



**HAL**  
open science

# Commande performante et robuste d'un écoulement de cavité

Mohamed Yazid Rizi

► **To cite this version:**

Mohamed Yazid Rizi. Commande performante et robuste d'un écoulement de cavité. Electronique. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2015. Français. NNT : 2015DENS0023 . tel-01327823

**HAL Id: tel-01327823**

**<https://theses.hal.science/tel-01327823v1>**

Submitted on 7 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale EDSP  
ENSC–(n° d'ordre)

# THÈSE

présentée pour l'obtention du

**Doctorat de l'École Normale Supérieure de Cachan**

(Spécialité Électronique – Électrotechnique – Automatique)

par

Mohamed-Yazid RIZI

## Commande performante et robuste d'un écoulement de cavité

Thèse présentée et soutenue à Cachan le Vendredi 19 Juin 2015 devant le jury composé de :

Edouard LAROCHE	Professeur des universités, Université de Strasbourg	Rapporteur
Denis SIPP	Maître de Recherche, ONERA	Rapporteur
Laurent CORDIER	Chargé de Recherche CNRS, Institut PPRIME	Examineur
Gilles DUC	Professeur, Centrale SUPÉLEC	Examineur
Hisham ABOU-KANDIL	Professeur des universités, ENS Cachan	Directeur de Thèse
Mohammed ABBAS-TURKI	Maître de conférence, ENS Cachan	Co-encadrant
Luc PASTUR	Maître de conférence, Université Paris Sud 11	Co-encadrant



# Remerciements

Et me voilà! J'ai enfin pu me poser laissant mon cœur s'exprimer afin de remercier ceux qui m'ont aidé dans cette aventure. Je ne sais pas si les mots suffisent pour exprimer mes pensées. Aie! C'est un exercice très dur qui laisse dubitatif même les plus chevronnés dans la langue de Molière. Allons y Yazid on commence! C'est tellement fou je parle à moi même. .. Bizarre comme sentiment.

Ce travail a été effectué au laboratoire SATIE dans lequel règne une atmosphère conviviale et une condition de travail exceptionnelle. Tous ça grâce aux chefs d'orchestre : Sophie, Béatrice et Aurore. Pour ceux qui ne les connaissent pas, elles sont les secrétaires du labo.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Hisham ABOUKANDIL pour m'avoir accueilli au laboratoire et de m'avoir donné la chance de poursuivre mes études.

Je remercie également Monsieur Mohamed ABBAS-TURKI pour son encadrement et son intégrité scientifique.

Une pensée particulière à Monsieur Luc PASTUR, sans lequel cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour. C'est un honneur pour moi de l'avoir croisé dans ma vie. Il a su trouver les mots qui m'ont permis de rebondir et de reprendre confiance en moi. Les riches moments passés en sa présence, resteront gravés à jamais. Je ne saurais le remercier pour tout ce qu'il m'a apporté autant sur le plan professionnel que personnel.

Un grand merci à Monsieur Yann FRAIGNEAU pour sa disponibilité et tout le savoir qu'il m'a apporté en simulation numérique des écoulements.

Mes remerciements les plus sincères vont à monsieur le Professeur Gilles DUC de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance parmi lesquels Laurent CORDIER. Je remercie tout particulièrement Edouard LAROCHE et Denis SIPP qui ont accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que pour les commentaires qu'ils ont formulé à cette occasion.

Mes sincères remerciements à mes collègues pour les moments passés ensemble au travail mais également pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apportés durant ces quatre années. Je leur exprime toute mon amitié et en particulier à Kevin KASPER et Nidhal BOUCENNA. J'espère qu'il n'y aura pas de jaloux :) vous êtes nombreux à devoir être mentionné! (Adrien, Batou, Gérard, Vico,

Hiba, Emna, Douha, Murielle, Alex, Ben, Renuuuuka . . .).

Une pensée à Nomane BOULMERDJ. Espérant pour toi un meilleur rebondissement.

Une pensée au défunt collègue Mohamed HAMDOCHE. Que Dieu l'accueille en son vaste paradis. A Dieu nous appartenons à lui nous retournons.

Sans oublier mes amis de toujours : Karim GUERFI, Salah, Billel, Khalil, Amine SID, Amine YAHMADI, Nadir et Nadir GROU.

Je remercie énormément ma belle famille, pour leurs soutient. Sans eux le généreux buffet de la thèse n'aura pas lieu. C'est un honneur de vous avoir comme famille.

Un grand remerciement à tous les enseignants qui m'ont tant appris durant mes 19 années d'étude. Je leurs exprime toute ma gratitude.

Spéciale dédicace à mes voisins du quartier UV 13, SIDI Amar, Annaba. Zinou, Billel, Chemsou, Mohamed Dok, Mohamed-Ali, Rabeh, Foufou, Hilel, Seif, Djaja, Badri ...

Et le meilleur pour la fin. . .

Mes parents. . . Ô ma maman, mon papa : le fait de penser à vous mes yeux sont submergés, ils brillent en ce moment. Je ne peux assez vous remercier. Un simple remerciement écrit sur papier serait injuste. . . Un simple remerciement ne pourrait jamais égaler ce que vous avez fait pour moi et ce que vous faites encore chaque jour. . . Les seuls mots que je peux dire : Je vous aime. C'est grâce à vous que je suis là. Vous m'avez donné le courage d'aller jusqu'au bout. Merci Papa pour toute la sincérité et la rigueur, merci Maman pour l'amour et la tendresse que vous n'avez cessé de me donner depuis ma tendre enfance.

Ma sœur Aicha!! Tu es mon modèle. J'essaye de suivre tes pas :) mon adorable sœur... Je profite de l'occasion pour te féliciter encore une fois pour tes enfants "Selma & Rania". Je n'ai nul doute de l'amour que tu vas leur apporter.

Walid et Farid, ça rime avec Yazid. . . Mes frères... Je ne vous ai jamais remercié!! Je me remémore tout les moments heureux que nous avons vécu, et ils sont nombreux. . . Prend soin de ton foyer Walid, de ta chérie "Sara" et surtout la petite patronne "Mey". Elle est adorable. Farid!! Courage le général :) Pourquoi pas un jour...

Je remercie Dieu de vous avoir comme famille.

Mon épouse Raja. Tu m'as apporté toute la joie et la sérénité qui me manquaient. Tu étais derrière moi dans les moments de doute. Merci pour ta présence et ta patience. Merci d'être là à mes côtés. Une nouvelle et belle vie, nous attend. . .

# Résumé

Les écoulements impactants auto-oscillants sont sources de bruit intenses dans diverses applications. La cavité représente une configuration privilégiée pour les étudier. L'objectif de la thèse est de fournir une solution concrète aux problèmes d'oscillation de la couche cisailée de l'écoulement de cavité, en exploitant des outils issus de la communauté des automaticiens.

Un rappel des travaux menés ces dernières années est présenté ainsi que les difficultés rencontrées pour le contrôle d'un tel dispositif. La principale source de complexité est les équations de Navier-Stokes qui régissent son fonctionnement. Il est actuellement impossible d'exploiter directement ce type d'équations dans la synthèse de correcteur. Outre cette difficulté, les oscillations de la couche limite sont qualitativement induites par une instabilité non-linéaire soumise à saturation. Par conséquent, l'identification empirique basée sur la réponse fréquentielle ne peut être appliquée, sauf si un correcteur stabilisant le point fixe est trouvé, de manière à préserver le principe de superposition lors de l'identification. Ainsi, comme première solution, une commande empirique en boucle fermée est obtenue à partir de la pression retardée. Un travail sur un choix optimal des paramètres est réalisé permettant ainsi l'élimination des oscillations de la couche cisailée. De plus, ce contrôle se montre robuste face aux changements de configuration de cavité. Une variante de cette loi de commande aboutit à un signal de contrôle évanescent, induisant ainsi un gain considérable en terme de consommation énergétique. Malheureusement, une telle loi commande ne permet pas d'expliquer les phénomènes dynamiques associés à un tel bouclage. Par conséquent, une approche linéaire est utilisée pour identifier les dynamiques de l'écoulement de cavité. La méthode d'identification ERA (Eigensystem Realization Algorithm) en boucle fermée est utilisée pour extraire cette dynamique. Les modèles identifiés nous informent sur les modes responsables de l'apparition des oscillations de la couche cisailée. En outre, nous avons une information précise sur le phénomène de commutation de mode observé dans plusieurs régimes d'écoulement. Le modèle permet d'extraire les modes instables de la dynamique linéaire de la cavité et les associer aux oscillations du régime saturé. Pour valider la procédure linéaire, un correcteur optimal a été synthétisé à partir du modèle identifié. Cette commande se révèle robuste aux variations paramétriques du modèle.

**Mots clés :** Commande en boucle fermée - Simulateur d'écoulement de cavité - Réduction de modèle - Commande à retard - Commande optimale.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Abréviations et notations</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Dynamique de l'écoulement de cavité</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Rappels de notion de mécanique des fluides . . . . .	5
1.2.1 Descriptions Eulérienne et Lagrangienne d'un fluide . . . . .	6
1.2.2 Dérivée particulaire . . . . .	6
1.2.3 Conservation de la masse . . . . .	6
1.2.4 Viscosité et couche limite . . . . .	7
1.2.5 Équation de Navier-Stokes et nombre de Reynolds . . . . .	8
1.2.6 Épaisseur de quantité de mouvement . . . . .	8
1.3 Écoulement de cavité . . . . .	9
1.3.1 Mécanisme des oscillations auto-entretenues . . . . .	9
1.3.2 Dispositif considéré . . . . .	11
1.3.3 Simulations numériques directes et implémentation d'un actionneur . . . . .	12
1.3.4 Validation de la modélisation de l'effet d'actionneur . . . . .	13
1.3.5 Comportement dynamique de l'écoulement de cavité . . . . .	14
1.4 Principaux travaux d'identification de modèle linéaire de cavité . . . . .	15
1.4.1 Techniques empiriques d'identification du modèle de cavité . . . . .	16
1.4.2 Techniques d'identification du modèle basées sur les lois physiques de la mécanique des fluides . . . . .	17
1.4.2.1 Observabilité et commandabilité . . . . .	18
1.4.2.2 Modèle de type Rossiter . . . . .	19
1.5 Modèle linéaire . . . . .	21

1.5.1	Identification de la partie linéaire du modèle de cavité . . . . .	22
1.5.1.1	Identification du cycle limite . . . . .	25
1.5.2	Identification linéaire simplifiée . . . . .	29
1.5.3	Synthèse de correcteur . . . . .	30
1.5.4	Synthèse $H_\infty$ . . . . .	32
1.5.5	Résolution du problème $H_\infty$ . . . . .	34
1.5.6	Synthèse et analyse du correcteur $H_\infty$ . . . . .	36
1.6	Conclusion . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Modélisation non-linéaire</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Modèle de type Van der Pol . . . . .	41
2.2.1	Oscillateur de Van der Pol et analyse harmonique . . . . .	42
2.2.1.1	Condition d'auto-oscillation . . . . .	44
2.2.1.2	Étude de la stabilité d'une auto-oscillation . . . . .	46
2.2.2	Analyse harmonique de l'oscillateur de Van der Pol forcé . . . . .	47
2.2.2.1	Solution particulière . . . . .	47
2.2.3	Identification du modèle de l'oscillateur à partir des résultats expérimentaux	48
2.2.4	Synthèse d'une loi de commande . . . . .	49
2.2.5	Application à l'écoulement de cavité . . . . .	51
2.3	Modèle à phase dynamique . . . . .	55
2.3.1	Modélisation . . . . .	55
2.3.2	Synthèse d'une loi de commande . . . . .	57
2.3.3	Synthèse d'un observateur . . . . .	58
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Contrôle empirique</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Commande pulsée à quadrature de phase . . . . .	61
3.3	Contrôle à retard . . . . .	64
3.3.1	Contrôle à retard sur l'écoulement de cavité . . . . .	64
3.3.2	Contrôle à retard sur Rössler . . . . .	66
3.4	Commande Pyragas . . . . .	69
3.5	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Eigensystem Realization Algorithm</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	ERA en boucle ouverte . . . . .	74
4.2.1	Commandabilité . . . . .	74
4.2.2	Observabilité . . . . .	75
4.2.3	Démarche à suivre pour l'identification du modèle . . . . .	75
4.3	ERA en boucle fermée . . . . .	77
4.3.1	OCID . . . . .	77

---

4.3.2	Identification avec une dynamique de correcteur connue . . . . .	81
4.4	Exemple d'application . . . . .	81
4.5	Conclusion . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Analyse et contrôle de la dynamique linéaire de l'écoulement de cavité</b>	<b>87</b>
5.1	Introduction . . . . .	87
5.2	Synthèse $H_2$ . . . . .	88
5.3	Identification et contrôle optimal pour l'écoulement de cavité . . . . .	90
5.4	Conclusion . . . . .	101
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>



# Table des figures

1.1	Écoulement de fluide sur une plaque plane. . . . .	8
1.2	Description schématique 2D d'un écoulement de cavité ouverte. . . . .	9
1.3	Densité spectrale de puissance de la pression au niveau du coin impactant d'un écoulement de cavité à différents nombres de Reynolds ( $L = 0.1$ m et $D = 0.05$ m) : (a) $Re = 7\,000$ avec $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m où la fréquence principale $f_2 = 12$ Hz et ses harmoniques; (b) $Re = 8\,000$ avec $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$ m où $f_2 = 14$ Hz et $f_3 = 18$ Hz représentent les fréquences les plus dominantes. . . . .	10
1.4	Les trappes ouvertes d'un train d'atterrissage d'avion : est une source de bruit due à la présence de cavités ouvertes. . . . .	11
1.5	Schéma de cavité au LIMSIS équipée d'un actionneur et de capteur de pression. . . . .	12
1.6	Maillage rectiligne irrégulier d'une cavité dans le plan xy : les zones sombres représentent les marches amont et aval de la cavité. . . . .	12
1.7	Force d'excitation sous forme de train d'impulsion. . . . .	13
1.8	Réponse d'un écoulement de cavité à $Re = 9\,375$ avec $\theta_0 = 15.3 \times 10^{-4}$ m ( $L = 0.1$ m et $D = 0.05$ m) soumis à deux signaux d'excitation de différents trains d'impulsion avec $f_i = 30$ Hz : (a) DSP de pression au point impactant et (b) évolution temporelle de la vitesse horizontale au niveau du domaine de contrôle. En bleu : $A_i = 4.44$ et $dt_i = 50\%$ ; En rouge : $A_i = 44.44$ et $dt_i = 5\%$ . . . . .	14
1.9	Portrait de phase de la mesure de pression au point impactant aval d'un écoulement de cavité à $Re = 9\,375$ , $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m et d'un rapport de forme $L/D = 2$ . . . . .	15
1.10	Identification d'un système SISO en utilisant un filtre adaptatif. . . . .	16
1.11	Configuration du modèle de cavité [RWC <sup>+</sup> 02]. . . . .	20
1.12	Modèle de propagation d'onde [RWC <sup>+</sup> 02]. . . . .	21
1.13	Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant d'une cavité à $Re = 9\,375$ ( $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m) et d'un rapport de forme $L/D = 2$ . . . . .	22
1.14	Sinus cardinal : comportement temporel et fréquentiel. . . . .	23
1.15	Modèle adopté de l'écoulement de cavité : cycle limite plus un modèle linéaire. . . . .	23
1.16	Réponse fréquentielle de $G(w)$ (bleu) et de son estimation $\hat{G}(w)$ (vert). . . . .	24
1.17	Évolution temporelle de la pression sans cycle limite $Y$ (bleu) et de son estimation issue du modèle $\hat{G}$ (vert). . . . .	25
1.18	Modèle linéaire affine. . . . .	25

1.19	Évolution temporelle de la pression sans cycle limite $Y$ (bleu) et de son estimation issue du modèle linéaire affine (vert). . . . .	26
1.20	Évolution temporelle du cycle limite $Y_c$ (bleu) et de son estimation (vert) issue du modèle $M_{c1}$ . . . . .	26
1.21	Evolution temporelle du cycle limite $Y_c$ (blue) et de son estimation (vert) issue du modèle $M_{c2}$ . . . . .	27
1.22	Évolution temporelle de $U_c$ obtenue par minimisation de $J_G$ . . . . .	28
1.23	Inter-corrélation entre $U_c$ et $U$ . . . . .	28
1.24	Évolution temporelle de $Y_t$ (bleu) et de son estimation (vert). . . . .	29
1.25	Structure de modèle de la cavité. . . . .	30
1.26	Évolution temporelle de $U_c$ obtenue par minimisation de $J_{R\tau, U_c}$ . . . . .	30
1.27	Évolution temporelle de $Y_t$ (bleu) et de son estimation (vert) obtenue par le modèle linéaire adopté de 1.25. . . . .	31
1.28	Commande des systèmes à retard à base du prédicteur de Smith. . . . .	31
1.29	Contrôle des systèmes à retard à base du prédicteur de Smith : cas nominal avec $d = 0$ . . . . .	32
1.30	Problème $H_\infty$ standard. . . . .	33
1.31	Problème de sensibilité mixte. . . . .	34
1.32	Réponse fréquentielle des filtres de pondération : $W_1(s)$ (à droite) ; $W_2(s)$ (à gauche). . . . .	37
1.33	Réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ . . . . .	37
1.34	Évolution temporelle de la pression : prédicteur de Smith est enclenché à $t = 20$ s . . . . .	37
1.35	Force relative issue du correcteur $K(s)$ en simulation numérique directe. . . . .	38
1.36	Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant dans un écoulement de cavité à $Re = 9375$ après enclenchement du contrôle linéaire, où $f = 9$ Hz représente la fréquence dominante. . . . .	38
2.1	Diagramme général d'un oscillateur. . . . .	43
2.2	Vue générale d'un lieu critique d'un système quelconque. . . . .	45
2.3	Lieu critique d'une fonction non-linéaire cubique dans le plan de Nyquist et le tracé du filtre $L(s)$ issu de l'oscillateur de Van der Pol. . . . .	45
2.4	Description de la procédure d'identification et de contrôle à base de l'oscillateur de Van der Pol proposée par Le Pourhiet : (a) Modèle de Van der Pol renforcé par des fonctions de transfert en amont et aval, (b) Modèle bouclé par un contrôleur $K(s)$ et (c) Modèle équivalent. . . . .	50
2.5	Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant d'une cavité à $Re = 7500$ ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$ m) et d'un rapport de forme $L/D = 2$ : la fréquence principale d'oscillation $f_2 = 12.94$ Hz et ses harmoniques. . . . .	51
2.6	Réponse d'une cavité à $Re = 7500$ ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$ m) à une excitation $E = 2 \sin(2\pi f_e t)$ où $f_e = 17$ Hz : (a) Évolution temporelle de pression au niveau impactant (b) Densité spectrale où les fréquences d'oscillation les plus dominantes sont $f_2$ et $f_e$ . . . . .	52
2.7	Spectrogramme de la pression au niveau impactant d'une cavité à $Re = 7500$ ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$ m) et d'un rapport de forme $L/D = 2$ excitée par $E = 10 \sin(2\pi f_e t)$ où $f_e = 10$ Hz. . . . .	52

2.8	Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F_2(s)$ identifié en utilisant des excitations avec $E_{0s} = 2.5$ : phase et amplitude extraites des équations (2.38) et (2.39) ( $\circ$ ) ; La réponse fréquentielle d'un modèle $F_2(s)$ (—) identifié à partir d'une optimisation sur les phase et les gains identifiés. . . . .	53
2.9	Amplitude et phase de $\Phi(s)$ . . . . .	54
2.10	Implémentation du correcteur $K(s)$ en boucle fermée à $t = 20$ s : (a) sur le modèle identifié par la méthode proposée par Le Pourhiet (b) ainsi qu'en simulation numérique directe pour un écoulement de cavité à $Re = 7500$ avec $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$ m. 55	55
2.11	schéma de la démarche de contrôle basée sur un modèle à phase dynamique . . . . .	59
3.1	Description schématique de la commande empirique à quadrature de phase pulsée, calibrée en fonction du passage de la pression (point impactant) entre les niveaux $Niv_1$ et $Niv_2$ . . . . .	62
3.2	Rapport entre l'amplitude de la pression du régime forcé établi (commande pulsée) et de la pression du régime permanent (sans présence de contrôle) : (a) Rapport entre les amplitudes maximales et (b) Rapport entre les amplitudes minimales. . . . .	63
3.3	Évolution temporelle de la commande pulsée heuristique à quadrature de phase implémentée à temps $t = 20$ s (—) (normalisée par son gain $a = 30$ ) en fonction de l'évolution temporelle de pression (—). Les bordures (—) représentent les niveaux $Niv_1$ et $Niv_2$ donnés par l'équation (3.1). . . . .	63
3.4	Densité spectrale de puissance de la pression au niveau du point impactant en régime établi d'une cavité à $Re = 7500$ ( $\theta = 12.12 \times 10^{-4}$ m) et d'un rapport de forme $L/D = 2$ , lorsqu'elle est soumise à une loi de commande pulsée à quadrature de phase : la fréquence principale d'oscillation $f_2 = 14.16$ Hz et ses harmoniques. . . . .	63
3.5	Intensité des trois premiers harmoniques de l'oscillation de la pression lorsque la cavité est soumise à une loi de commande pulsée à quadrature de phase. . . . .	64
3.6	Contrôle en boucle fermée avec $f_x = ap(t - \tau)$ pour une cavité à $Re=7500$ avec $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m. Pression au point impactant (en haut) et commande appliquée (en bas). . . . .	66
3.7	Étude de robustesse a posteriori du contrôle en boucle fermée avec $f_x = ap(t - \tau)$ . Spectrogramme de la pression au point impactant de la cavité à $Re = 7000$ avec $\theta = 12.5 \times 10^{-4}$ m (a), (b) $Re = 8000$ avec $\theta = 11.7 \times 10^{-4}$ m et (c) $Re = 7500$ avec $\theta = 11.9 \times 10^{-4}$ m. . . . .	67
3.8	Contrôle en boucle fermée avec $f_x = a(p(t - \tau) - p_{avg}(t))$ pour une cavité à $Re=7500$ avec $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m. La pression au point impactant (en haut) et la commande appliquée (en bas). . . . .	68
3.9	Attracteur de Rössler. . . . .	68
3.10	Point fixe de l'attracteur de Rössler (à gauche) stabilisé par un contrôle à retard de type $F(t, y) = \kappa[y(t - \tau) - y_{avg}(t)]$ (à droite). . . . .	69
3.11	Point fixe de l'attracteur de Rössler stabilisé par la commande type Pyragas. . . . .	70
3.12	Pression au niveau du point impactant d'un écoulement de cavité à $Re=7500$ ( $\theta = 12.12 \times 10^{-4}$ m) soumis à un contrôle de type Pyragas ( $F(t, p) = 10 \times [p(t - T_2/2) - p(t)]$ ). 70	70

4.1	Description schématique de l'identification d'un système linéarisé fonctionnant en boucle fermée [PJHL94]. . . . .	78
4.2	Comportement temporel d'un signal SBPA. . . . .	82
4.3	Évolution temporelle des paramètres de Markov du système observateur/contrôleur (voir équation (4.21)). . . . .	83
4.4	Valeurs singulières de la matrice de Hankel $H(0)$ . . . . .	83
4.5	Réponse impulsionnelle issue des paramètres de Markov $Y(k)$ (–) et celle issue du modèle identifié en gardant que les deux premières valeurs singulières les plus significatives (◦). . . . .	84
4.6	Pôles du système instable (4.29) (×) et ceux du modèle obtenu par OCID (◦). . . . .	85
5.1	Configuration standard du retour de sortie pour la synthèse $H_2$ d'un contrôleur. . . . .	89
5.2	Spectrogramme du signal d'excitation "chirp" d'un balayage linéaire de fréquences. . . . .	91
5.3	Évolution de la pression sans sa composante continue lorsque l'écoulement de cavité est soumis à une excitation chirp (voir équation (5.9)) avec deux amplitudes $a_e$ différentes : — pour $a_e = 0.1$ ; - - pour $a_e = 0.2$ . Le signal de réponse pour $a_e = 0.1$ a été multiplié par 2 pour la comparaison entre les deux réponses afin de vérifier le principe de superposition. (a) Écoulement de cavité à $Re = 7500$ ( $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m), (b) à $Re = 7000$ ( $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m) et (c) à $Re = 8000$ ( $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$ m). . . . .	92
5.4	Erreur entre la réponse impulsionnelle du modèle linéarisé de 23 états de l'écoulement de cavité $Re = 7500$ avec $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m et celle issue des paramètres de Markov. . . . .	93
5.5	Réponse fréquentielle des modèles linéarisés pour diverses configurations d'écoulement de cavité. (a) $Re = 7500$ , $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m avec un modèle de 23 états, (b) $Re = 7500$ , $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$ m avec un modèle de 25 états, (c) $Re = 7000$ , $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m avec un modèle de 25 états et (d) $Re = 8000$ , $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$ m avec un modèle de 28 états. . . . .	94
5.6	Contrôle optimal en boucle fermée pour diverses configurations d'écoulement de cavité. (a) $Re = 7500$ , $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m, (b) $Re = 7500$ , $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$ m, (c) $Re = 7000$ , $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m et (d) $Re = 8000$ , $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$ m. Pression au niveau du point impactant (en haut) et signal de commande (en bas). . . . .	95
5.7	Comparaison entre les valeurs propres des modèles réduits de l'écoulement de cavité à $Re = 7500$ avec deux épaisseurs de quantité de mouvement : $12.1 \times 10^{-4}$ m (croix bleu) et $11.9 \times 10^{-4}$ m (cercle rouge). . . . .	96
5.8	Contrôle en boucle fermée pour la cavité $Re = 7500$ , $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$ m avec le contrôleur optimal synthétisé à partir du modèle réduit de la cavité a) $Re = 7500$ , $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m, où le contrôle est allumé à $t = 20$ s. . . . .	96
5.9	Schéma blocs d'identification. . . . .	98
5.10	Contrôle en boucle fermée pour la cavité $Re = 7500$ , $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m avec un retour de pression sans sa valeur moyenne mobile $p_{avg}(t)$ . La pression au niveau du point impactant (en haut) avec le signal de commande (en bas). . . . .	98

---

5.11	Performance du contrôle en boucle fermée pour diverses configurations d'écoulement de cavité avec le contrôleur optimal $H_2$ synthétisé à partir du modèle d'ordre réduit de la cavité $Re = 7\,500$ avec $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$ m, illustré à partir du spectrogramme de pression de la cavité concernée (a); (b), (c) respectivement pour l'écoulement de cavité à $Re = 7\,500$ avec $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m, $Re = 7\,000$ avec $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$ m et $Re = 8\,000$ avec $\theta = 11.7 \times 10^{-4}$ m. . . . .	99
5.12	Valeurs propres en boucle fermée du modèle d'ordre réduit de l'écoulement de cavité $Re = 7\,500$ ( $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$ m) avec le contrôleur à retard. . . . .	100
5.13	Valeurs propres du modèle d'ordre réduit de l'écoulement de cavité $Re = 8\,000$ ( $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$ m). . . . .	100
5.14	Différentes formes de modélisation d'incertitude dynamique non-structurée : (a) Forme additive, (b) forme multiplicative directe (c) forme multiplicative inverse. . . .	101



# Liste des tableaux

2.1	Amplitude du premier harmonique et son déphasage pour une excitation sinusoïdale ( $E_0 = 2.5$ ) extraits du spectre de la pression au niveau impactant. . . . .	53
-----	---	----



# Abréviations et notations

## Abréviations

SND	: Simulation Numérique Directe
POD	: Propre Orthogonal Decomposition
BPOD	: Balanced Proper Orthogonal Decomposition
RIF	: Réponse Impulsionnelle Finie
IIF	: Réponse Impulsionnelle Infinie
$\mathcal{TF}$	: transformée de Fourier
ERA	: Eigensystem Realization Algorithm
OCID	: Observer/Controller IDentification

## Notations principales

$\delta$	: épaisseur de la couche limite
$\rho$	: masse volumique
$\theta_0$	: épaisseur de quantité de mouvement
$\theta_0$	: épaisseur de quantité de mouvement
Re	: nombre de Reynolds
Ma	: nombre de Mach
St	: nombre de Strouhal (fréquence adimensionnée)
$f$	: fréquence en HZ
$\omega$	: pulsation
$u_\infty$	: vitesse débitante
$c$	: vitesse du son
$\vec{f}$	: force volumique
$f_x, f_y$	: les composantes de la force suivant les directions $x$ et $y$ du plan 2D
$\varepsilon_r$	: force relative
$p$	: pression
$p_{avg}$	: pression moyenne
$L$	: longueur de la cavité

---

$D$	: profondeur de la cavité
$\delta t$	: temps dynamique de simulation
$\mathcal{G}$	: Matrice de commandabilité
$\mathcal{O}$	: Matrice d'observabilité
$W_c$	: Grammien de commandabilité
$W_o$	: Grammien d'observabilité
$s$	: variable de Laplace
$K(s)$	: correcteur
$\vec{\nabla}$	: gradient
$\  \cdot \ _2$	: la norme $\mathcal{L}_2$
$j$	: $\sqrt{-1}$

# Introduction générale

Ce travail est le fruit d'un rapprochement entre la communauté des mécaniciens des fluides et la communauté des automaticiens à laquelle j'appartiens. Le but est d'apporter des réponses aux questions liées aux problèmes d'instabilité et d'amplification des oscillations dans des écoulements fluide. Ce travail est axé principalement sur le contrôle en boucle fermée d'un écoulement incompressible de cavité afin de stabiliser les oscillations auto-entretenues de la couche cisailée.

## **Qu'est ce qu'une boucle fermée ?**

Un système dynamique est un système dont le comportement change dans le temps, souvent en réponse à une excitation externe ou forçage. Le terme boucle fermée désigne une interconnection dans laquelle deux systèmes dynamiques (ou plus) interagissent, tel que chaque système influence l'autre et leurs dynamiques sont fortement couplées.

## **Qu'est ce qu'un contrôle ?**

Le terme contrôle ou commande, comporte des nuances de signification d'une communauté à une autre. Ici, nous le définissons comme l'utilisation d'un algorithme (loi de contrôle) afin d'imposer un comportement dynamique à une boucle fermée. Le principe du contrôle est de comparer la sortie du système à celui de la consigne et établir ainsi, une action corrective via l'algorithme de contrôle. Avec une telle procédure, un système instable peut être stabilisé.

La théorie du contrôle, établie depuis plus de cinquante ans, fournit une base riche de techniques d'une part pour l'analyse de la stabilité et d'autre part pour l'analyse la réponse dynamique de systèmes complexes. L'objectif de notre étude est de l'appliquer à la dynamique des fluides pour l'établissement d'une loi de contrôle adéquate au modèle identifié. Il est donc d'emblée nécessaire, d'établir un modèle d'état de dimension finie décrivant le comportement entrée-sortie de la dynamique du processus étudié. Malheureusement, l'établissement d'un tel modèle à partir des lois de la physique qui régissent l'écoulement de fluide n'est pas une tâche facile en soi. Nous nous confrontons à un problème de grande dimension, ne permettant pas l'exploitation directe des lois de commande. Donc établir un modèle d'ordre réduit de la dynamique de l'écoulement étudié est inéluctable. La complexité du modèle dépend fortement des objectifs dynamiques du contrôle.

Ce mémoire comporte cinq chapitres ayant pour sujet :

## *Chapitre 1*

Ce chapitre sera dédié aux rappels de certaines notions de la mécanique des fluides, utiles à la compréhension des phénomènes propres à l'écoulement de cavité. Nous consacrons une grande partie de ce chapitre à exposer les travaux menés ces dix dernières années pour la synthèse de modèles linéaires réduits exploitables par la théorie du contrôle linéaire.

Nous introduirons dans ce chapitre une première tentative d'identification linéaire basée principalement sur la réponse fréquentielle en isolant le cycle limite (oscillations auto-entretenues). Ceci est effectué par une simple soustraction du régime permanent à l'écoulement soumis à une excitation riche fréquentiellement. Une synthèse de contrôle  $H_\infty$  sera également présentée.

### *Chapitre 2*

Cette partie sera exclusivement consacrée à l'introduction de deux méthodes d'identification non-linéaires, basées sur la modélisation comportementale de l'enveloppe temporelle des mesures (pression/vitesse) au niveau du coin impactant de la cavité. La première méthode exploite la pertinence de l'oscillateur de Van der Pol à la reproduction des oscillations auto-entretenues tout en le renforçant par deux fonctions de transfert pour coller au mieux à la mesure. Cette méthode a déjà été validée dans les travaux de Le Pourhiet pour l'identification et le contrôle de plusieurs systèmes aérodynamiques [LPCC03]. La deuxième méthode d'identification appliquée avec succès pour l'identification de l'écoulement compressible de cavité [RJ05], découle de l'équation de Ginzburg-Landau.

### *Chapitre 3*

Il présentera deux procédures de contrôle empirique basées sur l'évolution temporelle de pression au niveau du coin impactant aval. Dans la première, il s'agira d'un contrôle pulsé à quadrature de phase synchronisé sur le passage de pression par deux niveaux de valeurs. Quant à la deuxième, elle est basée sur la pondération de la pression du coin aval impactant de la cavité, retardée dans le temps. Nous montrons que pour une valeur optimale du retard associée à une certaine amplitude de pondération, le cycle limite est supprimé. Ce correcteur à retard se révélera robuste face aux changements de configuration de la cavité.

### *Chapitre 4*

Nous le consacrerons à l'introduction de la méthode d'identification en boucle fermée ERA (Eigensystem Realization Algorithm) [JP85]. Nous rappellerons en premier lieu son application en boucle ouverte, puis sa généralisation en boucle fermée. Deux variantes de cette méthode seront présentées. La première s'étend facilement au système stabilisé par une dynamique de correcteur inconnue (non-linéaire ou linéaire) nommée OCID pour Observer/Control IDentification [JP94]. La seconde est appliquée uniquement si la dynamique du correcteur avec laquelle nous stabilisons le système est connue et linéaire [PJHL94].

### *Chapitre 5*

Enfin, nous présenterons une analyse approfondie des modèles identifiés par OCID. Nous verrons que les modes instables de la dynamique linéarisée de l'écoulement de cavité sont les fréquences d'oscillations de l'écoulement de cavité. Mais avant d'effectuer une telle procédure d'analyse, nous

présenterons une synthèse  $H_2$  appropriée aux modèles identifiés.



# Chapitre 1

## Dynamique de l'écoulement de cavité

### 1.1 Introduction

L'écoulement de cavité fournit une configuration académique pour étudier les oscillations auto-entretenues d'une couche de cisaillement impactante. Ce phénomène physique intervient dans la production du son de certains instruments à vent comme la flûte. Mais c'est aussi la principale source de nuisances sonores dans plusieurs applications.

L'objectif de cette thèse est de concevoir des stratégies de contrôle en boucle fermée afin de supprimer les oscillations auto-entretenues de l'écoulement de cavité. Pour accomplir cet objectif, il nous semble important de consacrer ce chapitre à l'introduction de certaines notions de base de la mécanique des fluides, nécessaires à la compréhension des phénomènes qui découlent de l'écoulement de cavité. Nous présentons également les travaux de recherche qui ont été menés pour l'établissement d'un modèle linéaire réduit capable de capter la dynamique de la cavité et exploitable pour la synthèse d'un contrôleur.

Nous consacrons également la seconde partie de ce chapitre à l'introduction de certaines tentatives d'identification ainsi que la synthèse robuste  $H_\infty$ .

### 1.2 Rappels de notion de mécanique des fluides

Pour décrire l'écoulement d'un fluide, il faut connaître le mouvement de chacune des particules "élémentaires" constitutives de ce milieu (atomes, ions ou molécules). Dans la description mésoscopique que nous adopterons, le fluide est considéré comme un milieu continu et déformable. La "particule" fluide est définie comme un "petit" volume de fluide. Ce volume est considéré assez grand pour contenir un très grand nombre de particules élémentaires mais petit devant le libre parcours moyen des éléments microscopiques. Dans un intervalle de temps  $\Delta t$  autour de  $t$ , nous associons à la particule fluide une vitesse, une pression, une masse volumique, etc. Chaque particule fluide est soumise à des forces de volume, telles que le poids, les forces d'inertie et autres forces de contact transmises à la surface de la particule par les éléments environnants.

### 1.2.1 Descriptions Eulérienne et Lagrangienne d'un fluide

En dynamique des fluides, deux descriptions peuvent être utilisées. Dans la description Lagrangienne on s'intéresse à une particule de fluide dont on suit l'évolution au cours du temps. Cette description est particulièrement bien adaptée dans les applications de mélange par advection chaotique, mais présente un inconvénient : le référentiel se déplace avec le fluide. Il est donc difficile de connaître l'état du fluide en un point donné de l'espace et du temps. A l'opposé, dans la description Eulérienne, on s'intéresse aux différentes grandeurs qui caractérisent l'élément macroscopique de fluide qui se trouve au point d'observation  $M$ , fixe par rapport à un référentiel d'étude à l'instant  $t$ . Le champ de vitesse dans cette description sera décrit en donnant à tout instant  $t$  le vecteur vitesse en tout point  $M$  :  $\vec{u}(M, t)$ . En pratique, cette description est parfaitement adaptée à l'étude des écoulements fluides, car nous mesurons généralement les grandeurs physiques à l'aide de capteurs placés en des points fixes de l'écoulement.

### 1.2.2 Dérivée particulaire

Il s'agit de connaître l'évolution de toute grandeur physique liée à une particule fluide que l'on suit dans son mouvement. Dans la description Eulérienne, les grandeurs sont définies en un point géométrique  $M$ . Pour suivre la grandeur dans son mouvement, il faut attacher le point géométrique  $M$  à la particule fluide et la suivre dans son mouvement.

Pour une grandeur scalaire  $G(M, t)$ , associée à une particule fluide située au point  $M$  à l'instant  $t$ , sa dérivée particulaire est donnée par :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})G = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}G \quad (1.1)$$

où  $\frac{\partial G}{\partial t}$  et  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})G$  correspondent respectivement à une variation locale (purement temporelle) due au caractère instationnaire de l'écoulement et à une variation convective (ou de transport) due à la non-uniformité de l'écoulement.

De la même manière, on obtient la dérivée particulaire de toute grandeur vectorielle telle que l'**accélération particulaire** de la particule fluide qui se trouve à l'instant  $t$  au point  $M$  :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}. \quad (1.2)$$

### 1.2.3 Conservation de la masse

La particule fluide étant définie comme la quantité de masse circonscrite à un petit volume qui se déforme au cours du temps, sa masse doit se conserver au cours du mouvement. Cela implique que la dérivée particulaire de la masse contenue dans un volume matériel est nulle. Cette remarque ne peut être généralisée à la masse volumique  $\rho$  car le volume constituant la particule fluide peut très bien varier, par exemple lorsque le volume varie.

Rappelant que :

$$\operatorname{div} \cdot G\vec{u} = G\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\operatorname{grad}}G, \quad (1.3)$$

on obtient, à partir de la dérivée particulaire d'une grandeur scalaire (équation (1.1)) liée à une particule fluide située en  $M$  à l'instant  $t$  et l'équation (1.3), l'équation locale de conservation de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\vec{u} = 0. \quad (1.4)$$

Si l'écoulement est incompressible, la masse volumique n'évolue pas au cours du temps, ce qui se traduit par  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . L'équation de conservation de la masse se réduit donc à :

$$\operatorname{div}\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.5)$$

Cela se produit par exemple lorsque la vitesse de référence (débitante) est très largement inférieure à la vitesse du son dans le fluide. Il faut garder à l'esprit qu'un écoulement fluide dit incompressible n'implique pas forcément l'incompressibilité du fluide ! Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure quasi-constant sous l'action d'une pression externe.

#### 1.2.4 Viscosité et couche limite

Dans un écoulement fluide, la particule fluide est soumise à des forces normales de pression et des forces tangentielles de cisaillement qui s'opposent au mouvement du fluide (forces visqueuses).

Lors d'un écoulement, la vitesse du fluide diminue près de la paroi et s'annule au contact de celle-ci si la paroi est immobile (figure 1.1). Des forces s'appliquent ainsi sur les couches fluides glissant les unes sur les autres lorsqu'un fluide s'écoule proche d'une paroi solide supposée fixe. En effet, la vitesse d'un fluide est corrélée à la vitesse de la paroi proche de laquelle il s'écoule. La zone de l'écoulement comprise entre la paroi et l'écoulement uniforme de vitesse  $u_\infty$  (vitesse de l'écoulement loin de la paroi) est appelée "couche limite" (voir figure 1.1). Son épaisseur  $\delta$  est généralement faible devant les autres longueurs caractéristiques du problème (ex : la longueur de la paroi). La variation de vitesse  $u$  de 0 à  $u_\infty$  sur une petite distance  $\delta$  conduit à un gradient de vitesse élevé. évolue sous l'action conjuguée d'effet inertiel (processus d'advection des particules fluides) et de diffusion visqueuse et de la condition de non-glissement à la paroi :

- les phénomènes de diffusion sont décrits par l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

- les phénomènes inertiels sont modélisées par :  $\frac{\partial u}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

L'épaisseur locale de la couche limite  $\delta(x)$  est de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$  où  $x$  est la distance au bord d'attaque, où prend naissance la couche limite visqueuse. Comme nous le verrons, l'épaisseur de couche limite à l'aplomb de la cavité sera un paramètre de contrôle important des instabilités de la couche cisailée.

