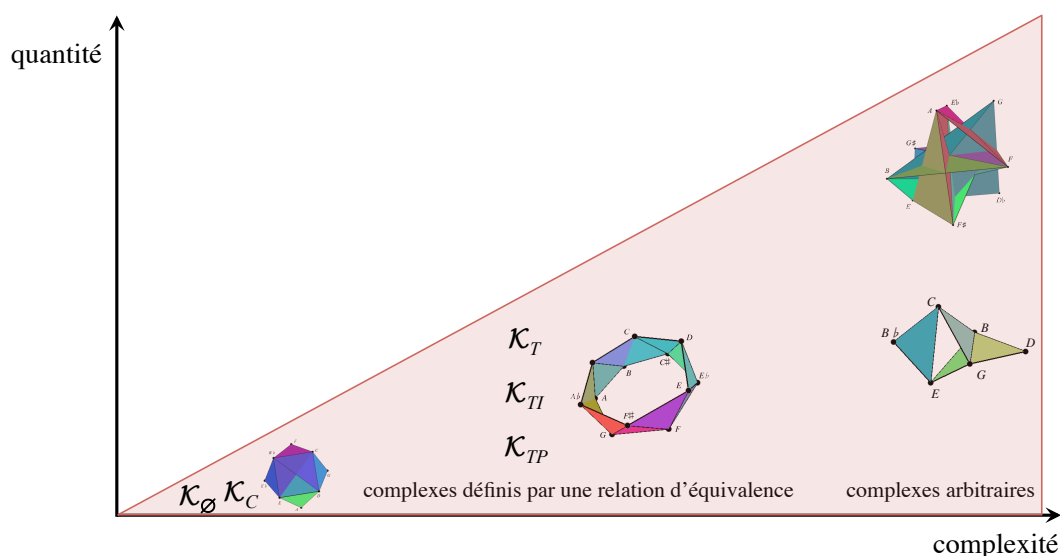


FIGURE 11 – Organisation des espaces support par complexité. Le nombre de complexes augmente avec la complexité.

Le complexe complet représentant la totalité des ensembles de notes, les éléments qui composent une pièce y sont systématiquement présents avec une compacité maximale. En revanche, l'exhaustivité de cet espace le prive de toute autre propriété. Son aptitude à représenter une pièce de manière compacte ne révèle donc aucune information sur la pièce. Le complexe résultant de l'auto-assemblage des éléments de la pièce ne contient aucune autre propriété que celle d'être la pièce. Le fait qu'il soit compliant avec la pièce ne peut donc apporter aucune nouvelle information sur la pièce.

Il est plus intéressant d'effectuer nos analyses parmi des espaces support caractérisés par des propriétés musicales particulières mais sans connaissance *a priori* de la pièce à analyser. La figure 11 illustre une organisation des complexes d'accords en fonction de leur complexité. Intuitivement, plus les espaces sont complexes¹⁰ plus ils sont nombreux. Quand les espaces les plus réguliers se réduisent au complexe vide et au complexe complet, les espaces les plus complexes (*i.e.*, les moins réguliers) sont ceux pour lesquels la seule définition qui les caractérise consiste à énumérer les éléments qui les constituent ; il s'agit typiquement des complexes issus de l'assemblage des accords d'une pièce.

Les catalogues de complexes d'accords représentent un terrain intéressant pour une étude de compliance : ils sont plus complexes que les complexes vide et complet, mais ils sont définis par la donnée d'une relation d'équivalence entre accords. Nous choisissons de mesurer la compacité des trajectoires dans ces espaces. En effet, chacun de ces espaces est associé à une propriété musicale (portée par les accords qui le constituent) et ne dépendent aucunement de la pièce que l'on souhaite étudier. Nous évitons ainsi des espaces trop riches (comme le complexe complet) et donc trop pauvres en propriétés.

10. La notion de complexité d'un espace support a été abordée dans le chapitre 5 et correspond à son degré de régularité.

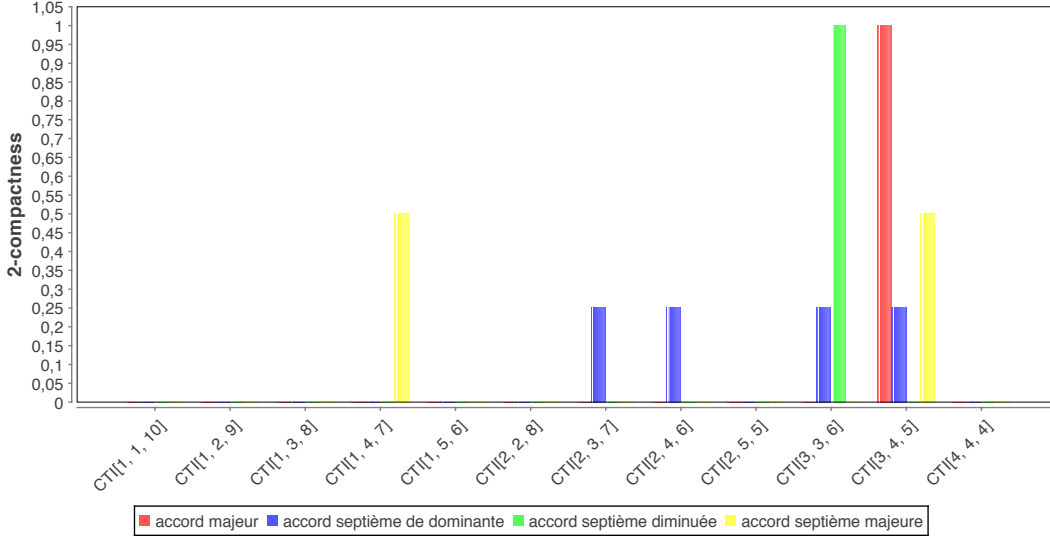


FIGURE 12 – Compacité des accords majeur, septième de dominante, septième diminuée et septième majeure dans les complexes de dimension 2 du catalogue $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$.

4.2.2 Compacité d'un accord

On rappelle que la d -compacité d'un accord A représenté par la sous-collection \mathcal{K}_A dans un complexe minimal \mathcal{K} est donnée par :

$$\mathcal{C}_d(\mathcal{K}, \mathcal{K}_A) = \frac{f_{d+1}(\mathcal{K}_A)}{(f_1(S(A)))_{d+1}}$$

La figure 12 illustre la compacité des accords majeurs, septième de dominante, septième diminuée et septième majeure dans les 12 complexes respectivement associés aux 12 classes d'accords de taille 3 équivalents par transposition et inversion (cf. annexe A section 2.1). Ce diagramme peut facilement être mis en relation avec le 3-vecteur de ces accords ($[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]$ pour l'accord majeur, $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]$ pour l'accord septième de dominante, $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0]$ pour l'accord septième diminuée et $[0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0]$ pour l'accord septième majeur). On notera que ce type de diagramme permet de reconnaître facilement des accords en Z^k -relation (cf. chapitre 3 section 1.2).

4.2.3 Compacité d'une trajectoire

On rappelle que la d -compacité d'une trajectoire $T_{\mathcal{K}}$ dans un complexe est donnée par la moyenne de la compacité des représentations \mathcal{K}_i des accords qui la constituent, pondérées par leur durée¹¹ :

$$\mathcal{C}_d(\mathcal{K}, T_{\mathcal{K}}) = \frac{1}{D} \times \sum_{i=0}^N d_i \mathcal{C}_d(\mathcal{K}, \mathcal{K}_i)$$

11. Cela correspond au calcul défini dans le chapitre 3.

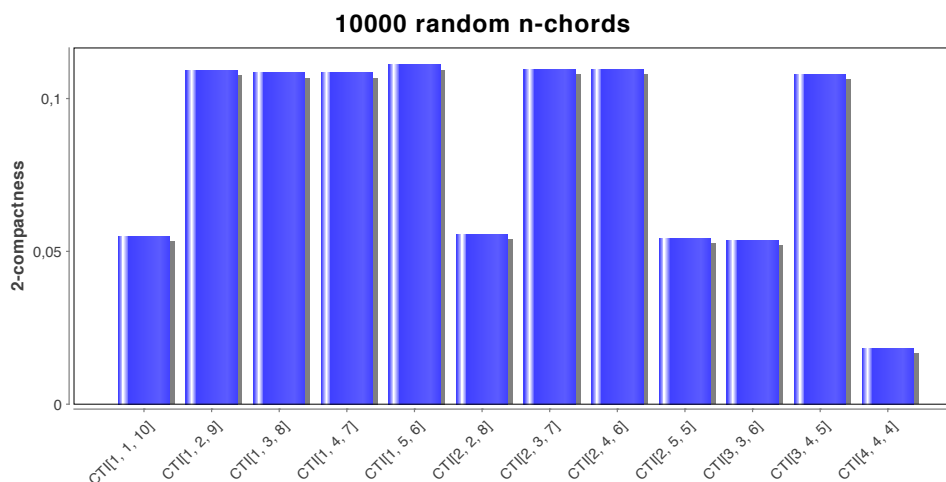


FIGURE 13 – 2-Compacité moyenne d'une séquence de 10000 accords générés aléatoirement dans les 12 complexes de dimension 2 du catalogue $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$.

où $D = \sum_{i=0}^N d_i$ représente la durée totale de la pièce.

Probabilité de compacité. La figure 13 illustre la 2-compacité dans les 12 complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ de dimension 2 d'une séquence de 10000 accords générés aléatoirement. La compacité étant calculé dans des complexes de dimension 2, on ne génère que des accords à 3 notes minimum.

L'irrégularité de ce diagramme montre qu'un accord quelconque a une probabilité plus élevée d'être représenté de manière compacte dans certains complexes plutôt que dans d'autres. Cette différence dépend en fait de la taille des complexes. En effet, plus le complexe comprend de d -simplexes, plus la probabilité d'un accord quelconque à y être représenté est élevée. Ainsi, un accord quelconque a une probabilité 6 fois plus élevée d'être représenté de manière compacte (à la dimension 2) dans $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ que dans $\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$ car $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ comprend 24 2-simplexes alors que $\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$ n'en comprend que 4. De manière générale, la probabilité de d -compacité d'un accord quelconque dans un complexe \mathcal{K} est proportionnelle au nombre de d -simplexes que comprend \mathcal{K} , autrement dit à $f_{d+1}(\mathcal{K})$. Ainsi, la valeur moyenne $E(\mathcal{C}_d(\mathcal{K}))$ de la compacité \mathcal{C}_d d'un accord quelconque de taille supérieure ou égale à $d + 1$ dans un complexe \mathcal{K} est égale au rapport de $f_{d+1}(\mathcal{K})$ sur le nombre total d'accords de taille $d + 1$:

$$E(\mathcal{C}_d(\mathcal{K})) = \frac{f_{d+1}(\mathcal{K})}{\binom{N}{d+1}}$$

Le fait que différents espaces support n'ont pas autant de chance de représenter un accord quelconque de manière compacte montre qu'il faut considérer avec prudence la différence de compacité d'une trajectoire dans deux espaces avant d'en déduire des propriétés sur la pièce associée.

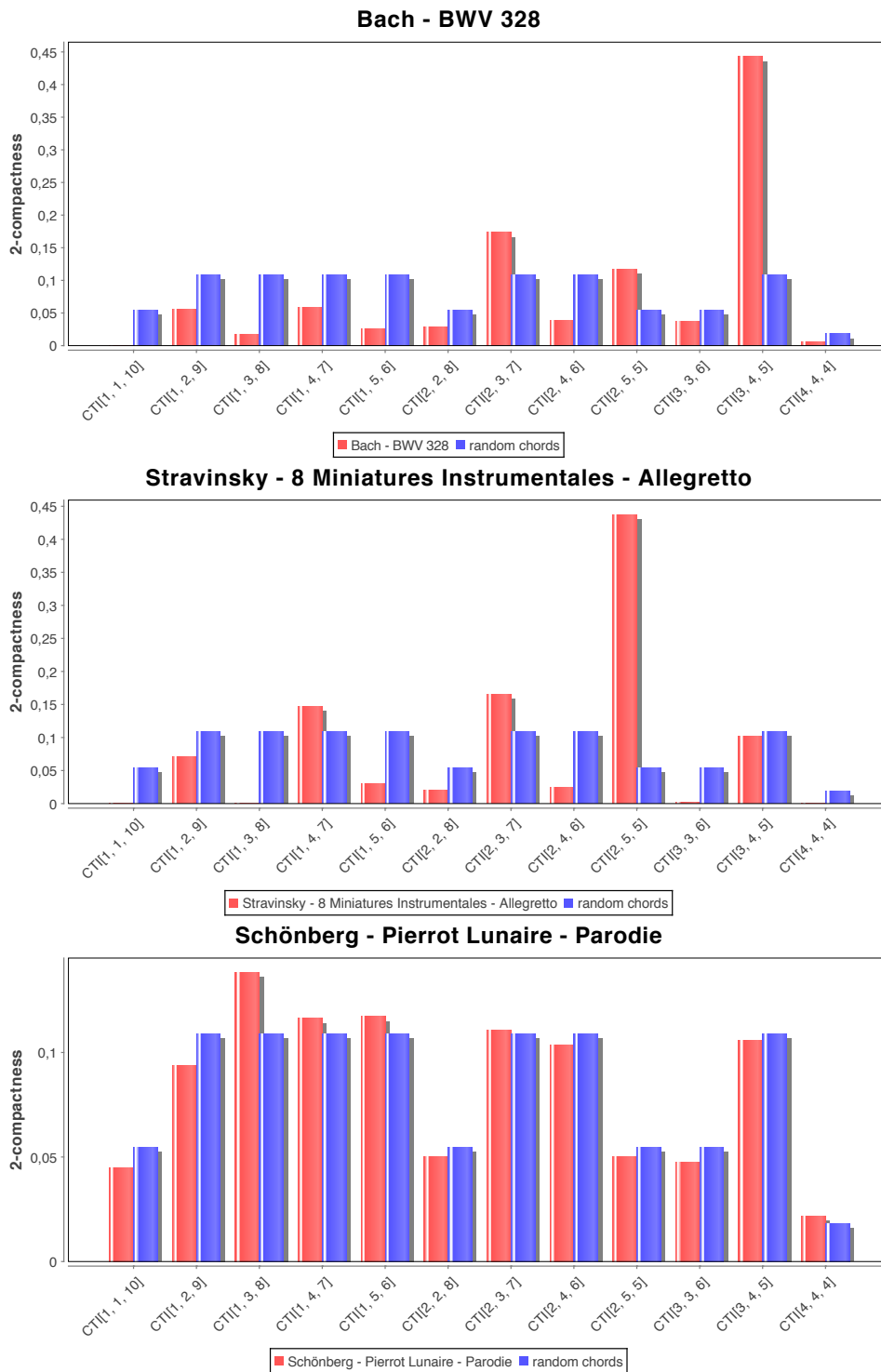


FIGURE 14 – Comparaison de la 2-compacité de 3 pièces avec la 2-compacité moyenne associée dans les 12 complexes $\mathcal{K}_{TI}[X_{chro}]$ de dimension 2.

Application pour la comparaison d'oeuvres. Les histogrammes de la figure 14 illustrent la 2-compacité dans les 12 complexes d'accords de taille 3 du type $\mathcal{K}_{TI}[X_{chro}]$ de trois pièces : le choral *BWV 328* de J.-S. Bach, la quatrième des *Huit miniatures instrumentales* de I. Stravinsky (« Allegretto »), et le dix-septième poème du *Pierrot Lunaire* de A. Schönberg (« Parodie »). La 2-compacité des pièces est représentée en rouge. Pour chaque espace, cette compacité est comparée à la 2-compacité moyenne qui lui est associée (en bleu). La forte 2-compacité d'un espace particulier pour les deux premières pièces illustre une utilisation typique de certaines formes d'accords à 3 sons. En effet, la prédominance des accords parfaits mineurs et majeurs permet au choral de J.-S. Bach d'être représenté par une trajectoire relativement compacte dans $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$. De même, la représentation compacte de la pièce de I. Stravinsky dans $\mathcal{K}_{TI}[2, 5, 5]$ montre la prédominance des accords contenus dans ce complexe. Enfin, la pièce de A. Schönberg est intéressante dans le sens où parmi les 12 espaces testés, aucun ne se démarque en particulier par sa faculté à représenter la pièce par une trajectoire compacte, ce qui témoigne d'une utilisation très large des différents types d'accords à au moins 3 sons.

4.3 Classification par critère de compacité

On propose d'utiliser la compacité afin d'établir une notion de distance entre différentes pièces. Pour un ensemble de complexes d'accords minimaux $E = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \dots\}$, on définit la d -distance entre deux pièces P et P' par :

$$D_{E,d}(P, P') = \sqrt{\sum_{\mathcal{K} \in E} (\mathcal{C}_d(\mathcal{K}, T_{\mathcal{K}}) - \mathcal{C}_d(\mathcal{K}, T'_{\mathcal{K}}))^2}$$

où $T_{\mathcal{K}}$ et $T'_{\mathcal{K}}$ correspondent respectivement aux trajectoires représentant P et P' dans \mathcal{K} . Cette distance peut se comprendre intuitivement de la manière suivante : pour un ensemble E de n complexes, on considère un espace Euclidien à n dimensions dont chaque dimension correspond à la compacité dans un complexe de E . Une pièce P est alors représentée par un point dont les coordonnées correspondent respectivement à la compacité de sa trajectoire dans chacun des complexes de E .

On calcule la compacité de la trajectoire d'une pièce par rapport à la somme des durées des ensembles de notes de taille $d+1$ au moins. Afin que cette approximation n'affecte pas la pertinence de nos résultats, on ne calculera dans la suite la d -distance entre deux pièces qu'à condition qu'au moins $d+1$ classes de hauteurs distinctes soient jouées simultanément durant au moins 50% de la pièce.

Ces distances ont été utilisées pour classer sous forme de dendrogramme un ensemble constitué de 5 pièces de J.-S. Bach, 5 pièces de C. Debussy, 6 pièces de A. Schönberg, 2 pièces de O. Messiaen, 3 pièces de Jazz, et d'un ensemble d'accords à trois sons générés aléatoirement (figures 15 et 16). L'ensemble d'espaces support choisi est constitué des 12 complexes $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ de dimension 2. La forte compliance de $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$ avec les pièces tonales (en particulier les pièces de J.-S. Bach et les pièces de Jazz) permet de les regrouper. De même, l'utilisation typique de la gamme par ton dans certaines oeuvres de C. Debussy entraîne une forte compliance de $\mathcal{K}_{TI}[2, 4, 6]$, leur permettant aussi d'être regroupées. Comme constaté dans le paragraphe précédent, le calcul de la compacité permet difficilement de

séparer certaines pièces de A. Schönberg d'une suite d'accords aléatoires. La comparaison des deux dendrogrammes montre que le calcul de la compacité à la dimension 2 permet de distinguer le troisième prélude du premier livre de C. Debussy en l'éloignant de la série d'accords aléatoires. Il en va de même pour les deux pièces de O. Messiaen qui se retrouvent voisines dans le second dendrogramme. Nous présentons cet exemple sans plus de détails afin de montrer que la compacité des trajectoires dans les espaces théoriques peut révéler des informations sur le style d'une oeuvre. Nous pensons qu'une utilisation de cette approche de manière approfondie pourrait aboutir à d'intéressants résultats en musicologie.

