HAL
open science

Analyse spectrale des guides d'ondes "twistés"

Hiba Hammedi

To cite this version:

Hiba Hammedi. Analyse spectrale des guides d'ondes "twistés". Théorie spectrale [math.SP]. Université de Toulon, 2016. Français. NNT : 2016TOUL0001 . tel-01336798

HAL Id: tel-01336798

https://theses.hal.science/tel-01336798v1

Submitted on 24 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Toulon

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Par

Hiba HAMMEDI

Dirigée par : **Philippe BRIET**

soutenue le : 03 mai 2016

===== ◇◇◇◇ ◇◇◇◇ ◇◇◇◇ ======

Sujet :

Analyse spectrale des guides d'onde « twistés »

===== ◇◇◇◇ ◇◇◇◇ ◇◇◇◇ ======

JURY :

M. Barbaroux Jean-Marie	Professeur des Universités, Université de Toulon
M. Briet Philippe	Professeur des Universités, Université de Toulon
M. Brummelhuis Raymond	Professeur des universités, Université de Reims-Champagne Ardennes
M. Dimassi Mouez	Professeur des universités, Université de Bordeaux
M. Najar Hatem	Professeur des universités, Université de Monastir
M. Krejcirik David	Professeur des universités, Université de Rez

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude envers tous ceux qui, par leurs conseils ou leur amitié, m'ont apporté leur soutien. Je tiens en particulier à adresser mes plus vifs et sincères remerciements :

À **M. BRUMMELHUIS Raymond**, professeur à l'Université de Reims et **M. DIMASSI Mouez**, professeur à l'Université de Bordeaux pour l'honneur qu'il m'ont fait de rapporter mon travail. Je suis très reconnaissante et je les remercie pour leur grande patience à la lecture de ma thèse ainsi que pour les remarques pertinentes qu'ils ont formulées.

À **M. KREJCIRIK David**, professeur à l'institut de physique nucléaire, Académie des sciences Rez, pour sa confiance, c'était un plaisir de travailler avec lui.

À **M. NAJAR Hatem**, professeur à l'université de Monastir et **M. BARBAROUX Jean-Marie**, professeur à l'Université de Toulon pour leurs extrême gentillesse d'accepter de faire partie du jury de ma thèse.

Je tiens à remercier professeur **BRIET Philippe**, directeur de ma thèse, pour sa disponibilité constante, ses conseils sa gentillesse et pour son encouragement incessant. Je tiens aussi à lui remercier pour la confiance dont il a fait preuve tout au long de ces trois ans. C'était un plaisir de travailler avec lui.

Ainsi je présente mes gratitudes à **M. MERADJI Sofiane**, ingénieur de recherche en informatique et calcul scientifique à l'Université de Toulon pour son aide et ses conseils pour réaliser une partie numérique de ma thèse.

Je voudrais aussi témoigner de mes profondes reconnaissances envers le Centre de Physique Théorique et l'Université de Toulon pour l'accueil et de m'avoir permis de réaliser mes travaux de recherche dans les meilleurs conditions.

Au final, je remercie toutes les personnes qui m'ont encouragée ou aidée

dans la réalisation de ce travail et je remercie aussi chaleureusement tous ceux qui ont contribué à ma formation.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère Najet et mon très cher père Hachemi pour leur soutien, amour et leurs conseils que je trouve toujours très précieux. Que dieu les garde !

A mon cher frère Anass et mes chères sœurs Ines, Ahlem, Ikram pour leur encouragement, leur amour et leur soutien en leur souhaitant tout le bonheur du monde. Que dieu les protège !

Mes chères amies Aïda FEDDAOUI et Zaynab GUERRAOU. Je suis très reconnaissante pour leur aide et leur encouragement pour continuer le travail pendant les moments difficiles. Je suis heureuse de les rencontrer, Je les souhaite plein de bonheur et beaucoup de succès.

"Qu'ils trouvent tous dans mon travail, un témoignage de mon profond respect, de ma sincère admiration et de ma vive gratitude pour leur amour et pour leur soutien de toujours."

Table des matières

I Introduction **9**

1 Motivations **10**

2 Géométries **15**

2.1 Section transversale 17

2.2 Courbe de référence 18

2.3 Repère mobile général 21

2.4 Construction du tube déformé 22

3 Conditions aux bords **25**

3.1 Conditions aux bords de type Dirichlet 25

3.2 Conditions aux bords de type Neumann 26

3.3 Perturbation des conditions aux bords et conditions mixtes . . 27

4 Description des résultats connus **29**

4.1 Perturbations géométriques 30

4.2 Conditions aux bords mixtes 35

5 Le présent modèle **37**

5.1 Changement de variables 39

5.2 Le Hamiltonien 41

6 Résumé de la thèse et nouveaux résultats **45**

6.1 Résultats du premier modèle 45

6.2 Résultats du deuxième modèle 47

6.2.1 Stabilité du spectre essentiel 47

6.2.2 Existence des états liés 48

6.2.3 Absence des états liés 49

7 Appendice **51**

7.1 Quelques éléments de la théorie spectrale 51

7.2 Spectre des opérateurs auto-adjoints 55

7.3 Principe de min-max 56

7.4 Critère de Weyl 57

7.5 Extension de Friedrichs 58

7.6 L'inégalité de Hardy 58

II Torsion répulsive **60**

8 Conditions nécessaires et résultat principal **61**

9 Des arguments heuristiques **66**

9.1 Validité pour le cas des tubes fins 66

9.2 Argument géométrique 72

9.3 Simulations numériques 73

10 Une inégalité de Hardy pour une torsion répulsive **76**

10.1 Décomposition 76

10.2 Positivité pour une torsion périodique 77

10.3 Positivité pour une torsion répulsive 79

10.4 Une inégalité de Hardy locale 80

10.5 Une estimation brute 81

10.6 Étude du problème transverse 82
10.7 Positivité uniforme dans la section transverse 86
10.8 Une inégalité de Hardy globale 87

11 Appendice **90**
11.1 Code source pour calculer λ_1 90
11.2 Cas d'une fonction caractéristique 93
11.3 Cas de la fonction « chapeau » 100

III Effet d'une perturbation locale des conditions aux bords **107**

12 Le tube droit **110**
12.1 Stabilité du spectre essentiel 111
12.1.1 Preuve du Théorème.12.1.1 : 112
12.2 Le spectre discret 114
12.2.1 Preuve du Théorème.12.2.1 115

13 Torsion à support compact **117**
13.1 Stabilité du spectre essentiel 118
13.1.1 Preuve du Théorème.13.1.1 : 119
13.2 Existence des états liés 122
13.2.1 Preuve du Théorème.13.2.1 123
13.3 Absence des états liés 124
13.3.1 Premier cas : $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) = \varnothing$ 126
13.3.2 Deuxième cas : $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) \neq \varnothing$ 139
13.3.3 Troisième cas $I_a(l) \subsetneqq Supp(\dot{\theta})$ 146

14 Torsion constante (périodique) **154**
14.1 Le spectre essentiel 155

14.2 Existence des états liés 157

15 Appendice **161**

15.1 Quelques rappels des résultats utilisés 161

Bibliographie **163**

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Motivations

La naissance de la mécanique quantique depuis un siècle a marqué un grand virage dans la manière dont on comprend la nature de la matière. La magie du paradigme quantique est qu'il donne une explication rigoureuse des interactions dans les structures de calibre atomique et subatomique.

Les résultats de l'expérience de Bragg (i.e. la réflexion de Bragg [1] et la diffraction du rayonnement X cf.[2]), la dualité onde-corpuscule de la lumière [2] et la radioactivité du corps noir de Gustav Kirchhoff (cf. [55]) sont des phénomènes pour lesquels la mécanique classique ne présente pas d'explications suffisantes. L'incohérence détectée entre les résultats expérimentaux obtenus et les lois de la mécanique classique représentait un véritable problème pour la Physique mais, a induit également la naissance de la mécanique quantique et la création de ses lois et principes.

Le phénomène ondulatoire est un phénomène physique existant partout

1. William Laurence Bragg (1870/1971) est un physicien australien qui a eu un prix Nobel de Physique en 1915

2. La dualité onde-corpuscule a été généralisée pour tout objet microscopique par Louis Broglie en 1924

dans la nature qui se manifeste dans des domaines variés et à différentes échelles :

- À l'échelle microscopique : il s'agit des interactions entre les particules.
- À l'échelle humaine comme dans la propagation des vibrations sonneurs.
- A l'échelle de la planète comme le cas des ondes sismiques.
- À l'échelle de l'univers : c'est le cas des ondes de gravitationnelle [3].

Dans la nature, les ondes peuvent subir une dispersion. Ceci dépend directement des milieux où elles se propagent. Cette problématique a inspiré la construction des systèmes physiques favorables pour la propagation des ondes, pouvant ainsi les préserver .

Ayant une théorie solide, la mécanique quantique réussit à expliquer la matière au niveau atomique. Elle a permis, depuis son existence, d'investir dans le développement industriel pour créer des objets de taille réduite (des micro-structures). Ceci a stimulé un progrès remarquable dans l'avancement réalisé dans la construction de ce que nous appelons : « **des guides d'onde quantiques** ».

En général, un guide d'onde, comme l'indique son nom, est un système physique qui permet de guider les vibrations (les ondes électromagnétiques, acoustiques, optiques...). Son rôle est de localiser la propagation sur une partie de l'espace.

Plusieurs études stipulent l'existence d'un lien étroit entre l'efficacité d'un guide d'onde donné et sa forme géométrique ainsi que les conditions imposées sur ses bords s'il s'agit d'un guide d'onde multidimensionnel borné au moins suivant une direction (cf. [21], [44]).

De nombreux articles sont dédiés l'étudie du phénomène ondulatoire dans les guides d'onde quantiques. Ce qui rend cette catégorie des dispositifs physiques intéressante est, d'une part, le fait qu'ils sont réalisables expérimen-

3. Observées pour la première fois le 14 septembre 2015. Albert Einstein a prédit leur existence depuis 1916.

talement (ceci est essentiellement lié à leur taille suffisamment grande) et d'autre part, le fait qu'ils sont de taille relativement petite pour pouvoir observer des effets quantiques et les étudier. Plus précisément, les guides d'onde quantiques font partie des **systèmes mésoscopiques** (cf.[19]).

Suivant les principes de base de la mécanique quantique, un système (construit des atomes, des molécules ...) est modélisé par des opérateurs linéaires de dérivées partielles appelés **des opérateurs de Schrödinger** (cf.[45]) :

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \quad sur \quad L^2(\Omega), \tag{1.1}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est le guide d'onde quantique étudié, Δ désigne l'opérateur linéaire aux dérivées partielles de second ordre appelé :

$$opérateur\ de\ Laplace \quad \Delta := \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}. \tag{1.2}$$

m désigne la masse réduite du système. $\hbar$ est connue par la constante de Planck et la fonction réelle V est appelé potentiel.

Pour des raisons de simplification, dans les études on suppose souvent que $\frac{\hbar}{2m} = 1$. Suivant ce choix, si le potentiel V est nul, l'évolution de l'état du guide d'onde quantique Ω dans le temps est modélisée par :

$$l'equation\ de\ Schrödinger \qquad i\partial_t\psi + \Delta\psi = 0. \tag{1.3}$$

D'autre part, la modélisation de l'évolution du transport des ondes le long du guide d'onde étudié se fait de manière classique par

$$l'equation\ d'onde \qquad \partial_t^2\psi - \Delta\psi = 0. \tag{1.4}$$

Dans le cas stationnaire (i.e. si le système ne dépend pas du temps), les équations (1.3) et (1.4) se combinent pour donner :

$$l'equation\ de\ Helmholtz \qquad -\Delta\psi = \lambda\psi. \tag{1.5}$$

C'est le cas d'une particule chargée se déplaçant dans un guide d'onde quantique mésoscopique Ω qui est mathématiquement modélisé par l'opérateur de Laplace $-\Delta$ défini sur $L^2(\Omega)$. Cette formulation mathématique est établie d'une manière détaillée dans [28].

Les propriétés spectrales du Laplacien dépendent directement de la géométrie de Ω et des conditions aux bords imposées sur $\partial\Omega$ la frontière de Ω. L'équation de Helmholtz (1.5), d'un point de vue mathématique, représente un problème spectral du Laplacien où λ représente une valeur propre et ψ son vecteur propre associé. D'autre part, d'un point de vue physique λ représente l'état lié de l'énergie.

Depuis longtemps et jusqu'à présent, ces problèmes spectraux inspirent les chercheurs à développer des études mathématiques pour examiner l'effet des perturbations appliquées sur les guides d'onde. L'étude des déformations géométriques est un domaine très intéressant qui a été préalablement traité dans plusieurs articles. L'existence du spectre discret (des états liés géométriquement induits) et la stabilité du spectre essentiel sont les principales propriétés qu'on cherche généralement à étudier. les résultats des études mathématiques issues des problèmes physiques pareils ont apporté un avancement remarquable dans le développement de la construction des guides d'onde mésoscopiques.

Les perturbations géométriques des guides d'onde ont toujours constitué un volet de la recherche active. Un guide d'onde peut être déformé de plusieurs manières : par une torsion [10, 11, 23, 24, 33, 40, 41], par une courbure [19, 22, 35], ou par les deux déformations courbure et torsion simultanément [24, 35].

Dans [11, 23, 24, 35], il est démontré que l'existence du spectre discret dépend de la nature de la torsion appliquée (nous allons donner ultérieurement les définitions des différents types de torsion).

D'autre part le problème spectral évoquant la nature des conditions aux

bords des guides d'onde étudiés, est un domaine de recherche riche qui a fait l'objet de plusieurs travaux (cf.[4] et [49]).

Nous allons consacrer tout un chapitre (Chapitre.4) pour présenter les différents résultats relatifs à chacune de ces perturbations préalablement établies.

La présente thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de recherches menés dans cette perspective. D'une part, on s'intéresse à examiner l'effet de la perturbation locale d'un tube torsadé sur la stabilité des propriétés spectrales du Laplacien de Dirichlet (Partie.II). D'autre part, on étudie l'influence du changement des conditions aux bords sur une partie bornée de la frontière d'un tube déformé sur le spectre du Laplacien (Partie.III).

Avant de présenter nos résultats, il est naturel de commencer par donner les notions géométriques nécessaires pour introduire nos modèles et les guides d'onde qu'on va étudier, tout en rappelant, en même temps, des résultats similaires préalablement établis.

Chapitre 2

Géométries

Le problème mathématique général dans ce travail consiste à établir une étude des propriétés spectrales de l'opérateur de Laplace :

$$-\Delta_\Omega \quad sur \quad L^2(\Omega), \tag{2.1}$$

où $-\Delta_\Omega$ est l'opérateur de Laplace défini dans le guide d'onde Ω de forme tubulaire. Pour être réalisée, cette analyse spectrale nécessite la connaissance précise de la forme exacte du guide d'onde Ω ainsi que les conditions aux bords que nous allons considérer.

Ce qui nous intéresse principalement dans notre étude est de préciser l'effet des perturbations appliquées sur un guide d'onde donné Ω. Nous allons mettre l'accent sur deux types de perturbations. Le premier type est de nature géométrique : il s'agit de la déformation du guide d'onde. Ceci consiste à appliquer une torsion à un tube droit.

