

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE
ET D'AÉROTECHNIQUE**

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale :
Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Énergétique et Aéronautique

Secteur de Recherche :
Mécanique des Solides, des Matériaux, des Structures et des Surfaces

Présentée par :

Benjamin TRESSOU

**CONTRIBUTION A L'HOMOGENEISATION DES MILIEUX VISCOELASTIQUES ET
INTRODUCTION DU COUPLAGE AVEC LA TEMPERATURE, PAR EXTENSIONS
D'UNE APPROCHE INCREMENTALE DIRECTE**

Directrice de thèse : **C. NADOT-MARTIN**

Soutenue le 1^{er} avril 2016

JURY

R. MASSON	Directeur de Recherche, CEA Cadarache, Saint-Paul-lez Durance	Président
D. KONDO	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris	Rapporteur
S. MERCIER	Professeur, Université de Lorraine, Metz	Rapporteur
N. LAHELLEC	Maître de Conférences, Aix-Marseille Université, Marseille	Examineur
M. LEVESQUE	Professeur, École Polytechnique de Montréal, Canada	Examineur
C. NADOT-MARTIN	Professeur, ISAE-ENSMA, Poitiers	Examineur

*A ma famille et en particulier à mon grand-père Marcel,
qui serait fier de mes « petites études ».*

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier la région Poitou-Charentes (depuis devenue la région Aquitaine-Limousin-Poitou-Charentes) ainsi que le laboratoire pour le soutien financier apporté à mon sujet de recherche. Mes trois années passées au sein de l'axe Endommagement et Durabilité du département de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut Pprime m'ont permis de finaliser cette thèse dans un cadre de travail idéal.

Bien évidemment, un grand merci à ma directrice de thèse, Carole, qui m'a conseillé dans les moments importants mais aussi apporté son soutien dans les choix réalisés. Je la remercie aussi de m'avoir permis de partir en stage de Master dans un pays anglophone pour « perfectionner » la langue, mais aussi d'avoir permis que j'y retourne pendant ma thèse. Tout cela apporte une bonne ouverture d'esprit, utile dans le monde de la recherche. Sans oublier toutes les discussions autour des verres bien mérités...

La suite logique de mes remerciements se dirige vers les membres de mon jury. Ainsi, je remercie Monsieur Masson pour l'avoir présidé, Messieurs Kondo et Mercier pour avoir rapporté mes travaux, Monsieur Lévesque pour avoir été présent par visio-conférence et enfin Monsieur Noël Lahellec pour avoir initié l'approche incrémentale et mes heures passées sur les équations théoriques. A tous un grand merci d'avoir jugé mon manuscrit et de m'avoir questionné tout en valorisant mon travail au cours de la soutenance.

Toujours dans le cadre professionnel, je tiens à remercier Noël Lahellec pour les discussions très enrichissantes que nous avons eues lors de « ESMC 2015 » à Madrid ainsi que pour m'avoir fourni certains de ses résultats. De la même manière, les échanges avec Sébastien Mercier m'ont permis de prendre du recul sur la manière de programmer. Enfin, un merci particulier à M^{me} Kowalczyk-Gajewska, que je ne connais pas mais qui m'a gentiment transmis ses résultats, présents dans ce manuscrit au paragraphe (VI.A), validant certaines de mes estimations plus rapidement.

Finally, I'd like to thank Reza Vaziri (UBC, Vancouver, Canada). My previous works at UBC as well as the one done during my two short journeys during my PhD allowed me to have rigorous results and good talks with other students of his laboratory (special thanks to Sardar, who helped me to discover the world of research and PhD at my young time).

Dans mon laboratoire en France, je remercie toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ces trois ans (et demi) de thèse et grâce à qui je garde de bons souvenirs de cette tranche de vie. Que ce soient ceux de mes différents bureaux (salle des stagiaires, bureau Multimat ou B26 puis B001), ceux avec qui j'ai été courir (Camille bien sûr, Baptiste, Louis, Thibal, Aline, Eliane, ...), ceux que j'ai fait courir (Marion, Elodie, Bibé, ...) ou encore ceux que j'ai fait souffrir lors des séances communément appelées « Mal de ventre » (comme Amélie qui se plaint, Damien ou Olga qui sont motivés dès 7h45, Azdine et Sylvie que

je n'ai vus qu'une fois, Philippe, Tony et Noël venant de l'extérieur, ou encore Alice et Mickael qui reprennent le flambeau) merci à vous pour tous ces bons moments. Il est difficile de nommer tout le monde, les permanents, les anciens comme Fabien, Fanny, Rémi, ... ceux de ma génération comme Andréa, Ousseynou, Pierrot..., ceux qui sont sur la fin comme Louis, Amélie, Elodie ..., ceux en pleine deuxième année à savoir Nathan, Alice, Sélim, ... et les petits nouveaux, François, Marina, Ravi, ... sans oublier Bibé, voisin de bureau, qui est un peu dans toutes les catégories ci-dessus.

Grosse dédicace à mon partenaire de course à pied, Alex, avec qui les sorties du dimanche matin étaient un défouloir, merci de m'avoir appris à aimer crapahuter sur les chemins du Poitou et de Navarre, dans les rivières qui débordent, les champs fraîchement labourés... L'indépendance que procure la course à pied reste pour moi un facteur majeur de mon caractère et de ma bonne humeur. De la même manière, grosse dédicace à Camille, avec qui partir 24h en Raid-Course d'Orientation n'était qu'une simple formalité après toutes les soirées passées à la Coloc Guissou à s'entraîner et à prendre l'apéro... Ces deux-là sont devenus bien plus que des amis à travers les épreuves, à très vite.

Un grand merci aux « Gros » qui se sont déplacés pour me voir, avec qui j'ai partagé de bons moments avant, pendant et j'en suis sûr après la thèse. Vous avez toujours été disponibles dans les moments où c'était nécessaire, au top.

« Chez Moe's », cave et bar à bière où j'ai si souvent partagé des moments conviviaux avec mes collègues, jusqu'à y célébrer mon doctorat, Tony et May, ainsi que Chloé pour l'enseignement du métier plus récemment, vous êtes bien plus que les gérants du bar d'à côté.

Je peux maintenant remercier ma famille et particulièrement mes parents, qui m'ont toujours accompagné et soutenu dans mes choix depuis le début de ma scolarité. Ma sœur aussi qui m'a effrayé avec les fonctions à une inconnue quand j'étais en primaire, et aujourd'hui, j'en ai bien plus dans mes problèmes et j'aime cela. Le cercle familial reste, pour moi, un socle solide sur lequel je peux m'appuyer pour continuer à avancer. C'est donc un grand MERCI que je leur adresse.

Enfin, comment ne pas finir par l'être aimée ? My dear love, I started my PhD and we were a new couple. First the distance, then you moved to France, then we are back to your country and finally, finally you have been at my side for these three years, even more. You saw me going through changes, but at the end, as you well said to me, we are stronger. The wedding, or commitment, is just the next logical step.

Voilà, c'est fini !!!

Bon courage à toutes et à tous.

*« You can't really succeed if there is not a possibility you failed.
You can't have a huge success, unless you will probably fail. »*

LAZ BARCKLEY

Introduction générale

Les matériaux utilisés pour des applications structurales présentent des hétérogénéités, morphologiques et/ou matérielles, qui influent sur leurs propriétés intrinsèques. Au sein de la grande famille des matériaux, la catégorie des matériaux composites à base polymère est largement répandue et utilisée dans différents domaines industriels, comme par exemple celui des transports aéronautiques et terrestres, ou même le génie civil. Leurs propriétés physico-chimiques et mécaniques les destinent à diverses applications. En guise d'exemple, le remplacement des alliages métalliques dans les fuselages d'avion par des composites à renforts fibres longues permet de réduire le poids de la structure, et donc le coût en carburant. De même, l'impératif d'allègement et de réduction des émissions de CO₂ est à l'origine de l'emploi croissant des thermoplastiques renforcés par des fibres de verre courtes dans le secteur automobile. Ainsi, les propriétés intéressantes des matériaux composites engendrent la multiplication des recherches afin d'appréhender leur comportement, le prévoir de manière efficace et garantir la fiabilité des structures. L'utilisation des composites devenant de plus en plus vaste, et notamment dans des conditions d'environnement de plus en plus sévères, la prise en compte des effets induits par les conditions de sollicitation (température, humidité, gaz environnants...) devient primordiale. La thématique des couplages multi-physiques est donc un axe de recherche important depuis quelques années afin de prédire au mieux les réponses mécaniques en milieu spécifique.

Les matériaux composites peuvent être étudiés à plusieurs échelles : l'échelle de la structure (macroscopique) en tant que telle ou bien l'échelle des phases (microscopique). Les théories permettant le passage du niveau macroscopique au niveau microscopique, et *vice versa*, dites de *transition d'échelles*, aident à mieux comprendre leur comportement qui dépend de la microstructure, des propriétés des phases et aussi des sollicitations qu'ils subissent. Les modèles résultants présentent en effet l'avantage, comparativement aux modèles construits selon une approche purement macroscopique, d'être « paramétrés » par la morphologie et les propriétés des constituants. Cela permet des « expérimentations numériques » contribuant à limiter les campagnes d'essais et aidant à l'optimisation des microstructures (composition et/ou morphologie).

C'est donc la modélisation par transition d'échelles des composites à matrice polymère, utilisés dans l'industrie des transports, partenaire principal de l'axe « Endommagement et Durabilité » de l'Institut Pprime, qui est au centre des présents travaux de thèse. L'objectif est de choisir et/ou développer une modélisation micromécanique, qui, d'une part soit capable d'estimer de manière fiable le comportement, plus particulièrement la viscoélasticité, d'une large gamme de composites à matrice polymère, *i.e.* pour différentes géométries et répartitions de renforts (fibres longues, courtes, particules, périodiques ou aléatoires) et d'autre part, ouvre la possibilité de coupler la viscoélasticité à d'autres processus physiques, la température en priorité.

Plusieurs approches existent dans la littérature pour aborder une transition d'échelles en viscoélasticité. Tout d'abord les approches qui, fondées sur le *principe de correspondance*, utilisent les transformées de Laplace pour transformer le problème hétérogène viscoélastique en un problème thermoélastique symbolique ensuite résolu par l'un des nombreux schémas d'homogénéisation

linéaire disponibles. Plus récemment, des approches directes ont vu le jour. Elles permettent une résolution du problème dans l'espace-temps réel (*i.e.* sans recours à un passage dans l'espace de Laplace) et permettent de fait de s'affranchir des difficultés associées au retour dans l'espace-temps réel. L'une de ces méthodes en particulier a retenu notre attention en vue de répondre à l'objectif formulé plus haut : il s'agit de l'approche incrémentale de Lahellec et Suquet (2007a). Elle offre *a priori* un large spectre d'applications possibles et un formalisme semblant être adapté à l'introduction d'un couplage avec la température.

Le travail présenté dans ce manuscrit s'articule autour d'un chapitre introductif et de trois **PARTIES** dans lesquelles sont regroupés les développements théoriques ainsi que les applications mises en œuvre.

Le premier chapitre (I) permet d'exposer plus en détail le contexte des travaux. Une brève introduction aux méthodes de transition d'échelles est proposée, en élasticité puis en viscoélasticité, afin d'en comprendre les principes et les difficultés. Une présentation rapide des travaux existants sur la modélisation des couplages multi-physiques permet ensuite d'appréhender les enjeux sous-jacents à leur prise en compte, en particulier dans un contexte mécaniquement non linéaire. Enfin, un bilan permettant de justifier le choix de la méthode incrémentale et précisant la démarche scientifique adoptée dans le cadre de la thèse vient clore le chapitre.

Dans la **PARTIE 1**, le chapitre (II) décrit les fondements théoriques et les différentes étapes de l'approche incrémentale telle qu'explicitée dans Lahellec et Suquet (2007a). Les hypothèses réalisées ainsi que les formules utiles à la mise en œuvre numérique de l'approche sont présentées. Des informations sur les choix qui ont été faits pour écrire le programme sont ensuite introduites. Dans le chapitre suivant (III), des exemples de calculs déjà présents dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) sont reconduits afin de valider le code réalisé en langage Python®. Des évaluations supplémentaires sur ces mêmes cas de calculs permettent d'aller plus loin dans la quantification des performances de l'approche.

Dans la **PARTIE 2**, le chapitre (IV) est consacré à une généralisation de la formulation de l'approche incrémentale, dans laquelle certaines des hypothèses de la version initiale sont relaxées, de façon à ouvrir de nouvelles perspectives d'application. Dans le chapitre suivant (V), on cherche à évaluer selon une démarche progressive chacun des aspects de la généralisation opérée précédemment. Les performances de l'approche dans sa version étendue sont ainsi testées en envisageant des modèles viscoélastiques linéaires de complexité croissante pour les phases d'un composite ciblé. Enfin, dans le chapitre (VI), l'approche incrémentale est associée à différents schémas d'homogénéisation linéaire permettant son utilisation sur de nouvelles microstructures.

Dans la **PARTIE 3**, le chapitre (VII) propose une première version de l'approche incrémentale avec prise en compte du couplage entre viscoélasticité et température. Des simplifications sont nécessairement introduites et discutées. Dans un cadre simplifié, les deux chapitres suivants proposent néanmoins des applications pour des degrés de couplage de complexité croissante. La première application, proposée au chapitre (VIII), se place dans une situation où seul le couplage de la thermique vers la mécanique est considéré tandis que la seconde, au chapitre (IX), envisage une situation de couplage dans laquelle les effets dissipatifs sont pris en compte comme source d'échauffement.

Table des matières

Introduction générale.....	1
I. Positionnement des travaux.....	7
I.A. Contexte de l'étude.....	8
I.B. Transition d'échelles : concept, méthodes et enjeux en viscoélasticité	10
I.C. Couplages multi-physiques	15
I.D. Bilan des objectifs et démarche adoptée.....	16
PARTIE 1	
Introduction de la PARTIE 1	19
II. Présentation de l'approche incrémentale.....	21
II.A. Lois de comportement des constituants.....	21
II.B. Formulation du problème hétérogène local (versions initiale et incrémentale).....	22
II.C. Hypothèses de travail.....	24
II.D. Méthode variationnelle.....	25
II.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique	27
II.F. Résolution du problème auxiliaire thermoélastique.....	28
II.G. Plan général de la résolution et optimisation des inconnues	30
II.H. Quelques éléments sur le codage	31
III. Microstructures à fibres longues.....	35
III.A. Microstructure réalisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman.....	36
III.B. Microstructure périodique : mise en place des outils et premiers résultats	41
III.C. Microstructure périodique : porosité et effets des contrastes.....	53
III.D. Estimation du second moment	60
Conclusion de la PARTIE 1	65
PARTIE 2	
Introduction de la PARTIE 2	67
IV. Généralisation de l'approche incrémentale.....	69
IV.A. Lois de comportement des constituants.....	69
IV.B. Formulation du problème hétérogène local (version incrémentale).....	70
IV.C. Hypothèses de travail (nouvelle version).....	72

IV.D.	Méthode variationnelle.....	73
IV.E.	Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique.....	75
IV.F.	Résolution du problème auxiliaire thermoélastique.....	77
V.	Application de l'approche incrémentale pour différentes lois viscoélastiques locales.....	78
V.A.	Modèle de Maxwell à variable interne non déviatorique.....	78
V.B.	Les deux phases viscoélastiques	87
V.C.	Modèle de Maxwell généralisé	92
VI.	Application de l'approche incrémentale à différentes microstructures.....	102
VI.A.	Microstructure à inclusions sphériques	103
VI.B.	Microstructures à inclusions ellipsoïdales, prolates et oblates	109
VI.C.	Composites à copeaux de bois lamellés.....	112
	Conclusion de la PARTIE 2	117

PARTIE 3

	Introduction de la PARTIE 3	119
VII.	Approche incrémentale avec couplage thermoviscoélastique.....	121
VII.A.	Lois de comportement des constituants.....	121
VII.B.	Formulation du problème hétérogène thermomécanique couplé (versions initiale et discrétisée)	122
VII.C.	Hypothèses de travail.....	126
VII.D.	Méthode variationnelle.....	127
VII.E.	Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique	128
VII.F.	Discussion et définition des cas d'application.....	129
VIII.	Température uniforme imposée en tout point.....	131
VIII.A.	Comportements des phases et chargements retenus	131
VIII.B.	Fibres élastiques	134
VIII.C.	Fibres thermoélastiques.....	140
VIII.D.	Fibres thermoviscoélastiques.....	144
IX.	Prise en compte de la variation de température induite par le chargement mécanique	146
IX.A.	Comportement des phases et intégration de l'équation de la chaleur dans la procédure de résolution	146
IX.B.	Premier résultat.....	148
	Conclusion de la PARTIE 3	150

Conclusion générale	153
A.1 Composites périodiques à fibres longues à section circulaire	159
A.2 Schémas de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion	165
Liste des figures	169
Liste des tableaux	175
Références bibliographiques	177

I. Positionnement des travaux

Les matériaux composites à base polymère utilisés dans l'aéronautique et dans les transports en général sont soumis, en plus des sollicitations mécaniques, aux effets de l'environnement qui modifient leur comportement et donc leur réponse mécanique. Les travaux présentés dans ce manuscrit se focalisent plus précisément sur la résolution de problèmes hétérogènes viscoélastiques avec comme objectif ultime de tenter l'introduction du couplage avec la température. Dans ce chapitre, le contexte et la démarche de l'étude sont formulés, permettant de positionner les travaux dans le domaine général de la micromécanique.

Dans un premier paragraphe (I.A), le contexte d'application des travaux est présenté et permet de comprendre les motivations à leur origine. Dans le second paragraphe (I.B), les concepts et enjeux de l'homogénéisation, en particulier en viscoélasticité, sont formulés. Le paragraphe suivant (I.C) présente une introduction aux couplages multi-physiques et plus spécifiquement mécanique – température. Enfin, le dernier paragraphe (I.D) dresse le bilan des objectifs et présente la démarche adoptée pour aborder les travaux réalisés dans ce manuscrit.

Table des matières du chapitre

Introduction générale.....	1
I. Positionnement des travaux.....	7
I.A. Contexte de l'étude.....	8
I.A.1. Problématique.....	8
I.A.2. Matériaux hétérogènes.....	9
I.A.3. Couplage direct.....	9
I.A.4. Motivations des travaux.....	9
I.B. Transition d'échelles : concept, méthodes et enjeux en viscoélasticité.....	10
I.B.1. Méthodes d'homogénéisation en élasticité.....	10
I.B.2. Homogénéisation viscoélastique en champs « moyens ».....	12
I.C. Couplages multi-physiques.....	15
I.C.1. Modélisations macroscopiques.....	15
I.C.2. Approches par transition d'échelles.....	15
I.D. Bilan des objectifs et démarche adoptée.....	16

I.A. Contexte de l'étude

I.A.1. Problématique

L'utilisation des matériaux composites se développe depuis des décennies. Ils présentent par exemple des propriétés mécaniques intéressantes pour des structures dont le poids est un facteur déterminant (applications transports aéronautiques et terrestres). Leur comportement mécanique n'est pas encore totalement appréhendé, d'où le besoin de développer des outils numériques capables de prédire les réponses à différentes sollicitations. De plus, les conditions d'environnement dans lesquels ces matériaux évoluent ont une influence sur leur tenue mécanique. Pour illustrer, Launay et al. (2013) montrent, à travers un essai de traction sur un polymère renforcé fibres courtes, l'influence de l'environnement sur la réponse. Sur la Figure 1 extraite de leurs travaux, les réponses à un essai de traction monotone à plusieurs températures et taux d'humidité sont tracées.

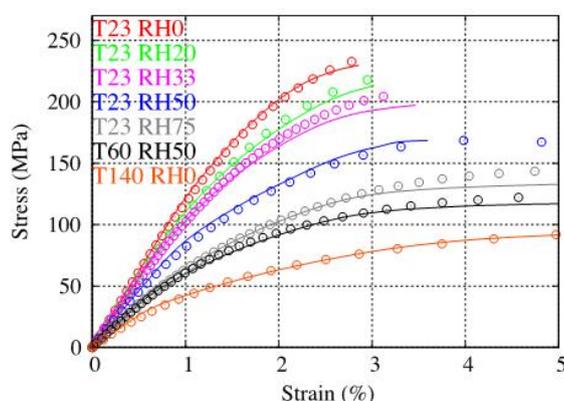


Figure 1 : Influence des paramètres température et taux d'humidité sur la réponse à un essai de traction monotone. Launay et al. (2013)

La thématique des couplages multi-physiques est devenue un des axes de recherche important du laboratoire. Elle revient de manière récurrente dans les recherches menées au sein de l'axe « Endommagement et Durabilité » du Département Physique et Mécanique de l'Institut P', auquel je suis rattaché. Dans cette optique, des moyens expérimentaux et numériques sont mis en œuvre afin de rendre compte, par exemple, de l'influence de la fatigue thermomécanique sur les composites aéronautiques ou du couplage thermo-diffuso-mécanique dans les réservoirs bobinés utilisés pour le stockage d'hydrogène. Bien que les phénomènes couplés soient déjà largement étudiés en élasticité, de nombreux challenges arrivent lorsque des comportements mécaniques dissipatifs sont considérés.

Le besoin d'outils, afin de comprendre et de prévoir le comportement de ces matériaux hétérogènes, est donc devenu une nécessité et le développement de ces derniers fait l'objet de nombreuses recherches de nos jours, en particulier lorsqu'il s'agit de prendre en compte l'interaction entre les effets d'environnement et les phénomènes dissipatifs mécaniques (Nguyen et al. (2013)).

I.A.2. Matériaux hétérogènes

D'une manière générale, tous les constituants étudiés dans ce manuscrit sont pris dans le cadre de la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI) à travers la théorie des *Matériaux Standards Généralisés* (MSG) développée par Halphen et Nguyen (1975). Ce cadre de travail permet de définir les matériaux d'une manière conceptuelle rigoureuse et repose sur deux notions : les variables internes, qui servent à décrire les mécanismes à l'intérieur du matériau, et deux potentiels convexes, l'énergie libre et le potentiel de dissipation. Dans le paragraphe (II.A), les lois de comportement résultant de ce formalisme sont présentées et forment la base de l'approche utilisée dans ce manuscrit. Par ailleurs, d'après Suquet (1987), lorsque les différentes phases d'un composite sont *Standards Généralisées* alors, le composite lui-même est *Standard Généralisé*. Le changement d'échelles conserve ce caractère, ce qui permet de rester dans une description par deux potentiels à l'échelle macroscopique.

Les matériaux étudiés dans ces travaux sont uniquement des composites à deux phases, ayant des propriétés linéaires de type élastiques, viscoélastiques, thermoélastiques ou thermoviscoélastiques, en fonction du cas étudié. Plusieurs microstructures, une large gamme de taux de renforts ainsi que de contrastes sont étudiées.

I.A.3. Couplage direct

La notion de couplage température/mécanique est abordée dans ce manuscrit. Deux approches principales existent dans la littérature. Les approches supposant uniquement les propriétés mécaniques dépendantes de la température tiennent compte d'un couplage dit indirect, alors que les approches qui s'appuient sur une formulation des lois régissant les problèmes thermique et mécanique en tenant compte explicitement de l'interaction entre les deux effets tiennent compte d'un **couplage dit direct**. L'écriture des comportements dans le cadre des MSG, à travers les deux potentiels décrits au paragraphe (I.A.2), se prête bien à l'introduction explicite d'un couplage direct. Par ailleurs, cela signifie que la température influe sur l'état local mécanique, mais aussi que la mécanique influe à son tour sur la variation de température.

Dans ces travaux, le formalisme adopté est présenté en vue de prendre en compte le couplage direct entre la viscoélasticité et la température. Les grandeurs caractéristiques du matériau seront considérées constantes, ce qui revient à ne pas tenir compte des couplages indirects.

I.A.4. Motivations des travaux

Une activité de modélisation multi-physique de nature phénoménologique mais rigoureuse et complète a vu le jour afin de poser les bases, dans le cadre de la TPI, pour des couplages directs (Rambert et Grandidier (2005) et Rambert et al. (2006,2007)). Ces travaux ont permis, par exemple, de modéliser l'effet d'un chargement thermomécanique sur un polymère sous haute pression et baigné dans un environnement gazeux. Des travaux ultérieurs au sein du laboratoire ont permis de valider l'efficacité d'une telle modélisation (p. ex. Olivier (2008) et Gigliotti et al. (2011)), entre autre avec la

définition d'éléments spécifiques sous Abaqus®. Par ailleurs, pour pallier à certaines limites du logiciel Abaqus® face aux différences de temps caractéristiques pouvant exister entre certains phénomènes physiques, une activité numérique, fondée sur la méthode appelée « Proper Generalized Decomposition », s'est développée pour résoudre les problèmes transitoires couplés. Cette méthode réduit le nombre de degrés de liberté et la discrétisation temporelle est adaptée à chaque phénomène physique, ce qui diminue les temps CPU en plus de palier aux limites précitées du logiciel Abaqus® (p. ex. Chinesta et al. (2013)).

Les modèles couplés cités plus haut sont appliqués à différentes échelles, à l'échelle des constituants pour faire du calcul en champs complets en vue d'améliorer la compréhension des mécanismes de déformation en dialoguant avec l'expérimental, ou à l'échelle d'une structure homogène pour faire du calcul prédictif. De par leur formulation macroscopique, ils n'intègrent pas d'information microstructurale et une transition d'échelles ne peut se faire qu'au moyen de calculs en champs complets. Au-delà du fait que des verrous soient encore à lever, une telle stratégie génère des coûts de calcul prohibitifs pour une utilisation industrielle. C'est pour cela qu'un axe de recherche a été lancé sur la **modélisation par transition d'échelles** de comportements couplés dans un contexte mécanique dissipatif, tel que la **viscoélasticité**. Il s'agit d'un axe de recherche à long terme dont les présents travaux constituent une première étape.

I.B. Transition d'échelles : concept, méthodes et enjeux en viscoélasticité

Le but du changement d'échelles est de remplacer, de manière fictive, un milieu hétérogène par un *Milieu Homogène Equivalent*, pour lequel les propriétés, appelées effectives, sont à déterminer. Des techniques ont commencé à être développées en élasticité linéaire, avant d'être étendues à des comportements dissipatifs, indépendants ou dépendants du temps. D'une manière générale, elles s'appuient sur la description du problème local hétérogène, qui fait intervenir : les conditions initiales, la compatibilité cinématique, la relation d'équilibre, les lois de comportement locales, les relations de moyenne, les conditions aux limites.

Pour des milieux aléatoires, le choix d'un *Volume Élémentaire Représentatif* (V.E.R.) est primordial. Il s'appuie sur la condition de séparation d'échelles, qui fait intervenir la notion de continuité macroscopique et le principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel (cf. Mandel (1964) et Hill (1967)). Lorsque celle-ci est respectée, les propriétés effectives sont déterminées par la résolution du problème local.

I.B.1. Méthodes d'homogénéisation en élasticité

Sans rechercher l'exhaustivité concernant les techniques existantes, ce paragraphe introduit ici deux familles de méthodes distinctes permettant de résoudre un problème d'homogénéisation : les méthodes en champs complets et les méthodes en champs moyens.

Champs « complets »

Les méthodes dites en champs « complets », comme la Méthode des Eléments Finis (MEF) ou la Fast Fourier Transform (FFT), s'appuient sur une description précise du matériau à l'échelle locale des hétérogénéités pour calculer les champs dans le V.E.R. et déterminer la réponse macroscopique. La première méthode, MEF, nécessite la discrétisation spatiale du V.E.R., caractérisée par l'étape de maillage. Cela repose en amont sur la génération artificielle et/ou reconstruction numérique à partir d'images réelles de la microstructure étudiée. Moulinec et Suquet (1994) ont présenté une méthode alternative aux éléments finis, appelée FFT, qui s'affranchit du maillage. Cette méthode est basée sur les fonctions de Green développées en élasticité (cf. Mura (1987)). Elle a par la suite (p. ex. Moulinec et Suquet (1998, 2003)) été étendue à d'autres comportements matériaux et améliorée par la même occasion. Cette méthode présente un grand intérêt lorsque la microstructure est compliquée (aléatoire) et difficile à reconstruire et/ou à mailler.

Pour des microstructures aléatoires, la taille du V.E.R. nécessaire à l'obtention de résultats fiables a fait l'objet de différents travaux avec une définition déterministe, pouvant conduire à des tailles gigantesques, et plus récemment des approches statistiques. Ces dernières présentent l'avantage d'associer la taille du V.E.R. à une certaine précision sur la grandeur effective recherchée et à nombre de réalisations (Kanit et al. (2003,2006), Pélissou 2009, Dirrenberger 2014). Cela permet notamment de limiter la taille du domaine de calcul si un grand nombre de réalisations est disponible.

Les méthodes en champs complets servent souvent de référence car les champs locaux sont calculés de manière explicite et sont accessibles. Elles présentent toutefois le désavantage d'avoir un coût élevé en termes de temps CPU.

Champs « moyens »

Par opposition aux méthodes en champs complets plus récentes, et afin de s'affranchir d'une représentation explicite de la microstructure, des méthodes dites en champs « moyens » (Bornert et al. (2001)) ont été développées. Des schémas d'homogénéisation permettent d'estimer les propriétés effectives à partir d'une description partielle de la microstructure. Quelques-unes des méthodes d'homogénéisation, dont certaines seront utilisées dans la suite du manuscrit, sont mentionnées ici.

- Voigt et Reuss ont développé des bornes strictes pour les propriétés effectives du MHE, basées sur les hypothèses de déformations uniformes (Voigt) et de contraintes uniformes (Reuss) dans le V.E.R.
- Eshelby (1957) a donné la solution exacte de la perturbation mécanique que génère une inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini, base de bon nombre des schémas d'homogénéisation existants.
- Hashin (1962) puis Hashin et Rosen (1964) ont proposé respectivement les schémas « Composite Sphere Assembly » (CSA) et « Composite Cylinder Assembly » (CCA).
- Mori et Tanaka (1973) puis Benveniste (1987) ont étendu l'approche d'Eshelby aux poly-cristaux puis aux composites renforcés par des inclusions.
- Hori et Nemat-Nasser (1993) ont introduit le principe de double inclusion, basé aussi sur la théorie d'Eshelby, qui a par la suite donné naissance à l'interpolation de Lielens et al. (1998).
- Luciano et Barbero (1994) donnent des formules explicites pour les propriétés effectives à partir d'un schéma adapté à une microstructure périodique à inclusions sphériques ou à fibres longues.
- Malekmohammadi et al. (2014) ont présenté un schéma d'homogénéisation pour des composites très fortement chargés en fibres parallélipédiques.

- D'autres schémas ont été présentés et utilisés (p. ex. Autocohérent, Ponte-Castañeda et Willis, Méthode des Cellules, Halpin-Tsai ...) pour différents types de matériaux hétérogènes dans divers travaux : Hill (1965), Christensen et Lo (1979), Aboudi (1991), Halpin et Kardos (1976), ...

Nous avons donc à notre disposition un catalogue assez conséquent de schémas d'homogénéisation en élasticité linéaire dont le choix est principalement dicté par le type de microstructures à traiter. Dans tous les cas, ils permettent de déterminer a minima les champs moyens dans chacune des phases et pour certains, les seconds moments moyens par phase, à partir notamment des relations de localisation (passage macro-micro) ainsi que la réponse homogénéisée (relation micro-macro).

Confrontations des approches et extensions en non-linéaire

Dans la littérature, les comparaisons, en élasticité, entre les deux approches ont donné lieu à un nombre conséquent de travaux. Llorca et al. (2000), Pierard et al. (2004), Sun et al. (2007) entre autres ont étudié les bornes de Voigt et Reuss ou d'Hashin-Shtrikman, les schémas de Mori-Tanaka ou autocohérent. Tucker et Liang (1999) ont proposé une étude critique des propriétés effectives obtenues avec différents schémas adaptés aux composites renforcés par des fibres courtes, par comparaison avec la MEF. Récemment, dans les travaux de Ghossein et Levesque (2012, 2014, 2015), la précision de certains schémas d'homogénéisation pour des microstructures à inclusions sphériques/oblates/prolates est étudiée de manière très complète. Les propriétés effectives ou encore les composantes sphériques et déviatoriques des tenseurs de localisation et des seconds moments, obtenues à partir de certains schémas (entre autres Eshelby, MT, Lielens), sont confrontées aux solutions de référence obtenues à partir d'une méthode basée sur la FFT (cf. Ghossein et Lévesque (2013)). Les travaux portent sur une vaste gamme de contrastes de propriétés, taux de fibres et formes des inclusions. Enfin, d'autres, comme Christensen (1990) ou Pindera (2009), ont passé en revue les différentes méthodes d'homogénéisation existantes ainsi que des approches émergentes.

La méthode en champs « moyens » a été développée en premier lieu en élasticité linéaire. Des travaux ont été entrepris afin de l'étendre aux comportements non linéaires. L'homogénéisation de milieux non linéaires repose, le plus souvent, sur la notion de *Composite Linéaire de Comparaison* (CLC), présentée pour la première fois par Ponte Castañeda (1991). Le composite non-linéaire est figé dans un état de déformation donné et des propriétés linéarisées sont affectées à chaque point. Ces propriétés sont obtenues par des méthodes de linéarisation, telles que la méthode tangente (Hutchinson (1976)), sécante (Berveiller et Zaoui (1979)) ou encore affine (Masson et al. (2000)). La linéarisation engendre un problème thermoélastique qui peut alors être résolu en utilisant le schéma linéaire adapté à la microstructure étudiée. Des méthodes de linéarisation plus récentes, celle du second ordre dans les travaux de Ponte Castañeda (2002) ou Idiart et al. (2006) ont montré que la prise en compte des fluctuations intra-phases permet d'améliorer les estimations pour les matériaux hétérogènes non-linéaires.

I.B.2. Homogénéisation viscoélastique en champs « moyens »

Ce manuscrit s'inscrit dans la thématique de l'homogénéisation en viscoélasticité. Toutefois, la prise en compte du couplage spatio-temporel en homogénéisation ne se fait pas simplement. En effet, la complexité des interactions entre effets visqueux et élastiques, à l'échelle locale, génère à l'échelle

supérieure une complexification du comportement viscoélastique global que Suquet (1987) appelle « *effet mémoire longue* ».

Effet mémoire longue

Suquet (1987) a montré analytiquement qu'un agrégat de deux constituants Maxwelliens ne donne pas, par transition d'échelles, un matériau de type Maxwell. Un terme supplémentaire issu du couplage des effets du temps et de l'espace au niveau local, correspondant à cet effet de mémoire longue, est ajouté au comportement du matériau homogénéisé. Rougier et al. (1994) ont plus tard confirmé l'apparition de cet effet. Sa prise en compte est difficile et a fait l'objet ultérieurement d'un certain nombre d'études (p. ex. Masson et Zaoui (1999)). La validité de la transition d'échelles en viscoélasticité est liée à la capacité des méthodes à prendre en compte les interactions spatio-temporelles à l'échelle microscopique et l'« *effet mémoire longue* » conséquent à l'échelle macroscopique. Au-delà de la description de cet effet, un autre enjeu se situe, dans la résolution même du problème d'homogénéisation, en particulier à travers l'étape de localisation. Les schémas d'homogénéisation développés en élasticité ne peuvent pas en effet être directement appliqués pour résoudre le problème hétérogène.

Principe de correspondance

Pour l'étude du comportement de matériaux viscoélastiques linéaires, Hashin (1970a,b) parle de ce qui est appelé *le principe de correspondance*. L'approche proposée se base sur l'utilisation des transformées de Laplace-Carson (L-C). Le problème local hétérogène viscoélastique est passé dans l'espace de Laplace, grâce aux transformée de L-C et s'écrit sous la forme d'un problème thermoélastique, qui peut alors être résolu avec un schéma d'homogénéisation développé en élasticité linéaire (paragraphe (I.B.1)). La solution dans l'espace-temps réel est obtenue en appliquant les transformées de Laplace inverses. Un ensemble conséquent de papiers traite de ce sujet pour plusieurs schémas d'homogénéisation, p. ex. Mori-Tanaka avec Brinson et Lin (1998), les bornes d'Hashin-Shtrikman avec DeBotton et Tevet-Deree (2004) ou encore le schéma Autocohérent par Christensen (1979). Néanmoins, malgré la cohérence des résultats obtenus dans de nombreux cas, l'utilisation de ce principe présente certaines limites. L'histoire des contraintes et déformations locales dans le V.E.R. est nécessaire pour le développement des relations constitutives, à l'instant considéré. Pour des microstructures où les modules homogénéisés ne sont pas connus de manière explicite, le retour dans l'espace réel par inversion des transformées de L-C est difficile. Des méthodes comme celles des collocations (Schapery (1962) ou Reikik et Brenner (2011)) sont développées dans ce sens mais restent coûteuses en temps CPU. Lorsque le comportement des phases est non-linéaire, une procédure de linéarisation est nécessaire à chaque pas de temps, pour obtenir le CLC, avant d'utiliser les transformées de L-C, (cf. p. ex. Brenner et Masson (2005)). De plus, les seconds moments estimés dans l'espace de Laplace ne sont pas forcément égaux aux seconds moments dans l'espace-temps réel, ce qui engendre des erreurs supplémentaires.

Approches à variables internes

Les limites du principe de correspondance ont fait naître, ces dernières décennies de nouvelles stratégies d'homogénéisation en viscoélasticité, basées sur la notion de variables internes dans le cadre des MSG (I.A.2). Au lieu de passer dans l'espace de Laplace pour résoudre un problème élastique symbolique, le problème viscoélastique est résolu directement dans l'espace-temps réel. La prise en charge du couplage spatio-temporel est implicite à travers l'écriture de variables internes qui représentent par exemple des champs de déformations anélastiques.

Méthodes à un potentiel

Dans cette direction, les premières recherches se sont concentrées sur des comportements décrits à l'aide d'un seul potentiel, comme par exemple, pour les matériaux visqueux où le potentiel de dissipation permet la description. Toutefois, les comportements susceptibles d'être décrits par un seul potentiel sont limités. Ainsi, la viscoélasticité qui nécessite la description de l'élasticité ET de la viscosité requiert une description par deux potentiels.

TFA/NTFA

Une des premières méthodes permettant de considérer une description du comportement avec deux potentiels est la *Transformation Field Analysis* (TFA), proposée par Dvorak et Benveniste (1992) et Dvorak (1992), puis améliorée par Chaboche et al. (2001). Dans cette approche, le V.E.R. est décomposé en sous volumes dans lesquels les champs locaux en déformation sont uniformes. Suquet (1997) a montré que les estimations étaient trop rigides, ce qui amena Michel et Suquet (2003) à proposer la *Non-uniform Transformation Field Analysis* (NTFA), avec des déformations locales non-uniformes. Par exemple, Roussette et al. (2009) ont étudié des comportements élasto-viscoplastiques avec la NTFA. Cette méthode présente l'intérêt de donner accès aux champs locaux (et non uniquement aux moyennes ou seconds moments par phase) mais nécessite l'utilisation de simulations en champs complets pour déterminer les modes anélastiques. Largenton et al. (2014) ont étendu la NTFA aux composites viscoélastiques linéaires dans le cas d'une application aux combustibles MOX.

Loi d'interaction

Pour des comportements non linéaires, les champs locaux dans les inclusions ne sont pas nécessairement homogènes, contrairement à la solution d'Eshelby (1957) en élasticité. Molinari et al. (1997, 2002) introduisent la loi d'interaction affine basée sur la méthode d'Eshelby et linéarisent les comportements pour calculer les moyennes des champs dans l'inclusion. Mercier et al. (2005) se sont basés sur cette loi pour l'appliquer à de la viscoélasticité linéaire. Cette méthode ne donne pas accès aux fluctuations intraphases, nécessaires aux nouvelles méthodes de linéarisation pour les comportements non-linéaires (Ponte Castañeda (2002)). Plus récemment, Berbenni et al. (2015) proposent une approche basée sur la loi d'interaction pour des matériaux viscoélastiques de type Maxwell.

Approche incrémentale de Lahellec et Suquet

Lahellec et Suquet (2007a, 2007b, 2007c, 2013) ont développé récemment deux approches incrémentales, basées sur la description des matériaux par deux potentiels et l'utilisation de variables internes (MSG). Par discrétisation temporelle du problème local, un potentiel incrémental, combinant les deux potentiels, est introduit et une forme variationnelle de ce problème est proposée. Dans la première version, Lahellec et Suquet (2007a, 2007b, 2007c), le potentiel incrémental est défini comme fonction des variables d'état à l'instant considéré. La viscoélasticité linéaire puis non-linéaire est étudiée. Dans la seconde version (Lahellec et Suquet (2013)), le potentiel incrémental est fonction des taux d'accroissement des variables d'état et l'approche est appliquée à des comportements elasto-viscoplastiques. Récemment, Badulescu et al. (2015) ont étendu cette deuxième version aux comportements viscoélastiques linéaires.

Méthode incrémentale de Doghri

Doghri et al. (2010) ont développé une autre approche incrémentale, pour les matériaux hétérogènes à constituants elasto-viscoplastiques dans laquelle la linéarisation des équations se fait à partir de la méthode affine. Étudiée par la suite par Brassart et al. (2011 et 2012) pour des déformations plastiques non-uniformes par phase, elle est appliquée avec succès aux comportements elasto-viscoplastiques. Miled et al. (2013) l'ont étendue aux comportements viscoélastiques-viscoplastiques.

Méthode « hybride »

Une méthode hybride a été présentée par Ricaud et Masson (2009). Le comportement effectif est obtenu de manière exacte grâce à une équivalence entre la méthode de collocation et une méthode basée sur l'utilisation de variables internes, obtenue dans certains cas, avec les bornes de Voigt, Reuss et le schéma de Mori-Tanaka. Cette méthode a ensuite été étendue par Masson et al. (2012) au schéma Autocohérent.

I.C. Couplages multi-physiques

L'autre thématique de ce manuscrit est la prise en compte des couplages multi-physiques, en particulier le couplage mécanique – thermique. En effet, comme indiqué dans le paragraphe (I.A), les matériaux sont utilisés d'une manière générale dans différents environnements et leur comportement mécanique peut être grandement affecté par les paramètres que sont la température, la diffusion d'eau ou d'espèces chimiques, ... dont les cinétiques sont à leur tour influencées par les mécanismes de nature mécanique. Des études sont donc menées pour comprendre et prévoir les effets de couplage entre différents processus physiques et le comportement mécanique.

I.C.1. Modélisations macroscopiques

Au niveau macroscopique, ou plus généralement pour un matériau considéré homogène, les mécanismes de couplage font l'objet de recherches adaptées aux conditions environnementales visées. D'un point de vue expérimental, de nombreuses études existent et servent à étayer les modélisations macroscopiques proposées (p. ex. Launay et al. (2013)).

La formulation de lois de comportement en présence de couplages est une thématique de recherche assez présente dans la littérature pour les matériaux homogènes. Les équations de couplages multi-physiques sont par exemple données dans Perez-Fernandez (2008) dans le cadre général de la TPI, néanmoins seule la forme de l'énergie libre est présente. Rambert et Grandidier (2005) et Rambert et al. (2006, 2007) ont développé un socle solide de modélisation pour aborder différents niveaux de couplage entre mécanique, thermique et diffusion d'espèces. Les équations ont été complètement formulées dans le cadre de la TPI pour des comportements mécaniques élastique, viscoélastique linéaire et enfin élasto-viscoplastique. La version de modélisation en thermo-diffuso-élasticité linéaire a d'abord été implémentée dans le logiciel d'éléments finis Abaqus®. Les autres versions ont été appliquées avec succès dans des travaux ultérieurs (p. ex. Gigliotti et al. (2011)). Enfin, Muliana et Khan (2008) présentent dans leurs travaux une méthode pour analyser le comportement de matériaux thermoviscoélastiques non linéaires.

I.C.2. Approches par transition d'échelles

En élasticité

D'un point de vue uniquement thermique, dans les travaux d'Özdemir et al. (2008), une formulation du problème local est établie. Les conditions aux limites sont explicitées et il est possible de calculer la conduction de chaleur, dans le matériau hétérogène, à partir d'une approche en champs « complets ».

L'homogénéisation en thermoélasticité est relativement présente dans la littérature. Par exemple, Rosen et Hashin (1970) ont développé des bornes pour le module d'expansion thermique effectif ainsi que pour la chaleur spécifique effective, en se basant sur la théorie d'Hashin en mécanique. Plus récemment, Auriault (1983) a proposé un moyen de calculer un coefficient de conduction thermique effectif pour des composites périodiques soumis à un chargement périodique en température. Noor et Shah (1993) ont comparé les prédictions des propriétés thermoélastiques homogénéisées obtenues à l'aide de six schémas d'homogénéisation (p. ex. Mori-Tanaka) aux solutions obtenues par éléments finis, le tout pour des matériaux composites renforcés fibres longues. Dans le même esprit, Karamy et Garnich (2005) ont présenté le calcul d'un coefficient d'expansion thermique homogénéisé pour composites à fibres longues grâce à une approche en champs complets. Pierard et al. (2004) présentent une approche intéressante, auparavant proposée par Lielens et al. (1998), pour la résolution de problèmes d'homogénéisation en thermoélasticité. Trois étapes d'homogénéisation, une pour le problème purement mécanique, une pour le problème purement thermique et la troisième purement mécanique pour annuler les déformations générées dans la deuxième étape, se succèdent. La solution finale est obtenue en utilisant le principe de superposition des champs de déformation. Cette méthode n'est pas liée à un schéma d'homogénéisation particulier et montre de bons résultats par confrontation aux résultats expérimentaux ou obtenus par la MEF.

Pour d'autres types de couplages, p. ex. Jacquemin et al. (2013) résolvent un problème couplé mécanique/diffusion d'humidité. De la même manière, Giordano (2014) et Giordano et al. (2014) travaillent sur le couplage électro/magnéto-mécanique, principalement en élasticité.

En viscoélasticité

Les principes développés en élasticité, comme le principe de superposition, ne sont plus applicables lorsque les interactions spatiotemporelles interviennent. Les travaux portant sur l'homogénéisation en présence d'un couplage thermoviscoélastique sont moins abondants.

L'équipe de Muliana a abordé l'homogénéisation en viscoélasticité en présence de couplage pour différents matériaux (Muliana et Khan (2008) ou encore Muliana et Li (2010)). Khan et al. (2011) ont mis en place un modèle pour calculer la conduction de chaleur et les contraintes thermiques dans un matériau composite. Puis, Khan et Muliana (2012) présentent un modèle de couplage entre la conduction thermique et la mécanique pour des composites viscoélastiques non linéaires. L'équation de la chaleur est seulement résolue au niveau macroscopique et la conduction à travers la structure est calculée en même temps que la réponse à la sollicitation mécanique. Leur étude se restreint à l'utilisation de la méthode des cellules.

I.D. Bilan des objectifs et démarche adoptée

Dans le paragraphe (I.A), nous avons présenté l'intérêt de développer des outils permettant la modélisation des phénomènes de couplages entre la mécanique et les effets de l'environnement pour les matériaux hétérogènes, et en particulier en réponse aux besoins des recherches menées au sein du laboratoire pour les composites utilisés dans les secteurs des transports aéronautiques et terrestres. Le paragraphe suivant (I.B) a présenté les concepts et enjeux majeurs sous-jacents à l'homogénéisation des milieux hétérogènes et plus particulièrement viscoélastiques. Le dernier

paragraphe (I.C) a recensé quelques études consacrées à la modélisation des couplages multiphysiques par des approches macroscopiques puis par transition d'échelles.

De nos jours, la modélisation par transition d'échelles est bien maîtrisée pour des milieux non linéaires, que ce soit par des approches en champs « complets » ou « moyens ». Les approches en champs « complets » représentent une solution fiable mais nécessitent des temps de mise en place, de calcul et post-traitement plus élevés. Les méthodes en champs « moyens » représentent alors une alternative intéressante pour le calcul de la réponse mécanique et ce, d'autant plus lorsque les constituants ont un comportement dissipatif. Toutefois, en viscoélasticité, la complexité des interactions spatio-temporelles entre les constituants à l'échelle microscopique rend les techniques d'homogénéisation difficiles à mettre en place. Les techniques fondées sur l'utilisation du principe de correspondance utilisent un passage dans l'espace de Laplace pour résoudre le problème élastique symbolique par un schéma d'homogénéisation linéaire et requièrent des techniques de retour dans l'espace-temps réel qui peuvent conduire à des développements complexes. Cette complexité est accrue lorsque la viscoélasticité est non linéaire. La viscoélasticité, même linéaire, est un comportement nécessitant une description par deux potentiels ce qui a très longtemps constitué en soi un enjeu majeur en homogénéisation non linéaire. C'est l'ensemble de ces considérations qui ont motivé l'approche incrémentale proposée par Lahellec et Suquet (2007a,b,c) enrichie dans leurs travaux ultérieurs. Cette approche permet de traiter rigoureusement des comportements décrits par deux potentiels, et présente l'avantage de résoudre le problème hétérogène directement dans l'espace-temps réel c'est-à-dire sans recours aux transformées de Laplace lorsqu'il s'agit de viscoélasticité. Cet aspect, associé au fait qu'elle se place dans un cadre thermodynamique rigoureux, nous est apparu comme un atout extrêmement intéressant dans l'optique d'introduire un couplage avec la température et d'autres phénomènes par la suite. De plus, elle n'est *a priori* pas limitée à un type de microstructure particulière, n'impose pas de restrictions vis à vis des comportements des phases, ayant déjà été étendue à la viscoélasticité non-linéaire (Lahellec et Suquet (2007b,c)) par exemple. Enfin, elle fournit l'accès aux moyennes par phase mais aussi à une information sur la fluctuation des champs intra-phases (seconds moments en déformation). Toutes ces raisons nous ont amenés à la retenir comme base de nos travaux. Bien que la version proposée par Lahellec et Suquet (2013) semblait plus prometteuse sur ses capacités à traiter des chargements complexes, celle-ci n'avait pas encore été appliquée de manière concrète en viscoélasticité au démarrage des présents travaux. De ce fait, la viscoélasticité étant l'objectif de la thèse, nous avons préféré conserver la version initiale de 2007.

Avant même d'envisager d'introduire un couplage, différentes étapes étaient nécessaires.

La première étape a consisté à coder l'approche, à tester la validité du code sur des exemples déjà présentés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) et à approfondir l'évaluation de l'approche sur des aspects supplémentaires non présentés dans les articles originaux (moyennes par phase, effets de contrastes...). Il s'agissait donc d'approfondir la quantification des performances de l'approche originale. Ces travaux feront l'objet de la première partie de ce manuscrit.

L'approche incrémentale dans sa version initiale (Lahellec et Suquet (2007a)) a été appliquée de manière concrète à des modèles viscoélastiques à une variable interne de nature déviatorique et utilisée en conjonction avec des schémas d'homogénéisation linéaires spécifiques. Un de nos objectifs

est d'être en mesure de traiter différents types de microstructures en termes de types de comportements viscoélastiques et de morphologies. Ceci motive les développements et simulations de la seconde partie dans laquelle d'une part une généralisation de la formulation théorique de l'approche est abordée et d'autre part, on cherche à démontrer de manière concrète l'association possible avec différents schémas d'homogénéisation linéaire.

Les résultats des deux parties précédentes fournissent alors la motivation et le socle permettant une première tentative de couplage avec la température.

PARTIE 1

Approche incrémentale : de la théorie à la pratique

Introduction de la *PARTIE 1*

L'objectif de cette partie est de présenter et d'utiliser l'approche incrémentale pour résoudre des problèmes viscoélastiques hétérogènes. Dans un premier chapitre (II), cette approche telle que formulée dans Lahellec et Suquet (2007a) est retranscrite et quelques éléments de programmation sont présentés. Dans le second chapitre (III), la validité du code est testée par confrontation aux solutions de référence sur des exemples choisis, issus de l'article original. Une évaluation des capacités de l'approche est réalisée en approfondissant l'étude sur ces cas d'application.

Tables des matières de la *PARTIE 1*

Introduction de la PARTIE 1	19
II. Présentation de l'approche incrémentale.....	21
II.A. Lois de comportement des constituants.....	21
II.B. Formulation du problème hétérogène local (versions initiale et incrémentale).....	22
II.C. Hypothèses de travail.....	24
II.D. Méthode variationnelle.....	25
II.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique	27
II.F. Résolution du problème auxiliaire thermoélastique.....	28
II.G. Plan général de la résolution et optimisation des inconnues	30
II.H. Quelques éléments sur le codage	31
II.H.1. Stratégie globale adoptée	32
II.H.2. Choix réalisés.....	33
III. Microstructures à fibres longues.....	35
III.A. Microstructure réalisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman.....	36
III.A.1. Microstructure et chargement.....	36
III.A.2. Solution exacte de référence : principe de correspondance	37
III.A.3. Estimation de la réponse macroscopique : taux de fibres de 0,45	38
III.A.4. Influence du taux de fibres.....	39
III.A.5. Bilan	41
III.B. Microstructure périodique : mise en place des outils et premiers résultats.....	41
III.B.1. Propriétés des phases et chargement appliqué.....	42
III.B.2. Solution exacte de référence : simulations en champs-complets.....	43
III.B.3. Approche incrémentale : méthode de détermination du pas de calcul optimal et critère de convergence de la réponse asymptotique.....	44
III.B.4. Réponses macroscopiques	45
III.B.5. Réponses moyennes par phase.....	49
III.B.6. Bilan	53
III.C. Microstructure périodique : porosité et effets des contrastes.....	53
III.C.1. Matériaux poreux.....	54
III.C.2. Effets de contraste	57
III.C.2.a) Propriétés de la fibre.....	58
III.C.2.b) Propriétés visqueuses de la matrice.....	59
III.C.3. Bilan	60
III.D. Estimation du second moment	60
III.D.1. Effets du contraste et du taux de fibres sur la projection déviatorique du second moment.....	61
III.D.2. Projection déviatorique du second moment pour le cas d'étude.....	63
III.D.3. Bilan	63
Conclusion de la PARTIE 1	65

II. Présentation de l'approche incrémentale

A travers ce chapitre, l'approche incrémentale telle que proposée par Lahelec et Suquet (2007a) est présentée. Après avoir rappelé la formulation thermodynamique des lois constitutives des phases, le problème hétérogène local est formulé avec un système de type Euler-Lagrange puis sous forme variationnelle. Les hypothèses de travail portant sur les lois constitutives locales sont ensuite introduites. Enfin, l'utilisation de la méthode variationnelle de Ponte-Castañeda (1992) et d'une approche d'optimisation par rapport aux inconnues conduisent à l'écriture d'un problème auxiliaire thermoélastique, pouvant être résolu à partir d'un schéma d'homogénéisation linéaire. Nous revenons ensuite sur quelques choix faits en ce qui concerne le code réalisé.

II.A. Lois de comportement des constituants

Dans le cadre général de la Thermodynamique des Processus Irréversibles, Halphen et Nguyen (1975) ont émis la théorie des *Matériaux Standards Généralisés* dans laquelle nous nous plaçons dans la suite du manuscrit. Chaque matériau considéré est ainsi défini de manière précise et ses équations constitutives s'écrivent à l'aide de deux potentiels : l'énergie libre massique ψ et le potentiel de dissipation φ . Ces deux potentiels sont des fonctions convexes des variables d'état du système, comme la déformation et les variables internes, et/ou de leurs dérivées temporelles. Dans le cas où la viscoélasticité linéaire des constituants est décrite par un modèle classique, l'énergie libre et le potentiel de dissipation peuvent se mettre sous la forme :

$$\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (II.1)$$

$$\varphi(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) \quad (II.2)$$

avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur de déformation infinitésimale, $\underline{\underline{\alpha}}$ une variable interne tensorielle, $\underline{\underline{\dot{\alpha}}}$ la dérivée temporelle et enfin ρ la masse volumique.

Les forces thermodynamiques associées au deux variables d'état sont déduites par dérivation de l'énergie libre :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{A}}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (II.3)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy et $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ la force motrice associée à $\underline{\underline{\alpha}}$. La loi complémentaire fournissant l'évolution de la variable interne est définie à partir de la dérivée du potentiel de dissipation :

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) \quad (II.4)$$

En combinant ces relations, les lois constitutives des matériaux considérés s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (II.5)$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \underline{\underline{0}} \quad (II.6)$$

Chaque matériau est défini de manière rigoureuse à travers ces deux équations différentielles. L'approche incrémentale va s'appuyer sur cette description.

II.B. Formulation du problème hétérogène local (versions initiale et incrémentale)

On considère un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) du milieu hétérogène, noté V , constitué de N phases occupant des domaines $V^{(r)}$ de fonctions caractéristiques $\chi^{(r)}$ et de fraction volumique c_r . Chaque phase r est gouvernée par les équations (II.5) et (II.6). On note $\psi^{(r)}$ et $\varphi^{(r)}$ l'énergie libre massique et le potentiel de dissipation de la phase r , et $\rho^{(r)}$ sa masse volumique. Les propriétés mécaniques sont homogènes par phase.

Il est alors possible de définir les deux potentiels ψ et φ en chaque point (position) \underline{x} de V sous la forme :

$$\rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{x}) = \sum_r \rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad (II.7)$$

$$\varphi(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{x}) = \sum_r \varphi^{(r)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad (II.8)$$

où l'on rappelle que la fonction caractéristique $\chi^{(r)}(\underline{x})$ vaut 1 si $\underline{x} \in V^{(r)}$ et 0 dans le cas contraire.

Le V.E.R. est soumis à un trajet de chargement défini par l'histoire du tenseur de déformation macroscopique, soit $\{\underline{\underline{E}}(t), t \in [0, t_{max}]\}$ et il s'agit de trouver les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x}, t)$ solutions du problème local suivant :

$$\left. \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \underline{\underline{0}} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \\ \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \rangle = \underline{\underline{E}}(t) + c.l. \text{ sur } \partial V \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \forall (\underline{\underline{x}}, t) \in V \times [0, t_{max}] \\ \forall t \in [0, t_{max}] \end{array} \quad (II.9)$$

Le symbole $\langle . \rangle$ représente la moyenne volumique sur V . Les conditions aux limites sur ∂V , frontière du domaine V sont choisies périodiques. A l'échelle macroscopique, on recherche la réponse homogénéisée ou effective définie par l'histoire de la contrainte moyenne $\{\underline{\underline{\Sigma}}(t), t \in [0, t_{max}]\}$.

D'après Lahellec et Suquet (2003) et en utilisant un schéma d'Euler implicite, il est possible d'écrire le problème local précédent sous forme discrétisée dans le temps. Ainsi, l'intervalle de temps $[0, t_{max}]$ est représenté par un nombre $m+1$ de temps, définis par le pas dt de discrétisation choisi, et tels que $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m = t_{max}\}$. Par ailleurs, les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}_n(\underline{\underline{x}})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_n(\underline{\underline{x}})$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n(\underline{\underline{x}})$ sont supposés connus à l'instant t_n alors que les champs locaux inconnus à l'instant t_{n+1} , $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}(\underline{\underline{x}})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}(\underline{\underline{x}})$ et $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}(\underline{\underline{x}})$ sont solutions du problème local incrémental, version discrétisée de (II.9), suivant :

$$\left. \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}) \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}\left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}\right) = \underline{\underline{0}} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{0}} \\ \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1} + c.l. \text{ sur } \partial V \end{cases} \right\} \forall \underline{\underline{x}} \in V \quad (II.10)$$

Afin de résoudre ce système d'équations, le principe variationnel d'Ortiz et Stainier (1999) est utilisé. Ainsi, les équations du problème (II.10) apparaissent comme les équations d'Euler-Lagrange pour le problème variationnel suivant :

$$\check{J}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) = \inf_{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1}} \inf_{\underline{\underline{\alpha}}} J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (II.11)$$

où $J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) = \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) + dt \cdot \varphi\left(\frac{\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}\right)$ est appelé potentiel incrémental.

La réponse macroscopique à l'instant t_{n+1} , soit $\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \rangle$, se calcule finalement à partir de la dérivée de \check{J} sous la forme (Lahellec et Suquet (2007a,b)) :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \frac{\partial \check{J}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) \quad (II.12)$$

Après discrétisation temporelle, il s'agit donc de résoudre le problème variationnel (II.11).

II.C. Hypothèses de travail

Pour résoudre le problème variationnel, Lahellec et Suquet (2007a) introduisent à ce stade des hypothèses simplificatrices. Elles portent sur la forme de la loi viscoélastique linéaire affectée aux phases et permettent de simplifier la mise en œuvre concrète de l'approche.

- La première hypothèse porte sur la nature de la variable interne, $\underline{\underline{\alpha}}$, tenseur du second ordre supposé symétrique et de nature purement déviatorique. Il est à noter qu'avec cette hypothèse, le coefficient de compressibilité reste constant au cours du temps. Cette hypothèse sera discutée dans le chapitre (IV). En effet, nous regarderons ce qu'il se passe dans le cas où le module de compressibilité dépend du temps. Un des avantages de cette première hypothèse apparaît lors du calcul du second moment en déformation. En effet, au lieu de le calculer entièrement, seul le produit doublement contracté de la partie déviatorique du tenseur des déformations par elle-même est nécessaire, voir l'équation (II.33).
- La deuxième hypothèse porte sur la forme des deux potentiels. Ils sont considérés quadratiques des variables dont ils dépendent conduisant par dérivation à des fonctions linéaires de ces mêmes variables ce qui facilite leur utilisation. Ainsi, il est possible d'écrire :

$$\rho^{(r)}\psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (II.13)$$

$$\varphi^{(r)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_v^{(r)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \quad (II.14)$$

avec $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)}$, $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)}$, $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{\alpha\alpha}^{(r)}$ et $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_v^{(r)}$ des tenseurs d'ordre 4 dotés des symétries majeure et mineure telles que :

$$\mathcal{L}_{ijkl} = \mathcal{L}_{klij} = \mathcal{L}_{jikl} = \mathcal{L}_{ijlk} \quad (II.15)$$

- La troisième hypothèse considère les constituants isotropes. Par suite, les tenseurs d'ordre 4 impliqués dans l'énergie libre peuvent être décomposés sous forme additive d'une partie sphérique et d'une partie déviatorique :

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{ab}^{(r)} = 3 * k_{ab}^{(r)} * \underline{\underline{\underline{J}}} + 2 * \mu_{ab}^{(r)} * \underline{\underline{\underline{K}}} \quad (II.16)$$

où a et b représentent ε ou α , les coefficients $k_{ab}^{(r)}$ et $\mu_{ab}^{(r)}$ sont respectivement des modules élastiques de compressibilité et de cisaillement du constituant r , les tenseurs d'ordre 4, $\underline{\underline{\underline{J}}}$ et $\underline{\underline{\underline{K}}}$, sont les deux projecteurs orthogonaux du tenseur identité d'ordre 4 symétrique, noté $\underline{\underline{\underline{I}}}$ tel que

$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}}$ et avec $\underline{\underline{J}}:\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}:\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{0}}$ ainsi que $\underline{\underline{J}}:\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}}:\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}$. L'hypothèse d'isotropie entraînant la décomposition selon les deux projecteurs (II.16) permet une simplification des équations dans la suite du problème mais n'est pas obligatoire comme nous le verrons au chapitre (IV).

Enfin, en vertu de la première hypothèse considérant la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ uniquement déviatorique, le tenseur d'ordre 4 impliqué dans le potentiel de dissipation peut être caractérisé par un seul coefficient scalaire de sorte qu'il devient possible d'écrire ce potentiel sous la forme simple suivante :

$$\varphi^{(r)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \eta^{(r)} \underline{\underline{\dot{\alpha}}}:\underline{\underline{\dot{\alpha}}} \quad (II.17)$$

avec $\eta^{(r)}$ le coefficient de viscosité de la phase r .

Bien que contraignantes *a priori* quant aux matériaux d'application, ces hypothèses simplifient les calculs tout en assurant des résultats physiquement cohérents pour les milieux qui les satisfont. Le spectre de matériaux concernés est néanmoins relativement large. De plus, nous montrerons, à partir du chapitre (IV) que l'approche incrémentale autorise à relaxer certaines de ces hypothèses et fournit des estimations de très bonne qualité dans des situations plus complexes (plusieurs variables internes par exemple) moyennant des temps de calcul plus longs (chapitres (V) et (VI)).

II.D. Méthode variationnelle

Dans un souci de simplification d'écriture, les champs $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}$ et $\underline{\underline{E}}_{n+1}$ seront désormais notés $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ et $\underline{\underline{E}}$.

Les hypothèses de travail ont délimité le périmètre d'application de l'approche, sans pour autant assurer une solution facilement calculable. L'un des verrous à la résolution du problème variationnel est lié au potentiel incrémental J et à la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}_n$ dont il dépend. Le champ $\underline{\underline{\alpha}}_n$ n'étant pas en général uniforme dans chacune des phases, J n'est pas uniforme par morceaux ce qui rend son homogénéisation plus difficile. L'idée développée dans les travaux de Ponte-Castañeda (1992) est donc d'introduire une énergie, notée J_0 , qui sera prise uniforme par morceaux et ainsi plus facile à homogénéiser, tout en sachant que la différence $\Delta J = J - J_0$ reste estimable. L'expression de l'énergie de référence J_0 est choisie de la forme suivante, en considérant les hypothèses du paragraphe (II.C) précédent :

$$J_0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{x}}) = \sum_r J_0^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \chi^{(r)}(\underline{\underline{x}}) \quad (II.18)$$

avec

$$J_0^{(r)}(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) = \rho \psi^{(r)}(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) + \frac{\eta_0^{(r)}}{dt}(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_n^{(r)}) : (\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_n^{(r)}) \quad (II.19)$$

où les grandeurs $\eta_0^{(r)}$ et $\underline{\alpha}_n^{(r)}$ sont uniformes dans la phase r . Afin de faciliter le déroulement des calculs par la suite, un coefficient adimensionnel inconnu $\theta^{(r)}$ est introduit tel que :

$$\eta_0^{(r)} = \theta^{(r)} * \eta^{(r)} \quad (II.20)$$

En insérant alors cette nouvelle énergie J_0 dans l'expression (II.11) de \check{J} définissant la forme variationnelle du problème incrémental, il vient :

$$\check{J}(\underline{E}) = \inf_{\underline{\varepsilon}=\underline{E}} \left[\inf_{\underline{\alpha}} \langle J_0(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) + \Delta J(\underline{\alpha}) \rangle \right] \quad (II.21)$$

D'après Ponte-Castañeda (2002), une bonne approximation de \check{J} peut être obtenue en imposant la stationnarité de $\Delta J = J - J_0$ par rapport à $\underline{\alpha}$. L'estimation résultante est donnée par :

$$\check{J}(\underline{E}) \approx \inf_{\underline{\varepsilon}=\underline{E}} \left[\inf_{\underline{\alpha}} \langle J_0(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) \rangle + \langle \text{Stat}_{\underline{\alpha}} \Delta J(\underline{\alpha}) \rangle \right] \quad (II.22)$$

Une fois le problème stationnaire résolu en chaque point \underline{x} , il en ressort l'estimation suivante de l'énergie:

$$\check{J}(\underline{E}) \approx \inf_{\underline{\varepsilon}=\underline{E}} \left[\inf_{\underline{\alpha}} \langle J_0(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) \rangle \right] + \left\langle \frac{\eta^{(r)} \theta^{(r)}}{dt(\theta^{(r)} - 1)} (\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n^{(r)}) : (\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n^{(r)}) \right\rangle \quad (II.23)$$

Jusque-là, les inconnues introduites $\underline{\alpha}_n^{(r)}$ et $\theta^{(r)}$ n'ont pas été spécifiées. L'optimisation de l'estimation de $\check{J}(\underline{E})$ par rapport à ces deux inconnues en utilisant la stationnarité de (II.23) permet alors à ce stade d'établir les expressions suivantes de $\theta^{(r)}$ et $\underline{\alpha}_n^{(r)}$:

$$\theta^{(r)} = 1 \pm \sqrt{\frac{\langle (\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n^{(r)}) : (\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n^{(r)}) \rangle_r}{\langle (\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_n^{(r)}) : (\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_n^{(r)}) \rangle_r}} \quad (II.24)$$

$$\underline{\alpha}_n^{(r)} = \frac{\langle \underline{\alpha}_n \rangle_r + (\theta^{(r)} - 1) \langle \underline{\alpha} \rangle_r}{\theta^{(r)}} \quad (II.25)$$

où le symbole $\langle \cdot \rangle_r$ représente la moyenne volumique sur la phase r .

Les auteurs insistent à ce stade du cheminement sur la nature véritable de la variable interne $\underline{\alpha}_n^{(r)}$. Cette dernière ne correspond pas en effet à la variable interne effective au temps t_n mais résume

plutôt l'histoire de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ jusqu'au temps t_{n+1} . Son interprétation est reliée au fait que le taux d'accroissement $\frac{\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}$ est une approximation de $\dot{\underline{\underline{\alpha}}}$ au temps t_{n+1} .