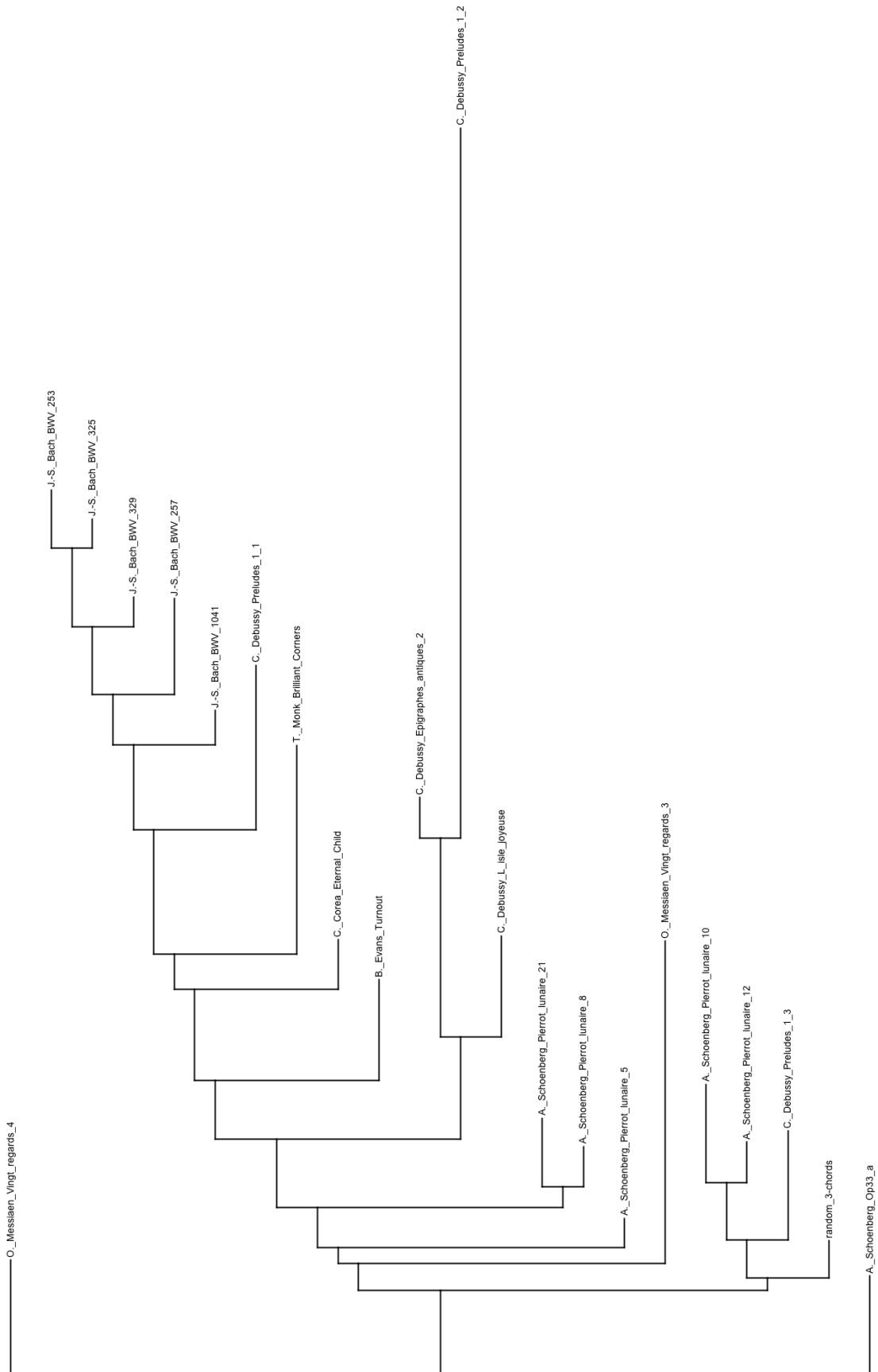


FIGURE 15 – Une représentation des distances séparant un ensemble de pièces, par 1-compatibilité.

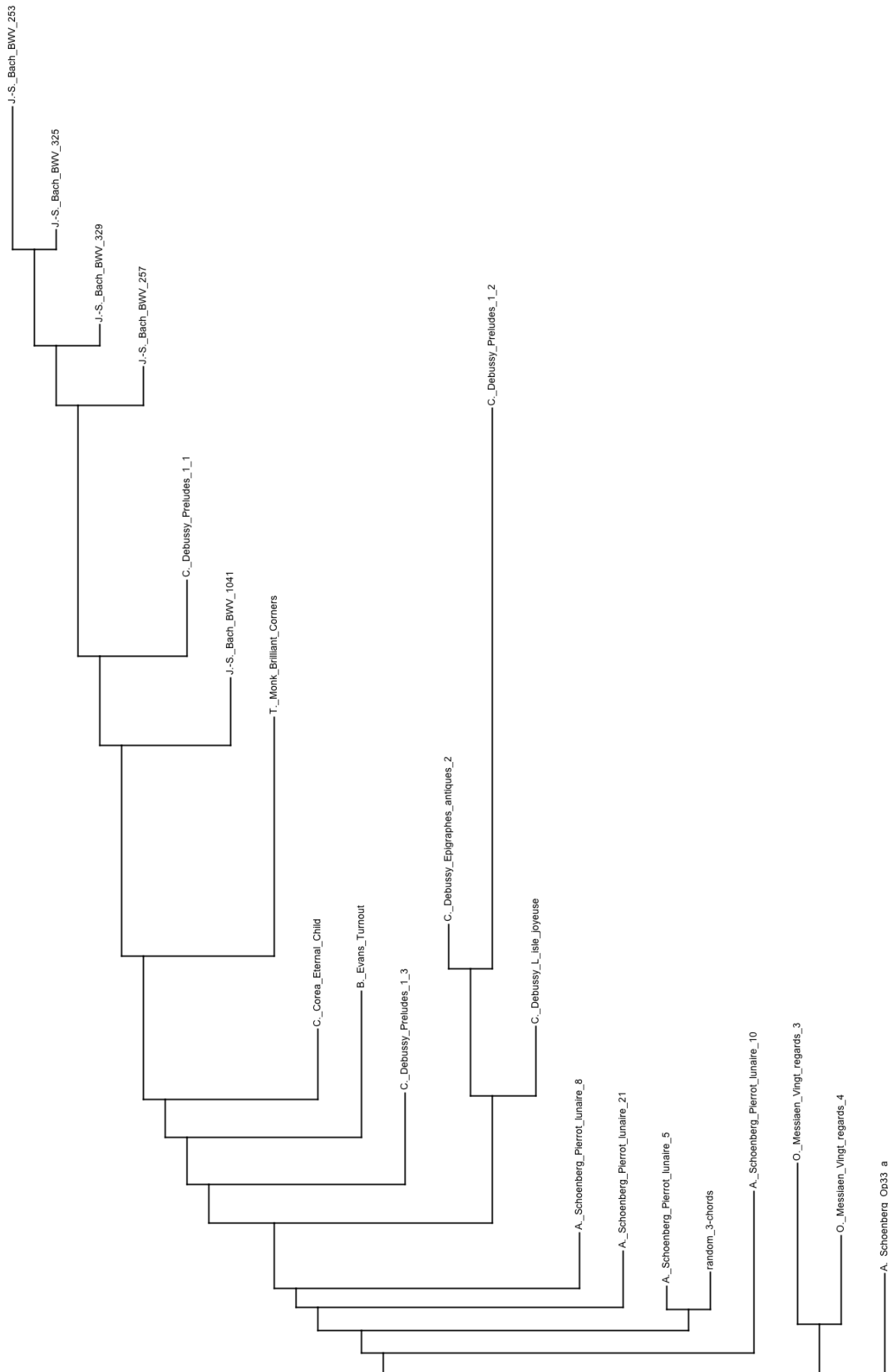


FIGURE 16 – Une représentation des distances séparant un ensemble de pièces, par 2-compacité.

Développement logiciel

1	HexaChord	127
2	PaperTonnetz	134

Ce chapitre a pour objet de présenter HexaChord et PaperTonnetz, deux outils logiciels développés dans le cadre de cette thèse. HexaChord est un outil d'aide à l'analyse musicale dont les fonctionnalités sont dédiées à la visualisation et au calcul sur des fichiers MIDI. Ces fonctionnalités permettent la construction et la manipulation des espaces et des trajectoires décrits dans les chapitres 5 et 6. PaperTonnetz est un outil d'aide à la composition qui offre un environnement au compositeur pour la construction de trajectoires dans des complexes d'accords à l'aide de la technologie du papier interactif. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Jérémie Garcia.

1 HexaChord

HexaChord est un logiciel qui a été prototypé en MGS puis développé en Java. Le choix de ce dernier langage se justifie par les besoins en terme de visualisation graphique inclus dans les objectifs du projet. En effet, HexaChord a été développé non seulement pour expérimenter les concepts théoriques développés dans cette thèse, mais aussi afin de fournir au musicologue un environnement visuel et intuitif pour l'analyse de pièces musicales. La bibliothèque Swing¹ de Java que nous avons utilisé offre un environnement approprié à nos besoins en terme de visualisation.

1.1 Modèle de données

HexaChord prend en entrée des fichiers au format MIDI. Un fichier MIDI se constitue d'un ensemble d'évènements datés. Ces évènements sont pour la plupart du type Note On et Note Off. Ils correspondent à l'action de jouer ou de stopper une hauteur dans une piste elle même associée à un instrument.

La première étape lors du chargement d'un fichier MIDI consiste à le transformer en une séquence d'ensembles de hauteurs, chacun étiquetés par une durée. Il s'agit de la représentation d'une pièce résultant de la segmentation décrite chapitre 6 1.1.

1. <http://docs.oracle.com/javase/tutorial/uiswing/>

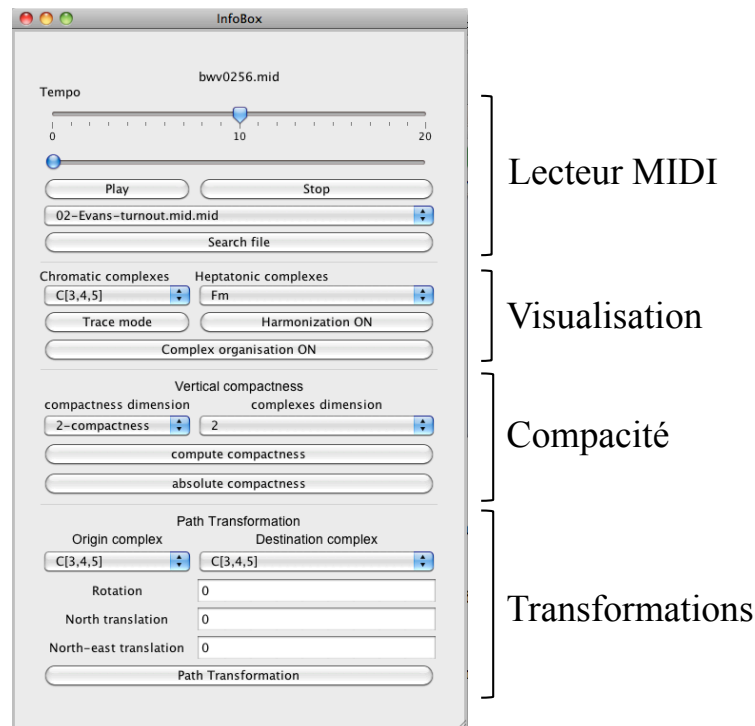


FIGURE 1 – Fenêtre de contrôle de HexaChord.

1.2 L'interface

1.2.1 La fenêtre de contrôle

Comme le montre la figure 1, l'interface utilisateur de HexaChord se présente comme une fenêtre divisée en quatre zones respectivement dédiées à la lecture de fichiers MIDI, à la visualisation de trajectoires, au calcul de la compacité des trajectoires, et à la transformation de trajectoires. Dans la suite, nous détaillons ces différentes fonctionnalités.

1.2.2 Lecteur MIDI

HexaChord comprend un lecteur permettant de jouer n'importe quel fichier MIDI et de naviguer à l'intérieur de ce fichier. Ces fonctionnalités ont été développées à l'aide de l'API Java Sound. Pour charger un fichier MIDI, l'utilisateur dispose d'un menu déroulant associé à un répertoire de fichiers MIDI dédié à l'application, ou bien le bouton **Search file** lui permettant de charger un fichier MIDI stocké ailleurs. Une fois chargé, le fichier peut être écouté à l'aide des boutons **Play/Pause**, du bouton **Stop** ainsi que du second curseur permettant de se déplacer manuellement dans le fichier. Il est également possible à l'aide du clavier de se déplacer pas à pas dans le fichier. Un pas est associé à un segment comme défini dans le chapitre 6, paragraphe 1.1. Enfin, le premier curseur permet de définir le tempo auquel le fichier doit être joué.

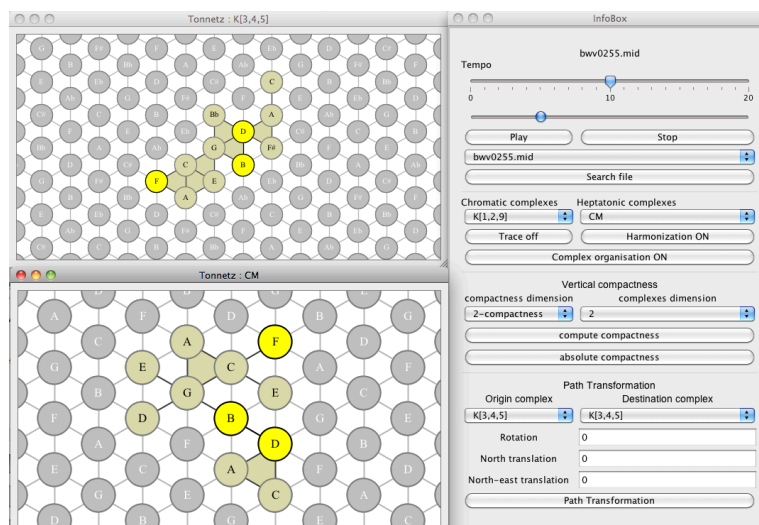


FIGURE 2 – Lecture d’un fichier MIDI dans HexaChord. La pièce est visualisée dans le complexe chromatique $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ (en haut) ainsi que le complexe diatonique $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de C majeur.

1.3 Visualisation

La première des fonctionnalités de HexaChord est la visualisation sous forme de trajectoires de fichiers musicaux dans des complexes. Cette visualisation peut se faire en temps réel au cours de la lecture d’un fichier MIDI ou manuellement segment par segment. Les complexes disponibles correspondent aux complexes dépliés sous forme d’espaces euclidiens bi-dimensionnels infinis. Il s’agit des 12 complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[X^{12}]$ ainsi que des 4 complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[X^7]$ associés aux 12 échelles diatoniques (chacune associée à une gamme majeur et une gamme mineur relative) et aux 12 gammes mineurs harmoniques. Cela correspond au total à 108 pavages triangulaires infinis distincts (l’ajout d’échelles musicales supplémentaires fait partie des perspectives de ce projet).

Ces complexes sont accessibles à l’aide des deux menus déroulants **Chromatic complexes** et **Diatonic Complexes**. Lorsqu’un nouveau complexe est sélectionné, une nouvelle fenêtre s’ouvre, illustrant une région du complexe. La figure 2 illustre la visualisation d’une trajectoire dans deux complexes. Chaque complexe peut être parcouru à l’infini suivant les quatre directions cardinales. Son orientation peut être modifiée en opérant des rotations dans les deux sens. Enfin, une fonctionnalité de zoom est disponible. Il est possible d’afficher n’importe quel nombre de complexes simultanément. Certains systèmes comme *Harmony Space* [Holland 1994] ou *Isochords* [Bergstrom 2007] proposent des systèmes de visualisation similaires dédiés souvent à l’apprentissage de la théorie musicale, plus particulièrement de l’harmonie tonale, ainsi qu’à la composition et à l’analyse musicale. L’objectif de HexaChord est de revoir ces systèmes de représentation à la lumière des complexes simpliciaux en intégrant les calculs sur les trajectoires détaillés dans les chapitres précédents.

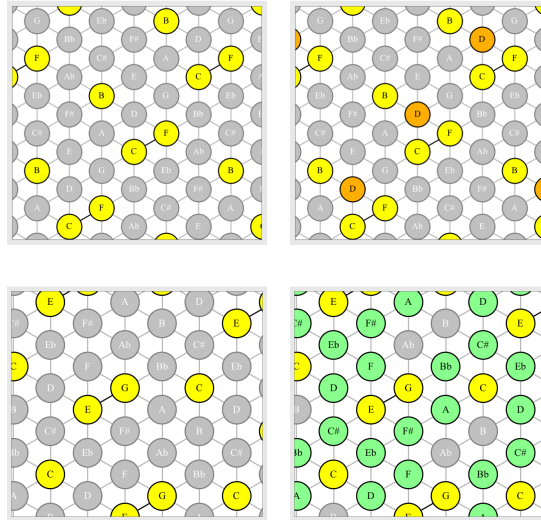


FIGURE 3 – Fonctionnalité d’harmonisation dans deux complexes. Les sommets éclairés en vert correspondent aux sommets qui, une fois ajoutés, entraînent une compacité maximale de l’accord. Lorsqu’un unique sommet permet d’atteindre la compacité maximale, il est éclairé en orange.

1.3.1 Trajectoires

HexaChord construit à partir d’un fichier MIDI des trajectoires dans les différents complexes à l’aide des algorithmes décrits dans le chapitre 6. Ces trajectoires évoluent en temps réel pendant la lecture du fichier. Lors de la lecture, les simplexes appartenant à l’élément présent de la trajectoire sont colorés en jaune clair. Les simplexes appartenant au passé de la trajectoire (c’est-à-dire à la trace) sont éclairés en jaune foncé. La figure 2 illustre la visualisation de deux trajectoires. La durée de la trace est paramétrable. Le bouton *Trace mode* permet de changer la stratégie de placement. Selon le mode d’utilisation de l’outil, une trajectoire peut être calculée en temps réel durant la lecture du fichier, ou bien d’un bloc afin de pouvoir la manipuler sans avoir à lire le fichier.

1.3.2 Harmonisation spatiale

Pour un ensemble de classes de hauteurs jouées simultanément, on recherche dans un certain complexe, la classe de hauteurs supplémentaire qui, une fois ajoutée, procurerait un sous-complexe le plus compact possible. Plus formellement, il s’agit de l’ensemble :

$$\{v \in Vert \mathcal{K}_i^c \mid \mathcal{C}(\mathcal{K}_i \cup v) = \max_{\sigma \in Vert \mathcal{K}_i^c} (\mathcal{C}(\mathcal{K}_i \cup \sigma))\}$$

où \mathcal{K}_i^c désigne le complémentaire de \mathcal{K}_i c’est à dire l’ensemble des simplexes de \mathcal{K} n’appartenant pas à \mathcal{K}_i . La fonction $Vert \mathcal{K}$ correspond à l’ensemble des sommets de \mathcal{K} . Ainsi, $Vert \mathcal{K}_i^c$ correspond à l’ensemble des sommets de \mathcal{K} n’appartenant pas à \mathcal{K}_i .

Dans HexaChord, on éclaire en orange la note voisine maximisant cette compacité. Si

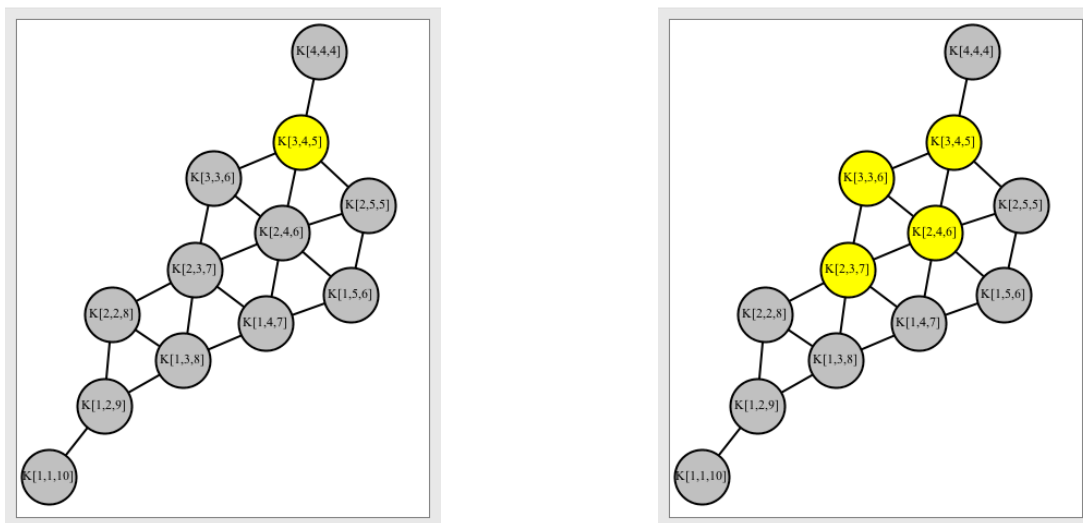


FIGURE 4 – Organisation des 12 complexes d’accords $\mathcal{K}_{TI}[X^{12}]$ de taille 3 par critère de déplacement minimum. Les cellules éclairées correspondent aux complexes dans lesquels l’accord joué est le plus compact.

plusieurs notes voisines entraînent une compacité maximale, elles sont éclairées en vert. La figure 3 illustre cette fonctionnalité. En haut à gauche, l’accord $\{C, F, B\}$ est représenté dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[2, 3, 7]^2$. Dans ce complexe, les sommets représentant la classe de hauteur D sont les seuls qui sont en contact avec les trois classes de hauteurs constituant l’accord. C’est donc en ajoutant la classe de hauteur D qu’on maximisera la compacité de cet accord dans cet espace. En haut à droite, la fonction d’harmonisation spatiale est activée et les sommets représentant la classe de hauteur D sont éclairés en orange afin d’indiquer que eux seuls sont capable de maximiser la compacité de l’accord. En bas à gauche, l’accord $\{C, E, G\}$ est représenté dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$. En bas à droite, sont éclairés en vert les classes de hauteurs maximisant la compacité de l’accord. On remarque en effet que les classes de hauteur $C\sharp, D, Eb, F, F\sharp, A$ et Bb partagent toutes la propriété d’être voisines avec deux des classes de hauteurs de l’accord initial. Il n’existe aucun sommet dans cet espace qui soit voisin de plus de deux sommets de l’accord.