La deuxième façon de perturber Ω consiste à effectuer un changement au niveau des conditions aux bords considérées : il s'agit de modifier les conditions aux bords initiales sur une partie bornée de la frontière $\partial\Omega$.

La forme de Ω joue un rôle très important dans l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur Hamiltonien défini dans $L^2(\Omega)$. Plus la forme du guide d'onde perturbé est complexe plus la façon de mener l'analyse spectrale de l'opérateur Hamiltonien est compliquée. Les conditions aux bords imposées ont, également, un rôle principal pour déterminer le seuil spectral de l'opérateur Hamiltonien étudié. Nous allons consacrer tout un chapitre pour bien décrire les conditions aux bords et donner une signification détaillée de ce que nous appelons la perturbation des conditions aux bords.

Les guides d'onde qui nous intéressent sont les tubes dans $\mathbb{R}^3$ de longueur infinie suivant une direction (celle de la variable longitudinale), qui sont initialement droits mais ayant subi une perturbation géométrique du type torsion ou de torsion et courbure simultanément.

D'un point de vue mathématique, pour bien construire un tube déformé géométriquement, on doit définir :

• Un ouvert borné bidimensionnel qui représente **la section transversale** du tube déformé (du tube droit également).

• Une courbe selon laquelle le tube initialement droit sera déformé. C'est ce qu'on appelle **une courbe de référence**.

• **Un repère mobile** utilisé pour repérer chaque point se trouvant dans le tube déformé.

La construction géométrique d'un tube déformé est réalisée, en effet, via la translation d'une section transversale donnée le long d'une courbe de référence choisie.

Commençons par définir la première notion de base :

2.1 Section transversale

Soit ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^2$ et supposons que sa frontière est régulière (on précisera après la nature de cette régularité). On pose :

$$d := \sup_{t\in\omega}|t| = \sup_{(t_2,t_3)\in\omega}\sqrt{t_2^2+t_3^2}. \tag{2.2}$$

(2.2) représente la distance qui separe l'origine O et le point qui lui est le plus loin.

Définition 2.1.1. *Soit $\alpha \in (0, 2\pi)$ on note par r_α la matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$r_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

On note par ω_α l'ouvert défini par :

$$\omega_\alpha := r_\alpha\omega = \Big\{(t_2\cos\alpha - t_3\sin\alpha, t_2\sin\alpha + t_3\cos\alpha) \quad | \quad (t_2,t_3)\in\omega\Big\}. \tag{2.4}$$

On dit que l'ouvert ω est invariant par rotation par rapport à l'origine "O" si on a :

$$\forall\alpha\in(0,2\pi) \quad \omega_\alpha = \omega. \tag{2.5}$$

D'un point de vue géométrique, un ouvert qui vérifie (2.5) dans $\mathbb{R}^2$ est soit un disque centré en O soit une couronne centrée en O.

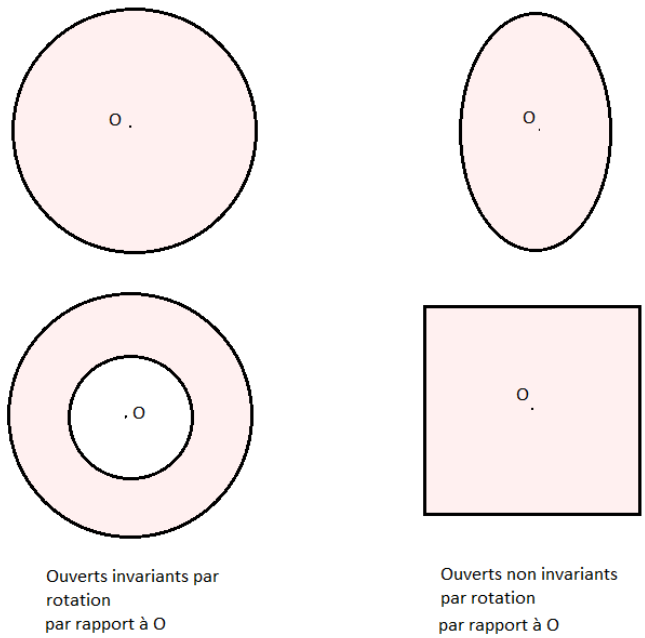


FIGURE 2.1 – Exemples de sections transverses

Dans toute la suite, à chaque fois qu'on définit une section transversale ω, on impose qu'elle soit non invariante par rotation par rapport à l'origine i.e. elle ne vérifie pas la condition (2.5).

Après ces définitions concernant la section transversale, il est temps de donner le deuxième élément nécessaire pour la définition d'un tube déformé :

2.2 Courbe de référence

Soit Γ une application de classe $C^3(\mathbb{R})$ dépendant du paramètre de longueur d'arc $''s''$:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longmapsto (\Gamma_1(s), \Gamma_2(s), \Gamma_3(s)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

La courbure, qu'on note par κ, est, par définition :

$$\kappa(s) := |\ddot{\Gamma}(s)| = (\ddot{\Gamma}_1^2(s) + \ddot{\Gamma}_2^2(s) + \ddot{\Gamma}_3^2(s))^{\frac{1}{2}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Définition 2.2.1. *On dit que* Γ *est de vitesse unitaire si elle vérifie*

$$|\dot{\Gamma}(s)| = 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Dans la suite, à chaque fois qu'on va définir une courbe de référence Γ, on suppose qu'elle soit de vitesse unitaire.

En tout point de Γ, on définit le repère de Frênet $(T,\ N,\ B)$ (cf. [54]) :

$$\begin{cases} T = (T_1,\ T_2,\ T_3) := \dot{\Gamma} = (\dot{\Gamma}_1,\ \dot{\Gamma}_2,\ \dot{\Gamma}_3) & \text{le vecteur tangent ;} \\ N = (N_1,\ N_2,\ N_3) := \dfrac{1}{\kappa}(\ddot{\Gamma}_1,\ \ddot{\Gamma}_2,\ \ddot{\Gamma}_3) & \text{le vecteur normal ;} \\ B = (B_1,\ B_2,\ B_3) := T \wedge N & \text{le vecteur binormal,} \end{cases} \tag{2.8}$$

où $T \wedge N = \dfrac{1}{\kappa}\Big(\dot{\Gamma}_2\ddot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_3\ddot{\Gamma}_2,\ \dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_3\ddot{\Gamma}_1,\ \dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_2 - \dot{\Gamma}_2\ddot{\Gamma}_1\Big)$.

Comme on a supposé que Γ est de vitesse unitaire et en utilisant l'expression de κ, il n'est pas difficile de voir que $\| T \| = \| N \| = \| B \| = 1$, où $\| \cdot \|$ est la norme Euclidienne. En réalité, $(T,\ N,\ B)$ est une base orthonormée appelée base de Frênet.

Évidemment, pour que cette définition ait un sens, il faut que $\kappa(s) \neq 0$. Si $\kappa(s) \neq 0$, $R(s) := \dfrac{1}{\kappa(s)}$ représente le rayon de courbure de la courbe Γ. Il est bien évident que plus la courbure est petite, plus le rayon de courbure est important.

Soit ω un ouvert borné connexe non invariant par rotation par rapport à l'origine (i.e. ω ne vérifie pas la condition (2.5)).

$\Omega_0 := \mathbb{R} \times \omega$ désigne le tube droit. Soit $\mathcal{L}_c$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c : \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,t) = (s, t_2, t_3) &\longmapsto \Gamma(s) + t_2 N(s) + t_3 B(s). \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\Omega_c := \mathcal{L}_c(\Omega_0)$ représente un tube déformé ayant la même section transverse que Ω_0 .

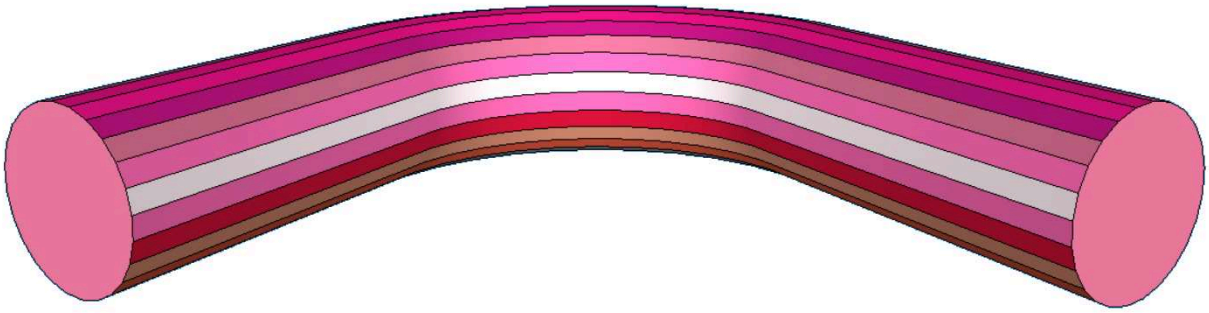


FIGURE 2.2 – Tube courbé dont la section transverse est de forme elliptique

Le repère de Frênet évolue le long de la courbe Γ suivant la formule de Frênet-Serret (cf. [34], [46, p. 254-259 et 469]) donnée par :

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

τ représente la deuxième courbure (ou torsion) de Γ et elle est par définition :

$$\tau = \frac{\left[\dot{\Gamma}, \ddot{\Gamma}, \dddot{\Gamma}\right]}{\|\dot{\Gamma} \wedge \ddot{\Gamma}\|^2}; \tag{2.11}$$

avec :
$\left[\dot{\Gamma}, \ddot{\Gamma}, \dddot{\Gamma}\right] = \left(\dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_2\dddot{\Gamma}_3 + \ddot{\Gamma}_1\dddot{\Gamma}_2\dot{\Gamma}_3 + \dddot{\Gamma}_1\dot{\Gamma}_2\ddot{\Gamma}_3\right) - \left(\dot{\Gamma}_3\ddot{\Gamma}_2\dddot{\Gamma}_1 + \ddot{\Gamma}_1\dddot{\Gamma}_3\dot{\Gamma}_2 + \dddot{\Gamma}_2\dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_3\right)$
et $\dot{\Gamma} \wedge \ddot{\Gamma} = {}^t\left(\dot{\Gamma}_2\ddot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_3\ddot{\Gamma}_2,\ \dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_3\ddot{\Gamma}_1,\ \dot{\Gamma}_1\ddot{\Gamma}_2 - \dot{\Gamma}_2\ddot{\Gamma}_1\right)$

Une question qui se pose naturellement :

comment repérer les points d'un tube courbé qui subit une autre perturbation géométrique telle qu'une torsion ?

2.3 Repère mobile général

Soit $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$. On définit la rotation dans $\mathbb{R}^3$ par l'application matricielle suivante :

$$\begin{array}{rcl} R_\theta : \mathbb{R} & \longrightarrow & SO(3) \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \end{array}$$

Le nouveau repère mobile est obtenu en appliquant une rotation d'angle θ à la normale du repère de Frênet initial.

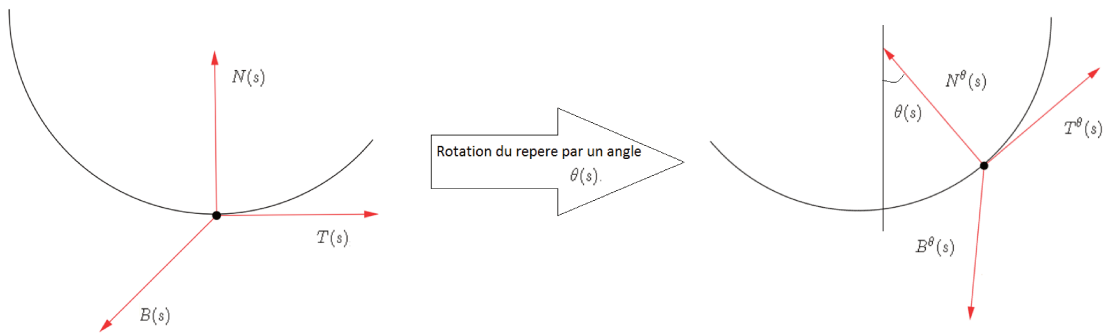


FIGURE 2.3 – Une rotation d'un angle θ appliquée au repère de Frênet.

Ce nouveau repère mobile noté $(T^\theta, N^\theta, B^\theta)$, est définit pour tout s dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$(T^\theta, N^\theta, B^\theta) := R_\theta.(T, N, B) \tag{2.12}$$

plus explicitement, les nouveaux vecteurs sont donnés par les expressions

suivantes :

$$\begin{cases} T^\theta(s) := T(s), \\ N^\theta(s) := \cos\theta(s)N(s) - \sin\theta(s)B(s), \\ B^\theta(s) := \sin\theta(s)N(s) + \cos\theta(s)B(s), \end{cases} \tag{2.13}$$

L'évolution du repère $(T^\theta, N^\theta, B^\theta)$ le long de la courbe après rotation d'un angle égal à θ est donnée par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} T^\theta \\ N^\theta \\ B^\theta \end{pmatrix}' = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T^\theta \\ N^\theta \\ B^\theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \kappa\cos\theta & \kappa\sin\theta \\ -\kappa\cos\theta & 0 & \tau - \dot{\theta} \\ -\kappa\sin\theta & -(\tau-\dot{\theta}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^\theta \\ N^\theta \\ B^\theta \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

La définition de ce nouveau repère pivoté nous met en mesure de construire le tube courbé et torsadé simultanément.

2.4 Construction du tube déformé

Soit θ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$. On note par $\mathcal{L}$ l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,t) = (s, t_2, t_3) &\longmapsto \Gamma(s) + t_2 N^\theta(s) + t_3 B^\theta(s), \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \omega$, T^θ, N^θ et B^θ sont les vecteurs de la base de Frênet pivotée donnée par (2.13).

Le tube torsadé et courbé, noté Ω, est défini comme l'image du tube droit Ω_0 par $\mathcal{L}$ i.e. $\Omega := \mathcal{L}(\Omega_0)$. Il est entièrement défini en précisant l'ouvert ω et les fonctions κ, τ et θ puisque la courbe Γ est entièrement définie à partir de la définition des fonctions κ et τ (cf. [34]) et la rotation R_θ est bien définie en précisant θ.

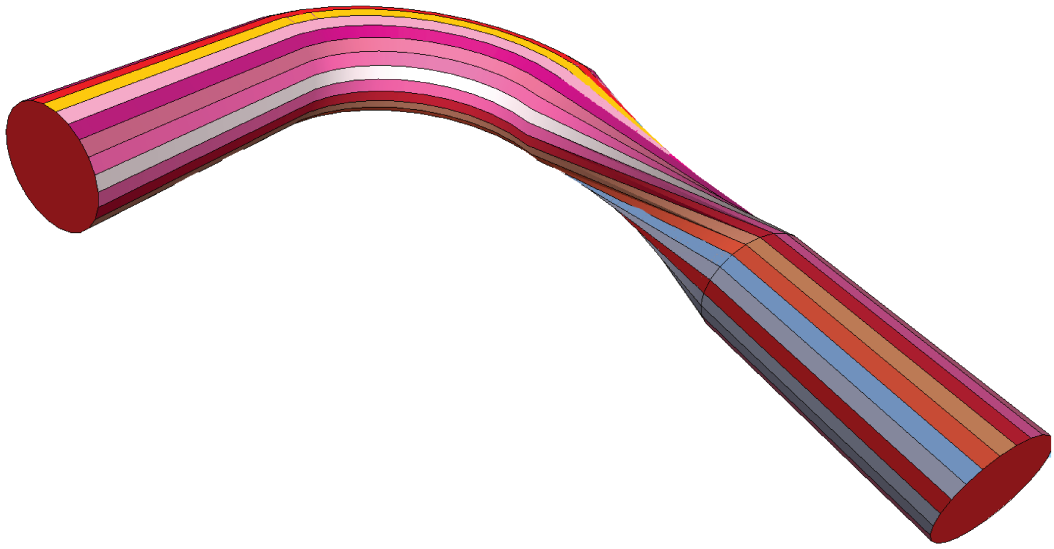


FIGURE 2.4 – Tube courbé et torsadé

Définitions 2.4.1.