Par ailleurs, la racine de la condition d'optimalité pour $\theta^{(r)}$ définie par (II.24) avec un signe + (respectivement -) correspond au maximum (respectivement minimum) de ΔJ . Elle définit une borne supérieure (respectivement inférieure) rigoureuse pour \check{J} . L'application de l'approche à des composites périodiques, qui sera reprise dans le cadre des présents travaux à des fins de validation du code développé (III.B), conduit Lahellec et Suquet (2007a) à retenir la borne inférieure (à savoir (II.24) avec un signe -).

Au final, grâce aux équations (II.24) et (II.25), les inconnues introduites par la méthode variationnelle sont définies. Ces inconnues vont intervenir dans l'expression des différentes grandeurs. Il est d'ores et déjà possible de remarquer qu'elles sont dépendantes l'une de l'autre mais aussi des premier et second moments de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$, aux temps t_n et t_{n+1} , qu'il reste à définir.

II.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique

L'objectif est ici d'affiner l'estimation (II.23) de $\check{J}(\underline{\underline{E}})$ en déterminant l'expression du champ $\underline{\underline{\alpha}}$ en fonction des inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$. A cet effet, le problème de minimisation correspondant cette fois au premier terme $\text{Inf}_{\underline{\underline{\alpha}}} \langle J_0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \rangle$ de (II.23) est résolu. La première hypothèse formulée au paragraphe (II.C) supposant $\underline{\underline{\alpha}}$ purement déviatorique permet par ailleurs de simplifier les développements. Après calculs, l'expression de $\underline{\underline{\alpha}}$ est obtenue sous la forme :

$$\underline{\underline{\alpha}}(\underline{\underline{x}}) = \frac{\mu_{\varepsilon\alpha}^{(r)}}{\mu_{\alpha\alpha}^{(r)} + \eta^{(r)}\theta^{(r)}/dt} \underline{\underline{\varepsilon}}^d(\underline{\underline{x}}) + \frac{\eta^{(r)}\theta^{(r)}/dt}{\mu_{\alpha\alpha}^{(r)} + \eta^{(r)}\theta^{(r)}/dt} \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)} \quad (II.26)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^d(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}})$ est la partie déviatorique du tenseur des déformations.

En réinjectant cette expression de $\underline{\underline{\alpha}}$ dans celle de l'énergie $\check{J}(\underline{\underline{E}})$, cette dernière devient dépendante uniquement de la variable d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}})$ et des inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$ définies aux formules (II.24) et (II.25) :

$$\check{J}(\underline{\underline{E}}) \approx \check{W}_\Delta(\underline{\underline{E}}) + \left\langle \frac{\eta^{(r)}\theta^{(r)}}{dt(\theta^{(r)} - 1)} (\underline{\underline{\alpha}}_n - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) : (\underline{\underline{\alpha}}_n - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) \right\rangle \quad (II.27)$$

Le premier terme correspond alors à l'énergie effective d'un problème auxiliaire thermoélastique définie par :

$$\tilde{W}_\Delta(\underline{E}) = \text{Inf}_{\underline{\varepsilon}=\underline{E}} \langle w_\Delta^{(r)}(\underline{\varepsilon}) \rangle \text{ où } w_\Delta^{(r)}(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\mathcal{L}}^{(r)} : \underline{\varepsilon} + \underline{\tau}^{(r)} : \underline{\varepsilon} + f^{(r)} \quad (II.28)$$

où les tenseurs $\underline{\mathcal{L}}^{(r)}$ et $\underline{\tau}^{(r)}$ mais aussi l'énergie $f^{(r)}$ sont uniformes par morceaux et définis comme suit :

$$\underline{\mathcal{L}}^{(r)} = 3 * k_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} * \underline{J} + 2 * \left(\mu_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} - \frac{(\mu_{\varepsilon\alpha}^{(r)})^2}{\mu_{\alpha\alpha}^{(r)} + \eta^{(r)}\theta^{(r)}/dt} \right) * \underline{K} \stackrel{\text{def}}{=} 3 * k_\Delta^{(r)} * \underline{J} + 2 * \mu_\Delta^{(r)} * \underline{K} \quad (II.29)$$

$$\underline{\tau}^{(r)} = - \frac{2\mu_{\varepsilon\alpha}^{(r)} * \eta^{(r)}\theta^{(r)}}{dt * \mu_{\alpha\alpha}^{(r)} + \eta^{(r)}\theta^{(r)}} \underline{\alpha}_n^{(r)} \quad (II.30)$$

$$f^{(r)} = \frac{\mu_{\alpha\alpha}^{(r)} * \eta^{(r)}\theta^{(r)}}{dt * \mu_{\alpha\alpha}^{(r)} + \eta^{(r)}\theta^{(r)}} \underline{\alpha}_n^{(r)} : \underline{\alpha}_n^{(r)} \quad (II.31)$$

II.F. Résolution du problème auxiliaire thermoélastique

La résolution du problème variationnel fait appel, à travers les expressions (II.24) et (II.25) des deux inconnues introduites $\theta^{(r)}$ et $\underline{\alpha}_n^{(r)}$, aux premier et second moments de la variable interne $\underline{\alpha}$. D'après l'expression (II.26), cette variable est à son tour fonction de la partie déviatorique du champ de déformation, ainsi que des inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\alpha}_n^{(r)}$. On constate donc que le calcul du premier et du second moment du champ de déformation est obligatoire pour la mise en œuvre de l'approche. La résolution du problème auxiliaire thermoélastique (II.28) est réalisée à cet effet en plus de fournir l'énergie effective du milieu thermoélastique.

En introduisant classiquement les tenseurs de localisation $\underline{A}^{(r)}$ et de polarisation $\underline{a}^{(r)}$ comme dans Willis (1981) par exemple, la moyenne du champ de déformation dans la phase r est donnée par :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_r = \underline{A}^{(r)} : \underline{E} + \underline{a}^{(r)} \quad (II.32)$$

Le second moment du champ de déformation dans la phase r , ou plus exactement la moyenne sur la phase r du produit doublement contracté de sa partie déviatorique, est quant à lui obtenu partir de l'énergie effective. La relation est donnée par exemple dans Suquet (1995) et s'écrit :

$$\langle \underline{\varepsilon}^d : \underline{\varepsilon}^d \rangle_r = \frac{1}{c_r} \frac{\partial \tilde{W}_\Delta}{\partial \mu_\Delta^{(r)}}(\underline{E}) \quad (II.33)$$

D'après les travaux de Willis (1981), l'énergie effective d'un composite thermoélastique à N phases s'écrit sous la forme :

$$\tilde{W}_\Delta(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\check{L}}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\check{\tau}}} : \underline{\underline{E}} + \check{f} \quad (II.34)$$

avec

$$\underline{\underline{\check{L}}} = \langle \underline{\underline{L}} \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c_r \left(\underline{\underline{L}}^{(r)} - \underline{\underline{L}}^{(N)} \right) : \left(\underline{\underline{A}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right) \quad (II.35)$$

$$\underline{\underline{\check{\tau}}} = \langle \underline{\underline{\tau}} \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c_r \left(\underline{\underline{A}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right)^T : \left(\underline{\underline{\tau}}^{(r)} - \underline{\underline{\tau}}^{(N)} \right) \quad (II.36)$$

$$\check{f} = \langle f \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c_r \left(\underline{\underline{\tau}}^{(r)} - \underline{\underline{\tau}}^{(N)} \right) : \underline{\underline{a}}^{(r)} \quad (II.37)$$

Dans le cas d'un composite à 2 phases, ce qui sera le cas dans les présents travaux, les expressions des tenseurs de localisation et de polarisation de la phase r ($r = 1$ ou 2) peuvent être obtenues grâce aux relations de Levin (1967) en fonction des propriétés effectives :

$$\underline{\underline{A}}^{(r)} = \underline{\underline{I}} + \frac{1}{c_r} \left(\underline{\underline{L}}^{(r)} - \underline{\underline{L}}^{(s)} \right)^{-T} : \left(\underline{\underline{\check{L}}} - \langle \underline{\underline{L}} \rangle \right)^T \quad (II.38)$$

$$\underline{\underline{a}}^{(r)} = \frac{1}{c_r} \left(\underline{\underline{L}}^{(r)} - \underline{\underline{L}}^{(s)} \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\check{L}}} - \langle \underline{\underline{L}} \rangle \right) : \left(\underline{\underline{L}}^{(r)} - \underline{\underline{L}}^{(s)} \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\tau}}^{(r)} - \underline{\underline{\tau}}^{(s)} \right) \quad (II.39)$$

où s est la seconde phase du composite biphasé.

L'introduction des relations précédentes dans l'expression de l'énergie thermoélastique effective permet d'exprimer cette dernière en fonction des seules propriétés effectives :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\Delta(\underline{\underline{E}}) = & \langle f \rangle + \langle \underline{\underline{\tau}} \rangle : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\check{L}}} : \underline{\underline{E}} \\ & + \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{E}} + \left(\underline{\underline{\Delta L}} \right)^{-1} : \underline{\underline{\Delta \tau}} \right] : \left(\underline{\underline{\check{L}}} - \langle \underline{\underline{L}} \rangle \right) : \left[\underline{\underline{E}} + \left(\underline{\underline{\Delta L}} \right)^{-1} : \underline{\underline{\Delta \tau}} \right] \end{aligned} \quad (II.40)$$

où $\underline{\underline{\Delta L}} = \underline{\underline{L}}^{(1)} - \underline{\underline{L}}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\Delta \tau}} = \underline{\underline{\tau}}^{(1)} - \underline{\underline{\tau}}^{(2)}$.

Le tenseur de rigidité effectif est alors calculé numériquement ou estimé par un schéma d'homogénéisation linéaire adapté à la microstructure étudiée.

II.G. Plan général de la résolution et optimisation des inconnues

Toutes les équations étant écrites, la résolution pour trouver les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}(\underline{x})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}(\underline{x})$ au pas de temps donné t_{n+1} suit le cheminement suivant :

1. On suppose connus, au temps t_n et pour chaque phase r , les premier et second moments $\langle \underline{\underline{\alpha}}_n \rangle_r$ et $\langle \underline{\underline{\alpha}}_n : \underline{\underline{\alpha}}_n \rangle_r$ de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$.
2. L'énergie incrémentale effective $\check{J}(\underline{\underline{E}})$ est estimée à partir des équations (II.27) et (II.28).
3. Ces expressions impliquent le second moment au temps t_n de $\underline{\underline{\alpha}}$ (connu), mais aussi les inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$.
4. Le calcul des inconnues par les équations (II.24) et (II.25), nécessite les premier et second moments par phase au temps t_{n+1} de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ définie par (II.26), eux-mêmes reliés aux premier et second moments du champ de déformation solution du problème auxiliaire thermoélastique (II.28).
5. Les moments du champ de déformation sont déduits des relations (II.32) et (II.33). Ils dépendent des constantes thermoélastiques (II.29), (II.30) et (II.31) qui dépendent elles aussi des inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$.
6. Le problème à résoudre afin d'obtenir, par optimisation, les inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$ est ainsi de nature implicite et consiste en un système d'équations non linéaires. Les premier et second moments par phase au temps t_{n+1} de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ peuvent être calculés à l'issue de cette résolution.
7. Au final, la réponse en contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1}$ s'obtient en faisant la moyenne volumique du champ de contrainte local, soit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \rangle &= \sum_{r=1}^N c_r \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} \rangle_r + \underline{\underline{\tau}}^{(r)} \right] \\ &= \sum_{r=1}^N c_r \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} : \left(\underline{\underline{A}}^{(r)} : \underline{\underline{E}}_{n+1} + \underline{\underline{\alpha}}^{(r)} \right) + \underline{\underline{\tau}}^{(r)} \right] \end{aligned} \quad (II.41)$$

avec $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)}$, $\underline{\underline{\tau}}^{(r)}$, $\underline{\underline{A}}^{(r)}$, $\underline{\underline{\alpha}}^{(r)}$ donnés respectivement par (II.29), (II.30), (II.38) et (II.39).

L'approche incrémentale comporte deux niveaux d'approximation qu'il est bon de conserver en mémoire pour les applications envisagées dans la suite du manuscrit :

1. le premier est introduit au niveau de la relation (II.23) dans laquelle le potentiel incrémental effectif exact est remplacé par un potentiel approché impliquant une viscosité sécante $\eta_0^{(r)}$ (II.20) et une variable interne effective $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$ pour chaque phase ;
2. le second se situe au niveau de l'évaluation de l'énergie effective du composite thermoélastique (II.40).

Sur la Figure 2, une schématisation du plan général de la résolution au temps t_{n+1} est présentée.

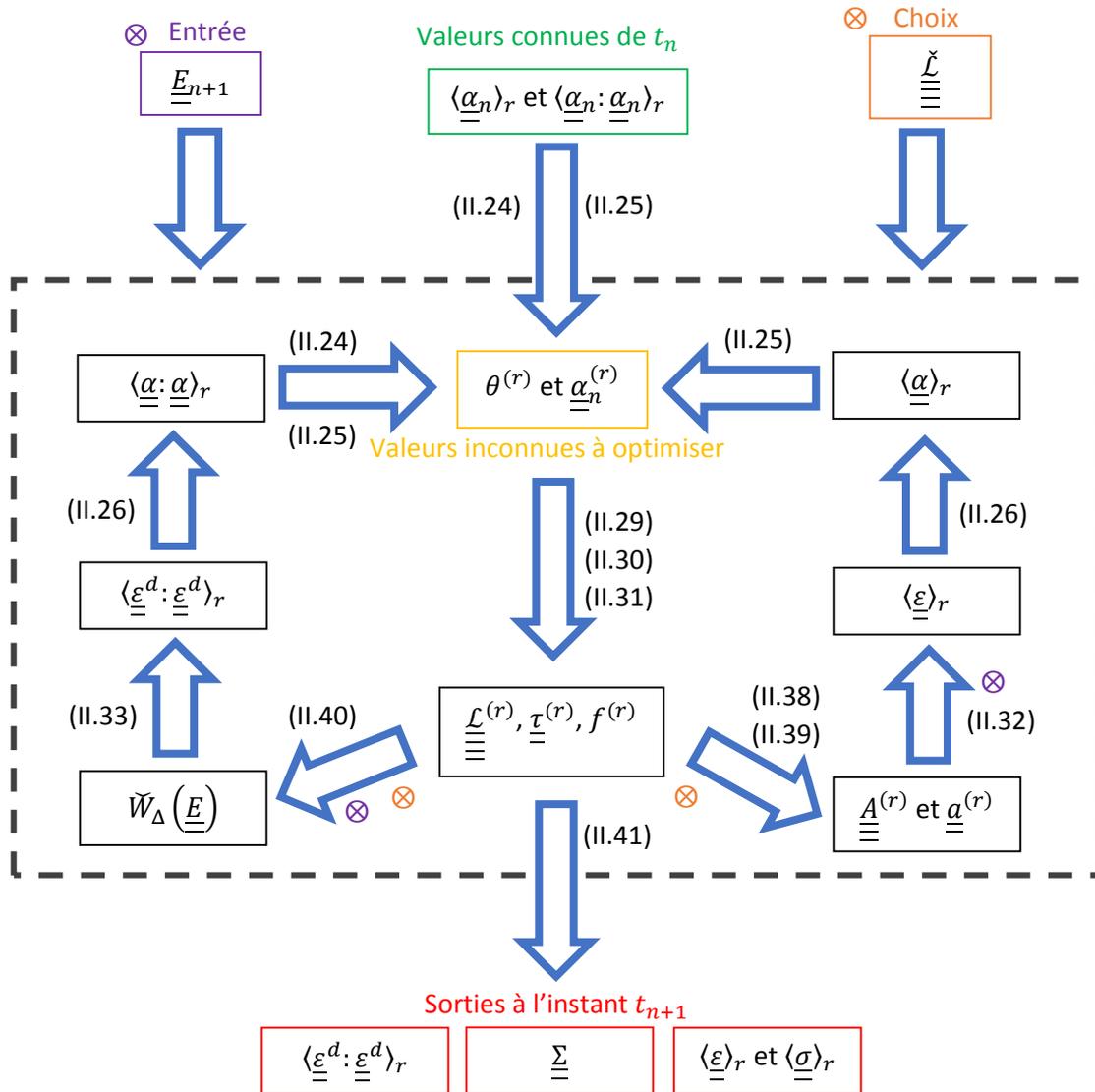


Figure 2 : Plan général de résolution (boucle sur l'incrément $[t_n, t_{n+1}]$).

Les sorties sont calculées lorsque les inconnues $\theta^{(r)}$ et $\underline{\alpha}_n^{(r)}$ sont stables à une tolérance près (souvent 10^{-5}).

II.H. Quelques éléments sur le codage

Dans Lahellec et Suquet (2007a), le code a été réalisé sous Fortran®. Nous avons décidé d'utiliser un autre langage pour programmer l'approche incrémentale : Python®. Ce choix s'est imposé pour deux raisons : les préconisations du laboratoire mais aussi, l'aspect open source qui lui confère l'avantage

d'être sans cesse amélioré (optimisé) en plus de l'accès à une large gamme de bibliothèques notamment pour le calcul scientifique.

II.H.1. Stratégie globale adoptée

Python® possède un ensemble de bibliothèques spécifiques au calcul scientifique, par exemple *Numpy* et *Scipy* dans lesquelles des fonctions déjà optimisées dans leur fonctionnement sont présentes pour le calcul tensoriel ou encore la résolution de problèmes non linéaires. De plus, l'aspect modulaire de la programmation sous Python®, nous permet de mettre en place un code relativement simple dans son architecture générale. Le programme principal fait appel aux différentes fonctions réparties en modules déjà implantés ou spécifiquement créés pour les besoins de l'étude. Ainsi, nous avons décidé de suivre le plan suivant :

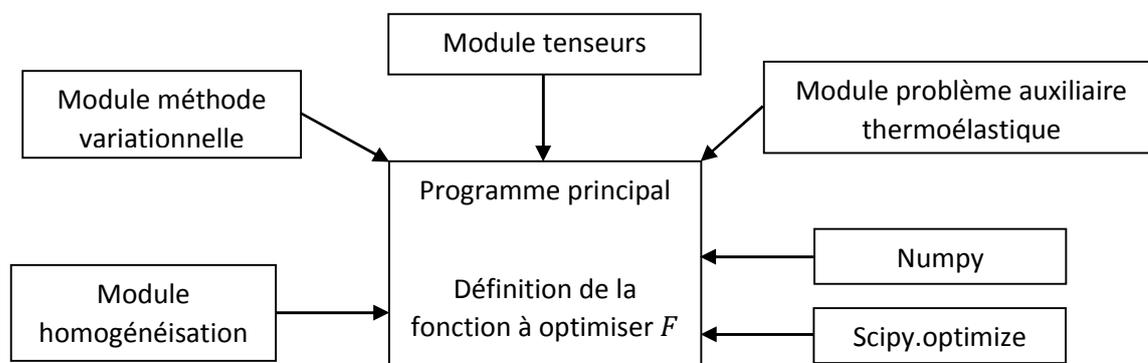


Figure 3 : Schéma descriptif de l'architecture du code réalisé.

Module tenseurs : création de tenseurs et d'opérations tensorielles spécifiques aux besoins de l'étude

- Tenseur 4 \Leftrightarrow Matrice (6,6) \Leftrightarrow constantes ingénieurs
- Inversion tenseur 4
- Tenseur 4 identité, projecteurs sphérique et déviatorique

Module problème auxiliaire thermoélastique

- Calcul des tenseurs de localisation et polarisation
- Calcul des premiers et seconds moments du tenseur de déformation

Module méthode variationnelle : contient les variables relatives au problème variationnel

- Calcul des inconnues
- Calcul des premiers et seconds moments des variables internes
- Définition des constantes matériaux du problème auxiliaire thermoélastique

Module homogénéisation :

- Calcul des propriétés effectives élastiques du composite auxiliaire selon HS, LB, MT, DI, ...

Programme principal : définition du problème

- Définition de la fonction à optimiser F

- Propriétés des phases
- Choix microstructures
- Chargement
- Pas de temps et durée de calcul
- Sélection des résultats à montrer

Scipy.optimize : librairie implantée avec un ensemble de fonctions d'optimisation

- Choix d'une des fonctions d'optimisation de problèmes non linéaires : *root*, *newton_krylov*, ...

Numpy : librairie implantée avec des fonctions pour les tenseurs (largement utilisée dans les modules)

- Définition de tableaux pour représenter les tenseurs (ordres 2 et 4) : *array*
- Produit tensoriel : fonction *tensordot*

II.H.2. Choix réalisés

Grâce à la librairie *Numpy*, la définition des tenseurs, d'ordre 2 ou 4 (ou 8), l'accès aux composants ou encore leur manipulation se font de manière aisée. En particulier, il existe la fonction *tensordot*, qui permet un grand nombre de calculs entre deux tenseurs : le produit doublement contracté ainsi que le produit tensoriel classiques, et tous les produits contractés sur n'importe quel indice sont aussi possibles. L'inversion des tenseurs d'ordre 4 a été réalisée en utilisant la représentation matricielle (6,6) rigoureuse présentée dans le livre « Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 » (chapitre 5, Suquet et Bornert, 2001) et le module d'inversion d'une matrice carrée du package *linalg*.

En ce qui concerne l'étape d'optimisation des inconnues suivant le problème implicite non linéaire (cf. II.G.6), Lahellec et Suquet (2007a) utilisent une fonction dérivée de la méthode hybride de Powell, appelée HYBRD1 disponible dans la bibliothèque MINPACK sous Fortran®. Dans la librairie *Scipy*, le package *optimize* contient un ensemble de fonctions d'optimisation, de la recherche d'un minimum sur une fonction scalaire à la recherche de racines pour des problèmes non linéaires à plusieurs variables. Plusieurs d'entre elles, permettant de trouver les racines d'un problème multi-dimensions, ont retenu notre attention : *root*, *fsolve* et *newton_krylov*. Dans les trois cas, les fonctions ont besoin en entrée d'une fonction F qui dépend d'un vecteur \underline{X} (inconnu) et elles cherchent la valeur optimale pour \underline{X} tel que $F(\underline{X}) = 0$. Ces fonctions d'optimisation utilisent la matrice jacobienne de F . Il est possible de la fournir si elle est explicite, autrement, ces fonctions estiment sa valeur avec différents algorithmes (hybride, linéaire, krylov, ...). Suite à différents essais avec ces trois fonctions, il semble que les résultats obtenus sont quasi identiques (à minima pour les problèmes supports des tests effectués). Néanmoins, pour le même calcul, la fonction de *newton_krylov* donne la réponse avec moitié moins de temps que les deux autres (sensiblement identiques en temps). Cette dernière a donc été retenue pour l'étape d'optimisation de l'approche incrémentale.

III. Microstructures à fibres longues

Dans le chapitre précédent (II), l'ensemble des équations nécessaires à l'utilisation de l'approche incrémentale a été présenté de même que le principe de résolution. L'approche a été programmée en langage Python®. Afin de valider le code développé, deux exemples, déjà étudiés dans la publication originale de Lahellec et Suquet (2007a), sont tout d'abord reproduits et les résultats obtenus avec notre code sont comparés à des solutions de référence, obtenues via le principe de correspondance ou par champs complets. Ces exemples concernent des microstructures composites à fibres longues circulaires. La première microstructure considérée réalise la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman, Hashin (1965). La seconde est une microstructure périodique ayant une cellule de base carrée avec une fibre en son centre entourée de matrice. Les deux microstructures impliquent des constituants isotropes. A travers ces exemples, différentes fractions volumiques de fibres et propriétés matériaux sont considérées, deux types de chargement sont étudiés, et certaines capacités de l'approche incrémentale, au-delà de celles déjà présentées dans Lahellec et Suquet (2007a), sont aussi explorées.

Le paragraphe (III.A) concerne la première microstructure. Elle possède des constituants incompressibles avec une fibre élastique linéaire et une matrice viscoélastique linéaire de type Maxwell. La déformation macroscopique imposée est représentative d'un test de relaxation en glissement simple. La solution de référence est, dans ce cas, obtenue par le principe de correspondance. L'étude porte alors sur la relaxation de la réponse homogénéisée au cours du temps pour différents taux de fibres.

Les autres paragraphes (III.B, III.C et III.D) concernent la microstructure périodique. La fibre est toujours considérée élastique linéaire et la matrice viscoélastique linéaire de type Maxwell, mais les deux constituants ne sont plus incompressibles. Les propriétés effectives sont calculées grâce aux travaux de Luciano et Barbero (1994), ce qui introduit une variante par rapport aux travaux originaux de Lahellec et Suquet (2007a) pour ce type de microstructure. Un chargement monotone de glissement simple est imposé au bord du V.E.R. La solution de référence est, dans ce cas, calculée avec la méthode des éléments finis sous Abaqus®.

Dans le paragraphe (III.B), les réponses homogénéisées et moyennes par phase sont étudiées et comparées à la solution de référence. Dans le paragraphe suivant (III.C), les propriétés mécaniques des constituants sont modifiées dans le but d'observer leur influence sur les réponses obtenues mais surtout de tester les performances de l'approche incrémentale. Le dernier paragraphe (III.D) est consacré à l'étude du second moment du champ de déformation dans la matrice, son estimation étant requise dans l'approche incrémentale pour le calcul des inconnues.

III.A. Microstructure réalisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman

Dans Francfort et Murat (1986), une microstructure a été construite afin de réaliser rigoureusement la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (HS), comme présentée dans Hashin (1965). En considérant une telle microstructure avec des phases isotropes et incompressibles, les propriétés effectives sont alors données de manière exacte, et en particulier le module de cisaillement. Ainsi, associée à l'approche incrémentale, cette borne permet de résoudre sans erreur le problème auxiliaire thermoélastique défini au paragraphe (II.E) et cela, à tous les pas de temps. Cette même borne est utilisée avec le principe de correspondance qui donne une solution exacte du problème viscoélastique complet dans le cas étudié. Il est ainsi possible de comparer les estimations à la solution de référence afin de quantifier les erreurs de l'approche incrémentale qui, pour cette microstructure, sont uniquement générées par l'introduction de la variable interne $\underline{\alpha}_n^{(r)}$ (le problème auxiliaire thermoélastique étant résolu de manière exacte).

Après avoir rappelé les caractéristiques du problème étudié (microstructure, borne inférieure d'Hashin-Shtrikman, comportement et propriétés des phases, chargement appliqué) les équations correspondant à la solution de référence obtenue par l'application du principe de correspondance sont données. La réponse effective à un chargement de relaxation estimée par l'approche incrémentale est comparée à la solution de référence pour un taux de fibres de 0,45 comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a). Cet exemple, choisi parmi les exemples d'application du papier original, vise à illustrer la validité du code développé dans le cadre des présents travaux. Une étude de l'influence du pas de discrétisation temporelle sur la qualité de la solution est cependant rajoutée, de même que des confrontations aux solutions de référence pour plusieurs taux de fibres. Un bilan est ensuite dressé quant à la précision de l'approche incrémentale pour cette microstructure dont l'avantage est de permettre une résolution exacte du problème auxiliaire thermoélastique.

III.A.1. Microstructure et chargement

Le V.E.R. du matériau hétérogène étudié, dont une idée de sa représentation est donnée Figure 4, est ici composé de deux phases isotropes et incompressibles. Les fibres, alignées selon l'axe \underline{x} , sont élastiques linéaires tandis que la matrice est viscoélastique de type Maxwell.

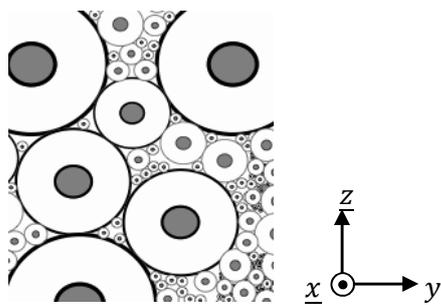


Figure 4 : Représentation de la microstructure réalisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (vue en coupe).

Les propriétés mécaniques des phases sont regroupées dans le Tableau 1.

	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (GPa)	Viscosité déviatorique $\eta^{(r)}$ (GPa.s)
Fibre ($r = 1$)	133,3	x
Matrice ($r = 2$)	23,3	10

Tableau 1 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice. Phases isotropes et incompressibles. Lahellec et Suquet (2007a).

Les propriétés élastiques linéaires effectives du composite sont caractérisées par un seul module de cisaillement exactement prédit par la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman. Ce module de cisaillement effectif, noté $\tilde{\mu}^{HS}$, est donné par la formule suivante :

$$\tilde{\mu}^{HS} = \frac{\mu^{(2)}\mu^{(1)} + \mu^{(2)}(c_1\mu^{(1)} + c_2\mu^{(2)})}{\mu^{(2)} + c_2\mu^{(1)} + c_1\mu^{(2)}} \quad (III.1)$$

où $\mu^{(r)}$ et c_r sont respectivement le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase r .

Un chargement de relaxation en glissement simple dans le plan (y, z) est simulé en imposant une déformation macroscopique de la forme :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * E_0(t) \text{ avec } E_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (III.2)$$

Nous nous intéressons alors à la relaxation des contraintes au cours du temps pendant une durée de $t_{max} = 8$ s.

III.A.2. Solution exacte de référence : principe de correspondance

La solution de référence, ou exacte, du problème local viscoélastique (II.9) pour la microstructure considérée peut être obtenue à l'aide du principe de correspondance et des transformées de Laplace, comme dans les travaux de Debotton et Trevet-Deree (2004) ou encore Barbero et Luciano (1995). La réponse déviatorique du composite viscoélastique est ainsi donnée par l'équation suivante :

$$\Sigma^d(t) = \tilde{\mu}^{A,HS} (b_1 e^{-\frac{t}{T_2}} + b_2 e^{-\frac{t}{T_c}}) \quad (III.3)$$

où $\tilde{\mu}^{A,HS}$ est la borne HS, donnée par (III.1), pour la réponse instantanée effective du composite et dans laquelle les différentes constantes sont définies par les expressions suivantes :

$$b_1 = \frac{T_2^{-1} - C}{T_2^{-1} - T_c^{-1}} \text{ et } b_2 = \frac{C - T_c^{-1}}{T_2^{-1} - T_c^{-1}} \quad (III.4)$$

$$\text{où } C = \frac{\mu^{(2)}\mu^{(1)}(c_1 + 1)}{\eta^{(2)} * (\mu^{(1)}(1 + c_1) + c_2\mu^{(2)})} \quad (III.5)$$

$$T_2 = \frac{\eta^{(2)}}{\mu^{(2)}} \text{ et } T_c = \frac{\eta^{(2)} * (\mu^{(2)}(1+c_1) + c_2\mu^{(1)})}{c_2\mu^{(2)}\mu^{(1)}} \quad (\text{III.6})$$

où $\eta^{(2)}$ est la viscosité de la matrice. Ces constantes sont dépendantes des modules de cisaillement et des fractions volumiques des deux phases. Ces expressions ont ici été programmées sous Python®.

Dans la suite de ce paragraphe, et comme dans les travaux originaux de Lahelec et Suquet (2007a), les réponses exactes et estimées du composite seront normalisées par deux fois le module de cisaillement instantané du composite ($2\tilde{\mu}^{A,HS}$) et seront représentées en fonction du temps normalisé par le temps caractéristique T_2 défini par l'équation (III.6). Trois régimes seront observés : la réponse instantanée aux temps courts (t voisin de 0), la réponse asymptotique aux temps longs (t tend vers l'infini) et la réponse transitoire entre les deux régimes précédents.

III.A.3. Estimation de la réponse macroscopique : taux de fibres de 0,45

Par nature, l'approche incrémentale présente nécessairement une sensibilité au pas de discrétisation temporelle choisi. Les réponses simulées avec l'approche incrémentale pour six pas de temps (1 s – 0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01 s – 0,005 s) sont superposées sur la Figure 5. Trois autres pas de temps (0,001 s – 0,0005 s – 0,0001 s) ont aussi été testés mais les réponses correspondantes ne sont pas représentées sur la figure par souci de lisibilité.

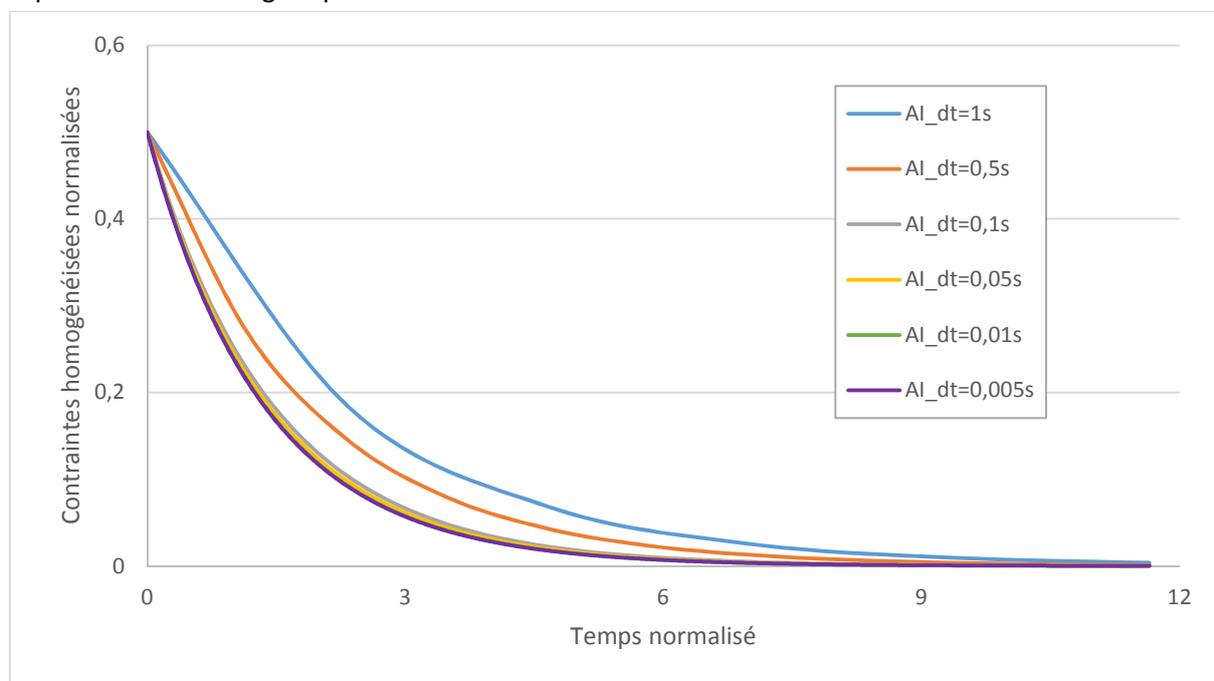


Figure 5 : Influence du pas de calcul sur la réponse du composite à un chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS. Taux de fibres de 0,45.

Excepté pour les deux plus grands pas de temps (1 s et 0,5 s) les courbes sont proches les unes des autres. Il n'est plus possible de différencier à l'œil nu la courbe avec un pas de temps de 0,01 s (verte) de celle avec un pas de temps de 0,005 s (violette). Les courbes des trois autres pas de temps seraient aussi confondues sur la figure. Afin d'avoir un compromis optimisé temps/précision de la réponse, nous choisissons pour la comparaison avec la solution de référence le pas de temps de 0,005 s.

Les réponses simulées avec les deux méthodes – l'approche incrémentale (cercles) et le principe de correspondance (ligne continue) – associées à la borne HS⁻ sont représentées sur la Figure 6. Un point sur vingt pour l'approche incrémentale est tracé afin de mieux voir les résultats. Par ailleurs, nous ne présentons les résultats que jusqu'à un temps normalisé de 12 pour augmenter la lisibilité des courbes dans le régime transitoire.

La Figure 6 montre un excellent accord entre l'AI et la solution exacte et se trouve en tout point quantitativement identique à la Figure 2. (b) du papier de Lahellec et Suquet (2007a). Cela illustre la validité du code Python[®] développé dans les présents travaux.

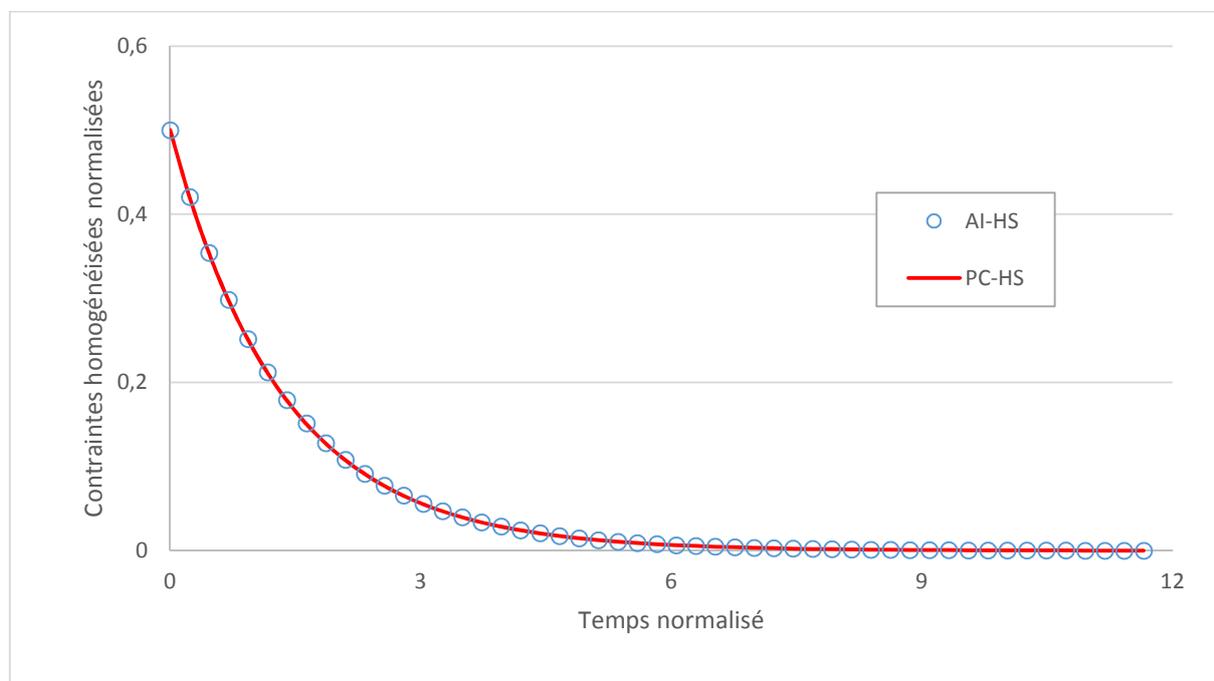


Figure 6 : Comparaison des réponses effectives normalisées obtenues avec l'approche incrémentale (AI-HS) et le principe de correspondance (PC-HS) couplés à la borne HS⁻. Chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS⁻. Taux de fibres de 0,45.

III.A.4. Influence du taux de fibres

Dans la publication de Lahellec et Suquet (2007a), l'exemple mis en avant concerne un taux de fibres de 0,45. Afin d'aller un peu plus loin, les mêmes confrontations sont ici réalisées pour plusieurs taux de fibres. Nous avons choisi arbitrairement quatre taux de fibres (0,1 – 0,25 – 0,6 – 0,85) en plus de celui (0,45) du paragraphe précédent (III.A.3). Les résultats obtenus avec l'approche incrémentale (cercles) et avec le principe de correspondance (lignes continues) sont comparés sur la Figure 7. Le pas

de temps utilisé pour la présentation des résultats est le même que celui du paragraphe précédent ($dt = 0,005$ s).

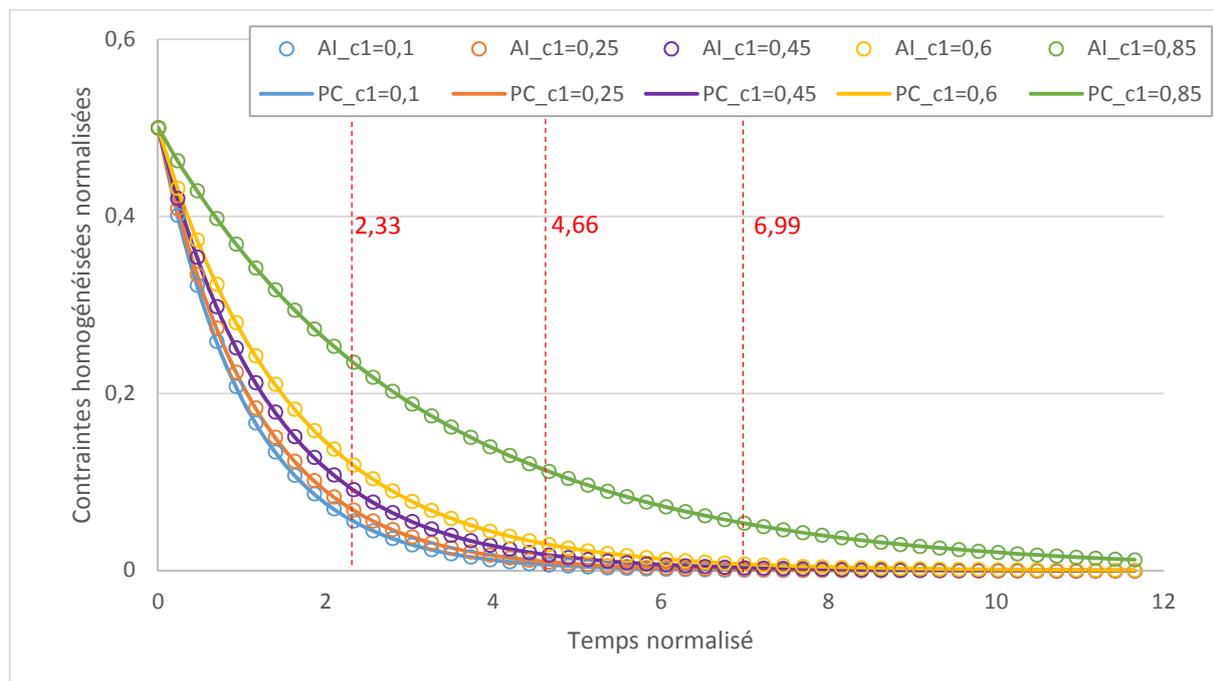


Figure 7 : Comparaison des réponses effectives normalisées obtenues avec l'approche incrémentale (AI) et le principe de correspondance (PC) pour différents taux de fibres (c_1). Chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS.

Nous observons que les estimations de l'approche incrémentale sont en accord avec la solution exacte, et cela aux différents taux de fibres considérés. Afin de quantifier l'erreur relative entre les deux méthodes, nous consignons dans la Tableau 2 celles-ci pour trois temps normalisés, représentés par des traits verticaux discontinus rouge sur la Figure 7, et pour deux pas de calcul.

c_1	$dt = 0,005$ s					$dt = 0,0001$ s				
	0,1	0,25	0,45	0,6	0,85	0,1	0,25	0,45	0,6	0,85
$\Delta_{2,33}$	0,92%	0,76%	0,7%	0,5%	0,14%	0,09%	0,08%	0,05%	0,04%	0,01%
$\Delta_{4,66}$	2,33%	1,52%	1,09%	0,97%	0,27%	0,26%	0,19%	0,11%	0,07%	0,01%
$\Delta_{6,99}$	3,94%	2,47%	1,63%	1,43%	0,41%	0,39%	0,25%	0,14%	0,08%	0,01%

Tableau 2 : Erreurs relatives entre l'AI et le PC à différents taux de fibres pour trois temps caractéristiques et deux pas de calcul.

Pour chaque taux de fibres, nous constatons une augmentation de l'erreur relative au cours du temps. Par ailleurs, l'augmentation du taux de fibres engendre la diminution de l'erreur pour un temps donné. Etant donné que le problème auxiliaire est ici résolu de manière exacte, ces tendances sont exclusivement dues à l'approximation (II.23) qui, dans le cas de la microstructure étudiée, semble donc d'autant plus efficace que le taux de fibres est élevé. Enfin, le Tableau 2 illustre l'influence importante de la diminution du pas calcul sur la précision de l'approche. En effet, celui de 0,0001 s fournit quasiment la solution exacte. Néanmoins, le temps CPU avec un taux de charges de 0,45 pour dérouler le chargement jusqu'à $t = 5$ s (ce qui est présenté) est de l'ordre de 36 minutes, tandis qu'avec 0,005 s, il est seulement de 29 s.

III.A.5. Bilan

De même que dans le papier original de Lahellec et Suquet (2007a), une microstructure satisfaisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman a été retenue comme premier exemple d'application de l'approche incrémentale, ici programmée sous forme d'un script Python®. L'évolution temporelle de la réponse homogénéisée à un chargement de relaxation en glissement simple a été confrontée à la solution exacte du problème local viscoélastique obtenue grâce au principe de correspondance couplée à cette même borne.

La réponse estimée par **l'AI tend vers la solution de référence** avec la diminution du pas de temps. L'approximation du potentiel incrémental, telle que proposée par Lahellec et Suquet (2007a), est pertinente dès lors que le pas de calcul est suffisamment petit. Ce résultat est obtenu pour un taux de fibres de 0,45, comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), confirmant la validité du code développé dans le cadre des présents travaux, mais aussi pour différents taux de fibres compris entre 0,1 et 0,85.

III.B. Microstructure périodique : mise en place des outils et premiers résultats

La microstructure considérée à partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre est périodique. Les fibres sont circulaires et identiques, alignées selon la direction \underline{x} et réparties aux quatre coins d'une grille carrée. Une cellule de base typique, représentée sur la Figure 8, est un domaine carré contenant une fibre circulaire en son centre entourée de matrice. Les fibres sont élastiques linéaires et la matrice viscoélastique de type Maxwell.

Contrairement à la microstructure étudiée dans le paragraphe précédent (III.A), celle étudiée ici est trop complexe pour permettre une détermination exacte des propriétés effectives par le biais d'expressions analytiques. Dans le papier de Lahellec et Suquet (2007a), la réponse viscoélastique du composite était donc estimée en couplant l'approche incrémentale, d'une part à la méthode des éléments finis (EF) fournissant une solution exacte (aux erreurs numériques près) du problème auxiliaire thermoélastique et d'autre part, à un schéma approché dérivé de la procédure d'HS pour les milieux périodiques. Les résultats obtenus avec les deux stratégies ont été confrontés avec succès à la solution exacte du problème local viscoélastique obtenue par simulation en champs complets. Cela a conduit les auteurs à valider d'une part leur modèle, c'est-à-dire l'approximation proposée pour le potentiel incrémental, et d'autre part, la pertinence de l'approximation semi-analytique d'HS pour estimer l'énergie effective du composite thermoélastique.

Dans le cadre de cette thèse, l'approche incrémentale est couplée au schéma d'homogénéisation de Luciano et Barbero (1994) – présenté en annexe (A.1) – pour la résolution du problème auxiliaire thermoélastique défini au paragraphe (II.F). Cela constitue une variante par rapport aux travaux de Lahellec et Suquet (2007a) et permettra de discuter quant à la validité du couple formé par l'AI et ce nouveau schéma pour la microstructure et les chargements considérés. A cet effet, les résultats sont confrontés aux solutions exactes obtenues par champs complets avec Abaqus®.

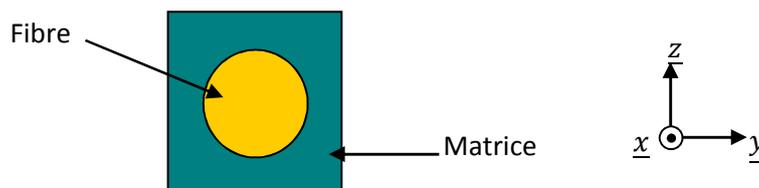


Figure 8 : Cellule de base du composite périodique étudié (vue en coupe).

Après avoir précisé les caractéristiques du problème étudié (propriétés des phases, chargement appliqué), le modèle EF est brièvement présenté ainsi qu'une stratégie systématique pour définir le pas de calcul optimal pour l'approche incrémentale. Un premier regard est porté sur la réponse au niveau macroscopique comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a). Puis, les réponses au niveau microscopique, c'est-à-dire moyennes par phase, sont comparées et étudiées, ce qui permet d'aller plus loin en plus de l'utilisation d'un schéma d'homogénéisation alternatif.

III.B.1. Propriétés des phases et chargement appliqué

Les deux phases sont toujours isotropes, mais ne sont plus incompressibles contrairement à la première microstructure étudiée au paragraphe (III.A). Les propriétés mécaniques, analogues à celles considérées dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), sont résumées dans le Tableau 3.

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)	Viscosité $\eta^{(r)}$ (Gpa.s)
Fibre ($r = 1$)	222,2	166,6	x
Matrice ($r = 2$)	58,33	26,92	10

Tableau 3 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice, Lahellec et Suquet (2007a).

Comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), la cellule de base est soumise à un chargement monotone en glissement simple dans le plan transverse ($\underline{y}, \underline{z}$) à vitesse de déformation macroscopique imposée constante. Ainsi, le tenseur macroscopique est de la forme :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * 5.10^{-3} * t \quad (III.7)$$

Pour un tel chargement, les réponses en contrainte macroscopique et moyenne par phase tendent vers des valeurs maximales dans le régime asymptotique. La durée totale du chargement est de $t_{max} = 20$ s pour s'assurer d'avoir atteint l'asymptote aux deux échelles. Néanmoins, sur les figures présentées par la suite et afin d'observer ce qu'il se passe dans la partie transitoire avec plus de facilité, la représentation de la partie asymptotique sera écourtée (souvent à $t = 10$ s).

III.B.2. Solution exacte de référence : simulations en champs-complets

Contrairement au paragraphe (III.A), la solution de référence est obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus®. Le modèle numérique a été réalisé dans un travail antérieur lors de mon séjour en tant que scientifique visiteur à l'Université de Colombie Britannique. Le but de ce séjour, suite à mon stage de Master Recherche, était de déterminer les propriétés effectives en élasticité et viscoélasticité du composite. Des scripts Python®, pour le pilotage automatique des conditions aux limites cinématiques périodiques nécessaires à l'application des six chargements élémentaires ou encore le post-traitement automatisé des résultats en vue de calculer les propriétés effectives, ont été écrits et validés. Les conditions aux limites périodiques ont ici été adaptées pour imposer le chargement (III.7).

Les éléments utilisés pour toutes les simulations sont de type C3D8 (hexaèdres à interpolations linéaires et intégrations pleines en 8 points). Le maillage a été réalisé à partir de trois paramètres. Un définissant le nombre de mailles dans le rayon de la fibre, le second sur le périmètre de la fibre et le dernier sur l'épaisseur de matrice dans les directions \underline{y} et \underline{z} . Nous avons ici réalisé une étude de convergence sur le nombre de mailles nécessaires à l'obtention de réponses fiables. Plusieurs calculs ont ainsi été lancés avec des maillages de plus en plus raffinés (augmentation des trois paramètres) et l'écart relatif entre les solutions pour deux maillages successifs a été évalué selon la formule suivante :

$$\epsilon_{rel_EF} = \frac{|G^{nb-} - G^{nb+}|}{G^{nb+}} \quad (III.8)$$

où G^{nb-} et G^{nb+} désignent la grandeur G étudiée obtenue avec le maillage le plus grossier (avec $nb-$ éléments) et le plus fin (avec $nb+$ éléments) respectivement. Le Tableau 4 illustre pour une fraction volumique de fibres de 0,25 les résultats obtenus dans le cas de la contrainte macroscopique pour trois temps caractéristiques. Les deux premiers sont dans la partie transitoire de la réponse, tandis que le troisième est dans la partie asymptotique.

	nb- = 640 nb+ = 1440	nb- = 1440 nb+ = 2560	nb- = 2560 nb+ = 4000	nb- = 4000 nb+ = 5760	nb- = 5760 nb+ = 7840	nb- = 7840 nb+ = 10240
$t = 1 \text{ s}$	0,35%	0,06%	0,08%	0,05%	0,04%	0,03%
$t = 2 \text{ s}$	0,63%	0,17%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
$t = 10 \text{ s}$	1,15%	0,35%	0,15%	0,08%	0,05%	0,03%

Tableau 4 : Ecarts relatifs de la réponse homogénéisée pour deux tailles successives de maillage. Taux de fibres de 0,25.

Lorsque le maximum (sur la durée du chargement) de l'écart relatif pour deux tailles décroissantes atteint une valeur stabilisée (fixée à 0,1%), nous considérons atteinte la convergence de la grandeur étudiée pour le maillage le plus grossier des deux.

Bien que, pour un taux de fibres de 0,25, les écarts relatifs satisfassent le critère à partir de 4000 éléments au niveau macroscopique, c'est en regardant les écarts relatifs pour les déformations et contraintes moyennes par phase, et plus exactement dans la fibre, que nous avons choisi le modèle avec 5760 éléments C3D8. En effet et de manière prévisible, le critère de convergence est satisfait

pour un maillage plus fin à l'échelle microscopique qu'à l'échelle supérieure. Le maillage finalement retenu pour ce taux de fibres est représenté sur la Figure 9.

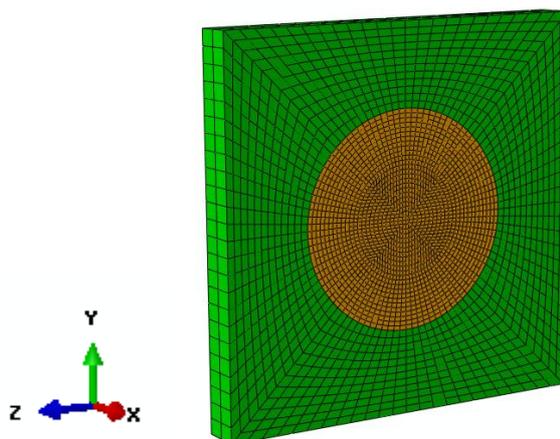


Figure 9 : Cellule de base sous Abaqus® de la microstructure périodique et maillage optimisé associé. Taux de fibres de 0,25.

La même étude de convergence a été faite pour les différents taux de fibres qui seront étudiés et ce, aux deux échelles. Sans rentrer dans le détail des résultats pour chacun, trois maillages différents ont été finalement retenus et un résumé est présenté dans Tableau 5.

Taux de fibres	de 0,05 à 0,15	de 0,2 à 0,35	de 0,4 à 0,5
Nb d'éléments C3D8	4320	5760	7392

Tableau 5 : Nombres d'éléments dans le modèle éléments finis pour différents taux de fibres.

La nécessité de raffiner le maillage avec l'augmentation du taux de fibres résulte naturellement du renforcement des interactions entre fibres augmentant les niveaux de déformation locale dans la matrice. C'est donc principalement le paramètre de discrétisation dans la matrice selon les directions \underline{y} et \underline{z} qui a été ajusté afin de ne pas avoir des mailles de forme trop disproportionnée et ainsi obtenir une meilleure estimation.

III.B.3. Approche incrémentale : méthode de détermination du pas de calcul optimal et critère de convergence de la réponse asymptotique

Dans ce paragraphe, nous introduisons une méthode systématique pour déterminer le pas de calcul assurant la précision optimale d'une grandeur donnée sur l'intégralité du chargement étudié. Les grandeurs considérées dans la suite seront la contrainte homogénéisée comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) mais aussi les contraintes moyennes par phase. *A priori* le pas de calcul à utiliser pourrait être différent en fonction de l'échelle d'observation, macroscopique ou microscopique, et selon la grandeur observée. La méthode de détermination proposée repose sur le calcul de l'écart relatif entre les estimations obtenues avec deux pas de calcul successifs, dt^+ et dt^- tels que $dt^- < dt^+$, grâce à la formule suivante :

$$\epsilon_{rel_AI} = \frac{|G^{dt^+} - G^{dt^-}|}{G^{dt^-}} * \frac{dt^-}{dt^+} \quad (III.9)$$

où G^{dt^+} et G^{dt^-} désignent les estimations de la grandeur G considérée obtenues avec les plus grand et plus petit pas de calcul respectivement. Comme le rapport entre les pas de calcul ne sera pas constant (valant 2 ou 5), les écarts sont normalisés par ce rapport afin de s'en affranchir.

Pour chacune des grandeurs étudiées, nous commenterons l'évolution de l'écart relatif avec la diminution du pas de calcul à différents temps caractéristiques du chargement. On considèrera atteinte la précision optimale lorsque l'écart entre deux pas de temps successifs sera inférieur à 0,2%. Le pas de temps assurant la convergence de la grandeur étudiée au sens précédent sera alors le plus grand des deux, soit dt^+ . L'estimation correspondante sera confrontée à la grandeur calculée par EF.

Enfin, nous définissons deux grandeurs spécifiques représentatives de la forme des réponses au trajet de chargement étudié : **la contrainte asymptotique**, notée Σ^∞ , et **le temps nécessaire pour atteindre 98% de cette valeur**, noté $T^{98\%}$. La valeur asymptotique sera considérée atteinte lorsque le taux d'accroissement de la réponse, estimée avec le pas de calcul retenu, sera inférieur à 10^{-5} .

III.B.4. Réponses macroscopiques

Les Figure 10 et Figure 11 illustrent tout d'abord la sensibilité de la réponse macroscopique estimée par l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) au pas de calcul retenu pour la simulation, pour les deux premiers taux de fibres étudiés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), à savoir 0,25 et 0,4. Cinq pas de temps sont considérés et représentés (1 s – 0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01 s). On observe une sensibilité particulièrement marquée dans la partie transitoire. Le Tableau 6 fournit alors une démonstration quantitative de l'évolution des écarts relatifs (formule (III.9)) avec la diminution du pas de calcul, pour les trois temps caractéristiques retenus (1 s, 2 s et 10 s).

Sur les Figure 10 et Figure 11, les lignes verticales discontinues rouges correspondent aux temps présentés dans le Tableau 6.

	Couples ($dt^+ - dt^-$) en s, $c_1 = 0,25$				Couples ($dt^+ - dt^-$) en s, $c_1 = 0,4$			
	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)
$t = 1$ s	5,12%	1,88%	0,65%	0,20%	4,63%	1,70%	0,59%	0,19%
$t = 2$ s	2,34%	0,65%	0,17%	0,05%	2,47%	0,74%	0,22%	0,07%
$t = 10$ s	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,05%	0,01%	0,00%	0,00%

Tableau 6 : Ecarts relatifs des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus et pour deux taux de fibres.

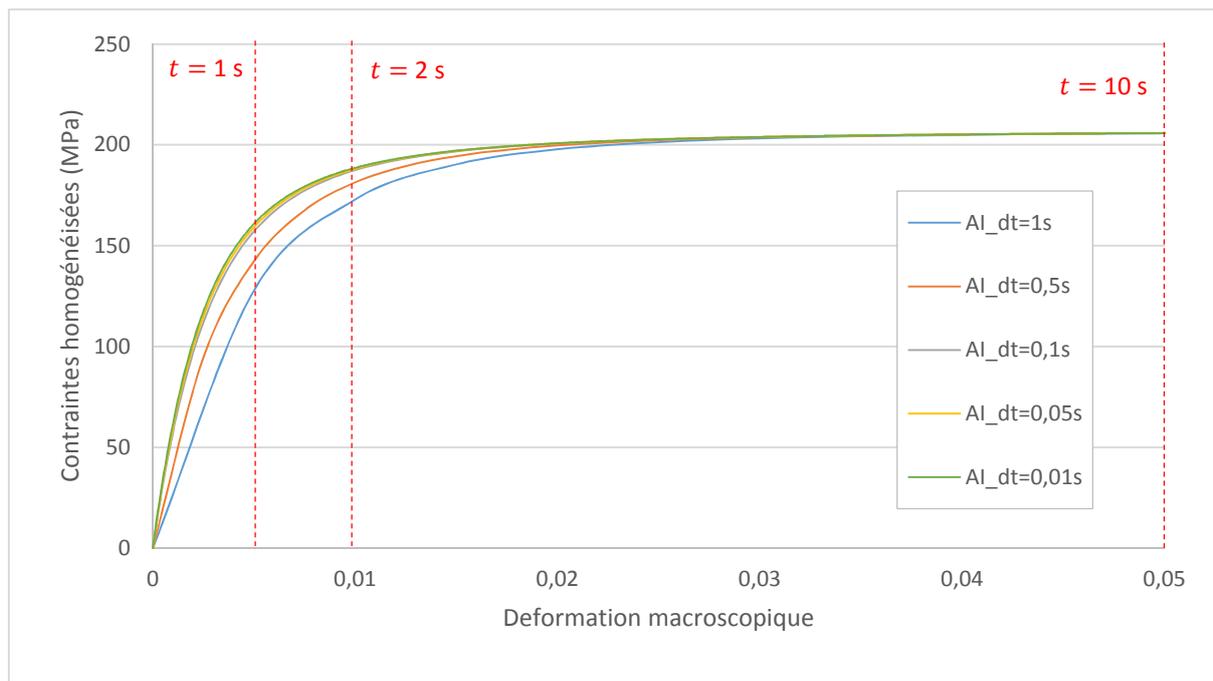


Figure 10 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.

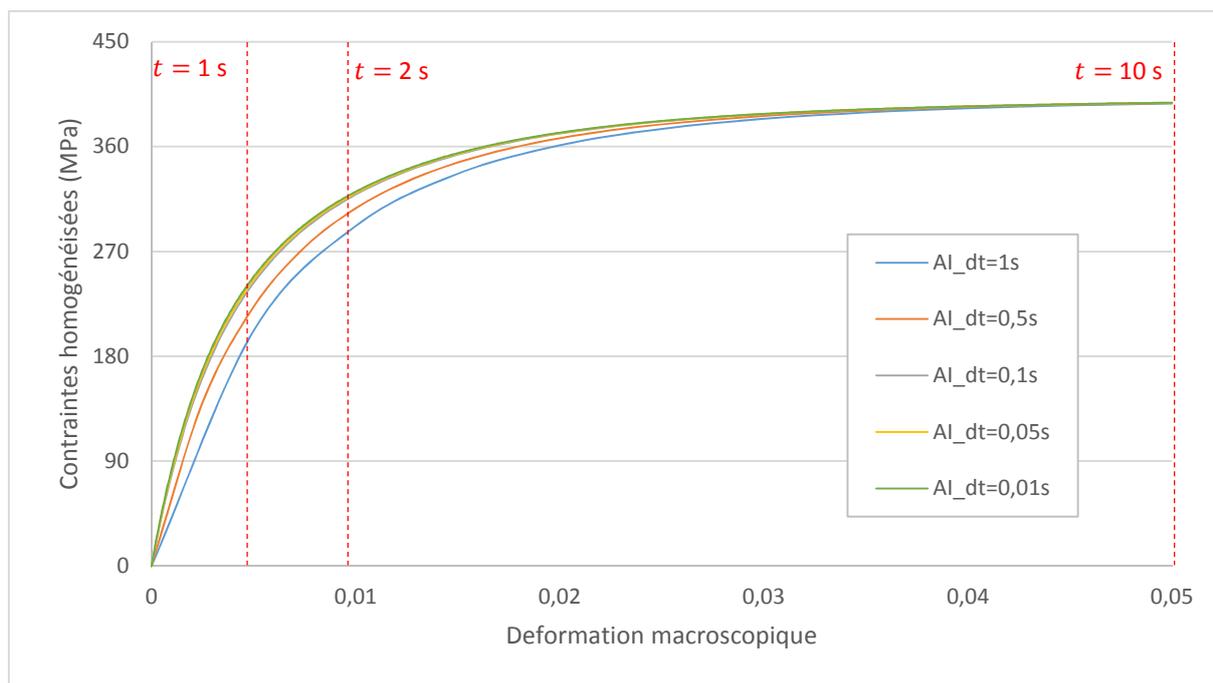


Figure 11 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,4.

Au-delà de la diminution attendue avec le pas de calcul, nous remarquons que l'écart relatif diminue en cours de chargement, et ce pour tous les couples (dt^+ - dt^-). Par ailleurs, la dernière ligne du tableau montre clairement que le pas de temps n'a quasiment plus d'influence sur la contrainte

asymptotique. Pour la contrainte macroscopique, la convergence telle que définie au paragraphe (III.B.3) est atteinte pour $dt^+ = 0,05$ s et cela pour les deux taux de fibres.

Dans le Tableau 7, les temps de calcul pour chaque pas de temps considéré dans l'étude de convergence sont présentés à titre d'information pour $c_1 = 0,25$. Deux autres pas de temps, plus petits, sont aussi indiqués.

Pas de temps dt (s)	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
CPU (s)	2	4	15	24	72	139	698

Tableau 7 : Temps CPU total pour différents pas de calcul utilisés dans l'approche incrémentale.

Le temps de calcul pour simuler l'intégralité du chargement jusqu'à $t_{max} = 20$ s avec un pas de 0,01 s s'élève à 72 s contre seulement 24 s avec le pas de 0,05 s. On constate ainsi que le critère de convergence fixée à 0,2% ayant conduit à retenir $dt^+ = 0,05$ s, permet l'obtention d'un compromis satisfaisant entre précision de l'estimation et durée de la simulation.

Sur la Figure 12, la réponse estimée avec l'approche incrémentale (lignes) avec le pas de calcul précédemment défini est confrontée à la solution exacte obtenue par éléments finis (symboles) pour les deux taux de fibres (0,25 et 0,4).

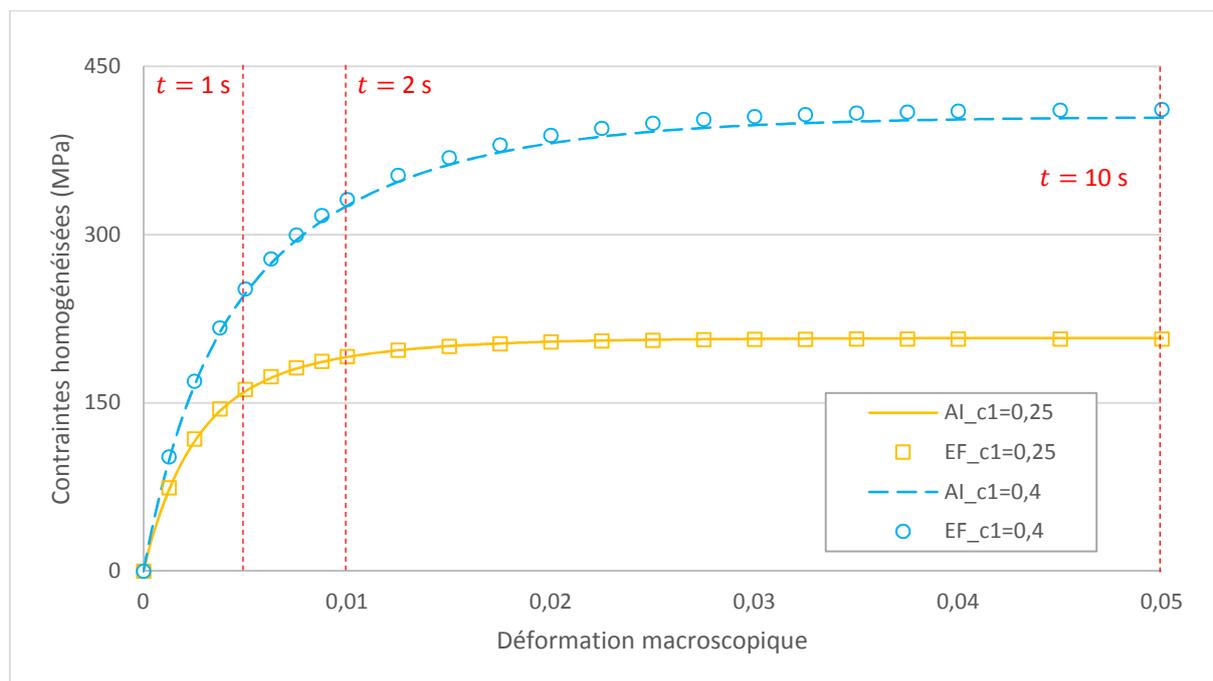


Figure 12 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres 0,25 et 0,4.

Dans le Tableau 8, les erreurs relatives pour les réponses homogénéisées entre l'estimation et la solution exacte sont quantifiées aux trois temps considérés lors de l'étude de la sensibilité au pas de calcul dans le Tableau 6.

	$c_1 = 0,25$	$c_1 = 0,4$
$t = 1 \text{ s}$	0,06%	0,59%
$t = 2 \text{ s}$	0,10%	1,16%
$t = 10 \text{ s}$	0,43%	1,71%

Tableau 8 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibres 0,25 et 0,4.

L'approche incrémentale, ici couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) pour la résolution du problème auxiliaire thermoélastique, fournit donc de bons résultats pour ce qui de l'estimation de la réponse homogénéisée au chargement considéré. Les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) ont montré que les réponses simulées avec l'AI en résolvant le problème thermoélastique de manière exacte (par EF) étaient confondues avec les solutions exactes du problème viscoélastique local. L'approximation du potentiel incrémental au cœur de l'AI avait ainsi été validée. En considérant cette validation acquise, les écarts observés sur la Figure 12 peuvent être uniquement attribués au schéma de Luciano et Barbero (1994). On constate que ces erreurs augmentent avec le taux de fibres. Dans le même esprit que ce qui a été fait par Lahellec et Suquet (2007a) avec l'approximation de HS, on s'intéresse à la prédiction des contraintes asymptotiques Σ^∞ avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) et on compare à la solution exacte (EF). Cette comparaison est représentée sur la Figure 13 pour des fractions volumiques de fibres comprises entre 0 et 0,5. La contrainte asymptotique est normalisée par $2\eta^{(2)}\dot{E}_{yy}$ correspondant à la contrainte dans la matrice pure (sans fibre) dans les mêmes conditions de chargement. Les solutions reportées sur la Figure 13 ont été obtenues pour un maillage optimisé (voir Tableau 5) et un pas de calcul satisfaisant le critère de convergence fixé au paragraphe (III.B.3) pour chacune des fractions volumiques de fibres étudiées.