Le résultat d’une harmonisation de ce type dépend en premier lieu de l’espace dans laquelle elle est effectuée. La fonction d’harmonisation s’active et se désactive à l’aide du bouton Extra voice.

1.3.3 Organisation de complexes

Le bouton Graph affiche les 12 complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[X^{12}]$ organisés par critère de déplacements minimaux³ comme expliqué chapitre 5 paragraphe 2.3.1. Lorsque le fichier MIDI est joué, les complexes dans lesquels la compacité de l’ensemble de notes joué est maximale sont éclairés en jaune. La figure 4 illustre à gauche le fait que l’accord joué est représenté

2. L’accord est ici représenté à l’aide de l’algorithme *AllSimplices* détaillé chapitre 6

3. On retrouve le même type d’espaces dans [Straus 2003].

constituer le tracé. Cette démarche illustrée ici avec une lettre de l'alphabet peut être généralisée à toute forme géométrique bi-dimensionnelle dans une démarche de composition [Chouvel 2009c](voir paragraphe 2.1.2 de ce chapitre pour un exemple de composition suivant cette approche). Pour une étude plus approfondie des procédés de musification se reporter à [Potier 2012].

L'outil PaperTonnetz présenté dans la deuxième partie de ce chapitre propose un environnement adapté aux processus de musification.

1.3.5 Visualisation de complexes pliés

Nous utilisons l'API PlexViewer⁴ qui s'appuie sur l'API Plex [Tausz 2011] pour représenter un complexe simplicial dans un espace euclidien tri-dimensionnel grâce à l'interface de programmation OpenGL. L'API fournit une représentation 3D du n -squelette avec $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ de n'importe quel complexe. C'est à l'aide de cette API qu'ont été obtenues les figures de complexes dans les chapitres précédents. HexaChord permet d'illustrer le 3-squelette de n'importe quel complexe appartenant aux catalogues en annexe A, ainsi que des complexes correspondant à l'espace d'une pièce au sens où on l'a défini dans le chapitre 5 section 3. De manière générale, on utilise cet outil pour représenter tout complexe d'accords minimal. Le fait de pouvoir représenter dans un espace tri-dimensionnel les complexes infinis fait partie des perspectives de ce travail. Cela permettrait notamment de systématiser la visualisation de complexes construits à partir d'accords septième comme ceux étudiés dans [Gollin 1998].

1.4 Calcul de la compacité

L'utilisateur peut visualiser la compacité d'une pièce dans un ensemble de complexes au cours du temps et en moyenne, comme détaillé dans le chapitre 6, à l'aide de la fonction `compute compactness`. Les deux menus déroulants situés au dessus permettent de préciser la dimension à laquelle on calcule la compacité ainsi que l'ensemble de complexes dans lesquels on calcule la compacité. Ces complexes, regroupés par dimension, correspondent à l'ensemble des complexes présents dans les catalogues dressés chapitre 5. La fonction `absolute compactness` permet de déterminer les espaces dans lesquels chaque ensemble de notes a une compacité égale à 1. Autrement dit, il s'agit des complexes dans lesquels l'ensemble de n notes jouées est représenté par un $n - 1$ -simplexe muni de son bord.

1.5 Transformations

HexaChord permet d'effectuer à partir de fichiers MIDI les transformations détaillées dans le chapitre 6. Les menus déroulant `Origin complex` et `Destination complex` permettent de préciser un complexe de départ et un complexe d'arrivée pour réaliser un « collage » dans un complexe d'une trajectoire construite dans un autre complexe. Les complexes dans lesquels HexaChord permet ces transformations sont les complexes disponibles à la visualisation, c'est-à-dire les complexes correspondant à des pavages triangulaires infinis.

4. <http://code.google.com/p/plex-viewer/>

Les complexes de départ et d'arrivée pour le « collage » d'une trajectoire sont donc bien isomorphes. Les champs *rotation*, *north translation* et *north-east translation* permettent d'effectuer des rotations et des translations dans ces complexes. Cinq rotations, prenant pour centre un certain sommet, sont disponibles. On indique l'angle de la rotation par entier r compris entre 1 et 6. L'angle de la rotation effectué est égal à $r/3$. $r = 3$ entraîne une symétrie centrale. $r = 6$ entraîne une rotation de 2π équivalente à l'opération Identité.

1.6 Perspectives

Une des perspectives majeures de HexaChord consiste à enrichir la partie visualisation de l'application en fournissant des espaces supplémentaires. Une première étape consiste à fournir tout espace qui peut se représenter par un pavage bi-dimensionnel infini. Les pavages triangulaires permettent de visualiser l'espace associé à n'importe quelle classe d'accord appartenant à n'importe quelle échelle. La possibilité de pouvoir naviguer dans un espace tri-dimensionnel constitué de tétraèdres permettrait aussi la visualisation de trajectoires dans des espaces associés à des classes d'accords de taille 4. Enfin, on envisage de manipuler des espaces correspondant à des complexes cellulaires plus généraux que les complexes simpliciaux. Enfin, il est prévu d'intégrer HexaChord à la plate-forme OpenMusic [Agon 1998].

2 PaperTonnetz

L'outil PaperTonnetz est dédié à la composition musicale dans les espaces de hauteurs à l'aide de la technologie du papier interactif. L'utilisateur emploie un stylo électronique qui transmet en temps réel à un programme les informations transcrites par l'utilisateur sur le papier. Les espaces de hauteurs utilisés constituent des représentations alternatives des complexes bidimensionnels présentés dans le chapitre 5. Le projet PaperTonnetz a été mené en collaboration avec Jérémie Garcia, doctorant au Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI) à l'université Paris-Sud. Cette section est issue du travail présenté dans [BGSM12].

2.1 Pavages de hauteurs et composition

2.1.1 Différents systèmes existants

Comme évoqué dans le chapitre 1, il existe plusieurs systèmes dédiés à la performance musicale se basant sur des organisations spatiales des notes similaires à celle du *Tonnetz*. C'est le cas par exemple du contrôleur MIDI développé par *C-Thru* [C-t 2013] ou encore des applications pour interface tactiles *Musix* [mus 2013] et *IsoKeys* [iso 2013]. Ces systèmes sont conçus pour la performance. Ils peuvent donc être utilisés pour la composition mais ne sont pas dédiés à cette tâche. Au contraire, PaperTonnetz a pour vocation d'être pleinement dédié à la composition musicale.

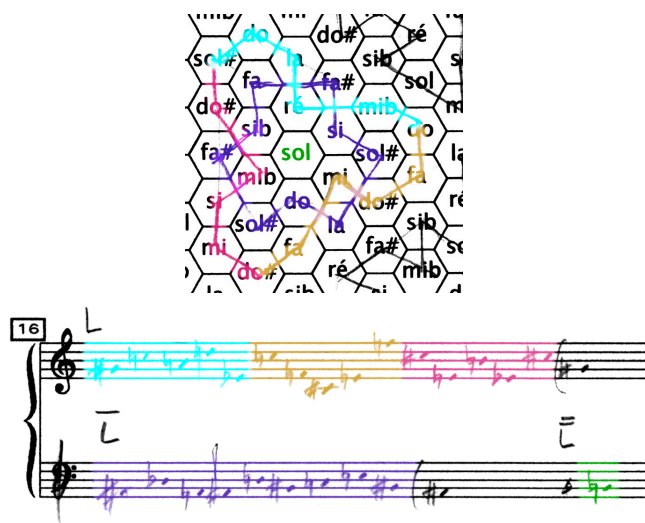


FIGURE 6 – Utilisation d’un espace de hauteur par J.-M. Chouvel pour la composition de la pièce *Traversée*.

2.1.2 Un exemple de composition dans un espace de hauteurs

La figure 6 illustre l’utilisation par J.-M. Chouvel d’un réseau de notes hexagonal pour la composition de sa pièce *Traversée* [Chouvel 2009c]. Le réseau de notes utilisé correspond à la table harmonique présentée dans le chapitre 1. Il se présente sous la forme d’un pavage hexagonal et est équivalent en terme de voisinage entre classes de hauteurs au *Tonnetz*. Le compositeur trace un chemin dans le réseau et retranscrit sur partition les notes représentées par les zones parcourues. Ces notes peuvent être interprétées comme un accord ou comme une ligne mélodique. Un tel chemin peut être associé à la notion de trajectoire présentée dans le chapitre 6. Ainsi, il est possible d’exploiter un chemin en lui appliquant les mêmes opérations qu’aux trajectoires. La figure 6 illustre deux rotations successives d’angle 120° sur un chemin. Le centre de rotation correspond à la cellule centrale représentant la classe de hauteur *sol*. Ainsi, ces formes géométriques, que J.-M. Chouvel appelle *constellations*, peuvent servir de matériau de base pour la composition.

Cet exemple, qui montre comment un espace de hauteurs peut être utilisé pour explorer des idées de composition musicale, constitue l’inspiration à l’origine du projet PaperTonnetz.

2.1.3 Table harmonique généralisée

Afin d’élargir les possibilités du compositeur dans un cas comme celui de l’exemple précédent, nous proposons une généralisation de la table harmonique à d’autres relations de voisinages. Comme souligné plus haut, l’espace utilisé par J.-M. Chouvel est un pavage hexagonal possédant les mêmes propriétés de voisinage entre classes de hauteurs que le *Tonnetz* ou encore que le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$. Ce voisinage peut être généralisé afin de correspondre à n’importe quel complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[X]$ où X est une structure intervallique

d'accords à 3 notes appartenant à n'importe quelle échelle. La restriction des complexes à ceux associés à une structure intervallique de taille 3 garantit la possibilité de représenter le complexe par un espace bi-dimensionnel pouvant être imprimé sur une feuille de papier. L'outil fournit au compositeur 108 pavages hexagonaux, correspondant aux 12 complexes chromatiques et aux 4 complexes heptatoniques pouvant être associés distinctement aux 12 gammes diatoniques et aux 12 gammes mineures harmoniques. Des études ont été menées pour comparer différents espaces chromatiques du point de vue de la performance d'accords et de mélodies [Maupin 2011]. Le système présenté dans cette étude permet notamment à l'utilisateur de modifier les relations de voisinage entre les notes dans l'interface. La représentation hexagonale a pour inconvénient de ne pas représenter les accords mais seulement les notes. En revanche, la représentation des notes sous forme de pavage a pour avantage de permettre à l'utilisateur d'associer une mélodie à un chemin continu.

2.2 Étude utilisateur préliminaire

Le projet PaperTonnetz a débuté par une étude utilisateur au Palais de la Découverte à Paris à l'occasion de la conférence MCM'11⁵. L'objectif de l'expérience était d'observer le comportement d'utilisateurs, musiciens ou pas, face à une interface dédiée à la composition musicale dans les réseaux de notes évoqués ci-dessus, à l'aide du papier interactif. Les utilisateurs avaient à disposition une feuille sur laquelle étaient imprimés deux espaces de hauteurs, correspondant aux représentations hexagonales des complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ et $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$, superposés à une trame de points Anoto [ano 2013] afin de créer une feuille de papier interactif. Ces deux complexes ont été choisis pour la différence de taille des intervalles définissant le voisinage entre leurs classes de hauteurs. Ces intervalles sont grands dans le premier et petits dans le second. Les participants utilisaient le stylo digital ADP-301 afin de tracer des chemins dans ces espaces et écouter en temps réel les notes correspondantes aux zones parcourues. Une nouvelle note est jouée à chaque fois que le stylo pénètre dans un nouvel hexagone. Chaque hexagone représentant une classe de hauteur (et non une hauteur). Une octave était automatiquement déterminée de manière à rester dans un registre de hauteurs audible, en minimisant si possible la distance avec la note précédente afin de favoriser les mouvements mélodiques.

2.2.1 Détails techniques

La première version de PaperTonnetz a été écrite en Java. Le stylo digital ADP-301 reconnaît à l'aide d'une caméra infra-rouge sa position sur une feuille recouverte d'une trame de point Anoto invisible à l'oeil nu. Le protocole Open Sound Control [Wright 1997] communique les informations envoyées par le stylo à un patch Max/MSP [max 2013], qui joue les notes en temps réel, ou les re-dirige vers une autre application OSC ou MIDI.

5. Mathematic and Computation in Music, Juin 2011

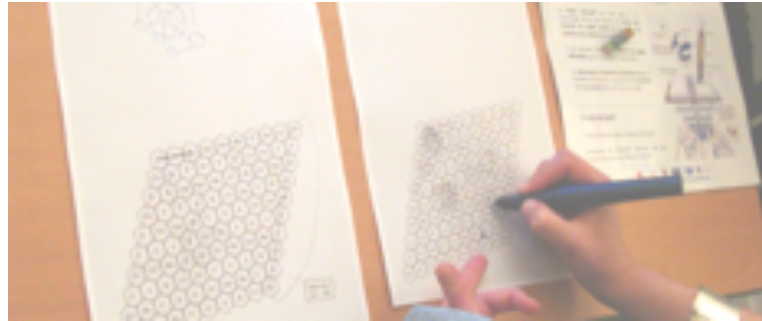


FIGURE 7 – Un participant explorant les deux espaces. Lorsque le stylo parcourt une région, la note correspondante est jouée.

2.2.2 L'expérience

Une trentaine de personnes ont participé à l'expérience. Cette dernière commence par une rapide explication sur le fonctionnement de l'application et l'organisation des notes dans les deux espaces. Nous observons l'utilisateur explorer chacun des espaces (figure 7) et finissons l'expérience en l'interrogeant sur son ressenti.

2.2.3 Résultats

Première confrontation avec le prototype. La plupart des participants commencent par placer le stylo dans un hexagone choisi au hasard afin de produire une note. Puis ils commencent à parcourir l'espace de façon désordonnée en traversant rapidement un grand nombre de notes, tout en restant attentif au retour sonore. Le retour en temps réel stimule l'utilisateur et l'encourage à tracer différentes formes et à comparer leur rendu musical dans les deux espaces.

Sonification et représentation. Les participants réalisent rapidement qu'une forme géométrique peut être identifiée par un motif musical mettant en évidence les propriétés musicales intrinsèques de chaque espace. Les non-musiciens étaient en général capables de percevoir ces différences sans pour autant pouvoir les comprendre. Les musiciens avaient tendance à réaliser une exploration méthodique de l'espace afin de s'imprégner des intervalles définissant le voisinages entre les notes. De même, cette catégorie de participants essaie de jouer des gammes ou des accords typiques afin d'observer la forme géométrique à laquelle ces objets correspondent dans chacun des espaces.

Comparaison des espaces. Après être devenu familier avec le fonctionnement du système, la plupart des participants essaient de comparer les deux espaces. Nous leurs suggérons alors de tracer des lignes droites et des formes géométriques régulières afin de faciliter la comparaison des rendus sonores. La différence entre les espaces est perçue par les musiciens et par les non musiciens mais les musiciens ont plus de facilité à expliquer cette différence. La table 1 compare les réactions des utilisateurs musiciens et non musiciens

	$\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$	$\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$
Non-musiciens	Les mouvements petits et cycliques dans des régions voisines « sonnent bien ».	Les chemins continus peuvent produire des mélodies pouvant être chantées.
Musiciens	Propice à la reproduction d'arpèges. Gammes difficiles à reproduire.	Gammes et mélodies généralement facile à reproduire.

TABLE 1 – Comparaison des deux espaces du point de vue des participants.

pour les deux espaces. Leurs réactions ont été cohérente avec les propriétés mélodiques et harmoniques relevées dans [Maupin 2011] à propos de ces deux espaces.

Limitations du système. Les participants musiciens ont relevé un certain nombre de limitations concernant ce premier prototype. Par exemple, l'environnement ne permet pas de jouer des accords. D'autre part, certains participants ont exprimé le désir de réutiliser ou de ré-écouter des chemins tracés sans avoir à les tracer une seconde fois. Il serait également intéressant que l'application fournisse d'autres espaces définis par d'autres propriétés de voisinages entre les notes. Enfin, certains participants ont évoqué l'intérêt qu'il pourrait y avoir à créer des pavages irréguliers caractérisés par des relations de voisinage moins régulières.

2.3 L'application PaperTonnetz

L'application PaperTonnetz a pour point de départ le prototype décrit précédemment, amélioré à partir des retours des utilisateurs suite à l'expérience réalisée au Grand Palais. Une vidéo descriptive de l'application est disponible à l'adresse <http://vimeo.com/40072179>. Nous avons inclus un certain nombre d'idées venant de J.-M. Chouvel, notamment le fait de considérer un chemin, correspondant concrètement à une trace d'encre parcourant différentes régions de la feuille, comme l'élément d'interaction central de l'application. Les utilisateurs peuvent ré-écouter des mélodies et des accords tracés, et ces éléments peuvent être retranscrits sur une portée. Enfin, le compositeur dispose des 108 pavages hexagonaux évoqués dans le paragraphe 2.1.3, correspondant chacun à un complexe déplié sous la forme d'un plan euclidien bi-dimensionnel.

Après avoir choisi et disposé sur une feuille virtuelle différents complexes pour sa composition, l'utilisateur imprime cette feuille qui constitue son interface, à l'aide de n'importe quelle imprimante de bonne qualité. La figure 8 illustre un exemple de la manière dont le compositeur peut utiliser PaperTonnetz. A gauche, l'interface développé en Java qui permet de choisir plusieurs complexes et de les disposer sur une feuille virtuelle qui sera ensuite imprimée. A droite, le patch Max/MSP qui permet de retranscrire sur une partition les mélodies et accords « tracés » sur le papier.

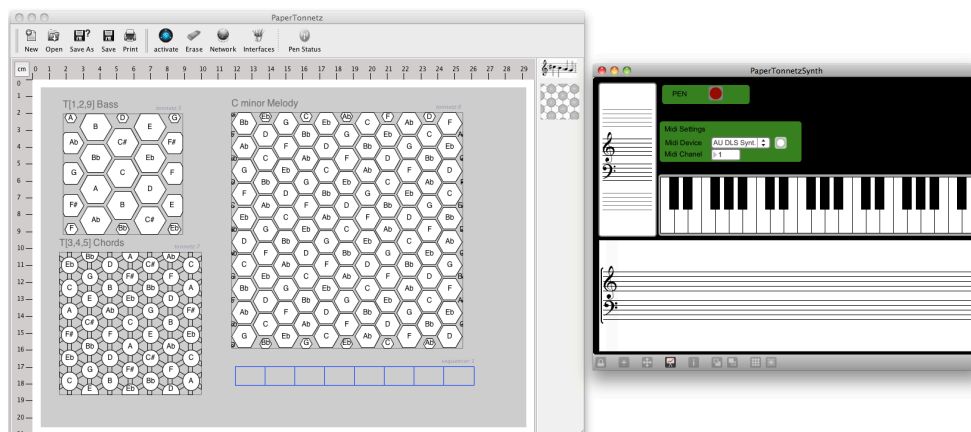


FIGURE 8 – À gauche, l’interface principale de PaperTonnetz représentant une page virtuelle comprenant trois espaces ainsi que le séquenceur. À droite, le patch Max/MSP affichant et jouant en temps réel les séquences constituées.

2.3.1 Création d’une interface

Nous proposons un scénario dans lequel un compositeur désire créer une pièce dans la tonalité de *Do* mineur, constitué de trois voix correspondant respectivement à une ligne de basse, une séquence d’accords et une ligne mélodique. Le compositeur commence par disposer et ajuster en taille trois complexes sur la feuille virtuelle. Ces complexes sont ceux illustrés sur l’interface figure 8. Il choisit $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$ pour la ligne de basse (en haut à gauche sur l’interface figure 8). La petite taille des intervalles associés au voisinage entre classes de hauteurs dans ce complexe permettent en effet la constitution de lignes mélodiques constituées de petits déplacements caractéristique du style *walking*. Il choisit ensuite le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ pour constituer des accords (en bas à gauche figure 8). Ce complexe, dont le 1-squelette correspond au *Tonnetz*, est adapté pour la constitution d’accords majeurs et mineurs. L’utilisateur choisit d’afficher ce complexe dans un mode où chaque accord est représenté par une zone propre de l’espace. Les notes sont associées à des cercles, les accords de 2 notes à des rectangles et les accords à 3 sons à des triangles. Enfin, le compositeur choisit le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de *Do* mineur harmonique pour constituer la mélodie.

