



HAL
open science

Comportement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles

Agathe Decaster

► **To cite this version:**

Agathe Decaster. Comportement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT : 2015LYO10271 . tel-01327950

HAL Id: tel-01327950

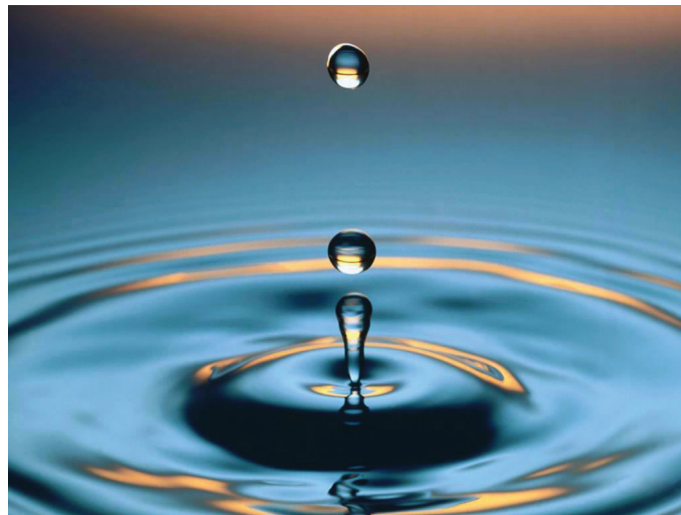
<https://theses.hal.science/tel-01327950>

Submitted on 7 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement asymptotique
des solutions des équations de Navier-Stokes
stationnaires incompressibles



Agathe Decaster

Thèse de doctorat

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
INSTITUT CAMILLE JORDAN - UMR 5208
ÉCOLE DOCTORALE INFOMATHS

Thèse de l'Université de Lyon
pour l'obtention du
Diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques
(arrêté du 7 août 2006)

Présentée par
Agathe DECASTER

**Comportement asymptotique des solutions des
équations de Navier-Stokes stationnaires
incompressibles**

Thèse dirigée par Dragoş IFTIMIE
soutenue publiquement le 8 décembre 2015,
devant un jury composé de :

Lorenzo BRANDOLESE	Université Lyon 1	Examineur
Isabelle GALLAGHER	Université Paris Diderot	Examinatrice
Matthieu HILLAIRET	Université Montpellier 2	Rapporteur
Dragoş IFTIMIE	Université Lyon 1	Directeur
Peter WITTWER	Université de Genève	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Dragoş Iftimie, pour ces années de travail en commun. Toujours très disponible, il m'a permis de découvrir ce sujet extrêmement intéressant de l'étude des équations de Navier-Stokes et plus généralement le monde de la recherche en mathématiques. Malgré les hauts et les bas de la recherche, travailler avec lui fut un plaisir et sa patience fut sans égale.

Je remercie également mes rapporteurs Matthieu Hillairet et Peter Wittwer pour la lecture et les commentaires précieux qu'ils ont effectués sur mon travail. Par ailleurs, je rends hommage à vos travaux sur ce sujet d'étude dont la lecture a été très enrichissante tout au long de ma thèse. Merci enfin à Lorenzo Brandolese et Isabelle Gallagher d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je souhaite rendre hommage à tous les membres de l'ICJ qui m'ont accompagnée durant ma thèse : le personnel administratif qui m'a permis de faire toutes les démarches que je souhaitais, Elisabeth Mironescu et Sylvie Benzoni pour leur écoute et leurs conseils sur le déroulement de ma thèse. Mais également toutes les personnes que j'ai pu côtoyer durant ces années, en particulier les membres des équipes EDPA et MMCS, dans lesquelles il fait toujours bon travailler.

Je remercie particulièrement les doctorants du bureau 111a et assimilés : Blanche, Adriane, Thomas, Matthias, François, Benoît, François, Corentin, Niccolo et tous ceux qui sont arrivés dans la dernière année, avec qui j'ai passé d'excellents moments de convivialité. Après les avoir fréquentés je suis certaine de ne jamais perdre le sens de l'auto-dérision.

Merci aussi à tous mes amis hors du laboratoire, notamment mes deux colocataires successifs, Damien et Amandine, avec qui j'ai pu passer de bons moments après de longues journées de travail, le groupe autour du club théâtre de l'ENS, et tous mes camarades qui m'ont permis de bien m'aérer l'esprit et que j'ai toujours plaisir à voir.

Enfin un grand merci à ma famille qui m'a soutenue durant toutes ces années : mes parents qui m'organisent toujours des week-end très agréables, mon frère et ma soeur avec qui j'ai plaisir à parler et passer du bon temps, mais également toute la tribu des Barré, toujours là pour faire la fête. Après m'avoir demandé tant de fois mon sujet de thèse, j'aurai peut-être réussi à vous faire comprendre ce sur quoi je travaille.

Désolée pour toutes celles et tous ceux que j'oublie, je n'ai certainement pas fait le tour des personnes qui ont compté durant ces années, alors j'adresse à tout le monde un grand merci.

Table des matières

Remerciements	iii
1 Introduction	1
1.1 Présentation des équations de Navier-Stokes	1
1.2 Précédents travaux	3
1.2.1 Les solutions de Leray	3
1.2.2 La dimension 3	5
1.2.3 La dimension 2	8
1.3 Résultats de la thèse	12
1.3.1 La dimension 3	12
1.3.2 La dimension 2	14
2 Généralités	17
2.1 Un lemme de point fixe	17
2.2 Opérateurs de Bogovskii	19
2.3 Solutions fondamentales de l’opérateur de Stokes	23
3 Solutions dans \mathbb{R}^3 tout entier	33
3.1 Introduction	33
3.2 Principaux résultats et notations	35
3.3 Une condition nécessaire	37
3.4 Solutions homogènes	39
3.5 Comportement asymptotique pour les solutions générales	42
3.6 Le cas du domaine extérieur	47
4 Le cas du demi-espace	53
4.1 Introduction	53
4.2 Notations et résultat principal	54
4.3 Preuve du résultat principal	57
4.4 Étude du terme dominant dans le développement asymptotique	64
4.5 Autres comportements asymptotiques	67
5 Solutions homogènes en dimension 2	71
5.1 Introduction	71
5.2 Simplification de l’équation	73
5.3 Résolution de l’équation linéaire	75
5.4 Résolution de l’équation complète	78
5.5 Solutions homogènes “pertinentes”	81

6 Solutions symétriques en dimension 2	83
6.1 Introduction	83
6.2 Notations et résultat principal	84
6.3 Preuve du résultat principal	86
6.4 Le cas d'un domaine extérieur	96
6.5 Comportement asymptotique en $1/ x $	98
Bibliographie	107

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Présentation des équations de Navier-Stokes	1
1.2	Précédents travaux	3
1.3	Résultats de la thèse	12

1.1 Présentation des équations de Navier-Stokes

Dans ces travaux, nous considérons un fluide incompressible \mathcal{F} qui remplit un domaine fixé Ω de \mathbb{R}^n (ici, n sera égal à 2 ou 3). On sait que le mouvement de ce fluide est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u &= \operatorname{div} T(u, p) + f && \text{dans } (0; +\infty) \times \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{dans } (0; +\infty) \times \Omega. \end{aligned}$$

Dans ces équations, les inconnues sont $u(x, t)$, la vitesse moyenne des particules en un point x de Ω à l'instant t et $p(x, t)$ qui est la pression dans le fluide au point x et à l'instant t . La donnée est f qui désigne les forces volumiques extérieures s'exerçant sur le fluide. Par ailleurs, u et f sont des fonctions à valeurs vectorielles (dans \mathbb{R}^n) et p est une fonction à valeurs réelles. Ces équations traduisent la seconde loi de Newton appliquée à l'ensemble des particules constituant le fluide, le membre de gauche provenant de leur accélération et le membre de droite provenant des forces exercées sur ces particules. T est ainsi le tenseur des contraintes, c'est une fonction à valeurs matricielles dont la divergence donne les forces internes s'exerçant dans le fluide.

Enfin, la seconde équation traduit la conservation de la masse dans le cadre d'un fluide incompressible, c'est-à-dire si on considère que la masse volumique du fluide est uniforme et constante.

Il nous faut ensuite une loi qui nous donne $T(u, p)$ afin d'avoir une équation totalement explicite. Dans le cadre d'un fluide newtonien classique, on a la formule suivante :

$$T(u, p) = \nu(\nabla u + {}^t\nabla u) - pId$$

où Id désigne la matrice identité de \mathbb{R}^n et ν est la viscosité du fluide. On obtient donc le système

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

car le terme ${}^t\nabla u$ est de divergence nulle.

Ce système a été introduit tout d'abord par Navier dans son mémoire, puis a été retravaillé par Poisson, De Saint Venant et Stokes ([42], [9], [45], [49]) qui ont amélioré la dérivation des équations à partir des lois de la physique.

Pour résoudre cette équation, il nous manque certaines données. Comme c'est une équation d'évolution, on est amené à résoudre le problème de Cauchy associé, pour lequel il nous faut donc une donnée initiale $u(\cdot, 0) = u_0$. Ensuite, suivant le type de domaine Ω considéré, il faut imposer des conditions au bord (que ce soit dans le cas d'un vrai bord ou à l'infini).

Pour un domaine borné, on imposera des conditions au bord $u(t, x) = u^*(x)$ pour $x \in \partial\Omega$.

Pour le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on imposera simplement une condition à l'infini du type $u(t, x) \rightarrow u_\infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$ où u_∞ est un vecteur constant.

Dans le cas d'un domaine non borné mais pourvu d'un bord, comme par exemple un domaine extérieur (le complémentaire d'un compact) ou le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_n > 0\}$, on imposera à la fois une condition au bord $u(t, x) = u^*(x)$ et une condition à l'infini $u(t, x) \rightarrow u_\infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Concernant les aspects mathématiques, on voit déjà que la pression est une inconnue auxiliaire : si on connaît U et f , alors on connaît ∇p et donc p à une constante près. On voit notamment qu'en prenant la divergence de l'équation, on obtient :

$$\Delta p = \operatorname{div} f - \operatorname{div}((u \cdot \nabla)u)$$

qui est une équation elliptique pour laquelle les théories de résolution sont très avancées (d'ailleurs, cette équation ne dépend pas explicitement du temps, c'est pour cela qu'on n'a pas besoin de condition initiale pour p).

Par ailleurs, on verra dans la suite qu'on peut en fait se débarrasser de la pression pour obtenir des équations portant uniquement sur u . Dans cette thèse, lorsqu'on parlera d'une solution de l'équation de Navier-Stokes, on parlera donc d'une fonction u telle qu'il existe une fonction p telle que le couple (u, p) vérifie l'équation de Navier-Stokes.

On peut remarquer que ce cas est très différent du cas compressible, pour lequel on a une inconnue de plus (la masse volumique), et dans lequel on doit alors avoir une loi donnant la pression en fonction de la masse volumique, ce qui fait que la pression joue un rôle totalement différent dans l'équation.

Dans nos travaux nous nous intéresserons au cas stationnaire de cette équation, c'est-à-dire qu'on cherche des solutions ne dépendant pas du temps $u(t, x) = U(x)$. Il faut pour cela bien entendu supposer que les données ne dépendent pas non plus du temps, et cette étude peut avoir différentes applications. Ces solutions stationnaires peuvent notamment être de bonnes candidates pour le comportement en temps long des solutions d'évolution (par exemple quand le terme de force admet une limite quand $t \rightarrow \infty$). Par exemple, dans l'article [4], après avoir prouvé l'existence et l'unicité de solutions petites dans \mathbb{R}^3 au problème stationnaire, les auteurs prouvent que les solutions de l'équation d'évolution convergent vers ces solutions stationnaires.

Enfin, nous effectuerons une dernière réduction en prenant la viscosité égale à 1, ce qui n'est pas restrictif car il suffit, pour s'y ramener, de dilater l'espace. On étudiera donc dans cette thèse l'équation suivante :

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0. \tag{1.1.1}$$

Nous nous intéresserons tout particulièrement au comportement asymptotique des solutions de cette équation quand $|x| \rightarrow \infty$. Nous considérerons donc toujours des domaines non bornés (l'espace entier \mathbb{R}^n , des domaines extérieurs ou le demi-espace). Il nous faudra donc choisir une condition à l'infini, et nous étudierons dans ces travaux le cas $U_\infty = 0$. C'est un cas très différent de $U_\infty \neq 0$ car les systèmes linéarisés correspondants ont des propriétés très différentes. Dans le cas $U_\infty = 0$, le système linéarisé est le système de Stokes suivant :

$$-\Delta U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0$$

tandis que dans le cas $U_\infty \neq 0$ c'est le système d'Oseen suivant :

$$-\Delta U + (U_\infty \cdot \nabla)U + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} U = 0.$$

Pour ce qui est des conditions au bord, nous les considérerons aussi générales que possible, en nous restreignant quand nécessaire au cas d'une donnée à flux nul au bord (c'est-à-dire vérifiant $\int_{\partial\Omega} U^* \cdot \nu = 0$ où ν est la normale au bord $\partial\Omega$) et en faisant l'hypothèse que ces données sont petites lorsque nous faisons des raisonnements par perturbation.

1.2 Précédents travaux

Faisons maintenant le tour des résultats déjà obtenus dans la littérature sur le sujet.

1.2.1 Les solutions de Leray

Les travaux fondateurs sur la résolution de ce problème ont été ceux de Leray [39], prolongés par Ladyzhenskaya et Hopf ([37], [30]) dans lesquels les auteurs parviennent à prouver l'existence de solutions vérifiant l'estimation suivante

$$\int_{\Omega} |\nabla U|^2 \leq M \tag{1.2.1}$$

où $M > 0$ est une constante ne dépendant que des données du problème. En réalité, ces auteurs prouvent d'abord l'existence de solutions dans un domaine borné, puis ils les étendent à un domaine extérieur (ou à l'espace tout entier avec la même procédure). On va supposer dans cette partie que le domaine Ω est borné. L'estimation a priori (1.2.1) vient de (1.1.1) que l'on multiplie par U et que l'on intègre sur Ω (au moins formellement dans un premier temps). On a alors

$$\int_{\Omega} [-U \cdot \Delta U + ((U \cdot \nabla)U) \cdot U + U \cdot \nabla p] = \int_{\Omega} U \cdot f.$$

On effectue ensuite une intégration par parties. On supposera dans ces calculs une condition de Dirichlet homogène au bord ($U^* = 0$). On étendra ensuite le résultat au cas $U^* \neq 0$. En utilisant le fait que $\operatorname{div} U = 0$, le terme avec la pression disparaît, et en remarquant (toujours en utilisant $\operatorname{div} U = 0$) que $2(U \cdot \nabla)U \cdot U = \operatorname{div}(|U|^2 U)$ on en déduit que le terme non linéaire s'annule également. On obtient donc

$$\int_{\Omega} \nabla U : \nabla U = \int_{\Omega} f \cdot U.$$

Étant dans un domaine borné, on peut ensuite utiliser l'inégalité de Poincaré $\|U\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}$. On obtient alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\Omega} |\nabla U|^2 \leq C(\Omega)^2 \int_{\Omega} |f|^2. \quad (1.2.2)$$

Cette inégalité est fondamentale et elle nous pousse à travailler avec des champs de vecteurs de $W_0^{1,2}(\Omega)$ à divergence nulle. L'idée est ensuite de reformuler l'équation (1.1.1) au sens faible dans cet espace, puis de trouver des problèmes approchés que l'on va pouvoir résoudre et enfin de passer à la limite par compacité grâce à l'inégalité (1.2.2). C'est la méthode de Galerkin. La formulation faible est la suivante : on dit que U est solution faible de (1.1.1) si $U \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et si pour tout champ de vecteurs $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\operatorname{div} \psi = 0$ on a

$$\int_{\Omega} \nabla U : \nabla \psi + ((U \cdot \nabla)U) \cdot \psi = \int_{\Omega} f \cdot \psi.$$

On peut ensuite étendre cette formulation faible à toutes les fonctions $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ par densité, sachant que, d'après les inégalités de Sobolev et de Hölder, l'application $A : (U, V, W) \mapsto \int_{\Omega} (U \cdot \nabla)V \cdot W$ est continue sur $W_0^{1,2} \times W^{1,2} \times W_0^{1,2}$. On considère ensuite une suite de problèmes approchés en considérant une base hilbertienne convenable de $W_0^{1,2}(\Omega)$ et en projetant le problème sur une partie croissante mais finie de cette base. Cette suite de problèmes en dimension finie se résout facilement et, en utilisant l'estimation (1.2.2), on en déduit l'existence d'une solution comme limite faible de la suite de solutions approchées obtenues.

Ce résultat peut ensuite se généraliser à des conditions au bord non nulles ($U^* \neq 0$) en considérant un problème un peu différent : en écrivant $U = u + V$ avec V un champ de vecteurs de divergence nulle prolongeant U^* , on se ramène à résoudre

$$\begin{aligned} -\Delta u + u \cdot \nabla u + V \cdot \nabla u + u \cdot \nabla V + V \cdot \nabla V + \nabla p &= f + \Delta V \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Ce problème se résout de la même façon et assez facilement, la seule difficulté résidant dans le fait que, pour conserver l'inégalité (1.2.1), il faut majorer $A(u, V, u)$ par $\alpha\|\nabla u\|_{L^2}^2$ avec $\alpha < 1$. Il faut pour cela construire V de façon subtile. Il faut déjà avoir que $0 = \int_{\partial\Omega} U^* \cdot \nu$ car cela est une conséquence directe de la relation $\operatorname{div} V = 0$ intégrée sur Ω . Sous cette hypothèse de flux nul, dans le cas où le bord de Ω est connexe on parvient à construire facilement V satisfaisant l'inégalité voulue en prenant W telle que $\operatorname{curl} W = U^*$ sur $\partial\Omega$ (ici, l'opérateur curl désigne le rotationnel) et en posant $V = \operatorname{curl}(\psi_{\varepsilon}W)$ où ψ_{ε} est une fonction de troncature valant 1 près du bord de Ω et permettant de rendre la norme de ∇V aussi petite que voulu. Dans le cas où $\partial\Omega$ est constitué d'un nombre fini de composantes connexes, Leray avait traité le cas où le flux sur chacune de ces composantes est nul. Dans un cas plus général, des travaux ont été effectués en supposant que le domaine et les données (f et b) vérifient des conditions de symétrie ou bien en supposant que les flux à travers les différentes composantes de $\partial\Omega$ sont suffisamment petits. Dans le cas général, on peut citer l'article récent de Korobkov, Pileckas et Russo ([35]) qui traitent le cas général en dimension 2 et le cas avec symétries en dimension 3.

On a donc bien l'existence d'une solution sur tout domaine borné.

Enfin, le problème des solutions obtenues est qu'elles sont solutions dans un sens très faible, leur régularité n'est donc pas évidente. Cependant, comme l'équation linéarisée (l'équation de

Stokes) est elliptique, elle a un effet régularisant sur la solution, et ainsi, si les données (f et U^*) sont régulières, alors la solution sera régulière également. Nous appliquerons ce genre de raisonnement pour étendre nos résultats dans \mathbb{R}^3 au cas d'un domaine extérieur.

On peut également mentionner des travaux effectués avec des conditions au bord plus générales, et qui permettent de modéliser un corps tombant dans un fluide visqueux de façon stationnaire (le mouvement est toujours invariant au cours du temps). Ce sujet a notamment été abordé par Weinberger [53], Hillairet et Serre ([48], [25], [24]).

Il convient ensuite, pour le cas des domaines extérieurs, de distinguer suivant les différentes dimensions. Commençons par le cas $n = 3$.

1.2.2 La dimension 3

Pour le cas d'un domaine extérieur en dimension 3, (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un compact de bord régulier), la construction se généralise, la seule différence résidant dans la construction de V . La condition sur le flux est alors moins évidente car si on intègre $\operatorname{div} V = 0$ sur $\Omega \cap B(0, R)$ avec $R > 0$, on obtient

$$\int_{\partial B(0, R)} V \cdot \nu - \int_{\partial \Omega} U^* \cdot \nu = 0,$$

la première intégrale pouvant compenser la seconde quand on fait tendre R vers $+\infty$ si V ne décroît pas trop vite à l'infini. En réalité, la construction est plus complexe mais, à condition que le flux ne soit pas trop grand sur chaque composante connexe de $\partial \Omega$, on parvient à nouveau à construire V et à démontrer l'existence d'une solution U .

Une autre notion de solution a également été introduite par Finn et Smith [14], celle de solutions physiquement raisonnables. Ces solutions doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |U(x) - U_\infty| &= O\left(\frac{1}{|x|^{1/2+\varepsilon}}\right) \quad \text{pour } U_\infty \neq 0, \varepsilon > 0 \\ |U(x)| &= O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{pour } U_\infty = 0. \end{aligned}$$

On les appelle physiquement raisonnables car elles vérifient notamment l'égalité d'énergie suivante qui doit être vérifiée par toute solution physique (obtenue en multipliant les équations par $(U - U_\infty)$ et en les intégrant) :

$$\int_{\Omega} [\nabla U : \nabla U + f \cdot (U - U_\infty)] - \int_{\partial \Omega} [(U^* - U_\infty) \cdot T(U, p) - \frac{1}{2}|U^* - U_\infty|^2 U^*] \cdot \nu = 0. \quad (1.2.3)$$

À propos de ces solutions, Finn et Smith parvinrent à montrer qu'elles existent et sont uniques dans le cadre de données petites (c'est-à-dire que si U^* et f sont petits dans un certain espace fonctionnel, alors il existe une unique solution petite) en utilisant un théorème de point fixe (c'est la méthode que nous utiliserons dans tous les résultats de cette thèse). Leur démarche est de considérer l'équation linéarisée (soit le système de Stokes soit le système d'Oseen suivant la valeur de U_∞) et de faire un raisonnement par perturbation autour de cette solution. Or, pour voir la différence qui se fait entre le système de Stokes et le système d'Oseen, on peut regarder les solutions fondamentales de ces solutions dans \mathbb{R}^3 . On obtient alors, pour le système de Stokes (le cas $U_\infty = 0$) la solution fondamentale (aussi appelée fonction de Green) suivante :

$$G(z) = \frac{-1}{8\pi} \left[\frac{Id}{|z|} + \frac{z \otimes z}{|z|^3} \right].$$

Pour le système d'Oseen, on suppose que $U_\infty = \lambda(1, 0, 0)$ avec $\lambda \neq 0$ et on obtient alors, en posant $s = \lambda(|z| - z_1)$, la solution fondamentale suivante :

$$\begin{aligned} G_{1,1}^O(z) &= \frac{1}{4\pi|z|} \left[-e^{-s} + \frac{1}{2\lambda|z|} \left[\frac{-z_1}{|z|} (1 - e^{-s}) + se^{-s} \right] \right] \\ G_{i,i}^O(z) &= \frac{-e^{-s}}{4\pi|z|} + \frac{1}{8\pi} \left[\left[\frac{1}{|z|} - \frac{z_i^2}{|z|^3} \right] \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{\lambda z_i^2 (se^{-s} - 1 + e^{-s})}{|z|^2 s^2} \right] \text{ pour } i \in \{2, 3\} \\ G_{1,i}^O(z) &= G_{i,1}^O(z) = \frac{-z_i}{8\pi|z|^2} \left[e^{-s} - \frac{1 - e^{-s}}{\lambda|z|} \right] \\ G_{2,3}^O(z) &= G_{3,2}^O(z) = \frac{z_2 z_3}{8\pi|z|^3} \left[\frac{e^{-s} - 1}{s} + \frac{\lambda|z|(se^{-s} - 1 + e^{-s})}{s^2} \right]. \end{aligned}$$

On remarque que pour $\lambda \rightarrow 0$, on retrouve la solution fondamentale de Stokes, mais on a des majorations différentes à l'infini pour ces deux solutions fondamentales. En effet, on a

$$\begin{aligned} |G(z)| &\leq \frac{C}{|z|} \\ |G^O(z)| &\leq \frac{C(1 - e^{\lambda(z_1 - |z|)})}{\lambda|z|(|z| - z_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, alors que la solution fondamentale de Stokes se comporte de la même manière à l'infini quelle que soit la direction, on note que pour la solution fondamentale d'Oseen, au voisinage de la direction de U_∞ on a une décroissance en $\frac{1}{|z|}$ mais si on s'en éloigne, on a une décroissance qui se rapproche de $\frac{1}{|z|^2}$. Ces solutions fondamentales permettent d'obtenir les solutions des équations linéarisées par convolution, ces dernières présentent donc à peu près le même comportement à l'infini. On effectue ensuite un raisonnement par perturbation autour de ces solutions linéarisées afin d'obtenir les solutions des équations de Navier-Stokes (cette méthode sera développée dans les différents chapitres de la thèse). Ceci explique pourquoi on obtient des comportements si différents dans les cas $U_\infty = 0$ et $U_\infty \neq 0$.

On se pose alors la question de connaître le lien entre ces deux types de solutions (les solutions de Leray et les solutions physiquement raisonnables) notamment afin de savoir si les solutions de Leray convergent bien vers U_∞ quand $|x| \rightarrow \infty$.

À ce sujet, Babenko et Galdi ([3], [15]) ont démontré que si f est à support compact et $U_\infty \neq 0$, alors les solutions de Leray sont physiquement raisonnables. Ils sont même parvenus à démontrer que ces solutions admettaient un développement asymptotique à l'infini dont le premier terme est donné par la solution du système linéarisé (le système d'Oseen décrit plus haut).

Dans le cas $U_\infty = 0$ qui, comme on l'a vu, est plus difficile, Galdi dans [15] est parvenu à montrer que les solutions de Leray sont physiquement raisonnables, mais il doit supposer en plus que les données sont petites et que l'on a l'égalité d'énergie (1.2.3). On ne sait donc pas encore si l'égalité d'énergie est vraie quelles que soient les données.

Il reste donc encore de nombreuses questions ouvertes, notamment celle de savoir si l'égalité d'énergie et la décroissance à l'infini sont satisfaites par les solutions de Leray dans le cas de données grandes et de connaître le développement asymptotique des solutions dans ce cas. On peut aussi se demander si on peut prouver l'existence de solutions (de type Leray) quel que soit le flux (c'est-à-dire se débarrasser de la condition de petitesse).

On s'intéresse maintenant particulièrement au comportement asymptotique lorsque $U_\infty = 0$, qui est le sujet que nous aborderons dans cette thèse. À ce propos, il faut évoquer plusieurs travaux. On peut citer d'abord Bjorland, Brandolese, Iftimie et Schonbek [4] qui ont prouvé que si on suppose que la solution du système linéaire décroît en $1/|x|^2$, alors on a le développement asymptotique en $1/|x|^2$ suivant pour la solution de l'équation de Navier-Stokes :

$$U(x) = U_0(x) + m(x) : \int_{\mathbb{R}^3} U \otimes U + O\left(\frac{\log|x|}{|x|^3}\right),$$

où U_0 est la solution du système linéarisé et m est une fonction homogène de degré -2 que l'on connaît explicitement. L'hypothèse faite implique notamment que f est d'intégrale nulle, ce qui est assez restrictif.

Dans le cas général, Deuring et Galdi ont tout d'abord prouvé dans [11] que le comportement asymptotique de U ne pouvait pas être donné par la solution de l'équation linéarisée car, dans le cas de solutions physiquement raisonnables, c'est-à-dire se comportant en $1/|x|$, le terme non linéaire est du même ordre que le terme linéaire.

En fait, il est bien connu qu'un sujet important pour déterminer le comportement asymptotique des solutions est l'étude des solutions invariantes par le scaling de l'équation considérée. Le scaling se définit ainsi : si U est solution de (1.1.1) dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $U_\lambda = \lambda U(\lambda \cdot)$ pour $\lambda > 0$ est également solution du système pour le terme de force $f_\lambda = \lambda^3 f(\lambda \cdot)$ et avec la pression $p_\lambda = \lambda^2 p(\lambda \cdot)$. Les solutions invariantes par le scaling (c'est-à-dire vérifiant $U_\lambda = U$ pour tout $\lambda > 0$) sont donc les fonctions homogènes de degré -1 satisfaisant (1.1.1) dans $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Les fonctions homogènes de degré -1 sont à la fois celles qui permettent de décrire le comportement asymptotique des solutions physiquement raisonnables (c'est-à-dire se comportant en $1/|x|$ à l'infini) et aussi celles qui sont invariantes par le scaling de l'équation. De ce fait, les solutions homogènes de degré -1 de l'équation sont particulièrement importantes, ce qui se vérifiera aussi dans la suite.

À propos de la caractérisation de ces solutions particulières, Landau [38] a découvert, dès 1944, une famille à un paramètre de solutions homogènes de degré -1 aux équations de Navier-Stokes. Cannone et Karch ainsi que Tian et Xin ([7], [52]) ont également étudié les solutions singulières des équations de Navier-Stokes (incluant des solutions homogènes de degré -1) et ont prouvé leur existence et leur unicité dans le cadre de données petites. Pour Cannone et Karch, ils y parviennent en se plaçant dans le cadre de pseudo-mesures, c'est-à-dire des distributions tempérées dont la transformée de Fourier est majorée par $1/|x|^2$ (ce qui inclut des fonctions homogènes de degré -1 régulières en-dehors de l'origine). On a également un résultat de ce type dans [4] puisque les auteurs étudient, en plus du comportement asymptotique en $1/|x|^2$, des solutions dans l'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ qui inclut les solutions homogènes de degré -1 .

Šverák [50] prouva ensuite que les solutions de Landau sont les seules solutions homogènes de degré -1 vérifiant (1.1.1) sur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ avec $f = 0$. On peut même aller plus loin en disant que la solution de Landau avec paramètre c est la seule qui vérifie (1.1.1) au sens des distributions dans $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec $f = \beta(c)\delta_0$ où $\beta(c)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 explicite. On peut ensuite citer l'article de Nazarov et Pileckas [43] dans lequel ces auteurs démontrent que le comportement asymptotique des solutions physiquement raisonnables est bien donné par une fonction homogène de degré -1 , dans le cas de données petites. Enfin, Korolev et Šverák [36] ont prouvé que dans le cas où Ω est un domaine extérieur avec des données au bord petites et $f = 0$ (ou de façon équivalente $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec f à support compact et petite), le comportement asymptotique des solutions physiquement raisonnables est donné par une solution de Landau

telle que $\beta(c) = \int_{\mathbb{R}^3} f = \int_{\partial\Omega} T(u, p)$. Ceci achève l'étude du problème dans le cas d'un terme de force à support compact.

Enfin, pour clore sur la dimension 3, on peut également mentionner deux travaux effectués sur une variante du problème. Premièrement, en extension du résultat de Korolev et Šverák, dans les travaux de Farwig et Hishida [13], voir aussi Farwig et Galdi [12], les auteurs démontrent que, dans le cas d'un corps en rotation dans un fluide stationnaire, ce qui modifie quelque peu l'équation, on a également un comportement asymptotique à l'infini donné par une solution de Landau (pourvu que la vitesse de rotation ne soit pas trop grande). Ensuite, dans l'article [34], les auteurs prouvent que dans le cas de solutions périodiques (dans le cas de l'équation d'évolution) et sous de bonnes hypothèses (notamment un terme de force décroissant fortement à l'infini), les solutions tendent également vers une solution de Landau quand $|x| \rightarrow \infty$.

1.2.3 La dimension 2

Dans le cas de la dimension 2, la situation est très différente. Il faut distinguer entre les cas $\Omega = \mathbb{R}^2$ et Ω domaine extérieur.

Si $\Omega = \mathbb{R}^2$, le problème est que le passage à la limite n'est plus possible dans le terme non linéaire car la convergence d'une suite de gradient borné dans L^2 n'implique aucune convergence dans L^p_{loc} . On n'a en fait aucun résultat d'existence connu dans le cas général dans \mathbb{R}^2 .

Dans le cas d'un domaine extérieur nous avons des résultats partiels. La construction de V dans le cas d'un domaine extérieur ne fonctionne plus, notamment car l'injection de Sobolev $W^{1,2} \rightarrow L^6$ ne fonctionne plus, alors qu'elle était essentielle dans l'estimation du terme bilinéaire en dimension 3. Il nous faut donc supposer que le flux $\int_{\partial\Omega} U^* \cdot \nu$ est nul. Sous cette hypothèse, en s'appuyant sur l'inégalité de Poincaré et en utilisant la donnée au bord, il est possible de construire des solutions sur $\Omega \cap B(0, R)$ et de passer à la limite quand $R \rightarrow \infty$ pour trouver une solution sur Ω , c'est notamment ce qui a été fait par Leray dans [39]. Malheureusement, on ne parvient pas à montrer que cette solution vérifie bien la condition à l'infini. Remarquons que l'inégalité (1.2.1) n'implique pas la convergence de U vers un vecteur constant U_0 à l'infini. On peut le voir notamment en considérant la fonction $W(x) = (\log|x|)^\alpha$ avec $\alpha \in (0, 1/2)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, 2)}$. On a bien alors $\int_{\Omega} |\nabla W|^2 < +\infty$ mais W croît de façon logarithmique à l'infini.

On peut cependant citer quelques résultats partiels relatifs à la validité de la condition à l'infini. On sait notamment d'après les travaux de Gilbarg et Weinberger [18] et les travaux d'Amick [2] que si $U^* = f = 0$, alors il existe U_0 tel que

– ou bien $U_0 \neq 0$ et dans ce cas nous avons

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |U(x) - U_0| = 0;$$

– ou bien $U_0 = 0$ et dans ce cas nous avons

$$U \rightarrow 0 \quad \text{uniformément.}$$

Malheureusement, rien ne permet d'affirmer que $U_0 = U_\infty$, il est donc très difficile de savoir s'il existe une solution vérifiant les équations de Navier-Stokes tout en satisfaisant la condition à l'infini.

Se pose ensuite la question du développement asymptotique des solutions. Cependant, cette question est très difficile. Notamment dans le cas $U_0 = 0$, Hamel [23] a construit des solutions décroissant plus vite que toute puissance de $|x|$ à l'infini. Il paraît donc difficile de faire un développement en puissances de $|x|$ à l'infini. Cela dit, ces solutions ayant un flux non nul, on pourrait s'intéresser au cadre des solutions avec flux nul.

Il reste donc encore de nombreuses questions ouvertes que nous décrivons maintenant. On aimerait tout d'abord prouver que l'on a bien $U_0 = U_\infty$, ce qui semble très difficile. Si $U_0 \neq 0$, on aimerait savoir si on peut obtenir la convergence au moins ponctuelle de U vers U_0 et non pas seulement en moyenne. On remarque donc qu'il n'y a pas en général d'existence de solutions de (1.1.1) quand on impose une condition à l'infini particulière, par exemple dans le cas qui nous intéressera $U_\infty = 0$.

Toutefois, des résultats sur le comportement asymptotique ont été trouvés pour U_0 fixé. Tout d'abord, Amick [1] dans le cas $U_0 \neq 0$, trouve un développement asymptotique de la solution dont le premier terme décroît en $\frac{1}{|x|^{1/2}}$, sous une hypothèse de symétrie des données qui s'avère assez restrictive. Galdi et Sohr [17] ont prouvé le même résultat avec l'hypothèse $\int_{|x|>R} |U \cdot U_0^\perp|^s dx < +\infty$ avec $s > 1$ et R suffisamment grand. Cette condition signifie que la composante orthogonale à U_0 de la vitesse ne croît pas trop (est suffisamment intégrable) à l'infini.

Dans le cas $U_0 = 0$, on peut commencer par citer Hamel [23], voir aussi [50], qui détermina une famille de solutions homogènes de degré -1 des équations de Navier-Stokes, leur importance étant tout aussi grande qu'en dimension 3. Cette famille de solutions est donnée en coordonnées polaires par

$$u_{\Phi,n}(r, \theta) = \frac{-1}{r} \varphi_{\Phi,n}(\theta + \theta_0) e_r$$

et

$$u_{\Phi,\mu}(r, \theta) = \frac{\Phi}{2\pi r} e_r + \frac{\mu}{r} e_\theta.$$

Ici, (e_r, e_θ) est la base orthonormée mobile associée aux coordonnées polaires (r, θ) , $\Phi = \int_{\mathbb{S}^1} u \cdot e_r$ est l'intégrale sur le cercle unité de la composante radiale de u , μ est un paramètre réel quelconque et n est un entier non nul vérifiant $4 + \frac{\Phi}{\pi} \leq n^2$. La fonction φ est alors une fonction $\frac{2\pi}{n}$ -périodique. La seconde famille de solution $u_{\Phi,\mu}$ correspond au cas $n = 0$ de la première famille, et dans ce cas le paramètre μ apparaît en plus. Ces solutions sont intéressantes mais, malheureusement, on ne peut pas appliquer les raisonnements par perturbation autour de cette solution qui permettraient de démontrer qu'elle donne le comportement asymptotique des solutions générales (comme c'était le cas en dimension 3 par exemple) car les paramètres ne suffisent pas à annuler les termes apparaissant dans le développement asymptotique de la solution de l'équation linéarisée.

On peut citer également l'article de Guillod et Wittwer [20] dans lequel les auteurs généralisent ces solutions de Hamel en considérant cette fois-ci des solutions invariantes par le scaling "à rotation près", c'est-à-dire vérifiant : pour tout $\lambda > 0$, il existe R_λ une rotation dont l'angle dépend continûment de λ telle que $\lambda U(\lambda \cdot) = R_\lambda^{-1} U \circ R_\lambda$. Ils découvrent alors des solutions de la forme

$$U_{n,\Phi,a}(r, \theta) = \frac{1}{r} [-\varphi(\theta + \theta_0 + a \log r) e_r + a(\varphi(\theta + \theta_0 + a \log r) - 4) e_\theta],$$

avec une condition sur les trois paramètres $(a, \Phi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ pour que ces solutions existent. Nous avons repris ici les mêmes notations que plus haut, et φ est toujours une fonction $\frac{2\pi}{n}$ -périodique dépendant des trois paramètres.

Cependant, ces solutions, que ce soit celles d'Hamel ou les solutions plus générales de Guillod et Wittwer ne permettent pas de faire un raisonnement par perturbation autour de ces solutions et d'en déduire l'existence de solutions petites physiquement raisonnables. On a cependant le résultat de Hillairet et Wittwer [29] dans lequel les auteurs parviennent à effectuer un argument par perturbation autour de la solution $\mu e_\theta/r$ mais ils doivent pour cela supposer μ suffisamment grand. On obtient ainsi toute une classe de solutions mais pas de solutions petites.

Le seul cadre dans lequel on a des résultats est, comme on l'a vu, celui dans lequel on se restreint à des données symétriques et qu'on recherche des solutions également symétriques. Dans ce cadre, on a les premiers résultats découverts par Pileckas et Russo ([44], [46], [47]). Dans le second article, les auteurs démontrent l'existence de solutions de Leray symétriques par rapport aux coordonnées pour des valeurs arbitraires du flux Φ . Dans les articles de Russo, l'auteur démontre tout d'abord une décroissance sur les dérivées des solutions de Leray à l'infini en $O\left(\frac{1}{|x|^{1/2-\varepsilon}}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Puis il démontre que, si le flux des données au bord du domaine extérieur est suffisamment petit, alors l'équation de Navier-Stokes admet une solution de Leray, et que les dérivées de cette solution décroissent en $O\left(\frac{1}{|x|^{3/4-\varepsilon}}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ à l'infini. En revanche, dans ces deux cas, il ne parvient pas à démontrer la convergence de la vitesse elle-même vers 0.

Citons maintenant le résultat d'existence de solutions décroissant à l'infini en $1/|x|^2$ sur lequel nous reviendrons beaucoup, celui de Yamazaki [54]. Dans cet article, l'auteur suppose les symétries suivantes sur la vitesse et le champ de force :

$$f_1(x_1, -x_2) = f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, -x_2) = -f_2(x_1, x_2), \quad f_1(x_2, x_1) = f_2(x_1, x_2).$$

Alors, en supposant que le terme de force décroît suffisamment à l'infini et est de norme petite, il parvient à démontrer l'existence et l'unicité de solutions décroissant à l'infini en $1/|x|$, sans toutefois expliciter le comportement asymptotique de ces solutions.

Un autre problème intéressant qui a été étudié ces dernières années est l'étude en dimension 2 d'un obstacle se déplaçant à vitesse constante dans un fluide près d'un mur, ce qui correspond à un domaine $\Omega = \mathbb{R}_+^2 \setminus B$ où B est une boule et $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$. Dans ce cas de la dimension 2, un outil intéressant est le tourbillon, qui permet de caractériser la solution (U, p) par un unique champ scalaire $\omega = -\partial_2 U_1 + \partial_1 U_2$. En effet, un champ U de divergence nulle est uniquement déterminé par son tourbillon ω , et dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, on peut le retrouver à partir de cette fonction grâce à la loi de Biot-Savart :

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy.$$

Dans ce cadre, Hillairet et Wittwer ont étudié, dans l'article [26], le cas de l'équation d'Oseen qui, après simplifications, s'écrit

$$-\partial_1 \omega + \Delta \omega = \varphi \text{ dans } \Omega, \quad \omega(x_1, 0) = \omega_0(x),$$

où la fonction ω_0 provient de la donnée φ et des conditions au bord sur la vitesse $U(x_1, 0) = 0$ et $U(x) = -e_1$ sur ∂B . Cette équation modélise la linéarisation de l'équation de Navier-Stokes

lorsque l'obstacle B se déplace à une vitesse constante le long d'un mur représenté ici par le plan $x_2 = 0$. Ils démontrent alors que si φ est C^∞ à support compact, alors il existe une unique solution ω de classe C^∞ et continue jusqu'au bord du domaine. De plus, ils donnent l'intégrabilité de telles solutions si φ est une dérivée : si $\varphi = \partial_1 f$ alors $\frac{\omega}{(1+y)^{4-\varepsilon}}$ est dans L^p pour p suffisamment grand, et si $\varphi = \partial_2 f$ alors $\frac{\omega}{(1+y)^{3-\varepsilon}}$ est dans L^p pour p suffisamment grand.