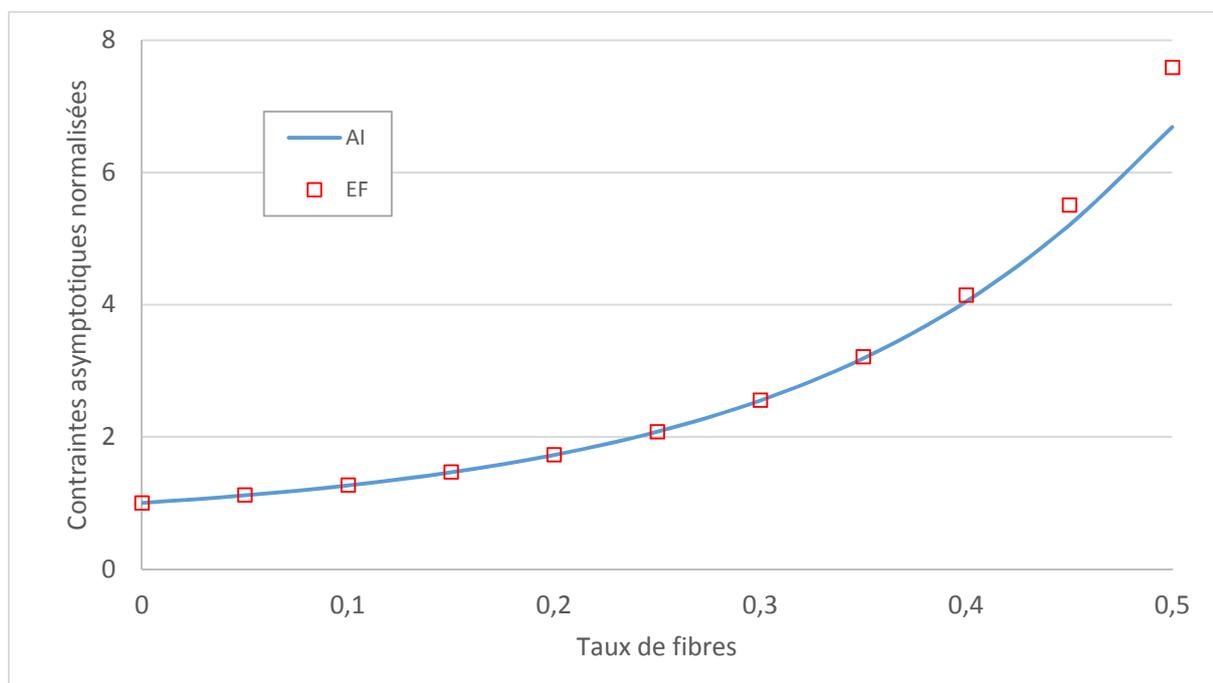


Figure 13 : Contraintes asymptotiques normalisées en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).

Tout comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) avec l'approximation de HS, l'estimation de la contrainte asymptotique par le schéma de Luciano et Barbero (1994) est de très bonne qualité jusqu'à un taux de fibres de 0,35 et se détériore ensuite avec l'augmentation du taux de fibres. Plus précisément, l'erreur relative demeure ici inférieure à 1% jusqu'à $c_1 = 0,35$, puis atteint 2,3% pour $c_1 = 0,4$ pour finir à 11,9% pour $c_1 = 0,5$.

Enfin, le Tableau 9 illustre les temps CPU requis par les deux approches pour un taux de fibres de 0,25. La durée totale de la simulation est donnée de même que celle correspondant à un point de calcul pour deux pas – 0,05 s et 0,01 s – considérés avec les deux méthodes.

Ainsi, en moyenne, avec le pas de temps choisi, nous avons un temps de calcul de l'ordre de 0,06 s, alors que pour les éléments finis, au maillage retenu, ce temps est de l'ordre de 0,93 s. Il est à noter que le modèle sous Abaqus® pourrait être optimisé sur certains points, en particulier sur le post-traitement des données, aspect qui n'a pas été pris en compte ici.

	$dt = 0,05 \text{ s}$		$dt = 0,01 \text{ s}$	
	AI	EF	AI	EF
Temps CPU total (s)	24	373	72	1740
Temps CPU moyen par temps résultat (s)	0,06	0,93	0,036	0,87

Tableau 9 : Comparaison des temps de calcul total et correspondant à un seul point de calcul entre l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) pour deux pas de temps.

III.B.5. Réponses moyennes par phase

Dans le paragraphe précédent (III.B.4), nous nous sommes intéressés, comme dans les travaux originaux de Lahellec et Suquet (2007a), à la capacité de l'approche incrémentale à restituer la réponse homogénéisée du composite périodique étudié. Des résultats de bonne qualité ont été obtenus à l'échelle macroscopique en associant l'approche au schéma de Luciano et Barbero (1994). Pour aller plus loin dans l'évaluation des performances de l'approche, nous examinons dans ce paragraphe la qualité de prédiction des moyennes par phase. L'étude est conduite pour des taux de fibres de 0,25 et 0,4.

La même démarche que pour la réponse macroscopique a été reprise. La sensibilité au pas de calcul des réponses moyennes par phase estimées avec l'AI a tout d'abord été étudiée. Les mêmes pas de calcul ont été considérés à cet effet. Les Figure 14 et Figure 15 illustrent les résultats obtenus pour une fraction volumique de fibres de 0,25 et le Tableau 10 donne les valeurs des écarts relatifs pour quantifier cette sensibilité, particulièrement prononcée, dans les deux phases, dans la partie transitoire des réponses.

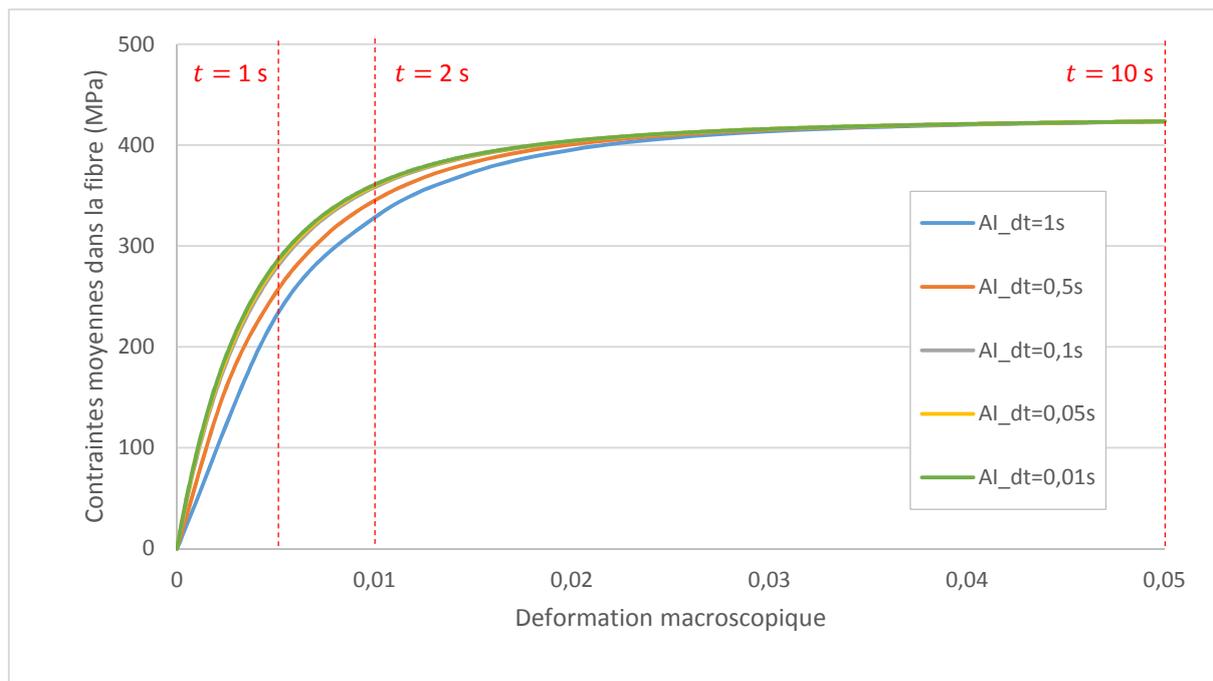


Figure 14 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse moyenne dans la fibre. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.

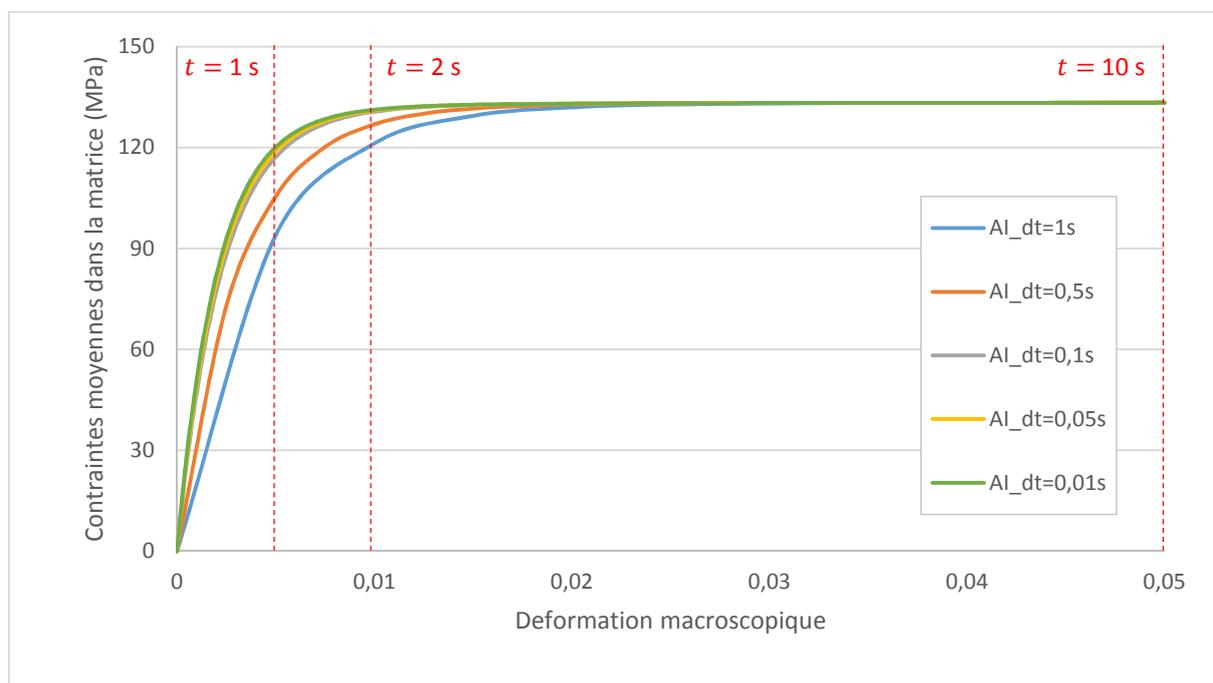


Figure 15 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse moyenne dans la matrice. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.

Les temps caractéristiques présentés dans le Tableau 10 ci-dessous sont les mêmes que ceux utilisés pour l'analyse macroscopique (III.B.4). Ils sont représentés par des lignes verticales rouges sur les Figure 14 et Figure 15.

	Couples ($dt^+ - dt^-$) en s – FIBRE				Couples ($dt^+ - dt^-$) en s – MATRICE			
	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)
$t = 1$ s	4,68%	1,72%	0,59%	0,19%	5,47%	2,00%	0,69%	0,20%
$t = 2$ s	2,45%	0,73%	0,21%	0,06%	2,24%	0,57%	0,14%	0,04%
$t = 10$ s	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 10 : Ecarts relatifs des réponses moyennes par phase estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de fibres 0,25.

Les observations sont identiques à celles faites à l'échelle supérieure (voir Tableau 6). L'ordre de grandeur des écarts est par ailleurs similaire bien que les valeurs soient légèrement supérieures pour les moyennes par phase. Le pas de calcul de 0,05 s satisfait le critère de convergence tel que défini au paragraphe (III.B.3). Des conclusions identiques ont été obtenues pour la fraction volumique de 0,4.

Sur la Figure 16, les réponses moyennes par phase estimées sont confrontées à la solution exacte. Dans le Tableau 11, les erreurs relatives sont quantifiées, aux mêmes temps/déformations macroscopiques que lors de l'étude de sensibilité au pas de calcul. Les pourcentages d'erreur pour le composite sont reportés pour mémoire.

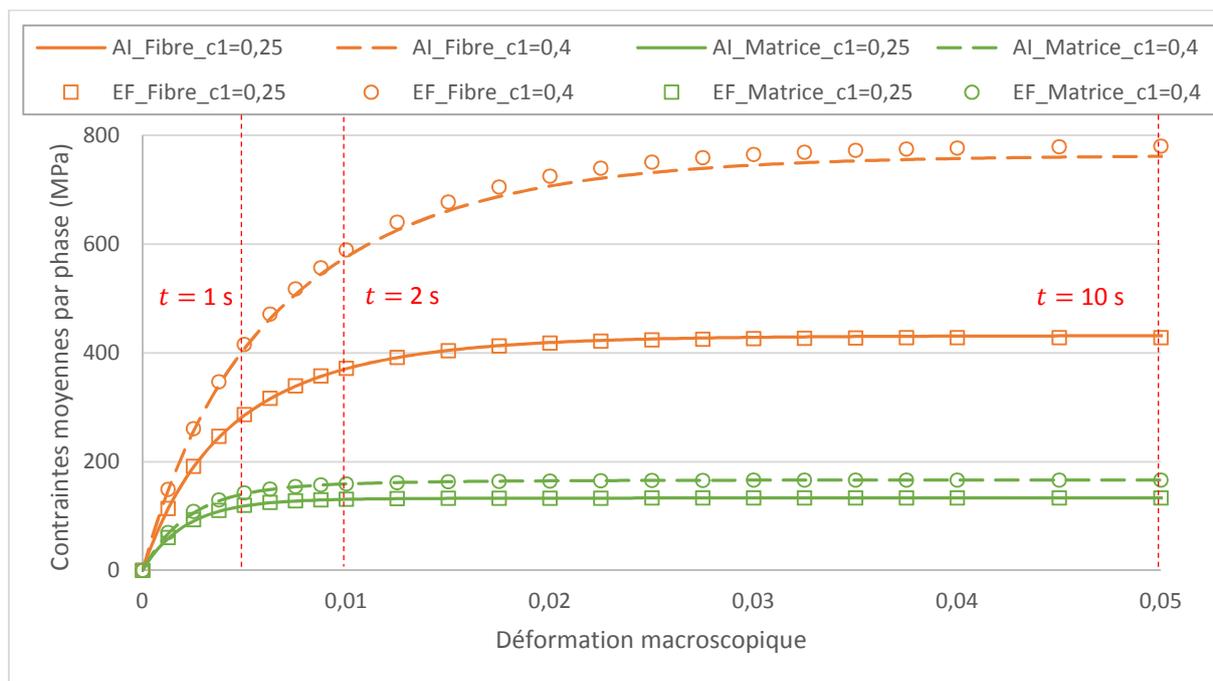


Figure 16 : Comparaison entre les réponses moyennes par phase (Fibre et Matrice) estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994), et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres 0,25 et 0,4.

	$c_1 = 0,25$			$c_1 = 0,4$		
	Composite	Matrice	Fibre	Composite	Matrice	Fibre
$t = 1$ s	0,06%	0%	0,37%	0,59%	0,15%	0,94%
$t = 2$ s	0,10%	0,02%	0,19%	1,16%	0,18%	1,76%
$t = 10$ s	0,43%	0,02%	0,78%	1,71%	0,1%	2,33%

Tableau 11 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibres 0,25 et 0,4.

Dans le prolongement de ce qui a été fait pour la réponse macroscopique, on évalue la précision du schéma de Luciano et Barbero (1994) en comparant cette fois ses prédictions des contraintes asymptotiques moyennes par phase aux solutions de référence obtenues par EF. Cette comparaison est représentée sur la Figure 17 pour des fractions volumiques de fibres comprises entre 0 et 0,5. Les contraintes asymptotiques moyennes dans les deux phases sont normalisées par $2\eta^{(2)}\dot{E}_{yy}$ correspondant à la contrainte dans la matrice pure (sans fibre) dans les mêmes conditions de chargement. Pour comparaison, on fait figurer aussi la contrainte asymptotique normalisée macroscopique, déjà présentée Figure 13. Les résultats reportés ont été obtenus à convergence vis-à-vis de la taille du maillage (EF) et du pas de calcul (AI) et ce, pour chacun des taux de fibres. Les trois couleurs – bleu, orange et vert – représentent les valeurs respectivement homogénéisées et moyennes dans la fibre et la matrice. Les erreurs relatives sur les contraintes asymptotiques et les temps à 98% tels que définis au paragraphe (III.B.3) pour les différents taux de charges étudiés, aussi bien au niveau macroscopique que microscopique, sont présentés dans le Tableau 12.

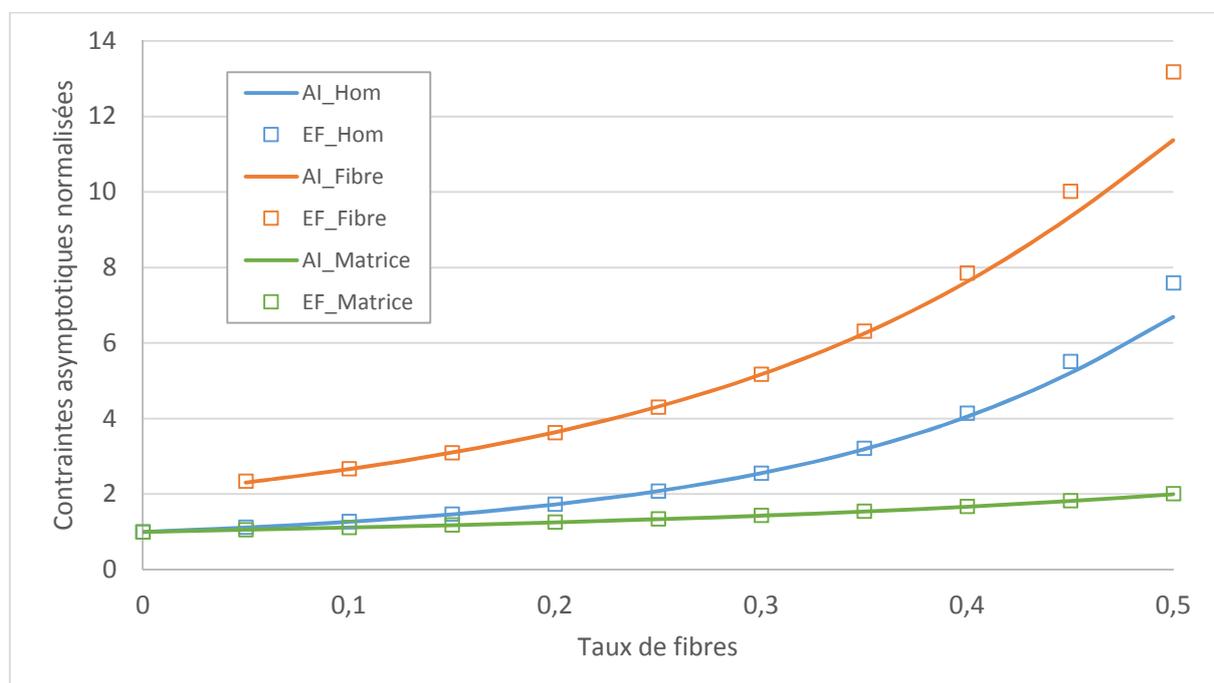


Figure 17 : Contraintes asymptotiques normalisées, macroscopique et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).

La contrainte asymptotique du composite est retrouvée à moins de 0,06% près à partir de celles des moyennes par phase par calcul avec la loi des mélanges. Ce résultat confirme au passage la validité des calculs. Bien entendu, le temps à 98% du composite ne résulte pas d'une simple loi des mélanges. Il est logiquement plus proche de celui de la matrice pour les faibles taux de fibres (inférieur à 0,15) et inversement à fort taux de fibres. Le temps $T^{98\%}$ est toujours plus court dans la matrice que dans la fibre, ce qui était déjà observable sur la Figure 14 et la Figure 15.

Les contraintes asymptotiques normalisées (voir Figure 17) et les temps à 98% (voir Tableau 12) augmentent avec le taux de fibres aux deux échelles. Pour comparaison, le temps $T^{98\%}$ de la matrice non chargée vaut 1,55 s. L'augmentation du taux de fibres et par suite la complexité grandissante des interactions spatio-temporelles au sein du matériau hétérogène ralentissent clairement l'installation du régime asymptotique dans chacune des phases et dans le composite.

Enfin, on notera la stabilité avec l'augmentation du taux de fibres de l'écart relatif entre solutions estimée et de référence pour la contrainte moyenne dans la matrice (autour de 0,55%). Les écarts observés pour le composite et la fibre suivent une évolution quasi similaire : ils diminuent jusqu'à un taux de fibres de 0,25 et augmentent avec le taux de fibres au-delà. Les écarts aux deux échelles sont inférieurs à 1% jusqu'à un taux de fibres de 0,35, inférieurs à 3% à 0,4 et supérieurs au-delà.

c_1	Composite		Fibre		Matrice	
	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}$ (s)	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}$ (s)	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}$ (s)
0,05	0,62%	1,8	1,38%	3,05	0,54%	1,6
0,1	0,50%	2,15	0,41%	3,4	0,54%	1,65
0,15	0,35%	2,6	0,08%	3,75	0,54%	1,7
0,2	0,21%	3,15	0,20%	4,05	0,54%	1,8
0,25	0,13%	3,7	0,26%	4,5	0,55%	1,95
0,3	0,20%	4,35	0,07%	4,95	0,53%	2,2
0,35	0,81%	5	0,99%	5,5	0,55%	2,5
0,4	2,33%	5,8	2,97%	6,2	0,55%	3
0,45	5,54%	6,7	6,73%	7,05	0,58%	3,6
0,5	11,87%	7,6	13,73%	7,75	0,58%	4,4

Tableau 12 : Ecarts relatifs entre les contraintes asymptotiques estimées par l'AI et les solutions EF et valeurs des temps à 98%, aux échelles macroscopique et microscopique, en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique.

III.B.6. Bilan

La microstructure périodique des travaux de Lahellec et Suquet (2007a) a été retenue comme second exemple d'application de l'approche incrémentale. L'AI, associée à l'approximation de HS dans Lahellec et Suquet (2007a), a ici été couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire. Les réponses à un chargement monotone de glissement simple, homogénéisée mais aussi moyennes par phase, ont été confrontées aux solutions de référence obtenues par la méthode des éléments finis avec Abaqus®.

- Aussi bien **au niveau macroscopique que microscopique** (moyennes par phase), les estimations sont excellentes jusqu'à un taux de fibres de 0,35, très bonnes avec un écart inférieur à 3% pour un taux de fibres de 0,4 mais se détériorent au-delà.
- On montre que pour des fractions volumiques jusqu'à 0,4, les prédictions de la méthode incrémentale ne sont pas détériorées par l'approximation de Luciano et Barbero (1994). Le schéma de Luciano et Barbero (1994) constitue donc une alternative possible à l'approximation de HS en offrant des performances similaires (pour le chargement étudié).

III.C. Microstructure périodique : porosité et effets des contrastes

Dans le paragraphe (III.B), les propriétés mécaniques affectées aux phases étaient celles de Lahellec et Suquet (2007a). Cela a permis de mettre en évidence la capacité de l'approche incrémentale, ici

couplée avec le schéma d'homogénéisation de Luciano et Barbero (1994), à estimer les réponses en contrainte homogénéisée mais aussi moyennes par phase à différents taux de fibres.

Dans ce paragraphe, l'objectif est de poursuivre l'évaluation de la méthode en s'intéressant cette fois à l'influence des propriétés mécaniques des constituants. Tout d'abord, comme dans Lahellec et Suquet (2007a), un matériau hétérogène, avec la même microstructure, dans lequel les fibres sont assimilées à des pores est considéré. Ensuite, et pour aller plus loin, l'effet sur la précision de l'approche du contraste entre les propriétés élastiques des fibres et de la matrice ainsi que l'effet de la viscosité de la matrice sont étudiés. Seules les réponses macroscopiques sont ici analysées.

III.C.1. Matériaux poreux

Dans ce paragraphe, les fibres sont remplacées par des porosités. Comme pour beaucoup de méthodes numériques, des propriétés strictement nulles ne peuvent être utilisées dans l'approche incrémentale qui fait appel entre autres à l'inversion des tenseurs de rigidité. Une étude a été conduite pour établir les propriétés suffisamment petites à implémenter dans le code. Il en résulte que les modules de compressibilité et de cisaillement ont été pris égaux à 0,1 MPa. Le reste des données du problème (propriétés de la matrice et chargement) restent les mêmes, voir paragraphe (III.B.1). En ce qui concerne la solution de référence, celle-ci est toujours obtenue par la méthode des éléments finis. Suite à une étude de convergence, les mêmes maillages que ceux définis dans le Tableau 5 ont été retenus.

Nous reprenons la même démarche en termes de sensibilité au pas de calcul que dans le paragraphe (III.B.4). Les cinq mêmes pas de temps (1 s – 0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01 s) sont considérés. Les réponses macroscopiques correspondantes sont représentées sur la Figure 18, uniquement pour un taux de porosités de 0,25 à titre d'illustration. Comme auparavant sur la Figure 10, on observe une sensibilité particulièrement marquée dans la partie transitoire. Néanmoins, le régime asymptotique est atteint plus rapidement. Les écarts relatifs, définis par la relation (III.9), sont donc ici calculés pour des temps caractéristiques différents, à savoir 0,5 s, 1 s et 6 s correspondant respectivement à $E_{yy} = 0,0025$, $E_{yy} = 0,005$ dans la partie transitoire et à $E_{yy} = 0,03$ une fois le régime asymptotique atteint. Le Tableau 13 regroupe les écarts obtenus pour les cinq pas de calcul de la Figure 18 et pour un pas de calcul plus fin dont l'utilisation s'est avérée nécessaire à la vérification du critère de convergence défini au paragraphe (III.B.3). Un pas de temps de 0,01 s est ainsi retenu pour un taux de porosités de 0,25.

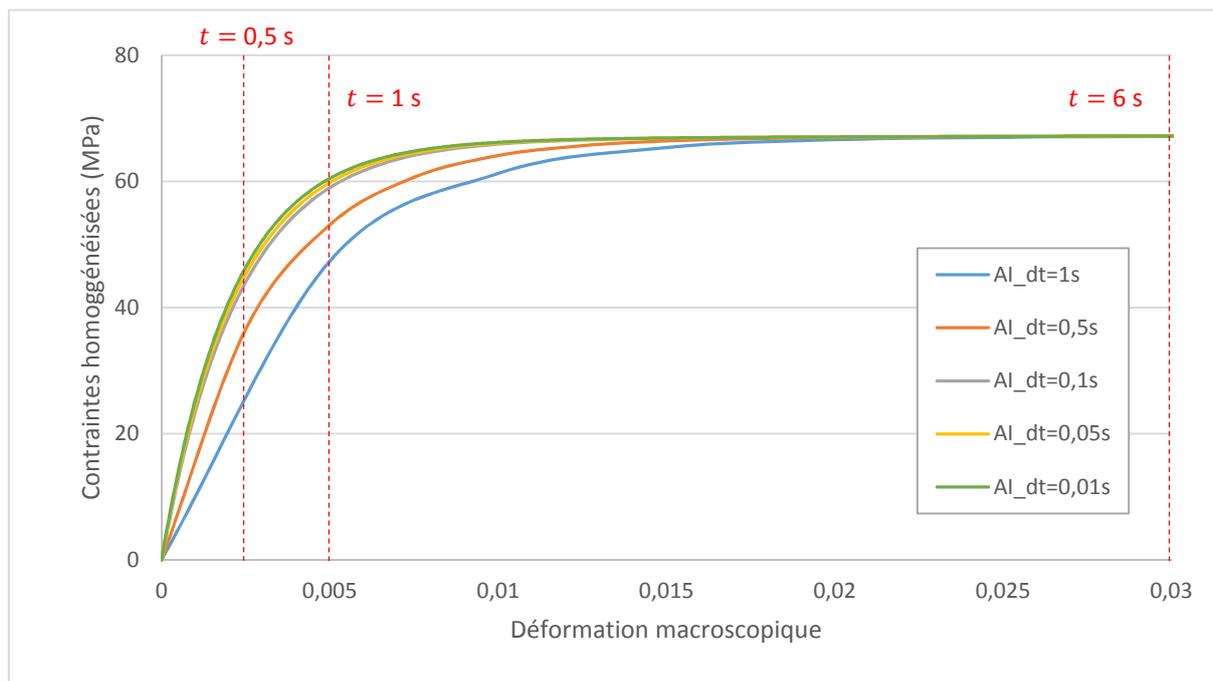


Figure 18 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de porosités 0,25.

	Couples ($dt^+ - dt^-$) en s				
	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)	(0,01 - 0,005)
$t = 0,5$ s	x	3,41%	1,39%	0,47%	0,14%
$t = 1$ s	5,47%	2,01%	0,69%	0,22%	0,06%
$t = 6$ s	0,03%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 13 : Ecart relatif des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de porosités 0,25.

Sur la Figure 19, les réponses homogénéisées estimées sont confrontées aux solutions exactes pour deux taux de porosités 0,25 et 0,4. Le même pas de calcul que précédemment assure la convergence pour cette seconde fraction volumique. Dans le Tableau 14, les erreurs relatives sont quantifiées, aux mêmes temps/déformations macroscopiques que pour l'étude de sensibilité au pas de calcul, présentée dans le Tableau 13.

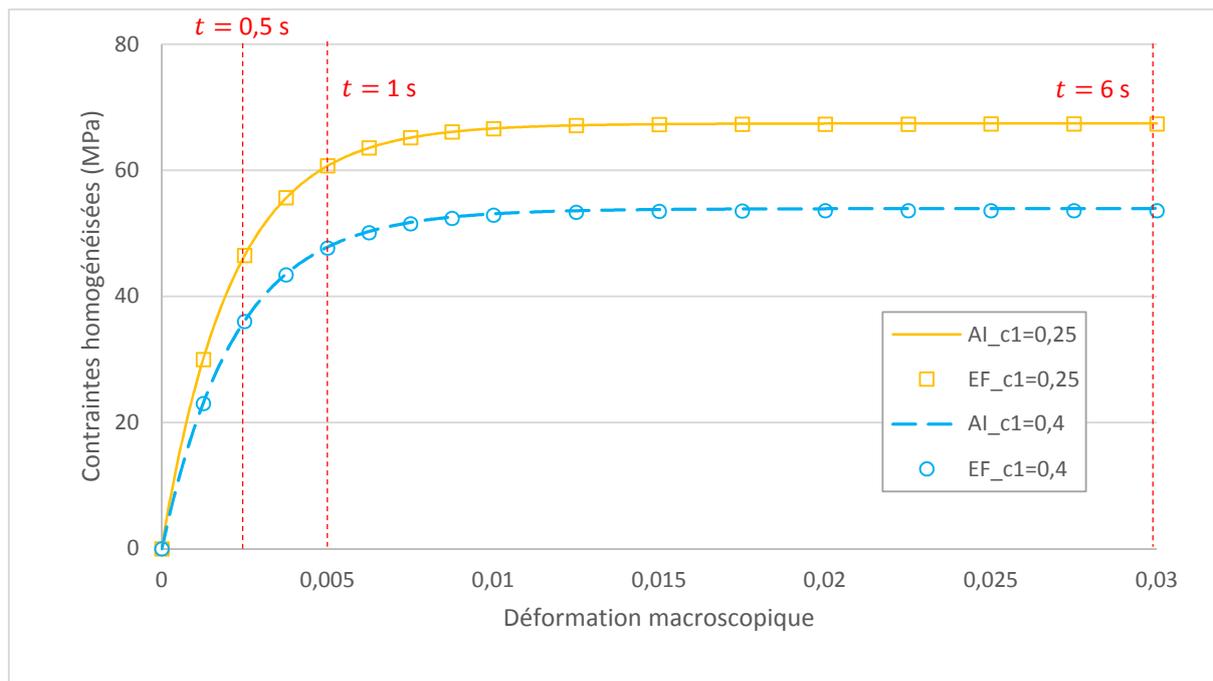


Figure 19 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de porosités 0,25 et 0,4.

	$c_1 = 0,25$	$c_1 = 0,4$
$t = 0,5 \text{ s}$	0,25%	0,34 %
$t = 1 \text{ s}$	0,16%	0,34%
$t = 6 \text{ s}$	0,14%	0,62%

Tableau 14 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de porosités 0,25 et 0,4.

Les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) ont montré que la réponse simulée avec l'AI en résolvant le problème thermoélastique auxiliaire par EF était confondue avec la solution exacte du problème viscoélastique local pour un taux de porosités de 0,4. On peut donc considérer valide l'approximation du potentiel incrémental au cœur de l'AI pour cette fraction volumique et attribuer le très faible écart observé au schéma de Luciano et Barbero (1994). Ainsi, pour continuer sur le même principe que ce qui a été fait par Lahellec et Suquet (2007a) à l'échelle macroscopique et précédemment au paragraphe (III.B.5) aux deux échelles, les contraintes asymptotiques, homogénéisées et moyennes dans la matrice, estimées par l'AI sont comparées aux solutions exactes (EF). Sur la Figure 20, la comparaison est représentée pour des fractions volumiques comprises entre 0 et 0,5. Les contraintes asymptotiques sont toujours normalisées par $2\eta^{(2)}\dot{E}_{yy}$, correspondant à la contrainte dans la matrice pure dans les mêmes conditions de chargement. Les solutions ont été obtenues pour un maillage optimisé (voir Tableau 5) et un pas de calcul satisfaisant le critère de convergence fixé au paragraphe (III.B.3) pour chacune des fractions volumiques étudiées.

A la différence du matériau fibreux, les contraintes asymptotiques sont bien estimées même à fort taux de porosités. L'erreur relative maximale est toujours obtenue pour un taux de 0,5, mais n'est que de 1,6% (contre 11,9% pour le composite du paragraphe (III.B.4)). Nous avons vu au paragraphe

(III.B.5) que l'erreur était principalement due à la moyenne dans la fibre ($r = 1$), or dans le cas de matériaux poreux, la moyenne dans cette phase est nulle. L'erreur vient donc uniquement de la moyenne dans la matrice, qui est, certes moins bien estimée que précédemment, mais reste tout de même très faible (1,66%).

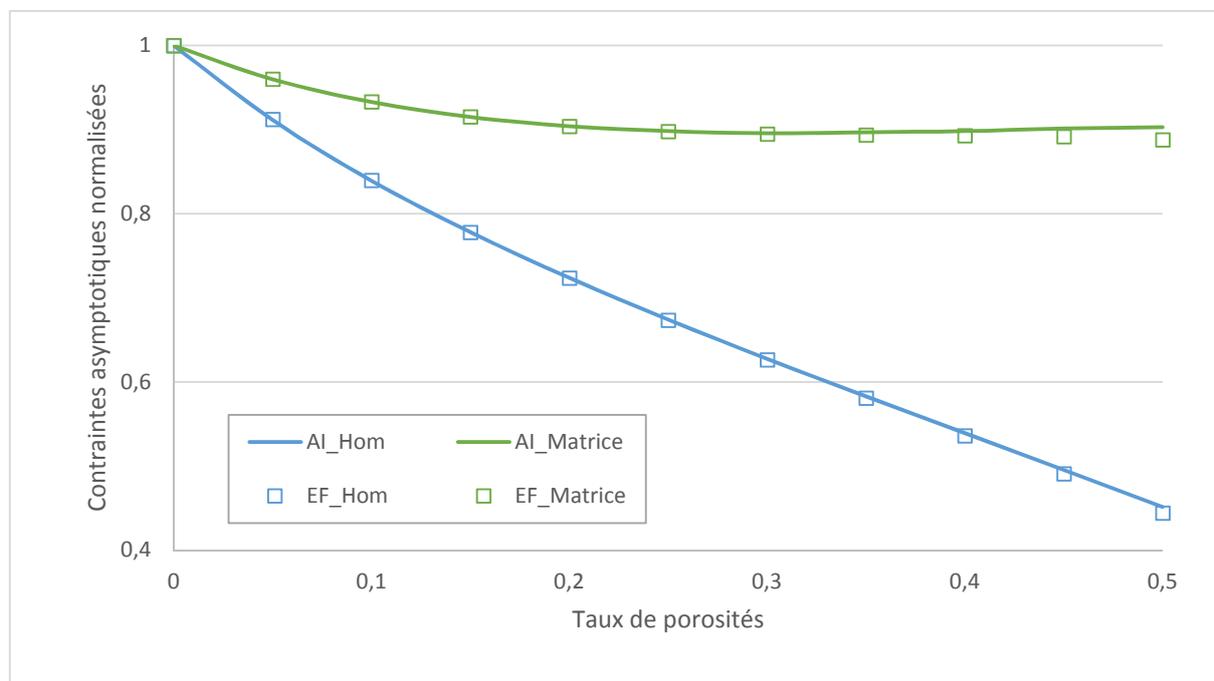


Figure 20 : Contraintes asymptotiques normalisées, macroscopique et moyennes par phase, en fonction du taux de porosités. Comparaison entre la valeur estimée par l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).

En conclusion, comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) avec l'approximation de HS, les réponses effectives estimées, en couplant ici l'AI avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) sont excellentes pour les matériaux périodiques poreux. Il en est de même pour la réponse moyenne de la matrice.

III.C.2. Effets de contraste

On reprend ici le matériau hétérogène à fibres longues défini au paragraphe (III.B.1). Afin de regarder l'impact des propriétés des phases sur la qualité des réponses homogénéisées, nous introduisons successivement des coefficients multiplicateurs sur les propriétés élastiques de la fibre et sur la viscosité de la matrice. Pour tous les calculs, le taux de fibres est de 0,25. Suite à une étude sur la sensibilité de l'AI au pas de calcul pour certains cas ciblés de ce paragraphe, le pas de temps de 0,01 s a finalement été retenu pour l'ensemble des résultats présentés. De la même manière, le maillage pour un taux de fibres de 0,25, présenté au paragraphe (III.B.2), est utilisé. Enfin, pour le calcul des contraintes asymptotiques, le même principe que celui présenté au paragraphe (III.B.3) est repris avec toutefois une valeur seuil du taux d'accroissement de 10^{-4} . Ce changement a permis de raccourcir certains calculs, tout en permettant les comparaisons envisagées ici.

III.C.2.a) Propriétés de la fibre

Cinq coefficients multiplicateurs (0,5 – 2 – 5 – 10 – 20) sont ici appliqués aux modules de cisaillement et de compressibilité de la fibre consignés dans le Tableau 3. Sur la Figure 21, les estimations des réponses homogénéisées obtenues avec l'AI sont confrontées aux solutions de référence (EF). Par souci de lisibilité, seulement trois des coefficients multiplicateurs (0,5 – 2 – 10) ainsi que la réponse avec les modules d'origine sont présents sur la Figure 21. D'une manière générale, les deux méthodes donnent des résultats similaires à l'échelle globale. Cette conclusion reste valable pour les moyennes par phase non représentées ici. La précision de l'AI couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) ne semble donc pas être affectée par les propriétés élastiques de la fibre. On observe par ailleurs sur la Figure 21 une influence relativement marquée dans le régime transitoire. Les valeurs des contraintes asymptotiques normalisées par celle obtenue avec les propriétés initiales ($\Sigma_{initiale}^{\infty}$) et les temps à 98% sont regroupés dans le Tableau 15.

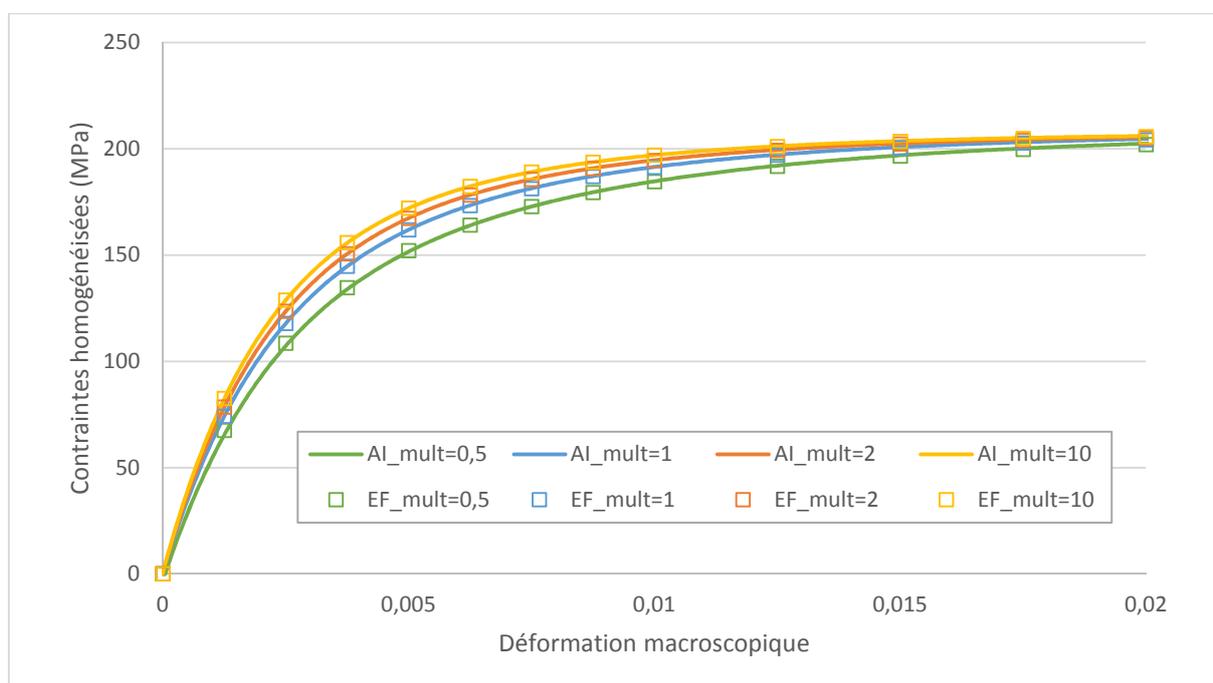


Figure 21 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres de 0,25. Influence du contraste des propriétés élastiques.

Coef. multiplicateur	0,5	1	2	5	10	20
$\Sigma^{\infty}/\Sigma_{initiale}^{\infty}$	0,9990	1	1,0012	1,0010	1,0013	0,9999
$T^{98\%}$ (s)	4,82	4,16	3,89	3,63	3,57	3,41

Tableau 15 : Influence des propriétés de la fibre sur la contrainte asymptotique normalisée et le temps à 98%

Le contraste des propriétés élastiques/instantanées n'a pas d'effet notable sur la valeur de la contrainte homogénéisée asymptotique. En revanche et de manière prévisible, il joue un rôle important sur la vitesse d'installation du régime asymptotique. Cette dernière est d'autant plus rapide que le contraste augmente (voir les temps à 98%).

A travers cette étude, nous avons rencontré une des limites de l'approche. Avec un coefficient multiplicateur de 0,1 (aussi testé), le module de cisaillement de la fibre vaut 16,665 GPa et est inférieur au module instantané de la matrice. Au cours du temps, le module équivalent de la matrice $\mu_{\Delta}^{(2)}$ diminue et se retrouve à un moment donné proche du module de cisaillement de la fibre. Cela provoque une erreur lors de l'inversion du tenseur de la différence (par exemple utilisée dans le calcul des tenseurs de localisation/polarisation). Il y a donc certaines conditions à remplir pour ne pas être dans ce cas particulier lors des calculs.

III.C.2.b) Propriétés visqueuses de la matrice

Les propriétés élastiques d'origine de la fibre sont reprises. Six coefficients multiplicateurs (0,1 – 0,2 – 0,5 – 0,8 – 2 – 5) sont appliqués à la viscosité initiale de la matrice (cf. Tableau 3). Par souci de lisibilité comme dans le paragraphe précédent, la comparaison entre les estimations (AI) et les solutions de référence (EF) est présentée sur la Figure 22 seulement pour quatre coefficients (0,2 – 0,5 – 2 – 5) en plus de la solution avec la viscosité d'origine. Pour toutes les viscosités, les estimations sont en accord avec les solutions de référence. Contrairement au paragraphe (III.C.2.a), la réponse en contrainte asymptotique est visiblement affectée par le changement de viscosité. Afin de comparer ces résultats entre eux, les contraintes asymptotiques normalisées par $\Sigma_{initiale}^{\infty}$ et les temps à 98% sont donnés dans le Tableau 16.

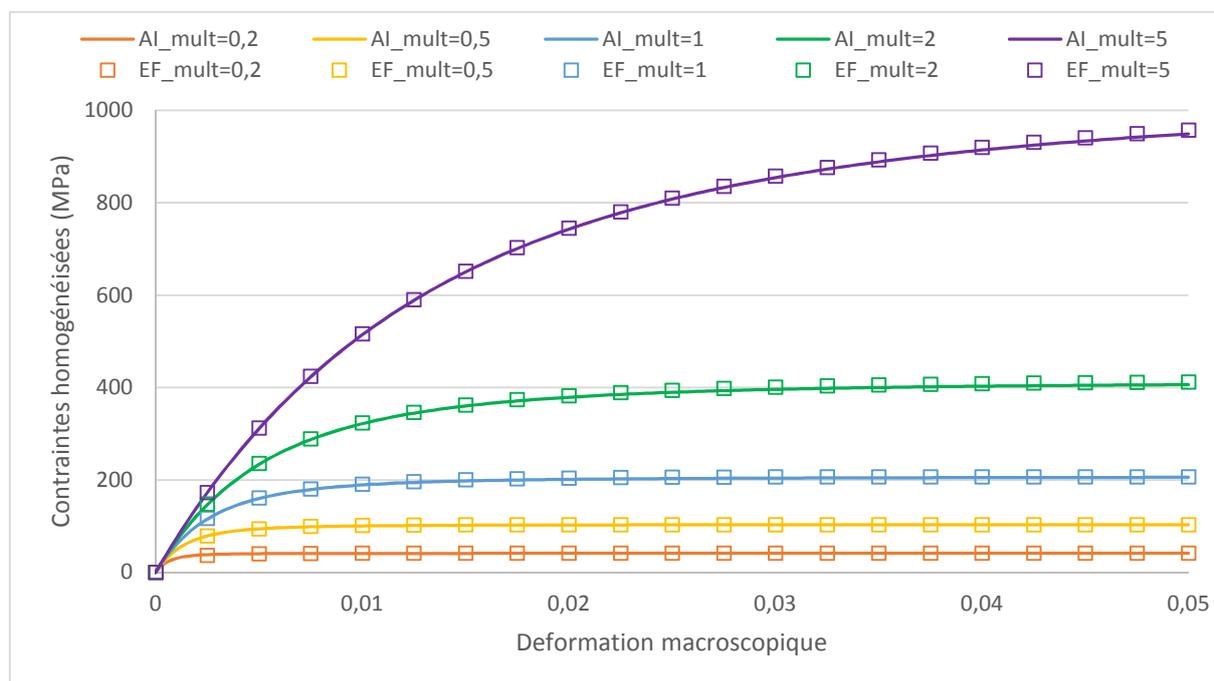


Figure 22 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres de 0,25. Influence des propriétés visqueuses de la matrice.

On retrouve que la contrainte asymptotique normalisée est égale au coefficient multiplicateur, à plus ou moins 2%. En ce qui concerne les temps caractéristiques, l'évolution est quasiment linéaire. Ces propriétés sont en accord avec le modèle viscoélastique linéaire affecté à la matrice.

Coef. multiplicateur	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	5
$\Sigma^\infty / \Sigma_{initiale}^\infty$	0,10	0,20	0,50	0,80	1	1,98	4,90
$\tau^{98\%}$ (s)	0,55	0,95	2,25	3,55	4,25	6,95	14,8

Tableau 16 : Effet de la viscosité de la matrice sur la contrainte asymptotique normalisée et le temps à 98%.

III.C.3. Bilan

Pour approfondir l'analyse des capacités de l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994), les estimations et solutions de référence (EF) ont été mises en regard pour une large gamme de contrastes et un chargement monotone en glissement simple.

- En remplaçant les fibres par des porosités, la précision des estimations est excellente comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a). Cela confirme que le schéma de Luciano et Barbero (1994) constitue une alternative pertinente à l'approximation de HS en fournissant des performances similaires pour le chargement étudié.
- Les différences de réponses générées en faisant varier le contraste entre les propriétés élastiques de la fibre et les propriétés instantanées de la matrice, ou encore la viscosité de la matrice, sont globalement très bien restituées. Ces résultats montrent la robustesse de l'approche incrémentale ici couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994).

III.D. Estimation du second moment

Dans ce paragraphe et dans le même esprit que dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), la précision du calcul du second moment du champ de déformation dans la phase matrice est évaluée. Les deux phases sont isotropes et on s'intéresse plus particulièrement à la moyenne dans la matrice du produit doublement contracté de la partie déviatorique du tenseur des déformations par elle-même qui est un invariant isotrope du second moment du champ de déformation dans cette phase. Nous nous plaçons en élasticité. Pour rappel, $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d \rangle_r$ est donnée pour chacune des phases, par la formule :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d \rangle_r = \frac{1}{c_r} \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \mu^{(r)}}(\underline{\underline{E}}) \quad (III.10)$$

où \tilde{W}_e est l'énergie effective exacte du matériau hétérogène, qui est par ailleurs donnée par la formule :

$$\tilde{W}_e(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\check{L}}} : \underline{\underline{E}} \quad (III.11)$$

On considère toujours la même microstructure périodique et l'objectif est donc de quantifier l'erreur introduite en remplaçant l'énergie effective exacte dans (III.10) par l'approximation de Luciano et Barbero (1994) :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d \rangle_r \cong \frac{1}{c_r} \frac{\partial \tilde{W}_e^{LB}}{\partial \mu^{(r)}}(\underline{\underline{E}}) \quad (III.12)$$

Cela revient donc à dériver le tenseur des propriétés homogénéisées $\underline{\underline{\chi}}^{LB}$ par rapport au module de cisaillement de la phase r . Afin de s'affranchir du calcul analytique d'une telle dérivée pour chaque schéma d'homogénéisation que nous serions amenés à utiliser par la suite et ainsi pouvoir changer de microstructure de manière rapide, nous avons utilisé la définition de la dérivée à partir du passage à la limite. Ainsi, dans le cas particulier de l'approximation de Luciano et Barbero (1994), nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{W}_e^{LB}}{\partial \mu^{(r)}}(\underline{\underline{E}}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{W}_e^{LB}(\mu^{(r)} + h) - \tilde{W}_e^{LB}(\mu^{(r)} - h)}{2h} \quad (III.13)$$

Dans la pratique, le passage à la limite est par ailleurs calculé de la manière suivante :

$$\frac{\partial \tilde{W}_e^{LB}}{\partial \mu^{(r)}}(\underline{\underline{E}}) = \frac{\tilde{W}_e^{LB}(\mu^{(r)} + h) - \tilde{W}_e^{LB}(\mu^{(r)} - h)}{2h} \quad (III.14)$$

avec h suffisamment petit pour être négligeable devant $\mu^{(r)}$ et permettant d'avoir des résultats précis et convergés (h de l'ordre de 10^{-3} devant la valeur de $\mu^{(r)}$ est suffisant). Le même type de procédure a été mené dans les travaux de Ghossein et Lévesque (2015) pour calculer les dérivées des modules effectifs d'une microstructure obtenus à partir de simulations en champs complets.

Le chargement est un glissement simple dans le plan (y, z) :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (III.15)$$

Dans le modèle EF, le second moment est calculé directement par le produit doublement contracté du déviateur du tenseur des déformations locales par lui-même.

III.D.1. Effets du contraste et du taux de fibres sur la projection déviatorique du second moment

La projection déviatorique du second moment estimé à partir de l'équation (III.14) a été calculée pour différents contrastes en termes de module d'Young entre la fibre et la matrice ($E_{fibre}/E_{matrice}$), les deux phases ayant le même coefficient de Poisson égal à 0,2. La valeur normalisée du second moment dans la matrice d'après la formule (III.16), est présentée sur la Figure 23 pour des contrastes allant de

10^{-4} à 10^4 et pour différents taux de fibres (0,1 – 0,25 – 0,4 – 0,5). Les valeurs estimées (LB) sont des lignes continues et les solutions de référence (EF) sont représentées par des symboles carrés.

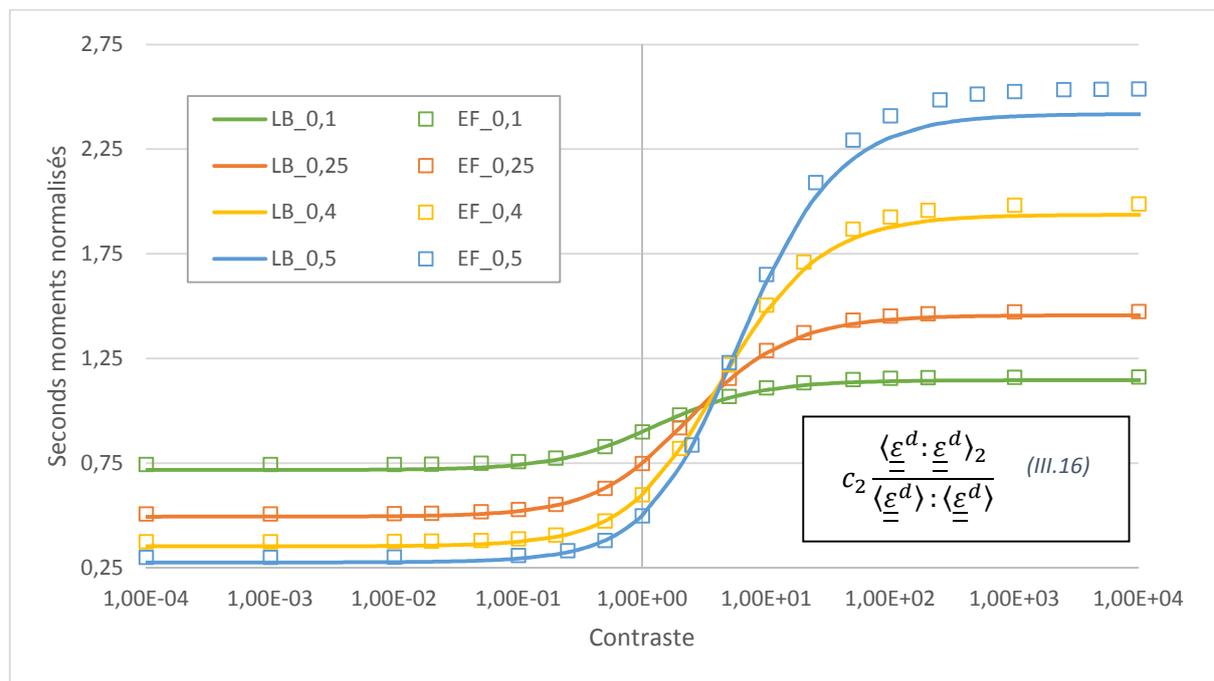


Figure 23 : Comparaison entre l'estimation de la projection déviatorique du second moment dans la matrice avec l'approximation de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution de référence (EF) en fonction du contraste et pour différents taux de fibres. Microstructure périodique.

Les formes globales des courbes estimées correspondent aux solutions de référence. Pour chaque courbe, trois parties sont identifiables : une première asymptote à faible contraste (gauche), une partie transitoire à contraste moyen (entre 10^{-1} et 10^2) et une seconde asymptote à fort contraste (droite).

- Dans la partie transitoire, les estimations sont assez proches des solutions de référence, avec bien entendu une erreur relative qui augmente avec le taux de fibres, à l'exception du contraste de 1 correspondant au matériau homogène.
- Malgré des écarts plus visibles sur la Figure 23 au niveau des forts contrastes, les erreurs relatives les plus importantes se situent au niveau des faibles contrastes (jusqu'à 8,6% pour un taux de fibres de 0,5) à l'inverse manifestement de ce qui avait obtenu avec l'approximation de HS dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a). Nous avons donc ici une moins bonne approximation du second moment lorsque la matrice est plus rigide que la fibre. Pour notre cas d'étude principale, avec une fibre plus rigide que la matrice, nous nous situons dans le domaine de contrastes pour lequel l'estimation du second moment est plus précise. Néanmoins, l'erreur commise à forts taux de fibres constitue une des raisons pour lesquelles les estimations de la réponse macroscopique étudiées au paragraphe (III.B) se détériorent au-delà d'un taux de fibres de 0,4.

III.D.2. Projection déviatorique du second moment pour le cas d'étude

Dans ce paragraphe, nous tentons de nous rapprocher de notre cas principal d'étude, à savoir celui défini au paragraphe (III.B). Nous restons toujours en élasticité comme dans le paragraphe précédent (III.D.1) mais les propriétés élastiques des deux phases sont à présent celles du Tableau 3. Nous nous intéressons à la précision de l'estimation du second moment déviatorique dans la matrice calculé à partir de la formule (III.14) pour des valeurs décroissantes, à partir de la valeur instantanée, du module de cisaillement $\mu^{(2)}$ de la matrice. L'idée est de refléter l'effet de la diminution de ce module lors d'un calcul en viscoélasticité. On rappelle que le module de compressibilité de la matrice était considéré constant dans le temps au paragraphe (III.B) de par la nature déviatorique de la variable interne. Les calculs sont effectués pour un taux de fibres de 0,25, pour le chargement en glissement simple (III.15), et en divisant le module de cisaillement instantané de la matrice par des entiers croissants.

Sur la Figure 24, les estimations (LB) et les solutions de référence (EF) des seconds moments déviatoriques normés (cf. relation (III.16)) sont présentées pour des diviseurs allant de 1 à 50, représentant respectivement les propriétés instantanée et à environ $t = 20$ s de la matrice dans le cas viscoélastique défini au paragraphe (III.B.1). L'erreur relative est grandissante avec l'augmentation du diviseur, passant de 1,6% à 9,4% entre les deux extrêmes présents sur la Figure 24.

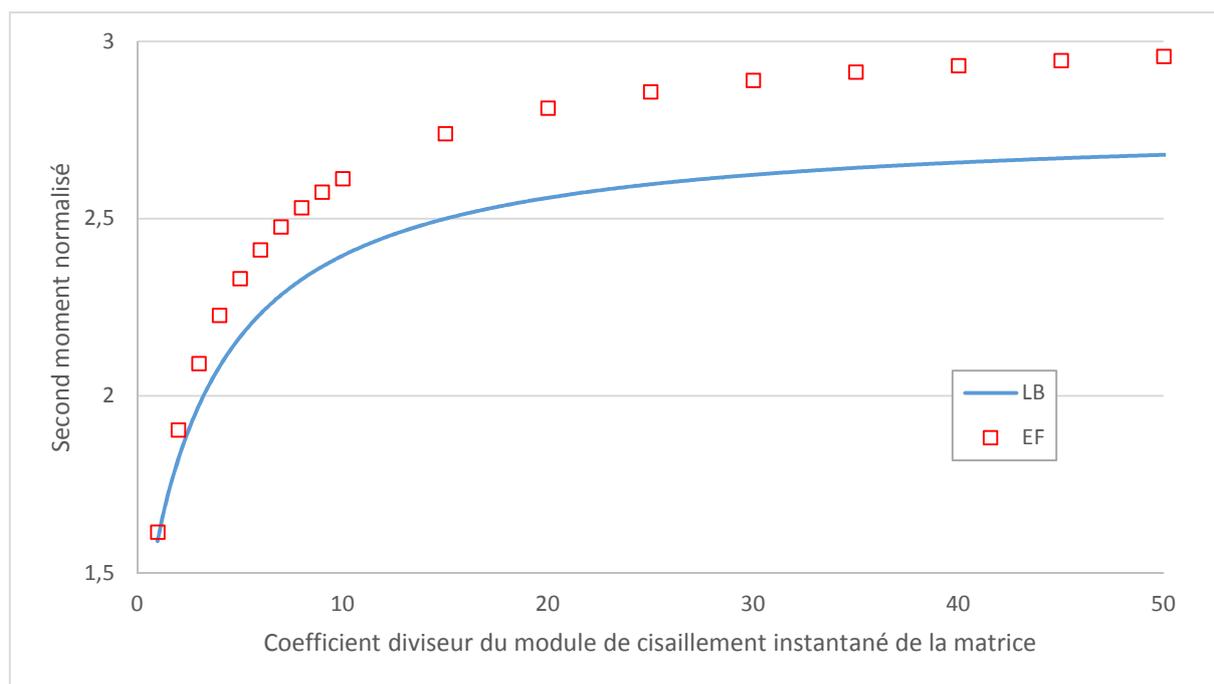


Figure 24 : Comparaison entre l'estimation du second moment déviatorique normalisé dans la matrice avec l'approximation de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution de référence (EF). Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25.

III.D.3. Bilan

Pour comprendre les erreurs causées par l'estimation du second moment déviatorique à partir du schéma de Luciano et Barbero (1994), celle-ci a été confrontée à la solution de référence, en élasticité, pour une large gamme de contrastes et de taux de fibres.

- A contraste fixé entre les deux phases, l'erreur relative augmente avec le taux de fibres. Cela explique le fait que les estimations de l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) se dégradent au-delà d'un taux de fibres de 0,4.
- A taux de fibres fixé et lorsque les fibres sont plus rigides que la matrice, l'estimation du second moment s'éloigne de la solution de référence avec l'augmentation du contraste sur le module de cisaillement. Cela explique que les erreurs maximales obtenues avec l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) se situent dans le régime asymptotique (lorsque le module de cisaillement de la matrice a une valeur minimale).

Conclusion de la *PARTIE 1*

Dans cette *PARTIE 1*, nous avons tout d'abord présenté la théorie sur laquelle est fondée l'approche incrémentale de Lahellec et Suquet (2007a) puis, nous l'avons utilisée pour résoudre des cas pratiques de problèmes hétérogènes viscoélastiques. L'objectif était d'une part de valider le code réalisé dans le cadre des présents travaux et d'autre part d'approfondir la quantification des performances de l'approche.

Le chapitre (II) a présenté la formulation de l'AI. Dans le cadre général des *Matériaux Standards Généralisés*, chaque constituant d'un matériau hétérogène est rigoureusement défini par deux potentiels thermodynamiques. Après avoir écrit le problème local sous une forme discrétisée dans le temps, un potentiel incrémental effectif est introduit. L'utilisation de la méthode variationnelle de Ponte-Castañeda (2002) permet une estimation de ce potentiel à travers l'introduction de deux inconnues. En utilisant le schéma d'homogénéisation linéaire adapté à la microstructure du matériau hétérogène, la réponse est estimée à chaque temps de calcul.

La première microstructure étudiée réalisait la borne inférieure d'HS. Les fibres élastiques étaient entourées d'une matrice viscoélastique de type Maxwell, les deux phases étant prises incompressibles. Le volume élémentaire représentatif a été soumis à un chargement de relaxation en glissement simple. Les estimations de l'approche incrémentale, couplée à la borne inférieure de HS, ont été confrontées aux solutions exactes du problème viscoélastique complet obtenues grâce au principe de correspondance. La seule source d'erreur par rapport à la solution de référence se situait dans ce cas au niveau de l'approximation du potentiel incrémental, le problème thermoélastique auxiliaire étant résolu de manière exacte via la borne inférieure de HS.

- Pour un taux de fibres de 0,45 (cas déjà envisagé dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), une étude de sensibilité au pas de calcul de la réponse homogénéisée a été menée pour trouver la valeur adaptée au problème. La réponse homogénéisée estimée est alors en très bon accord avec la solution exacte, confirmant la validité de l'approche incrémentale (pour la microstructure et le chargement considérés) et simultanément la validité du code ici réalisé.
- Les estimations ont été confrontées avec succès aux solutions de référence pour d'autres taux de fibres.

La deuxième microstructure étudiée était périodique à fibres circulaires longues. La fibre était élastique et la matrice était viscoélastique de type Maxwell, les phases n'étant plus incompressibles. La cellule de base a été soumise à un chargement monotone en glissement simple. Les estimations ont été confrontées aux solutions de référence cette fois obtenues par la méthode des éléments finis.

- Le schéma de Luciano et Barbero (1994) a été couplé à l'approche incrémentale, ce qui constitue une variante par rapport aux travaux originaux de Lahellec et Suquet (2007a) utilisant un schéma dérivé de l'approximation de HS pour les milieux périodiques.
- Pour les deux taux de fibres (0,25 et 0,4) déjà étudiés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a), après avoir regardé la sensibilité au pas de calcul des réponses homogénéisées mais aussi

moyennes par phase, celles-ci ont été comparées avec succès aux solutions de référence. Puis, la précision des estimations en termes de contraintes asymptotiques a été mise en regard avec le taux de fibres. Les résultats homogénéisés similaires à ceux de Lahellec et Suquet (2007a) avec l'approximation de HS et l'excellente qualité des moyennes par phase jusqu'à un taux de fibres de 0,4, montrent que le schéma de Luciano et Barbero (1994) constitue une alternative possible à l'approximation de HS (pour la microstructure et le chargement étudiés). Les capacités de l'approche pour différentes propriétés matériaux (fibres remplacées par des porosités comme dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) mais aussi divers contrastes fibre/matrice ou encore valeurs de viscosité) ont aussi été prouvées.

- Le second moment en déformation, utile pour le bon déroulement de l'approche, a été étudié en élasticité pour donner des indications sur l'origine des erreurs préalablement observées.

En résumé, l'approche incrémentale telle que proposée par Lahellec et Suquet (2007a) a été programmée en Python® et différents calculs ont été réalisés. Nous avons montré que :

- le code Python® semble fonctionnel ;
- pour la microstructure périodique à fibres circulaires longues et le chargement étudiés, le couple formé par l'approche incrémentale et le schéma de Luciano et Barbero (1994) est robuste.

PARTIE 2

Approche incrémentale : généralisation et applications

Introduction de la *PARTIE 2*

L'objectif dans cette partie est d'étendre l'approche incrémentale à de nouvelles configurations de calcul. Pour cela, dans le premier chapitre (IV), l'approche est formulée en relaxant certaines hypothèses faites dans les travaux originaux. Dans le second chapitre (V), en considérant la microstructure périodique à fibres longues de la *PARTIE 1*, plusieurs nouveaux comportements viscoélastiques sont étudiés, grâce notamment à la reformulation du chapitre précédent. Enfin, dans le dernier chapitre (VI), de nouveaux schémas d'homogénéisation sont couplés à l'approche pour permettre son utilisation pour d'autres microstructures.