2.3.2 Assemblage de séquences

Le compositeur peut inclure un séquenceur sur la feuille virtuelle. Ce séquenceur est représenté par une série de carrés situés dans la partie basse de l’interface figure 8. Le séquenceur va permettre au compositeur de mémoriser et d’assembler les séquences mélodiques et les accords associés aux chemins tracés dans les différents complexes. Chaque rectangle est associé à une voix, et donc dans le cadre de notre scénario à un complexe. Les pistes sont stockées sous la forme de fichiers MIDI qui sont envoyés au synthétiseur Max/MSP afin d’être joués et édités.

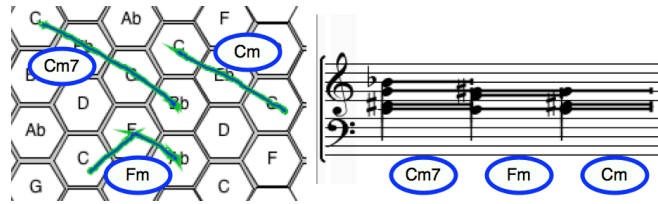


FIGURE 9 – À gauche : chemins tracés dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de *Do* mineur mélodique. À droite : la séquence d'accords associée aux trois chemins

2.3.3 Composition

Le compositeur imprime la feuille virtuelle constituée des trois complexes et du séquenceur. La feuille est prête à être utilisée avec le stylo électronique.

Le compositeur trace trois chemins dans le complexe $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de *Do* mineur mélodique (à gauche figure 9). Ces chemins sont respectivement associés aux accords *Do* mineur septième, *Fa* mineur et *Do* mineur. Les accords sont retranscrits sur la partition (à droite figure 9). Leur durée respective est défini par le temps passé par le stylo dans chaque région. Un chemin peut être ré-écouté en apposant la pointe du stylo dessus. L'accord ou la séquence mélodique est alors jouée en respectant les aspects rythmiques enregistrés lors du tracé du chemin. Selon la durée avec laquelle le stylo est apposé, les notes constituant le chemin sont jouées simultanément (à la manière d'un accord) ou séquentiellement (à la manière d'une mélodie). Chaque chemin peut être ajouté dans le séquenceur autant de fois que le désire le compositeur. Une piste est constitué en juxtaposant un ensemble de chemins. Pour cela, le compositeur ouvre une piste en traçant un trait dans une zone du séquenceur. Les chemins pointés par le stylo sont successivement ajoutés dans la piste. On referme la piste en traçant un deuxième trait dans le rectangle. La séquence enregistrée est alors automatiquement affichée sur la partition (à droite figure 9). La séquence associée à la piste peut être écoutée en apposant le stylo dans la zone associée du séquenceur. Pour cela, la piste est transformée en un objet *bach.roll*[rol 2013] joué par un patch Max/MSP. Le compositeur répète ce procédé afin de constituer des pistes qui pourront être jouées successivement ou en même temps.

2.3.4 Performance

Bien que *PaperTonnetz* soit conçu en premier lieu pour la composition, il constitue aussi un outil utilisable pour la performance de manière plus générale. En particulier les possibilités d'explorer un espace et d'y improviser des mouvements fournissent un cadre ludique pour se familiariser avec les accords, les lignes mélodiques, ainsi que les relations harmoniques entre les notes qui les constituent. La durée de chaque note est enregistrée en fonction de la durée que reste le stylo dans la zone associée. Des musiciens suffisamment expérimentés peuvent ainsi utiliser cet outil pour l'improvisation et l'expérimentation d'idées musicales en temps réel.

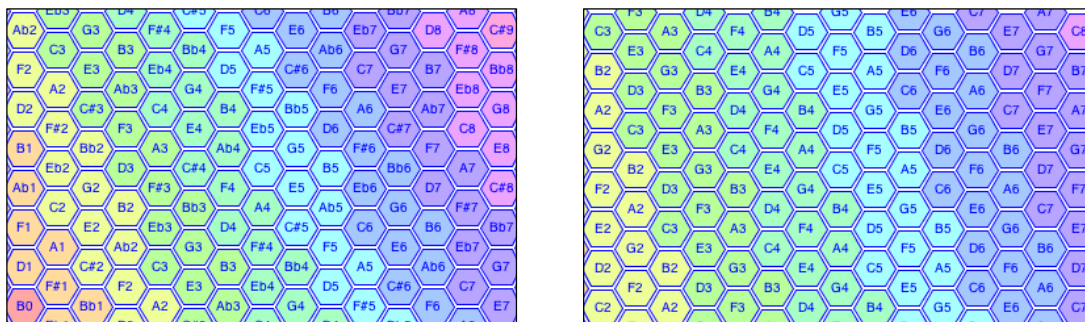


FIGURE 10 – Représentation attribuant une octave à chaque classe de hauteur du complexe chromatique $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ (à gauche) et du complexe diatonique $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de *Do* majeur (à droite). L’octave est indiquée par un entier et associée à une couleur.

2.4 Discussion

2.4.1 Exploration, performance et composition

PaperTonnetz a été conçu pour supporter principalement trois activités : l’exploration d’espaces de hauteurs, la performance dans ces espaces et l’assemblage de séquences pour la composition. Chacun des ces objectifs a nécessité des besoins particuliers pour le développement de l’application.

Exploration. Dans PaperTonnetz, les cellules représentant les notes et accords sont interactives, ce qui facilite la familiarisation de l’utilisateur avec leur propriétés et fonctions musicales. Ces propriétés peuvent ainsi être directement perçues par musiciens novices ou experts, en temps réel avec un retour audio.

Performance. PaperTonnetz permet aux chemins constitués dans le passé de rester accessible pour toute interaction dans le futur. Ils peuvent à tout moment être joués, transformés ou même édités. Les accords et mélodies conservés peuvent être recombinaés pour expérimenter de nouvelles idées.

Assemblage de séquences. PaperTonnetz permet au compositeur de stocker les séquences musicales résultant des chemins qu’il trace et de les exporter vers d’autres systèmes dédiés à la composition musicale, comme Max/MSP [max 2013] ou OpenMusic [Agon 1998] grâce à sa compatibilité avec les protocoles MIDI et OSC. Cet aspect pourrait dans le futur permettre à PaperTonnetz d’être fourni comme un plugin qu’on pourrait ajouter à différents logiciels de composition assistée par ordinateur qui respectent ces standards.

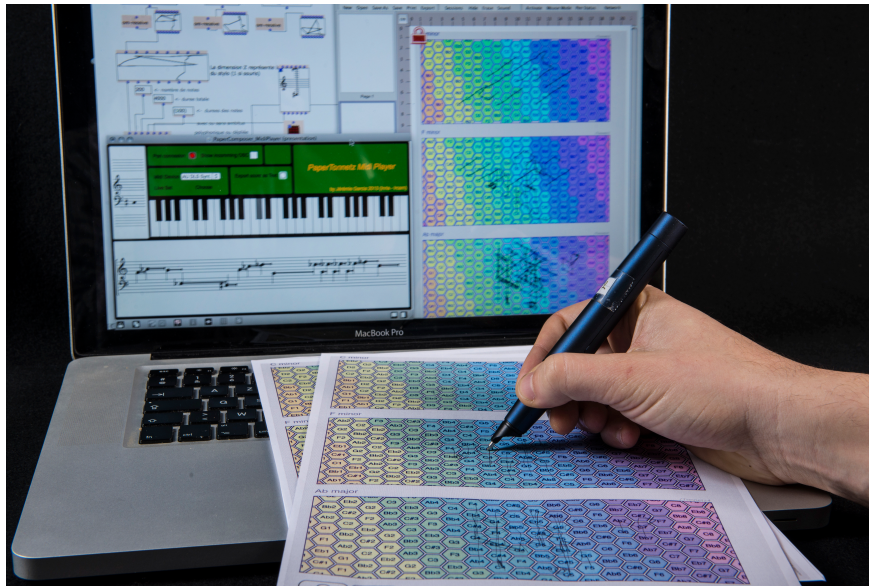


FIGURE 11 – Utilisation de l’outil PaperTonnetz. Le stylo communique en temps réel à l’application les zones qu’il parcourt. (Photo H. Raguet © Inria)

2.4.2 Interaction avec le geste du dessin

Nous utilisons la notion de *chemin tracé* comme élément d’interaction central, créé dynamiquement par l’utilisateur. Nous adoptons l’hypothèse qu’une trace laissée par un stylo sur une feuille de papier constitue, grâce à son aspect tangible, un matériau propice à la réutilisation et l’exploitation d’idées dans le cadre de la composition musicale. En revanche, cet aspect impose certaines limitations du système, comme par exemple la saturation de certaines zones lorsqu’elles sont parcourues par un trop grand nombre de chemins. Comme le montre l’exemple de composition illustré figure 6, un chemin peut être réutilisé après une transformation, comme une rotation. L’ajout de cette fonctionnalité ainsi que l’ensemble des transformations de trajectoires présentées dans le chapitre 6 font partie des perspectives de ce projet. L’utilisation d’une tablette graphique pourrait alors s’avérer utile mais nous avons la conviction que le support papier fournit au compositeur des avantages qui le rendent propice à l’expérimentation et l’expression d’idées musicales [Garcia 2011, Thiebaut 2008, Letondal 2007].

Parmi les autres perspectives, nous envisageons la possibilité d’utiliser d’autres paramètres du geste afin de contrôler d’autres paramètres musicaux. La pression relevée à la pointe du stylo pourrait par exemple permettre de contrôler la vitesse des notes et accords tracés.

2.4.3 Autres représentations spatiales

Le premier prototype de PaperTonnetz fournissait deux espaces de hauteurs associés aux complexes $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 9]$ et $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$. La seconde version propose 108 pavages de hauteurs différents. Elle inclue notamment la possibilité d’attribuer une octave aux classes

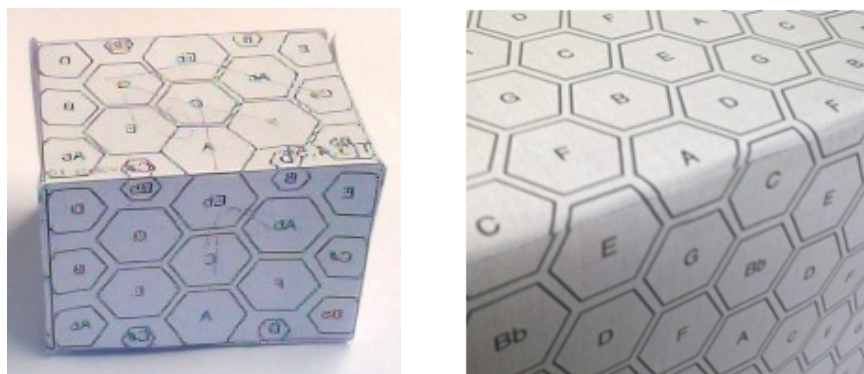


FIGURE 12 – A gauche : une forme tri-dimensionnelle autour de laquelle sont disposés différents complexes. A droite : deux surfaces représentant respectivement les tonalités de *Do* majeur et *Fa* majeur.

de hauteurs. La figure 10 illustre ce type de représentation alternative pour le complexe chromatique $\mathcal{K}_{TI}^u[3, 4, 5]$ ainsi que pour le complexe diatonique $\mathcal{K}_{TI}^u[1, 2, 4]$ associé à la tonalité de *Do* majeur. Nous réfléchissons à de nouvelles manières d’exploiter les propriétés spatiales des espaces de hauteur en profitant des avantages physiques du papier. Le papier peut être découpé, plié, et déplacé sans qu’il ne perde aucune de ses fonctionnalités. Les compositeurs devraient pouvoir être capables de découper certaines régions d’espace, ainsi que des chemins, et de les recombinaison afin de personnaliser davantage leurs matériaux de composition. Le papier peut en outre être utilisé pour recouvrir des formes tri-dimensionnelles, par exemple un cube ou une sphère. Dans le cadre de l’utilisation de complexes associés à une tonalité, le franchissement d’une arête physique peut entraîner une modulation causée par le changement de tonalité du complexe parcouru (figure 12).

Une autre possibilité offerte par les pavages hexagonaux est de pouvoir représenter des espaces microtonaux. Cette direction a été explorée par J.-M. Chouvel [Chouvel 2009a]. Des travaux récents ont abouti à une application proposant ce type de concepts [Prechtl 2012] ouvrant de nouvelles perspectives pour la composition musicale. PaperTonnetz restreint les espaces de hauteurs qu’il fournit aux pavages hexagonaux. Il pourrait cependant être intéressant dans les travaux futurs d’inclure d’autres types de pavage du plan, réguliers ou irréguliers, impliquant une définition de complexité variable sur les relations de voisinages entre notes et accords.

Conclusion

1	Résumé des travaux	145
2	Perspectives	147

Nous avons proposé dans ces travaux de reformuler d'un point de vue spatial différentes notions appartenant aux domaines de la théorie, de l'analyse et de la composition musicale. Le positionnement de nos travaux dans le cadre du calcul spatial s'est avéré doublement utile. D'une part, les outils fournis par cet environnement, et plus particulièrement par le langage MGS, ont permis de formaliser et d'implanter de manière directe un certain nombre de concepts musicaux redéfinis à l'aide d'espaces abstraits. D'autre part, l'approche spatiale a constitué une source d'inspiration dans ces travaux, dans le sens où elle a suggéré certaines directions qui auraient pu être manquées par les approches classiques en musique.

1 Résumé des travaux

Nous avons proposé et formalisé à l'aide de complexes cellulaires des espaces de hauteurs théoriques. L'utilisation des complexes nous a permis de généraliser et systématiser différents calculs sur ces espaces. Le tableau 1 résume les différents types de calculs effectués sur ces espaces au cours de ces travaux. Un complexe peut se construire de différentes manières. L'auto-assemblage, majoritairement utilisé au cours de ces travaux, offre une vision globale d'un espace en représentant chaque objet à une unique position. Nous avons proposé une autre méthode de construction fournissant une représentation dépliée de ces espaces dans un espace euclidien permettant l'application d'opérations géométriques aboutissant à des transformations musicales de séquences.

Nous distinguons deux types de complexes. Les complexes résultant d'une propriété théoriques sont construits à partir d'une population exhaustive d'objets musicaux partageant une propriété musicale. Ces objets sont des classes de hauteurs, des classes d'intervalles (chapitre 4) ou des accords (chapitre 5). Cette approche permet de rendre compte d'une notion musicale à travers des concepts topologiques, par exemple une classe d'équivalence d'accords. Les notions de chemins et de trajectoires naturelles dans notre approche spatiale suggèrent naturellement la génération de séquences à l'intérieur de ces espaces. Cette démarche, que nous avons illustrée dans le cadre de l'étude des séries tous intervalles dans le chapitre 4, rejoint le domaine de la composition algorithmique. Comme évoquée au début de ces travaux, la traduction d'un algorithme par un espace constitue une des motivations initiales du calcul spatial. Ce type de démarche pourrait être adopté dans les

Complexe d'accords \mathcal{K}	complexe issu d'une propriété théorique	complexe issu d'une pièce
Construction de \mathcal{K}	Théorie (abordé chap 4 et 5.2)	Analyse (abordé chap 5.3)
Génération de trajectoires dans \mathcal{K}	Composition algorithmique (abordé chap 4)	Composition dans le contexte d'une autre pièce (abordé chap 5.3.1)
Représentation d'une pièce par une trajectoire dans \mathcal{K}	Analyse (abordé chap 6.4)	Analyse dans le contexte d'une autre pièce (abordé chap 5.3.2.4)
Transformation d'une pièce dans \mathcal{K}	Transformation dans un contexte théorique (abordé chap 6.3.4)	Transformation de pièce dans le contexte d'une autre pièce (abordé chap 6.3.2)

TABLE 1 – Calculs effectués sur des complexes d'accords au cours de ces travaux.

complexes d'accords énumérés dans le chapitre 5. Représenter une pièce par une trajectoire dans un espace théorique révèle la corrélation de la pièce avec l'ensemble des propriétés musicales qui définissent l'espace. La recherche de propriétés théoriques dans une pièce constitue typiquement une démarche d'analyse musicale. C'est dans ce but que nous avons proposé la mesure de compliance d'un espace avec une pièce, dans le chapitre 6.4. Les transformations de trajectoires dans ces espaces, abordées dans le chapitre 6.3, permettent de permuter et renouveler l'occurrence de ces propriétés théoriques au sein d'une pièce.

Les complexes de la seconde catégorie sont construits à partir de la seule pièce musicale. Ce type d'espace peut donc être assimilé à l'espace de la pièce. La construction et l'étude des ces espaces s'inscrivent dans le cadre d'une analyse musicale. Nous adoptons cette approche dans le chapitre 5 section 3. La génération de trajectoires dans ces espaces peut être vue comme une démarche de composition algorithmique contextuelle consistant à composer une pièce dans l'espace d'une autre. L'expression algorithmique de la trajectoire représentant la pièce dans son propre espace permet de mettre en évidence des stratégies de composition caractérisant la pièce. Une pièce se représente dans son propre espace par une trajectoire particulière. Une transformation sur cette trajectoire conserve les propriétés internes de la pièce mais les permute dans le temps. La démarche consistant à représenter une pièce dans l'espace d'une autre peut être assimilée à une analyse contextuelle dans le sens où une propriété révélée sur une pièce ne peut être interprétée qu'à la lumière de la seconde.

L'approche computationnelle nous a permis d'explorer largement ces différentes approches. Les outils HexaChord et PaperTonnetz ont été conçus, entre autres, pour suggérer ce type de démarches dans les communautés de l'analyse et la composition musicale.

2 Perspectives

L'utilisation du calcul spatial pour les représentations musicales est une démarche originale dont cette thèse constitue le premier pas. Les résultats présentés ici ouvrent un champ de recherche comportant de multiples directions dans le cadre de la théorie, de l'analyse et de la composition musicale. Nous présentons quelques perspectives s'inscrivant dans ces différents domaines, ainsi que dans d'autres, comme l'étude de la performance musicale.

2.1 Théorie

Comme évoqué dans le chapitre 4 paragraphe 4, les complexes cellulaires utilisés pour l'étude des séries tous intervalles et les complexes d'accords présentés dans le chapitre 5 peuvent être unifiés dans un même cadre théorique. Les complexes d'accords du type $\mathcal{K}_{TI}[\cdot]$ de dimension 1 constituent les bords des surfaces intervalliques. Généraliser cette approche revient à représenter par une cellule de dimension d une classe d'accords de taille d , les faces de cette cellule correspondant aux instances de la classe d'accord. L'auto-assemblage de différents complexes aboutit à des espaces mixtes combinant différentes classes d'accords. Cette extension de l'approche pourrait probablement fournir un cadre intéressant pour l'étude des transitions d'accords au cours d'une pièce.

Les espaces étudiés dans ces travaux sont exclusivement des espaces de hauteurs, c'est-à-dire des espaces constitués de notes et d'accords. Les complexes cellulaires, et de manière plus générale les collections topologiques proposées par le langage MGS, peuvent constituer des outils intéressants pour la formalisation d'espaces représentant d'autres caractéristiques musicales. Nous nous intéressons particulièrement à la formalisation de rythmes. Les travaux futurs dans cette direction pourraient s'inspirer notamment d'une approche récente représentant les motifs rythmiques sous la forme d'arbres [Janin 2011].

2.2 Analyse

2.2.1 Vers une notion de compliance généralisée

La notion de compliance a été illustrée dans ces travaux par la compacité des trajectoires musicales. Nous avons plus généralement présenté cette notion dans le chapitre 3 comme la propension d'un espace à révéler les propriétés d'un système sous la forme de *régularités*. D'autres types de régularités que la compacité peuvent être recherchés dans les trajectoires. Par exemple, on peut s'intéresser à la distance séparant les éléments successifs de la trajectoire. La compliance de l'espace découle alors de son aptitude à représenter une pièce d'un point de vue dynamique. La relation de voisinage définissant l'espace ré-

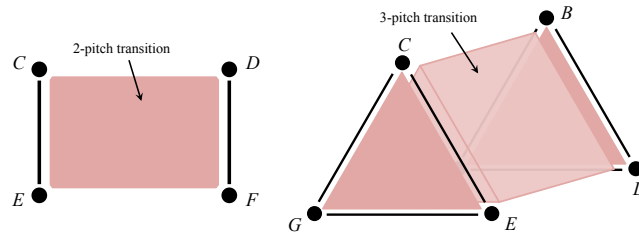


FIGURE 1 – Représentation par une cellule d’une transition entre deux accords de deux notes (à gauche) et deux accords de trois notes (à droite).

vèle alors des informations sur les stratégies privilégiées pour les transitions d’accords. Il serait alors intéressant de comparer une classification de pièces résultant de ce type de critères avec la classification proposée dans le paragraphe 4.3 du chapitre 6. L’extension de ce type d’analyses au corpus complet d’un compositeur pourrait révéler des informations pertinentes sur ses stratégies de composition.