Dans la suite de ce résultat, ces mêmes auteurs étudient dans [27] et [28] le système de Navier-Stokes complet associé à ce problème, cette fois-ci avec la formulation en vitesse et non pas en tourbillon :

$$\begin{aligned} -\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \partial_1 U + \nabla p &= 0, & \operatorname{div} U &= 0 \text{ dans } \Omega \\ U &= -e_1 \text{ sur } \partial B, & U(x, 0) &= 0, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pour ce faire, les auteurs commencent par appliquer à l'équation la transformée de Fourier dans la coordonnée x_1 puis, en considérant la seconde variable x_2 comme un temps et en considérant l'équation obtenue comme une famille d'équations différentielles ordinaires, ils parviennent à démontrer leurs résultats.

Dans le premier article, ils se débarrassent de l'obstacle (la méthode ne pouvant s'appliquer que dans tout \mathbb{R}_+^2) en faisant un prolongement de U régulier à tout \mathbb{R}_+^2 et en résolvant l'équation avec un terme de force à support compact qui apparaît. Ils prouvent alors que si ce terme est suffisamment petit dans une certaine norme, alors il existe une unique solution petite avec une décroissance à l'infini donnée par

$$|U_1(x)| \leq \frac{C_1}{x_2^{3/2}}.$$

Dans le second article, ils ne se débarrassent plus de l'obstacle en le remplaçant par un terme de force et ils résolvent le problème en combinant la technique décrite avec une approximation du domaine par des domaines plus petits, selon la méthode de Leray pour obtenir l'existence des solutions par compacité. Ils en déduisent alors l'existence et l'unicité d'une solution pourvu que le diamètre de l'obstacle soit suffisamment petit, avec la même décroissance à l'infini que dans le premier article. De plus, ils obtiennent un comportement asymptotique explicite à l'infini.

Dans l'article [21], Guillod et Wittwer poursuivent l'étude de ce problème, cette fois-ci sans obstacle et avec une vitesse nulle à l'infini, et toujours en voyant la deuxième variable x_2 comme un temps et en résolvant une famille d'équations différentielles ordinaires. Cette fois-ci, les auteurs partent de solutions particulières U_{JH} découvertes par Hamel [23] et Jeffery [33], identiques aux solutions de Hamel décrites plus haut à l'exception de la condition d'annulation sur le bord $\partial\Omega$. Ils démontrent alors que l'équation de Navier-Stokes dans le demi-plan avec pour condition au bord $U = U_{JH} + U_b$ où U_b est une correction petite permettant de régulariser le problème. En particulier, ils supposent que son flux à travers le bord du domaine est nul. Ils démontrent alors l'existence d'une solution U vérifiant

$$\sup_{x_1 \in \mathbb{R}} |U - U_{JH}| = o\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

Enfin, dans l'article [22], ces mêmes auteurs considèrent à nouveau l'équation de Navier-Stokes avec une vitesse non nulle à l'infini, mais cette fois-ci dans $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B$ où B est un compact de bord lisse, c'est-à-dire qu'on est à nouveau dans le cas d'un domaine extérieur. En considérant que la vitesse à l'infini est $e_1 = (1, 0)$, ils parviennent à donner un comportement

asymptotique qui est valide dans toutes les directions et pas seulement près de e_1 comme dans les travaux antérieurs. La formule qu'ils trouvent alors, portant sur le tourbillon, est

$$\omega(r, \theta) = r^{A(1-\cos\theta)+B\sin\theta} \left[\frac{\mu(\theta)}{r^{1/2}} + O\left(\frac{1}{r^{1/2+\varepsilon}}\right) \right] e^{-r(1,\cos\theta)},$$

en coordonnées polaires et avec A et B des constantes dépendant du terme de force et μ une fonction 2π -périodique dépendant des données.

1.3 Résultats de la thèse

Nous détaillons maintenant les résultats obtenus dans la thèse en distinguant les différents cas étudiés et en donnant une idée des méthodes utilisées.

1.3.1 La dimension 3

Dans le cas de la dimension 3 nous commençons, dans le chapitre 3, par étudier le cas de l'espace entier ($\Omega = \mathbb{R}^3$) et nous généralisons le résultat de Korolev et Šverák (voir [36] où les auteurs montrent que dans un domaine extérieur avec une condition au bord quelconque, les solutions de (1.1.1) se comportent à l'infini comme des solutions de Landau (voir dans le chapitre 3 pour la formule des solutions de Landau)).

Le comportement asymptotique pertinent des solutions est donc en $1/|x|$ à l'infini. Or si la solution décroît en $1/|x|$ à l'infini, on s'attend à ce que le terme de force décroisse en $1/|x|^3$ à l'infini. Nous considérons de façon naturelle un terme de force pouvant se décomposer (à l'infini) comme la somme d'une fonction homogène de degré -3 et d'un reste décroissant un peu plus vite à l'infini. Nous obtenons alors le résultat suivant :

- Si $f = f_0 + \gamma\delta_0$ avec f_0 une fonction homogène de degré -3 et $\gamma \in \mathbb{R}^3$, alors on a une condition nécessaire $\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$ pour l'obtention de solutions homogènes. Si cette condition est vérifiée et f_0 et γ sont suffisamment petits, alors il existe une unique solution petite homogène de degré -1 à l'équation de Navier-Stokes.
- Si $f = f_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$ avec f_0 homogène de degré -3 et $\varepsilon \in (0, 1)$, et si la condition nécessaire $\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$ est vérifiée et que f est suffisamment petite, alors il existe une unique solution petite U à l'équation de Navier-Stokes qui a le comportement suivant à l'infini :

$$U(x) = U_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right),$$

où U_0 est la solution homogène de degré -1 de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force $f_0 + \int_{\mathbb{R}^3} f\delta_0$ donnée par le résultat d'avant.

Pour démontrer ces résultats, on commence par dégager la condition nécessaire $\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$. Dans le cas de l'équation homogène, on voit tout de suite qu'elle est nécessaire car sinon f_0 ne définit pas une distribution homogène sur \mathbb{R}^3 (avec cette condition elle en définit une au sens de la valeur principale) alors que le membre de gauche $-\Delta U + \operatorname{div}(U \otimes U) + \nabla p$ en définit bien une puisque U , $U \otimes U$ et p sont localement intégrables (et homogènes). Pour montrer cette condition d'intégrale nulle, on intègre l'équation de Navier-Stokes sur une boule de rayon tendant vers l'infini et on identifie les comportements asymptotiques des différents termes.

Nous démontrons ensuite les deux résultats mentionnés ci-dessus en étudiant le terme $\mathbb{P}\Delta^{-1}f$ qui est défini au sens de la valeur principale. On parvient à démontrer le comportement asymptotique voulu pour ce terme, puis en appliquant un théorème de point fixe dans des espaces de fonction décroissantes à l'infini mais pouvant avoir une singularité en 0 (ce qui inclut les fonctions homogènes), on parvient au résultat général.

Nous étendons ensuite ce résultat au cas d'un domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ où \bar{B} est une boule fermée. Nous démontrons alors que si on a une solution de Navier-Stokes U avec f qui est de la forme $f = f_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$ comme ci-dessus, ces termes étant suffisamment petits, alors U a le comportement asymptotique donné par $U(x) = U_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)$ avec U_0 la solution homogène de l'équation de Navier-Stokes avec pour terme de force $f_0 + m\delta_0$. La seule chose qui change est qu'ici l'expression de m est beaucoup moins explicite (celle que nous obtenons dépend de la solution elle-même). Pour le prouver, nous étendons la solution U à l'espace entier de façon régulière, ce qui fait apparaître un terme de force supplémentaire à support compact, auquel on peut appliquer le résultat précédent.

Nous examinons ensuite dans le chapitre 4 le cas du demi-espace $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$. Dans ce cas le résultat est assez différent car la fonction de Green ne se comporte pas de la même façon. Nous démontrons alors plusieurs choses.

- Dans le cas d'un terme de force et d'un terme de bord décroissant suffisamment à l'infini (un terme de force en $O\left(\frac{1}{|x|^{4+\varepsilon}}\right)$ et un terme de bord en $O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right)$) et de normes suffisamment petites, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution de la forme

$$U = \frac{x_3 C \cdot x}{|x|^5} x + O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty$$

où C est un vecteur constant. Le terme dominant est en général non nul (on peut toujours trouver des données, soit un terme de force, soit un terme de bord, aussi petites que l'on veut, telles que ce terme soit non nul).

- Dans le cas d'un terme de force du même type que dans le cas de l'espace entier : $f = f_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$ et un terme de bord similaire, on trouve des résultats analogues mais avec des conditions modifiées. Plus précisément, on démontre que si f_0 est homogène de degré -3 et b_0 définie sur $\partial\Omega$ homogène de degré -1, de normes suffisamment petites, alors l'équation avec pour terme de force $f = f_0$ et pour terme de bord $b = b_0$ admet une unique solution petite homogène de degré -1. Enfin, supposons que $f = f_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$ avec f_0 homogène de degré -3 et f suffisamment petite et $b = b_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)$ avec b_0 homogène de degré -1 et b petite. Alors on a l'existence et l'unicité d'une solution petite U décroissant en $1/|x|$, avec le comportement asymptotique $U = U_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)$ où U_0 est solution de l'équation de Navier-Stokes avec pour terme de force f_0 et pour terme de bord b_0 . En comparant avec le théorème correspondant dans \mathbb{R}^3 , on remarque que dans le cas du demi-plan non seulement nous n'avons plus la condition d'intégrale nulle sur la sphère (ou un analogue) mais en plus nous n'avons plus de masse de Dirac additionnelle dans l'équation vérifiée par U_0 . C'est pour cela que si les données décroissent plus vite, on se retrouve avec une décroissance à l'infini plus forte que $1/|x|$, contrairement au cas de l'espace entier.

Pour démontrer le premier résultat, on utilise les fonctions de Green associées à l'équation

de Stokes (une pour le terme de force et une autre pour la donnée au bord) qui nous permettent de mettre l'équation sous forme intégrale. On démontre ensuite que les termes provenant des données donnent bien des fonctions décroissant en $\frac{1}{|x|^2}$ à l'infini avec le développement asymptotique voulu. Puis on montre que la forme bilinéaire obtenue est bien continue dans l'espace de ces fonctions, ce qui nous permet d'appliquer un théorème de point fixe. On utilise ensuite les développements asymptotiques démontrés lors des estimations sur les différents termes, et on en déduit le résultat. Enfin, un calcul sur les fonctions de Green nous permet de déterminer que le terme dominant dans le comportement asymptotique obtenu est en général non nul.

Pour démontrer le second résultat, on procède essentiellement comme dans le cas de l'espace entier, en se plaçant dans des espaces de fonctions pouvant admettre une singularité en 0, et en utilisant les nouvelles fonctions de Green, on trouve les résultats annoncés. La disparition de la condition d'intégrale nulle sur la sphère provient du fait que la fonction de Green associée au terme de force s'annule sur le bord de Ω donc en 0, et comme elle est régulière, elle compense la singularité de f_0 en 0 (voir le chapitre 4 pour les détails).

1.3.2 La dimension 2

Dans le cas de la dimension 2, les résultats sont plus compliqués à obtenir, ce qui se voit déjà dans l'état de la recherche à ce sujet. Il y a alors plusieurs choses à étudier : d'une part, trouver des solutions particulières comme les solutions homogènes décrites plus haut, certains auteurs essayant même de trouver des familles de solutions plus générales pour essayer de faire un argument de point fixe en linéarisant l'équation autour de ces solutions. D'autre part, comme la découverte de solutions dans le cas général n'est pas encore accessible, on les recherche dans des cas particuliers, par exemple avec des conditions de symétrie.

Dans le chapitre 5, nous apportons une contribution au premier problème. En effet, jusqu'ici les solutions homogènes de degré -1 avaient essentiellement été recherchées pour un terme de force nul, et dans ce chapitre nous montrons leur existence pour tout terme de force homogène de degré -3 petit dans une certaine norme. Plus précisément, nous démontrons que pour un terme de force f homogène de degré -3 de circulation nulle sur le cercle unité (c'est-à-dire vérifiant $\int_{\mathbb{S}^1} f \cdot x^\perp = 0$ avec $x^\perp = (-x_2, x_1)$) et avec un tourbillon de norme suffisamment petite, il existe une famille de solutions à deux paramètres $U_{\alpha, \gamma}$ avec $\alpha = \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp \neq 0$ et γ un paramètre proche du flux de f , $\int_{\mathbb{S}^1} f \cdot x$. Ces solutions décrivent l'ensemble des solutions homogènes de degré -1 de circulation non nulle avec un terme de force de tourbillon petit par rapport à cette circulation et avec γ proche du flux de f .

Pour démontrer cela, les fonctions étant homogènes on se ramène à une équation sur le cercle avec les deux paramètres mentionnés portant sur la seule inconnue $u = U \cdot x$. On résout alors la partie linéaire de cette équation pour $\alpha \neq 0$ (c'est une condition nécessaire pour que cette partie linéaire admette une unique solution périodique). Enfin, on résout l'équation globale à l'aide du théorème de point fixe qui permet de dégager les hypothèses de petitesse mentionnées.

Enfin, nous isolons une sous-famille de solutions constituée de celles vérifiant $\int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x = 0$. Ces solutions sont celles qui vérifient l'équation $\operatorname{div} U = 0$ au sens des distributions jusqu'en 0 et ce sont les seules pouvant décrire le comportement asymptotique à l'infini de champs de vecteurs réguliers de divergence nulle. Nous montrons alors que si f est de tourbillon petit et de circulation nulle sur le cercle unité, il existe une famille de solutions U à un paramètre $\alpha = \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp$ vérifiant $\int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x = 0$. Ces solutions décrivent toutes les solutions de circulation non nulle sur le cercle, avec un terme de force et une composante normale petits par rapport à cette circulation.

Pour finir, dans le chapitre 6 nous nous intéressons au comportement asymptotique des solutions petites dans le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$ avec des conditions de symétrie. Plus précisément, dans le cas de la dimension 2, comme on l'a vu auparavant, on peut s'intéresser à l'équation sur le tourbillon de U , ω , qui vérifie

$$-\Delta\omega + (U \cdot \nabla)\omega = \text{curl } f, \quad U(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy. \quad (1.3.1)$$

On recherchera alors une solution de (1.3.1) qui vérifie les propriétés de symétrie utilisées par Yamazaki [54] :

$$\omega(x_1, -x_2) = \omega(x_2, x_1) = -\omega(x_1, x_2).$$

Pour le terme de force, nous supposons qu'il vérifie des conditions de symétrie, données par

$$f_1(-x_1, x_2) = -f_1(x_1, x_2), \quad f_2(-x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2), \quad f_1(x_2, x_1) = f_2(x_1, x_2). \quad (1.3.2)$$

Remarquons que, avec ces conditions de symétrie, toutes les quantités introduites sont uniquement déterminées par leurs valeurs dans le secteur $S = \{\rho e^{i\theta} ; \rho > 0, 0 < \theta < \pi/4\}$. De plus, on peut aisément vérifier que la vitesse est tangente au bord de S et le tourbillon s'annule au bord de S . Et réciproquement, si on se donne un champ de vitesse et un tourbillon définis sur S et vérifiant ces conditions au bord ainsi que l'équation sur S , on peut les prolonger à \mathbb{R}^2 tout entier en des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires qui vérifient ces conditions de symétrie. Ces conditions au bord sont aussi connues sous le nom de conditions au bord de glissement parfait (sans friction), ou encore conditions de Navier. On peut les trouver dans des nombreux travaux sur les équations de Navier-Stokes, citons par exemple le livre fondamental de Lions [40, pages 87–98]. Résoudre les équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 avec ces conditions de symétrie revient donc à résoudre les équations de Navier-Stokes dans S avec les conditions au bord de Navier sans friction.

Nous montrons alors les résultats suivants.

- Si un terme de force f vérifie ces conditions et décroît à l'infini comme $\frac{1}{|x|^6}$, alors il existe une unique solution petite ω de (1.3.1) vérifiant les conditions de symétrie sur ω et décroissant en $\frac{1}{|x|^4}$. De plus, on prouve que cette solution admet le développement asymptotique suivant

$$\omega(x) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

On a une expression explicite pour cette constante m et on peut prouver qu'en général elle est non nulle.

- Par ailleurs, nous parvenons à étendre ce résultat au cas d'un domaine extérieur. En effet, si U est solution de l'équation de Navier-Stokes dans le complémentaire d'un disque avec une norme petite, décroissant en $\frac{1}{|x|^3}$ avec un tourbillon décroissant en $\frac{1}{|x|^4}$ et un terme de force en $\frac{1}{|x|^6}$, toutes ces fonctions vérifiant les bonnes conditions de symétrie, alors ω admet bien le même développement asymptotique que dans le cas du plan tout entier.
- Enfin, nous prouvons un résultat similaire au cas de la dimension 3 : Si f_0 est une fonction homogène de degré -3 vérifiant les conditions de symétrie (1.3.2) et de norme petite, alors

il existe une unique solution homogène de degré -1 et petite U_0 des équations de Navier-Stokes vérifiant ces mêmes conditions de symétrie. De plus, si on a $f = f_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$ avec f_0 homogène de degré -3, f_0 et f satisfaisant les conditions (1.3.2) et étant de normes petites, alors l'équation de Navier-Stokes admet une unique solution petite U vérifiant les conditions (1.3.2) et décroissant comme $\frac{1}{|x|}$ à l'infini. De plus, U a le comportement asymptotique suivant :

$$U(x) = U_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)$$

où U_0 est la solution homogène associée au terme de force f_0 .

Pour prouver le premier résultat, on procède comme dans le cas du demi-espace : on met l'équation sous forme intégrale, on prouve que les termes sont bien continus à valeurs dans les fonctions en $\frac{1}{|x|^4}$ à l'infini, et on calcule leurs développements asymptotiques. On applique ensuite un théorème de point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, et on utilise les développements asymptotiques montrés pour en déduire celui de ω .

Pour l'étendre au cas d'un domaine extérieur, on procède exactement comme dans le cas de la dimension 3, en étendant une solution U sur le complémentaire d'un disque en une solution sur le plan entier. On veille simplement à ce que cette extension et le terme de force qui s'ajoute vérifient les conditions de symétrie.

Enfin, dans le cas du dernier résultat où le terme de force est homogène de degré -3, nous avons une difficulté supplémentaire par rapport à la dimension 3. Si U_0 est homogène de degré -1, le terme $(U_0 \cdot \nabla)U_0 = \text{div}(U_0 \otimes U_0)$ n'est pas bien défini au sens des distributions (même au sens de la valeur principale). On arrive cependant à donner un sens aux équations de Navier-Stokes en les écrivant sous une forme intégrale. Sous cette forme, les intégrales qui apparaissent sont bien définies au sens de la valeur principale grâce aux conditions de symétrie, même si le terme d'origine $U_0 \otimes U_0$ ne l'est pas. Ensuite la démarche est assez proche de ce qui a été fait en dimension trois, avec cependant des estimations spécifiques à la dimension 2.

Chapitre 2

Généralités

Sommaire

2.1	Un lemme de point fixe	17
2.2	Opérateurs de Bogovskii	19
2.3	Solutions fondamentales de l'opérateur de Stokes	23

Ce chapitre ne contient pas de résultat original. Le lecteur pressé pourra passer sans difficulté au chapitre suivant. Nous avons choisi de souligner ici quelques résultats classiques mais essentiels pour notre travail car utilisés à des nombreuses reprises. Nous avons inclus les preuves (en oubliant certains détails trop techniques) par souci de complétude. De plus, dans le cas de la formule de Green pour l'opérateur de Stokes dans le demi-espace avec des conditions homogènes au bord donnée dans la relation (2.3.3), nous avons eu du mal à trouver l'expression correcte qui est en fait la transposée de ce qui est annoncé dans [16, Section IV.3]. Or la formule exacte est très importante pour nous, avec une formule même légèrement inexacte une partie des résultats que nous démontrerons dans le chapitre 4 seraient faux. Il est donc très important d'avoir la bonne formule, nous avons donc choisi de la montrer en détail. C'est la seule preuve qui est indispensable dans ce chapitre.

Nous commencerons par démontrer un lemme de point fixe qui est bien connu. Puis, dans l'optique du prolongement de champs de vecteurs de divergence nulle d'un domaine extérieur à l'espace entier, nous démontrerons un résultat de Bogovskii permettant de résoudre l'équation $\operatorname{div} V = g$, d'inconnue V et de donnée g , dans des espaces de Sobolev avec une continuité de l'opérateur solution. Enfin, nous déduirons les formules des fonctions de Green associées au problème de Stokes en dimension trois.

2.1 Un lemme de point fixe

Nous démontrons dans cette section le lemme de point fixe suivant, qui est bien connu et que nous utiliserons dans tous les chapitres pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions petites des équations étudiées :

Lemme 2.1.1 ([6]). *Soit X un espace de Banach et $B : X \times X \rightarrow X$ une application bilinéaire. Supposons que pour tout $x_1, x_2 \in X$ on a*

$$\|B(x_1, x_2)\|_X \leq \eta \|x_1\|_X \|x_2\|_X.$$

Alors pour tout $y \in X$ satisfaisant $4\eta\|y\|_X < 1$, l'équation

$$x = y + B(x, x), \quad (2.1.1)$$

admet une unique solution $x \in X$ dans la boule $B_X(0, \frac{1}{2\eta})$. Par ailleurs, cette solution vérifie la propriété :

$$\|x\|_X \leq 2\|y\|_X.$$

Preuve. On construit la solution de l'équation (2.1.1) comme la limite de la suite suivante :

$$x_0 = y, \quad x_{k+1} = y + B(x_k, x_k) \quad \forall k.$$

Pour montrer que cette suite converge vers une solution de (2.1.1), commençons par montrer qu'elle est bornée. Pour cela, introduisons ζ la plus petite solution de l'équation $\zeta = \|y\| + \eta\zeta^2$. On a donc $\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta\|y\|}}{2\eta} > 0$ étant donné que $4\eta\|y\| < 1$. On va alors montrer que $\|x_k\| \leq \zeta$ pour tout k . Pour $k = 0$, on remarque que $\|x_0\| = \|y\|$ et

$$\zeta = \frac{1 - (1 - 4\eta\|y\|)}{2\eta(1 + \sqrt{1 - 4\eta\|y\|})} \geq \frac{4\eta\|y\|}{4\eta} = \|x_0\|.$$

Pour k quelconque, par récurrence on a :

$$\|x_{k+1}\| \leq \|y\| + \eta\|x_k\|^2 \leq \|y\| + \eta\zeta^2 = \zeta.$$

Par ailleurs, on voit facilement que $\zeta \leq 2\|y\| \leq \frac{1}{2\eta}$.

On va ensuite montrer que cette suite est de Cauchy. Pour cela, on considère pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|B(x_k, x_k) - B(x_{k-1}, x_{k-1})\| \\ &= \|B(x_k - x_{k-1}, x_k) + B(x_{k-1}, x_k - x_{k-1})\| \\ &\leq 2\eta\zeta\|x_k - x_{k-1}\|. \end{aligned}$$

Or, comme $\zeta < \frac{1}{2\eta}$, la somme $\sum_0^\infty (2\eta\zeta)^k$ converge, ce qui garantit que la suite (x_k) est de Cauchy. Comme X est un espace de Banach, on en déduit qu'il existe x_∞ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty$, et par continuité de B on a :

$$x_\infty = y + B(x_\infty, x_\infty).$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver l'unicité. Soient x_1, x_2 deux solutions de (2.1.1) telles que $\|x_1\|, \|x_2\| < \frac{1}{2\eta}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|B(x_1, x_1) - B(x_2, x_2)\| \\ &= \|B(x_1, x_1 - x_2) + B(x_1 - x_2, x_2)\| \\ &\leq \eta(\|x_1\| + \|x_2\|)\|x_2 - x_1\|, \end{aligned}$$

et comme $\|x_1\| + \|x_2\| < \frac{1}{\eta}$, ceci n'est possible que si $x_2 = x_1$. Ceci achève la preuve du lemme. \square

2.2 Opérateurs de Bogovskii

Un outil important pour l'étude des équations de Navier-Stokes est la résolution de l'équation suivante

$$\operatorname{div} V = f \quad \text{dans } \Omega, \quad V = b \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^n étoilé par rapport à une boule B . La résolution de ce type de problème est particulièrement importante, notamment lorsque l'on veut prolonger ou perturber des fonctions tout en préservant la propriété de divergence nulle. Tout d'abord, on constate qu'on peut se ramener très facilement au cas $b = 0$. En effet, si on suppose que Ω a un bord lisse, on sait que si b a la bonne régularité alors il existe une extension V_0 de b avec la bonne régularité. Il suffit ensuite de résoudre

$$\operatorname{div} V = f - \operatorname{div} V_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad V = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Par exemple, si on cherche à résoudre l'équation dans des espaces de Sobolev comme on va le faire dans la suite, si on a $f \in W^{k,p}(\Omega)$ et $b \in W^{k+1-1/p,p}(\partial\Omega)$ alors on aura $V_0 \in W^{k+1,p}(\Omega)$ avec $\|V_0\|_{k+1,p} \leq C\|b\|_{k+1-1/p,p}$ et $\operatorname{div} V_0 \in W^{k,p}(\Omega)$ est dans le même espace que f .

On introduit alors, pour résoudre cette équation, les opérateurs de Bogovskii, qui donnent une solution à cette équation avec une continuité dans les espaces de Sobolev. Cette solution n'est évidemment pas unique, et on a d'ailleurs dans la construction suivante une grande liberté de choix.

On a le théorème suivant (voir [5] et [16]) :

Théorème 2.2.1 ([5]). *Soit $f \in W_0^{k,q}(B)$ où B est une boule et $k \in \mathbb{N}$, $1 < q < \infty$. Supposons que $\int_B f = 0$. Alors il existe une solution $V \in W_0^{k+1,q}(B)$ de l'équation $\operatorname{div} V = f$ avec l'estimation suivante :*

$$\|V\|_{W^{k+1,q}(B)} \leq C(q, k, B)\|f\|_{W^{k,q}(B)}.$$

Preuve. Ces solutions sont définies de la façon suivante : soit $\chi \in C_0^\infty(B)$ une fonction vérifiant $\int_B \chi = 1$, alors on pose pour $x \in B$

$$V(x) = \int_B H(x, y) f(y) dy,$$

$$H(x, y) = \int_0^1 \frac{x-y}{t} \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^n}.$$

Commençons par déterminer la divergence de V . Déjà, remarquons que si $x, y \in B$, alors pour $t \in [0, 1]$, $y + \frac{x-y}{t} = (1 - \frac{1}{t})y + \frac{1}{t}x$ appartient à la droite passant par x et y , et est situé entre x et l'infini. On en déduit donc que si x est sur le bord de B ou à l'extérieur de B , cet élément ne peut pas être dans B , or comme χ est à support dans B , on en déduit que l'intégrale est nulle. D'où V est à support dans B . De plus, on a $|y + \frac{x-y}{t}| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow 0$ et on en déduit, si R est le rayon de B et x_0 son centre,

$$R \geq \left| y + \frac{x-y}{t} - x_0 \right| \Rightarrow R \geq \frac{|x-y|}{t} - |y - x_0| \Rightarrow R \geq \frac{|x-y|}{t} - R \Rightarrow t \geq \frac{|x-y|}{2R}.$$

On a donc

$$H(x, y) = \int_{\frac{|x-y|}{2R}}^1 \frac{x-y}{t} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \frac{dt}{t^n},$$

qui est bien définie. Par ailleurs, on peut faire la majoration suivante sur H :

$$|H(x, y)| \leq \|\chi\|_{L^\infty} \int_{\frac{|x-y|}{2R}}^1 \frac{|x-y|}{t^{n+1}} dt \leq C|x-y| \left[\frac{(2R)^n}{|x-y|^n} - 1 \right] \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}},$$

ce qui nous donne que $H \in L_{loc}^q$ pour $q < \frac{n}{n-1}$. Et comme

$$|V(x)| \leq C \int_B \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

on a d'après l'inégalité de Young

$$\|V\|_{L^p(B)} \leq C \left\| \frac{1}{|x|^{n-1}} \right\|_{L^1(B')} \|f\|_{L^p(B)},$$

où B' est la boule de centre 0 et de rayon $2R$. On en déduit que l'application qui à f associe V est continue de $L^p(B)$ dans $L^p(B)$. On cherche ensuite à vérifier la relation $\operatorname{div} V = g$. Pour cela, on écrit V de la façon suivante :

$$V(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \int_\varepsilon^1 \frac{x-y}{t^{n+1}} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) f(y) dt dy,$$

d'où

$$\operatorname{div} V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \int_\varepsilon^1 \left(\frac{n}{t^{n+1}} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) + \frac{x-y}{t^{n+2}} \cdot \nabla \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \right) f(y) dt dy.$$

Or, on remarque que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^n} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \right) = \frac{-n}{t^{n+1}} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) - \frac{x-y}{t^{n+2}} \cdot \nabla \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V(x) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \left[\frac{1}{t^n} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \right]_\varepsilon^1 f(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \left[\chi(x) - \frac{1}{\varepsilon^n} \chi \left(y + \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \frac{1}{\varepsilon^n} \chi \left(y + \frac{x-y}{\varepsilon} \right) f(y) dy \end{aligned}$$

car $\int_B f = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \chi \left(y + \frac{x-y}{\varepsilon} \right) f(y) \mathbb{1}_B(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} \chi(y) f \left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x-\varepsilon y) \right) \mathbb{1}_B \left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x-\varepsilon y) \right) dy. \end{aligned}$$

À présent, supposons que f soit uniformément continue sur B . Étant donné que

$$\left| \frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y) - x \right| = \left| \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(x - y) \right| \leq \frac{2R\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq C\varepsilon$$

on en déduit que

$$\left| f\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) - f(x) \right| \leq \omega(C\varepsilon)$$

où ω est le module de continuité de f . On a alors la majoration

$$\left| \chi(y) \left(f\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) \mathbf{1}_B\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) - f(x) \mathbf{1}_B\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) \right) \right| \leq |\chi(y)\omega(C\varepsilon)|,$$

et donc

$$\begin{aligned} |\operatorname{div} V(x) - f(x)| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} \chi(y) \left(f\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) \mathbf{1}_B\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(x) \mathbf{1}_B\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) \right) \right| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} |\chi(y)\omega(C\varepsilon)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

car χ est intégrable et on a

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi(y) \mathbf{1}_B\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(x - \varepsilon y)\right) dy$$

par le théorème de convergence dominée et en se rappelant que $\int_B \chi(y) dy = 1$. On a donc bien $\operatorname{div} V = f$ pourvu que f soit uniformément continue. Or, les fonctions continues à support compact (qui sont en particulier uniformément continues) sont denses dans $L^p(B)$. Donc, si $f \in L^p(B)$, il existe une suite f_k de fonctions uniformément continues qui approchent f dans $L^p(B)$. Par continuité, la suite V_k de fonctions associées par l'opérateur de Bogovskii converge vers V dans $L^p(B)$. Or, pour tout k , on a $\operatorname{div} V_k = f_k$, d'où par convergence dans $\mathcal{D}'(B)$, on en déduit que $\operatorname{div} V = f$.

Il ne reste plus qu'à démontrer la majoration sur les normes de Sobolev. Pour cela, on va utiliser le théorème de Calderón-Zygmund. En effet, on a vu la majoration $|H(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}}$ et on a le même type de majoration sur $\nabla_x H(x, y)$:

$$\nabla_x H(x, y) = \int_{\frac{|x-y|}{2R}}^1 \left[\frac{I_n}{t} \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) + \frac{x-y}{t^2} \otimes \nabla \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) \right] \frac{dt}{t^n}$$

d'où

$$|\nabla_x H(x, y)| \leq \|\chi\|_{W^{1,\infty}(B)} \int_{\frac{|x-y|}{2R}}^1 \left[\frac{1}{t^{n+1}} + \frac{|x-y|}{t^{n+2}} \right] dt \leq \frac{C}{|x-y|^n}.$$

On a donc bien affaire ici à une intégrale singulière et il suffit, pour que l'application $f \mapsto \nabla_x V = \int_B \nabla_x H(x, y) f(y) dy$ soit continue de $L^p(B)$ dans lui-même, que pour tous $x, y \in B$ et $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x - x'| \leq |x - y|/2$ on ait

$$\begin{aligned} |\nabla_x H(x, y) - \nabla_x H(x', y)| &\leq \frac{C|x - x'|}{|x - y|^{n+1}} \\ |\nabla_x H(y, x) - \nabla_x H(y, x')| &\leq \frac{C|x - x'|}{|x - y|^{n+1}}, \end{aligned}$$

voir le livre de Grafakos [19].

Ces estimations se font assez facilement, en utilisant le fait que pour un tel x' on a

$$\begin{aligned} \chi\left(y + \frac{x - y}{t}\right) - \chi\left(y + \frac{x' - y}{t}\right) &= \nabla\chi(\zeta_1) \cdot \frac{x - x'}{t} \\ \chi\left(x + \frac{y - x}{t}\right) - \chi\left(x' + \frac{y - x'}{t}\right) &= \nabla\chi(\zeta_2) \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) (x - x') \\ \nabla\chi\left(y + \frac{x - y}{t}\right) - \nabla\chi\left(y + \frac{x' - y}{t}\right) &= \nabla^2\chi(\zeta_3) \cdot \frac{x - x'}{t} \\ \nabla\chi\left(x + \frac{y - x}{t}\right) - \nabla\chi\left(x' + \frac{y - x'}{t}\right) &= \nabla^2\chi(\zeta_4) \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) (x - x') \end{aligned}$$

d'après la formule de Taylor-Lagrange, où les ζ_i sont des éléments de B . On doit également estimer les bornes sur lesquelles on intègre, en effet on sait que l'intégrale qui définit $H(x, y)$ peut être prise sur $[\frac{|x-y|}{2R}, 1]$. Or, on a $|x' - y| \geq |x - y| - |x - x'| \geq |x - y|/2$, on peut donc prendre toutes les intégrales sur $[\frac{|x-y|}{4R}, 1]$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \nabla_x H(x, y) - \nabla_x H(x', y) &= \int_{\frac{|x-y|}{4R}}^1 \left[\frac{I_n}{t} \left(\chi\left(y + \frac{x - y}{t}\right) - \chi\left(y + \frac{x' - y}{t}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{x - y}{t^2} \otimes \left(\nabla\chi\left(y + \frac{x - y}{t}\right) - \nabla\chi\left(y + \frac{x' - y}{t}\right) \right) + \frac{x - x'}{t^2} \otimes \nabla\chi\left(y + \frac{x' - y}{t}\right) \right] \frac{dt}{t^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\nabla_x H(x, y) - \nabla_x H(x', y)| &\leq C\|\chi\|_{W^{2,\infty}} \int_{\frac{|x-y|}{4R}}^1 \left[\frac{|x - x'|}{t^{n+2}} + \frac{|x - x'|\|x - y\|}{t^{n+3}} \right] dt \\ &\leq \frac{C|x - x'|}{|x - y|^{n+1}}. \end{aligned}$$

De la même façon on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla_x H(y, x) - \nabla_x H(y, x')| &\leq C\|\chi\|_{W^{2,\infty}} \int_{\frac{|x-y|}{4R}}^1 \left[\frac{(1-t)|x - x'|}{t^{n+2}} + \frac{(1-t)|x - x'|\|x - y\|}{t^{n+3}} + \frac{|x - x'|}{t^{n+2}} \right] dt \\ &\leq \frac{C|x - x'|}{|x - y|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc $\nabla_x H$ est bien un noyau d'intégrale singulière et on a

$$\|V\|_{W^{1,p}} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur, il suffit de remarquer que si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors $\operatorname{div} \partial_\alpha V = \partial_\alpha f$ et on peut donc appliquer le résultat à $\partial_\alpha V$, ce qui nous donne le résultat du théorème 2.2.1. \square

2.3 Solutions fondamentales de l'opérateur de Stokes

Dans cette section nous allons étudier les fonctions de Green qui apparaissent dans la résolution des EDP linéaires (essentiellement l'équation de Stokes ici) dans les différents cas qui nous intéressent. Après quelques considérations générales sur les fonctions et distributions homogènes et leurs transformées de Fourier, nous montrerons les expressions explicites des fonctions de Green associées au problème de Stokes en dimension 3, dans l'espace entier puis dans le demi-espace.

Par ailleurs, nous précisons les notations employées dans cette thèse : si V est un champ à valeurs vectorielles et M un champ à valeurs matricielles, alors on notera tout d'abord les opérateurs différentiels de la façon suivante :

$$(\nabla V)_{i,j} = \partial_j V_i, \quad (\operatorname{div} M)_i = \sum_j \partial_j M_{i,j}.$$

De plus, si N est un autre champ à valeurs matricielles, on définit comme suit les produits de matrices et de vecteurs ou les produits de matrices entre elles :

$$(M \cdot V)_i = \sum_k M_{i,k} V_k, \quad (M \cdot N)_{i,j} = \sum_k M_{i,k} N_{k,j}.$$

Considérons donc tout d'abord l'équation de Stokes sur \mathbb{R}^3 :

$$\Delta U - \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0.$$

On introduit alors le projecteur de Leray \mathbb{P} , qui est le projecteur orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ sur les champs de vecteurs de divergence nulle. Cette projection se fait parallèlement aux champs de gradient, et on peut trouver assez facilement son expression en Fourier : si $V \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ alors on a $V = \mathbb{P}V + \nabla p$, d'où $\hat{V}(\xi) = \mathcal{F}(\mathbb{P}V)(\xi) + i\xi \hat{p}(\xi)$ et donc, en prenant le produit scalaire par ξ , on obtient $i|\xi|^2 \hat{p} = \xi \cdot \hat{V}$ d'où $\hat{p}(\xi) = \frac{-i\xi \cdot \hat{V}}{|\xi|^2}$ et enfin

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}V) = \hat{V}(\xi) - \frac{(\xi \cdot \hat{V})\xi}{|\xi|^2} = M(\xi) \cdot \hat{V},$$

où

$$M(\xi) = I_3 - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}.$$

En repassant dans le domaine réel, on en déduit que

$$\mathbb{P}V = \mathcal{F}^{-1}(M) * V.$$

Ici, $\mathcal{F}^{-1}(M)$ est une fonction singulière qui fait intervenir des transformations de Riesz, mais nous n'en aurons pas besoin ici. Nous allons plutôt appliquer cet opérateur et son expression en Fourier à notre équation. On obtient alors

$$\mathbb{P}\Delta U = \mathbb{P}f.$$

Or, $\mathbb{P}\Delta U = \Delta U$ car $\operatorname{div} \Delta U = \Delta \operatorname{div} U = 0$. On est donc ramené à résoudre $\Delta U = \mathbb{P}f$, ce qui en Fourier donne

$$\hat{U}(\xi) = \left(\frac{-I_3}{|\xi|^2} + \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^4} \right) \cdot \hat{f} = N(\xi) \cdot \hat{f} = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(N) * f)$$

où

$$N(\xi) = \frac{-I_3}{|\xi|^2} + \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^4}$$

est une fonction à valeurs matricielles homogène de degré -2 et de classe C^∞ en-dehors de 0 . Or on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit g une fonction homogène de degré $-\alpha$ où $0 < \alpha < 3$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ qui soit C^∞ sur ce domaine, alors \hat{g} est une fonction homogène de degré $-3 + \alpha$ qui est également C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.*

Preuve. Tout d'abord, remarquons que la condition sur α garantit que g et \hat{g} sont dans L^1_{loc} si celle-ci a bien l'homogénéité souhaitée, et on peut alors les considérer indifféremment comme des fonctions ou des distributions sur \mathbb{R}^3 . Prouvons l'homogénéité de \hat{g} : par définition, g est homogène de degré $-\alpha$ si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\lambda > 0$,

$$\langle g, \varphi(\lambda \cdot) \rangle = \lambda^{-3+\alpha} \langle g, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle \hat{g}, \varphi(\lambda \cdot) \rangle = \left\langle g, \widehat{\varphi(\lambda \cdot)} \right\rangle.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi(\lambda \cdot))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\lambda x) dx \\ &= \lambda^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(y/\lambda) \cdot \xi} \varphi(y) dy \\ &= \lambda^{-3} \mathcal{F}(\varphi)(\cdot/\lambda), \end{aligned}$$

donc on en déduit

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, \varphi(\lambda \cdot) \rangle &= \lambda^{-3} \langle g, \hat{\varphi}(\cdot/\lambda) \rangle \\ &= \lambda^{-3+3-\alpha} \langle g, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \lambda^{-\alpha} \langle \hat{g}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien le degré d'homogénéité de \hat{g} , et il nous reste à prouver sa régularité en-dehors de 0 . Pour ce faire, multiplions \hat{g} par une grande puissance de $|\xi|$ pour avoir, par dérivation, une décroissance à l'infini suffisante dans l'espace réel :

$$|\xi|^{2m} \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}(\Delta^{2m} g).$$

Nous séparons ensuite ce qui se passe au voisinage de 0 du reste, c'est pourquoi nous introduisons $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction à valeurs positives telle que $\psi(x) = 1$ pour $|x| < 1$ et $\psi(x) = 0$ pour $|x| > 2$. On écrit alors

$$|\xi|^{2m} \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}(\Delta^{2m}(\psi g)) + \mathcal{F}(\Delta^{2m}((1 - \psi)g)).$$

Ici, le premier terme est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact, il est donc dans C^∞ et le second est la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ dans \mathbb{R}^3 tout entier, et qui décroît comme $|x|^{-\alpha-2m}$ car g est homogène, donc si $2m$ est suffisamment grand, il sera dans L^1 et cette transformée de Fourier sera continue. Donc, après avoir divisé par $|\xi|^{2m}$, on en déduit que \hat{g} est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Pour les dérivées d'ordre supérieur, on procède de la même façon. Soit $\gamma \in \mathbb{N}^3$ tel que $|\gamma| = k$, alors on a :

$$\begin{aligned} |\xi|^{2m} \partial^\gamma \hat{g}(\xi) &= \mathcal{F}(\Delta^{2m}((ix)^\gamma g)) \\ &= \mathcal{F}(\Delta^{2m}((ix)^\gamma \psi g)) + \mathcal{F}(\Delta^{2m}((ix)^\gamma (1 - \psi)g)). \end{aligned}$$

Ici encore, le premier terme est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact et le second d'une fonction C^∞ qui décroît en $|x|^{k-\alpha-2m}$ d'où, pour m suffisamment grand, cette fonction est dans L^1 et $\partial^\gamma g$ est continue en-dehors de 0. Ce qui achève la preuve du théorème. \square

On peut donc écrire $N = \hat{G}$ avec G une fonction à valeurs matricielles, homogène de degré -1 et C^∞ en-dehors de 0.