Tables des matières de la *PARTIE 2*

Introduction de la PARTIE 2	67
IV. Généralisation de l'approche incrémentale.....	69
IV.A. Lois de comportement des constituants.....	69
IV.B. Formulation du problème hétérogène local (version incrémentale).....	70
IV.C. Hypothèses de travail (nouvelle version).....	72
IV.D. Méthode variationnelle.....	73
IV.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique	75
IV.F. Résolution du problème auxiliaire thermoélastique.....	77
V. Application de l'approche incrémentale pour différentes lois viscoélastiques locales.....	78
V.A. Modèle de Maxwell à variable interne non déviatorique.....	78
V.A.1. Cas d'un coefficient de Poisson constant et chargement	79
V.A.2. Réponses macroscopique et par phase.....	80
V.A.3. Influence du taux de fibres sur la qualité d'estimation des réponses asymptotiques..	82
V.A.4. Terme diagonal du second moment	84
V.A.5. Pour aller un peu plus loin : effet des temps caractéristiques.....	85
V.A.6. Bilan	86
V.B. Les deux phases viscoélastiques	87
V.B.1. Propriétés des phases et chargement.....	87
V.B.2. Réponses homogénéisées et moyennes par phase	88
V.B.3. Influence de la viscosité de la fibre	90
V.B.4. Bilan	92
V.C. Modèle de Maxwell généralisé	92
V.C.1. Rappel du modèle de Maxwell généralisé et chargement étudié	93
V.C.2. Modèle à deux variables internes	94
V.C.2.a) Temps de relaxation proches	95
V.C.2.b) Temps de relaxation éloignés.....	97
V.C.3. Modèle à trois variables internes.....	98
V.C.4. Bilan	101
VI. Application de l'approche incrémentale à différentes microstructures.....	102
VI.A. Microstructure à inclusions sphériques	103
VI.A.1. Propriétés des phases et chargement.....	103
VI.A.2. Sensibilité au pas de calcul.....	104
VI.A.3. Comparaisons aux estimations de la littérature	106
VI.A.4. Comparaisons aux solutions de référence	107
VI.A.5. Bilan	108
VI.B. Microstructures à inclusions ellipsoïdales, prolates et oblates	109
VI.B.1. Définition des ellipsoïdes et des paramètres de calcul	109
VI.B.2. Effet du taux d'inclusions sur la réponse asymptotique homogénéisée	110
VI.B.3. Effet du rapport de forme	110
VI.B.4. Bilan	112
VI.C. Composites à copeaux de bois lamellés.....	112
VI.C.1. Définition de la cellule élémentaire et propriétés élastiques effectives	113
VI.C.2. Résultats	115
VI.C.3. Bilan	116
Conclusion de la PARTIE 2	117

IV. Généralisation de l'approche incrémentale

Nous réécrivons l'approche incrémentale sous une forme plus générale impliquant plusieurs variables internes de nature non nécessairement déviatorique. La volonté est ainsi de s'affranchir de deux des hypothèses simplificatrices du paragraphe (II.C), concernant l'unicité et le caractère déviatorique de la variable interne. De plus, et même si la majorité des applications considérées dans les chapitres suivants concerneront des phases isotropes, l'approche étendue est théoriquement formulée dans le cas plus général de phases anisotropes. Par suite et contrairement au chapitre (II), certaines équations s'écrivent désormais d'une manière tensorielle générale, c'est-à-dire sans faire la décomposition en parties sphérique et déviatorique des tenseurs mécaniques. La réécriture ci-dessous suit le même déroulement que l'écriture de Lahellec et Suquet (2007a) présentée dans le chapitre (II). Nous revenons donc sur les mêmes étapes et une partie des hypothèses dans ce chapitre.

IV.A. Lois de comportement des constituants

En se plaçant dans le cadre des *Matériaux Standards Généralisés*, chaque matériau est défini par son énergie libre massique et son potentiel de dissipation. Ces deux potentiels sont des fonctions convexes des variables d'état du système et/ou de leurs dérivées temporelles. Ainsi, nous avons :

$$\rho\psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots\right) \quad (IV.1)$$

$$\varphi\left(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots\right) \quad (IV.2)$$

où $\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots$ sont les différentes variables internes considérées et $\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots$ leurs dérivées temporelles.

A partir de ces potentiels, les forces thermodynamiques associées à chaque variable d'état dérivent de l'énergie libre, tandis que les lois complémentaires s'écrivent à partir du potentiel de dissipation (cf. paragraphe (II.A)). En les combinant, nous obtenons les lois constitutives du matériau telles que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots\right) \quad (IV.3)$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}\left(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots\right) = \underline{\underline{0}} \quad (IV.4)$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\beta}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\beta}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots) = \underline{\underline{0}} \quad (IV.5)$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\gamma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\gamma}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots) = \underline{\underline{0}} \quad (IV.6)$$

$$\dots \quad (IV.7)$$

Ainsi, chaque matériau est défini de manière suffisante à travers ces équations.

IV.B. Formulation du problème hétérogène local (version incrémentale)

On considère un volume élémentaire représentatif V d'un milieu hétérogène, dans lequel les N phases sont gouvernées par les équations (IV.3) à (IV.7) et les propriétés homogènes par phase. Les potentiels sont définis, en tout point \underline{x} de V , sous la forme :

$$\rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots, \underline{x}) = \sum_r \rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad (IV.8)$$

$$\varphi(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots, \underline{x}) = \sum_r \varphi^{(r)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad (IV.9)$$

où l'exposant r réfère à la phase r et $\chi^{(r)}$ désigne la fonction caractéristique associée.

Le V.E.R. est soumis à un trajet de chargement défini par l'histoire du tenseur de déformation macroscopique $\{\underline{E}(t), t \in [0, t_{max}]\}$. Le problème local est alors écrit sous forme discrétisée dans le temps. A cet effet, l'intervalle $[0, t_{max}]$ est représenté par $m+1$ temps, définis par un pas de temps dt constant, et tels que $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m = t_{max}\}$. Les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}_n(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}_n(\underline{x}), \underline{\underline{\alpha}}_n(\underline{x}), \underline{\underline{\beta}}_n(\underline{x}), \underline{\underline{\gamma}}_n(\underline{x}), \dots$ au temps t_n sont supposés connus tandis que les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}(\underline{x}), \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}(\underline{x}), \underline{\underline{\beta}}_{n+1}(\underline{x}), \underline{\underline{\gamma}}_{n+1}(\underline{x}), \dots$ à l'instant t_{n+1} sont solutions du problème local (IV.10) :

$$\left[\begin{array}{l}
 \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, \underline{\underline{\beta}}_{n+1}, \underline{\underline{\gamma}}_{n+1}, \dots \right) \\
 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, \underline{\underline{\beta}}_{n+1}, \underline{\underline{\gamma}}_{n+1}, \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}} \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\beta}}_{n+1} - \underline{\underline{\beta}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\gamma}}_{n+1} - \underline{\underline{\gamma}}_n}{dt}, \dots \right) = \underline{\underline{0}} \\
 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\beta}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, \underline{\underline{\beta}}_{n+1}, \underline{\underline{\gamma}}_{n+1}, \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\beta}}}} \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\beta}}_{n+1} - \underline{\underline{\beta}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\gamma}}_{n+1} - \underline{\underline{\gamma}}_n}{dt}, \dots \right) = \underline{\underline{0}} \\
 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, \underline{\underline{\beta}}_{n+1}, \underline{\underline{\gamma}}_{n+1}, \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\gamma}}}} \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\beta}}_{n+1} - \underline{\underline{\beta}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\gamma}}_{n+1} - \underline{\underline{\gamma}}_n}{dt}, \dots \right) = \underline{\underline{0}} \\
 \dots \\
 \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{0}} \\
 \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1} + c.l. \text{ sur } \partial V
 \end{array} \right] \quad \forall \underline{\underline{x}} \in V \quad (IV.10)$$

En suivant le même principe qu'au paragraphe (II.B) dans la **PARTIE 1**, le système d'équations peut alors s'écrire sous la forme variationnelle équivalente suivante :

$$J(\underline{\underline{E}}_{n+1}) = \underset{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1}}{\text{Inf}} \underset{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots}{\text{Inf}} \langle J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) \rangle \quad (IV.11)$$

où le potentiel incrémental J est ici défini par :

$$J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) = \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) + dt \cdot \varphi \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}_n}{dt}, \frac{\underline{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{\gamma}}_n}{dt}, \dots \right) \quad (IV.12)$$

Enfin, la réponse macroscopique à l'instant t_{n+1} se calcule toujours à partir de la dérivée de \check{J} , tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \frac{\partial \check{J}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) \quad (IV.13)$$

En effet, nous avons :

$$\frac{\partial \check{J}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\beta}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\beta}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\gamma}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \dots \quad (IV.14)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\beta}}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} = \dots = \underline{\underline{0}} \quad (IV.15)$$

par stationnarité de J par rapport aux variables internes et en utilisant la relation $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ et le lemme de Hill, il vient :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \rangle : \langle \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} \quad (IV.16)$$

Ainsi, après discrétisation temporelle, l'homogénéisation du problème d'évolution (IV.10) se réduit au problème variationnel (IV.11) qui n'implique plus qu'un seul potentiel.

IV.C. Hypothèses de travail (nouvelle version)

- Dans cette nouvelle version, nous proposons de relaxer l'hypothèse portant sur le caractère déviatorique de la, ici des variables internes. Ce sont juste des variables tensorielles symétriques.
- Pour les mêmes raisons que dans la **PARTIE 1**, on conserve les hypothèses portant sur la forme quadratique des potentiels (IV.1) et (IV.2). Toutefois, dans une approche progressive des difficultés, nous n'envisageons pas de termes de couplages impliquant les différentes variables internes dans les formulations ici proposées pour les deux potentiels. Ainsi, nous supposons que l'énergie libre s'écrit:

$$\begin{aligned} \rho^{(r)} \psi^{(r)} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots \right) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} \\ &\quad - \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\gamma}} - \dots \end{aligned} \quad (IV.17)$$

et que de même, le potentiel de dissipation s'écrit :

$$\varphi^{(r)} \left(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \dots \right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\beta}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\dot{\beta}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} + \dots \quad (IV.18)$$

Tous les tenseurs d'ordre 4 sont dotés des symétries majeures et mineures (cf. relation (II.15)).

- La troisième hypothèse de la **PARTIE 1** considérant les constituants isotopes est ici relaxée. Toutefois, bien que l'objectif final soit de pouvoir utiliser les formulations précédentes (IV.17) et (IV.18) pour des phases viscoélastiques non isotropes, nous introduisons quand même ici les notations nécessaires à leur emploi dans le cas particulier de phases isotropes. Dans ce cas, pour les tenseurs d'ordre 4 de l'énergie libre, les notations prises sont celles de la **PARTIE 1**, formule (II.16). Les tenseurs d'ordre 4 impliqués dans l'expression du potentiel de dissipation s'écrivent quant à eux comme suit :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vg}^{(r)} = 3 * \omega_{vg}^{(r)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \eta_{vg}^{(r)} * \underline{\underline{K}} \quad (IV.19)$$

où g représente $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ et les coefficients $\omega_{vg}^{(r)}$ et $\eta_{vg}^{(r)}$ désignent les coefficients de viscosité caractéristiques respectivement des parts sphérique et déviatorique du tenseur de viscosité associé à la variable interne g .

Par rapport à la **PARTIE 1**, paragraphe (II.C), les hypothèses formulées concernant les lois constitutives locales permettent désormais d'envisager par exemple une évolution temporelle du module de compressibilité de la phase viscoélastique, des phases isotropes de type Maxwell généralisé ou encore des phases anisotropes. En revanche, elles n'autorisent pas la prise en compte de couplages entre les différents processus dissipatifs.

Dans le cas particulier d'une seule variable interne déviatorique et des phases isotropes, les expressions des deux potentiels (II.13) et (II.17) de la **PARTIE 1** sont retrouvées.

IV.D. Méthode variationnelle

Dans un souci de simplification d'écriture, les champs $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\beta}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\gamma}}_{n+1}$, ... et $\underline{\underline{E}}_{n+1}$ seront désormais notés $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\alpha}}$, $\underline{\underline{\beta}}$, $\underline{\underline{\gamma}}$, ... et $\underline{\underline{E}}$.

De même que dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) au même stade du cheminement, il est nécessaire de lever le verrou lié à la difficulté d'homogénéiser le potentiel incrémental J qui n'est pas uniforme par morceaux du fait de sa dépendance aux champs $\underline{\underline{\alpha}}_n$, $\underline{\underline{\beta}}_n$, $\underline{\underline{\gamma}}_n$, ... qui ne le sont pas non plus.

En suivant le même raisonnement que dans la **PARTIE 1** issu des travaux de Lahellec et Suquet (2007a), l'idée est d'ajouter et de retrancher à l'énergie J , une énergie J_0 se prêtant mieux à l'homogénéisation, et telle que la différence $\Delta J = J - J_0$ reste estimable. Cette énergie de référence est choisie uniforme par morceaux :

$$J_0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots, \underline{\underline{x}}) = \sum_r J_0^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) \chi^{(r)}(\underline{\underline{x}}) \quad (IV.20)$$

avec, étant donné les hypothèses de travail :

$$\begin{aligned} J_0^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) &= \rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots) \\ &+ \frac{1}{dt} \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\alpha}^{(r)} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\beta}^{(r)} : (\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\gamma}^{(r)} : (\underline{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}) + \dots \right] \quad (IV.21) \end{aligned}$$

où $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\alpha}^{(r)}$, $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\beta}^{(r)}$, $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\gamma}^{(r)}$, ... et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$, $\underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}$, $\underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}$ sont deux familles de tenseurs respectivement d'ordre 4 et 2, tous uniformes dans la phase r . La forme précédente constitue le pendant de la forme (II.19) de la **PARTIE 1** pour une famille de variables internes symétriques $\underline{\underline{\alpha}}$, $\underline{\underline{\beta}}$, $\underline{\underline{\gamma}}$, ... de nature quelconque (i.e. non nécessairement déviatorique) et des phases non nécessairement isotropes. Un tenseur d'ordre 4

inconnu est alors introduit afin de relier le tenseur de viscosité $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{v\alpha}^{(r)}$ de la variable $\underline{\underline{\underline{\alpha}}}$ au tenseur $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{0v\alpha}^{(r)}$ tel que :

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{0v\alpha}^{(r)} = \underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{v\alpha}^{(r)} \quad (IV.22)$$

Les mêmes équations sont aussi écrites pour les autres variables internes avec l'introduction de $\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\beta}^{(r)}, \underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\gamma}^{(r)}, \dots$ et en changeant les indices α par β, γ, \dots . Ces tenseurs d'ordre 4 ont les symétries majeures et mineures.

En insérant alors le nouveau potentiel J_0 dans l'expression de l'énergie (IV-11) définissant la forme variationnelle du problème incrémental, il vient :

$$\check{J}(\underline{\underline{\underline{E}}}) = \langle \underline{\underline{\underline{E}}} \rangle_{\underline{\underline{\underline{E}}}} \left[\underline{\underline{\underline{Inf}}}_{\underline{\underline{\underline{\alpha, \beta, \gamma, \dots}}}} \langle J_0(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}}}) + \Delta J(\underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}}) \rangle \right] \quad (IV.23)$$

En s'inspirant des travaux de Ponte-Castañeda (2002), une bonne approximation de \check{J} peut être obtenue en imposant la stationnarité de $\Delta J = J - J_0$ par rapport à chacune des variables internes. L'estimation résultante est donnée par :

$$\check{J}(E) \approx \langle \underline{\underline{\underline{E}}} \rangle_{\underline{\underline{\underline{E}}}} \left[\underline{\underline{\underline{Inf}}}_{\underline{\underline{\underline{\alpha, \beta, \gamma, \dots}}}} \langle J_0(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}}}) \rangle + \langle \underline{\underline{\underline{Stat}}}_{\underline{\underline{\underline{\alpha, \beta, \gamma, \dots}}}} \Delta J(\underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}}) \rangle \right] \quad (IV.24)$$

Après résolution de la partie stationnaire de l'équation (IV.24) en chaque point $\underline{\underline{\underline{x}}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \check{J}(\underline{\underline{\underline{E}}}) \approx & \langle \underline{\underline{\underline{E}}} \rangle_{\underline{\underline{\underline{E}}}} \left[\underline{\underline{\underline{Inf}}}_{\underline{\underline{\underline{\alpha, \beta, \gamma, \dots}}}} \langle J_0(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}}}) \rangle \right] \\ & + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\alpha}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\alpha}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\alpha}}}_n - \underline{\underline{\underline{\alpha}}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{v\alpha}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\alpha}}}_n - \underline{\underline{\underline{\alpha}}}_n^{(r)}) \rangle \\ & + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\beta}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\beta}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\beta}}}_n - \underline{\underline{\underline{\beta}}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{v\beta}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\beta}}}_n - \underline{\underline{\underline{\beta}}}_n^{(r)}) \rangle \\ & + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\gamma}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\gamma}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\gamma}}}_n - \underline{\underline{\underline{\gamma}}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}_{v\gamma}^{(r)} : (\underline{\underline{\underline{\gamma}}}_n - \underline{\underline{\underline{\gamma}}}_n^{(r)}) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Il est à noter que cette expression a été établie en prenant en compte les symétries de tous les tenseurs d'ordres 2 et 4. Malgré cette écriture, nous sommes conscients que rien n'indique ici que les tenseurs d'ordre 4, $\left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\alpha}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right], \left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\beta}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right], \left[\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\gamma}^{(r)} - \underline{\underline{\underline{I}}} \right], \dots$ soient inversibles.

Les couples d'inconnues $\left(\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\alpha}^{(r)}, \underline{\underline{\underline{\alpha}}}_n^{(r)} \right), \left(\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\beta}^{(r)}, \underline{\underline{\underline{\beta}}}_n^{(r)} \right), \left(\underline{\underline{\underline{\Theta}}}_{\gamma}^{(r)}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}}_n^{(r)} \right), \dots$ associés respectivement aux variables internes $\underline{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\underline{\gamma}}, \dots}}$ n'ont pas encore été spécifiés. L'optimisation de l'estimation de l'énergie

$\check{J}(\underline{E})$ par rapport à chaque inconnue en utilisant la stationnarité de (IV.25) permet alors d'établir leur expression. De même que dans les travaux récents de Badulescu et al. (2015), un seul coefficient est introduit pour définir les inconnues $\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\alpha}}}^{(r)}, \underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)}, \underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\gamma}}}^{(r)}, \dots$ qui deviennent alors proportionnelles au tenseur identité d'ordre 4, $\underline{\underline{I}}$. On écrit :

$$\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} = \theta_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} * \underline{\underline{I}} \quad (IV.26)$$

La même relation est utilisée pour les tenseurs $\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\alpha}}}^{(r)}, \underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\gamma}}}^{(r)}, \dots$ en remplaçant les indices β par α, γ, \dots

Ainsi, après calculs, nous obtenons pour le couple $\left(\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)}, \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}\right)$ associé à la variable interne $\underline{\underline{\beta}}$:

$$\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} = \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{\langle (\underline{\underline{\beta}}_n - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} : (\underline{\underline{\beta}}_n - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) \rangle_r}{\langle (\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} : (\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}) \rangle_r}} \right\} * \underline{\underline{I}} \quad (IV.27)$$

$$\underline{\underline{\beta}}_n^{(r)} = \left[\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} \right]^{-1} : \left[\langle \underline{\underline{\beta}}_n \rangle_r + \left(\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right) : \langle \underline{\underline{\beta}} \rangle_r \right] \quad (IV.28)$$

Les mêmes équations sont aussi obtenues pour les couples d'inconnues $\left(\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\alpha}}}^{(r)}, \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}\right), \left(\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\gamma}}}^{(r)}, \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}\right), \dots$ associés respectivement aux variables internes $\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots$ en changeant les indices β par α, γ, \dots La signification des variables internes $\underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}, \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}, \dots$ est analogue à celle de $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$ (voir paragraphe (II.D)). Par ailleurs, on retiendra pour chaque processus visqueux l'expression (IV.27) avec un signe $-$ qui, dans le cas à une seule variable, donnait la meilleure estimation (cf. Lahellec et Suquet (2007a)). De plus, les expressions de type (IV.27) assurent l'inversibilité des tenseurs $\left[\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\alpha}}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right], \left[\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\beta}}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right], \left[\underline{\underline{\theta}}_{\underline{\underline{\gamma}}}^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right], \dots$

IV.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique

Pour affiner l'estimation (IV.25) de l'énergie, l'expression des champs $\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots$ est maintenant nécessaire. A cet effet, le problème de minimisation correspondant au premier terme de de l'équation (IV.25) se doit d'être résolu. Pour chaque variable interne, le même calcul que dans la **PARTIE 1** est réalisé mais sans pouvoir tirer avantage de la nature déviatorique des variables internes. Les symétries

de chaque tenseur permettent néanmoins des simplifications dans l'expression finale. Ainsi, la variable interne $\underline{\underline{\gamma}}$ est obtenue sous la forme :

$$\underline{\underline{\gamma}}(\underline{x}) = \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} \right]^{-1} : \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)} \right] \quad (IV.29)$$

Les champs des variables internes $\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \dots$ sont obtenus sous des formes analogues en remplaçant respectivement les indices γ par α, β, \dots , ainsi que $\underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}$ par $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}, \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}, \dots$

En réintroduisant l'expression des variables internes dans celle de J_0 , il est possible d'écrire l'énergie $\check{J}(\underline{E})$ sous la forme :

$$\check{J}(E) \approx \check{W}_{\Delta}(\underline{E}) + \sum_g \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\Theta}}_g^{(r)} - \underline{\underline{I}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_g^{(r)} : (\underline{\underline{g}}_n - \underline{\underline{g}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vg}^{(r)} : (\underline{\underline{g}}_n - \underline{\underline{g}}_n^{(r)}) \right\rangle \quad (IV.30)$$

où g appartient à $\{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}, \dots\}$ et dans laquelle apparaît l'énergie effective d'un problème auxiliaire thermoélastique :

$$\check{W}_{\Delta}(\underline{E}) = \inf_{\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E}} \langle w_{\Delta}^{(r)}(\underline{\varepsilon}) \rangle \quad \text{où } w_{\Delta}^{(r)}(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\tau}}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + f^{(r)} \quad (IV.31)$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)}$ et $\underline{\underline{\tau}}^{(r)}$ mais aussi l'énergie $f^{(r)}$ sont uniformes par morceaux et définis par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} &= \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \left[\underline{\underline{I}} - \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} \right] \\ &\quad + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\beta}^{(r)} : \left[\underline{\underline{I}} - \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\beta}^{(r)} \right] \\ &\quad + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\gamma}^{(r)} : \left[\underline{\underline{I}} - \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\gamma}^{(r)} \right] + \dots \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\Delta}^{(r)} \end{aligned} \quad (IV.32)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}^{(r)} &= -\frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)} \\ &\quad - \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)} \\ &\quad - \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)} - \dots \end{aligned} \quad (IV.33)$$

$$\begin{aligned}
f^{(r)} = & \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(r)} : \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)} : \underline{\underline{\beta}}_n^{(r)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_{\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\gamma\gamma}^{(r)} : \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)} : \underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)} + \dots
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

On notera que la généralisation des développements effectués pour une variable interne au cas de plusieurs variables internes est bien entendu facilitée par l'hypothèse de découplage des processus visqueux conduisant à l'additivité de la forme (IV.21). Cette additivité entraîne aussi l'« analogie » des équations résultantes (formes (IV.25) à (IV.34)) avec celles du chapitre (II) (formes (II.23) à (II.31)), à ceci près que des tenseurs d'ordre 4 sont désormais impliqués en raison de la relaxation des hypothèses d'isotropie des phases d'une part et de la nature déviatorique des variables internes d'autre part. En considérant une seule variable $\underline{\underline{\alpha}}$ déviatorique et des phases isotropes, nous retompons sur la formulation originale de la **PARTIE 1**.

IV.F. Résolution du problème auxiliaire thermoélastique

Les relations de type (IV.27) et (IV.28) font appel aux premiers et seconds moments par phase des variables internes qui doivent être calculés à partir des premier et second moments du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ solution de (IV.31). La résolution du problème auxiliaire thermoélastique se fait de manière analogue au paragraphe (II.F). La différence se trouve dans l'estimation du second moment de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, qui ici, n'implique plus la seule partie déviatorique puisque la ou les variables internes considérées ne sont plus de nature déviatorique. De plus, la dérivation (II.33) doit être remplacée par la dérivation de l'énergie effective du composite thermoélastique cette fois par le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\Delta}^{(r)}$, défini à l'équation (IV.32) :

$$\underline{\underline{\langle \varepsilon \otimes \varepsilon \rangle_r}} = \frac{2}{c_r} \frac{\partial \check{W}_{\Delta}}{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\Delta}^{(r)}} (\underline{\underline{E}}) \tag{IV.35}$$

Le calcul de ce tenseur d'ordre 4 est réalisé numériquement.

V. Application de l'approche incrémentale pour différentes lois viscoélastiques locales

La généralisation de l'approche incrémentale réalisée dans le chapitre précédent (IV) à de multiples variables internes non nécessairement déviatoriques permet d'envisager son application dans le cas où la viscoélasticité linéaire des phases diffère de celle étudiée dans la **PARTIE 1**. Dans ce chapitre, l'intérêt est porté sur différentes situations de complexité croissante. En revanche, dans l'ensemble de ce chapitre, les deux phases resteront isotropes.

La première hypothèse ayant été relaxée dans cette partie (paragraphe (IV.C)) par rapport aux travaux de Lahellec et Suquet (2007a) est celle portant sur le caractère uniquement déviatorique de la variable interne. Nous envisageons donc dans le premier paragraphe (V.A) de ce chapitre que la matrice du composite est toujours décrite par une seule variable interne mais cette fois dotée d'une partie sphérique. Cela autorise l'évolution temporelle du module de compressibilité.

Dans l'ensemble des cas traités jusqu'à maintenant, la fibre était considérée comme élastique. Nous allons donc traiter le cas où les deux phases sont viscoélastiques au paragraphe (V.B), avec leur variable interne respective uniquement déviatorique ou aussi dotée d'une partie sphérique.

Les modèles rhéologiques traités dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) impliquent une seule variable interne. Grâce à la généralisation opérée dans le cadre des présents travaux, nous passons au paragraphe (V.C) à un modèle de Maxwell généralisé réputé offrir une meilleure description de l'évolution temporelle des propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique.

Dans l'ensemble de ce chapitre (V), la microstructure périodique présentée dans le paragraphe (III.B) est utilisée comme support. L'intérêt de ce choix réside tout d'abord dans le fait que nous disposons déjà du modèle EF nécessaire à l'obtention des solutions de référence. De plus, le schéma d'homogénéisation de Luciano et Barbero (1994) a déjà montré sa précision dans les cas traités à la **PARTIE 1**.

V.A. Modèle de Maxwell à variable interne non déviatorique

Jusqu'à maintenant, de par l'hypothèse d'une variable interne déviatorique, tous les calculs ont été réalisés à module de compressibilité constant, ce qui constitue une bonne approximation lorsque le temps caractéristique de son évolution dans le temps est très supérieur à celui du module de cisaillement. Néanmoins, certains matériaux présentent des temps caractéristiques semblables, ou proches, pour les deux modules. L'utilisation d'une variable interne comportant des parties sphérique et déviatorique devient alors nécessaire. C'est le cas traité dans ce paragraphe.

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas où le coefficient de Poisson du constituant viscoélastique reste constant au cours du temps, autrement dit, les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont égaux. Après avoir précisé les caractéristiques du problème étudié (propriétés des phases, trajet de chargement), nous suivons la même démarche que dans le paragraphe (III.B). Nous commençons par une étude de sensibilité au pas de calcul suivie de comparaisons aux solutions de référence (EF) : au niveau macroscopique, puis au niveau des réponses moyennes par phase et en termes de contraintes asymptotiques. Un regard est ensuite porté sur le second moment. Enfin, dans le paragraphe (V.A.5), l'influence du ratio entre les temps de relaxation en compressibilité et cisaillement sur la qualité des estimations est étudiée.

Toutes les solutions de référence utilisées ont été obtenues avec des maillages assurant leur fiabilité au sens défini au paragraphe (III.B).

V.A.1. Cas d'un coefficient de Poisson constant et chargement

La microstructure périodique à fibres longues du paragraphe (III.B) est considérée, la fibre est élastique linéaire isotrope et la matrice viscoélastique de type Maxwell décrite par une variable interne ici dotée de parties sphérique et déviatorique. La matrice est ainsi définie par les lois constitutives suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \end{cases} \quad (V.1)$$

avec

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} = 3 * k^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \mu^{(2)} * \underline{\underline{K}} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} = 3 * \omega_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \eta_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{K}} \quad (V.2)$$

On conserve les mêmes propriétés élastiques et le même coefficient de viscosité déviatorique qu'au paragraphe (III.B.1). On se place dans le cas où les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont égaux. Cela conduit à l'expression suivante du coefficient de viscosité sphérique :

$$\omega_{v\alpha}^{(2)} = \frac{k^{(2)}}{\mu^{(2)}} * \eta_{v\alpha}^{(2)} \quad (V.3)$$

Les propriétés des phases sont résumées dans le Tableau 17.

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)	Viscosité sphérique $\omega_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)	Viscosité déviatorique $\eta_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)
Fibre ($r = 1$)	222,2	166,6	x	x
Matrice ($r = 2$)	58,33	26,92	21,67	10

Tableau 17 : Propriétés mécaniques des phases. Cas d'une matrice viscoélastique linéaire à coefficient de Poisson constant dans le temps.

Le même chargement monotone en glissement simple est appliqué à la cellule de base et pour rappel, il est défini par :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * 5.10^{-3} * t \quad (V.4)$$

La durée totale du chargement est de $t_{max} = 10$ s, même si la plupart des résultats sont présentés pour une durée plus courte.

V.A.2. Réponses macroscopique et par phase

Un taux de fibres de 0,25 est d'abord retenu. La Figure 25 illustre la sensibilité au pas de calcul de la réponse macroscopique estimée, Σ_{yy} , avec l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994). Seulement cinq pas de temps sont représentés sur la figure parmi les sept valeurs testées (1 s – 0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01 s – 0,005 s – 0,001 s). Dans le Tableau 18, les écarts relatifs entre deux pas successifs sont quantifiés d'après la formule (III.9) décrite au paragraphe (III.B.3).

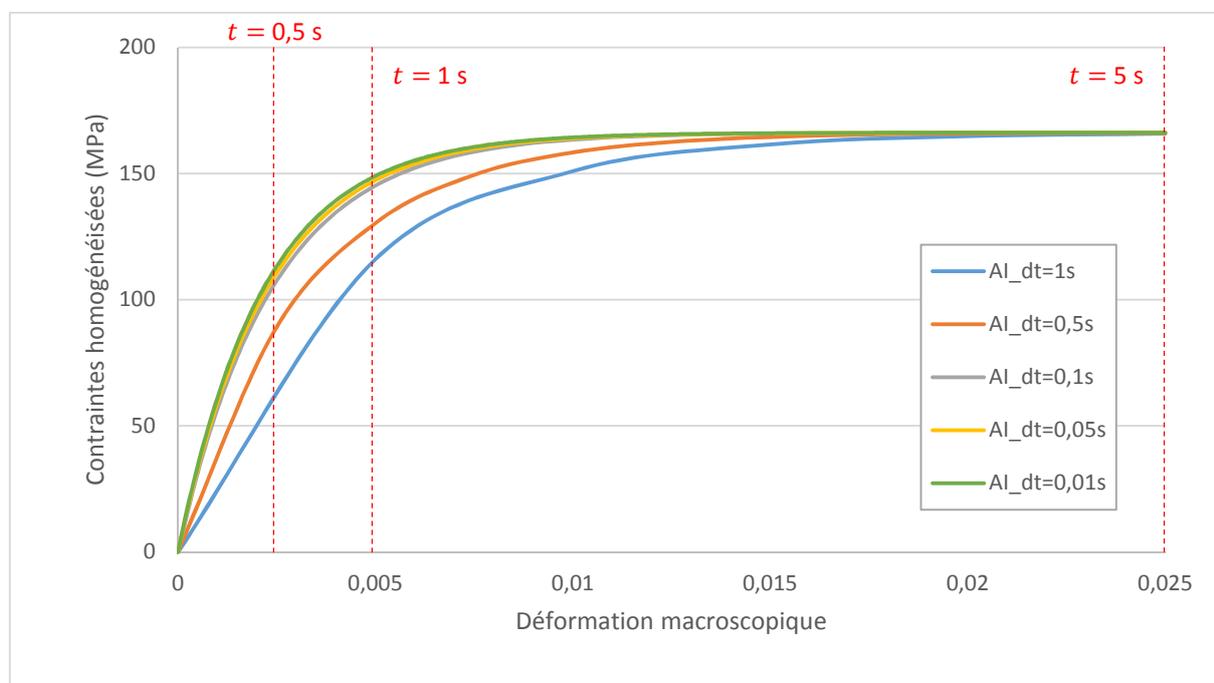


Figure 25 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (V.4). Microstructure périodique. Taux de fibre de 0,25. Coefficient de Poisson constant.

Les traits discontinus rouges verticaux représentent les temps auxquels nous présentons les résultats dans le Tableau 18. De même que dans la **PARTIE 1**, les deux premiers temps sont choisis dans la partie transitoire de la réponse et le dernier dans le domaine asymptotique. Néanmoins, le régime asymptotique étant atteint plus rapidement, les temps de comparaison sont différents de ceux du paragraphe (III.B.4).

	Couples ($dt^+ - dt^-$) en s					
	(1 - 0,5)	(0,5 - 0,1)	(0,1 - 0,05)	(0,05 - 0,01)	(0,01 - 0,005)	(0,005 - 0,001)
$t = 0,5$ s	x	3,41%	1,4%	0,47%	0,15%	0,05%
$t = 1$ s	5,51%	2,05%	0,72%	0,23%	0,08%	0,02%
$t = 5$ s	0,11%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 18 : Ecart relatifs des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de fibre de 0,25. Coefficient de Poisson constant.

Pour satisfaire le critère de convergence de la réponse macroscopique, établi au paragraphe (III.B.3), le pas de calcul le mieux adapté est $dt = 0,01$ s. La même étude de sensibilité au niveau des moyennes par phase a été réalisée et donne le même résultat.

Par ailleurs, le temps CPU pour simuler l'intégralité du chargement jusqu'à 10 s est de 17 s avec un pas de 0,05 s et de 43 s avec celui de 0,01 s, donnant respectivement un temps CPU moyen par point de 0,085 s et 0,043 s. On constate que les temps CPU sont équivalents à ceux obtenus au paragraphe (III.B.4) dans le cas d'un module de compressibilité constant.

Sur la Figure 26, les réponses macroscopique (bleue) et moyennes par phase (orange et verte) estimées par l'approche incrémentale (lignes continues) sont confrontées aux solutions de référence obtenues par la méthode des éléments finis (carrés). Par ailleurs, nous traçons pour comparaison en pointillés bleus la réponse homogénéisée obtenue pour un module de compressibilité constant au paragraphe (III.B.4).

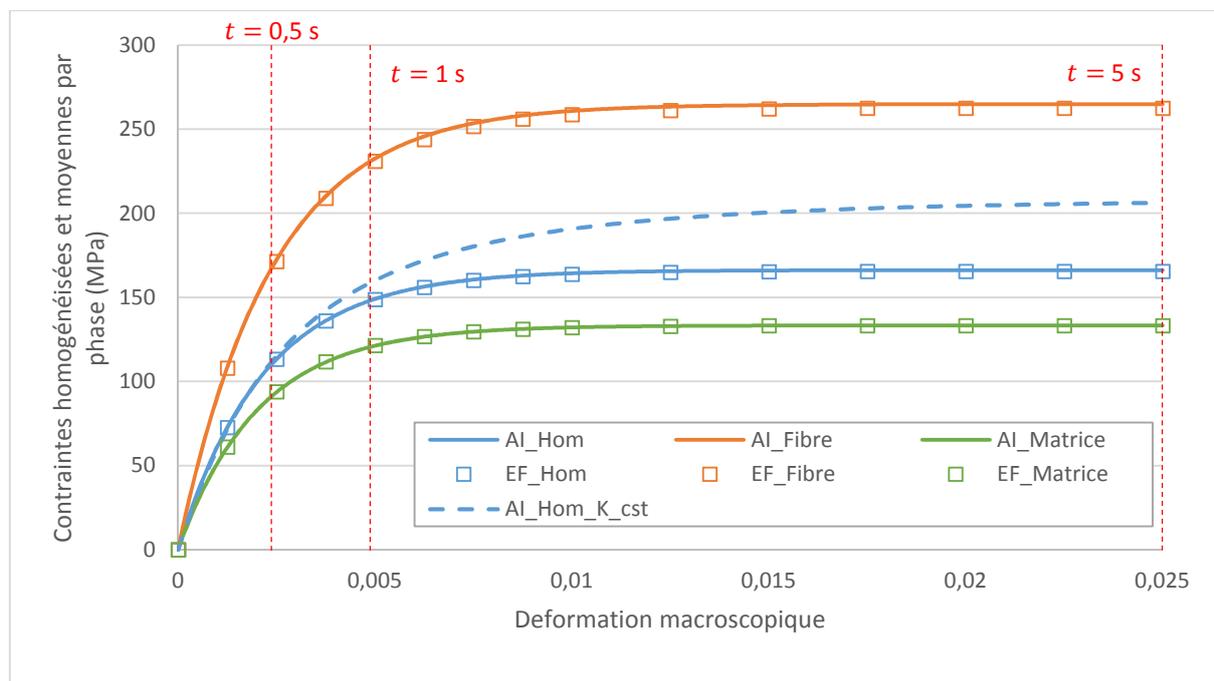


Figure 26 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Coefficient de Poisson constant. La réponse homogénéisée pour un module de compressibilité constant (K_{cst}) dans la matrice est reportée pour comparaison.

Dans le Tableau 11, les erreurs relatives sont quantifiées, aux mêmes temps/déformations macroscopiques que lors de l'étude de sensibilité au pas de calcul, présentée dans le Tableau 18.

	Composite	Matrice	Fibre
$t = 0,5 \text{ s}$	0,14%	0,5%	0,43%
$t = 1 \text{ s}$	0,15%	0,22%	0,62%
$t = 5 \text{ s}$	0,34%	0,01%	0,86%

Tableau 19 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisée et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF).

En comparant avec les résultats de la **PARTIE 1** (cf. Tableau 11) pour ce taux de fibres, nous avons des estimations de précision comparable. Toutefois, une différence apparaît avec ici une diminution de l'erreur relative dans la matrice au cours du temps.

V.A.3. Influence du taux de fibres sur la qualité d'estimation des réponses asymptotiques

Comme dans la **PARTIE 1**, on s'intéresse à la prédiction des contraintes asymptotiques Σ_{yy}^{∞} avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) couplé à l'AI pour différents taux de fibres et on compare avec les EF. Les contraintes asymptotiques sont déterminées à partir du critère défini au paragraphe (III.B.3). Nous avons mis en évidence à plusieurs reprises que les valeurs des contraintes asymptotiques ne sont pas modifiées par le pas de calcul, ainsi nous reprenons un pas de 0,05 s afin de garder exactement les mêmes paramètres que dans le paragraphe (III.B.5). Sur la Figure 27, les estimations des contraintes asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase sont confrontées aux solutions de référence. Cette confrontation est représentée pour des fractions volumiques de fibres comprises entre 0 et 0,5. Les valeurs sont normalisées par $2\eta^{(2)}\dot{E}_{yy}$ correspondant à la contrainte dans la matrice pure (sans fibre) dans les mêmes conditions de chargement. Enfin, les contraintes asymptotiques macroscopiques obtenues au paragraphe (III.B.4), sont reportées en pointillés pour comparaison.

Dans le Tableau 20, les erreurs relatives entre les estimations et les solutions de référence, ainsi que les temps à 98% tels que définis au paragraphe (III.B.3), sont présentés. Nous ajoutons aussi l'écart relatif, noté Δ_{K-Nu} , entre les contraintes asymptotiques obtenues à module de compressibilité constant et à coefficient de Poisson constant.

En comparant les lignes bleues continue et pointillée, on observe que la valeur asymptotique macroscopique avec un coefficient de Poisson constant est inférieure à celle obtenue avec un coefficient de compressibilité constant. Cet effet est d'autant plus marqué avec l'augmentation du taux de fibres. Une telle différence est liée à la diminution du module compressibilité de la matrice qui abaisse la quantité d'énergie emmagasinée dans le V.E.R.

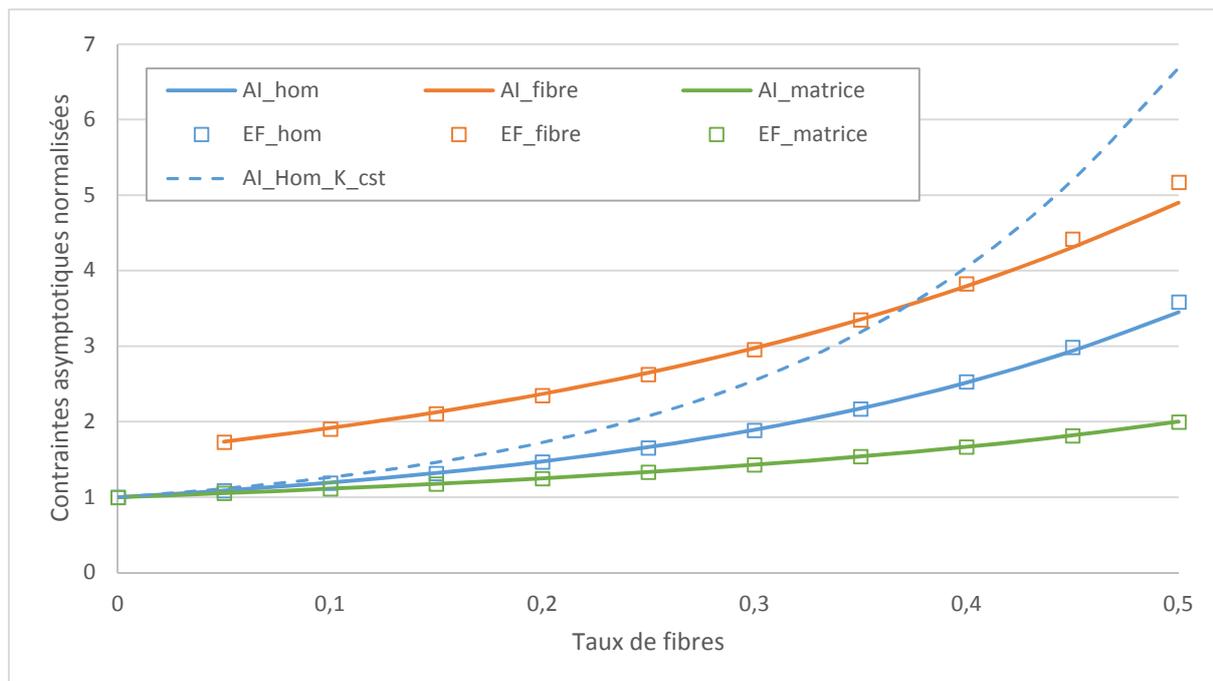


Figure 27 : Contraintes asymptotiques normalisées macroscopiques et moyennes par phase en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Coefficient de Poisson constant. Les valeurs macroscopiques estimées pour un module de compressibilité constant (K_{cst}) sont reportées pour comparaison.

c_1	Composite			Fibre			Matrice		
	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}(s)$	Δ_{K-NU}	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}(s)$	Δ_{K-NU}	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}(s)$	Δ_{K-NU}
0,05	0,01%	1,6	3,2%	0,27%	1,75	25,8%	0,04%	1,6	0,56%
0,1	0,10%	1,65	6,4%	0,71%	1,8	28,3%	0,02%	1,6	0,54%
0,15	0,20%	1,7	10,3%	0,85%	1,8	31,4%	0,02%	1,65	0,53%
0,2	0,29%	1,75	14,9%	0,88%	1,9	34,8%	0,01%	1,7	0,53%
0,25	0,33%	1,85	20,1%	0,80%	1,95	38,5%	0,01%	1,75	0,53%
0,3	0,30%	1,9	26%	0,58%	2,05	42,5%	0,01%	1,8	0,51%
0,35	0,05%	2	32,4%	0,05%	2,1	46,9%	0,00%	1,9	0,52%
0,4	0,49%	2,15	39,3%	0,87%	2,25	51,7%	0,03%	2	0,5%
0,45	1,64%	2,25	46,7%	2,53%	2,35	57%	0,05%	2,1	0,49%
0,5	3,77%	2,4	54,6%	5,30%	2,5	62,8%	0,06%	2,25	0,49%

Tableau 20 : Ecart relatifs entre les contraintes asymptotiques estimées par l'AI et les solutions EF, valeurs des temps à 98%, comparaison avec le cas à module de compressibilité constant, aux échelles macroscopique et microscopique en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique. Coefficient de Poisson constant.

Les contraintes asymptotiques moyennes dans la matrice sont estimées avec une excellente précision (erreur maximale de 0,06%), encore meilleure que celle obtenue pour un module de compressibilité constant (cf. Tableau 12). De même, les valeurs homogénéisées et moyennes dans la fibre sont mieux estimées que dans le cas précédent. En effet, jusqu'à un taux de fibres de 0,4, l'erreur est toujours en dessous de 0,5% (resp. 1%) et monte seulement à 3,8% (resp. 5,3%) pour les contraintes homogénéisées (resp. moyennes dans la fibre). Dans le cas d'une matrice à compressibilité constante, cette erreur montait jusqu'à 11,9% (resp. 13,7%). En revanche, si l'écart dans la matrice reste stable avec l'augmentation du taux de fibres, les évolutions des écarts pour le composite et la fibre ne sont pas analogues à ce qui avait été obtenu à module de compressibilité constant.

Comparativement au cas à compressibilité constante (cf. Tableau 12) dans la **PARTIE 1**, les valeurs asymptotiques sont plus rapidement atteintes et ce, aux deux échelles. Le fait que les deux modules évoluent vers 0 avec le temps est en accord avec cette observation.

Enfin, en ce qui concerne les valeurs des contraintes elles-mêmes, celles dans la matrice n'ont pas changé ($\Delta_{K-Nu} \approx 0,5\%$), tandis que celles dans la fibre, et a fortiori dans le composite, sont amoindries par rapport au cas à compressibilité constante. Bien que, dans ce cas, le contraste à l'instant final en termes de modules de compressibilité soit plus important que dans le cas du paragraphe (III.B.5), les estimations sont meilleures. Il apparaît en regardant les équations du schéma d'homogénéisation de Luciano et Barbero (1994) que lorsque le coefficient de Poisson tend vers 0,5 (cas à compressibilité constante), des termes tendent alors vers 0 (cf. Annexe A.1), ce qui génère plus facilement des erreurs dans le calcul du tenseur homogénéisé.

V.A.4. Terme diagonal du second moment

Pour expliquer, en partie, que l'estimation est plus proche de la solution de référence pour ce comportement (coefficient de Poisson constant) que dans le paragraphe (III.B) avec le module de compressibilité constant, nous nous intéressons à un coefficient caractéristique du second moment dans la matrice (terme d'indice 2222) au cours de ce chargement déviatorique pour un taux de fibres de 0,5, cas où l'erreur relative est la plus importante (cf. Tableau 20). Sur la Figure 28, ce coefficient estimé (AI) et celui de référence (EF) sont tracés dans les cas où le module de compressibilité (K_{cst}) et le coefficient de Poisson (Nu_{cst}) restent constants.

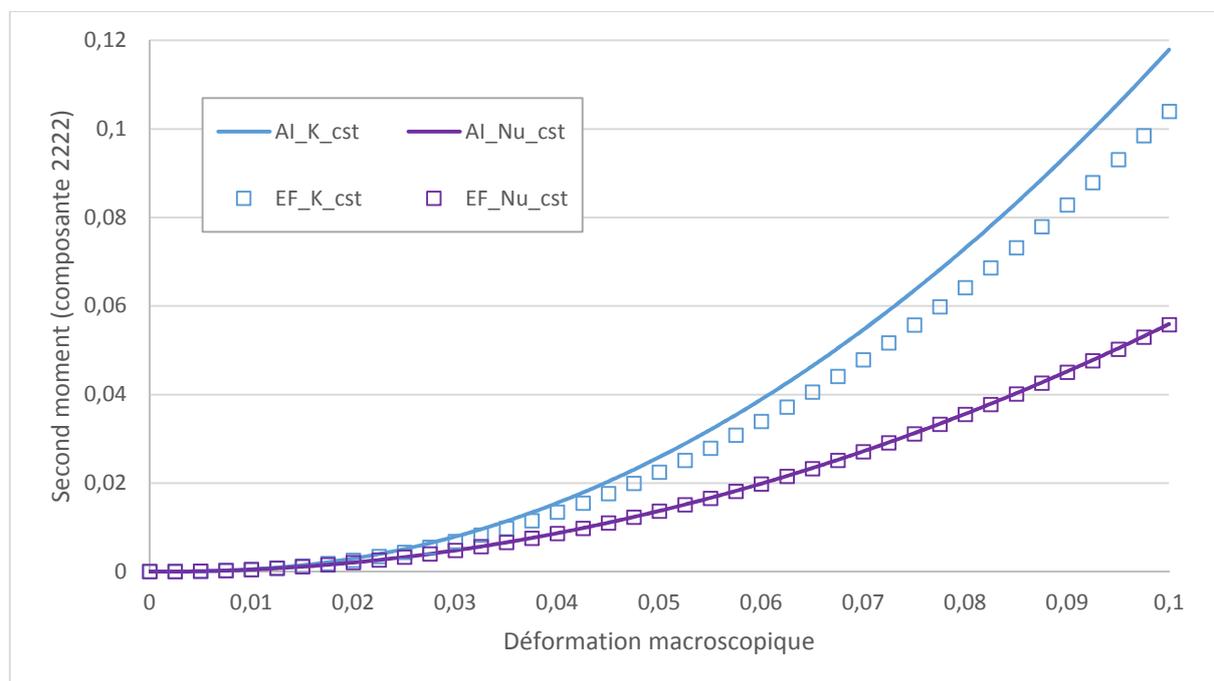


Figure 28 : Comparaison entre l'approche incrémentale (AI) et la solution exacte (EF) de la composante 2222 du second moment. Module de compressibilité de la matrice constant (K_{cst}) ou coefficient de Poisson de la matrice constant (Nu_{Cst}). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,5.

On observe bien que dans le cas à compressibilité constante (bleu), l'estimation s'éloigne des solutions de référence avec le temps. Dans le cas où le coefficient de Poisson est constant (violet), l'estimation reste proche de la solution de référence avec une erreur relative en dessous de 0,5%. Cela explique, en partie, la meilleure estimation de la contrainte asymptotique dans ce cas.

V.A.5. Pour aller un peu plus loin : effet des temps caractéristiques

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré un coefficient de Poisson constant dans le temps pour la matrice. Ceci est possible en affectant le même temps caractéristique aux deux modules – de compressibilité et de cisaillement – définissant la matrice viscoélastique. Il est aussi possible qu'un matériau soit défini par des temps caractéristiques différents pour chacune de ses réponses sphérique et déviatorique. Nous regardons donc l'influence du ratio entre les deux temps caractéristiques sur la qualité d'estimation de la contrainte asymptotique macroscopique. Un taux de fibres de 0,25 est choisi à titre d'exemple.

Nous repartons des propriétés définies dans le Tableau 17 et nous appliquons un coefficient multiplicatif au coefficient de viscosité sphérique $\omega_{v\alpha}^{(2)}$ de la matrice compris dans l'intervalle [0,001 ; 1000]. Cette plage est assez large afin de tendre vers deux cas limites spécifiques. Lorsque la valeur est grande, le comportement de la matrice tend vers celui d'un matériau dont le module de compressibilité est quasi-constant sur la durée du chargement simulée (comparativement au module de cisaillement), on se rapproche du cas analysé dans le paragraphe (III.B.4). Dans le cas contraire, nous avons une compressibilité quasi-nulle dès les premiers instants. Physiquement, cela se traduit par un coefficient de Poisson du constituant valant -1, ce qui est possible pour les matériaux ayant la propriété d'auxétisme, bien que ce type de matériau ne se rencontre que peu dans la vraie vie. Sur la Figure 29, la contrainte asymptotique estimée avec l'approche incrémentale (AI) et la solution calculée par la méthode des éléments finis (EF) sont tracées en fonction du ratio des temps caractéristiques sphérique et déviatorique. Dans tous les cas où la solution de référence est calculée, on observe une très bonne estimation des valeurs asymptotiques homogénéisées (erreur relative maximale de 0,5%).

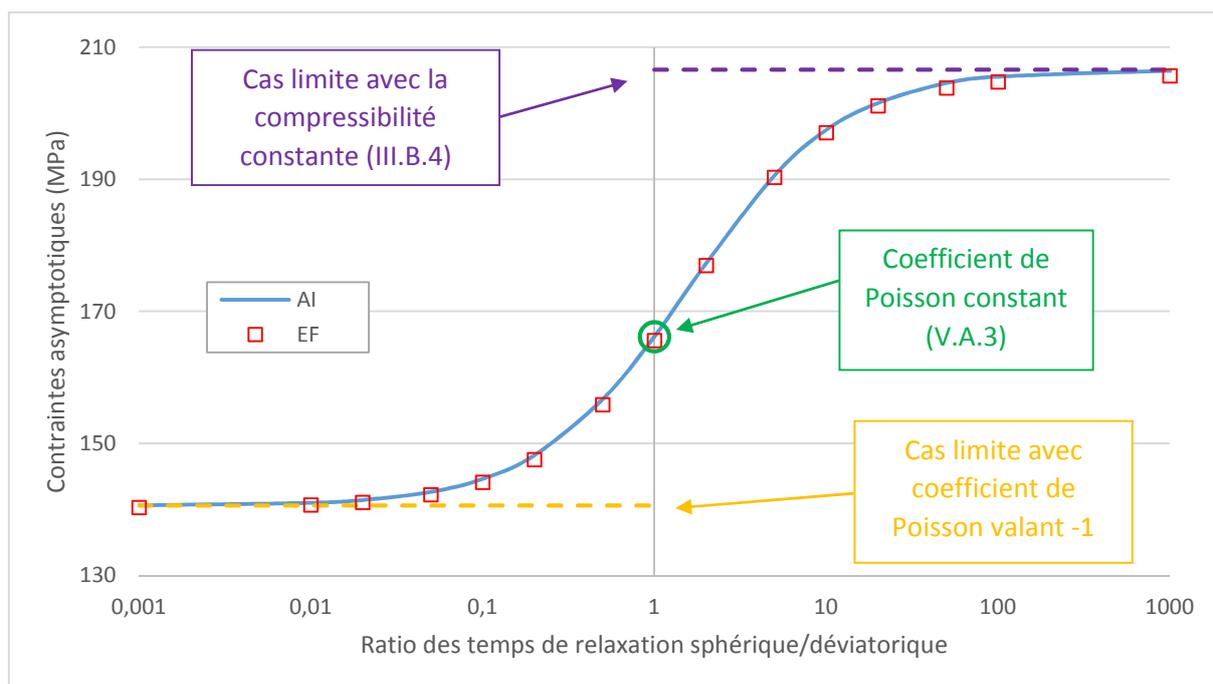


Figure 29 : Contraintes asymptotiques estimées en fonction du ratio des temps caractéristiques. Comparaison aux solutions de référence (EF). Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25.

V.A.6. Bilan

Ce paragraphe avait pour but de tester l'approche incrémentale dans le cas où la matrice du composite périodique étudié est décrite par un modèle viscoélastique linéaire toujours à une variable interne mais cette fois non nécessairement déviatorique, c'est-à-dire impliquant une partie sphérique. Le module de compressibilité n'était donc plus constant dans le temps contrairement à l'analyse effectuée dans la **PARTIE 1**. L'AI a été utilisée avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire et les réponses estimées confrontées aux solutions de référence obtenues par EF pour un chargement monotone de glissement simple.

- Lorsque le coefficient de Poisson est constant, i.e. que les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont identiques, les estimations apparaissent excellentes aux deux échelles avec un niveau de précision meilleur que lorsque le module de compressibilité de la matrice était constant. Cela reste vrai pour la majorité des taux de fibres étudiés allant jusqu'à 0,5.
- La qualité des estimations reste tout à fait remarquable lorsque l'on envisage de relaxer l'hypothèse de coefficient de Poisson constant dans la matrice, et ce pour une multitude de ratios de temps caractéristiques (au moins pour le chargement et le taux de fibres de 0,25 considérés).
- On montre ainsi un premier potentiel d'ouverture de l'AI qui reste efficace en présence d'une déformation volumique anélastique.

V.B. Les deux phases viscoélastiques

Dans les cas étudiés en amont et dans l'article de Lahellec et Suquet (2007a), la fibre de la microstructure périodique considérée était supposée élastique et la matrice viscoélastique linéaire. Nous avons principalement travaillé sur les propriétés visqueuses de cette dernière afin de cerner les possibilités d'utilisation de l'approche incrémentale. Néanmoins, dans certains matériaux, la fibre peut, elle aussi, présenter un comportement viscoélastique. D'un point de vue théorique, l'approche incrémentale telle que proposée initialement par Lahellec et Suquet (2007a), ou dans le chapitre (IV) sous une forme étendue, autorise la viscoélasticité des deux phases. Les travaux de Lahellec et Suquet (2007b,c) consacrés aux extensions non linéaires de l'Al ont concrètement illustré la possibilité de considérer les deux phases viscoélastiques (linéaires ou non d'ailleurs) sur l'exemple d'un assemblage de cylindres d'Hashin. Notre objectif est ici d'illustrer cette possibilité dans le cas de la microstructure périodique en considérant pour chaque phase tout d'abord une variable interne déviatorique, puis dotée d'une partie sphérique et d'approfondir dans le premier cas l'évaluation des estimations pour différentes viscosités attribuées à la fibre. On conserve un taux de fibres de 0,25 de même que le schéma de Luciano et Barbero (1994) pour la résolution du problème auxiliaire.

Après avoir spécifié les propriétés viscoélastiques des deux phases et le chargement retenu, on présentera les réponses globale et par phase et on terminera par une étude de l'effet de la viscosité de la fibre sur la qualité d'estimation.

V.B.1. Propriétés des phases et chargement

La fibre et la matrice sont considérées viscoélastiques de type Maxwell (une variable interne par phase). A titre d'expérimentation numérique, nous considérons deux situations. Les propriétés mécaniques correspondantes des phases sont regroupées dans le Tableau 21. Dans le premier cas, les variables internes des deux phases sont de nature purement déviatorique (pas de déformation volumique anélastique) et par suite les modules de compressibilité sont constants dans le temps. Les propriétés de la matrice sont les mêmes que celles des travaux de Lahellec et Suquet (2007a) et les modules instantanés de la fibre possèdent les valeurs auparavant prises dans le cas purement élastique. Ainsi, la seule différence par rapport aux propriétés consignées dans le Tableau 3 du paragraphe (III.B.1) réside dans l'ajout d'un coefficient de viscosité déviatorique pour la fibre, choisi douze fois supérieur à celui de la matrice. Dans le second cas, les variables internes des deux phases ne sont plus uniquement déviatoriques. Ceci constitue un apport par rapport à l'illustration réalisée en viscoélasticité linéaire dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007b,c). Les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont néanmoins identiques pour chacune des phases, conduisant à un coefficient de Poisson constant pour chacune. Les valeurs attribuées aux modules instantanés et aux coefficients de viscosité déviatorique des deux phases sont identiques à celles du cas précédent. La différence réside ainsi dans l'ajout d'un coefficient de viscosité sphérique pour les deux phases, calculé selon la relation (V.3) pour la matrice et d'une façon similaire pour la fibre. On notera que les propriétés de la matrice dans ce second cas sont analogues à celles consignées dans le Tableau 17 du paragraphe (IV.A).

		Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)	Viscosité sphérique $\omega_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)	Viscosité déviatorique $\eta_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)
Compressibilité constante	Fibre (1)	222,2	166,6	x	120
	Matrice (2)	58,33	26,92	x	10
Coef. Poisson constant	Fibre (1)	222,2	166,6	160,05	120
	Matrice (2)	58,33	26,92	21,67	10

Tableau 21 : Propriétés des deux phases viscoélastiques.

Nous conservons le chargement monotone en glissement simple comme défini par la formule (V.4). Le temps total de simulation est de $t_{max} = 10$ s. Néanmoins, à la vue des résultats, la présentation des courbes est raccourcie afin de ne pas avoir une partie asymptotique trop dominante.

Comme pour tous les calculs jusqu'à maintenant et pour les deux situations précédentes, une étude sur la sensibilité au pas de calcul a été réalisée. Bien que les résultats ne soient pas reportés, l'analyse montre qu'un pas de temps $dt = 0,01$ s est ici suffisant pour satisfaire le critère du paragraphe (III.B.3). On précise que la convergence du modèle en EF n'a pas été étudiée en détail faute de temps. Le même maillage que celui du paragraphe (III.B.2) a été considéré.

V.B.2. Réponses homogénéisées et moyennes par phase

Sur les Figure 30 et Figure 31, les réponses macroscopiques (bleues) et moyennes par phase (orange et vertes) estimées par l'approche incrémentale (lignes continues) sont confrontées aux solutions de référence obtenues par la méthode des Éléments Finis (carrés). Dans le Tableau 22, nous regroupons les écarts relatifs obtenus aux deux échelles.

	Compressibilité constante (Figure 30)			Coefficient de Poisson constant (Figure 31)		
	Composite	Fibre	Matrice	Composite	Fibre	Matrice
$t = 0,5$ s	0,13%	0,75%	0,73%	0,26%	0,38%	0,65%
$t = 1$ s	0,09%	0,65%	0,34%	0,02%	0,53%	0,3%
$t = 5$ s	0,07%	0,28%	0,16%	0,12%	0,57%	0,17%

Tableau 22 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisé et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibre 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante ou à coefficients de Poisson constants.

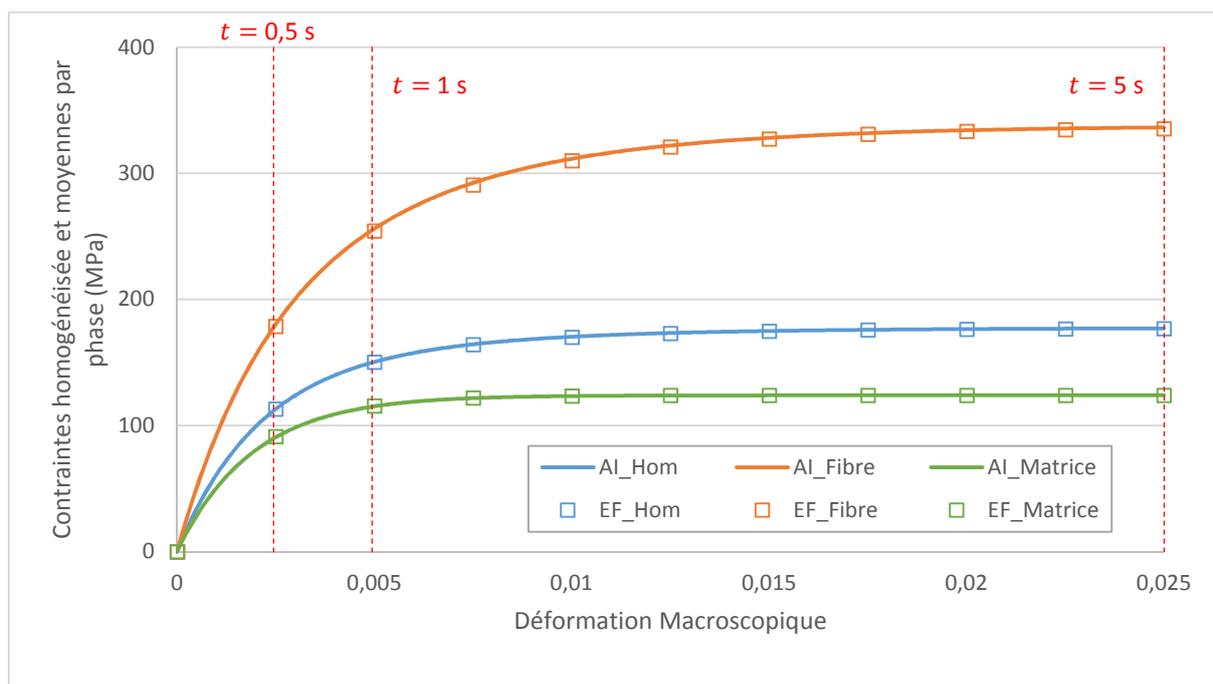


Figure 30 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante.

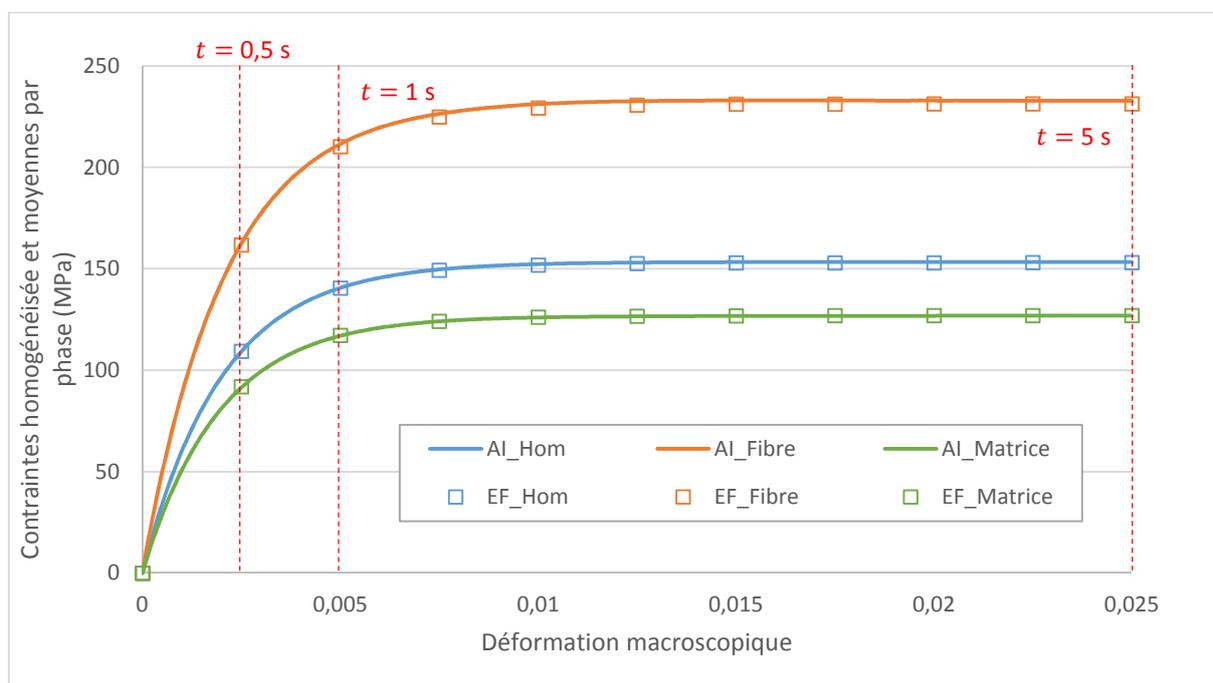


Figure 31 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à coefficients de Poisson constants.

Contrairement à ce qu'il se passait dans les cas avec une fibre élastique, où l'erreur relative augmentait au cours du temps (voir Tableau 11, paragraphe (III.B.5) dans le cas à compressibilité constante ou Tableau 19 du paragraphe (V.A.2) dans le cas à coefficient de Poisson constant), nous avons ici une évolution différente. En effet, il semble que plus le temps passe, plus l'erreur diminue. Comme présenté sur la Figure 32, cette diminution est liée à la relaxation des champs de contraintes qui tendent vers un état plus homogène dans les deux phases. Quoi qu'il en soit, les erreurs demeurent inférieures à 1% aux deux échelles et confirment l'habileté de l'approche à traiter deux phases viscoélastiques.

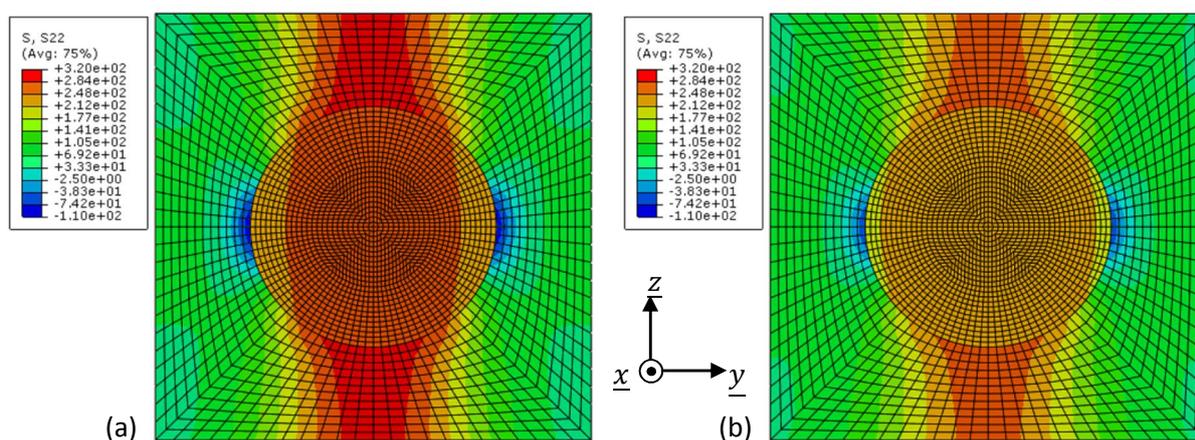


Figure 32 : Comparaison du champ de contraintes dans la direction \underline{y} à $t = 8$ s dans le modèle éléments finis.
(a) fibre élastique (b) fibre viscoélastique à coefficient de Poisson constant.

Il est à noter que le temps CPU est ici environ trois à quatre fois supérieur à celui requis dans le cas où la fibre est élastique. Nous verrons au paragraphe (V.C) que l'ajout de variables internes pour décrire la viscoélasticité de la matrice entraîne l'augmentation du temps de calcul, mais de manière proportionnelle au nombre de variables internes introduites. Ici, nous multiplions seulement par deux le nombre total de variables internes, et bien plus le CPU.