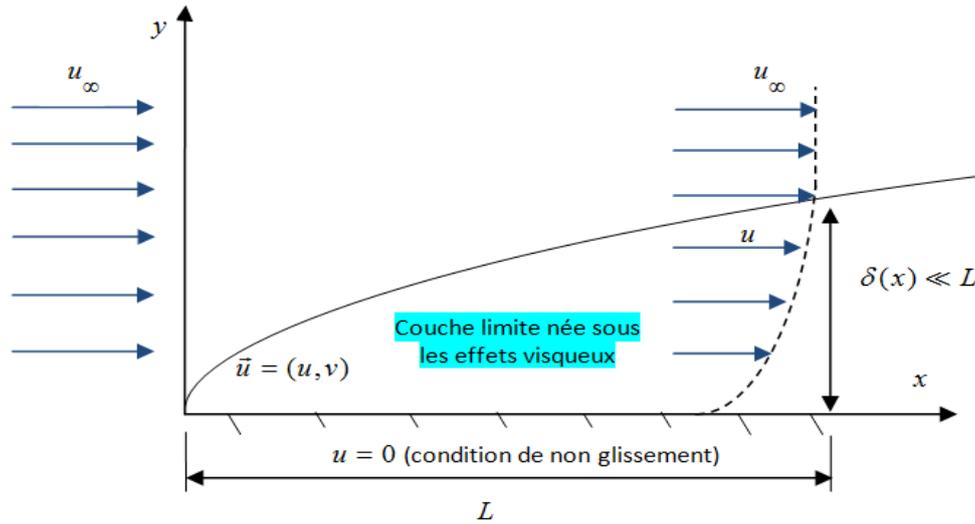


FIGURE 1.1 – Écoulement de fluide sur une plaque plane.

### 1.2.5 Équation de Navier-Stokes et nombre de Reynolds

Les équations de Navier-Stokes offrent une description locale de la dynamique d'une particule fluide. Elles découlent de l'équation fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) appliquée à une particule fluide. Pour un écoulement incompressible, les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $\vec{\nabla} p$ ,  $\nu \Delta \vec{u}$  et  $\vec{F}$  représentent respectivement, les densités de forces de pression, de forces visqueuses et de force de volume.

À partir des échelles de vitesse  $u$  et de longueur  $L$  caractéristiques de l'écoulement, il est possible de construire un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{u \cdot L}{\nu}. \quad (1.7)$$

Lorsque  $\text{Re} \ll 1$ , les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux et l'écoulement est dit visqueux ou rampant. En revanche, lorsque  $\text{Re} \gg 1$ , les effets inertiels dominent et il est fréquent d'observer un régime turbulent.

### 1.2.6 Épaisseur de quantité de mouvement

L'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta_0$  est une autre mesure de l'épaisseur de la couche limite. Elle mesure la perte de quantité de mouvement dans la couche limite :

$$\theta_0 = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy. \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible sur une paroi de longueur  $L$  et en régime laminaire,

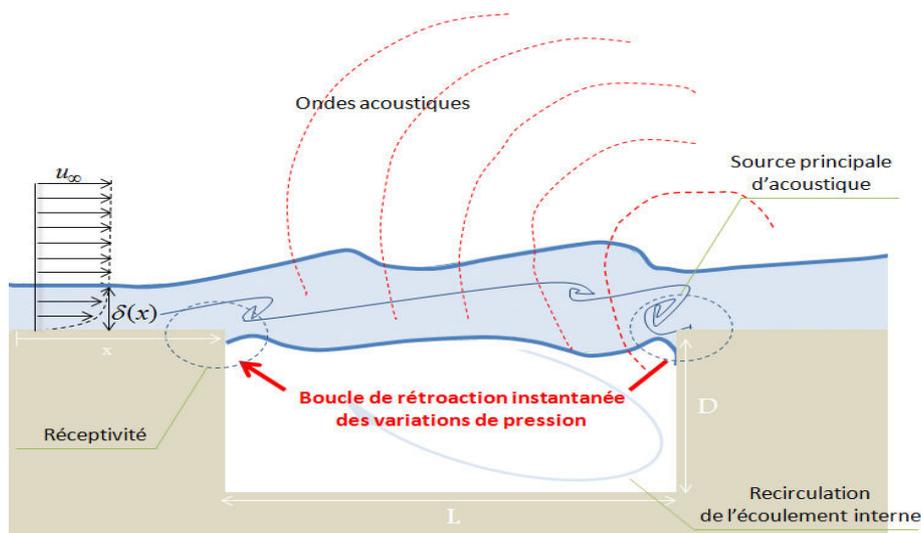


FIGURE 1.2 – Description schématique 2D d'un écoulement de cavité ouverte.

l'estimation de  $\theta_0$  est donnée par :

$$\theta_0 \simeq 0.664 \cdot \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}. \quad (1.9)$$

## 1.3 Écoulement de cavité

### 1.3.1 Mécanisme des oscillations auto-entretenu

Depuis les années 1950, l'écoulement au dessus d'une cavité ouverte a fait l'objet de nombreuses études [Kri55, Ros55]. La figure 1.2 illustre la configuration de la cavité que nous adopterons tout au long de notre étude. Il s'agit d'une cavité peu profonde de rapport de forme  $L/D = 2$ , où  $L = 0.1$  m est la longueur de cavité et  $D = 0.05$  m sa profondeur. Cette configuration présente de nombreux intérêts à commencer par sa simplicité géométrique qui la rend accessible numériquement.

Dans notre étude, le nombre de Mach :

$$\text{Ma} = u_\infty/c \quad \text{est d'ordre } 4 \times 10^{-3}, \quad (1.10)$$

où  $u_\infty$  et  $c$  respectivement représentent respectivement la vitesse débitante du milieu (fluide) et la vitesse de propagation du son dans ce milieu.

La couche limite amont est laminaire. Au-delà d'un seuil critique en nombre de Reynolds, une perturbation à l'amont de la cavité est amplifiée jusqu'au coin aval, où les tourbillons de couche cisailée résultant impactent, provoquant l'apparition de la principale source aéroacoustique. En régime incompressible, les variations de pression se propagent instantanément à l'amont, renforçant ainsi l'instabilité de la couche de cisaillement [CWRA03, CSW<sup>+</sup>08]. Ce "retour d'information" en amont, permet lorsque le seuil critique est franchi, d'entretenir les oscillations de la couche de cisaillement à des fréquences piquées dans le spectre et communes à tout l'écoulement [Ros64, BPL<sup>+</sup>11]. Les fréquences des oscillations auto-entretenu

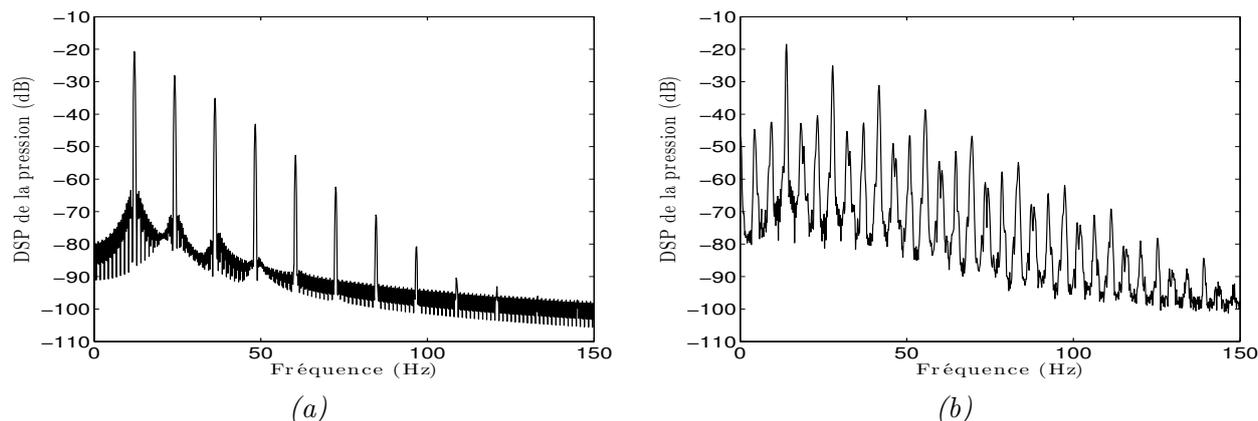


FIGURE 1.3 – Densité spectrale de puissance de la pression au niveau du coin impactant d'un écoulement de cavité à différents nombres de Reynolds ( $L = 0.1$  m et  $D = 0.05$  m) : (a)  $Re = 7000$  avec  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m où la fréquence principale  $f_2 = 12$  Hz et ses harmoniques ; (b)  $Re = 8000$  avec  $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m où  $f_2 = 14$  Hz et  $f_3 = 18$  Hz représentent les fréquences les plus dominantes.

empirique de Rossiter [HHC71] :

$$St = \frac{f_m L}{u_\infty} = \frac{m - \alpha}{Ma + \frac{1}{\kappa}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.11)$$

lorsque  $Ma \rightarrow 0$ , avec  $\kappa = \frac{c_p}{u_\infty}$ , où  $c_p$  représente la vitesse moyenne de convection calculée sur le profil de vitesse en entrée ( $c_p \sim u_\infty/2$ ),  $f_m$  est la fréquence d'oscillation associée au mode  $m$ .  $St$  représente le nombre de Strouhal. Le coefficient correctif  $\alpha$  sert à modéliser une relation de phase mal comprise entre l'amont et l'aval. La figure 1.3 présente la densité spectrale de puissance de la pression au niveau du coin aval d'une cavité pour deux nombres distincts de Reynolds :  $Re = 7000$  avec  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m et  $Re = 8000$  avec  $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m. Pour le calcul de la densité spectrale de puissance, nous utilisons la méthode de Welch [Wel67]. La cavité à  $Re = 8000$  présente un spectre plus riche, composé de deux fréquences dominantes non harmoniques à 13.89 Hz et 18.16 Hz et des pics résultants de couplages non-linéaires entre ces deux fréquences. Cette signature correspond à un phénomène de "compétition de modes", il a été observé expérimentalement en régime compressible [GCI01] sur des simulations numériques [GGB03a, GGB03b] mais aussi en régime incompressible [LPL08, PLF<sup>+</sup>08, BPL<sup>+</sup>11].

Les oscillations auto-entretenues sont une intense source de bruit. Elle sont par exemple responsables des nuisances sonores des aéroports causées par les avions lors de l'atterrissage et du décollage, c'est aussi la première source de bruit des TGV. Il peut donc être souhaitable d'atténuer l'intensité de ces oscillations ou bien de les déplacer vers d'autres domaines de fréquences moins hostiles à la structure (fréquence de résonance), au moindre coût énergétique. Pour remplir les objectifs du contrôle, plusieurs stratégies ont été élaborées en boucle ouverte et en boucle fermée, tout au long des 20 dernières années, au moyen d'actionneurs qui perturbent l'écoulement, placé soit au fond de la cavité, soit en bordure amont, où l'écoulement est le plus sensible aux fluctuations de vitesse.

Nous décrivons les stratégies qui paraissent à nos yeux les plus intéressantes en terme d'apport au



FIGURE 1.4 – Les trappes ouvertes d’un train d’atterrissage d’avion : est une source de bruit due à la présence de cavités ouvertes.

contrôle de cavité. Plus de détails pourront être trouvés dans [CWRA03] et [CSW<sup>+</sup>08].

### 1.3.2 Dispositif considéré

Pour pouvoir contrôler un dispositif réel de cavité, nous disposons au LIMSI d’un banc d’essai équipé d’un actionneur plasma à décharge à barrière diélectrique placé en amont et alimenté par une source haute tension d’une puissance de quelques Watt. Un état de l’art sur le contrôle d’écoulement par ce type d’actionneur ainsi que les propriétés électriques et mécanique du vent ionique produit, sont proposés par Moreau [Mor07]. Plus de détail sur le contrôle de l’écoulement de cavity avec l’actionneur plasma à décharge à barrière diélectrique pourront être trouvés dans [Dou14]. Cet actionneur a la particularité d’être très fin, avec une consommation énergétique faible et facile à intégrer de sorte qu’il ne change pas les caractéristiques de la couche limite. L’actionneur plasma appartient à la famille des actionneurs à jet synthétique [CRDG13] : il n’y a pas d’apport de matière dans l’écoulement. Ce banc est équipé également d’un capteur de pression placé sous le coin aval de la cavité (voir figure 1.5). Nous désirons construire un modèle d’ordre réduit capable de saisir la dynamique responsable de l’apparition du cycle limite (oscillations auto-entretenues). La première démarche qui vient à l’esprit de tout automaticien est d’extraire ce modèle à partir des équations qui régissent l’écoulement. Mais à cause de leur complexité, due à la grande dimension du problème et aux non-linéarités, de telles équations ne permettent pas d’avoir un modèle pour exploiter les outils de contrôle. La deuxième démarche consiste à considérer la cavité comme une boîte noire et d’essayer d’extraire sa réponse fréquentielle en introduisant des signaux d’excitation qui balayent une large bande de fréquences. Malheureusement, nous nous confrontons à trois obstacles majeurs :

- la méconnaissance de la fonction de transfert de l’actionneur ;
- la présence de bruit environnant qui entache la qualité de la mesure ;
- la restriction sur l’allure des signaux à envoyer à l’actionneur et du coup une limitation en bande de fréquences excitées. En effet, l’actionneur plasma ne permet d’adresser que des pulses positifs d’une durée donnée.

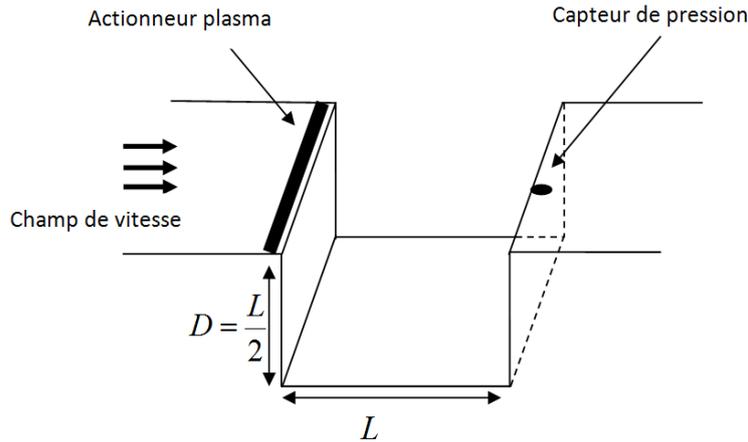


FIGURE 1.5 – Schéma de cavité au LIMSI équipée d'un actionneur et de capteur de pression.

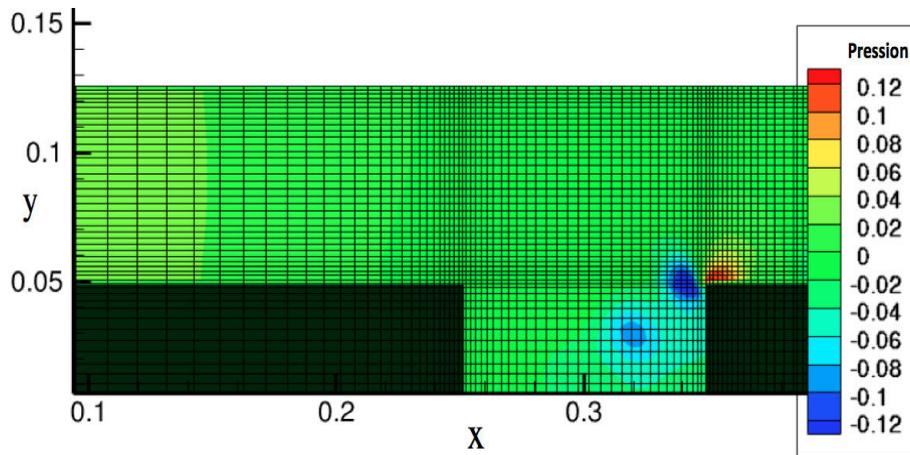


FIGURE 1.6 – Maillage rectiligne irrégulier d'une cavité dans le plan  $xy$  : les zones sombres représentent les marches amont et aval de la cavité.

### 1.3.3 Simulations numériques directes et implémentation d'un actionneur

Un simulateur numérique 2D de l'écoulement de cavité permet de contourner ces obstacles. Ce simulateur est basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. La résolution s'appuie sur une méthode d'éléments finis. La convergence de cette méthode, ainsi que la précision de la solution, dépendent fortement du maillage utilisé. Généralement, cette méthode requiert un maillage aligné avec la direction principale de l'écoulement et très fin dans les zones de forts gradients. Plus le maillage est fin plus les résultats sont précis mais plus les besoins en mémoire et en temps de simulation sont élevés.

Nous optons pour un maillage rectiligne irrégulier raffiné dans la couche de cisaillement et proches des parois (figure 1.6). Quelques modifications ont été apportées au code OLORIN de Y. Fraigneau pour pouvoir introduire l'effet de l'actionneur. Une force horizontale  $\vec{f}$  a été introduite dans les équations de Navier-Stokes, sur un petit domaine carré d'une longueur  $L_f = 5 \times 10^{-3}$  m. Légèrement

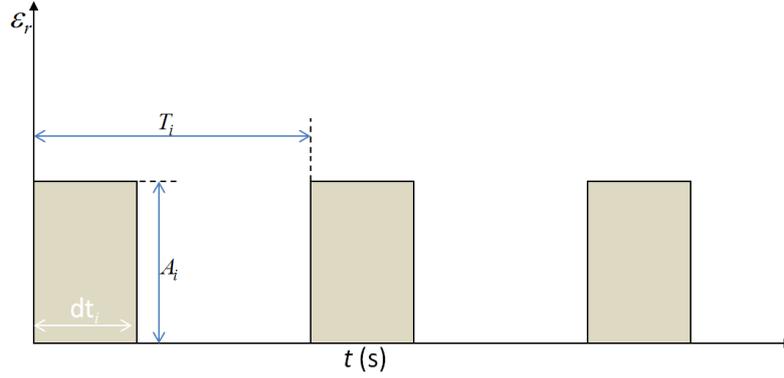


FIGURE 1.7 – Force d'excitation sous forme de train d'impulsion.

en amont du coin amont, centré en  $x^* = 55 \times 10^{-3}$  m,  $y^* = 245 \times 10^{-3}$  m :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F} \quad (1.12)$$

avec

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où  $f_x$  et  $f_y$  représentent les composantes de la force suivant les directions  $x$  et  $y$  du plan 2D.

Cette force est interprétée comme une accélération apportée aux particules fluides au niveau de l'actionneur.

A partir de  $\vec{f}$ ,  $\rho$  et  $u_\infty$ , nous introduisons le paramètre d'intensité relative de l'actionneur :

$$\varepsilon_r = \frac{\text{force volumique appliquée}}{\text{force caractéristique}} = \frac{|\vec{f}| L}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (1.14)$$

servant à quantifier l'intensité de la force appliquée dans l'écoulement fluide.

### 1.3.4 Validation de la modélisation de l'effet d'actionneur

La validation de la modélisation de l'effet de l'actionneur a été menée sur un écoulement de cavité à  $Re = 9375$ ,  $\theta_0 = 15.3 \times 10^{-4}$  m. Des résultats comportementaux issus du contrôle expérimental (banc d'essai, voir [Dou14]) en boucle ouverte de la cavité ont été observés sur une Simulation Numérique Directe (SND) en effectuant le même protocole de contrôle. On applique des signaux en forme de trains d'impulsions (voir figure 1.7) avec :

- une fréquence de répétition  $f_i = 1/T_i$  avec  $f_i$  (de 0 à 100) HZ.
- un cycle utile, durant lequel l'actionneur est actif  $dt_i < T_i$ , donnée en pourcentage de la période  $T_i$ .
- Différentes amplitudes d'impulsion  $A_i$ .

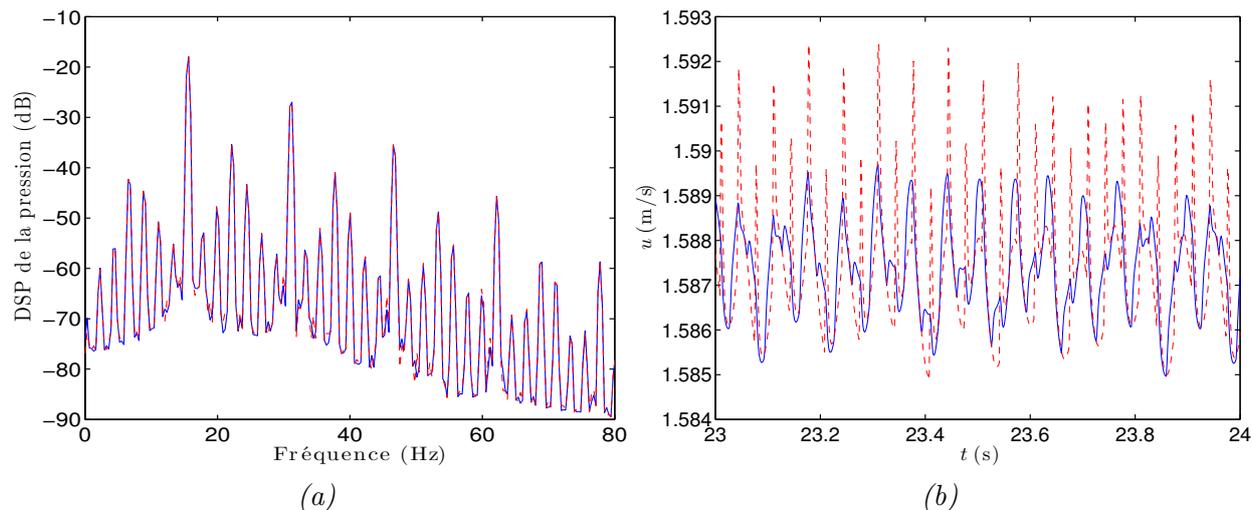


FIGURE 1.8 – Réponse d'un écoulement de cavité à  $Re = 9\,375$  avec  $\theta_0 = 15.3 \times 10^{-4}$  m ( $L = 0.1$  m et  $D = 0.05$  m) soumis à deux signaux d'excitation de différents trains d'impulsion avec  $f_i = 30$  Hz : (a) DSP de pression au point impactant et (b) évolution temporelle de la vitesse horizontale au niveau du domaine de contrôle. En bleu :  $A_i = 4.44$  et  $dt_i = 50\%$ ; En rouge :  $A_i = 44.44$  et  $dt_i = 5\%$ .

Pour des excitations de fréquence donnée  $f_i$  de faible amplitude  $A_i$  et de durées  $dt_i$  qui respectent :

$$A_{i1} \times dt_{i1} = A_{i2} \times dt_{i2} = \dots = A_{ij} \times dt_{ij} = cst,$$

la densité spectrale de puissance de la pression au coin impactant demeure inchangée. Contrairement aux séries temporelles de la vitesse horizontale  $u$  au niveau de l'actionneur qui elles varient. Cette observation est très intéressante dans le cas où l'on souhaite réduire l'amplitude de contrôle en boucle ouverte.

### 1.3.5 Comportement dynamique de l'écoulement de cavité

La cavité se comporte comme un système dynamique caractérisé par un point d'équilibre instable (solution stationnaire des équations de Navier-Stokes), et un cycle limite stable (oscillations auto-entretenues) [IMR11, IMR12, CWRA03, CSW<sup>+</sup>08]. L'amplitude des oscillations est alors imposée par les non-linéarités. En régime compressible, Rowley [RWC<sup>+</sup>02] démontre que pour plusieurs conditions d'écoulement où les oscillations sont observées, la cavité se comporte comme un système stable faiblement amorti. Les oscillations, dans ce cas, sont des oscillations non entretenues engendrées par l'amplification du bruit présent dans la couche limite turbulente. Pour distinguer entre ces deux régimes, il propose de construire la densité de probabilité [MB00] sur la sortie de la cavité (mesure), en l'excitant par un bruit gaussien. Si la fonction de densité de probabilité en sortie est de forme gaussienne, alors le système est stable faiblement amorti, sinon la réponse est un cycle limite disjoint du point d'équilibre instable. Ces comportements peuvent aussi être distingués par une simple visualisation du portrait de phase construit à partir d'une mesure ponctuelle de vitesse, par exemple. Le portrait de phase d'un cycle limite présente une boucle fermée "bruitée" tandis que

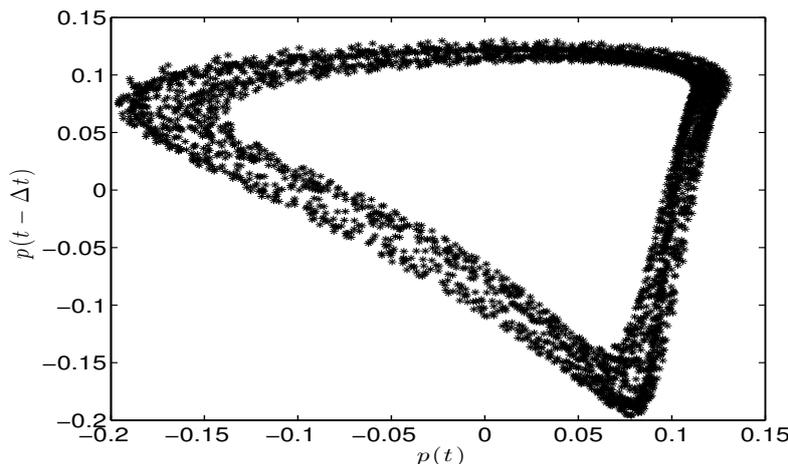


FIGURE 1.9 – Portrait de phase de la mesure de pression au point impactant aval d'un écoulement de cavité à  $Re = 9375$ ,  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m et d'un rapport de forme  $L/D = 2$ .

celui d'un système stable présente une distribution gaussienne centrée sur le point fixe.

La figure 1.9 présente le portrait de phase de la pression au niveau impactant d'une cavité en régime établi. Le portrait de phase est construit par une méthode de retard à partir du signal de pression au coin impactant [RT71]. Le temps de retard  $\Delta t$  utilisé dans le portrait de phase correspond à un quart de la période des oscillations. Il est clair que cette cavité, dans la configuration  $Re = 9375$ ,  $L/D = 2$  et  $\theta_0 = 15.3 \times 10^{-4}$  m, se comporte comme un système linéaire instable saturé par la non linéarité. Notons qu'en régime incompressible, toutes les configurations explorées présentent cette même dynamique, ce qui rend le défi de les contrôler plus grand.

Nous consacrons la suite de ce chapitre à l'introduction des techniques d'identification de modèle d'ordre réduit de la cavité qui ont été proposées ces deux dernières décennies.

## 1.4 Principaux travaux d'identification de modèle linéaire de cavité

Rappelons que l'écoulement est un système dynamique de très grande dimension car il résulte de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Une exploitation directe des équations pour établir une loi de commande n'est pas envisageable. La principale raison est que les techniques théoriques de contrôle produisent des correcteurs à l'ordre des dimensions du modèle et ne permettent donc pas d'implémenter de tels correcteurs sur un banc d'essai, les contraintes d'échantillonnage étant strictes sur le temps de calcul. Une solution consiste à construire un modèle d'ordre réduit capable de capter la dynamique résultante de l'écoulement de cavité et approprié aux outils de contrôle.

Plusieurs techniques d'identification ont été proposées ces dernières années. Ces techniques sont basées soit sur les lois physiques de la mécanique des fluides [BSS09, SDC<sup>+</sup>07, RCM04, RWC<sup>+</sup>02], soit sur des techniques d'identification directe empiriques [KCH02], à partir de réalisations expérimentales, en traitant la cavité comme une boîte noire.

Un bref aperçu de ces techniques empiriques est présenté en section 1.4.1, les modèles physiques déduits des équations de Navier-Stokes étant présentés en section 1.4.2.

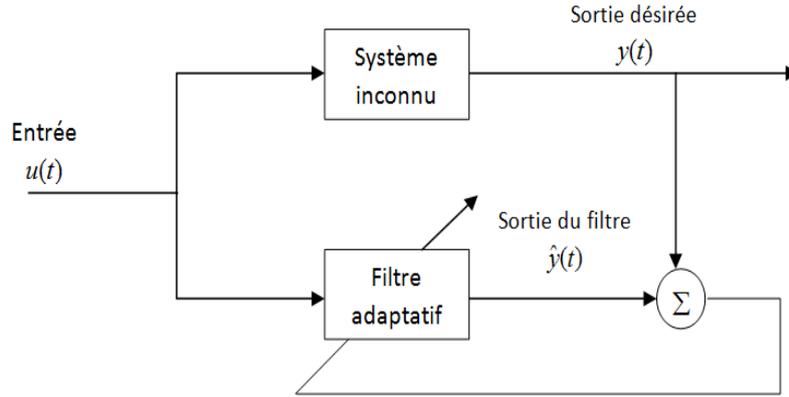


FIGURE 1.10 – Identification d'un système SISO en utilisant un filtre adaptatif.

### 1.4.1 Techniques empiriques d'identification du modèle de cavité

Plusieurs études ont cherché un modèle de cavité empirique à partir de la réponse fréquentielle. L'approche générale consiste à exciter la cavité via l'actionneur sur une plage de fréquences large et de mesurer la réponse au niveau du capteur. Ainsi, une fonction de transfert est déterminée empiriquement par analyse spectrale [MKF98, KMF02] ou par un algorithme [KCH02] pour régler les coefficients d'un modèle en minimisant un critère. Dans la première approche, le modèle est extrait de la réponse fréquentielle, tandis que dans la seconde, les paramètres sont calibrés itérativement pour une structure de modèle fixée. Dans les travaux de [MKF98], un premier contrôleur est utilisé pour stabiliser les oscillations avant de prélever la réponse fréquentielle. La raison en est que l'extraction d'une telle réponse ne peut pas être appliquée en boucle ouverte pour des systèmes instables [CWRA03, CSW<sup>+</sup>08] ou faiblement amortis [SS88].

Kegerise *et al.* [KCH02] ont proposé une identification adaptative du système (figure 1.10) avec deux structures de modèle, l'une basée sur un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR), l'autre sur une réponse impulsionnelle infinie (IIR). Une fois la structure du modèle choisie, un algorithme récursif (moindres carrés) est utilisé pour régler les coefficients du filtre par minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre la sortie mesurée  $y(t)$ , et celle du filtre  $\hat{y}(t)$ .

Un FIR d'une longueur  $N$  est exprimé par :

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i u(n-i) \quad (1.15)$$

où  $\hat{y}$  est la sortie du filtre,  $u$  son entrée,  $n$  l'indice d'échantillon discret et  $b_i$  ses coefficients. D'après la formule (1.15), la sortie du FIR est la somme pondérée des entrées. En revanche, la sortie du IIR se présente comme la somme pondérée des entrées et des sorties du filtre. Ainsi, la formule du IIR est décrite par :

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \hat{y}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} b_i u(n-i) \quad (1.16)$$

Kegerise *et al.* [KCH02] comparent le FIR au IIR. Ils soulignent que seul le IIR a été capable de reproduire la dynamique du système. Malheureusement, la stabilité des filtres IIR n'est pas garantie car, la structure (1.16) ne permet pas d'imposer la stabilité.

### 1.4.2 Techniques d'identification du modèle basées sur les lois physiques de la mécanique des fluides

Les techniques empiriques présentées précédemment sont des procédures d'identification qui considèrent la cavité comme une boîte noire. En observant la réponse à un signal d'excitation (forçage), un modèle peut être identifié. Dans cette partie, nous n'aborderons que les modèles issus des techniques d'identification basées sur la physique de l'écoulement. L'avantage de telles techniques est d'avoir une meilleure compréhension du mécanisme des oscillations présent dans la cavité [CWRA03, CSW<sup>+</sup>08]. Purement issues des équations de Navier-Stokes, elles proposent un modèle précis pour l'écoulement de cavité car elles gouvernent l'évolution du fluide. Malheureusement, pour la synthèse d'un correcteur, ces équations paraissent inappropriées (équations différentielles non linéaires de grande dimension). Pour un souci de dimension, il est préférable d'approximer ces équations par un modèle de dimension réduite. La méthode la plus utilisée pour l'obtention d'un tel modèle est la POD (Proper Orthogonal Decomposition), combinée avec une projection de Galerkin (POD/Galerkin).

La méthode POD a été introduite à la communauté de la dynamique des fluides par Lumley [Lum67] comme un outil d'extraction des "structures" énergétiquement dominantes dans un écoulement turbulent. L'implémentation de la technique POD nécessite d'effectuer une corrélation spatiale ou temporelle de l'ensemble des données issues de l'écoulement. Notons que les modes POD forment une base orthogonale de l'ensemble des clichés utilisés sur laquelle on projette les équations de Navier-Stokes, et permet d'obtenir un modèle d'ordre réduit. Corke [CGB94] utilise un modèle POD pour guider le contrôle d'un jet symétrique expérimental. Lumley et Bossley [LB98] utilisent la méthode pour le contrôle actif des couches limites turbulentes, afin de réduire la traînée de paroi. Dans l'objectif de contrôle actif de l'écoulement de cavité en régime compressible, Rowley [RCM04, RJ05] construit des correcteurs LQG (Linear Quadratic Gaussian) à partir de modèles d'ordre réduits obtenus par POD. Samimy [SDC<sup>+</sup>07] utilise, pour le contrôle de l'écoulement de cavité, un correcteur LQ (Linear Quadratic) en utilisant comme modèle d'estimation de l'état de l'écoulement la méthode d'estimation stochastique quadratique. L'estimation stochastique a été proposée et utilisée par Adrian [Adr79, AM88] comme moyen d'estimation des variables d'écoulement en tout point du domaine spatial à partir de l'information stochastique récoltée en quelques points seulement. Les résultats obtenus par Samimy [SDC<sup>+</sup>07] pour le contrôle en boucle fermée montrent une atténuation significative des pics de résonance et une redistribution plus faible en énergie sur les autres modes.

Bien que les modes POD soient efficaces pour l'approximation d'un ensemble de données, ils ne sont pas forcément les meilleurs candidats pour décrire la dynamique, par exemple si les mécanismes en jeu sont énergétiquement faibles. Parallèlement, l'ajout de modes POD supplémentaires peut produire des modèles dynamiquement insignifiants [RCM04]. De tels modes sont indésirables dans une procédure de réduction de modèle. Noack *et al.* [NTM04] considèrent le processus de transfert d'énergie entre les modes retenus et ceux négligés, par l'ajout d'un terme additionnel visqueux pour maintenir l'énergie globale équilibrée et compenser l'accumulation d'énergie induite par les modes

tronqués. La viscosité additionnelle est obtenue par un équilibrage de l'énergie de mode. Les modes POD sont généralement contrôlables, car la POD maximise l'énergie moyenne de la projection des données dans le sous-espace de projection. Mais l'observabilité de ces modes n'est pas prise en considération dans la construction du modèle réduit. En particulier, les ondes acoustiques peuvent ne pas être capturées avec un modèle POD [RCM04].

De plus, la POD ne tient pas compte des effets de l'actionneur et de la détection (fonction de transfert du capteur), qui peuvent être importants pour une meilleure performance. Diverses modifications ont été apportées pour améliorer les modèles POD, on pourra consulter l'article de Siegel *et al* (2008) [SSF<sup>+</sup>08] pour plus de détails sur ces techniques d'amélioration. Graham [GPT99a, GPT99b] introduit ainsi une base POD qui tient compte de l'effet du contrôle et développe un contrôle optimal sur l'écoulement autour d'un cylindre au moyen d'une rotation du cylindre. Caraballo [CLD<sup>+</sup>07] et Kim [KDSS07] utilisent un compensateur pour minimiser la modulation en fréquence de la fonction de transfert de l'actionneur qui offre une amélioration significative dans la performance du contrôle. Noack [NAM<sup>+</sup>03] introduit les "modes de décalage" (shift mode) qui représentent la correction entre l'écoulement de base et le champ moyen et obtient une amélioration notable sur la dynamique transitoire de l'écoulement autour du cylindre. Luchtenburg [LGN<sup>+</sup>09] utilise les modes de décalage pour développer des modèles POD sur une aile contrôlée périodiquement, afin de capturer le comportement transitoire entre le régime d'écoulement sous contrôle et un écoulement sans contrôle. Siegel [SSF<sup>+</sup>08] développe une méthode pour tenir compte du changement de la structure spatiale des modes POD durant le transitoire et utilise une approche de type réseau de neurones artificiels pour obtenir un modèle d'ordre réduit.

Il a été rapporté récemment dans la thèse d'Ahuja [Ahu09], que la décomposition orthogonale propre (POD) fournit des modes énergétiquement optimaux mais les modèles résultants à la suite d'une projection Galerkin ne captent pas forcément les propriétés de stabilité du système original ; par exemple, les modèles obtenus à partir d'un système complètement stable peuvent être instables.

#### 1.4.2.1 Observabilité et commandabilité

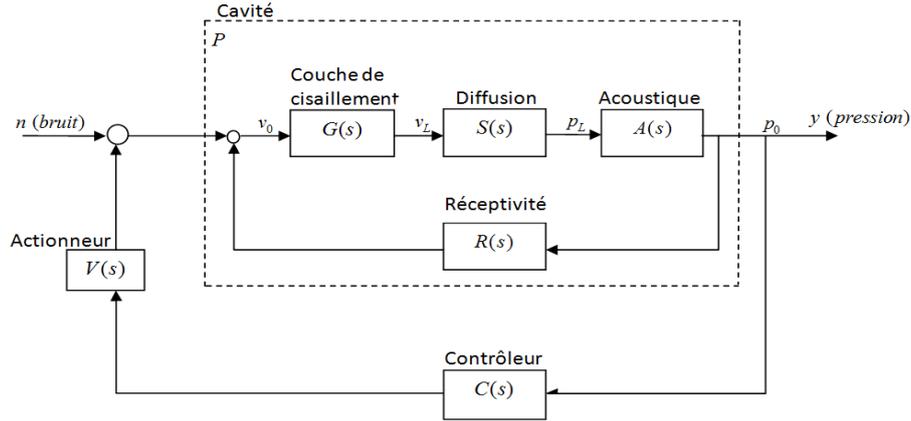
Dans le problème de réduction de modèle, la commandabilité et l'observabilité sont importantes car la qualité d'un modèle réduit à reproduire le comportement du système original en dépend fortement. L'utilisation d'une base qui équilibre ces deux concepts est particulièrement efficace pour exprimer le cheminement de l'information de l'actionneur au capteur d'un système linéaire. Cette méthode de réduction nommée équilibrée, introduite par Moore [Moo81], est restreinte à un problème de taille modérée et exclusivement aux systèmes stables. Son extension aux systèmes instables est menée par Zhou [ZSW99], tandis que des extensions aux problèmes non-linéaires sont développées par [Sch93, LMG00]. Cependant, la nécessité de résoudre l'équation de Lyapunov et celles de Sylvester, empêche l'application de la méthode aux problèmes de grande dimension. Pour surmonter cette difficulté, un développement récent (voir [Row05]) combine la méthodologie de calcul des modes POD avec la procédure de troncature équilibrée, et la rend adaptée à la réduction de modèle des systèmes à grande dimension. Cette méthode, connue sous le nom de BPOD (Blanced POD), a été utilisée pour l'obtention d'un modèle linéarisé d'un écoulement turbulent

dans une conduite [IR08] et le contrôle des couches limites pour la réduction de la traînée [BBH09]. Barbagallo [BSS09] utilise la BPOD dans le cas d'un écoulement incompressible d'une cavité carrée globalement instable, c'est-à-dire une cavité possédant un point d'équilibre instable saturé par les non-linéarités qui donne naissance à un cycle limite. Il partitionne la dynamique complète dans deux sous-espaces, l'un contenant la dynamique instable basée sur les modes globaux instables, l'autre décrivant la dynamique stable, qui est de grande dimension. Les modes globaux sont obtenus par l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base, solution des équations de Navier-Stokes. Pour plus de détails sur cette analyse voir [SL07] et [BSS09]. La réduction du sous-espace stable est cruciale lorsqu'il s'agit de la synthèse d'un correcteur. Elle est effectuée par une projection de type Petrov-Galerkin sur les modes BPOD (ou sur les modes POD). Barbagallo [BSS09] montre que les modèles BPOD surpassent les modèles POD pour la capture du comportement entrées-sorties. Par contre, même s'ils sont de plus grande dimension, les modèles POD se révèlent plus robustes que les modèles BPOD. Il est à souligner également que la BPOD ne s'applique pas en configuration expérimentale car elle nécessite de connaître le modèle adjoint de l'écoulement. Ce dernier ne peut être trouvé qu'à partir des simulations numériques [IMR11]. De plus, même si la BPOD reproduit la dynamique entrées-sorties du système, elle ne garantit pas la capture des états de l'écoulement original. En effet, la supériorité des modèles BPOD vient de leur potentiel à reproduire des états non physiques de l'écoulement qui leurs permettent de donner un signal entrée-sortie correct [DSRB11]. Alternativement, les modes BPOD peuvent être calculés dans le domaine fréquentiel qui produit directement les dynamiques stables et instables sans calculer les modes globaux instables [DSRB11, SS13].

L'approximation de la troncation équilibrée implique un post-traitement des données de simulations qui débouche sur un calcul extrêmement coûteux. Ahuja [Ahu09] établit une équivalence de cette méthode avec la méthode d'identification ERA (Eigensystem Realization Algorithm) proposée par Juang [JP85]. ERA produit une réduction notable du coût de calcul et des ressources mémoire. Cette méthode a été utilisée par Cattafesta [CGCL97], Cabell [CKCG06] et Illingworth [IMR11] pour la synthèse de correcteurs capables de réduire le bruit généré par l'écoulement de cavité. Si le système est stable, ERA permet d'obtenir directement un modèle réduit ; si le système est instable, il faut pouvoir utiliser un correcteur qui maintient le système au voisinage du point d'équilibre instable. Puis, ERA est appliquée [IMR11] pour identifier la dynamique en boucle fermée, de laquelle on extrait la dynamique de la boucle ouverte d'une manière directe [JP94, PJHL94]. Nous avons repris cette méthode pour extraire un modèle d'ordre réduit, comme nous le verrons dans le chapitre 5.

#### 1.4.2.2 Modèle de type Rossiter

Rowley [RWC<sup>+</sup>02] propose un modèle de cavité basé sur le mécanisme de Rossiter. Le modèle se présente sous la forme de blocs séparés de fonctions de transfert où chacun représente un mécanisme physique, comme indiqué sur la figure 1.11. Le modèle de la cavité est représenté par les fonctions de transfert de la couche de cisaillement  $G(s)$ , de diffraction  $S(s)$ , de propagation acoustique  $A(s)$  et de réceptivité  $R(s)$ .  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $v_L$  et  $p_L$  caractérisent respectivement les vitesses et pressions en amont et en aval de la cavité. Les dynamiques de l'actionneur et du correcteur sont décrites par les fonctions

FIGURE 1.11 – Configuration du modèle de cavité [RWC<sup>+</sup>02].

de transfert  $V(s)$  et  $C(s)$ . La sortie du correcteur est une tension sur le banc d'essai expérimental. L'entrée de la cavité est une perturbation extérieure qui modélise les fluctuations de la couche limite turbulente. Cette configuration de cavité n'est valable que lorsque la cavité se comporte comme un système stable faiblement amorti excité en permanence par un bruit gaussien (voir 1.3.5).