En réalité, on peut même trouver une expression explicite pour G . On suivra pour cela la démarche de Galdi dans [16]. On va alors considérer également la solution fondamentale pour la pression, appelons-la q . C'est une fonction homogène de degré -2 à valeurs vectorielles, C^∞ en-dehors de 0 également. L'idée est de prendre G et q sous la forme suivante :

$$G(x) = (-I_3 \Delta + \nabla^2) \Phi(x), \quad q(x) = \nabla \Delta \Phi(x),$$

où Φ est une fonction homogène de degré 1, de classe C^∞ en-dehors de 0 également. Cette forme permet d'avoir une compensation entre ΔG et ∇q . En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta G - \nabla q &= -\Delta^2 \Phi I_3 + \Delta \nabla^2 \Phi - \nabla^2 \Delta \Phi = -\Delta^2 \Phi I_3 \\ \operatorname{div} G &= -\nabla \Delta \Phi + \Delta \nabla \Phi = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir pour Φ la solution fondamentale de l'opérateur $-\Delta^2$ et on obtiendra $\Delta G - \nabla q = \delta_0 I_3$. Pour cela, il suffit de trouver une fonction dont le laplacien soit la solution fondamentale de $-\Delta$ lui-même. Cette solution fondamentale est donnée par

$$A(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

On peut donc chercher Φ sous la forme $\Phi(x) = \frac{|x|}{\alpha}$. On obtient alors $\nabla \Phi(x) = \frac{x}{\alpha|x|}$ et enfin

$$\Delta \Phi(x) = \frac{3}{\alpha|x|} - \frac{|x|^2}{\alpha|x|^3} = \frac{2}{\alpha|x|}.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = 8\pi$. On a alors la formule suivante pour G la fonction de Green de l'opérateur de Stokes dans \mathbb{R}^3 :

$$G(x) = -A(x)I_3 + \nabla^2 \left(\frac{|x|}{8\pi} \right) = \frac{-1}{8\pi} \left[\frac{I_3}{|x|} + \frac{x \otimes x}{|x|^3} \right]. \quad (2.3.1)$$

La solution du problème

$$\Delta U - \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

est donnée par la formule

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)f(y) dy.$$

Maintenant que nous connaissons le tenseur de Green pour le système de Stokes dans \mathbb{R}^3 , nous allons montrer l'expression du même tenseur mais dans le demi-espace $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$. Pour cela, on va commencer par introduire le tenseur associé au problème

$$\Delta U - \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } \Omega, \quad U = b \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.3.2)$$

Ce tenseur est donné dans [16] et [8] par la formule suivante :

$$K(x) = \frac{3x_3 x \otimes x}{2\pi|x|^5}.$$

La solution U du système (2.3.2) est alors donnée par la formule suivante, à condition que b satisfasse de bonnes propriétés :

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} K(x-y') \cdot b(y') dy' \text{ pour } x \in \Omega.$$

En particulier, ceci sera vrai si b est bornée. En effet, on aura alors

$$|U(x)| \leq \frac{3x_3 \|b\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{|x-y'|^2}{(|x-y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} dy'.$$

On remarque alors que cette intégrale est uniformément convergente pour $x_3 > a > 0$ car la fonction intégrée est régulière et décroît en $\frac{1}{|y'|^3}$ quand $|y'| \rightarrow \infty$. Pour que ce tenseur soit la fonction de Green associée au système (2.3.2), il faut vérifier trois choses :

- $\operatorname{div} {}^t K = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} K_{i,j} = 0$.
- $\lim_{x_3 \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} K(x-y') \cdot b(y') dy' = b(x_1, x_2, 0)$.
- $\Delta K = {}^t \nabla q$ avec q un champ à valeurs vectorielles.

La première condition vient simplement du fait qu'on souhaite que U soit de divergence nulle, on tombe alors naturellement, vues nos définitions, sur le fait que la transposée de K doive être de divergence nulle. Pour montrer que cette condition est vérifiée, on utilisera les formules suivantes : pour a un champ à valeurs scalaires, V et W des champs à valeurs vectorielles et M un champ à valeurs matricielles, on a

$$\operatorname{div}(a {}^t M) = a \operatorname{div} {}^t M + {}^t M \cdot \nabla a, \quad \operatorname{div}(V \otimes W) = (\operatorname{div} W)V + \nabla V \cdot W.$$

On obtient alors la divergence suivante pour K :

$$\frac{2\pi}{3} \operatorname{div} {}^t K = \frac{x \otimes x}{|x|^5} \cdot \nabla x_3 + x_3 x \otimes x \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^5} \right) + \frac{x_3}{|x|^5} ((\operatorname{div} x)x + \nabla x \cdot x).$$

Considérant que $\nabla x_3 = e_3$, $\operatorname{div} x = 3$, $\nabla x = I_3$ et $\nabla \left(\frac{1}{|x|^5} \right) = \frac{-5x}{|x|^7}$, on en déduit :

$$\frac{2\pi}{3} \operatorname{div} {}^t K = \frac{x_3 x}{|x|^5} - 5 \frac{x_3 x}{|x|^5} + 3 \frac{x_3 x}{|x|^5} + \frac{x_3 x}{|x|^5} = 0.$$

On considère ensuite la deuxième condition. Pour cela, on va considérer $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, et on notera dans la suite $x' = (x_1, x_2, 0)$. On fait alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' &= \frac{3}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{x_3(x - y') \otimes (x - y')}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} \cdot b(y') dy' \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_3(z', x_3) \otimes (z', x_3)}{(|z'|^2 + x_3^2)^{5/2}} \cdot b(x' - z') dz', \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variables $z' = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{R}^2$, le vecteur (z', x_3) est donc bien un vecteur de \mathbb{R}^3 . On a alors, en posant $z' = x_3 t$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' &= \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_3^3(t, 1) \otimes (t, 1)}{x_3^5(|t|^2 + 1)^{5/2}} \cdot b(x' - x_3 t) x_3^2 dt \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(t, 1) \otimes (t, 1)}{(|t|^2 + 1)^{5/2}} \cdot b(x' - x_3 t) dt. \end{aligned}$$

On suppose ensuite que b est bornée et continue, et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(t, 1) \otimes (t, 1)}{(|t|^2 + 1)^{5/2}} dt$ étant convergente, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, et on déduit la convergence suivante

$$\int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' \xrightarrow{x_3 \rightarrow 0} \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(t, 1) \otimes (t, 1)}{(|t|^2 + 1)^{5/2}} dt \cdot b(x').$$

Il ne reste plus alors qu'à calculer cette intégrale à valeurs matricielles. On commence par remarquer que les coefficients non diagonaux sont nuls :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_1 t_2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_1}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt = 0,$$

car chaque intégrande est impaire par rapport à au moins une des coordonnées. Pour les termes diagonaux, on va utiliser les coordonnées polaires : comme $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_1^2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_2^2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt$ par symétrie, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_1^2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|t|^2}{(1 + |t|^2)^{5/2}} dt \\ &= \pi \int_0^{+\infty} \frac{r^3}{(1 + r^2)^{5/2}} dr \\ &= \pi \int_0^{+\infty} \frac{r(1 + r^2)}{(1 + r^2)^{5/2}} dr - \pi \int_0^{+\infty} \frac{r}{(1 + r^2)^{5/2}} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2r}{(1 + r^2)^{3/2}} dr - \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2r}{(1 + r^2)^{5/2}} dr \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt}{(1+|t|^2)^{5/2}} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(1+r^2)^{5/2}} = \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(t, 1) \otimes (t, 1)}{(|t|^2 + 1)^{5/2}} dt = \frac{2\pi}{3} I_3$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier la troisième condition, à savoir $\Delta K = {}^t\nabla q$ avec q un champ à valeurs vectorielles. Cette condition vient naturellement quand on demande que $\Delta U = \nabla p$ avec p un champ à valeurs scalaires. Pour cela, on effectue le calcul suivant :

$$\Delta K(x) = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{\Delta(x_3 x \otimes x)}{|x|^5} + \Delta \left(\frac{1}{|x|^5} \right) x_3 x \otimes x + 2\nabla(x_3 x \otimes x) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^5} \right) \right].$$

Or on a $\nabla \left(\frac{1}{|x|^5} \right) = \frac{-5x}{|x|^7}$, d'où $\Delta \left(\frac{1}{|x|^5} \right) = \operatorname{div} \nabla \left(\frac{1}{|x|^5} \right) = \frac{-5 \cdot 3}{|x|^7} + \frac{-5 \cdot (-7)x \cdot x}{|x|^9} = \frac{20}{|x|^7}$.

De plus avec la formule $x_3 x \otimes x = \begin{pmatrix} x_1^2 x_3 & x_1 x_2 x_3 & x_1 x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 & x_2^2 x_3 & x_2 x_3^2 \\ x_1 x_3^2 & x_2 x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$ on trouve

$$\Delta(x_3 x \otimes x) = \begin{pmatrix} 2x_3 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 6x_3 \end{pmatrix} = 2x_3 I_3 + 2x \otimes e_3 + 2e_3 \otimes x.$$

Enfin, on écrit terme à terme $\partial_{x_k}(x_3 x_i x_j) = \delta_{3,k} x_i x_j + \delta_{i,k} x_3 x_j + \delta_{j,k} x_3 x_i$ que l'on doit appliquer à x , ce qui nous donne $\sum_k \partial_{x_k}(x_3 x_i x_j) x_k = 3x_3 x_i x_j$. Au final, on obtient

$$\Delta K(x) = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{2x_3 I_3 + 2x \otimes e_3 + 2e_3 \otimes x}{|x|^5} - \frac{10x_3 x \otimes x}{|x|^7} \right].$$

Cette matrice étant symétrique, $\Delta K = {}^t\nabla q$ équivaut à $\Delta K = \nabla q$, on cherchera donc plutôt un champ q vérifiant la deuxième forme. Pour trouver cette fonction à valeurs vectorielles, on peut par exemple chercher sous la forme d'un polynôme de degré 2 divisé par $|x|^5$, et ce qui paraît le plus naturel dans notre situation est de regarder $V(x) = \frac{x_3 x}{|x|^5}$, dont un rapide calcul nous donne : $\nabla V(x) = \left(\frac{x_3 I_3 + x \otimes e_3}{|x|^5} - 5 \frac{x_3 x \otimes x}{|x|^7} \right)$, d'où $\Delta K(x) = \frac{3}{\pi} \nabla V(x) + \frac{3e_3 \otimes x}{\pi |x|^5}$. Pour le dernier terme, on remarque que $\nabla \left(\frac{e_3}{|x|^3} \right) = -3 \frac{e_3 \otimes x}{|x|^5}$ et on en déduit

$$\Delta K(x) = \nabla \left(\frac{3x_3 x}{\pi |x|^5} - \frac{e_3}{\pi |x|^3} \right)$$

ce qui achève la preuve que K est bien la fonction de Green associée au système voulu.

On veut maintenant déterminer la fonction de Green E associée au système

$$\Delta U - \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } \Omega, \quad U = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Cette fonction nous permettra d'exprimer U sous la forme

$$U(x) = \int_{\Omega} E(x, y) \cdot f(y) dy.$$

Pour cela, on va utiliser les tenseurs précédents en nous basant sur les travaux [8], [16] et [41]. Le premier auteur fait une analyse des propriétés de ce tenseur à partir d'une formule faisant intervenir G et K , et les deux suivants, en plus de cette analyse, parviennent à déterminer une expression explicite de cette fonction.

Pour déterminer ce tenseur E , on peut commencer par regarder ce qu'il doit vérifier. Il doit être de divergence nulle (dans le même sens que pour K), s'annuler sur le bord $\partial\Omega$ et satisfaire $\Delta E + {}^t\nabla q = \delta_0 I_3$. Comme on sait que l'on a déjà $\Delta G - \nabla q = \delta_0 I_3$, il suffit alors de prendre

$$E(x, y) = G(x - y) - \int_{\partial\Omega} G(x - z') \cdot K(y - z') dz'.$$

À partir de là, on peut trouver une expression explicite que l'on prendra de [41] ou [16] et sur laquelle on vérifiera les conditions voulues. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E(x, y) = G(x - y) - G(x - y^*) \cdot I_3^* + \frac{x_3 y_3}{4\pi} \nabla_x \otimes \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) - \frac{x_3}{4\pi} \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \otimes e_3 \\ - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) + \frac{1}{4\pi |x - y^*|} e_3 \otimes e_3, \quad (2.3.3) \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ et $I_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cette expression nous

permet tout d'abord de vérifier facilement la divergence de E , qui doit être testée par rapport à la variable x . On obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x {}^t E(x, y) = \operatorname{div}_x (G(x - y)) - I_3^* \operatorname{div}_x (G(x - y^*)) \\ + \frac{y_3}{4\pi} \left(\nabla_y \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \cdot \nabla_x (x_3) + x_3 \operatorname{div}_x \left(\nabla_y \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \right) \right) \\ - \frac{1}{4\pi} \left(e_3 \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \cdot \nabla_x (x_3) + x_3 \operatorname{div}_x \left(e_3 \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \right) \right) \\ - \frac{y_3}{4\pi} \operatorname{div}_x \left(\nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \otimes e_3 \right) + e_3 \otimes e_3 \cdot \nabla_x \left(\frac{1}{4\pi |x - y^*|} \right). \end{aligned}$$

On rappelle que $\operatorname{div} G = 0$ et $\Delta_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) = 0$. On peut donc simplifier l'expression ci-dessus en

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x {}^t E(x, y) = \frac{y_3}{4\pi} \left(\nabla_y \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \cdot e_3 + x_3 \nabla_y \Delta_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \right) \\ - \frac{1}{4\pi} \left(e_3 \otimes \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \cdot e_3 + x_3 \Delta_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) e_3 \right) \\ - \frac{y_3}{4\pi} \partial_{x_3} \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) - e_3 \otimes e_3 \cdot \left(\frac{x - y^*}{4\pi |x - y^*|^3} \right) \\ = \frac{y_3}{4\pi} \partial_{x_3} \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) - \frac{1}{4\pi} \partial_{x_3} \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{y_3}{4\pi} \partial_{x_3} \nabla_y \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) - \frac{x_3 + y_3}{4\pi |x-y^*|^3} e_3 \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Le critère sur la divergence est donc bien vérifié. On va maintenant vérifier que ce tenseur s'annule bien pour $x_3 = 0$. Pour cela, on va calculer les dérivées qui apparaissent dans la formule (2.3.3). On remarque que $\nabla_y \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) = \nabla_y \left(\frac{1}{|y-x^*|} \right) = \frac{x^*-y}{|x-y^*|^3}$, et on a alors :

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= G(x-y) - G(x-y^*) \cdot I_3^* + \frac{x_3 y_3}{4\pi} {}^t \nabla_x \left(\frac{x^*-y}{|x-y^*|^3} \right) + \frac{x_3}{4\pi} \frac{x-y^*}{|x-y^*|^3} \otimes e_3 \\
&\quad - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x^*-y}{|x-y^*|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y^*|} e_3 \otimes e_3 \\
&= G(x-y) - G(x-y^*) \cdot I_3^* + \frac{x_3 y_3}{4\pi} \left(\frac{I_3^*}{|x-y^*|^3} - 3 \frac{(x-y^*) \otimes (x^*-y)}{|x-y^*|^5} \right) \\
&\quad + \frac{x_3}{4\pi} \frac{x-y^*}{|x-y^*|^3} \otimes e_3 - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x^*-y}{|x-y^*|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y^*|} e_3 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

Avec cette expression, on peut maintenant faire $x_3 = 0$, ce qui implique notamment que $x^* = x$ et $|x-y^*| = |x-y|$. On a alors, avec la formule (2.3.1)

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= G(x-y) - G(x-y^*) \cdot I_3^* - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y|} e_3 \otimes e_3 \\
&= \frac{-1}{8\pi} \left[\frac{I_3}{|x-y|} + \frac{(x-y) \otimes (x-y)}{|x-y|^3} \right] + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{I_3^*}{|x-y|} + \frac{(x-y^*) \otimes (x-y)}{|x-y|^3} \right] \\
&\quad - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y|} e_3 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

On écrit ensuite $x-y^* = x-y + 2y_3 e_3$ et on remarque que $I_3 - I_3^* = 2e_3 \otimes e_3$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= \frac{-1}{8\pi} \left[\frac{(I_3 - I_3^*)}{|x-y|} + \frac{(x-y) \otimes (x-y)}{|x-y|^3} - \frac{(x-y) \otimes (x-y) + 2y_3 e_3 \otimes (x-y)}{|x-y|^3} \right] \\
&\quad - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y|} e_3 \otimes e_3 \\
&= \frac{-1}{8\pi} \left[\frac{2e_3 \otimes e_3}{|x-y|} - 2y_3 \frac{e_3 \otimes (x-y)}{|x-y|^3} \right] - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi |x-y|} e_3 \otimes e_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que notre tenseur possède la symétrie suivante : $E(y, x) = {}^t E(x, y)$, on aura donc automatiquement $E(x, y) = 0$ si $y_3 = 0$.

Pour finir, il reste à démontrer que $\Delta_x E(x, y) - {}^t \nabla_x q(x, y) = I_3 \delta_0(x-y)$. On peut pour cela trouver une formulation équivalente plus agréable en l'appliquant à un vecteur C quelconque : il faut que pour tout $C \in \mathbb{R}^3$, on ait

$$\Delta_x E(x, y) \cdot C - \nabla_x (C \cdot q)(x, y) = C \delta_0(x-y). \quad (2.3.4)$$

On va pour cela utiliser la relation suivante sur G :

$$\begin{aligned}\Delta G &= \nabla^2 \Delta \Phi + \delta_0 I_3 \\ &= \nabla^2 A + \delta_0 I_3 \\ &= \nabla \left(\frac{-x}{4\pi|x|^3} \right) + \delta_0 I_3.\end{aligned}$$

En particulier, si C est un vecteur constant, on a

$$\Delta G \cdot C = -\nabla \left(\frac{C \cdot x}{4\pi|x|^3} \right) + \delta_0 C.$$

On applique Δ_x à (2.3.3). En utilisant la relation ci-dessus, en se rappelant que $\Delta_x \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right)$ et la formule $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g$ on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_x E(x, y) \cdot C &= \Delta_x G(x-y) \cdot C - \Delta_x G(x-y^*) \cdot I_3^* \cdot C + \frac{2y_3}{4\pi} (C \cdot \nabla_y) \nabla_x^2 \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) \cdot \nabla_x(x_3) \\ &\quad - \frac{2}{4\pi} (C \cdot e_3) \nabla_x^2 \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) \otimes e_3 \cdot \nabla_x(x_3) \\ &= \nabla_x \left(\frac{(y-x) \cdot C}{4\pi|x-y|^3} \right) + C\delta_0(x-y) + \nabla_x \left(\frac{(x-y^*) \cdot C^*}{4\pi|x-y^*|^3} \right) \\ &\quad + \frac{y_3}{2\pi} \partial_{x_3} \nabla_x \left((C \cdot \nabla_y) \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) \right) - \frac{1}{2\pi} \partial_{x_3} \nabla_x \left(\frac{C \cdot e_3}{|x-y^*|} \right) \\ &= C\delta_0(x-y) + \nabla_x \left(\frac{C \cdot (y-x)}{4\pi|x-y|^3} \right) + \nabla_x \left(\frac{C \cdot (x^*-y)}{4\pi|x-y^*|^3} \right) \\ &\quad + \nabla_x \left(C \cdot \left(\frac{y_3}{2\pi} \partial_{x_3} \nabla_y \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) \right) \right) - \nabla_x \left(C \cdot \left(\partial_{x_3} \frac{e_3}{2\pi|x-y^*|} \right) \right)\end{aligned}$$

d'où la relation (2.3.4) avec

$$q(x, y) = \frac{y-x}{4\pi|x-y|^3} + \frac{x^*-y}{4\pi|x-y^*|^3} + \frac{y_3}{2\pi} \partial_{x_3} \nabla_y \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) - \partial_{x_3} \frac{e_3}{2\pi|x-y^*|}.$$

Ceci achève la preuve que E est bien le tenseur que l'on recherchait sur le demi-espace.

Chapitre 3

Solutions dans \mathbb{R}^3 tout entier

Sommaire

3.1	Introduction	33
3.2	Principaux résultats et notations	35
3.3	Une condition nécessaire	37
3.4	Solutions homogènes	39
3.5	Comportement asymptotique pour les solutions générales	42
3.6	Le cas du domaine extérieur	47

3.1 Introduction

Nous considérons ici les équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles avec terme de force dans \mathbb{R}^3 :

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} U(x) = 0. \quad (3.1.1)$$

Le terme de force f est donné et les inconnues sont le champ de vitesse U et la pression scalaire p . Il est clair que p est uniquement déterminé (à une constante près) par f et U . Pour cette raison, lorsque nous parlons d'une solution de (3.1.1) il s'agit uniquement du champ de vitesse U . En d'autres mots, tout au long de ce chapitre une solution de (3.1.1) est un champ de vecteurs U tel qu'il existe p tel que (3.1.1) est satisfaite.

Le but de ce chapitre est de déterminer le comportement asymptotique des solutions à l'infini sous des hypothèses raisonnables sur le terme de force f . Différents auteurs ont effectué des travaux sur ce problème.

Dans [4] les auteurs étudient l'existence et l'unicité des solutions dans l'espace critique $L^{3,\infty}$ sous une hypothèse de petitesse. De plus, cet article trouve un comportement asymptotique explicite des solutions avec une décroissance en $O(\frac{1}{|x|^2})$ en supposant que $\mathbb{P}\Delta^{-1}f$ est majoré par $C/(1 + |x|^2)$, où \mathbb{P} est le projecteur de Leray. Plus précisément, ils prouvent le développement suivant de la solution :

$$U(x) = \mathbb{P}\Delta^{-1}f(x) + m(x) : \int_{\mathbb{R}^3} U \otimes U + O\left(\frac{\ln|x|}{|x|^3}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty \quad (3.1.2)$$

où $m(x)$ est une fonction explicite homogène de degré -2 et régulière en dehors de 0. On peut remarquer que $\mathbb{P}\Delta^{-1}$ est un opérateur de convolution dont le noyau est une fonction homogène

de degré -1 . En conséquence, si f décroît suffisamment à l'infini, la condition $|\mathbb{P}\Delta^{-1}f| \leq C/(1+|x|^2)$ imposée dans [4] est vraie si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^3} f = 0$.

Mais comme tous les termes du développement dans (3.1.2) sont en $O(\frac{1}{|x|^2})$, cela exclut toutes les solutions qui sont homogènes de degré -1 . En particulier cela exclut le cas particulier très important des solutions de Landau. Ces solutions ont été introduites par Landau dans [38] et elles sont données par les formules explicites suivantes :

$$v_1^c(x) = 2 \frac{c|x|^2 - 2x_1|x| + cx_1^2}{|x|(c|x| - x_1)^2}, \quad v_2^c(x) = 2 \frac{x_2(cx_1 - |x|)}{|x|(c|x| - x_1)^2}, \quad v_3^c(x) = 2 \frac{x_3(cx_1 - |x|)}{|x|(c|x| - x_1)^2}$$

avec la pression

$$p(x) = 4 \frac{cx_1 - |x|}{|x|(c|x| - x_1)^2}.$$

Elles vérifient (3.1.1) avec le terme de force $f = \beta\delta$ où

$$\beta = \frac{8\pi c}{3(c^2 - 1)} \left(2 + 6c^2 - 3c(c^2 - 1) \log \left(\frac{c+1}{c-1} \right) \right)$$

et δ est la masse de Dirac en 0 (voir [7]). Il a même été prouvé par Šverák [50] que toutes les solutions homogènes de (3.1.1) sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ avec terme de force nul sont des solutions de Landau.

Il apparaît alors que le comportement asymptotique pertinent à l'infini pour les solutions de (3.1.1) est plutôt en $O(1/|x|)$. Et il a effectivement été prouvé dans [43] que les solutions petites des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles dans un domaine extérieur de \mathbb{R}^3 se comportent comme $v(x) + o(1/|x|)$ où v est un champ de vecteur inconnu homogène de degré -1 . De plus, Korolev et Šverák [36] ont montré que le profil asymptotique de v doit être une solution de Landau. Plus précisément, ils ont prouvé que si U est petite et vérifie (3.1.1) dans l'extérieur d'une boule sans condition au bord, alors il existe a tel que $U = v^a + o(1/|x|)$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Mentionnons aussi [12] où les auteurs étudient le problème de Navier-Stokes stationnaire autour d'un obstacle en rotation. Ils obtiennent une nouvelle fois que le comportement asymptotique de la solution est donné par une solution de Landau quand la vitesse de rotation de l'obstacle est suffisamment petite.

Comme le comportement asymptotique à l'infini le plus pertinent est homogène de degré -1 et comme le terme de force correspondant à un champ de vitesse homogène de degré -1 est homogène de degré -3 , il est intéressant d'étudier le comportement asymptotique des solutions de (3.1.1) avec un terme de force dont le comportement asymptotique à l'infini est homogène de degré -3 .

Soit $\alpha \in (0, 1)$ fixé une fois pour toutes. Nous supposons dans le reste de ce chapitre que le terme de force est de la forme

$$f = \varphi f_0 + f_1 \tag{3.1.3}$$

où

- f_0 est homogène de degré -3 , localement bornée sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$;
- on a $|f_1(x)| \leq C/(1+|x|)^{3+\alpha}$ pour une certaine constante C ;
- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ est une fonction de troncature radiale telle que $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \leq 1/2$ et $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \geq 1$.

Les questions que nous nous posons sont les suivantes. Sous quelles hypothèses sur f_0 et f_1 peut-on trouver une solution U de (3.1.1) telle que $|U(x)| \leq C/|x|$ pour une certaine constante C ? Quand une telle solution existe, comment se comporte-t-elle à l'infini? Très rapidement, nous y apportons les réponses suivantes. Si une telle solution U existe alors nécessairement

$$\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0.$$

Et réciproquement, si la condition ci-dessus est vérifiée et si f_0, f_1 sont suffisamment petites, alors il existe une unique solution U qui soit petite et majorée comme $O(1/|x|)$. De plus, nous avons le comportement asymptotique suivant à l'infini pour la solution :

$$U(x) = U_0(x) + O(|x|^{-1-\alpha}),$$

où U_0 est l'unique solution petite de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force $f_0 + (\int_{\mathbb{R}^3} f_1)\delta$ qui est homogène de degré -1 .

Les résultats précis et les notations sont donnés dans la prochaine section. Dans la section 3 nous démontrons une condition nécessaire pour l'existence de solutions en $O(1/|x|)$. Nous prouvons ensuite dans la section 4 l'existence et l'unicité des solutions homogènes. Nous prouvons le résultat principal dans la section 5. Pour finir, dans la section 6 nous étendons notre résultat au cas d'un domaine extérieur.

3.2 Principaux résultats et notations

Nous introduisons l'espace fonctionnel suivant pour $a > 0$:

$$\dot{X}_a = \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) ; |f(x)| \leq \frac{C}{|x|^a} \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\dot{X}_a} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} |x|^a |f(x)|.$$

Nous rappelons maintenant certains résultats sur les distributions homogènes que l'on peut trouver dans le livre d'Hörmander [31, Section 3.2]. Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ une distribution homogène de degré -3 . Il existe une constante $S(v)$ telle que la relation suivante soit vérifiée :

$$\langle v, \varphi \rangle = S(v) \int_0^\infty \frac{\varphi(r)}{r} dr \quad (3.2.1)$$

pour toute fonction test radiale $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. On définit alors l'intégrale de v sur la sphère unité comme étant la constante $S(v)$:

$$\int_{\mathbb{S}^2} v \equiv S(v).$$

Cette définition est justifiée par le fait que la relation ci-dessus est vérifiée lorsque v est une fonction continue d'après le théorème de Fubini en coordonnées polaires.

Le résultat suivant sur l'extension des distributions homogènes est énoncé dans [31, Theorem 3.2.4].

Proposition 3.2.1 ([31]). *Soit $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ une distribution homogène de degré -3 . Il existe une distribution $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ homogène de degré -3 telle que $h|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} = g$ si et seulement si $\int_{\mathbb{S}^2} g = 0$. De plus, si on ajoute que g est une fonction localement bornée et que $\int_{\mathbb{S}^2} g = 0$ alors toutes les distributions h correspondantes sont données par*

$$h = \text{pv}(g) + C\delta$$

où C est une constante arbitraire et la valeur principale de g est définie par

$$\text{pv}(g) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) : \quad \langle \text{pv}(g), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Dans la suite nous travaillerons avec des intégrales de fonctions ayant une décroissance en $1/|x|^3$ à l'infini ou ayant des singularités en $1/|x|^3$ à l'origine. Ces intégrales sont définies au sens de la valeur principale de la façon suivante :

$$\text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} h = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon < |x| < R} h$$

lorsque cette limite existe.

On notera dans ce chapitre \mathbb{P} le projecteur de Leray, *i.e.* la projection orthogonale dans L^2 sur le sous-espace des champs de vecteurs de divergence nulle. En appliquant \mathbb{P} à (3.1.1) et en inversant le laplacien, on obtient la formulation équivalente suivante de (3.1.1) dans laquelle on a éliminé la pression :

$$U = \mathbb{P}\Delta^{-1} \text{div}(U \otimes U) - \mathbb{P}\Delta^{-1} f. \quad (3.2.2)$$

Pour énoncer notre principal résultat, nous devons d'abord établir un résultat d'existence et d'unicité pour les solutions homogènes.

Théorème 3.2.2. *Soit $f_0 \in \dot{X}_3$ une fonction homogène de degré -3 . Si les équations (3.1.1) sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ avec terme de force f_0 admettent une solution U_0 telle que $U_0 \in \dot{X}_1$ et U_0 est homogène de degré -1 , alors nécessairement*

$$\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0 \quad (3.2.3)$$

et il existe un vecteur constant $\gamma \in \mathbb{R}^3$ tel que U_0 vérifie (3.1.1) sur \mathbb{R}^3 avec terme de force $\text{pv}(f_0) + \gamma\delta$.

Réciproquement, supposons que $\gamma \in \mathbb{R}^3$ et $f_0 \in \dot{X}_3$ est homogène de degré -3 et que la condition (3.2.3) est vérifiée. Alors $\mathbb{P}\Delta^{-1} \text{pv}(f_0)$ est bien défini au sens de la valeur principale et il existe ε_1 telle que si

$$\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + |\gamma| < \varepsilon_1$$

alors il existe une unique solution $U_0 \in \dot{X}_1$ de (3.2.2) sur \mathbb{R}^3 avec terme de force $\text{pv}(f_0) + \gamma\delta$ telle que $\|U_0\|_{\dot{X}_1} \leq \varepsilon_1$. De plus, U_0 est homogène de degré -1 .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 3.2.3. *Soit f une fonction telle que décrite dans (3.1.3). Si il existe une solution U de (3.1.1) qui appartient à \dot{X}_1 , alors (3.2.3) doit être vraie.*

Réciproquement, supposons que (3.2.3) soit vraie. Il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que si

$$\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \|f_1\|_{\dot{X}_0 \cap \dot{X}_{3+\alpha}} \leq \varepsilon_2$$

alors l'équation (3.2.2) admet une unique solution petite $U \in \dot{X}_1$. De plus, cette solution a le comportement asymptotique suivant à l'infini :

$$U(x) = U_0(x) + O(|x|^{-1-\alpha}) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty$$

où U_0 est l'unique solution homogène de degré -1 de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force $\text{pv}(f_0) + (\text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} f)\delta$ obtenue dans le théorème 3.2.2.

3.3 Une condition nécessaire

Le but de cette section est de montrer que si le comportement asymptotique à l'infini du terme de force est homogène de degré -3 , alors une condition nécessaire pour l'existence de solutions en $O(1/|x|)$ est que la partie asymptotique du terme de force ait une intégrale nulle sur la sphère unité. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 3.3.1. *Soit $R_0 > 0$ et U un champ de vecteurs de divergence nulle défini sur $\Omega_0 = \{x ; |x| > R_0\}$ tel que $|U(x)| \leq C_0/|x|$ pour une certaine constante C_0 . Soient f_0 et f_1 des distributions à valeurs vectorielles telles que $f_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ est homogène de degré -3 et f_1 est une mesure de Radon finie (à valeurs vectorielles) sur Ω_0 . Si il existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ tel que*

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f_0 + f_1 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_0) \quad (3.3.1)$$

alors

$$\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0.$$

Preuve. Prenons deux fonctions radiales φ_1 et φ_2 vérifiant :

- $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ telle que $\varphi_1(x) = 0$ pour tout $|x| \leq R_0 + 1$ et $\varphi_1(x) = 1$ pour tout $|x| \geq R_0 + 2$.
- $\varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$, $\varphi_2(x) = 1$ pour tout $|x| \leq 1$ et $\varphi_2(x) = 0$ pour tout $|x| \geq 2$.

On définit $\varphi^R(x) = \varphi_2(x/R)\varphi_1(x)$ et on observe que $\varphi^R \in C_0^\infty(B_{R_0}^c)$. On applique l'opérateur

curl à (3.3.1) et on y applique le champ de vecteurs test $V_R \equiv \varphi^R \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ pour obtenir

$$-\langle \Delta \text{curl} U, V_R \rangle + \langle \text{curl} \text{div}(U \otimes U), V_R \rangle = \langle \text{curl}(f_0 + f_1), V_R \rangle$$

ce qui implique que

$$-\langle U, \text{curl} \Delta V_R \rangle - \langle U \otimes U, \nabla \text{curl} V_R \rangle = \langle f_0 + f_1, \text{curl} V_R \rangle. \quad (3.3.2)$$

Notons

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl} \Delta V_R &= \Delta(\nabla \varphi^R \times X + \varphi^R \operatorname{curl} X) \\
&= \Delta(\nabla \varphi^R \times X - 2\varphi^R e_1) \\
&= \nabla \Delta \varphi^R \times X + 2 \sum_{i=1}^3 \partial_i \nabla \varphi^R \times \partial_i X - 2\Delta \varphi^R e_1 \\
&= \nabla \Delta \varphi^R \times X + 2\partial_1 \nabla \varphi^R - 4\Delta \varphi^R e_1.
\end{aligned}$$

On observe ensuite que

$$\nabla \varphi^R(x) = \frac{1}{R} \nabla \varphi_2(x/R) \varphi_1(x) + \varphi_2(x/R) \nabla \varphi_1(x) = \frac{1}{R} \nabla \varphi_2(x/R) + \nabla \varphi_1(x) \quad (3.3.3)$$

si $R \geq R_0 + 2$. En conséquence, si $R \geq R_0 + 2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl} \Delta V_R &= \frac{1}{R^3} \nabla \Delta \varphi_2(x/R) \times X + \frac{2}{R^2} \partial_1 \nabla \varphi_2(x/R) - \frac{4}{R^2} \Delta \varphi_2(x/R) e_1 \\
&\quad + \nabla \Delta \varphi_1 \times X + 2\partial_1 \nabla \varphi_1 - 4\Delta \varphi_1 e_1.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$|\langle U, \frac{1}{R^3} \nabla \Delta \varphi_2(x/R) \times X \rangle| \leq \frac{C}{R^3} \int |\nabla \Delta \varphi_2(x/R)| = C \|\nabla \Delta \varphi_2\|_{L^1}$$

et de façon similaire

$$|\langle U, \frac{2}{R^2} \partial_1 \nabla \varphi_2(x/R) - \frac{4}{R^2} \Delta \varphi_2(x/R) e_1 \rangle| \leq C \|\nabla^2 \varphi_2 / |x|\|_{L^1}.$$

On en déduit que

$$\langle U, \operatorname{curl} \Delta V_R \rangle = O(1) \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

On peut prouver de la même façon que

$$\langle U \otimes U, \nabla \operatorname{curl} V_R \rangle = O(1) \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

On déduit de (3.3.2) que $\langle f_0 + f_1, \operatorname{curl} V_R \rangle$ doit également être borné quand $R \rightarrow \infty$. Mais on a

$$\begin{aligned}
\langle f_0 + f_1, \operatorname{curl} V_R \rangle &= \langle f_0 + f_1, -2\varphi^R e_1 + \nabla \varphi^R \times X \rangle \\
&= -2\langle (f_0)_1, \varphi^R \rangle - 2\langle (f_1)_1, \varphi^R \rangle + \langle f_0, \nabla \varphi^R \times X \rangle + \langle f_1, \nabla \varphi^R \times X \rangle \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\nabla \varphi^R$ peut s'écrire comme dans (3.3.3). Par homogénéité, on remarque que I_3 ne dépend pas de R . Comme φ^R et $\nabla \varphi^R \times X$ sont uniformément bornées et comme f_1 est une mesure de Radon finie, on sait que I_2 et I_4 sont bornées. On en déduit que I_1 doit être bornée quand $R \rightarrow \infty$. Comme f_0 est homogène de degré -3 et φ^R est radiale, en appliquant (3.2.1) on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (f_0)_1 \varphi^R = \int_0^\infty \frac{\varphi^R(r)}{r} dr \int_{\mathbb{S}^2} (f_0)_1.$$

Mais φ^R est positive et $\varphi^R(r) = 1$ pour tout $r \in [R_0 + 2, R]$, on a donc

$$\int_0^\infty \frac{\varphi^R(r)}{r} dr \geq \int_{R_0+2}^R \frac{\varphi^R(r)}{r} dr \geq \int_{R_0+2}^R \frac{1}{r} dr = \ln(R) - \ln(R_0 + 2).$$

On en conclut que pour que $\langle (f_0)_1, \varphi^R \rangle$ soit bornée, il est nécessaire d'avoir $\int_{\mathbb{S}^2} (f_0)_1 = 0$. Le même argument peut être appliqué aux autres composantes de f_0 , et on en déduit finalement que la condition

$$\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$$

doit être vérifiée. Ceci complète la preuve de la proposition. \square

3.4 Solutions homogènes

Dans cette section, nous démontrons le théorème 3.2.2.

Supposons d'abord qu'il existe $U_0 \in \dot{X}_1$ un champ de vitesse homogène de degré -1 et un scalaire p_0 tel que

$$-\Delta U_0 + \operatorname{div}(U_0 \otimes U_0) + \nabla p_0 = f_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

La proposition 3.3.1 implique immédiatement que la condition (3.2.3) doit être vérifiée.

Nous prouvons maintenant qu'il existe un vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^3$ tel que U_0 vérifie (3.1.1) sur \mathbb{R}^3 avec terme de force $\operatorname{pv}(f_0) + \gamma\delta$.