Nous avons vu dans le chapitre 6 comment la notion de compliance peut être utilisée pour la classification de pièces. L’exemple que nous avons donné illustre notamment le fait que cette démarche peut nécessiter différents paramétrages afin d’améliorer ses résultats. Cette approche doit être approfondie et validée sur de plus gros corpus d’œuvres.

2.2.2 Perspectives pour l’outil HexaChord

L’analyse de pièces à l’aide de HexaChord peut être étendue à des morceaux au format audio et non seulement MIDI. Cette approche nécessite un traitement du signal audio en amont afin d’extraire les notes jouées. L’extraction d’informations d’un signal audio constitue un champs de recherche large dans lequel certaines approches ont fait leurs preuves. Nous projetons de faire des essais avec différents outils d’extraction de pitch [Papadopoulos 2007].

2.3 Composition

Le chapitre 4 fourni un cadre pour la composition à l’aide de séries tous intervalles. Comme souligné dans les perspectives de ce chapitre, cette approche s’étend facilement à la génération de séquences d’accords respectant des contraintes traduites de manière structurelle. L’Hamiltonicité est un exemple de contrainte qui nous a permis d’illustrer notre démarche à travers l’étude des séries tous intervalles. La nature combinatoire de nos espaces permet la spécification spatiale d’autres types de contraintes pouvant être exploitées pour la composition.

L’harmonisation, consistant à générer une ligne mélodique supplémentaire dans une pièce musicale, constitue typiquement une discipline mettant en jeu des ensembles de contraintes sur les hauteurs. Comme évoqué dans le chapitre 7, l’outil HexaChord détermine automatiquement les notes candidates pour une harmonisation par critères de voisinages dans les complexes. Cette approche peut être étendue afin de traduire par des

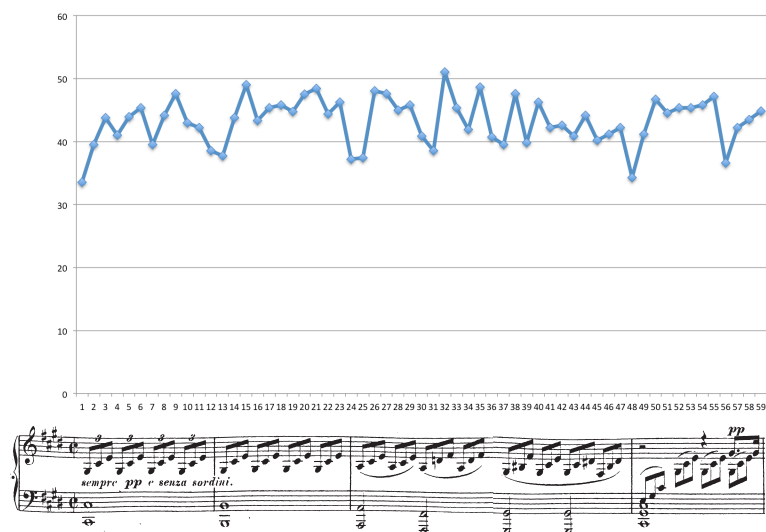


FIGURE 2 – Courbe de tempo au cours d’une interprétation du second mouvement de la Sonate 14 op. 27 de L. van Beethoven.

contraintes spatiales des règles issues d’un traité de contrepoint, comme le *Gradus ad Parnassum* de J. Fux [Fux 1725]. Ces règles ont fait l’objet de différentes formalisation, d’un point de vue algébrique [Mazzola 2002] mais aussi d’un point de vue spatial à l’aide des *voice-leading spaces* [Tymoczko 2009]. Elles se divisent typiquement en trois catégories. Les règles verticales, qui consistent à un instant donné à respecter certaines combinaisons de hauteurs, se prêtent bien à une traduction spatiale dans les espaces d’accords présentés dans le chapitre 5. Les règles horizontales et transversales, qui contraignent respectivement la constitution de lignes mélodiques et les enchaînements d’accords, font en revanche intervenir la notion de temporalité. Les trajectoires peuvent alors fournir un outil avantageux pour l’expression de ce type de règles d’un point de vue spatial. Une autre possibilité consiste à représenter une transition entre deux états comme un élément propre de l’espace. La transition peut alors être représentée intuitivement comme une cellule dont l’aspect correspond à une « extrusion » d’un simplexe à un autre. Les complexes simplifiables [Peltier 2009] pourraient fournir un cadre intéressant pour ce type d’approche. La figure 1 illustre ce type de représentation pour une transition entre des accords de deux notes (à gauche) et de trois notes (à droite). Les cellules introduites ne sont pas des simplexes et le complexe résultant n’est pas un complexe simplicial. La présence de telles cellules permet de traduire certaines contraintes comme la « règle des quintes parallèles », interdisant la succession de deux ensembles de deux notes séparées respectivement par un intervalle de quinte.

2.4 Performance

2.4.1 Visualisation de trajectoires en temps réel

L'interface de visualisation de HexaChord peut être réutilisée afin de visualiser en temps réel une performance musicale. La compatibilité MIDI de l'outil devrait permettre rapidement de pouvoir visualiser le jeu d'un musicien utilisant un instrument compatible avec cette norme.

2.4.2 Vers une représentation topologique du *Rubato*

Comme souligné précédemment, une des principales perspectives de ce travail consiste à construire à des espaces mettant en jeu d'autres caractéristiques musicales que les hauteurs. Un séjour à l'université Queen Mary University of London a fait l'objet d'une étude du *Rubato* du point de vue spatial. Nous souhaitons développer un peu plus en détail la démarche de cette étude préliminaire car elle illustre comment prendre en compte de manière fine les relations temporelles, qui sont par ailleurs largement absentes des travaux développés dans cette thèse.

Le *Rubato* correspond aux variations de tempo qu'effectue un interprète afin de rendre sa performance expressive. Chaque interprétation différente d'une oeuvre est caractérisée par un rubato. Le rubato se représente couramment sous la forme d'une courbe représentant le tempo en fonction du *temps de la partition*. Ce type de représentation constitue un outil précieux pour l'étude du Rubato d'une oeuvre [Chew 2013]. La figure 2 illustre une courbe de tempo illustrant une interprétation du second mouvement de la Sonate 14 op. 27 de L. van Beethoven « au Clair de Lune ». Cette représentation permet notamment de comparer les stratégies de performance de différents interprètes à l'aide d'une analyse multi-échelle. Analyser le rubato à différentes échelles consiste à ne pas regarder seulement les variations de tempo entre deux notes consécutives mais entre des points de la partition plus éloignés, comme les débuts ou fins de mesure par exemple. Ce type d'analyse a permis de mettre en évidence différentes stratégies de performance et de les relier à des informations relatives à la partition, comme les modulations de tonalité [Chew 2012].

La figure 3 illustre les courbes de tempo de trois interprétations du Prélude 20 op. 28 de F. Chopin. Les régions colorées permettent d'associer à un accord joué au 1-squelette du complexe associé à sa classe d'accords équivalents par transposition et inversion, autrement dit l'ensemble de classes d'intervalles employées par l'accord. Une constatation est que pour chacun des interprètes, le tempo a tendance à chuter lors de l'entrée dans une région rose, associée entre autres au complexe $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$. Cette constatation traduit le fait que l'emploi d'accords majeurs et mineurs, constituant le complexe $\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$, traduisent fréquemment une « résolution », généralement associée à la fin d'une phrase mélodique, que l'interprète met en valeur par un ralentissement. Bien que prévisible, cette constatation offre un premier exemple de mise en relation d'un espace analytique associé à l'interprétation d'une oeuvre avec des espaces théoriques présentés dans nos travaux.

La figure 4 illustre de la même manière une interprétation de M. Pollini de la sixième pièce de l'opus 19 de A. Schönberg. Les classes de hauteurs jouées simultanément au cours

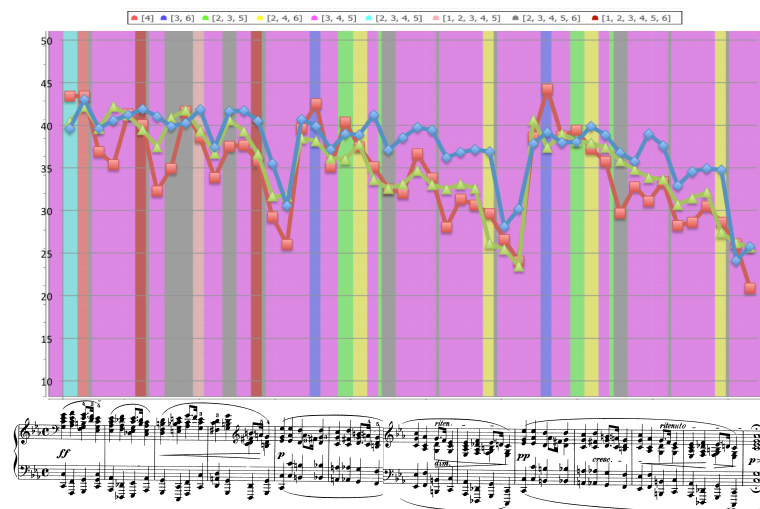


FIGURE 3 – Courbes de tempo associées à trois interprétations du Prélude 20 op. 28 de F. Chopin. La courbe rouge correspond à une interprétation de A. Rubinstein, la courbe bleu à A. Cortot et la courbe verte à M. Argerich. Chaque région est associée par une couleur à la classe d'accord correspondant aux classes de hauteur jouées.

de la pièce correspondent à des complexes dont le 1-squelette regroupe les classes d'intervalles $\{2, 3, 5\}$ ou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'intervalles modulo inversion). Il est plus difficile d'extraire une interprétation pertinente de cette analyse que de la précédente. On pourra toutefois relever la tendance du tempo à chuter lors de l'entrée dans une région associée à un complexe dont le 1-squelette regroupe l'ensemble des intervalles (les régions bleues sur la figure 4). Il peut s'agir ici d'une volonté de la part de l'interprète de souligner une complexification de l'univers sonore.

Afin de systématiser ce type d'étude, nous avons développé un système permettant de tracer automatiquement une courbe de tempo à partir de deux fichiers MIDI, le premier correspondant à la pièce générée à partir de la partition, c'est-à-dire sans aucune expressivité, le second correspondant à un enregistrement. La construction de la courbe de tempo nécessite un processus d'alignement entre les deux fichiers. Nous avons utilisé pour cela une méthode de programmation dynamique correspondant à une variation de l'algorithme connu sous le terme DTW (*Dynamic Time Warping*) développé originalement pour aligner deux signaux de paroles [Rabiner 1993]. Cette adaptation de l'algorithme pour l'alignement de fichiers MIDI est décrite dans [Meron 2001]. L'implantation de cette méthode nous a permis de systématiser le traçage des courbes de tempo à différentes échelles. La figure 5 illustre la mesure à quatre échelles différentes du rubato dans l'interprétation du second mouvement de la Sonate 14 op. 27 de L. van Beethoven illustrée dans la figure 2. La première mesure (correspondant à celle de la figure 2, et calculée automatiquement avec notre implémentation) mesure la variation du tempo à chaque note. Dans le graphique en bas à droite, ces variations sont mesurées toutes les 12 notes, c'est-à-dire au début de chaque mesure. La figure 6 illustre une description topologique des courbes de tempo de la figure 5 associées aux trois échelles les plus larges. Chaque sommet est associé à la première note d'un triolet dans la partition. Les sommets sont disposés de gauche à droite dans le

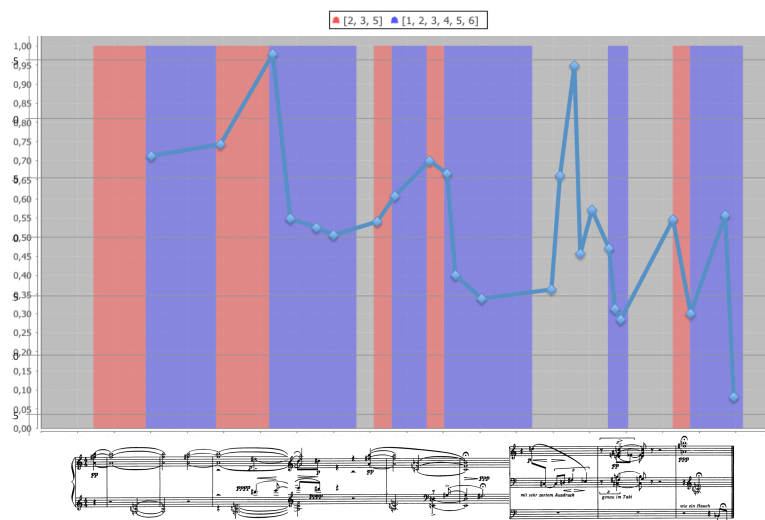


FIGURE 4 – Courbe de tempo associée à une interprétation de M. Pollini de la sixième pièce de l’opus 19 de A. Schönberg. Chaque région est associée par une couleur à la classe d’accord correspondant aux classes de hauteurs jouées.

même ordre que les notes correspondantes dans la partition. Un arc représente la durée mesurée entre les deux notes associées à ses deux sommets. La couleur de l’arc correspond à la variation observée par rapport à la durée de l’arc précédent à la même échelle. Un arc vert correspond à une accélération, un arc rouge à un ralentissement et un arc noir à un tempo constant. Cette représentation a l’avantage d’unifier dans une unique structure les variations de tempo à différentes échelles. La figure du bas est obtenue en renversant celle du haut et offre une meilleure visibilité des voisinages entre les différents éléments de la structure. Un raffinement de l’échelle à laquelle sont mesurées les variations de tempo a pour conséquence d’ajouter de nouvelles cellules en périphérie du graphe, le complexifiant ainsi à la manière d’une figure fractale.

Nous pensons qu’un système de représentation du rubato sous la forme d’un espace topologique pourrait permettre d’aborder d’un œil nouveau les questions suivantes :

- avoir une représentation globale du rubato mesuré à différentes échelles,
- comparer plusieurs interprétations d’une même pièce et caractériser cette pièce par des propriétés communes permettant de la décrire par un « rubato caractéristique »,
- comparer la performance d’un interprète sur différentes pièces afin de tenter de caractériser les tendances du musicien par une « signature de rubato ».

Enfin, introduire la notion de rubato dans le système de visualisation de HexaChord pourrait notamment permettre la mise en évidence d’accords « en avance » ou « en retard » à l’aide par exemple d’une coloration accentuée, permettant d’étendre l’utilisation de l’outil à l’analyse de la performance musicale.

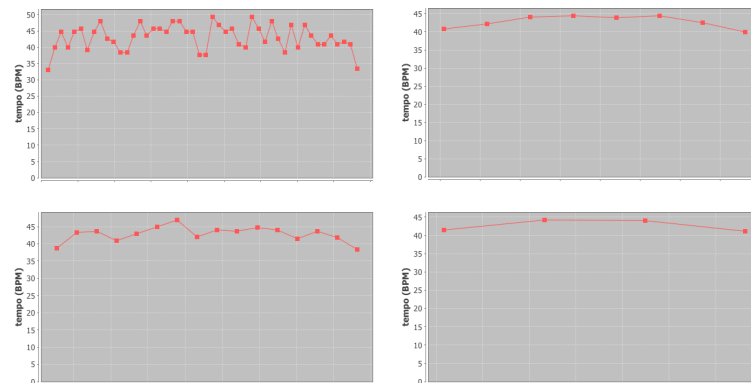


FIGURE 5 – Représentations du rubato dans l’interprétation du second mouvement de la Sonate 14 op. 27 de L. van Beethoven à quatre échelles différentes. En haut à gauche, la variation de tempo est relevée à chaque croche. En dessous, à chaque triolet, en haut à droite tous les deux triplets et en bas à droite tous les quatre triplets c’est-à-dire au début de chaque mesure.

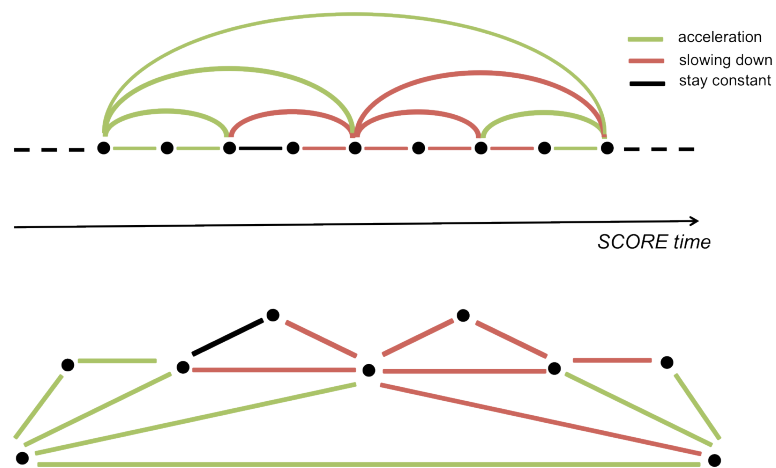


FIGURE 6 – Une description topologique des courbes de tempo de la figure 5 associées aux trois échelles les plus larges.

Complexes d'accords définis par une relation d'équivalence

Cette annexe contient différents catalogues de complexes d'accords, dont la construction est détaillée chapitre 5. A chaque tableau est associée une relation d'équivalence entre accords pour une certaine division de l'octave (on privilégie les divisions de l'octave en 7 et en 12, car cela correspond respectivement au système diatonique et au système chromatique). Les 4 types de classes étudiées sont obtenus en groupant les accords équivalents par les opérations de

- transposition [Vieru 1980, Zalewski 1972],
- transposition et inversion [Forte 1973],
- multiplication [Mazzola 2002, Morris 1987],
- permutation sur la structure intervallique [Estrada 2011].

Une ligne dans un tableau correspond à un complexe constitué de tous les accords appartenant à une même classe d'équivalence. Pour chaque complexe, on donne les informations détaillées ci-dessous :

La dimension d . La dimension du complexe est égale à la taille des accords assemblés moins 1. Par exemple, les accords majeurs étant des accords à 3 notes, le complexe $\mathcal{K}_T[4, 3, 5]$ qui résulte de leur assemblage est de dimension 2.

Le complexe. Les complexes sont désignés de manière différente en fonction de la propriété liant les accords qui les composent. Par exemple, les accords équivalents à une transposition près ayant la propriété de partager la même structure intervallique X , on appellera $\mathcal{K}_T[X]$ le complexe associé à une telle classe d'accords. L'équivalence par multiplication ne fournit pas de structure commune permettant d'identifier les accords d'une même classe. On note alors un complexe représentant une telle classe à l'aide d'un accord représentatif de la classe. Par exemple $\mathcal{K}_M[0, 1, 2]$.

La taille. Il s'agit du nombre de d -simplexes représentant les accords de taille $d+1$ dont le complexe est le résultat de l'assemblage. Autrement dit, il s'agit du cardinal de la classe d'équivalence associée au complexe.

Nombres de Betti. Les nombres de Betti, présentés dans le chapitre 3, donnent des informations sur la topologie du complexe. En particulier, b_0 correspond au nombre de

composantes connexes, b_1 au nombre de trous et b_2 au nombre de vides. Pour un complexe de dimension d , on se contente de calculer les d premiers nombres de Betti, les suivants étant par définition égaux à 0. Dans cette étude, les nombres de Betti sont automatiquement calculée à l'aide de l'API Plex [Tausz 2011].

Pseudo-variété. La colonne « p-v » indique si le complexe correspond à une pseudo-variété, comme définit chapitre 3. Pour rappel, un complexe de dimension d est une pseudo-variété s'il est fortement connexe, si chaque simplexe est la face d'au moins un n -simplexe et si chaque $(n - 1)$ -simplexe est la face d'au plus deux simplexes.

Caractéristique d'Euler. La dernière colonne donne la caractéristique d'Euler présentées chapitre 3.