Rappelons que  $A(s) = 1$  dans le cas des écoulements incompressibles car le retour acoustique est instantané.

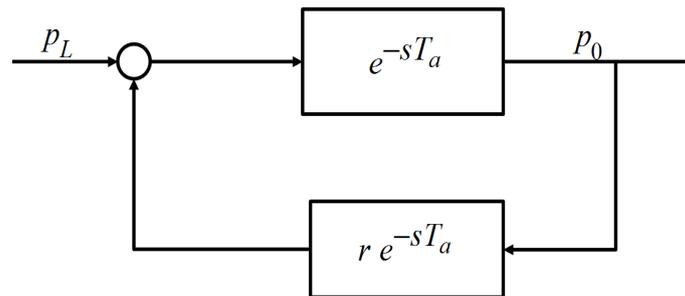
Rowley [RWC<sup>+</sup>02] propose de modéliser la couche de cisaillement par un système du second ordre retardé, ayant pour fonction de transfert :

$$G(s) = G_0(s) \exp(-sT_s) = \frac{w_0^2}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2} \exp(-sT_s) \quad (1.17)$$

où  $w_0$  est la pulsation propre du mode de Kelvin-Helmholtz le plus énergétique et  $\xi$  le facteur d'amortissement. Ces deux grandeurs sont liées à l'amplification maximale de la couche de cisaillement.  $T_s$  est le temps de convection pour une perturbation qui traverse la longueur de la cavité  $L$ , il est donné par :  $T_s = L/c_p$ , où  $c_p$  est la vitesse de phase moyenne.

Le schéma-bloc de propagation d'onde est donné à la figure 1.12, où  $T_a$  est le retard qui correspond au temps de propagation de l'onde acoustique le long de la cavité.  $r$  est le coefficient de réflexion par les bords de la cavité. Ce modèle ne fait apparaître que les modes acoustiques longitudinaux [RWC<sup>+</sup>02] et non pas les fréquences de Rossiter qui, elles, sont prédites par l'équation semi-empirique (1.11). Cependant, lorsque ces modes acoustiques approchent les fréquences de Rossiter, elles favorisent la sélection de ces dernières [WFM00]. Les effets de la diffusion et de la réceptivité qui couplent les perturbations des ondes acoustiques avec les perturbations hydrodynamiques sont les moins connus du modèle de la cavité [RWC<sup>+</sup>02]. Dans la formule de Rossiter [HHC71], ces effets sont traités ensemble comme un décalage de phase qui ne dépend pas de la fréquence. En suivant le principe de cette approche, Rowley [RWC<sup>+</sup>02] a proposé de les représenter par des gains constants. Si le gain est d'une valeur élevée, le modèle de cavité  $P(s)$  devient instable. Cependant, pour une valeur très faible de ce gain, le modèle  $P(s)$  est fortement amorti.

Rowley [RWC<sup>+</sup>02] utilise ce modèle pour les cavités se comportant comme des systèmes stables

FIGURE 1.12 – Modèle de propagation d’onde [RWC<sup>+</sup>02].

faiblement amortis. Le contrôle basé sur ce modèle induit un dédoublement du pic dominant dans le spectre, résultant de la limite de la bande passante de l’actionneur. L’actionneur doit avoir une bande passante au moins aussi étendue que la plus grande fréquence de Rossiter d’intérêt [KCH02]. A priori, les exigences en amplitude de l’actionneur ne sont pas connues car on ignore les niveaux de perturbation à l’origine de la couche de cisaillement [KCH02].

Ce modèle physique a également été utilisé par Yan [YDY<sup>+</sup>06] dans le cas d’un écoulement de cavité exhibant une unique fréquence d’oscillation. Le correcteur  $H_\infty$  synthétisé sur cette configuration est implémenté sur la configuration expérimentale. Ce correcteur excite des oscillations intenses à d’autres fréquences de Rossiter. Même constat pour un correcteur de type prédicteur de Smith ou pour un simple PID. Le problème est résolu en modifiant le correcteur PID en un correcteur parallèle proportionnel avec retard, en plaçant un zéro à la fréquence correspondante aux autres états de résonance. Ce correcteur arrive à répartir l’énergie du mode dominant à d’autres fréquences avec des niveaux d’énergie très faibles. En introduisant les mêmes zéros au correcteur  $H_\infty$ , les autres modes de Rossiter sont supprimés.

Illingworth [IMR12] utilise la même configuration de modèle en identifiant chaque bloc de fonction de transfert en boucle fermée pour une cavité qui se comporte dynamiquement comme un système linéaire instable saturé par les non linéarités. L’écoulement est initialement stabilisé par un correcteur à phase dynamique [RJ05]. L’identification des blocs s’effectue ensuite à partir d’une analyse spectrale. Rappelons qu’en présence de bruit, l’analyse spectrale établit un modèle biaisé, du fait de l’ignorance de la corrélation entre l’entrée et le bruit de mesure, conséquence de la boucle de retour du correcteur [VDH98, FL99].

## 1.5 Modèle linéaire

En s’inspirant des travaux de Kasper [Kas12] sur la modélisation d’un écoulement autour d’un cylindre, nous avons appliqué une démarche analogue sur une cavité à  $Re = 9375$  ( $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m) d’un rapport de forme  $L/D = 2$  dont le portrait de phase est présenté sur la figure 1.9. Pour extraire la réponse fréquentielle de la cavité, nous avons utilisé un sinus cardinal comme signal d’excitation

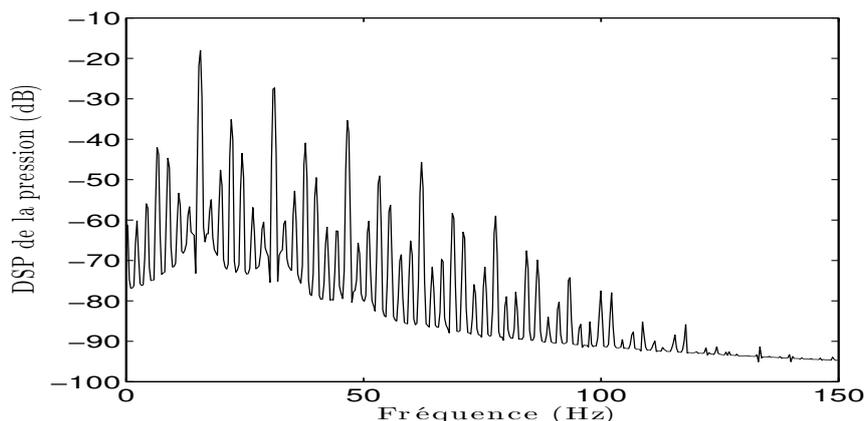


FIGURE 1.13 – Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant d'une cavité à  $Re = 9375$  ( $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m) et d'un rapport de forme  $L/D = 2$ .

à  $t = 20$  s d'une durée de 6 secondes et d'amplitude du lobe principale égale 150 N. Ainsi, la bande de fréquences d'intérêt varie de 0 à 50 Hz (figure 1.14). Ce choix est conditionné par l'objectif dynamique de la commande, qui se résume à supprimer ou atténuer les fréquences d'oscillations de la couche de cisaillement. La densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant aval de la cavité est montrée en figure 1.13. Les fréquences sélectionnées par la cavité se trouvent à 15.6 et 22 Hz. Les autres fréquences visibles sont les harmoniques de la fréquence de Rossiter la plus dominante ou bien une combinaison non-linéaire des deux fréquences de base présentes dans le spectre.

Notons également que nous avons privilégié cette forme d'excitation (sinus cardinal) pour éviter les forts gradients de pression qui peuvent induire des erreurs numériques dans le code de simulation. En premier lieu, nous avons découpé notre problème d'identification en deux sous systèmes : le premier modélise le comportement linéaire de la cavité, qui est le transfert entre le signal d'excitation  $U$  et la mesure sans cycle limite  $Y$ , le second représente le cycle limite  $Y_c$ , c'est-à-dire l'écoulement établi en l'absence de perturbation externe (figure 1.15).

### 1.5.1 Identification de la partie linéaire du modèle de cavité

Après avoir enlevé le cycle limite de la pression totale  $Y_t$  par une simple soustraction à l'instant  $t = 20$  s (début d'excitation), nous avons calculé le transfert entre le signal d'excitation  $U$  et la mesure  $Y$  défini par :

$$G(\omega) = \frac{\Phi_{YU}(\omega)}{\Phi_U(\omega)} \quad (1.18)$$

où  $\Phi_{YU}(\omega)$  et  $\Phi_U(\omega)$  sont les densités spectrales de puissance obtenues respectivement à partir des transformées de Fourier de l'intercorrélacion et l'autocorrélacion des signaux d'entrée et de sortie d'entrée, comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_{YU}(\omega) &= \mathcal{TF}[R_{yu}(\tau)] \\ \Phi_U(\omega) &= \mathcal{TF}[R_u(\tau)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

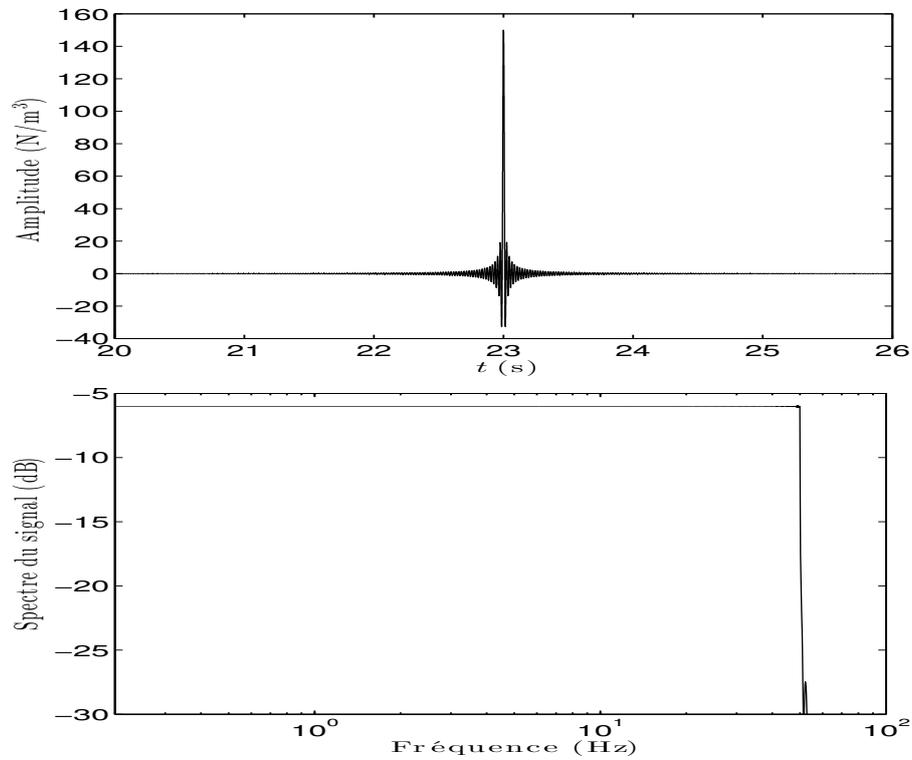


FIGURE 1.14 – Sinus cardinal : comportement temporel et fréquentiel.

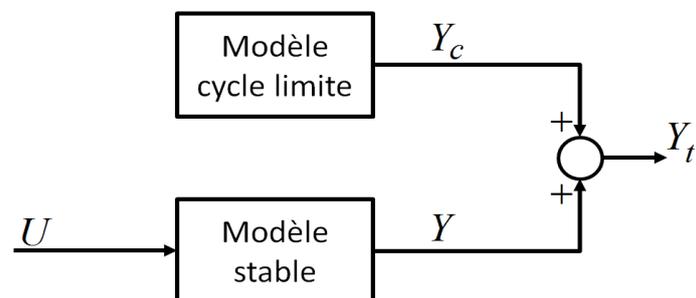


FIGURE 1.15 – Modèle adopté de l'écoulement de cavité : cycle limite plus un modèle linéaire.

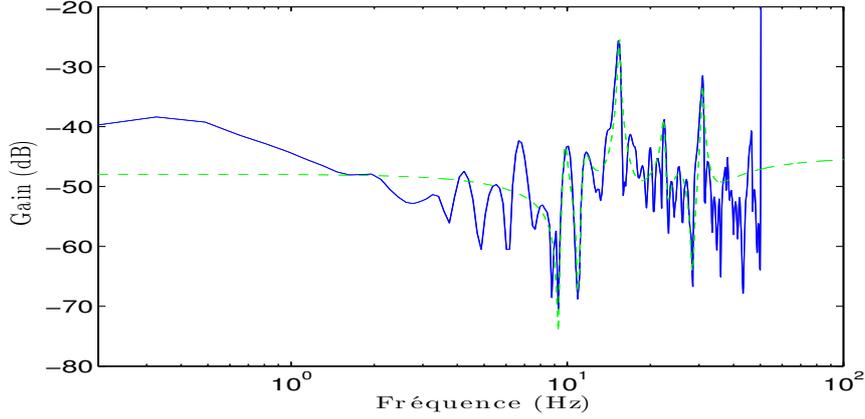


FIGURE 1.16 – Réponse fréquentielle de  $G(w)$  (bleu) et de son estimation  $\hat{G}(w)$  (vert).

avec :

$$\begin{aligned} R_{yu}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) u(t - \tau) dt \\ R_u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t - \tau) dt \end{aligned} \quad (1.20)$$

Cette méthode a l'avantage de séparer l'influence du bruit de la mesure.

À partir de cette réponse fréquentielle, nous avons cherché son estimé  $\hat{G}(w)$  d'une façon grossière, décrit comme suit :

$$\hat{G}(w) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1 + \frac{2\xi_{0i}}{\omega_{0i}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{0i}^2}}{1 + \frac{2\xi_{1i}}{\omega_{1i}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{1i}^2}} \right) \quad (1.21)$$

avec :  $\omega = 2\pi f$  où  $f$  est la bande de fréquence d'intérêt. Les paramètres  $\xi_{0i}$ ,  $\xi_{1i}$ ,  $\omega_{0i}$  et  $\omega_{1i}$  sont identifiés en minimisant un critère  $J$  donné par :

$$J = \left\| \log |G(w)| - \log |\hat{G}(w)| \right\|_2^2 \quad (1.22)$$

basé sur le module de  $G(w)$ . Cette minimisation est effectuée en utilisant l'algorithme du point intérieur [BHN99] pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires sous-contraintes (voir fonction **fmincon** sous MatLab).

Des études similaires [Bal96, Lel02] ont prouvé que le critère non linéaire  $J$  (équation (1.22)) est plus adapté aux systèmes à modes flexibles. De plus, la minimisation du critère  $J$  a été effectuée sous contrainte sur les amortissement ( $\xi_{0i}$ ,  $\xi_{1i}$ ) et les fréquences ( $\omega_{0i}$ ,  $\omega_{1i}$ ) pour épouser les résonances et les anti-résonances dominantes, i.e fréquences fondamentales les plus énergétiques, avec une dimension  $n$  de  $\hat{G}(w)$  raisonnable. Les fonctions de transfert  $G(w)$  et  $\hat{G}(w)$  sont représentées sur la figure 1.16). L'analyse temporelle donnée par la figure 1.17 nous informe que l'estimation de la sortie  $Y$  ne reproduit pas parfaitement la mesure. Il faut donc prendre en compte le temps  $\tau$  que met une perturbation pour parcourir la cavité. De même pour le retour instantané  $R$  d'information en amont de la cavité lorsque la pression fluctue en aval. En gardant le  $\hat{G}(w)$  estimé précédemment,

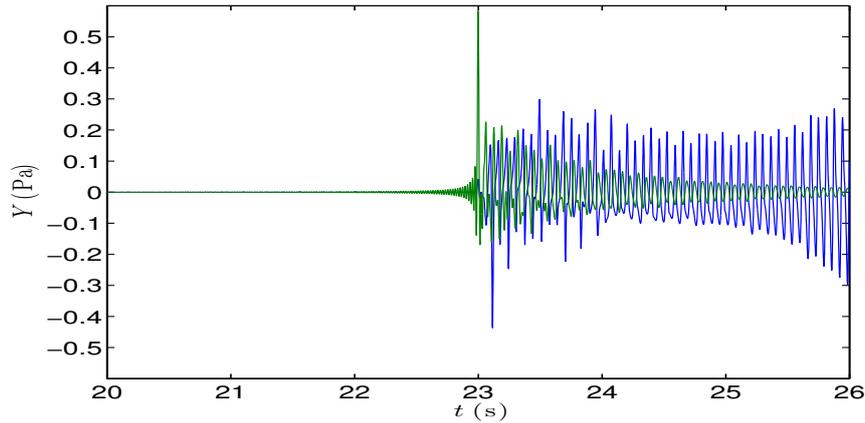


FIGURE 1.17 – Évolution temporelle de la pression sans cycle limite  $Y$  (bleu) et de son estimation issue du modèle  $\hat{G}$  (vert).

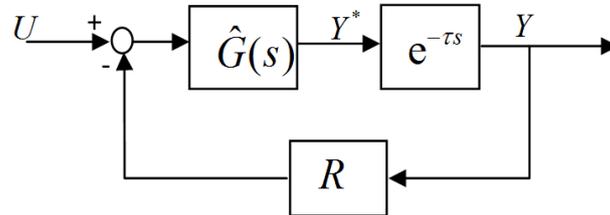


FIGURE 1.18 – Modèle linéaire affine.

nous cherchons à minimiser un critère  $J_{R\tau}$  déduit de la figure 1.18 et donné par :

$$J_{R\tau} = \left\| Y^*(t) - \hat{G} * [U(t) - RY(t)] \right\|_2^2 \quad (1.23)$$

où

$$Y^*(t) = Y(t + \tau)$$

La minimisation de  $J_{R\tau}$  a été effectuée pour différents temps de retard  $\tau$  afin de chercher le retour d'état  $R$  qui minimise le critère. Puis le choix dual ( $R$  et  $\tau$ ) s'est fait par minimisation globale de  $J_{R\tau}$ . La figure 1.19 montre une légère amélioration de l'estimation de  $Y$ .

### 1.5.1.1 Identification du cycle limite

À partir du spectre de pression de la dynamique libre, nous avons modélisé le comportement du cycle limite  $Y_c$ . Notre choix initial s'est porté sur un modèle non amorti constitué de deux modes propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  qui sont respectivement égaux à  $2\pi f_1$  et  $2\pi f_2$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont les deux premières fréquences de Rossiter. Le modèle est le suivant :

$$M_{c1} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A x(t) \\ Y_c(t) &= C x(t) \end{cases} \quad (1.24)$$

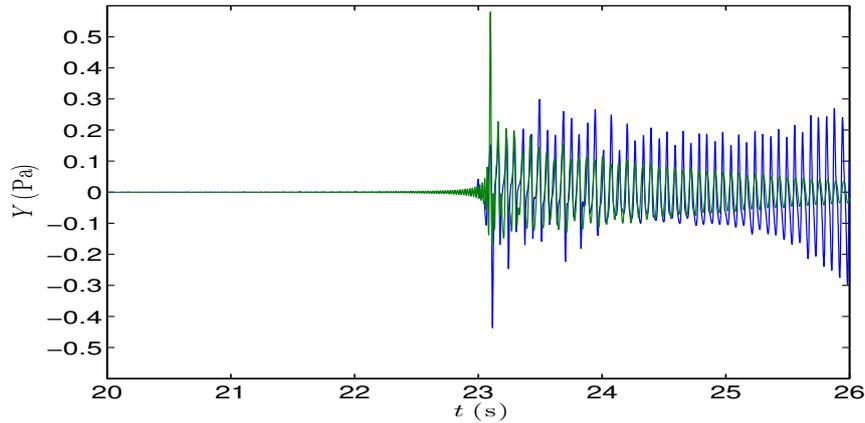


FIGURE 1.19 – Évolution temporelle de la pression sans cycle limite  $Y$  (bleu) et de son estimation issue du modèle linéaire affine (vert).

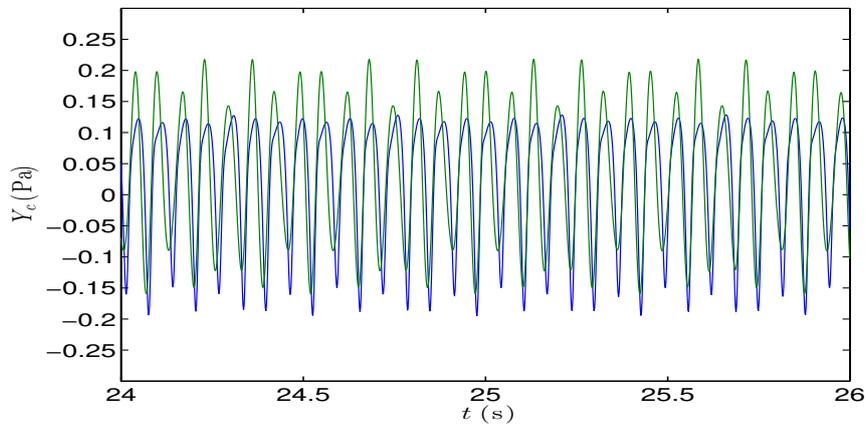


FIGURE 1.20 – Évolution temporelle du cycle limite  $Y_c$  (bleu) et de son estimation (vert) issue du modèle  $M_{c1}$ .

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & -w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Le dernier état de la matrice  $A$  sert à modéliser la composante continue de la pression  $Y_c$  d'une cavité au repos (sans perturbation externe).

En imposant une condition initiale  $x(t_0)$ , on cherche le vecteur  $C$  (matrice de sortie) qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \left\| Y_c(t) - C e^{A(t-t_0)} x(t_0) \right\|_2^2 \quad (1.26)$$

Le résultat de la minimisation est visible sur la figure 1.20.

Nous avons cherché un modèle qui améliore les résultats obtenus jusqu'à présent. Le nouveau modèle

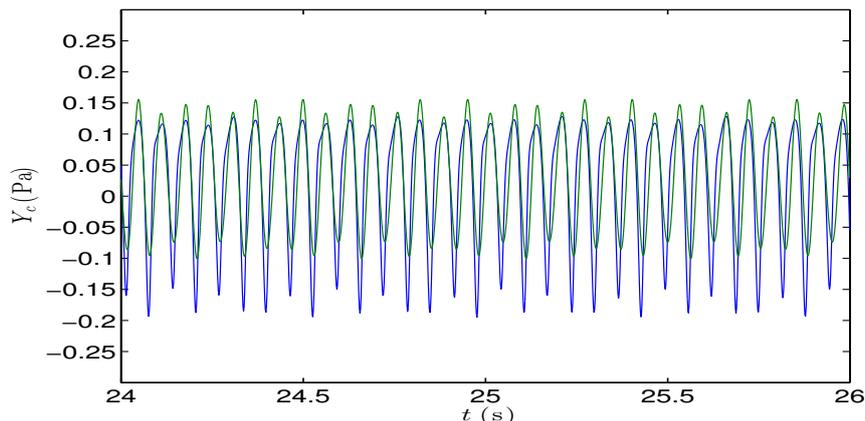


FIGURE 1.21 – Evolution temporelle du cycle limite  $Y_c$  (blue) et de son estimation (vert) issue du modèle  $M_{c2}$ .

comporte une entrée  $U_c$  et a la structure suivante :

$$M_{c2} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A x(t) + B U_c(t) \\ Y_c(t) &= C x(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $C$  et  $A$  ont été obtenus précédemment (équations (1.26),(1.25)). Le vecteur colonne  $B$  (matrice d'entrée) est calculé en minimisant le critère suivant :

$$J = \left\| Y_c(t) - \hat{Y}_c(t) \right\|_2^2 \quad (1.28)$$

où :

$$\hat{Y}_c(t) = C e^{A(t-t_0)} x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B U_c(\tau) d\tau \quad (1.29)$$

Le résultat de la figure 1.21 est obtenu à partir du nouveau modèle du cycle limite.

Le modèle  $M_{c2}$  a été retenu pour introduire une perturbation qui excite notre modèle de bruit (cycle limite) et tenter de compenser l'écart qui existe entre la sortie et son estimée. Notre problème revient à chercher une perturbation  $U_c$  qui excite notre modèle de bruit tout en minimisant le critère suivant :

$$J_G = \left\| Y_t(t) - (Y_c(t) + Y(t)) \right\|_2^2 \quad (1.30)$$

sachant que  $Y_c(t)$  est la transformée de Laplace inverse de  $Y_c(s)$  donnée par :

$$Y_c(t) = \mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}[Y_c(s)] \quad (1.31)$$

avec  $Y_c(s) = M_{c2}(s) U_c(s)$ , où  $M_{c2}(s) = C (sI - A)^{-1} B$ .

La figure 1.22 illustre l'évolution temporelle de  $U_c$  obtenu par minimisation. On voit sur la figure 1.23 qu'il existe une corrélation entre les signaux d'entrée  $U$  et  $U_c$  à un temps  $t = 0$  s et à  $t = 3$  s.

À partir de ces signaux d'entrée ( $U$  et  $U_c$ ) nous parvenons à estimer correctement la sortie  $Y_t$  du système (voir figure 1.24). Il est à noter que la même procédure a été effectuée pour un signal d'excitation dont l'amplitude du lobe principale est égale à 100 N. Nous avons vérifié qu'il n'existait pas

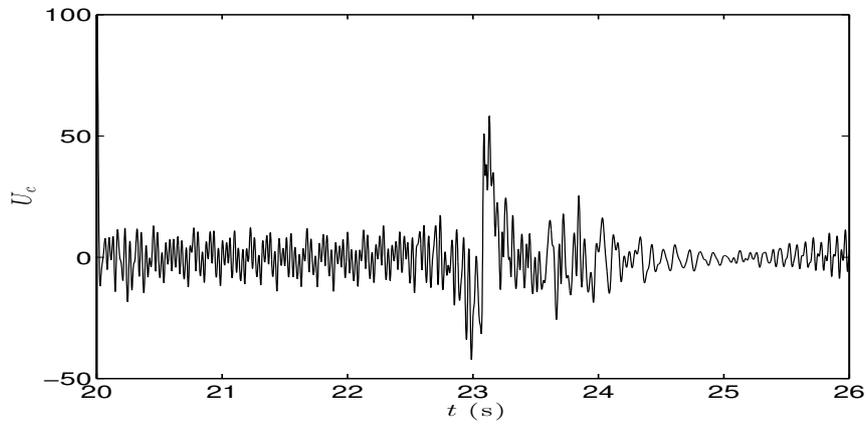


FIGURE 1.22 – Évolution temporelle de  $U_c$  obtenue par minimisation de  $J_G$ .

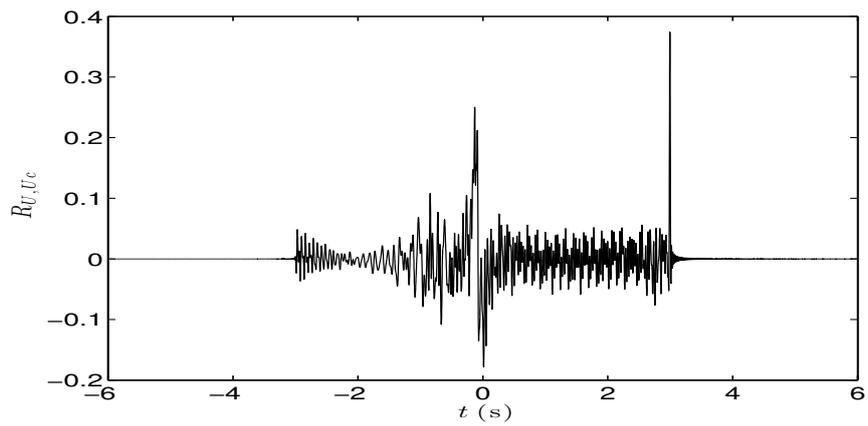


FIGURE 1.23 – Inter-corrélation entre  $U_c$  et  $U$ .

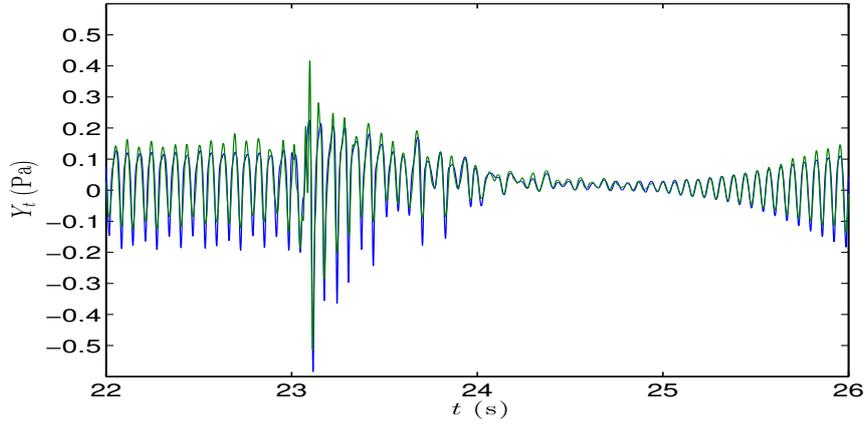


FIGURE 1.24 – Évolution temporelle de  $Y_t$  (bleu) et de son estimation (vert).

de relation linéaire entre les signaux d'excitation  $U$  et  $U_c$ , en utilisant la propriété de l'homogénéité. Cette observation nous empêche d'établir un transfert linéaire entre le signal d'excitation  $U$  et le signal  $U_c$ .

Ainsi, lors de l'introduction d'un signal d'excitation pour établir une description linéaire de la cavité, le cycle limite se décale et par conséquent rend l'identification du modèle linéaire inadaptée. Cela apparaît évident lorsque nous analysons soigneusement la réponse fréquentielle du modèle linéaire (voir figure 1.16) : les résonances à 15.6 et 22 Hz sont sensées être prises en compte que par le modèle du cycle limite (équation (1.27)). Pour cette raison nous présentons dans la suite une tentative simplifiée pour la modélisation et le contrôle de cavité.

### 1.5.2 Identification linéaire simplifiée

En effectuant l'analyse spectrale entre le signal d'excitation  $U$  et le signal  $Y_t$  et en la comparant à celle calculée à partir du transfert entre  $U$  et  $Y$ , nous apercevons qu'elles sont identiques. Nous choisissons donc de modéliser le système avec la structure donnée à la figure 1.25. L'estimation  $\hat{G}$  de  $G$  est identique à l'identification de la partie linéaire de la cavité, présentée dans la partie 1.5.1. Pour l'identification de  $R$ ,  $\tau$  et  $U_c$  nous minimisons un critère  $J_{R\tau,U_c}$  donné par :

$$J_{R\tau,U_c} = \left\| Y_t^*(t) - \hat{G}[U(t) + U_c - RY_t(t)] \right\|_2^2 \quad (1.32)$$

où  $Y_t^*$  est la translation temporelle de la mesure  $Y_t$ . Après minimisation, nous avons obtenu un retard  $\tau$  égal à celui que l'on trouve expérimentalement, qui est égal à  $2u_\infty/L$ , où  $u_\infty$  et  $L$  sont respectivement la vitesse débitante de l'écoulement et la longueur de la cavité. La figure 1.27 présente l'évolution temporelle de la pression totale et de son estimée obtenue par ce modèle.

Nous considérons le signal  $U_c$  soit comme un bruit blanc dans le cas d'un critère  $H_2$ , soit comme une incertitude qui modélise la corrélation existante entre  $U$  et  $U_c$ , prise en compte par un critère  $H_\infty$ . Nous choisissons la deuxième option pour la synthèse de correcteur. Car nous pouvons prendre en compte la limitation du modèle identifié (sur une gamme de fréquences allant jusqu'à 50 Hz) par les gabarits fréquentiels que nous allons voir à la suite de ce chapitre. Puis, nous implémentons ce correcteur dans les simulations numériques directes de l'écoulement pour pouvoir statuer sur la

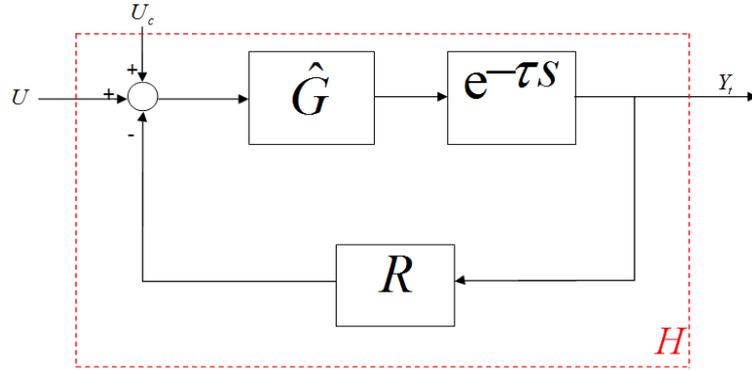
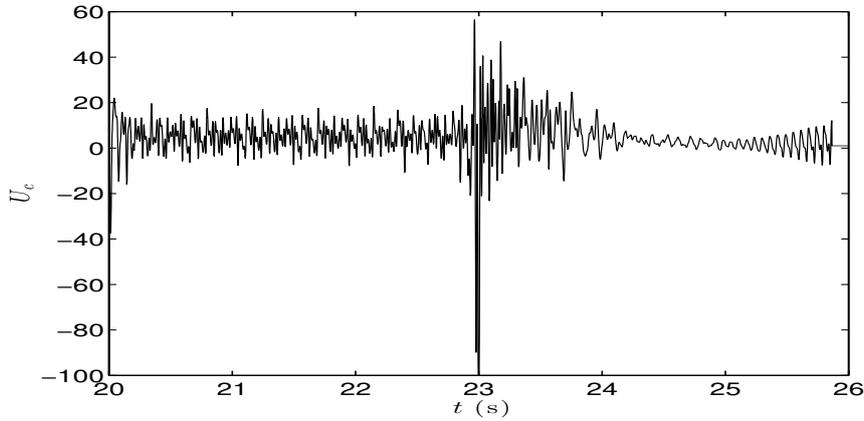


FIGURE 1.25 – Structure de modèle de la cavité.

FIGURE 1.26 – Évolution temporelle de  $U_c$  obtenue par minimisation de  $J_{R\tau, U_c}$ .

validité du modèle linéaire identifié.

### 1.5.3 Synthèse de correcteur

Pour valider le modèle linéaire de la cavité identifié précédemment, nous effectuons la synthèse un correcteur à partir de ce modèle et le testons sur le simulateur numérique de l'écoulement. Le résultat du contrôle conditionnera la validité du modèle identifié. D'après la figure 1.25, le modèle  $H(s)$  de la cavité est donné par :

$$H(s) = \hat{G}(s)e^{-\tau s}(1 + R\hat{G}(s)e^{-\tau s})^{-1} \quad (1.33)$$

Rappelons que  $\hat{G}$  possède un gain très faible (voir figure 1.16) de sorte que la boucle de retour n'occasionne aucun changement sur la réponse fréquentielle de la boucle ouverte (voir figure 1.25). Ainsi,  $H(s)$  peut être mis sous forme d'un modèle nominal fois le retard :

$$H(s) = H_0(s)e^{-\tau s} \quad (1.34)$$

avec

$$H_0(s) = \hat{G}(s)(1 + R\hat{G}(s)e^{-\tau s})^{-1}$$

A cause du retard visible sur l'équation (1.34), la plus grande bande passante  $w_{gc}$  que nous pouvons

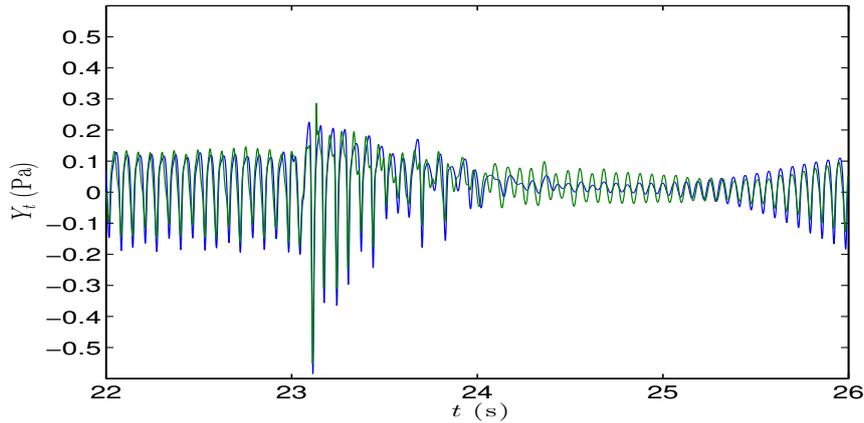


FIGURE 1.27 – Évolution temporelle de  $Y_t$  (bleu) et de son estimation (vert) obtenue par le modèle linéaire adopté de 1.25.

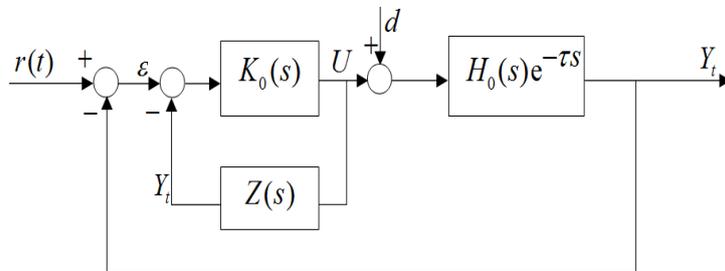


FIGURE 1.28 – Commande des systèmes à retard à base du prédicteur de Smith.

atteindre quel que soit le correcteur [Ast00] ne dépasse pas  $w_{gc} = \pi/2\tau$ . Pour de tels systèmes à retard, nous proposons d'utiliser le prédicteur de Smith [Smi57]. L'idée consiste à synthétiser un correcteur sans prise en compte du retard, en quelque sorte le retard est déplacé à l'extérieur de la boucle. Par conséquent, la synthèse d'un correcteur et l'analyse du système sont considérablement simplifiées. Ceci est réalisé par l'introduction d'une boucle de retour locale au correcteur nominal  $K_0(s)$  en utilisant le prédicteur de Smith  $Z(s)$ , voir figure 1.28. Le prédicteur de Smith est donné par :

$$Z(s) = H_0(s) - H_0(s)e^{-\tau s} \quad (1.35)$$

Le signal de la boucle de retour pour le correcteur nominal  $K_0(s)$  est une version prédite de la sortie  $Y_t$ . Pour cette raison le correcteur est appelé prédicteur [Zho06]. Lorsque le modèle reproduit fidèlement le système et que la perturbation sur la commande  $d = 0$ , la boucle de retour peut être considérée comme ouverte. Dans ce cas, le système équivalent est représenté sur la figure 1.29. Le retard  $e^{-\tau s}$  est mis à l'extérieur de la boucle et le correcteur  $K_0(s)$  est obtenu seulement à partir du modèle sans retard  $H_0(s)$ . Cependant, le gain du correcteur ne pourra pas être très élevé car le retard impose une limitation supérieure sur la largeur de la bande passante à atteindre [Zho06, Ast00]. La valeur du gain du correcteur est conditionnée par le compromis entre la robustesse et la performance dynamique du système en boucle fermée. La synthèse du correcteur  $K(s)$  pour le système retardé  $H_0(s)e^{-\tau s}$  se déroule en deux étapes :

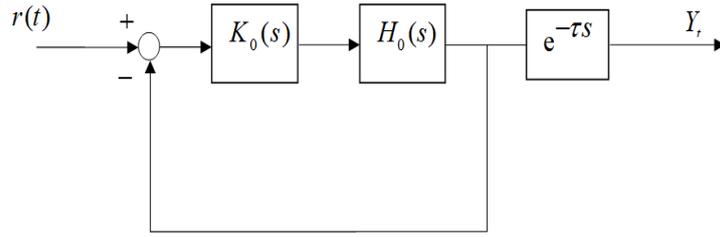


FIGURE 1.29 – Contrôle des systèmes à retard à base du prédicteur de Smith : cas nominal avec  $d = 0$ .

- la synthèse du correcteur  $K_0(s)$  à partir de  $H_0(s)$  pour assurer les spécifications du cahier des charges, tout en prenant en considération la limitation sur la bande passante,
- l'introduction de la boucle de retour locale en utilisant le prédicteur de Smith  $Z(s)$  afin d'obtenir le correcteur pour le système à retard. Ainsi, le correcteur  $K(s)$  est donné par :

$$K(s) = (I + (1 - e^{\tau s} K_0 H_0(s))^{-1} K_0(s)) \quad (1.36)$$

Nous avons choisi le prédicteur de Smith pour sa simplicité d'implémentation, ainsi que sa conservation des mêmes marges de stabilité que le correcteur minimal  $K_0(s)$ . Pour la synthèse de  $K_0(s)$  à partir du modèle minimal  $H_0(s)$ , nous avons choisi la synthèse  $H_\infty$ .