V.B.3. Influence de la viscosité de la fibre

Nous avons illustré dans le paragraphe (III.C.2.b), dans le cas d'une fibre élastique, la forte influence de la viscosité de la matrice sur la valeur de la contrainte asymptotique. Nous nous plaçons dans le cas où la compressibilité des deux phases est constante et nous nous intéressons cette fois à l'impact de la viscosité de la fibre en gardant fixe la viscosité déviatorique de la matrice (les propriétés de la matrice sont donc celles du tableau 3 du paragraphe III.B.1).

Sur la Figure 33, nous traçons les valeurs des contraintes homogénéisées et moyennes par phase à $t = 5$ s pour différentes valeurs de viscosité de la fibre. Nous observons que pour les différentes valeurs de viscosité considérées, les estimations et les solutions de référence coïncident de manière excellente, au niveau macroscopique comme au niveau microscopique. L'erreur maximale relative au niveau macroscopique, tout comme dans la matrice, est de l'ordre de 1%. Dans la fibre, les erreurs sont inférieures à 1%, pour les cas avec une viscosité importante, mais grandissent avec la diminution de celle-ci. Néanmoins, à faible viscosité, la valeur de la contrainte moyenne dans la fibre est négligeable devant celle de la matrice ce qui limite l'erreur au niveau macroscopique. On précise par

ailleurs que par manque de temps, les erreurs au cours du chargement n'ont pas été étudiées avec précision pour chaque valeur de viscosité de la fibre.

La forme de la courbe bleue révèle la présence d'asymptotes aux très grandes et très petites valeurs de viscosité de la fibre.

- Celle de droite qui tend vers le cas limite représenté par la ligne discontinue violette correspond au cas où la fibre est élastique, comme dans le paragraphe (III.B.4). En effet, lorsque la viscosité tend vers une valeur très grande, le temps de relaxation tend aussi vers une valeur élevée. Les propriétés mécaniques évoluent très lentement dans le temps et restent quasiment égales aux propriétés instantanées jusqu'à une valeur de $t = 5$ s, correspondant alors à une fibre quasi-élastique.
- La deuxième asymptote (jaune), quant à elle, correspond à la valeur obtenue lorsque la fibre est assimilée à une porosité comme dans le paragraphe (III.C.1). En effet, lorsque la viscosité est très faible, le temps caractéristique est petit et les propriétés mécaniques de la fibre tendent rapidement vers des valeurs négligeables devant celles de la matrice, ce qui correspond au cas du matériau poreux.

Les mêmes asymptotes (non tracées ici) sont trouvées pour les contraintes moyennes par phase.

Lorsque la viscosité de la fibre vaut 120 GPa.s, les propriétés des phases sont celles du Tableau 21 (configuration à compressibilité constante). On retrouve alors la valeur de la contrainte homogénéisée obtenue à $t = 5$ s sur la Figure 30.

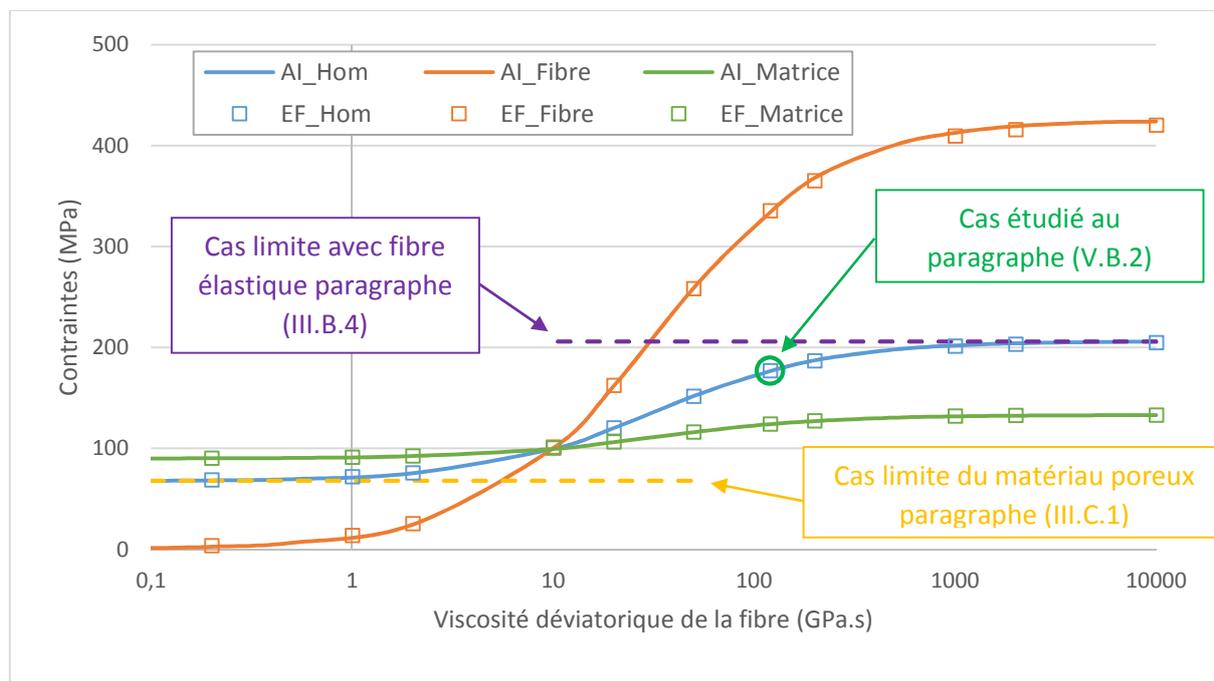


Figure 33 : Contraintes homogénéisées et moyennes par phase à $t = 5$ s en fonction de la viscosité déviatorique de la fibre. Comparaison entre l'Al et les EF. Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple. Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante.

Par ailleurs, nous devons souligner que la viscosité de la fibre a beaucoup moins d'influence sur la contrainte asymptotique homogénéisée que celle de la matrice. En effet, dans le paragraphe (III.C.2.b),

nous avons vu que la valeur à long terme de la contrainte est linéairement dépendante de la viscosité de la matrice. Ici, les asymptotes montrent que la valeur homogénéisée n'est modifiée que d'un rapport 3 sur la gamme de viscosité de fibre considérée.

Le même type de courbes serait obtenu pour une étude avec les deux phases viscoélastiques à coefficients de Poisson constants.

V.B.4. Bilan

Dans ce paragraphe, on a testé l'efficacité de l'AI dans le cas où les deux phases de la microstructure périodique étudiée sont viscoélastiques, ce qui marque un pas de plus par rapport aux applications envisagées jusqu'à présent avec des fibres élastiques. L'étude a été réalisée en affectant aux deux phases une loi de type Maxwell et en considérant deux cas distincts, celui où les phases ont une compressibilité constante et celui où elles ont un coefficient de Poisson constant. Dans le premier cas, une analyse a par ailleurs été effectuée sur l'effet (toutes propriétés égales par ailleurs) de la viscosité de la fibre.

- Dans les deux cas (compressibilité constante et coefficient de Poisson constant), les estimations des réponses homogénéisées et moyennes par phase sont de très bonne qualité avec des erreurs inférieures à 1% (pour le chargement de glissement simple étudié et les propriétés retenues).
- Les résultats pour différentes valeurs de viscosité de la fibre restent excellents et permettent de retrouver logiquement deux cas limites auparavant étudiés dans ce manuscrit : à très forte viscosité celui où la fibre est élastique (III.B.4) et à très faible viscosité, celui où elle correspond à un vide (III.C.1).
- Même si la formulation étendue de l'AI au cas de variables internes non déviatoriques incorpore à la source des phases toutes viscoélastiques, on illustre ici de manière concrète la faisabilité de la résolution dans ce cas, et la qualité des estimations résultantes.

V.C. Modèle de Maxwell généralisé

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer l'extension de l'approche incrémentale à plusieurs variables internes (et du codage sous-jacent) opérée au chapitre (IV). En plus d'être très largement utilisé pour augmenter le domaine de validité temporel (ou fréquentiel) du modèle utilisé jusqu'à présent, le modèle de Maxwell généralisé s'avère le candidat idéal pour cette évaluation dans la mesure où il s'inscrit dans le formalisme adopté pour la description des constituants. Les variables internes correspondantes sont dotées de parties sphériques et déviatoriques. Ce modèle présente par ailleurs l'avantage d'être disponible dans Abaqus® (formulation sous forme de séries de Prony). Le modèle de Maxwell généralisé est ici affecté à la matrice de la microstructure périodique étudiée jusqu'à présent, alors que la fibre est élastique linéaire isotrope. Le taux de fibres est fixé à 0,25. On conserve le schéma de Luciano et Barbero (1994) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire.

Dans le paragraphe (V.C.1), un rappel du modèle de Maxwell généralisé est réalisé. Puis, comme dans toute démarche scientifique, nous commençons par un cas simple, où seules deux variables internes

sont considérées (V.C.2). Les temps de relaxation sont pris d'abord assez proches, puis éloignés. Enfin (V.C.3), le cas du modèle à trois variables internes, est étudié.

Les solutions de référence utilisées ont été obtenues avec des maillages assurant leur fiabilité au sens défini au paragraphe (III.B.2).

V.C.1. Rappel du modèle de Maxwell généralisé et chargement étudié

Le modèle de Maxwell généralisé consiste à associer en parallèle N branches de type Maxwell. La Figure 34 en fournit une représentation schématique. Le potentiel thermodynamique et le potentiel de dissipation correspondants sont donnés par :

$$\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}_1, \dots, \underline{\underline{\alpha}}_N) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_\infty : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}_k) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_k : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}_k) \quad (V.5)$$

$$\varphi(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}_1, \dots, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_k : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vk} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_k \quad (V.6)$$

Les lois constitutives en découlent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_\infty : \underline{\underline{\varepsilon}} + \sum_{k=1}^N \underline{\underline{\mathcal{L}}}_k : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}_k) \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_k : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}_k) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vk} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, N \end{cases} \quad (V.7)$$

On considèrera par simplicité que les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont identiques, conduisant à un coefficient de Poisson constant dans le temps. Cette simplification a été introduite pour des facilités de programmation mais ne constitue en aucun cas une limitation de l'approche incrémentale.

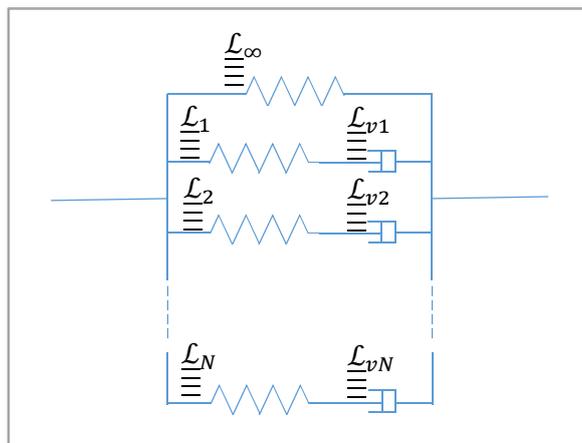


Figure 34 : Représentation schématique du modèle de Maxwell généralisé.

Dans ce qui suit, la matrice du composite périodique étudié est décrite par le modèle de Maxwell généralisé ci-dessus avec des propriétés ajustées selon le paragraphe. La fibre est élastique linéaire isotrope avec les mêmes propriétés que précédemment, soit :

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (GPa)
Fibre ($r = 1$)	222,2	166,6

Tableau 23 : Propriétés élastiques de la fibre.

Un nouveau chargement en palier est considéré. Il est défini par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * 5.10^{-3} * t & \text{pour } t \leq 10 \text{ s} \\ \underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 \end{pmatrix} & \text{pour } t > 10 \text{ s} \end{cases} \quad (V.8)$$

Dans le cas où les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice aux temps longs ne sont pas proches de 0, ce chargement présente l'avantage de générer une réponse en contrainte suivant les trois directions de l'espace, qui ont, chacune, des parties transitoires et des asymptotes horizontales. La durée totale du chargement est de $t_{max} = 30 \text{ s}$, bien que certaines figures ne présentent les résultats que jusqu'à $t = 20 \text{ s}$.

V.C.2. Modèle à deux variables internes

Dans un premier temps, la matrice est décrite par un modèle à deux variables internes pour une approche progressive de la résolution d'un problème à plusieurs variables. Les potentiels thermodynamique et de dissipation de la matrice deviennent (en notant $\underline{\underline{\alpha}}$ et $\underline{\underline{\beta}}$ les deux variables internes conformément aux notations introduites au paragraphe (IV.A)) :

$$\rho^{(2)}\psi^{(2)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) \quad (V.9)$$

$$\varphi^{(2)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\beta}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\beta}}} \quad (V.10)$$

Les lois constitutives définissant la matrice sont ainsi :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\beta}}} \end{cases} \quad (V.11)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} = 3 * k_{\infty}^{(2)} * J + 2 * \mu_{\infty}^{(2)} * K \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_k^{(2)} = 3 * k_k^{(2)} * J + 2 * \mu_k^{(2)} * K & \text{pour } k = 1 \text{ et } 2 \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vg}^{(2)} = 3 * \omega_{vg}^{(2)} * J + 2 * \eta_{vg}^{(2)} * K & \text{pour } g = \alpha \text{ et } \beta \end{cases} \quad (V.12)$$

On notera, à titre d'illustration dans le cas du modèle de Maxwell généralisé à deux branches, les correspondances suivantes entre les tenseurs impliqués dans la forme générale (IV.17) du paragraphe (IV.C) de l'énergie libre et ceux de la forme (V.9) précédente :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)}, \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\beta}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)}, \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\beta\beta}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} \end{cases} \quad (V.13)$$

En considérant que les modules de compressibilité et de cisaillement ont les même temps caractéristiques, il vient :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{\omega_{v\alpha}^{(2)}}{k_1^{(2)}} = \frac{\eta_{v\alpha}^{(2)}}{\mu_1^{(2)}} \\ \tau_2 = \frac{\omega_{v\beta}^{(2)}}{k_2^{(2)}} = \frac{\eta_{v\beta}^{(2)}}{\mu_2^{(2)}} \end{cases} \quad (V.14)$$

Deux cas sont étudiés successivement : le premier impliquant des temps de relaxation proches (ratio τ_2/τ_1 de l'ordre de 1,2) et le second des temps éloignés (ratio de 12). En effet, nous cherchons à montrer que la précision de l'approche incrémentale n'est pas affectée par les propriétés des phases. Les modules de compressibilité $k_{\infty}^{(2)}$ et de cisaillement $\mu_{\infty}^{(2)}$ aux temps longs de la matrice, ainsi que ceux $k_k^{(2)}$ et $\mu_k^{(2)}$ de chaque branche k , sont définis arbitrairement via l'application d'un coefficient multiplicateur aux modules instantanés définis dans le Tableau 17 au paragraphe (V.A.1). Les coefficients sont, pour les branches ∞ , 1 et 2, respectivement de 0,01, 0,39 et 0,6. Les valeurs des coefficients de viscosité sont prises de sorte à respecter l'équation (V.14) et les ratios choisis sur les temps caractéristiques.

V.C.2.a) Temps de relaxation proches

Les données matériaux, ainsi que les temps caractéristiques définis selon le principe précédemment décrit, sont regroupés dans le Tableau 24.

	Compressibilité (GPa)	Cisaillement (GPa)	Viscosité sphérique (GPa.s)	Viscosité déviatorique (GPa.s)	Temps caractéristique (s)
Branche ∞	0,5833	0,2692	x	x	x
Branche 1	22,75	10,5	21,67	10	0,95
Branche 2	35	16,15	39,0	18	1,11

Tableau 24 : Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 2 temps de relaxation proches.

Sur la Figure 35, la sensibilité au pas de temps des estimations globales obtenues est illustrée dans le cas de la réponse dans la direction y , les autres directions donnant des résultats comparables. Quatre pas de temps (0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01) sont considérés. Mis à part l'artéfact de présentation à $t = 10$ s pour la courbe $dt = 0,5$ s, les résultats montrent des tendances similaires, entre les différents pas de calcul, à ceux présentés dans le cas d'un chargement monotone (p.ex. Figure 25). Le pas de temps $dt = 0,05$ s est retenu car suffisant, en particulier dans les deux parties transitoires de la réponse, d'après le critère introduit au paragraphe (III.B.3).

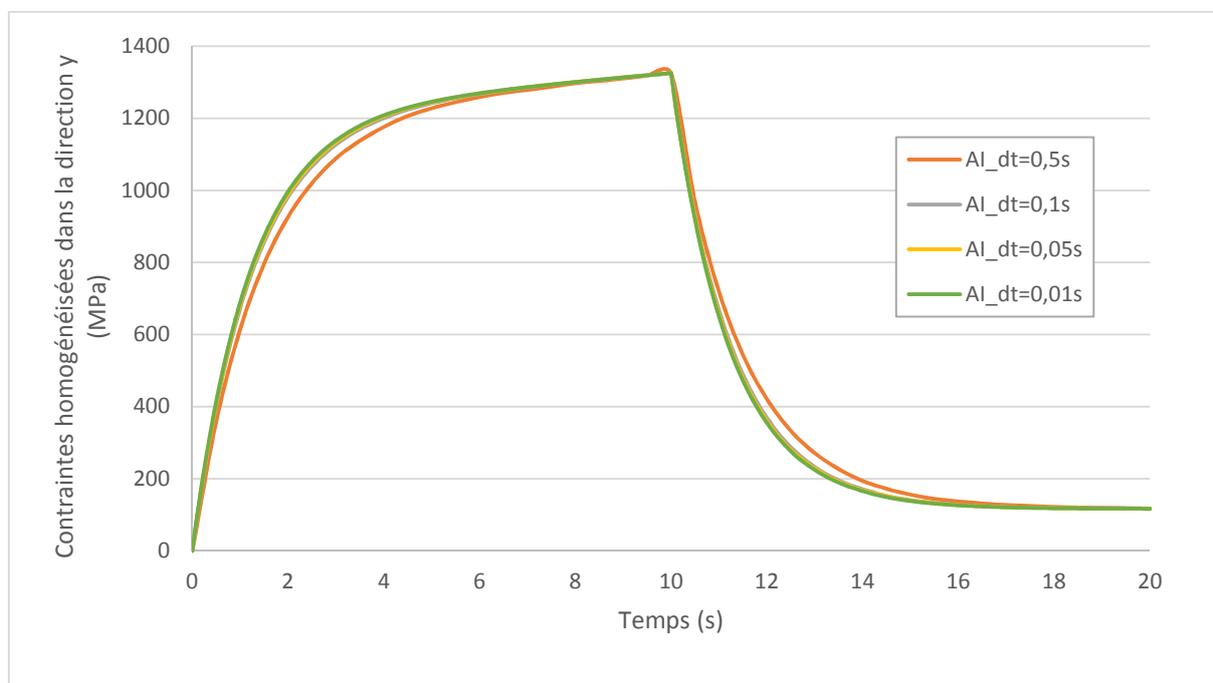


Figure 35 : Influence du pas de temps utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée dans la direction y . Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps proches.

Les réponses homogénéisées dans les trois directions de l'espace estimées par l'approche incrémentale (lignes continues) et celles obtenues par éléments finis (carrés) sont représentées sur la Figure 36.

L'ajout d'une deuxième variable interne dans la description de la viscoélasticité de la matrice ajoute un degré de complexité à la résolution, apportant des inconnues supplémentaires à optimiser. Malgré cela, d'après la Figure 36, les estimations globales apparaissent toutes aussi précises que dans le cas d'une seule variable interne.

Il est toutefois possible que cette précision soit liée à des temps de relaxation proches. D'où l'analyse proposée dans le paragraphe suivant.

Par ailleurs, il est à noter que l'ajout d'une variable interne pour définir le modèle double le temps CPU (comparativement au Maxwell standard) pour des calculs similaires en tout autre point. Le temps de calcul est donc proportionnel au nombre de variables internes, contrairement au paragraphe (V.B).

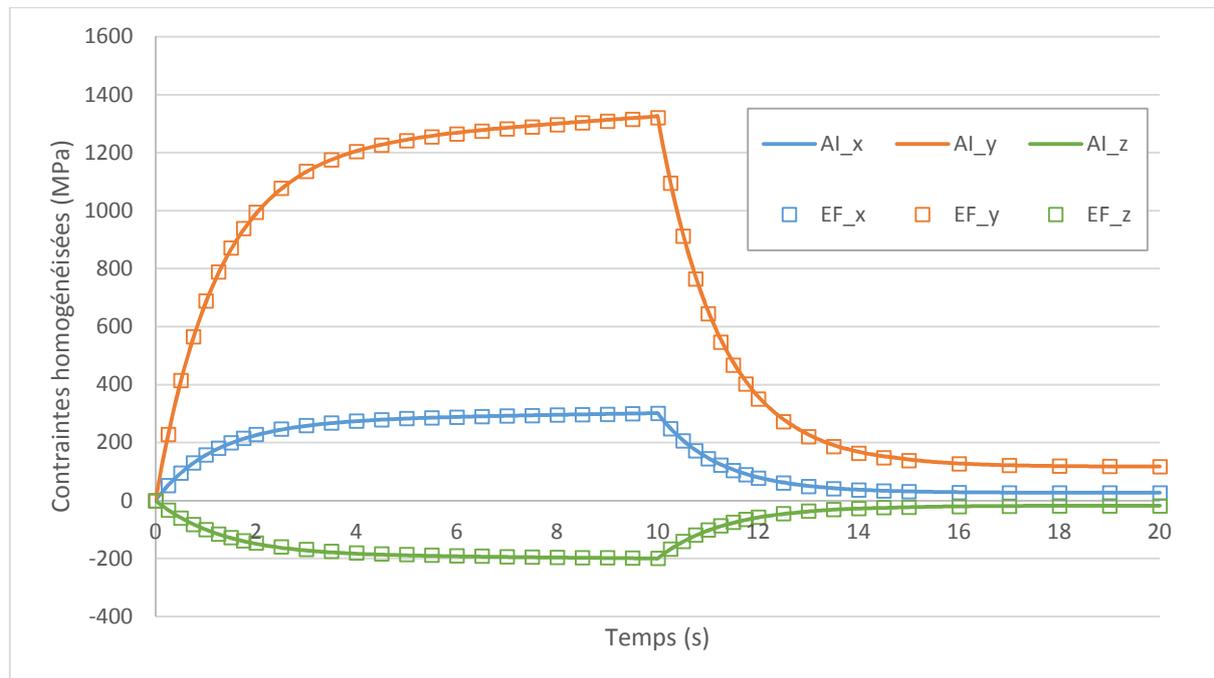


Figure 36 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps proches.

V.C.2.b) Temps de relaxation éloignés

Afin d'avoir un ratio de temps caractéristique de 12, les nouvelles propriétés matériaux sont définies dans le Tableau 25. Ce cas amène donc une difficulté supplémentaire au niveau de la prise en compte des mécanismes de relaxation présentant des temps caractéristiques différents.

	Compressibilité (GPa)	Cisaillement (GPa)	Viscosité sphérique (GPa.s)	Viscosité déviatorique (GPa.s)	Temps caractéristique (s)
Branche 0	0,5833	0,2692	x	x	x
Branche 1	22,75	10,5	21,67	1	0,095
Branche 2	35	16,15	39,0	18	1,11

Tableau 25 Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 2 temps de relaxation éloignés.

L'étude de convergence sur le pas de temps donne le même genre de courbes et n'est pas présentée ici. Le pas de temps $dt = 0,01$ s est retenu.

Ainsi sur la Figure 37, les réponses homogénéisées sont tracées dans les trois directions. La comparaison est faite encore entre l'approche incrémentale (lignes continues) et la solution de référence (carrés).

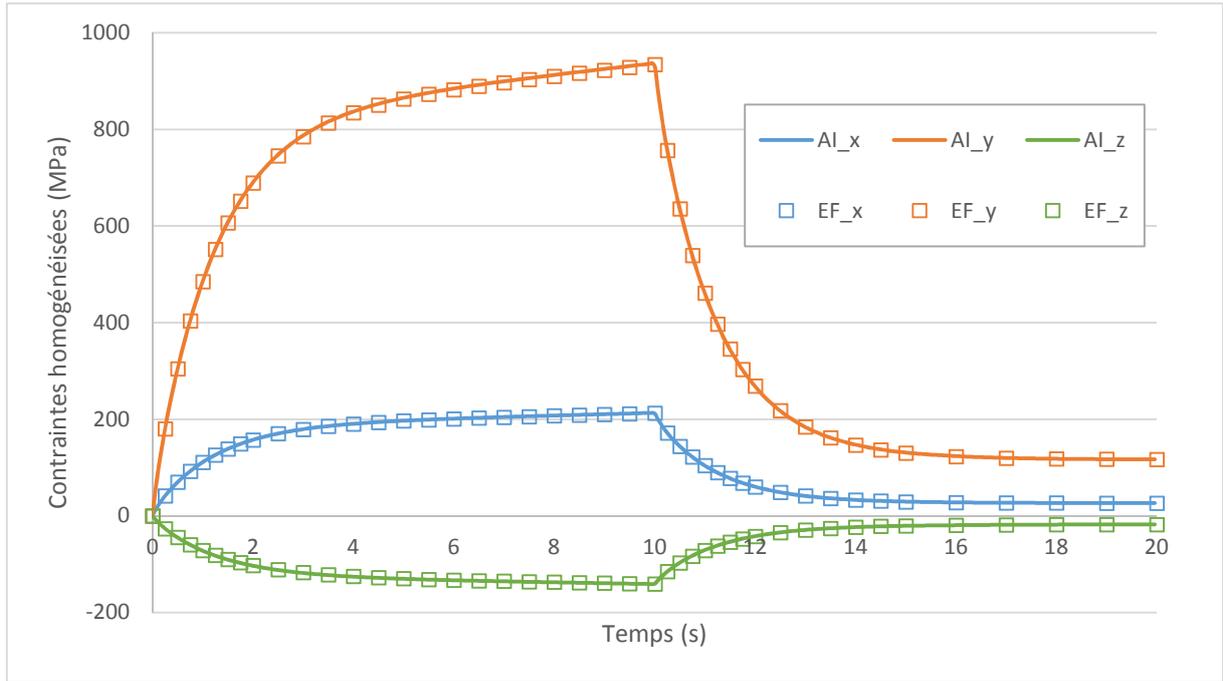


Figure 37 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps éloignés.

Tout d'abord, dans ce cas aussi et malgré des temps de relaxation éloignés, la réponse en contraintes homogénéisées dans les trois directions est très bien estimée (erreur relative maximale de 0,9%). Les écarts relatifs en ce qui concerne les contraintes asymptotiques aux temps longs sont de l'ordre de 0,7% pour le composite et la fibre et d'environ 1% dans la matrice.

V.C.3. Modèle à trois variables internes

Le comportement de la matrice est maintenant décrit par un modèle de Maxwell généralisé à trois branches. Ainsi, une troisième variable interne est ajoutée. Les potentiels de la matrice sont ainsi donnés par :

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}\psi^{(2)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\gamma}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_3^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\gamma}}) \end{aligned} \quad (V.15)$$

$$\varphi^{(2)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{\beta}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\beta}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\beta}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (V.16)$$

Les lois constitutives en découlant s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_3^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\gamma}}) \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_1^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_2^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\beta}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\beta}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\beta}}} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_3^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\gamma}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \end{array} \right. \quad (V.17)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\infty}^{(2)} = 3 * k_{\infty}^{(2)} * J + 2 * \mu_{\infty}^{(2)} * K \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_k^{(2)} = 3 * k_k^{(2)} * J + 2 * \mu_k^{(2)} * K \quad \text{pour } k = 1, 2 \text{ et } 3 \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{vg}^{(2)} = 3 * \omega_{vg}^{(2)} * J + 2 * \eta_{vg}^{(2)} * K \quad \text{pour } g = \alpha, \beta \text{ et } \gamma \end{array} \right. \quad (V.18)$$

De même que pour le modèle à deux branches, les modules de compressibilité et de cisaillement ont des temps caractéristiques identiques. Cela conduit aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{\omega_{v\alpha}^{(2)}}{k_1^{(2)}} = \frac{\eta_{v\alpha}^{(2)}}{\mu_1^{(2)}} \\ \tau_2 = \frac{\omega_{v\beta}^{(2)}}{k_2^{(2)}} = \frac{\eta_{v\beta}^{(2)}}{\mu_2^{(2)}} \\ \tau_3 = \frac{\omega_{v\gamma}^{(2)}}{k_3^{(2)}} = \frac{\eta_{v\gamma}^{(2)}}{\mu_3^{(2)}} \end{array} \right. \quad (V.19)$$

Les propriétés et les temps caractéristiques de la matrice sont regroupés dans le Tableau 26 en utilisant des coefficients multiplicateurs (0,01 – 0,29 – 0,5 – 0,2) sur les propriétés instantanées du Tableau 17 et les viscosités déviatoriques sont prises égales à 10, 20 et 50 GPa.s, ce qui donne deux temps caractéristiques proches et un éloigné des deux autres.

	Compressibilité (GPa)	Cisaillement (GPa)	Viscosité sphérique (GPa.s)	Viscosité déviatorique (GPa.s)	Temps caractéristique (s)
Branche 0	0,5833	0,2692	x	x	x
Branche 1	19,92	7,8	21,7	10	1,28
Branche 2	29,17	13,46	43,34	20	1,49
Branche 3	11,67	5,38	108,34	50	9,29

Tableau 26 : Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 3 temps de relaxation.

Le pas de temps $dt = 0,05$ s est retenu suite à une étude de convergence portant sur les grandeurs d'intérêt comme effectué depuis le début du manuscrit. Sur la Figure 38, les estimations de l'AI sont comparées aux solutions de référence calculées par la méthode des EF. L'excellente corrélation obtenue sur la Figure 38 illustre l'habileté de l'AI (et du code sous-jacent) à traiter un modèle viscoélastique à plusieurs variables internes.

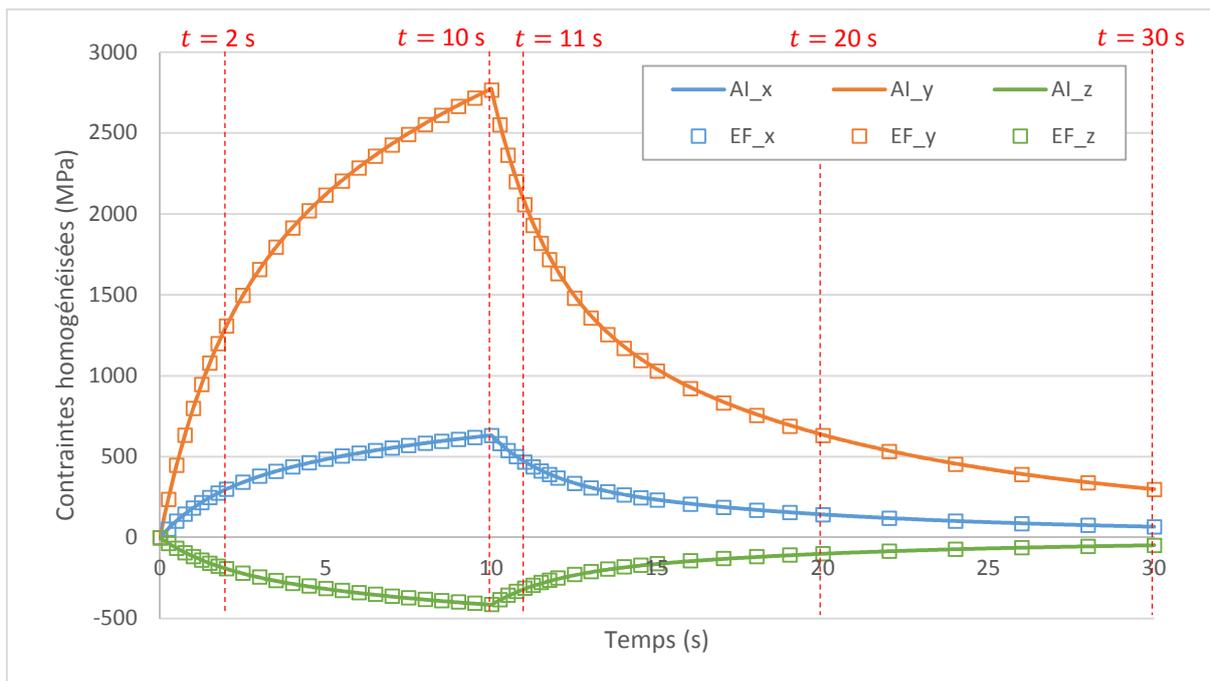


Figure 38 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l’approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l’espace. Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 3 temps.

Dans le Tableau 27, les erreurs relatives sur la réponse en contrainte dans la direction y sont présentées pour les trois modèles de ce paragraphe : à 2 temps proches (V.C.2.a), à 2 temps éloignés (V.C.2.b) et à 3 temps (V.C.3). Les temps, auxquels ces erreurs sont calculées, sont représentés par des traits discontinus rouges verticaux sur la Figure 38. Dans l’ensemble, les erreurs sont faibles pour les trois modèles étudiés. Dans les autres directions (x et z), les erreurs relatives sont sensiblement du même ordre de grandeur. Bien que légèrement supérieures dans la direction z, elles restent toutefois inférieures à 1%.

	2 temps proches (V.C.2.a)	2 temps éloignés (V.C.2.b)	3 temps (V.C.3)
$t = 2 \text{ s}$	0,13%	0,15%	0,36%
$t = 10 \text{ s}$	0,27%	0,21%	0,22%
$t = 11 \text{ s}$	0,57%	0,40%	0,76%
$t = 20 \text{ s}$	0,64%	0,63%	0,57%
$t = 30 \text{ s}$			0,45%

Tableau 27 : Erreurs relatives pour la réponse homogénéisée dans la direction y entre l’estimation (AI) et la solution de référence (EF) pour les trois modèles étudiés : à 2 temps proches (V.C.2.a), à 2 temps éloignés (V.C.2.b) et à 3 temps (V.C.3).

Pour terminer, nous nous intéressons aux inconnues au centre du processus de résolution de l’AI, à savoir les trois tenseurs $\underline{\underline{\theta}}_{\alpha}^{(r)}$, $\underline{\underline{\theta}}_{\beta}^{(r)}$ et $\underline{\underline{\theta}}_{\gamma}^{(r)}$ et variables tensorielles $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$, $\underline{\underline{\beta}}_n^{(r)}$ et $\underline{\underline{\gamma}}_n^{(r)}$. Sur la Figure 39, nous présentons à titre d’exemple l’évolution de valeurs caractéristiques de ces tenseurs pour la matrice : le scalaire définissant les tenseurs d’ordre 4 (noté Θ_i , avec $i = \alpha, \beta$ ou γ) et la composante yy des tenseurs d’ordre 2 (notée i , avec $i = \alpha, \beta$ ou γ). On constate que pour les deux variables internes avec des temps de relaxation comparables, les courbes sont proches tandis que pour la troisième,

associée à un temps très supérieur, les évolutions sont différentes. Les temps de relaxation semblent ainsi jouer un rôle non négligeable sur les évolutions de ces grandeurs pour la matrice.

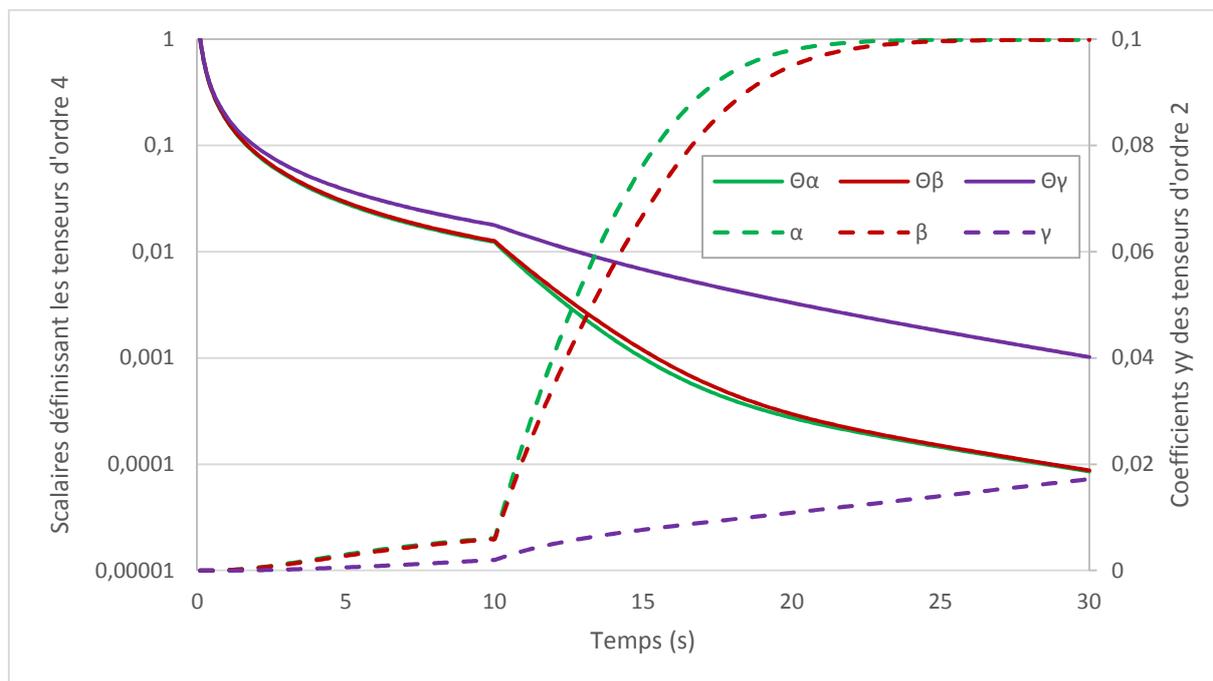


Figure 39 : Evolution des scalaires définissant les tenseurs $\underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(2)}$, $\underline{\underline{\Theta}}_\beta^{(2)}$ et $\underline{\underline{\Theta}}_\gamma^{(2)}$ (lignes continues) et des composantes yy des tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}^{(2)}$, $\underline{\underline{\beta}}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\gamma}}^{(2)}$ (lignes discontinues). Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 3 temps.

V.C.4. Bilan

L'extension de l'approche incrémentale à plusieurs variables internes opérée au chapitre (IV), de même que la faisabilité concrète de la résolution numérique, ont ici été testées dans le cas où la matrice du composite périodique étudié est décrite par un modèle viscoélastique linéaire de type Maxwell généralisé à deux puis trois variables internes. Les temps caractéristiques des modules de compressibilité et de cisaillement ont été choisis identiques. L'AI a été utilisée avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire et les réponses estimées confrontées aux solutions de référence obtenues par EF pour un chargement plus complexe que celui (glissement simple monotone) des paragraphes précédents. La fraction volumique des fibres a ici été fixée à 0,25, valeur pour laquelle le schéma de Luciano et Barbero (1994) présente de très bonnes performances pour une large gamme de contrastes de propriétés entre fibre et matrice.

- Les estimations obtenues dans les deux cas (2 puis 3 variables) sont d'excellente qualité et ce pour des temps de relaxation proches comme éloignés.
- On exemplifie ainsi la pertinence de l'extension théorique réalisée dans le cadre des présents travaux et la faisabilité de la résolution numérique. Par manque de temps, la généralisation du programme de résolution à un nombre supérieur de variables n'a pas été réalisée, mais la structure est prête pour pouvoir l'envisager dans un avenir proche.

VI. Application de l'approche incrémentale à différentes microstructures

Le chapitre (V) a permis d'évaluer l'extension de l'approche incrémentale à plusieurs variables internes non nécessairement déviatoriques (et du codage sous-jacent) opérée au chapitre (IV) à travers différentes lois viscoélastiques affectées aux phases (principalement la matrice). Toutes les évaluations ont été réalisées pour la même microstructure, une microstructure périodique à fibres longues pour laquelle les solutions de référence, avec la méthode des éléments finis, nous étaient facilement accessibles. Les deux phases étaient par ailleurs isotropes. L'association de l'AI au schéma de Luciano et Barbero (1994) depuis le début de ce manuscrit a fait montre de son efficacité.

Les phases d'un milieu hétérogène peuvent néanmoins avoir d'autres morphologies, d'autres organisations spatiales mais aussi des propriétés anisotropes. D'un point de vue théorique (a minima pour des phases isotropes), l'AI telle que présentée dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) et sa version étendue (chapitre (IV)) peuvent être utilisées avec n'importe quels schémas d'homogénéisation sous réserve de leur pertinence pour la microstructure considérée. Le premier objectif de ce chapitre est donc de montrer que l'AI peut, effectivement c'est-à-dire en pratique, être associée à d'autres schémas d'homogénéisation que celui de Luciano et Barbero (1994) ou que ceux déjà considérés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a,b,c). Le second objectif est tourné vers un aspect de la généralisation théorique de l'AI opérée au chapitre (IV) non évalué jusqu'à présent à savoir le traitement de phases anisotropes. L'idée sous-jacente est d'élargir le champ d'application de l'approche vis-à-vis des morphologies microstructurales traitées.

Pour répondre au premier objectif dans le cas de phases isotropes, nous tentons d'associer l'AI avec les schémas de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion permettant de traiter des composites particuliers. Le cas d'un matériau composite renforcé aléatoirement avec des particules sphériques est utilisé comme premier support pour tester l'efficacité de cette association au paragraphe (VI.A). Puis au paragraphe (VI.B), on envisage des inclusions ellipsoïdales avec divers rapports de forme. Enfin, le dernier paragraphe (VI.C) est consacré aux composites bois à copeaux lamellés. Cette partie fournira une première réponse au second objectif (anisotropie locale) en plus de donner une nouvelle illustration de la possibilité de brancher l'AI à des schémas variés. L'AI sera ici associée à un schéma d'homogénéisation adapté à ce type de composites (Malekmohammadi et al. (2014)) notamment à leur fort taux de charges, qui a été développé dans le cadre de la collaboration avec l'Université de Colombie Britannique.

VI.A. Microstructure à inclusions sphériques

Une microstructure comprenant des inclusions sphériques aléatoirement réparties dans une matrice est étudiée. Deux schémas d'homogénéisation – celui de Mori et Tanaka (1973) et celui appelé Double-Inclusion présenté par Hori et Nemat-Nasser (1993) avec la fonction d'interpolation issue des travaux de Lielens et al. (1998) – sont couplés à l'approche incrémentale afin de résoudre le problème auxiliaire thermoélastique (IV.E).

Il est à souligner que les travaux de Lahellec et Suquet (2007a, 2007b et 2007c) ont déjà illustré la possible utilisation de l'AI pour ce type de microstructure. Néanmoins, le schéma d'homogénéisation le plus souvent couplé était la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (III.A). Ici, il s'agit de montrer que l'AI peut-être aussi associée aux schémas de Mori-Tanaka et Double-Inclusion afin de pouvoir envisager d'autres formes d'inclusions, ce que nous regarderons par la suite dans le paragraphe (VI.B).

Les schémas d'homogénéisation de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion sont présentés dans l'Annexe (A.2), tout comme le tenseur d'Eshelby pour les différentes formes d'inclusions étudiées au paragraphe (VI.B).

Après avoir précisé le comportement et les propriétés des phases ainsi que le chargement étudié, l'attention sera portée sur la sensibilité des réponses au pas de calcul. L'évaluation de l'AI en association avec le schéma de Mori-Tanaka s'effectuera en deux temps. En effet, le schéma linéaire de Mori-Tanaka ne fournit pas de résultats exacts mais seulement des estimations plus ou moins précises selon le taux de charges notamment. Aussi, afin de s'affranchir des erreurs issues de la seule résolution du problème thermoélastique auxiliaire, nous commencerons par comparer les estimations de l'AI, couplé au schéma de Mori-Tanaka, aux résultats obtenus par Czarnota et al. (2015). Dans ce papier récent, la loi d'interaction additive tangente basée sur les travaux de Mercier et Molinari (2009) et l'approche par transformées de Laplace sont, chacune, couplées au schéma de Mori-Tanaka pour résoudre le problème d'homogénéisation. La comparaison des estimations de l'AI à la solution obtenue avec le principe de correspondance permettra ainsi d'évaluer l'efficacité de l'AI (particulièrement la validité du codage sous-jacent à son couplage avec Mori-Tanaka) et la comparaison avec les estimations de l'approche additive tangente permettra de positionner l'AI vis-à-vis de cette approche. Dans un second temps, les estimations de l'AI seront confrontées aux solutions de référence obtenues par éléments finis (Czarnota et al. 2015), ce qui permettra d'évaluer l'aptitude de l'AI associée au schéma de Mori-Tanaka à restituer la réponse du composite à inclusions sphériques étudié. Les estimations obtenues en conjonction avec le schéma de Double-Inclusion seront également présentées à titre de comparaison pour mesurer l'apport éventuel de ce schéma.

VI.A.1. Propriétés des phases et chargement

Les inclusions de la microstructure étudiée sont élastiques linéaires isotropes tandis que la matrice est viscoélastique linéaire isotrope de type Maxwell (à une variable interne de nature déviatorique par simplicité). Pour les propriétés matériaux, nous prenons celle de Lahellec et Suquet (2007b), également utilisées dans les travaux de Czarnota et al. (2015), dans le cas linéaire ($m=1$), regroupées dans le Tableau 28.

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)	Viscosité déviatorique $\eta_v^{(r)}$ (Gpa.s)
Inclusions ($r = 1$)	222,2	166,65	x
Matrice ($r = 2$)	58,33	26,92	16

Tableau 28 : Propriétés mécaniques des inclusions et de la matrice, Lahellec et Suquet (2007b), Czarnota et al. (2015).

Pour cette microstructure, nous réalisons un essai de traction uniaxiale, à vitesse de déformation macroscopique axiale imposée. Ce calcul est fait en modifiant le code de résolution de l'approche incrémentale. En effet, jusqu'à présent, le tenseur complet des déformations macroscopiques était imposé à chaque pas de temps. Ici, nous pilotons seulement la composante dans la direction de traction \underline{x} et nous calculons à l'intérieur de la boucle d'optimisation des inconnues (IV.D), la valeur des déformations dans les directions transverses \underline{y} et \underline{z} de sorte à assurer un tenseur des contraintes homogénéisées qui soit uniaxial, c'est-à-dire ayant des composantes nulles dans toutes les directions exceptée \underline{x} .

Le chargement de traction est réalisé avec une vitesse de déformation macroscopique axiale imposée de $\dot{E}_{11} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. Il se déroule sur une durée de $t_{max} = 10 \text{ s}$, tout comme dans Lahellec et Suquet (2007b). Sauf indiqué contraire, le taux d'inclusions est de 0,25.

VI.A.2. Sensibilité au pas de calcul

Avant de comparer les résultats obtenus avec ceux de la littérature selon le principe décrit dans l'introduction du paragraphe (VI.A), il est nécessaire de regarder l'influence du pas de temps utilisé dans l'approche incrémentale. Ainsi, nous testons cinq pas de temps (1 s – 0,5 s – 0,1 s – 0,05 s – 0,01 s) et examinons l'évolution de la réponse homogénéisée pour chacun d'entre eux. La Figure 40 (resp. Figure 41) représente la sensibilité au pas de calcul de la réponse homogénéisée avec l'utilisation du schéma de Mori-Tanaka (resp. Double-Inclusion).

La convergence des réponses homogénéisées selon le critère présenté paragraphe (III.B.3), est assurée pour un pas de 0,05 s et ce pour les deux schémas. En revanche, les réponses moyennes par phase nécessitent un pas de calcul de 0,01 s. Nous retiendrons cette valeur dans la suite bien que seules les réponses homogénéisées soient présentées.

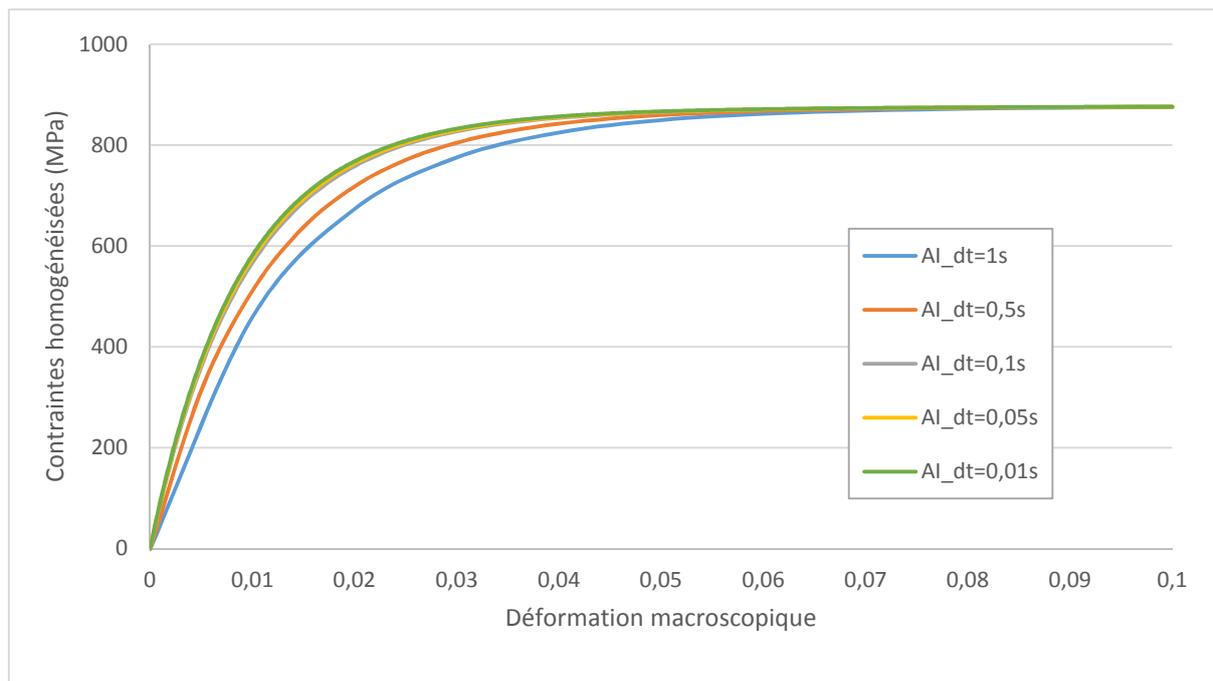


Figure 40 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25. Couplage avec le schéma de Mori-Tanaka.

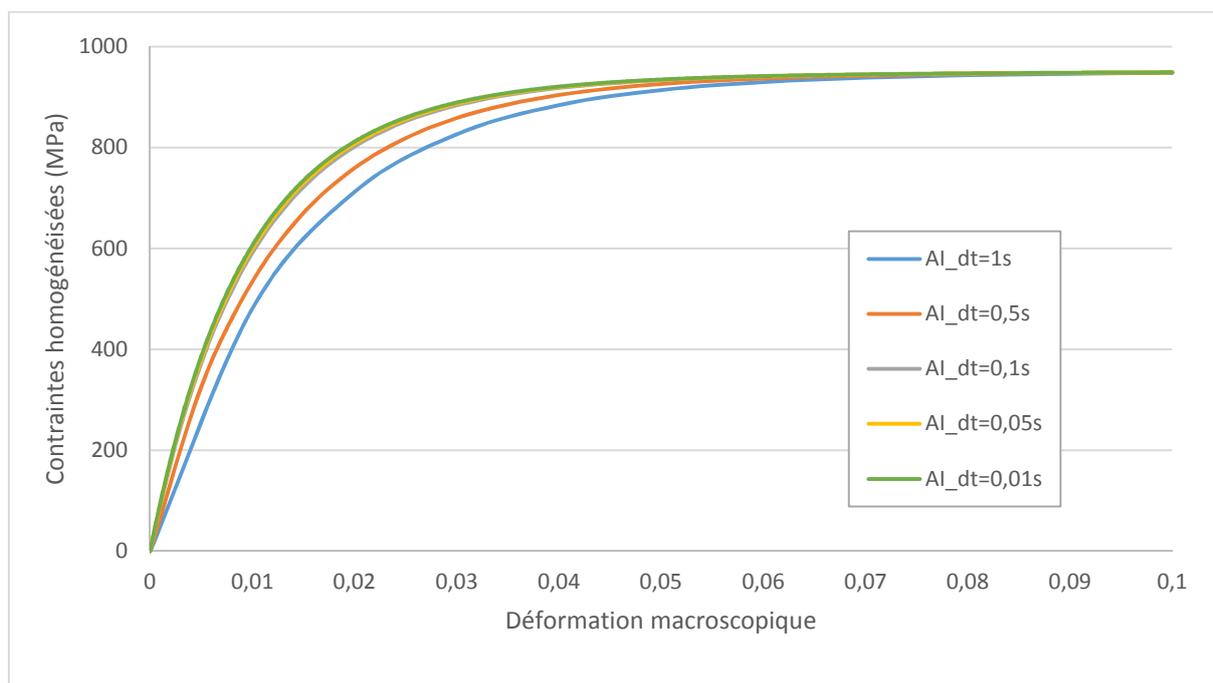


Figure 41 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25. Couplage avec le schéma de Double-Inclusion.

VI.A.3. Comparaisons aux estimations de la littérature

Dans Czarnota et al. (2015), le schéma de Mori-Tanaka est couplé à deux méthodes analytiques de résolution du problème viscoélastique : la méthode tangente additive (TA), (Mercier et Molinari (2009)) et le principe de correspondance (PC) qui sert de référence pour évaluer la loi d'interaction précitée. Les auteurs observent une différence qualifiée de négligeable entre les deux approches analytiques. La Figure 42 compare les estimations des deux méthodes précédentes (TA et PC) à celles obtenues avec l'AI dans les présents travaux. On précise que les résultats issus du principe de correspondance sont ceux des travaux de Kowalczyk-Gajewska et Petryk (2011). Pour les résultats avec l'AI, nous ne présentons qu'1 point sur 15 pour plus de lisibilité.

Sur la Figure 42, nous observons que les trois méthodes fournissent des résultats identiques. En zoomant sur la partie transitoire, nous pouvons même discerner que l'approche incrémentale donne une réponse plus proche de la solution avec Laplace que la méthode tangente additive. En effet, l'écart maximal entre l'approche incrémentale et le principe de correspondance (respectivement entre la méthode tangente additive et le principe de correspondance) est de 0,9% (resp. 1,79%) dans la partie transitoire, pour se situer aux alentours de 0,59% (resp. 0,69%) dans la partie asymptotique. Ainsi, d'une part l'excellente corrélation observée entre l'AI et la solution donnée par le principe de correspondance confirme, d'un point de vue fondamental, une nouvelle fois son efficacité et garantie pratiquement pour nous le caractère opérationnel de son branchement avec le schéma de Mori-Tanaka. D'autre part, la comparaison de l'AI avec l'approche tangente additive suggère une meilleure précision de l'AI dans le cas étudié.

En se basant sur les résultats précédents avec le schéma de Mori-Tanaka et sachant que le branchement avec le schéma de Double-Inclusion a été réalisé de manière similaire, on supposera acquise pour la suite, l'efficacité de l'AI et la validité du codage avec ce schéma et ce, même si des confrontations aux solutions avec le principe de correspondance n'ont pas été menées dans ce cas.

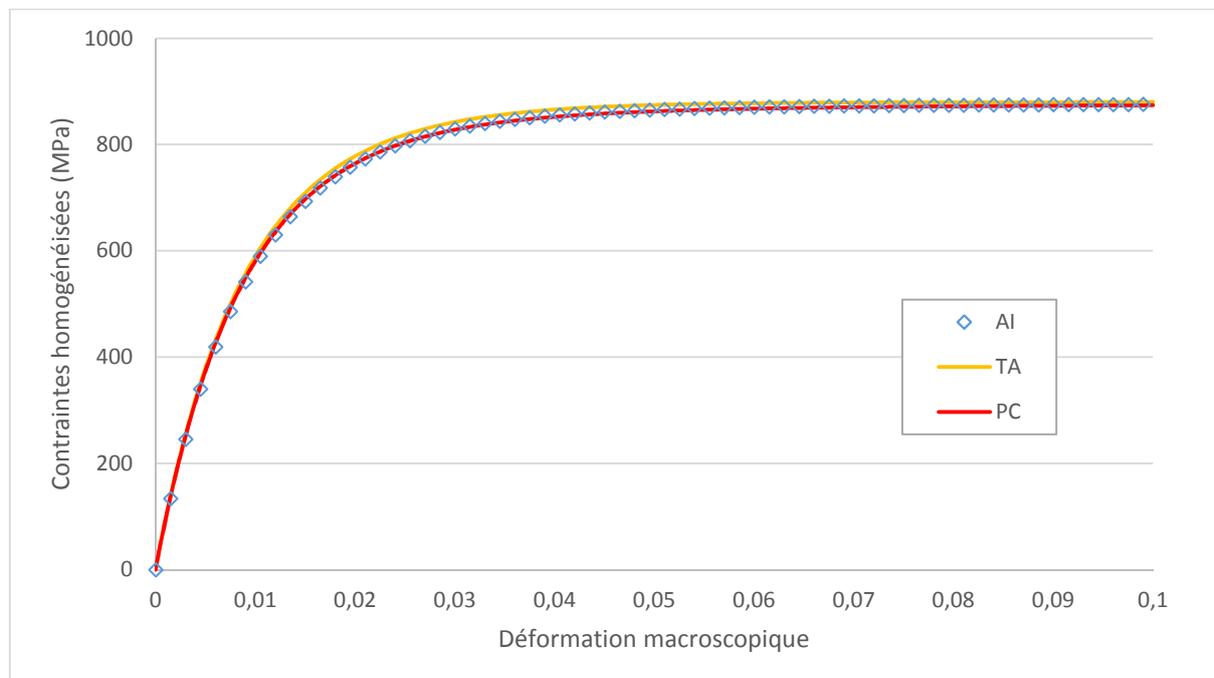


Figure 42 : Contraintes homogénéisées issues de trois approches analytiques couplées au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka : l'approche incrémentale (AI), tangente additive (TA) et le principe de correspondance (PC). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions 0,25.

VI.A.4. Comparaisons aux solutions de référence

Sur les Figure 43 et Figure 44, les réponses homogénéisées estimées à l'aide de l'AI couplée au schéma de Mori-Tanaka (MT) puis au schéma de Double-Inclusion (DI) sont comparées aux solutions de référence (EF), respectivement pour un taux d'inclusions de 0,25 et 0,1. Les solutions de référence sont extraites des travaux de Czarnta et al. (2015) obtenues avec Abaqus® pour une microstructure à 30 particules.

Etant donné la parfaite coïncidence mentionnée dans le paragraphe précédent entre l'AI et le principe de correspondance, l'écart par rapport à la solution EF observé sur la Figure 43 pour un taux de charges de 0,25 est attribuable, comme dans les travaux de Czarnta et al. (2015) avec l'approche additive tangente, au seul schéma de Mori-Tanaka. Czarnta et al. (2015) ont montré que le problème vient principalement de l'estimation de la moyenne dans les inclusions. En effet, celle-ci est sous-estimée, en raison d'une mauvaise prise en compte des interactions entre particules. Les estimations de l'AI sont ainsi logiquement améliorées avec le schéma de Double-Inclusion (voir Figure 43) qui prend mieux en compte ces interactions, même si l'erreur relative par rapport à la solution de référence demeure importante (14,9% à $t = 10$ s contre 21,5% avec MT). La Figure 44 montre que la différence entre les estimations obtenues avec MT et DI diminuent avec le taux d'inclusions de même que les erreurs comparativement aux solutions de référence (2,9% avec DI et 4,1% avec MT à $t = 10$ s pour un taux de charges de 0,1). Ces tendances sont en accord avec les performances respectives des deux schémas d'homogénéisation en élasticité pure lorsque le taux de charges évolue (voir Ghossein et Lévesque (2012)) et de fait ne remettent aucunement en cause l'efficacité de l'AI à proprement parlé. D'un point de vue quantitatif, le niveau élevé des erreurs observées à 0,25 d'inclusions résulte du fort contraste de propriétés entre les phases, qui même à cette fraction modérée, renforcent la complexité des interactions entre les particules.

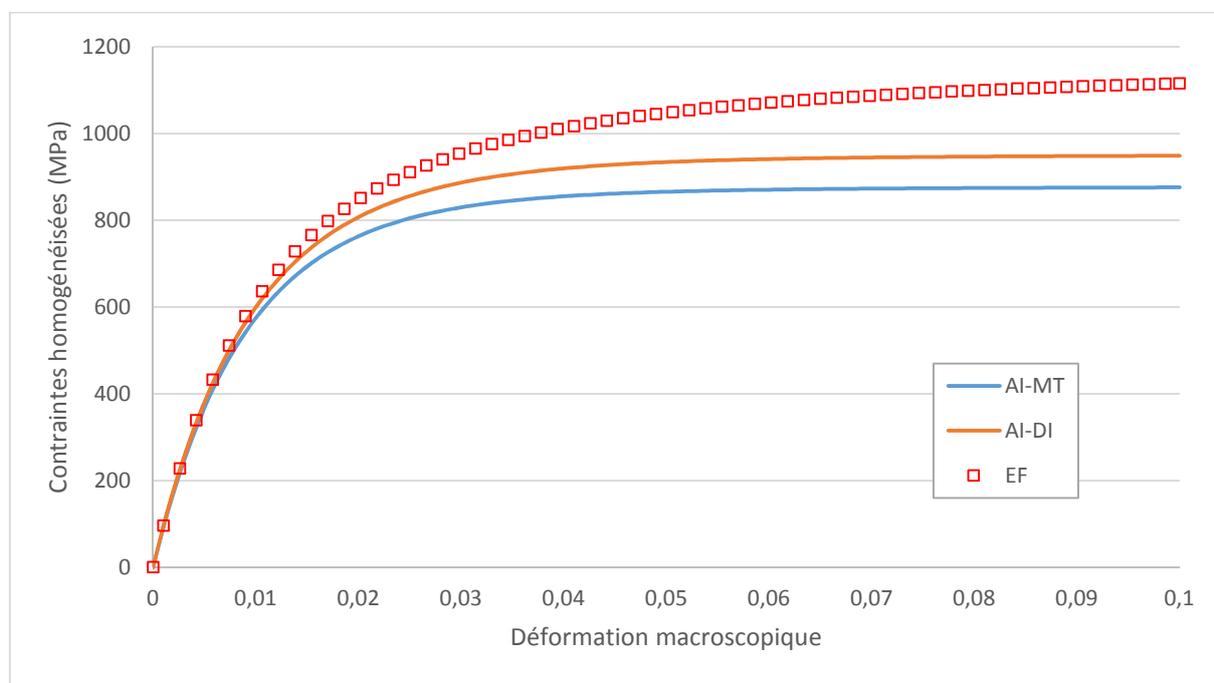


Figure 43 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (AI-MT) et de Double-Inclusion (AI-DI) et la solution de référence (EF). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25.

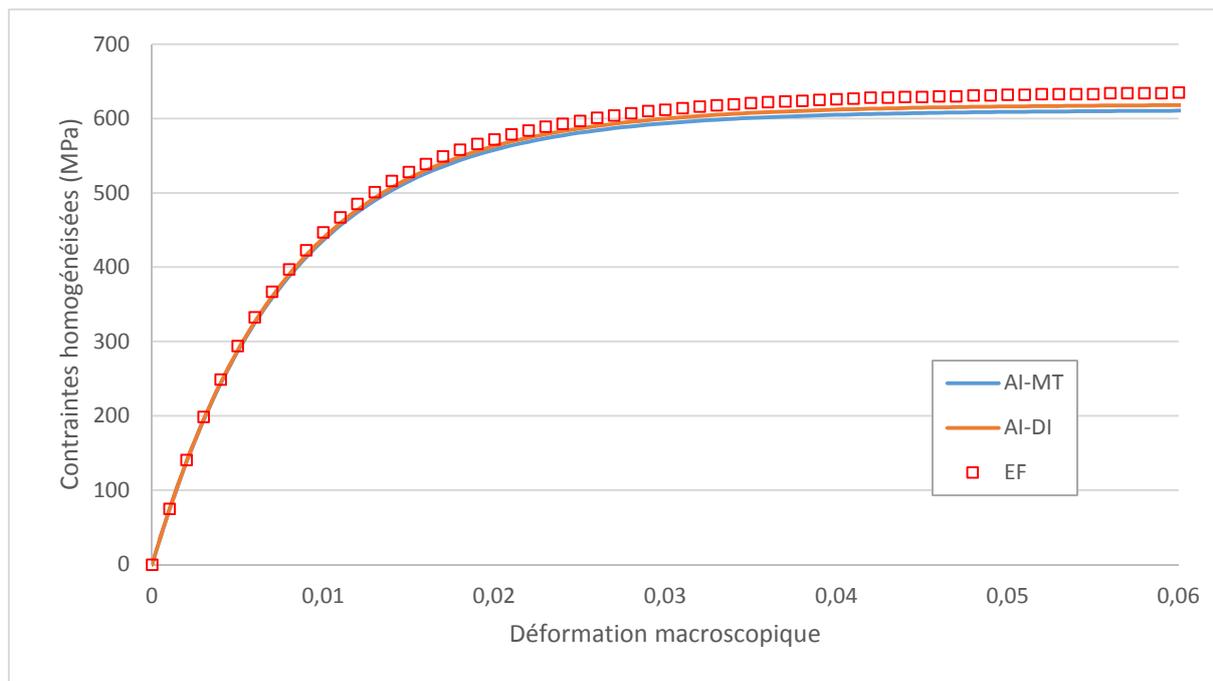


Figure 44 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (AI-MT) et de Double-Inclusion (AI-DI) et la solution de référence (EF). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,1.

VI.A.5. Bilan

Dans ce paragraphe, l'approche incrémentale a été couplée au schéma de Mori-Tanaka (MT) et de Double-Inclusion (DI). Les estimations de l'AI obtenues avec le schéma de Mori-Tanaka pour une microstructure à particules sphériques soumise à une traction pure ont tout d'abord été confrontées aux résultats d'approches analytiques couplées à ce même schéma extraites de la littérature, puis à la solution EF également emprunte de la littérature. Les estimations obtenues avec le schéma de Double-Inclusion ont quant à elles été comparées à la seule solution EF extraite de la littérature.

- L'excellente corrélation de l'AI avec les résultats donnés par le principe de correspondance fournit une nouvelle preuve de l'efficacité de l'AI et garantit simultanément la validité du codage sous-jacent à son couplage avec le schéma de Mori-Tanaka (ces deux conclusions sont considérées maintenues pour le schéma de Double-Inclusion). Les estimations de l'AI apparaissent par ailleurs légèrement meilleures que celles de l'approche additive tangente utilisée dans Czarnota et al. (2015), (pour le cas de la viscoélasticité linéaire et la fraction de charges étudiés ici).
- Les confrontations des estimations aux solutions EF révèlent les erreurs provenant des deux schémas d'homogénéisation avec des évolutions en fonction du taux de charges qui suivent les mêmes tendances qu'en élasticité et des niveaux en accord avec les forts contrastes impliqués.
- On illustre ainsi de manière concrète l'association possible de l'AI avec les schémas de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion et son aptitude, couplée à ces deux schémas, à restituer précisément la réponse d'une microstructure à particules sphériques (dès lors que les fractions volumiques et les contrastes ne les mettent pas en défaut). Pour cette microstructure, l'AI couplée au schéma de Double-Inclusion donne de meilleurs résultats. Ce gain est une conséquence directe des meilleures performances de ce schéma par rapport à celui de Mori-Tanaka, lorsque les inclusions sont plus rigides que la matrice, les contrastes forts et ce, d'autant plus que le taux de sphères est élevé.

VI.B. Microstructures à inclusions ellipsoïdales, prolates et oblates

Dans le paragraphe précédent (VI.A), nous avons couplé l'approche incrémentale à deux schémas d'homogénéisation – MT et DI – et avons étudié le cas d'un matériau hétérogène à inclusions sphériques. Un des avantages de ces schémas est qu'ils sont basés sur la théorie d'Eshelby (cf. Annexe (A.2)). Le tenseur d'Eshelby dépend de la forme de l'inclusion. Il est ainsi possible d'utiliser ces mêmes schémas pour des inclusions ellipsoïdales, de type oblates et prolates avec différents rapports de forme.

De manière générale, il n'y aura pas de comparaison avec une solution de référence dans ce paragraphe, nous cherchons simplement à illustrer qualitativement le caractère opérationnel de l'association de l'AI avec les deux schémas précités dans le cas d'inclusions ellipsoïdales en analysant la cohérence des résultats pour différents taux ou rapports de forme d'inclusions, ayant les mêmes tendances que dans les travaux de Ghossein et Lévesque (2014). Ce paragraphe montrera aussi des résultats obtenus avec l'AI en conjonction avec d'autres schémas ou bornes de la littérature.