1 Complexes d'accords équivalents par transpositions

1.1 Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})

Ce catalogue comprend 352 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_T[0]$	12	[12]		12
1	$\mathcal{K}_T[1, 11]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_T[2, 10]$	12	[2, 2]		0
	$\mathcal{K}_T[3, 9]$	12	[3, 3]		0
	$\mathcal{K}_T[4, 8]$	12	[4, 4]		0
	$\mathcal{K}_T[5, 7]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_T[6, 6]$	6	[6, 0]		6
2	$\mathcal{K}_T[1, 1, 10]$	12	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 9, 2]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 8, 3]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 7, 4]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 6, 5]$	12	[1, 7, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 5, 6]$	12	[1, 7, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 7]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 8]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 9]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[2, 2, 8]$	12	[2, 2, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[2, 7, 3]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[2, 6, 4]$	12	[2, 8, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[2, 5, 5]$	12	[1, 1, 0]	x	0

	$\mathcal{K}_T[2, 4, 6]$	12	[2, 8, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[2, 3, 7]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[3, 3, 6]$	12	[3, 0, 3]		6
	$\mathcal{K}_T[3, 5, 4]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[3, 4, 5]$	12	[1, 13, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[4, 4, 4]$	4	[4, 0, 0]		4
3	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 9]$	12	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 8, 2]$	12	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 7, 3]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 6, 4]$	12	[1, 7, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 5]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 6]$	12	[1, 7, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 7]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 8]$	12	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 8]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 7, 2, 2]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 6, 3, 2]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 5, 4, 2]$	12	[1, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 5, 2]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 6, 2]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 7, 2]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 7]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 6, 2, 3]$	12	[1, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_T[1, 5, 3, 3]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 4, 3]$	12	[1, 9, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 5, 3]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 6, 3]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 1, 6]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 5, 2, 4]$	12	[1, 7, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 3, 4]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 4, 4]$	12	[1, 9, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 5, 4]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[1, 5, 1, 5]$	6	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 2, 5]$	12	[1, 7, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 3, 5]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 4, 5]$	12	[1, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 6]$	12	[1, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 6]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 7]$	12	[1, 13, 0, 0]		-12
	$\mathcal{K}_T[2, 2, 2, 6]$	12	[2, 0, 4, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[2, 2, 5, 3]$	12	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[2, 2, 4, 4]$	12	[2, 0, 8, 0]		10

	$\mathcal{K}_T[2, 2, 3, 5]$	12	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[2, 3, 2, 5]$	12	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[2, 4, 3, 3]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[2, 3, 4, 3]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[2, 4, 2, 4]$	6	[2, 2, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[2, 3, 3, 4]$	12	[1, 10, 3, 0]		-6
	$\mathcal{K}_T[3, 3, 3, 3]$	3	[3, 0, 0, 0]		3
4	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 8]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 7, 2]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 6, 3]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 5, 4]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 5]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 7]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 7, 1, 2]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 6, 2, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 3, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 4, 2]$	12	[1, 0, 9, 0, 0]		10
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 5, 2]$	12	[1, 0, 23, 0, 0]		24
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 6, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 6, 1, 3]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 2, 3]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 3, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 4, 3]$	12	[1, 1, 16, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 5, 3]$	12	[1, 0, 23, 0, 0]		24
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 1, 4]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 2, 4]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 3, 4]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 4, 4]$	12	[1, 0, 9, 0, 0]		10
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 1, 5]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 5]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 5]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 6]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 7]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 6, 2]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 5, 3]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 4, 4]$	12	[1, 1, 16, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3, 5]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 6]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6	
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 1, 6]$	12	[1, 1, 18, 0, 0]		18	
$\mathcal{K}_T[1, 5, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6	

$\mathcal{K}_T[1, 4, 3, 2, 2]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 3, 4, 2, 2]$	12	[1, 2, 11, 0, 0]		10
$\mathcal{K}_T[1, 2, 5, 2, 2]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 1, 5]$	12	[1, 4, 3, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 4, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 3, 3, 2]$	12	[1, 10, 0, 0, 0]		-9
$\mathcal{K}_T[1, 2, 4, 3, 2]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 4, 1, 4, 2]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 4, 2]$	12	[1, 4, 3, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 4, 2]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 5, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 5, 2]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 4, 3]$	12	[1, 1, 4, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 3, 4]$	12	[1, 1, 4, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 2, 5, 1, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 1, 5]$	12	[1, 4, 3, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 4, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 9, 0, 0]		10
$\mathcal{K}_T[1, 3, 3, 2, 3]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 4, 2, 3]$	12	[1, 4, 3, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 3, 3, 1, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 3, 3]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 3, 3]$	12	[1, 10, 0, 0, 0]		-9
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 4, 3]$	12	[1, 2, 11, 0, 0]		10
$\mathcal{K}_T[1, 2, 4, 1, 4]$	12	[1, 1, 6, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 2, 4]$	12	[1, 0, 9, 0, 0]		10
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 2, 4]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 3, 4]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2, 5]$	12	[1, 0, 5, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[2, 2, 2, 2, 4]$	12	[2, 0, 0, 0, 2]		4
$\mathcal{K}_T[2, 2, 2, 3, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[2, 2, 3, 2, 3]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]	x	0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 7]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 6, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 5, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 4, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 5]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 6, 1, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 5, 2, 2]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 3, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 4, 2]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 5, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0]		0

$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 5, 1, 3]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 2, 3]$	12	[1, 0, 12, 1, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 3, 3]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 4, 3]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 1, 4]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 2, 4]$	12	[1, 0, 12, 1, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 3, 4]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 5]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 5]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 6]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 4, 1, 2]$	12	[1, 0, 11, 8, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 5, 1, 2]$	12	[1, 0, 18, 1, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 5, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 23, 0, 0, 0]		24
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 3, 2, 2]$	12	[1, 0, 18, 1, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 4, 2, 2]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 27, 0, 0, 0]		28
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 3, 2]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 4, 2]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 4, 2]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 5, 2]$	12	[1, 0, 18, 1, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 1, 5]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 12, 1, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 5, 8, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 4, 1, 3]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 1, 2, 3]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 2, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 5, 8, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 3, 3]$	12	[1, 0, 18, 1, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 4, 3]$	12	[1, 0, 11, 8, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 1, 1, 4]$	6	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 1, 4]$	12	[1, 0, 27, 0, 0, 0]		28
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 2, 4]$	12	[1, 0, 12, 1, 0, 0]		12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 2, 4]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 3, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 5]$	12	[1, 0, 23, 0, 0, 0]		24

$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 5]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0]		18
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 1, 5]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 4, 2, 2]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3, 3, 2]$	12	[1, 1, 3, 0, 0, 0]		3
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 4, 2]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 4, 1, 3]$	12	[1, 0, 5, 8, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3, 2, 3]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 3, 3]$	12	[1, 1, 3, 0, 0, 0]		3
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3, 1, 4]$	12	[1, 0, 5, 8, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 2, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 1, 4, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 30, 0, 0, 0]		31
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 1, 2, 4]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 3, 2, 2]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 3, 2, 2]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
$\mathcal{K}_T[1, 3, 2, 1, 3, 2]$	6	[1, 4, 0, 0, 0, 0]		-3
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 1, 3, 2]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 3, 1, 3, 1, 3]$	4	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
$\mathcal{K}_T[1, 2, 3, 1, 2, 3]$	6	[1, 4, 0, 0, 0, 0]		-3
$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0]		16
$\mathcal{K}_T[2, 2, 2, 2, 2, 2]$	2	[2, 0, 0, 0, 0, 0]		2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0, 0]	x	6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 5, 2]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 4, 3]$	12	[1, 0, 6, 9, 0, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 3, 4]$	12	[1, 0, 6, 9, 0, 0, 0]		-2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 5]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0, 0]		6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 5, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 4, 2, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 10, 0, 0, 0]		-9
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 4, 2]$	12	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 4, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 9, 0, 0, 0]		-8
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 2, 3]$	12	[1, 0, 0, 25, 0, 0, 0]		-24
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 3, 3]$	12	[1, 0, 0, 10, 0, 0, 0]		-9
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 9, 0, 0, 0]		-8
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 2, 4]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 5]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		0

$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 5, 1, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 13, 0, 0, 0]	-12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 25, 0, 0, 0]	-24
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 18, 0, 0, 0]	-17
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 4, 1, 2]$	12	[1, 0, 6, 21, 0, 0, 0]	-14
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 13, 0, 0, 0]	-12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 3, 2, 2]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0, 0]	6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 21, 0, 0, 0]	-20
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0, 0]	6
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 4, 2]$	12	[1, 0, 6, 21, 0, 0, 0]	-14
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0, 0]	12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 2, 6, 0, 0, 0]	-3
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 21, 0, 0, 0]	-20
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 2, 3]$	12	[1, 0, 2, 6, 0, 0, 0]	-3
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 0, 18, 0, 0, 0]	-17
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 11, 0, 0, 0, 0]	12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 13, 0, 0, 0]	-12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 2, 4]$	12	[1, 0, 0, 25, 0, 0, 0]	-24
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 5]$	12	[1, 0, 0, 13, 0, 0, 0]	-12
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 4, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 7, 2, 4, 0, 0]	10
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 2, 4]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 4, 1, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 21, 0, 0, 0]	-20
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 6, 9, 0, 0, 0]	-2
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 10, 0, 0, 0]	-9
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0, 0]	18
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 4, 1, 2]$	12	[1, 0, 7, 2, 4, 0, 0]	10
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0, 0]	16
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]	0
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 10, 0, 2, 0, 0]	13
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 25, 0, 0, 0, 0]	26
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 3, 2, 2]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 9, 0, 0, 0]	-8
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 10, 0, 2, 0, 0]	13
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 10, 0, 0, 0]	-9
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 9, 0, 0, 0]	-8
$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 1, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 1, 2, 4, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 2, 1, 2, 0, 0]	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0, 0, 0]	18

	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 2, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 6, 9, 0, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 21, 0, 0, 0]		-20
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 1, 3, 2]$	12	[1, 1, 0, 3, 0, 0, 0]		-3
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 1, 2, 3]$	12	[1, 1, 0, 3, 0, 0, 0]		-3
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 18, 0, 0, 0]		-17
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 18, 0, 0, 0]		-17
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 1, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0, 0]	x	6
7	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 2]$	12	[1, 0, 0, 11, 2, 0, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4]$	12	[1, 0, 0, 11, 2, 0, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 2, 5, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 0, 2, 5, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 2, 10, 0, 0, 0]		9
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 2, 14, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		2
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 2, 14, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3]$	12	[1, 0, 0, 2, 10, 0, 0, 0]		9
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 2, 14, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 13, 0, 0, 0]		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 11, 2, 0, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 11, 2, 0, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 3]$	6	[1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]		3	
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4	
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 13, 0, 0, 0]		13	

	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3]$	12	$[1, 0, 0, 2, 14, 0, 0, 0]$		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2]$	12	$[1, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2]$	12	$[1, 0, 1, 4, 4, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3]$	12	$[1, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0]$		13
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0]$		7
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2]$	6	$[1, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0]$		13
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$	3	$[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		0
8	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]$	12	$[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0]$	x	4
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 0, 0]$		1
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 0, 0]$		1
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		-3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		-3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 0, 0]$		1
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 0, 0]$		1
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 18, 0, 0, 0, 0]$		19
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0, 0]$		17
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 27, 0, 0, 0, 0]$		28
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0, 0]$		17
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 18, 0, 0, 0, 0]$		19
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0]$	x	4
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		-3	
$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		-3	
$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$	4	$[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		2	
9	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0]$		17
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]$	6	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$		2
10	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$	x	2

11	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$ $0, 0, 0]$	x	1
----	--	---	---	---	---

1.2 Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)

Ce catalogue comprend 20 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_T[0]$	7	[7]		7
1	$\mathcal{K}_T[1, 6]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_T[2, 5]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_T[3, 4]$	7	[1, 1]	x	0
2	$\mathcal{K}_T[1, 1, 5]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 4, 2]$	7	[1, 8, 0]		-7
	$\mathcal{K}_T[1, 3, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 4]$	7	[1, 8, 0]		-7
	$\mathcal{K}_T[2, 2, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
3	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 4]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 3, 2]$	7	[1, 0, 6, 0]		7
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 3]$	7	[1, 0, 6, 0]		7
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 1, 3]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 2, 2, 2]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
4	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 3]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 2, 2]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_T[1, 1, 2, 1, 2]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
5	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 2]$	7	[1, 0, 0, 0, 0, 1]	x	0
6	$\mathcal{K}_T[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	x	1

2 Complexes d'accords équivalents par transpositions et inversions

2.1 Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})

Ce catalogue comprend 224 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_{TI}[0]$	0	[0]		0
1	$\mathcal{K}_{TI}[1, 11]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 10]$	12	[2, 2]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[3, 9]$	12	[3, 3]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[4, 8]$	12	[4, 4]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[5, 7]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[6, 6]$	6	[6, 0]		6
2	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 10]$	12	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 9]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 8]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 4, 7]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 5, 6]$	24	[1, 1, 6]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 8]$	12	[2, 2, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 7]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 4, 6]$	24	[2, 2, 6]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 5, 5]$	12	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[3, 3, 6]$	12	[3, 0, 3]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[3, 4, 5]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[4, 4, 4]$	4	[4, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 9]$	12	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 8]$	24	[1, 1, 12, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 7]$	24	[1, 2, 13, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 4, 6]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 5, 5]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 8]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 7]$	24	[1, 2, 13, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 6]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 4, 5]$	24	[1, 2, 19, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 5, 4]$	24	[1, 2, 13, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 6, 3]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 7, 2]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 1, 7]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 2, 6]$	24	[1, 2, 19, 0]		18

	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 3, 5]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 4, 4]$	24	[1, 1, 16, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 5, 3]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 4, 1, 6]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 4, 2, 5]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 4, 3, 4]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 5, 1, 5]$	6	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 6]$	12	[2, 0, 4, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 3, 5]$	24	[1, 1, 12, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 4, 4]$	12	[2, 0, 8, 0]		10
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 2, 5]$	12	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 3, 4]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 3, 4, 3]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 4, 2, 4]$	6	[2, 2, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[3, 3, 3, 3]$	3	[3, 0, 0, 0]		3
4	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 8]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 7]$	24	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 6]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 4, 5]$	24	[1, 1, 18, 0, 0]	x	18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 7]$	24	[1, 1, 1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 6]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3, 5]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 4, 4]$	24	[1, 0, 33, 0, 0]		34
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 5, 3]$	24	[1, 0, 23, 0, 0]		24
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 6, 2]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 1, 6]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 2, 5]$	24	[1, 1, 18, 0, 0]	x	18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 3, 4]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 4, 3]$	12	[1, 1, 16, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 4, 1, 5]$	24	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 4, 2, 4]$	12	[1, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 6]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 3, 5]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 4, 4]$	12	[1, 1, 16, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 1, 6]$	12	[1, 1, 18, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 2, 5]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 3, 4]$	24	[1, 1, 1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 4, 3]$	24	[1, 0, 33, 0, 0]		34
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 5, 2]$	24	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 1, 5]$	24	[1, 1, 24, 0, 0]		24
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 2, 4]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 3, 3]$	24	[1, 1, 27, 0, 0]		27

	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 4, 2]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 4, 1, 4]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 4, 2, 3]$	24	[1, 1, 24, 0, 0]		24
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 5, 1, 3]$	24	[1, 0, 29, 0, 0]		30
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 1, 3, 4]$	24	[1, 1, 0, 0, 4]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 2, 2, 4]$	24	[1, 0, 33, 0, 0]		34
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 2, 3, 3]$	24	[1, 1, 6, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 3, 1, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0]		22
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 2, 4]$	12	[2, 0, 0, 0, 2]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 3, 3]$	12	[1, 0, 17, 0, 0]		18
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 3, 2, 3]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]	x	0
5	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 7]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 6]$	24	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3, 5]$	24	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 4, 4]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 6]$	24	[1, 0, 5, 1, 1, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 5]$	24	[1, 0, 0, 7, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 3, 4]$	24	[1, 0, 0, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 4, 3]$	24	[1, 0, 1, 4, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 5, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 1, 5]$	24	[1, 0, 2, 3, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 2, 4]$	24	[1, 0, 3, 4, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 3, 3]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 4, 1, 4]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 6]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 5]$	24	[1, 0, 0, 19, 0, 0]		-18
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 3, 4]$	24	[1, 0, 1, 8, 4, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 4, 3]$	24	[1, 0, 1, 2, 4, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 5, 2]$	24	[1, 0, 7, 2, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 1, 5]$	24	[1, 0, 13, 2, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 2, 4]$	24	[1, 0, 25, 0, 2, 0]		28
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 3, 3]$	24	[1, 0, 7, 2, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 4, 2]$	24	[1, 0, 25, 0, 2, 0]		28
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3, 1, 4]$	24	[1, 0, 15, 0, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3, 2, 3]$	24	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3, 3, 2]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 4, 1, 3]$	24	[1, 0, 1, 8, 4, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 1, 1, 5]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 1, 2, 4]$	24	[1, 0, 3, 4, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 1, 3, 3]$	24	[1, 0, 5, 0, 4, 0]		10
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 2, 1, 4]$	24	[1, 0, 2, 3, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 2, 2, 3]$	12	[1, 0, 21, 0, 0, 0]		22	

	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 4, 1, 1, 4]$	6	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 1, 5]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 2, 4]$	24	[1, 0, 1, 4, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 3, 3]$	24	[1, 1, 0, 0, 3, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 4, 2]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 3, 1, 4]$	24	[1, 0, 5, 0, 4, 0]		10
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 3, 2, 3]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 1, 2, 4]$	24	[1, 0, 5, 1, 1, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 30, 0, 0, 0]		31
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 2, 1, 4]$	12	[1, 0, 6, 1, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 2, 2, 3]$	24	[1, 0, 25, 0, 2, 0]		28
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 2, 3, 2]$	24	[1, 0, 5, 0, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 3, 1, 3]$	24	[1, 0, 1, 8, 4, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 3, 2, 2]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 1, 2, 3]$	12	[1, 1, 3, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 1, 3, 2]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 3, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 1, 3, 1, 3]$	4	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 2, 2, 2, 2]$	2	[2, 0, 0, 0, 0, 0]		2
6	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 5]$	24	[1, 0, 0, 7, 0, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 3, 4]$	24	[1, 0, 0, 7, 4, 0, 0]	x	-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 5]$	24	[1, 0, 0, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 4]$	24	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 3, 3]$	24	[1, 0, 0, 1, 3, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 4, 2]$	12	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3, 1, 4]$	24	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3, 2, 3]$	12	[1, 0, 0, 25, 0, 0, 0]		-24
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 5]$	24	[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 2, 4]$	24	[1, 0, 0, 2, 13, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 3, 3]$	24	[1, 0, 0, 1, 7, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 4, 2]$	24	[1, 0, 0, 8, 5, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 1, 4]$	24	[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 3, 2]$	24	[1, 0, 0, 7, 0, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 3, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 13, 4, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 1, 1, 4]$	24	[1, 0, 2, 3, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 1, 2, 3]$	24	[1, 0, 2, 0, 12, 0, 0]		15
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 2, 4]$	24	[1, 0, 1, 4, 6, 0, 0]		4
$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 7, 2, 4, 0, 0]		10	
$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 1, 4]$	24	[1, 0, 0, 13, 4, 0, 0]		-8	
$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 7, 4, 0, 0]	x	-2	

	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 3, 2]$	24	[1, 0, 0, 1, 3, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 3, 1, 3]$	24	[1, 0, 1, 8, 0, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 3, 2, 2]$	24	[1, 0, 1, 4, 6, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 4, 1, 2]$	12	[1, 0, 7, 2, 4, 0, 0]		10
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 1, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 1, 12, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 1, 3, 2]$	24	[1, 0, 4, 0, 2, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 2, 1, 3]$	24	[1, 0, 1, 4, 6, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 25, 0, 0, 0, 0]		26
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3, 1, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 3, 1, 2, 1, 3]$	12	[1, 0, 1, 2, 4, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 1, 2, 3]$	24	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 3]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 2, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 1, 7, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 1, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0, 0]	x	6
7	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 4]$	24	[1, 0, 0, 0, 15, 0, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 3, 3]$	12	[1, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 4]$	24	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 1, 10, 0, 0]		-8
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 3, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 4]$	24	[1, 0, 0, 0, 4, 1, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 23, 0, 3, 0]		27
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2]$	24	[1, 0, 0, 0, 15, 0, 3, 0]		19
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 22, 16, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 22, 16, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 2]$	24	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 15, 0, 3, 0]		19
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2]$	24	[1, 0, 0, 0, 15, 0, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3]$	24	[1, 0, 0, 0, 4, 1, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 3]$	6	[1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3]$	24	[1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2]$	12	[1, 0, 1, 4, 4, 0, 0, 0]		2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2]$	24	[1, 0, 0, 0, 15, 0, 3, 0]		19
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2]$	12	[1, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0]		7

	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2]$	6	$[1, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$	3	$[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		0
8	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]$	12	$[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0]$	x	4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 9, 3, 0, 0]$	x	-5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 0, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0]$	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 9, 3, 0, 0]$	x	-5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3]$	24	$[1, 0, 0, 0, 1, 10, 3, 0, 0]$		-5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2]$	24	$[1, 0, 0, 0, 1, 6, 9, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 27, 0, 0, 0, 0]$		28
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0]$	x	4
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 0, 0]$	x	3
$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$	4	$[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		2	
9	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0]$		17
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]$	6	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$		2
10	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$	x	2
11	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$	x	1