Comme $|U_0| \leq C/|x|$, on remarque que $U_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. En conséquence, U_0 définit une distribution homogène de degré -1 de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. En prenant le laplacien de cette distribution, on obtient que ΔU_0 s'étend en une distribution sur \mathbb{R}^3 tout entier qui est homogène de degré -3 . De la même façon, $U_0 \otimes U_0$ est majoré par $C/|x|^2$ donc il appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et donc $\operatorname{div}(U_0 \otimes U_0)$ admet également une extension en une distribution sur \mathbb{R}^3 qui est homogène de degré -3 . Définissons \bar{f}_0 de la façon suivante :

$$-\Delta U_0 + \operatorname{div}(U_0 \otimes U_0) = \bar{f}_0. \quad (3.4.1)$$

On sait donc que \bar{f}_0 est une distribution sur \mathbb{R}^3 qui est homogène de degré -3 . Clairement,

$$\operatorname{curl} \bar{f}_0 = \operatorname{curl}(-\Delta U_0 + \operatorname{div}(U_0 \otimes U_0)) = \operatorname{curl} f_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

donc $\operatorname{curl} \bar{f}_0 - \operatorname{curl} \operatorname{pv}(f_0)$ est une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, homogène de degré -4 et dont le support est à l'origine. Il existe donc trois vecteurs A_1, A_2, A_3 tels que

$$\operatorname{curl}(\bar{f}_0 - \operatorname{pv}(f_0)) = A_1 \partial_1 \delta + A_2 \partial_2 \delta + A_3 \partial_3 \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (3.4.2)$$

On déduit de l'identité $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$ que

$$\operatorname{div}(A_1 \partial_1 \delta + A_2 \partial_2 \delta + A_3 \partial_3 \delta) = 0$$

et donc

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \partial_{ij} \delta = 0$$

où a_{ij} sont les coefficients de la matrice A dont les colonnes sont A_1, A_2, A_3 . Les dérivées de la masse de Dirac étant linéairement indépendantes, on en déduit que la matrice A doit être antisymétrique. Il existe donc un vecteur $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier facilement que

$$A_1 \partial_1 \delta + A_2 \partial_2 \delta + A_3 \partial_3 \delta = \text{curl}(\gamma \delta)$$

et on déduit de (3.4.2) que

$$\text{curl}(\bar{f}_0 - \text{pv}(f_0) - \gamma \delta) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

En conséquence, il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\bar{f}_0 - \text{pv}(f_0) - \gamma \delta = \nabla p$$

et donc l'équation (3.4.1) peut se réécrire sous la forme

$$-\Delta U_0 + \text{div}(U_0 \otimes U_0) = \text{pv}(f_0) + \gamma \delta + \nabla p \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Ce qui signifie que U_0 vérifie l'équation de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 avec terme de force $\text{pv}(f_0) + \gamma \delta$.

Supposons maintenant que $\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$. Alors par la proposition 3.2.1 on sait que $\text{pv}(f_0)$ est bien définie et est une distribution homogène de degré -3 .

Il n'est pas difficile de montrer que $\mathcal{F}(\text{pv}(f_0))$ est une fonction bornée, et alors $\mathbb{P}\Delta^{-1} \text{pv}(f_0)$ peut être facilement défini dans l'espace de Fourier. Toutefois, il nous faut des estimations sur $\mathbb{P}\Delta^{-1} \text{pv}(f_0)$ dans l'espace \dot{X}_1 nous allons donc préférer le produit de convolution à la transformée de Fourier et prouver directement que $\mathbb{P}\Delta^{-1} \text{pv}(f_0)$ est bien défini, et l'estimer dans l'espace \dot{X}_1 .

Comme on l'a vu dans la section 2.3, l'opérateur $\mathbb{P}\Delta^{-1}$, qui ne fait que donner la solution linéaire du système de Stokes, est un opérateur à noyau dont l'expression est :

$$G(x) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{I_3}{|x|} + \frac{x \otimes x}{|x|^3} \right) \quad (3.4.3)$$

où I_3 est la matrice identité.

On démontre ensuite que la convolution $G * f_0$ est bien définie.

Lemme 3.4.1. *Le produit de convolution $G * f_0$ est bien défini au sens de la valeur principale suivante :*

$$G * f_0(x) = \text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y) f_0(y) dy$$

et on a la majoration

$$\|G * f_0\|_{\dot{X}_1} \leq C \|f_0\|_{\dot{X}_3} = C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}$$

pour une constante universelle C .

Preuve. L'existence de $G * f_0$ au sens de la valeur principale vient des majorations ci-dessous. On décompose

$$\begin{aligned}
\text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)f_0(y) dy &= \int_{|y|>2|x|} G(x-y)f_0(y) dy + \int_{2|x|>|y|>|x|/2} G(x-y)f_0(y) dy \\
&\quad + \text{pv} \int_{|x|/2>|y|} G(x-y)f_0(y) dy \\
&= \int_{|y|>2|x|} G(x-y)f_0(y) dy + \int_{2|x|>|y|>|x|/2} G(x-y)f_0(y) dy \\
&\quad + \int_{|x|/2>|y|} (G(x-y) - G(x))f_0(y) dy \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que f_0 est de moyenne nulle sur la sphère unité et donc

$$\text{pv} \int_{|x|/2>|y|} f_0(y) dy = 0.$$

On majore maintenant chacun de ces termes. Observons d'abord que

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_{|y|>2|x|} G(x-y)f_0(y) dy \right| \\
&\leq \int_{|y|>2|x|} \frac{C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x-y||y|^3} dy \\
&\leq C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \int_{|y|>2|x|} \frac{1}{|y|^4} dy \\
&\leq \frac{C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{2|x|>|y|>|x|/2} G(x-y)f_0(y) dy \right| \\
&\leq \int_{2|x|>|y|>|x|/2} \frac{C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x-y||y|^3} dy \\
&\leq \frac{C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|^3} \int_{|x-y|<3|x|} \frac{1}{|x-y|} dy \\
&\leq \frac{C\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|}.
\end{aligned}$$

On majore maintenant I_3 . L'égalité des accroissements finis nous donne que $G(x-y) - G(x) = y \cdot \nabla G(\xi)$ pour un certain $\xi \in [x, x-y]$. Si $|y| < |x|/2$ alors on peut faire la majoration

$$|G(x-y) - G(x)| \leq |y| \sup_{\xi \in [x, x-y]} |\nabla G(\xi)| \leq C|y| \sup_{\xi \in [x, x-y]} \frac{1}{|\xi|^2} \leq C \frac{|y|}{|x|^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \int_{|x|/2 > |y|} (G(x-y) - G(x)) f_0(y) dy \right| \\
&\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|^2} \int_{|x|/2 > |y|} \frac{1}{|y|^2} dy \\
&\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|}.
\end{aligned}$$

En réunissant les majorations précédentes, on obtient l'énoncé du lemme. \square

Une fois ce lemme prouvé, il n'est pas difficile de terminer la preuve du théorème 3.2.2. En effet, on a $G * \delta = G \in \dot{X}_1$ et donc $G * (\text{pv}(f_0) + \gamma\delta) \in \dot{X}_1$. On en déduit que $\mathbb{P}\Delta^{-1}(\text{pv}(f_0) + \gamma\delta)$ est bien défini, appartient à \dot{X}_1 et on a la majoration

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}(\text{pv}(f_0) + \gamma\delta)\|_{\dot{X}_1} \leq C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + C|\gamma|. \quad (3.4.4)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution petite U_0 , il suffit d'appliquer le résultat suivant, extrait de [4, Théorèmes 2.2 et 3.1] :

Théorème 3.4.2 ([4]). *Il existe une constante universelle $\varepsilon_0 > 0$ ayant la propriété suivante. Si f est tel que $\mathbb{P}\Delta^{-1}f \in \dot{X}_1$ et*

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}f\|_{\dot{X}_1} < \varepsilon_0$$

alors il existe une unique solution $U \in \dot{X}_1$ de (3.2.2) telle que

$$\|U\|_{\dot{X}_1} \leq 2\|\mathbb{P}\Delta^{-1}f\|_{\dot{X}_1}.$$

En utilisant (3.4.4), on peut appliquer le théorème ci-dessus et en déduire que si $\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + |\gamma|$ est suffisamment petit, alors il existe une unique solution petite U_0 de (3.2.2) avec terme de force $\text{pv}(f_0) + \gamma\delta$. De plus, on a

$$\|U_0\|_{\dot{X}_1} \leq C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + C|\gamma|. \quad (3.4.5)$$

Il reste à prouver que U_0 est homogène de degré -1 . Ceci vient d'un argument de scaling assez classique. Par homogénéité, $\text{pv}(f_0) + \gamma\delta$ est invariant par le changement d'échelle $f \mapsto \lambda^3 f(\lambda x)$. De plus, la norme \dot{X}_1 de $\mathbb{P}\Delta^{-1}f$ est également invariante par ce changement d'échelle. Mais si U_0 est solution de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force f alors $U_{0,\lambda}(x) = \lambda U_0(\lambda x)$ est également solution de l'équation de Navier-Stokes, avec pour terme de force $\lambda^3 f(\lambda x)$. Par unicité des solutions, on doit avoir que $U_{0,\lambda} = U_0$ pour tout $\lambda > 0$. En conséquence, la solution U_0 est homogène de degré -1 .

3.5 Comportement asymptotique pour les solutions générales

Dans cette section nous prouvons le théorème 3.2.3.

La condition nécessaire (3.2.3) pour l'existence de $U \in \dot{X}_1$ est une conséquence de la proposition 3.3.1.

On suppose maintenant que la condition (3.2.3) est vérifiée. Le terme $\mathbb{P}\Delta^{-1}(\varphi f_0) = G * (\varphi f_0)$ est bien défini car φf_0 est majoré par $\frac{C}{(1+|x|)^3}$ et on peut donc le convoluer au sens classique avec G . De plus, on peut, comme dans le lemme 3.4.1 montrer qu'il appartient à \dot{X}_1 et qu'on a la majoration suivante

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}(\varphi f_0)\|_{\dot{X}_1} \leq C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}$$

pour une certaine constante universelle C . La preuve s'applique intégralement, elle est juste simplifiée du fait que les intégrales ne sont plus définies au sens de la valeur principale mais au sens classique.

Pour $f_1 \in \dot{X}_0 \cap \dot{X}_{3+\alpha} \subset \dot{X}_3$, on sait d'après [4, relation (3.1)] que $\mathbb{P}\Delta^{-1}f_1 \in \dot{X}_1$ et

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}f_1\|_{\dot{X}_1} \leq C \|f_1\|_{\dot{X}_0 \cap \dot{X}_{3+\alpha}}.$$

Cela vient de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} G * f_1(x) &= \int_{|y| \leq |x|/2} G(x-y)f_1(y) dy + \int_{|y| > |x|/2} G(x-y)f_1(y) dy \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{|f_1(y)|}{|x-y|} dy \\ &\leq \frac{C}{|x|} \int_{|y| \leq |x|/2} |f_1(y)| dy \\ &\leq \frac{C \|f_1\|_{L^1}}{|x|} \\ &\leq \frac{C \|f_1\|_{\dot{X}_0 \cap \dot{X}_{3+\alpha}}}{|x|}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on a

$$|I_2| \leq C \|f_1\|_{\dot{X}_3} \int_{|y| > |x|/2} \frac{dy}{|x-y||y|^3} \equiv C \|f_1\|_{\dot{X}_3} I(x).$$

Or on voit facilement que $I(x)$ définit une fonction radiale et homogène de degré -1, elle est donc de la forme $I(x) = C/|x|$. Ceci donne immédiatement

$$|I_2| \leq C \frac{\|f_1\|_{\dot{X}_3}}{|x|}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}\Delta^{-1}f \in \dot{X}_1$ et

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}f\|_{\dot{X}_1} \leq C(\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \|f_1\|_{\dot{X}_0 \cap \dot{X}_{3+\alpha}}) \leq C\varepsilon_2.$$

Rappelons le résultat suivant, notamment démontré dans [4, Lemma 3.6] :

Lemme 3.5.1 ([4]). *Soit $U_1 \in \dot{X}_{1+\beta}$ et $U_2 \in \dot{X}_{1+\gamma}$ avec $\beta, \gamma \geq 0$ et $\beta + \gamma < 1$. On a alors $\mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U_1 \otimes U_2) \in \dot{X}_{1+\gamma+\beta}$ et*

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U_1 \otimes U_2)\|_{\dot{X}_{1+\gamma+\beta}} \leq C \|U_1\|_{\dot{X}_{1+\beta}} \|U_2\|_{\dot{X}_{1+\gamma}}.$$

Preuve. Pour prouver ce résultat, on commence par écrire $\mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U_1 \otimes U_2)$ comme une convolution. En effet, si A est un champ à valeurs matricielles qui décroît suffisamment à l'infini, on peut écrire, comme on l'a vu avant,

$$\mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div} A = G * \operatorname{div} A = \nabla G * A = m * A,$$

où on appelle m la fonction ∇G qui à chaque point de l'espace associe une application linéaire sur les matrices à valeurs vectorielles. En utilisant le fait que m , est de classe C^∞ en dehors de 0 et homogène de degré -2, on en déduit que $|m(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}$. On a alors les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |m * (U_1 \otimes U_2)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |m(x-y)| |U_1(y)| |U_2(y)| dy \\ &\leq C \|U_1\|_{\dot{X}_{1+\beta}} \|U_2\|_{\dot{X}_{1+\gamma}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2 |y|^{2+\beta+\gamma}} dy. \end{aligned}$$

Comme avant, si on introduit $J(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2 |y|^{2+\beta+\gamma}} dy$, on peut voir que c'est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ car $\beta + \gamma < 1$, qu'elle est radiale et homogène de degré $-1 - \beta - \gamma$. On en déduit alors

$$|m * (U_1 \otimes U_2)(x)| \leq \frac{C \|U_1\|_{\dot{X}_{1+\beta}} \|U_2\|_{\dot{X}_{1+\gamma}}}{|x|^{1+\beta+\gamma}}$$

ce qui donne le résultat du lemme. □

On en déduit alors que l'application $\dot{X}_1 \times \dot{X}_1 \ni (U_1, U_2) \mapsto \mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U_1 \otimes U_2) \in \dot{X}_1$ est bilinéaire et continue. En appliquant le lemme 2.1.1 on trouve que si ε_2 est suffisamment petit, alors il existe une unique solution U de (3.2.2) qui soit petite dans \dot{X}_1 . Par ailleurs, d'après la preuve du lemme 2.1.1 la solution U est obtenue comme limite des solutions approchées définies par

$$U^0 = -\mathbb{P}\Delta^{-1} f, \quad U^{k+1} = \mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U^k \otimes U^k) - \mathbb{P}\Delta^{-1} f.$$

De plus, on sait que $\|U^k\|_{\dot{X}_1} \leq C\varepsilon_2$ pour tout k .

Soit U_0 l'unique solution homogène de degré -1 de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force $\operatorname{pv}(f_0) + (\operatorname{pv} \int_{\mathbb{R}^3} f) \delta$ que nous donne le théorème 3.2.2. On définit alors $v = U - U_0$. Pour achever la preuve du théorème 3.2.3 nous devons démontrer que $v \in \dot{X}_{3+\alpha}$. On sait que v satisfait l'équation suivante :

$$v = \mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(v \otimes v + v \otimes U_0 + U_0 \otimes v) - \mathbb{P}\Delta^{-1} f_2$$

où

$$f_2 = (\varphi - 1)f_0 + f_1 - \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_1 \right) \delta.$$

Nous avons utilisé plus haut que $\int_{\mathbb{S}^2} f_0 = 0$ et que φ est radiale pour déduire que $\operatorname{pv} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f_0 = 0$ et donc $\int_{\mathbb{R}^3} f_1 = \operatorname{pv} \int_{\mathbb{R}^3} f$. Comme U est la limite des solutions approchées U^k , on sait que v est la limite des solutions approchées $v_k = U^k - U_0$ qui vérifient

$$v_0 = -\mathbb{P}\Delta^{-1} f_2, \quad v_{k+1} = \mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(v_k \otimes v_k + v_k \otimes U_0 + U_0 \otimes v_k) - \mathbb{P}\Delta^{-1} f_2.$$

On sait que

$$\|v_k\|_{\dot{X}_1} \leq C\varepsilon_2 \quad \forall k. \tag{3.5.1}$$

En effet, nous avons observé plus haut que $\|U^k\|_{\dot{X}_1} \leq C\varepsilon_2$ pour tout k et nous savons également, d'après la preuve du théorème 3.2.2 que $\|U_0\|_{\dot{X}_1} \leq C\varepsilon_2$ (voir la relation (3.4.5)).

Nous allons montrer par récurrence qu'il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que si ε_2 est suffisamment petit, alors $v_k \in \dot{X}_{1+\alpha}$ pour tout k et

$$\|v_k\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \leq \varepsilon_3. \quad (3.5.2)$$

Nous commençons par prouver ce résultat pour $k = 0$.

Lemme 3.5.2. *On a*

$$\|\mathbb{P}\Delta^{-1}f_2\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \leq C(\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}}).$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que $\mathbb{P}\Delta^{-1}$ est un opérateur de convolution de noyau G défini dans (3.4.3). On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Delta^{-1}(\varphi f_0 + f_1)(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y) \cdot (\varphi(y)f_0(y) + f_1(y)) dy \\ &= \text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)f_0(y) dy + G(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f_1 \\ &\quad + \text{pv} \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y) \cdot (\varphi - 1)(y)f_0(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (G(x-y) - G(x)) \cdot f_1(y) dy \\ &= G * \left(f_0 + \int_{\mathbb{R}^3} f_1 \delta \right) (x) + \int_{|y| \leq 1} (G(x-y) - G(x)) \cdot (\varphi - 1)(y)f_0(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (G(x-y) - G(x)) \cdot f_1(y) dy. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}\Delta^{-1}(f_2)(x)| &\leq \left| \int_{|y| \leq 1} (G(x-y) - G(x)) \cdot (\varphi - 1)f_0(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^3} (G(x-y) - G(x)) \cdot f_1(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{|y| \leq \min(|x|/2, 1)} (G(x-y) - G(x)) \cdot (\varphi - 1)f_0(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 1} (G(x-y) - G(x)) \cdot (\varphi - 1)f_0(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{|y| \leq |x|/2} (G(x-y) - G(x)) \cdot f_1(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{|y| \geq |x|/2} (G(x-y) - G(x)) \cdot f_1(y) dy \right| \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

où on suppose que $I_2 = 0$ si $|x| > 2$. On estime maintenant chacun de ces termes. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|y| \leq \min(|x|/2, 1)} |G(x-y) - G(x)| (\varphi - 1) f_0(y) dy \\ &\leq C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \int_{|y| \leq \min(|x|/2, 1)} \frac{|\nabla G(\zeta(x, y)) \cdot y|}{|y|^3} dy \end{aligned}$$

où $\zeta(x, y)$ est sur le segment reliant x et $x - y$, d'où $1/|\zeta|^2 \leq C/|x|^2$

$$\begin{aligned} &\leq C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \int_{|y| \leq \min(|x|/2, 1)} \frac{1}{|x|^2 |y|^2} dy \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|^2} \min(|x|/2, 1) \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|(1+|x|)} \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Ensuite, si $|x| \leq 2$ alors on peut borner I_2 exactement comme dans le lemme 3.4.1 pour obtenir

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{|x|/2 \leq |y|} G(x-y) \cdot (\varphi - 1) f_0(y) dy \right| \\ &\leq C \|f_0\|_{L^\infty} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} \frac{1}{|x-y||y|^3} dy + C \|f_0\|_{L^\infty} \int_{2|x| \leq |y|} \frac{1}{|x-y||y|^3} dy \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty}}{|x|^3} \int_{|x-y| \leq 3|x|} \frac{1}{|x-y|} dy + C \|f_0\|_{L^\infty} \int_{2|x| \leq |y|} \frac{1}{|y|^4} dy \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|} \\ &\leq \frac{C \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}}{|x|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

On peut ensuite estimer I_3 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \int_{|y| \leq |x|/2} |G(x-y) - G(x)| |f_1(y)| dy \\ &\leq C \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{|\nabla G(\zeta) \cdot y|}{|y|^{3+\alpha}} dy \end{aligned}$$

où $\zeta(x, y)$ est entre x et $x - y$, d'où $1/|\zeta|^2 \leq C/|x|^2$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}}}{|x|^2} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{1}{|y|^{2+\alpha}} dy \\ &\leq \frac{C \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}}}{|x|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \int_{|y| \geq |x|/2} |G(x-y) - G(x)| |f_1(y)| dy \\
&\leq \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} |G(x-y)| |f_1(y)| dy + \int_{|y| \geq 2|x|} |G(x-y)| |f_1(y)| dy + \int_{|y| \geq |x|/2} |G(x)| |f_1(y)| dy \\
&\leq C \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}} \left(\frac{1}{|x|^{3+\alpha}} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} \frac{1}{|x-y|} dy + \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|y|^{4+\alpha}} dy + \frac{1}{|x|} \int_{|y| \geq |x|/2} \frac{1}{|y|^{3+\alpha}} dy \right) \\
&\leq \frac{C \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}}}{|x|^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Nous revenons maintenant à la preuve de la relation (3.5.2). D'après le lemme 3.5.2 on en déduit que

$$\|v_0\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \leq C\varepsilon_2.$$

On impose la condition $C\varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$ de telle sorte que (3.5.2) soit vérifiée pour $k = 0$. En supposant que l'on ait prouvé (3.5.2) pour v_k , on veut la montrer pour v_{k+1} . On utilise la relation (3.5.1) et le lemme 3.5.1 pour majorer

$$\begin{aligned}
\|v_{k+1}\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} &\leq C(\|v_k\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \|v_k\|_{\dot{X}_1} + \|v_k\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \|U_0\|_{\dot{X}_1}) + \|v_0\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} \\
&\leq C\varepsilon_2 \|v_k\|_{\dot{X}_{1+\alpha}} + C\varepsilon_2 \\
&\leq C\varepsilon_2(1 + \varepsilon_3).
\end{aligned}$$

Clairement si ε_2 est suffisamment petit, on peut choisir ε_3 such that $C\varepsilon_2(1 + \varepsilon_3) \leq \varepsilon_3$. Pour un tel choix de ε_2 et ε_3 , la relation (3.5.2) est vraie pour tout k . Elle doit donc être vérifiée pour la limite v . D'où $v \in \dot{X}_{1+\alpha}$ ce qui achève la preuve du théorème 3.2.3.

3.6 Le cas du domaine extérieur

Dans cette section, nous prouvons l'extension suivante du théorème 3.2.3 au cas des domaines extérieurs.

Théorème 3.6.1. *Soit $R > 0$ et considérons f , U et p définis pour $|x| > R$. Supposons que $U \in \dot{X}_1$ et $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in \dot{X}_3$ homogène de degré -3 et $f_1 \in \dot{X}_{3+\alpha}$. Supposons également que*

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{in } \{|x| > R\},$$

que la condition (3.2.3) est vérifiée et que

$$\int_{|x|=R_1} U \cdot x = 0 \tag{3.6.1}$$

pour tout $R_1 > R$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si

$$\|f_0\|_{\dot{X}_3} + \|f_1\|_{\dot{X}_{3+\alpha}} + \|U\|_{\dot{X}_1} \leq \varepsilon$$

alors il existe un vecteur constant m_0 petit tel que U admette le développement asymptotique suivant :

$$U(x) = U_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty$$

où U_0 est l'unique solution homogène de degré -1 de l'équation de Navier-Stokes avec terme de force $\text{pv}(f_0) + m_0\delta$ obtenue dans le théorème 3.2.2. De plus, on peut écrire m_0 sous la forme suivante :

$$m_0 = \int_{|x|>R_1} f_1 + \int_{|x|=R_1} [-\partial_\nu U + (U \cdot \nu)U + p\nu] d\sigma \quad \forall R_1 > R \quad (3.6.2)$$

où $\nu = x/|x|$.

Remarque 3.6.2. La condition (3.6.1) est assez naturelle. Elle est automatiquement vérifiée si U vérifie l'équation de Navier-Stokes associée à une condition au bord de Dirichlet homogène dans un domaine extérieur Ω . Cela peut être aisément vérifié en intégrant la relation $\text{div } U = 0$ sur $\Omega \cap \{|x| < R_1\}$. De plus, une intégration similaire nous montre que l'intégrale dans la relation (3.6.1) est proportionnelle à R_1 . Il suffit donc de supposer la relation (3.6.1) vraie pour un seul R_1 .

Pour prouver le théorème 3.6.1, nous suivons le procédé de [36]. Nous étendons U à l'espace tout entier, nous étudions le terme de force supplémentaire qui apparaît et nous appliquons le théorème 3.2.3.

Soit $\Omega = \{|x| > R\}$. Tout d'abord, observons que U et p sont plus régulières que ce que nous avons énoncé avant :

Lemme 3.6.3. *On a : $(U, p) \in W_{loc}^{2,q}(\Omega) \times W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. De plus, pour tout K ouvert connexe relativement compact dans Ω , il existe une constante $C = C(K)$ telle que*

$$\|U\|_{W^{2,q}(K)} + \|p\|_{W^{1,q}(K)} \leq C(\|U\|_{\dot{X}_1} + \|f\|_{\dot{X}_3})$$

quitte à soustraire une constante (qui dépend de K) de la pression p .

Preuve du lemme. La preuve découle du théorème de régularité intérieure suivant pour l'équation de Stokes stationnaire, démontré dans [51] :

Théorème 3.6.4 ([51]). *Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^3 , et $B_1 \subset B_2$ deux boules concentriques de rayons R et $2R$, strictement incluses dans Ω . Soient $1 < q < \infty$ et $f \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$. Si $(U, p) \in W_{loc}^{1,q}(\Omega) \times L_{loc}^q(\Omega)$ sont solutions du système de Stokes stationnaire avec un terme de force f dans Ω (sans condition au bord), alors*

$$\|U\|_{W^{1,q}(B_1)} + \inf_{c \in \mathbb{R}} \|p - c\|_{L^q(B_1)} \leq C(\|U\|_{L^1(B_2 \setminus B_1)} + \|f\|_{W^{-1,q}(B_2)}).$$

Ce théorème implique le résultat de régularité suivant :

Si $\bar{U} \in L_{loc}^1(\Omega)$, $\bar{p} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\bar{f} \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ vérifient $\text{div } \bar{U} = 0$ et $-\Delta \bar{U} + \nabla \bar{p} = \bar{f}$ dans Ω , alors $\bar{U} \in W_{loc}^{1,q}(\Omega)$.

Pour le prouver, considérons B_1 une boule incluse dans Ω de rayon R , B_2 la boule concentrique de rayon $R/2$ et B_3 la boule concentrique de rayon $R/4$. Considérons alors η une fonction de troncature, $\eta \in C_0^\infty(B_1; [0, 1])$ telle que $\eta = 1$ au voisinage de B_2 et $\eta = 0$ dans B_1^c . Prenons

également ρ une approximation de l'unité, c'est-à-dire une fonction dans $C_0^\infty(B(0, 1), \mathbb{R}^+)$ telle que $\int \rho = 1$. Notons enfin, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3}\rho(x/\varepsilon)$ et

$$\bar{U}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\eta\bar{U}), \quad \bar{p}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\eta\bar{p}), \quad \bar{f}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\eta\bar{f}).$$

Pour ε suffisamment petit on sait que \bar{U}_ε , \bar{p}_ε et \bar{f}_ε sont C^∞ à support compact dans B_1 et on a

$$\begin{aligned} -\Delta\bar{U}_\varepsilon + \nabla\bar{p}_\varepsilon &= \bar{f}_\varepsilon & \text{dans } B_2 \\ \operatorname{div}\bar{U}_\varepsilon &= 0 & \text{dans } B_2. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème 3.6.4 dans B_3 :

$$\|\bar{U}_\varepsilon\|_{W^{1,q}(B_3)} \leq C(\|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^1(B_2 \setminus B_3)} + \|\bar{f}_\varepsilon\|_{W^{-1,q}(B_2)}). \quad (3.6.3)$$

Comme $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, on sait que

$$\|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^1(B_2 \setminus B_3)} \leq \|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^1(B_2)} \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} \|\eta\bar{U}\|_{L^1(B_1)} \leq \|\bar{U}\|_{L^1(B_1)}.$$

Pour ce qui est de \bar{f}_ε , considérons $\varphi \in W_0^{1,q'}(B_2)$ et prolongeons-le par 0 en dehors de B_2 . On a alors

$$\langle \bar{f}_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle \rho_\varepsilon * (\eta\bar{f}), \varphi \rangle = \langle \eta\bar{f}, \check{\rho}_\varepsilon * \varphi \rangle = \langle \bar{f}, \eta\check{\rho}_\varepsilon * \varphi \rangle$$

où $\check{\rho}_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(-x)$. Et donc

$$\begin{aligned} |\langle \bar{f}_\varepsilon, \varphi \rangle| &\leq \|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)} \|\eta\check{\rho}_\varepsilon * \varphi\|_{W^{1,q'}(B_1)} \\ &\leq \|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)} \|\check{\rho}_\varepsilon * \varphi\|_{W^{1,q'}(B_1)} \\ &\leq C\|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} \|\varphi\|_{W^{1,q'}(B_1)} \\ &= C\|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)} \|\varphi\|_{W^{1,q'}(B_2)}. \end{aligned}$$

D'où on en déduit que

$$\|\bar{f}_\varepsilon\|_{W^{-1,q}(B_2)} \leq C\|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)}.$$

La relation (3.6.3) implique maintenant l'inégalité suivante :

$$\|\bar{U}_\varepsilon\|_{W^{1,q}(B_3)} \leq C(\|\bar{U}\|_{L^1(B_1)} + \|\bar{f}\|_{W^{-1,q}(B_1)}) \quad (3.6.4)$$

pour tout ε suffisamment petit. Enfin, on sait que $\bar{U}_\varepsilon \rightarrow \eta\bar{U}$, donc par passage à la limite dans (3.6.4) on obtient que $\bar{U} \in W^{1,q}(B_3)$ avec les estimations voulues.

Revenons maintenant à la preuve du lemme. On observe que $f \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ et $\operatorname{div}(U \otimes U) \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. Comme on a

$$\begin{aligned} -\Delta U + \nabla p &= f - \operatorname{div}(U \otimes U) \\ \operatorname{div} U &= 0 \end{aligned}$$

dans Ω , on peut appliquer le résultat de régularité précédent pour déduire que $U \in W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. On peut ensuite dériver l'équation par rapport à une variable et on obtient :

$$\begin{aligned} -\Delta(\partial_j U) + \nabla(\partial_j p) &= \partial_j f + \operatorname{div}(\partial_j(U \otimes U)) \\ \operatorname{div}(\partial_j U) &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. Encore une fois $\partial_j f \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. De plus, comme $U \in L_{loc}^\infty(\Omega) \cap W_{loc}^{1,q}(\Omega)$, on sait que $\partial_j(U \otimes U) = \partial_j U \otimes U + U \otimes \partial_j U \in L_{loc}^q(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. D'où $\operatorname{div} \partial_j(U \otimes U) \in W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. En appliquant à nouveau le résultat de régularité, on en déduit que $U \in W_{loc}^{2,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ et que sa norme est contrôlée par les quantités voulues.

Pour la pression, l'équation nous donne directement $\nabla p = f + \Delta U - (U \cdot \nabla)U \in L_{loc}^q(\Omega)$ avec une borne pour $\|\nabla p\|_{L^q(K)}$. Nous avons donc que $p \in W^{1,q}(K)$. Si on suppose que p est de moyenne nulle sur K (ce qui est toujours possible en ajoutant une certaine constante à p), l'inégalité de Poincaré nous dit que $\|p\|_{L^q(K)} \leq C \|\nabla p\|_{L^q(K)}$. On a donc une borne sur la norme $W^{1,q}$ de p et ceci conclut la preuve du lemme. \square

Soit $R < R_0 < R_1$ et considérons une fonction de troncature radiale $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^3, [0, 1])$ telle que $\eta = 0$ sur $B(0, R_0)$ et $\eta = 1$ sur $B(0, R_1)^c$. Nous définissons les prolongements suivants de (U, p) :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U, & \tilde{p} &= p & \text{sur } B(0, R_1)^c \\ \tilde{U} &= \eta U + v, & \tilde{p} &= \eta p & \text{sur } B(0, R_1) \end{aligned}$$

où nous avons prolongé ηU et ηp par 0 pour $|x| \leq R$. Le champ de vecteurs v est construit de telle sorte que $\tilde{U} \in L^\infty \cap \dot{X}_1$ et $\operatorname{div} \tilde{U} = 0$ dans tout l'espace. En conséquence, v doit vérifier le problème suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= -U \cdot \nabla \eta \text{ dans } B(0, R_1) \\ v &= 0 \text{ sur } \partial B(0, R_1). \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Ce problème a de nombreuses solutions, et on peut en construire avec des estimations sur les normes de Sobolev grâce aux opérateurs de Bogovskii, comme détaillé dans la section 2.2 (voir le théorème 2.2.1). Or, on a

$$\int_{B(0, R_1)} U \cdot \nabla \eta = \int_{S(0, R_1)} U \cdot \nu \eta - \int_{B(0, R_1)} \eta \operatorname{div} U = \int_{S(0, R_1)} U \cdot \nu = 0$$

où nous avons utilisé la condition (3.6.1). De plus, comme $U \in W_{loc}^{2,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ on sait que $U \cdot \nabla \eta \in W^{2,q}$ pour tout $1 < q < \infty$. En utilisant le théorème 2.2.1 on en déduit qu'il existe $v \in W_0^{3,q}(B(0, R_1))$ pour tout $1 < q < \infty$ solution de (3.6.5). On prolonge v à l'espace tout entier \mathbb{R}^3 en posant $v = 0$ pour $|x| > R_1$ et on obtient alors $v \in W^{3,q}(\mathbb{R}^3)$.

On observe ensuite que le prolongement (\tilde{U}, \tilde{p}) vérifie l'équation de Navier-Stokes suivante dans l'espace entier :

$$-\Delta \tilde{U} + (\tilde{U} \cdot \nabla) \tilde{U} + \nabla \tilde{p} = \eta f + F, \quad \operatorname{div} \tilde{U} = 0 \tag{3.6.6}$$

où on a posé

$$F = -\Delta v - \Delta \eta U - 2\nabla U \cdot \nabla \eta + \operatorname{div}(\eta U \otimes v + \eta v \otimes U + v \otimes v + \eta^2 U \otimes U) - \eta \operatorname{div}(U \otimes U) + p \nabla \eta$$

qui est à support compact dans $B(0, R_1)$.

Étant donné que $U \in W_{loc}^{2,q}$, $p \in W_{loc}^{1,q}$ et $v \in W^{3,q}$ pour tout $1 < q < \infty$, on déduit des injections de Sobolev que F est bornée. D'après les estimations des théorèmes 3.6.4 et 2.2.1 on sait que la norme $W_{loc}^{2,q}$ de U et la norme $W^{3,q}$ de v peuvent être bornées par les normes \dot{X}_1 et

\dot{X}_3 de U et f . Ces normes étant supposées petites, on en déduit que F est bornée, petite et à support compact. De plus, \tilde{U} est également petit dans \dot{X}_1 . On peut donc appliquer le théorème 3.2.3 à l'équation (3.6.6) pour en déduire que \tilde{U} a le comportement asymptotique suivant :

$$\tilde{U} = U_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\right)$$

où U_0 est l'unique solution homogène de degré -1 des équations de Navier-Stokes avec terme de force $\text{pv}(f_0) + m_0\delta$ obtenue par le théorème 3.2.2 avec

$$m_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \eta f_1 + \int_{\mathbb{R}^3} F.$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver la relation (3.6.2). Pour cela, on intègre la relation (3.6.6) sur la boule $B(0, R_1)$ et on utilise la formule de Stokes pour trouver :

$$\int_{B(0, R_1)} (\eta f_1 + F) = \int_{B(0, R_1)} \text{div}(-\nabla \tilde{U} + \tilde{U} \otimes \tilde{U} + \tilde{p}Id) = \int_{S(0, R_1)} [-\partial_\nu U + (U \cdot \nu)U + p\nu].$$

Comme F est à support compact dans $B(0, R_1)$ on en déduit que

$$\int_{B(0, R_1)} F = \int_{\mathbb{R}^3} F$$

et la relation (3.6.2) en découle immédiatement.

Chapitre 4

Le cas du demi-espace

Sommaire

4.1	Introduction	53
4.2	Notations et résultat principal	54
4.3	Preuve du résultat principal	57
4.4	Étude du terme dominant dans le développement asymptotique	64
4.5	Autres comportements asymptotiques	67

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons le problème suivant, analogue à celui du chapitre précédent mais dans un demi-espace :

$$\begin{aligned} -\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p &= f, & \operatorname{div} U &= 0 \text{ dans } \Omega \\ U &= b \text{ sur } \partial\Omega, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

où $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ désigne le demi-espace et $\partial\Omega$ est le bord de Ω , le plan d'équation $x_3 = 0$. Les inconnues sont à nouveau U et p et les données sont f le terme de force et b la condition au bord. Encore une fois, la pression peut être aisément déterminée en fonction du reste et nous appellerons solution de (4.1.1) une fonction U telle qu'il existe p telle que (U, p) vérifie ce système.

Ce problème a notamment été étudié dans [8], dans lequel l'auteur étudie (4.1.1) pour un faible nombre de Reynolds (ce qui revient à dire que les données sont petites), pour $f = 0$ et pour $b \in C_0^\infty(\partial\Omega)$. L'auteur démontre qu'il existe une solution $U \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que U et son gradient soient majorés par $\frac{C}{(1+|x|)^2}$. De plus, il montre que cette solution est unique dans l'espace des fonctions suffisamment petites appartenant à $W^{1,2}(\Omega)$ et décroissant en $1/|x|$ à l'infini.

Dans ce chapitre, nous allons étudier cette équation pour b décroissant à l'infini un peu plus vite que $1/|x|^2$ (c'est-à-dire en $1/|x|^{2+\varepsilon}$ avec $0 < \varepsilon < 1$) et f décroissant à l'infini un peu mieux que $1/|x|^4$ (en $1/|x|^{4+\varepsilon}$). On obtient alors l'existence et l'unicité de solutions petites décroissant à l'infini en $1/|x|^2$ et on trouve une expression explicite de leur comportement asymptotique, qui est donné par $\frac{x_3 C \cdot x}{|x|^5}$ où C est un vecteur constant. Pour finir, nous démontrerons que

si on prend un terme de force analogue au cas étudié dans $\Omega = \mathbb{R}^3$, alors on retrouve bien un comportement en $1/|x|$ dont le premier terme du développement asymptotique est solution d'une équation homogène. En revanche, les conditions d'intégrale nulle qui apparaissaient ne sont plus là et l'équation homogène obtenue est plus simple.

Dans ce chapitre, nous introduirons les notations utilisées et le théorème principal dans la section 4.2, nous démontrerons ce théorème dans la section 4.3 et nous expliciterons le comportement asymptotique trouvé dans la section 4.4. Enfin, dans la dernière section, nous démontrerons le comportement asymptotique des solutions dans le cas d'un terme de force qui décroît en $1/|x|^3$ à l'infini.

4.2 Notations et résultat principal

Nous allons d'abord préciser nos notations sur les multiplications de scalaires, de vecteurs et de matrices afin que tout soit clair. Le produit d'un scalaire et d'un autre élément sera noté sans symbole car il n'y a aucune ambiguïté sur la définition d'un tel produit. Le symbole \cdot sera utilisé pour désigner le produit standard entre deux vecteurs, entre une matrice et un vecteur, entre deux matrices ou entre un tenseur et une matrice. Plus précisément, si on a deux vecteurs $v = (v_i)_{1 \leq i \leq 3}$, $w = (w_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et deux matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, alors on utilisera la notation

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^3 v_i w_i, \quad (M \cdot v)_i = \sum_{k=1}^3 m_{i,k} v_k, \quad (M \cdot N)_{i,j} = \sum_{k=1}^3 m_{i,k} n_{k,j}.$$

Nous utiliserons également les notations suivantes :

$$(a \otimes b)_{i,j} = a_i b_j, \quad M : N = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} m_{i,j} n_{i,j}.$$

Ces conventions introduites, nous allons définir les espaces fonctionnels utilisés dans ce problème. Si $\alpha > 0$, on introduit l'espace suivant.

Définition 4.2.1. Soit X_α (resp. Y_α) l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (resp. $f \in L^1_{loc}(\partial\Omega)$) telles que

$$\|f\|_{X_\alpha} = \sup_{x \in \Omega} (1 + |x|)^\alpha |f(x)| < \infty$$

$$\text{resp. } \|f\|_{Y_\alpha} = \sup_{x \in \partial\Omega} (1 + |x|)^\alpha |f(x)| < \infty$$

munie de la norme introduite dans le membre de gauche.

On utilisera cette notation pour désigner des fonctions à valeurs dans différents espaces : fonctions à valeurs scalaires, vectorielles ou à valeurs dans l'espace des matrices carrées 3×3 .