#### 1.5.4 Synthèse $H_\infty$

L'objectif de la synthèse  $H_\infty$  est de rejeter la perturbation  $\varpi$  ( voir figure 1.30) en considérant le pire cas, i.e pour lequel l'effet sur  $\zeta$  est le plus grand. Elle consiste à minimiser l'effet d'une perturbation  $\varpi$  supposée d'énergie finie sur la sortie du canal de performance. Son effet est mesuré par la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un vecteur coût  $\zeta$ . Elle revient à chercher une loi de commande  $U$  à partir d'observations ou bien d'une erreur de consigne  $\varepsilon$  donnée par :

$$U(s) = K_0(s)\varepsilon(s) \quad (1.37)$$

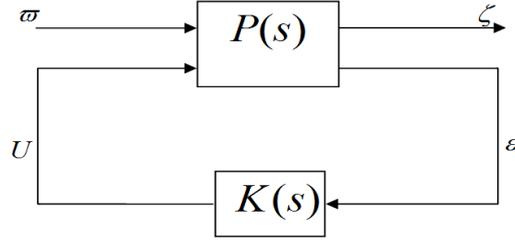
en minimisant la norme  $\mathcal{L}_2$  de l'impact de  $\varpi$  sur  $\zeta$ , d'où la norme induite  $H_\infty$  à minimiser du transfert bouclé  $f_L(P, K_0)$  de  $\varpi$  à  $\zeta$  : où  $P(s)$  représente la fonction de transfert reliant les entrées  $(\varpi, U)$  aux sorties  $(\varepsilon, \zeta)$  et  $f_L(P, K_0)$  est obtenu par la *Transformation Linéaire Fractionnelle* :

$$\min_{K_0} \|f_L(P, K_0)\|_\infty \quad (1.38)$$

On rappelle que la norme  $H_\infty$  de  $f_L(P, K_0)$  entre  $\varpi$  et  $\zeta$  est :

$$\|f_L(P, K_0)\|_\infty = \sup_{\varpi \in \mathcal{L}_2, \varpi \neq 0} \frac{\|\zeta\|_2}{\|\varpi\|_2} \quad (1.39)$$

Dans notre étude, nous avons choisi de synthétiser un correcteur en exploitant le problème de la

FIGURE 1.30 – Problème  $H_\infty$  standard.

sensibilité mixte illustrée sur la figure 1.31.  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$  représentent les filtres de pondération.  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  sont les signaux à surveiller : par analogie au problème  $H_\infty$  standard, ils constituent le vecteur coût  $\zeta$ . Le transfert bouclé entre les signaux à surveiller  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  et le signal de perturbation  $r(t)$  (signal de consigne) est donné par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_1 S(s) \\ W_2 T(s) \end{bmatrix} R(s) \\ &= f_L(P, K_0) R(s) \end{aligned} \quad (1.40)$$

où  $S(s) = (1 + H_0 K_0(s))^{-1}$  et  $T(s) = I - S(s)$  sont respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire. Dans ce cas,  $P(s)$  est le système augmenté construit à partir de  $H_0(s)$  et des filtres de pondération :

$$P(s) = \begin{pmatrix} W_1(s) & -W_1 H_0(s) \\ 0 & W_2 H_0(s) \\ I & -H_0(s) \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

obtenu à partir du problème de sensibilité mixte comme suit :

$$\begin{cases} E_1(s) = W_1 \xi(s) \\ E_2(s) = W_2 Y(s) \\ \varepsilon(s) = R(s) - Y(s) \\ Y(s) = H_0 U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1(s) = W_1 R(s) - W_1 H_0 U(s) \\ E_2(s) = W_2 H_0 U(s) \\ \varepsilon(s) = R(s) - H_0 U(s) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \varepsilon(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} R(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Le choix des fonctions de sensibilité se justifie dans la mesure où il nous permet de raisonner sur le profil de la plus petite et la plus grande valeur singulière du transfert en boucle ouverte  $H_0 K_0(s)$  :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(H_0 K_0(jw)) \gg 1 &\Rightarrow \bar{\sigma}(S(jw)) \ll 1 \\ \bar{\sigma}(H_0 K_0(jw)) \ll 1 &\Rightarrow \bar{\sigma}(T(jw)) \ll 1 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Nous pouvons raisonner donc en termes de contraintes sur l'allure des fonctions  $\bar{\sigma}(S(jw))$  et

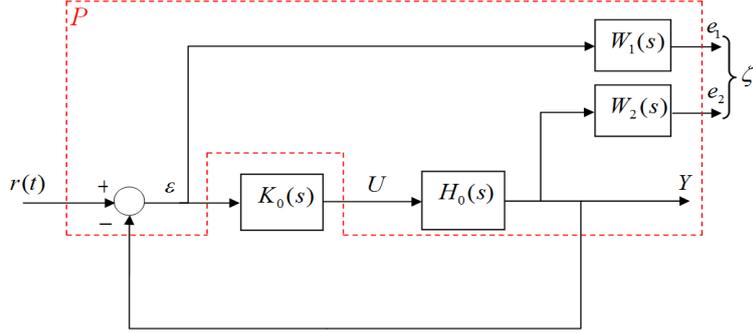


FIGURE 1.31 – Problème de sensibilité mixte.

$\bar{\sigma}(T(jw))$ . Les filtres de pondération permettent d'imposer un gabarit fréquentiel sur ces fonctions :

$$\|W_1 S\|_\infty < 1 \quad \|W_2 T\|_\infty < 1 \quad (1.44)$$

Le problème de la sensibilité mixte consiste alors à trouver un compensateur  $K_0(s)$  qui assure la stabilité interne de la boucle et qui satisfait la contrainte suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (1.45)$$

La synthèse d'un tel correcteur n'est pas triviale, aussi cherchons nous à trouver un compromis entre les performances et les limitations de la synthèse.

### 1.5.5 Résolution du problème $H_\infty$

Dans cette partie, nous présentons la technique de résolution LMI (Linear Matrix Inequalities) que nous avons adopté pour la résolution du problème  $H_\infty$  (figure 1.30). Pour plus de simplicité, le modèle augmenté  $P$  est mis sous forme standard de représentation d'état dans le cas général comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \zeta(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ r(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

où  $x$  regroupe le vecteur d'état du modèle nominal  $H_0$  ainsi que ceux des filtres de pondération. Les matrices  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_{ii}$ , avec  $i = 1, 2$ , sont extraites de la représentation d'état du modèle  $H_0$  ainsi que les filtres de pondération  $W_1$  et  $W_2$ . L'objectif de la synthèse  $H_\infty$  est de trouver un correcteur  $K_0$  donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c \varepsilon(t) \\ U(t) &= C_c x_c(t) + D_c \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (1.47)$$

qui assure la stabilité interne de  $P$  et minimise la norme  $H_\infty$  du transfert  $f_L(P, K_0)$  entre  $\varpi$  et  $\zeta$ . La résolution de ce problème s'effectue sous l'hypothèse :

- que  $(A, B_2)$  soit stabilisable et  $(C_2, A)$  soit détectable.

On suppose que  $D_{22} = 0$ , c'est à dire le modèle ne possède pas un transfert direct. Ainsi, la

représentation d'état du système bouclé est la suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x_c(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_c D_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.48)$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un correcteur stabilisant  $K_{0D}$  dans le cas où  $D_{22} = 0$  qui minimise  $\|f_L(P, K_{0D})\|_\infty$  est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 1 (Lemme borné réel)**

$\|f_L(P, K_{0D})\|_\infty < \gamma$  si et seulement si il existe une matrice symétrique  $X$  définie positive telle que :

$$\begin{bmatrix} A_f^T X + X A_f & X B_f & C_f^T \\ B_f^T X & -\gamma I & D_f^T \\ C_f & D_f & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Vu que la matrice  $X$  est invariante, Gahinet et Apkarian [GA94] proposent une résolution équivalente et plus facile du Lemme 1 car cette inégalité n'est pas affine en  $A_c, B_c, C_c, D_c$ . Cela revient à chercher deux matrices symétriques et définies positives  $R$  et  $S$  satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A R + R A^T & R C_1 & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T D_{11}^T - \gamma I & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + S A & S B_1 & C_1^T \\ B_1^T R & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

où  $N_R$  et  $N_S$  forment respectivement les bases des noyaux de  $[B_2^T \ D_{12}^T]$  et  $[C_2^T \ D_{21}^T]$ . La construction du correcteur  $K_{0D}$  est réalisée à partir de  $R$  et  $S$ , en passant par la décomposition en valeurs singulière de  $I - R S$  :

$$I - R S = \Theta \Lambda \Gamma = M N^T$$

pour déduire les matrices  $M$  et  $N$  utiles à la constitution de la matrice  $X$  comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^+ R N \end{bmatrix}$$

où  $M^+$  est la pseudo-inverse de la matrice  $M$ . L'inégalité du Lemme 1 devient alors affine en  $A_c$ ,

$B_c$ ,  $C_c$  et  $D_c$ , et le correcteur  $K_{0D}$  est alors facilement déduit.

Dans le cas où  $D_{22} \neq 0$ , le correcteur final  $K_0$  est obtenu à partir de  $K_{0D}$  par :

$$K_0(s) = K_{0D}(s)(I - D_{22}K_{0D}(s))^{-1} \quad (1.50)$$

### 1.5.6 Synthèse et analyse du correcteur $H_\infty$

Le choix des filtres de pondération a été fait en fonction de l'objectif de synthèse que nous avons posé tout en tenant compte des limitations imposées par le modèle. Ces limitations sont : la restriction de la bande de fréquences sur laquelle le modèle a été identifié et aussi le retard identifié du fait de la non-colocalisation de l'actionneur et du capteur de pression. Rappelons que l'objectif est d'atténuer les modes résonnant à 15.6 et 22 Hz du modèle  $H(s)$  responsables des oscillations de la couche de cisaillement avec une bande passante à 45 Hz pour filtrer les harmoniques de la première dominante de Rossiter. Compte tenu de l'identification du modèle et les performances exigées, nous avons choisi  $W_1(s)$  comme suit :

$$W_1(s) = \left( 1.7 \frac{s + 0.0063}{s + 43.1843} \right)^{-1}$$

tel que  $1/|W_1(s)|$  :

- a une pulsation de coupure à 5 Hz, imposant ainsi la bande passante à cette fréquence,
- un gain de 1.7 en hautes fréquences de façon à garantir une marge de module de 0.6,
- un faible gain aux très basses fréquences pour assurer le suivi de consigne et un bon rejet de perturbations.

Le filtre  $W_2(s)$  a été choisi tel que  $1/|W_2(s)|$  forme un *roll-off* au-delà des 50 Hz :

$$W_2(s) = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}s + 1}{7.07 \cdot 10^{-6}s + 1}$$

assurant ainsi une faible sensibilité aux erreurs de modèle.

**Remarque 1** *les filtres de pondérations doivent être stables et propres.*

La figure 1.32 présente la réponse fréquentielle en amplitude des filtres de pondération. La figure 1.33 montre la réponse fréquentielle de la boucle fermée  $T(s) = H_0K_0(s)(1 + H_0K_0(s))^{-1}$  après minimisation de  $\|f_L(P, K_0)\|_\infty$ . Pour prendre en compte le retard, nous avons calculé le correcteur  $K(s)$  du modèle complet à partir de l'équation (1.36). Ce correcteur a été implémenté dans les simulations numériques directes à partir du temps  $t = 20$  s.

Nous voyons sur les figures 1.34 et 1.35 que la pression augmente et que la force relative délivrée par l'actionneur est très élevée, avoisinant 7. Même si l'objectif de réduction de la fréquence de Rossiter semble atteint (voir figure 1.36), l'amplitude élevée de la pression nous indique que le correcteur n'est pas robuste face à une dynamique non modélisée et qu'il échoue à stabiliser la partie linéaire de la cavité. Dans ce cas, la pression ne diverge pas en raison seulement de la nature non-linéaire

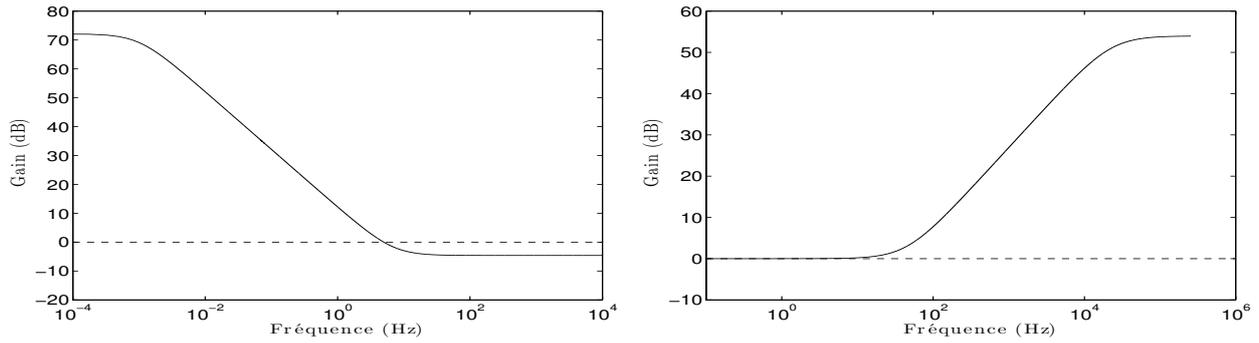


FIGURE 1.32 – Réponse fréquentielle des filtres de pondération :  $W_1(s)$  (à droite) ;  $W_2(s)$  (à gauche).

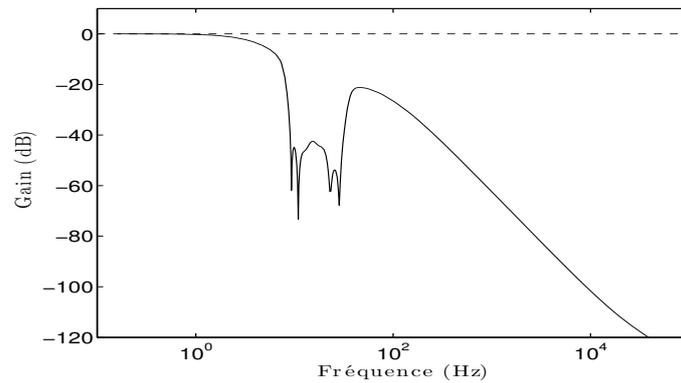


FIGURE 1.33 – Réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité complémentaire  $T(s)$ .

de la cavité. Notons également que l'amplitude de la commande atteint une intensité qui ne peut être physiquement réalisable.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions nécessaires à la compréhension des phénomènes de l'écoulement de cavité ainsi que l'objectif à atteindre. Nous avons également donné un bref aperçu des travaux qui ont été menés jusqu'à présent pour l'identification d'un modèle linéaire simplifié de la dynamique de l'écoulement de cavité. Une tentative d'identification en boucle ouverte suivie par

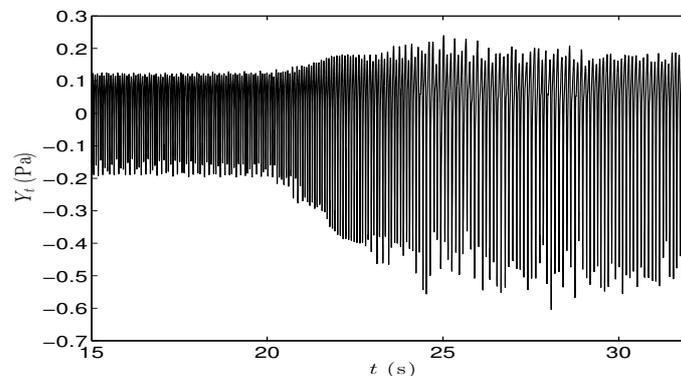


FIGURE 1.34 – Évolution temporelle de la pression : prédicteur de Smith est enclenché à  $t = 20$  s .

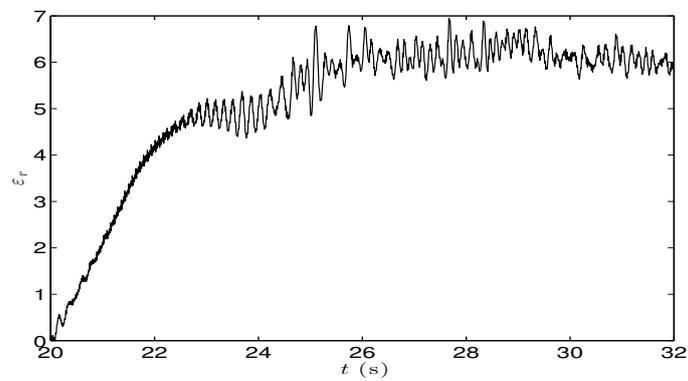


FIGURE 1.35 – Force relative issue du correcteur  $K(s)$  en simulation numérique directe.

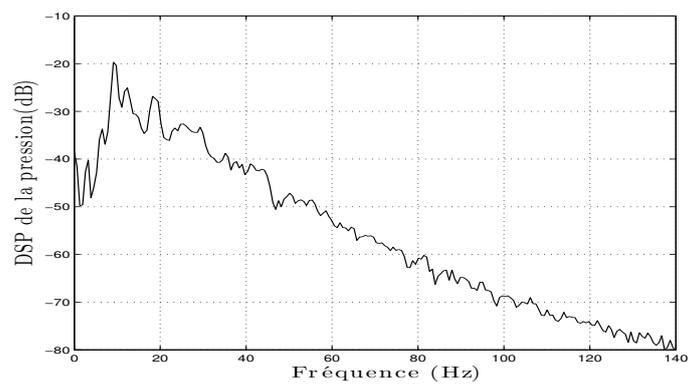


FIGURE 1.36 – Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant dans un écoulement de cavité à  $Re = 9\,375$  après enclenchement du contrôle linéaire, où  $f = 9$  Hz représente la fréquence dominante.

---

un contrôle en boucle fermée ont été présentés. Un problème de sensibilité mixte a été utilisé pour la synthèse de correcteur  $H_2/H_\infty$  résolue par LMI. Ce dernier a été utilisé en simulation numérique directe. Il révèle la faiblesse du modèle linéaire proposé à prédire le comportement linéaire de la cavité.



## Chapitre 2

# Modélisation non-linéaire

### 2.1 Introduction

L'analyse spectrale fournit une idée sur l'ordre et la nature du système : bande passante, résonances, gain statique, etc. . . . Malheureusement, cette analyse est limitée aux systèmes linéaires ou bien aux systèmes dans lesquels les non-linéarités sont faibles. Pour des systèmes à non-linéarité forte, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, comme dans l'écoulement de cavité, l'analyse fréquentielle n'est pas suffisante pour l'extraction d'un modèle de comportement. Ainsi, il est utile de trouver un modèle mathématique pouvant reproduire les observations expérimentales et utilisable dans la synthèse d'une loi de commande. Afin de donner une description simplifiée d'un tel système, nous nous sommes basés sur les travaux de Le Pourhiet [LPCC03] et Rowley [RJ05].

Les travaux de Le Pourhiet ont été validés sur l'identification et le contrôle d'un système aérodynamique. Il s'agit de supprimer les battements du front de l'onde de choc (buffeting) présent sur une aile d'avion. Il propose une identification d'un modèle de type oscillateur de Van der Pol. Dans la première partie de ce chapitre, nous donnerons les lignes directrices de cette méthode d'identification ainsi que son application sur le contrôle de l'écoulement incompressible de cavité et les résultats obtenus.

Nous consacrons le reste du chapitre à l'introduction d'un modèle non-linéaire simplifié proposé par Rowley [RJ05] à partir de l'équation de Ginzburg-Landau pour l'identification de l'écoulement compressible de cavité. Nous introduisons également le contrôleur à phase dynamique proposé pour le contrôle de ce modèle non-linéaire [RJ05].

### 2.2 Modèle de type Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est l'un des premiers modèles proposés pour produire des oscillations auto-entretenues. Il est particulièrement flexible du fait que tous les paramètres du modèle peuvent être réglés. Néanmoins, il doit être complété par des fonctions de transfert en amont et aval, afin de le rendre le plus proche possible du système réel [LPCC03].

### 2.2.1 Oscillateur de Van der Pol et analyse harmonique

L'oscillateur de Van der Pol a été proposé par Balthasar Van der Pol pour rendre compte des oscillations de relaxation dans les premiers circuits électriques à triodes de Philips. L'équation de Van der Pol peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 2\xi\omega_n\dot{y} + 3ky^2\dot{y} + \omega_n^2y &= 0 \\ \ddot{y} - 2\xi\omega_n\left(1 - \frac{3k}{2\xi\omega_n}y^2\right)\dot{y} + \omega_n^2y &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $\xi$  et  $k$  représentent les paramètres de Van der Pol ajustables en fonction du besoin de l'utilisateur. L'idée de base de Van der Pol est de produire un oscillateur à amortissement négatif, afin de donner naissance à une oscillation d'amplitude exponentiellement croissante, en partant d'un état autre que l'équilibre. Pour prévenir d'une divergence exponentielle, un terme non-linéaire en  $y^2$  est ajouté au terme d'amortissement (voir équation (2.1)) de sorte que lorsque ce dernier croît et devient positif, le mouvement se stabilise dans un état oscillatoire avec une pulsation  $\omega_n$  et une amplitude donnée par :

$$y_{0n} = \sqrt{\frac{8\xi\omega_n}{3k}}. \quad (2.2)$$

Afin de reproduire les phénomènes observés expérimentalement sur des systèmes oscillants et de pouvoir utiliser des lois de commande facile à implémenter, Le Pourhiet se sert de la méthode du premier harmonique. L'analyse du premier harmonique représente une extension de la méthode harmonique classique effectuée pour l'étude des systèmes linéaires aux systèmes à non-linéarité séparable. Son principe s'appuie sur une linéarisation dans le domaine fréquentiel pour permettre une généralisation de la notion de fonction de transfert au cas non-linéaire. Cette extension ne peut être réalisable que sous certaines conditions bien connues :

- la partie linéaire du système étudié se comporte comme un filtre passe-bas ; les harmoniques au-delà de la fréquence d'intérêt  $\omega_n/2\pi$  sont d'amplitude négligeable,
- la partie non-linéaire du système est séparable des autres éléments linéaires.

Pour mener à terme cette analyse sur les systèmes oscillatoires, l'oscillateur de Van der Pol a été soumis à une excitation sinusoïdale  $u = u_0 \sin(\omega t)$  de sorte que l'équation (2.1) devient :

$$\ddot{y} - 2\xi\omega_n\dot{y} + 3ky^2\dot{y} + \omega_n^2y = \dot{u}. \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) peut se mettre sous la forme d'une boucle fermée (voir figure 2.1) comprenant un transfert direct pour le système linéaire instable  $L(s)$  :

$$L(s) = \frac{s}{s^2 - 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.4)$$

qui se comporte comme un filtre passe-bas, et un retour comportant une non-linéarité cubique  $f(y) = ky^3$ .

Si l'on suppose également que  $L(s)$  filtre efficacement les harmoniques au-delà de la fréquence d'excitation  $\omega/2\pi$ , alors on peut dire que la réponse de cet élément, soumis à une excitation sinu-

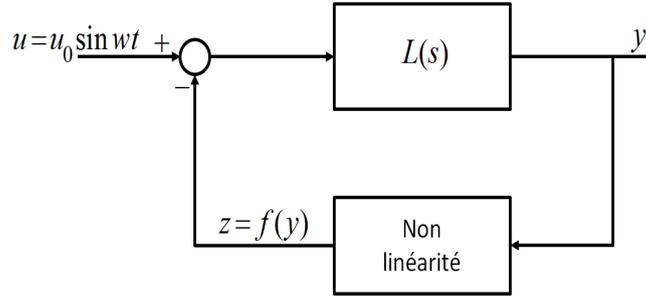


FIGURE 2.1 – Diagramme général d'un oscillateur.

soïdale, est sinusoidale, de même pulsation mais d'amplitude différente et présente généralement un déphasage par rapport à l'excitation :

$$y(t) \simeq y_0 \sin(\omega t + \phi) = V_0 \sin(\omega t) + W_0 \cos(\omega t), \quad (2.5)$$

où  $\phi$  est le déphasage lié à  $L(s)$ .

D'une manière générale, si l'on applique un signal sinusoidal  $y(t)$  à l'élément non-linéaire, le signal de sortie  $z(t)$  (nous considérons la composante continue nulle) pourra se décomposer en série de Fourier, de la forme :

$$z(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} z_k(y_0, \omega) \sin((k+1)\omega t + \phi + \psi_k(y_0, \omega)) \quad (2.6)$$

où  $z_k$  et  $\psi_k$  représentent respectivement l'amplitude et le déphasage liés à la pulsation  $\omega$  et ses harmoniques. Ces paramètres  $z_k$  et  $\psi_k$  dépendent généralement de la fréquence d'excitation.

Grâce au filtre  $L(s)$ , on se permet d'approximer l'expression du signal de sortie  $z(t)$  (voir équation (2.6)) en ne retenant que le terme d'ordre 1 :

$$z(t) \simeq z_0(y_0, \omega) \sin(\omega t + \phi + \psi_0(y_0, \omega)). \quad (2.7)$$

Ainsi, on peut déduire avec aisance le gain complexe équivalent du premier harmonique  $N(y_0, \omega)$ , qui est le rapport entre le signal d'excitation  $y(t)$  et le signal de sortie  $z(t)$  de l'élément non-linéaire :

$$N(y_0, \omega) = \frac{z_0(y_0, \omega)}{y_0} e^{j\psi_0(y_0, \omega)}. \quad (2.8)$$

Lorsque l'on fait face à une non-linéarité sans inertie, c'est-à-dire qui ne dépend pas de la pulsation  $\omega$ , alors on peut écrire :

$$N(y_0, \omega) = N(y_0). \quad (2.9)$$

La non-linéarité  $f(y)$  étant cubique, on peut s'acquitter du calcul de la décomposition en série de Fourier pour extraire le gain du premier harmonique. Selon la méthode de Cypkin, le gain complexe équivalent  $N(y_0)$  pour les fonctions impaires univoques peut être retrouvé par la relation :

$$N(y_0) = \frac{2}{3y_0} \left( f(y_0) + f\left(\frac{y_0}{2}\right) \right). \quad (2.10)$$

Ainsi, le gain complexe équivalent pour une fonction cubique avec une excitation sinusoidale est donné comme suit :

$$N(y_0) = \frac{3}{4}ky_0^2. \quad (2.11)$$

Notons également qu'une fonction non-linéaire cubique renforce l'hypothèse de l'approximation du premier harmonique, car en effectuant un développement du terme cubique :

$$\sin^3(\omega t) = 0.75 \sin(\omega t) - 0.25 \sin(3\omega t),$$

nous voyons que l'amplitude du troisième harmonique  $3\omega$  est trois fois inférieure à celle du premier  $\omega$ . De plus, cet harmonique sera atténué par le filtre linéaire  $L(s)$ . Donc, on peut se permettre d'écrire :

$$\sin^3(\omega t) \simeq 0.75 \sin(\omega t).$$

Grâce aux simplifications apportées par l'approximation en premier harmonique, l'équation (2.3) peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert :

$$\frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{L(j\omega)}{1 + N(y_0)L(j\omega)}. \quad (2.12)$$

### 2.2.1.1 Condition d'auto-oscillation

Si le système entre dans un régime d'oscillations auto-entretenues, en l'absence et sans présence d'excitation  $u(t)$ , alors on obtient la condition nécessaire d'auto-oscillation par annulation du dénominateur de la fonction de transfert (2.12) :

$$1 + N(y_0)L(j\omega) = 0. \quad (2.13)$$

Cette équation fournit la pulsation  $\omega_n$  et l'amplitude  $y_{0n}$  de l'oscillation auto entretenue. Elle peut être réécrite sous la forme :

$$L(j\omega) = -\frac{1}{N(y_0)}, \quad (2.14)$$

qui est facile à interpréter graphiquement dans le plan complexe.  $-1/N(y_0)$  est appelé *lieu critique* de la fonction non-linéaire  $f$ . Il représente une généralisation du point critique dans l'étude des systèmes linéaires. L'intersection entre le lieu critique  $-1/N(y_0)$  et  $L(j\omega)$  fournit les paramètres caractérisant une auto-oscillation,  $\omega_n$  et  $y_{0n}$ . Dans le plan de phase  $(y, dy/dt)$  cette oscillation correspond à un cycle limite stable ou instable.

La figure 2.2 illustre l'analyse dans le plan complexe, lieu critique d'une fonction non-linéaire quelconque rencontrant le lieu de Nyquist d'un filtre linéaire  $L(s)$  en un point  $M(\omega_n, y_{0n})$ . Notons également qu'il peut exister plusieurs intersections entre le lieu critique et  $L(s)$ . Cela dépendra de la non-linéarité et du filtre linéaire  $L(s)$  utilisés. Les intersections correspondent alors à des oscillations pouvant être stables et/ou instables.

Concernant la fonction non-linéaire cubique  $f$ , le gain complexe équivalent  $N(y_0)$  est réel. Le lieu critique dans le plan de Nyquist de l'oscillateur de Van der Pol est représenté sur la figure 2.3, il se trace alors aisément en faisant varier  $y_0$  de 0 à  $+\infty$ .

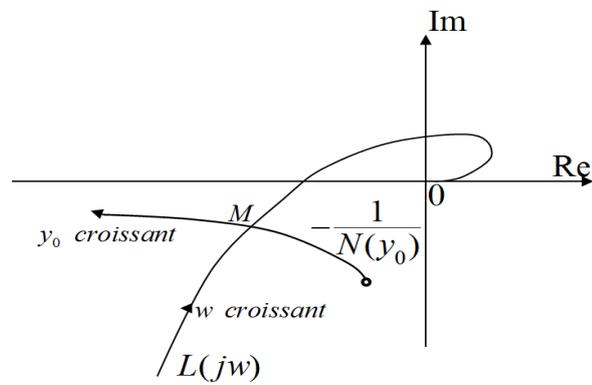


FIGURE 2.2 – Vue générale d'un lieu critique d'un système quelconque.

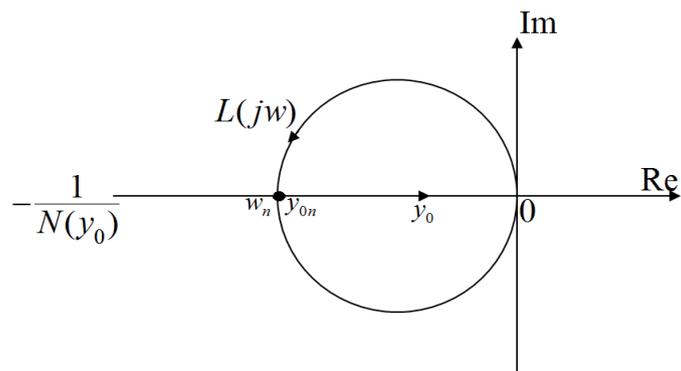


FIGURE 2.3 – Lieu critique d'une fonction non-linéaire cubique dans le plan de Nyquist et le tracé du filtre  $L(s)$  issu de l'oscillateur de Van der Pol.

### 2.2.1.2 Étude de la stabilité d'une auto-oscillation

**Définition 1** Une auto-oscillation est dite stable si, en apportant au système une excitation courte dans le temps, le système revient vers son état initial (même amplitude et pulsation).

Cette définition est réductrice mais elle sert de base à l'analyse de stabilité du cycle limite.

Il est nécessaire d'introduire un critère mathématique à partir de la définition pour pouvoir statuer sur la stabilité d'une oscillation. L'équation (2.13) fournit la condition nécessaire d'auto-oscillation et elle peut être mise sous une forme complexe utile à l'étude de la stabilité, comme suit :

$$X(y_{0n}, \omega) + jY(y_{0n}, \omega) = 0, \quad (2.15)$$

où  $X(y_{0n}, \omega_n)$  et  $Y(y_{0n}, \omega_n)$  représentent les parties réelle et imaginaire de l'équation (2.13). La condition d'auto-oscillation devient alors :

$$\begin{cases} X(y_{0n}, \omega_n) = 0 \\ Y(y_{0n}, \omega_n) = 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

La solution de cette équation représente le point d'intersection  $M(y_{0n}, \omega_n)$  (voir figure 2.3). En se plaçant sur ce point et en l'absence d'excitation externe, la sortie du système  $y(t)$  se résume à une oscillation sinusoïdale. En notation complexe elle s'écrit :

$$y(t) = y_{0n} e^{j\omega_n t}. \quad (2.17)$$

Dans le cas où une petite variation  $(y_{0n} + \delta y, \omega_n + \delta \omega)$  est introduite, la sortie  $y(t)$  est alors donnée par :

$$y(t) = (y_{0n} + \delta y) e^{j(\omega_n + \delta \omega)t} e^{-mt}, \quad (2.18)$$

où  $\delta y$  et  $\delta \omega$  représentent respectivement la variation d'amplitude et la variation de pulsation, et  $m$  représente l'amortissement. Pour que l'oscillation revienne à son état initial,  $\delta y$  et  $m$  doivent être de même signe. Formellement, on considère que  $y(t)$  (équation (2.18)) oscille à une pulsation complexe  $\omega_n + \delta \omega + jm$ . Donc, la condition d'auto-oscillation est satisfaite au point  $M(y_{0n}, \omega_n)$  et on a alors :

$$X(y_{0n} + \delta y, \omega_n + \delta \omega + jm) + jY(y_{0n} + \delta y, \omega_n + \delta \omega + jm) = 0. \quad (2.19)$$

En effectuant le développement limité au premier ordre tout en tenant compte de l'équation 2.16 on arrive à :

$$\frac{\partial X}{\partial y_{0n}} \delta y + \frac{\partial X}{\partial \omega_n} (\delta \omega + jm) + j \frac{\partial Y}{\partial y_{0n}} \delta y + j \frac{\partial Y}{\partial \omega_n} (\delta \omega + jm) \simeq 0. \quad (2.20)$$

En regroupant les termes réels et imaginaires, on arrive à ce système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial y_{0n}} \delta y + \frac{\partial X}{\partial \omega_n} \delta \omega - \frac{\partial Y}{\partial \omega_n} m = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y_{0n}} \delta y + \frac{\partial Y}{\partial \omega_n} \delta \omega + \frac{\partial X}{\partial \omega_n} m = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

En effectuant quelques manipulations, on obtient la condition à satisfaire pour que l'oscillation soit stable :

$$\frac{\partial X}{\partial y_{0n}} \frac{\partial Y}{\partial \omega_n} - \frac{\partial X}{\partial \omega_n} \frac{\partial Y}{\partial y_{0n}} > 0. \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Analyse harmonique de l'oscillateur de Van der Pol forcé

Il est utile d'analyser l'oscillateur de Van der Pol forcé (voir l'équation (2.3)) afin de donner les conditions nécessaires de stabilité des oscillations dans le cas d'une excitation sinusoïdale, à fréquence et amplitude données. Pour effectuer cette analyse, nous devons extraire l'amplitude et la phase des oscillations qui représentent les paramètres d'évolution de la sortie en régime permanent, connues sous le nom de "solution particulière".

#### 2.2.2.1 Solution particulière

Avant d'extraire la solution en régime permanent, il faut noter que :

$$\begin{aligned} 3ky^2\dot{y} &= \frac{df(y)}{dt} = \frac{dky^3}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{4}ky_0^3 \sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{4}ky_0^3 \sin(3\omega t + \phi) \right) \\ &\simeq \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{4}ky_0^2 \underbrace{y_0 \sin(\omega t + \phi)}_{y(t)} \right) \simeq \frac{3}{4}ky_0^2\dot{y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En appliquant la transformée de fourrier sur l'équation (2.3) et en tenant compte de l'approximation (2.23), on obtient la transformée de fourrier de la boucle fermée, notée  $H_v$  :

$$\mathcal{TF}(H_v) = \frac{j\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(-2\xi\omega_n\omega + \frac{3}{4}k\omega y_0^2)}. \quad (2.24)$$

La solution particulière  $y(t)$  de l'oscillateur forcé est donnée par :

$$y(t) = F \cos(\omega t + \phi_1), \quad (2.25)$$

avec

$$\begin{cases} F &= |\mathcal{TF}(H_v)|u_0 = \frac{u_0\omega}{\sqrt{(\frac{3}{4}k\omega y_0^2 - 2\xi\omega_n\omega)^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}} \\ \phi_1 &= \arg(\mathcal{TF}(H_v)) = -\arctan\left(\frac{-2\xi\omega_n\omega + \frac{3}{4}k\omega y_0^2}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \end{cases}$$

À partir des équations (2.5) et (2.25), on déduit :

$$|F|^2 = y_0^2, \quad (2.26)$$

et

$$y_0^2 = \frac{(u_0\omega)^2}{(\frac{3}{4}k\omega y_0^2 - 2\xi\omega_n\omega)^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}. \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \frac{A^2}{(\rho - 1)^2 + \sigma^2} \quad (2.28)$$

où  $\rho$ ,  $A$  et  $\sigma$  représentent des variables sans dimension utiles à l'établissement des conditions de stabilité [LPCC03], données par :

$$\rho = \frac{3k}{8\xi\omega_n} (V_0^2 + W_0^2) = \frac{3k}{8\xi\omega_n} y_0^2 = \left( \frac{y_0}{y_{0n}} \right)^2 \quad (2.29)$$

$$A^2 = \frac{3ku_0^2}{32\xi^3\omega_n^3} \quad (2.30)$$

$$\sigma = \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2\xi\omega\omega_n} \quad (2.31)$$

L'auto-oscillation correspond alors à  $\rho = 1$ ,  $A^2 = 0$  et  $\sigma = 0$ .

Les conditions de stabilité de l'oscillateur forcé s'écrivent alors :

$$(3\rho - 1)(\rho - 1) + \sigma^2 > 0 \quad (2.32)$$

$$\rho > 0.5 \quad (2.33)$$

Pour plus de détail voir [LPCC03, LPLM70, LPP71].

On peut montrer que  $\rho$  représente une fonction croissante de  $A^2$  en dehors de l'ellipse  $(3\rho - 1)(\rho - 1) + \sigma^2 = 0$ . L'équation (2.33) implique l'existence d'un seuil pour  $A^2$  et par conséquent pour  $u_0$ , en dessous duquel la pulsation d'excitation  $\omega$  ne peut pas apparaître seule sur le spectre de sortie. Son amplitude et sa pulsation restent confuses avec l'oscillation auto-entretenu  $\omega_n$ . Au-dessus de ce seuil, la pulsation  $\omega_n$  est étouffée et seulement la pulsation  $\omega$  apparaît. Pour une analyse plus physique de ce battement de pulsations, voir [Car48].

Pour une pulsation d'excitation  $\omega = \omega_n$ , le seuil de synchronisation est nul.

### 2.2.3 Identification du modèle de l'oscillateur à partir des résultats expérimentaux

Une fois les oscillations auto-entretenu modélisées, ici par un oscillateur de Van der Pol, nous ajoutons une fonction de transfert  $F_1(s)$  en entrée de l'oscillateur, une fonction de transfert  $F_2(s)$  en sortie, afin de pouvoir rendre correctement compte du transfert total entre l'entrée et la sortie de l'écoulement de cavité (voir figure 2.4a). Ces fonctions, ainsi que les paramètres de Van der Pol  $\xi$  et  $k$ , sont identifiés ensemble par une procédure itérative jusqu'à ce que la sortie  $Y(t)$ , en réponse à une excitation sinusoïdale  $E = E_0 \sin(\omega t)$ , corresponde à la sortie mesurée (expérimentalement) en réponse à la même excitation. Notons que le modèle de Van der Pol ne prend pas en compte la valeur moyenne de  $Y(t)$ .

La pulsation naturelle  $\omega_n$  est généralement connue. Dans notre cas d'étude elle est donnée par

$\omega_n = 2\pi f_2$ , où  $f_2$  est la fréquence d'oscillation de la cavité extraite de la formule de Rossiter (1.11). L'identification de  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$  et les paramètres de l'oscillateur de Van der Pol sont principalement liées à l'ajustement de l'amplitude d'excitation  $E_0$ , nommée seuil de synchronisation et notée  $E_{0s}$ , au delà duquel la fréquence d'excitation est la plus dominante dans le spectre de la mesure. Si le seuil de synchronisation  $E_{0s}(\omega)$  est mesuré expérimentalement, nous écrivons :

$$\|F_1(\omega)\| = u_{0s}(\omega, \xi/k, \xi)/E_{0s}(\omega). \quad (2.34)$$

Nous commençons cette procédure d'identification itérative à partir des valeurs de  $E_{0s}$ ,  $\xi$ ,  $\xi/k$  et  $\omega$  données. Nous avons :

$$u_0 = E_{0s} \|F_1(j\omega)\|. \quad (2.35)$$

À partir de l'équation (2.30) nous obtenons  $A^2$ , ainsi nous pouvons déduire  $\rho$  et  $y_0$  facilement des équations (2.28), (2.2) et (2.29). Finalement, le gain d'oscillation est calculé à partir de l'équation (2.12) :

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{L(j\omega)}{1 + 0.75ky_0^2L(j\omega)} \equiv H(y_0, j\omega). \quad (2.36)$$

Posons  $E = E_{0s} \sin(\omega t)$  le signal d'entrée et  $Y_{mes} \sin(\omega t + \phi_{mes})$  le premier harmonique du signal de sortie  $Y(t)$  mesuré. L'identité complexe :

$$\frac{Y(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{Y}{E} / \left( \frac{y}{u} \frac{u}{E} \right) \quad (2.37)$$

donne au final :

$$\|F_2(j\omega)\| = \frac{Y_{mes}}{E_{0s}} \frac{1}{\|H(y_0, j\omega)\|} \frac{1}{\|F_1(j\omega)\|}, \quad (2.38)$$

$$\arg [F_2(j\omega)] = \phi_{mes} - \arg [H(y_0, j\omega)] - \arg [F_1(\omega)]. \quad (2.39)$$

Lorsque  $F_2(s)$  est identifié à partir des équations (2.38) et (2.39), la relation  $Y_{0n} = \|F_2(j\omega_n)\| y_{0n}$  et l'équation (2.2) donnent la nouvelle valeur de  $\xi/k$  :

$$\frac{\xi}{k} = \frac{3}{8\omega_n} \left[ \frac{Y_{0n}}{\|F_2(j\omega_n)\|} \right]^2. \quad (2.40)$$

On lance tout d'abord la procédure itérative de calcul précédemment décrite pour un  $\xi$  fixe jusqu'à ce que le rapport  $\xi/k$  converge. Il faut alors comparer le seuil de synchronisation de ce modèle, identifié à celui du modèle expérimental. S'ils sont différents, la procédure est alors répétée à partir d'une nouvelle valeur de  $\xi$ . Le modèle mathématique est alors représentatif de la réalité expérimentale, et il peut être utilisé pour établir une loi de commande.

Les résultats de cette stratégie d'identification pour l'écoulement de cavité sont présentés dans la partie 2.2.5.