2.2 Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)

Ce catalogue comprend 18 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_{TI}[0]$	0	[0]		0
1	$\mathcal{K}_{TI}[1, 6]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 5]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[3, 4]$	7	[1, 1]	x	0
2	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 5]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 4]$	14	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 3, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[2, 2, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
3	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 4]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 3]$	14	[1, 0, 6, 0]	x	7
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 1, 3]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 2, 2, 2]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
4	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 3]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 2, 2]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 2, 1, 2]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
5	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 2]$	7	[1, 0, 0, 0, 0, 1]	x	0
6	$\mathcal{K}_{TI}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	x	1

3 Complexes d'accords équivalents par permutations dans la structure intervallique

3.1 Échelle chromatique (\mathbb{Z}_{12})

Ce catalogue comprend 77 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_{TP}[0]$	12	[12]		12
1	$\mathcal{K}_{TP}[1, 11]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 10]$	12	[2, 2]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[3, 9]$	12	[3, 3]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[4, 8]$	12	[4, 4]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[5, 7]$	12	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[6, 6]$	6	[6, 0]		6
2	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 10]$	12	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 9]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 3, 8]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 8]$	12	[2, 2, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 4, 7]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 3, 7]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 5, 6]$	24	[1, 1, 6]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 4, 6]$	24	[2, 2, 6]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[3, 3, 6]$	12	[3, 0, 3]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 5, 5]$	12	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[3, 4, 5]$	24	[1, 2, 1]	x	0
$\mathcal{K}_{TP}[4, 4, 4]$	4	[4, 0, 0]		4	
3	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 9]$	12	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 8]$	36	[1, 1, 1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 3, 7]$	36	[1, 2, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 2, 7]$	36	[1, 2, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 4, 6]$	36	[1, 1, 6, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 3, 6]$	72	[1, 1, 9, 3]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 2, 6]$	12	[2, 0, 4, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 5, 5]$	18	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 4, 5]$	72	[1, 1, 7, 1]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 3, 3, 5]$	36	[1, 1, 6, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 3, 5]$	36	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 3, 4, 4]$	36	[1, 1, 4, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 4, 4]$	18	[2, 0, 2, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 3, 3, 4]$	36	[1, 1, 6, 0]	x	6

	$\mathcal{K}_{TP}[3, 3, 3, 3]$	3	[3, 0, 0, 0]		3
4	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 8]$	12	[1, 1, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 2, 7]$	48	[1, 1, 0, 1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 3, 6]$	48	[1, 0, 7, 2, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 2, 6]$	72	[1, 0, 6, 1, 0]		6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 4, 5]$	48	[1, 1, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 3, 5]$	144	[1, 0, 0, 2, 1]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 2, 2, 5]$	48	[1, 0, 5, 0, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 4, 4]$	72	[1, 0, 4, 1, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 3, 3, 4]$	72	[1, 0, 5, 0, 4]		10
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 2, 3, 4]$	144	[1, 0, 1, 13, 3]		-8
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 2, 2, 4]$	12	[2, 0, 0, 0, 2]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 3, 3, 3]$	48	[1, 1, 3, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 2, 3, 3]$	24	[1, 0, 5, 0, 0]	x	6
5	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 7]$	12	[1, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 2, 6]$	60	[1, 0, 5, 0, 1, 1]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 3, 5]$	60	[1, 0, 0, 2, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 2, 2, 5]$	120	[1, 0, 0, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 4, 4]$	30	[1, 0, 3, 0, 0, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 2, 3, 4]$	240	[1, 0, 0, 1, 24, 2]		22
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 2, 2, 4]$	120	[1, 0, 1, 0, 3, 1]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 3, 3, 3]$	40	[1, 0, 2, 0, 0, 0]	x	3
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 2, 3, 3]$	180	[1, 0, 0, 3, 9, 0]		7
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 2, 2, 2, 3]$	60	[1, 0, 1, 0, 2, 0]		4
$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 2, 2, 2, 2]$	2	[2, 0, 0, 0, 0, 0]		2	
6	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 6]$	12	[1, 0, 5, 0, 0, 0, 0]	x	6
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 5]$	72	[1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 3, 4]$	72	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 4]$	180	[1, 0, 0, 0, 4, 1, 0]		4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 2, 3, 3]$	180	[1, 0, 0, 0, 3, 1, 0]		3
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3]$	240	[1, 0, 0, 0, 1, 34, 3]		-29
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 2, 2, 2, 2]$	36	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]		2
7	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]$	12	[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4]$	84	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 1]	x	4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3]$	42	[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]	x	3
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3]$	252	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 32, 0]		33
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$	105	[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]		2
8	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]$	12	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3]$	96	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 1]		3
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2]$	112	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]		2
9	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3]$	12	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]	x	3

	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2]$	54	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]$		2
10	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$	x	2
11	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$	x	1

3.2 Échelles heptatoniques (\mathbb{Z}_7)

Ce catalogue comprend 16 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
0	$\mathcal{K}_{TP}[0]$	7	[7]		7
1	$\mathcal{K}_{TP}[1, 6]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 5]$	7	[1, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[3, 4]$	7	[1, 1]	x	0
2	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 5]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 4]$	14	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 3, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[2, 2, 3]$	7	[1, 1, 0]	x	0
3	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 4]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 2, 3]$	21	[1, 0, 0, 1]		0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 2, 2, 2]$	7	[1, 1, 0, 0]	x	0
4	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 3]$	7	[1, 0, 0, 1, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 2, 2]$	14	[1, 0, 0, 1, 0]		0
5	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 2]$	7	[1, 0, 0, 0, 0, 1]	x	0
6	$\mathcal{K}_{TP}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$	1	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	x	1

4 Complexes d'accords équivalents par transformation affine (\mathbb{Z}_{12})

Ce catalogue comprend 157 complexes.

d	complexe	taille	b_n	p-v	χ
-	\mathcal{K}_\emptyset	0	0		0
1	$\mathcal{K}_M[(0, 1)]$	24	[1, 13]		-12
	$\mathcal{K}_M[(0, 2)]$	12	[2, 2]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 3)]$	12	[3, 3]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 4)]$	12	[4, 4]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 6)]$	6	[6, 0]		6
2	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2)]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 10)]$	48	[1, 2, 13]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 9)]$	48	[1, 2, 13]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 8)]$	24	[1, 2, 1]	x	0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 7)]$	24	[1, 1, 6]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 4)]$	12	[2, 2, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 8)]$	24	[2, 2, 6]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 3, 6)]$	12	[3, 0, 3]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 4, 8)]$	4	[4, 0, 0]		4
3	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3)]$	24	[1, 0, 11, 0]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 10)]$	48	[1, 0, 35, 0]		36
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 9)]$	48	[1, 0, 47, 0]		48
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 8)]$	48	[1, 1, 12, 6]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 7)]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4)]$	24	[1, 1, 24, 0]		24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 8, 10)]$	24	[1, 2, 13, 0]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 7, 10)]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 6, 10)]$	48	[1, 1, 42, 0]		42
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 10)]$	48	[1, 1, 30, 0]		30
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 10)]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 5)]$	24	[1, 1, 12, 0]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 6, 9)]$	24	[1, 1, 18, 0]		18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 5, 9)]$	24	[1, 1, 16, 0]		16
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 9)]$	12	[1, 2, 1, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 5, 6)]$	12	[1, 1, 6, 0]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 6, 7)]$	6	[1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 4, 6)]$	12	[2, 0, 4, 0]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 4, 8)]$	12	[2, 0, 8, 0]		10
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 6, 8)]$	6	[2, 2, 0, 0]		0
$\mathcal{K}_M[(0, 3, 6, 9)]$	3	[3, 0, 0, 0]		3	

4	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4)]$	24	$[1, 0, 11, 0, 0]$		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 1, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 9)]$	48	$[1, 0, 11, 6, 0]$		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 8)]$	48	$[1, 0, 12, 7, 0]$		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 1, 14, 0]$	x	-12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 8, 10)]$	48	$[1, 0, 25, 8, 0]$		18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 7, 10)]$	24	$[1, 0, 29, 0, 0]$		30
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 10)]$	48	$[1, 0, 27, 6, 0]$		22
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 10)]$	24	$[1, 0, 23, 0, 0]$		24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 10)]$	24	$[1, 0, 29, 0, 0]$		30
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 8, 9)]$	48	$[1, 0, 12, 7, 0]$		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 9)]$	48	$[1, 0, 11, 6, 0]$		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 9)]$	24	$[1, 0, 27, 0, 0]$		28
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 7, 8)]$	24	$[1, 1, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 8)]$	12	$[1, 1, 12, 0, 0]$		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 10)]$	48	$[1, 1, 1, 7, 0]$		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 9)]$	48	$[1, 1, 1, 7, 0]$		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 5, 6)]$	12	$[1, 1, 18, 0, 0]$		18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 8, 10)]$	24	$[1, 0, 33, 0, 0]$		34
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 6, 7)]$	24	$[1, 1, 24, 0, 0]$		24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 7, 10)]$	24	$[1, 1, 27, 0, 0]$		27
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 6, 10)]$	24	$[1, 1, 24, 0, 0]$		24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 5, 9)]$	24	$[1, 1, 0, 0, 4]$		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 7, 8)]$	12	$[1, 0, 21, 0, 0]$		22
$\mathcal{K}_M[(0, 2, 4, 6, 8)]$	12	$[2, 0, 0, 0, 2]$		4	
5	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5)]$	24	$[1, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 7, 0, 0]$		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 9)]$	48	$[1, 0, 0, 31, 0, 0]$		-30
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 8)]$	24	$[1, 0, 1, 16, 0, 0]$		-14
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 21, 2, 0]$		-18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 8, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 7, 0, 0]$		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 7, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 33, 2, 0]$		-30
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 27, 0, 0]$		-26
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 5, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 8, 9)]$	48	$[1, 0, 2, 3, 24, 0]$		24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 7, 9)]$	24	$[1, 0, 3, 4, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 9)]$	24	$[1, 0, 8, 6, 0, 0]$		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 7, 8)]$	24	$[1, 0, 11, 0, 0, 0]$		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6)]$	24	$[1, 0, 1, 20, 0, 0]$		-18
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 1, 32, 4, 0]$		-26
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 1, 2, 4, 0]$		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 1, 9, 1, 0]$		-6

	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 7, 8, 10)]$	24	[1, 0, 13, 2, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 8, 10)]$	24	[1, 0, 25, 0, 2, 0]		28
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 8, 10)]$	48	[1, 0, 25, 0, 2, 0]		28
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 7, 10)]$	24	[1, 0, 15, 0, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 7, 10)]$	12	[1, 0, 26, 0, 0, 0]		27
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 6, 10)]$	24	[1, 0, 1, 8, 4, 0]		-2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 8, 9)]$	24	[1, 0, 3, 4, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 8, 9)]$	48	[1, 0, 1, 8, 4, 0]		-2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 6, 7, 8)]$	6	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 6, 7)]$	24	[1, 1, 0, 3, 3, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 7, 10)]$	24	[1, 1, 0, 0, 3, 0]		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 6, 10)]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 7, 9)]$	12	[1, 1, 1, 1, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 5, 6, 9)]$	12	[1, 0, 30, 0, 0, 0]		31
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 6, 7, 10)]$	12	[1, 1, 3, 0, 0, 0]		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 4, 5, 8, 9)]$	4	[1, 1, 0, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 2, 4, 6, 8, 10)]$	2	[2, 0, 0, 0, 0, 0]		2
6	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)]$	24	[1, 0, 0, 7, 0, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 10)]$	48	[1, 0, 0, 0, 5, 0, 0]		6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 9)]$	48	[1, 0, 0, 0, 21, 0, 0]	x	22
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 9, 10)]$	48	[1, 0, 0, 0, 59, 0, 0]		60
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 8, 10)]$	48	[1, 0, 0, 0, 1, 10, 0]		-8
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 10)]$	48	[1, 0, 0, 0, 26, 0, 0]		27
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 10)]$	24	[1, 0, 0, 0, 3, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 8, 9)]$	48	[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0]	x	4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 9)]$	12	[1, 0, 0, 25, 0, 0, 0]		-24
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 8, 9, 10)]$	48	[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0]	x	0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 7, 9, 10)]$	24	[1, 0, 0, 2, 13, 0, 0]		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 9, 10)]$	48	[1, 0, 0, 1, 7, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 5, 9, 10)]$	24	[1, 0, 0, 8, 5, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 7, 10)]$	48	[1, 0, 0, 0, 39, 0, 0]		40
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 7, 8, 9)]$	24	[1, 0, 2, 3, 0, 0, 0]		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 8, 9)]$	24	[1, 0, 2, 0, 12, 0, 0]		15
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6, 10)]$	48	[1, 0, 1, 4, 4, 10, 0]		-8
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6, 9)]$	24	[1, 0, 1, 8, 4, 0, 0]		-2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 6, 9, 10)]$	24	[1, 0, 1, 8, 0, 0, 0]		-6
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 6, 9, 10)]$	24	[1, 0, 1, 4, 6, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 6, 7, 8)]$	12	[1, 0, 13, 0, 2, 0, 0]		16
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 7, 8, 10)]$	24	[1, 0, 4, 0, 2, 0, 0]		7
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 6, 8, 10)]$	12	[1, 0, 25, 0, 0, 0, 0]		26
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 5, 6, 8, 9)]$	12	[1, 0, 1, 2, 4, 0, 0]		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 6, 7, 10)]$	24	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 3]		3

7	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0]$		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 2, 8, 0, 0]$		-5
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 0, 2, 5, 0]$		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 1, 10, 0, 0]$		-8
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]$		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 11, 0, 0, 0]$		12
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 1, 34, 0, 0]$		-32
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 23, 0, 3, 0]$		27
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 27, 0, 3, 0]$		31
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 1, 55, 0, 0]$		-53
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9)]$	12	$[1, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0]$		4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)]$	12	$[1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 15, 0, 3, 0]$		19
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 0]$		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9)]$	6	$[1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]$		3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10)]$	12	$[1, 0, 1, 4, 4, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10)]$	6	$[1, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0]$		5
$\mathcal{K}_M[(0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10)]$	3	$[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		0	
8	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0]$	x	4
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0]$		7
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10)]$	48	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 26, 0, 0]$		27
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$		2
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0]$	x	0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 1, 10, 3, 0, 0]$		-5
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 1, 6, 9, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 27, 0, 0, 0, 0]$		28
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10)]$	4	$[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$		2
9	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)]$	24	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0]$	x	3
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$		5
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$		0
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0]$		17
	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10)]$	6	$[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$		2
10	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)]$	12	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$	x	2

182 **Annexe A. Complexes d'accords définis par une relation d'équivalence**

11	$\mathcal{K}_M[(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)]$	1	$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$	x	1
----	---	---	---	---	---

Bibliographie en relation avec ce travail

Revue internationale.

- [BS13a] Louis Bigo and Antoine Spicher. Self-Assembly of Musical Representations in MGS. *International Journal of Unconventional Computing*. 2013. (À paraître)

Conférences et workshops internationaux.

- [BSO10] Louis Bigo, Antoine Spicher and Olivier Michel. Spatial Programming for Music Representation and Analysis. *Spatial Computing Workshop 2010*.
- [BSO11a] Louis Bigo, Antoine Spicher and Olivier Michel. Two Representations of Music Computed with a Spatial Programming Language. *New Worlds of Computation 2011*.
- [BGS11] Louis Bigo, Jean-Louis Giavitto and Antoine Spicher. Building Topological Spaces for Musical Objects. *Mathematics and Computation in Music 2011*.
- [BGSM12] Louis Bigo, Jérémie Garcia, Antoine Spicher and Wendy E. Mackay. PaperTonnetz : Music Composition with Interactive Paper. *Sound and Music Computing 2012*.
- [BS13b] Louis Bigo and Antoine Spicher. Self-Assembly of Musical Representations in MGS. *Artificial Intelligence and Simulation of Behaviour Convention 2013*.
- [BGS13] Louis Bigo, Jean-Louis Giavitto and Antoine Spicher. Spatial Programming for Musical Transformations and Harmonization. *Spatial Computing Workshop 2013*.
- [BAGS13] Louis Bigo, Moreno Andreatta, Jean-Louis Giavitto and Antoine Spicher. Computation and Visualization of Musical Structures in Chord-based Simplicial Complexes. *Mathematics and Computation in Music 2013*.
- [GBSM13] Jérémie Garcia, Louis Bigo, Antoine Spicher and Wendy E. Mackay. PaperTonnetz : Supporting Music Composition with Interactive Paper. *ACM SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems 2013*.

Conférences et workshops nationaux

- [BSO11c] Louis Bigo, Antoine Spicher and Olivier Michel. Différentes utilisations de l'espace en musique à l'aide d'un langage de programmation dédié au calcul spatial. *Journées d'Informatique Musicale 2011*.

Bibliographie

- [Abelson 2000] Harold Abelson, Don Allen, Daniel Coore, Chris Hanson, George Homsy, Thomas F Knight Jr, Radhika Nagpal, Erik Rauch, Gerald Jay Sussman and Ron Weiss. *Amorphous computing*. Communications of the ACM, vol. 43, no. 5, pages 74–82, 2000. (Cited on page 50.)
- [Adleman 1994] Leonard M Adleman. *Molecular computation of solutions to combinatorial problems*. SCIENCE-NEW YORK THEN WASHINGTON-, pages 1021–1021, 1994. (Cited on page 50.)
- [Agon 1998] Carlos Agon. *OpenMusic : Un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*. PhD thesis, UPMC, 1998. (Cited on pages 134 and 141.)
- [Albini 2009] Giovanni Albini and Samuele Antonini. *Hamiltonian cycles in the topological dual of the tonnetz*. In Mathematics and Computation in Music, pages 1–10. Springer, 2009. (Cited on pages 15 and 73.)
- [Andreatta 2003] M. Andreatta and C. Agon. *Implementing algebraic methods in OpenMusic*. In Proceedings of the International Computer Music Conference, Singapore, 2003. (Cited on page 78.)
- [ano 2013] Anoto. <http://www.anoto.com>, 2013. (Cited on page 136.)
- [Axen 1998] Ulrike Axen. *Topological Analysis using Morse theory and auditory display*. 1998. (Cited on pages 30, 31 and 109.)
- [Baroin 2010] Gilles Baroin. *De Newton à Riemann, Graphes et Graphisme : Interactions Mathématico-Musico-Plastiques*. Litter@ incognita (3), pages 41–57, 2010. (Cited on pages 14 and 15.)
- [Baroin 2011] Gilles Baroin. *Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. : modélisations, visualisations en hyperspace*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2011. (Cited on page 14.)
- [Baroin 2013] Gilles Baroin. *Planet-4D Extensions : Hyperspheres for Musical Applications*. 2013. (Cited on page 116.)
- [Bergstrom 2007] T. Bergstrom, K. Karahalios and J.C. Hart. *Isochords : visualizing structure in music*. In Proceedings of Graphics Interface 2007, pages 297–304. ACM, 2007. (Cited on page 129.)
- [Brower 2008] Candace Brower. *Paradoxes of pitch space*. Music Analysis, vol. 27, no. 1, pages 51–106, 2008. (Cited on page 15.)
- [Brown 2003] Stephen C Brown. *Dual Interval Space in Twentieth-Century Music*. Music Theory Spectrum, vol. 25, no. 1, pages 35–57, 2003. (Cited on page 118.)
- [C-t 2013] C-Thru Music. <http://www.c-thru-music.com>, 2013. (Cited on pages 11 and 134.)
- [Callender 2008] Clifton Callender, Ian Quinn and Dmitri Tymoczko. *Generalized voice-leading spaces*. Science, vol. 320, no. 5874, pages 346–348, 2008. (Cited on pages 18, 19, 87 and 91.)