On rappelle les formules pour les fonctions de Green du problème de Stokes :

$$-\Delta V + \nabla p = f, \quad \text{div } V = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad V = b \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad V(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty$$

où $f \in X_\alpha$ et $b \in Y_{\alpha-2}$ pour $\alpha \geq 3$. On a vu dans le chapitre 2 que ce problème admet une unique solution donnée par la formule suivante

$$V(x) = - \int_{\Omega} E(x, y) \cdot f(y) dy + \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' \quad (4.2.1)$$

où le noyau

$$K(x) = \frac{3x_3x \otimes x}{2\pi|x|^5} \quad (4.2.2)$$

correspond au problème de Stokes à force nulle et le noyau

$$\begin{aligned} E(x, y) = G(x - y) - G(x - y^*) \cdot I_3^* + \frac{x_3y_3}{4\pi} \nabla_x \otimes \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) - \frac{x_3}{4\pi} \nabla_x \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \otimes e_3 \\ - \frac{y_3}{4\pi} e_3 \otimes \nabla_y \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) + \frac{1}{4\pi|x - y^*|} e_3 \otimes e_3 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

correspond au problème de Stokes à donnée au bord nulle. Ici

$$G(x) = \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{I_3}{|x|} + \frac{x \otimes x}{|x|^3} \right).$$

est la fonction de Green dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier et on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} e_3 &= (0, 0, 1) \\ I_3^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ z^* &= I_3^* z = (z_1, z_2, -z_3). \end{aligned}$$

La proposition suivante regroupe quelques propriétés de E qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 4.2.2 ([8], [16]). *Nous avons*

- $E_{i,j}(x, y) = E_{j,i}(y, x)$ pour tous $x, y \in \Omega$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- $\lim_{x_3 \rightarrow 0} E(x, y) = \lim_{y_3 \rightarrow 0} E(x, y) = 0$.
- $E(x, y) \rightarrow 0$ quand $|y| \rightarrow \infty$ à x fixé.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une constante C_k telle que

$$|\nabla_y^k E(x, y)| + |\nabla_x^k E(x, y)| \leq \frac{C_k}{|x - y|^{1+k}} \quad \forall x \neq y \in \Omega.$$

Nous allons maintenant reformuler les équations (4.1.1) en utilisant cette fonction de Green associée au problème linéaire. Sous des hypothèses de régularité convenables et en utilisant la formule (4.2.1), les équations (4.1.1) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' - \int_{\Omega} E(x, y) \cdot (-\operatorname{div}(U \otimes U)(y) + f(y)) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' - \int_{\Omega} \nabla_y E(x, y) \cdot (U(y) \otimes U(y)) - \int_{\Omega} E(x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Précisons la notation : si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est une matrice, alors on définit $\nabla_y E(x, y) \cdot A$ comme étant le vecteur donné par

$$(\nabla_y E(x, y) \cdot A)_i = \sum_{j,k=1}^3 \partial_{y_k} E_{i,j}(x, y) a_{j,k}.$$

Par ailleurs, la relation de symétrie $E(x, y) = {}^t E(y, x)$ nous donne que $\nabla_y E(x, y) = \nabla_x {}^t E(y, x)$ il est donc facile de passer de la différentielle par rapport à une variable à l'autre.

Justifions l'intégration par parties faite dans (4.2.4) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} E(x, y) \cdot \operatorname{div}(U \otimes U)(y) dy \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\Omega \cap \{|x-y| > \varepsilon, |y| \leq R\}} E(x, y) \cdot \operatorname{div}(U \otimes U)(y) dy \\
&= - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{\Omega \cap \{|x-y| > \varepsilon, |y| \leq R\}} \nabla_y E(x, y) \cdot U \otimes U(y) dy \right. \\
&\quad + \int_{\{|y|=R, y_3 > 0\}} \left(U(y) \cdot \frac{y}{R} \right) E(x, y) \cdot U(y) d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{y_3=0, |y'| < R} U_3(y') E(x, y') \cdot U(y') dy' \\
&\quad \left. + \int_{S(x, \varepsilon)} \left(U(y) \cdot \frac{x-y}{\varepsilon} \right) E(x, y) \cdot U(y) d\sigma(y) \right\}
\end{aligned}$$

où $d\sigma(y)$ désigne la mesure de Hausdorff sur la sphère. Or, si on suppose $U \in X_a$ avec $a > \frac{1}{2}$, on a pour tout $|y| = R$

$$\left| \left(U(y) \cdot \frac{y}{R} \right) E(x, y) \cdot U(y) \right| \leq \frac{C}{|x-y|R^{2a}} \leq \frac{C}{R^{2a+1}}$$

quand $R \rightarrow \infty$. On en déduit que l'intégrale sur la demi-sphère de rayon R tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$ puisque sa surface est en $O(R^2)$. Par ailleurs, l'intégrale sur le plan $y_3 = 0$ est nulle car E s'annule en $y_3 = 0$. Enfin, il est facile de voir que si U est localement bornée alors l'intégrale sur $S(x, \varepsilon)$ est en $O(\varepsilon)$.

Comme nous travaillerons dans la suite avec des solutions qui sont au moins dans X_1 , on peut considérer que les équations (4.1.1) sont équivalentes à la formulation suivante :

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} K(x-y') \cdot b(y') dy' - \int_{\Omega} \nabla_y E(x, y) \cdot (U(y) \otimes U(y)) - \int_{\Omega} E(x, y) f(y) dy. \quad (4.2.5)$$

C'est sur cette formulation équivalente que nous allons travailler dans la suite.

On peut maintenant énoncer le résultat qui sera démontré dans ce chapitre.

Théorème 4.2.3. *Soit $4 < \alpha < 5$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C_0 > 0$ deux constantes telles que, pour tout $f \in X_\alpha$ et $b \in Y_{\alpha-2}$ vérifiant*

$$\|b\|_{Y_{\alpha-2}} + \|f\|_{X_\alpha} \leq \varepsilon$$

il existe une unique solution $U \in X_2$ de (4.2.5) satisfaisant $\|U\|_{X_2} \leq C_0 \varepsilon$. De plus, U admet le développement asymptotique suivant :

$$U(x) = K(x) \cdot \int_{\partial\Omega} b(y') dy' - \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} (f(y) \otimes y + U(y) \otimes U(y)) dy + O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$.

Remarque 4.2.4. Nous verrons dans la section 4.4 que le terme dominant trouvé ci-dessus peut s'écrire sous la forme plus simple suivante :

$$\frac{x_3 C \cdot x}{|x|^5} x$$

où C est le vecteur de composantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{2\pi} \left(\int_{\partial\Omega} b_1(y') dy' + \int_{\Omega} [y_3 f_1(y) + U_1(y) U_3(y)] dy \right) \\ C_2 &= \frac{3}{2\pi} \left(\int_{\partial\Omega} b_2(y') dy' + \int_{\Omega} [y_3 f_2(y) + U_2(y) U_3(y)] dy \right) \\ C_3 &= \frac{3}{2\pi} \int_{\partial\Omega} b_3(y') dy'. \end{aligned}$$

Nous finissons avec un résultat d'unicité dans la classe plus grande de solutions majorée par $C/(1 + |x|)$.

Théorème 4.2.5. *Les solutions obtenues dans le théorème précédent sont uniques dans la classe des solutions petites dans X_1 . Plus précisément, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que, si f, b et α vérifient les hypothèses du théorème 4.2.3 avec $\varepsilon = \varepsilon'$ et U_0 est la solution dans X_2 correspondante, alors c'est l'unique solution de (4.2.5) dans X_1 vérifiant $\|U\|_{X_1} \leq \varepsilon'$.*

4.3 Preuve du résultat principal

Nous allons d'abord montrer trois lemmes.

Lemme 4.3.1. *Pour f une fonction à valeurs vectorielles on définit*

$$m_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad m_f(x) = \int_{\Omega} E(x, y) \cdot f(y) dy.$$

Nous avons :

- Si $2 < \alpha < 4$ alors l'opérateur $f \mapsto m_f$ est continu de X_α dans $X_{\alpha-2}$.
- Si $4 < \alpha < 5$ alors l'opérateur $f \mapsto m_f$ est continu de X_α dans X_2 et on a de plus le comportement asymptotique suivant :

$$m_f(x) = \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} f(y) \otimes y dy + O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right), \quad (4.3.1)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$.

Preuve. On décompose l'intégrale définissant $m_f(x)$ pour $x \in \Omega$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_f(x) &= \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} E(x, y) \cdot f(y) dy + \int_{\Omega \cap \{|x|/2 < |y| < 2|x|\}} E(x, y) \cdot f(y) dy \\ &\quad + \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} E(x, y) \cdot f(y) dy \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} E(x, y) \cdot f(y) dy \right| \\
&\leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} \frac{1}{|x-y|(1+|y|)^\alpha} dy \\
&\leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} \frac{1}{|y|(1+|y|)^\alpha} dy \\
&\leq C \|f\|_{X_\alpha} \min \left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}, \int_{\Omega} \frac{dy}{|y|(1+|y|)^\alpha} \right) \\
&\leq C \|f\|_{X_\alpha} \min \left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}, 1 \right) \\
&\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{(1+|x|)^{\alpha-2}}
\end{aligned}$$

car $\alpha > 2$.

Ensuite

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{\Omega \cap \{|x|/2 < |y| < 2|x|\}} E(x, y) f(y) dy \right| \\
&\leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{\Omega \cap \{|x|/2 < |y| < 2|x|\}} \frac{1}{|x-y|(1+|y|)^\alpha} dy \\
&\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{(1+|x|)^\alpha} \int_{|y-x| < 3|x|} \frac{1}{|x-y|} dy \\
&\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{(1+|x|)^{\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

On considère enfin

$$I_3 = \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} E(x, y) f(y) dy.$$

Ici, on va utiliser le fait que $E(x, 0) = 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a $E(x, y) = \nabla_y E(x, 0) \cdot y + \frac{1}{2} \nabla_y^2 E(x, \zeta)(y, y)$ avec $\zeta \in [0, y]$. En effet, d'après la formule (4.2.3) $E(x, y)$ est C^∞ si $x \neq y$ et comme $|y| \leq |x|/2$, le point x ne peut pas appartenir au segment $[0, y]$. On a en plus la majoration, pour $|y| \leq |x|/2$,

$$|\nabla_y^2 E(x, \zeta)| \leq \frac{C}{|x-\zeta|^3} \leq \frac{C}{|x|^3}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left| I_3 - \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} f(y) \otimes y dy \right| &\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^3} \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \frac{|y|^2}{|y|^\alpha} dy \\
&\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-2}}
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

où on a utilisé que $\alpha < 5$. Pour obtenir le résultat final, on fait la distinction suivante :

Cas $\alpha \in (2, 4)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} f(y) \otimes y \, dy \right| &\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^2} \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \frac{dy}{|y|^{\alpha-1}} \\ &\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

car, comme $\alpha < 4$, $y \mapsto \frac{1}{|y|^{\alpha-1}}$ est intégrable en 0.

Cas $\alpha \in (4, 5)$. Remarquons d'abord que l'on a l'inégalité suivante :

$$|I_3| \leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^2} \quad \forall |x| \geq 1. \quad (4.3.3)$$

En effet, nous avons que

$$|\nabla_y E(x, 0)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

et

$$\left| \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} f(y) \otimes y \, dy \right| \leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{\Omega} \frac{|y|}{(1+|y|)^\alpha} \, dy \leq C \|f\|_{X_\alpha}$$

car $\alpha > 4$. L'inégalité (4.3.3) découle maintenant de (4.3.2). Il nous reste à montrer que I_3 est borné lorsque $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|x-y|(1+|y|)^\alpha} \, dy \\ &\leq C \|f\|_{X_\alpha} \int_{|x-y| \leq 3/2} \frac{1}{|x-y|} \, dy \\ &\leq C \|f\|_{X_\alpha}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique énoncé dans (4.3.1), nous remarquons que nous avons déjà montré le comportement asymptotique suivant :

$$m_f(x) = \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} f(y) \otimes y \, dy + O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$. On doit contrôler le terme suivant

$$\nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \geq |x|/2\}} f(y) \otimes y \, dy.$$

On fait alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left| \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \geq |x|/2\}} f(y) \otimes y \, dy \right| &\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^2} \int_{\Omega \cap \{|y| \geq |x|/2\}} \frac{1}{|y|^{\alpha-1}} \, dy \\ &\leq \frac{C \|f\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

car $\alpha > 4$. Ceci achève la preuve du lemme. □

Il nous faut ensuite une estimation sur l'intégrale contre $\nabla_y E$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.2. *Pour tout V à valeurs matricielles on introduit*

$$M_V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad M_V(x) = \int_{\Omega} \nabla_y E(x, y) \cdot V(y) dy.$$

Nous avons

- Si $1 < \beta < 3$ alors l'opérateur $V \mapsto M_V$ est continu de X_{β} dans $X_{\beta-1}$.
- Si $3 < \beta < 4$ alors l'opérateur $V \mapsto M_V$ est continu de X_{β} dans X_2 et nous avons de plus le comportement asymptotique suivant :

$$M_V(x) = \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} V(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^{\beta-1}}\right).$$

quand $|x| \rightarrow \infty$.

Remarque 4.3.3. Ce lemme est une généralisation du théorème 1 prouvé par Chang dans [8], qui prouve uniquement que $V \mapsto M_V$ est continu de X_4 dans X_2 .

Preuve. On décompose à nouveau l'intégrale définissant M_V en trois parties :

$$\begin{aligned} M_V(x) &= \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} \nabla_y E(x, y) \cdot V(y) dy + \int_{\Omega \cap \{|x|/2 < |y| < 2|x|\}} \nabla_y E(x, y) \cdot V(y) dy \\ &\quad + \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \nabla_y E(x, y) \cdot V(y) dy \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

On a alors la première estimation suivante :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|V\|_{X_{\beta}} \int_{\Omega \cap \{|y| \geq 2|x|\}} \frac{1}{|x-y|^2 (1+|y|)^{\beta}} dy \\ &\leq C \|V\|_{X_{\beta}} \min\left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|y|^{\beta+2}} dy, \int_{\Omega} \frac{dy}{|y|^2 (1+|y|)^{\beta}}\right) \\ &\leq \frac{C \|V\|_{X_{\beta}}}{(1+|x|)^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

On traite ensuite le cas de I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \|V\|_{X_{\beta}} \int_{\Omega \cap \{|x|/2 < |y| < 2|x|\}} \frac{1}{|x-y|^2 (1+|y|)^{\beta}} dy \\ &\leq \frac{C \|V\|_{X_{\beta}}}{(1+|x|)^{\beta}} \int_{|y-x| < 3|x|} \frac{1}{|x-y|^2} dy \\ &\leq \frac{C \|V\|_{X_{\beta}}}{(1+|x|)^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Pour ce qui est de I_3 , on commence par traiter le cas $1 < \beta < 3$. On fait alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|I_3\| &\leq C\|V\|_{X_\beta} \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \frac{dy}{|x-y|^2(1+|y|)^\beta} \\ &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^2} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Pour le cas $3 < \beta < 4$, on va comme dans le lemme précédent faire un développement de $\nabla_y E(x, y)$. On a en effet $\nabla_y E(x, y) = \nabla_y E(x, 0) + \nabla_y^2 E(x, \zeta) \cdot y$ où $\zeta \in [0, y]$. On a toujours la majoration $|\nabla_y^2 E(x, \zeta)| \leq \frac{C}{|x|^3}$ pour $|y| \leq |x|/2$. On en déduit donc l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left| I_3 - \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} V(y) dy \right| &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^3} \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|y|^{\beta-1}} dy \\ &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

On estime ensuite l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \left| \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega \cap \{|y| \geq |x|/2\}} V(y) dy \right| &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^2} \int_{|y| \geq |x|/2} \frac{1}{|y|^\beta} dy \\ &\leq \frac{C\|V\|_{X_\beta}}{|x|^{\beta-1}} \end{aligned}$$

car $\beta > 3$.

Pour terminer la preuve il reste à montrer que si $\beta > 1$ alors le terme I_3 est borné pour $|x| \leq 1$. On majore I_3 pour $|x| \leq 1$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left| \int_{\Omega \cap \{|y| \leq |x|/2\}} \nabla_y E(x, y) \cdot V(y) dy \right| \\ &\leq C\|V\|_{X_\beta} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{1}{|x-y|^2(1+|y|)^\beta} dy \\ &\leq C\|V\|_{X_\beta} \int_{|x-y| \leq 3/2} \frac{1}{|x-y|^2} dy \\ &\leq C\|V\|_{X_\beta} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.3.2. □

Il nous faut ensuite un dernier résultat pour estimer l'intégrale de b contre K . On a le lemme suivant :

Lemme 4.3.4. *Pour toute fonction b à valeurs vectorielles on définit*

$$m'_b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad m'_b(x) = \int_{\partial\Omega} K(x-y') \cdot b(y') dy'.$$

Nous avons

- Si $0 \leq \gamma < 2$ alors l'opérateur $b \mapsto m'_b$ est continu de Y_γ dans X_γ .
- Si $2 < \gamma < 3$ alors l'opérateur $b \mapsto m'_b$ est continu de Y_γ dans X_2 et on a de plus le comportement asymptotique

$$m'_b(x) = K(x) \cdot \int_{\partial\Omega} b(y') dy' + O\left(\frac{1}{|x|^\gamma}\right).$$

quand $|x| \rightarrow \infty$.

Preuve. On effectue la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} K(x-y') \cdot b(y') dy' &= \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \geq |x|/2\}} K(x-y') \cdot b(y') dy' + \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} K(x-y') \cdot b(y') dy'. \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Pour estimer I_1 , on remarque que la formule explicite de K donnée dans (4.2.2) implique l'estimation $|K(x)| \leq \frac{Cx_3}{|x|^3}$ donc

$$|I_1| \leq C \|b\|_{Y_\gamma} \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \geq |x|/2\}} \frac{x_3}{|x-y'|^3 |y'|^\gamma} dy' \leq \frac{C \|b\|_{Y_\gamma} x_3}{|x|^\gamma} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y'|^3} dy'.$$

Puis, en notant $y' = (z, 0)$ et $x = (x', x_3)$ on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y'|^3} dy' = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(|x'-z|^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{1}{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(|\eta|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} d\eta$$

où on a fait le changement de variables $z = x' + x_3\eta$. On conclut que

$$|I_1| \leq \frac{C \|b\|_{Y_\gamma}}{|x|^\gamma}.$$

Pour $\gamma \in [0, 2)$, on estime

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \|b\|_{X_\gamma} \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|x-y'|^2 (1+|y'|)^\gamma} dy' \\ &\leq \frac{C \|b\|_{X_\gamma}}{|x|^2} \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|y'|^\gamma} dy \\ &\leq \frac{C \|b\|_{X_\gamma}}{|x|^\gamma}. \end{aligned}$$

Dans le cas $\gamma \in (2, 3)$, on effectue la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} I_2 &= K(x) \cdot \int_{\partial\Omega} b(y') dy' + \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} (K(x-y') - K(x)) \cdot b(y') dy' \\ &\quad - K(x) \cdot \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \geq |x|/2\}} b(y') dy' \\ &\equiv I'_1 + I'_2 + I'_3. \end{aligned}$$

Nous avons

$$|I'_3| \leq \frac{C\|b\|_{Y_\gamma}}{|x|^2} \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \geq |x|/2\}} \frac{dy'}{|y'|^\gamma} \leq \frac{C\|b\|_{Y_\gamma}}{|x|^\gamma}$$

car $\gamma > 2$. Enfin, pour le deuxième terme on a

$$I'_2 = \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} y' \cdot \nabla K(\zeta) \cdot b(y') dy'$$

où $\zeta \in [x; x - y']$ et donc $|\zeta| \geq |x|/2$. D'où

$$|I'_2| \leq \frac{C\|b\|_{Y_\gamma}}{|x|^3} \int_{\partial\Omega \cap \{|y'| \leq |x|/2\}} \frac{dy'}{|y'|^{\gamma-1}} \leq \frac{C\|b\|_{Y_\gamma}}{|x|^\gamma}$$

où on a utilisé le fait que $\gamma < 3$.

Enfin, K étant une fonction singulière en 0, il reste à montrer que m'_b est borné pour $\gamma \geq 0$. Pour cela, on fait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b(y') dy' \right| &\leq Cx_3 \|b\|_{Y_\gamma} \int_{\partial\Omega} \frac{dy'}{|x - y'|^3 (1 + |y'|)^\gamma} \\ &\leq Cx_3 \|b\|_{Y_\gamma} \int_{\partial\Omega} \frac{dy'}{|x - y'|^3} \\ &\leq C\|b\|_{Y_\gamma} \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du lemme. □

On dispose à présent de tous les éléments pour appliquer le théorème de point fixe énoncé dans le lemme 2.1.1, et trouver le comportement asymptotique de notre solution. Introduisons tout d'abord l'application bilinéaire

$$B(U, V)(x) = - \int_{\Omega} \nabla_y E(x, y) \cdot (U(y) \otimes V(y)) dy \quad (4.3.4)$$

et la quantité

$$F(x) = - \int_{\Omega} E(x, y) \cdot f(y) dy + \int_{\partial\Omega} K(x - y) \cdot b(y) dy.$$

Il faut résoudre l'équation (4.2.5) qui s'écrit sous la forme

$$U = F + B(U, U).$$

Le lemme 4.3.2 nous montre que B est bien continue de $X_2 \times X_2$ dans X_2 car si (U, V) est dans l'espace de départ, alors $U \otimes V \in X_4 \subset X_{7/2}$ et, d'après le lemme 4.3.2, $B(U, V) \in X_2$ avec la majoration suivante sur les normes :

$$\|B(U, V)\|_{X_2} \leq C\|U \otimes V\|_{X_{7/2}} \leq C\|U \otimes V\|_{X_4} \leq C\|U\|_{X_2} \|V\|_{X_2}.$$

De plus, pour ce qui est de F , les lemmes 4.3.1 et 4.3.4 nous donnent

$$\|F\|_{X_2} \leq C(\|b\|_{Y_{\alpha-2}} + \|f\|_{X_\alpha}).$$

On peut donc appliquer le lemme 2.1.1 et on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que, si $\|f\|_{X_\alpha} + \|b\|_{Y_{\alpha-2}} \leq \varepsilon$, alors il existe une unique solution $U \in X_2$ de (4.2.5) telle que $\|U\|_{X_2} \leq C\varepsilon$. De plus, U vérifie $\|U\|_{X_2} \leq C(\|f\|_{X_\alpha} + \|b\|_{Y_{\alpha-2}})$. On remarque ensuite que $U \otimes U \in X_4 \subset X_{\alpha-1}$ et on peut donc appliquer les lemmes 4.3.1, 4.3.4 et 4.3.2 pour déduire que

$$U(x) = K(x) \cdot \int_{\partial\Omega} b - \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} (f(y) \otimes y + U(y) \otimes U(y)) dy + O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$. Ceci achève la preuve du théorème 4.2.3.

On prouve à présent le théorème 4.2.5. Soit U_0 la solution petite dans X_2 donnée par le théorème 4.2.3 et une solution $U \in X_1$ de (4.2.5) vérifiant $\|U\|_{X_1} \leq \varepsilon'$. On pose $W = U - U_0$ qui vérifie

$$W(x) = - \int_{\Omega} \nabla E(x, y) : (W \otimes U_0 + U \otimes W)(y) dy.$$

D'après le lemme 4.3.2, on a

$$\begin{aligned} \|W\|_{X_1} &\leq C(\|W \otimes U_0\|_{X_2} + \|U \otimes W\|_{X_2}) \\ &\leq C\|W\|_{X_1}(\|U_0\|_{X_1} + \|U\|_{X_1}) \\ &\leq C\|W\|_{X_1}(C_0\varepsilon + \varepsilon'). \end{aligned}$$

D'où, si on prend ε' et ε telles que $C(C_0\varepsilon + \varepsilon') < 1$ alors on en déduit que $W = 0$, ce qui prouve le théorème 4.2.5.

4.4 Étude du terme dominant dans le développement asymptotique

Le but de cette section va être, dans un premier temps, de calculer $\nabla_y E(x, 0)$ afin d'avoir une expression simple pour le terme dominant du développement de U . Cette expression nous permettra aussi de déterminer à quelle condition ce terme est non nul (et donc pertinent pour décrire le comportement de U à l'infini). En particulier, nous montrerons que si $b = 0$ il existe f tel que le terme dominant dans le développement de U à l'infini est non nul. Nous montrerons aussi que si $f = 0$ il existe b tel que le terme dominant dans le développement de U à l'infini est non nul.

Nous commençons donc par calculer $\nabla_y E(x, 0)$. Pour cela, on rappelle l'expression des coordonnées de $E(x, y)$ à partir de la formule (4.2.3). On introduit donc un troisième indice $k \in \{1, 2, 3\}$ et la notation suivante : $\delta_{i,j}^* = 1$ si $i = j \neq 3$, $\delta_{i,j}^* = -1$ si $i = j = 3$ et $\delta_{i,j}^* = 0$ si $i \neq j$.

On a alors la formule suivante :

$$\begin{aligned} E_{i,j}(x, y) &= \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}}{|x-y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3} \right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}^*}{|x-y^*|} + \frac{(x_i - y_i^*)(x_j^* - y_j)}{|x-y^*|^3} \right) \\ &+ \frac{x_3 y_3}{4\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}^*}{|x-y^*|^3} + 3 \frac{(x_i - y_i^*)(y_j - x_j^*)}{|x-y^*|^5} \right) + \frac{x_3 \delta_{3,j}(x_i - y_i^*)}{4\pi|x-y^*|^3} + \frac{y_3 \delta_{3,i}(y_j - x_j^*)}{4\pi|x-y^*|^3} + \frac{\delta_{3,i} \delta_{3,j}}{4\pi|x-y^*|}. \end{aligned}$$

On va à présent calculer la dérivée de cette matrice par rapport à y_k , ce qui nous donnera le tenseur voulu. On obtient alors la formule suivante :

$$\begin{aligned} \partial_{y_k} E_{i,j}(x, y) = & \\ & \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{-\delta_{i,j}(y_k - x_k)}{|x - y|^3} - \frac{\delta_{i,k}(x_j - y_j)}{|x - y|^3} - \frac{\delta_{j,k}(x_i - y_i)}{|x - y|^3} - \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)(y_k - x_k)}{|x - y|^5} \right) \\ & + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{-\delta_{i,j}^*(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^3} - \frac{\delta_{j,k}(x_i - y_i^*)}{|x - y^*|^3} - \frac{\delta_{i,k}^*(x_j^* - y_j)}{|x - y^*|^3} - \frac{3(x_i - y_i^*)(x_j^* - y_j)(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^5} \right) \\ & + \frac{\delta_{3,k}x_3}{4\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}^*}{|x - y^*|^3} + \frac{3(x_i - y_i^*)(y_j - x_j^*)}{|x - y^*|^5} \right) \\ & + \frac{x_3y_3}{4\pi} \left(\frac{-3\delta_{i,j}^*(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^5} - \frac{3\delta_{i,k}^*(y_j - x_j^*)}{|x - y^*|^5} + \frac{3\delta_{j,k}(x_i - y_i^*)}{|x - y^*|^5} - \frac{15(x_i - y_i^*)(y_j - x_j^*)(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^7} \right) \\ & + \frac{\delta_{3,j}x_3}{4\pi} \left(\frac{-\delta_{i,k}^*}{|x - y^*|^3} - \frac{3(x_i - y_i^*)(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^5} \right) + \frac{\delta_{3,i}\delta_{3,k}(y_j - x_j^*)}{4\pi|x - y^*|^3} \\ & + \frac{\delta_{3,i}y_3}{4\pi} \left(\frac{\delta_{j,k}}{|x - y^*|^3} - \frac{3(y_j - x_j^*)(y_k - x_k^*)}{|x - y^*|^5} \right) - \frac{\delta_{3,i}\delta_{3,j}(y_k - x_k^*)}{4\pi|x - y^*|^3}. \end{aligned}$$

Où on a notamment, pour dériver plus facilement, utilisé le fait que $|x - y^*| = |y - x^*|$ donc $\nabla_y|x - y^*| = \nabla_y|y - x^*| = \frac{y-x^*}{|y-x^*|}$. Pour ce qui nous intéresse, nous allons nous contenter de la restriction de cette expression à $y = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_{y_k} E_{i,j}(x, 0) = & \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}x_k}{|x|^3} - \frac{\delta_{i,k}x_j}{|x|^3} + \frac{3x_ix_jx_k}{|x|^5} \right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}^*x_k^*}{|x|^3} - \frac{\delta_{i,k}^*x_j^*}{|x|^3} + \frac{3x_ix_j^*x_k^*}{|x|^5} \right) \\ & + \frac{\delta_{3,k}x_3}{4\pi} \left(\frac{\delta_{i,j}^*}{|x|^3} - \frac{3x_ix_j^*}{|x|^5} \right) + \frac{\delta_{3,j}x_3}{4\pi} \left(\frac{-\delta_{i,k}^*}{|x|^3} + \frac{3x_ix_k^*}{|x|^5} \right) - \frac{\delta_{3,i}\delta_{3,k}x_j^*}{4\pi|x|^3} + \frac{\delta_{3,i}\delta_{3,j}x_k^*}{4\pi|x|^3}. \end{aligned}$$

Il faut à présent voir ce que donne ce tenseur appliqué à une matrice, ce qui déterminera la forme du terme $\nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} (f \otimes y + U \otimes U)$. Considérons donc $A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1,2,3\}}$ une matrice, on a alors pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$(\nabla_y E(x, 0) \cdot A)_i = \sum_{j,k} \partial_{y_k} E_{i,j}(x, 0) a_{j,k}.$$

Avant de remplacer par l'expression explicite de $\nabla_y E(x, 0)$, nous allons simplifier les notations. Dans les calculs qui suivent, par défaut les produits seront des produits de matrice classiques ou des produits de matrice par des vecteurs classiques, nous omettrons les " ". Par ailleurs, nous utiliserons la notation ${}^t v M w$ classique en algèbre bilinéaire pour désigner le scalaire $\sum_{i,j} m_{i,j} v_i w_j$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \nabla_y E(x, 0) \cdot A = & \frac{1}{8\pi|x|^3} (-Ax + {}^t Ax + I_3^* Ax^* - I_3^{*t} Ax^* + 2x_3 I_3^* A e_3 - 2x_3 I_3^{*t} A e_3 \\ & - 2({}^t x^* A e_3) e_3 + 2({}^t e_3 A x^*) e_3) \\ & + \frac{3}{8\pi|x|^5} (-({}^t x A x) x + ({}^t x^* A x^*) x - 2x_3 ({}^t x^* A e_3) x + 2x_3 ({}^t e_3 A x^*) x). \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, on va écrire $x^* = x - 2x_3 e_3$, ce qui permettra de réduire le

nombre de termes. On obtient donc

$$\begin{aligned} \nabla_y E(x, 0) \cdot A &= \frac{1}{8\pi|x|^3} ((I_3^* - I_3)Ax - 2x_3 I_3^* A e_3 + (I_3 - I_3^*)^t Ax + 2x_3 I_3^{*t} A e_3 + 2x_3 I_3^* A e_3 \\ &\quad - 2x_3 I_3^{*t} A e_3 - 2({}^t x A e_3) e_3 + 4x_3 ({}^t e_3 A e_3) e_3 + 2({}^t e_3 A x) e_3 - 4x_3 ({}^t e_3 A e_3) e_3 \\ &+ \frac{3}{8\pi|x|^5} (-({}^t x A x) x + ({}^t x A x) x - 2x_3 ({}^t x A e_3) x - 2x_3 ({}^t e_3 A x) x + 4x_3^2 ({}^t e_3 A e_3) x - 2x_3 ({}^t x A e_3) x \\ &\quad + 4x_3^2 ({}^t e_3 A e_3) x + 2x_3 ({}^t e_3 A x) x - 4x_3^2 ({}^t e_3 A e_3) x). \end{aligned}$$

On effectue ensuite quelques simplifications et on a

$$\begin{aligned} \nabla_y E(x, 0) \cdot A &= \frac{1}{8\pi|x|^3} ((I_3^* - I_3)Ax + (I_3 - I_3^*)^t Ax - 2({}^t x A e_3) e_3 + 2({}^t e_3 A x) e_3 \\ &\quad + \frac{3}{8\pi|x|^5} (-4x_3 ({}^t x A e_3) x + 4x_3^2 ({}^t e_3 A e_3) x). \end{aligned}$$

Puis, en remarquant que $(I_3 - I_3^*)z = 2z_3 e_3$, on voit que toute la première ligne se simplifie. Il ne reste donc plus que

$$\nabla_y E(x, 0) \cdot A = \frac{-3x_3 x}{2\pi|x|^5} ((A \cdot e_3) \cdot (x - x_3 e_3)). \quad (4.4.1)$$

Nous allons maintenant simplifier le terme principal que nous avons trouvé dans le développement asymptotique de la solution. Rappelons que ce terme s'écrit sous la forme

$$U_0(x) = K(x) \cdot \int_{\partial\Omega} b - \nabla_y E(x, 0) \cdot \int_{\Omega} (f \otimes y + U \otimes U).$$

En utilisant la formule du noyau K donnée dans (4.2.2) et la relation (4.4.1), nous pouvons simplifier l'expression de U_0 :

$$U_0(x) = \frac{3x_3 x}{2\pi|x|^5} \left(x \cdot \int_{\partial\Omega} b + x_1 \int_{\Omega} [y_3 f_1(y) + U_1(y) U_3(y)] dy + x_2 \int_{\Omega} [y_3 f_2(y) + U_2(y) U_3(y)] dy \right).$$

On conclut à partir de cette formule que la condition nécessaire et suffisante pour que U_0 s'annule est la suivante :

$$\int_{\partial\Omega} b_3 = 0, \quad \int_{\Omega} (y_3 f_1 + U_1 U_3) = - \int_{\partial\Omega} b_1, \quad \int_{\Omega} y_3 f_2 + U_2 U_3 = - \int_{\partial\Omega} b_2.$$

Il suffit donc que $\int_{\partial\Omega} b_3 \neq 0$ pour obtenir que U_0 est non nul. De plus, si $b = 0$ on peut construire un terme de force f aussi petit qu'on veut tel que $U_0 \neq 0$. En effet, soit f tel que $\int_{\Omega} y_3 f_1 \neq 0$. Pour ε suffisamment petit, soit U^ε la solution associée au terme de force εf et au terme de bord εb . Supposons par l'absurde que le U_0^ε associé est nul. Alors nous avons que

$$\int_{\Omega} (y_3 f_1 + \frac{U_1^\varepsilon U_3^\varepsilon}{\varepsilon}) = 0. \quad (4.4.2)$$

Or $\|U^\varepsilon\|_{X_2} = O(\varepsilon)$ d'où

$$\int_{\Omega} \frac{U_1^\varepsilon U_3^\varepsilon}{\varepsilon} = O(\varepsilon).$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (4.4.2) on trouve $\int_{\Omega} y_3 f_1 = 0$ ce qui constitue une contradiction.

4.5 Autres comportements asymptotiques

Nous avons étudié dans ce qui précède le comportement à l'infini des solutions lorsque les données sont suffisamment décroissantes à l'infini. C'est le cas le plus pertinent puisque souvent (notamment pour le cas des domaines extérieurs) on se ramène au cas des données à support compact. Cela dit, on peut aussi considérer des données qui décroissent "lentement" à l'infini comme on l'a fait dans le cas de l'espace entier dans le chapitre 3. Ce sera aussi l'occasion de souligner les différences entre le comportement asymptotique dans le cas de l'espace entier et le comportement asymptotique dans le cas du demi-espace. On a déjà eu un avant-goût de ces différences puisqu'on a vu que dans le cas des données à support compact, le comportement asymptotique dans l'espace entier est homogène de degré -1 (donné par les solutions de Landau) tandis que dans le demi-espace ce comportement asymptotique est homogène de degré -2. Nous allons maintenant voir comment se traduisent ces différences dans le cas où la force admet la décroissance critique $1/|x|^3$ à l'infini.

Tout d'abord, remarquons qu'on peut facilement construire des solutions dans le demi-espace qui sont $O(1/|x|)$ à l'infini dès lors que les données ont la bonne décroissance à l'infini. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.5.1. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tel que si $f \in X_3$ et $b \in Y_1$ vérifient $\|b\|_{Y_1} + \|f\|_{X_3} \leq \varepsilon$, alors il existe exactement une solution de (4.2.5) telle que $\|U\|_{X_1} \leq C\varepsilon$.*

Preuve. Pour prouver ce théorème, on peut tout d'abord remarquer que le point fixe qui nous a permis de déterminer l'existence d'une solution dans X_2 peut également se faire dans X_1 . En effet, si on considère $f \in X_3$ et $b \in Y_1$, d'après les lemmes 4.3.1 et 4.3.4, on a que

$$F(x) = - \int_{\Omega} E(x, y) \cdot f(y) dy + \int_{\partial\Omega} K(x - y) \cdot b(y) dy$$

vérifie $F \in X_1$ et

$$\|F\|_{X_1} \leq C(\|f\|_{X_3} + \|b\|_{Y_1}).$$

Qui plus est, l'application B introduite dans (4.3.4) est continue de $X_1 \times X_1$ dans X_1 d'après le lemme 4.3.2 car si $U, V \in X_1$ alors $U \otimes V \in X_2$ et $B(U, V) = -M_{U \otimes V} \in X_1$. On en déduit que si f et b sont petits dans X_3 et Y_1 respectivement, alors il existe une unique solution de (4.2.5) qui soit petite dans X_1 . \square

Maintenant, nous aimerions montrer comme dans le chapitre 3, que si les données ont un comportement asymptotique homogène à l'infini, alors ce sera aussi le cas pour la solution. Montrons d'abord l'existence des solutions homogènes.

Théorème 4.5.2. *Soit f_0 une fonction à valeurs vectorielles, homogène de degré -3 et bornée sur $\mathbb{S}_+^2 = \{x \in \mathbb{S}^2 ; x_3 > 0\}$. Soit $b_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction homogène de degré -1 et bornée sur $\mathbb{S}^1 = \{x' \in \partial\Omega ; |x'| = 1\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ indépendants de f_0 et b_0 tels que si $\|b_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} + \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \leq \varepsilon$ alors il existe une unique U_0 homogène de degré -1 solution de l'équation*

$$U_0(x) = \int_{\partial\Omega} K(x - y') \cdot b_0(y') dy' - \int_{\Omega} \nabla_y E(x, y) \cdot (U_0(y) \otimes U_0(y)) - \int_{\Omega} E(x, y) f_0(y) dy \quad (4.5.1)$$

telle que $\|U_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \leq C\varepsilon$.

Remarque 4.5.3. Dans la formulation (4.5.1) toutes les intégrales sont bien convergente. La question se pose notamment pour la dernière intégrale où f_0 admet une singularité en 0 de $1/|y|^3$ qui est non intégrale. Mais $E(x, y)$ s'annule lorsque $y_3 = 0$, en particulier quand $y = 0$. Donc, par le théorème des accroissements finis $E(x, y) = O(y)$ quand $y \rightarrow 0$ ce qui atténue la singularité de f en 0.

Remarque 4.5.4. Dans ce cas du demi-espace, on n'a pas de condition supplémentaire du type $\int_{\mathbb{S}_+^2} f_0 = 0$ comme on en avait dans le cas de l'espace entier. Ceci est dû à nouveau au fait que, comme observé ci-dessus, l'annulation du noyau de la fonction de Green à l'origine atténue la singularité de f_0 .

Preuve. On remarque que le point fixe dans X_1 présenté dans le théorème précédent peut se faire dans les espaces homogènes \dot{X}_α et \dot{Y}_α définis par

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{X}_\alpha} &= \sup_{x \in \Omega} |x|^\alpha |f(x)| < \infty, \\ \|b\|_{\dot{Y}_\alpha} &= \sup_{x \in \partial\Omega} |x|^\alpha |b(x)| < \infty.\end{aligned}$$

En effet, on peut remarquer que les lemmes 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.4 se généralisent partiellement (en excluant les comportements asymptotiques) aux espaces \dot{X} et \dot{Y} de la façon suivante :

Lemme 4.5.5. *Soit $\alpha \in (2, 4)$, alors l'application m introduite dans le lemme 4.3.1 est continue de \dot{X}_α dans $\dot{X}_{\alpha-2}$.*

Lemme 4.5.6. *Soit $\beta \in (1, 3)$, alors l'application M introduite dans le lemme 4.3.2 est continue de \dot{X}_β dans $\dot{X}_{\beta-1}$.*

Lemme 4.5.7. *Soit $\gamma \in (0, 2)$, alors l'application m' introduite dans le lemme 4.3.4 est continue de \dot{Y}_γ dans \dot{X}_γ .*

Ces trois lemmes se démontrent exactement de la même façon que dans le cas des espaces X et Y en remplaçant dans les estimations $1 + |y|$ par $|y|$.