VI.B.1. Définition des ellipsoïdes et des paramètres de calcul

La microstructure est ici formée d'inclusions identiques de forme ellipsoïdale, alignées dans la direction \underline{x} et aléatoirement réparties dans le plan transverse. Les propriétés matériaux sont analogues à celles du paragraphe (V.A) (cf. Tableau 17) tout comme le chargement monotone en glissement simple (V.4). Les paramètres définissant la morphologie des inclusions sont représentés sur la Figure 45 :

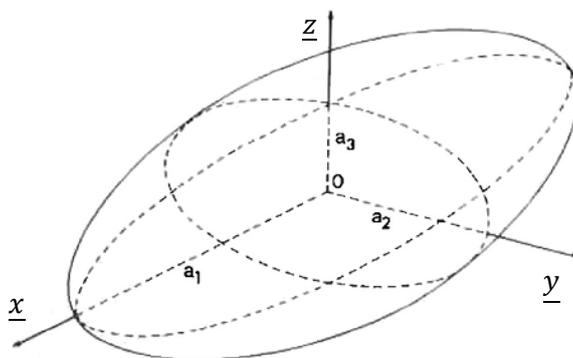


Figure 45 : Schéma représentatif d'une inclusion ellipsoïdale, Mura 1987.

Dans la suite, les demi-longueurs sont telles que $a_2 = a_3$ et le rapport de forme est défini par le rapport $\frac{a_1}{a_2}$. Nous représentons ici les contraintes homogénéisées asymptotiques dans deux situations successives : en fonction du taux de renforts (pour trois rapports de forme) et en fonction du rapport de forme pour un taux de renfort de 0,25.

Bien que non présentées ici, les analyses de convergence en termes de sensibilité au pas de calcul ont été menées et ont permis de dégager le pas adéquat pour chacune des configurations envisagées.

VI.B.2. Effet du taux d'inclusions sur la réponse asymptotique homogénéisée

Nous regardons ici l'influence du taux d'inclusions sur la réponse homogénéisée asymptotique. Sur la Figure 46, les réponses obtenues avec l'AI couplée avec les schémas de Mori-Tanaka (bleu) et de Double-Inclusion (orange) sont présentées pour trois formes d'inclusions : sphères (lignes continues), prolates de rapport 5 (lignes discontinues) et oblates de rapport 0,2 (lignes pointillées). On observe :

- A rapport de forme fixé, l'écart entre les estimations fournies par les deux schémas augmente logiquement avec le taux de charges. Ce résultat est lié à la prise en compte des interactions entre inclusions avec DI qui engendre une rigidification plus prononcée de la réponse avec l'augmentation du taux de charges.
- A taux d'inclusions fixé, les écarts relatifs entre les estimations fournies par les deux schémas sont du même ordre de grandeur, bien qu'une relation de supériorité existe entre eux, inversement au rapport de forme.

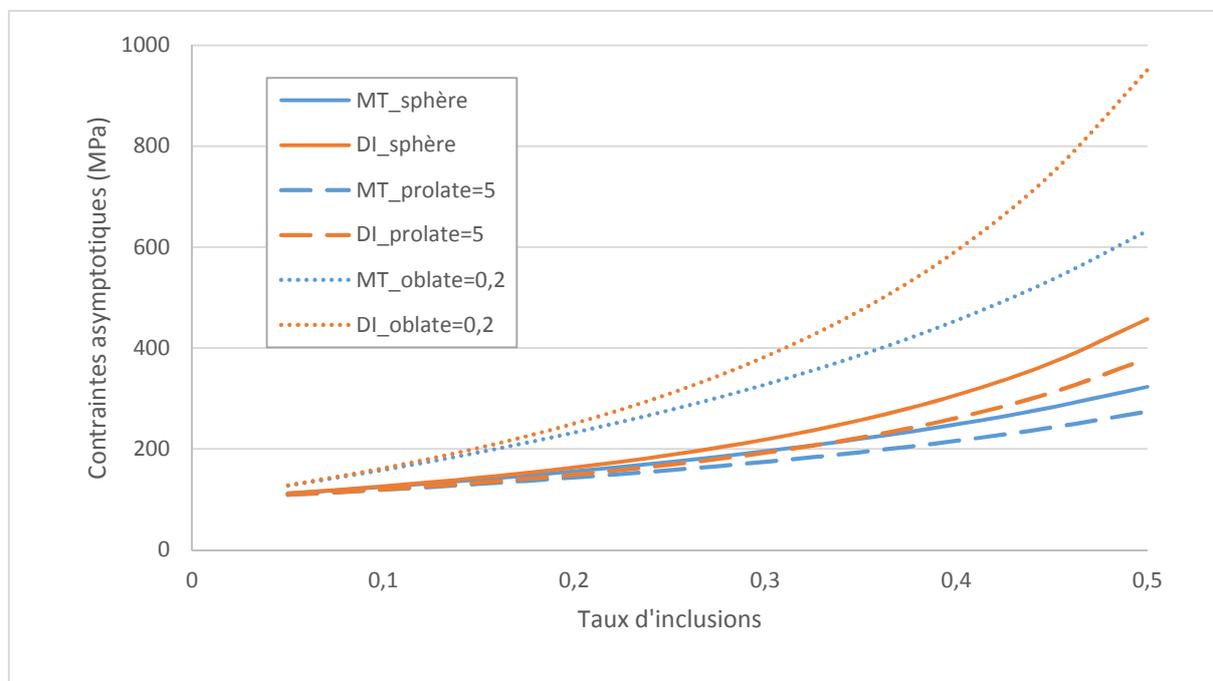


Figure 46 : Contraintes asymptotiques macroscopiques en fonction du taux d'inclusions. Comparaison pour trois rapports de forme (0,2 – 1 – 5) entre les schémas d'homogénéisation de MT et DI.

VI.B.3. Effet du rapport de forme

Nous fixons un taux de fibres de 0,25 et nous faisons varier le rapport de forme de l'inclusion. Nous présentons les réponses homogénéisées asymptotiques obtenues avec les schémas de MT et DI en fonction du rapport de forme pour des valeurs comprises entre 0,2 et 200. Nous réalisons le même calcul avec l'AI branchée à d'autres schémas d'homogénéisation à notre disposition : Reuss, CSA et CCA. Ces schémas ne sont pas dépendants du rapport de forme mais servent de comparaison. Il en résulte que :

- Le rapport de forme à une influence assez similaire sur les réponses obtenues avec MT et DI, l'écart relatif entre les deux schémas varie de 10,6% à 6,3%. Le rapport de forme a donc moins d'influence que le taux d'inclusions comme présenté au paragraphe précédent (VI.B.2).
- Le modèle de Reuss représente une borne inférieure qui n'est pas transgressée quel que soit le rapport de forme.
- Le schéma CSA – Composite Sphere Assembly – tel qu'écrit dans les travaux d'Hashin (1962) donne des résultats identiques au schéma MT avec un rapport de forme de 1 en homogénéisation élastique, nous retrouvons ici logiquement le même résultat en ce qui concerne la contrainte asymptotique.
- Enfin, on constate que le schéma CCA – Composite Cylinder Assembly – tel que présenté dans Hashin (1983) semble en adéquation avec la réponse obtenue avec le schéma de MT lorsque la microstructure se rapproche des fibres longues.

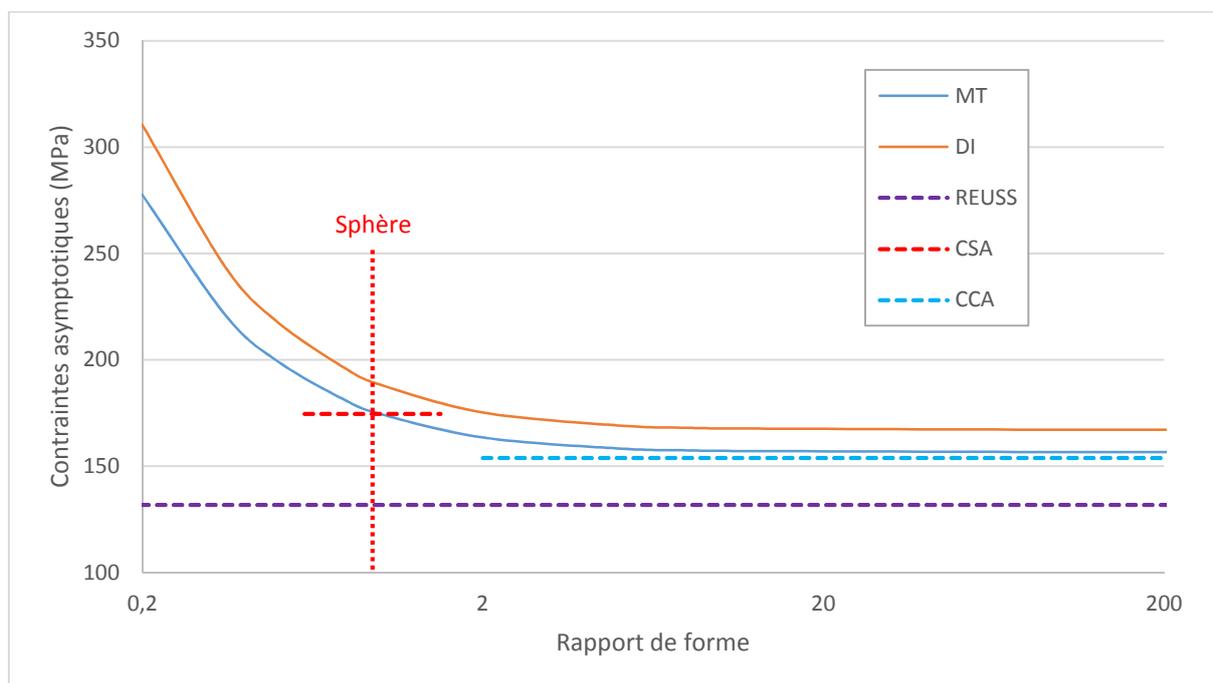


Figure 47 : Influence du rapport de forme des inclusions sur la réponse homogénéisée asymptotique estimée par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (MT) et Double-Inclusion (DI). Comparaison avec les résultats obtenus avec d'autres modèles d'homogénéisation. Microstructure renforcée par des particules ellipsoïdales soumise à un chargement monotone en glissement simple. Taux d'inclusions de 0,25.

Bien que non présentées ici, il est à noter que les contraintes asymptotiques moyennes dans la matrice sont quasiment insensibles à la forme de l'inclusion. Les variations observées au niveau macroscopique en fonction du rapport de forme sont uniquement dues aux variations de la contrainte moyenne dans les inclusions. Les résultats sont par ailleurs similaires à d'autres taux d'inclusions.

VI.B.4. Bilan

L'idée de ce paragraphe était principalement de montrer que l'AI, couplée aux schémas de MT et DI, est utilisable pour différents rapports de forme des inclusions.

- Pour différents taux d'inclusions, l'estimation avec DI est plus rigide et sûrement plus proche de la solution de référence que celle avec MT.
- Des résultats avec d'autres modèles d'homogénéisation sont par ailleurs obtenus.
- Les tendances observées semblent cohérentes par rapport aux performances connues des deux schémas en élasticité pure et attestent du caractère opérationnel du branchement de l'AI avec ces deux schémas dans le cas d'inclusions de forme ellipsoïdale.

VI.C. Composites à copeaux de bois lamellés

Dans Lahellec et Suquet (2007a,b,c), tout comme depuis le début de ce manuscrit, l'ensemble des exemples traités concernent des phases isotropes. La question se pose quant à la capacité de l'approche incrémentale à traiter des phases anisotropes. L'objectif de ce paragraphe est donc d'apporter une première contribution dans l'évaluation du dernier aspect de la généralisation théorique opérée au chapitre (IV). En tant que matériaux au centre de la collaboration entre l'Institut Pprime et l'Université de Colombie Britannique depuis quelques années dans laquelle ma thèse était partiellement intégrée, les composites à copeaux de bois lamellés se sont imposés comme support pour cette évaluation. Malheureusement, ils ne permettront qu'une évaluation partielle puisque seule la phase bois, considérée élastique, est anisotrope.

L'application de l'approche à cette classe de matériaux hétérogènes requiert son couplage avec un schéma d'homogénéisation linéaire adapté. Ainsi, ce paragraphe fournira aussi une illustration supplémentaire de la possible conjonction de l'approche à des schémas variés.

Les composites à copeaux de bois lamellés sont largement utilisés dans la construction des bâtiments notamment en Amérique du Nord et tout particulièrement au Canada où le bois constitue une matière première abondante. Ces matériaux sont constitués de copeaux rectangulaires élastiques linéaires orthotropes assemblés entre eux par une résine thermodurcissable (p. ex. formaldéhyde). Ils présentent un comportement macroscopique viscoélastique malgré la très faible quantité de résine (fraction volumique de résine le plus souvent inférieure à 0,08). L'objectif général de la communauté scientifique canadienne en collaboration avec l'industrie du bâtiment est d'élaborer des modélisations multi-échelles efficaces permettant de diminuer les campagnes expérimentales très coûteuses à la fois en termes de temps et d'argent. De tels modèles sont par ailleurs souhaitables en vue d'optimiser la sélection des espèces de bois et/ou la nature des résines vis-à-vis des performances mécaniques macroscopiques. De nombreuses études ont été consacrées à la mise en place de modèles permettant des prédictions plus ou moins efficaces des propriétés élastiques de ces matériaux mais il y a encore un manque de modélisations viscoélastiques efficaces. Ainsi, au-delà des aspects mentionnés plus haut à caractère « fondamental », ce paragraphe permettra de se prononcer quant aux solutions que pourrait offrir l'approche incrémentale pour répondre aux manques dans ce contexte applicatif précis.

Le schéma d'homogénéisation linéaire proposé par Malekmohammadi et al. (2014) est ici choisi pour être associé à l'approche incrémentale. Trois raisons ont motivé ce choix. D'une part, et en lien avec le contexte d'application précédemment décrit, un avantage majeur de ce schéma particulier est de prendre en compte la présence de la résine, alors qu'elle était négligée dans la majorité des schémas de la littérature consacrée aux composites considérés au moment où l'on a fait ce choix. Cela a permis d'améliorer la qualité des estimations en élasticité et a ouvert la voie vers la prise en compte de la viscoélasticité. D'autre part, pour l'évaluation de la généralisation de l'approche incrémentale dans le cas de phases anisotropes, ce schéma fournit de bonnes estimations en élasticité (comparativement aux solutions de référence issues de simulations en champs complets). Enfin, ce schéma a été proposé par l'équipe de l'Université de Colombie Britannique avec laquelle nous collaborons. Le choix de ce schéma correspondait à une demande de notre partenaire.

Dans un premier temps (VI.C.1), nous présentons l'idéalisation de la mésostructure réelle sur laquelle est fondé le modèle de Malekmohammadi et al. (2014) de même que les expressions analytiques des propriétés élastiques effectives résultantes. Le second paragraphe (VI.C.2) a pour but de confronter les réponses viscoélastiques estimées par l'approche incrémentale couplée au schéma de Malekmohammadi et al. (2014) aux solutions de référence obtenues par EF grâce à un modèle développé antérieurement.

VI.C.1. Définition de la cellule élémentaire et propriétés élastiques effectives

Dans des travaux antérieurs (Gereke et al., 2012), les chercheurs de l'UBC ont idéalisé le composite à copeaux de bois lamellés sous forme d'un assemblage géométriquement régulier de copeaux rectangulaires de même taille, tous alignés dans la même direction, et entourés d'une fine pellicule de résine d'épaisseur constante. Alors que l'hypothèse d'empilement régulier de copeaux identiques (forme et dimensions) était classiquement adoptée dans la littérature pour ce type de matériaux, l'enrobage de chaque copeau par de la résine constituait à l'époque une contribution plutôt novatrice. La cellule élémentaire du matériau correspondante est présentée sur la Figure 48. Malekmohammadi et al. (2014) sont repartis de cette idéalisation pour élaborer un modèle d'homogénéisation. En combinant des ingrédients micromécaniques classiques, ce dernier permet d'établir des relations analytiques pour dériver les neuf constantes ingénieurs de la cellule précédente dans le cas où la résine est isotrope et le copeau orthotrope. L'expression générique obtenue pour les trois modules d'Young E_{ic} (selon les axes du repère Figure 48) est la suivante :

$$E_{ic} = E_r * \frac{\lambda_i + \left(\frac{\lambda_i + 1}{\xi_i} + \frac{1}{\xi_k}\right)}{1 + \left(\frac{\lambda_i + 1}{\xi_i} + \frac{1}{\xi_k}\right)} \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ et } (j, k) = (2,3), (1,3) \text{ ou } (1,2) \quad (VI.1)$$

$\lambda_i = \frac{E_{is}}{E_r}$ désigne le rapport entre le module d'Young du copeau dans la direction i , E_{is} , et celui de la résine, E_r . La caractéristique morphologique $\xi_i = \frac{L_i}{t_r}$ (resp. $\xi_j = \frac{L_j}{t_r}$ et $\xi_k = \frac{L_k}{t_r}$) désigne le rapport entre la longueur du copeau dans la direction i (resp. j et k), notée L_i (resp. L_j et L_k) et l'épaisseur de résine t_r .

Pour ne pas alourdir, les expressions des trois modules de cisaillement et des trois coefficients de Poisson ne sont pas reportées. Le lecteur intéressé pourra retrouver leur expression détaillée dans Malekmohammadi et al. (2014).

Les estimations ont été validées avec succès par confrontation aux solutions obtenues par simulations en champs complets avec Abaqus® (Malekmohammadi et al. (2014)) pour différentes fractions volumiques de résine variant entre 0,01 et 0,08. Les dimensions du copeau étaient fixées en accord avec les données expérimentales d'Arwade et al. (2009) : $L = 600$ mm, $R = 5$ mm et $T = 13$ mm. L'épaisseur de la résine était donc ajustée selon la fraction volumique de résine à tester, la valeur caractéristique des matériaux industriels étant d'environ 0,07 (correspondant à une épaisseur de résine de 0,28 mm).

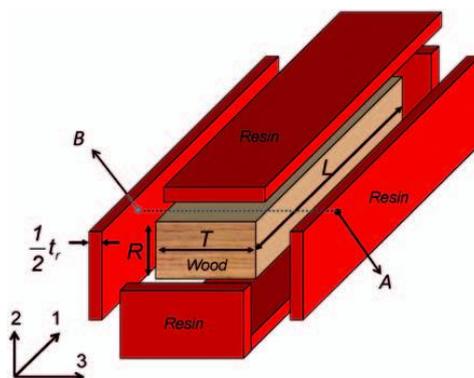


Figure 48 : Cellule élémentaire représentative d'un composite à copeaux de bois lamellés, d'après Malekmohammadi et al. (2014). La résine est détachée du copeau pour plus de clarté.

L'approche incrémentale est ici associée au modèle précédent pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire (IV.E). Les dimensions du copeau données précédemment sont conservées et l'épaisseur de résine est de 0,28 mm. Les propriétés mécaniques du copeau, élastique linéaire orthotrope, sont issues des travaux de Malekmohammadi et al. (2014). Elles correspondent aux propriétés réelles des essences de Pin présentes au Canada et sont présentées dans le Tableau 29. Pour une première approche, la résine est décrite par un modèle de Maxwell généralisé à une variable interne de nature déviatorique. Ses propriétés sont consignées dans le Tableau 30.

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
Copeau	13000	1393	856	0,467	0,456	0,488	991	909	162

Tableau 29 : Propriétés mécaniques du copeau de bois (en MPa pour E_i et G_{ij}).

	Compressibilité (GPa)	Cisaillement (GPa)	Viscosité déviatorique (GPa.s)	Temps caractéristique (s)
Branche ∞	1,068	0,493	x	x
Branche 1	5,416	2,5	20	8

Tableau 30 : Propriétés mécaniques de la résine.

Deux chargements de relaxation sont imposés et les réponses en contrainte sont étudiées : l'un est uniaxial dans la direction longue du copeau (VI.2), l'autre en glissement dans les trois plans simultanément (VI.3).

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * 10^{-3} \quad (VI.2)$$

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} * 10^{-3} \quad (VI.3)$$

Le temps total de simulation est de $t_{max} = 20$ s. Le pas de calcul retenu dans l'approche incrémentale est $dt = 0,5$ s. Pour la solution de référence, des travaux antérieurs ont fourni le maillage à convergence et c'est celui qui a été utilisé ici.

VI.C.2. Résultats

Sur la Figure 49 (resp. Figure 50), les réponses homogénéisées estimées (AI) sont confrontées aux solutions de référence (EF) pour le chargement de relaxation uniaxial (resp. en glissement).

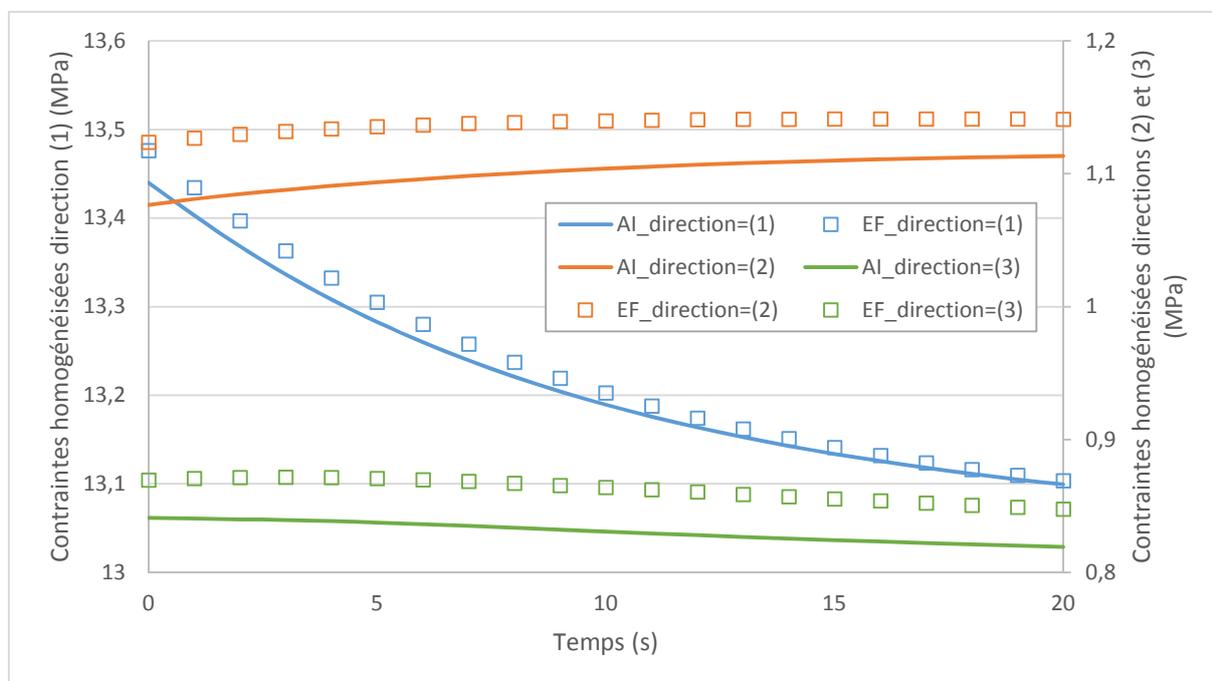


Figure 49 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) dans les trois directions de l'espace. Composite à copeaux de bois lamellés orthotropes. Chargement de relaxation uniaxial (VI.2). Fraction volumique de copeaux 0,93.

Pour la relaxation uniaxiale, l'erreur relative est en dessous de 0,3% dans la direction (1), maximale à l'instant initial (inférieure à 4,5%) dans la direction (2) puis diminue au cours du temps pour descendre en dessous de 2,5% à $t = 20$ s. Elle reste autour de 3,5% dans la direction (3). Pour le chargement en glissement, les erreurs relatives sont en dessous de 1% dans les plans (1,2) et (2,3) et maximales dans le plan (1,3) mais toujours inférieures à 2% tout au long du calcul. Dans tous les cas, nous avons donc une estimation raisonnable de l'évolution des réponses en contrainte au cours du temps. Les estimations ont tendance à se rapprocher des solutions de référence lorsque les propriétés de la résine se relaxent.

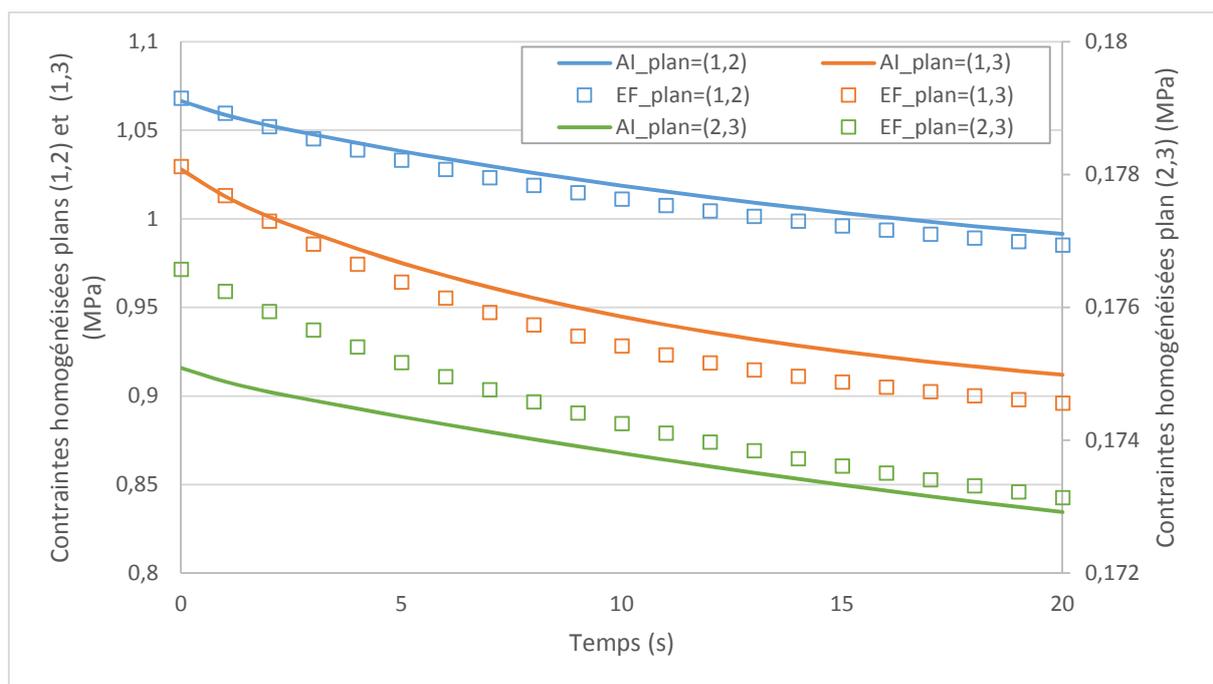


Figure 50 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) dans les trois plans. Composite à copeaux de bois lamellés orthotropes. Chargement de relaxation en glissement (VI.3). Fraction volumique de copeaux 0,93.

VI.C.3. Bilan

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés à un nouveau type de matériaux hétérogènes, les composites à copeaux de bois lamellés comme supports pour une première application de l'AI dans le cas où l'une des phases est anisotrope. A cet effet, l'approche incrémentale a été couplée au schéma d'homogénéisation de Malekmohammadi et al. (2014). Les réponses homogénéisées à deux chargements de relaxation (uniaxial et en glissement dans les trois plans de l'espace) ont été confrontées aux solutions EF de référence.

- Les estimations sont de bonne qualité (pour les chargements étudiés).
- Les résultats fournissent ainsi une nouvelle illustration de la possible conjonction de l'AI à des schémas d'homogénéisation variés et confirment son efficacité. Sous réserve de disposer d'un schéma d'homogénéisation adapté, l'utilisation de l'AI dans le cas où la phase élastique est orthotrope et la phase viscoélastique isotrope se fait sans difficulté majeure supplémentaire par rapport au cas où les deux phases sont isotropes.

Conclusion de la *PARTIE 2*

Dans cette *PARTIE 2*, nous avons cherché à élargir le spectre d'applications de l'approche incrémentale développée à l'origine par Lahellec et Suquet (2007a), en vue d'une part de pouvoir considérer des lois viscoélastiques linéaires plus élaborées et d'autre part d'autres types de microstructures que celles envisagées par les auteurs précités.

En vue de répondre au premier objectif, le chapitre (IV) a proposé une généralisation de l'approche incrémentale au cas de plusieurs variables internes de nature non nécessairement déviatorique. Bien que la majorité des applications ultérieurement considérées concernent des phases isotropes, l'approche étendue a été théoriquement formulée dans le cas plus général de phases anisotropes.

Dans le chapitre (V), des cas d'application de complexité croissante ont été présentés pour évaluer la généralisation précédemment réalisée et la faisabilité de la résolution numérique sous-jacente. La microstructure périodique à fibres longues de la *PARTIE 1* a été considérée comme support et les deux phases étaient isotropes. Le problème auxiliaire thermoélastique a été résolu avec le schéma de Luciano et Barbero (1994) et les réponses estimées (globale et moyennes par phase) confrontées aux solutions exactes obtenues par EF.

- En considérant une seule variable interne dotée de parts sphérique et déviatorique et des temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement identiques, les résultats sont d'excellente qualité avec une précision meilleure, en particulier lorsque le taux de fibres augmente, que dans le cas similaire à variable interne uniquement déviatorique (*PARTIE 1*). La qualité des estimations reste remarquable en relaxant l'hypothèse de coefficient Poisson constant dans la matrice et ce, pour une large gamme de ratios de temps caractéristiques (taux de fibres de 0.25).
- Nous avons ensuite montré que les estimations de l'approche incrémentale dans le cas où les deux phases sont viscoélastiques, avec et sans l'hypothèse de variable interne déviatorique, sont excellentes. La qualité des estimations est maintenue pour un large spectre de valeurs de viscosité affectées à la fibre entre le cas extrême où elle peut être assimilée à une porosité (à très faible viscosité) et celui où elle peut être considérée élastique (à très forte viscosité).
- Enfin, nous avons considéré une matrice dont les propriétés au cours du temps étaient décrites par un modèle de Maxwell généralisé, d'abord à 2 puis 3 variables internes. Les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement ont été choisis identiques. Les estimations obtenues par l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) sont toujours en adéquation avec les solutions de référence et cela pour un chargement plus complexe et des temps de relaxation proches comme éloignés.

Dans le chapitre suivant (VI), nous avons exploré les capacités de l'approche incrémentale pour de nouvelles microstructures en association avec d'autres schémas d'homogénéisation que ceux utilisés dans Lahellec et Suquet (2007a,b,c).

- L'approche incrémentale (AI) a ainsi été couplée au schéma de Mori-Tanaka (MT) et de Double-Inclusion (DI) pour une microstructure à inclusions sphériques. Dans un premier temps, les réponses estimées à un chargement monotone de traction uniaxiale ont été confrontées aux solutions extraites de la littérature obtenues avec les transformées de Laplace d'une part, et

l'approche additive tangente (Czarnota et al. (2015)) d'autre part, ces deux approches étant aussi couplées au schéma de MT. L'excellente corrélation avec la solution de Laplace démontre la validité du codage sous-jacent au couplage de l'AI avec le schéma de MT. L'estimation de l'AI apparaît par ailleurs légèrement meilleure que celle de l'approche additive tangente (sur le cas étudié) témoignant de l'efficacité de l'AI. Dans un second temps, les estimations de l'AI couplée au schéma de MT et DI ont été comparées aux solutions EF. Les écarts révèlent des tendances en accord avec les performances connues des deux schémas d'homogénéisation linéaire et soulignent le gain du modèle de DI lorsque les inclusions sont plus rigides que la matrice, les contrastes forts et ce, d'autant plus que le taux de sphères est élevé.

- L'AI couplée aux schémas de MT et de DI a ensuite été testée pour différents rapports de forme d'inclusions. Des inclusions ellipsoïdales prolates et oblates ont été considérées. Les estimations ont par ailleurs été mises en regard de celles obtenues en branchant l'AI avec les modèles de Reuss, CCA, et CSA. Bien que n'ayant pu être comparées aux solutions de référence, les estimations sont en accord avec les résultats attendus.
- Enfin, l'AI a été couplée au schéma de Malekmohammadi et al. (2014), adapté à la mésostructure d'un composite à copeaux de bois lamellés dont les copeaux sont orthotropes. Les réponses homogénéisées sont relativement précises pour les deux chargements de relaxation étudiés.

En résumé, nous avons élargi le spectre d'applications susceptibles d'être traitées avec l'approche incrémentale et ainsi illustré la qualité des estimations dans différentes configurations (lois/microstructures). Nous avons démontré :

- la fiabilité de la version généralisée de l'AI et de son codage dans le cas de plusieurs variables internes et en présence de déformations volumiques anélastiques ;
- le caractère opérationnel du branchement de l'AI à des schémas linéaires variés.

PARTIE 3

Approche incrémentale : vers le couplage avec la température

Introduction de la *PARTIE 3*

L'objectif de cette partie est de mettre en œuvre l'approche incrémentale en présence d'un couplage direct entre les effets mécaniques (viscoélastiques) et thermiques au sein du milieu hétérogène. Dans un premier chapitre (VII), le problème thermomécanique fortement couplé est formulé et l'approche incrémentale revisitée en vue d'une première résolution. Dans le chapitre (VIII), des cas de calcul simplifiés, consistant à imposer un chargement en température uniforme en tout point simultanément au chargement mécanique, sont abordés. Dans un dernier chapitre (IX), nous essayons d'appréhender la variation de température résultant d'un chargement purement mécanique. La résolution de l'équation de la chaleur est alors intégrée à la procédure d'optimisation de l'approche incrémentale en tenant compte des termes source (couplage thermomécanique et dissipation intrinsèque).

Tables des matières de la *PARTIE 3*

Introduction de la PARTIE 3	119
VII. Approche incrémentale avec couplage thermoviscoélastique	121
VII.A. Lois de comportement des constituants	121
VII.B. Formulation du problème hétérogène thermomécanique couplé (versions initiale et discrétisée)	122
VII.C. Hypothèses de travail	126
VII.D. Méthode variationnelle	127
VII.E. Ecriture du problème auxiliaire thermoélastique	128
VII.F. Discussion et définition des cas d'application	129
VIII. Température uniforme imposée en tout point	131
VIII.A. Comportements des phases et chargements retenus	131
VIII.B. Fibres élastiques	134
VIII.B.1. Réponse homogénéisée sous chargement purement mécanique seul	134
VIII.B.2. Réponses homogénéisées pour différents chargements thermomécaniques	135
VIII.B.3. Contraintes asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase	138
VIII.C. Fibres thermoélastiques	140
VIII.C.1. Réponses homogénéisées pour différents chargements thermomécaniques	141
VIII.C.2. Effet de la vitesse du chargement thermique sur les réponses homogénéisées	142
VIII.C.3. Contraintes asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase	143
VIII.D. Fibres thermoviscoélastiques	144
IX. Prise en compte de la variation de température induite par le chargement mécanique	146
IX.A. Comportement des phases et intégration de l'équation de la chaleur dans la procédure de résolution	146
IX.B. Premier résultat	148
Conclusion de la PARTIE 3	150

VII. Approche incrémentale avec couplage thermoviscoélastique

Dans ce chapitre, nous cherchons à mettre en place les bases théoriques et le formalisme adossés à la prise en compte d'un **couplage direct** entre la viscoélasticité et les phénomènes thermiques dans des problèmes hétérogènes. Parmi les raisons évoquées dans le paragraphe (I.D) nous ayant poussés à choisir l'approche incrémentale afin de résoudre un problème hétérogène viscoélastique, figurait le cadre général de la thermodynamique des processus irréversibles dans lequel elle s'inscrit. Ainsi, l'ajout de la température comme variable d'état supplémentaire dans l'approche incrémentale semble possible. Nous reprenons donc une à une chacune des étapes majeures de l'approche incrémentale : formulation du problème hétérogène couplé dans sa version initiale puis discrétisée, définition du potentiel incrémental effectif, approche variationnelle et mise en place du problème auxiliaire thermoélastique. Nous verrons ainsi dans quelles mesures le couplage peut être considéré. Des simplifications seront introduites progressivement, puis commentées et conduiront finalement à la définition de cas d'application spécifiques pour une première résolution concrète.

VII.A. Lois de comportement des constituants

Comme dans les parties précédentes, nous restons dans le cadre général des *Matériaux Standards Généralisés* qui se prête particulièrement bien à la prise en compte d'un couplage thermomécanique. Nous considérons une seule variable interne par simplicité. Elle sera néanmoins de nature non nécessairement déviatorique, ce qui conserve un des aspects de la généralisation opérée dans la **PARTIE 2**. Ainsi, chaque matériau est défini à partir de deux potentiels. L'énergie libre est une fonction de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, d'une variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ et de la température T . Le potentiel de dissipation est quant à lui une fonction de la dérivée temporelle $\underline{\underline{\dot{\alpha}}}$ de la variable interne ainsi que du vecteur $\frac{1}{T}\underline{\underline{q}}$ où $\underline{\underline{q}}$ désigne le vecteur flux de chaleur. Dans un souci d'approche progressive des difficultés, on suppose dans le cadre des présents travaux le découplage des dissipations intrinsèque et thermique. Cela revient à considérer que le potentiel de dissipation est la somme de deux termes, l'un fonction de $\underline{\underline{\dot{\alpha}}}$ et l'autre fonction de $\frac{1}{T}\underline{\underline{q}}$. Ainsi, les potentiels s'écrivent :

$$\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \quad (\text{VII.1})$$

$$\varphi\left(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \frac{1}{T}\underline{\underline{q}}\right) = \varphi_1(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) + \varphi_2\left(\frac{1}{T}\underline{\underline{q}}\right) \quad (\text{VII.2})$$

Notons qu'il serait aussi possible d'écrire les mêmes relations/équations avec plusieurs variables internes, par analogie avec le chapitre (IV).

L'ajout de la variable d'état qu'est la température génère une nouvelle force thermodynamique, l'entropie massique s qui dérive de l'énergie libre spécifique. La dérivation du potentiel de dissipation, particulièrement de son second terme, donne une nouvelle loi complémentaire reliant le gradient de température $\underline{\nabla T}$ au vecteur flux de chaleur. Ici et de manière classique, on adopte d'emblée la forme quadratique du second terme du potentiel de dissipation conduisant à la loi de diffusion de la chaleur de Fourier.

En regroupant l'ensemble des équations, les lois constitutives du matériau s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \quad (\text{VII.3})$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \underline{\underline{0}} \quad (\text{VII.4})$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \quad (\text{VII.5})$$

$$-\underline{\underline{\nabla T}} = [T\underline{\underline{k}}_q]^{-1} \cdot \underline{\underline{q}} \quad (\text{VII.6})$$

où le tenseur $[T\underline{\underline{k}}_q]$ est le tenseur d'ordre 2 de conductivité thermique qui est symétrique.

Chaque constituant du milieu hétérogène est complètement défini à partir des équations précédentes. Pour rappel, la force thermodynamique $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ associée à la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}$ est donnée par :

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T). \text{ Elle dépend à présent de la température.}$$

VII.B. Formulation du problème hétérogène thermomécanique couplé (versions initiale et discrétisée)

Nous considérons un V.E.R. d'un matériau hétérogène, noté V , dans lequel chaque phase r est décrite par les relations (VII.3) à (VII.6). Les propriétés mécaniques et thermiques sont homogènes par phase. Il est alors possible de définir les deux potentiels ψ et φ en chaque point (position) $\underline{\underline{x}}$ de V sous la forme :

$$\rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T, \underline{\underline{x}}) = \sum_r \rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \chi^{(r)}(\underline{\underline{x}}) \quad (\text{VII.7})$$

$$\varphi\left(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \frac{1}{T} \underline{\underline{q}}, \underline{\underline{x}}\right) = \sum_r \left[\varphi_1^{(r)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) + \varphi_2^{(r)}\left(\frac{1}{T} \underline{\underline{q}}\right) \right] \chi^{(r)}(\underline{\underline{x}}) \quad (\text{VII.8})$$

Dans les parties précédentes, l'écriture de la relation de compatibilité et des relations de continuité à satisfaire aux frontières entre les différentes phases était omise par simplicité. L'ajout d'une variable d'état qu'est la température nous pousse vers une écriture plus complète du problème local, à partir du champ de déplacement \underline{u} , afin de faciliter l'analogie avec les relations portant sur le champ de température T . Ces deux champs sont inconnus en tout point et à tout temps au-delà de l'instant initial, c'est-à-dire ils sont à déterminer $\forall (\underline{x}, t) \in V \times]0, t_{max}]$.

Nous supposons ici le V.E.R. soumis à un chargement mécanique, défini par l'histoire du tenseur de déformation macroscopique, $\underline{E}(t)$, et/ou à un chargement thermique, par exemple défini par l'histoire du gradient de température macroscopique, $\underline{\nabla T}^M(t)$, tels que :

$$\left\{ \underline{E}(t) \text{ et/ou } \underline{\nabla T}^M(t), t \in [0, t_{max}] \right\} \quad (VII.9)$$

En termes de conditions aux interfaces, nous avons continuité du déplacement et de la température, tout comme du vecteur contrainte et du vecteur flux de chaleur selon la normale aux interfaces :

$$\left\{ \llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{0}, \llbracket \underline{\sigma} \cdot \underline{N} \rrbracket = \underline{0}, \llbracket T \rrbracket = 0, \llbracket \underline{q} \cdot \underline{N} \rrbracket = 0 \right\} \quad (VII.10)$$

où \underline{N} est le vecteur unitaire normal aux interfaces.

Enfin, on impose que les moyennes volumiques sur le V.E.R. des champs de déformation et de gradient de température soient égales aux grandeurs macroscopiques correspondantes (Kahn et Muliana (2012)), et cela en tout temps, ce qui donne les relations :

$$\left\{ \langle \underline{\varepsilon}(t) \rangle = \underline{E}(t) \text{ et } \langle \underline{\nabla T}(t) \rangle = \underline{\nabla T}^M(t), t \in [0, t_{max}] \right\} \quad (VII.11)$$

Dans ces conditions, le problème local à résoudre s'écrit sous la forme du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla u}} + (\underline{\underline{\nabla u}})^T \right) \\
 \underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \\
 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} (\underline{\underline{\alpha}}) = \underline{\underline{0}} \\
 s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \\
 - \underline{\underline{\nabla T}} = [T \underline{\underline{k}}_q]^{-1} \cdot \underline{\underline{q}} \\
 \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \\
 \rho c_s \frac{dT}{dt} = - \text{div} \underline{\underline{q}} + T * \frac{\partial}{\partial T} (\underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \left\{ \underline{\underline{\mathcal{A}}} - T * \frac{\partial}{\partial T} (\underline{\underline{\mathcal{A}}}) \right\} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \\
 \llbracket \underline{\underline{u}} \rrbracket = \underline{\underline{0}}, \llbracket \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{N}} \rrbracket = \underline{\underline{0}}, \llbracket T \rrbracket = 0, \llbracket \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{N}} \rrbracket = 0 \\
 \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}} \text{ et } \langle \underline{\underline{\nabla T}} \rangle = \underline{\underline{\nabla T}}^M + c.l. \text{ sur } \partial V
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \forall (\underline{\underline{x}}, t) \in V \times [0, t_{max}] \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \forall (t) \in [0, t_{max}]
 \end{array} \quad (VII.12)$$

La septième relation est l'équation de la chaleur qui dérive du premier principe de la thermodynamique et dans laquelle c_s est la chaleur spécifique que l'on supposera homogène dans chacune des phases. Il est à noter que la forme de cette équation est ici donnée dans le cas où c'est la déformation qui est partitionnée en une partie élastique et une partie anélastique et non la contrainte en accord avec l'application qui sera envisagée dans les chapitres (VIII et IX). Elle pourrait néanmoins être écrite dans le cas d'une partition sur la contrainte. L'équation de la chaleur traduit la contribution des effets thermiques purs et des effets de couplages mécaniques, élastiques et visqueux, sur la variation de température. La notion de terme source peut être introduite. En effet, lorsque des matériaux viscoélastiques sont sollicités, la viscosité engendre une élévation de la température par dissipation d'énergie. Cette source d'échauffement est naturellement présente au sein de l'équation de la chaleur. Par ailleurs, dans l'équation de la chaleur, il y a normalement un terme impliquant le taux de chaleur reçu par rayonnement extérieur sur le système, que nous ne considérons pas ici. Dans la formulation du problème hétérogène proposée, la contribution d'origine purement thermique se réduit à la seule conduction.

De la même manière que dans les parties précédentes, le problème local est discrétisé en $m+1$ temps sur l'intervalle $[0, t_{max}]$ définis par un pas de temps dt et tels que $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m = t_{max}\}$. Les champs locaux $\underline{\underline{\sigma}}_n(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\varepsilon}}_n(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\alpha}}_n(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{u}}_n(\underline{\underline{x}}), T_n(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{q}}_n(\underline{\underline{x}}), s_n(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\nabla T}}_n(\underline{\underline{x}})$ au temps t_n sont supposés connus tandis que les champs locaux à l'instant t_{n+1} $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{u}}_{n+1}(\underline{\underline{x}}), T_{n+1}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{q}}_{n+1}(\underline{\underline{x}}), s_{n+1}(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\nabla T}}_{n+1}(\underline{\underline{x}})$ sont recherchés de sorte à satisfaire le problème (VII.13) (version discrétisée du problème (VII.12)) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}_{n+1} + \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}_{n+1} \right)^T \right) \\
 \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, T_{n+1} \right) \\
 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, T_{n+1} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt} \right) = \underline{\underline{0}} \\
 s_{n+1} = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}, T_{n+1} \right) \\
 - \underline{\underline{\nabla}} T_{n+1} = \left[T_{n+1} \underline{\underline{k}}_q \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{q}}_{n+1} \\
 \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{0}} \\
 \rho c_s \frac{T_{n+1} - T_n}{dt} = - \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{q}}_{n+1} + T_{n+1} * \frac{\partial}{\partial T} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \right) : \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_n}{dt} \\
 + \left\{ \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{n+1} - T_{n+1} * \frac{\partial}{\partial T} \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{n+1} \right) \right\} : \frac{\underline{\underline{\alpha}}_{n+1} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt} \\
 \llbracket \underline{\underline{u}}_{n+1} \rrbracket = \underline{\underline{0}}, \llbracket \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{N}} \rrbracket = \underline{\underline{0}}, \llbracket T_{n+1} \rrbracket = 0, \llbracket \underline{\underline{q}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{N}} \rrbracket = 0 \\
 \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1} \text{ et } \langle \underline{\underline{\nabla}} T_{n+1} \rangle = \underline{\underline{\nabla}} T_{n+1}^M + c.l. \text{ sur } \partial V
 \end{array} \right. \quad \forall \underline{\underline{x}} \in V \quad (VII.13)$$

dans lequel les dérivées par rapport au temps ont été approchées par des quotients selon un schéma d'Euler implicite et toutes les équations écrites à l'instant t_{n+1} .

En restant dans le formalisme de l'approche incrémentale, nous introduisons le potentiel incrémental

$$J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) = \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) + dt \cdot \varphi_1 \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n}{dt} \right) \quad (VII.14)$$

En prenant la dérivée de J par rapport à $\underline{\underline{\alpha}}$, on constate en effet que la troisième équation dans (VII.13) correspond à l'équation d'Euler-Lagrange pour le problème variationnel :

$$\text{Inf}_{\underline{\underline{\alpha}}} J(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \underline{\underline{\alpha}}, T_{n+1}) \quad (VII.15)$$

dont $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}$ est la solution. On définit alors le potentiel incrémental effectif \check{J} sous la forme variationnelle suivante :

$$\check{J}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) = \text{Inf}_{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}_{n+1}} \text{Inf}_{\underline{\underline{\alpha}}} \langle J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T_{n+1}) \rangle \quad (VII.16)$$

En définissant \check{J} de la sorte, la contrainte moyenne $\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \rangle$ satisfait :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} = \frac{\partial \check{J}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) + \langle \rho s \cdot \frac{\partial T}{\partial \underline{\underline{E}}} \rangle \quad (VII.17)$$

En effet, en calculant la dérivée de \check{J} par rapport à $\underline{\underline{E}}$, il vient :

$$\frac{\partial \check{J}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}_{n+1}) = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\alpha}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle \quad (\text{VII.18})$$

Le deuxième terme disparaît en vertu de la stationnarité de J par rapport à $\underline{\underline{\alpha}}$. Avec $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ et en utilisant de lemme de Hill, le premier terme se réduit à :

$$\left\langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \right\rangle : \left\langle \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \right\rangle = \underline{\underline{\Sigma}}_{n+1} \quad (\text{VII.19})$$

D'où la relation (VII.17) qui par rapport aux parties précédentes implique un terme supplémentaire impliquant l'entropie. Il est clair qu'à ce stade, seul le traitement des équations de la partie « mécanique » du problème discrétisé couplé (VII.13) a été abordé et par ailleurs de façon partielle puisque la relation micro-macro portant sur le gradient de température n'a pas été incorporée dans la caractérisation variationnelle de \check{J} . C'est la raison pour laquelle la température macroscopique est volontairement omise en tant qu'argument de \check{J} . Nous reviendrons sur ces faiblesses dans un paragraphe de discussion ultérieurement. Avant cela, nous choisissons de poursuivre le cheminement des autres parties afin d'aller plus loin dans le traitement du potentiel incrémental effectif que nous venons de définir.

VII.C. Hypothèses de travail

Comme dans les chapitres (II) et (IV), des hypothèses portant sur les lois constitutives des phases sont formulées. Tout d'abord, nous supposons la forme quadratique suivante de l'énergie libre :

$$\rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{VII.20})$$

$$\left[-\underline{\underline{d}}_{\varepsilon}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} * (T - T_0) \right] - \left[\underline{\underline{d}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} * (T - T_0) \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{\rho^{(r)} c_s^{(r)}}{T_0} (T - T_0)^2 \right]$$

avec $c_s^{(r)}$ la capacité thermique massique de la phase r (à déformation et variable interne constantes) et $\underline{\underline{d}}_{\varepsilon}^{(r)}$ et $\underline{\underline{d}}_{\alpha}^{(r)}$ des tenseurs d'ordre 2 dont l'expression implique le tenseur de dilatation thermique et dépend du modèle spécifique qui sera retenu.

Par rapport au potentiel dans le cas purement mécanique (II.13), trois termes entourés de pointillés sont rajoutés. Les termes bleu et vert sont relatifs aux effets de couplage thermomécanique alors que le dernier traduit un effet purement thermique.

Le premier terme du potentiel de dissipation est également supposé de forme quadratique :

$$\varphi_1^{(r)}(\underline{\underline{\alpha}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{VII.21})$$

Les tenseurs d'ordre 4 présents dans les équations (VII.20) et (VII.21) sont dotés des symétries majeure et mineure. Ils sont de même que les propriétés thermiques (capacité massique, tenseur de dilatation thermique et tenseur de conductivité) supposés indépendants de la température. On néglige donc les couplages dits indirects (Rambert (2002)).

Enfin, nous poursuivons la suite des développements théoriques sans supposer l'isotropie des phases.

VII.D. Méthode variationnelle

Dans ce paragraphe et comme annoncé plus haut, nous choisissons de poursuivre le traitement du potentiel incrémental tel que nous l'avons défini en s'appuyant notamment sur les hypothèses précédemment introduites. Pour simplifier les écritures, les champs $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$, $\underline{\underline{\alpha}}_{n+1}$, T_{n+1} et $\underline{\underline{E}}_{n+1}$ seront désormais notés $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\alpha}}$, T et $\underline{\underline{E}}$.

A ce stade du cheminement et pour la troisième fois depuis le début de ce manuscrit, il est nécessaire de lever le verrou lié à l'homogénéisation du potentiel incrémental J qui n'est pas uniforme par morceaux. A cet effet, une énergie J_0 , choisie uniforme par morceaux, est retranchée et ajoutée à l'énergie J en s'inspirant toujours du principe proposé par Ponte-Castañeda (1992). L'énergie de référence J_0 est ici définie par :

$$J_0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T, \underline{\underline{x}}) = \sum_r J_0^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \chi^{(r)}(\underline{\underline{x}}) \quad (\text{VII.22})$$

avec étant donné les hypothèses de travail

$$J_0^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) = \rho^{(r)} \psi^{(r)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) + \frac{1}{2} \frac{1}{dt} (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\alpha}^{(r)} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}) \quad (\text{VII.23})$$

où le tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(r)}$, de même que le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\alpha}^{(r)}$ défini par

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{0v\alpha}^{(r)} = \underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \quad (\text{VII.24})$$

sont uniformes dans la phase r .

En insérant l'énergie J_0 dans l'expression (VII.16) du potentiel effectif \check{J} et en imposant la stationnarité de $\Delta J = J - J_0$ par rapport à $\underline{\underline{\alpha}}$, il vient :

$$\check{J}(\underline{\underline{E}}) \approx \underset{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}}{\text{Inf}} \left[\underset{\underline{\underline{\alpha}}}{\text{Inf}} \langle J_0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) \rangle + \langle \text{Stat} \Delta J(\underline{\underline{\alpha}}) \rangle \right] \quad (\text{VII.25})$$

$$\tilde{W}_\Delta(\underline{E}, T) = \text{Inf}_{\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E}} \langle w_\Delta^{(r)}(\underline{\varepsilon}, T) \rangle, w_\Delta^{(r)}(\underline{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} : \underline{\varepsilon} + \underline{\tau}^{(r)} : \underline{\varepsilon} + f^{(r)} \quad (\text{VII.31})$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)}$ et $\underline{\tau}^{(r)}$ mais aussi l'énergie $f^{(r)}$ sont définis par :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(r)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(r)} + \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \left[\underline{I} - \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} \right] \quad (\text{VII.32})$$

$$\underline{\tau}^{(r)} = -\frac{1}{dt} \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\alpha}_n^{(r)} \quad (\text{VII.33})$$

$$\left[\underline{\underline{d}}_\varepsilon^{(r)} + \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{d}}_\alpha^{(r)} \right] \cdot (T(\underline{x}) - T_0(\underline{x}))$$

$$f^{(r)} = \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} + \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} \right]^{-1} : \left[\frac{1}{2} \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(r)} : \underline{\alpha}_n^{(r)} : \underline{\alpha}_n^{(r)} \right. \quad (\text{VII.34})$$

$$\left. - \frac{1}{dt} \underline{\underline{\Theta}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{d}}_\alpha^{(r)} : \underline{\alpha}_n^{(r)} \cdot (T(\underline{x}) - T_0(\underline{x})) - \frac{1}{2} \underline{\underline{d}}_\alpha^{(r)} : \underline{\underline{d}}_\alpha^{(r)} \cdot (T(\underline{x}) - T_0(\underline{x}))^2 \right]$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\rho^{(r)} c_s^{(r)}}{T_0(\underline{x})} (T(\underline{x}) - T_0(\underline{x}))^2$$

Il est à noter que les termes encadrés dans les expressions (VII.33) et (VII.34) résultent de la dépendance en température de l'énergie libre des phases. Dans l'expression (VII.33), ils représentent l'apparition de contraintes d'origine thermique par effet de couplage thermomécanique. Dans (VII.34), la première ligne dans l'encadré est générée par effet de couplage thermomécanique et la seconde par effet thermique pur.

VII.F. Discussion et définition des cas d'application

Faisons un bilan du cheminement suivi jusqu'à présent. Tout d'abord nous avons tenté de formuler le problème local thermomécanique couplé dans sa version initiale, puis discrétisée dans le temps.

Devant la complexité du problème, les développements qui ont suivi ont introduit deux simplifications majeures.

- Le traitement des équations de la partie « mécanique » du problème discrétisé a pour l'instant été effectué de manière découplée de la détermination du champ de température, et notamment sans tenir compte de l'équation de la chaleur.
- La définition de \tilde{J} n'incorpore pas de relation micro-macro portant sur la température, la connexion entre les deux échelles est donc perdue sur ce point. *A priori*, cette faiblesse pourrait

être améliorée indépendamment du premier point. On pourrait choisir de travailler cette connexion sans tenir compte de la modification de température locale induite par les effets thermomécaniques et dissipatifs au sein de l'équation de la chaleur, dit autrement sans tenir compte du couplage de la mécanique sur la thermique.

On peut remarquer aussi que le découplage des dissipations intrinsèque et thermique conduisant à une forme simplifiée de la troisième équation du problème discrétisé (dépendante de la seule variable interne) et par suite à la forme (VII.14) de J , et enfin à l'additivité de (VII.23) a contribué au parallélisme méthodologique avec la **PARTIE 2**. Cela se retrouve dans « l'analogie » d'écriture des équations résultantes en notamment dans celle de l'énergie effective du problème thermoélastique qui diffère de l'expression obtenue dans la **PARTIE 2** via la présence des termes encadrés (voir pour comparaison les équations (IV.32) à (IV.34) en prenant une seule variable interne). Ces termes supplémentaires résultent des termes (couplage thermomécanique et effet thermique) rajoutés dans l'expression de l'énergie libre des phases. L'expression de la contrainte homogénéisée est néanmoins différente.

Il est bien évident que les deux simplifications précitées restreignent les situations ayant du sens que l'on est en mesure de traiter avec le formalisme développé dans les présents travaux. Nous envisageons néanmoins deux situations en guise d'application.

Application n°1 : nous appliquons au V.E.R. un chargement mécanique superposé à un chargement en température imposé en chaque point. Le champ de température est donc uniforme au sein du V.E.R. et surtout correspond à la température imposée. Cela « légitime » la définition de \check{J} adoptée, et par ailleurs élimine les mécanismes de conduction locaux. De plus, la résolution du problème est effectuée sans tenir compte de l'équation de la chaleur. Dans ce cadre extrêmement simplifié, seuls les termes de couplage thermomécanique présents au sein de l'énergie libre de l'une et/ou l'autre des phases sont activés et il s'agit alors de vérifier si le formalisme adopté dans ce qui précède conduit à des résultats probants par comparaison à des simulations en champs complets réalisées dans les mêmes conditions.

Application n°2 : nous appliquons au V.E.R. un chargement purement mécanique. On suppose (ici c'est réellement une hypothèse) que la température est uniforme au sein du V.E.R. Notons qu'une telle hypothèse a déjà été formulée par certains auteurs (Khan et al. (2011), Khan et Muliana (2012)) en vertu de la taille très petite du volume associé à chaque point d'intégration devant celle de la structure considérée. Les mécanismes de conduction sont donc négligés. On étudie un milieu biphasé tel qu'une seule des deux phases est thermoviscoélastique, l'autre est élastique linéaire. Ce cadre très particulier permet alors d'intégrer au formalisme précédemment développé la résolution simultanée de l'équation de la chaleur. L'objectif est ici de montrer cette possibilité. On tiendra ainsi compte de la modification de température du V.E.R. induite par les effets de couplages thermomécaniques et la dissipation visqueuse au sein la phase thermoviscoélastique et de la répercussion d'une telle modification sur la réponse en contrainte homogénéisée.

VIII. Température uniforme imposée en tout point

Ce chapitre traite du premier cas d'application décrit au paragraphe (VII.F), la même température est imposée en tout point selon un profil défini par l'utilisateur. L'évolution est donc adiabatique en tout point, aucun phénomène de conduction lié à un gradient de température au sein du V.E.R n'est décrit. De plus, dans ce chapitre, l'équation de la chaleur n'est pas résolue. Cela signifie notamment que la source d'échauffement par dissipation mécanique n'est pas prise en compte. Cette simplification sera éliminée dans le prochain chapitre. Nous cherchons à quantifier ici la précision de l'approche incrémentale et du codage sous-jacent dans un cas très simplifié de couplage de la thermique vers la mécanique.

Nous repartons sur la microstructure périodique à fibres longues. En effet, le modèle sous Abaqus® a pu être facilement modifié afin d'intégrer le chargement en température et ainsi pouvoir comparer les estimations obtenues avec l'approche incrémentale aux solutions de référence calculées par éléments finis. Une étude de convergence en termes de nombre de mailles a été réalisée suivant la méthode décrite au paragraphe (III.B.2) dans la configuration de calcul (comportement/chargement) la plus sévère parmi celles qui seront présentées. Cette étude donne des résultats similaires à ceux obtenus sans chargement thermique au paragraphe (III.B.2). Les maillages retenus pour toutes les simulations de ce chapitre sont ceux consignés dans le (Tableau 5).

L'approche incrémentale est une nouvelle fois couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) pour la résolution du problème thermoélastique auxiliaire qui se fait selon le même principe que dans la **PARTIE 2**.

Après avoir précisé (VIII.A) le comportement des constituants et les chargements considérés, les estimations fournies par l'approche incrémentale sont comparées aux solutions de référence obtenues par éléments finis dans des configurations de complexité croissante en termes de comportement des phases.

VIII.A. Comportements des phases et chargements retenus

Dans tous les cas abordés, la matrice de la microstructure périodique étudiée est thermoviscoélastique isotrope. Cela revient à ajouter une partie d'origine thermique au calcul de la contrainte $\underline{\underline{\tau}}^{(2)}$ (cf. formule (VII.33)). La viscoélasticité est décrite par un modèle de Maxwell à une variable interne dotée de parts sphérique et déviatorique. Le potentiel thermodynamique et le potentiel de dissipation de la matrice sont ainsi définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}\psi^{(2)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) \\ &\quad - d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) - \frac{1}{2} \frac{\rho^{(r)} c_s^{(r)}}{T_0} (T - T_0)^2 \end{aligned} \tag{VIII.1}$$

et

$$\varphi_1^{(2)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \quad (VIII.2)$$

avec :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} = 3 * k^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \mu^{(2)} * \underline{\underline{K}} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} = 3 * \omega_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \eta_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{K}} \quad (VIII.3)$$

où $d^{(2)}$ est le coefficient de dilatation thermique et $c_s^{(2)}$ la capacité massique. Les correspondances entre les tenseurs impliqués dans la forme générale (VII.20) de l'énergie libre et ceux de la forme (VIII.1) précédente sont les suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\varepsilon}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\varepsilon\alpha}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\alpha\alpha}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{d}}_{\varepsilon}^{(r)} = d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{d}}_{\alpha}^{(r)} = -d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \end{cases} \quad (VIII.4)$$

La somme des termes encadrés en bleu et vert dans la forme générale (VII.20) traduit ici les effets de couplage thermoélastique :

$$\underline{\underline{d}}_{\varepsilon}^{(r)} : \underline{\underline{\varepsilon}} * (T - T_0) + \underline{\underline{d}}_{\alpha}^{(r)} : \underline{\underline{\alpha}} * (T - T_0) = d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) \quad (VIII.5)$$

Les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont supposés identiques conduisant à un coefficient de Poisson constant dans le temps. Ce choix est motivé par le fait que l'approche incrémentale associée au schéma d'homogénéisation de Luciano et Barbero (1994) fournissait dans le cas purement mécanique de meilleures estimations avec un coefficient de Poisson constant qu'avec un coefficient de compressibilité constant, en particulier à forts taux de fibres (voir paragraphe (V.A.3)). Ainsi, avec l'hypothèse d'égalité des temps caractéristiques, on a de plus :

$$\frac{\omega_{v\alpha}^{(2)}}{k^{(2)}} = \frac{\eta_{v\alpha}^{(2)}}{\mu^{(2)}} \quad (VIII.6)$$

Concernant le comportement des fibres, trois cas sont considérés en augmentant progressivement la difficulté :

- Cas n°1 (paragraphe (VIII.B)) : les fibres sont élastiques linéaires isotropes.
- Cas n°2 (paragraphe (VIII.C)) : les fibres sont thermoélastiques linéaires isotropes. Il faut dans ce cas prendre en compte la contrainte induite par dilatation thermique, via $\underline{\underline{\tau}}^{(1)}$ (formule (VII.33)), lors de la résolution du problème auxiliaire thermoélastique (VII.E).
- Cas n°3 (paragraphe (VIII.D)) : les fibres sont thermoviscoélastiques linéaires isotropes. La viscoélasticité est décrite par une loi de Maxwell à une variable interne dotée de parts sphérique et déviatorique. Les temps caractéristiques en compressibilité et cisaillement sont identiques comme pour la matrice. Les équations gouvernant le comportement des fibres sont similaires à

celles de la matrice (voir équations (VIII.1) à (VIII.6) dans lesquelles l'exposant 2 est remplacé par 1).

Les propriétés mécaniques des deux phases sont consignées dans le Tableau 31 en fonction du cas considéré. On notera qu'elles coïncident avec les propriétés considérées au paragraphe (V.A.1) dans les cas n°1 et 2 et au paragraphe (V.B.1) dans le cas n°3. Les coefficients de dilatation thermique des phases sont donnés dans le Tableau 32.

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)	Viscosité sphérique $\omega_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)	Viscosité déviatorique $\eta_{v\alpha}^{(r)}$ (Gpa.s)
Fibre élastique ($r = 1$) (cas n°1 et 2)	222,2	166,6	x	x
Matrice ($r = 2$)	58,33	26,92	21,67	10
Fibre viscoélastique ($r = 1$) (cas n°3)	222,2	166,6	160,05	120

Tableau 31 : Propriétés purement mécaniques des constituants en fonction du cas étudié.

	Matrice $d^{(2)}$ (K^{-1})	Fibre $d^{(1)}$ (K^{-1}) Cas n°2 et 3
Coefficient de dilatation thermique	60.10^{-6}	8.10^{-6}

Tableau 32 : Coefficients de dilatation thermique des constituants en fonction du cas étudié.

La déformation macroscopique imposée est monotone croissante, sur une durée $t_{max} = 8$ s et définie par :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * 5.10^{-3} * t \quad (VIII.7)$$

Différents profils de température imposée sont choisis et représentés sur la Figure 51 : aucun (bleu), rampe (rouge), palier (jaune), créneau (orange). Sauf mention contraire, l'incrément de température est de 5 K.s^{-1} . Il est à noter que la température finale n'est pas la même en fonction du profil (rouge, jaune et orange). Le profil bleu correspond au seul chargement mécanique. Pour le chargement rampe, la variation de température imposée atteint 40 K. Nous avons conscience que l'hypothèse de propriétés indépendantes de la température est physiquement probablement grossière dans de telles conditions (en plus des autres hypothèses considérées). Néanmoins, notre seule ambition est ici d'évaluer l'AI par confrontation aux solutions de référence obtenues dans les mêmes conditions.

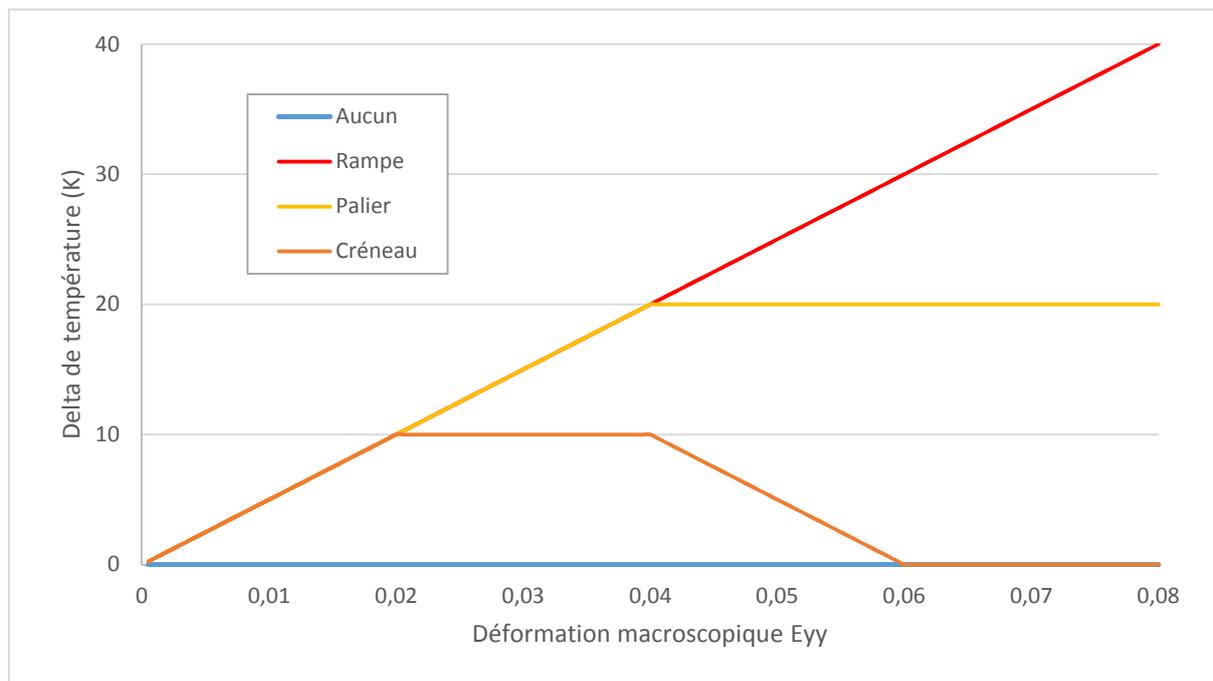


Figure 51 : Profils de température appliqués en fonction de la déformation macroscopique imposée (chargement mécanique monotone défini par (VIII.7)).

Notons que dans le cadre de ce chapitre, le second terme de l'équation (VII.17) est nul puisque la température est uniforme et surtout pilotée indépendamment du chargement mécanique. La contrainte homogénéisée à l'instant t_{n+1} dérive alors de \check{J} .