(1) *Tube courbé : On dit que Ω est uniquement courbé si et seulement si la courbe de référence n'est pas une droite c'est à dire $\kappa \not\equiv 0$ et $\dot{\theta} \equiv 0$.*

(2) *Tube torsadé : On dit que Ω est uniquement torsadé si et seulement si ω n'est pas invariant par rotation (e.i. ω ne vérifie pas l'hypothèse (2.5)), $\tau - \dot{\theta} \not\equiv 0$ et $\kappa \equiv 0$.*

Si $\kappa \equiv 0$, $\tau \equiv 0$ et $\dot{\theta} \neq 0$ alors la courbe de référence Γ est une droite parallèle à l'axe (Os) auquel cas le tube est uniquement torsadé par l'angle θ. On note Ω_θ le tube torsadé dont la définition est donnée par la relation suivante :

$$\Omega_\theta := \mathcal{L}_\theta(\Omega_0), \tag{2.16}$$

où $\mathcal{L}_\theta$ est l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta : \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t_2, t_3) &\longmapsto R_\theta.{}^t(s, t_2, t_3). \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $R_\theta.{}^t(s, t_2, t_3) = {}^t\Big(s, t_2 \cos\theta(s) - t_3 \sin\theta(s), t_2 \sin\theta(s) + t_3 \cos\theta(s)\Big)$. Le nouveau guide d'onde est clairement le résultat de la rotation de la section transversale $\{s\} \times \omega$ par un angle égal à $\theta(s)$ autour de l'axe (Os)

Ce type de guide d'onde, tridimensionnel tubulaire, a fait l'objet d'étude de plusieurs travaux que nous allons rappeler dans le Chapitre.4. On rappellera également des résultats réalisés pour d'autres formes de guide d'onde.

Après cette présentation géométrique des guides d'onde, il est temps de présenter le deuxième critère qu'on doit mettre en considération lors de l'étude des propriétés spectrales des opérateurs. On parle ici des conditions aux bords.

Chapitre 3

Conditions aux bords

Le problème des conditions aux bords se pose lorsqu'on se propose de résoudre une équation aux dérivées partielles E.D.P (respectivement une équation aux dérivées ordinaires E.D.O) dans un espace borné (au moins suivant une variable s'il s'agit d'un espace à plusieurs variables).

Il existe plusieurs type de conditions aux bords qui différent entre eux par l'interprétation physique ainsi que la condition mathématique que doit vérifier la solution de l' E.D.P (respectivement E.D.O) à résoudre. Dans ce chapitre, nous allons mettre l'accent sur deux types de conditions aux bords. Commençons par le premier type :

3.1 Conditions aux bords de type Dirichlet

La condition aux bords de Dirichlet (ou encore condition aux bords de premier type) a été nommée auprès du mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13-02-1805 / 05-05-1859). Quand ce type de conditions aux bords est imposé, lors de la résolution d'une E.D.P (respec-

tivement E.D.O), il nous indique la valeur que doit vérifier la solution aux bords du domaine. Si cette valeur est égale à zero, alors on l'appelle condition aux bords de Dirichlet homogène.

D'un point de vue physique, ce type de condition aux bords modélise certains critères pour les guides étudiés. A titre d'exemple, c'est utilisé pour décrire les bords fixes d'une membrane élastique vibrante. C'est également adapté pour modéliser les bords totalement opaques et réfléchissants des fibres optiques.

Ce type de conditions aux bords est le plus étudié parmi les différents types de conditions aux bords existants (cf. [9, 11, 13, 14, 15, 19, 16]) et il est le moins compliqué.

Dans la section suivante nous allons expliquer un autre type de conditions aux bords :

3.2 Conditions aux bords de type Neumann

Le nom de la condition aux bords de Neumann (ou condition aux bord de second type) a été tiré du nom du mathématicien allemand Cal Gottfried Neumann (07-05-1832 / 27-03-1925). Lors de la résolution d'une $E.D.P$ (respectivement une $E.D.O$) en imposant ce type de conditions aux bords, on se fixe les valeurs que doit vérifier la dérivée normale de la solution. Dans le cas d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la condition aux bords que doit vérifier une solution ψ est interprétée par l'égalité

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) := \nabla \psi(x).n(x) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \tag{3.1}$$

où n est le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ au point x. Si la valeur de la condition de Neumann que doit vérifier la solution ψ est nulle, on l'appelle une condition aux bords de Neumann homogène.

Il existe plusieurs situations où on peut utiliser ce type de conditions aux bords lors de la modélisation d'un système physique. A titre d'exemple, il

est à adopter pour décrire le bord d'une membrane vibrante qui est libre de bouger. C'est également utilisé pour indiquer le caractère isolant des bords du domaine lorsqu'on s'intéresse au calcul des flux de la chaleur.

Ce type de conditions aux bords a été étudié dans plusieurs travaux (cf.[50, p 565],[53, p 138]).

3.3 Perturbation des conditions aux bords et conditions mixtes

En Mathématiques, des conditions aux bords mixtes ou mêlées pour une E.D.P définissent un problème de valeurs aux bords dans lequel la solution doit satisfaire des conditions aux bords différentes sur des parties disjointes de la frontière du domaine où le problème est étudié. Plus précisément, dans ce type de problème, la solution doit satisfaire une condition de Dirichlet ou une condition de Neumann sur les parties disjointes de la frontière du domaine.

D'un point de vue mathématique, le problème consiste à trouver une solution ψ d'une E.D.P définie sur un domaine Ω, de frontière $\partial\Omega := \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ et qui vérifie :

$$\begin{cases} \psi = \varphi_1, & \text{sur } \partial\Omega_1\,; \\ \frac{\partial\psi}{\partial N} = \varphi_2, & \text{sur } \partial\Omega_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Il faut signaler que les conditions aux bords mixtes sont différentes des conditions aux bords de Robin, puisque ce dernier type n'est qu'une combinaison linéaire des conditions de Dirichlet et de Neumann considérée sur toute la frontière du domaine.

Le premier qui s'est intéressé et a résolu un problème qui satisfait les conditions aux bords mixtes est le mathématicien Polonais Stanisław Zaremba (3-10-1863 / 23-11- 1942) pour l'équation de Laplace. En effet, c'était

un problème suggéré par Wilhelm Wintinger[4] (cf. [57]).

En réalité, la perturbation des conditions aux bords nous permet de passer d'un problème avec des conditions aux bords de même type à un problème avec des conditions aux bords mixtes. Il s'agit de remplacer les conditions aux bords (de même type) sur une partie de la frontière par un autre type différent de conditions aux bords.

L'étude des opérateurs Hamiltoniens avec des conditions aux bords mixtes a intéressé plusieurs autres chercheurs que Zaremba [4, 38, 47, 49]

Cette partie introductrice sur la géométrie des guides d'onde nous donne une idée sur les formes des guides d'onde qui ont intéressé les chercheurs. Ceci nous rend curieux de savoir le compte rendu des études consacrées pour ces guides d'onde et les résultats relatifs à chaque forme. Il est temps alors de rappeler quelques résultats élaborés en relation avec ce sujet et qui représentaient une motivation pour réaliser le présent travail.

4. « M. Wintinger, dans une conversation privée, a attiré mon attention sur le problème suivant : déterminer une fonction u vérifiant l'équation de Laplace dans un certain domaine (D) étant donné, sur une partie (S) de la frontière, les valeurs périphériques de la fonction demandée, sur le reste (S') de la frontière du domaine considéré, celle de la dérivée suivant la normale. Je me propose de faire connaitre une solution très générale de cet intéressant problème. »

S. Zaremba [57]

Chapitre 4

Description des résultats connus

En raison de l'importance de la géométrie des guides d'onde et sa grande influence sur la propagation des ondes, plusieurs articles sont dédiés à étudier ce lien important entre la forme du guide d'onde et les propriétés spectrales des opérateurs Hamiltoniens qui les modélisent.

Un autre critère qui joue un rôle primordial dans l'analyse spectrale d'un opérateur Hamiltonien défini dans un guide d'onde donné est les conditions aux bords considérées.

Dans ce chapitre, nous allons résumer des résultats démontrés dans des travaux précédents concernant l'effet des perturbations des guides d'onde. On ne va pas se limiter à rappeler les résultats relatifs aux perturbations géométriques uniquement, mais, on va également présenter des résultats effectués lors de l'étude des opérateurs Hamiltoniens avec des conditions aux bords mixtes. Nous allons citer les plus importants résultats qui montrent le grand effet des perturbations géométriques ainsi que l'influence des conditions aux bords considérées sur les propriétés spectrales des opérateurs Hamiltoniens.

En général, l'étude des caractéristiques d'un guide d'onde quantique WG

(bidimensionnel ou tridimensionnel) nous conduit souvent à réaliser l'étude spectrale de l'opérateur Hamiltonien décrivant son évolution. Le problème spectral que nous devons étudier est de la forme suivante :

Étudier l'opérateur Hamiltonien H_{WG}^{BC} défini dans $L^2(WG)$, où BC représente les conditions aux bords considérées. Dans la plupart des travaux qu'on va citer, l'opérateur Hamiltonien étudié n'est que l'opérateur de Laplace. Nous mettrons l'accent sur les études menées pour des guides d'onde courbés permettant de mettre en évidence l'effet attractif de la courbure et sa tendance à faire diminuer le seuil spectral de l'opérateur Hamiltonien considéré. Nous insisterons de plus sur le caractère répulsif de la torsion mis en évidence dans plusieurs articles et nous allons donner plusieurs résultats réalisés lors de l'étude des perturbations des conditions aux bords de Dirichlet par les conditions de Neumann sur une partie de la frontière du guide d'onde. Nous allons mettre en évidence l'aspect attracteur de ce type de perturbation et nous rappellerons des résultats qui portent sur des études spectrales effectuées sur des guides d'onde avec des conditions aux bords mixtes (Des conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann.).

Les résultats seront présentés dans l'ordre chronologique afin de mettre en exergue l'avancement de ces études au cours des dernières années.

En premier lieu, nous donnons les résultats relatifs aux perturbations géométriques des guides d'onde.

4.1 Perturbations géométriques

L'intérêt de l'étude des guides d'onde perturbés a été évoqué, depuis plus d'un quart de siècle, par le travail d'Exner et Šeba. En 1987, les chercheurs ont commencé par étudier les guides d'ondes bidimensionnels. Il s'agit des bandes courbées de largeur suffisamment petite et de courbure à décroissance rapide. Sous ces conditions, Exner et Šeba ont montré dans [25] que le spectre

discret de l'opérateur Hamiltonien décrivant une particule circulant dans une telle bande courbée est non vide. L'influence de l'épaisseur critique du guide d'onde a été étudié davantage dans le travail de Duclos et Exner [19]. Le cas d'une courbure à décroissance lente a été traité par Exner dans [26].

Plus tard, Goldstone et Jaffe ont, non seulement, étudié les caractéristiques spectrales des Hamiltoniens dans des guides d'onde bidimensionnels courbés mais, ont également pu généraliser leurs résultats pour des tubes tridimensionnels ayant une section transverse circulaire. Dans leur article [30], ils ont montré que le Laplacien de Dirichlet défini dans un tube de courbure à support compact admet des états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel. Dans [30], on ne voit que l'effet attractif de la courbure. Cela est principalement dû au choix de l'angle de la torsion qui est sous la forme : $\theta(s) = -\int_{-\infty}^{s} \tau(s')ds'$, où τ représente la deuxième courbure de la courbe de référence considérée dans la construction du guide d'onde déformé de la manière expliquée dans la Section.2.4.

Le même résultat de Goldstone et Jaffe a été aussi démontré par Duclos et Exner dans leur article [19] où ils décrivent les guides d'onde mésoscopiques. La différence entre [19] et le travail effectué par Goldstone et Jaffe dans [30] se manifeste au niveau des conditions imposées sur la section transverse. En effet dans [19] on étudie les tubes fins dont la section transverse est choisie non invariante par rotation, alors qu'il s'agit d'un tube dont la section transverse est un disque dans [30]. D'autres conditions sur $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont présentes dans [19].

En 1995, Clarck et Bracken se sont intéressés aux guides d'onde quantiques décrits par Exner et Duclos. En effet, dans leur article [13], ils ont étudié l'effet de la courbure sur le spectre du Laplacien de Dirichlet défini dans une bande mais examiné dans un cadre tridimensionnel. Leur étude montre que la présence d'une torsion induit l'apparition d'un potentiel effectif dans l'expression du Laplacien exprimé dans le nouveau système de

coordonnées curvilignes. Une année plus tard, les mêmes auteurs (Clarck et Bracken), dans un autre article [14], montrent que la torsion appliquée à des tubes dont la section transverse est non invariante par rotation donne naissance à une interaction répulsive.

Les couches quantiques (layers en anglais) représentaient un objet d'étude pour plusieurs chercheurs. En effet, l'opérateur de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet a été étudié dans une couche déformée dans [6] où les auteurs montrent l'existence des états liés au dessous du seuil du spectre essentiel si la déformation est positive. En réalité, ce travail était une généralisation du modèle étudié par Bulla et al [7] dans un contexte bidimensionnel. Dans [20], Le Laplacien de Dirichlet est étudié dans une couche courbée dont la courbure s'annule à l'infini. Les auteurs donnent les conditions suffisantes pour garantir l'existence d'un spectre discret non vide. En 2003, Carron et al ont pu donné une généralisation du travail de Duclos et al [20], ils sont même arrivés à étudier des géométries plus compliquées.

Quelques années plus tard, plus précisément en 2004, Chenaud, Duclos, Freitas et Krejčiřík ont étudié le spectre du Laplacien de Dirichlet dans un tube courbé. Ils démontrent dans [15] un résultat analogue à celui d'Exner et Šeba dans [25], mais avec des conditions affaiblies. En effet, dans [15], la section transverse n'est pas un disque et la courbure n'est pas nécessairement à support compact. La seule contrainte imposée est qu'elle soit nulle à l'infini. Sous ces conditions, les auteurs de [15] prouvent que le spectre discret du Laplacien de Dirichlet est non vide. Une étude rigoureuse du spectre essentiel des guides d'onde courbés (bandes et tubes) a été établie par Krejčiřík et De Aldecao dans leur article [37]

En 2005, Exner et Kovařík se sont penchés sur l'étude de la torsion constante ainsi que l'effet de sa perturbation locale. Les auteurs montrent dans [23] que le spectre du Laplacien de Dirichlet défini dans un tube déformé par une torsion constante dont la forme de la section transversale est

différente d'un disque, est un spectre purement absolument continu. D'autre part, ils étudient le cas d'une perturbation locale provoquant un ralentissement local de la torsion constante, ce qui revient à dire que la dérivée de torsion est sous la forme $\dot{\theta} := \beta - \varepsilon(s)$, où $\beta > 0$ et ε est une fonction positive à support compact. Ils avancent qu' une telle perturbation donne naissance à un spectre discret non vide sous le seuil du spectre essentiel.