Il suffit donc, pour montrer l'existence d'une solution petite $U_0 \in \dot{X}_1$, de montrer que $F_0 = -m_{f_0} + m'_{b_0} \in \dot{X}_1$ et que l'application bilinéaire $B(U, V) = -M_{U \otimes V}$ est bicontinue de $\dot{X}_1 \times \dot{X}_1$ dans \dot{X}_1 . Le premier fait vient de l'application directe des lemmes 4.5.5 et 4.5.7 à $f_0 \in \dot{X}_3$ et $b_0 \in \dot{Y}_1$. Le second vient du fait que, si $U, V \in \dot{X}_1$, alors

$$\|B(U, V)\|_{\dot{X}_1} \leq C \|U \otimes V\|_{\dot{X}_2} \leq C \|U\|_{\dot{X}_1} \|V\|_{\dot{X}_1}.$$

On obtient donc qu'il existe une unique $U_0 \in \dot{X}_1$ solution de (4.5.1) telle que $\|U_0\|_{\dot{X}_1} \leq C\varepsilon$. Enfin, grâce à cette unicité et à l'invariance de l'équation par le changement d'échelle $U_\lambda(x) = \lambda U(\lambda x)$ qui est toujours valide dans le demi-espace, on en déduit que cette solution est homogène de degré -1 . Ceci conclut la preuve. \square

Enfin, nous pouvons énoncer un théorème sur des solutions avec un comportement asymptotique homogène de degré -1 . Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$ une fonction radiale telle que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ si $|x| \geq 2$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.5.8. *Soit $3 < \alpha < 4$. Soit $f \in X_3$ à valeurs vectorielles de la forme $f = \varphi f_0 + f_1$ avec f_0 une fonction homogène de degré -3 définie sur Ω et $f_1 \in X_\alpha$. Soit $b \in Y_1$ une fonction*

à valeurs vectorielles de la forme $b = \varphi b_0 + b_1$ avec b_0 une fonction homogène de degré -1 définie sur $\partial\Omega$ et $b_1 \in Y_{\alpha-2}$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ qui ne dépendent pas de f et b tels que si

$$\|b_0\|_{\dot{Y}_1} + \|f_0\|_{\dot{X}_3} + \|b_1\|_{Y_{\alpha-2}} + \|f_1\|_{X_\alpha} \leq \varepsilon$$

alors l'unique solution U de (4.2.5) fournie par le théorème 4.5.1 admet le comportement asymptotique suivant :

$$U = U_0 + O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$, où U_0 est l'unique solution homogène de degré -1 de (4.5.1) fournie par le théorème 4.5.2.

Remarque 4.5.9. En comparant avec le théorème correspondant dans l'espace entier (théorème 3.2.3) on constate que dans le demi-espace nous n'avons pas besoin de corriger par une masse de Dirac l'équation homogène qui donne le terme dominant.

Preuve. On pose $V = U - U_0$ et on montre que $V \in \dot{X}_{\alpha-2}$. Le champ de vecteurs V satisfait l'équation suivante :

$$V = -M_{U_0 \otimes V + V \otimes U_0 + V \otimes V} - m_{(\varphi-1)f_0+f_1} + m'_{(\varphi-1)b_0+b_1}.$$

Comme U est trouvé en appliquant le lemme de point fixe 2.1.1, il est la limite de la suite récurrente construite dans la preuve de ce lemme :

$$U^0 = -m_f + m'_b, \quad U^{k+1} = -M_{U^k \otimes U^k} + U^0,$$

D'où V est la limite de la suite récurrente suivante :

$$V^0 = -m_{(\varphi-1)f_0+f_1} + m'_{(\varphi-1)b_0+b_1}, \quad V^{k+1} = -M_{U_0 \otimes V^k + V^k \otimes U_0 + V^k \otimes V^k} + V^0.$$

Nous allons montrer par récurrence que pour tout k , $V^k \in \dot{X}_{\alpha-2}$ avec une borne uniforme en k sur la norme dans cet espace. Ceci permet, par passage à la limite, d'en déduire que $V \in \dot{X}_{\alpha-2}$.

On sait déjà, par les preuves d'existence et d'unicité de U et U_0 , que $V^k \in \dot{X}_1$ pour tout k , et comme la suite (U^k) est majorée par $O(\varepsilon)$ dans cet espace, on sait que pour tout k

$$\|V^k\|_{\dot{X}_1} \leq C'\varepsilon.$$

Or, comme par hypothèse $(\varphi-1)f_0+f_1 \in \dot{X}_\alpha$, d'après le lemme 4.5.5, on sait que $m_{(\varphi-1)f_0+f_1} \in \dot{X}_{\alpha-2}$ avec $\|m_{(\varphi-1)f_0+f_1}\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} \leq C(\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}_+^2)} + \|f_1\|_{X_\alpha})$. Par ailleurs, comme $(\varphi-1)b_0+b_1 \in \dot{Y}_{\alpha-2}$, on sait d'après le lemme 4.5.7 que $m'_{(\varphi-1)b_0+b_1} \in \dot{X}_{\alpha-2}$ avec $\|m'_{(\varphi-1)b_0+b_1}\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} \leq C(\|b_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} + \|b_1\|_{X_{\alpha-2}})$. On a donc l'estimation

$$\|V^0\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} \leq C''\varepsilon,$$

ce qui achève l'initialisation. Supposons que

$$\|V^k\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} \leq 2C''\varepsilon$$

et montrons que cela reste vrai pour $k + 1$. En appliquant le lemme 4.5.6 on a

$$\begin{aligned}
\|V^{k+1}\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} &\leq C(2\|U_0\|_{\dot{X}_1}\|V^k\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} + \|V^k\|_{\dot{X}_1}\|V^k\|_{\dot{X}_{\alpha-2}}) + \|V^0\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} \\
&\leq C_3\varepsilon\|V^k\|_{\dot{X}_{\alpha-2}} + C''\varepsilon \\
&\leq 2C''C_3\varepsilon^2 + C''\varepsilon \\
&\leq 2C''\varepsilon
\end{aligned}$$

pourvu que $\varepsilon \leq \frac{1}{2C_3}$. Ceci conclut la preuve du théorème. □

Chapitre 5

Solutions homogènes en dimension 2

Sommaire

5.1	Introduction	71
5.2	Simplification de l'équation	73
5.3	Résolution de l'équation linéaire	75
5.4	Résolution de l'équation complète	78
5.5	Solutions homogènes "pertinentes"	81

5.1 Introduction

On va étudier maintenant le cas de la dimension 2. Comme on l'a vu auparavant, une partie du problème consiste à trouver des solutions particulières qui soient de bonnes candidates pour décrire le comportement asymptotique des solutions (comme les solutions de Landau dans le cas de la dimension 3). Plusieurs types de solutions particulières ont déjà été étudiés. Notamment dans [23] (voir aussi [50]), Hamel trouve toutes les solutions homogènes de degré -1 lorsque le terme de force est nul. Il prouve que ce sont soit les solutions triviales $U(x) = \mu_1 \frac{x^\perp}{|x|^2} + \mu_2 \frac{x}{|x|^2}$ avec μ_1, μ_2 constantes, soit une famille discrète de solutions qu'il explicite avec la formule suivante en coordonnées polaires :

$$U(r, \theta) = \frac{f_k(\theta - \theta_0)}{r} e_r$$

où θ désigne l'argument, r la distance à l'origine, $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Ici, θ_0 est un nombre arbitraire et f_k s'exprime à partir des fonctions elliptiques classique et a une période de $2\pi/k$.

Dans [20], Guillod et Wittwer ont trouvé des solutions invariantes par changement d'échelle à une rotation près, c'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda U(\lambda x) = R_\lambda^{-1} U(R_\lambda x).$$

où R_λ est une rotation dont l'angle dépend de λ . Ils prouvent que ces solutions forment une famille à deux paramètres continus et un paramètre discret, qui sont une généralisation des solutions de Šverák.

Dans ce chapitre, nous allons généraliser le travail de Hamel et Šverák (la recherche de solutions homogènes de degré -1) en introduisant un terme de force non nécessairement nul. On considère donc les équations de Navier-Stokes suivantes dans l'espace $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} -\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p &= F, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus 0, \\ \lambda U(\lambda x) &= U(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

où on recherche U homogène de degré -1 , p homogène de degré -2 et où on suppose F homogène de degré -3 . On suppose également que ces fonctions sont suffisamment régulières (U de classe C^2 , p de classe C^1 et f de classe C^0). Ces solutions sont les analogues bidimensionnelles des solutions trouvées dans la section 3.4. Nous montrerons ici que dans le cas où la composante orthoradiale de U est non nulle (ce qui dans le cas de la force nulle étudié par Hamel et Šverák donne les solutions triviales), on a l'existence et l'unicité d'une solution homogène qui dépend de deux paramètres.

Il n'est pas difficile de voir qu'une condition nécessaire pour que le problème (5.1.1) admette une solution est que

$$\int_{\mathbb{S}^1} F \cdot x^\perp = 0 \quad (5.1.2)$$

(cf. les calculs de la section suivante). Nous ferons cette hypothèse dans la suite. De plus, cette condition nous assure l'existence d'une primitive périodique de la restriction de $\operatorname{curl} F$ à \mathbb{S}^1 vue comme une fonction périodique de période 2π (cf. relation (5.2.4)). On désigne par \bar{F} l'unique primitive périodique de moyenne nulle de $\operatorname{curl} F|_{\mathbb{S}^1}$.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.1.1. *On se donne*

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\gamma \in \mathbb{R}$;
- $F \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ continue et homogène de degré -3 telle que la condition (5.1.2) soit satisfaite.

Supposons de plus la condition de petitesse suivante :

$$\|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \left| \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} F \cdot x \right| \leq \varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 4 \tanh^2 \left(\frac{\pi|\alpha|}{2\sqrt{16-\alpha^2}} \right) & \text{si } 0 < |\alpha| < 4 \\ 4 & \text{si } |\alpha| \geq 4 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

où \bar{F} est l'unique primitive périodique de moyenne nulle de $\operatorname{curl} F|_{\mathbb{S}^1}$.

Alors il existe exactement un champ de vecteurs $U = U_{\alpha,\gamma} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ dépendant de α , γ et F , homogène de degré -1 , solution de (5.1.1) vérifiant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp = \alpha, \quad \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x(U \cdot x + 4) = - \int_{\mathbb{S}^1} F \cdot x - 2\pi\gamma, \quad \|U \cdot x\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \leq \sqrt{\varepsilon(\alpha)}. \quad (5.1.4)$$

Remarque 5.1.2. Les deux premières égalités de la relation (5.1.4) impliquent, à F fixé, l'injectivité de l'application $(\alpha, \gamma) \mapsto U_{\alpha,\gamma}$. À F donné, on a donc toute une famille de solutions $U_{\alpha,\gamma}$ de (5.1.1) à deux paramètres. Il n'est pas difficile de voir que, quitte à renforcer un petit peu les conditions de petitesse, toutes les solutions de (5.1.1) de composante orthoradiale non nulle et de composante radiale petite par rapport à la composante orthoradiale sont forcément de la

forme $U_{\alpha,\gamma}$ trouvée dans le théorème 5.1.1. Plus précisément, si l'on suppose que U est solution de (5.1.1) et que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp = \alpha \neq 0, \quad \|\overline{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon(\alpha)/2, \quad \text{et} \quad \|U \cdot x\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon(\alpha)}{4 + \sqrt{16 + 2\varepsilon(\alpha)}}$$

alors U est de la forme $U = U_{\alpha,\gamma}$ pour un certain γ . En effet, il suffit de poser

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} (F \cdot x + U \cdot x(U \cdot x + 4)).$$

Alors

$$\left| \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} F \cdot x \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x(U \cdot x + 4) \right| \leq \varepsilon'(\varepsilon' + 4) = \frac{\varepsilon(\alpha)}{2}.$$

Les conditions (5.1.3) et (5.1.4) sont vérifiées et le théorème 5.1.1 s'applique : on a $U = U_{\alpha,\gamma}$.

Remarque 5.1.3. Nous verrons à la fin de la preuve du théorème que, pour avoir la norme L^∞ de \overline{F} petite, il suffit que la norme L^∞ de F sur le cercle unité soit petite. La condition de petitesse du théorème est donc impliquée par une condition de petitesse sur γ et F (avec une constante de petitesse qui dépend de α). Il n'y a pas de condition de taille sur la constante α . Enfin, la condition de petitesse sur \overline{F} est équivalente à une condition de petitesse sur l'amplitude de $\text{curl } F|_{\mathbb{S}^1}$, mais F peut néanmoins être grande.

Remarque 5.1.4. Un résultat similaire au théorème 5.1.1 ne saurait être vrai si $\alpha = 0$. En effet, si $\alpha = 0$ et $F = 0$, Hamel [23] a trouvé toutes les solutions homogènes et celles-ci forment une famille discrète.

Dans la section 5.2 nous réduirons l'équation dans le plan à une équation sur le cercle. Dans la section 5.3 nous résoudrons la partie linéaire de l'équation. Dans la section 5.4 nous achèverons la résolution de l'équation générale par un argument de point fixe. Nous terminons ce chapitre par une dernière section où on cherche les solutions homogènes qui sont de divergence nulle jusqu'en 0.

5.2 Simplification de l'équation

Pour écrire un système d'équations sur \mathbb{S}^1 équivalent à (5.1.1), nous utilisons les coordonnées polaires (r, θ) telles que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On notera notamment

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{et} \quad e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

On posera alors

$$U(r, \theta) = \frac{u(\theta)}{r} e_r + \frac{v(\theta)}{r} e_\theta, \quad p(r, \theta) = \frac{q(\theta)}{r^2} \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = \frac{f(\theta)}{r^3} e_r + \frac{g(\theta)}{r^3} e_\theta.$$

On rappelle maintenant les formules en coordonnées polaires pour les principaux opérateurs différentiels : l'opérateur nabla s'écrit maintenant $\nabla = e_r \partial_r + e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$, et si $a : (r, \theta) \mapsto a(r, \theta)$, $A : (r, \theta) \mapsto A_r(r, \theta) e_r + A_\theta(r, \theta) e_\theta$, est une fonction à valeurs scalaires, respectivement vectorielles,

alors on a

$$\begin{aligned}
\nabla a(r, \theta) &= \partial_r a e_r + \frac{\partial_\theta a}{r} e_\theta \\
\Delta a(r, \theta) &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r a) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 a \\
\operatorname{div} A(r, \theta) &= \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta \\
\operatorname{curl} A(r, \theta) &= \frac{1}{r} \partial_r (r A_\theta) - \frac{1}{r} \partial_\theta A_r \\
\Delta A(r, \theta) &= \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta \right) e_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r \right) e_\theta.
\end{aligned}$$

Les équations (5.1.1) s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r} \partial_r \left(r \partial_r \left(\frac{u}{r} \right) \right) - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{u}{r^3} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{u^2}{r^3} + \frac{u'v}{r^3} - \frac{v^2}{r^3} + \partial_r \left(\frac{q}{r^2} \right) &= \frac{f}{r^3} \\
-\frac{1}{r} \partial_r \left(r \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) \right) - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{v}{r^3} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{v'v}{r^3} + \frac{1}{r} \partial_\theta \left(\frac{q}{r^2} \right) &= \frac{g}{r^3} \\
\frac{1}{r} \partial_r \left(r \left(\frac{u}{r} \right) \right) + \frac{1}{r} \partial_\theta \left(\frac{v}{r} \right) &= 0
\end{aligned}$$

et ce pour tous $\theta \in \mathbb{T} = [0, 2\pi]$ et $r > 0$. Après simplifications, on en déduit le système suivant :

$$\begin{aligned}
-u'' + 2v' - u^2 + u'v - v^2 - 2q &= f \\
-v'' - 2u' + v'v + q' &= g \\
v' &= 0.
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned}
-u'' - u^2 + vu' - v^2 - 2q &= f \\
-2u' + q' &= g \\
v' &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que l'on doit avoir $\int_{\mathbb{T}} g = 0$ ce qui équivaut à (5.1.2). Si l'on considère h la primitive de g vérifiant elle-même $\int_{\mathbb{T}} h = 0$, on aura

$$-u'' + \alpha' u' - 4u - u^2 = f + 2h + \gamma' \quad (5.2.1)$$

$$q = 2u + h + \beta'$$

$$v = \alpha' \quad (5.2.2)$$

où $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3$ sont des constantes liées par la relation $\gamma' = \alpha'^2 + 2\beta'$. Supposons que pour un couple (α', γ') on trouve une unique solution $u_{\alpha', \gamma'}$ de la première équation. Avec la valeur de $\beta' = (\gamma' - \alpha'^2)/2$ découlant des 2 premiers paramètres, on trouve la pression q grâce à la deuxième équation qui ne joue aucun autre rôle. Puis on constate que les deux égalités de la relation (5.1.4) impliquent $\alpha' = \alpha$ et $\gamma' = \gamma$. Et réciproquement, toute solution de (5.2.1) et (5.2.2) vérifie les deux égalités de la relation (5.1.4) avec $\alpha' = \alpha$ et $\gamma' = \gamma$. En effet,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp = \alpha$$

revient à dire que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v = \alpha$$

d'où $\alpha = \alpha'$ puisque $v = \alpha'$. Puis, en intégrant l'équation (5.2.1) on obtient

$$-\int_0^{2\pi} (4u + u^2) = \int_0^{2\pi} f + 2\pi\gamma'$$

ce qui, en comparant avec (5.1.4), entraîne $\gamma = \gamma'$.

Tout le problème consiste maintenant à résoudre sur le tore \mathbb{T} l'équation (5.2.1) avec $\alpha' = \alpha$ et $\gamma' = \gamma$:

$$-u'' + \alpha u' - 4u - u^2 = f + 2h + \gamma. \quad (5.2.3)$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\text{curl } F(r, \theta) = -\frac{2g(\theta) + f'(\theta)}{r^4} \quad (5.2.4)$$

donc $-f - 2h$ est une primitive de la restriction de $\text{curl } F$ au cercle unité, de moyenne $-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f$. La primitive \bar{F} de la restriction de $\text{curl } F$ au cercle unité qui est de moyenne nulle est donnée par

$$\bar{F} = -f - 2h + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f.$$

On pose alors $\tilde{f} = f + 2h + \gamma$ de sorte que $\tilde{f} = -\bar{F} + \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f$. C'est sur cette fonction que l'on devra imposer une condition de petitesse pour appliquer le lemme 2.1.1, et c'est donc de là que vient l'hypothèse de petitesse dans l'énoncé du théorème 5.1.1.

5.3 Résolution de l'équation linéaire

On va chercher à présent à déterminer, pour $z \in C^0(\mathbb{T})$ et $\alpha \neq 0$, toutes les solutions périodiques de l'équation

$$-u'' + \alpha u' - 4u = z. \quad (5.3.1)$$

Montrons d'abord qu'il y a au plus une solution périodique. S'il y avait deux solutions périodiques à l'équation (5.3.1), alors leur différence serait une solution périodique de l'équation homogène (le cas $z = 0$). Nous montrons que toutes les solutions homogènes et périodiques de (5.3.1) sont nulles.

Supposons d'abord que $\alpha \neq \pm 4$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^{\zeta_+\theta} + Be^{\zeta_-\theta}$ avec $\zeta_{\pm} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}$ les racines du polynôme caractéristique. On aurait alors pour tout θ ,

$$Ae^{\zeta_+(\theta+2\pi)} + Be^{\zeta_-(\theta+2\pi)} = Ae^{\zeta_+\theta} + Be^{\zeta_-\theta}$$

ce qui implique

$$Ae^{\zeta_+\theta}(e^{2\pi\zeta_+} - 1) = Be^{\zeta_-\theta}(1 - e^{2\pi\zeta_-}).$$

Si $e^{2\pi\zeta_+} = 1$ ou $e^{2\pi\zeta_-} = 1$ alors on déduit que $\zeta_{\pm} = ik$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$, cas que nous avons exclu de notre théorème. On trouve donc que

$$Ae^{2\theta\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}} = B \frac{1 - e^{2\pi\zeta_-}}{e^{2\pi\zeta_+} - 1}.$$

On observe que le membre de droite ne dépendant pas de θ , le membre de gauche doit donc être constant, ce qui n'est vérifié que si $A = B = 0$ ou $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4} = 0$ et donc $\alpha = \pm 4$, ce que nous avons exclu temporairement.

Dans le cas $\alpha = \pm 4$, les solutions sont de la forme $(A\theta + B)e^{\pm 2\theta}$, la périodicité équivaut donc à : pour tout $\theta \in \mathbb{T}$,

$$(A(\theta + 2\pi) + B)e^{\pm 2(\theta + 2\pi)} = (A\theta + B)e^{\pm 2\theta}$$

donc

$$A\theta(e^{\pm 4\pi} - 1) = B(1 - e^{\pm 4\pi}) - 2\pi Ae^{\pm 4\pi}.$$

Le membre de gauche ne doit plus dépendre de θ , ce qui implique nécessairement que $A = 0$, et l'égalité $B = 0$ s'en déduit immédiatement.

Nous avons donc montré que dans le cas $\alpha \neq 0$, il y a au plus une solution périodique à l'équation. Nous allons maintenant en déterminer une en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Les racines du polynôme caractéristiques étant $\zeta_{\pm} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}$, on obtient pour $\alpha \neq \pm 4$ des solutions de la forme

$$u(\theta) = A(\theta)e^{\zeta_+\theta} + B(\theta)e^{\zeta_-\theta}$$

où A et B sont solutions du système :

$$\begin{aligned} A'e^{\zeta_+\theta} + B'e^{\zeta_-\theta} &= 0 \\ \zeta_+ A'e^{\zeta_+\theta} + \zeta_- B'e^{\zeta_-\theta} &= -z. \end{aligned}$$

D'où on obtient, si $\alpha \neq \pm 4$,

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} z e^{-\zeta_+\theta} \\ B'(\theta) &= \frac{1}{\zeta_+ - \zeta_-} z e^{-\zeta_-\theta}. \end{aligned}$$

En intégrant de θ_0 à θ (avec θ_0 à déterminer ultérieurement), on trouve la solution particulière suivante :

$$u(\theta) = \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} \int_{\theta_0}^{\theta} z(\tau) [e^{\zeta_+(\theta-\tau)} - e^{\zeta_-(\theta-\tau)}] d\tau.$$

Pour le cas $\alpha = \pm 4$, on obtient une racine double $\zeta = \alpha/2$, et des solutions de la forme

$$u(\theta) = A(\theta)\theta e^{\zeta\theta} + B(\theta)e^{\zeta\theta}$$

avec

$$\begin{aligned} A'\theta e^{\zeta\theta} + B'e^{\zeta\theta} &= 0 \\ A'(e^{\zeta\theta} + \zeta\theta e^{\zeta\theta}) + \zeta B'e^{\zeta\theta} &= -z. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= -z(\theta)e^{-\zeta\theta} \\ B'(\theta) &= \theta z(\theta)e^{-\zeta\theta}. \end{aligned}$$

On cherchera alors la solution périodique sous la forme

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} (\tau - \theta) z(\tau) e^{\zeta(\theta - \tau)} d\tau.$$

Il faut à présent trouver θ_0 pour que la solution u obtenue ci-dessus soit 2π -périodique. Or, il se trouve que si $\theta_0 = \pm\infty$, on a bien la périodicité au moins formellement. En effet, si $\theta_0 = -\infty$ par exemple, on a formellement (plus précisément à condition que l'intégrale converge) :

$$\begin{aligned} u(\theta + 2\pi) &= \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} \int_{-\infty}^{\theta + 2\pi} z(\tau) [e^{\zeta_+(\theta + 2\pi - \tau)} - e^{\zeta_-(\theta + 2\pi - \tau)}] d\tau \\ &= \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} \int_{-\infty}^{\theta} z(s - 2\pi) [e^{\zeta_+(\theta - s)} - e^{\zeta_-(\theta - s)}] ds \\ &= u(\theta) \end{aligned}$$

en utilisant la périodicité de z . Et on obtient la même chose si $\theta_0 = +\infty$. Pour savoir s'il faut choisir $\theta_0 = +\infty$ ou $\theta_0 = -\infty$, il faut s'intéresser à la partie réelle de ζ_+ et ζ_- afin de savoir quelle intégrale va converger. On a plusieurs cas :

Si $\alpha \in (-4, 4)$, alors on a $\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - 4} \in i\mathbb{R}$, d'où $\text{Re}(\zeta_{\pm}) = \alpha/2$ d'où, si $\alpha \in (0, 4)$ on prendra $\theta_0 = +\infty$ et si $\alpha \in (-4, 0)$ on prendra $\theta_0 = -\infty$.

Si $|\alpha| \geq 4$, alors $\zeta_{\pm} \in \mathbb{R}$. Mais dans ce cas, on remarque que $0 \leq \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - 4} < \frac{|\alpha|}{2}$, donc ζ_{\pm} est du signe de α . D'où, si $\alpha \geq 4$, on prendra $\theta_0 = +\infty$ et si $\alpha \leq -4$ on prendra $\theta_0 = -\infty$.

On peut donc écrire, pour $\alpha \notin \{-4, 0, 4\}$,

$$u(\theta) = \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} \int_{\text{sgn}(\alpha)\infty}^{\theta} z(\tau) [e^{\zeta_+(\theta - \tau)} - e^{\zeta_-(\theta - \tau)}] d\tau \quad (5.3.2)$$

et, dans le cas où $\alpha = \pm 4$,

$$u(\theta) = \int_{\pm\infty}^{\theta} (\tau - \theta) z(\tau) e^{\frac{\alpha}{2}(\theta - \tau)} d\tau. \quad (5.3.3)$$

Par ailleurs, on remarque que cette formule est la limite de la précédente quand $\alpha \rightarrow \pm 4$, on n'écrira donc dans la suite que la première et la seconde vérifiera les mêmes propriétés automatiquement.

Pour conclure sur l'équation linéaire, on doit déterminer la régularité de u . En effet, si on regarde les formules (5.3.2) et (5.3.3), on peut voir que si z est continue, alors u est de classe C^2 . Par exemple, pour la première formule on a

$$u(\theta) = \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} \left[e^{\zeta_+\theta} \int_{\text{sgn}(\alpha)\infty}^{\theta} e^{-\zeta_+\tau} z(\tau) d\tau - e^{\zeta_-\theta} \int_{\text{sgn}(\alpha)\infty}^{\theta} e^{-\zeta_-\tau} z(\tau) d\tau \right]$$

où il est clair que u est de classe C^1 comme somme et produits de fonctions de classe C^1 et de primitives de fonctions continues. Enfin, en utilisant l'équation on trouve que $u'' = \alpha u' - 4u - z$ est continue, donc u est de classe C^2 .

On a montré le résultat suivant :

Proposition 5.3.1. Soient $\alpha \neq 0$ et $z \in C^0(\mathbb{T})$. Alors l'équation (5.3.1) admet une unique solution $u \in C^2(\mathbb{T})$ donnée par la formule :

$$u(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 16}} \int_{\text{sgn}(\alpha)\infty}^{\theta} \left[e^{(\theta-\tau)\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)} - e^{(\theta-\tau)\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)} \right] z(\tau) d\tau \quad \text{si } \alpha \notin \{-4, 0, 4\}$$

$$u(\theta) = \int_{\text{sgn}(\alpha)\infty}^{\theta} (\tau - \theta) e^{\frac{\alpha}{2}(\theta-\tau)} z(\tau) d\tau \quad \text{si } \alpha = \pm 4.$$

Remarque 5.3.2. Dans le cas $\alpha = 0$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $u(\theta) = A \cos(2\theta) + B \sin(2\theta)$, elles sont donc toutes périodiques. On déduit que soit toutes les solutions de l'équation non homogène sont périodiques, soit aucune ne l'est. Il n'est pas difficile de voir que la condition nécessaire et suffisante sur z pour que l'équation admette des solutions périodiques est la suivante :

$$\int_{\mathbb{T}} z(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} z(\theta) \sin(2\theta) d\theta = 0.$$

Ce cas est donc totalement différent, à la fois du point de vue de l'existence et de l'unicité, du cas $\alpha \neq 0$ et nous ne le traiterons pas ici. On peut se douter que les résultats seraient très différents, car on voit que dans le cas des solutions de Hamel [23]) qui correspond au cas $f = 0$, on obtient dans le cas $\alpha = 0$ une famille de solutions à un paramètre discret.

5.4 Résolution de l'équation complète

En se rappelant que nous avons posé $\tilde{f} = f + 2h + \gamma$, l'équation (5.2.3) que nous devons résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$-u'' - \alpha u' - 4u = \tilde{f} + u^2.$$

On supposera dans ce qui suit que $\alpha < 0$ pour plus de simplicité (il suffit de changer les signes pour avoir le cas $\alpha > 0$). En appliquant la proposition 5.3.1 et en supposant u et \tilde{f} continues, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$u = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 16}} \int_{-\infty}^{\theta} (\tilde{f} + u^2)(\tau) \left[e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} - e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} \right] d\tau \quad (5.4.1)$$

$$= \tilde{g} + B(u, u)$$

avec

$$\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 16}} \int_{-\infty}^{\theta} \tilde{f}(\tau) \left[e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} - e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} \right] d\tau$$

$$B(u, v)(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 16}} \int_{-\infty}^{\theta} u(\tau)v(\tau) \left[e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} - e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)(\theta-\tau)} \right] d\tau.$$

On a ici un problème de point fixe, et on va essayer d'appliquer le lemme 2.1.1 dans l'espace $C^0(\mathbb{T})$. Pour ce faire, il faut montrer que l'application bilinéaire B définie par la formule

précédente est continue sur $C^0(\mathbb{T}) \times C^0(\mathbb{T})$ et que le terme \tilde{g} est suffisamment petit avec les hypothèses du théorème 5.1.1. On munira ici l'espace $C^0(\mathbb{T})$ de la norme infinie.

On commence par faire le changement de variables $\tau = \theta + s$ pour réécrire $B(u, v)$ sous la forme suivante :

$$B(u, v)(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 16}} \int_{-\infty}^0 u(\theta + s)v(\theta + s) \left[e^{-s\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)} - e^{-s\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}\right)} \right] ds$$

D'où

$$\begin{aligned} \|B(u, v)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{1}{|\sqrt{\alpha^2 - 16}|} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} \left| e^{\tau\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}} - e^{-\tau\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}} \right| d\tau \\ &\equiv I(\alpha) \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer l'intégrale $I(\alpha)$ afin d'avoir une borne précise sur la norme de B . Pour cela, on va distinguer les différents cas.

Si $\alpha \in (-4, 0)$, alors on pose $\delta = \sqrt{4 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$ et on a

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} |2i \sin(\delta\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-(k+1)\pi/\delta}^{-k\pi/\delta} e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} |\sin(\delta\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \int_{-(2k+1)\pi/\delta}^{-2k\pi/\delta} e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} \sin(\delta\tau) d\tau + \int_{-(2k+2)\pi/\delta}^{-(2k+1)\pi/\delta} e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} \sin(\delta\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \int_{-(2k+1)\pi/\delta}^{-2k\pi/\delta} e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} \sin(\delta\tau) d\tau - e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}} \int_{-(2k+1)\pi/\delta}^{-2k\pi/\delta} e^{\frac{|\alpha|}{2}\tau} \sin(\delta\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{-(1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})}{2i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-(2k+1)\pi/\delta}^{-2k\pi/\delta} \left(e^{(\frac{|\alpha|}{2} + i\delta)\tau} - e^{(\frac{|\alpha|}{2} - i\delta)\tau} \right) d\tau \\ &= \frac{-(1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})}{2i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{(\frac{|\alpha|}{2} + i\delta)\tau}}{\frac{|\alpha|}{2} + i\delta} - \frac{e^{(\frac{|\alpha|}{2} - i\delta)\tau}}{\frac{|\alpha|}{2} - i\delta} \right]_{-(2k+1)\pi/\delta}^{-2k\pi/\delta} \\ &= \frac{-(1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})}{2i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{\frac{-k\pi|\alpha|}{\delta}}}{\frac{|\alpha|}{2} + i\delta} - \frac{e^{\frac{-k\pi|\alpha|}{\delta}}}{\frac{|\alpha|}{2} - i\delta} + \frac{e^{\frac{-(2k+1)\pi|\alpha|}{2\delta}}}{\frac{|\alpha|}{2} + i\delta} - \frac{e^{\frac{-(2k+1)\pi|\alpha|}{2\delta}}}{\frac{|\alpha|}{2} - i\delta} \right] \\ &= \frac{-(1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})}{2i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-k\pi|\alpha|}{\delta}} (1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}}) \frac{-2i\delta}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \delta^2} \\ &= \frac{(1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})^2}{4} \frac{1}{1 - e^{\frac{-|\alpha|\pi}{\delta}}} \\ &= \frac{1 + e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}}}{4(1 - e^{\frac{-|\alpha|\pi}{2\delta}})} \\ &= \frac{1}{4 \tanh\left(\frac{|\alpha|\pi}{4\delta}\right)}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha < -4$, on pose $\delta = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{-1}{2\delta} \int_{-\infty}^0 \left(e^{(\frac{|\alpha|}{2} + \delta)\tau} - e^{(\frac{|\alpha|}{2} - \delta)\tau} \right) d\tau \\ &= \frac{-1}{2\delta} \left[\frac{e^{(\frac{|\alpha|}{2} + \delta)\tau}}{\frac{|\alpha|}{2} + \delta} - \frac{e^{(\frac{|\alpha|}{2} - \delta)\tau}}{\frac{|\alpha|}{2} - \delta} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{-1}{2\delta} \frac{-2\delta}{\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^2 - \delta^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \pm 4$, comme l'intégrale est la limite quand $\delta \rightarrow 0$ des expressions précédentes, on obtient $I(\alpha) = \frac{1}{4}$.

Ceci achève la preuve de la continuité de B .

On peut majorer $\|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ de la même façon que $\|B(u, v)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$:

$$\|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq I(\alpha) \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Enfin

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \left\| -\bar{F} + \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \left| \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \right|.$$

On peut alors appliquer le lemme 2.1.1 avec $\eta = I(\alpha)$. On obtient que si $\|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{4I(\alpha)}$, alors il existe une unique solution $u \in C^0(\mathbb{T})$ de l'équation (5.4.1) dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2I(\alpha)} = \sqrt{\varepsilon(\alpha)}$. On a de plus l'inégalité $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 2\|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Pour avoir $\|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{4I(\alpha)}$, il suffit que $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{4I^2(\alpha)} = \varepsilon(\alpha)$. En particulier si $\|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \left| \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \right| \leq \varepsilon(\alpha)$, on obtient le résultat voulu. L'hypothèse $\|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \left| \gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \right| \leq \varepsilon(\alpha)$ pourrait sembler plus forte que ce qui est nécessaire puisque seul \tilde{f} doit être majoré par $\varepsilon(\alpha)$. En fait ce n'est pas le cas puisque si \tilde{f} est petit, sa moyenne l'est également donc $\gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f$ doit être petit aussi. On remarque enfin que, comme u et donc u^2 et \tilde{f} sont continues, la proposition 5.3.1 implique que u est de classe C^2 . Ceci conclut la preuve du théorème 5.1.1.

Nous concluons ce chapitre par une justification de la remarque 5.1.3. Si la norme infinie de F sur le cercle unité est suffisamment petite, la norme de \bar{F} sera également petite car

$$\|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \left\| f - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f + 2h \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Or, comme h est la primitive de moyenne nulle de g nous avons

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \int_0^\theta g(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\tau g(s) ds \right) d\tau \\ &= \int_0^\theta g(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \left(\int_s^{2\pi} d\tau \right) ds \\ &= \int_0^\theta g(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \left(\frac{s}{2\pi} - 1 \right) g(s) ds \end{aligned}$$

donc

$$|h(\theta)| \leq 3\pi \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \forall \theta \in \mathbb{T}.$$

D'où

$$\|\overline{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq (6\pi + 2)\|F\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)}.$$

5.5 Solutions homogènes “pertinentes”

Une des motivations de la recherche de solutions homogènes est l'espoir que ces solutions puissent caractériser le comportement asymptotique à l'infini de solutions non homogènes, comme on l'a fait dans le cas de l'espace entier et du demi-espace. Or, pour que le champ de vecteur homogène U soit le terme dominant à l'infini d'un champ de vecteurs régulier de divergence nulle il faut que sa composante radiale soit de moyenne nulle sur \mathbb{S}^1 . En effet, soit V un champ de vecteurs régulier de divergence nulle tel que

$$V(x) = U(x) + o(1/|x|) \quad (5.5.1)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$. En intégrant la relation $\operatorname{div} V = 0$ sur le disque $D(0, R)$ on trouve

$$\int_{|x|=R} \frac{x}{R} \cdot V(x) d\sigma(x) = 0.$$

Or la relation (5.5.1) implique

$$0 = \int_{|x|=R} \frac{x}{R} \cdot V(x) d\sigma(x) = \int_{|x|=R} \frac{x}{R} \cdot U(x) d\sigma(x) + o(1) \quad (5.5.2)$$

quand $R \rightarrow \infty$. Or on voit tout de suite que

$$\int_{|x|=R} \frac{x}{R} \cdot U(x) d\sigma(x) = \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta.$$

Cette quantité ne dépend pas de R et doit donc s'annuler si on veut que la relation (5.5.2) soit vérifiée.

Remarquons aussi que $\int_0^{2\pi} u = 0$ si et seulement si la relation $\operatorname{div} U = 0$ a lieu jusqu'en 0 (cf. [50]).

Il serait donc pertinent de rechercher les solutions de (5.1.1) dont la composante radiale est de moyenne nulle sur \mathbb{S}^1 . Nous appelons ces solutions des solutions homogènes “pertinentes”. Revenons à l'équation à résoudre donnée dans la relation (5.2.3) et intégrons la de 0 à 2π . En se rappelant que la fonction h est de moyenne nulle, on trouve

$$-4 \int_0^{2\pi} u - \int_0^{2\pi} u^2 = \int_0^{2\pi} f + 2\pi\gamma.$$

Si on suppose u de moyenne nulle, ceci permet de déterminer la constante γ

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u^2 + f).$$

En insérant cette valeur de γ dans (5.2.3), on trouve l'équation suivante pour u :

$$-u'' + \alpha u' - 4u - u^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2 = f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f + 2h = -\bar{F}. \quad (5.5.3)$$

Réciproquement, en intégrant cette équation on trouve que toute solution doit être de moyenne nulle. Résoudre l'équation (5.2.3) dans la classe des fonctions de moyenne nulle équivaut donc à résoudre l'équation (5.5.3).

L'argument de point fixe qu'on a appliqué sur l'équation (5.1.1) peut aussi être appliqué sur l'équation (5.5.3). Soit T l'opérateur solution de (5.3.1), $T(z) = u$. L'équation (5.5.3) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$u = g_1 + B_1(u, u)$$

où

$$g_1 = -T(\bar{F})$$

et

$$B_1(u, v) = T\left(uv - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv\right).$$

La formule pour l'opérateur T est donnée dans la proposition 5.3.1 et nous avons montré dans la section 5.4 que l'opérateur T est borné de $C^0(\mathbb{T})$ dans $C^0(\mathbb{T})$ avec une norme majorée par $I(\alpha)$. Donc on peut estimer

$$\|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq I(\alpha) \|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

et

$$\|B_1(u, v)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq I(\alpha) \left\| uv - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 2I(\alpha) \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

On peut donc appliquer à nouveau le lemme de point fixe 2.1.1 avec $\eta = 2I(\alpha)$. Si $\|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{4\eta} = \frac{1}{8I(\alpha)}$ on a l'existence et l'unicité d'une solution u de (5.5.3) de norme uniforme majorée par $\frac{1}{2\eta} = \frac{1}{4I(\alpha)}$. En se rappelant la formule de $I(\alpha)$ trouvée dans la section précédente, nous obtenons le résultat suivant sur l'existence de solutions homogènes "pertinentes" :

Théorème 5.5.1. *On se donne*

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $F \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ continue et homogène de degré -3 telle que la condition (5.1.2) soit satisfaite.

Supposons de plus la condition de petitesse suivante :

$$\|\bar{F}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon_1(\alpha) = \begin{cases} 2 \tanh^2\left(\frac{\pi|\alpha|}{2\sqrt{16-\alpha^2}}\right) & \text{si } 0 < |\alpha| < 4 \\ 2 & \text{si } |\alpha| \geq 4 \end{cases}$$

où \bar{F} est l'unique primitive périodique de moyenne nulle de $\text{curl } F|_{\mathbb{S}^1}$.

Alors il existe exactement un champ de vecteurs $U = U_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ dépendant de α et F , homogène de degré -1 , solution de (5.1.1) vérifiant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x^\perp = \alpha, \quad \int_{\mathbb{S}^1} U \cdot x = 0, \quad \|U \cdot x\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\alpha)}{2}}.$$

Chapitre 6

Solutions symétriques en dimension 2

Sommaire

6.1	Introduction	83
6.2	Notations et résultat principal	84
6.3	Preuve du résultat principal	86
6.4	Le cas d'un domaine extérieur	96
6.5	Comportement asymptotique en $1/ x$	98

6.1 Introduction

Nous considérons ici l'équation de Navier-Stokes avec terme de force dans \mathbb{R}^2 :

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0. \quad (6.1.1)$$

On peut se débarrasser de la pression en prenant le curl de cette équation. Un champ de vecteurs U tendant vers 0 à l'infini est uniquement déterminé par $\operatorname{div} U$ et $\operatorname{curl} U = -\partial_2 U_1 + \partial_1 U_2$. En particulier, si $\operatorname{div} U = 0$, $\operatorname{curl} U = \omega$ et ω décroît suffisamment à l'infini, alors on a $U = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2} * \omega$. Donc, en prenant le curl de la première équation dans (6.1.1) on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta \omega + (U \cdot \nabla)\omega &= \operatorname{curl} f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ U(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

La première équation est l'équation de Navier-Stokes classique sur le tourbillon et la seconde est la loi de Biot-Savart. Désormais, nous appellerons solution de l'équation de Navier-Stokes une fonction ω qui vérifie (6.1.2).

Le but de ce chapitre est de déterminer le comportement asymptotique des solutions à l'infini lorsque f décroît suffisamment et vérifie certaines conditions de symétrie.