#### 2.2.4 Synthèse d'une loi de commande

Lorsque le système est dans son régime permanent d'oscillations auto-entretenu sans excitation ( $E = 0$ ), l'objectif est de trouver un correcteur  $K(s)$  avec un retour négatif pour supprimer ces

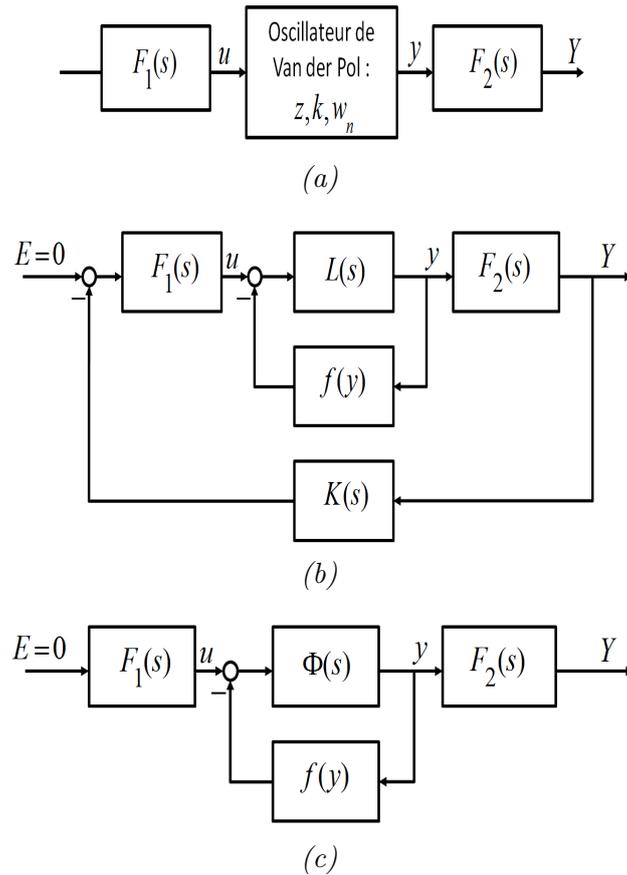


FIGURE 2.4 – Description de la procédure d'identification et de contrôle à base de l'oscillateur de Van der Pol proposée par Le Pourhiet : (a) Modèle de Van der Pol renforcé par des fonctions de transfert en amont et aval, (b) Modèle bouclé par un contrôleur  $K(s)$  et (c) Modèle équivalent.

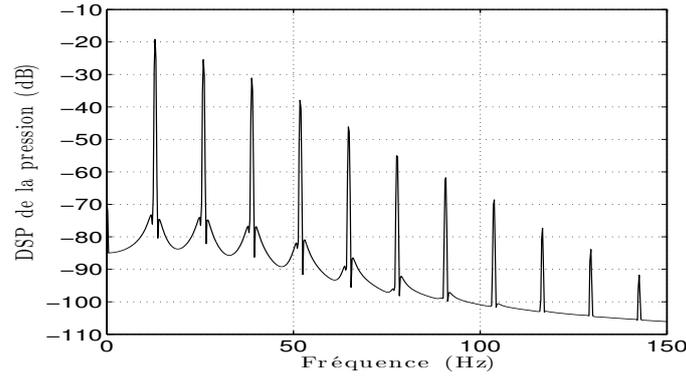


FIGURE 2.5 – Densité spectrale de puissance de la pression au niveau impactant d’une cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$  m) et d’un rapport de forme  $L/D = 2$  : la fréquence principale d’oscillation  $f_2 = 12.94$  Hz et ses harmoniques.

oscillations, comme illustré sur la figure 2.4b. Pour un régime sinusoïdal, le gain complexe s’écrit :

$$\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = F_1(j\omega) \frac{\Phi(j\omega)}{1 + N(y_0)\Phi(j\omega)} F_2(j\omega), \quad (2.41)$$

avec

$$\Phi(s) = \frac{L(s)}{1 + K(s)L(s)F_1(s)F_2(s)} \quad (2.42)$$

Nous pouvons montrer que le système de la figure 2.4c est équivalent à celui de la figure 2.4b. En introduisant le correcteur  $K(s)$ , le système initial, avec transfert direct  $L(s)$  et retour non-linéaire  $f(y(t))$ , est remplacé par un retour direct  $\Phi(s)$  avec la même non-linéarité en retour.

Pour éliminer les oscillations,  $K(s)$  doit être choisi pour que le nouveau système équivalent n’oscille plus. Plus précisément,  $K(s)$  est choisi de sorte que le tracé de Nyquist de  $\Phi(s)$  ne coupe plus le lieu critique  $-1/N(y_0)$ . En d’autres termes, la phase de  $\Phi(j\omega)$  doit être différente de  $\pi$ , quelle que soit la fréquence. Une condition suffisante pour que la phase de la fonction de transfert soit différente de  $\pi$ , est que cette fonction soit stable (c’est-à-dire, la partie réelle de ses pôles doit être négative) et que le degré relatif entre le numérateur et le dénominateur n’excède pas deux. L’équation (2.42) montre que  $\Phi(s)$  est équivalent à  $L(s)$  bouclé par un retour  $K(s)F_1(s)F_2(s)$ . Donc, pour que  $\Phi(s)$  soit stable, le tracé de Nichols de  $K(s)L(s)F_1(s)F_2(s)$  ne doit pas entourer le point critique ( $180^\circ$ , 0 dB). Les marges de gain et de phase doivent être suffisante pour assurer une meilleure sensibilité aux incertitudes paramétriques.

### 2.2.5 Application à l’écoulement de cavité

Nous appliquons cette procédure de modélisation à un écoulement de cavité à  $Re = 7500$ , avec une épaisseur de quantité de mouvement  $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$  m où la fréquence naturelle d’oscillation de la pression est  $f_2 = 12.94$  Hz (voir figure 2.5). Nous appliquons en entrée de cet écoulement des excitations sinusoïdales avec plusieurs amplitudes et fréquences. Nous avons constaté que le seuil n’était pas évident à trouver en raison de la nature fortement non-linéaire de l’écoulement de cavité. Nous avons pu exciter l’écoulement aux fréquences 11.5, 13, 15, 17 et 18 Hz, avec une amplitude  $E_0 = 2.5$  mais il n’a pas été possible d’exciter à d’autres fréquences ni de choisir des amplitudes

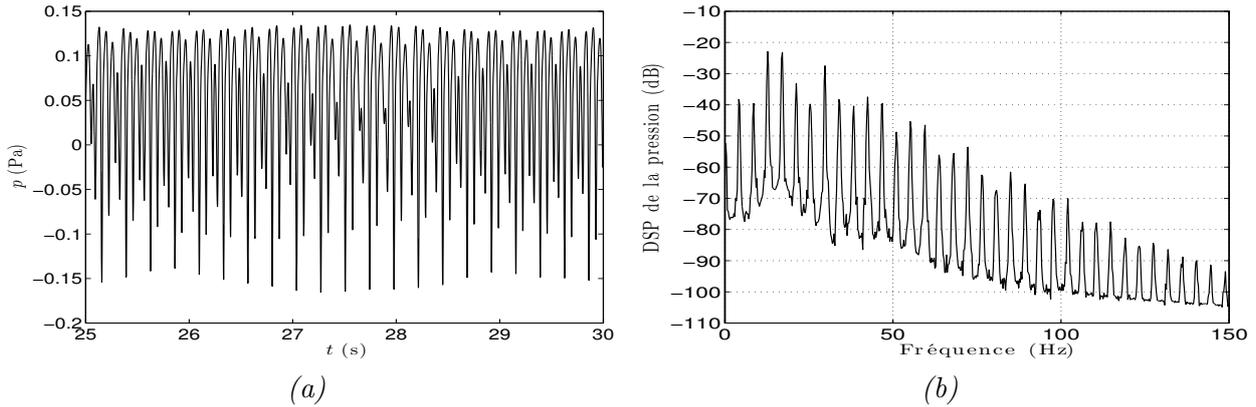


FIGURE 2.6 – Réponse d'une cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$  m) à une excitation  $E = 2 \sin(2\pi f_e t)$  où  $f_e = 17$  Hz : (a) Évolution temporelle de pression au niveau impactant (b) Densité spectrale où les fréquences d'oscillation les plus dominantes sont  $f_2$  et  $f_e$ .

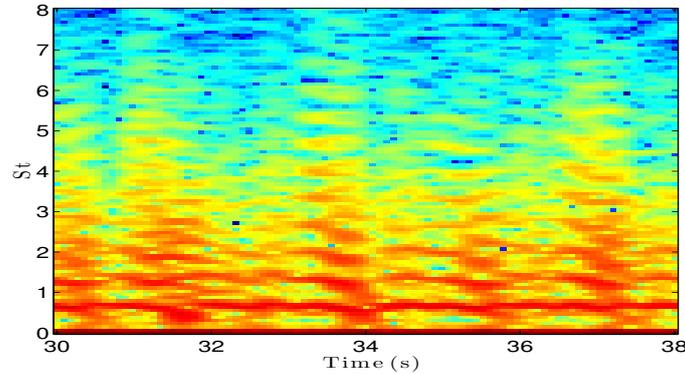


FIGURE 2.7 – Spectrogramme de la pression au niveau impactant d'une cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$  m) et d'un rapport de forme  $L/D = 2$  excitée par  $E = 10 \sin(2\pi f_e t)$  où  $f_e = 10$  Hz.

plus élevées. La gamme de fréquence et le choix du seuil de synchronisation sont en fait restreints car au-delà de l'amplitude  $e_{0s} = 2.5$  (pour certaines fréquences d'excitation), l'évolution de la pression au niveau impactant est fortement perturbée et la cavité ne "sélectionne" durablement aucune fréquence (voir la figure 2.7). Le critère de synchronisation repose sur la disparition de la fréquence  $\omega_n/2\pi$  dans l'analyse spectrale. Nous avons en fait considéré que la synchronisation était réalisée lorsque cette fréquence  $\omega_n/2\pi$  est extrêmement faible devant la fréquence d'excitation  $\omega/2\pi$  sur le spectre de la mesure. La figure 2.6 représente l'évolution de la pression. Sur cette figure, le lecteur peut voir qu'il y a un battement de fréquences, c'est-à-dire lorsque l'on applique une excitation sinusoïdale avec une amplitude  $E_0$  en dessous du seuil de synchronisation.

Le tableau 2.1, illustre l'amplitude du premier harmonique  $\omega = 2\pi f_e$  présent sur le spectre de la pression lorsqu'une excitation  $E = E_{0s} \sin(\omega t)$  est appliquée, ainsi que son déphasage par rapport à la même excitation.

Notons que pour la plupart des excitations appliquées, le rapport d'amplitude entre le fondamental  $\omega$  (extrait de la mesure) et son premier harmonique est de l'ordre de 0.4 sauf pour  $f_e = 18$  Hz, où il est de l'ordre de 0.25. Cette observation valide l'analyse en premier harmonique.

Fréquences $f_e$ (Hz)	11.5	13	15	17	18
Amplitude du premier Harmonique $f_e$	0.0588	0.0724	0.0894	0.0773	0.0795
Déphasage $\phi_{mes}$ (rad)	0.4012	0.7157	1.6171	0.1138	2.2573

TABLE 2.1 – Amplitude du premier harmonique et son déphasage pour une excitation sinusoïdale ( $E_0 = 2.5$ ) extraits du spectre de la pression au niveau impactant.

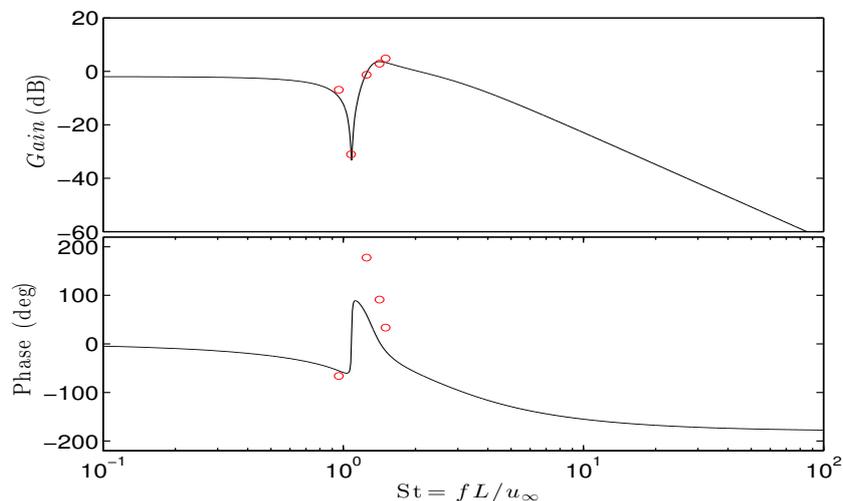


FIGURE 2.8 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $F_2(s)$  identifié en utilisant des excitations avec  $E_{0s} = 2.5$  : phase et amplitude extraites des équations (2.38) et (2.39) ( $\circ$ ) ; La réponse fréquentielle d'un modèle  $F_2(s)$  (—) identifié à partir d'une optimisation sur les phase et les gains identifiés.

Notons que l'identification de  $F_1(s)$  est théoriquement liée à l'identification du seuil de synchronisation. Comme dans [LPCC03], nous avons choisi  $F_1(s) = 1$  en gardant à l'esprit que cette simplification peut introduire des erreurs paramétriques d'identification, qui pourraient être compensées par des marges de stabilité suffisamment larges lors de la synthèse d'un correcteur  $K(s)$ .

La figure 2.8 représente les gains et les phases de la fonction de transfert  $F_2(s)$  (marqués par  $\circ$ ) qui correspondent à chaque fréquence d'excitation, déduits des équations (2.38) et (2.39). A partir de ces informations (gain et phase), nous avons proposé une représentation stable de  $F_2(s)$  en utilisant le critère (1.22), avec

$$F_2(\omega) = \left( \frac{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_1} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_1^2}} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\xi_f}{\omega_f} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_f^2}}. \quad (2.43)$$

Le second ordre à droite de l'expression de  $F_2(s)$  permet d'assurer le comportement passe-bas pour les fréquences au-delà du deuxième harmonique de la fréquence d'oscillation de la cavité.

Ainsi, la réponse fréquentielle de  $F_2(s)$  extraite à partir du critère d'optimisation (1.22), en nous basant sur les gains et les phases obtenus de la procédure décrite dans la section 2.2.3, est présentée sur la figure 2.8. Les paramètres identifiés à partir de cette procédure sont :

$$\xi = 0.01, \quad \xi/k = 0.0402.$$

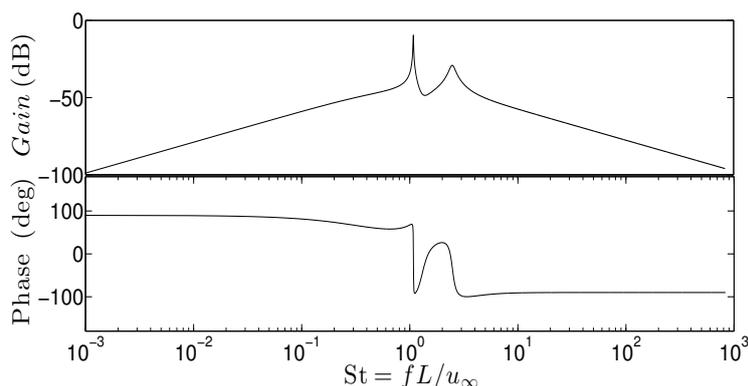


FIGURE 2.9 – Amplitude et phase de  $\Phi(s)$ .

Nous avons validé le modèle en comparant l'amplitude du premier harmonique du spectre de sortie du modèle à celui de la mesure en réponse à des excitations sinusoïdales avec  $e_0 = 2.5$ . Pour les excitations 13, 15, 17 et 18 Hz, leurs amplitudes sont proches de celles de la mesure. Ce n'est pas le cas pour l'excitation 11.5 Hz, qui n'est pas dominante dans le spectre de sortie du modèle. Malgré cette légère incohérence, nous avons gardé ce modèle pour la synthèse d'un contrôleur.

Un correcteur PID  $K(s)$  a été synthétisé afin de stabiliser ce modèle en suivant les consignes données dans la section 2.2.4. Cette stabilisation revient à trouver un correcteur  $K(s)$  tel que la phase  $\Phi(s)$  soit différente à  $\pi$  pour toute fréquence. En utilisant la méthode heuristique de Ziegler–Nichols du point critique [ZN42] qui revient à amener le système vers sa limite de stabilité, les coefficients du correcteur  $K(s)$  ont été trouvés :

$$K(s) = 170 + \frac{0.4}{s} + \frac{377s}{s + 188.5}.$$

La figure 2.9 représente la réponse fréquentielle de  $\Phi(s)$ . Il est clair que la phase n'excède jamais  $180^\circ$ .

Nous voyons que ce correcteur  $K(s)$  est efficace à la stabilisation des oscillations auto-entretenues du modèle identifié (voir figure 2.10a). Cependant, lorsque  $K(s)$  est appliqué à des simulations numériques directes de l'écoulement, il échoue à stabiliser la cavité, comme nous pouvons l'apercevoir sur l'évolution temporelle de la pression au niveau impactant (figure 2.10b). Cette observation nous apprend que cette démarche d'identification échoue à extraire la dynamique responsable de la naissance des instabilités dans la couche de cisaillement. Il est donc nécessaire de trouver une autre méthode d'identification. Nous apercevons dans le chapitre 5 que cet échec est principalement dû à la dynamique de cavité étudiée qui comporte deux modes instables. Le modèle de Van der Pol ne peut par contre prendre en compte qu'une seule bifurcation de Hopf.

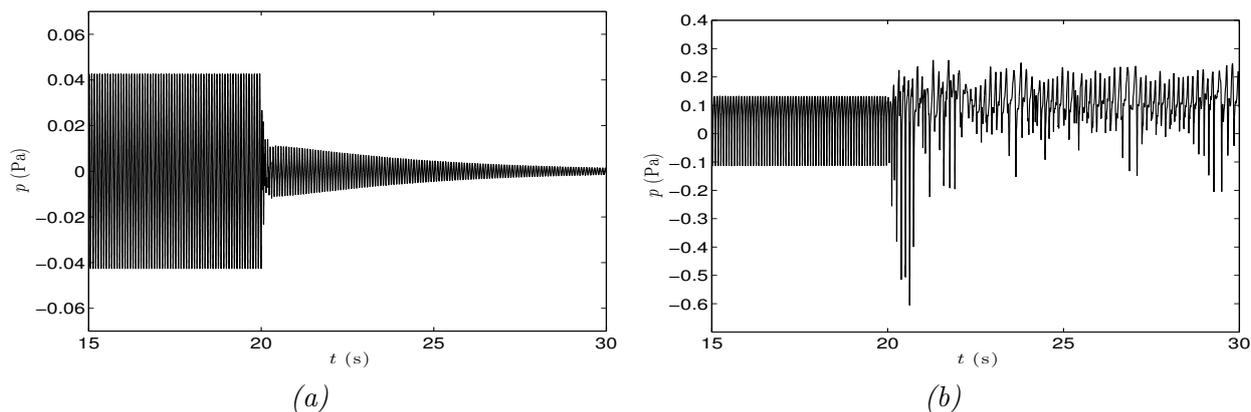


FIGURE 2.10 – Implémentation du correcteur  $K(s)$  en boucle fermée à  $t = 20$  s : (a) sur le modèle identifié par la méthode proposée par Le Pourhiet (b) ainsi qu'en simulation numérique directe pour un écoulement de cavité à  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.12 \times 10^{-4}$  m.

## 2.3 Modèle à phase dynamique

### 2.3.1 Modélisation

Dans cette partie nous présentons une démarche d'identification et de contrôle non-linéaire développée par Rowley [RJ05] connue sous le nom de "modèle à phase dynamique". Cette démarche est inspirée du travail de Tadmor et Noack [TND<sup>+</sup>03, TNMS04, NAM<sup>+</sup>03, NTM04]. Elle ignore complètement les équations de Navier-Stokes et fournit un modèle d'ordre réduit qui capte la dynamique non-linéaire de l'écoulement.

L'équation complexe de Ginzburg-Landau cubique a été introduite par Newell et Whitehead [NW69] comme une équation de modulation d'amplitude. Si  $q(x, t)$  est l'amplitude complexe, où  $x$  est ici une variable d'espace pour un problème 1D, l'équation de Ginzburg-Landau peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c_g \frac{\partial q}{\partial x} = (\sigma_g + j\omega_n)q + \xi^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \alpha|q|^2 q \quad (2.44)$$

où  $c_g$ ,  $\xi^2$  et  $\sigma_g$  représentent respectivement la vitesse de groupe du paquet d'onde, le paramètre complexe de diffraction et le taux d'amplification. Le terme non-linéaire  $-\alpha|q|^2 q$  est le terme non-linéaire d'ordre le plus bas qui sature la croissance  $q$  tout en respectant les symétries du système [SSO87]. Dans la suite, les dérivées spatiales dans l'équation (2.44) sont considérées nulles, car nous considérons un phénomène global qui ne dépend pas du temps. Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (\sigma_g + j\omega_n)q - \alpha|q|^2 q, \quad (2.45)$$

En notant  $q = r e^{j\phi_\omega}$ , l'équation (2.45) devient :

$$\dot{r} + jr\dot{\phi}_\omega = (\sigma_g + j\omega_n)r - \alpha r^3, \quad (2.46)$$

que l'on peut réécrire sous forme d'un système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \sigma_g r - \alpha r^3 \\ \dot{\phi}_\omega &= \omega_n \end{cases} . \quad (2.47)$$

Ce système dynamique simple décrit les oscillations à une pulsation  $\omega_n$  en coordonnées polaires. Lorsque  $\sigma_g \leq 0$  l'origine ( $r = 0, \phi_\omega = 0$ ) est globalement asymptotiquement stable. Si  $\sigma_g > 0$  l'origine est instable via une bifurcation de Hopf qui engendre l'apparition d'un cycle limite stable d'amplitude  $r = \sqrt{\sigma_g/\alpha}$ . En coordonnées cartésiennes, et en posant :

$$(a_1, a_2) = (r \cos(\phi_\omega), r \sin(\phi_\omega)) . \quad (2.48)$$

le système d'équations (2.47) peut s'écrire :

$$\dot{a} = A(r)a, \quad (2.49)$$

où  $a = (a_1, a_2)$ ,  $r = |a|$  et

$$A(r) = \begin{pmatrix} \sigma_g - \alpha r^2 & -\omega_n \\ \omega_n & \sigma_g - \alpha r^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

**Remarque 2** *Les paramètres  $\sigma_g$  et  $\alpha$  sont réglés afin de reproduire la configuration expérimentale. Ceci s'effectue en observant la croissance transitoire des oscillations (de pression) à partir d'une condition initiale proche du point d'équilibre instable de Navier-Stokes. Pour avoir une estimation correcte de ces paramètres, il est nécessaire d'avoir un correcteur stabilisant le point d'équilibre instable afin de ramener l'écoulement sur l'état de base. Puis, l'action du contrôle sera suspendue pour laisser croître les oscillations.*

Le modèle (2.49) sert à décrire la dynamique prépondérante d'un écoulement de fluide où les oscillations auto-entretenués sont observées. Rowley ajoute au modèle un terme  $u(t)$  qui modélise la commande. Le modèle final prend l'allure suivante :

$$\dot{a} = A(r)a + Bu, \quad (2.51)$$

où la matrice de commande  $B$  est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} .$$

Les paramètres de commande  $b_1$  et  $b_2$  sont identifiés à partir des simulations numériques de l'écoulement soumis à une excitation sinusoïdale de faible amplitude et de pulsation proche de la pulsation naturelle  $\omega_n$ .

### 2.3.2 Synthèse d'une loi de commande

Après [TNMS04], Rowley [RJ05] propose un contrôle sinusoïdal à la fréquence d'oscillation de l'écoulement avec un choix approprié de la phase et une amplitude qui varie lentement. Ce choix de commande a été effectué afin de rester dans le domaine de validité du modèle proposé. En coordonnées polaires, l'équation (2.51) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= (\sigma_g - \alpha r^2)r + (b_1 \cos(\phi_\omega) + b_2 \sin(\phi_\omega)) u \\ \dot{\phi}_\omega &= \omega_n + \frac{1}{r} (b_2 \cos(\phi_\omega) - b_1 \sin(\phi_\omega)) u \end{cases} \quad (2.52)$$

Choisissons  $u$  comme :

$$u = r_c \cos(\phi_\omega - \phi_c), \quad (2.53)$$

où  $\phi_c$  et  $r_c$  sont les paramètres de contrôle qui doivent être choisis soigneusement.

Supposons que  $r$  varie lentement et que la commande  $u$  reste de petite amplitude, l'équation moyenne de l'équation (2.52) sur  $\phi_\omega \in [0, 2\pi]$  s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} &= (\sigma_g - \alpha r^2)r + g_r \\ \dot{\phi}_\omega &= \omega_n + \frac{g_\phi}{r} \end{cases}, \quad (2.54)$$

avec

$$\begin{cases} g_r &= \frac{r_c}{2} (b_1 \cos(\phi_c) + b_2 \sin(\phi_c)) \\ g_\phi &= \frac{r_c}{2} (b_2 \cos(\phi_c) - b_1 \sin(\phi_c)) \end{cases}.$$

Pour de plus amples détails sur l'équation moyennée voir [RJ05, GH83].

Si  $\dot{r}$  et  $\dot{\phi}_\omega - \omega$  sont petits d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  (négligeable), alors la théorie de la moyenne dit que les solutions de l'équation (2.54) sont proches à l' $\mathcal{O}(\varepsilon)$  des solutions de l'équation (2.52) pour un temps  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ . Alors, pour le choix suivant de  $\phi_c$  :

$$\cos(\phi_c) = \frac{b_1}{|b|}, \quad \sin(\phi_c) = \frac{b_2}{|b|}, \quad (2.55)$$

on obtient :

$$g_r = r_c \frac{b}{2}, \quad g_\phi = 0. \quad (2.56)$$

Un choix possible pour  $r_c$  est alors :

$$r_c = -2\kappa r / |b|, \quad (2.57)$$

pour lequel l'équation moyennée (2.54) en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= (\sigma_g - \kappa - \alpha r^2)r \\ \dot{\phi}_\omega &= \omega_n \end{cases}. \quad (2.58)$$

En choisissant  $0 < \kappa < \sigma_r$ , l'amplitude de l'orbite périodique décroît à  $\sqrt{(\sigma_g - \kappa)/\alpha}$ . Si  $\kappa > \sigma_g$ , alors l'origine devient globalement tractable, au moins pour le modèle. Cependant, pour une synthèse d'un correcteur en configuration expérimentale nous devons choisir soigneusement  $\kappa$  pour ne pas avoir une commande de forte amplitude qui pourrait amener la cavité vers un autre régime (par conséquent sortir de la gamme de validité du modèle).

### 2.3.3 Synthèse d'un observateur

Nous avons besoin de l'estimation de la valeur de l'enveloppe des oscillations  $r$  et de l'estimation de  $\theta$  pour pouvoir implémenter la loi de commande présentée précédemment. [RJ05] propose un estimateur linéaire en supposant que  $\dot{r} = 0$  dans l'équation (2.54), il obtient un observateur de la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} (\eta - \hat{a}_1), \quad (2.59)$$

où  $\eta$  représente la mesure issue du capteur. Dans le cas de l'écoulement de cavité, elle représente la mesure de la pression au point impactant. Sans présence de commande ni de correction, l'observateur (2.59) devra estimer les oscillations de pulsation  $\omega_n$ .

La dynamique d'estimation est évaluée à partir de l'erreur d'estimation  $(e_1, e_2)$  :

$$e_1 = a_1 - \hat{a}_1, \quad e_2 = a_2 - \hat{a}_2 \quad (2.60)$$

En soustrayant (2.59) de (2.51) lors du régime permanent, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= -\omega_n e_2 - L_1 e_1 \\ \dot{e}_2 &= \omega_n e_1 - L_2 e_1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Ainsi, nous pouvons obtenir facilement la dynamique de  $e_1$

$$\ddot{e}_1 = -L_1 \dot{e}_1 - (\omega_n^2 - \omega_n L_2) e_1 \quad (2.62)$$

L'idée est d'avoir une erreur d'estimation qui asymptotiquement s'annule. Cet objectif est atteint par un choix approprié de  $L_1$  et  $L_2$  comme a été reporté dans [RJ05] :

$$L_1 > 0, \quad L_2 = \omega_n - L_1^2 / 2\omega_n$$

qui permet à  $e_1$  d'avoir une dynamique pseudo-périodique qui tend vers 0.

Notons que le modèle à phase dynamique ne prend pas en compte la valeur moyenne de la mesure. Pour cette raison nous suggérons qu'en configuration expérimentale, la valeur moyenne de la mesure doit être soustraite, soit par un filtre passe-haut, soit par la soustraction de la valeur moyenne estimée à partir d'un filtre à moyenne mobile.

La figure 2.11 schématise la procédure de contrôle proposée dans [RJ05]. Malheureusement cette procédure n'a pu être appliquée dans le contrôle de l'écoulement incompressible de fluide au dessus d'une cavité ouverte. La raison est la méconnaissance des paramètres constituant l'équation de Stuart-Landau dans notre cas d'étude, à moins qu'un contrôleur soit connu d'emblée pour avoir une meilleure estimation de ces paramètres.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux procédures d'identification d'un modèle simple non-linéaire de l'écoulement de cavité, ainsi que les procédures de synthèse d'une loi de commande

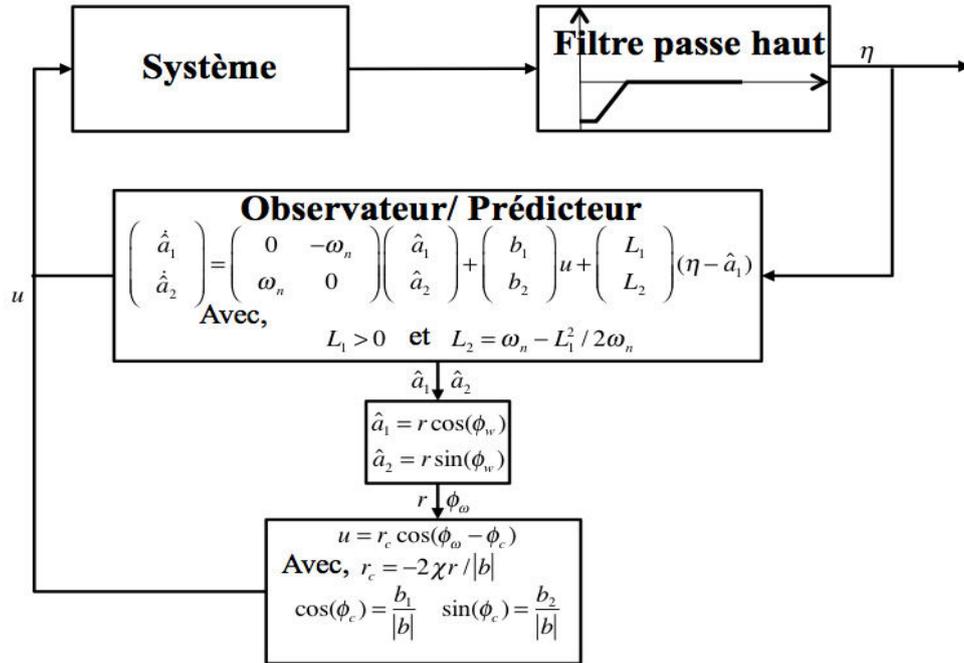


FIGURE 2.11 – schéma de la démarche de contrôle basée sur un modèle à phase dynamique

dédiée. Nous avons montré que le modèle basé sur l'oscillateur de Van der Pol peut prétendre à la modélisation des systèmes qui présentent des oscillations auto-entretenues. Malheureusement ce dernier a échoué dans notre cas d'étude.

Nous avons également pu faire la lumière sur le modèle à phase dynamique qui a eu un succès considérable pour l'identification et le contrôle des oscillations dans l'écoulement compressible de cavité. Néanmoins, cette procédure n'a pas pu être menée à bout dans notre étude en raison de la méconnaissance d'un contrôleur stabilisant le point fixe instable, nécessaire à l'identification des paramètres de l'équation de Ginzburg-Landau.



# Chapitre 3

## Contrôle empirique

### 3.1 Introduction

Tout au long des chapitres précédents, nous avons vu que l'obtention d'un modèle réduit pour décrire la dynamique responsable de l'apparition des oscillations de la couche cisailée de la cavité n'est pas une tâche facile. Pour cette raison, nous avons également envisagé des tentatives heuristiques pour tenter de stabiliser la couche cisailée.

Deux procédures de contrôle empirique seront proposées dans ce chapitre. La première procédure nous a été inspirée par les travaux de Rowley [RJ05]. Elle consiste à introduire une force volumique dont le sens de variation l'oppose à chaque instant à la vitesse locale de la couche cisailée. En revanche, notre procédure est basée sur un contrôle pulsé que nous allons présenter dans la première partie de ce chapitre. Ce choix s'inspire du fonctionnement de l'actionneur plasma.

Une partie du chapitre sera consacrée aux contrôles par commande à retard. Nous présenterons les différents résultats obtenus par des tests sur des cavités issus des simulations numériques directes. Nous présenterons également une loi de commande évanescence basée sur le contrôle à retard. Ce contrôle sera également appliqué au modèle de Rössler afin d'apporter une justification concrète au succès de ce type de contrôle. Il s'apparente aux travaux de Pyragas pour le contrôle du chaos dans les systèmes dynamiques. La commande Pyragas fera l'objet d'un rappel ainsi que son essai sur l'écoulement de cavité.

### 3.2 Commande pulsée à quadrature de phase

Cette loi de commande est basée sur l'évolution temporelle de la pression au niveau du point impactant. Elle est calibrée en fonction du passage de la pression par deux niveaux de valeur (voir figure 3.1). Ces niveaux  $Niv_1$  et  $Niv_2$  sont calculés en fonction d'une moyenne mobile de pression  $\bar{p}(t)$ , de la valeur maximum  $p_{max}$  et de la valeur minimum  $p_{min}$  de la pression de la période actuelle comme suit :

$$\begin{aligned} Niv_1 &= [p_{max} - \bar{p}(t)] \times 30\% \\ Niv_2 &= [p_{min} - \bar{p}(t)] \times 30\% \end{aligned} \tag{3.1}$$

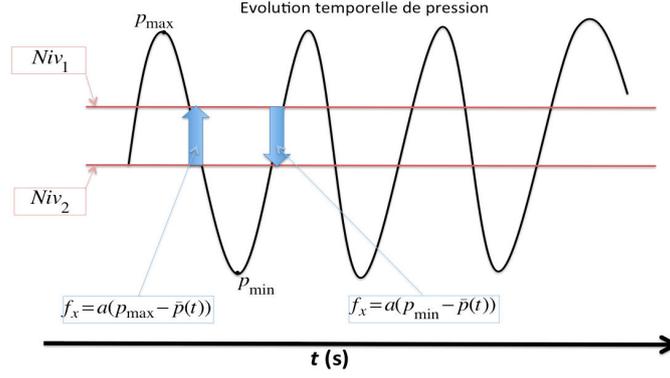


FIGURE 3.1 – Description schématique de la commande empirique à quadrature de phase pulsée, calibrée en fonction du passage de la pression (point impactant) entre les niveaux  $Niv_1$  et  $Niv_2$ .

où  $\bar{p}(t)$  est donnée par :

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{m} \sum_{N=1}^m \frac{(p_{max}(N) + p_{min}(N))}{2}$$

$p_{max}(i)$  et  $p_{min}(i)$  représentent respectivement le maximum et le minimum de la pression des  $i$  périodes précédentes. Dans notre étude, nous avons choisi  $m = 2$ .

Le signe de la commande ainsi que son temps d'application dépendent du passage de pression entre les deux niveaux  $Niv_1$  et  $Niv_2$ . Cette commande prend deux valeurs distinctes suivant le sens d'évolution de la pression comme suit :

$$f_x = \begin{cases} a(p_{max} - \bar{p}(t)) & \text{si l'on est sur le front descendant et si : } Niv_2 < p(t) \leq Niv_1 \\ a(p_{min} - \bar{p}(t)) & \text{si l'on est sur le front montant et si : } Niv_2 \leq p(t) < Niv_1 \\ 0 & \text{si : } p(t) > Niv_1, p(t) < Niv_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $a$  représente un gain conditionnant l'intensité du contrôle.

En implémentant cette loi de commande heuristique en simulation numérique directe et en faisant varier le gain  $a$ , on parvient à réduire d'environ 45% l'amplitude du cycle limite. Ceci est illustré sur la figure 3.2. Nous obtenons par tests la valeur optimale de  $a = 30$  procurant la meilleure réduction.

La figure 3.3 représente l'évolution temporelle de la commande pulsée ainsi que les niveaux  $Niv_1$  et  $Niv_2$  pour un gain  $a = 30$ . On aperçoit que cette commande ne parvient pas à supprimer le cycle limite, mais permet cependant de déplacer la fréquence d'oscillation de la couche cisailée vers d'autres fréquences d'oscillation comme on peut le voir en comparant les figures 3.4 et 2.5. La fréquence dominante a été déplacée de 12 Hz à 14 Hz. On aperçoit également que la commande pulsée avec  $a = 30$  atténue nettement l'intensité des fréquences d'oscillations de la couche cisailée (voir figure 3.5).

Notons qu'une redéfinition de  $\bar{p}(t)$  comme :

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3.3)$$

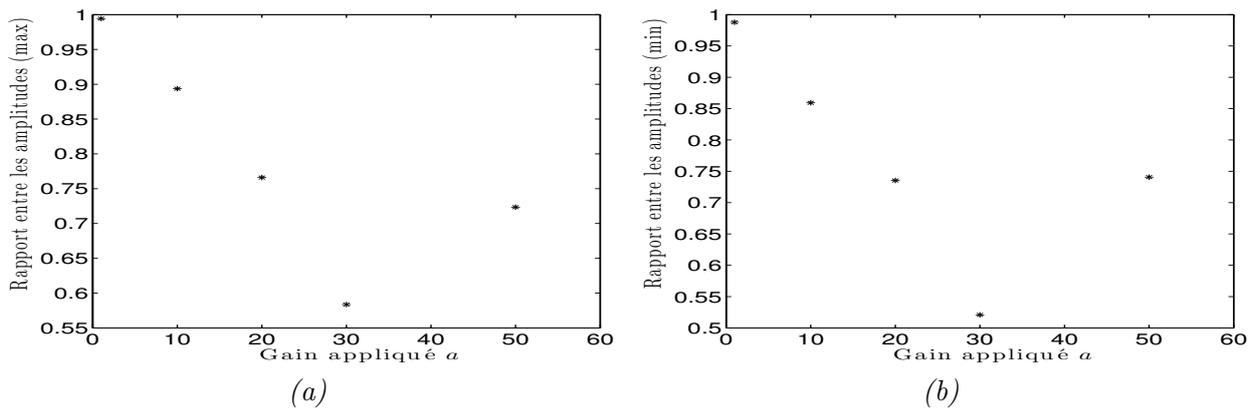


FIGURE 3.2 – Rapport entre l’amplitude de la pression du régime forcé établi (commande pulsée) et de la pression du régime permanent (sans présence de contrôle) : (a) Rapport entre les amplitudes maximales et (b) Rapport entre les amplitudes minimales.

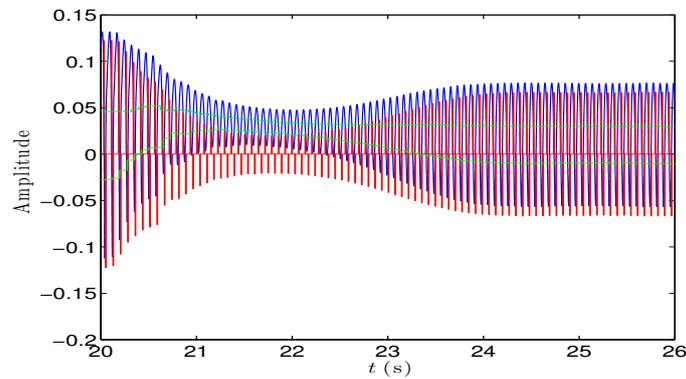


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle de la commande pulsée heuristique à quadrature de phase implémentée à temps  $t = 20$  s (—) (normalisée par son gain  $a = 30$ ) en fonction de l’évolution temporelle de pression (—). Les bordures (—) représentent les niveaux  $Niv_1$  et  $Niv_2$  donnés par l’équation (3.1).

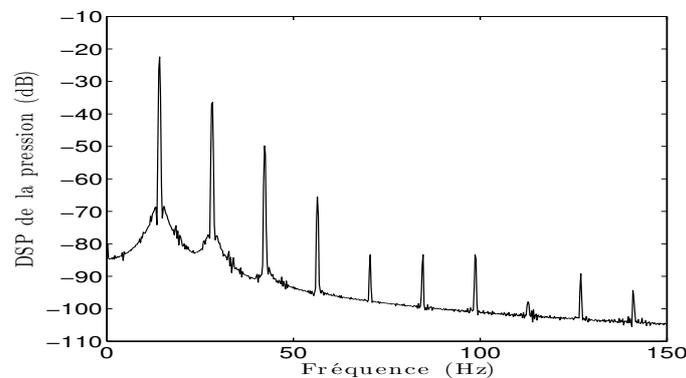


FIGURE 3.4 – Densité spectrale de puissance de la pression au niveau du point impactant en régime établi d’une cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta = 12.12 \times 10^{-4}$  m) et d’un rapport de forme  $L/D = 2$ , lorsqu’elle est soumise à une loi de commande pulsée à quadrature de phase : la fréquence principale d’oscillation  $f_2 = 14.16$  Hz et ses harmoniques.