Dans la même année, Ekholm, Kovařík et Krejčiřík ont proposé d'étudier le spectre du Laplacien de Dirichlet défini dans un tube localement torsadé dont la section transverse est non invariante par rotation. Ils démontrent qu'une torsion telle que sa dérivée $\dot{\theta}$ est continue, à support compact et de dérivée seconde $\ddot{\theta}$ bornée donne naissance à des inégalités de type Hardy (7.11). Ces inégalités sont issues de l'inégalité de Hardy classique (7.9). En réalité, les auteurs ont établi deux types d'inégalité de Hardy dans [24]. La première est partielle et appelée « inégalité de Hardy locale » (15.3) alors que l'autre est globale de type (7.11). Cette dernière permet aux auteurs de [24] de montrer que le spectre discret du Laplacien de Dirichlet défini dans un tube localement torsadé est vide. D'autre part, ils montrent, dans le même article, que le Laplacien de Dirichlet étudié dans un tube déformé par une courbure locale et par une torsion à support compact admet un spectre discret vide à condition que la courbure soit suffisamment petite dans un sens expliqué dans les énoncés des Théorèmes 1 et 2 de l'article [24].

Dans un contexte similaire, en 2009, Briet, Kovařík, Raikov et Soccorsi ont élaboré une étude spectrale du Laplacien de Dirichlet considéré dans un tube torsadé par une torsion constante mais perturbée par une fonction bornée. Lors de cette étude, les auteurs se sont concentrés sur la détermination du nombre d'états liés qui se trouvent au-dessous du seuil du spectre essentiel. Plus précisément, si $\dot{\theta}$ est de décroissance lente, alors le Laplacien de Dirichlet admet un nombre infini d'états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel.

Au cours de la même année , Krejčiřík a rédigé un article dans lequel il effectue une comparaison rigoureuse entre l'effet de la courbure et la torsion sur un tube initialement droit. Il met l'accent sur l'effet attractif de la courbure locale ainsi que l'effet répulsif de la torsion à support compact. L'auteur, dans son article [35], établit également des inégalités de type Hardy 7.11 pour démontrer que le Laplacien de Dirichlet étudié dans le tube uniquement torsadé ou torsadé et courbé simultanément admet un spectre discret vide sous certaines conditions imposées sur la courbure κ d'expression (2.7).

Un autre article, [16], traite l'effet du ralentissement de la torsion constante. Exner et Barseghyan ont étudié le spectre discret induit par une perturbation de la torsion constante par une fonction à support compact. Les auteurs de [16] ont établi des estimations de type Lieb-Thirring pour les moments spectraux et ont également mis l'accent sur la dépendance des états liés de la forme de la section transverse en donnant des exemples concrets.

Un autre volet du problème a été étudié dans [10] où les auteurs, Briet, Kovařík et Raikov ont abordé la question comme un problème de résonance. Ils ont montré que si la fonction de perturbation de la torsion constante ainsi que sa dérivée sont de décroissance suffisamment rapide, alors le spectre continue singulier du Laplacien de Dirichlet est vide.

En 2014 Krejčiřík s'est proposé pour la première fois d'étudier Le Laplacien de Dirichlet défini dans un tube déformé par une torsion divergente. Le résultat inhabituel a été démontré dans [36]. Pour des tubes torsadés dont la section transverse ω est telle que $\omega \subset \{(t_2, t_3) \in \mathbb{R}^2, t_2 > 0\}$, il est démontré que si $\theta \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \dot{\theta}(s) = +\infty$ alors $\sigma(-\Delta^D_{\Omega_\theta}) = \sigma_d(-\Delta^D_{\Omega_\theta})$. Ce type de tube est appelé tube quasi-borné.

Suite à ce rappel sur l'effet des déformations géométriques, nous allons à présent énoncer quelques résultats relatifs à l'influence des conditions aux bords considérées pour étudier Le Laplacien.

4.2 Conditions aux bords mixtes

L'étude spectrale du Laplacien avec des conditions aux bords mixtes (de Dirichlet et de Neumann en même temps) intéresse plusieurs chercheurs. Au départ, dans un cadre bidimensionnel, Dittrich et Kříž ont étudié ce type de conditions aux bords dans [22]. Ils ont étudié l'opérateur de Laplace défini dans une bande sous plusieurs cas de figures en alternant les conditions aux bords.

Exner et al, dans leur article [27], ont étudié le Laplacien dans un tube courbé de section transverse arbitraire avec des conditions aux bords de Dirichlet sur la frontière cylindrique et des conditions de Neumann sur les deux fins du tube. Ils ont démontré que le seuil spectral d'un tel opérateur est estimé inférieurement par la plus petite valeur propre du Laplacien de Dirichlet défini dans un tore (déterminé par la forme d'un tube).

En 2006, Kovařík et Krejčiřík se sont penchés sur l'étude du Laplacien dans une bande avec des conditions aux bords d'un coté de Dirichlet et de Neumann de l'autre côté. Ils ont montré dans [33] que la permutation entre les conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann réalisée sur une partie du bord de la bande donne naissance à une inégalité de type Hardy (7.11). Ce résultat nous rappelle l'effet répulsif d'une torsion dans un tube tridimensionnel. Ceci justifie la possibilité de considérer cette permutation des conditions aux bords comme une torsion dans le carde bidimensionnel.

En 2009, Ben Hariz, Ben Saleh et Najar ont étudié dans [4] l'effet d'imposer des conditions aux bords de Neumann sur une partie de la forme d'un disque sur la frontière d'un guide d'onde de la forme $(0, d) \times \mathbb{R}^2$, $d > 0$. Deux ans plus tard, Najar et Olendski dans leur article [49] se sont intéressés à l'étude les états liés crées par deux fenêtres de Neumann en forme de disques concentriques et de rayons différents placés de part et d'autre du guide d'onde $(0, d) \times \mathbb{R}^2$, $d > 0$. Ils arrivent à montrer qu'il existe des états

liés au-dessous du seuil du spectre essentiel quelque soit la largeur des deux disques de Neumann.

D'autre part, Krejčiřík dans son article [38] étudiait le Laplacien dans une couche où il imposait des conditions de Dirichlet sur une face de la couche et des conditions de Neumann sur l'autre face. Il étudiait asymptotiquement l'effet de la diminution de la largeur de la couche.

Dans un autre contexte, des conditions aux bords mixtes étaient adaptés dans [47] et [51]. En effet, dans [47], Najar et Raissi ont étudié l'opérateur Hamiltonien relatif à une particule chargée dans une couche droite en présence d'un champs magnétique de Aharonov-Bohm. Les condition aux bords considérées sont de type Dirichlet partout sauf sur un disque sur un coté de l'une des deux faces de la couche où on considère des conditions de Neumann. Il est démontré que le spectre discret est vide pour des disques de rayon inférieur à une valeur critique. Dans [51], Raissi a étudié le même problème en remplaçant le champs magnétique par un champs électrique. Cette fois, la condition de Neumann (pour n'importe quelle taille de disque) donne naissance à des états liés au dessous du seuil du spectre essentiel pour n'importe quelle intensité du champs électrique.

Toutes ces études motivent la recherche dans la perspective d'évaluer l'effet de la présence d'une fenêtre de Neumann sur une partie bornée de la frontière d'un guide d'onde de forme tubulaire déformée. C'est ce que nous allons étudier dans la troisième partie de cette thèse.

Après ce résumé des différents résultats réalisés lors des études consacrées aux guides d'onde perturbés, nous allons présenter les modèles qui nous intéressent dans cette thèse.

Chapitre 5

Le présent modèle

L'objectif de ce chapitre est de donner une idée générale sur les modèles mathématiques qu'on se propose d'étudier en précisant les guides d'onde qui nous intéressent ainsi que les conditions aux bords que nous allons adopter.

Nous Commençons par donner des notations qui seront utilisées le long de cette thèse.

Soit ω un ouvert borné connexe de frontière régulière (Nous préciserons ultérieurement le sens de régularité demandé). On suppose qu'il est non invariant par rotation par rapport à l'origine du repère O (i.e. ω ne vérifie pas la condition (2.5)).

$\Omega_0 := \omega \times \mathbb{R}$ représente le tube droit dans notre modèle.

Les guides d'onde qui nous intéressent dans cette thèse sont les tubes perturbés i.e. les guides d'onde tridimensionnels de forme tubulaire qui ont subi des déformations géométriques. Il s'agit des tubes de la forme :

$$\Omega := \mathcal{L}(\Omega_0)$$

, où $\mathcal{L}$ est l'application définie par (2.15).

On note par $\mathcal{N}$ une partie bornée de la frontière de Ω_0 qu'on note par $\partial\Omega_0$ et soit $\mathcal{D} := \partial\Omega_0 \setminus \mathcal{N}$ le complémentaire de $\mathcal{N}$ dans $\partial\Omega_0$.

On note par $-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}$ l'opérateur de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet sur $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ et des conditions aux bords de Neumann sur $\mathcal{L}(\mathcal{N})$. Il s'agit de l'opérateur auto-adjoint, obtenu comme une extension de Friedrichs (cf. [52]) associé à la forme quadratique fermée $q^{\mathcal{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} q^{\mathcal{N}}(\psi) &:= \int_\Omega \mid \nabla\psi(x) \mid^2 dx, \quad \forall\psi \in D(q^{\mathcal{N}}), \\ D(q^{\mathcal{N}}) &:= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad \mid \quad \psi = 0 \ sur \ \mathcal{L}(\mathcal{D})\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le domaine de $-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}$ est donné par :

$$D(-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}) := \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega) \quad \mid \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\lceil_{\mathcal{L}(\mathcal{N})} = 0 \quad \psi\lceil_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} = 0\}. \tag{5.2}$$

Le but principal de cette thèse est de réaliser une étude spectrale de ce type d'opérateur.

En raison de la complexité de la géométrie du tube déformé Ω, il n'est pas simple de mener l'étude de l'opérateur de Laplace ainsi défini dans (5.2). On s'oriente alors vers l'étude d'un opérateur unitairement équivalent à $-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}$ ayant les mêmes caractéristiques spectrales. Notre démarche sera d'identifier $L^2(\Omega)$ à un autre espace de Hilbert construit sur Ω_0. Ceci revient en réalité, à effectuer un changement de variable et passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes qui sont mieux adaptées pour l'étude des tubes déformés.

Cette stratégie d'étude était adaptée préalablement dans plusieurs travaux (cf. [24], [35]).

Dans la première section de ce chapitre nous allons expliquer ce changement de variables utilisé ainsi que le passage de l'étude d'un opérateur défini dans un tube déformé à l'étude d'un opérateur défini dans un tube droit. Nous allons donner également l'expression explicite de l'opérateur unitairement équivalent à $-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}$ défini dans Ω_0.

5.1 Changement de variables

Le passage d'un tube déformé à un tube droit se réalise à l'aide d'un difféomorphisme entre les deux guides d'onde. Nous avons, préalablement, défini, le tube déformé à partir du tube droit Ω_0. En réalité, Ω n'est d'autre que l'image du tube droit par l'application $\mathcal{L}$ d'expression (2.15). Si $\mathcal{L}$ réalise un C^1-difféomorphisme entre Ω_0 et Ω, le passage inverse du tube déformé au tube droit est, par conséquent, possible.

Le lemme suivant donne les conditions suffisantes sur $\mathcal{L}$ pour qu'elle soit un C^1-difféomorphisme

Lemme 5.1.1. *Si $\mathcal{L}$ est injective et $d \parallel \kappa \parallel_\infty < 1$, $\forall \kappa \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{L}$ réalise un C^1-difféomorphisme entre Ω_0 et Ω.*

Preuve du Lemme.5.1.1

L'application du théorème d'inversion locale nécessite que le Jacobien de $\mathcal{L}$ soit non nul. On note $J_\mathcal{L}$ la matrice jacobienne de $\mathcal{L}$ et $M := (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur métrique induit par $\mathcal{L}$ et donné par :

$$M := {}^tJ_\mathcal{L} \cdot J_\mathcal{L}; \tag{5.3}$$

où le $'.'$ représente le produit des deux matrices. En utilisant les expressions des vecteurs du repère mobile (2.13), un calcul direct aboutit à :

$$\partial_s\mathcal{L} = hT + h_2N^\theta + h_3B^\theta, \qquad \partial_{t_2}\mathcal{L} = N^\theta, \qquad \partial_{t_3}\mathcal{L} = B^\theta; \tag{5.4}$$

h, h_2 et h_3 étant donnés par :

$$\begin{aligned} h(s,t) &:= 1 - (t_2\cos\theta(s) + t_3\sin\theta(s))\kappa(s), \\ h_2(s,t) &:= -t_3(\tau(s) - \dot\theta(s)), \\ h_3(s,t) &:= t_2(\tau(s) - \dot\theta(s)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

En utilisant les notations précédentes, le tenseur métrique M s'exprime comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} h^2 + h_2^2 + h_3^2 & h_2 & h_3 \\ h_2 & 1 & 0 \\ h_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Le déterminant de M est donné par :

$$|M| = det(M) = det(J_{\mathcal{L}})^2 = h^2. \tag{5.7}$$

Il en découle que $det(J_{\mathcal{L}}) =| h |$. En utilisant des estimations simples sur l'expression de $det(J_{\mathcal{L}})$, on obtient :

$$1 - d \parallel \kappa \parallel_\infty \leq det(J_{\mathcal{L}}) = h(s,t) \leq 1 + d \parallel \kappa \parallel_\infty . \tag{5.8}$$

Pour assurer la positivité stricte de $\det(J_{\mathcal{L}})$, une condition suffisante est d'avoir

$$d \parallel \kappa \parallel_\infty < 1, \quad \kappa \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{5.9}$$

Sous la condition (5.9), $\mathcal{L}$ est un C^1-difféomorphisme local. Si de plus $\mathcal{L}$ est injective, alors elle devient un C^1- difféomorphisme global. □

Les conditions que doit vérifier $\mathcal{L}$ pour être injective sont bien détaillées dans l'article [24].

D'un point de vue géométrique, $\mathcal{L}$ est un C^1-difféomorphisme implique que le tube déformé Ω ne se coupe pas.

Sous les conditions du Lemme.5.1.1, $\mathcal{L}$ réalise un C^1- difféomorphisme entre Ω_0 et Ω. Ainsi peut-on identifier l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ à l'espace $\mathcal{H} := L^2(\Omega_0, h(s,t)dsdt)$, où $\mathcal{H}$ désigne l'espace de Hilbert habituel $L^2(\Omega_0)$, avec le produit scalaire défini par :

$$(\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega_0} \overline{\psi(s,t)} \varphi(s,t) h(s,t) dsdt \tag{5.10}$$

En d'autres termes, le changement de variables est appliqué comme suit :

$$\forall \psi \in L^2(\Omega, dx), \ \exists \ ! \ \varphi \in \mathcal{H} \ \mid \varphi := \psi \circ \mathcal{L}. \tag{5.11}$$

et vérifie

$$\int_{\Omega} \mid \psi(x) \mid^2 dx = \int_{\Omega_0} \mid \varphi(s,t) \mid^2 h(s,t) ds dt \tag{5.12}$$

Remarque 5.1.1. *Si le tube est uniquement torsadé, i.e.* $\kappa \equiv \tau \equiv 0$ *et* $\dot{\theta} \neq 0$ *(en d'autres termes,* $\Omega = \Omega_\theta$*), on remarque dans ce cas que*

$$det(J_{\mathcal{L}_\theta}) = h(s,t) = 1.$$

Alors, sous ces conditions, l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ *est identifié à l'espace de Hilbert* $L^2(\Omega_0)$ *par le* C^1-*difféomorphisme* $\mathcal{L}_\theta$ *donnée par (2.17).*

Nous cherchons par la suite à utiliser ce changement de coordonnées pour déduire l'expression de l'opérateur unitairement équivalent à $-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}}$.