VIII.B. Fibres élastiques

Pour ce premier paragraphe, seul le comportement de la matrice est directement influencé par la variation de température imposée, via les termes de couplages thermomécaniques au niveau de son énergie libre (voir équations (VIII.1) et (VIII.5)). Bien entendu, la réponse homogénéisée est impactée, tout comme la réponse des fibres de manière indirecte.

La réponse homogénéisée pour le chargement purement mécanique défini par (VIII.7) est tout d'abord présentée, puis les réponses pour les différents chargements thermomécaniques proposés. Le taux de fibres est fixé à 0,25. Enfin, la qualité des estimations des contraintes asymptotiques en fonction du taux de fibres est analysée.

VIII.B.1. Réponse homogénéisée sous chargement purement mécanique

Dans la **PARTIE 2**, paragraphe (V.A), nous avons montré que pour les propriétés considérées dans le Tableau 31 (cas n°1) et un chargement purement déviatorique, la convergence en termes de pas de

calcul était assurée à partir du pas de temps $dt = 0,01$ s. Une étude similaire pour le chargement mécanique (VIII.7) étudié ici a conduit à retenir le même pas de calcul. On précise que, par manque de temps, il n'a pas été possible de mener une étude de convergence pour tous les comportements de phases et chargements thermomécaniques considérés dans la suite de ce manuscrit. Le pas de calcul précédent, à savoir $dt = 0,01$ s, a donc été conservé pour toutes les simulations qui seront ultérieurement présentées.

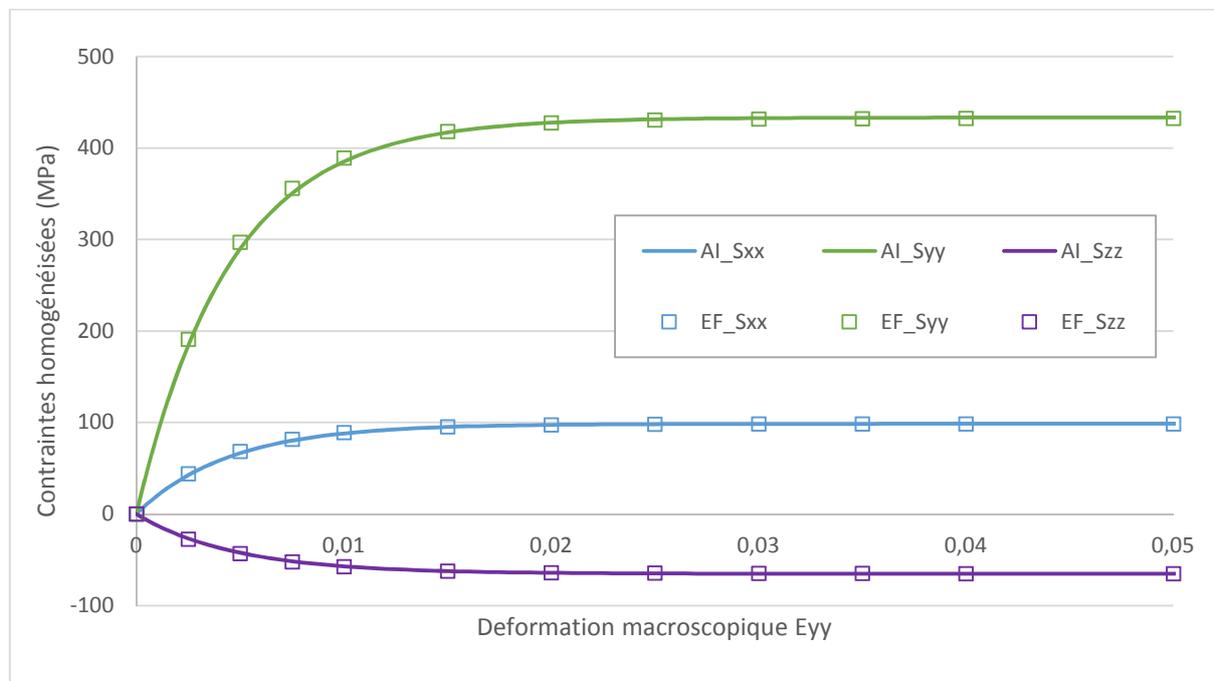


Figure 52 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise à un chargement mécanique monotone (VIII.7). Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice viscoélastique à coefficient de Poisson constant.

Sur la Figure 52, nous présentons les contraintes normales homogénéisées dans les trois directions de l'espace estimées par l'approche incrémentale (lignes continues) et calculées avec les éléments finis (symboles carrés) en réponse au chargement purement mécanique. La corrélation est de très bonne qualité avec des erreurs relatives similaires à celles obtenues dans la **PARTIE 2**.

VIII.B.2. Réponses homogénéisées pour différents chargements thermomécaniques

De par la déformation macroscopique imposée mais aussi la présence de déformations induites par le chargement en température, nous avons une réponse en contrainte dans les trois directions (Σ_{xx} , Σ_{yy} et Σ_{zz}). Pour un profil de température imposé donné, les trois contraintes normales présentent les mêmes variations, comme illustré plus tard. Nous choisissons de représenter ici à titre d'illustration uniquement la contrainte homogénéisée dans la direction des fibres Σ_{xx} . La Figure 53 compare les

estimations de cette contrainte aux solutions de référence pour tous les chargements considérés (voir Figure 51). Les écarts relatifs, dans les directions x et y , sont par ailleurs consignés dans le Tableau 33.

Pour tous les profils en température, les estimations présentent un excellent agrément avec les solutions de référence avec des écarts relatifs le plus souvent inférieurs à 0,5%.

Pour les courbes bleue (sans chargement thermique) et rouge (chargement thermique de type rampe), nous observons une similitude qualitative des formes de réponse, avec un niveau inférieur dans le cas du profil rampe (rouge). Les valeurs asymptotiques passent de 98,6 MPa (sans chargement thermique) à 82,0 MPa (avec chargement thermique). L'élévation de température engendre donc une diminution de 14,6 MPa (soit environ 15%) de la valeur asymptotique dans cette direction. Cette diminution était à prévoir de par la présence de contraintes d'origine thermique dans la matrice qui contribuent à abaisser les niveaux. Par contre, le temps à 98% est le même dans les deux cas, il n'est donc, *a priori*, pas impacté par le chargement thermique imposé. D'autre part, nous voyons que la courbe jaune, suit le même tracé que la courbe rouge tant que le profil en température est identique, puis se retrouve dans une phase transitoire au début du palier, pour finalement retomber à long terme sur la valeur de la contrainte asymptotique (sans chargement thermique), malgré le maintien en température. Ceci s'explique par la relaxation des contraintes thermiques. La dernière courbe (orange), correspondant au créneau, montre une zone de relaxation des contraintes thermiques (comme dans le cas en palier) et une autre zone où les contraintes thermiques augmentent lors de la diminution de la température. Enfin, nous retombons logiquement sur la même valeur de contrainte à long terme que dans le cas sans température.

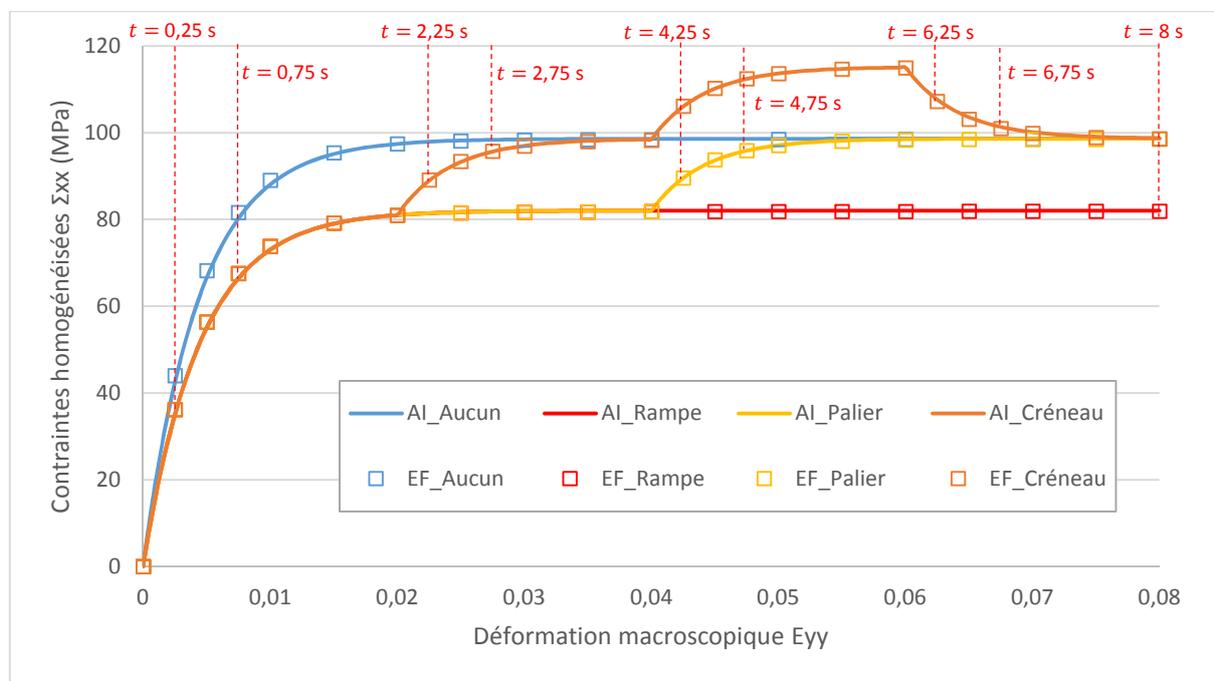


Figure 53 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.

	Aucun		Rampe		Palier		Créneau	
	Σ_{xx}	Σ_{yy}	Σ_{xx}	Σ_{yy}	Σ_{xx}	Σ_{yy}	Σ_{xx}	Σ_{yy}
$t = 0,25$ s	0,48%	0,36%	0,41%	0,35%	Idem Rampe			
$t = 0,75$ s	0,13%	0,01%	0,06%	0,01%				
$t = 2,25$ s							0,20%	0,27%
$t = 2,75$ s							0,19%	0,26%
$t = 4,25$ s					0,17%	0,23%	0,12%	0,22%
$t = 4,75$ s					0,16%	0,21%	0,11%	0,20%
$t = 6,25$ s							0,32%	0,28%
$t = 6,75$ s							0,15%	0,23%
$t = 8$ s	0,03%	0,11%	0,12%	0,16%	0,07%	0,15%	0,05%	0,15%

Tableau 33 : Ecarts relatifs entre les contraintes estimées par l'AI et les solutions EF pour différents temps caractéristiques des chargements thermomécaniques étudiés. Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.

Pour finir, nous traçons sur la Figure 54 les trois contraintes normales homogénéisées dans le cas du profil en créneau. Nous comparons les estimations (lignes continues) aux solutions de référence (symboles).

Nous observons que les estimations des contraintes normales dans les trois directions sont en accord avec les solutions de référence. Les zones transitoires tout comme asymptotiques sont bien appréhendées par l'approche incrémentale.

Nous avons cherché à caractériser l'influence de l'incrément de température imposé sur la réponse asymptotique du composite. Cette étude s'est faite à taux de fibres de 0,25, avec un profil de type rampe. Les résultats (non présentés) donnent une relation linéaire entre la contrainte asymptotique d'un côté et l'incrément de température de l'autre.

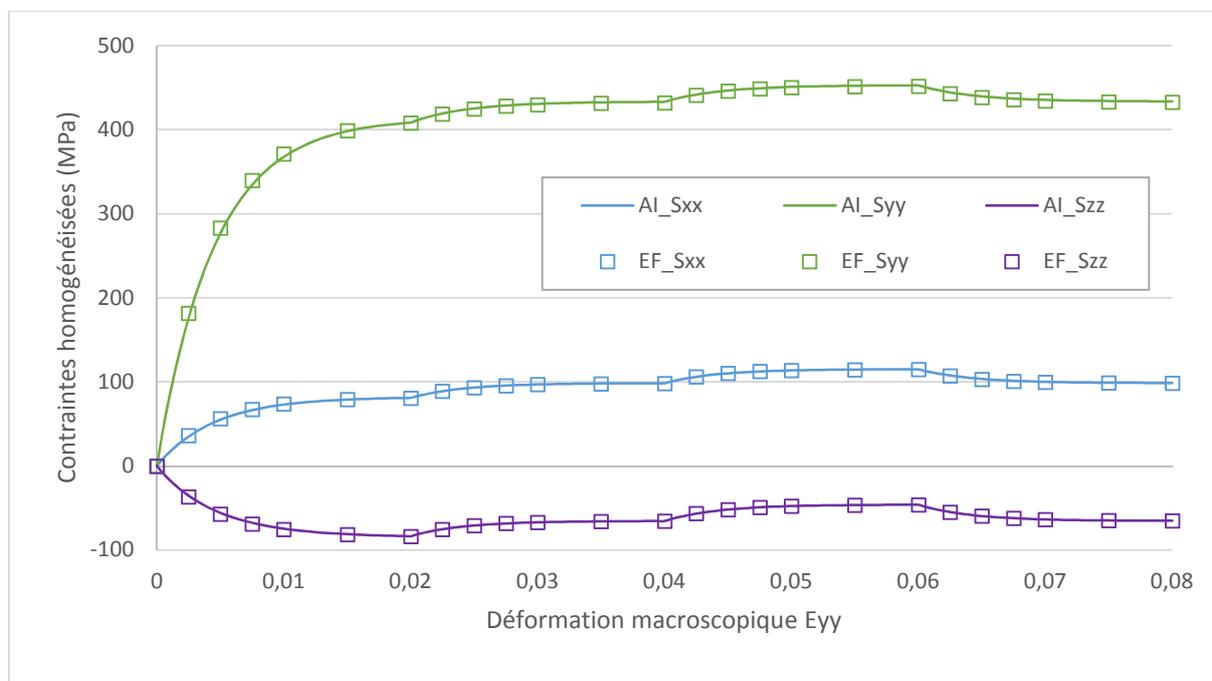


Figure 54 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en créneau. Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.

VIII.B.3. Contraintes asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase

Nous avons analysé, au paragraphe (V.A) dans un contexte purement mécanique, l'influence du taux de fibres sur la précision des estimations des contraintes asymptotiques obtenues par l'approche incrémentale. Dans ce paragraphe, cette fois pour un chargement thermomécanique, nous cherchons à quantifier l'erreur induite par les effets de couplages thermomécaniques pris en compte (via l'énergie libre pour rappel). Le chargement thermomécanique avec un profil de type rampe pour lequel la réponse à long terme du matériau diffère de celle sous chargement mécanique pur est choisi à cet effet. Ainsi sur la Figure 55, nous présentons les contraintes normales asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase (lignes continues) dans la direction \underline{y} en fonction du taux de fibres. Les solutions de référence correspondantes sont données par des symboles carrés. Les estimations obtenues sans chargement thermique (lignes discontinues) sont également représentées pour comparaison.

Tout d'abord, nous pouvons voir que les contraintes asymptotiques homogénéisées, tout comme moyennes par phase, sont logiquement inférieures à celles obtenues sans chargement thermique. Les deux courbes (avec et sans chargement thermique) à l'échelle globale et pour chacune des phases présentent un écart quasi constant entre elles avec l'évolution du taux de fibres, et identique aux deux échelles de l'ordre de $39 \text{ MPa} \pm 0,3\%$. De plus, une très bonne corrélation apparaît entre les estimations et les solutions de référence avec une erreur notable lorsque le taux de fibre dépasse 0,4.

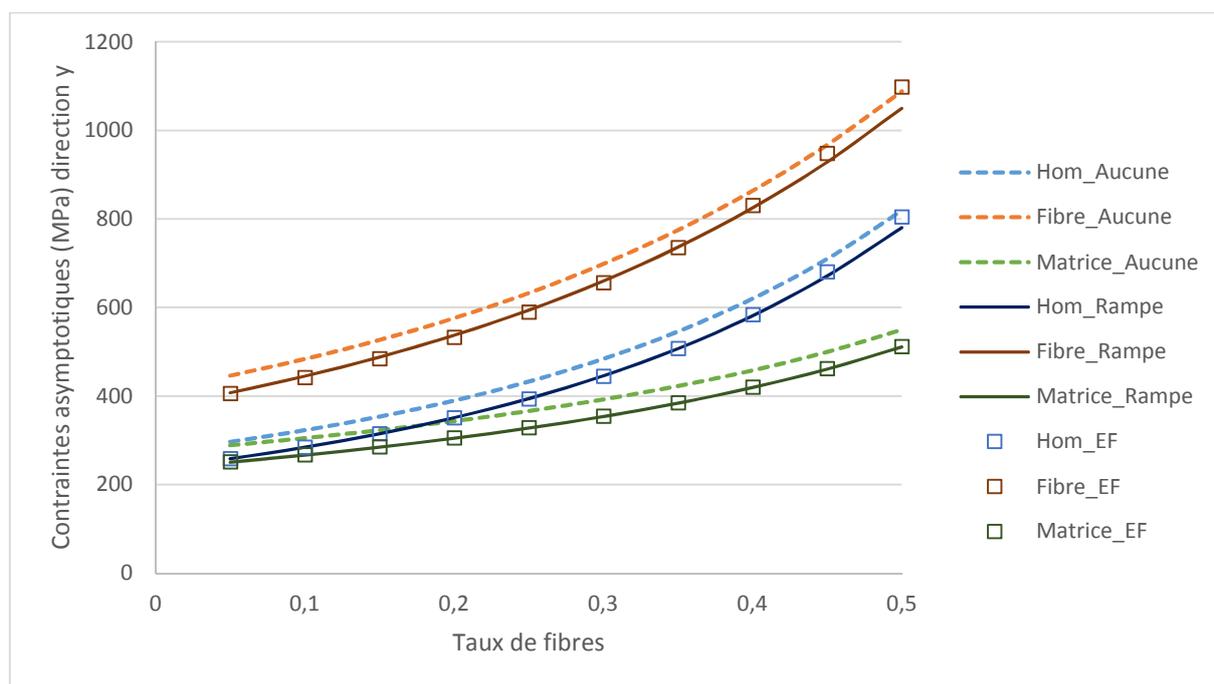


Figure 55 : Contraintes asymptotiques dans la direction \underline{y} , macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (Aucune) sont reportées pour comparaison.

Dans le Tableau 34, les temps à 98% ainsi que les erreurs relatives par rapport à la solution de référence, pour le composite, la fibre et la matrice sont présentés, en utilisant les critères définis au paragraphe (III.B.3).

Les écarts relatifs consignés dans le Tableau 34 confirment la très bonne qualité des estimations à l'échelle macroscopique avec une erreur inférieure à 0,5 % jusqu'à un taux de fibres de 0,4 et une détérioration au-delà (3% pour un taux de 0,5). Nous avons ici le même ordre de grandeur pour les erreurs relatives que dans le cas purement viscoélastique (cf. Tableau 20 du paragraphe (V.A.3) pour un chargement déviatorique). Les estimations des moyennes par phase demeurent de meilleure qualité dans la matrice que dans la fibre, l'erreur dans cette dernière reste inférieure à 1 % jusqu'à 0,4 pour atteindre 4,4 % à 0,5 alors que dans la matrice l'erreur est toujours inférieure à 0,3%.

c_1	Composite		Fibre		Matrice	
	$T^{98\%}(s)$	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}(s)$	Δ_{AI-EF}	$T^{98\%}(s)$	Δ_{AI-EF}
0,05	1,60	0,18%	1,75	0,43%	1,60	0,24%
0,1	1,65	0,07%	1,80	0,73%	1,65	0,22%
0,15	1,70	0,03%	1,80	0,81%	1,65	0,21%
0,2	1,75	0,11%	1,90	0,81%	1,70	0,21%
0,25	1,85	0,15%	1,95	0,73%	1,75	0,20%
0,3	1,90	0,14%	2,00	0,53%	1,80	0,19%
0,35	2,00	0,04%	2,10	0,09%	1,90	0,19%
0,4	2,10	0,44%	2,20	0,68%	1,95	0,17%
0,45	2,20	1,33%	2,30	2,07%	2,05	0,16%
0,5	2,35	3,03%	2,40	4,40%	2,20	0,16%

Tableau 34 : Ecart relatifs entre les contraintes asymptotiques dans la direction \underline{y} estimées par l'AI et les solutions EF, valeurs des temps à 98%, aux échelles macroscopique et microscopique en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.

Sur la Figure 56, les contraintes asymptotiques dans la direction longitudinale des fibres sont présentées pour les chargements avec et sans composante thermique. Les observations dans la direction des fibres sont légèrement différentes de celles décrites précédemment pour la direction transverse. On retrouve des niveaux inférieurs sous chargement thermomécanique et ce, aux deux échelles et pour chaque taux de fibres. Par contre, les écarts entre les deux courbes (avec et sans chargement thermique) ne sont plus identiques aux deux échelles et ce, quel que soit le taux de fibres. Dans la fibre, la différence est de l'ordre de 15,5 MPa tandis que dans la matrice, nous sommes à 39 MPa, comme dans la direction transverse.

Enfin, nous soulignons le fait que les erreurs relatives par rapport aux solutions de référence à l'échelle macroscopique sont plus faibles. En effet, même à un taux de fibres de 0,5, l'erreur relative de la contrainte asymptotique dans la direction des fibres n'est que de 0,7% (contre 3% dans la direction \underline{y}).

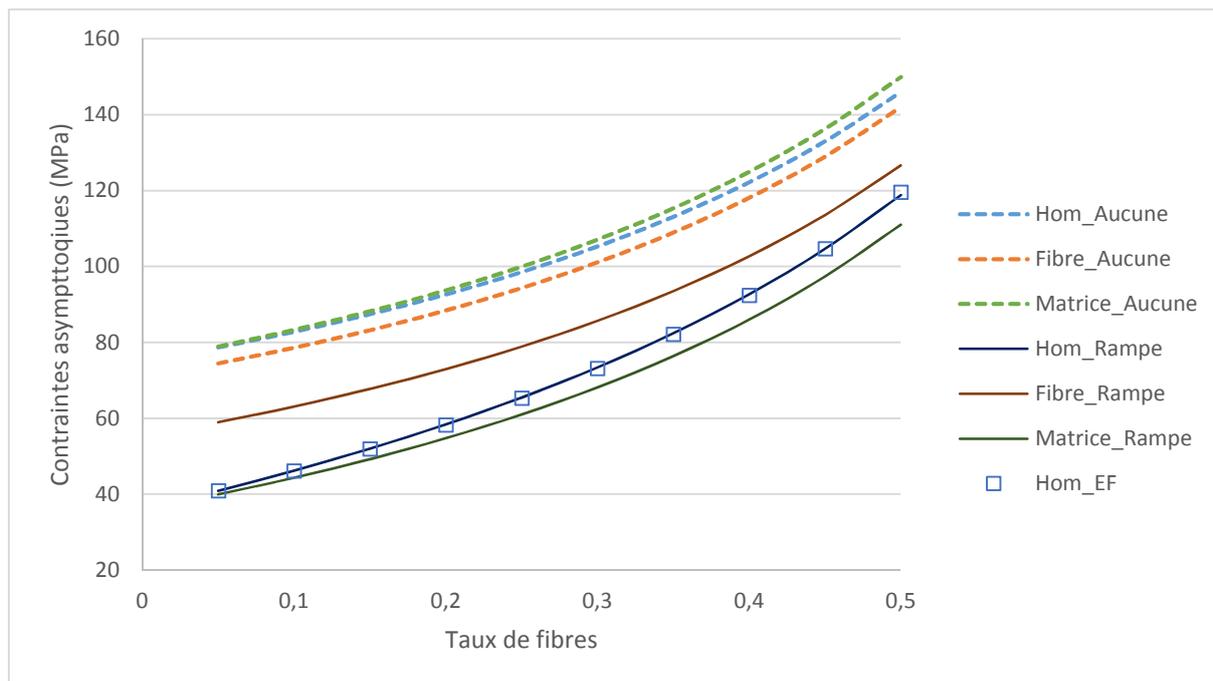


Figure 56 : Contraintes asymptotiques dans la direction des fibres, macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (Aucune) sont reportées pour comparaison.

VIII.C. Fibres thermoélastiques

Dans le paragraphe précédent (VIII.B), nous avons considéré que seul le comportement de la matrice était influencé par la variation de température imposée. Ce paragraphe rajoute un degré de complexité en envisageant un comportement thermoélastique pour les fibres. La différence majeure réside dans la résolution du problème auxiliaire thermoélastique. En effet, il faut prendre en compte une contrainte d'origine thermique dans les fibres. Le terme $\underline{\underline{\tau}}^{(1)}$ n'est plus nul (voir (VII.33)), et vaut :

$$\underline{\underline{\tau}}^{(1)} = -\underline{\underline{d}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(1)} \cdot (T - T_0) = -d^{(1)}(T - T_0) * 3k^{(1)}\underline{\underline{I}} \quad (VIII.8)$$

On rappelle que les propriétés de la matrice de même que celles des fibres sont données dans le paragraphe (VIII.A).

Ce paragraphe suit le même cheminement que le précédent avec tout d'abord une analyse des réponses homogénéisées aux différents chargements thermomécaniques proposés. Le taux de fibres est dans ce cas fixé à 0,25. Puis, la qualité des estimations des contraintes asymptotiques en fonction du taux de fibres est étudiée.

VIII.C.1. Réponses homogénéisées pour différents chargements thermomécaniques

Sur la Figure 57, les contraintes normales homogénéisées dans la direction des fibres, à savoir Σ_{xx} , estimées par l'approche incrémentale (lignes continues) et calculées par la méthode des éléments finis (symboles carrés) sont présentées pour tous les chargements thermomécaniques considérés (voir Figure 51).

Ici encore, on constate un très bon accord des estimations fournies par l'approche incrémentale avec les solutions de référence et cela pour les quatre chargements considérés. En effet, sans quantifier les écarts existants, nous voyons bien que les régimes transitoires et asymptotiques sont bien représentés.

La deuxième observation porte sur la différence existant entre les courbes bleue (sans chargement thermique) et rouge (avec chargement thermique de type rampe) par rapport au cas précédent (voir Figure 53) où le comportement des fibres n'était pas directement impacté par la variation de température imposée. En effet, si la courbe bleue est logiquement analogue et tend vers une asymptote horizontale, la réponse avec chargement en température ne présente plus en revanche une asymptote horizontale de niveau inférieur. La thermoélasticité des fibres s'oppose à la stabilisation de la réponse qui continue d'évoluer étant donné l'augmentation de la température (via la contrainte d'origine thermique $\underline{\tau}^{(1)}$ proportionnelle à cette élévation). En ce qui concerne le profil en palier (jaune), contrairement à la section précédente (paragraphe (VIII.B)), la contrainte asymptotique en fin de chargement ne coïncide pas avec celle obtenue sans chargement thermique. Bien que cette fois, pour un profil de type palier, une stabilisation puisse être obtenue, la valeur asymptotique est de niveau inférieur à celui atteint sans chargement thermique. Ceci est lié à la contrainte d'origine thermique dans les fibres $\underline{\tau}^{(1)}$, qui reste présente et constante avec le maintien de la température. Pour le profil en créneau (orange), les mêmes tendances que celles observées sur le Figure 53 se dégagent à ce ceci près que la valeur asymptotique à la fin du maintien en température ($E_{yy} = 0,04$) ne coïncide plus avec la valeur obtenue sans chargement thermique. Elle est désormais inférieure en raison de la contrainte d'origine thermique dans les fibres. A l'issue du chargement $\Delta T = 0$, on retrouve logiquement le régime asymptotique obtenu sans chargement thermique comme lorsque les fibres étaient élastiques.

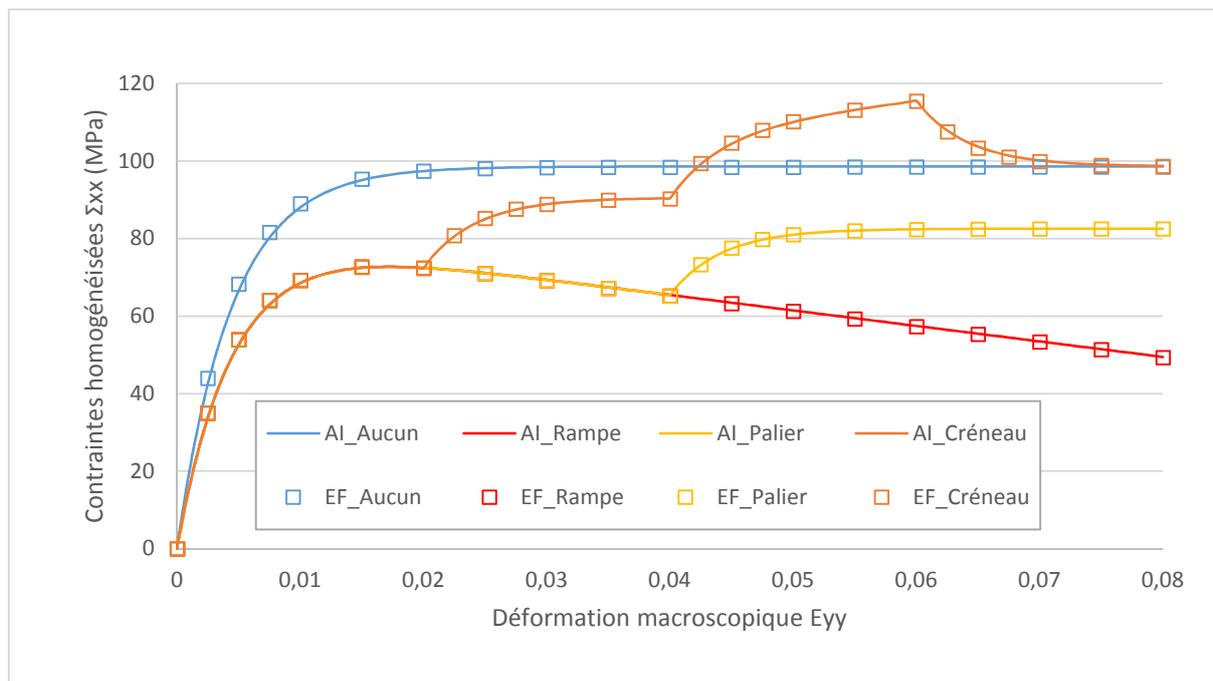


Figure 57 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres thermoélastiques et matrice thermoviscoélastique.

VIII.C.2. Effet de la vitesse du chargement thermique sur les réponses homogénéisées

Les courbes précédentes ont été établies pour un incrément de température de 5 K.s^{-1} . On s'intéresse ici à l'effet de la vitesse du chargement thermique imposée sur la qualité des estimations, la vitesse du chargement mécanique n'étant pas modifiée. Le cas d'un chargement de type rampe est utilisé comme support. La forme de la réponse dépend de la direction, c'est pourquoi nous présentons les deux contraintes normales homogénéisées Σ_{xx} et Σ_{yy} . Trois vitesses de chargement thermiques sont testées, 5 K.s^{-1} (orange), 10 K.s^{-1} (jaune) et 20 K.s^{-1} (vert). Sur la Figure 58, les estimations obtenues avec l'approche incrémentale (lignes continues et discontinues) sont confrontées aux solutions de référence (symboles) pour les trois vitesses précitées. Les contraintes homogénéisées obtenues sans chargement thermique figurent en bleu (0 K.s^{-1}).

Nous observons que dans les deux directions, les estimations sont précises quelle que soit la vitesse du chargement thermique considérée. L'augmentation de la vitesse du chargement thermique a pour effet d'assouplir les réponses. Cet effet résulte bien sûr de la matrice dont le comportement est sensible au temps.

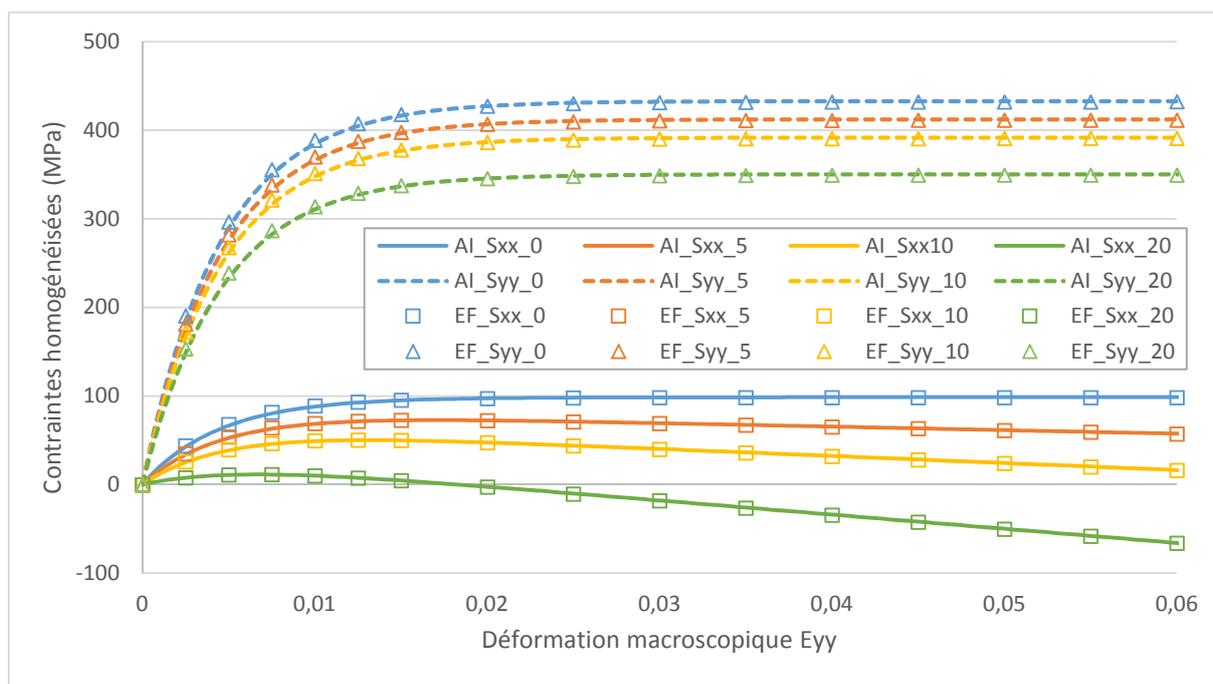


Figure 58 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} et Σ_{yy} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement thermomécanique (chargement monotone (VIII.7) et profil de température en rampe). Taux de fibres de 0,25. Fibre thermoélastique, matrice thermoviscoélastique. Influence de la vitesse du chargement en température.

VIII.C.3. Contraintes asymptotiques homogénéisées et moyennes par phase

Nous étudions ici la qualité d'estimation des contraintes asymptotiques en fonction du taux de fibres. Le chargement thermomécanique avec un profil en rampe est de nouveau retenu pour l'illustration comme dans le paragraphe (VIII.B.3). La vitesse de chargement thermique est fixée à $5 \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}$. L'analyse porte sur les valeurs homogénéisées et moyennes par phase dans la direction \underline{y} pour laquelle les régimes asymptotiques peuvent être atteints aux deux échelles et ce, quel que soit le taux de fibres. La Figure 59 compare les estimations aux solutions de référence. On y reporte pour comparaison les valeurs sans chargement thermique.

La qualité des estimations est de très bon niveau jusqu'à un taux de fibres de 0,4 comme dans le cas où les fibres étaient élastiques (Figure 55). Les erreurs relatives sont semblables à celles consignées dans le Tableau 34. A un taux de fibres de 0,5, l'erreur au niveau macroscopique atteint 3,3%, 4,7% dans la fibre et reste négligeable dans la matrice. La prise en compte des contraintes d'origine thermique dans les fibres ne dégrade pas la précision de la méthode. Les mêmes observations que sur la Figure 55 (fibres élastiques) peuvent être reconduites pour ce qui est de l'écart entre valeurs asymptotiques atteintes avec et sans chargement thermique : il est constant avec l'augmentation du taux de fibres et identique aux deux échelles. En revanche, la prise en compte de contraintes d'origine thermique dans la fibre diminue la valeur de cet écart comparativement au cas où la fibre était seulement élastique.

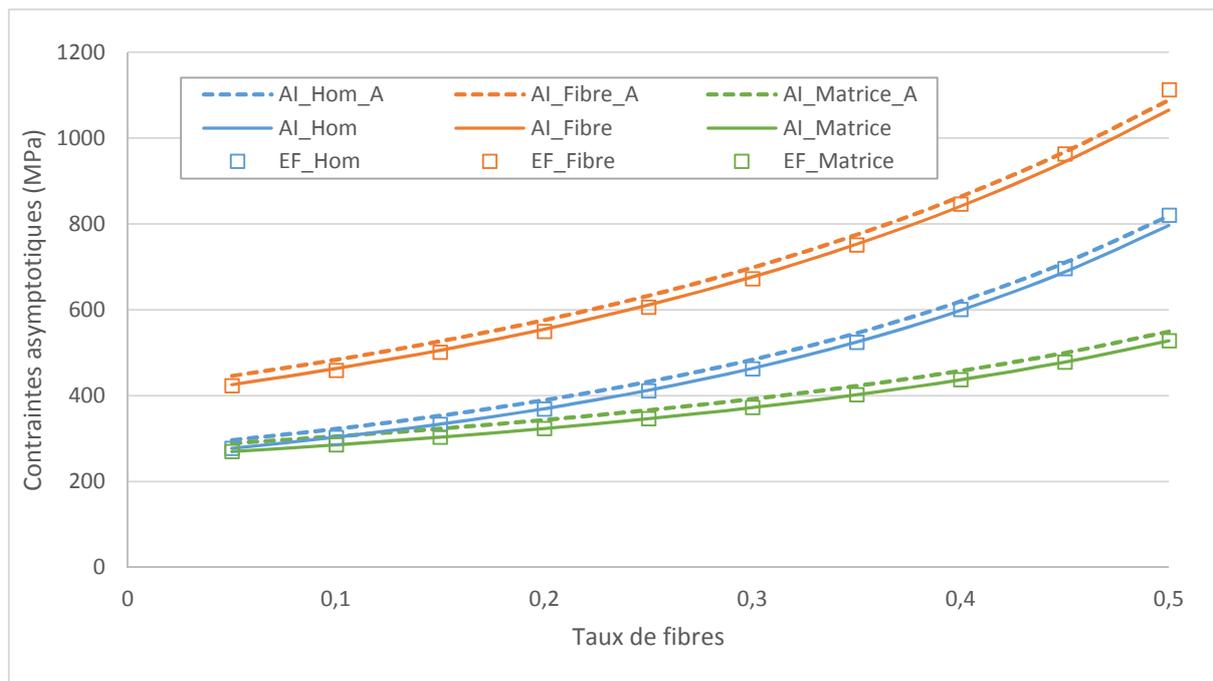


Figure 59 : Contraintes asymptotiques dans la direction y , macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres thermoélastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (A) sont reportées pour comparaison.

VIII.D. Fibres thermoviscoélastiques

Nous avons montré à travers les deux sections précédentes que l'approche incrémentale (avec le formalisme adopté), couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994), donne des résultats précis lorsque la matrice est thermoviscoélastique et la fibre soit élastique, soit thermoélastique. Nous avons aussi illustré au paragraphe (V.B) la qualité des estimations dans le cas où non seulement la matrice mais aussi les fibres étaient viscoélastiques. La suite logique de l'étude menée dans ce chapitre est donc de considérer les deux phases thermoviscoélastiques.

Les propriétés mécaniques sont présentées dans le Tableau 31 et les propriétés thermiques sont consignées dans le Tableau 32. Les chargements thermomécaniques considérés restent les mêmes (voir Figure 51). Le taux de fibres est toujours de 0,25.

Sur la Figure 60, les réponses estimées par l'approche incrémentale dans le cas où les deux phases sont thermoviscoélastiques (lignes continues) sont confrontées aux solutions de référence calculées par la méthode des éléments finis (symboles carrés) pour les différents chargements thermomécaniques. Les estimations obtenues dans le cas où la fibre était élastique sont reportées pour comparaison. On s'intéresse ici à la composante normale dans la direction des fibres du tenseur des contraintes homogénéisées.

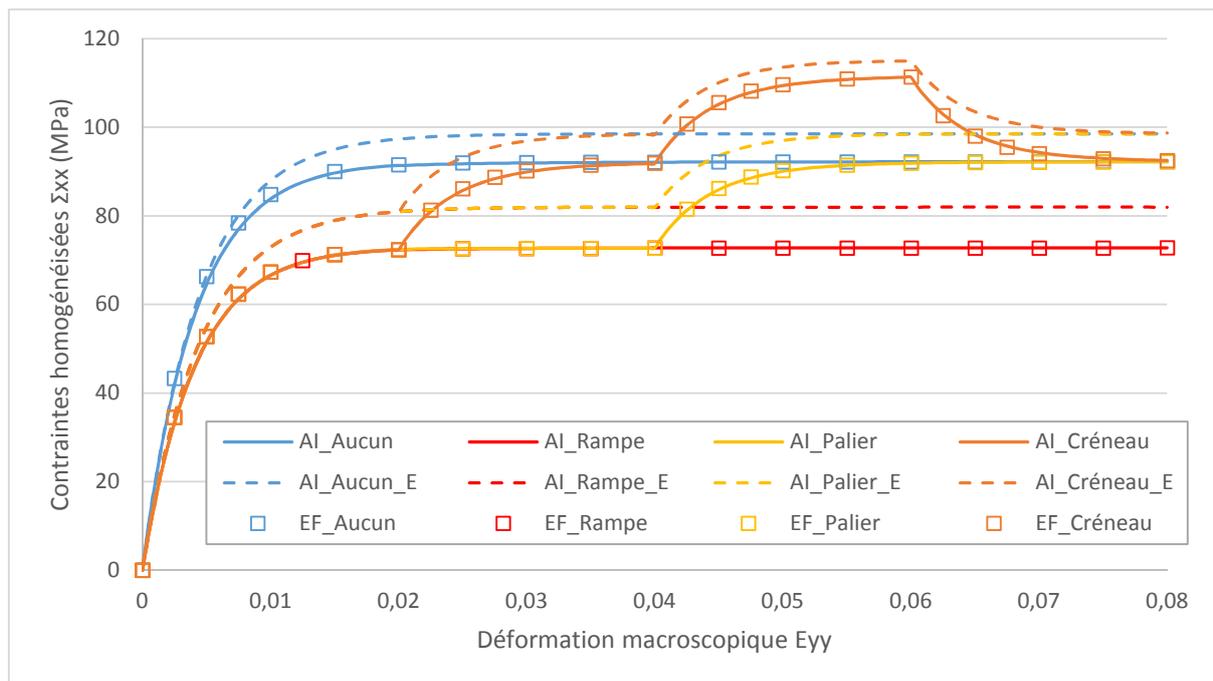


Figure 60 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres et matrice thermoviscoélastiques. Les réponses homogénéisées pour des fibres élastiques (E) sont reportées pour comparaison.

De manière générale, les estimations sont toujours en très bon accord avec les solutions de référence et ce pour tous les chargements (erreurs relatives inférieures à 0,1% à $t = 8$ s). On constate par ailleurs que les niveaux de contrainte sont logiquement inférieurs dans le cas où les fibres présentent un caractère visqueux. Cela est déjà vrai en l'absence de chargement thermique. D'autre part, les évolutions en cours de chargement sont qualitativement similaires que les fibres soient élastiques ou thermoviscoélastiques. Le caractère visqueux des fibres contribue à éliminer les différences qui avaient pu être constatées entre les réponses obtenues pour des fibres élastiques et celles obtenues avec des fibres thermoélastiques (voir Figure 57 et commentaires associés).

- Pour le chargement thermomécanique avec un profil de température en rampe (**rouge**), le caractère visqueux des fibres autorise désormais la stabilisation à long terme de la contrainte homogénéisée en dépit de l'augmentation de la température. On n'a donc plus l'évolution décroissante de contrainte observée dans le cas où les fibres étaient seulement thermoélastiques.
- Pour le chargement thermomécanique avec un profil en palier (**jaune**), la contrainte asymptotique en fin de chargement coïncide désormais avec celle obtenue sans chargement thermique. Elle n'est plus de niveau inférieur puisque les contraintes d'origine thermique dans les fibres peuvent se relaxer progressivement malgré le maintien de la température, ce qui n'était pas le cas lorsque les fibres étaient seulement thermoélastiques.
- Pour le chargement thermomécanique avec un profil en créneau (**orange**), la valeur asymptotique à la fin du maintien en température ($E_{yy} = 0,04$) coïncide désormais avec la valeur obtenue sans chargement thermique et ce pour les mêmes raisons que précédemment.

IX. Prise en compte de la variation de température induite par le chargement mécanique

Nous conservons la microstructure périodique à fibres longues (taux de 0,25) comme support de cette ultime étude de même que le schéma de Luciano et Barbero (1994) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire. Conformément à ce qui a été annoncé au paragraphe (VII.F) (voir cas d'application n°2), les fibres sont considérées élastiques linéaires et la matrice thermoviscoélastique linéaire. La température est supposée uniforme dans tout le V.E.R. L'évolution est donc adiabatique en tout point, aucun phénomène de conduction au sein du V.E.R n'est décrit. Il s'agit ici de tenir compte de l'évolution de la température locale induite par les termes de couplage thermomécanique et de dissipation mécanique au sein de la matrice dans l'estimation de la réponse homogénéisée à un chargement mécanique. L'équation de la chaleur intégrant comme termes source les deux contributions précitées est donc résolue. L'objectif de ce paragraphe est de tester la faisabilité de la résolution du problème hétérogène grâce au formalisme développé au chapitre (VII) avec une résolution simultanée de l'équation de la chaleur. Le cadre est certes très simplifié, notamment de par l'hypothèse de température locale uniforme, mais on a néanmoins un couplage dans les deux sens : de la mécanique (via le chargement) vers la thermique (modification de la température induite) et de la thermique vers la mécanique (via la répercussion de la modification de température sur les champs mécaniques à travers le terme de couplage présent dans l'énergie libre).

Après avoir rappelé les propriétés des phases, spécifié le chargement mécanique et formulé l'équation de la chaleur à résoudre dans la matrice, un premier calcul est réalisé et interprété.

IX.A. Comportement des phases et intégration de l'équation de la chaleur dans la procédure de résolution

Les propriétés mécaniques des fibres, ici considérées élastiques linéaires isotropes, sont consignées dans le Tableau 31 du paragraphe (VIII.A) (voir première ligne correspondant au cas n°1). La matrice est thermoviscoélastique linéaire isotrope de type Maxwell à une variable interne dotée de parts sphérique et déviatorique. Ses potentiels thermodynamique et de dissipation, de mêmes formes que dans le chapitre précédent, sont rappelés ci-dessous pour mémoire :

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}\psi^{(2)}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, T) &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) \\ &\quad - d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) - \frac{1}{2} \frac{\rho^{(2)}c_s^{(2)}}{T_0} (T - T_0)^2 \end{aligned} \tag{IX.1}$$

et

$$\varphi_1^{(2)}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\alpha}}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \quad (IX.2)$$

Les lois d'état sont ainsi données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) - d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathcal{A}}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) - d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \\ s = \frac{1}{\rho^{(2)}} d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) + \frac{c_s^{(2)}}{T_0} (T - T_0) \end{array} \right. \quad (IX.3)$$

Dans les équations précédentes, les tenseurs $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)}$ sont donnés par :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} = 3 * k^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \mu^{(2)} * \underline{\underline{K}} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{v\alpha}^{(2)} = 3 * \omega_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{J}} + 2 * \eta_{v\alpha}^{(2)} * \underline{\underline{K}} \quad (IX.4)$$

Les valeurs des propriétés mécaniques et du coefficient de dilatation sont inchangées, voir respectivement les Tableau 31 et Tableau 32. La capacité massique et la masse volumique de la matrice qui sont à présent nécessaires pour la résolution de l'équation de la chaleur sont données dans le Tableau 35.

	$\rho^{(r)}$ en (kg.m ⁻³)	$c_s^{(r)}$ en (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
Matrice (r = 2)	1745	1045

Tableau 35 : Capacité thermique massique et masse volumique de la matrice.

Le V.E.R. est soumis à un chargement purement mécanique défini par la formule (VIII.7). Sous l'effet du chargement, les effets de couplage thermomécanique et la dissipation intrinsèque au sein de la matrice engendre une variation temporelle de température, qui va elle-même entraîner une modification des champs mécaniques par effet thermoélastique (énergie libre). Ainsi, dans la fonction d'optimisation servant à calculer les inconnues $\underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(2)}$ à chaque pas de temps, nous ajoutons le

calcul de l'inconnue, T_{n+1} , par résolution simultanée de l'équation de la chaleur dans la matrice. Puisque seules les moyennes par phase des champs mécaniques sont accessibles, l'équation de la chaleur est en fait écrite en moyenne sur la phase matrice afin de rendre possible la connexion avec l'approche incrémentale. En insérant les deux premières lois d'état (IX.3) dans l'expression 7 du problème incrémental (VII.13), et enfin en prenant la moyenne, il vient :

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} c_s^{(2)} (T - T_n) = & - T. d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_2 - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_n \rangle_2) \\ & + \langle \{ \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}) - d^{(2)}(T - T_0) * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} + T d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 \end{aligned} \quad (IX.5)$$

En utilisant le fait que les deux premiers termes de la seconde ligne de l'équation précédente correspondent à l'expression (cf. (IX.3)) du tenseur des contraintes, on peut alors extraire l'expression de la température à l'instant t_{n+1} . On a :

$$T = \left\{ \rho^{(2)} c_s^{(2)} + d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : \left[\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_2 - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_n \rangle_2 - \left(\langle \underline{\underline{\alpha}} \rangle_2 - \langle \underline{\underline{\alpha}}_n \rangle_2 \right) \right] \right\}^{-1} \quad (IX.6)$$

$$* \left\{ \rho^{(2)} c_s^{(2)} T_n + \langle \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 \right\}$$

On se retrouve alors à devoir calculer la moyenne dans la matrice :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 \quad (IX.7)$$

Cela constitue en soi un enjeu. Il s'agit très probablement d'une conséquence du fait que le traitement des équations mécaniques du problème a été abordé de manière découplée de la détermination du champ de température. Aussi, pour une première approche c'est à dire l'obtention d'un premier résultat, nous supposons la relation suivante :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_2 : \langle (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 \quad (IX.8)$$

En insérant (IX.8) dans l'expression (IX.6), il vient :

$$T = \left\{ \rho^{(2)} c_s^{(2)} + d^{(2)} * \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} : \left[\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_2 - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_n \rangle_2 - \left(\langle \underline{\underline{\alpha}} \rangle_2 - \langle \underline{\underline{\alpha}}_n \rangle_2 \right) \right] \right\}^{-1} \quad (IX.9)$$

$$* \left\{ \rho^{(2)} c_s^{(2)} T_n + \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_2 : \langle (\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}_n) \rangle_2 \right\}$$

Grâce à l'expression (IX.9) de la température à l'instant t_{n+1} , il est donc possible de la calculer dans le processus d'optimisation des inconnues $\underline{\underline{\Theta}}_{\alpha}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\alpha}}_n^{(2)}$, car tous les termes sont alors connus. Ainsi, la température est optimisée au même titre que les inconnues. Les effets mécaniques sur la variation de température et *vice versa* sont donc considérés.

IX.B. Premier résultat

Une première simulation a pu être réalisée et le but de ce paragraphe est d'essayer de juger de la pertinence de ses résultats. Le chargement mécanique considéré est défini par la formule (VIII.7). Nous présentons sur la Figure 61 les estimations de la réponse homogénéisée dans la direction \underline{x} (courbe verte) et de l'évolution de $\Delta T = T - T_0$ (courbe rouge) obtenues par l'approche incrémentale avec résolution de l'équation de la chaleur selon le principe du paragraphe précédent. En vue d'essayer d'interpréter les résultats, on superpose pour comparaison l'estimation de la réponse homogénéisée obtenue (toutes choses égales par ailleurs) sans résolution de l'équation de la chaleur (courbe bleue). On a donc une réponse purement viscoélastique puisque le seul terme de couplage, celui de couplage thermoélastique au sein de l'énergie libre de la matrice, n'est jamais activé sous chargement purement mécanique.

De manière schématique, on pourrait analyser la réponse homogénéisée obtenue de la façon suivante :

- Au début du chargement, jusqu'à $t = 0,65$ s, l'élasticité est prédominante, ce qui abaisse la température de la matrice et donc du V.E.R. Sur cette partie de la réponse, le premier terme (terme de couplage thermoélastique) de l'équation de la chaleur est en effet le plus important. La température diminuant, cela génère des contraintes thermiques positives (via le terme de couplage thermoélastique au sein de l'énergie libre de la matrice). La réponse du composite est donc logiquement plus raide que la réponse bleue.
- L'inversion du signe de la variation de température (à $t = 0,65$ s, représentée par une tangente horizontale en pointillés noirs) marque le moment du régime transitoire où la diminution de température induite par couplage thermoélastique est compensée par l'échauffement induit par les effets visqueux. Puis, la contribution du terme source dans l'équation de la chaleur lié à la dissipation intrinsèque devient de plus en plus fort d'où un échauffement avec une vitesse qui augmente. La température augmentant, les contraintes d'origine thermique contribuent cette fois à assouplir la réponse du composite qui par suite tend à se rapprocher de la courbe bleue.
- Ensuite, le régime asymptotique s'installe et la vitesse de l'échauffement se stabilise. Il est intéressant de noter que le croisement des courbes verte et bleue se produit à la fin du régime transitoire (aux environs de $t = 1,1$ s).

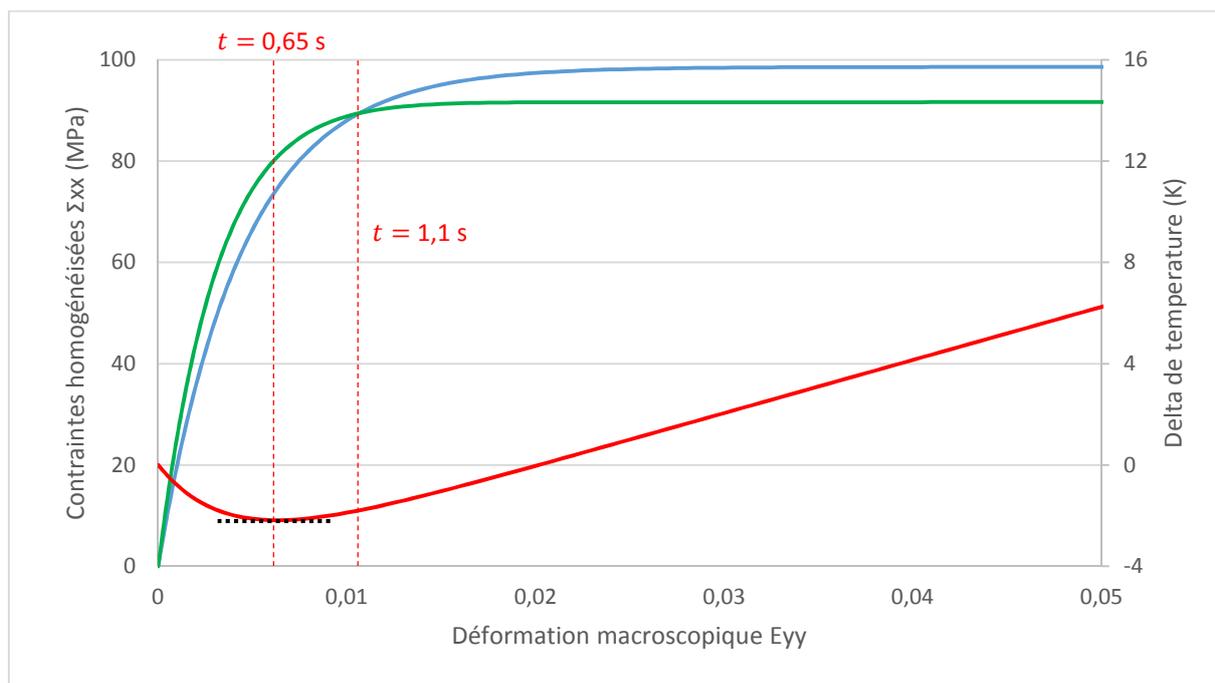


Figure 61 : Réponse homogénéisée (verte) et évolution de la température (rouge), estimées par l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) avec résolution simultanée de l'équation de la chaleur. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7). Taux de fibres de 0,25. Fibre élastique, matrice thermoviscoélastique. La réponse estimée sans résolution de l'équation de la chaleur (bleue) est présentée pour comparaison.

Conclusion de la *PARTIE 3*

Dans la *PARTIE 3*, nous avons tenté de mettre en œuvre l'approche incrémentale en présence d'un couplage entre les effets mécaniques (viscoélastiques) et la température. Ainsi, au chapitre (VII), nous avons tout d'abord établi les versions initiale et discrétisé dans le temps du problème hétérogène fortement couplé, *i.e.* intégrant les équations mécaniques et thermiques formulées dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Pour une première approche, les dissipations intrinsèque et thermique sont supposées découplées, la conduction est gouvernée par la loi de Fourier, les caractéristiques des phases sont supposées indépendantes de la température (absence de couplages indirects) et le rayonnement est négligé. Néanmoins, face à la complexité du problème obtenu, deux simplifications ont été introduites. D'une part, le traitement théorique des équations mécaniques du problème discrétisé a été réalisé de manière séparée de la détermination du champ de température, dit autrement selon un principe analogue à ce qui avait été fait dans les parties précédentes. Le potentiel incrémental peut ainsi être défini, il dépend désormais de la température locale supposée connue. La deuxième simplification a consisté à définir le potentiel incrémental effectif sans incorporer de relation de passage micro-macro portant sur le gradient de température. Dans ce contexte, la suite du cheminement a été reconduite jusqu'à la mise en place du problème auxiliaire thermoélastique qui intègre finalement des termes supplémentaires par rapport à la *PARTIE 2*.

Dans le chapitre (VIII), nous avons proposé un premier cas d'application pour tester le formalisme précédent. La microstructure périodique à fibres longues a été retenue comme support. Une variation de température identique a été imposée en tout point du V.E.R. simultanément au chargement mécanique (monotone). Le problème a été résolu sans chercher à résoudre l'équation de la chaleur (*i.e.* sans couplage de la mécanique sur la thermique). Le champ de température était donc connu et uniforme ce qui légitime la définition du potentiel incrémental effectif et d'autre part élimine les mécanismes de conduction locaux. La matrice était thermoviscoélastique. Les fibres étaient successivement élastiques, thermoélastiques et thermoviscoélastiques.

- Le formalisme adopté conduit, dans ces trois cas successifs, à des résultats probants par comparaison à des simulations en champs complets, réalisées dans les mêmes conditions. On montre ainsi l'efficacité du modèle et du codage sous-jacent dans une configuration simple de couplage de la thermique vers la mécanique.
- Par ailleurs et d'un point de vue plus physique, nous avons analysé l'influence du chargement thermomécanique sur la réponse du composite pour différents profils de température imposés (rampe, palier, créneau).

Dans le dernier chapitre (IX), nous avons cherché à résoudre l'équation de la chaleur, simultanément à la résolution du problème mécanique dans une configuration ayant du sens par rapport aux simplifications introduites. La microstructure périodique a ainsi été soumise à un chargement purement mécanique et on a supposé la température uniforme au sein du V.E.R. (les mécanismes de conduction ont été négligés). Seule la matrice était thermoviscoélastique, les fibres étaient élastiques.

- La résolution de l'équation de la chaleur en tenant compte des termes source (couplage thermomécanique et dissipation intrinsèque) a fourni une expression de la température qui a permis de l'intégrer au processus d'optimisation des inconnues adossé à l'approche incrémentale. La variation de température générée par les effets mécaniques dans la phase

thermoviscoélastique (et donc dans le V.E.R.) est ainsi calculable et prise en compte dans l'estimation de la réponse homogénéisée.

- La variation de température obtenue est qualitativement en accord avec les attentes : négative en régime instantané (élastique), minimum à moyen terme (au moment où la diminution de température par effet thermoélastique est compensée par l'échauffement dû aux effets visqueux), puis positive dans la suite du régime transitoire avec une vitesse d'échauffement qui se stabilise à long terme (en régime asymptotique uniquement visqueux).

Conclusion générale

Le but de ces travaux était de contribuer au développement d'une modélisation micromécanique d'une part capable d'estimer de manière efficace le comportement viscoélastique linéaire d'une large gamme de composites à matrice polymère, *i.e.* pour différentes géométries et répartitions de renforts (fibres, particules, périodiques ou aléatoires), et d'autre part permette d'envisager la prise en compte du couplage avec la température. Après avoir posé le contexte d'application tourné vers le secteur des transports (aéronautiques et terrestres) et dressé un bilan des approches existantes au démarrage des travaux, nous avons retenu la méthode de Lahellec et Suquet (2007a) pour répondre au cahier des charges précité. En effet, en plus d'offrir une résolution du problème hétérogène dans l'espace-temps réel et d'être fondée sur un cadre thermodynamique rigoureux, permettant de traiter des comportements à deux potentiels, et propice à l'introduction du couplage avec la température, elle était *a priori* non limitée en termes de lois viscoélastiques et de microstructures susceptibles d'être traitées. La version parue en 2013 n'ayant pas encore été testée en viscoélasticité au début de la thèse, nous avons jugé plus prudent de fonder nos travaux sur la version de base de 2007, dont l'efficacité avait été concrètement prouvée dans ce cadre. Ce choix étant fait trois parties regroupent les développements et applications mis en œuvre.

Dans la **PARTIE 1**, l'approche incrémentale a été présentée, codée en langage Python®, puis testée sur des cas d'application (loi viscoélastique locale/microstructures) déjà étudiés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007a) en guise de validation du code réalisé, mais aussi en vue d'approfondir l'évaluation des performances par des analyses supplémentaires (pas de calcul, moyennes par phase, études en contrastes...). La programmation s'est appuyée sur l'utilisation d'une fonction d'optimisation (déjà présente dans une des bibliothèques pour le calcul scientifique) pour résoudre le problème implicite posé par l'optimisation des inconnues. Une architecture modulaire a été mise en place pour coder l'approche. Ainsi programmée, elle est *fonctionnelle* et montre d'*excellents résultats* sur l'ensemble des configurations testées. Les résultats pour la microstructure réalisant la borne inférieure de HS valident le code réalisé, et ceux obtenus pour la microstructure périodique à fibres longues prouvent la robustesse du couple formé par l'approche incrémentale et le schéma de Luciano et Barbero (1994) retenu ici pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire. Ce schéma constitue une alternative possible à l'approximation d'HS des travaux originaux.

Dans la **PARTIE 2**, après avoir généralisé l'approche, celle-ci a été appliquée avec succès à d'autres comportements matériaux viscoélastiques. L'extension a surtout porté sur la prise en compte de plusieurs variables internes non uniquement déviatoriques, permettant de considérer des déformations volumiques anélastiques. Bien qu'annoncée comme possible dans Lahellec et Suquet (2007a), nous avons ici montré la faisabilité pratique de cette généralisation en reprenant les développements à la source, de même que le caractère opérationnel de la résolution numérique. Les résultats sont toujours en *très bonne adéquation* avec les solutions de référence dans des configurations de complexité croissante et en particulier pour un modèle viscoélastique de *Maxwell généralisé*. De plus, différents schémas d'homogénéisation linéaire, autres que ceux considérés dans Lahellec et Suquet (2007a,b,c) et en plus du schéma de Luciano et Barbero (1994), ont été couplés à l'approche incrémentale pour *étendre encore un peu plus* son domaine d'utilisation. Il s'agit des

schémas de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion pour des microstructures à inclusions sphériques mais aussi de types prolates et oblates avec différents rapports de forme, du schéma de Malekmohammadi et al. (2014) pour des composites à copeaux orthotropes de bois lamellés ou encore, de la borne de Reuss et des schémas CCA et CSA. Les estimations, lorsque confrontées aux résultats de la littérature et/ou aux solutions de référence, confirment l'efficacité de l'approche incrémentale dès lors que le taux de renforts et/ou les contrastes ne mettent pas en défaut les schémas avec lesquels elle est associée. En réponse au cahier des charges initial, les travaux de cette partie auront permis d'élargir concrètement le spectre d'applications de l'approche incrémentale en termes de lois viscoélastiques linéaires locales et de morphologies microstructurales pouvant désormais être considérées.

Dans la **PARTIE 3**, après avoir présenté un formalisme d'écriture pour prendre en compte le couplage mécanique/température, des cas simplifiés ont été traités. D'un point de vue théorique, la prise en compte de la température comme variable d'état du système génère de nouvelles équations dans le problème local qui devient fortement complexe. Deux simplifications ont alors été introduites et ont permis de dérouler les étapes de l'approche incrémentale. Une formulation finale a ainsi pu être obtenue. Les premiers résultats ne prenant en compte que l'effet de la température, imposée par l'utilisateur, sur la réponse mécanique sont en *accord* avec les solutions de référence. Cette situation de couplage de la thermique vers la mécanique est quantitativement très bien restituée pour différents profils de température imposés simultanément au chargement mécanique. Enfin, une première simulation avec résolution simultanée de l'équation de la chaleur a été réalisée afin de considérer une situation de couplage fort c'est-à-dire dans les deux sens : de la mécanique (chargement) vers la thermique (modification de la température induite par les termes sources au sein de l'équation de la chaleur) et de la thermique vers la mécanique (via la répercussion de la modification de température sur la réponse mécanique par couplage thermoélastique). Les résultats sont qualitativement en accord avec les attentes.

Plusieurs directions sont à suivre pour compléter les travaux présentés dans ce manuscrit. Elles sont classées par ordre de priorité vis-à-vis du cahier des charges défini au démarrage des présents travaux.

- En tout premier lieu, des simulations en champs complets seront effectuées pour vérifier les derniers résultats obtenus en présence d'un couplage fort. De telles confrontations permettront de statuer quant à la pertinence de la modélisation proposée et des simplifications sous-jacentes dans ce cas précis.
- Dans le cas où seul le couplage de la thermique vers la mécanique est considéré, les simulations ont été effectuées dans une configuration assez restreinte en termes de microstructure (fibres longues), de comportement (Maxwell à une variable interne dotée de parts sphérique et déviatorique) et de chargement mécanique (monotone). Ainsi, des confrontations des estimations aux solutions de référence en changeant ces caractéristiques, seraient intéressantes pour mieux valoriser les développements réalisés.
- Même si on a exemplifié la pertinence de la généralisation théorique de l'approche incrémentale à plusieurs variables internes sur un modèle de Maxwell généralisé à trois branches, le programme de résolution à proprement parlé devra être généralisé à court terme dans le cas d'un plus grand nombre de branches. Cela permettra de considérer des lois physiquement plus représentatives de la viscoélasticité réelle des matrices polymères.
- De nombreux chargements mécaniques, déjà considérés par Lahellec et Suquet (2007a,b,c) et supplémentaires, ont pu être simulés : chargements monotone ou de relaxation en glissement simple, chargement complexe en palier, traction uniaxiale monotone, chargements en relaxation

uniaxial et en glissement selon trois plans, chargements thermomécaniques avec différents profils de température imposés (rampe, palier, créneau). Ainsi, bien que plusieurs chargements aient été étudiés dans ce manuscrit, une étude de cas en chargement cyclique, déjà réalisé (donc faisable) dans les travaux originaux, viendrait compléter avantageusement nos travaux.

- Enfin, d'autres schémas d'homogénéisation pourraient être couplés à l'approche incrémentale dans sa version étendue proposée ici.

D'un point de vue plus fondamental, et donc à plus long terme, les axes de développement à envisager sont les suivants.

- Pour ce qui est de l'approche avec couplage, il sera nécessaire d'incorporer si possible la relation de passage micro-macro portant sur le gradient de température dans la caractérisation variationnelle du potentiel incrémental effectif qui, par suite, deviendrait fonction de la température macroscopique. Dans un premier temps, des simulations pourraient être réalisées sans résoudre l'équation de la chaleur, c'est-à-dire dans une situation de couplage de la thermique vers la mécanique mais dans un cadre moins simplifié que dans les présents travaux.
- Tous les développements de ce manuscrit ont été réalisés en viscoélasticité linéaire jugée prioritaire étant donnée l'ambition d'aller vers du Maxwell généralisé et de tenter un couplage avec la température. Entre temps, la version 2013 de l'approche incrémentale (Lahellec et Suquet (2013)) a été concrètement appliquée en viscoélasticité linéaire par Badulescu et al. (2015). Les capacités dans le cas d'un modèle de Maxwell semblent meilleures que celles de la version proposée en 2007. Il serait alors très intéressant de pouvoir comparer les estimations obtenues par l'approche généralisée proposée dans nos travaux à celles de la version 2015 dans le cas de lois complexes, de type Maxwell généralisé.
- Même si la majorité des applications concernent des phases isotropes, les équations adossées à la généralisation de l'approche à plusieurs variables internes ont été écrites dans le cas plus général de phases anisotropes. A travers l'exemple des composites à copeaux de bois lamellés, nous avons montré que la mise en œuvre de l'approche dans le cas où la phase élastique est orthotrope ne pose aucune difficulté dès lors que l'on dispose d'un schéma d'homogénéisation adapté. Il serait intéressant de considérer une application dans laquelle la phase viscoélastique serait anisotrope avec tout ce que cela implique de difficulté supplémentaire pour l'évaluation du second moment du champ de déformation.
- L'extension du code (sans couplage avec la température dans un premier temps), pour des comportements viscoélastiques non linéaires pourrait aussi être envisagée. Les travaux de Lahellec et Suquet (2007b,c) permettent d'être confiants quant à la faisabilité de cette opération qui passera par la mise en œuvre de méthodes de linéarisation.
- Enfin, un couplage avec d'autres processus physiques, en particulier la diffusion d'espèces, est aussi envisageable, d'autant plus que les équations régissant certains phénomènes peuvent être, dans le formalisme, proches de celles régissant les phénomènes thermiques.