Ce problème a été étudié dans de nombreux cas différents. Nous en avons parlé dans l'introduction. Il n'y a pas lieu de tout rappeler ici. Nous ne mentionnerons que les résultats dont la donnée à l'infini est nulle.

L'idée que nous privilégions pour trouver le comportement asymptotique en dimension 2 est, comme en dimension 3, de procéder par perturbation autour d'une solution particulière (comme par exemple les solutions homogènes obtenues dans le chapitre 5), permettant ainsi de supprimer les premiers termes du développement asymptotique de la solution de l'équation linéarisée. Malheureusement, cette procédure ne fonctionne pas en dimension 2 et on n'a que des résultats très partiels dans ce cadre.

Dans l'article [29], Hillairet et Wittwer se placent dans le complémentaire d'une boule et prouvent que, si la donnée au bord de la boule est proche de la solution triviale $U_0(x) = \mu_0 \frac{x^\perp}{|x|}$, alors il existe une unique solution à l'équation de Navier-Stokes dont le comportement à l'infini est donné par $U_\infty(x) = \mu \frac{x^\perp}{|x|}$ avec μ proche de μ_0 . Cependant, ce résultat n'est vrai que pour de grandes valeurs de μ_0 . Pour des données et des solutions petites, il n'y a donc encore aucun résultat. Le comportement asymptotique des solutions de (6.1.1) est donc encore ouvert en dimension 2.

En fait, il n'a pas été possible pour l'instant de construire des solutions de (6.1.1) en utilisant un argument de point fixe dans un cadre général comme cela a pu être fait en dimension 3. Ce n'est que sous des hypothèses de symétrie que Yamazaki [54] a prouvé, par un argument de point fixe, que pour un terme de force f suffisamment petit et décroissant à l'infini, il existe une unique solution à (6.1.1) satisfaisant certaines conditions de symétrie. Cette solution décroît comme $1/|x|$ pour le champ de vitesse, $1/|x|^2$ pour le tourbillon.

Notre but dans ce chapitre est de trouver le comportement asymptotique des solutions de Yamazaki si on suppose que le terme de force décroît suffisamment. On trouve que, si le terme de force vérifie les conditions de symétrie de Yamazaki et décroît en $1/|x|^6$, on obtient que ω décroît en $1/|x|^4$ et on a le développement asymptotique suivant :

$$\omega(x) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right)$$

pour une certaine constante m qui est en général non nulle. De plus, la vitesse admet le comportement asymptotique :

$$U(x) = \frac{m}{12|x|^8} (x_1(x_1^4 + 3x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2), x_2(3x_1^4 + x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2)) + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right).$$

Les notations, les espaces fonctionnels, les conditions de symétrie et l'énoncé précis de notre principal résultat seront présentés dans la section 2. La preuve sera donnée dans la section 3. Nous étendrons ce résultat au cas d'un domaine extérieur dans la section 4. Dans la dernière section de ce travail, nous nous intéressons aux solutions qui décroissent comme $1/|x|$ à l'infini, associées à des termes de force qui décroissent comme $1/|x|^3$ à l'infini.

6.2 Notations et résultat principal

Introduisons tout d'abord les espaces fonctionnels dont nous avons besoin dans notre théorème.

Nous considérons des termes de force avec les mêmes conditions de symétrie que dans [54], et on recherche des solutions avec les symétries correspondantes :

$$\omega(-x_1, x_2) = \omega(x_2, x_1) = -\omega(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.2.1)$$

On remarque que ces conditions impliquent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\omega(x_1, -x_2) &= -\omega(x_1, x_2) \\ \omega(-x_1, -x_2) &= \omega(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Nos espaces fonctionnels sont constitués de fonctions bornées avec une certaine décroissance à l'infini. Dans [54] les auteurs considèrent des tourbillons ω qui décroissent en $1/|x|^2$, mais ici nous verrons que, si la fonction f décroît suffisamment (par exemple si on considère $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$), ω décroît en $1/|x|^4$. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 6.2.1. *Pour $\alpha > 0$, l'espace X_α est l'ensemble des fonctions $\omega \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que les conditions (6.2.1) soient satisfaites et telles que :*

$$\|\omega\|_{X_\alpha} = \sup_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|)^\alpha |\omega(x)| < \infty.$$

Nous introduisons maintenant les espace associés pour les champs de vecteurs. Si ω appartient à X_α pour $\alpha > 1$ alors la loi de Biot-Savart a un sens et on peut définir

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{2\pi|x - y|^2} \omega(y) dy. \quad (6.2.2)$$

On peut en déduire facilement les propriétés de symétrie de U :

$$\begin{aligned}U(x_1, -x_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x_2 + y_2, x_1 - y_1)}{2\pi|(x_1 - y_1, -x_2 - y_2)|^2} \omega(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x_2 - y_2, x_1 - y_1)}{2\pi|(x_1 - y_1, -x_2 + y_2)|^2} \omega(y_1, -y_2) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(-(-x_2 + y_2), x_1 - y_1)}{2\pi|x - y|^2} \omega(y) dy \\ &= (U_1(x), -U_2(x)).\end{aligned}$$

Donc U_1 est paire et U_2 est impaire par rapport à x_2 . On peut montrer de la même façon que U_1 est impaire et U_2 est paire par rapport à x_1 , et que $U_1(x_2, x_1) = U_2(x_1, x_2)$. Réciproquement, si $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$\begin{aligned}U_1(x_1, -x_2) &= U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, -x_2) &= -U_2(x_1, x_2) \\ U_1(x_2, x_1) &= U_2(x_1, x_2)\end{aligned} \quad (6.2.3)$$

alors on en déduit que $\omega = \text{curl} U$ vérifie les conditions (6.2.1). On introduit alors les espaces fonctionnels pour U :

Définition 6.2.2. *Soit Y_β l'ensemble des champs de vecteurs $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que les conditions (6.2.3) soient vérifiées et*

$$\|U\|_{Y_\beta} = \sup_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|)^\beta |U(x)| < \infty.$$

Enfin, nous allons devoir considérer des champs de vecteurs tels que ωU ou f^\perp qui satisfont des propriétés de symétrie différentes. Les espaces correspondants sont presque les mêmes que les espaces Y_β avec des conditions de symétrie différentes.

Définition 6.2.3. Soit Z_β l'ensemble des champs de vecteurs $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que

$$\|V\|_{Z_\beta} = \sup_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|)^\beta |V(x)| < \infty$$

et qui vérifient

$$\begin{aligned} V_1(x_1, -x_2) &= -V_1(x_1, x_2) \\ V_2(x_1, -x_2) &= V_2(x_1, x_2) \\ V_1(x_2, x_1) &= -V_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 6.2.4. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $f \in Y_6$ vérifiant $\|f\|_{Y_6} \leq \varepsilon$, il existe un unique $\omega \in X_4$ solution de (6.1.2) dans la boule $B(0, 2\varepsilon)$ de X_4 . De plus, on a

$$\|\omega\|_{X_4} \leq C \|f\|_{Y_6}$$

et ω a le développement asymptotique suivant quand $|x| \rightarrow \infty$:

$$\omega(x) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right)$$

où la constante m est donnée par :

$$m = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3y_1^2 y_2 - y_2^3) (U_1 \omega - f_2)(y) dy.$$

Enfin, la constante m est généralement non nulle.

6.3 Preuve du résultat principal

Nous étudions d'abord la loi de Biot-Savart dans les espaces X_α et Y_β .

Lemme 6.3.1. Soit $\omega \in X_\alpha$ avec $1 < \alpha < 6$. Le champ de vitesse associé U défini par (6.2.2) appartient à $Y_{\alpha-1}$, et on a l'inégalité suivante :

$$\|U\|_{Y_{\alpha-1}} \leq C \|\omega\|_{X_\alpha}$$

pour une certaine constante $C = C(\alpha)$.

Preuve. Soit $\omega \in X_\alpha$ pour $1 < \alpha < 6$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy + \int_{|x|/2 < |y| < 2|x|} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy + \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Nous commençons par estimer les intégrales les plus faciles :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|x-y||y|^\alpha} dy \\ &\leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|y|^{\alpha+1}} dy \\ &\leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

où on utilise que $\alpha > 1$ pour déduire que $1/|y|^{\alpha+1}$ est intégrable à l'infini.

On considère ensuite I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|x|/2 < |y| < 2|x|} \frac{1}{|x-y||y|^\alpha} dy \\ &\leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^\alpha} \int_{|x|/2 < |y| < 2|x|} \frac{1}{|x-y|} dy \\ &\leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^\alpha} \int_{|z| \leq 3|x|} \frac{1}{|z|} dz \\ &\leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Il reste à traiter l'intégrale I_1 . Pour cela, on utilise les propriétés de symétrie de ω . Observons d'abord que

$$|I_1| \leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{1}{|x-y||y|^\alpha} dy \leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{1}{|y|^\alpha} dy.$$

Donc, si $\alpha < 2$, on a :

$$|I_1| \leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}.$$

Si $2 \leq \alpha < 3$, on utilise le fait que les symétries de ω impliquent que $\int_B \omega(y) dy = 0$ où B est une boule quelconque centrée en 0 dans \mathbb{R}^2 . On a alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} - \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{-y^\perp|x|^2 + 2(x \cdot y)x^\perp - |y|^2x^\perp}{2\pi|x-y|^2|x|^2} \right) \omega(y) dy \end{aligned}$$

donc

$$|I_1| \leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{|y|}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^3} \right) \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}$$

où on a utilisé que, pour $\alpha < 3$, $1/|y|^{\alpha-1}$ est intégrable en 0.

Ensuite, si $3 \leq \alpha < 4$, on utilise le fait que, pour $i \in \{1, 2\}$, $\int_B y_i \omega(y) dy = 0$ pour toute boule B centrée en 0, ce qui est une conséquence du fait que ω est impaire par rapport à y_{3-i} .

On a donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{-y^\perp|x|^2 + 2(x \cdot y)x^\perp - |y|^2x^\perp}{2\pi|x-y|^2|x|^2} - \frac{-y^\perp|x|^2 + 2(x \cdot y)x^\perp}{2\pi|x|^4} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{-2(x \cdot y)y^\perp|x|^2 + |y|^2|x|^2y^\perp + 4(x \cdot y)^2x^\perp - 2|y|^2(x \cdot y)x^\perp - |y|^2|x|^2x^\perp}{2\pi|x-y|^2|x|^4} \right) \omega(y) dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{|y|^2}{|x|^3} + \frac{|y|^3}{|x|^4} \right) \frac{1}{|y|^\alpha} dy \\ &\leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $4 \leq \alpha < 5$. On observe que tous les moments d'ordre 2 de ω sont nuls. En effet, si $i \in \{1, 2\}$, on voit que $\int_B y_i^2 \omega(y) dy = 0$ car ω est impaire par rapport à y_i . Et $\int_B y_1 y_2 \omega(y) dy = 0$ car ω change de signe quand on échange y_1 et y_2 . On remarque que dans le calcul précédent, on a écrit I_1 sous la forme

$$I_1 = \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{P_1(x, y) + Q_1(x, y)}{|x - y|^2 |x|^4} \right) \omega(y) dy$$

où P_1 est un polynôme homogène de degré 3 en x et de degré 2 en y . Et Q_1 est un polynôme homogène de degré 3 en y et de degré 2 en x . Comme tous les moments d'ordre 2 de ω s'annulent, on en déduit que $\int_B P_1(x, y) \omega(y) dy = 0$, et on a alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(P_1(x, y) \left(\frac{1}{|x - y|^2 |x|^4} - \frac{1}{|x|^6} \right) + \frac{Q_1(x, y)}{|x - y|^2 |x|^4} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{2(x \cdot y) P_1(x, y) + |x|^2 Q_1(x, y) - |y|^2 P_1(x, y)}{|x - y|^2 |x|^6} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{P_2(x, y) + Q_2(x, y)}{|x - y|^2 |x|^6} \right) \omega(y) dy \end{aligned}$$

où P_2 est homogène de degré 4 en x et de degré 3 en y , et Q_2 est homogène de degré 3 en x et de degré 4 en y . Par conséquent

$$|I_1| \leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{|y|^3}{|x|^4} + \frac{|y|^4}{|x|^5} \right) \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}$$

car, pour $\alpha < 5$, $1/|y|^{\alpha-3}$ est intégrable en 0. Ensuite, pour atteindre la borne optimale $\alpha < 6$, nous devons répéter la même opération sur les polynômes de degré 3 en y , c'est-à-dire sur P_2 . On observe encore une fois que les moments d'ordre 3 de ω s'annulent. En effet, on a $\int_B y_i^3 \omega(y) dy = 0$ car ω est impaire par rapport à y_{3-i} et $\int_B y_i^2 y_{3-i} \omega(y) dy = 0$ car ω est impaire par rapport à y_i . D'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{P_2(x, y) + Q_2(x, y)}{|x - y|^2 |x|^6} - \frac{P_2(x, y)}{|x|^8} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(P_2(x, y) \left(\frac{1}{|x - y|^2 |x|^6} - \frac{1}{|x|^8} \right) + \frac{Q_2(x, y)}{|x - y|^2 |x|^6} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{2(x \cdot y) P_2(x, y) + |x|^2 Q_2(x, y) - |y|^2 P_2(x, y)}{|x - y|^2 |x|^8} \right) \omega(y) dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{P_3(x, y) + Q_3(x, y)}{|x - y|^2 |x|^8} \right) \omega(y) dy \end{aligned}$$

où P_3 est homogène de degré 5 en x et de degré 4 en y , et Q_3 est homogène de degré 4 en x et de degré 5 en y . On en déduit que

$$|I_1| \leq C \|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{|y|^4}{|x|^5} + \frac{|y|^5}{|x|^6} \right) \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{C \|\omega\|_{X_\alpha}}{|x|^{\alpha-1}}$$

car, pour $\alpha < 6$, $1/|y|^{\alpha-4}$ est intégrable en 0.

Il ne reste plus qu'à démontrer le caractère borné de U afin de garantir qu'il soit bien dans $Y_{\alpha-1}$. Pour cela, on suppose que $|x| \leq 1$ (pour le reste, les estimations d'avant conviennent), on décompose

$$U(x) = \int_{|y| \leq 2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy + \int_{|y| > 2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy$$

et on majore

$$\begin{aligned} |U(x)| &\leq C\|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| \leq 2} \frac{1}{|x-y|} dy + C\|\omega\|_{X_\alpha} \int_{|y| > 2} \frac{1}{|y|^{\alpha+1}} dy \\ &\leq C\|\omega\|_{X_\alpha} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Remarque 6.3.2. On ne peut pas pousser cet argument plus loin car pour cela il faudrait avoir $\int_B P_3(x, y)\omega(y) dy = 0$. Mais dans ce polynôme, on a des termes $y_1^3 y_2$, et l'intégrale $\int_B y_1^3 y_2 \omega(y) dy$ ne s'annule pas forcément. En particulier, l'application $\omega \mapsto U$ n'est pas continue de X_6 dans Y_5 .

L'équation (6.1.2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\omega = U \cdot \nabla\omega - \text{curl } f = \text{div}(U\omega + f^\perp) \equiv \text{div } V$$

où $V = U\omega + f^\perp$ est dans $Z_{2\alpha-1}$ si $1 < \alpha < 6$ et f est suffisamment décroissante à l'infini.

On sait que l'inverse du laplacien dans \mathbb{R}^2 est la convolution par $\frac{1}{2\pi} \ln|x|$, donc si $\alpha > 3/2$, on peut écrire la solution de l'équation ci-dessus sous la forme suivante :

$$\omega = \frac{\ln|x|}{2\pi} * \text{div } V = \sum_{i=1}^2 \frac{x_i}{2\pi|x|^2} * V_i.$$

D'après le résultat démontré dans [54], on sait qu'il existe une unique solution petite $\omega \in X_2$. Pour trouver son comportement asymptotique à l'infini, on suppose que V appartient à Z_β pour β suffisamment grand, et on fait un développement asymptotique de $\Delta^{-1} \text{div } V = \frac{x}{2\pi|x|^2} * V$ dans le lemme suivant.

Lemme 6.3.3. *Soit $V \in Z_\beta$ avec $1 < \beta < 7$, $\beta \neq 5$. Alors $\Delta^{-1} \text{div } V \in X_{\min(\beta-1, 4)}$ et l'application $V \mapsto \Delta^{-1} \text{div } V$ est continue de Z_β dans $X_{\min(\beta-1, 4)}$. De plus, si $5 < \beta < 7$ nous avons le comportement asymptotique*

$$\Delta^{-1} \text{div } V(x_1, x_2) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^{\beta-1}}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$ et

$$m = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3y_1^2 y_2 - y_2^3) V_1(y) dy.$$

Preuve. On commence par décomposer

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} \operatorname{div} V(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x|/2 < |y| < 2|x|} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy.\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du lemme 6.3.1, on s'occupe d'abord de I_2 et I_3 :

$$\begin{aligned}|I_3| &\leq C \|V\|_{Z_\beta} \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|x-y||y|^\beta} dy \\ &\leq C \|V\|_{Z_\beta} \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{1}{|y|^{\beta+1}} dy \\ &\leq \frac{C \|V\|_{Z_\beta}}{|x|^{\beta-1}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq C \|V\|_{Z_\beta} \int_{|x|/2 < |y| < 2|x|} \frac{1}{|x-y||y|^\beta} dy \\ &\leq \frac{C \|V\|_{Z_\beta}}{|x|^\beta} \int_{|z| \leq 3|x|} \frac{1}{|z|} dz \\ &\leq \frac{C \|V\|_{Z_\beta}}{|x|^{\beta-1}}.\end{aligned}$$

Pour majorer l'intégrale I_1 , il nous faut les propriétés d'annulation des moments de V . Soit B une boule centrée en 0 et $i \in \{1, 2\}$. On étudie les moments de V_i jusqu'à l'ordre 4.

Moments d'ordre 0. Comme V_i est impaire par rapport à x_{3-i} , on a $\int_B V_i = 0$.

Moments d'ordre 1. Comme V_i est impaire par rapport à x_{3-i} , on a $\int_B x_1 V_1 = \int_B x_2 V_2 = 0$. Comme $V_1(x_2, x_1) = -V_2(x_1, x_2)$, on a également $\int_B x_2 V_1 = -\int_B x_1 V_2$.

Moments d'ordre 2. Tous les moments d'ordre 2 sont nuls. En effet, comme V_i est impaire par rapport à x_{3-i} , on sait que $\int_B x_1^2 V_i = \int_B x_2^2 V_i = 0$ et comme V_i est paire par rapport à x_i , on sait que $\int_B x_1 x_2 V_i = 0$.

Moments d'ordre 3. En utilisant l'imparité de V_i par rapport à x_{3-i} , on obtient que $\int_B x_1^3 V_1 = \int_B x_1 x_2^2 V_1 = \int_B x_2^3 V_2 = \int_B x_1^2 x_2 V_2 = 0$. Le fait que $V_1(x_2, x_1) = -V_2(x_1, x_2)$ implique que $\int_B x_1^3 V_2 = -\int_B x_2^3 V_1$ et $\int_B x_1 x_2^2 V_2 = -\int_B x_1^2 x_2 V_1$.

Moments d'ordre 4. Comme V_i est impaire par rapport à x_{3-i} , on a $\int_B x_1^4 V_i = \int_B x_2^4 V_i = \int_B x_1^2 x_2^2 V_i = 0$. Comme V_i est paire par rapport à x_i , on obtient $\int_B x_1^3 x_2 V_i = \int_B x_1 x_2^3 V_i = 0$. Ainsi, tous les moments d'ordre 4 de V sont nuls.

Pour trouver le développement asymptotique de I_1 , on applique la formule de Taylor à l'application $H : z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$. Pour $x \neq 0$ et $|y| \leq |x|/2$, on a :

$$H(x-y) = H(x) - \nabla H(x) \cdot y + \frac{1}{2} \nabla^2 H(x)(y, y) - \frac{1}{6} \nabla^3 H(x)(y, y, y) + \frac{1}{24} \nabla^4 H(x)(y, y, y, y) - \int_0^1 \frac{(1-t)^4}{24} \nabla^5 H(x-ty)(y, y, y, y, y) dt. \quad (6.3.1)$$

Comme $\nabla^5 H$ est homogène de degré -6 et $|y| \leq |x|/2$, on sait que $|\nabla^5 H(x-ty)| \leq \frac{C}{|x|^6}$ pour tout $t \in [0; 1]$ et on peut en conclure que le reste intégral est majoré par $\frac{C|y|^5}{|x|^6}$.

Rappelons maintenant que

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} H(x-y) \cdot V(y) dy.$$

On remplace $H(x-y)$ ci-dessus par la formule donnée dans (6.3.1). Comme tous les moments d'ordre 0, 2 ou 4 de V sont nuls, on en déduit que

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\nabla H(x) \cdot y + \frac{1}{6} \nabla^3 H(x)(y, y, y) + O\left(\frac{|y|^5}{|x|^6}\right) \right) \cdot V(y) dy \\ &\equiv I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

On calcule ensuite successivement les différentes dérivées de H : pour $x \neq 0$, $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ on a

$$\begin{aligned} (\nabla H(x))_{i,j} &= \partial_j H_i(x) = \frac{\delta_{i,j}}{|x|^2} - 2 \frac{x_i x_j}{|x|^4} \\ (\nabla^2 H(x))_{i,j,k} &= \partial_k \partial_j H_i(x) = -2 \frac{\delta_{i,j} x_k + \delta_{i,k} x_j + \delta_{j,k} x_i}{|x|^4} + 8 \frac{x_i x_j x_k}{|x|^6} \\ (\nabla^3 H(x))_{i,j,k,l} &= \partial_l \partial_k \partial_j H_i(x) = -2 \frac{\delta_{i,j} \delta_{k,l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{j,k} \delta_{i,l}}{|x|^4} + \\ &\quad 8 \frac{\delta_{i,j} x_k x_l + \delta_{i,k} x_j x_l + \delta_{j,k} x_i x_l + \delta_{i,l} x_j x_k + \delta_{j,l} x_i x_k + \delta_{k,l} x_i x_j}{|x|^6} - 48 \frac{x_i x_j x_k x_l}{|x|^8}. \end{aligned}$$

D'où

$$\nabla H(x) \cdot y = \frac{y}{|x|^2} - 2 \frac{(x \cdot y)x}{|x|^4}$$

et

$$\nabla^3 H(x)(y, y, y) = -6 \frac{|y|^2 y}{|x|^4} + 24 \frac{(x \cdot y)^2 y + 3|y|^2 (x \cdot y)x}{|x|^6} - 48 \frac{(x \cdot y)^3 x}{|x|^8}.$$

On prouve alors que $I_4 = 0$:

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} (\nabla H(x) \cdot y) \cdot V(y) dy \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(\frac{y \cdot V(y)}{|x|^2} - 2 \frac{(x \cdot y)(x \cdot V(y))}{|x|^4} \right) dy \\
&= -\frac{1}{2\pi|x|^2} \int_{|y| \leq |x|/2} (y_1 V_1 + y_2 V_2) dy + \frac{1}{\pi|x|^4} \int_{|y| \leq |x|/2} (x_1 y_1 + x_2 y_2)(x_1 V_1 + x_2 V_2) dy \\
&= \frac{1}{\pi|x|^4} \int_{|y| \leq |x|/2} (x_1 x_2 y_1 V_2 + x_1 x_2 y_2 V_1) dy \\
&= \frac{x_1 x_2}{\pi|x|^4} \int_{|y| \leq |x|/2} (y_1 V_2 + y_2 V_1) dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'annulation de (certains) moments d'ordre 1 de V .

On majore ensuite I_6 :

$$|I_6| = \left| -\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} O\left(\frac{|y|^5}{|x|^6}\right) \cdot V(y) dy \right| \leq \frac{C\|V\|_{Z_\beta}}{|x|^6} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{1}{|y|^{\beta-5}} dy \leq \frac{C\|V\|_{Z_\beta}}{|x|^{\beta-1}}$$

où on a utilisé que $\beta < 7$.

Il reste enfin à calculer I_5 pour $\beta > 7$:

$$\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{1}{12\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \nabla^3 H(x)(y, y, y) \cdot V(y) dy \\
&= -\frac{1}{12\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \left(-6 \frac{|y|^2(y \cdot V)}{|x|^4} + 24 \frac{(x \cdot y)^2(y \cdot V) + 3|y|^2(x \cdot y)(x \cdot V)}{|x|^6} \right. \\
&\quad \left. - 48 \frac{(x \cdot y)^3(x \cdot V)}{|x|^8} \right) dy.
\end{aligned}$$

Comme dans le calcul de I_4 et grâce à l'annulation de (certains) moments d'ordre 3 de V on observe que le terme contenant $|y|^2(y \cdot V)$ est nul. On a également

$$\begin{aligned}
\int_B |y|^2(x \cdot y)(x \cdot V) &= x_1^2 \int_B (y_1^3 + y_1 y_2^2) V_1(y) dy + x_2^2 \int_B (y_1^2 y_2 + y_2^3) V_2(y) dy \\
&\quad + x_1 x_2 \int_B [y_1^3 V_2(y) + y_2^3 V_1(y) + y_1 y_2^2 V_2(y) + y_1^2 y_2 V_1(y)] dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$I_5 = \frac{2}{\pi} \int_{|y| \leq |x|/2} \frac{2(x \cdot y)^3(x \cdot V) - |x|^2(x \cdot y)^2(y \cdot V)}{|x|^8} dy.$$

En utilisant les propriétés d'annulation des moments d'ordre 3 de V on obtient de plus que

$$\begin{aligned}
\int_B (x \cdot y)^3 (x \cdot V) dy &= \int_B (x_1^3 y_1^3 + 3x_1 x_2^2 y_1 y_2^2 + 3x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + x_2^3 y_2^3) (x_1 V_1 + x_2 V_2) dy \\
&= \int_B (3x_1^3 x_2 y_1^2 y_2 V_1 + x_1 x_2^3 y_2^3 V_1 + x_1^3 x_2 y_1^3 V_2 + 3x_1 x_2^3 y_1 y_2^2 V_2) dy \\
&= \int_B x_1 x_2 (3(x_1^2 - x_2^2) y_1^2 y_2 V_1 + (x_2^2 - x_1^2) y_2^3 V_1) dy \\
&= \int_B x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) (3y_1^2 y_2 V_1 - y_2^3 V_1) dy
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_B (x \cdot y)^2 (y \cdot V) dy &= \int_B (x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2) (y_1 V_1 + y_2 V_2) dy \\
&= \int_B 2x_1 x_2 (y_1^2 y_2 V_1 + y_1 y_2^2 V_2) dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$I_5 = \frac{4}{\pi |x|^8} \int_{|y| \leq |x|/2} x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) (3y_1^2 y_2 - y_2^3) V_1(y) dy.$$

On a donc prouvé que

$$\Delta^{-1} \operatorname{div} V(x) = \frac{4}{\pi} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} \int_{|y| \leq |x|/2} (3y_1^2 y_2 - y_2^3) V_1(y) dy + O\left(\frac{\|V\|_{X_\beta}}{|x|^{\beta-1}}\right).$$

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que $\Delta^{-1} \operatorname{div} V$ est borné et que l'on peut remplacer le domaine d'intégration de l'intégrale dans la relation ci-dessus par \mathbb{R}^2 .

Or, $\Delta^{-1} \operatorname{div}$ est un opérateur de convolution avec un noyau majoré par $\frac{C}{|x|}$. Dans ce cadre, le caractère borné de $\Delta^{-1} \operatorname{div} V$ est classique (voir par exemple [32]), on en rappelle rapidement l'idée : pour $|x| > 1$, l'inégalité précédente nous fournit l'estimation voulue. Pour $|x| \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1} \operatorname{div} V(x) &= C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy \\
&= C \int_{|y| \leq 2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy + C \int_{|y| > 2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot V(y) dy.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\Delta^{-1} \operatorname{div} V(x)| &\leq C \|V\|_{Z_\beta} \int_{|y| \leq 2} \frac{dy}{|x-y|} + C \|V\|_{Z_\beta} \int_{|y| > 2} \frac{dy}{|y|^{\beta+1}} dy \\
&\leq C \|V\|_{Z_\beta}.
\end{aligned}$$

À présent, supposons $\beta > 5$ et définissons

$$I_7 = \frac{4x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{\pi |x|^8} \int_{|y| > |x|/2} (3y_1^2 y_2 V_1 - y_2^3 V_1)(y) dy.$$

On peut majorer

$$|I_7| \leq \frac{C\|V\|_{Z_\beta}}{|x|^4} \int_{|y|>|x|/2} \frac{dy}{|y|^{\beta-3}} \leq \frac{C\|V\|_{Z_\beta}}{|x|^{\beta-1}}.$$

On en déduit que

$$\Delta^{-1} \operatorname{div} V(x) = \frac{mx_1x_2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{\|V\|_{Z_\beta}}{|x|^{\beta-1}}\right)$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

On continue maintenant la preuve du théorème 6.2.4. On écrit (6.1.2) sous la forme

$$\omega = \Delta^{-1} \operatorname{div}(U\omega + f^\perp) \equiv B(\omega, \omega) + F \quad (6.3.2)$$

où

$$B(\omega, \omega) = \Delta^{-1} \operatorname{div}(U\omega) \quad \text{et} \quad F = \Delta^{-1} \operatorname{div} f^\perp.$$

Comme $f \in Y_6$, on sait que $f^\perp \in Z_6$ donc par le lemme 6.3.3 on a que $F \in X_4$. On applique maintenant le lemme de point fixe 2.1.1 à l'espace X_4 et à la forme bilinéaire $B(\omega_1, \omega_2) = \Delta^{-1} \operatorname{div}(U\omega_1\omega_2)$. On remarque que B est continue sur X_4 . En effet, si $\omega_1, \omega_2 \in X_4$ alors d'après le lemme 6.3.1 on sait que $U\omega_1 \in Y_3$ et donc $U\omega_1\omega_2 \in Z_7$. D'après le lemme 6.3.3, il s'ensuit que $B(\omega_1, \omega_2) \in X_4$. Le lemme 2.1.1 implique donc qu'il existe ε_0 et $C_1 > 0$ tels que, si $\|f\|_{Y_6} \leq \varepsilon_0$ alors il existe un unique ω dans la boule $B(0, 2\varepsilon)$ de X_4 solution de (6.3.2). De plus,

$$\|\omega\|_{X_4} \leq C\|F\|_{X_4} \leq C_1\|f\|_{Y_6}.$$

Pour obtenir le développement asymptotique voulu pour ω , on observe que $U\omega$ appartient à $Z_7 \subset Z_6$ et on a $\|U\omega\|_{Z_6} \leq C\|\omega\|_{X_4}^2$. D'après le lemme 6.3.3 appliqué à $V = U\omega + f^\perp$ on déduit que

$$\omega_0(x) = m \frac{x_1x_2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right)$$

où

$$m = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3y_1^2y_2 - y_2^3)V_1(y) dy = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3y_1^2y_2 - y_2^3)(U_1\omega - f_2)(y) dy.$$

Nous construisons maintenant un exemple de terme de force f aussi petit qu'on veut et tel que $m \neq 0$. Introduisons la fonction

$$\Psi(V) = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3y_1^2y_2 - y_2^3)V_1(y) dy.$$

Nous voulons trouver un f tel que $m = \Psi(U\omega + f^\perp) \neq 0$. Soit $f \in Y_6$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel qu'il existe une solution ω_ε associée au terme de force εf . On a alors

$$\|\omega_\varepsilon\|_{X_4} \leq C\|\varepsilon f\|_{Y_6} \leq C\varepsilon$$

donc

$$|\Psi(U_\varepsilon\omega_\varepsilon)| \leq C\|U_\varepsilon\omega_\varepsilon\|_{Z_7} \leq C\|U_\varepsilon\|_{Y_3}\|\omega\|_{X_4} \leq C\varepsilon^2.$$

Comme Ψ est linéaire, on en déduit que

$$|\Psi(\varepsilon f^\perp + U_\varepsilon \omega_\varepsilon)| = |\varepsilon \Psi(f^\perp) + O(\varepsilon^2)| \geq \frac{\varepsilon}{2} |\Psi(f^\perp)|$$

si ε est assez petit et si $\Psi(f^\perp) \neq 0$. Il suffit donc de trouver une fonction $f \in Y_6$ telle que $\Psi(f^\perp) \neq 0$, ce qui est assez facile à obtenir. Prenons une fonction $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, [0, 1])$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} r^7 h(r) dr = 1$ et telle que $h = 1$ au voisinage de 0. Soit $f(x_1, x_2) = (x_1^3, x_2^3)h(|x|)$. Alors $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et satisfait les conditions de symétrie voulues, donc $f \in Y_6$. On a alors

$$\begin{aligned} \Psi(f^\perp) &= \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3x_1^2 x_2 - x_2^3) f_2(x) dx \\ &= \frac{-4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (3x_1^2 x_2^4 - x_2^6) h(|x|) dx \\ &= \frac{-4}{\pi} \int_0^{+\infty} r^7 h(r) dr \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta \\ &= \frac{-4}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (-1 + 3 \cos(2\theta) - 3 \cos(4\theta) + \cos(6\theta)) d\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du théorème.

Remarque 6.3.4. Une fois que l'on connaît le comportement asymptotique du tourbillon, il est facile de déterminer le comportement asymptotique de la vitesse. Si ω vérifie les conditions de symétrie (6.2.1) et

$$\omega(x) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$, alors la vitesse U a le comportement asymptotique suivant :

$$U(x) = \frac{m}{12|x|^8} (x_1(x_1^4 + 3x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2), x_2(3x_1^4 + x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2)) + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right). \quad (6.3.3)$$

En effet, on peut vérifier que

$$\operatorname{curl} \left[\frac{1}{12|x|^8} (x_1(x_1^4 + 3x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2), x_2(3x_1^4 + x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2)) \right] = \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8}.$$

De plus, on observe que

$$\Delta \left(\frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^6} \right) = -12 \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8}$$

et

$$\frac{1}{12|x|^8} (x_1(x_1^4 + 3x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2); x_2(3x_1^4 + x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2)) = -\nabla^\perp \left(\frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \right).$$

Donc, si on définit

$$W = -m \nabla^\perp \left(\varphi(x) \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \right)$$

on sait que W est de divergence nulle et

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} W &= -m\Delta \left(\varphi(x) \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \right) \\ &= m\varphi \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} - m\Delta \varphi(x) \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} - 2m\nabla \varphi \cdot \nabla \left(\frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \right).\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{curl}(W - U) = O(1/|x|^5)$ donc d'après le lemme 6.3.1 on obtient que $W - U = O(1/|x|^4)$. Mais on a également

$$\begin{aligned}W(x) &= -m\varphi(x)\nabla^\perp \left(\frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \right) - m\nabla^\perp \varphi(x) \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{12|x|^6} \\ &= \frac{m}{12|x|^8} (x_1(x_1^4 + 3x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2); x_2(3x_1^4 + x_2^4 - 8x_1^2 x_2^2)) + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right)\end{aligned}$$

et la relation (6.3.3) en découle.

6.4 Le cas d'un domaine extérieur

Dans cette section, on prouve l'extension suivante du théorème 6.2.4 aux domaines extérieurs. Les conditions de symétrie que nous devons supposer sur p sont : pour tout (x_1, x_2) ,

$$p(x_1, -x_2) = p(-x_1, x_2) = p(x_2, x_1) = p(x_1, x_2). \quad (6.4.1)$$

Théorème 6.4.1. *Soit $R > 0$ et considérons f , U et p définis pour $|x| > R$. Supposons que $U \in Y_3$, $\operatorname{curl} U \in X_4$, $f \in Y_6$ et que p satisfasse (6.4.1). On suppose également que*

$$-\Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad \text{pour } \{|x| > R\},$$

et que

$$\int_{|x|=R_1} U \cdot x \, d\sigma(x) = 0 \quad (6.4.2)$$

pour tout $R_1 > R$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(R) > 0$ tel que, si

$$\|U\|_{Y_3} + \|f\|_{Y_6} + \|\operatorname{curl} U\|_{X_4} \leq \varepsilon$$

alors il existe une constante m telle que $\omega = \operatorname{curl} U$ admette le comportement asymptotique suivant :

$$\omega(x) = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

Remarque 6.4.2. Comme dans la section 3.6, le fait que U soit de divergence nulle implique que l'intégrale de la relation (6.4.2) est proportionnelle à R_1 . La condition (6.4.2) elle-même ne dépend donc pas du choix de R_1 : si (6.4.2) est vraie pour un R_1 , elle est vraie pour tous les R_1 . De plus, elle sera automatiquement vérifiée si U vérifie des conditions de Dirichlet homogènes dans un domaine extérieur.

Pour prouver le théorème 6.4.1, on procède comme dans la section 3.6 ou dans l'article [36]. On étend U au plan tout entier, on étudie le terme de force qui apparaît et on applique le théorème 6.2.4. La seule différence avec la preuve de la section 3.6 est que nous devons nous assurer que la solution étendue vérifie bien les conditions de symétrie introduites dans le théorème 6.2.4. Nous rappelons donc rapidement l'extension obtenue.

Soient $R < R_0 < R_1$ et considérons $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ une fonction de troncature telle que $\eta = 0$ sur $B(0, R_0)$ et $\eta = 1$ sur la boule $B(0, R_1)^c$. On définit alors les extensions suivantes de la solution (U, p) :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U, & \tilde{p} &= p & \text{sur } B(0, R_1)^c \\ \tilde{U} &= \eta U + v, & \tilde{p} &= \eta p & \text{sur } B(0, R_1) \end{aligned}$$

où on a étendu ηU et ηp par zéro pour $|x| \leq R$. Le champ de vecteurs v est construit de telle sorte que $\tilde{U} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{div} \tilde{U} = 0$ partout et que les symétries (6.2.3) restent vraies pour \tilde{U} . Il doit donc être solution du problème

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= -U \cdot \nabla \eta \text{ dans } B(0, R_1) \\ v &= 0 \text{ sur } \partial B(0, R_1). \end{aligned}$$

Comme dans la section 3.6, la condition (6.4.2) implique que $U \cdot \nabla \eta$ est d'intégrale nulle sur $B(0, R_1)$. Une solution pour l'équation de v sera donné par les opérateurs de Bogovskii rappelés dans la section 2.2 :

$$v(x) = - \int_{B(0, R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)}{t} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \frac{dt}{t^n} U(y) \cdot \nabla \eta(y) dy$$

où χ est une fonction arbitraire dans $C_0^\infty(B(0, R_0))$ telle que $\int \chi = 1$. Ici nous faisons l'hypothèse supplémentaire que χ est radiale. Avec cette hypothèse, on peut prouver que v vérifie les conditions (6.2.3). En effet, on peut reformuler ces conditions par

$$\begin{aligned} U(x^\perp) &= (U(x))^\perp \\ U(\bar{x}) &= \overline{U(x)} \end{aligned}$$

où \bar{z} désigne le complexe conjugué de z (ici, on identifie \mathbb{R}^2 et \mathbb{C}). Or on a

$$\begin{aligned} v(x^\perp) &= - \int_{B(0, R_1)} \int_0^1 \frac{(x^\perp - y)}{t} \chi \left(y + \frac{x^\perp - y}{t} \right) \frac{dt}{t^n} U(y) \cdot \nabla \eta(y) dy \\ &= - \int_{B(0, R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)^\perp}{t} \chi \left(\left(y + \frac{x-y}{t} \right)^\perp \right) \frac{dt}{t^n} U(y^\perp) \cdot \nabla \eta(y^\perp) dy. \end{aligned}$$

Le fait que η soit radiale implique $\nabla \eta(y^\perp) = (\nabla \eta(y))^\perp$. Ensuite, en utilisant le fait que χ est radiale et les propriétés de symétrie de U on déduit

$$\begin{aligned} v(x^\perp) &= - \int_{B(0, R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)^\perp}{t} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \frac{dt}{t^n} (U(y))^\perp \cdot (\nabla \eta(y))^\perp dy \\ &= - \int_{B(0, R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)^\perp}{t} \chi \left(y + \frac{x-y}{t} \right) \frac{dt}{t^n} U(y) \cdot \nabla \eta(y) dy \\ &= (v(x))^\perp. \end{aligned}$$

Ensuite, on a de même que $\nabla\eta(\bar{y}) = \overline{\nabla\eta(y)}$ donc

$$\begin{aligned}
v(\bar{x}) &= - \int_{B(0,R_1)} \int_0^1 \frac{(\bar{x}-y)}{t} \chi\left(y + \frac{\bar{x}-y}{t}\right) \frac{dt}{t^n} U(y) \cdot \nabla\eta(y) dy \\
&= - \int_{B(0,R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)}{t} \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^n} U(\bar{y}) \cdot \nabla\eta(\bar{y}) dy \\
&= \int_{B(0,R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)}{t} \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^n} \overline{U(y)} \cdot \overline{\nabla\eta(y)} dy \\
&= \int_{B(0,R_1)} \int_0^1 \frac{(x-y)}{t} \chi\left(y + \frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^n} U(y) \cdot \nabla\eta(y) dy \\
&= \overline{v(x)}.
\end{aligned}$$

On en conclut que v vérifie bien les conditions (6.2.3).