5.2 Le Hamiltonien

Notons par U l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} U : \ L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{H} = L^2(\Omega_0, h(s,t)dsdt) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \mathcal{L} \end{aligned} \tag{5.13}$$

étant donné que U est un opérateur unitaire, l'opérateur $H := U(-\Delta_\Omega^{\mathcal{N}})U^{-1}$ défini dans $\mathcal{H}$, est unitairement équivalent à $-\Delta_\Omega^a$. La forme quadratique associée à H qu'on note par q est donnée par :

$$q(\varphi) := q^{\mathcal{N}}(U^{-1}\varphi) \quad \forall \varphi \in D(q), \tag{5.14}$$

avec $D(q) := \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0, h(s,t)dsdt) \quad | \quad \varphi = 0 \ sur \ \mathcal{D}\}$. Par un calcul direct, on obtient l'égalité suivante, pour tout ψ dans $D(q^{\mathcal{N}})$:

$$\nabla(U\psi) = \nabla(\psi \circ \mathcal{L}) = {}^tJ_{\mathcal{L}} \nabla\psi \circ \mathcal{L} = {}^tJ_{\mathcal{L}} U(\nabla\psi). \tag{5.15}$$

En utilisant l'égalité (5.15) avec le changement de variable expliqué dans la Section.5.1 on peut déduire, pour tout ψ dans $D(q^{\mathcal{N}})$, il existe une unique

fonction φ dans $Dom(q)$ vérifiant $\varphi := \psi \circ \mathcal{L}$ telle que :

$$U(\nabla\psi) = {}^t(J_{\mathcal{L}}^{-1})\nabla(U\psi) = {}^t(J_{\mathcal{L}}^{-1})\nabla(\varphi). \tag{5.16}$$

Il s'en suit que la nouvelle expression du Laplacien dans les coordonnées curvilignes est donnée sous la forme de l'opérateur de Laplace−Beltrami :

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{i,j=1}^{3} h^{-1}\partial_{t_i} h({}^tJ_{\mathcal{L}}J_{\mathcal{L}})_{ij}^{-1}\partial_{t_j} = -\sum_{i,j=1}^{3} h^{-1}\partial_{t_i} h M_{ij}^{-1}\partial_{t_j} \quad (5.17) \\ D(H) &= \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0, h(s,t)dsdt), \quad \varphi_{\lceil\mathcal{D}} = 0 \ et \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}_{\lceil\mathcal{N}} = 0\}. \end{aligned}$$

L'expression de la forme quadratique q est donnée par :

$$q(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_0} \partial_{t_i}\varphi(s,t) M_{ij}^{-1} \partial_{t_j}\varphi(s,t) h(s,t) dsdt \quad \forall\varphi \in D(q) \tag{5.18}$$

où M^{-1} désigne l'inverse de la matrice M et est donnée par :

$$M^{-1} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -h_2 & -h_3 \\ -h_2 & h^2 + h_2^2 & h_2h_3 \\ -h_3 & h_2h_3 & h^2 + h_3^2 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Dans les deux expressions (5.17) et (5.18) notons que $d_{t_1} = d_s$.

Remarque 5.2.1. *:*
Si $\Omega = \Omega_\theta$ l'opérateur unitaire U sera donné par :

$$\begin{aligned} U: \ L^2(\Omega_\theta) &\longrightarrow L^2(\Omega_0) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \mathcal{L}_\theta. \end{aligned} \tag{5.20}$$

L'opérateur unitairement équivalent à $-\Delta^{\mathrm{N}}_{\Omega_\theta}$ que nous notons, dans ce cas, H^{N}_θ admet l'expression suivante :

$$H^{\mathrm{N}}_\theta := U(-\Delta_{\Omega_\theta})U^{-1} = -\Delta_\omega - (\dot{\theta}(s)\partial_\tau + \partial_s)^2, \tag{5.21}$$

H^{N}_θ est associé à la forme quadratique notée q^{N}_θ et définie comme suit :

$$q^{\mathrm{N}}_\theta(\psi) := \int_{\Omega_0} \mid \nabla'\psi(s,t) \mid^2 + \mid \dot{\theta}(s)\partial_\tau\psi(s,t) + \partial_s\psi(s,t) \mid^2 dsdt, \tag{5.22}$$

avec

$$\nabla' := {}^t(\partial_{t_2}, \partial_{t_3}), \quad \Delta_\omega := \partial^2_{t_2} + \partial^2_{t_3}, \quad \partial_\tau := t_2\partial_{t_3} - t_3\partial_{t_2}. \tag{5.23}$$

$\dot{\theta}$ étant la dérivée de la fonction θ.

Nous disposons principalement de deux grands modèles à examiner qui s'inscrivent tous les deux dans le cadre de l'étude spectrale du Laplacien dans le tube déformé Ω. Les deux modèles sont pourtant différents dans le sens où les conditions aux bords que nous imposons sont différentes.

Le premier consiste à étudier le Laplacien de Dirichlet dans un tube torsadé. On va étudier l'effet d'une perturbation appliquée à l'angle de la torsion utilisée pour déformer le tube droit. il s'agit d'une accélération de la rotation appliquée à la section transverse sur une partie du tube. On va consacrer la deuxième partie de la thèse pour l'étude détaillée de ce problème.

Le deuxième modèle s'inscrit sous un autre type de perturbations qu'on peut effectuer sur des guides d'onde. En effet, on s'intéresse à étudier l'ef-

fet d'une perturbation au niveau des conditions aux bords qui se traduit par l'ajout d'une condition de type Neumann sur une partie bornée de la frontière du tube. Comme c'est la première fois qu'on entame l'étude des conditions mixtes pareilles pour les tubes, on commencera par l'étude du cas du tube droit. Nous allons étudier également le cas de tube torsadé. Plusieurs cas de figures vont être examinés et qui diffèrent par la forme de la torsion utilisée pour torsader notre tube. Toute la troisième partie de cette thèse sera consacrée à l'étude de tous ces cas en détail.

Avant d'entamer l'étude approfondie de chaque modèle, il est intéressant de donner un résumé sur les différents résultats qu'on a pu établir.

Chapitre 6

Résumé de la thèse et nouveaux résultats

Ce chapitre a pour objectif d'énoncer les principaux résultats qui construisent le fondement de la thèse. Cette dernière repose en réalité, sur deux grands modèles qui diffèrent selon les conditions aux bords imposées lors de l'étude spectrale du Laplacien ainsi que la géométrie du guide d'onde considéré.

Commençons par le premier modèle.

6.1 Résultats du premier modèle

Dans ce premier modèle, le guide d'onde qui nous intéresse est un tube Ω_θ, où $\dot{\theta}$ est une torsion constante β perturbée localement par une une fonction ε ayant le même signe que β.

On se propose s'étudier l'opérateur de Laplace défini sur ce tube torsadé avec des conditions aux bords de Dirichlet partout sur $\partial\Omega_\theta$.

Le premier résultat est de montrer que cet opérateur n'admet pas des

états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel, sous certaines conditions et hypothèses imposées sur la grandeur de la perturbation ε ainsi que la torsion constante β qui a subi la perturbation.

Ceci représente le résultat principal d'un article intitulé « Hardy Inequalities In Globally Twisted Waveguides » [9], réalisé par P. Briet, D. Krejčiřìk et H. Hammedi. Dans cet article nous avons approfondi l'aspect répulsif de la torsion avec des outils numériques et des arguments analytiques. Nous avons également établi des inégalités de type Hardy qui renforcent l'effet répulsif de la torsion perturbée pour le Laplacien de Dirichlet. Le résultat le plus important pour l'étude de ce premier modèle est résumé dans le théorème principale suivant :

Théorème 6.1.1. *Soit ω un ouvert borné connexe non invariant par rotation et de frontière de classe C^4. Soit $\dot{\theta} = \beta + \varepsilon$, où ε est une fonction bornée. Supposons que $\beta\varepsilon > 0$. Supposons de plus que ε et β vérifient :*

$$4 \parallel \varepsilon \parallel_\infty < \mid \beta \mid < \frac{2}{d\sqrt{23}}. \tag{6.1}$$

Alors il existe une constante positive C qui dépend de β, la géométrie de ω et les propriétés de ε telle que :

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\theta)\,, \quad \int_{\Omega_\theta} |\nabla\psi(x)|^2\,dx - \lambda_1 \int_{\Omega_\theta} |\psi(x)|^2\,dx \geq C \int_{\Omega_\theta} \frac{|\psi(x)|^2}{1+|x|^2}\,dx\,. \tag{6.2}$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta_\omega - \beta^2\partial_\tau^2$ défini dans la section transverse ω avec les conditions aux bords de Dirichlet. La preuve de ce théorème sera donnée dans la deuxième partie de la thèse et nous prendrons le soins de détailler les résultats élémentaires nécessaires pour la réaliser.

6.2 Résultats du deuxième modèle

La troisième partie de la thèse sera consacrée à l'étude de l'effet de changement les conditions aux bords de Dirichlet par des conditions de Neumann sur une partie bornée (une fenêtre de Neumann) de la frontière du tube déformé. Le but principal de notre étude est de savoir sous quelles conditions l'effet attractif de la fenêtre de Neumann pourra apparaitre et si la largeur de la fenêtre de Neumann aura une influence sur la stabilité des propriétés spectrales de l'opérateur de Laplace considéré dans le tube déformé.

Le premier point à examiner est l'effet de cette perturbation au niveau des conditions aux bords sur le spectre essentiel de notre opérateur Hamiltonien.

6.2.1 Stabilité du spectre essentiel

Le premier résultat à indiquer est que le spectre essentiel du Laplacien, avec des conditions aux bords de Dirichlet partout sauf sur une partie borné de la frontière du tube torsadé (ou également droit) où nous imposons des conditions aux bords de Neumann, est égal au spectre essentiel du Laplacien de Dirichlet défini sur le même tube déformé (ou droit). Ce résultat se résume par le théorème suivant :

Théorème 6.2.1. *Soit ω un ouvert borné connexe de frontière assez régulière. Si $\mathcal{N} \neq \varnothing$ et bornée alors on a :*

$$\sigma_{ess}(-\Delta^{\mathcal{N}}_{\Omega_\theta}) = \sigma_{ess}(-\Delta^{\mathcal{N}}_{\Omega_0}) = \sigma_{ess}(-\Delta^{D}_{\Omega_0}). \tag{6.3}$$

Il s'agit d'une stabilité au niveau du spectre essentiel en dépit de la présence d'une perturbation locale au niveau des conditions aux bords. Cette stabilité est démontré pour le cas du tube droit (Section.12.1) et pour un tube localement torsadé Section.13.1.

La preuve de ce résultat est réalisée par des outils spectraux, notamment

le critère de Weyl (Section.7.4) et le principe de Min-max (Section.7.3).

Il est important de signaler que ces techniques employées pour démontrer ce résultat de stabilité ne sont pas applicables dans le cas où la torsion est constante (Section.14.1).

Le deuxième point à examiner est si cette perturbation au niveau des conditions aux bords pourra créer des états liés sous le seuil du spectre essentiel.

6.2.2 Existence des états liés

Nous cherchons à présent les conditions pour lesquelles nous pourrons trouver des états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel.

Naturellement nous commençons par le cas le moins compliqué. C'est le cas du Laplacien défini sur le tube droit Ω_0 avec des conditions aux bords de Dirichlet partout, sauf sur une partie bornée de la frontière de Ω_0 où nous imposons des conditions de Neumann.

Nous montrons qu'un tel opérateur admet toujours un spectre discret non vide pour n'importe quelle largeur considérée pour la fenêtre de Neumann imposée. Ce résultat se résume dans le théorème suivant :

Théorème 6.2.2. *pour toute fenêtre de Neumann de forme d'anneau* $\mathcal{N} = (a, a+l) \times \partial\omega$, $a \in \mathbb{R}$, *de largeur* $l > 0$ *on a :*

$$\sigma_d(-\Delta_{\Omega_0}^{\mathcal{N}}) \neq \varnothing. \tag{6.4}$$

La preuve de ce résultat sera détaillée ultérieurement dans la troisième partie de ce manuscrit (Section.12.2).

Par la même méthode, on arrive à montrer un résultat pareil pour le cas du tube déformé Ω_θ. Dans la Section.13.2 on montre que pour une fenêtre de Neumann assez large le spectre discret du Laplacien avec des conditions aux bords mixtes est non vide. Sous une condition pareille imposée sur la taille

de la fenêtre de Neumann, un résultat analogue est établi pour le cas d'une torsion constante (Section.14.2).

En d'autre termes, Il existe une taille critique à partir de laquelle les états liés apparaissent sous le seuil du spectre essentiel. Le théorème suivant résume ce résultat :

Théorème 6.2.3. *Il existe $l_{min} > 0$ tel que pour toute fenêtre de Neumann $\mathcal{N} \supset (a, a+l) \times \partial\omega$, $a \in \mathbb{R}$, $l > l_{min}$ on a*

$$\sigma_d(-\Delta^{\mathcal{N}}_{\Omega_\theta}) \neq \varnothing. \tag{6.5}$$

Une question qui se pose naturellement est : Que se passe-t-il dans le cas contraire où la fenêtre de Neumann est petite ?

6.2.3 Absence des états liés

Nous sommes toujours intéressés par l'étude du Laplacien avec des conditions aux bords de Dirichlet partout sauf sur une petite partie bornée de la frontière de Ω, où on impose des conditions aux bords de Neumann. L'importance du rôle de la taille de la fenêtre de Neumann dans la création des états liés est bien confirmé par les résultats que nous allons présenter dans la Section.13.3. En effet, nous allons montrer qu'une fenêtre de Neumann bornée suffisamment petite nous permet d'établir des inégalités de type Hardy de type (7.11). Ces inégalités de Hardy établies nous permettent de déduire que le spectre discret de l'opérateur étudié est vide. On peut écrire ce résultat d'une manière plus explicite sous la forme du théorème suivant :

Théorème 6.2.4. *Il existe une épaisseur maximale $d_{max} > 0$ tel que pour tout tube d'épaisseur $d < d_{max}$ il existe une largeur maximale $l_{max} > 0$ telle que pour toute fenêtre de Neumann $\mathcal{N} \subset (a, a+l) \times \partial\omega$, $a \in \mathbb{R}$, $l > l_{min}$ on a :*

$$\sigma_d(-\Delta^{\mathcal{N}}_{\Omega_\theta}) = \varnothing. \tag{6.6}$$

Ce résultat a été démontré sous certaines conditions imposées sur la torsion θ et pour des tubes ayant une épaisseur inférieure à une épaisseur critique.