Annexes

A.1 Composites périodiques à fibres longues à section circulaire

Luciano, R., Barbero, E.J., 1994. Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, No.21, 2933-2944.

En se basant sur les travaux de Nemat-Nasser et al. (1982), Luciano et Barbero (1994) présentent des formules explicites pour le calcul de la matrice de rigidité effective d'un composite à microstructure périodique (cf. paragraphe (III.B)). Une fois cette matrice obtenue, il est possible de déterminer les six constantes ingénieurs caractéristiques du matériau isotrope transverse (seulement cinq sont indépendantes). Dans leurs travaux, le schéma est validé par comparaison à des résultats expérimentaux et numériques.

Afin de valider la programmation en Python® de ce schéma réalisée dans le cadre des présents travaux, des comparaisons en élasticité sont faites avec les solutions éléments finis, obtenues sous Abaqus®, grâce à un modèle écrit et validé lors de mes travaux antérieurs à l'Université de Colombie Britannique. La génération du volume élémentaire représentatif soumis à six chargements élémentaires en imposant des conditions aux limites cinématiques périodiques permet de construire la matrice de rigidité et ainsi le calcul des propriétés effectives.

Dans un premier temps, nous présentons toutes les équations du schéma de Luciano et Barbero (1994) nécessaires au calcul de la matrice effective. Ensuite, deux études sont réalisées : la première en fonction du taux de fibres et la seconde sur l'influence du contraste.

a) Matrice de rigidité effective

Le schéma est basé sur le calcul des champs dans un composite périodique à partir des séries de Fourier (cf. Nemat-Nasser et al. (1982)). Luciano et Barbero (1994) donnent alors des équations pour les séries de Fourier non nulles :

$$\begin{cases} S_3 = 0,49247 - 0,47603 * c_1 - 0,02748 * (c_1)^2 \\ S_6 = 0,36844 - 0,14944 * c_1 - 0,27152 * (c_1)^2 \\ S_7 = 0,12346 - 0,32035 * c_1 - 0,23517 * (c_1)^2 \end{cases} \quad (A1.1)$$

Les coefficients de la matrice de rigidité effective, C^* , représentée sous forme d'une matrice carrée d'ordre 6 sont alors donnés par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11}^* = \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} - c_1 \left[\frac{S_3^2}{(\mu^{(2)})^2} - \frac{2S_6S_3}{(\mu^{(2)})^2g} - \frac{aS_3}{\mu^{(2)}c} + \frac{S_6^2 - S_7^2}{(\mu^{(2)})^2g^2} + \frac{aS_6 - bS_7}{\mu^{(2)}gc} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right] / D \\ C_{12}^* = \lambda^{(2)} + c_1b \left[\frac{S_3}{2c\mu^{(2)}} - \frac{S_6 - S_7}{2c\mu^{(2)}g} - \frac{a + b}{4c^2} \right] / D \\ C_{23}^* = \lambda^{(2)} + c_1 \left[\frac{aS_7}{2\mu^{(2)}gc} - \frac{ba + b^2}{4c^2} \right] / D \\ C_{22}^* = \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} - c_1 \left[-\frac{aS_3}{2\mu^{(2)}c} + \frac{aS_6}{2\mu^{(2)}gc} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right] / D \\ C_{44}^* = \mu^{(2)} - c_1 \left[-\frac{2S_3}{\mu^{(2)}} + (\mu^{(2)} - \mu^{(1)})^{-1} + \frac{4S_7}{\mu^{(2)}(2 - 2\nu^{(2)})} \right]^{-1} \\ C_{66}^* = \mu^{(2)} - c_1 \left[-\frac{S_3}{\mu^{(2)}} + (\mu^{(2)} - \mu^{(1)})^{-1} \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (A1.2)$$

avec

$$D = \frac{aS_3^2}{2(\mu^{(2)})^2c} - \frac{aS_6S_3}{(\mu^{(2)})^2gc} + \frac{a(S_6^2 - S_7^2)}{2(\mu^{(2)})^2g^2c} + \frac{S_3(b^2 - a^2)}{2\mu^{(2)}c^2} + \frac{S_6(a^2 - b^2) + S_7(ab + b^2)}{2\mu^{(2)}gc^2} + \frac{a^3 - 2b^3 - 3ab^2}{8c^3} \quad (A1.3)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \mu^{(1)} - \mu^{(2)} - 2\mu^{(1)}\nu^{(2)} + 2\mu^{(2)}\nu^{(1)} \\ b = -\mu^{(2)}\nu^{(2)} + \mu^{(1)}\nu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\nu^{(2)}\nu^{(1)} - 2\mu^{(1)}\nu^{(2)}\nu^{(1)} \\ c = (\mu^{(2)} - \mu^{(1)}) * \left(\begin{array}{l} -\mu^{(2)} + \mu^{(1)} - \mu^{(2)}\nu^{(2)} - 2\mu^{(1)}\nu^{(2)} + 2\mu^{(2)}\nu^{(1)} \\ +\mu^{(1)}\nu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\nu^{(2)}\nu^{(1)} - 2\mu^{(1)}\nu^{(2)}\nu^{(1)} \end{array} \right) \\ g = (2 - 2\nu^{(2)}) \end{array} \right. \quad (A1.4)$$

Une fois la matrice de rigidité effective C^* construite, le tenseur d'ordre 4 effectif $\underline{\underline{\underline{\tilde{L}}}}$ est calculable à partir des fonctions codées dans le module Tenseurs (cf. II.H.1), tout comme les constantes ingénieurs.

b) Influence du taux de fibres

Les propriétés mécaniques des deux constituants adoptées pour cette démarche de validation correspondent aux propriétés élastiques et instantanées utilisées dans la **PARTIE 1** au paragraphe (III.B.1). Elles sont rappelées dans le Tableau 36 ci-dessous :

	Compressibilité $k^{(r)}$ (GPa)	Cisaillement $\mu^{(r)}$ (Gpa)
Fibre ($r = 1$)	222,2	166,6
Matrice ($r = 2$)	58,33	26,92

Tableau 36 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice.

Sur les Figure 62, Figure 63 et Figure 64, les estimations des propriétés effectives à l'aide du schéma de Luciano et Barbero (1994) (lignes) sont confrontées aux solutions de référence obtenues par le modèle éléments finis (symboles).

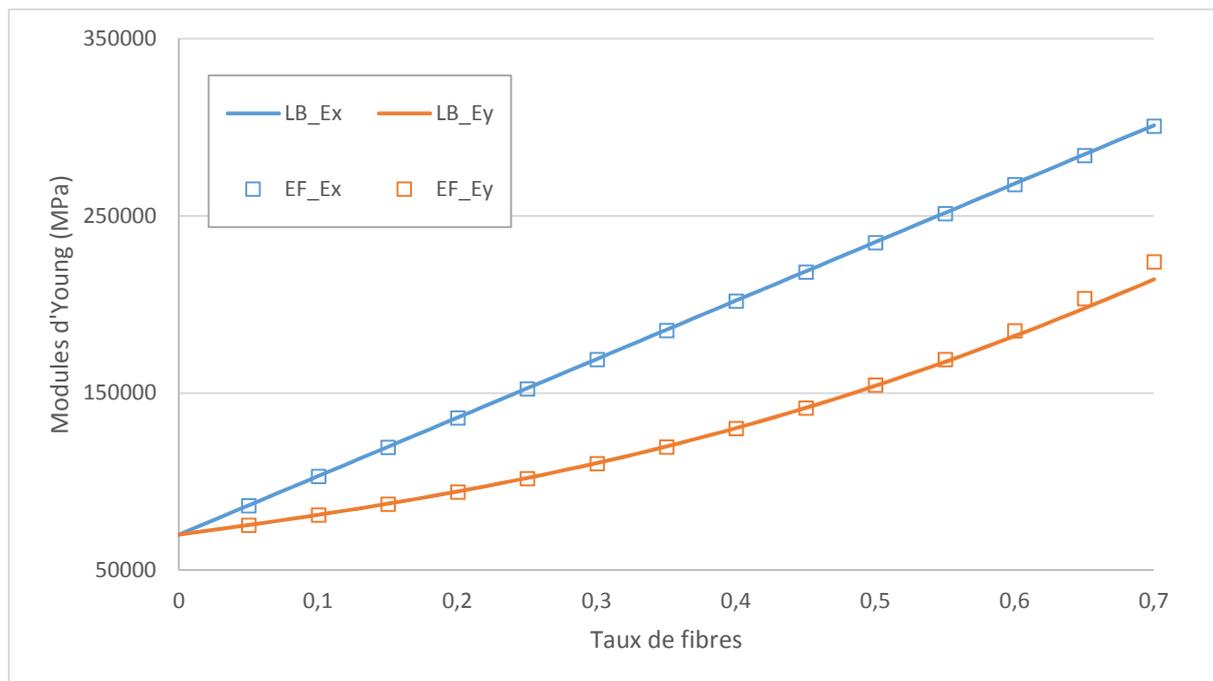


Figure 62 : Modules d'Young effectifs dans les directions longitudinale et transverse aux fibres en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).

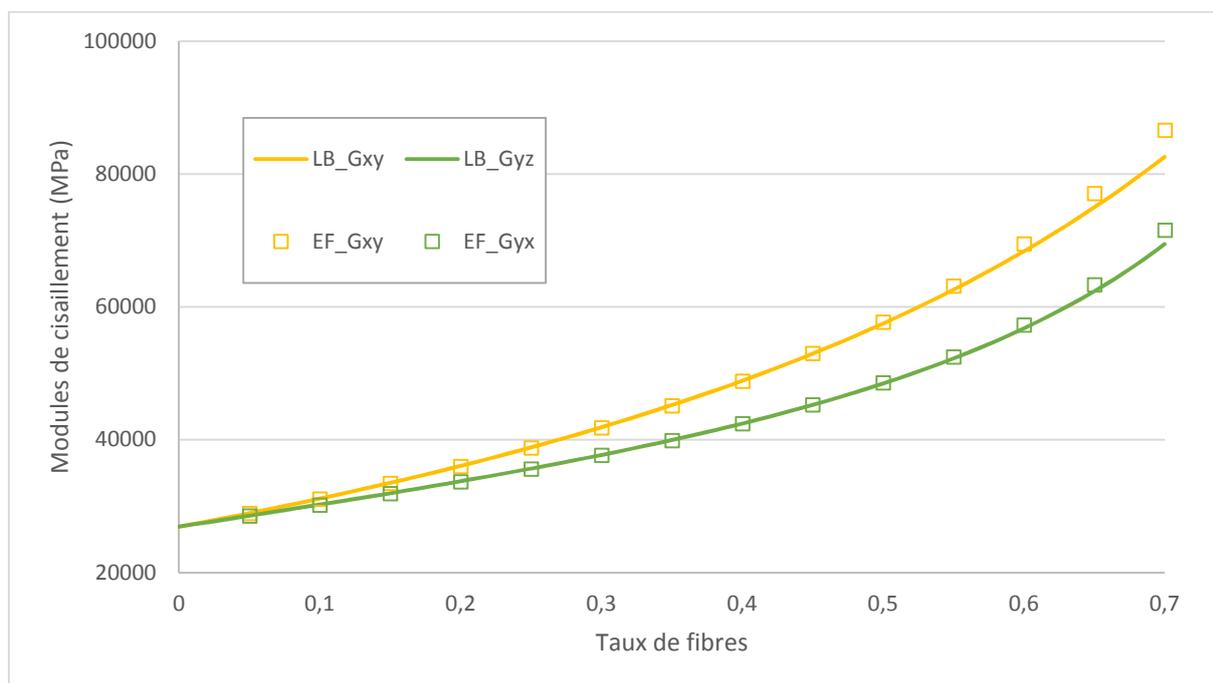


Figure 63 : Modules de cisaillement effectifs (plans (x,y) et (y,z)) en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).

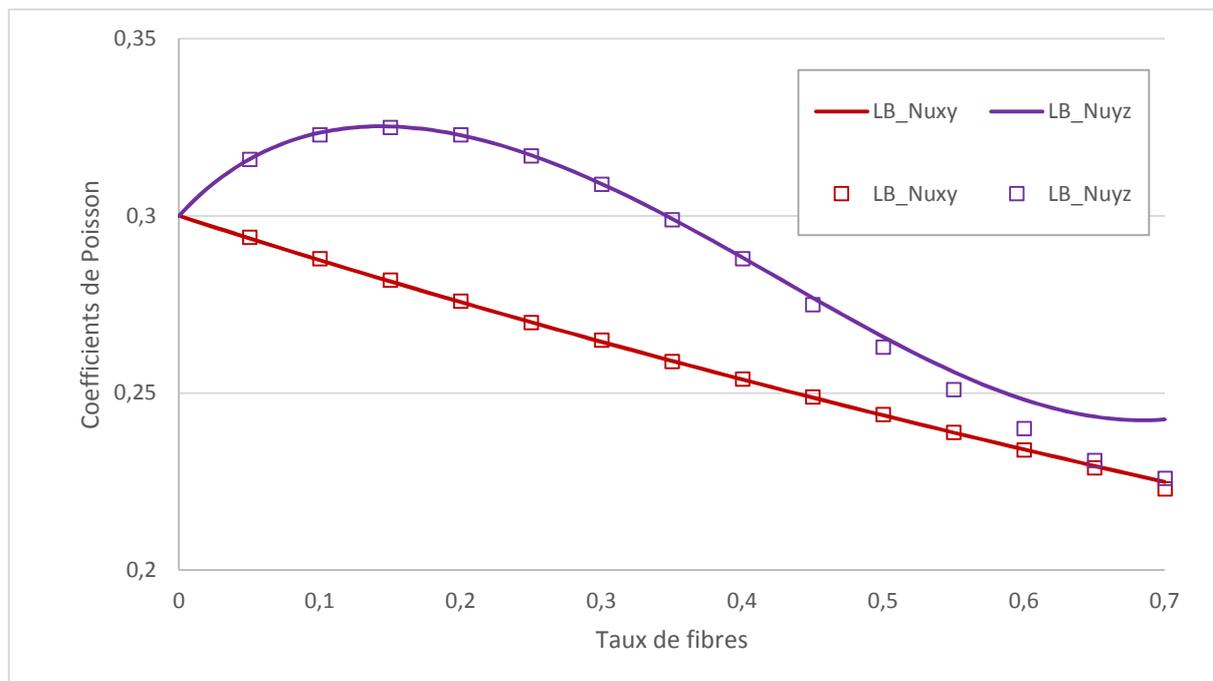


Figure 64 : Coefficients de Poisson effectifs en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).

De manière générale, jusqu'à un taux volumique de fibres de 0,4, les résultats sont proches avec une erreur relative inférieure à 0,5%, puis commencent à s'éloigner tout en restant en dessous de 1% jusqu'à un taux de fibres de 0,5, qui est la borne supérieure du domaine d'étude de ce manuscrit pour cette microstructure. Néanmoins, ces résultats sont obtenus pour un contraste fibre/matrice relativement faible, valant 3,8 pour le module de compressibilité et 6,2 pour le module de cisaillement.

c) Influence du contraste

Pour un problème viscoélastique, les propriétés mécaniques varient au cours du temps. Ainsi, pour compléter la validation du schéma analytique, une étude sur le contraste fibre/matrice est réalisée pour trois taux de fibres : 0,1, 0,3 et 0,45. Sur les Figure 65, Figure 66 et Figure 67, les estimations des propriétés effectives à l'aide du schéma de Luciano et Barbero (1994) (lignes) sont confrontées aux solutions de référence obtenues par le modèle éléments finis (symboles). Le contraste correspond au rapport entre les modules d'Young ($E_{fibre}/E_{matrice}$) avec un coefficient de Poisson de 0,2 pour les deux phases. On se place dans les mêmes conditions que l'étude sur le second moment faite au paragraphe (III.D.1).

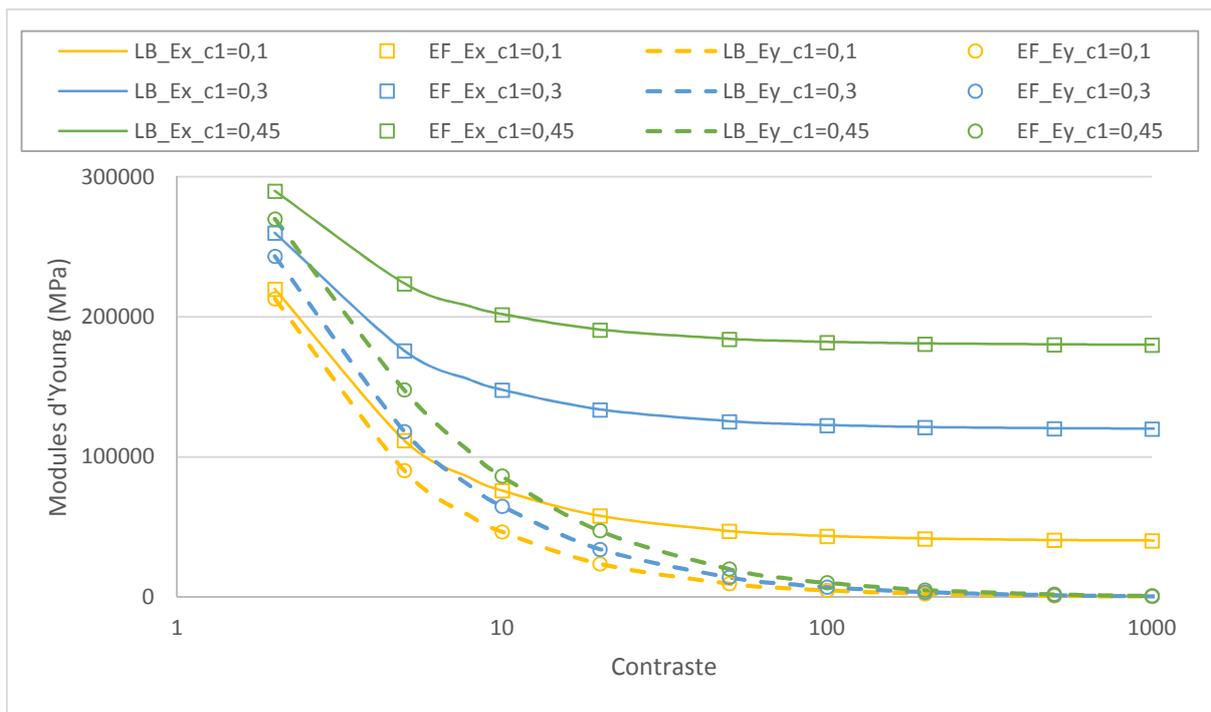


Figure 65 : Modules d'Young en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).

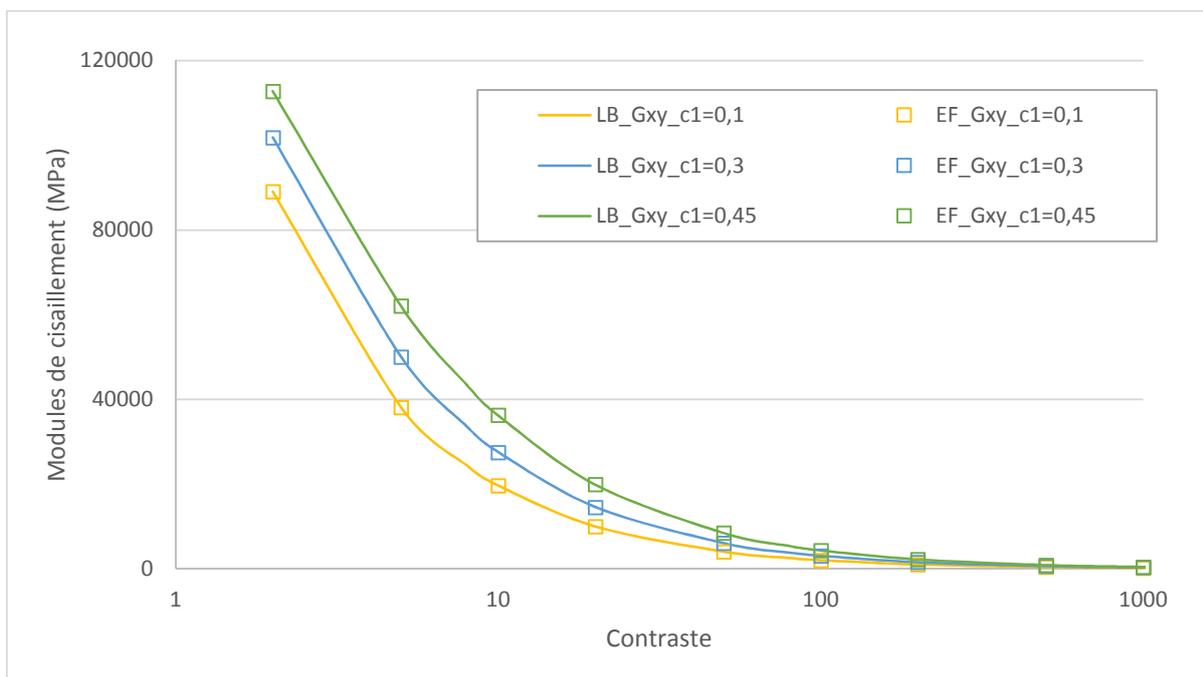


Figure 66 : Modules de cisaillement G_{xy} en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).

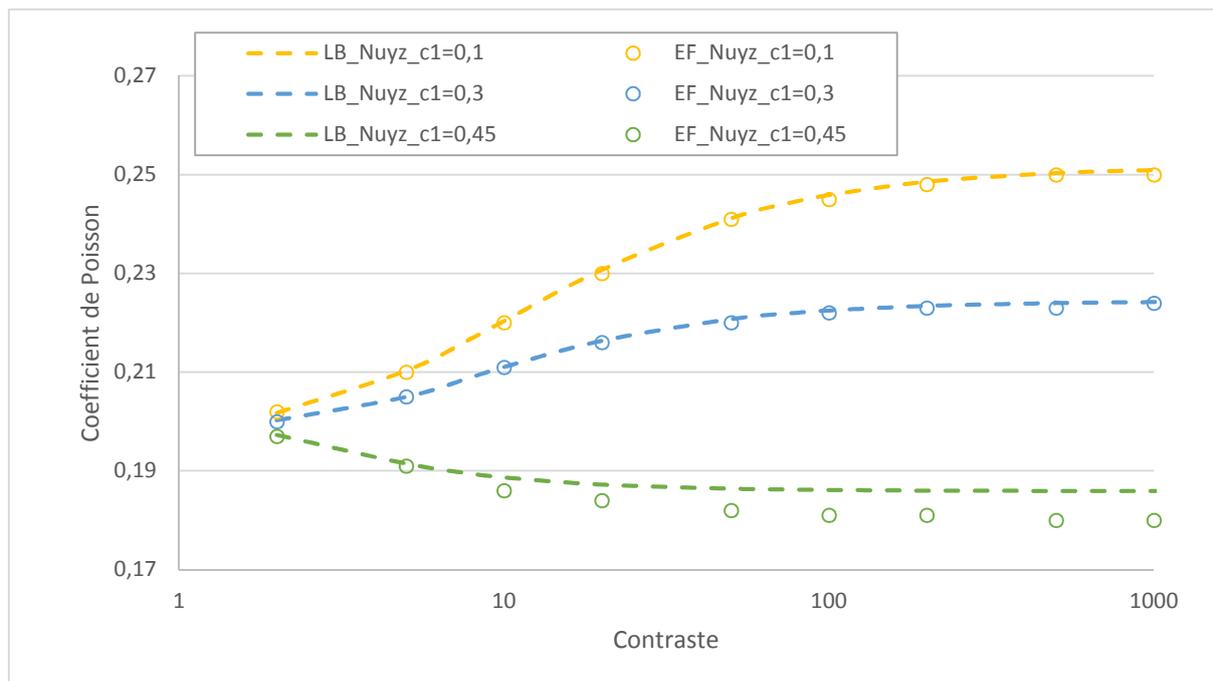


Figure 67 : Coefficient de Poisson Nu_{yz} en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).

Mise à part pour le coefficient de Poisson transverse Nu_{yz} , les estimations et les solutions de référence sont en accord avec une erreur relative inférieure à 1%, même à fort contraste. Sur la Figure 67, il est évident que l'évaluation du coefficient de Poisson Nu_{yz} par le schéma analytique devient moins précise lorsque le taux de fibres dépasse 0,3 et le contraste 10.

Le schéma de Luciano et Barbero (1994) permet une estimation satisfaisante des propriétés effectives en élasticité. Sa simplicité nous a conduits à le retenir pour des problèmes hétérogènes viscoélastiques en le couplant avec l'approche incrémentale.

A.2 Schémas de Mori-Tanaka et de Double-Inclusion

Nous présentons ici les équations nécessaires au calcul des tenseurs des propriétés effectives par les deux schémas utilisés aux paragraphes (VI.A) et (VI.B), Mori-Tanaka et Double-Inclusion.

Pour se faire, il est nécessaire tout d'abord d'introduire le tenseur d'Eshelby. Ce tenseur permet de calculer l'état de déformation dans une inclusion ellipsoïdale baignée dans un milieu infini, selon les travaux d'Eshelby (1957). Sur la Figure 68, une représentation d'une inclusion ellipsoïdale est donnée.

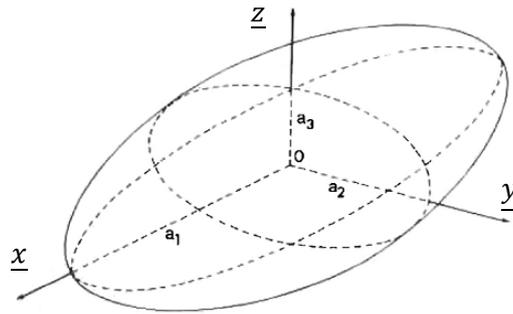


Figure 68 : Schéma représentatif d'une inclusion ellipsoïdale, Mura 1987.

où a_1, a_2, a_3 sont les demi-longueurs de l'ellipsoïde respectivement dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} .

a) Tenseur d'Eshelby

Le milieu infini a un coefficient de Poisson valant ν_m . Avec les notations introduites sur la Figure 68, toutes les composantes non nulles du tenseur d'Eshelby, noté $\underline{\underline{S}}$, sont obtenues par permutation cyclique de (1,2,3) à partir des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1111} = \frac{3a_1^2 A_{11} + (1 - 2\nu_m) A_1}{8\pi(1 - \nu_m)} \\ S_{1122} = \frac{a_2^2 A_{12} - (1 - 2\nu_m) A_1}{8\pi(1 - \nu_m)} \\ S_{1133} = \frac{a_3^2 A_{13} - (1 - 2\nu_m) A_1}{8\pi(1 - \nu_m)} \\ S_{1212} = \frac{(a_1^2 + a_2^2) A_{12} + (1 - 2\nu_m)(A_1 + A_2)}{16\pi(1 - \nu_m)} \end{array} \right. \quad (A2.1)$$

où A_i et A_{ij} sont des intégrales elliptiques, définies par la suite, dépendant des relations entre les demi-longueurs a_1, a_2, a_3 (cf. Vincent et al. (2014)).

Dans le manuscrit, nous nous restreignons au cas où : $a_2 = a_3$.

Dans le cas où $a_1 = a_2 (= a_3)$, les valeurs de A_i et A_{ij} sont :

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = A_3 = \frac{4\pi}{3} \\ A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = A_{22} = A_{23} = A_{32} = A_{33} = \frac{4\pi}{5a_1^2} \end{cases} \quad (A2.2)$$

Tandis que dans le cas où la longueur $a_1 \neq a_2 = a_3$:

$$\begin{cases} A_2 = A_3 = (-1)^i * \frac{2\pi a_1 a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^{3/2}} \left\{ \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - 1 \right)^{1/2} - \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \right\} \\ A_1 = 4\pi - 2A_2 \\ A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} \\ A_{11} = \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi}{a_1^2} - A_{12} \right) \\ A_{22} = A_{23} = A_{32} = A_{33} = \frac{\pi}{a_2^2} \frac{A_{12}}{4} \end{cases} \quad (A2.3)$$

Avec $i = 0$ si $a_1 > a_2$ et $i = 1$ si $a_1 < a_2$.

b) Tenseurs de localisation

Pour un composite à deux phases et une géométrie d'inclusion fixée, le tenseur d'ordre 4 effectif $\underline{\underline{\underline{\tilde{L}}}}$ est défini par :

$$\underline{\underline{\underline{\tilde{L}}}} = \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(2)} + c_1 \left\langle \left(\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(1)} - \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(2)} \right) : \underline{\underline{\underline{A}}} \right\rangle \quad (A2.4)$$

où $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^{(2)}$ sont les tenseurs d'ordre 4 des propriétés mécaniques respectivement de l'inclusion et de la matrice, c_1 la fraction volumique de l'inclusion et $\underline{\underline{\underline{A}}}$ le tenseur de localisation qui dépend du schéma d'homogénéisation utilisé. Les tenseurs de localisation sont explicités ci-dessous pour les deux schémas utilisés aux paragraphes (VI.A) et (VI.B).

Mori-Tanaka

Mori et Tanaka (1973) ont donné l'expression du tenseur de localisation en déformation sous la forme :

$$\underline{\underline{A}}^{MT} = \underline{\underline{A}}_{Esh}^{(2)} : \left[(1 - c_1) * \underline{\underline{I}} + c_1 * \underline{\underline{A}}_{Esh}^{(2)} \right]^{-1} \quad (A2.5)$$

où $\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(2)}$ est le tenseur de localisation d'Eshelby avec la matrice comme milieu infini, donné par :

$$\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(2)} = \left[\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{(2)} : \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \right]^{-1} : \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(1)} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} \right) \right]^{-1} \quad (A2.6)$$

$\underline{\underline{S}}^{(2)}$ est le tenseur d'Eshelby (A2.1) calculé avec $\nu_m = \nu^{(2)}$, coefficient de Poisson de la matrice.

Double-Inclusion

Pour ce deuxième schéma introduit par Hori et Nemat-Nasser (1993), le tenseur de localisation dans le cas de l'interpolation de Lielens et al. (1998), noté $\underline{\underline{A}}^{LI}$, est donné par :

$$\underline{\underline{A}}^{LI} = \underline{\underline{\hat{A}}}^{LI} : \left[(1 - c_1) * \underline{\underline{I}} + c_1 * \underline{\underline{\hat{A}}}^{LI} \right]^{-1} \quad (A2.7)$$

Avec le tenseur $\underline{\underline{\hat{A}}}^{LI}$ tel que :

$$\underline{\underline{\hat{A}}}^{LI} = \left[(1 - v_f) * \left[\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(2)} \right]^{-1} + v_f * \left[\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(1)} \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (A2.8)$$

Dans cette expression, $\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(1)}$ est le tenseur de localisation d'Eshelby, cette fois calculé en utilisant l'inclusion comme milieu infini :

$$\underline{\underline{A}}_{Esh}^{(1)} = \left[\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{(1)} : \left[\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(1)} \right]^{-1} : \left(\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(2)} - \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{(1)} \right) \right]^{-1} \quad (2.9)$$

où $\underline{\underline{S}}^{(1)}$ est le tenseur d'Eshelby (A2.1) calculé avec $\nu_m = \nu^{(1)}$, coefficient de Poisson de l'inclusion et v_f est une interpolation qui dépend du taux d'inclusions (Lielens et al. (1998)) :

$$v_f = \frac{1}{2} c_1 (1 + c_1) \quad (A2.10)$$

Liste des figures

Figure 1 : Influence des paramètres température et taux d'humidité sur la réponse à un essai de traction monotone. Launay et al. (2013)	8
Figure 2 : Plan général de résolution (boucle sur l'incrément $tn, tn + 1$).....	31
Figure 3 : Schéma descriptif de l'architecture du code réalisé.	32
Figure 4 : Représentation de la microstructure réalisant la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (vue en coupe).....	36
Figure 5 : Influence du pas de calcul sur la réponse du composite à un chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS. Taux de fibres de 0,45.....	38
Figure 6 : Comparaison des réponses effectives normalisées obtenues avec l'approche incrémentale (AI-HS) et le principe de correspondance (PC-HS) couplés à la borne HS. Chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS. Taux de fibres de 0,45.....	39
Figure 7 : Comparaison des réponses effectives normalisées obtenues avec l'approche incrémentale (AI) et le principe de correspondance (PC) pour différents taux de fibres (c_1). Chargement de relaxation en glissement simple (III.2). Microstructure HS.	40
Figure 8 : Cellule de base du composite périodique étudié (vue en coupe).....	42
Figure 9 : Cellule de base sous Abaqus® de la microstructure périodique et maillage optimisé associé. Taux de fibres de 0,25.	44
Figure 10 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.	46
Figure 11 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,4.	46
Figure 12 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres 0,25 et 0,4.....	47
Figure 13 : Contraintes asymptotiques normalisées en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).....	48
Figure 14 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse moyenne dans la fibre. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.	50
Figure 15 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse moyenne dans la matrice. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de fibres 0,25.	50
Figure 16 : Comparaison entre les réponses moyennes par phase (Fibre et Matrice) estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994), et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres 0,25 et 0,4.....	51
Figure 17 : Contraintes asymptotiques normalisées, macroscopique et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).	52
Figure 18 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'AI sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (III.7). Microstructure périodique. Taux de porosités 0,25.	55
Figure 19 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure	

périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de porosités 0,25 et 0,4.....	56
Figure 20 : Contraintes asymptotiques normalisées, macroscopique et moyennes par phase, en fonction du taux de porosités. Comparaison entre la valeur estimée par l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF).....	57
Figure 21 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres de 0,25. Influence du contraste des propriétés élastiques.....	58
Figure 22 : Comparaison entre la réponse homogénéisée estimée par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (III.7). Taux de fibres de 0,25. Influence des propriétés visqueuses de la matrice.....	59
Figure 23 : Comparaison entre l'estimation de la projection déviatorique du second moment dans la matrice avec l'approximation de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution de référence (EF) en fonction du contraste et pour différents taux de fibres. Microstructure périodique.....	62
Figure 24 : Comparaison entre l'estimation du second moment déviatorique normalisé dans la matrice avec l'approximation de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution de référence (EF). Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25.	63
Figure 25 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Chargement monotone en glissement simple (V.4). Microstructure périodique. Taux de fibre de 0,25. Coefficient de Poisson constant.....	80
Figure 26 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Coefficient de Poisson constant. La réponse homogénéisée pour un module de compressibilité constant (K_{cst}) dans la matrice est reportée pour comparaison.	81
Figure 27 : Contraintes asymptotiques normalisées macroscopiques et moyennes par phase en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Coefficient de Poisson constant. Les valeurs macroscopiques estimées pour un module de compressibilité constant (K_{cst}) sont reportées pour comparaison.	83
Figure 28 : Comparaison entre l'approche incrémentale (AI) et la solution exacte (EF) de la composante 2222 du second moment. Module de compressibilité de la matrice constant (K_{cst}) ou coefficient de Poisson de la matrice constant (ν_{Cst}). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,5.	84
Figure 29 : Contraintes asymptotiques estimées en fonction du ratio des temps caractéristiques. Comparaison aux solutions de référence (EF). Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25. ...	86
Figure 30 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante.....	89
Figure 31 : Comparaison entre les réponses homogénéisée et moyennes par phase estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple (V.4). Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à coefficients de Poisson constants.....	89
Figure 32 : Comparaison du champ de contraintes dans la direction y à $t = 8$ s dans le modèle éléments finis. (a) fibre élastique (b) fibre viscoélastique à coefficient de Poisson constant.	90

Figure 33 : Contraintes homogénéisée et moyennes par phase à $t = 5$ s en fonction de la viscosité déviatorique de la fibre. Comparaison entre l'AI et les EF. Microstructure périodique soumise à un chargement monotone en glissement simple. Taux de fibres de 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante.	91
Figure 34 : Représentation schématique du modèle de Maxwell généralisé.	93
Figure 35 : Influence du pas de temps utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée dans la direction y . Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps proches.	96
Figure 36 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps proches.	97
Figure 37 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 2 temps éloignés.	98
Figure 38 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 3 temps.	100
Figure 39 : Evolution des scalaires définissant les tenseurs $\theta\alpha_2$, $\theta\beta_2$ et $\theta\gamma_2$ (lignes continues) et des composantes $\gamma\gamma$ des tenseurs $\alpha n(2)$, $\beta n(2)$ et $\gamma n(2)$ (lignes discontinues). Microstructure périodique soumise au chargement (V.8). Taux de fibres de 0,25. Maxwell généralisé à 3 temps. ...	101
Figure 40 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25. Couplage avec le schéma de Mori-Tanaka.	105
Figure 41 : Influence du pas de calcul utilisé dans l'approche incrémentale sur la réponse homogénéisée. Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25. Couplage avec le schéma de Double-Inclusion.	105
Figure 42 : Contraintes homogénéisées issues de trois approches analytiques couplées au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka : l'approche incrémentale (AI), tangente additive (TA) et le principe de correspondance (PC). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions 0,25.	106
Figure 43 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (AI-MT) et de Double-Inclusion (AI-DI) et la solution de référence (EF). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,25. ...	107
Figure 44 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (AI-MT) et de Double-Inclusion (AI-DI) et la solution de référence (EF). Microstructure à renforts sphériques soumise à une traction uniaxiale. Taux d'inclusions de 0,1. ...	108
Figure 45 : Schéma représentatif d'une inclusion ellipsoïdale, Mura 1987.	109
Figure 46 : Contraintes asymptotiques macroscopiques en fonction du taux d'inclusions. Comparaison pour trois rapports de forme (0,2 – 1 – 5) entre les schémas d'homogénéisation de MT et DI.	110
Figure 47 : Influence du rapport de forme des inclusions sur la réponse homogénéisée asymptotique estimée par l'AI couplée aux schémas de Mori-Tanaka (MT) et Double-Inclusion (DI). Comparaison avec les résultats obtenus avec d'autres modèles d'homogénéisation. Microstructure renforcée par des particules ellipsoïdales soumise à un chargement monotone en glissement simple. Taux d'inclusions de 0,25.	111

Figure 48 : Cellule élémentaire représentative d'un composite à copeaux de bois lamellés, d'après Malekmohammadi et al. (2014). La résine est détachée du copeau pour plus de clarté.....	114
Figure 49 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) dans les trois directions de l'espace. Composite à copeaux de bois lamellés orthotropes. Chargement de relaxation uniaxial (VI.2). Fraction volumique de copeaux 0,93.	115
Figure 50 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) dans les trois plans. Composite à copeaux de bois lamellés orthotropes. Chargement de relaxation en glissement (VI.3). Fraction volumique de copeaux 0,93.	116
Figure 51 : Profils de température appliqués en fonction de la déformation macroscopique imposée (chargement mécanique monotone défini par (VIII.7)).	134
Figure 52 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise à un chargement mécanique monotone (VIII.7). Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice viscoélastique à coefficient de Poisson constant.....	135
Figure 53 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.	136
Figure 54 : Comparaison entre les réponses homogénéisées estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF) dans les trois directions de l'espace. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en créneau. Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.....	137
Figure 55 : Contraintes asymptotiques dans la direction y , macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (Aucune) sont reportées pour comparaison.	138
Figure 56 : Contraintes asymptotiques dans la direction des fibres, macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (Aucune) sont reportées pour comparaison.....	140
Figure 57 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres thermoélastiques et matrice thermoviscoélastique.....	142
Figure 58 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} et Σ_{yy} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à un chargement thermomécanique (chargement monotone (VIII.7) et profil de température en rampe). Taux de fibres de 0,25. Fibre thermoélastique, matrice thermoviscoélastique. Influence de la vitesse du chargement en température.	143
Figure 59 : Contraintes asymptotiques dans la direction y , macroscopiques et moyennes par phase, en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'approximation de Luciano et Barbero (1994) et la	

solution exacte (EF). Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7) et au profil de température en rampe. Fibres thermoélastiques, matrice thermoviscoélastique. Les valeurs estimées sans chargement thermique (A) sont reportées pour comparaison.	144
Figure 60 : Comparaison entre les réponses homogénéisées Σ_{xx} estimées par l'approche incrémentale (AI) couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) et les solutions exactes (EF). Microstructure périodique soumise à différents chargements thermomécaniques (chargement monotone (VIII.7) et profils en température définis Figure 51). Taux de fibres de 0,25. Fibres et matrice thermoviscoélastiques. Les réponses homogénéisées pour des fibres élastiques (E) sont reportées pour comparaison.....	145
Figure 61 : Réponse homogénéisée (verte) et évolution de la température (rouge), estimées par l'approche incrémentale couplée au schéma de Luciano et Barbero (1994) avec résolution simultanée de l'équation de la chaleur. Microstructure périodique soumise au chargement monotone (VIII.7). Taux de fibres de 0,25. Fibre élastique, matrice thermoviscoélastique. La réponse estimée sans résolution de l'équation de la chaleur (bleue) est présentée pour comparaison.	149
Figure 62 : Modules d'Young effectifs dans les directions longitudinale et transverse aux fibres en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).	161
Figure 63 : Modules de cisaillement effectifs (plans (x, y) et (y, z)) en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).	161
Figure 64 : Coefficients de Poisson effectifs en fonction du taux de fibres. Comparaison entre l'estimation du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et la solution exacte (EF).	162
Figure 65 : Modules d'Young en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).	163
Figure 66 : Modules de cisaillement G_{xy} en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).	163
Figure 67 : Coefficient de Poisson ν_{yz} en fonction du contraste pour trois taux de fibres. Comparaison entre les estimations du schéma de Luciano et Barbero (1994) (LB) et les solutions de référence (EF).	164
Figure 68 : Schéma représentatif d'une inclusion ellipsoïdale, Mura 1987.	165

Liste des tableaux

Tableau 1 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice. Phases isotropes et incompressibles. Lahellec et Suquet (2007a).....	37
Tableau 2 : Erreurs relatives entre l'AI et le PC à différents taux de fibres pour trois temps caractéristiques et deux pas de calcul.....	40
Tableau 3 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice, Lahellec et Suquet (2007a).....	42
Tableau 4 : Ecarts relatifs de la réponse homogénéisée pour deux tailles successives de maillage. Taux de fibres de 0,25.....	43
Tableau 5 : Nombres d'éléments dans le modèle éléments finis pour différents taux de fibres.	44
Tableau 6 : Ecarts relatifs des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus et pour deux taux de fibres.....	45
Tableau 7 : Temps CPU total pour différents pas de calcul utilisés dans l'approche incrémentale.	47
Tableau 8 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibres 0,25 et 0,4.	48
Tableau 9 : Comparaison des temps de calcul total et correspondant à un seul point de calcul entre l'approche incrémentale (AI) et les éléments finis (EF) pour deux pas de temps.....	49
Tableau 10 : Ecarts relatifs des réponses moyennes par phase estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de fibres 0,25.	51
Tableau 11 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibres 0,25 et 0,4.....	51
Tableau 12 : Ecarts relatifs entre les contraintes asymptotiques estimées par l'AI et les solutions EF et valeurs des temps à 98%, aux échelles macroscopique et microscopique, en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique.....	53
Tableau 13 : Ecarts relatifs des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de porosités 0,25.	55
Tableau 14 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisées entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de porosités 0,25 et 0,4.	56
Tableau 15 : Influence des propriétés de la fibre sur la contrainte asymptotique normalisée et le temps à 98%.....	58
Tableau 16 : Effet de la viscosité de la matrice sur la contrainte asymptotique normalisée et le temps à 98%.	60
Tableau 17 : Propriétés mécaniques des phases. Cas d'une matrice viscoélastique linéaire à coefficient de Poisson constant dans le temps.	79
Tableau 18 : Ecarts relatifs des réponses estimées pour deux pas de calcul successifs aux trois temps retenus. Taux de fibre de 0,25. Coefficient de Poisson constant.....	81
Tableau 19 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisée et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF).	82
Tableau 20 : Ecarts relatifs entre les contraintes asymptotiques estimées par l'AI et les solutions EF, valeurs des temps à 98%, comparaison avec le cas à module de compressibilité constant, aux échelles macroscopique et microscopique en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique. Coefficient de Poisson constant.	83
Tableau 21 : Propriétés des deux phases viscoélastiques.....	88
Tableau 22 : Erreurs relatives pour les réponses homogénéisé et moyennes par phase entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF). Taux de fibre 0,25. Deux phases viscoélastiques à compressibilité constante ou à coefficients de Poisson constants.....	88
Tableau 23 : Propriétés élastiques de la fibre.	94

Tableau 24 : Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 2 temps de relaxation proches.	96
Tableau 25 Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 2 temps de relaxation éloignés.	97
Tableau 26 : Propriétés de la matrice. Modèle de Maxwell généralisé à 3 temps de relaxation.	99
Tableau 27 : Erreurs relatives pour la réponse homogénéisée dans la direction y entre l'estimation (AI) et la solution de référence (EF) pour les trois modèles étudiés : à 2 temps proches (V.C.2.a), à 2 temps éloignés (V.C.2.b) et à 3 temps (V.C.3).	100
Tableau 28 : Propriétés mécaniques des inclusions et de la matrice, Lahellec et Suquet (2007b), Czarnota et al. (2015).	104
Tableau 29 : Propriétés mécaniques du copeau de bois (en MPa pour E_i et G_{ij}).	114
Tableau 30 : Propriétés mécaniques de la résine.	114
Tableau 31 : Propriétés purement mécaniques des constituants en fonction du cas étudié.	133
Tableau 32 : Coefficients de dilatation thermique des constituants en fonction du cas étudié.	133
Tableau 33 : Ecart relatifs entre les contraintes estimées par l'AI et les solutions EF pour différents temps caractéristiques des chargements thermomécaniques étudiés. Microstructure périodique. Taux de fibres de 0,25. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.	137
Tableau 34 : Ecart relatifs entre les contraintes asymptotiques dans la direction y estimées par l'AI et les solutions EF, valeurs des temps à 98%, aux échelles macroscopique et microscopique en fonction du taux de fibres. Microstructure périodique. Fibres élastiques, matrice thermoviscoélastique.	139
Tableau 35 : Capacité thermique massique et masse volumique de la matrice.	147
Tableau 36 : Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice.	160

Références bibliographiques

- Aboudi, J., 1991. *Mechanics of Composite Materials, A Unified Micromechanical Approach*. Elsevier, Amsterdam.
- Arwade, S.R., Clouston, P.L. and Winans R., 2009. Measurement and stochastic computational modeling of the elastic properties of parallel strand lumber. *J Eng Mech-ASCE*, 135, 897-905.
- Auriault J.L. 1983. Effective macroscopic description of heat conduction in periodic composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 26(6), 861–869.
- Badulescu, C., Lahellec, N., Suquet, P., 2015. Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals. *Euro. J. of Mech. A/Solids* 49, 329-344.
- Barbero, E., Luciano, R., 1995. Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transversely isotropic fibers. *Int. J. Solids Struct.* 32, 1859–1872.
- Benveniste, Y., 1987. A New Approach to the Application of Mori-Tanaka Theory in Composite-Materials. *Mech. Mater.* 6(2), 147-157.
- Berbenni, S., Dinzart, F., Sabar, H., 2015. A new internal variables homogenization scheme for linear viscoelastic materials based on an exact Eshelby interaction law. *Mech. of Materials* 81, 110-124.
- Berveiller, M., Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to the plastically flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 26, 325.
- Bornet, M., Bretheau, T., Gilormini, P., (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 – Matériaux aléatoires élastiques et milieu périodiques*. Paris, hermès sci edition.
- Bornet, M., Bretheau, T., Gilormini, P., (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 – Comportements non-linéaires et problèmes ouverts*. Paris, hermès sci edition.
- Brassart, L., Stainier, L., Doghri, I., Delannay, L., 2011. A variational formulation for the incremental homogenization of elasto-plastic composites. *J. of the Mech. And Physics of Solids* 59, 2455-2475.
- Brassart, L., Stainier, L., Doghri, I., Delannay, L., 2012. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variationl principle. *Int. J. of Plasticity* 36, 86-112.
- Brenner, R. Masson, R., 2005. Improved affine estimates for nonlinear viscoelastic composites. *Eur. J. Mech. A/Solids* 24 (2005)
- Brinson, I.C., Lin, W.S., 1998. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Compos. Struct.* 41, 353–367.
- Chaboche, J.-L., Kruch, S., Maire, J.-F., Pottier, T., 2001. Towards a micromechanics based inelastic and damage modelling composites. *Int. J. of Plasticity*, 17, 411–439.
- Chinesta, F., Leygue, A., Beringhier, M., Ngyen, L.T., Grandidier, J.C., Schrefler, B., Pesavento, F., 2013. Towards a framework for non-linear thermal models in shell domains. *Int. J. of numerical methods for heat and fluid flow* 23, 55-73.
- Christensen, R. M., 1969. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 23-41.
- Christensen, R. M., 1979. *Mechanics of Composite Material*. Wiley, New York.
- Christensen, R. M., Lo, K. H., 1979. Solutions for Effective Shear Properties in 3 Phase Sphere and Cylinder Models. *J. Mech. Phys. Solids* 27(4), 315-330.
- Christensen, R. M., 1990. A Critical-Evaluation for a Class of Micromechanics Models. *J. Mech. Phys. Solids* 38(3), 379-404.
- Czarnota, C., Kowalczyk-Gajewska, K., Salahouelhadj, A., Martiny, M., Mercier, S., 2015. Modeling of the cyclic behaviour of elastic-viscoplastic composites by the additive tangent Mori-Tanaka approach and its validation by finite element calculations. *Int. J. of Solids and Structures*, 56-57, 96-117.

- DeBotton, G., Tevet-Deree, L., 2004. The response of a fiber-reinforced composite with a viscoelastic matrix phase. *J. Compos. Mater.* 38, 1255–1277.
- Dirrenberger, J., Forest, S., Jeulin, D. 2014. Towards gigantic RVE sizes for 3D stochastic fibrous networks. *Int. J. of Solids and Struct* 51(2) p.359-376.
- Doghri, I., Adam, L., Bilger, N., 2010. Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method. *Int. J. Plasticity* 26, 219–238.
- Dvorak, G.-J., 1992. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 437 :311–327.
- Dvorak, G.-J., Benveniste, Y., 1992. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 437 :291–310.
- Eshelby, J.D., 1957. The determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proc.R. Soc. Lond. Vol. 241, A*, 376-396.
- Francfort, G.A., Murat, F., 1986. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for rational mechanics and analysis*, Vol. 94, Issue 4, 307-334.
- Ghossein, E., Lévesque, M., 2012. A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites. *Int. J. of Solids and Struc.* 49, 1387-1398.
- Ghossein, E., Lévesque, M., 2013. Random generation of periodic hard ellipsoids based on molecular dynamics: A computationally-efficient algorithm. *J. of Comp. Physics* 253, 471-490.
- Ghossein, E., Lévesque, M., 2014. A comprehensive validation of analytical homogenization models: The case of ellipsoidal particles reinforced composites. *Mechanics of materials*, 75, 135-150.
- Ghossein, E., Lévesque, M., 2015. Homogenization models for predicting local field statistics in ellipsoidal particles reinforced composites: Comparisons and validations. *Int. J. of Solids and Structures*, 58, 91-105.
- Gigliotti, M., Grandidier, J.C., Lafarie-Frenot, M.C., 2011. Assessment of chemo-mechanical couplings in polymer matrix materials exposed to thermo-oxidative environments at high temperatures and under tensile loadings. *Mech. of Materials* 43, 431-443.
- Giordano, S., 2014. Explicit nonlinear homogenization for magneto-electro-elastic laminated materials. *Mech. Research Communications* 55, 18-29.
- Giordano, S., Goueygou, M., Tiercelin, N., Talbi, A., Pernod, P., Preobrazhensky, V., 2014. Magneto-electro-elastic effective properties of multilayered artificial multiferroics with arbitrary lamination direction. *Int. J. of Eng. Science* 78, 134-153.
- Halphen, B., Nguyen, Q.S., 1975. Sur les matériaux standards généralisés. *J. de Mécanique*, Vol.14, N°1, 39-63.
- Halpin, J., Kardos, J., 1976. Halpin-Tsai Equations - Review. *Polym. Eng. Sci.* 16(5), 344-352.
- Hashin, Z., 1962. The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials. *J. Appl. Mech.* 29(1), 143-150.
- Hashin Z., Shtrikman S., 1963. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J Mech Phys Solids*, 11:127.
- Hashin, Z., Rosen, W., 1964. The elastic moduli of fiber reinforced materials. *J. of Applied Mech.* 31, 223-232
- Hashin, Z., 1965. On elastic behavior of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 119-134.
- Hashin, Z, 1970a. Complex moduli of viscoelastic composites – I. General theory and application to particulate composites. *Int. J. Solids Struct.* 6, 539-552.
- Hashin, Z, 1970b. Complex moduli of viscoelastic composites – II. Fiber reinforced materials. *Int. J. Solids Struct.* 6, 797-807.

- Hashin, Z., 1983. Analysis of Composite Materials – A survey. *J. Appl. Mech.* 50, 481-505.
- Hill, R., 1965. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 13, 89-101.
- Hill, R., 1967. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 15, 79-95.
- Hori, M., Nemat-Nasser, S., 1993. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mech. of Materials*, 14, 189-206.
- Hutchinson, J.W., 1976. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. London A* 348, 101–127.
- Idiart, M., Danas, K., Ponte Castañeda, P., 2006. Second-order theory for nonlinear composites and application to isotropic constituents. *C. R. Mécanique* 334, 575–581.
- Gueribiz, D., Jacquemin, F., Fréour, S., 2013. A moisture diffusion coupled model for composite materials. *Euro. J. of Mech. A/Solids* 42, 81-89.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D., 2003. Determination of the Size of the Representative Volume Element for Random Composites: Statistical and Numerical Approach. *Int. J. Solids Structures* 40(13-14), 3647-3679.
- Kanit, T., N'Guyen, F., Forest, S., Jeulin, D., Reed, M., and Singleton, S., 2006. Apparent and Effective Physical Properties of Heterogeneous Materials: Representativity of Samples of Two Materials from Food Industry. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 195(33-36), 3960-3982.
- Kanoute, P., Boso, D.P., Chaboche, J.L., Schrefler, B.A, 2009. Multiscale methods for composites: a review, *Arch. Comput. Methods Eng.* 16, 31-75
- Karami, G., Garnich, M. (2005). Effective moduli and failure considerations for composites with periodic fiber waviness. *Composite Structures* 67(4), 461-475.
- Khan, KA., Barello, R., Muliana, AH, Levesque, M., 2011. Coupled heat conduction and thermal stress analyses in particulate composites. *Mech. of Materials* 43, 608-625.
- Khan, KA., Muliana, AH, 2012. Fully coupled heat conduction and deformation analyses of nonlinear viscoelastic composites. *Comp. Struct.* 94, 2025-2037.
- Kowalczyk-Gajewska, K., Petryk, H., 2011. Sequential linearization method for viscous/elastic heterogeneous materials. *European J. of Mech. A/Solids*, 30, 650-664.
- Lahellec, N., Suquet, P, 2003. Composites non linéaires à deux potentiels : estimations affine et du second-ordre. In : Potier-Ferry, M., Bonnet, M., Bignonnet, A. (Eds.), 6^{ème} Colloque National en Calcul des Structures. Tome 3. CSMA, 49-56.
- Lahellec, N., Suquet, P, 2007a. Effective behavior of linear viscoelastic composites: A time-integration approach. *Int. J. of Solids and Structures*, 44, 507–529.
- Lahellec, N., Suquet, P, 2007b. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites: I. Incremental variational principles. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 55, 1932–1963.
- Lahellec, N., Suquet, P, 2007c. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites: II. A second-order procedure. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 55, 1964–1992.
- Lahellec, N., Suquet, P., 2013. Effective response and field statistics in elasto-(vis-coplastic) composites under radial and non-radial loadings. *Int. J. Plast.* 42, 1-30.
- Largenton R., Michel, J.C., Suquet, P., 2014. Extension of the Nonuniform Transformation Field Analysis to linear viscoelastic composites in the presence of aging and swelling. *Mechanics of Materials*, 73, 76-100.
- Launay, A. Marco, Y., Maitournam, M.H., Raoult, I., 2013. Modelling the influence of temperature and relative humidity on the time-dependent mechanical behaviour of a short glass fibre reinforced polyamide. *Mech. of Materials* 56, 1-10.

- Levin, V., 1967. Thermal expansion coefficients of heterogeneous materials. *Mekh. Tverd. Tela* 2, 83–94.
- Lielens, G., Pirotte, P., Courniot, A., Dupret, F., Keunings, R., 1998. Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites. *Composites: Part A*, 29, 63-70.
- Llorca, J., Elices, M., Termonia, Y., 2000. Elastic properties of sphere-reinforced composites with a mesophase. *Acta Materialia* 48, 4589–4597
- Luciano, R., Barbero, E.J., 1994. Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, No.21, 2933-2944.
- Malekmohammadi, S., Tressou, B., Nadot-Martin, C., Ellyin, F., Vaziri, R., 2014. Analytical micromechanics equations for elastic and viscoelastic properties for strand-based composites. *J. of Comp. Materials*, Vol. 48(15), 1857-1874.
- Mandel, J., 1964. Contribution théorique à l'étude de l'écoulement et des lois de l'écoulement plastique. In Springer, editeur : 11th Int. Congr. Appl. Mech., 502-509, Berlin.
- Masson, R., Zaoui, A., 1999. Self-consistent estimates of the rate-dependent elasto-plastic behaviour of polycrystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids* 47, 1543– 1568.
- Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., Zaoui, A., 2000. An affine formulation for the prediction of the effective properties of non-linear composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 1203–1227.
- Masson, R., Brenner, R., Castelnau, O., 2012. Incremental homogenization approach for ageing viscoelastic polycrystals. *C. R., Méc.* 340 378–386.
- Michel, J.-C., Suquet, P., 2003. Nonuniform transformation field analysis. *Int. J. of Solids and Struct.*, 40, 6937-6955.
- Miled, B., Doghri, I., Brassart, L., Delannay, L., 2013. Micromechanical modeling of coupled viscoelastic–viscoplastic composites based on an incrementally affine formulation. *Int. J. of Solids and Struc.* 50, 1755-1769.
- Molinari, A., Ahzi, S., Kouddane, R., 1997. On the self-consistent modelling of elastic–plastic behavior of polycrystals. *Mech. Mater.* 26 43–62.
- Molinari, A., 2002. Averaging models for heterogeneous viscoplastic and elastic–viscoplastic materials, *ASME J. Eng. Mater. Tech.* 124, 62–70.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, Vol. 21, 571-574.
- Moulinec, H., Suquet, P., 1994. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C. R. Acad. Sc. Paris, II*, 318, 1417-1423.
- Moulinec, H., Suquet, P., 1998. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Meth. Appl. Mech. Engng.* 157, 69-94.
- Moulinec, H., Suquet, P., 2003. Comparison of FFT-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties, *Physica B*, 338, 58-60.
- Muliana, AH., Khan, KA., 2008. A time-integration algorithm for thermorheologically complex polymers. *Comput Mater Sci* 41(4), 576–88
- Muliana, AH., Li, KA., 2008. Time-dependent response of active composites with thermal, electrical, and mechanical coupling effect. *Int. J. of Eng. Sci.* 48, 1481-1497.
- Mura, T., 1987. *Micromechanics of Defects in Solids*. Springer; 2nd edition.
- Noor, AK., Shah, RS., 1993. Effective thermoelastic and thermal properties of unidirectional fiber-reinforced composites and their sensitivity coefficients. *Composite Structures* 26, 7–23.

- Nguyen, S.T.T., Castagnet, S., Grandidier, J.C., 2013. Nonlinear viscoelastic contribution to the cyclic accommodation of high density polyethylene in tension: Experiments and modeling. *Int. J. of Fatigue* 55, 166-177
- Olivier, L., 2008. Prédiction du vieillissement thermo-oxydant de composites à matrice organique dédiés à l'aéronautique : Prise en compte des couplages multiphysiques. Thèse de doctorat, Université de Poitiers – ENSMA.
- Ortiz, M., Stainier, L., 1999. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 171, 419–444.
- Özdemir, I., Brekelmans, WAM, Geers, MGD., 2008. Computational homogenization for heat conduction in heterogeneous solids. *Int. J. for numerical methods in engineering* 73, 185-204.
- Pelissou, C., Baccou, J., Monerie, Y., Perales, F., 2009. Determination of the size of the representative volume element for random quasi-brittle composites. *Int. J. of Solids and Struc.* 46, 2842-2855.
- Perez-Fernandez, L.D., Bravo-Castillero, J., Rodriuez-Ramos, R., Sabina, FJ., 2008. On the constitutive relations and energy potentials of linear thermo-magneto-electro-elasticity. *Mech. Research Communications* 36, 343-350.
- Pindera, M., Khatam, H., Drago, A. S., and Bansal, Y., 2009. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. *Composites Part B-Engineering*, 40(5), 349-378.
- Ponte Castaneda, P., 1992. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids* 39, 45-71.
- Ponte Castaneda, P., 1992. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, No. 8, 1757-1788.
- Ponte-Castañeda, P., 2002. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. I – Theory. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 737-757.
- Rambert, G., 2002. Modélisation des couplages thermo-diffuso-mécaniques dans les matériaux polymères. Application numérique à la décompression explosive. Thèse de doctorat, Université de Poitiers – ENSMA.
- Rambert, G. Grandidier, J.C., 2005. An approach to the coupled behaviour of polymers subjected to a thermo-mechanical loading in a gaseous environment. *Europ. J. of Mech. A/Solids* 24, 151-168.
- Rambert, G., Jugla, G., Grandidier, J.C., Cangemi, L., 2006. A modelling of the direct couplings between heat transfer, mass transport, chemical reactions and mechanical behaviour. Numerical implementation to explosive decompression. *Composites: Part A* 37, 571-584.
- Rambert, G., Grandidier, J.C., Aifantis, E.C., 2007 On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity. *Euro. J. of Mech. A/Solids* 26, 68-87.
- Rekik, A. Brenner, R., 2011. Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization. *Mech. Res. Comm.* 38, 305-308
- Ricaud, JM., Masson, R., 2009. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media: internal variables formulation and extension to ageing behaviours, *Int. J. Solids Struct.* 46 (2009) 1599–1606.
- Rosen, B. W., Hashin, Z. 1970. Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials. *Int. J. Eng. Sci.*, 8(2), 157-173.
- Rougier, Y., Stolz, C., Zaoui, A., 1994. Self-consistent modelling of elastic–viscoplastic polycrystals. *C.R. Acad. Sci. Paris* 318, 145–151, Serie II.
- Roussette, S., Michel, J.-C., Suquet, P., 2009. Nonuniform transformation field analysis of elastic–viscoplastic composites. *Comp. Science and Tech.*, 69, 22–27.

- Salmi, M., Auslender, F., Bornert, M., Fogli, M., 2012. Various estimates of Representative Volume Element sizes based on a statistical analysis of the apparent behavior of random linear composites. *Comptes Rendus Mécaniques*, 340(4-5), 230-246.
- Schaperly, R., 1962. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. In: U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME 4th, vol. 2, 1075–1085.
- Suquet, P., 1987. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In SANCHEZ-PALENCIA, E. et ZAOUÏ, A., Editeurs : Homogenization Techniques for Composite, Media, vol. 272, 193–278. Springer, Berlin.
- Suquet, P., 1995. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte-Castañeda's nonlinear variational procedure. *CR Acad. Sci. Paris IIb* 320, 563-571.
- Suquet P., 1997. Effective properties of nonlinear composites. in Suquet P. (ed.) *Continuum Micromechanics*. CISM Lecture Notes N0 377. Springer-Verlag. Wien. 1997. pp 197-264.
- Sun, C., Saffari, P., Ranade, R., Sadeghipour, K., Baran, G., 2007. Finite element analysis of elastic property bounds of a composite with randomly distributed particles. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38, 80–86.
- Tucker, C. L., Liang, E., 1999. Stiffness Predictions for Unidirectional Short-Fiber Composites: Review and Evaluation. *Composites Sci. Technol.* 59(5), 655-671.
- Vincent, M., Nadot-Martin, C., Nadot, Y., Dragon, A. (2014). Fatigue from defect under multiaxial loading : Defect Stress Gradient (DSG) approach using ellipsoidal Equivalent Inclusion Method. *Int. J. of Fatigue* 59, 176-187.
- Willis, J., 1981. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.* 21, 1-78.

Contribution à l'homogénéisation des milieux viscoélastiques et introduction du couplage avec la température, par extensions d'une approche incrémentale directe.

Cette thèse traite de la modélisation micromécanique de composites viscoélastiques via une approche incrémentale initialement proposée par Lahellec et Suquet en 2007. En plus d'être fondée sur un cadre thermodynamique rigoureux, cette approche permet une résolution dans l'espace-temps réel de problèmes viscoélastiques hétérogènes (i.e. sans recours au passage dans l'espace de Laplace). Le premier objectif de cette thèse vise à élargir le spectre d'application de l'approche, d'une part à des lois viscoélastiques linéaires locales plus élaborées que celles traitées dans les publications originales et d'autre part, à une plus grande variété de microstructures. Le second est de tenter d'introduire au sein de l'approche la prise en compte des effets de couplage entre la viscoélasticité et la température (couplage thermoélastique mais aussi l'échauffement induit par la dissipation viscoélastique).

Dans une première partie, l'approche incrémentale dans sa version originale est codée en Python® puis le programme est testé et validé pour des comportements viscoélastiques linéaires simples, ainsi que des microstructures (composites à fibres longues réalisant la borne inférieure de Hashin Shtrikman, ou périodiques) et chargements déjà étudiés dans les travaux de Lahellec et Suquet (2007). Certains aspects, comme l'influence du pas du calcul ou encore la qualité d'estimation des réponses moyennes par phase, sont par ailleurs étudiés. Une seconde partie opère une généralisation théorique de l'approche incrémentale à de multiples variables internes, non nécessairement déviatoriques et des phases non nécessairement isotropes. Les différentes extensions sont alors validées progressivement par des confrontations aux solutions de référence obtenues par simulations éléments finis et en particulier l'efficacité de l'approche étendue à traiter des matrices de type Maxwell généralisé (sans et avec déformations volumiques anélastiques). Cette partie se termine par une démonstration concrète de la possible association de l'approche incrémentale à trois schémas d'homogénéisation linéaire (Mori-Tanaka, Double Inclusion, schéma de Malekmohammadi et al. (2014)) pour résoudre le problème thermoélastique auxiliaire en vue de pouvoir traiter diverses morphologies microstructurales (composites à fibres et particules, composites à copeaux anisotropes de bois lamellés). La dernière partie traite du couplage entre la viscoélasticité et la température au sein de l'approche incrémentale. Les versions initiale et discrétisée dans le temps du problème hétérogène thermoviscoélastique sous sa forme la plus générale i.e. fortement couplée, sont formulées. Puis, plusieurs degrés de couplage sont envisagés selon une approche progressive des difficultés en vue d'un meilleur contrôle de la portée des développements réalisés. Le cas du seul couplage thermoélastique est ainsi tout d'abord étudié (couplage de la thermique vers la mécanique, sans résolution de l'équation de la chaleur). Les estimations obtenues pour plusieurs chargements thermomécaniques imposés à une microstructure périodique contenant des fibres longues élastiques, thermoélastiques puis thermoviscoélastiques, dans une matrice thermoviscoélastique sont confrontées avec succès aux solutions de référence aux deux échelles. Enfin, la résolution simultanée de l'équation de la chaleur est abordée en intégrant comme terme source la dissipation viscoélastique au sein de la matrice en plus du terme de couplage thermomécanique, les fibres étant considérées élastiques. Sans avoir été validées par confrontations aux solutions de référence, les estimations de l'évolution de la température et de la réponse globales révèlent des tendances cohérentes.

Les modèles analytiques utilisés dans cette thèse (extensions de l'approche incrémentale, schémas d'homogénéisation linéaire, approche basée sur le principe de correspondance et les transformées de Laplace), ont été codés sous Python® en s'aidant des bibliothèques de calculs scientifiques disponibles, tandis que les calculs en champs complets ont été réalisés par éléments finis sous Abaqus®.

Mots-clés : Viscoélasticité, Transition d'échelle, Microstructure (physique), Composites à fibres, Méthode d'homogénéisation numérique, Thermoélasticité, Equation de la chaleur, Python (langage de programmation).