On observe alors que l'extension (\tilde{U}, \tilde{p}) vérifie l'équation de Navier-Stokes suivante dans le plan tout entier :

$$-\Delta\tilde{U} + (\tilde{U} \cdot \nabla)\tilde{U} + \nabla\tilde{p} = \eta f + F, \quad \operatorname{div}\tilde{U} = 0 \quad (6.4.3)$$

où

$$F = -\Delta v - \Delta\eta U - 2\nabla U \cdot \nabla\eta + \operatorname{div}(\eta U \otimes v + \eta v \otimes U + v \otimes v + \eta^2 U \otimes U) - \eta \operatorname{div}(U \otimes U) + p\nabla\eta$$

est à support compact dans $B(0, R_1)$ et on a prolongé v par 0 sur $B(0, R_1)^c$. Il nous faut alors vérifier que F et $\operatorname{curl}\tilde{U}$ sont petits afin de pouvoir appliquer le théorème 6.2.4. Or, on a $\operatorname{curl}\tilde{U} = \eta \operatorname{curl}U + \nabla^\perp\eta \cdot U + \operatorname{curl}v$, et par hypothèse on sait que U et $\operatorname{curl}U$ sont petits. Par ailleurs, comme on contrôle U dans L^∞ , d'après le lemme 3.6.3 de la section 3.6, que l'on peut à nouveau appliquer dans ce cas, on sait que l'on contrôle U dans $W^{2,q}(B(0, R_1))$ pour $1 < q < \infty$. Par le résultat de Bogovskii, on a $v \in W_0^{3,q}(B(0, R_1))$ avec un contrôle sur sa norme. Par les injections de Sobolev, nous avons une estimation de v dans $W^{2,\infty}(B(0, R_1))$. On conclut que $\operatorname{curl}\tilde{U}$ est bien contrôlé dans $L^\infty(B(0, R_1))$. Par ailleurs, ces estimations ainsi que le contrôle de p dans $W_{loc}^{1,q}$ nous permettent d'affirmer que F sera également contrôlée dans $L^\infty(B(0, R_1))$ par les normes $\|U\|_{Y_3}$ et $\|f\|_{Y_6}$. Enfin, on peut vérifier très facilement que comme v et U vérifient les conditions (6.2.3), p vérifie (6.4.1) et comme η est radiale, on en déduit que F satisfait (6.2.3). Donc $F \in Y_6$, $\tilde{U} \in Y_3$ et ces fonctions sont petites dans ces espaces. On peut alors appliquer le théorème 6.2.4 à (6.4.3) et on en déduit que $\tilde{\omega} = \operatorname{curl}\tilde{U}$ a le comportement asymptotique suivant :

$$\tilde{\omega} = m \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{|x|^8} + O\left(\frac{1}{|x|^5}\right)$$

où m est une certaine constante. Comme $\tilde{\omega} = \omega = \operatorname{curl}U$ pour $|x| > R_1$, c'est également le développement asymptotique à l'infini de $\omega = \operatorname{curl}U$. Ceci achève la preuve du théorème 6.4.1.

6.5 Comportement asymptotique en $1/|x|$

Une fois le comportement asymptotique déterminé dans le cas où le terme de force est bien décroissant à l'infini, on peut étudier comme dans les chapitres précédents des solutions dont le comportement asymptotique à l'infini est homogène de degré -1. Ces solutions doivent être

associées à des termes de force qui ont eux-mêmes un comportement asymptotique à l'infini homogène de degré -3. C'est le but de cette section, toujours en supposant les conditions de symétrie de Yamazaki.

Il y a cependant une différence de taille entre la dimension deux et la dimension trois. L'approche que nous avons eue jusqu'à présent a été en deux temps : d'abord on résout l'équation homogène puis on déduit le comportement asymptotique par un argument de perturbation. En dimension trois, si le champ de vitesse U est homogène de degré -1 le produit $u \otimes u$ est localement intégrable. Donc le terme $U \cdot \nabla U = \operatorname{div}(U \otimes U)$ est bien défini au sens des distributions. En dimension deux, cela n'est plus le cas. Le produit $u \otimes u$ n'est pas bien défini au sens des distributions, ni même au sens de la valeur principale. En effet, une des composantes de $U \otimes U$ est U_1^2 et U_1^2 ne peut pas être défini au sens de la valeur principale puisque c'est une fonction homogène positive et son intégrale sur le cercle unité est donc non nulle. Il y a d'autres moyens de prolonger une fonction homogène en une distribution mais le résultat ne sera pas une distribution homogène, propriété cruciale dans nos arguments. À première vue, l'approche utilisée en dimension trois ne peut pas marcher en dimension deux. En fait, on sait depuis les travaux de Delort [10] sur les nappes de tourbillon que pour donner un sens au terme $U \cdot \nabla U$, il suffit de définir $U_1^2 - U_2^2$ et $U_1 U_2$ au sens des distributions. Et il se trouve que les conditions de symétrie de Yamazaki impliquent que ces deux fonctions sont de moyenne nulle sur le cercle unité, leur valeur principale est donc bien définie.

Nous allons d'abord réécrire l'équation (6.1.1) sous la forme d'une équation intégrale pour la vitesse. Pour cela, rappelons que le noyau de la fonction de Green de l'opérateur $\mathbb{P}\Delta^{-1}$ dans \mathbb{R}^2 est donné par la formule suivante (voir [16, Section IV.2]) :

$$G_2(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(-\log|x| I_2 + \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right).$$

En appliquant le projecteur de Leray \mathbb{P} à (6.1.1) et en inversant le laplacien, on trouve la relation équivalente suivante :

$$U = \mathbb{P}\Delta^{-1}(U \cdot \nabla U) - \mathbb{P}\Delta^{-1}f = \mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}(U \otimes U) - \mathbb{P}\Delta^{-1}f.$$

L'opérateur $\mathbb{P}\Delta^{-1} \operatorname{div}$ est un opérateur de convolution de noyau ∇G_2 . En utilisant la formule explicite de G_2 , on trouve la formulation équivalente suivante pour (6.1.1) :

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{x-y}{|x-y|^2} |U(y)|^2 - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)]^2 \right) dy \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log|x-y| f(y) - \frac{x-y}{|x-y|^2} (x-y) \cdot f(y) \right) dy. \quad (6.5.1)$$

Remarquons dans un premier temps que si U est homogène de degré -1 et vérifie les conditions de symétrie (6.2.3), alors la première intégrale dans le terme de droite est bien définie au sens de la valeur principale. En effet, lorsque $y \rightarrow 0$ l'intégrande est équivalente à

$$\frac{x}{|x|^4} [(x_2^2 - x_1^2)(U_1^2(y) - U_2^2(y)) - 4x_1 x_2 U_1(y) U_2(y)].$$

On voit immédiatement à partir de (6.2.3) que $U_1^2 - U_2^2$ et $U_1 U_2$ sont de moyenne nulle sur le cercle unité, donc l'intégrale est bien définie au sens de la valeur principale. On peut de même vérifier que si f est homogène de degré -3 et vérifie les relations de symétrie (6.2.3), alors la dernière intégrale de (6.5.1) est elle aussi bien définie au sens de la valeur principale.

Avant d'aller plus loin, introduisons la notation suivante. Si g est une fonction intégrable à l'infini mais avec une singularité en 0, nous définissons la valeur principale de l'intégrale de g par

$$\text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} g(x) dx$$

pourvu que cette limite existe.

On introduit maintenant les espaces homogènes à poids \dot{Y}_β comme dans la définition 6.2.2 en remplaçant $1 + |x|$ par $|x|$:

$$\dot{Y}_\beta = \{U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ qui vérifie (6.2.3) et tel que } \|U\|_{\dot{Y}_\beta} = \sup_{\mathbb{R}^2} |x|^\beta |U(x)| < \infty\}.$$

On définit la forme bilinéaire

$$\tilde{B}(U, V)(x) = -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \right) dy \quad (6.5.2)$$

et le champ de vecteurs

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log |x-y| f(y) - \frac{x-y}{|x-y|^2} (x-y) \cdot f(y) \right) dy. \quad (6.5.3)$$

Nous avons défini les intégrales au sens de la valeur principale car nous utiliserons ces quantités pour des U, V et f ayant des singularités. Évidemment, si U, V et f n'ont pas de singularités alors les intégrales convergent au sens usuel.

D'après la relation (6.5.1), les équations de Navier-Stokes stationnaires peuvent s'écrire sous la forme équivalente

$$U = \tilde{B}(U, U) + \tilde{F}. \quad (6.5.4)$$

Montrons maintenant une estimation sur \tilde{F} .

Lemme 6.5.1. *Si $f \in \dot{Y}_\alpha$ avec $2 < \alpha < 4$ alors \tilde{F} est bien défini et l'application $f \mapsto \tilde{F}$ est continue de \dot{Y}_α dans $\dot{Y}_{\alpha-2}$. De plus, si f est homogène de degré $-\alpha$ alors \tilde{F} est homogène de degré $2 - \alpha$.*

Preuve. Soit $f \in \dot{Y}_\alpha$. Montrons d'abord que \tilde{F} est bien défini, c'est-à-dire que l'intégrale définissant \tilde{F} dans (6.5.3) converge au sens de la valeur principale. Pour cela, nous devons développer l'intégrande en 0 jusqu'à ce qu'on trouve un reste intégrable en 0. La formule de Taylor appliquée aux fonctions $\log |x|$ et $\frac{x \otimes x}{|x|^2}$ nous donne

$$\log |x-y| = \log |x| - \frac{x \cdot y}{|x|^2} + O(|y|^2)$$

et

$$\frac{(x-y) \otimes (x-y)}{|x-y|^2} = \frac{x \otimes x}{|x|^2} - \frac{x \otimes y}{|x|^2} - \frac{y \otimes x}{|x|^2} + 2x \cdot y \frac{x \otimes x}{|x|^4} + O(|y|^2)$$

quand $y \rightarrow 0$. D'où

$$\begin{aligned} \log |x-y| f(y) - \frac{x-y}{|x-y|^2} (x-y) \cdot f(y) &= \log |x| f(y) - \frac{x \cdot y}{|x|^2} f(y) - \frac{x}{|x|^2} x \cdot f(y) + \frac{y}{|x|^2} y \cdot f(y) + \frac{y}{|x|^2} x \cdot f(y) \\ &\quad - 2x \cdot y \frac{x}{|x|^4} x \cdot f(y) + O(|y|^2) f(y) \\ &\equiv H(x, y) + O(|y|^2) f(y). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Soit $a \in (0, |x|)$. Montrons que l'intégrale

$$\text{pv} \int_{|y| < a} \left(\log |x - y| f(y) - \frac{x - y}{|x - y|^2} (x - y) \cdot f(y) \right) dy$$

converge au sens de la valeur principale. Nous écrivons

$$\int_{\varepsilon < |y| < a} \left(\log |x - y| f(y) - \frac{x - y}{|x - y|^2} (x - y) \cdot f(y) \right) dy = \int_{\varepsilon < |y| < a} H(x, y) dy + \int_{\varepsilon < |y| < a} O(|y|^2) f(y) dy. \quad (6.5.6)$$

Comme $f \in Y_\alpha$ nous avons que $O(|y|^2) f(y) = O(|y|^{2-\alpha})$ est intégrable en 0. Donc la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < a} O(|y|^2) f(y) dy$$

existe. Rappelons maintenant que f vérifie les relations de symétrie (6.2.3). L'imparité de f_1 par rapport à x_1 et celle de f_2 par rapport à x_2 impliquent que $\int_{\varepsilon < |y| < a} f(y) dy = 0$ donc

$$\int_{\varepsilon < |y| < a} H(x, y) dy = \int_{\varepsilon < |y| < a} \left(-\frac{x \cdot y}{|x|^2} f(y) + \frac{x}{|x|^2} y \cdot f(y) + \frac{y}{|x|^2} x \cdot f(y) - 2x \cdot y \frac{x}{|x|^4} x \cdot f(y) \right) dy.$$

Un calcul immédiat nous montre que la première composante de l'intégrande à droite est égale à

$$\frac{x_2(x_2^2 - x_1^2)}{|x|^4} y_1 f_2(y) - \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{|x|^4} y_2 f_1(y) + \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4} (y_2 f_2(y) - y_1 f_1(y)).$$

On a que $y_1 f_2(y)$ et $y_2 f_1(y)$ sont impaires par rapport à y_1 (et y_2) et $y_2 f_2(y) - y_1 f_1(y)$ est impaire par rapport à la permutation de y_1 et y_2 , donc

$$\int_{\varepsilon < |y| < a} H_1(x, y) dy = 0.$$

On peut montrer de même que

$$\int_{\varepsilon < |y| < a} H_2(x, y) dy = 0$$

donc l'intégrale de (6.5.6) admet bien une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous avons montré que l'intégrale définissant \tilde{F} converge bien au sens de la valeur principale.

Pour estimer \tilde{F} , nous allons d'abord rendre l'intégrande dans (6.5.3) homogène. En remarquant que

$$\text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) dy = 0$$

nous pouvons écrire \tilde{F} sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log \left(\frac{|x - y|}{|x|} \right) f(y) - \frac{x - y}{|x - y|^2} (x - y) \cdot f(y) \right) dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} L(x, y) dy. \end{aligned}$$

où

$$L(x, y) = \log \left(\frac{|x - y|}{|x|} \right) f(y) - \frac{x - y}{|x - y|^2} (x - y) \cdot f(y). \quad (6.5.7)$$

On décompose maintenant l'intégrale définissant \tilde{F} en deux régions :

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} L(x, y) dy - \frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} L(x, y) dy \equiv \tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_2(x).$$

On majore \tilde{F}_1 de la manière suivante :

$$|\tilde{F}_1(x)| \leq \frac{\|f\|_{\dot{Y}_\alpha}}{4\pi} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|x - y|}{|x|} \right) \right| \right] |y|^{-\alpha} dy. \quad (6.5.8)$$

L'intégrale

$$I(x) = \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|x - y|}{|x|} \right) \right| \right] |y|^{-\alpha} dy$$

définit une fonction de x qui est radiale et homogène de degré $2 - \alpha$. En effet, si A est une matrice orthogonale on a

$$\begin{aligned} I(Ax) &= \int_{|y| \geq \frac{|Ax|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|Ax - y|}{|Ax|} \right) \right| \right] |y|^{-\alpha} dy \\ &= \int_{|Az| \geq \frac{|Ax|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|Ax - Az|}{|Ax|} \right) \right| \right] |Az|^{-\alpha} dz \\ &= \int_{|z| \geq \frac{|x|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|x - z|}{|x|} \right) \right| \right] |z|^{-\alpha} dz \\ &= I(x) \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variables $y = Az$. Puis, si $\lambda > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} I(\lambda x) &= \int_{|y| \geq \frac{|\lambda x|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|\lambda x - y|}{|\lambda x|} \right) \right| \right] |y|^{-\alpha} dy \\ &= \int_{|z| \geq \frac{|x|}{2}} \left[1 + \left| \log \left(\frac{|x - z|}{|x|} \right) \right| \right] |\lambda z|^{-\alpha} \lambda^2 dz \\ &= \lambda^{2-\alpha} I(x). \end{aligned}$$

Il existe donc une constante C_0 telle que $I(x) = C_0 |x|^{2-\alpha}$, et la relation (6.5.8) implique l'inégalité

$$\|\tilde{F}_1\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \leq \frac{C_0}{4\pi} \|f\|_{\dot{Y}_\alpha}.$$

Afin d'estimer le terme \tilde{F}_2 , nous rappelons la relation (6.5.5) pour écrire

$$L(x, y) = -\frac{x \cdot y}{|x|^2} f(y) - \frac{x}{|x|^2} x \cdot f(y) + \frac{x}{|x|^2} y \cdot f(y) + \frac{y}{|x|^2} x \cdot f(y) - 2x \cdot y \frac{x}{|x|^4} x \cdot f(y) + O(|y|^2) f(y).$$

Or, le terme $O(|y|^2)$ qui apparaît ci-dessus provient de l'application de la formule de Taylor aux fonctions $\log |x|$ et $\frac{x \otimes x}{|x|^2}$. Il se majore donc par $|y|^2$ multiplié par la norme uniforme sur

le segment $[x, x - y]$ des dérivées secondes de ces deux fonctions. Ces dérivées secondes sont homogènes de degré -2 et si $|y| \leq |x|/2$ tout point $\xi \in [x, x - y]$ vérifie $|x|/2 \leq |\xi| \leq 3|x|/2$. On peut donc majorer ces dérivées secondes par $C/|x|^2$ et on conclut que le terme $O(|y|^2)f(y)$ se majore par

$$|O(|y|^2)f(y)| \leq C \frac{|y|^2}{|x|^2} |f(y)| \leq C \frac{|y|^{2-\alpha}}{|x|^2} \|f\|_{\dot{Y}_\alpha}.$$

Nous avons de plus montré que

$$\begin{aligned} \text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \left[-\frac{x \cdot y}{|x|^2} f(y) + \frac{x}{|x|^2} x \cdot f(y) - \frac{x}{|x|^2} y \cdot f(y) - \frac{y}{|x|^2} x \cdot f(y) + 2x \cdot y \frac{x}{|x|^4} x \cdot f(y) \right] dy \\ = \text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} (H(x, y) - \log |x| f(y)) dy \\ = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_2(x)| &= \frac{1}{4\pi} \left| \text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} L(x, y) dy \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} O(|y|^2) f(y) dy \right| \\ &\leq C \frac{\|f\|_{\dot{Y}_\alpha}}{|x|^2} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |y|^{2-\alpha} dy \\ &\leq C \|f\|_{\dot{Y}_\alpha} |x|^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\|\tilde{F}_2\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \leq \frac{C_0}{4\pi} \|f\|_{\dot{Y}_\alpha}.$$

et ceci conclut la preuve de la continuité de l'application $f \mapsto \tilde{F}$ de \dot{Y}_α dans $\dot{Y}_{\alpha-2}$.

Enfin, si f est homogène de degré $-\alpha$ alors on voit immédiatement que la fonction $L(x, y)$ définie dans (6.5.7) vérifie $L(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-\alpha} L(x, y)$. Donc

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\lambda x) &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} L(\lambda x, y) dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} L(\lambda x, \lambda z) \lambda^2 dz \\ &= -\lambda^{2-\alpha} \frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} L(x, z) dz \\ &= \lambda^{2-\alpha} \tilde{F}(x) \end{aligned}$$

ce qui veut dire que \tilde{F} est homogène de degré $2 - \alpha$. Ceci conclut la preuve du lemme. \square

Le lemme suivant nous donne une estimation pour la forme bilinéaire \tilde{B} .

Lemme 6.5.2. *Soient α_1, α_2 deux réels tels que $1 < \alpha_1 + \alpha_2 < 3$. Si $U \in \dot{Y}_{\alpha_1}$ et $V \in \dot{Y}_{\alpha_2}$ alors $\tilde{B}(U, V)$ est bien défini et appartient à $\dot{Y}_{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}$. De plus, nous avons l'inégalité*

$$\|\tilde{B}(U, V)\|_{\dot{Y}_{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}} \leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}}.$$

Preuve. Montrons d'abord que \tilde{B} est bien défini, c'est-à-dire que l'intégrale qui définit \tilde{B} converge bien au sens de la valeur principale. On remarque d'abord que l'intégrande se majore par $\frac{C}{|x-y||y|^{\alpha_1+\alpha_2}}$ qui est une fonction intégrable en x et à l'infini. Seule 0 est une possible singularité non intégrable. Quand $y \rightarrow 0$, l'intégrande de (6.5.2) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \\ &= \frac{x}{|x|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x}{|x|^4} (x \cdot U(y))(x \cdot V(y)) + O(|y|^{1-\alpha_1-\alpha_2}) \\ &= \frac{x(x_2^2 - x_1^2)}{|x|^4} [U_1(y)V_1(y) - U_2(y)V_2(y)] - 2 \frac{xx_1x_2}{|x|^4} [U_1(y)V_2(y) + U_2(y)V_1(y)] \\ & \quad + O(|y|^{1-\alpha_1-\alpha_2}). \end{aligned}$$

Comme $\alpha_1 + \alpha_2 < 3$, le reste $O(|y|^{1-\alpha_1-\alpha_2})$ est intégrable en 0. Les conditions de symétrie (6.2.3) vérifiées par U et V impliquent que $U_1(y)V_2(y) + U_2(y)V_1(y)$ est impair par rapport à y_1 et y_2 et que $U_1(y)V_1(y) - U_2(y)V_2(y)$ est impair par rapport à la permutation de y_1 et y_2 . L'intégrale en y du terme

$$\frac{x(x_2^2 - x_1^2)}{|x|^4} [U_1(y)V_1(y) - U_2(y)V_2(y)] - 2 \frac{xx_1x_2}{|x|^4} [U_1(y)V_2(y) + U_2(y)V_1(y)]$$

est donc nulle sur toute couronne circulaire centrée en 0 et cela suffit pour conclure à l'existence de la valeur principale de l'intégrale définissant $\tilde{B}(U, V)$.

On estime maintenant $\tilde{B}(U, V)$ en décomposant

$$\begin{aligned} \tilde{B}(U, V) &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \right) dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \left(\frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \right) dy \\ & \quad - \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \left(\frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \right) dy \\ &\equiv \tilde{B}_1(U, V) + \tilde{B}_2(U, V). \end{aligned}$$

Le terme \tilde{B}_2 se majore très facilement

$$\begin{aligned} |\tilde{B}_2(U, V)| &\leq C \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{|U(y)||V(y)|}{|x-y|} dy \\ &\leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{|y|^{-\alpha_1-\alpha_2}}{|x-y|} dy \\ &= C' \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}} |x|^{1-\alpha_1-\alpha_2} \end{aligned}$$

où on a utilisé, comme dans le lemme précédent, que l'intégrale

$$\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{|y|^{-\alpha_1-\alpha_2}}{|x-y|} dy$$

définit une fonction radiale et homogène de degré $1 - \alpha_1 - \alpha_2$. On a donc

$$\|\tilde{B}_2(U, V)\|_{\dot{Y}_{\alpha_1+\alpha_2-1}} \leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}}.$$

Pour estimer le terme \tilde{B}_1 , on se souvient que

$$\text{pv} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \left(\frac{x}{|x|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x}{|x|^4} (x \cdot U(y))(x \cdot V(y)) \right) = 0$$

pour déduire que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(U, V) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \left\{ \frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - \frac{x}{|x|^2} U(y) \cdot V(y) \right. \\ & \left. - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] + 2 \frac{x}{|x|^4} (x \cdot U(y))(x \cdot V(y)) \right\} dy. \end{aligned}$$

Quand $|y| \leq \frac{|x|}{2}$ nous avons que $x-y$ est de même taille que x : $|x|/2 \leq |x-y| \leq 3|x|/2$. Il est facile de voir que, pour $|y| \leq \frac{|x|}{2}$, nous avons la majoration suivante pour l'intégrande ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x-y}{|x-y|^2} U(y) \cdot V(y) - \frac{x}{|x|^2} U(y) \cdot V(y) - 2 \frac{x-y}{|x-y|^4} [(x-y) \cdot U(y)] [(x-y) \cdot V(y)] \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{x}{|x|^4} (x \cdot U(y))(x \cdot V(y)) \right| \\ & \leq C \frac{|y|}{|x|^2} |U(y)| |V(y)| \\ & \leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}} \frac{|y|^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{|x|^2}. \end{aligned}$$

On peut donc majorer \tilde{B}_1 de la façon suivante

$$|\tilde{B}_1(U, V)| \leq C \frac{\|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}}}{|x|^2} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |y|^{1-\alpha_1-\alpha_2} dy \leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}} |x|^{1-\alpha_1-\alpha_2}.$$

Par conséquent

$$\|\tilde{B}_1(U, V)\|_{\dot{Y}_{\alpha_1+\alpha_2-1}} \leq C \|U\|_{\dot{Y}_{\alpha_1}} \|V\|_{\dot{Y}_{\alpha_2}}$$

et ceci conclut la preuve du lemme. \square

Nous pouvons maintenant expliciter le comportement asymptotique des solutions de (6.5.4) selon le schéma habituel. On montre d'abord l'existence et l'unicité des solutions homogènes.

Théorème 6.5.3. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si f_0 est un champ de vecteurs homogène de degré -3 qui vérifie $\|f_0\|_{\dot{Y}_3} \leq \varepsilon$, alors il existe exactement une solution $U_0 \in \dot{Y}_1$ homogène de degré -1 de l'équation $U_0 = \tilde{B}(U_0, U_0) + \tilde{F}_0$ telle que $\|U_0\|_{\dot{Y}_1} \leq C\varepsilon_0$.*

Dans ce théorème, \tilde{F}_0 est donné par (6.5.3) en remplaçant f par f_0 .

Preuve. Le lemme 6.5.2 montre que l'opérateur \tilde{B} est bicontinu de $\dot{Y}_1 \times \dot{Y}_1$ à valeurs dans \dot{Y}_1 . Le lemme 6.5.1 implique que \tilde{F}_0 est homogène de degré -1 et de plus $\|\tilde{F}_0\|_{\dot{Y}_1} \leq C\|f_0\|_{\dot{Y}_3}$. L'existence et l'unicité d'une solution petite $U_0 \in \dot{Y}_1$ découle du lemme de point fixe 2.1.1. L'homogénéité de U_0 est une conséquence immédiate de l'homogénéité de \tilde{F}_0 , de l'homogénéité de \tilde{B} et de l'unicité des solutions. \square

Le dernier résultat de ce travail montre que si f est majorée par $C/(1+|x|)^3$, vérifie les conditions de symétrie (6.2.3) et admet un comportement asymptotique à l'infini homogène de degré -3, alors la solution U admet aussi un comportement asymptotique à l'infini homogène de degré -1. Introduisons une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; [0, 1])$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ quand $|x| \leq 1/2$ et $\varphi(x) = 1$ quand $|x| \geq 1$.

Théorème 6.5.4. *Soit $f \in Y_3$ un champ de vecteurs qui admet une décomposition de la forme*

$$f = \varphi f_0 + f_1$$

où f_0 est homogène de degré -3 et $f_1 \in Y_\alpha$ pour un certain $\alpha \in (3, 4)$. Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ telle que si $\|f_0\|_{\dot{Y}_3} + \|f_1\|_{Y_\alpha} \leq \varepsilon$, alors l'équation (6.5.4) admet une unique solution U petite dans Y_1 . De plus, U admet le comportement asymptotique suivant :

$$U(x) = U_0(x) + O(|x|^{2-\alpha}) \quad (6.5.9)$$

quand $|x| \rightarrow \infty$, où U_0 est l'unique solution homogène associée à f_0 donnée par le théorème 6.5.3.

Preuve. Les lemmes 6.5.1 et 6.5.2 s'étendent sans difficulté au cas des espaces inhomogènes Y_α comme nous l'avons fait à plusieurs reprises dans des situations similaires. Comme f est petite dans Y_3 , l'existence et l'unicité d'une solution petite dans Y_1 se montre comme dans le théorème 6.5.3.

Montrons maintenant le comportement asymptotique énoncé dans (6.5.9). Nous avons que $\|U\|_{\dot{Y}_1} \leq \|U\|_{Y_1} \leq C\varepsilon$ et $\|U_0\|_{\dot{Y}_1} \leq C\varepsilon$. Le champ de vecteurs $V = U - U_0$ vérifie l'équation

$$V = \tilde{B}(V, U) + \tilde{B}(U_0, V) + \tilde{F} - \tilde{F}_0$$

et il est limite de la suite récurrente

$$V_0 = \tilde{F} - \tilde{F}_0, \quad V_{k+1} = \tilde{B}(V_k, U) + \tilde{B}(U_0, V_k) + \tilde{F} - \tilde{F}_0.$$

Le champ de vecteurs $\tilde{F} - \tilde{F}_0$ est associé à $f - f_0 = (\varphi - 1)f_0 + f_1$ qui est petit dans \dot{Y}_α . Par le lemme 6.5.1, il existe une constante C_1 telle que

$$\|\tilde{F} - \tilde{F}_0\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \leq C_1\varepsilon. \quad (6.5.10)$$

Montrons par récurrence sur k l'inégalité suivante :

$$\|V_k\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \leq 2C_1\varepsilon. \quad (6.5.11)$$

La relation (6.5.10) nous montre cette inégalité pour $k = 0$. Supposons-la vraie pour k et montrons-la pour $k + 1$. Grâce au lemme 6.5.1 nous pouvons estimer

$$\begin{aligned} \|V_{k+1}\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} &\leq \|\tilde{B}(V_k, U)\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} + \|\tilde{B}(U_0, V_k)\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} + \|\tilde{F} - \tilde{F}_0\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \\ &\leq C\|V_k\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}}(\|U\|_{\dot{Y}_1} + \|U_0\|_{\dot{Y}_1}) + \|\tilde{F} - \tilde{F}_0\|_{\dot{Y}_{\alpha-2}} \\ &\leq CC_1\varepsilon^2 + C_1\varepsilon \\ &\leq 2C_1\varepsilon \end{aligned}$$

si $\varepsilon \leq 1/C$.

La relation (6.5.11) est donc vérifiée pour tout k . Par passage à la limite $k \rightarrow \infty$, elle est vérifiée pour V . En particulier, $V \in \dot{Y}_{\alpha-2}$ ce qui implique le comportement asymptotique (6.5.9). Le théorème 6.5.4 est complètement démontré. \square

Bibliographie

- [1] C. Amick. On the asymptotic form of Navier-Stokes flow past a body in the plane. *Journal of Differential Equations*, 91(1) :149–167, 1991.
- [2] C. J. Amick. On Leray’s problem of steady Navier-Stokes flow past a body in the plane. *Acta Mathematica*, 161(1) :71–130, 1988.
- [3] K. I. Babenko. The stationary solutions of the problem of the flow around a body by a viscous incompressible fluid. *Mat. Sb. (N.S.)*, 91(133) :3–26, 143, 1973.
- [4] C. Bjorland, L. Brandolese, D. Iftimie and M. E. Schonbek. L^p -Solutions of the Steady-State Navier-Stokes Equations with Rough External Forces. *Communications in Partial Differential Equations*, 36(2) :216–246, 2011.
- [5] M. E. Bogovskii. Solution of the first boundary value problem for an equation of continuity of an incompressible medium. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 248(5) :1037–1040, 1979.
- [6] M. Cannone. *Ondelettes, Paraproducts et Navier-Stokes*. Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1995.
- [7] M. Cannone and G. Karch. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system? *Journal of Differential Equations*, 197(2) :247–274, 2004.
- [8] H. Chang. The steady Navier-Stokes problem for low Reynolds number viscous jets into a half space. *Lecture Notes in Mathematics, 1992, Volume 1530/1992, 85-96, DOI : 10.1007/BFb0090335*, 1992.
- [9] A. B. De Saint Venant. Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté le 14 avril 1834. *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris.*, 17 :1240–1243, 1843.
- [10] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *Journal of the American Mathematical Society*, 4(3) :553–586, 1991.
- [11] P. Deuring and G. Galdi. On the asymptotic behavior of physically reasonable solutions to the stationary Navier–Stokes system in three-dimensional exterior domains with zero velocity at infinity. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2(4) :353–364, 2000.
- [12] R. Farwig, G. P. Galdi and M. Kyed. Asymptotic structure of a Leray solution to the Navier-Stokes flow around a rotating body. *Pacific Journal of Mathematics*, 253(2) :367–382, 2011.
- [13] R. Farwig and T. Hishida. Leading term at infinity of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle. *Math. Nachr.*, 284(16) :2065–2077, 2011.
- [14] R. Finn and D. R. Smith. On the stationary solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25(1) :26–39, 1967.

- [15] G. P. Galdi. On the asymptotic structure of D -solutions to steady Navier-Stokes equations in exterior domains. In *Mathematical problems relating to the Navier-Stokes equation*, volume 11 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, pages 81–104. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [16] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2011.
- [17] G. P. Galdi and H. Sohr. On the asymptotic structure of plane steady flow of a viscous fluid in exterior domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 131(2) :101–119, 1995.
- [18] D. Gilbarg and H. F. Weinberger. Asymptotic properties of steady plane solutions of the Navier-Stokes equations with bounded Dirichlet integral. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 5(2) :381–404, 1978.
- [19] L. Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2009.
- [20] J. Guillod and P. Wittwer. Generalized scale-invariant solutions to the two-dimensional stationary Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(1) :955–968, 2015.
- [21] J. Guillod and P. Wittwer. On the stationary Navier-Stokes equations in the half-plane. *ArXiv :1506.05657*, 2015.
- [22] J. Guillod and P. Wittwer. Optimal asymptotic behavior of the vorticity of a viscous flow past a two-dimensional body. *ArXiv :1506.09029*, 2015.
- [23] G. Hamel. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25 :34–60, 1916.
- [24] M. Hillairet. Chute stationnaire d’un solide dans un fluide visqueux incompressible au-dessus d’un plan incliné. Partie 2. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6*, 16(4) :867–903, 2007.
- [25] M. Hillairet and D. Serre. Chute stationnaire d’un solide dans un fluide visqueux incompressible le long d’un plan incliné. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 20(5) :779–803, 2003.
- [26] M. Hillairet and P. Wittwer. On the vorticity of the Oseen problem in a half plane. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 237(10-12) :1388–1421, 2008.
- [27] M. Hillairet and P. Wittwer. Existence of stationary solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions in the presence of a wall. *Journal of Evolution Equations*, 9(4) :675–706, 2009.
- [28] M. Hillairet and P. Wittwer. Asymptotic description of solutions of the planar exterior Navier–Stokes problem in a half space. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 205(2) :553–584, 2012.
- [29] M. Hillairet and P. Wittwer. On the existence of solutions to the planar exterior Navier Stokes system. *Journal of Differential Equations*, 255(10) :2996–3019, 2013.
- [30] E. Hopf. Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik. *Mathematische Annalen*, 117 :764–775, 1941.

- [31] L. Hormander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I : Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 2nd revised edition edition, 2003.
- [32] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho and H. J. Nussenzveig Lopes. Large time behavior for vortex evolution in the half-plane. *Communications in Mathematical Physics*, 237(3) :441–469, 2003.
- [33] G. B. Jeffery. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid. *Philosophical Magazine Series*, 29 :455–465, 1915.
- [34] K. Kang, H. Miura and T.-P. Tsai. Asymptotics of small exterior Navier-Stokes flows with non-decaying boundary data. *Comm. Partial Differential Equations*, 37(10) :1717–1753, 2012.
- [35] M. V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo. Solution of Leray’s problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains. *Ann. of Math. (2)*, 181(2) :769–807, 2015.
- [36] A. Korolev and V. Šverák. On the large-distance asymptotics of steady state solutions of the Navier-Stokes equations in 3D exterior domains. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 28(2) :303–313, 2011.
- [37] O. A. Ladyzhenskaya. Investigation of the Navier-Stokes equation for a stationary flow of an incompressible fluid. *Uspehi Mat. Nauk.*, pages 75–97, 1959.
- [38] L. Landau. A new exact solution of Navier-Stokes equations. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 43 :286–288, 1944.
- [39] J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’Hydrodynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 12(1) :1–82, 1933.
- [40] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [41] V. Maz’ja, B. Plamenevskii and L. Stupjalis. The three-dimensional problem of the steady-state motion of a fluid with a free surface. *Differentsial’nye Uravneniya i Primenenie.—Trudy Sem. Protsessy Optimal. Upravleniya I Sektsiya*, (23) :157, 1979.
- [42] C. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France*, 6 :389–440, 1823.
- [43] S. A. Nazarov and K. Pileckas. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimensional exterior domain. *Kyoto Journal of Mathematics*, 40(3) :475–492, 2000.
- [44] K. Pileckas and R. Russo. On the existence of vanishing at infinity symmetric solutions to the plane stationary exterior Navier-Stokes problem. *Mathematische Annalen*, 352(3) :643–658, 2012.
- [45] S. D. Poisson. Mémoire sur les équations générales de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides. *Journal de l’École Polytechnique*, pages 1–174, 1831.
- [46] A. Russo. On the asymptotic behavior of D -solutions of the plane steady-state Navier-Stokes equations. *Pacific Journal of Mathematics*, 246(1) :253–256, 2010.
- [47] A. Russo. On the existence of D -solutions of the steady-state Navier-Stokes equations in plane exterior domains. *ArXiv :1101.1243*, 2011.

- [48] D. Serre. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 4(1) :99–110, 1987.
- [49] G. G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, pages 287–319, 1845.
- [50] V. Šverák. On Landau's solutions of the Navier–Stokes equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 179(1) :208–228, 2011.
- [51] V. Šverák and T.-P. Tsai. On the spatial decay of 3-D steady-state Navier-Stokes flows. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(11-12) :2107–2117, 2000.
- [52] G. Tian and Z. Xin. One-point singular solutions to the Navier-Stokes equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 11(1) :135–145, 1998.
- [53] H. F. Weinberger. Variational properties of steady fall in Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 52(2) :321–344, 1972.
- [54] M. Yamazaki. The stationary Navier-Stokes equation on the whole plane with external force with antisymmetry. *Annali dell'Università di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche*, 55(2) :407–423, 2009.

Asymptotic behavior of solutions of the steady incompressible Navier-Stokes equations

Abstract : This thesis deals with the steady incompressible Navier-Stokes equations, more precisely with the asymptotic behavior of its solutions when $|x| \rightarrow \infty$. We consider several types of unbounded domains and we assume that the velocity vanishes at infinity.

We first look at the three dimensional case, for which we know that if the forcing term decays fast enough at infinity, the asymptotic behavior of the solutions is given by the Landau solutions that are homogeneous of degree -1. We generalize this result to small forcing terms whose asymptotic behavior at infinity is homogeneous of degree -3. To obtain solutions with an asymptotic behavior at infinity homogeneous of degree -1 we find a necessary and sufficient condition on the forcing : the homogeneous part of the forcing term must have zero mean over the unit sphere. Finally, we generalize this result to the case of an exterior domain.

In the case of a half space, we prove that if the forcing term decays sufficiently fast at infinity, then we obtain solutions that decay as $1/|x|^2$ at infinity and we find an explicit formula for the dominant term in the expansion at infinity of the solution. We can also prove the same type of result as in the full space with forcing terms decaying like $1/|x|^3$ but the condition of zero mean over the sphere is not required any more.

The case of the dimension two is much more difficult. We study first homogeneous solutions and find a family indexed on two real parameters. Imposing the restriction of having zero flux through the unit circle, we get a family of solutions with only one parameter.

Finally we deal with non homogeneous solutions, but to do this we need to assume some symmetry conditions on the data. If the forcing term is small and decays sufficiently fast at infinity, we find solutions that decay like $1/|x|^3$ at infinity and we also obtain an explicit formula for the main term in their asymptotic expansion. We generalize this result to the case of an exterior domain and we also obtain, again under symmetry assumptions, an analogous result to the three dimensional case for forcing terms that decay like $1/|x|^3$ at infinity.

Comportement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles

Résumé :

Cette thèse traite de l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles et, plus précisément, le comportement quand $x \rightarrow \infty$ de ses solutions. On étudie la situation dans différents types de domaines non bornés en supposant une condition de nullité à l'infini.

On regarde d'abord la dimension 3, dans lequel on sait que si le terme de force décroît très vite à l'infini, le comportement asymptotique est donné par les solutions de Landau, qui sont homogènes de degré -1. On généralise donc ce résultat à des termes de force petits dont le comportement asymptotique est donné par un terme avec l'homogénéité correspondante, c'est-à-dire de degré -3. Pour cela, on trouve une condition nécessaire et suffisante qui est que la partie homogène du terme de force soit de moyenne nulle sur la sphère. Pour finir, on généralise ce résultat au cas d'un domaine extérieur.

Dans le cas d'un demi-espace, on va plus loin en montrant que si le terme de force décroît assez à l'infini on obtient des solutions décroissant comme $1/|x|^2$ à l'infini et on trouve une expression explicite du terme dominant. On peut aussi montrer le même type de résultat que dans l'espace entier avec un terme de force en $1/|x|^3$ mais la condition de moyenne nulle sur la sphère disparaît.

Dans l'étude de la dimension 2 dans le plan tout entier, on se rend compte que les choses sont plus compliquées. D'abord, pour les solutions homogènes, on arrive à trouver les conditions pour que, si le terme de force est suffisamment petit, on obtienne l'existence de solution qui forment alors une famille à deux paramètres. Mais en leur imposant la restriction d'avoir un flux nul sur le cercle unité, on obtient une famille avec un paramètre seulement.

Enfin on étudie les solutions non homogènes, mais pour cela on doit supposer certaines conditions de symétrie sur les données. On trouve alors, pour des termes de force décroissant très vite à l'infini, des solutions en $1/|x|^3$ et on obtient une formule explicite pour le terme principal de leur développement asymptotique. Ce résultat se généralise aussi au cas d'un domaine extérieur et pour finir, dans ce cadre symétrique, on trouve un résultat analogue au cas de la dimension 3 pour des termes de force qui décroissent en $1/|x|^3$ à l'infini.

Mots clés : Navier-Stokes stationnaire ; Équations aux dérivées partielles ; Comportement asymptotique ; Solutions homogènes.

Asymptotic behavior of solutions of the steady incompressible Navier-Stokes equations

Keywords : Steady Navier-Stokes ; Partial Differential Equations ; Asymptotic behavior ; Homogeneous solutions.