Plusieurs cas de figures vont être traités et de nombreuses discussions vont être menées. Tous les détails et les calculs réalisés sont donnés dans la Section.13.3 du deuxième chapitre de la troisième partie de cette thèse.

Chapitre 7

Appendice

Dans cette section nous donnons des définitions et des théorèmes qui sont nécessaires non seulement pour introduire nos modèles mathématiques mais également pour l'étude spectrale que nous allons réaliser dans la suite de notre thèse.

7.1 Quelques éléments de la théorie spectrale

Nous commençons par rappeler quelques définitions concernant les opérateurs linéaires.

Définition 7.1.1. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur $H:\ D(H) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est dit fermé si son graphe $G(\mathcal{H}_1) = \{(u, Hu), \quad u \in D(H)\}$ est un fermé dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$*

Définition 7.1.2. *Un opérateur linéaire H est dit symétrique si et seulement si*

$$\forall \varphi,\ \psi \in D(H), \quad (\varphi, H\psi) = (H\varphi, \psi), \tag{7.1}$$

Définition 7.1.3. *(cf. [31] page 50)*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire $H : D(H) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est dit auto-adjoint si on a $H = H^*$, ce qui signifie :

(1) H est symétrique

(2) $D(H) = D(H^*)$.

Définition 7.1.4. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur $\mathcal{U}$ est dit un opérateur unitaire de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ s'il vérifie les deux égalités :*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*\mathcal{U} &= Id_{\mathcal{H}_1}, \\ \mathcal{U}\mathcal{U}^* &= Id_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Définition 7.1.5. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Soient deux opérateurs $H_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ et $H_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$. On dit que H_1 et H_2 sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $\mathcal{U} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tel que $\mathcal{U}(D(H_1)) = D(H_2)$ et $H_2 = \mathcal{U}H_1\mathcal{U}^*$.*

Dans La suite de cette section, nous allons introduire quelques résultats issus de [52]. Ces résultats nous permettront d'obtenir des estimations du spectre du Laplacien avec des conditions aux bords de type Dirichlet quand le domaine de travail est divisé en deux parties. On note $-\Delta_\Omega^D$ l'opérateur de Laplace auto-adjoint (extension de Friedrichs) défini sur $L^2(\Omega)$ et associé à la forme quadratique fermée q^D donnée par :

$$q^D(\psi) = \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2 dx, \quad \forall \psi \in D(q^D) = \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Par ailleurs, on note par $-\Delta_\Omega^N$ l'opérateur de Laplace auto-adjoint (extension de Friedrichs) défini dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et associé à la forme quadratique fermée q^N donnée par :

$$q^N(\psi) = \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2 dx, \quad \forall \psi \in D(q^N) = \mathcal{H}^1(\Omega).$$

Proposition 7.1.1. *:*

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts disjoints tels que $L^2(\Omega) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$. Sous cette décomposition on a

$$-\Delta^D_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta^D_{\Omega_1} \oplus -\Delta^D_{\Omega_2}.$$

$$-\Delta^N_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta^N_{\Omega_1} \oplus -\Delta^N_{\Omega_2}.$$

la preuve de cette proposition est donnée dans [52].

Définition 7.1.6. *Soient H_1 et H_2 deux opérateurs auto-adjoints non négatifs associés respectivement aux formes quadratiques q_{H_1} et q_{H_2}. On écrit $H_1 \leq H_2$ si et seulement si*

$$(i) \qquad D(q_{H_2}) \subset D(q_{H_1}).$$

$$(ii) \qquad \forall \psi \in D(q_{H_2}),\ 0 \leq q_{H_1}(\psi) \leq q_{H_2}(\psi).$$

Lemme 7.1.2. *:*

Soient H_1 et H_2 deux opérateurs auto-adjoints non négatifs définis sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathbf{L}$ un sous espace de $\mathcal{H}$ de dimension finie . On définit

$$\lambda_{H_1}(\mathbf{L}) := \sup\{\langle H_1 f, f\rangle \mid f \in \mathbf{L},\ \| f \| = 1\}.$$

$$\lambda_{H_2}(\mathbf{L}) := \sup\{\langle H_2 f, f\rangle \mid f \in \mathbf{L},\ \| f \| = 1\}.$$

On définit les deux suites $(\lambda_n^{H_1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\lambda_n^{H_2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ données par :

$$\lambda_n^{H_1} := \inf\{\lambda_{H_1}(\mathbf{L}) \mid \mathbf{L} \subseteq D(H_1),\ dim(\mathbf{L}) = n\}.$$

$$\lambda_n^{H_2} := \inf\{\lambda_{H_2}(\mathbf{L}) \mid \mathbf{L} \subseteq D(H_2),\ dim(\mathbf{L}) = n\}.$$

Si $0 \leq H_1 \leq H_2$ Alors $\forall n,\ \lambda_n^{H_1} \leq \lambda_n^{H_2}$

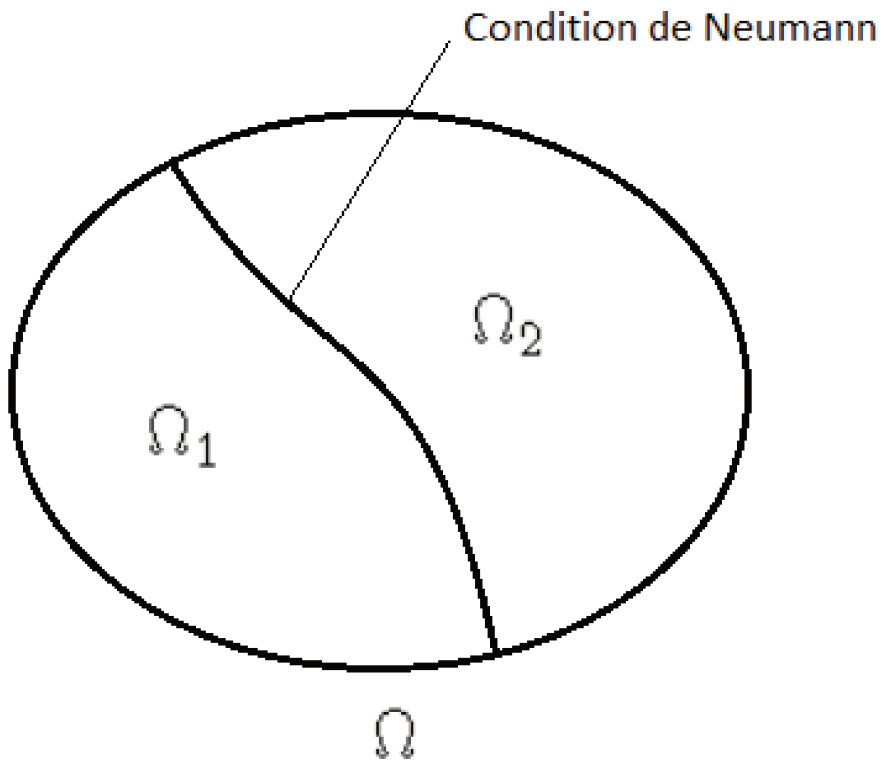
Proposition 7.1.3. *:*

Si $\Omega \subset \Omega'$ alors $-\Delta^D_{\Omega'} \leq -\Delta^D_{\Omega}$.

Dans la suite on note M^{int} et $\overline{\mathrm{M}}$ l'intérieur et l'adhérence de M respectivement.

Proposition 7.1.4. *Soient deux ouverts Ω_1 et Ω_2 disjoints inclus dans un ouvert Ω tels que $(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^{int} = \Omega$ et $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ est de mesure nulle (voir la figure.7.1) Alors*

$$0 \leq -\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq -\Delta_N^{\Omega}.$$



Bracketing de Neumann

Remarques 7.1.1. *:*

(1) la proposition7.1.4 peut être vérifiée dans le cas où on commence par le Laplacien avec des conditions aux bords de type Dirichlet et dans ce cas on impose une condition de Neumann sur la surface séparant Ω_1 et Ω_2

(2) Dans la proposition 7.1.4 est présentée la technique largement connue et utilisée de Bracketing de Neumann.

(3) On appelle technique de Bracketing de Dirichlet quand on ajoute une condition de type Dirichlet sur la surface séparant Ω_1 et Ω_2.

7.2 Spectre des opérateurs auto-adjoints

Ces resultats sont introduient dans [42].

Le spectre d'un opérateur auto-adjoint H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est défini par :

$$\sigma(H) := \{\lambda \in \mathbb{R} \quad | \, (H-\lambda)^{-1} \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})\}. \tag{7.2}$$

On a la partition spectrale suivante :

$$\sigma(H) \setminus \sigma_{ess}(H) = \sigma_d(H). \tag{7.3}$$

$\sigma_d(H)$ désigne le spectre discret de H. Il est construit par les valeurs propres isolées du spectre de H qui ont une multiplicité finie. On a, naturellement $\sigma_d(H) \subset \sigma_p(H)$.

$\sigma_{ess}(H)$ représente le spectre essentiel de H. Il est le complémentaire de $\sigma_d(H)$ ce qui revient à écrire : $\sigma_{ess}(H) := \sigma(H) \backslash \sigma_d(H)$.

Par définition, il sera constitué des points d'accumulation de $\sigma(H)$ et des valeurs propres isolées de multiplicité infinie.

Il existe une autre partition disjointe du spectre d'un opérateur auto-adjoint H mais qui est moins utilisée :

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) \cup \sigma_c(H), \tag{7.4}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_p(H) &:= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid H - \lambda \; n\,'est\ pas\ injectif\} && (7.5) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \psi \neq 0, \; \psi \in D(H), \quad H\psi = \lambda\psi\} && (7.6) \end{aligned}$$

est appelé le spectre ponctuel de H et

$$\sigma_c(H) := \{\lambda \in \mathbb{R} \quad | \quad H - \lambda \; est \; injectif \; mais \; Im(H-\lambda) \neq \mathcal{H}\} \quad (7.7)$$

est appelé le spectre continu de H.

Si λ est une valeur propre de H alors la dimension du noyau de $H - \lambda$ est appelé la multiplicité de λ.

7.3 Principe de min-max

Le principe de Min-Max s'applique aux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement. Il permet, par diverses formules dite de "Min-Max", de caractériser les valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel.

Définition 7.3.1. *(cf.[56]) Un opérateur auto-adjoint H non borné est semi-borné inférieurement s'il existe un réel c tel que :*

$$\forall \, \psi \; \in \; D(H), \; (\psi, H\psi) \; \geq \; c\|\psi\|^2.$$

A des fins de simplification on note $H \; \geq \; c$.

On definit le quotient de Rayleigh suivant

$$\mathcal{R}_H(\psi) := \frac{(H\psi, \psi)_{\mathcal{H}}}{\| \, \psi \, \|^2_{\mathcal{H}}}, \quad \forall \psi \in \; D(H).$$

On pose, pour tout entier $m \geq 1$

$$\mu_m(H) := \underset{\varphi_m \in \mathcal{V}_m^{\perp}(D(H))}{inf} \Big(\underset{\psi \in \mathcal{V}_m^{\perp}, \; \psi \neq 0}{sup} \mathcal{R}_H(\psi) \Big)$$

où $\mathcal{V}_m(V)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension m. On pose, pour tout entier $m > 1$

$$\tilde{\mu}_m(H) := \underset{\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(m-1)} \in \mathcal{H}}{inf} \Big(\underset{\psi \in [\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(m-1)}]^{\perp}_{D(H)}, \; \psi \neq 0}{sup} \mathcal{R}_H(\psi) \Big)$$

avec

$$[\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(m-1)}]^{\perp}_{D(H)} := \{\psi \in D(H)\ (\psi, \varphi^{(i)})_{\mathcal{H}} = 0,\ i = 1, .., m-1\}$$

En utilisant ces notations, on présente ces résultats :

Théorème 7.3.1. *(cf.[3])*

(1) *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$\mu_m(H) = \tilde{\mu}_m(H), \quad \textit{pour tout } m > 1.$$

(2) *Principe du Min-Max*

On note $\lambda_{inf}(H) = inf\sigma_{ess}(H)$, la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur H (On pose $\lambda_{inf} = +\infty$ si $\sigma_{ess}(H) = \emptyset$) et $\mathcal{N}(H)$ le nombre de valeur propres de H strictement inférieures à $\lambda_{inf}(H)$ (comptées avec leur ordres de multiplicité), alors on a :

• *$\mu_m(H) < \lambda_{inf}(H)$ si et seulement si $\mathcal{N}(H) \geq m$. Dans ce cas $\mu_1(H)$, $\mu_2(H)$,...,$\mu_m(H)$ représentent exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur H*

• *$\mu_m(H) = \lambda_{inf}(H)$ si et seulement si $\mathcal{N}(H) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(H) = \lambda_{inf}(H)$, pouur tout entier $n \geq m$*

7.4 Critère de Weyl

Théorème 7.4.1. *(cf. [52, 56])*

Soit H un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que $\lambda \in \sigma(H)$ si et seulement s'il existe une suite de vecteurs $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(H)$ vérifiant :

1. *$\forall n \in \mathbb{N},\ \| \psi_n \| = 1$,*
2. *$H\psi_n - \lambda\psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathcal{H}$*

En outre, on dit que $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$ si et seulement si $(\psi_n)_n$ satisfait de plus

$$\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0 \quad \textit{dans } \mathcal{H} \tag{7.8}$$

La preuve de ce théorème peut être consultée dans [56]. Une suite de vecteurs vérifiant (1), (2) et (7.8) est appelée une suite de Weyl

7.5 Extension de Friedrichs

Soit H un opérateur symétrique et borné inférieurement. On définit la forme sesquilinéaire q par $q(\varphi,\psi) := (\varphi, H\psi)$, pour tout φ,ψ dans $D(q) := D(H)$, le domaine de q. La forme quadratique q est alors fermable ; soit $\tilde{q}$ sa clôture. Par le premier théorème de représentation, l'opérateur $\tilde{H}$ associé à la forme $\tilde{q}$ est auto-adjoint, borné inférieurement et on a $\tilde{H} \supset H$. L'opérateur $\tilde{H}$ satisfait :

$$\begin{aligned} D(\tilde{H}) &= \{\psi \in D(\tilde{q}) \quad | \, \exists \eta \in \mathcal{H},\ \forall \varphi \in D(\tilde{q}), \quad \tilde{q}(\varphi,\psi) = (\varphi,\eta)\}, \\ \tilde{H}\psi &= \eta. \end{aligned}$$

De plus, $D(q) = D(H)$ est un core de $\tilde{q}$. Un tel opérateur est appelé l'opérateur extension de Friedrichs (cf.[52]).