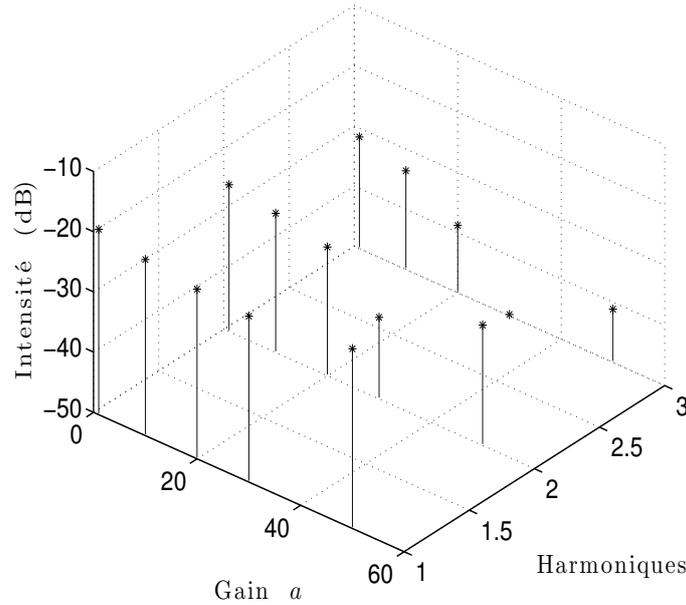


FIGURE 3.5 – Intensité des trois premiers harmoniques de l’oscillation de la pression lorsque la cavité est soumise à une loi de commande pulsée à quadrature de phase.

avec  $T = T_2$  où  $T_2 = 1/f_2$  (voir équation (1.11)), n’apporte aucune modification notable sur le résultat. Pour supprimer complètement les oscillations, on doit s’orienter vers d’autres procédures de contrôle.

### 3.3 Contrôle à retard

#### 3.3.1 Contrôle à retard sur l’écoulement de cavité

La stratégie de contrôle en opposition de phase est une procédure naturelle pour les systèmes oscillatoires. Par contre, on doit prendre en compte le temps nécessaire à une perturbation, née en amont, pour atteindre l’aval de la cavité. Nous proposons de concevoir une loi de commande basée sur la mesure de la pression retardée sur le coin aval de la cavité, pondérée par un gain  $a$ . La loi de commande s’écrit :

$$f_x = ap(t - \tau). \quad (3.4)$$

Le gain  $a > 0$  détermine l’intensité du contrôle, il doit être choisi soigneusement pour ne pas déplacer la cavité vers un autre régime d’écoulement indésirable. La pression  $p$  est mesurée au point impactant aval de la cavité et  $\tau$  est le temps de retard.

Comme il n’existe pas une signification directe de la réponse en phase pour un système non-linéaire, le retard et le gain sont trouvés par essais jusqu’à la suppression des oscillations de la couche cisailée. La valeur optimale de  $\tau$  qui élimine le cycle limite est  $\tau = T_2/6$ , où  $f_2 = 1/T_2$  est la fréquence dominante du régime auto-oscillant de la cavité et associée à un gain  $a = 10$ . La figure 3.6 illustre l’efficacité de cette loi de contrôle empirique. Le contrôle est actionné à  $t = 20$  s, quand la cavité atteint son régime établi (cycle limite).

En appliquant la même loi de contrôle à d’autres écoulements de cavité à  $Re = 7000$  et  $8000$  avec un

$\tau$  estimé à partir de la fréquence d'oscillation de la couche cisailée, comme décrit précédemment, cette loi de commande stabilise systématiquement un point d'équilibre.

Nous avons également effectué une étude de robustesse a posteriori de la commande à retard dans son régime établi ayant pour configuration un  $Re = 7500$  et  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m. En changeant  $\theta_0$  ainsi que le nombre de Reynolds de 7500 à 7000 et 8000, nous avons observé que cette loi de commande reste insensible, bien que la fréquence d'oscillation de la cavité change légèrement et respectivement de 13 Hz à 12 Hz et 14 Hz. Ceci est clairement illustré sur la figure 3.7. Sur ces spectrogrammes, nous notons qu'aucune fréquence d'oscillation (en régime permanent) n'est présente après introduction à l'instant  $t = 20$  s de la commande à retard.

Par contre, le signal de commande tend vers une valeur asymptotique non nulle (voir figure 3.6). Pour obtenir une commande évanescence, c'est à dire asymptotiquement nulle, il suffit de soustraire à la pression retardée la valeur finale asymptotique de celle-ci. Pour rendre un tel contrôle réalisable, i.e. sans avoir à connaître a priori cette valeur asymptotique, nous avons légèrement modifié la loi de commande (3.4), en soustrayant la valeur moyenne  $p_{avg}(t)$  mobile de la pression :

$$f_x = a(p(t - \tau) - p_{avg}(t)) \quad (3.5)$$

La pression moyenne  $p_{avg}$  est calculée par un filtre à moyenne glissante avec une fenêtre temporelle d'une longueur  $T_{mean}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} p(k) \\ \\ p_{avg}(k) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où  $k$  est l'indice de l'échantillon,  $x$  est le vecteur d'état du filtre et  $n$  est la longueur du filtre, calculé en fonction de la durée de la fenêtre temporelle  $T_{mean}$  du filtre :

$$n = \frac{T_{mean}}{\delta t} \quad (3.7)$$

où  $\delta t$  est le pas de temps de la simulation dynamique.

Pour avoir une estimation satisfaisante de la pression moyenne, nous choisissons  $T_{mean} = T_2$ . Avec un tel choix, les oscillations ont été supprimées avec une commande qui tend vers une valeur quasi-nulle, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 3.8. Avec une telle loi de commande à retard en boucle fermée, facile à implémenter, notre objectif de stabiliser la cavité est atteint. Toutefois afin d'extraire la dynamique responsable de l'apparition des instabilités dans la couche cisailée et d'imposer la robustesse a priori, nous devons aller plus loin que cette simple loi de commande.

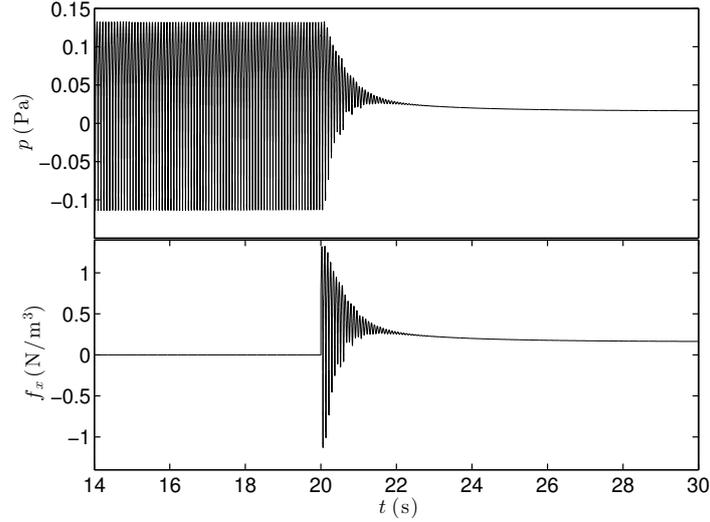


FIGURE 3.6 – Contrôle en boucle fermée avec  $f_x = ap(t - \tau)$  pour une cavité à  $Re=7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m. Pression au point impactant (en haut) et commande appliquée (en bas).

L'objectif est à présent d'identifier la dynamique linéaire instable. Notons que du fait de l'instabilité de l'état de base l'identification ne sera possible qu'en boucle fermée.

### 3.3.2 Contrôle à retard sur Rössler

Nous utilisons le modèle Rössler (système chaotique) comme moyen permettant de justifier le contrôle à retard en boucle fermée abordé précédemment.

Les équations définissant le système de Rössler sont données par :

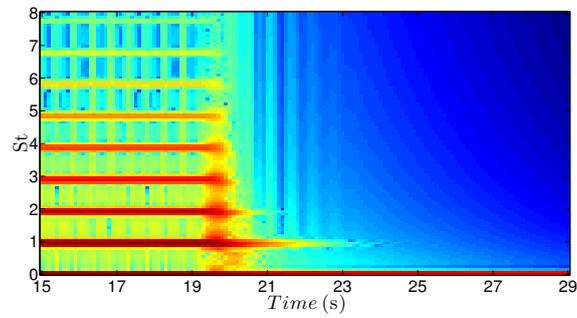
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + a y \\ \dot{z} = b + z(x - \mu) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $a = 0.432$ ,  $\mu = 4$  et  $b = 2$ . Avec ces paramètres et sans aucune perturbation externe, l'attracteur du système de Rössler est présenté sur la figure 3.9. Ce système possède deux points fixes  $A_+$  et  $A_-$ . Les coordonnées de ces points fixes sont obtenues en mettant  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z} = 0$  de (3.8) :

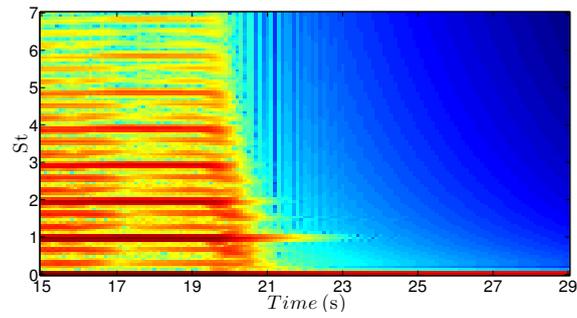
$$A_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4ab}}{2} \\ y_{\pm} = -\frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4ab}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \quad (3.9)$$

$A_-$  se trouve au centre de l'attracteur de Rössler. Ce point entraîne la divergence spirale dans le plan  $(x, y)$ . Tandis que  $A_+$  se trouve éloigné du centre. Il guide la rétraction de l'attracteur sur lui même.

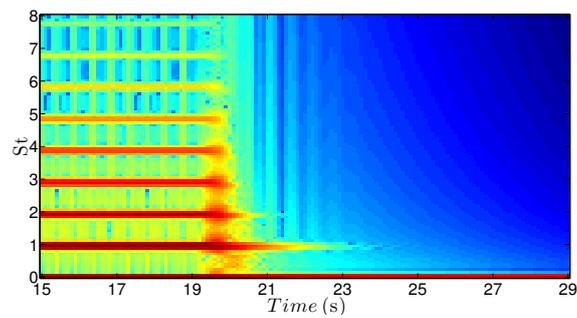
Un terme additif  $F(t, y)$  est ajouté aux dynamiques du modèle de Rössler à la variable  $y$  (sortie observable) afin de contrôler la dynamique complète de ce système. Ainsi le système d'équations



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.7 – Étude de robustesse a posteriori du contrôle en boucle fermée avec  $f_x = ap(t - \tau)$ . Spectrogramme de la pression au point impactant de la cavité à  $Re = 7000$  avec  $\theta = 12.5 \times 10^{-4}$  m (a), (b)  $Re = 8000$  avec  $\theta = 11.7 \times 10^{-4}$  m et (c)  $Re = 7500$  avec  $\theta = 11.9 \times 10^{-4}$  m.

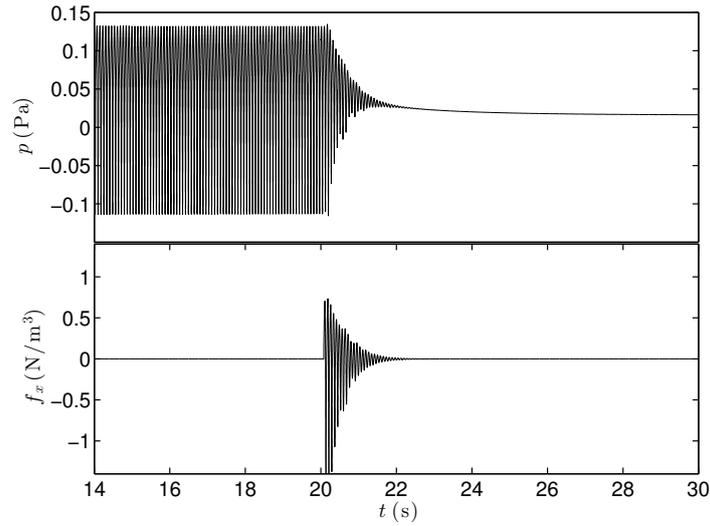


FIGURE 3.8 – Contrôle en boucle fermée avec  $f_x = a(p(t - \tau) - p_{avg}(t))$  pour une cavité à  $Re=7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m. La pression au point impactant (en haut) et la commande appliquée (en bas).

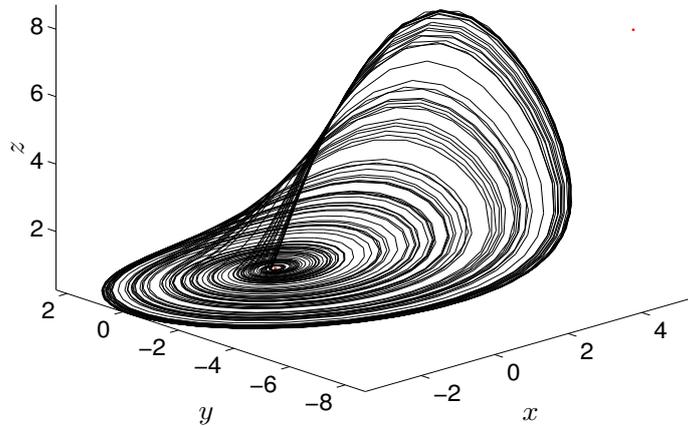


FIGURE 3.9 – Attracteur de Rössler.

(3.8) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + a y + F(t, y) \\ \dot{z} = b + z(x - \mu) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec

$$F(t, y) = \kappa[y(t - \tau) - y_{avg}(t)] \quad (3.11)$$

où  $y_{avg}(t)$  est la valeur moyenne mobile de  $y$ , calculée par un filtre à moyenne glissante (voir équation (3.6)), soustraite pour avoir une commande évanescence. Le retard  $\tau$ , associé à un  $\kappa$  optimal, est

réglé pour que  $F(t, y)$  agisse en opposition de phase au comportement linéarisé de Rössler :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + a y \end{cases} \quad (3.12)$$

En stabilisant la dynamique linéaire instable, il est clair que le contrôle du point fixe est atteint (voir figure 3.10) avec un signal de commande évanescent, et peu importe la condition initiale. Nous pouvons conclure que la loi de commande à retard, développée pour le contrôle de l'écoulement de cavité, agit effectivement sur la dynamique linéaire instable de l'écoulement de cavité, par conséquent la dynamique globale de l'écoulement.

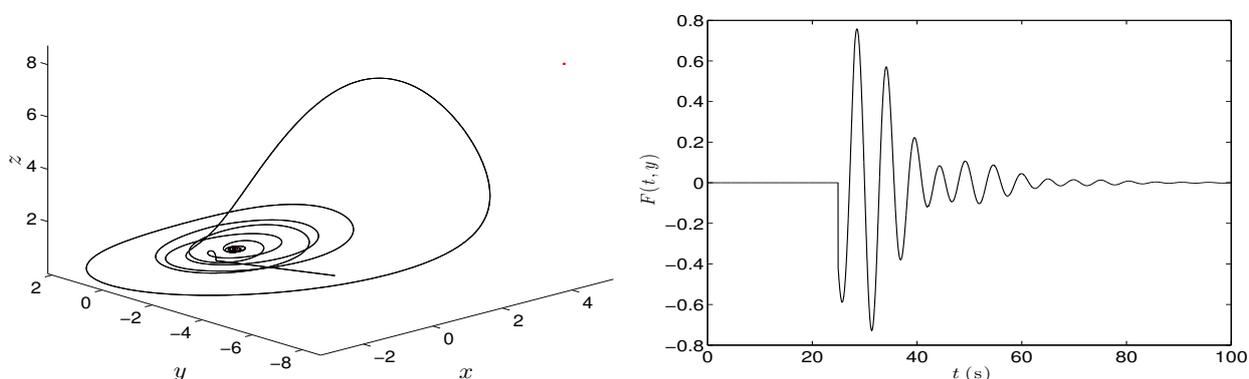


FIGURE 3.10 – Point fixe de l'attracteur de Rössler (à gauche) stabilisé par un contrôle à retard de type  $F(t, y) = \kappa[y(t - \tau) - y_{avg}(t)]$  (à droite).

### 3.4 Commande Pyragas

L'approche Pyragas est largement utilisée par les expérimentalistes pour le contrôle des systèmes à comportement oscillatoire (ex : Rössler) [BJS05]. Cette approche s'appuie sur un contrôle en boucle fermée proportionnelle à la différence entre l'état courant du système et son état à un instant précédent. Considérons un système dynamique décrit par les équations différentielles de premier ordre :

$$\frac{dX}{dt} \equiv \dot{X} = f(X, t) \quad (3.13)$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application non-linéaire de  $X$  et de  $t$ . En absence d'une excitation externe, la dynamique d'un tel système évolue dans un espace appelé "attracteur". Le contrôle type Pyragas est habituellement utilisé pour stabiliser une orbite périodique instable (OPI) se trouvant dans un attracteur chaotique. Cela est effectué par l'ajout d'un terme  $F(t, X)$  à l'équation (3.13) :

$$\dot{X} = f(X, t) + F(t, X) \quad (3.14)$$

avec

$$F(t, X) = \kappa[X(t - \tau) - X(t)] \quad (3.15)$$

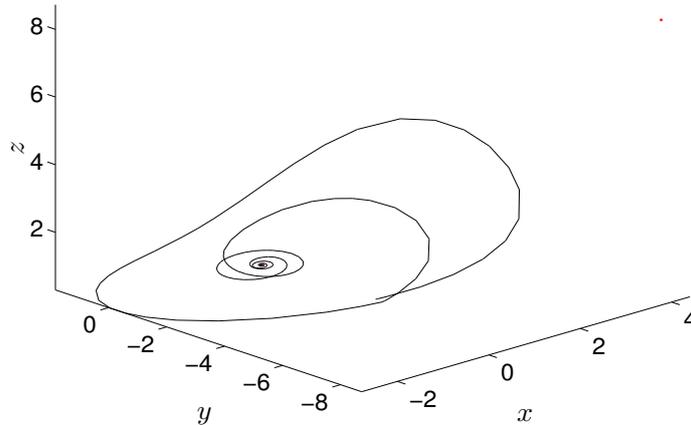


FIGURE 3.11 – Point fixe de l'attracteur de Rössler stabilisé par la commande type Pyragas.

où  $\tau$  est supposé être la période de l'orbite périodique instable ciblée et  $\kappa$  le gain du contrôle. Il y a une plage finie de valeur de  $\kappa$  pour laquelle l'objectif est atteint. En utilisant l'analyse de Floquet (voir [Piv13]), cette plage est trouvée telle que la partie réelle de l'exposant de Floquet est négative. Pour plus de détail voir [BJS05, Piv13]. Pour stabiliser le point fixe, nous choisissons des paramètres appropriés :  $\tau$  est fixé égal à la demi-période de l'orbite la plus instable avec un  $\kappa$  approprié. Cette méthode de contrôle est pratique pour une implémentation expérimentale car nous n'avons pas besoin de connaître l'orbite cible. Cette loi de commande fournit un signal de commande nul lorsque l'orbite cible est stabilisé.

Nous reprenons le modèle de Rössler (voir équation (3.10)) pour illustrer l'efficacité de la loi de commande type Pyragas. À partir de la figure 3.11, il est clair que cette commande stabilise le point fixe. Par contre, appliquée sur un écoulement de cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta = 12.12 \times 10^{-4}$  m) avec  $\tau = T_2/2$  pour différentes valeurs de  $\kappa$ , échoue à stabiliser la couche cisailée (voir figure 3.12).

Il est nécessaire de noter que cette loi de commande ne peut être généralisée à tout système oscillatoire.

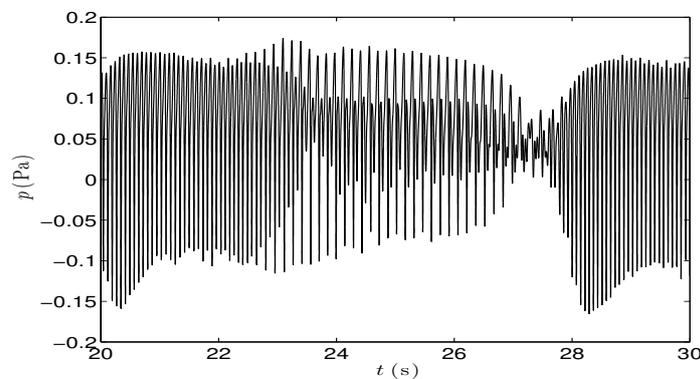


FIGURE 3.12 – Pression au niveau du point impactant d'un écoulement de cavité à  $Re=7500$  ( $\theta = 12.12 \times 10^{-4}$  m) soumis à un contrôle de type Pyragas ( $F(t, p) = 10 \times [p(t - T_2/2) - p(t)]$ ).

## 3.5 Conclusion

Nous avons présenté tout au long de ce chapitre des méthodes empiriques de contrôle en boucle fermée sans la moindre connaissance de la dynamique qui donne naissance à l'instabilité de la couche cisailée. La première méthode, que nous avons appliquée, est basée sur le principe d'une commande à quadrature de phase pulsée, calée sur l'évolution temporelle de la pression au niveau du point impactant. Cette loi de commande parvient à réduire l'intensité en énergie des fréquences d'oscillation de la cavité, également à déplacer légèrement ces fréquences vers les hautes fréquences. Malheureusement, ce genre de contrôle n'ouvre pas la voie vers une possible identification en boucle fermée, car le cycle limite n'est pas totalement supprimé.

Une commande à retard en boucle fermée, basée sur la pondération de la pression retardée, nous permet de stabiliser les oscillations de la cavité. L'idée de base était de faire une simple loi de commande en opposition de phase. Mais à cause de la non-colocalisation de l'actionneur et du capteur de pression ainsi que la nature non-linéaire de notre système, nous nous sommes orientés vers un contrôle à retard avec des paramètres ajustés jusqu'à suppression des oscillations. Nous avons également constaté que ce contrôle à retard se révèle robuste au changement de configuration d'écoulement. Une légère modification de cette loi de contrôle à retard permet également d'obtenir une commande évanescence, ce qui est intéressant en terme de consommation énergétique si ce genre de contrôle est amené à être appliqué sur un banc expérimental.

Nous avons vu également que ce type de contrôle peut être considéré comme une variante de la commande Pyragas au contrôle du chaos présent dans les systèmes dynamiques. Néanmoins, cette commande Pyragas n'arrive pas à stabiliser l'écoulement de cavité.

Grâce à ce contrôle à retard, l'identification en boucle fermée pour l'extraction de la dynamique linéaire instable de la cavité est à présent possible, à condition de trouver la bonne méthode d'identification pour notre cas d'étude. Nous avons opté pour l'identification ERA en boucle fermée (Eigensystem Realization Algorithm). Cette méthode fera l'objet du prochain chapitre.



## Chapitre 4

# Eigensystem Realization Algorithm

### 4.1 Introduction

L'identification d'un modèle linéaire de l'écoulement de cavité reste un défi à relever. Plusieurs tentatives ont été menées durant notre étude, notamment celles décrites dans les chapitres 1 et 2. Malheureusement, aucune d'elles n'a abouti. Ceci nous a poussé à nous orienter vers des méthodes de contrôles empiriques (décrites au chapitre 3), appliquées aux simulations numériques directes de l'écoulement, basées essentiellement sur la connaissance de l'évolution temporelle de la pression au coin aval de la cavité. Une méthode de contrôle à retard en boucle fermée trouvée par essai nous a permis de stabiliser l'état de base stationnaire (voir section 3.3). Cela permet d'appliquer à présent des méthodes d'identification en boucle fermée.

Trois principales approches d'identification en boucle fermée ont été introduites ces 30 dernières années en automatique : i) les approches directes, ii) les approches indirectes, iii) les approches entrées/sorties communes. Chacune d'elles comporte des avantages et des inconvénients, pour plus de détail voir [SS88]. Le choix de l'une de ces approches pour l'écoulement de cavité doit être étudié en fonction des contraintes imposées par la nature de la dynamique d'un tel système. Notons aussi que l'application d'une méthode non-paramétrique avec de telles approches est déconseillée. En effet, l'analyse spectrale en boucle fermée est une tâche facile à mettre en œuvre, mais en présence de bruit de mesure, cette analyse fournit un modèle biaisé. Ceci, à cause de la méconnaissance de la corrélation entre l'entrée du système en boucle ouverte et du bruit de mesure, due à la boucle de retour du correcteur [VDH98, FL99].

En raison de la présence des retards de convection et de propagation présents dans la dynamique intrinsèque de l'écoulement de cavité, nous avons choisi d'effectuer une identification ERA (Eigensystem Realization Algorithm) en boucle fermée. Cette méthode permet de produire d'une part un modèle d'ordre réduit tout en équilibrant commandabilité et observabilité et d'autre part l'approximation d'un retard que l'on sait très bien est d'ordre infini. ERA en boucle fermée a déjà été appliquée en écoulement compressible de cavité avec succès dans un régime instable [IMR11, IMR12]. Dans ce chapitre, nous introduisons ERA en boucle ouverte afin de comprendre le concept de la troncature équilibrée. Cette méthode a été introduite par Juang [JP85] et a été étendue à l'identification des systèmes instables [JP94, PJHL94].

Nous allons présenter également dans ce chapitre les deux extensions de ERA en boucle fermée. Nous

introduisons ERA avec une dynamique de correcteur connue nommée OCID (Observer/Controller Identification), suivi de ERA avec une dynamique de correcteur inconnue. Nous clôturerons ce chapitre par de simples exemples d'application de cette méthode d'identification en boucle fermée.

## 4.2 ERA en boucle ouverte

ERA a été introduite dans [JP85] pour extraire une représentation en variables d'état d'un système stable à partir de ses entrées et de ses sorties. Cette technique d'identification est basée sur l'historique de la réponse impulsionnelle connue sous le nom de paramètres de Markov.

Le modèle est écrit sous une forme discrète, invariant dans le temps :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^j$ , et  $y \in \mathbb{R}^q$ .  $k$  représente l'indice du temps.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement les matrices d'état, de sortie, d'entrée et d'action directe. Pour un système stable,  $A$  est une matrice de Schur, c'est à dire que ses valeurs propres appartiennent au cercle unité. Cette caractéristique du système discret stable est équivalente au système continu stable avec une matrice d'état dite Hurwitz.

Nous rappelons ici les concepts de commandabilité et d'observabilité sur lesquels repose l'identification ERA.

### 4.2.1 Commandabilité

Le système est dit commandable s'il existe une commande  $u(k)$ , appliquée sur un intervalle de temps fini  $0 \leq k \leq s$ , qui fait évoluer le système de son état initial  $x(0)$  à un état  $x(s)$ . En d'autres termes, il s'agit de ramener toutes les variables d'état vers le point d'équilibre, quel que soit l'état initial du système.

Cette définition de la commandabilité, dans le cas du système (4.1), est équivalente à un critère algébrique. Il n'introduit que les matrices d'état du système.

Le système est dit commandable si la matrice de commandabilité  $\mathcal{G}$ , donnée par :

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nj} \quad (4.2)$$

est de rang  $n$ , où  $n$  représente la dimension du système.

**Remarque 3** Notons que la notion de commandabilité ne fait intervenir que les matrices  $A$  et  $B$  (voir équation (4.2)). On dit alors que la paire  $(A, B)$  est commandable.

Un autre critère algébrique permet de statuer plus finement sur la commandabilité du système. Ce critère est basé sur le Grammien de commandabilité  $W_c$  :

$$W_c = \mathcal{G}\mathcal{G}^T \quad (4.3)$$

qui doit être inversible. En d'autre terme, il doit être de rang plein.

### 4.2.2 Observabilité

La notion d'observabilité est essentielle lorsqu'il s'agit de la synthèse d'un observateur.

Nous pouvons résumer le problème de l'observabilité à la reconstruction de l'état initial  $x(0)$ , à partir de l'unique connaissance des mesures  $y(k)$  et des commandes  $u(k)$  sur un intervalle de temps fini  $0 \leq k \leq s$  [BDTR<sup>+</sup>92].

Comme pour la commandabilité, il existe un critère algébrique permettant d'évaluer l'observabilité du système. Ce critère ne fait intervenir que les matrices  $A$  et  $C$ . Nous pouvons donc ramener l'étude de l'observabilité à l'étude de la paire  $(A, C)$ . Le système est dit observable, si la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn \times n} \quad (4.4)$$

est de rang égal à l'ordre du système  $n$ .

Nous pouvons ramener ce critère algébrique à l'étude de l'inversibilité du Grammien d'observabilité  $W_o$ , donné par :

$$W_o = \mathcal{O}^T \mathcal{O} \quad (4.5)$$

En d'autre terme,  $W_o$  doit être de rang plein.

### 4.2.3 Démarche à suivre pour l'identification du modèle

L'objectif de ERA est de produire si nécessaire une représentation réduite du système 4.1 en identifiant les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  qui constituent le système (4.1) tout en équilibrant la commandabilité et l'observabilité. Ceci revient à chercher à égaliser  $W_o$  et  $W_c$  comme suit :

$$W_c \equiv W_o = \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

où  $*$  représente un terme quelconque.

Dans cette partie, nous allons décrire les démarches à entreprendre pour identifier un modèle. L'algorithme de la réalisation d'un système propre implique de former dans un premier temps la

matrice d'Hankel généralisée à partir des paramètres de Markov :

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} Y(k) & Y(k+1) & \cdots & Y(k+\gamma-1) \\ Y(k+1) & Y(k+2) & \cdots & Y(k+\gamma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(k+\beta-1) & Y(k+\beta) & \cdots & Y(k+\beta+\gamma-2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\beta q \times \gamma j} \quad (4.7)$$

où  $\gamma$  et  $\beta$  sont des entiers choisis de sorte que la dimension de la matrice d'Hankel soit supérieure à l'ordre  $n$  du système. Ils doivent donc satisfaire  $\gamma j \gg n$  et  $\beta q \gg n$ . Les paramètres de Markov sont donnés comme suit :

$$Y(0) = D, \quad Y(k) \stackrel{\Delta}{=} CA^{k-1}B, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

Nous effectuons dans un second temps une décomposition en valeurs singulières de la matrice Hankel  $H(0)$  et ne gardons que les  $s$  valeurs singulières les plus significatives :

$$H(0) = R\Sigma Q^T \cong R_s \Sigma_s Q_s^T, \quad (4.9)$$

où  $s$  représente un ordre réduit du système. Lorsque  $s$  est choisi exactement égal à l'ordre  $n$  du système, nous pouvons écrire :

$$H(0) \cong R_n \Sigma_n Q_n^T = \mathcal{O}\mathcal{G} \quad (4.10)$$

Nous pouvons réécrire  $H(0)$  comme :

$$H(0) \cong (R_n \Sigma_n^{1/2})(\Sigma_n^{1/2} Q_n^T) = \mathcal{O}\mathcal{G} \quad (4.11)$$

Avec ce choix possible de  $\mathcal{O} = R_n \Sigma_n^{1/2}$  et  $\mathcal{G} = \Sigma_n^{1/2} Q_n^T$ , nous équilibrons les grammians de commandabilité et d'observabilité, en effet :

$$\begin{aligned} W_c &= \mathcal{G}\mathcal{G}^T = \Sigma_n^{1/2} Q_n Q_n^T \Sigma_n^{1/2} = \Sigma_n \\ W_o &= \mathcal{O}^T \mathcal{O} = \Sigma_n^{1/2} R_n^T R_n \Sigma_n^{1/2} = \Sigma_n \end{aligned} \quad (4.12)$$

Les matrices  $B$  et  $C$  du système sont identifiées respectivement à partir des  $j$  premières colonnes de la matrice  $\mathcal{G}$  et les  $q$  premières lignes de la matrice  $\mathcal{O}$ .

La matrice d'état  $A$  est identifiée à partir de matrice d'Hankel  $H(1)$  comme :

$$H(1) = R_s \Sigma_n^{1/2} A \Sigma_n^{1/2} Q_n^T, \quad A = \Sigma_n^{1/2} R_n^T H(1) Q_n \Sigma_n^{1/2} \quad (4.13)$$

Lorsque l'on retient un nombre  $s$  inférieur à l'ordre exact  $n$  du système, on peut établir une bande supérieure de l'erreur de réduction de modèle. Considérons  $G_s$  la fonction de transfert du modèle réduit d'ordre  $s$  où  $G$  représente la fonction de transfert du système complet. La norme  $H_\infty$  de l'erreur est donnée par [Row05] :

$$\|G - G_s\|_\infty \leq 2 \sum_{i=s+1}^n \sigma_i \quad (4.14)$$

où  $\sigma_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $\Sigma_n$  (voir équation (4.10)).

### 4.3 ERA en boucle fermée

ERA est uniquement applicable aux systèmes stables. Ceci est notable lorsque l'on observe les paramètres de Markov  $Y(k)$  de l'équation (4.8) communément issus de la réponse impulsionnelle à chaque instant  $k$ . Pour un système stable soumis à une excitation bornée et pour un  $k$  suffisamment long, ces paramètres  $Y(k)$  tendent à s'annuler. Ainsi, leur approximation est facile à obtenir à partir des entrées/sorties du système, ou à partir de la réponse impulsionnelle. Malheureusement pour un système instable, l'approximation de  $Y(k)$  n'est pas possible, car ces paramètres  $Y(k) \rightarrow \infty$  lorsque le système est excité par une impulsion. Ceci est dû à  $A^{k-1}$  qui est une suite divergente. Un problème similaire peut se produire lorsque le système est faiblement amorti, où  $k$  peut devenir excessivement grand pour satisfaire  $Y(k) \simeq 0$ .

Pour éviter ce problème d'approximation des paramètres de Markov d'un système instable, l'identification n'est possible qu'en boucle fermée, cela implique que le système doit d'abord être stabilisé par un correcteur. Deux extensions de ERA en boucle fermée ont été effectuées :

- Identification avec une dynamique de correcteur inconnue, connue sous le nom de OCID pour Observer/Control Identification : celle-ci à l'avantage d'être applicable même si l'on dispose d'un correcteur non-linéaire [JP94].
- Identification avec une dynamique de correcteur connue, qui doit dans ce cas être linéaire [PJHL94].

#### 4.3.1 OCID

Cette technique d'identification suppose que la dynamique du correcteur est inconnue et que le correcteur est un retour d'état et un observateur, comme on peut le voir sur la figure 4.1.

Nous considérons la même représentation d'état que pour l'identification ERA en boucle ouverte (voir équation (4.1)) mais avec une matrice d'état  $A$  instable. L'entrée  $u(k)$  du système est la somme du vecteur d'état estimé  $\hat{x}(k)$  pondéré par la matrice du correcteur  $K$  et l'excitation  $e(k)$  ayant un large spectre :

$$u(k) = K \hat{x}(k) + e(k) = u_f(k) + e(k). \quad (4.15)$$

L'estimation du vecteur d'état discret est fourni par un observateur avec un gain  $L$  :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A \hat{x}(k) + B u(k) - L[y(k) - \hat{y}(k)], \\ \hat{y}(k) &= C \hat{x}(k) + D u(k), \end{cases} \quad (4.16)$$

En réarrangeant ce système d'équations, nous obtenons la relation entrée-sortie du système sous

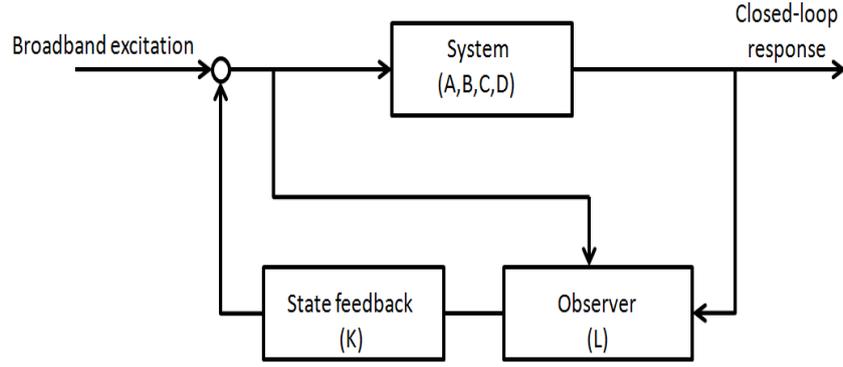


FIGURE 4.1 – Description schématique de l'identification d'un système linéarisé fonctionnant en boucle fermée [PJHL94].

une nouvelle forme de système appelé Observateur/Contrôleur comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \hat{y}(k) \\ u_f(k) \end{bmatrix} = \bar{C}\hat{x}(k) + \bar{D}u(k), \end{cases} \quad (4.17)$$

avec

$$\bar{A} = A + LC, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B + LD & -L \end{bmatrix}, \\ \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ -K \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La relation entre l'entrée et la sortie du système observateur/contrôleur peut s'écrire en fonction d'un nombre de paramètres de Markov  $\bar{Y}(i)$ , pourvu que l'observateur :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k) \\ u_f(k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{Y}(i)v(k-i) + \bar{Y}(0)u(k), \quad (4.18)$$

est stable, avec

$$v(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}(0) = \bar{D}, \\ \bar{Y}(k) = \begin{cases} \bar{C}\bar{A}^{k-1}\bar{B} & \text{if } k = 1, 2, \dots, \ell \\ 0 & \text{if } k \geq \ell \end{cases}$$

où  $\ell$  est suffisamment grand pour que l'observateur converge. La convergence signifie que les variables tendent vers leurs valeurs exactes. Dans ce cas l'erreur d'estimation entre  $x(k)$  et  $\hat{x}(k)$  tend à s'annuler lorsque ce nombre  $\ell$  est grand. Par conséquent, la sortie estimée  $\hat{y}(k)$  et l'état estimé  $\hat{x}(k)$  peuvent être remplacés respectivement par  $y(k)$  et  $x(k)$  dans l'équation (4.17) au-delà de  $\ell$  pas de

temps. L'équation (4.18) peut ainsi s'écrire sous une forme matricielle comme suit :

$$y_t = \bar{Y}V, \quad (4.19)$$

pour une longueur de donnée  $N \gg \ell$ , où :

$$y_t = \begin{bmatrix} y(\ell) & y(\ell+1) & \cdots & y(N) \\ u_f(\ell) & u_f(\ell+1) & \cdots & u_f(N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{C}\bar{B} & \cdots & \bar{C}\bar{A}^{\ell-1}\bar{B} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} u(\ell) & u(\ell+1) & \cdots & u(N) \\ v(\ell-1) & v(\ell) & \cdots & v(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v(0) & v(1) & \cdots & v(N-\ell) \end{bmatrix}.$$

L'excitation additive  $e$  doit être choisie suffisamment riche en fréquence pour que la matrice  $V$  soit de rang plein, dans le but d'identifier les paramètres de Markov du système observateur/correcteur à partir de l'équation (4.19), comme :

$$\bar{Y} = y_t V^+, \quad (4.20)$$

où  $V^+$  représente la pseudo-inverse de la matrice  $V$ .

A présent, il s'agira de calculer séparément les paramètres de Markov de l'observateur, du système ainsi que le gain du correcteur nécessaires à la construction de la matrice d'Hankel. À partir des paramètres de Markov, nous identifions les matrices constituantes de la représentation de l'espace d'état du système instable. En partant de l'équation (4.20), les paramètres du système observateur/correcteur peuvent être identifiés à chaque pas de temps :

$$\bar{Y}(0) = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}^{(1,1)}(0) \\ \bar{Y}^{(2,1)}(0) \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} C \\ -K \end{bmatrix} (A + LC)^{k-1} \begin{bmatrix} B + LD & -L \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \bar{Y}^{(1,1)}(k) & -\bar{Y}^{(1,2)}(k) \\ -\bar{Y}^{(2,1)}(k) & \bar{Y}^{(2,2)}(k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell.$$

À partir de ces paramètres de Markov identifiés, nous déduisons facilement les paramètres de Markov de l'observateur, du système ainsi que le gain du correcteur, qui sont mis sous la forme :

$$Y^{(1,1)}(0) = D,$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} A^{k-1} \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^{k-1}B & CA^{k-1}L \\ KA^{k-1}B & KA^{k-1}L \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} Y^{(1,1)}(k) & Y^{(1,2)}(k) \\ Y^{(2,1)}(k) & Y^{(2,2)}(k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell.$$

Les paramètres de Markov du système et de l'observateur,  $Y^{(1,1)}(k)$  et  $Y^{(1,2)}(k)$ , sont obtenus respectivement à partir de  $\bar{Y}^{(1,1)}(k)$  et  $\bar{Y}^{(1,2)}(k)$  en résolvant le système d'équations suivant [JP94] :

$$\begin{aligned} Y^{(1,1)}(k) &= \bar{Y}^{(1,1)}(k) - \sum_{i=1}^k \bar{Y}^{(1,2)}(i)Y^{(1,1)}(k-i), \\ Y^{(1,2)}(k) &= \bar{Y}^{(1,2)}(k) - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{Y}^{(1,2)}(i)Y^{(1,1)}(k-i). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nous pouvons mettre ces équations récursives sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} I & & & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I & & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(2) & \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(i-1) & \bar{Y}^{(1,2)}(i-2) & \dots & \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y^{(1,1)}(0) \\ Y^{(1,1)}(1) \\ Y^{(1,1)}(2) \\ \vdots \\ Y^{(1,1)}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}^{(1,1)}(0) \\ \bar{Y}^{(1,1)}(1) \\ \bar{Y}^{(1,1)}(2) \\ \vdots \\ \bar{Y}^{(1,1)}(i) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} I & & & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I & & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(2) & \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \bar{Y}^{(1,2)}(i-1) & \bar{Y}^{(1,2)}(i-2) & \dots & \bar{Y}^{(1,2)}(1) & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y^{(1,2)}(1) \\ Y^{(1,2)}(2) \\ Y^{(1,2)}(3) \\ \vdots \\ Y^{(1,2)}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}^{(1,2)}(1) \\ \bar{Y}^{(1,2)}(2) \\ \bar{Y}^{(1,2)}(3) \\ \vdots \\ \bar{Y}^{(1,2)}(i) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La plupart des systèmes physiques possèdent des non-linéarités et du bruit présents dans leurs mesures, il est nécessaire d'avoir un  $\ell$  assez grand pour assurer la précision et l'unicité des paramètres de Markov  $Y^{(1,1)}$  et  $Y^{(1,2)}$ .  $\ell$  doit être choisi tel que le produit  $\ell q$  soit plus grand que le nombre d'états  $n$  du système. Les paramètres de Markov restants  $\bar{Y}^{2,1}(k)$  et  $\bar{Y}^{2,2}(k)$  sont identifiés à partir des équations suivantes, comme décrit dans [JP94] :

$$\begin{aligned} Y^{(2,1)}(k) &= \bar{Y}^{(2,1)}(k) - \sum_{i=1}^k \bar{Y}^{(2,2)}(i)Y^{(1,1)}(k-i), \\ Y^{(2,2)}(k) &= \bar{Y}^{(2,2)}(k) - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{Y}^{(2,2)}(i)Y^{(1,2)}(k-i). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le système en boucle ouverte (instable) est alors obtenu en appliquant une ERA classique (voir 4.2.3) sur l'ensemble des paramètres de Markov identifiés à partir des équations (4.24)–(4.26). Pour plus de détails sur l'extraction de la réalisation du système en boucle ouverte, voir [JP85].