- [Capuzzo 2004] Guy Capuzzo Capuzzo. *Neo-Riemannian theory and the analysis of pop-rock music*. Music Theory Spectrum, vol. 26, no. 2, pages 177–200, 2004. (Cited on page 16.)
- [Catanzaro 2011] Michael J Catanzaro. *Generalized tonnetze*. Journal of Mathematics and Music, vol. 5, no. 2, pages 117–139, 2011. (Cited on pages 13 and 81.)
- [Chew 2000] Elaine Chew. *Towards a mathematical model of tonality*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000. (Cited on page 13.)
- [Chew 2002] Elaine Chew. *The spiral array : An algorithm for determining key boundaries*. In Music and artificial intelligence, pages 18–31. Springer, 2002. (Cited on page 13.)
- [Chew 2012] Elaine Chew. *About time : Strategies of performance revealed in graphs*. Visions of Research in Music Education, vol. 20, no. 1, 2012. (Cited on page 150.)
- [Chew 2013] Elaine Chew and Clifton Callender. *Conceptual and Experiential Representations of Tempo : Effects on Expressive Performance Comparisons*. In Mathematics and Computation in Music, pages 76–87. Springer, 2013. (Cited on page 150.)
- [Chouvel 2009a] Jean-Marc Chouvel. *Analyser l'harmonie - aux frontieres de la tonalité*, 2009. (Cited on pages 11, 16, 105, 109 and 143.)
- [Chouvel 2009b] Jean-Marc Chouvel. *Au-delà du système tonal*, 2009. (Cited on page 16.)
- [Chouvel 2009c] Jean-Marc Chouvel. *Traversée du vent et de la lumière. Six remarques pour une phénoménologie de la création musicale*, 2009. (Cited on pages 17, 133 and 135.)
- [Cohn 1991] Richard Cohn. *Properties and generability of transpositionally invariant sets*. Journal of Music Theory, vol. 35, no. 1/2, pages 1–32, 1991. (Cited on page 117.)
- [Cohn 1992] Richard L Cohn. *The dramatization of hypermetric conflicts in the Scherzo of Beethoven's Ninth Symphony*. 19th-century Music, vol. 15, no. 3, pages 188–206, 1992. (Cited on page 117.)
- [Cohn 1996] Richard Cohn. *Maximally smooth cycles, hexatonic systems, and the analysis of late-romantic triadic progressions*. Music Analysis, vol. 15, no. 1, pages 9–40, 1996. (Cited on page 17.)
- [Cohn 1997] Richard Cohn. *Neo-riemannian operations, parsimonious trichords, and their "tonnetz" representations*. Journal of Music Theory, vol. 41, no. 1, pages 1–66, 1997. (Cited on pages 10, 11, 86 and 118.)
- [Cohn 1998] Richard Cohn. *Introduction to neo-riemannian theory : a survey and a historical perspective*. Journal of Music Theory, pages 167–180, 1998. (Cited on page 10.)
- [Cohn 2011] Richard Cohn. *Tonal Pitch Space and the (Neo-) Riemannian Tonnetz*, 2011. (Cited on page 11.)
- [Cohn 2012] Richard Cohn. *Audacious euphony : Chromatic harmony and the triad's second nature*. Oxford University Press, 2012. (Cited on pages 11, 15, 20, 92 and 94.)
- [Costère 1954] Edmond Costère. *Lois et styles des harmonies musicales*. 1954. (Cited on page 78.)
- [Damiand 2010] Guillaume Damiand. *Contributions aux Cartes Combinatoires et Cartes Généralisées : Simplification, Modèles, Invariants Topologiques et Applications*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2010. (Cited on page 33.)

- [De Hon 2006] André De Hon, Jean-Louis Giavitto and Frédéric Gruau, editeurs. Computing media and languages for space-oriented computation, numéro 06361 de Dagstuhl Seminar Proceedings. Dagstuhl, <http://www.dagstuhl.de/en/program/calendar/semhp/?semnr=2006361>, 3-8 september 2006. (Cited on page 40.)
- [Douthett 1998] Jack Douthett and Peter Steinbach. *Parsimonious graphs : A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition*. Journal of Music Theory, pages 241–263, 1998. (Cited on pages 15, 17 and 82.)
- [dua 2013] *Dualo*. <http://dualo.org/>, 2013. (Cited on page 11.)
- [Egli 2004] Richard Egli and Neil F Stewart. *Chain models in computer simulation*. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 66, no. 6, pages 449–468, 2004. (Cited on page 42.)
- [Eimert 1964] Herbet Eimert. *Grundlagen der musikalischen reihentechnik*. Vienna : Universal Edition, 1964. (Cited on page 54.)
- [Estrada 2011] Julio Estrada. *La teoria d1, musiic-win y algunas aplicaciones al analisis musical : Seis piezas para piano, de arnold schoenberg*. Emilio Lluís-Puebla Octavio A. Agustin-Aquino, 2011. (Cited on pages 83 and 155.)
- [Forte 1973] Allen Forte. *The structure of atonal music*. Yale University Press, 1973. (Cited on pages 18, 25, 81 and 155.)
- [Fux 1725] Johann Joseph Fux. *Gradus ad parnassum*. 1725. (Cited on page 149.)
- [Garcia 2011] J. Garcia, T. Tsandilas, C. Agon, W. Mackay et al. *InkSplorer : Exploring Musical Ideas on Paper and Computer*. In Proceedings of New Interfaces for Musical Expression, 2011. (Cited on page 142.)
- [Gent 2011] I. P. Gent, T. Walsh, I. Hnich and I. Miguel. *CSPLib : a problem library for constraints*. web page at <http://www.csplib.org>, accessed in january 2011. (Cited on page 54.)
- [Giavitto 1996] Jean-Louis Giavitto, Olivier Michel and Jean-Paul Sansonnet. *Group-based fields*. In Parallel Symbolic Languages and Systems, pages 209–214. Springer, 1996. (Cited on page 45.)
- [Giavitto 2002] J.-L. Giavitto and O. Michel. *Data Structure as Topological Spaces*. In Proceedings of the 3rd International Conference on Unconventional Models of Computation UMC02, volume 2509, pages 137–150, Himeji, Japan, October 2002. Lecture Notes in Computer Science. (Cited on page 42.)
- [Giavitto 2003] J.-L. Giavitto. *Topological Collections, Transformations and Their Application to the Modeling and the Simulation of Dynamical Systems*. In Rewriting Technics and Applications (RTA'03), volume LNCS 2706 of LNCS, pages 208 – 233, Valencia, June 2003. Springer. (Cited on page 43.)
- [Giavitto 2008] Jean-Louis Giavitto and Antoine Spicher. *Systems self-assembly : multidisciplinary snapshots*, chapitre Simulation of self-assembly processes using abstract reduction systems, pages 199–223. Elsevier, 2008. doi :10.1016/S1571-0831(07)00009-3. (Cited on page 50.)
- [Gollin 1998] Edward Gollin. *Some aspects of three-dimensional "tonnetze"*. Journal of Music Theory, pages 195–206, 1998. (Cited on pages 14, 82, 85, 86 and 133.)
- [Gollin 2006] Edward Gollin. *Some Further Notes on the History of the Tonnetz*. Theoria, vol. 13, pages 99–111, 2006. (Cited on page 11.)

- [Guntram 2000] Berti Guntram. *Generic software components for scientific computing*. PhD thesis, PhD Dissertation, TU Cottbus, 2000. (Cited on page 64.)
- [Hautbois 1998] Xavier Hautbois. *La Mélodie Solide Ou le Mythe de la Caverne Revisité*. *Musicae Scientiae*, vol. 2, no. 2, pages 171–197, 1998. (Cited on page 115.)
- [Holland 1971] Paul W Holland and Samuel Leinhardt. *Transitivity in structural models of small groups*. *Comparative Group Studies*, 1971. (Cited on page 40.)
- [Holland 1994] S. Holland. *Learning with Harmony Space : an overview*. M. Smith, A. Smail & G. Wiggins (eds.), *Music Education : An Artificial Intelligence Perspective*, pages 24–40, 1994. (Cited on page 129.)
- [Hook 2006] Julian Hook. *Exploring musical space*. *Science*, vol. 313, no. 5783, pages 49–50, 2006. (Cited on page 16.)
- [Hook 2013] Julian Hook. *Generic Sequences and the Generic Tonnetz*. to appear, 2013. (Cited on pages 15, 80 and 82.)
- [Hostinsky 1879] Otakar Hostinsky. *Die Lehre von den musikalischen Klängen : Ein Beitrag zur ästhetischen Begründung der Harmonielehre*. 1879. (Cited on page 17.)
- [Huron 2001] David Huron. *Tone and voice : A derivation of the rules of voice-leading from perceptual principles*. *Music Perception*, vol. 19, no. 1, pages 1–64, 2001. (Cited on page 17.)
- [iso 2013] *IsoKeys*. <http://www.tuningbell.com/isokeys>, 2013. (Cited on pages 11 and 134.)
- [Janin 2011] David Janin. *Vers une modélisation combinatoire des structures rythmiques simples de la musique*. 2011. (Cited on page 147.)
- [Jedrzejewski 2006] Franck Jedrzejewski. *Mathematical theory of music*. Delatour, 2006. (Cited on page 55.)
- [Kaandorp 1994] Jaap A Kaandorp. *Modelling growth forms of biological objects using fractals*. 1994. (Cited on page 51.)
- [Kovalevsky 2008] Vladimir A. Kovalevsky. *Geometry of locally finite spaces*. Editing House Dr. Baerbel Kovalevski, 2008. (Cited on page 31.)
- [Letondal 2007] C. Letondal, W.E. Mackay and N. Donin. *Paperoles et musique*. In *Proceedings of the 19th International Conference of the Association Francophone d’Interaction Homme-Machine*, pages 167–174. ACM, 2007. (Cited on page 142.)
- [Lewin 1987] David Lewin. *Generalized musical intervals and transformations*. Yale University Press (New Haven), 1987. (Cited on pages 25 and 76.)
- [Li 1997] Ming Li. *An introduction to kolmogorov complexity and its applications*. Springer, 1997. (Cited on page 100.)
- [Lienhardt 1994] Pascal Lienhardt. *N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds*. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, vol. 4, no. 03, pages 275–324, 1994. (Cited on page 42.)
- [Lindley 1993] Mark Lindley and Ronald Turner-Smith. *Mathematical models of musical scales : A new approach*, volume 66. Verlag für systematische Musikwissenschaft Bonn, 1993. (Cited on page 14.)
- [Lisper 1993] B. Lisper. *On the relation between functional and data-parallel programming languages*. In *Proc. of the 6th. Int. Conf. on Functional Languages and Computer Architectures*. ACM, June 1993. (Cited on page 42.)

- [Lisper 1994] B. Lisper and J.-F. Collard. *Extent analysis of data fields*. Rapport technique TRITA-IT R 94 :03, Royal Institute of Technology, Sweden, January 1994. (Cited on page 42.)
- [Mandereau 2011] John Mandereau, Daniele Ghisi, Emmanuel Amiot, Moreno Andreatta and Carlos Agon. *Discrete phase retrieval in musical structures*. *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, no. 2, pages 99–116, 2011. (Cited on page 25.)
- [Masson 1971] Charles Masson. *Nouveau traité des règles pour la composition de la musique*. 1971. (Cited on page 17.)
- [Maupin 2011] Steven Maupin, David Gerhard and Brett Park. *Isomorphic tessellations for musical keyboards*. In *Proceedings of Sound and Music Computing Conference*, pages 471–478, 2011. (Cited on pages 11, 136 and 138.)
- [max 2013] *Cycling 74*. <http://www.cycling74.com>, 2013. (Cited on pages 136 and 141.)
- [Mazzola 2002] G. Mazzola et al. *The topos of music : geometric logic of concepts, theory, and performance*. Birkhäuser, 2002. (Cited on pages 12, 80, 83, 149 and 155.)
- [Meron 2001] Yoram Meron and Keikichi Hirose. *Automatic alignment of a musical score to performed music*. *Acoustical Science and Technology*, vol. 22, no. 3, pages 189–198, 2001. (Cited on page 151.)
- [Michel 1996a] O. Michel. *Design and implementation of 8_{1/2}, a declarative data-parallel language*. *Computer Languages*, vol. 22, no. 2/3, pages 165–179, 1996. special issue on Parallel Logic Programming. (Cited on page 46.)
- [Michel 1996b] Olivier Michel. *Représentations dynamiques de l'espace dans un langage déclaratif de simulation*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 1996. (Cited on page 45.)
- [Michel 2009] Olivier Michel, Antoine Spicher and Jean-Louis Giavitto. *Rule-based programming for integrative biological modeling – Application to the modeling of the lambda phage genetic switch*. *Natural Computing*, vol. 8, no. 4, pages 865–889, december 2009. Published online : 12 November 2008. (Cited on page 43.)
- [Mooney 1996] Michael Kevin Mooney. *The "Table of relations" and music psychology in Hugo Riemann's harmonic theory*. PhD thesis, Columbia University, 1996. (Cited on page 11.)
- [Morris 1974] Robert Morris and Daniel Starr. *The structure of all-interval series*. *Journal of Music Theory*, vol. 18, no. 2, pages 364–389, 1974. (Cited on pages 54 and 60.)
- [Morris 1987] R.D. Morris. *Composition with pitch-classes : a theory of compositional design*. Yale University Press New Haven and London, 1987. (Cited on pages 83 and 155.)
- [Munkres 1984] James R Munkres. *Elements of algebraic topology, volume 2*. Addison-Wesley Reading, 1984. (Cited on pages 31 and 39.)
- [mus 2013] *Musix*. <http://www.shiverware.com/musix/>, 2013. (Cited on pages 11 and 134.)
- [Otterström 1935] Thorvald Otterström. *A theory of modulation*. Da Capo press, Inc., 1935. (Cited on page 54.)
- [Palmer 1993] Richard S. Palmer and Vadim Shapiro. *Chain Models of Physical Behavior for Engineering Analysis and Design*. *Research in Engineering Design*, vol. 5, pages 161–184, 1993. Springer International. (Cited on page 42.)

- [Palmer 1994] Richard Palmer. *The Chains algebraic topological programming languages*. 26 slides available at <http://www.cs.cornell.edu/Simlab/slides/chains/chains.html>, February 1994. Department of Computer Science, Cornell University, located in the SymLab project web pages. (Cited on page 42.)
- [Papadopoulos 2007] H elene Papadopoulos and Geoffroy Peeters. *Large-scale study of chord estimation algorithms based on chroma representation and HMM*. In Content-Based Multimedia Indexing, 2007. CBMI'07. International Workshop on, pages 53–60. IEEE, 2007. (Cited on page 148.)
- [Peltier 2009] Samuel Peltier, Laurent Fuchs and Pascal Lienhardt. *Simplicial sets : Definitions, operations and comparison with simplicial sets*. Discrete Applied Mathematics, vol. 157, no. 3, pages 542–557, 2009. (Cited on page 149.)
- [Perle 1972] George Perle. *Serial composition and atonality : an introduction to the music of Schoenberg, Berg, and Webern*. Univ of California Press, 1972. (Cited on page 27.)
- [Potier 2012] Martin Potier. *De la sonification   la « musification » des systèmes complexes*. Master’s thesis, IRCAM, 2012. (Cited on pages 132 and 133.)
- [Prechtel 2012] A. Prechtel, A.J. Milne, S. Holland, R. Laney and D.B. Sharp. *A MIDI Sequencer That Widens Access to the Compositional Possibilities of Novel Tunings*. Computer Music Journal, vol. 36, no. 1, pages 42–54, 2012. (Cited on page 143.)
- [Rabiner 1993] Lawrence Rabiner and Biing-Hwang Juang. *Fundamentals of speech recognition*. 1993. (Cited on page 151.)
- [Reiner 1985] David L. Reiner. *Enumeration in Music Theory*. The American Mathematical Monthly, vol. 92, no. 1, pages 51–54, January 1985. (Cited on page 54.)
- [Riotte 1963] André Riotte. *Génération des cycles  quilibr es*. Rapport interne, no. 353, 1963. (Cited on page 54.)
- [Riotte 2006] André Riotte and Marcel Mesnage. *Formalismes et modèles musicaux.1*. Delatour, 2006. (Cited on pages 55 and 66.)
- [Rockwell 2009] Joti Rockwell. *Birdcage flights : a perspective on inter-cardinality voice leading*. Music Theory Online, vol. 15, no. 5, 2009. (Cited on page 90.)
- [Roeder 1987] John Roeder. *A geometric representation of pitch-class series*. Perspectives of New Music, vol. 25, no. 1/2, pages 362–409, 1987. (Cited on page 18.)
- [rol 2013] *bach project*. <http://www.bachproject.net/>, 2013. (Cited on page 140.)
- [Schiff 1983] David Schiff. *The music of Elliott Carter*. Faber and Faber, 1983. (Cited on page 55.)
- [Schlemmer 2013] Tobias Schlemmer and Moreno Andreatta. *Using Formal Concept Analysis to Represent Chroma Systems*. In Mathematics and Computation in Music, pages 189–200. Springer, 2013. (Cited on page 87.)
- [Schoenberg 1978] Arnold Schoenberg. *Theory of harmony*. Univ of California Press, 1978. (Cited on page 17.)
- [SCW 2011] SCW. *the “Spatial Computing Workshops” series and related events*. List on the “Spatial Computing Home Page” <http://www.spatial-computing.org/doku.php?id=events:start>, accessed in January 2011. (Cited on page 40.)

- [Shapiro 2001] Vadim Shapiro, G Farin, J Hoschek and M-s Kim. *Solid modeling*. 2001. (Cited on page 42.)
- [Spicher 2006] Antoine Spicher. *Transformation de collections topologiques de dimension arbitraire—Application à la modélisation de systèmes dynamiques*. PhD thesis, PhD thesis, Université d'Évry, 2006. (Cited on pages 47 and 49.)
- [Spicher 2011] Antoine Spicher, Olivier Michel and Jean-Louis Giavitto. Understanding the dynamics of biological systems, chapitre Interaction-based simulations for Integrative Spatial Systems Biology, pages 195–231. Springer, 2011. (Cited on pages 40 and 43.)
- [Straus 2003] Joseph N Straus. *Uniformity, balance, and smoothness in atonal voice leading*. Music Theory Spectrum, vol. 25, no. 2, pages 305–352, 2003. (Cited on pages 18 and 131.)
- [Tausz 2011] Andrew Tausz, Mikael Vejdemo-Johansson and Henry Adams. *JavaPlex : A research software package for persistent (co)homology*. "Software available at <http://code.google.com/javaplex>", 2011. (Cited on pages 33, 133 and 156.)
- [Thiebaut 2008] J.B. Thiebaut, P.G.T. Healey, N.B. Kinns and Q. Mary. *Drawing Electroacoustic Music*. In Proceedings of International Computer Music Conference, volume 8, 2008. (Cited on page 142.)
- [Tonti 2001] Enzo Tonti. *Finite formulation of the electromagnetic field*. In F. L. Teixeira, editeur, Geometric Methods in Computational Electromagnetics, PIER 32, pages 1–44. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001. (Cited on page 42.)
- [Tymoczko 2006] Dmitri Tymoczko. *The geometry of musical chords*. Science, vol. 313, no. 5783, pages 72–74, 2006. (Cited on page 18.)
- [Tymoczko 2009] Dmitri Tymoczko. *Three conceptions of musical distance*. In Mathematics and computation in music, pages 258–272. Springer, 2009. (Cited on pages 20 and 149.)
- [Tymoczko 2010] Dmitri Tymoczko. *Geometrical Methods in Recent Music Theory*. Music Theory Online, vol. 16, no. 1, 2010. (Cited on page 90.)
- [Tymoczko 2011] Dmitri Tymoczko. *A geometry of music : harmony and counterpoint in the extended common practice*. Oxford University Press, USA, 2011. (Cited on pages 19, 20, 92 and 96.)
- [Tymoczko 2012] Dmitri Tymoczko. *The Generalized Tonnetz*. Journal of Music Theory, vol. 56, no. 1, pages 1–52, 2012. (Cited on pages 14 and 82.)
- [Valencia 1998] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. *Algebraic topology for knowledge representation in analogy solving*. In European Conference on Artificial Intelligence (ECAI98), pages 88–92. Citeseer, 1998. (Cited on page 40.)
- [Van Dalen 2011] Dirk Van Dalen. *Logic and structure*. Springer, 2011. (Cited on page 39.)
- [Vieru 1980] Anatol Vieru. *Cartea modurilor*. Editura Muzicală, 1980. (Cited on pages 78 and 155.)
- [Vogel 1993] Martin Vogel. *On the relations of tone*, volume 16. Verlag für systematische Musikwissenschaft, 1993. (Cited on pages 11 and 14.)
- [Whitehead 1949] John H. C. Whitehead. *Combinatorial homotopy II*. Bull. Am. Math. Soc., no. 55, pages 453–496, 1949. (Cited on page 31.)

- [Wright 1997] M. Wright and A. Freed. *Open sound control : A new protocol for communicating with sound synthesizers*. In Proceedings of the 1997 International Computer Music Conference, pages 101–104. International Computer Music Association San Francisco, 1997. (Cited on page 136.)
- [Xenakis 1965] Iannis Xenakis. *La voie de la recherche et de la question*. Preuve, vol. 177, pages 33–36, 1965. (Cited on page 78.)
- [Zalewski 1972] Maciej Zalewski and Państwowa Wyższa Szkoła Muzyczna w Warszawie. *Harmonia teoretyczna*. Państwowa Wyższa szkoła muzyczna, 1972. (Cited on pages 78 and 155.)