7.6 L'inégalité de Hardy

L'inégalité de Hardy unidimensionnelle classique établie par le mathématicien anglais G.H.Hardy [29] est énoncée comme suit :

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_0^1((0,+\infty)), \qquad \int_0^{+\infty} \mid \psi'(s) \mid^2 ds \geq \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\mid \psi(s) \mid^2}{s^2} ds. \tag{7.9}$$

une autre façon d'écrire l'inégalité de Hardy unidimensionnelle est la suivante :

$$\int_{-\infty}^{s_0} \frac{\mid \varphi(s) \mid^2}{(s-s_0)^2} ds \leq 4 \int_{-\infty}^{s_0} \mid \varphi'(s) \mid^2, \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \textit{ tel que } \varphi(s_0) = 0. \tag{7.10}$$

Une conséquence immédiate qui découle de l'inégalité unidimensionnelle (7.9) est une seconde inégalité établie pour des espaces de dimension supérieure

ou égale à 3 :

$$Soit\ d \geq 3, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mid \nabla \psi(x) \mid^2 dx \geq \frac{(d-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mid \psi(x) \mid^2}{\mid x \mid^2} dx \tag{7.11}$$

Plusieurs chercheurs se sont inspirés de l'inégalité de Hardy unidimensionnelle (7.9) pour construire d'autres inégalités similaires à (7.11) portant également le nom des inégalités de Hardy. L'importance de ce type d'inégalité est qu'elle nous permet de conclure certaine propriétés spectrales de l'opérateur étudié. En réalité, la possibilité d'établir une inégalité de Hardy en utilisant la forme quadratique d'un opérateur indique directement que le spectre discret de cet opérateur est vide. Nous nous basons sur ce critère pour effectuer plusieurs études spectrales dans la suite de la thèse.

Dans le Chapitre.4 nous avons cité quelques travaux où on utilise l'inégalité de Hardy dans des modèles variés (cf. [9, 24, 35]).

Deuxième partie

Torsion répulsive

Chapitre 8

Conditions nécessaires et résultat principal

La perturbation géométrique de type torsion a été étudiée dans plusieurs travaux. Ce qui change à chaque fois est, en effet la forme de l'angle de la torsion $\dot{\theta}$. Dans cette partie, on se propose d'étudier un tube torsadé $\Omega_\theta = \mathcal{L}_\theta(\Omega_0)$, où

$$\dot{\theta}(s) := \beta + \varepsilon(s) \tag{8.1}$$

avec β une constante réelle et $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (typiquement une fonction qui s'annule à l'infini).

Cette partie a fait l'objectif d'un article écrit par Philippe Briet, David Krejčiřík et Hiba Hammedi, intitulé « Hardy Inequalities in Globally Twisted Waveguides ». Il est publié dans le journal « Letters in mathematical physics ».

Il s'agit de l'étude de l'opérateur de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet noté $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$, associé à la forme quadratique

$$\tilde{q}^D(\psi) := \| \nabla\psi \|^2, \quad D(\tilde{q}^D) = \mathcal{H}^1_0(\Omega_\theta). \tag{8.2}$$

Cet opérateur est défini comme l'extension de Friedrichs de l'opérateur de Laplace défini dans l'espace $C_0^\infty(\Omega_\theta)$. Comme on a expliqué dans le Chapitre.5.1 de la Partie.I de cette thèse, il existe un C^1-difféomorphisme entre Ω_0 et Ω_θ ce qui implique qu'étudier $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ est équivalent à étudier un opérateur qui lui est unitairement équivalent ayant une expression plus complexe, mais défini dans le tube droit Ω_0. Cet opérateur qu'on note par H^D_θ est associé à la forme quadratique :

$$q^D_\theta = \| \nabla' \psi \|^2 + \| \partial_s \psi + \dot{\theta} \partial_\tau \psi \|^2, \quad D(q^D_\theta) = \mathcal{H}^1_0(\Omega_0). \tag{8.3}$$

L'expression de l'opérateur H^D_θ est donnée par :

$$H^D_\theta = -\Delta_\omega - (\partial_s + \dot{\theta}\partial_\tau)^2 \tag{8.4}$$

où ∂_τ et ∇' sont donnés par (5.23). Plusieurs résultats sont établis suivant les valeurs de β et ε

Si $\varepsilon \equiv 0$ et $\beta \neq 0$

Dans ce cas le tube est périodiquement torsadé. L'étude spectrale d'un tel problème est réalisée dans [23] et [11]. A l'aide d'une décomposition de type Floquet, il est démontré que

$$\sigma(-\Delta^D_{\Omega_\beta}) = [\lambda_1, +\infty), \tag{8.5}$$

où λ_1 représente la plus petite valeur propre de l'opérateur bidimensionnel $-\Delta^D_\omega - \beta^2 \partial^2_\tau$.

Si $\varepsilon \neq 0$ et $\beta = 0$

Si de plus ε est à support compact et $\dot{\varepsilon}$ est bornée, les auteurs de [24] ont pu établir l'inégalité de type Hardy suivante :

$$\forall \psi \in \mathcal{H}^1_0(\Omega_\theta), \quad \int_{\Omega_\theta} | \nabla \psi(x) |^2 - E_1 | \psi(x) |^2 \, dx \geq C_H \int_{\Omega_\theta} \frac{| \psi(x) |^2}{1 + | x |^2} dx. \tag{8.6}$$

On rappelle que E_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta^D_\omega$, l'opérateur de Laplace bidimensionnel avec des conditions aux bords de Dirichlet défini dans

$L^2(\omega)$. La constante C_H est strictement positive si et seulement si la fonction ε est non identiquement nulle et la section transverse ω n'est pas invariante par rotation par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^2$.

Si le tube Ω_θ est torsadé par un angle de torsion $\dot{\theta}$ qui s'annule à l'infini alors le spectre de l'opérateur $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ est égal à $[E_1, +\infty)$. Par conséquent l'inégalité de type Hardy (8.6) implique que le spectre de l'opérateur $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ est stable malgré la présence des perturbations locales.

Si $\beta \neq 0$ et $\varepsilon \neq 0$

Si ε est une fonction qui converge vers zero à l'infini, il est vérifié dans [11, Section.4] que $\sigma_{ess}(-\Delta^D_{\Omega_\theta}) = [\lambda_1, +\infty)$, par contre, il est prouvé dans [23] que le spectre discret est non vide si la torsion est localement ralentie, c'est à dire si elle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \dot{\theta}^2 - \beta^2 ds < 0. \tag{8.7}$$

D'après l'expression (8.1) de la torsion, cette condition est naturellement vérifiée si le produit $\beta\varepsilon$ est strictement négatif et en choisissant la fonction ε de norme supérieure suffisamment petite par rapport à $\mid \beta \mid$.

Notre objectif dans cette partie est d'établir une inégalité de type Hardy :

$$-\Delta^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \rho \tag{8.8}$$

où $\rho : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ est une fonction non triviale dans le cas d'un tube déformé par une torsion ne vérifiant pas (8.7).

On remarque bien que (8.6) est une version de (8.8) pour $\beta = 0$, puisque dans ce cas, on a $\lambda_1 = E_1$. Par contre, si $\beta \neq 0$ et ω est non invariant par rotation par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^2$, par la théorie de perturbation, on a $\lambda_1 > E_1$, par conséquent on peut déduire que dans ce cas (8.8) est une inégalité plus forte que (8.6).

Notre étude se base sur deux conjectures principales :

Conjecture 1. *L'inégalité de Hardy (8.8) est vérifiée si $\beta\varepsilon \geq 0$ et ε est non identiquement nulle.*

Conjecture 2. *L'inégalité de Hardy (8.8) est vérifiée si on remplace ε par $\alpha\varepsilon$, où ε est non identiquement nulle, de support borné et le paramètre de couplage α est choisi suffisamment grand en valeur absolue.*

Ce qui est remarquable dans la Conjecture (2) c'est qu'on n'impose aucune condition sur les signes de α, β et ε.

La torsion est dite **répulsive** si la torsion constante β et sa perturbation ε vérifient les conditions décrites dans la conjecture (1). Ceci se traduit en choisissant β et ε de même signe.

Malheureusement, on n'a pas pu démontrer les Conjectures (1) et (2) en toute généralité. En effet on est arrivé à établir la conjecture (1) sous la condition supplémentaire que la torsion constante β ainsi que sa perturbation soient de valeur petite dans un sens précisé dans le théorème suivant qui représente le résultat principal de cette partie :

Théorème 8.0.1. *:*
Soit ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $\dot{\theta} = \beta + \varepsilon$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et ϵ est une fonction bornée. Supposons que $\beta\varepsilon > 0$ et que ω n'est pas invariant par rotation et de frontière de classe C^4. Si, de plus, ε et β vérifient :

$$4 \parallel \varepsilon \parallel_\infty < \mid \beta \mid < \frac{2}{d\sqrt{23}}, \tag{8.9}$$

alors il existe une constante positive c qui dépend de β, la géométrie de ω et les propriétés de ε telle que :

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\theta)\,, \quad \int_{\Omega_\theta} |\nabla\psi(x)|^2\,dx - \lambda_1 \int_{\Omega_\theta} |\psi(x)|^2\,dx \geq c \int_{\Omega_\theta} \frac{|\psi(x)|^2}{1+|x|^2}\,dx\,. \tag{8.10}$$

Il est important de remarquer que la condition (8.9) impose que la norme supérieure de la fonction de perturbation locale ε soit inférieure à la valeur absolue de la torsion globale β perturbée.

La validité de la Conjecture (2) est uniquement validée par des arguments heuristiques et des implémentations des exemples numériques qu'on va présenter dans les prochains chapitres.

Chapitre 9

Des arguments heuristiques

Avant de commencer il faut signaler que les arguments qu'on va présenter ici sont en faveur de la Conjecture.1 et la Conjecture.2 à la fois.

Commençons par le premier argument :

9.1 Validité pour le cas des tubes fins

Soit δ un paramètre positif, non nul et notons par

$$\omega_\delta := \delta.\omega = \{\delta t,\ t \in \omega\}, \tag{9.1}$$

et par

$$\Omega_\theta^\delta := R_\theta(s).X, \quad X^t := (s, t_2, t_3) \in \mathbb{R} \times \omega_\delta. \tag{9.2}$$

Le spectre de l'opérateur $-\Delta^D_{\Omega_\theta^\delta}$ a été préalablement étudié dans les articles [12],[48] et [39]. Dans la dernière référence les deux auteurs ont montré que

$$-\Delta^D_{\Omega_\theta^\delta} - \delta^{-2}E_1 \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} -\Delta_{\mathbb{R}} + C_\omega \dot{\theta}^2. \tag{9.3}$$

Cette relation asymptotique est vérifiée dans le sens des normes des résolvantes, après une identification convenable des espaces de Hilbert. Ici

$-\Delta_{\mathbb{R}}$ représente l'opérateur de Laplace unidimensionnel dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $D(-\Delta_{\mathbb{R}}) := H^2(\mathbb{R})$

et $C_\omega :=\| \partial_\tau \chi_1 \|^2_{L^2(\omega)}$, où χ_1 représente la fonction propre normalisée de l'opérateur $-\Delta^D_\omega$ associée à la valeur propre E_1.

Notons ici que C_ω est positif si et seulement si ω n'est pas invariant par rotation par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^2$.

Notons par $\lambda_1(\delta)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta^D_{\Omega^\delta_\theta}$ (cf. la valeur propre définie par (14.3) où ω est remplacé par ω_δ.

En utilisant le comportement asymptotique $\lambda_1 = \delta^{-2}E_1 + C_\omega\beta^2 + O(\delta^2)$ quand $\delta \to 0$, il résulte de la limite donnée dans (9.3) que

$$-\Delta^D_{\Omega_\delta} - \lambda_1(\delta) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} -\Delta_{\mathbb{R}} + C_\omega(\dot\theta^2 - \beta^2). \tag{9.4}$$

Il faut regarder cette convergence dans le sens des normes des résolvantes.

Il vient que la condition (8.7) est, en effet, une condition suffisante pour montrer que le spectre discret est non vide au-dessous du seuil du spectre essentiel au moins pour des valeurs petites de δ.

D'autre part on ne s'attend pas à avoir du spectre discret non vide si $\dot\theta^2 - \beta^2 = \varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon > 0$. Cette condition recouvre évidement la condition de la Conjecture.(1) où $\beta\varepsilon > 0$.

Au même temps, si on remplace ε par $\alpha\varepsilon$ dans l'expression (8.1),on obtient que

$$-\Delta_{\Omega^\delta_\theta} - \lambda_1(\delta) \longrightarrow H_\alpha := -\Delta_{\mathbb{R}} + C_\omega(\alpha^2\varepsilon^2 + 2\alpha\beta\varepsilon). \tag{9.5}$$

L'opérateur de Schrödinger unidimensionnel H_α dans la partie droite de (9.5) dépend du paramètre du couplage $\alpha \in \mathbb{R}$. Sous quelques hypothèses sur ε, H_α n'admet pas de spectre négatif si la valeur absolue du paramètre de couplage $\mid \alpha \mid$ est suffisamment grande (c'est la condition de la Conjecture.(2)). Ceci est évident si ε est la fonction caractéristique.

En général, le problème consiste à prendre en compte les petits intervalles au tour des points où la fonction continue ε s'annule. La proposition suivante

présente une condition suffisante pour assurer la positivité de l'opérateur H_α :

Proposition 9.1.1. *Soit ε une fonction continue et supposons que son support est la fermeture d'une réunion finie d'intervalles ouverts bornés. Alors, il existe un nombre positif α_0 qui dépend de β, C_ω et des propriétés de ε tel que $H_\alpha \geq 0$ pour tout $|\alpha| \geq \alpha_0$.*

La preuve de cette proposition nécessite la vérification du résultat auxiliaire qu'on donne dans le lemme suivant :

Lemme 9.1.2. *:*
Soient a, a', b, b' des réels tels que $-\infty < a < a' < b' < b < +\infty$. Alors on a :

$$\big[-\Delta^N_{(a,b)} + \alpha\chi_{(a',b')}\big]^{-1} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{\mathrm{s}} \big[-\Delta^{ND}_{(a,a')}\big]^{-1} \oplus 0 \oplus \big[-\Delta^{DN}_{(b',b)}\big]^{-1} \tag{9.6}$$

avec $-\Delta^N_{(a,b)}$ est l'opérateur de Laplace défini sur $L^2((a,b))$ avec des conditions aux bords de Neumann, $-\Delta^{ND}_{(a,a')}$ est l'opérateur de Laplace avec des conditions aux bords de Neumann en $\{a\}$ et des conditions aux bords de Dirichlet en $\{a'\}$, $-\Delta^{DN}_{(b',b)}$ est l'opérateur de Laplace défini dans $L^2((b',b))$ avec des conditions aux bords de Dirichlet en $\{b'\}$ et des conditions aux bords de Neumann en $\{b\}$ et la somme directe correspond à la décomposition $L^2((a,b)) \simeq L^2((a,a')) \oplus L^2((a',b')) \oplus L^2((b',b))$.