L'identification des matrices  $A, B, C$  du système change légèrement de l'identification en boucle ouverte, car on identifie également la matrice du retour d'état  $K$  ainsi que le gain de l'observateur

$L$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(1) &= R_n \Sigma_n^{1/2} A \Sigma_n^{1/2} Q_n^T, \quad A = \Sigma_n^{-1/2} R_n^T H(1) Q_n \Sigma_n^{1/2}, \\ \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} &= \Sigma_n^{1/2} Q_n^T E, \\ \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} &= E^T R_n \Sigma_n^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

où la matrice  $E$  est construite comme suit :

$$E^T = \begin{bmatrix} I_h & O_h & \cdots & O_h \end{bmatrix}, \quad h = j + q, \quad (4.28)$$

où  $m$  représente la dimension de  $u$ .

### 4.3.2 Identification avec une dynamique de correcteur connue

Cette extension de ERA en boucle fermée considère que le système instable est stabilisé par un correcteur linéaire connu. L'idée est d'extraire les paramètres de Markov du système bouclé en réponse à l'excitation d'une large bande de fréquence puis en déduire les paramètres de Markov du système instable. L'excitation doit être choisie soigneusement pour ne pas affecter la stabilité globale du fonctionnement en boucle fermée et aussi garder une réponse linéaire du système bouclé. Cette méthode d'identification s'effectue en utilisant un observateur du système en boucle fermée. Pour plus de détail, voir [PJHL94].

## 4.4 Exemple d'application

Dans cette partie du chapitre, nous allons introduire un exemple simple afin de bien cerner les avantages et les limites des extensions de ERA en boucle fermée. Rappelons que l'écoulement de cavité est un dispositif à temps continu dont la dynamique se développe autour d'un point fixe instable à l'origine du régime oscillant qui sature vers un cycle limite du fait des non-linéarités.

Considérons le système instable donnée sous la forme :

$$P(s) = \frac{\omega_I^2}{s^2 - 2z_I \omega_I s + \omega_I^2} \quad (4.29)$$

avec

$$z_I = 0.02, \quad \omega_I = 2\pi f_I, \quad f_I = 50 \text{ Hz}$$

stabilisé par le correcteur (retour positif) :

$$K(s) = \frac{K_0(s - \omega_{1c})(s - \omega_{2c})}{s^2 + 2z_c \omega_c s + \omega_c^2} \quad (4.30)$$

avec

$$z_c = 0.86, \quad \omega_c = 696 \text{ rd}, \quad K_0 = 0.9, \quad \omega_{1c} = 973.7 \text{ rd}, \quad \omega_{2c} = 492.9 \text{ rd}$$

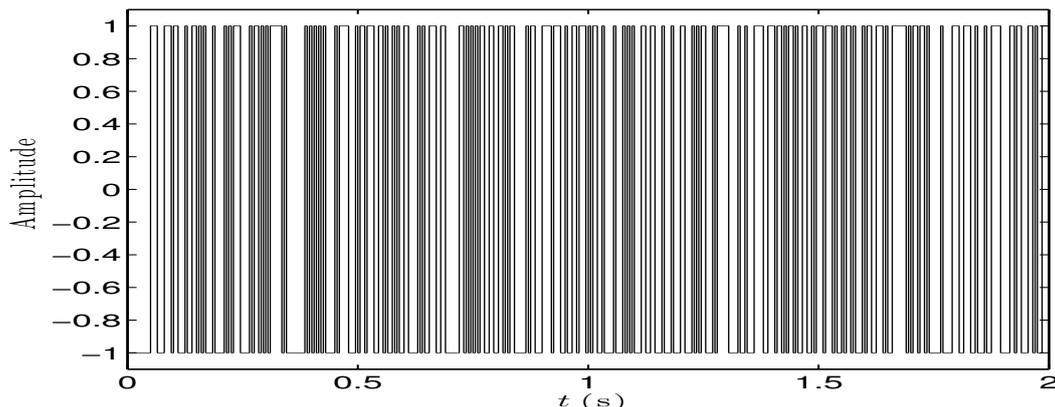


FIGURE 4.2 – Comportement temporel d'un signal SBPA.

Le signal d'excitation doit être choisi avec une large bande de fréquences et qu'il doit être suffisamment long temporellement. L'observateur, introduit comme étape d'identification, est un filtre de Kalman [PJHL94] et par conséquent assure l'unicité des paramètres de Markov (4.24)–(4.25). Notons également que cet observateur ne tend pas forcément vers celui utilisé pour la stabilisation du système (exemple : système stabilisé par un correcteur de type LQG).

Nous avons choisi un signal d'excitation de type SBPA (Signal Binaire Pseudo Aléatoire) suffisamment long, dont la bande de fréquences inclut la bande d'intérêt que nous voulons identifier, voir figure 4.2. Pour plus de détails sur les caractéristiques des signaux d'excitation à utiliser, voir [SS88].

Le choix du pas d'échantillonnage est crucial pour assurer la précision de l'identification. Plus, ce pas est petit et plus la résolution est élevée.

La figure 4.3, représente l'évolution temporelle des paramètres de Markov du système observateur/contrôleur (voir équation (4.21)). Cette figure nous informe sur le transitoire du système en boucle fermée et par conséquent nous permet de choisir le paramètre  $\ell$  qui a d'ailleurs été bien choisi. Rappelons que  $\ell$  doit être choisi lorsque le système en boucle fermée est dans son régime permanent.

En analysant les valeurs singulières de la matrice d'Hankel (figure 4.4), on voit clairement deux valeurs singulières significatives. Ceci nous informe sur l'ordre du système, car le système (4.29) possède effectivement un mode instable. En retenant ces deux valeurs singulières, nous arrivons à approximer la réponse impulsionnelle du système à partir des paramètres de Markov  $Y(k)$  (voir figure 4.5).

Nous avons également transformé le modèle discret obtenu par OCID en modèle continu en effectuant une transformation bilinéaire. On voit sur la figure 4.6 que le modèle tend à approximer les valeurs propres du système. On remarque également que l'identification n'est pas totalement précise. Ceci est dû en partie à la largeur du bit  $T_s$  du signal SBPA, combiné à la longueur de la séquence utilisée  $S_s$ . Le spectre de ce signal possède des raies espacées de  $\frac{1}{T_s S_s}$  Hz et que la qualité de l'excitation dépend du choix de ces paramètres. Pour obtenir une meilleure identification, nous devons faire très attention à ces paramètres. Notons également que la transformée bilinéaire apporte une légère distorsion aux valeurs propres du modèle discret obtenu par OCID. La norme

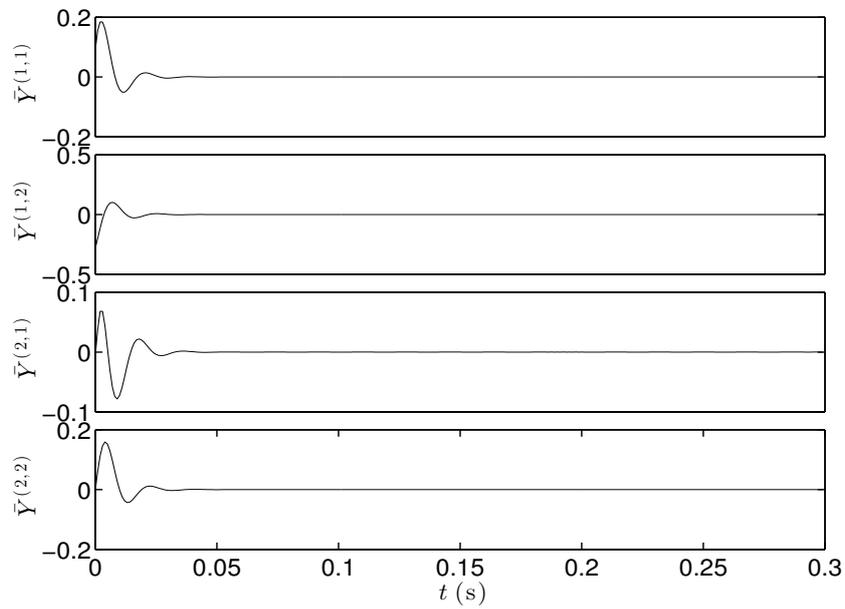


FIGURE 4.3 – Évolution temporelle des paramètres de Markov du système observateur/contrôleur (voir équation (4.21)).

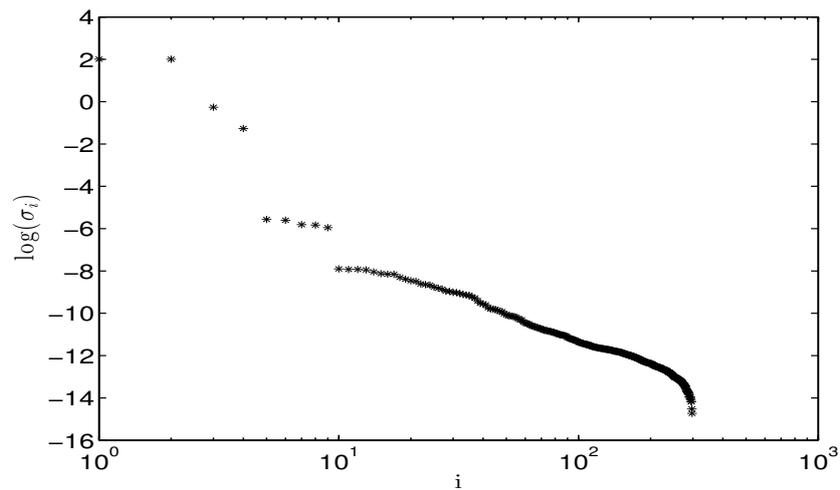


FIGURE 4.4 – Valeurs singulières de la matrice de Hankel  $H(0)$ .

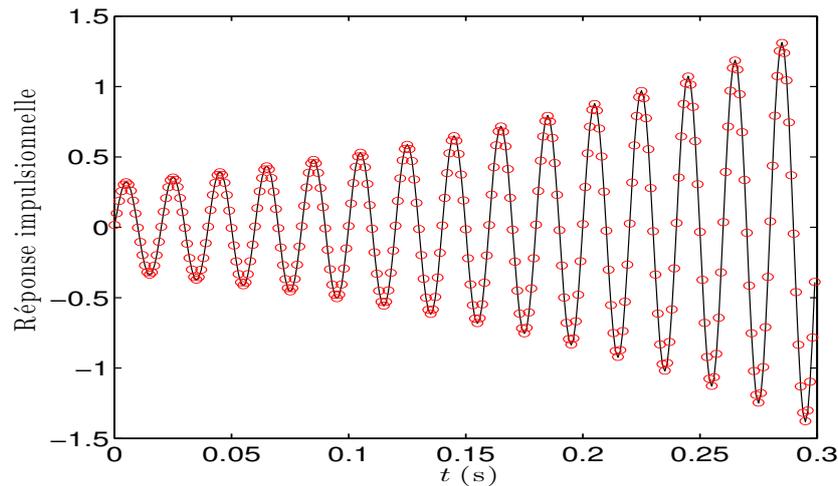


FIGURE 4.5 – Réponse impulsionnelle issue des paramètres de Markov  $Y(k)$  (—) et celle issue du modèle identifié en gardant que les deux premières valeurs singulières les plus significatives ( $\circ$ ).

quadratique relative de l'écart entre les modules des valeurs propres du système avec ceux du modèle est de l'ordre de 0.007%.

## 4.5 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à l'introduction d'une méthode d'identification linéaire basée sur les entrées sorties du système, nommée ERA. Nous avons vu que cette méthode permet d'identifier un modèle linéaire propre tout en équilibrant le concept d'observabilité et de commandabilité. Cette méthode permet d'obtenir un modèle discret sous la forme d'une représentation d'état. Les matrices qui constituent cette représentation sont extraites dans un premier temps de la formulation de la matrice d'Hankel, elle-même construite à partir de l'historique de la réponse impulsionnelle du système (paramètres de Markov). Dans un second temps, il s'agit d'effectuer une procédure de décomposition en valeurs singulières de la matrice d'Hankel. Un réarrangement de cette décomposition permet d'obtenir les matrices de la représentation d'état.

Nous avons également présenté les diverses extensions de cette méthode d'identification, notamment celles dédiées à l'identification en boucle fermée. Ces extensions sont classées dans deux classes majeures : l'une traite le correcteur avec lequel le système est stabilisé comme un correcteur inconnu de type LQG (Linear Quadratic Gaussian), dans l'autre la dynamique du correcteur est parfaitement connue. Nous n'avons considéré pour l'écoulement de cavité que la première classe. Il existe une différence entre ces deux classes d'identification : la deuxième classe nécessite l'excitation des états du correcteur dynamique. Par contre, la deuxième classe, considère que la dynamique du correcteur est parfaitement connue. L'idée de base de ces extensions est d'extraire les paramètres de Markov de la boucle fermée en réponse à une excitation ayant une large bande de fréquences. À partir de ces paramètres, nous obtenons les paramètres de Markov du système en boucle ouverte.

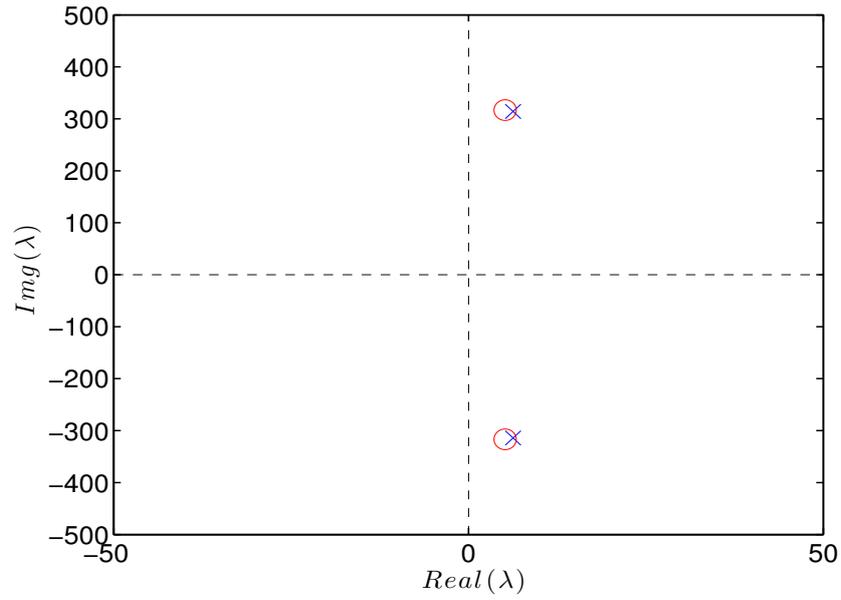


FIGURE 4.6 – Pôles du système instable (4.29) ( $\times$ ) et ceux du modèle obtenu par OCID ( $\circ$ ).

Un exemple simple a été présenté pour appliquer ERA en boucle fermée. Nous consacrons le chapitre suivant à son application pour l'extraction et l'analyse de la dynamique linéaire de l'écoulement de cavité.



## Chapitre 5

# Analyse et contrôle de la dynamique linéaire de l'écoulement de cavité

### 5.1 Introduction

Nous avons réussi dans le chapitre 3 via une loi de contrôle en boucle fermée, basée sur la mesure de pression au niveau du point impactant, à supprimer les oscillations de la couche cisailée.

Bien que cette loi soit conçue comme une commande en opposition de phase, tout en tenant en compte du retard engendré par la non colocalisation de l'actionneur (en amont) et du capteur de mesure (en aval), nous ne sommes pas parvenus à prouver, en non-linéaire qu'il s'agissait de l'opposition de phase. Par ailleurs, cette commande a été appliquée sans la moindre connaissance de la dynamique responsable de l'apparition des instabilités dans la couche cisailée. Identifier cette dynamique, au moins en linéaire, nous permettrait de mieux comprendre le succès de cette loi de commande empirique et pourrait également ouvrir la voie à une synthèse systématique de lois de commande : optimale, robuste, etc....

En raison des retards intrinsèques dans la dynamique de l'écoulement de cavité, nous avons opté pour la méthode ERA pour l'identification en boucle fermée. Cette méthode permet de trouver un modèle d'ordre réduit tout en équilibrant les grammiens de la commandabilité et de l'observabilité, ce qui permettrait l'approximation du retard.

Cette méthode d'identification a été introduite au chapitre 4.

Ce chapitre sera consacré à l'identification par la méthode ERA en boucle fermée d'un modèle linéaire dans diverses configurations de l'écoulement de cavité.

Tout d'abord nous introduisons la synthèse  $H_2$  d'un correcteur qui sera implémenté par la suite dans les simulations numériques directes.

La fin du chapitre sera consacrée à l'analyse des modèles identifiés en boucle fermée ainsi que les résultats du contrôle en boucle fermée en SND.

## 5.2 Synthèse $H_2$

Dans cette partie, nous allons décrire la synthèse  $H_2$  d'un correcteur à partir du modèle linéarisé de l'écoulement de cavité obtenu par OCID. Nous avons retenu cette extension d'ERA (voir 4.3.1) plutôt que l'identification en boucle fermée avec une dynamique de correcteur connue (voir 4.3.2) car l'approximation du correcteur à retard est d'ordre élevé si nous voulons assurer le principe de superposition pour l'écoulement de cavité. Cela augmente considérablement la dimension de la matrice de données  $V_a$  (voir [PJHL94], équation (34)) ce qui rend l'équation impossible à résoudre numériquement.

Rappelons également que OCID fournit un modèle discret et que le simulateur numérique de l'écoulement nous impose d'implémenter un correcteur continu (Runge-Kutta 4). De plus, pour une analyse plus simple des modèles obtenus par OCID, nous avons converti ces modèles en continu en utilisant la transformée bilinéaire. La synthèse  $H_2$  est effectuée à partir de ces modèles.

Considérons un système  $G$  en boucle ouverte sous forme standard :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec  $w$  entrée exogène représentant des perturbations externes modélisées dans la synthèse  $H_2$  comme un bruit blanc gaussien,  $z$  la sortie exogène spécifiant les performances quadratiques,  $u$  l'entrée de commande et  $y$  la sortie mesurée.

L'objectif de la synthèse  $H_2$  est de trouver un contrôleur  $K$  propre donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \\ u &= C_c x_c, \end{aligned} \quad (5.2)$$

stabilisant  $G$  et minimisant la norme  $H_2$  du transfert  $T_{zw}$  de  $w$  à  $z$  [ZDG96].

La norme  $H_2$  est finie si les transferts directs de  $w$  à  $z$  et de  $u$  à  $y$  sont nuls ( $D_{11} = 0$ ,  $D_{22} = 0$ ).

Des hypothèses additionnelles sont faites pour la synthèse  $H_2$  en boucle fermée avec un retour de sortie :

- $(A, B_2, C_2)$  doit être stabilisable et détectable,
- $D_{12}$  et  $D_{21}$  doivent être de rang plein.

Sous ces hypothèses, le problème  $H_2$  admet un contrôleur optimal  $H_2$  avec  $A_c$ ,  $B_c$  et  $C_c$  donnés par :

$$\begin{aligned} A_c &= A - B_2 B_2^T P_1 - Q_1 C_2^T C_2, \\ B_c &= Q_1 C^T, \\ C_c &= -B_2^T P_1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

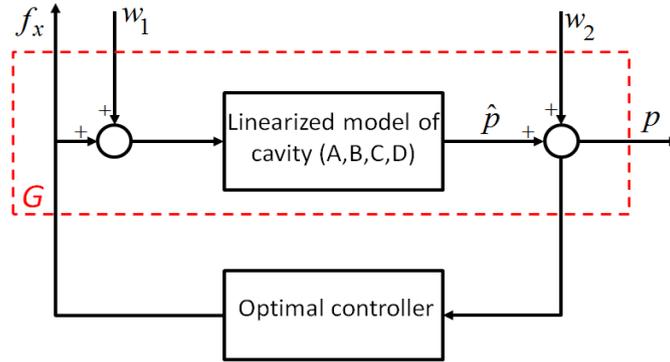


FIGURE 5.1 – Configuration standard du retour de sortie pour la synthèse  $H_2$  d'un contrôleur.

où les matrices  $P_1$  et  $Q_1$  sont les solutions des équations algébriques de Riccati :

$$\begin{aligned} A^T P_1 + P_1 A - P_1 B_2 B_2^T P_1 + C_1^T C_1 &= 0, \\ A Q_1 + Q_1 A^T - Q_1 C_1^T C_1 Q_1 + B_1 B_1^T &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

La dernière hypothèse ci-dessus peut être relaxée en utilisant le problème d'optimisation LMI (Linear Matrix Inequalities).

Nous effectuons cette synthèse sur les modèles d'ordre réduit obtenus par OCID pour diverses configurations de l'écoulement de cavité. Les modèles possèdent une matrice  $D$  de transformée directe non nulle (figure 5.1) ce qui requiert d'entreprendre certains arrangements (en passant par le modèle de transition (5.6)) afin de rendre la synthèse  $H_2$  possible [ZDG96]. La figure 5.1 illustre la synthèse d'un contrôleur avec lequel l'écoulement de base de cavité est stabilisé, où  $w_1$  et  $w_2$  représentent respectivement le bruit de mesure et le bruit d'état. Dans ce cas, le signal de performance  $z$  regroupe le signal de contrôle  $f_x$  et la mesure de pression  $p$  au niveau du point impactant sans le bruit de mesure  $w_2$ . L'entrée exogène  $w$  contient  $w_1$  et  $w_2$ . Le système  $G$  devient donc :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A] x + [0 \ B] w + [B] f_x, \\ \underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ \hat{p} \end{pmatrix}}_z &= \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}}_w + \begin{bmatrix} 1 \\ D \end{bmatrix} f_x, \\ p &= [C] x + [1 \ D] w + [D] f_x. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nous notons que  $D_{11} \neq 0$  et  $D_{22} \neq 0$ , le contrôleur optimal  $H_2$  ne peut donc pas être obtenu.

Pour trouver un tel contrôleur optimal  $H_2$ , considérons en premier lieu  $D_{22} = 0$  et résolvons le problème de contrôleur  $H_2$  avec le terme non nul pour une perturbation directe [ZDG96].

La première étape consiste à trouver un contrôleur  $\hat{K}(s)$  avec une synthèse  $H_2$  standard (voir précédemment) à partir du modèle de transition  $\hat{G}(s)$  donné sous la forme matricielle comme suit :

$$\hat{G} : \left[ \begin{array}{cc|cc} A + B_2 D_k C_2 & B_1 + B_2 D_k D_{21} & B_2 & \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & 0 & D_{12} & \\ C_2 & D_{21} & 0 & \end{array} \right], \quad (5.6)$$

avec

$$D_k = -D_{12}^T D_{11} D_{21}^T.$$

où  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont les matrices de l'équation (5.5) multipliés par les matrices de pondération pour prendre en compte dans le modèle les puissances de  $w_1$  et  $w_2$ . Puis, le correcteur  $K_{GD}(s)$  pour  $G(s)$  avec  $D_{22} = 0$  est donné par :

$$K_{GD}(s) = D_k + \hat{K}(s). \quad (5.7)$$

La deuxième étape consiste à déduire, pour  $D_{22} \neq 0$ , le contrôleur de l'équation (5.7) comme :

$$K_G(s) = K_{GD}(s)(I - D_{22}K_{GD}(s))^{-1}. \quad (5.8)$$

Cette approche, où un contrôleur linéaire a été développé à partir de la dynamique linéarisé du système non-linéaire, stabilisant le système complet, a été déjà vu dans [DFW83] et [IMR11] pour la stabilisation des oscillations de combustion aussi bien que les oscillations de cavité pour un écoulement compressible [IMR12], où un correcteur LQG a été synthétisé.

Rappelons que pour l'identification de l'écoulement de cavité en régime incompressible, Illingworth [Ill09] a rajouté un transfert direct entre l'actionneur et le capteur au modèle présenté sur la figure 1.11, où chaque transfert a été identifié par une analyse spectrale en boucle fermée, afin de prendre en compte le champ acoustique généré par la force volumique. Ceci permettait d'améliorer la précision du modèle en hautes fréquences. Le transfert direct est un gain retardé. Dans notre étude, l'identification OCID fournit des modèles avec un transfert direct non-nulle, ce qui nous confère une certaine crédibilité aux modèles obtenus.

### 5.3 Identification et contrôle optimal pour l'écoulement de cavité

L'identification linéaire en boucle fermée d'un système non-linéaire stabilisé autour d'un point de fonctionnement, exige la satisfaction du principe de superposition. Ceci garantit que le système répond linéairement au point de fonctionnement. Il s'agit donc d'assurer les propriétés d'additivité et d'homogénéité du système en réponse à une sollicitation externe [IMR11]. Plus précisément, si l'on considère que pour une excitation additive  $e_i$ , la réponse du système en boucle fermée est notée  $p_i$ , alors le système répond linéairement si est seulement si pour deux valeurs  $\chi_1$  et  $\chi_2$  quelconques, la réponse à une excitation  $\chi_1 e_1 + \chi_2 e_2$  est égale à  $\chi_1 p_1 + \chi_2 p_2$ .

Pour les cas étudiés de l'écoulement de cavité, nous avons choisi soigneusement l'amplitude de l'entrée pour ne pas exciter de non-linéarités, indésirables à une procédure d'identification linéaire. Cette vérification a été menée avec un signal "chirp" balayant linéairement une bande de fréquences de 0 à 100 Hz d'une durée de 10 s (voir figure 5.2). Ce signal est donnée par :

$$e(t) = a_e \sin(\phi_0 + 2\pi(f_0 + \frac{\delta k}{2}t)t) \quad (5.9)$$

où  $a_e$  est l'amplitude de l'entrée  $e(t)$ .  $\phi_0$  et  $f_0$  représentent respectivement la phase initiale et la fréquence à  $t = 0$ .  $\delta k$  est un terme représentant la raison de la fonction de fréquence instantanée

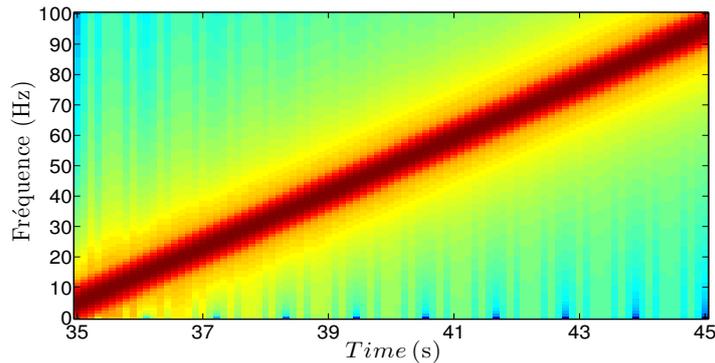


FIGURE 5.2 – Spectrogramme du signal d'excitation "chirp" d'un balayage linéaire de fréquences.

donnée par :

$$f(t) = f_0 + \frac{\delta k}{2} t \quad (5.10)$$

La figure 5.3 montre la réponse dans diverses configurations de l'écoulement de cavité à une excitation de la forme (5.9) avec deux amplitudes différentes  $a_e = 0.1$  et  $0.2$ , d'une durée de  $10$  s imposée à un temps  $t = 35$  s. Cette excitation a été appliquée lorsque les oscillations de la couche cisailée furent complètement stabilisées par le correcteur à retard (voir chapitre 3). Notons que sur cette figure, la pression est présentée sans sa composante continue et que les amplitudes ont été normalisées. Nous pouvons conclure que pour des excitations à de telles amplitudes, l'écoulement de cavité en boucle fermée répond linéairement. Nous constatons pourtant un léger écart entre les deux réponses, notamment sur la figure 5.3.(c). Nous supposons que cela est dû aux non-linéarités. Nous supposons également que cet écart pourrait provenir de l'excitation elle-même lorsque le signal est modulé par une fréquence très faible. Rappelons que la force que l'on applique représente une accélération, ce qui peut amener la vitesse (au niveau de l'actionneur) à croître indéfiniment lorsque celle-ci est constante. Afin de tenir compte de ces remarques, nous imposerons des amplitudes d'excitation inférieure à  $0.2$ .

Nous avons effectué l'identification OCID pour diverses configurations de cavité en changeant à la fois le nombre de Reynolds et l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta_0$ . Les modèles sont validés en comparant l'erreur entre la réponse impulsionnelle du modèle réduit et celle fournie par les paramètres de Markov identifiés à partir de l'équation (4.24)(voir figure 5.4). Nous n'avons pas pu utiliser les valeurs singulières de la matrice de Hankel pour effectuer la troncature (voir équation (4.27)), car il n'y a pas de rupture des valeurs singulières aussi marquée que dans l'exemple applicatif du chapitre 4. Nous pensons que cela est dû en partie à l'approximation des retards d'advection et de propagation de la dynamique intrinsèque de l'écoulement de cavité. La figure 5.5 illustre la réponse fréquentielle des modèles linéarisés pour les différentes configurations de cavité étudiées. Ces modèles ne sont pas de même dimension. Leurs dimensions sont choisies en fonction du besoin de la dynamique. Prenons le cas de l'écoulement de cavité à  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m où une troncature d'ordre plus réduit, ne nous a pas permis de trouver un contrôleur  $H_2$  stabilisant pour cette configuration de cavité. Des contrôleurs  $H_2$  synthétisés à partir des modèles de la figure 5.5, lorsqu'ils sont actionnés à  $t = 20$  s après un régime transitoire, tuent les oscillations de la couche cisailée de l'écoulement de cavité (figure 5.6). Ainsi, la validité de ces modèles est confirmée.

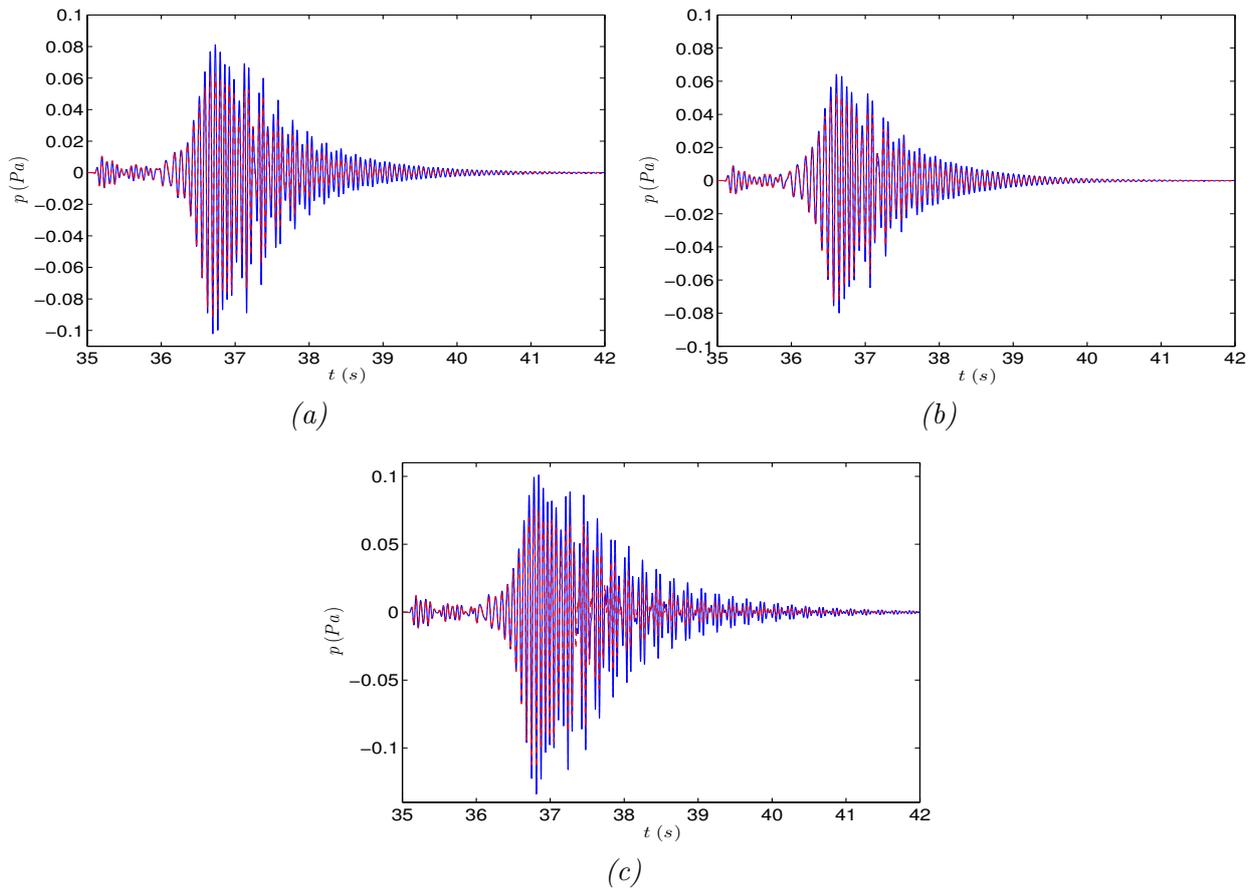


FIGURE 5.3 – Évolution de la pression sans sa composante continue lorsque l'écoulement de cavité est soumis à une excitation chirp (voir équation (5.9)) avec deux amplitudes  $a_e$  différentes : — pour  $a_e = 0.1$ ; - - pour  $a_e = 0.2$ . Le signal de réponse pour  $a_e = 0.1$  a été multiplié par 2 pour la comparaison entre les deux réponses afin de vérifier le principe de superposition. (a) Écoulement de cavité à  $Re = 7500$  ( $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m), (b) à  $Re = 7000$  ( $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m) et (c) à  $Re = 8000$  ( $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m).

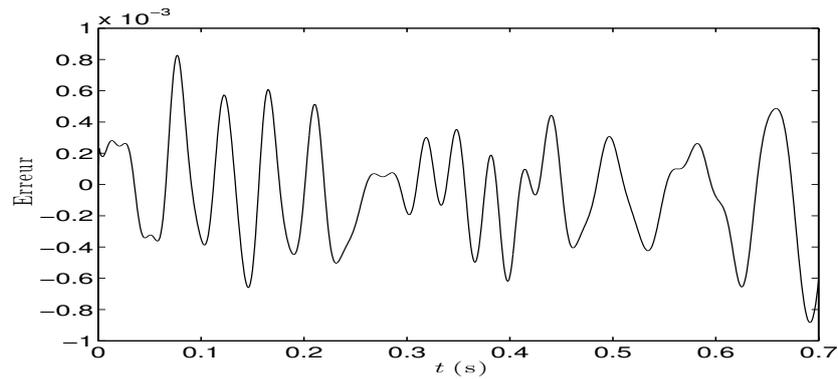


FIGURE 5.4 – Erreur entre la réponse impulsionnelle du modèle linéarisé de 23 états de l'écoulement de cavité  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m et celle issue des paramètres de Markov.

Ces modèles nous informent également sur la dynamique responsable de l'apparition des oscillations dans la couche cisailée. La figure 5.7 représente les valeurs propres (pôles) de la dynamique linéaire identifiée pour deux configurations :  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  et  $11.9 \times 10^{-4}$  m à  $Re = 7500$ . Dans ces deux cas, le mode le plus instable dans ces modèles, c'est à dire celui qui se trouve à l'extrémité droite de l'axe réel, correspond à la fréquence dominante des oscillations de la couche cisailée ( $St \simeq 1$ ). Le mode le moins instable, proche de l'axe imaginaire dans le demi plan droit, est associé au nombre de Strouhal de l'ordre de 1.5 : mode de la couche cisailée ( $m = 3$ ) dans l'équation (1.11). Ainsi le modèle linéaire détecte les modes de Rossiter, bien que l'écoulement n'oscille pas spontanément à cette fréquence. Néanmoins, ce mode est excité lorsqu'une perturbation est appliquée en bordure amont de la cavité, soit en boucle ouverte, soit en boucle fermée, avec un contrôleur qui ne le stabilise pas. C'est par exemple, le cas du contrôleur optimal synthétisé pour  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m lorsqu'il est appliqué à l'écoulement de cavité avec  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m, où le mode le moins instable n'est pas stabilisé (voir figure 5.8).

Pour la configuration de cavité  $Re = 8000$ ,  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m, la signature du mode le plus instable devient perceptible (voir figure 5.13) dans l'écoulement de cavité sans présence de contrôle, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.7 (b). Cependant, la signature de ce mode n'est pas permanente dans le temps : elle se produit soudainement, accompagnée par d'autres fréquences, résultant probablement des interactions non-linéaires entre les modes instables. Ce comportement nous rappelle le phénomène de compétition de modes, observé expérimentalement en régime incompressible [BPL<sup>+</sup>11, PLF<sup>+</sup>08, LPL08] mais aussi en régime compressible de l'écoulement de cavité [GCI01].

Lorsque l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite laminaire de l'amont de la cavité est changée de  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  à  $11.9 \times 10^{-4}$  m pour  $Re = 7500$ , les fréquences des oscillations de la couche cisailée restent globalement inchangées, mais leur intensité évolue. Notons également qu'un modèle à 25 états est requis pour décrire précisément la dynamique dans cette nouvelle configuration de cavité. Ce changement d'épaisseur de quantité de mouvement donne naissance

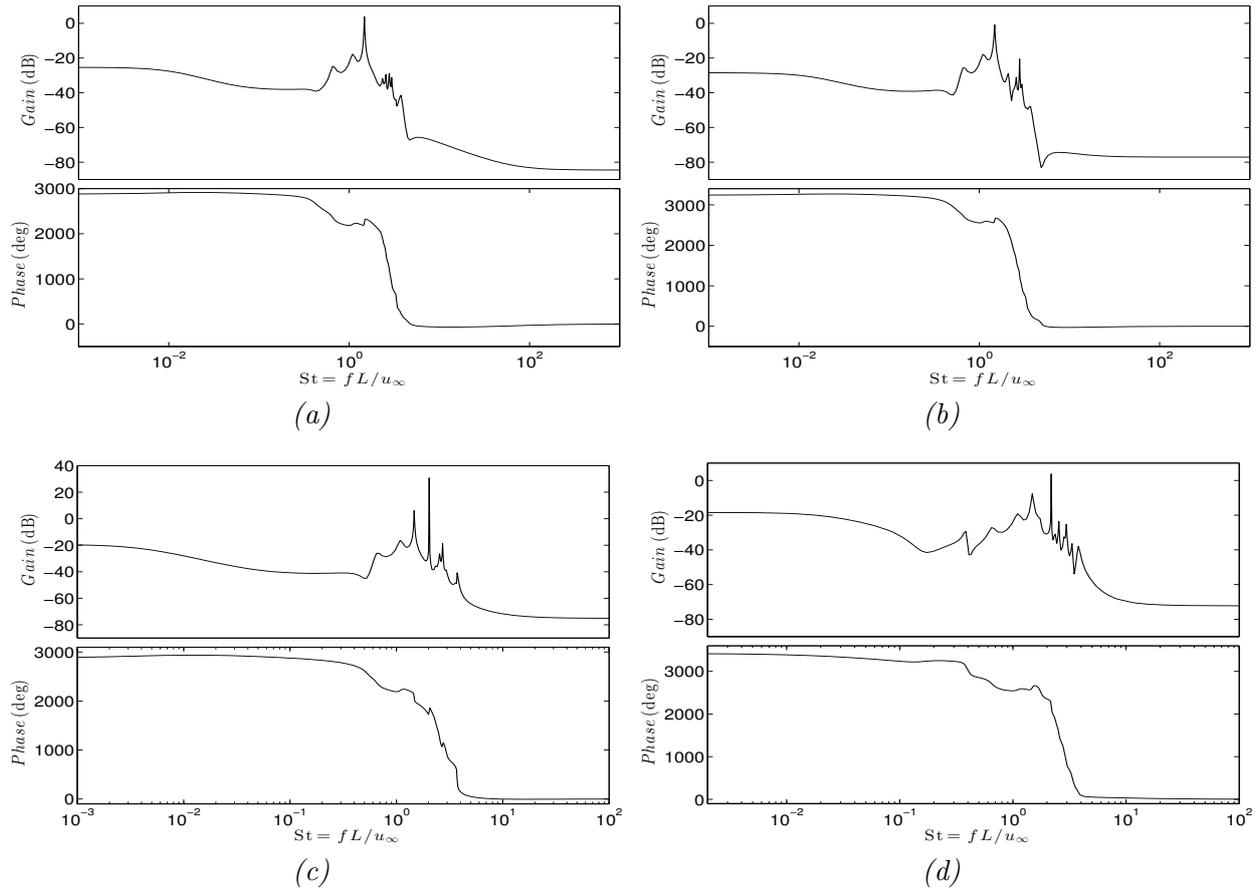


FIGURE 5.5 – Réponse fréquentielle des modèles linéarisés pour diverses configurations d'écoulement de cavité. (a)  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m avec un modèle de 23 états, (b)  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m avec un modèle de 25 états, (c)  $Re = 7000$ ,  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m avec un modèle de 25 états et (d)  $Re = 8000$ ,  $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m avec un modèle de 28 états.

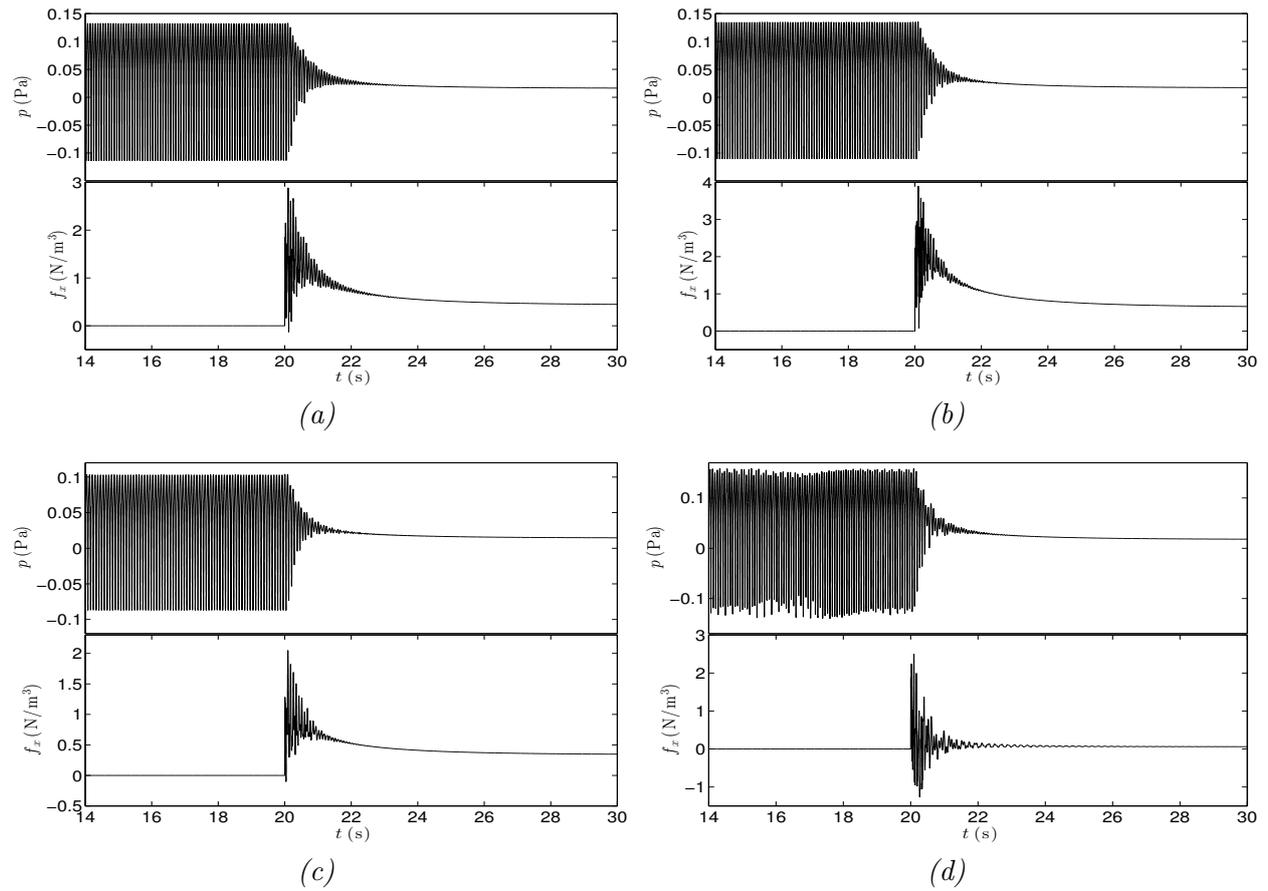


FIGURE 5.6 – Contrôle optimal en boucle fermée pour diverses configurations d'écoulement de cavité. (a)  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m, (b)  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m, (c)  $Re = 7000$ ,  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m et (d)  $Re = 8000$ ,  $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m. Pression au niveau du point impactant (en haut) et signal de commande (en bas).

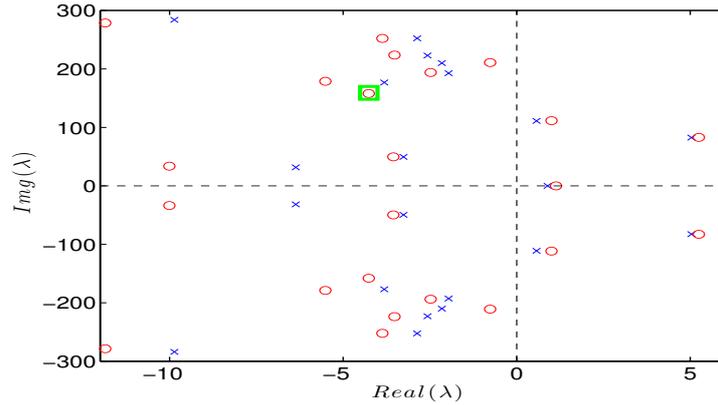


FIGURE 5.7 – Comparaison entre les valeurs propres des modèles réduits de l'écoulement de cavité à  $Re = 7500$  avec deux épaisseurs de quantité de mouvement :  $12.1 \times 10^{-4}$  m (croix bleu) et  $11.9 \times 10^{-4}$  m (cercle rouge).

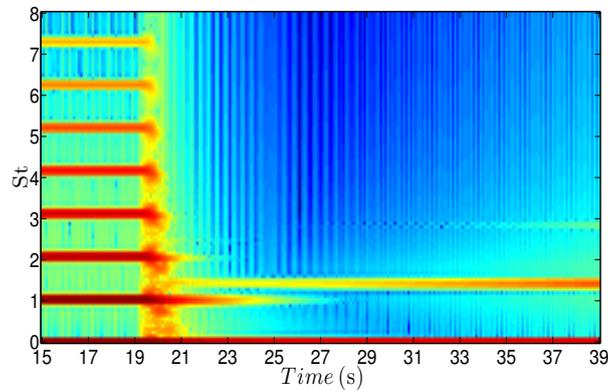


FIGURE 5.8 – Contrôle en boucle fermée pour la cavité  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m avec le contrôleur optimal synthétisé à partir du modèle réduit de la cavité a)  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m, où le contrôle est allumé à  $t = 20$  s.

à un mode additionnel stable, entouré par un carré vert sur la figure 5.7. Nous pensons que cet ajout de mode sert à approximer au mieux le retard introduit par l'advection de perturbation via la couche cisailée de l'amont vers l'aval de la cavité. En effet, les retards sont souvent approximatés par des fonctions rationnelles, dont la précision augmente en fonction de l'ordre du polynôme (approximation de Padé).

Une valeur propre réelle proche de l'origine a été trouvée dans tous les modèles linéaires des configurations de cavité étudiées. Cette valeur propre modélise probablement l'action de l'actionneur sur l'écoulement (voir figure 5.9). L'actionneur est représenté par une force volumique proportionnelle à une accélération et par conséquent proportionnelle à une dérivée temporelle de la vitesse locale. Par conséquent, il nous semble logique qu'une telle action soit présente dans un modèle linéaire de l'écoulement de cavité, sous forme d'un pôle nul, pour la fonction de transfert entre la force appliquée et la pression. Cependant, cette valeur se trouve sur l'axe des réels mais différente de zéro (voir figure 5.7). Nous supposons que le décalage est dû au manque de précision du modèle linéaire identifié par une troncature équilibrée.

Le signal de commande  $f_x$  résultant des contrôleurs optimaux est non évanescent, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.6. Pour avoir une commande évanescente, il est nécessaire d'introduire une action intégrale dans la procédure de synthèse du correcteur  $H_2$  pour annuler la composante continue. Cependant, pour ajuster la dynamique du rejet de la composante continue, nous avons choisi d'enlever la valeur moyenne mobile de la pression. Pour cette opération, nous n'utilisons pas un filtre passe-haut car le contrôleur synthétisé fournit une marge de phase très faible : nous ne souhaitons donc pas introduire un décalage de phase qui pourrait déstabiliser le système en boucle fermée. Nous préférons donc utiliser un filtre à fenêtrage glissante, comme décrit dans le chapitre 3, pour enlever la valeur moyenne  $p_{avg}(t)$  de la pression  $p(t)$ . Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.10, le résultat est très prometteur, puisque le signal de commande est de faible intensité.

Nous avons noté que le contrôleur optimal synthétisé pour la cavité à  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m stabilise aussi les modèles linéarisés de l'écoulement de cavité à  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m ainsi que la cavité à  $Re = 7000$  avec  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m, ce qui lui confère une certaine robustesse face aux changements de configuration. Malheureusement, ce contrôleur ne stabilise pas le modèle linéaire pour  $Re = 8000$ ,  $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m. La même gamme de robustesse est observée sur l'écoulement de cavité lui-même, où le contrôleur linéaire identifié pour  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m est actionné à  $t = 20$  s sur les trois autres configurations (voir figure 5.11).

Bien que le contrôleur à retard décrit dans le chapitre 3 soit capable de stabiliser l'écoulement de base stationnaire de la cavité de toutes les configurations investies, il échoue à stabiliser les modèles linéaires. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.12, la valeur propre instable en basses fréquences du système, pour la cavité  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m, est non stabilisée par un contrôle à retard en boucle fermée. Ceci est probablement due à la troncation de l'équation (4.27), où les valeurs singulières les moins énergétiques sont négligées. Ces valeurs singulières négligées peuvent altérer l'identification du gain statique. Ainsi, la nature non-linéaire du système pourrait contribuer au manque de précision dans l'identification. Néanmoins, ces modèles linéaires demeurent utiles à l'identification de la dynamique la plus dominante dans l'écoulement de cavité.

Notons que cette étude de robustesse de correcteur, face aux changements paramétriques de modèle, a été effectuée a posteriori. Nous avons tenté d'effectuer une analyse non-structurée de la robustesse du contrôleur face à une dynamique négligée, en prenant par exemple pour modèle initial,  $G_0(s)$ , le modèle linéarisé de la cavité à  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m, tandis que le modèle  $G(s)$  le plus précis est donné par le modèle linéarisé du même écoulement avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m. Peu importe la forme choisie pour modéliser l'incertitude  $\Delta(s)$  (voir figure 5.14), aucune étude d'analyse non-structurée de robustesse ne peut être menée, même si l'on change les modèles linéaires des différentes configurations d'écoulement de cavité étudiées. En effet, toutes ces formes de modélisation mènent à une dynamique négligée instable, or une telle analyse n'est possible qu'avec une dynamique négligée stable. Ceci est dû en partie aux pôles instables des modèles pour les différentes configurations de l'écoulement, et également aux zéros instables.

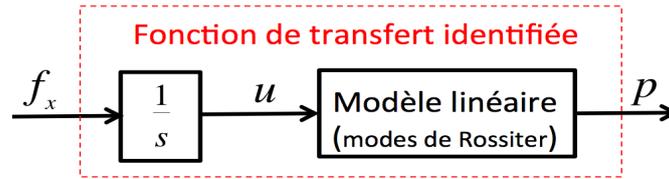
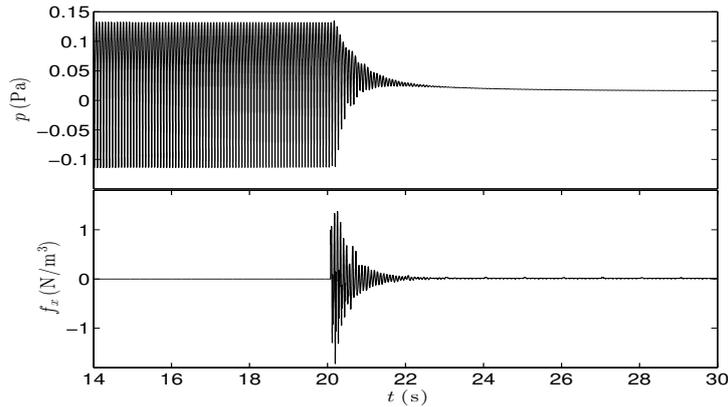


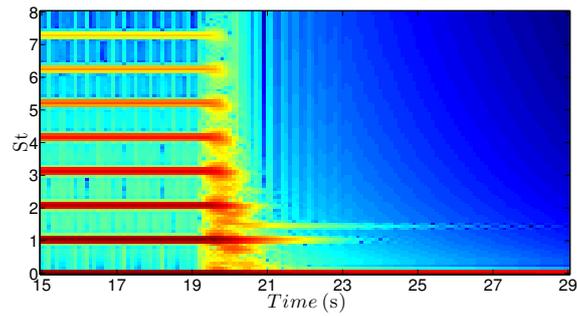
FIGURE 5.9 – Schéma blocs d'indentification.

FIGURE 5.10 – Contrôle en boucle fermée pour la cavité  $Re = 7500$ ,  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m avec un retour de pression sans sa valeur moyenne mobile  $p_{avg}(t)$ . La pression au niveau du point impactant (en haut) avec le signal de commande (en bas).

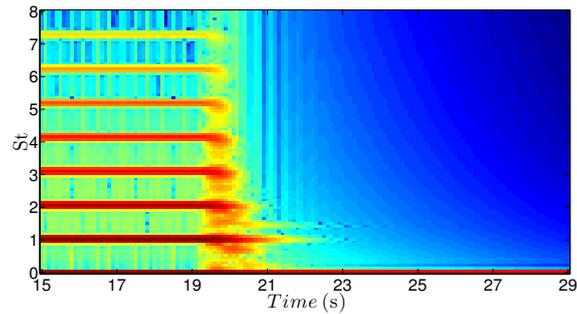
Notons également qu'une synthèse de correcteur LPV (Linéaire à Paramètre Variant) n'est pas envisageable à partir des modèles obtenus. En effet les variations paramétriques des modèles lors du changement du nombre de Reynolds ne sont pas aisée à mettre sous forme polytopique.

Une variation simplifiée de cette technique LPV a été proposée dans [III09] pour le contrôle de l'écoulement de cavité, en effectuant un séquençement de gain à partir du rapport entre le nombre de Strouhal (voir l'équation (1.11)) pour l'interpolation des correcteurs LQG pour les différents écoulements de cavité étudiés. Malheureusement, cette proposition n'a pas amélioré la performance des correcteurs LQG [III09].

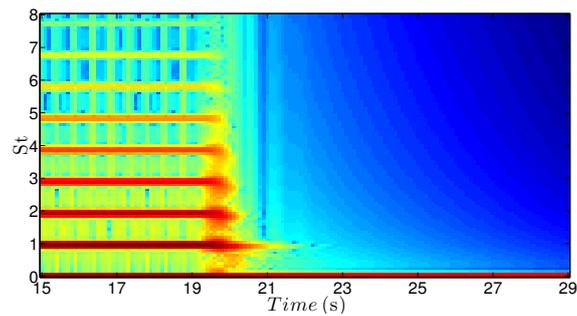
Rappelons que dans [III09], un contrôle adaptatif basé sur la théorie de stabilité de Lyapunov [EDA03], a été appliqué avec succès en stabilisant une large gamme de configurations d'écoulement. Malheureusement, cette technique impose des restrictions sur la boucle fermée qui doit être strictement réelle positive. Ce qui a amené l'auteur dans [III09] à colocaliser l'emplacement du correcteur et du capteur, afin d'obtenir un modèle à déphasage minimal pour satisfaire ces restrictions. Il est à noter que cet arrangement ne peut pas être appliqué en condition expérimentale, c'est la raison pour laquelle nous avons écarté cette piste, notre objectif final étant de supprimer les oscillations de la couche cisailée du banc expérimental.



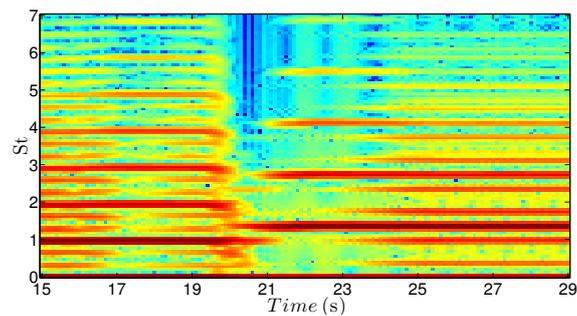
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 5.11 – Performance du contrôle en boucle fermée pour diverses configurations d'écoulement de cavité avec le contrôleur optimal  $H_2$  synthétisé à partir du modèle d'ordre réduit de la cavité  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 11.9 \times 10^{-4}$  m, illustré à partir du spectrogramme de pression de la cavité concernée (a); (b), (c) respectivement pour l'écoulement de cavité à  $Re = 7500$  avec  $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m,  $Re = 7000$  avec  $\theta_0 = 12.5 \times 10^{-4}$  m et  $Re = 8000$  avec  $\theta = 11.7 \times 10^{-4}$  m.

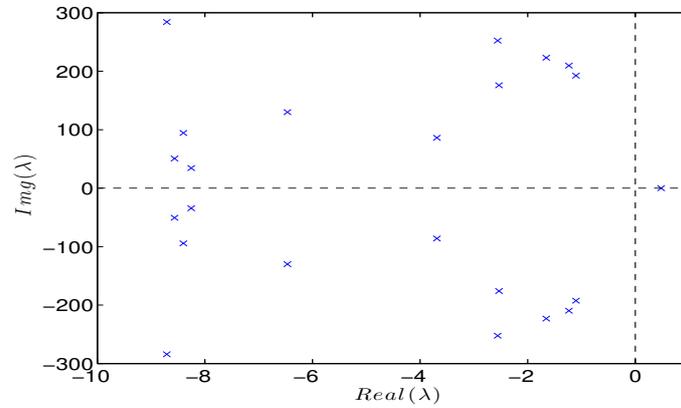


FIGURE 5.12 – Valeurs propres en boucle fermée du modèle d'ordre réduit de l'écoulement de cavité  $Re = 7500$  ( $\theta_0 = 12.1 \times 10^{-4}$  m) avec le contrôleur à retard.

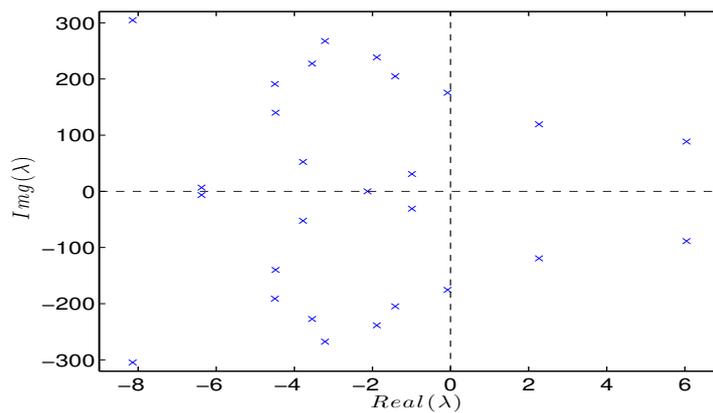


FIGURE 5.13 – Valeurs propres du modèle d'ordre réduit de l'écoulement de cavité  $Re = 8000$  ( $\theta_0 = 11.7 \times 10^{-4}$  m).

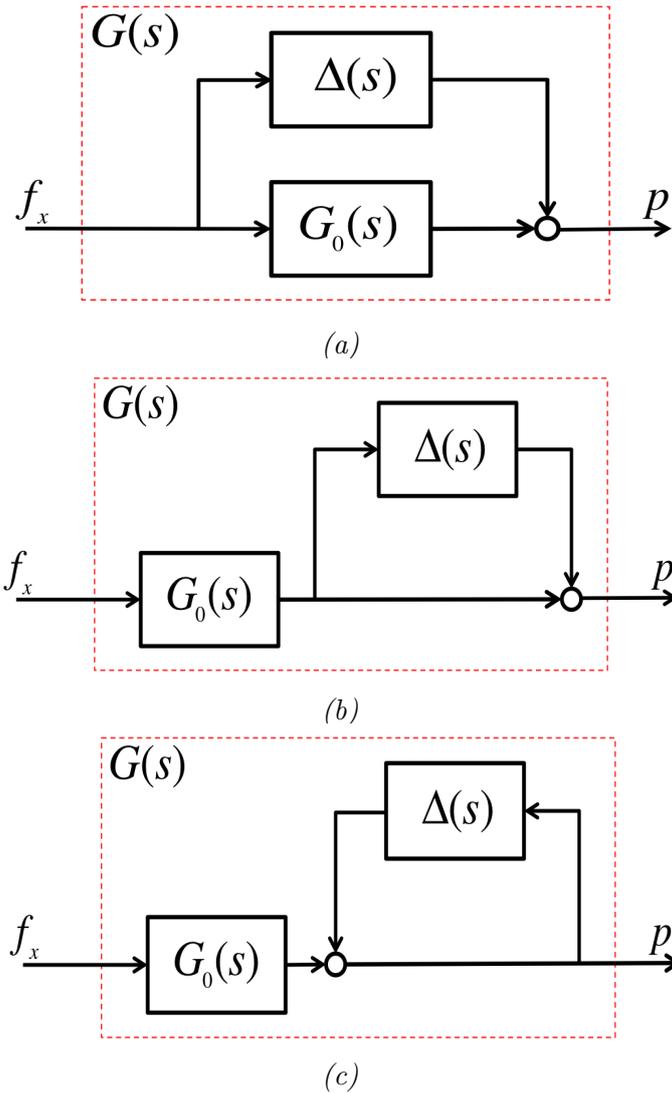


FIGURE 5.14 – Différentes formes de modélisation d’incertitude dynamique non-structurée : (a) Forme additive, (b) forme multiplicative directe (c) forme multiplicative inverse.

## 5.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à l’analyse des modèles linéaires de l’écoulement de cavité obtenus par OCID (voir 4.3.1). Nous avons pu voir que ces modèles sont très utiles à la compréhension des phénomènes observés dans l’écoulement de cavité et en particulier aux déclenchements des instabilités dans la couche cisailée. Ces dernières sont principalement dues aux modes les plus instables de la dynamique linéaire de l’écoulement de cavité. Nous avons également pu donner une explication sur le phénomène de compétition de modes observés en régime compressible et aussi en régime incompressible.

Nous avons introduit également une synthèse  $H_2$  de correcteur appropriée aux modèles obtenus par identification. Ces correcteurs se révèlent robustes aux changements de configuration  $(Re, \theta_0)$  de l’écoulement. Cette étude de robustesse s’est effectuée a posteriori. En raison de la complexité des modèles obtenus, aucune autre étude linéaire classique de robustesse a priori n’a pu être menée,

comme l'analyse non-structurée de robustesse, ou séquençement de gain.

# Conclusion et perspectives

L'écoulement de cavité constitue un benchmark complet pour la compréhension du phénomène d'instabilité menant aux oscillations auto-entretenues de la couche cisailée. Cette instabilité représente dans plusieurs applications la principale source de nuisance sonore.

Nous avons vu que le contrôle d'un tel dispositif en boucle ouverte ne résout en aucun cas le problème d'oscillations. Avec un tel contrôle, nous pouvons même s'attendre à des surprises : amplification de l'amplitude des oscillations, excitation d'autres fréquences d'oscillations, consommation énergétique élevée, etc. . . . Pour pallier à ces difficultés, il est nécessaire de revoir cette stratégie classique de contrôle de la communauté des mécaniciens des fluides en se rapprochant des automaticiens. Le contrôle en boucle fermée représente la solution adéquate permettant l'adaptation du contrôle à la configuration de l'écoulement. Néanmoins, son application nécessite la connaissance d'un modèle reproductif de la dynamique de l'écoulement de cavité. Classiquement, ce modèle est obtenu par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes engendrant un nombre excessif d'état. L'exploitation directe d'un tel modèle par la théorie pour la synthèse de commande en boucle fermée est impossible. C'est pour cette raison que ce mémoire s'est tourné en premier lieu vers la recherche d'un modèle d'ordre réduit facile à manipuler pour la synthèse d'un contrôleur.

Avant tout, nous avons introduit les notions de base nécessaires à la compréhension des mécanismes visibles lors d'un écoulement tout en expliquant le comportement dynamique de l'écoulement de cavité. Ceci est nécessaire pour l'établissement d'un modèle. A rappeler, pour les différentes configurations de cavité étudiées, l'écoulement se comporte comme un point d'équilibre instable saturé par les non-linéarités. Ceci a été mis en évidence par un simple tracé du portrait de phase d'une mesure locale.

Nous avons également présenté dans le chapitre 1 les principaux travaux d'identification d'un modèle de cavité menés ces vingt dernières années. Ces travaux présentent une expertise considérable et un socle pour notre étude. Ceci nous a inspiré dans la conception de la première tentative d'identification linéaire et de contrôle robuste  $H_\infty$ .

Nous avons vu qu'une telle démarche d'identification échoue à quantifier la dynamique responsable de l'apparition des oscillations de la couche cisailée, c'est la raison pour laquelle nous avons présenté deux procédures d'identification d'un modèle non-linéaire simplifiée. Ces méthodes d'identification ont fait leurs preuves sur des systèmes aérodynamiques [LPCC03]. La première méthode, basée sur l'oscillateur de Van der Pol, échoue à reproduire la dynamique de l'écoulement de cavité. La deuxième méthode est basée sur l'équation de Ginzburg-Landau. Vu les contraintes de son appli-

cation dans notre cas d'étude, elle n'a pas pu être menée à bout. Ceci est dû à la nécessité d'avoir un contrôleur stabilisant afin d'extraire les paramètres constituant l'équation de Ginzburg-Landau.

La suite du travail a été consacrée au développement de méthodes de contrôle empiriques sans modèle. Nous avons vu qu'un contrôle à retard en boucle fermée stabilise la couche cisailée et se révèle robuste face aux changements de configuration d'écoulement. Ce contrôle présente un tournant au déroulement de la thèse, car il a ouvert la voie à une identification en boucle fermée. La méthode ERA appliquée pour l'identification en boucle fermée a été choisie soigneusement en fonction de la dynamique intrinsèque de l'écoulement de cavité.

Une analyse approfondie des modèles linéarisés de divers écoulements de cavité, nous a permis de statuer sur les modes responsables de l'oscillation de la couche cisailée. Nous avons montré que les modes instables représentent les fréquences d'oscillations. Une synthèse  $H_2$  de contrôleur appropriés aux modèles identifiés a révélé une certaine robustesse face aux changements de configuration de cavité :  $Re$  et  $\theta_0$ .

En perspective, nous envisageons d'implémenter la loi de contrôle à retard sur un banc d'essai. C'est la raison pour laquelle nous envisageons de concentrer notre future recherche à l'extraction de la fonction de transfert de l'actionneur plasma afin d'implémenter cette loi de commande.

En terme d'identification, on souhaite de comparer les modèles obtenus par ERA aux modèles issus des lois de la physique comme la BPOD, afin d'avoir une idée claire sur les modes responsables de l'instabilité de la couche cisailée. Cette perspective est animée par l'incapacité du modèle BPOD combiné aux modes globaux instables à trouver un correcteur stabilisant le cycle limite d'un écoulement incompressible d'une cavité carrée [BSS09, SS13].

En terme de contrôle, il est impératif de chercher d'autre loi de contrôle stabilisant une gamme large de configurations de cavité. Nous pensons à la commande adaptative [EDA03].

# Bibliographie

- [Adr79] R. J. ADRIAN : On the role of conditional averages in turbulence theory. *Turbulence in Liquids*. Science Press, Princeton, 1979.
- [Ahu09] S. AHUJA : Thèse de doctorat, Reduction Methods for Feedback Stabilization of Fluid Flows, Princeton University. September 2009.
- [AM88] R. J. ADRIAN et P. MOIN : Stochastic estimation of organized turbulent structure : homogeneous shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 190:531–559, May 1988.
- [Ast00] K. J. ASTRÖM : Limitations on control system performance. *European Journal of Control*, 6(1):2–20, 2000.
- [Bal96] E. BALMÉS : Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization. In *14th International Modal Analysis Conference*, volume 1, pages 540–546, February 1996.
- [BBH09] S. BAGHERI, L. BRANDT et D. S. HENNINGSON : Input–output analysis, model reduction and control of the flat-plate boundary layer. *Physics of Fluids*, 620:263–298, February 2009.
- [BDTR<sup>+</sup>92] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J-P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS : *Modélisation et identification des processus Tome1*. Editions Technip, 1992.
- [BHN99] R.H. BYRD, M. E. HRIBAR et J. NOCEDAL : An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):877–900, July 1999.
- [BJS05] A. G. BALANOV, N. B. JANSON et E. SCHÖLL : Delayed feedback control of chaos : Bifurcation analysis. *Physical Review E*, 71:016222, January 2005.
- [BPL<sup>+</sup>11] J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE et N. DELPRAT : Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV. *Experiments in Fluids*, 50(4):905–918, 2011.
- [BSS09] A. BARBAGALLO, D. SIPP et P. J. SCHMID : Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:1–50, July 2009.
- [Car48] M. L. CARTWRIGHT : Forced oscillations in nearly sinusoidal systems. *Journal of The Institute of Electrical Engineers*, 98(3):88–96, 1948.

- [CGB94] T. C. CORKE, M. N. GLAUSER et G. BERKOOZ : Utilizing low-dimensional dynamical systems models to guide control experiments. *Applied Mechanics Reviews*, 47(6):311–327, June 1994.
- [CGCL97] L. N. CATTAFESTA, S. GARG, M. CHOUDHARI et F. LI : Active control of flow-induced cavity resonance. *AIAA Paper 97-1804, 28th Fluid Dynamics Conference*, June 1997.
- [CKCG06] R. H. CABELL, M. A. KEGERISE, D. E. COX et G. P. GIBBS : Experimental feedback control of flow-induced cavity tones. *AIAA*, 44(8):1807–1815, August 2006.
- [CLD<sup>+</sup>07] E. CARABALLO, J. LITTLE, M. DEBIASI, A. SERRANI et M. SAMIMY : Reduced-order model for feedback control of cavity flow – the effects of control input separation. *AIAA Paper 2007-1125, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and exhibit*, January 2007.
- [CRDG13] D. CARUANA, F. ROGIER, G. DUFOUR et C. GLEYZES : The plasma synthetic jet actuator, physics, modeling and flow control application on separation. *Journal AerospaceLab*, 6, June 2013.
- [CSW<sup>+</sup>08] L. N. CATTAFESTA, Q. SONG, D. R. WILLIAMS, C. W ROWLEY et F. ALVI : Active control of flow- induced cavity oscillations. *Prog. Aerosp. Sci.*, pages 459–502, 2008.
- [CWRA03] L. N. CATTAFESTA, D. R. WILLIAMS, C. W ROWLEY et F. ALVI : Review of active control of flow-induced cavity resonance. *AIAA Paper 2003-3567, AIAA Fluid Dynamics Conference*, June 2003.
- [DFW83] A. P. DOWLING et J E. FLOWCS WILLIAMS : *Sound and sources of sound*. Ellis Horwood, 1983.
- [Dou14] C. DOUAY : Thèse de doctorat, Étude expérimentale paramétrique des propriétés et transitions de lécoulement intra-cavitaire en cavité ouverte et contrôle de lécoulement, université pierre et marie curie. Mai 2014.
- [DSRB11] G. DERGHAM, D. SIPP, J. C. ROBINET et A. BARBAGALLO : Model reduction for fluids using frequential snapshots. *Physics of Fluids*, 23:064101, June 2011.
- [EDA03] S. EVESQUE, A. P. DOWLING et A. M. ANNASWAMY : Self-tuning regulators for combustion oscillations. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2035):1709–1749, July 2003.
- [FL99] U. FORSELL et L. LJUNG : Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35(7):1215–1241, January 1999.
- [GA94] P. GAHINET et P. APKARIAN : A linear matrix inequality approach to  $h_\infty$  control. *International Journal Robust and Non Linear Control*, 4(4):421–448, 1994.
- [GBB03a] X. GLOERFELT, C. BOGEY et C. BAILLY : Numerical evidence of mode switching in the flow-induced oscillations by a cavity. *International Journal of Aeroacoustics*, 2(2):193–217, April 2003.

- [GGB03b] X. GLOERFELT, C. BOGEY et C. BAILLY : Numerical investigation of the coexistence of multiple tones in flow-induced cavity noise. *AIAA Paper 2003-3234*, May 2003.
- [GCI01] S. GARG et L. N. CATTAFESTA III : Quantitative schlieren measurements of coherent structures in a cavity shear layer. *Experiments in Fluids*, 30:123–134, March 2001.
- [GH83] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES : Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Springer-Verlag*, 3:453, 1983.
- [GPT99a] W. R. GRAHAM, J. PERAIRE et K. Y. TANG : Optimal control of vortex shedding using low-order models. part 1 - open-loop model development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(7):945–972, February 1999.
- [GPT99b] W. R. GRAHAM, J. PERAIRE et K. Y. TANG : Optimal control of vortex shedding using low-order models. part 2 - model-based control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(7):973–99, May 1999.
- [HHC71] H. H. HELLER, D. G. HOLMES et E. E. COVERT : Flow induced pressure oscillations in shallow cavities. journal of sound and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 18(4):545–553, October 1971.
- [Ill09] S. J. ILLINGWORTH : Thèse de doctorat, Feedback control of oscillations in combustion and cavity flow, Magdalene College/University of Cambridge. November 2009.
- [IMR11] S. J. ILLINGWORTH, A. S. MORGANS et C. W. ROWLEY : Feedback control of flow resonances using Balanced Reduced-Order Models. *Journal of Sound and Vibration*, 330(8):1567–1581, April 2011.
- [IMR12] S. J. ILLINGWORTH, A. S. MORGANS et C. W. ROWLEY : Feedback control of cavity flow oscillations using simple linear models. *Journal of Fluid Mechanics*, 709:223–248, August 2012.
- [IR08] M. ILAK et C. W. ROWLEY : Modeling of transitional channel flow using balanced proper orthogonal decomposition. *Physics of Fluids*, 20, 034103, March 2008.
- [JP85] J. N. JUANG et R. S. PAPPAS : An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 8(5):620–627, November 1985.
- [JP94] J. N. JUANG et M. PHAN : Identification of system, observer, and controller from closed-loop experimental data. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(1):91–96, February 1994.
- [Kas12] K. KASPER : Mémoire de fin d'étude, Commande multi-objectifs des systèmes à grande dimension - Application à la mécanique des fluides, M2 ATSI - SUPELEC, ENS Cachan. Juin 2012.

- [KCH02] M. A. KEGERISE, L. N. CATTAFESTA et C. S. HA : Adaptive identification and control of flow induced cavity oscillations. *AIAA Paper 2002-3158, 1st AIAA Flow Control Conference*, June 2002.
- [KDSS07] K. KIM, M. DEBIASI, A. SERRANI et M. SAMIMY : System identification and feedback control of a synthetic jet-like compression driver actuators. *AIAA Paper 2007-0880, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and exhibit*, January 2007.
- [KMF02] H. KOOK, L. MONGEAU et M. A. FRANCKEK : Active control of pressure fluctuations due to flow over Helmholtz resonators. *Journal sound and vibration*, 255(1):61–76, 2002.
- [Kri55] K. KRISHNAMURTY : Acoustic radiation from two dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces. *NACA Technical Note 3487*, August 1955.
- [LB98] J. L. LUMLEY et P. BLOSSEY : Control of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30:133–138, January 1998.
- [Lel02] S. LELEU : Thèse de doctorat, Amortissement actif des vibrations d’une structure flexible de type plaque à l’aide de transducteurs piézoélectriques, École Normale Supérieure de Cachan. 2002.
- [LGN<sup>+</sup>09] D. K. LUCHTENBURG, B. GUÑTHER, B. R. NOACK, R. KING et G. TADMOR : A generalized mean-field model of the natural and high-frequency actuated flow around a high-lift configuration. *Journal of Fluid Mechanics*, 623:283–316, March 2009.
- [LMG00] S. LALL, J. E. MARSDEN et S. GLAVASKI : A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems. *Robust Nonlinear Control*, 12:519–535, August 2000.
- [LPCC03] A. LE POURHIET, M. CORREGE et D. CARUANA : Control of self-oscillating systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, 150(6):599–610, November 2003.
- [LPL08] F. LUSSEYRAN, L. PASTUR et C. LETELLIER : Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow. *Physics of Fluids*, 20. 114101:193–217, 2008.
- [LPLM70] A. LE POURHIET et J. F. LE MAITRE : Une méthode générale d’étude de la stabilité d’un système non linéaire oscillant. *International Journal of Control*, 12(2):281–288, 1970.
- [LPP71] A. LE POURHIET et J.-G. PAQUET : Jump phenomenon in a van der pol oscillator. *Automatica*, 7(4):481–487, July 1971.
- [Lum67] J. LUMLEY : The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric turbulence and Wave Propagation*, pages 166–176, 1967.
- [MB00] I. MEZIC et A. BANASZUK : Comparison of systems with complex behavior : spectral methods. In *Decision and Control. Proceedings of the 39th IEEE Conference*, volume 2, pages 1224–1231. IEEE, December 2000.

- [MKF98] L. MONGEAU, H. KOOK et M. A. FRANCK : Active control of flow-induced cavity resonance. *AIAA/CEAS Paper 98-2349, 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, June 1998.
- [Moo81] B. MOORE : Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1):17–32, February 1981.
- [Mor07] E. MOREAU : Airflow control by non-thermal plasma actuators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40:605–636, January 2007.
- [NAM<sup>+</sup>03] B. NOACK, K. AFANASIEV, M. MORZYŃSKI, G. TADMOR et F. THIELE : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497:335–363, December 2003.
- [NTM04] B. NOACK, G. TADMOR et M. MORZYŃSKI : Low-dimensional models for feedback flow control. Part I : Empirical Galerkin models. *AIAA Paper 2004-2408, in 2nd AIAA Flow Control Conference*, June 28 – July 1 2004.
- [NW69] A.C. NEWELL et J. A. WHITEHEAD : Finite bandwidth amplitude convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 38:279–303, march 1969.
- [Piv13] C. PIVOT : Mémoire de fin d'étude, Stabilization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems, M2 DFE - SUPELEC, University Paris-SUD. July 2013.
- [PJHL94] M. PHAN, J. N. JUANG, L. G. HORTA et R. W. LONGMAN : System identification from closed-loop data with known output feedback dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(4):661–669, August 1994.
- [PLF<sup>+</sup>08] L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE, Y. FRAIGNEAU, R. PETHIEU et P. DEBESSE : Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium Reynolds number. *International Journal of Aeroacoustics*, (4):597–608, 2008.
- [RCM04] C. W. ROWLEY, T. COLONIUS et R. M. MURRAY : Model reduction for compressible flow using POD and Galerkin projection. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 189(1–2):115–129, February 2004.
- [RJ05] C. W. ROWLEY et V. JUTTIJUDATA : Model-based control and estimation of cavity flow oscillations. *in the 44th IEEE conference on decision and contro*, 2:512–517, December 2005.
- [Ros55] A. ROSHKO : Some measurements of flow in a rectangular cutout. *NACA Technical Note 3488*, August 1955.
- [Ros64] J. E. ROSSITER : Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, (3438), Octobre 1964.

- [Row05] C. W. ROWLEY : Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(3):997–1013, March 2005.
- [RT71] D. RUELLE et F. TAKENS : On the nature of Turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20:167–192, 1971.
- [RWC<sup>+</sup>02] C. W. ROWLEY, D. R. WILLIAMS, T. COLONIUS, R. M. MURRAY, Macmartin D. G. et D. FABRIS : Model-based control of cavity oscillations, part ii : system identification and analysis. *AIAA Paper 2002-0972, 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, January 2002.
- [Sch93] J. M. A. SCHERPEN : Balancing for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 21:143–153, January 1993.
- [SDC<sup>+</sup>07] M. SAMIMY, M. DEBIASI, E. CARABALLO, A. SERRANI, X. YUAN, J. LITTLE et J. H. MYATT : Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:315–346, November 2007.
- [SL07] D. SIPP et A. LEBEDEV : Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 593:333–358, August 2007.
- [Smi57] O. J. M. SMITH : Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 53(5):217–219, 1957.
- [SS88] T. SHÖDERSTRÖM et P. STOICA : *System Identification*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1988.
- [SS13] D. SIPP et P. SCHMID : Closed-loop control of fluid flow : a review of linear approaches and tools for the stabilization of transitional flows. *Journal AerospaceLab*, 6, June 2013.
- [SSF<sup>+</sup>08] S. G. SIEGEL, J. SEIDEL, C. FAGLEY, D. M. LUCHTENBURG, K. COHEN et T. MCLAUGHLIN : Low-dimensional modelling of a transient cylinder wake using Double Proper Orthogonal Decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, 610:1–42, September 2008.
- [SSO87] K. R. SREENIVASAN, P. J. STRYKOWSKI et D. J. OLINGER : Hopf bifurcation, landau equation, and vortex shedding behind circular cylinders. *Forum on Unsteady Flow Separation, Cincinnati, OH, June 14–17, 1987, Proceedings (A88-14141 03-34)*. New York, American Society of Mechanical Engineers, pages 1–13, 1987.
- [TND<sup>+</sup>03] G. TADMOR, B. NOACK, A. DILLMANN, J. GERHARD, M. PASTOOR, R. KING et M. MORZYŃSKI : Control, observation and energy regulation of wake flow instabilities. *in 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, 3:2334–2339, 9–12, December 2003.

- [TNMS04] G. TADMOR, B. NOACK, M. MORZYŃSKI et S. SIEGEL : Low-dimensional models for feedback flow control. part II : Controller design and dynamic estimation. *AIAA Paper 2004-2409, in 2nd AIAA Flow Control Conference*, June 28 – July 1 2004.
- [VDH98] P. VAN DER HOPP : Closed-loop issues in system identification. *Annual reviews in control*, 22(7):173–186, 1998.
- [Wel67] P. D. WELCH : The use of fast fourier transforms for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15:70–73, June 1967.
- [WFM00] D. R. WILLIAMS, D. FABRIS et J. MORROW : Experiments on controlling multiple acoustic modes in cavities. *AIAA Paper 2002-1903, 6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference*, Jun 2000.
- [YDY<sup>+</sup>06] P. YAN, M. DEBIASI, X. YUAN, J. JESSE LITTLE, H. OZBAY et M. MO SAMIMY : Experimental study of linear closed-loop control of subsonic cavity flow. *AIAA*, 44(5): 929–938, October 2006.
- [ZDG96] K. ZHOU, J.C. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and Optimal Control*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1996.
- [Zho06] Q. C. ZHONG : *Robust Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag London Limited, 2006.
- [ZN42] J.G. ZIEGLER et N.B. NICHOLS : Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 64:759–768, 1942.
- [ZSW99] K. ZHOU, G. SALOMON et E. WU : Balanced realization and model reduction for unstable systems. *Robust Nonlinear Control*, 9:183–198, March 1999.