<u>Preuve du Lemme.9.1.2</u>

On se donne $F \in L^2((a,b))$, soit $\psi_\alpha := [-\Delta^N_{(a,b)} + \alpha\chi_{(a',b')} + 1]^{-1}F$. Cette inégalité satisfait la formulation faible de l'équation de la résolvante :

$$\int_a^b \bar{v}'(x)\,\psi'_\alpha(x)\,dx + \alpha\int_{a'}^{b'} \bar{v}(x)\,\psi_\alpha(x)\,dx + \int_a^b \bar{v}(x)\,\psi_\alpha(x)\,dx = \int_a^b \bar{v}(x)\,F(x)\,dx \tag{9.7}$$

pour tout $v \in \mathcal{H}^1((a,b))$. En choisissant $v = \psi_\alpha$, on obtient que :

$$\int_a^b |\psi'_\alpha(x)|^2\,dx + \alpha \int_{a'}^{b'} |\psi_\alpha(x)|^2\,dx + \int_a^b |\psi_\alpha(x)|^2\,dx = \int_a^b \bar{\psi}_\alpha(x)\,F(x)\,dx\,, \tag{9.8}$$

On déduit alors que :

$$\|\psi_\alpha\|^2_{\mathcal{H}^1((a,b))} + \alpha\,\|\psi_\alpha\|^2_{L^2((a',b'))} \leq \|\psi_\alpha\|_{L^2((a,b))}\|F\|_{L^2((a,b))}\,. \tag{9.9}$$

Il vient que $(\psi_\alpha)_{\alpha>0}$ est une famille bornée dans $\mathcal{H}^1((a,b))$ donc une famille d'opérateurs pré-compacts dans la topologie faible de cet espace. Notons par ψ_∞ la limite faible de ψ_α quand $\alpha \to \infty$. Pour une suite croissante de nombres positifs, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_k \to \infty$ quand $k \to \infty$, $\{\psi_{\alpha_k}\}_{k\in\mathcal{N}}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}^1((a,b))$ vers ψ_∞. En réalité, on peut assumer que $(\psi_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2((a,b))$, puisque l'injection $\mathcal{H}^1((a,b)) \hookrightarrow L^2((a,b))$ est compacte. En divisant (9.9) par α_k, on peut également voir que

$$\|\psi_{\alpha_k}\|^2_{L^2((a',b'))} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.10}$$

Par conséquent, $\psi_\infty = 0$ sur $[a',b']$ (il faut toujours se rappeler de l'injection $\mathcal{H}^1((a,b)) \hookrightarrow C^0([a,b])$).

En particulier, ψ_∞ satisfait les conditions de Dirichlet en a', b'. En choisissant dans (9.7) une fonction test v qui s'annule sur $[a',b']$, et en se restreignant à la suite ψ_{α_k} et en prenant la limite lorsque $k \to \infty$, on obtient que ψ_∞ est une solution du problème de valeurs aux bords :

$$\begin{cases} -\psi''_\infty + \psi_\infty = F & \text{sur} \quad (a,a') \cup (b',b)\,, \\ \psi'_\infty = 0 & \text{pour} \quad a, b\,, \\ \psi_\infty = 0 & \text{pour} \quad a', b'\,. \end{cases} \tag{9.11}$$

On a alors vérifié que

$$\psi_\infty = \big[-\Delta^{ND}_{(a,a')}\big]^{-1}F \oplus 0 \oplus \big[-\Delta^{DN}_{(b',b)}\big]^{-1}F \tag{9.12}$$

La même limite est obtenue pour n'importe quelle limite faible $\{\psi_\alpha\}_{\alpha>0}$. Par conséquent, ψ_α converge fortement sur $L^2((a,b))$ vers ψ_∞ quand $\alpha \to \infty$, Ce qui fallait démontrer $\square$.

Comme les résolvantes dans le Lemme.9.1.2 sont compactes, on a alors la convergence des valeurs propres, en particulier on a :

Corollaire 9.1.3.

$$\inf \sigma\big(-\Delta^N_{(a,b)} + \alpha\chi_{(a',b')}\big) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \min\left\{ \left(\frac{\pi}{2(a'-a)}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2(b-b')}\right)^2 \right\} \tag{9.13}$$

Maintenant, on est en mesure de donner la preuve de la Proposition.9.1.1 :

Preuve de la Proposition.9.1.1

En redéfinissant β et ε utilisés dans (9.5), sans perdre de généralité, on peut supposer que la constante C_ω est égale à 1 et considérons l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel défini dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$H_\alpha := -\Delta_{\mathbb{R}} + V_\alpha, \quad D(H_\alpha) = D(-\Delta_{\mathbb{R}}) = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}), \tag{9.14}$$

avec le potentiel

$$V_\alpha := (\alpha\varepsilon + \beta)^2 - \beta^2 = \alpha^2\varepsilon^2 + 2\alpha\beta\varepsilon. \tag{9.15}$$

On suppose que $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact et $\beta \in \mathbb{R}$. Comme on n'a pas de restrictions sur le choix du signe de β, on peut supposer, également sans perdre de généralité, que le paramètre de couplage α est positif. On démontre la Proposition.9.1.1 en considérant la limite de l'opérateur H_α quand $\alpha \to \infty$. Le support de ε est la fermeture d'une réunion d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts I_n. Notons par $H_\alpha^{I_n}$ l'opérateur défini dans $L^2(I_n)$ de même expression que H_α mais considéré sur I_n et qui satisfait la condition de Neumann sur ∂I_n. En d'autres termes, $H_\alpha^{I_n} = -\Delta^N_{I_n} + V_\alpha$, où $-\Delta^N_{I_n}$ est le Laplacien de Neumann dans $L^2(I_n)$. C'est

clair que

$$\inf \sigma(H_\alpha) \geq \min \left\{ 0, \inf_n \inf \sigma(H_\alpha^{I_n}) \right\} . \tag{9.16}$$

Ici $\inf \sigma(H_\alpha^{I_n})$ représente la plus petite valeur propre de l'opérateur $H_\alpha^{I_n}$, puisque ce dernier est un opérateur à résolvante compacte. Notre stratégie pour démontrer la Proposition.9.1.1 est de prouver que chaque $\inf \sigma(H_\alpha^{I_n})$ est positif pour tout α suffisamment grand.

En se rappelant de (9.16), fixons n et considérons la plus petite valeur propre de $H_\alpha^{I_n}$ qu'on note par $\inf \sigma(H_\alpha^{I_n})$. Soit I'_n un sous intervalle ouvert quelconque de I_n tel que $\overline{I'_n} \subset I_n$. Alors ils existent des constantes positives $c_n = c_n(\beta, \varepsilon \restriction I'_n)$ et $\alpha_n = \alpha_n(\beta, \varepsilon \restriction I'_n)$ telles que $V_\alpha \geq c_n \alpha^2$ sur I'_n pour tout $\alpha \geq \alpha_n$. Au même temps, on a $V_\alpha \geq -\beta^2$ sur tout l'intervalle I_n. Par conséquent on a,

$$H_\alpha^{I_n} \geq -\Delta_{I_n}^N + c_n \alpha^2 \chi_{I'_n} - \beta^2 \chi_{I_n \setminus I'_n}. \tag{9.17}$$

Dans la partie droite de l'inégalité on a un opérateur sur lequel on peut appliquer le Lemme.9.1.2 ainsi que son Corollaire.9.1.3. En choisissant I'_n d'une manière à rendre $|I_n \setminus I'_n|$ suffisamment petit, on obtient que $\inf \sigma(-\Delta_{I_n}^N + c_n \alpha^2 \chi_{I'_n})$ sera plus grand que β^2 pour tout α suffisamment grand, et donc $\inf \sigma(H_\alpha^{I_n})$ est positif.

En générale, le problème est que les constantes mesurant la grandeur de α dépendent de n, donc on n'a pas de contrôle uniforme sur la valeur minimale qui apparait dans (9.16). Ce problème ne se pose pas sous l'hypothèse de la Proposition.9.1.1 où on a supposé que le support de ε est la fermeture d'une réunion finie d'intervalles ouverts (On rappel qu'en général il s'agit d'une réunion dénombrable d'intervalles ouverts). Par suite, on obtient le résultat désiré mais sous une hypothèse de plus. □

La question qui se pose naturellement est : Comment étendre ces résultats d'asymptotique pour des δ non infiniment petits (i.e. des tube qui ne sont pas fins) et comment peut-on passer de la positivité de l'opérateur à la

démonstration de l'existence d'une inégalité de type Hardy ?

9.2 Argument géométrique

L'argument heuristique qu'on va présenter maintenant repose sur l'imagination du lecteur seulement. Supposons que la fonction ε est la fonction constante par morceaux suivante :

$$\varepsilon(s) := \begin{cases} \alpha > 0 & \text{si} \quad |s| \leq s_0\,, \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{9.18}$$

Si l'origine de $\mathbb{R}^2$ est à l'extérieur de ω, alors Ω converge, dans un sens géométrique, quand $\mid \alpha \mid \longrightarrow \infty$ vers l'union de deux demi-tubes disjoints :

$\Omega_- := \Omega \cap \{(s, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad s < -s_0\}$

et $\Omega_+ := \Omega \cap \{(s, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad s > s_0\}$.

En adaptant la preuve de la Section.10.2, c'est facile de voir que le spectre du Laplacien de Dirichlet considéré dans chacun des demis tubes ne commence pas en dessous de λ_1. De plus, à cause de la présence de la condition de Dirichlet à $\{|s| = s^0\}$ et en utilisant l'inégalité de Hardy usuelle (7.9), les opérateurs $-\Delta^D_{\Omega_+} - \lambda_1$ et $-\Delta^D_{\Omega_-} - \lambda_1$ satisferont une inégalité de Hardy de type (8.8).

Si l'origine de $\mathbb{R}^2$ est dans ω, alors Ω_θ converge, dans un sens géométrique, quand $\alpha \to \infty$ vers un ensemble composé de Ω_-, Ω_+ et une canal tubulaire connectant Ω_- et Ω_+ de rayon $dist(0, \partial\omega)$. Il est possible de montrer, également, que l'opérateur de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet décalé par λ_1 satisfait une inégalité de type Hardy dans ce domaine.

Cet argument représente un appui important, d'un point de vue géométrique, pour la validité de la Conjecture.(2), au moins dans le cas particulier de ε.

Pour démontrer la validité des Conjectures.(1) et (2) on a effectué , également des simulations numériques.

9.3 Simulations numériques

L'idée générale derrière ces simulations est de calculer le seuil du spectre de l'opérateur H_θ^D et de le comparer avec le seuil de son spectre essentiel qui représente la plus petite valeur propre de l'opérateur bidimensionnel $-\Delta_\omega^D - \beta^2\partial_\tau^2$.

Pour se fixer les idées, on va prendre une section transversale ω de la forme d'un carré, en effet $\omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ et $\beta = 1$.

Pour contrôler la norme infinie de la fonction ε on a ajouté un paramètre de couplage $\alpha \in \mathbb{R}$ devant ε.

Comme on ne peut pas manipuler des tubes infinis, nous avons réalisé nos calculs numériques sur des tubes finis qu'on note $\Omega_L := \omega \times (-L, L)$, avec L de valeur suffisamment grande qui a permis d'avoir des valeurs propres stables insensibles à des valeurs plus larges de L. On a réalisé nos calculs sur deux types de fonction ε : Le premier choix , est le choix le plus simple et le moins compliqué pour nos calculs, il s'agit de la fonction caractéristique :

$$\varepsilon_1(s) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |s| \leq 1\,, \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{9.19}$$

Le deuxième choix de fonction est la fonction chapeau donné par :

$$\varepsilon_2(s) := \begin{cases} 1 - |s| & \text{si} \quad |s| \leq 1\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases} \tag{9.20}$$

Dans la Figure 9.1 on représente (en couleur bleu) la variation de la plus petite valeur propre $-\Delta_{\Omega_L}^D$ en fonction de α.

La ligne horizontale (en rouge) correspond à l'énergie λ_1, qui est le seuil du spectre essentiel de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$,

Les régions où la courbe en bleu est en dessus de la ligne en rouge correspondent aux estimations du seuil du spectre de l'opérateur $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ pour des valeurs de α qui donnent un spectre discret vide. Par conséquent, on s'attend qu'une inégalité de type Hardy (8.8) soit valide dans ces régions.

Il est bien clair que les deux courbes (droite et gauche) confirment nos Conjectures 1 et 2. En effet, $\inf \sigma(-\Delta^D_{\Omega_L}) > \lambda_1$ pour tout $\alpha > 0$ (Conjecture 1) et pour $\alpha < \alpha^* < 0$ (Conjecture 2). D'une manière approximative, on a $\alpha_1^* \approx -2$ et $\alpha_2^* \approx -3$ pour le cas où ε est la fonction caractéristique (9.19) et le cas de la fonction chapeau (9.20) respectivement. Il est remarquable que les valeurs critiques de α^* sont très proches des valeurs de α pour lesquelles la condition (8.7). En réalité, (8.7) nous indique que le spectre discret de l'opérateur $-\Delta^D_\Omega$ est non vide si $\alpha \in (-2, 0)$ et $\alpha \in (-3, 0)$ pour les choix de fonctions (9.19) et (9.20) respectivement.

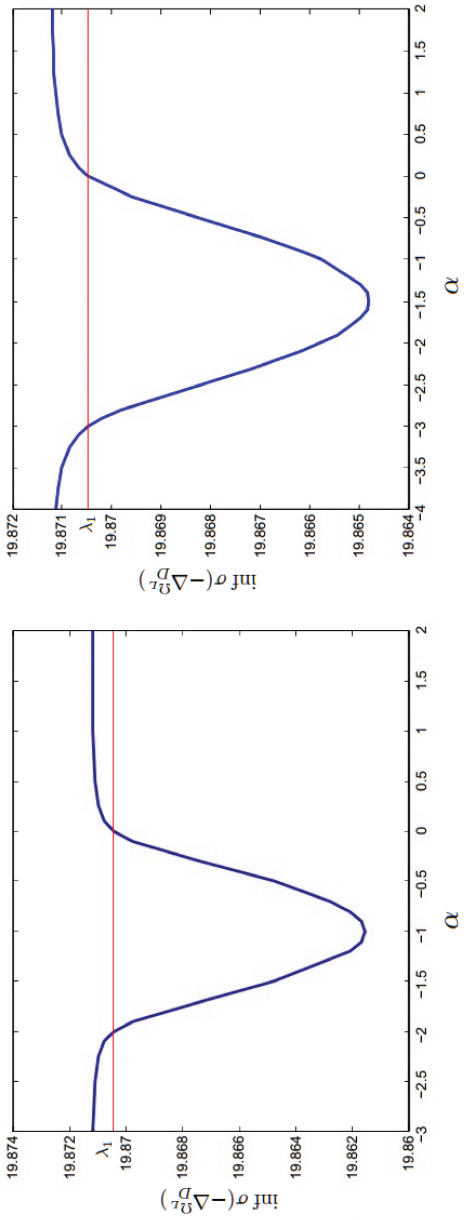


Figure 9.1 – Graphe de la variation de $\inf \sigma(-\Delta^D_{\Omega_L})$ en fonction des valeurs de α pour deux choix de fonctions (((9.19) et (9.20)) et pour $L = 100$. La ligne horizontale en rouge correspond à l'énergie $\lambda_1 = \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta^D_{\Omega_\theta})$.

Chapitre 10

Une inégalité de Hardy pour une torsion répulsive

Dans ce long chapitre on va essayer de donner une preuve bien claire et organisée pour le Théorème.8.0.1, qui représente le résultat principal qu'on a établi pour une torsion répulsive (i.e. $\beta\varepsilon \geq 0$).

Par contre, nous avons établi plusieurs résultats intermédiaires qui sont eux même intéressants, surtout que parmi ces résultats il y a quelques uns qu'on a pu établir sans la restriction du signe du produit $\beta\varepsilon$ ou d'autres conditions.

10.1 Décomposition

Comme on a vu préalablement, la définition du tube torsadé Ω_θ se réalise à l'aide d'un C^1-difféomorphisme qui construit le tube torsadé à partir du tube droit Ω_0 . En passant aux coordonnées curvilignes $(s, t_2, t_3) \in \Omega_0$ Le Laplacien de Dirichlet $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ dans $L^2(\Omega_\theta)$ est identifié (cf. [35]) pour plus de

détails) à l'opérateur H_θ^D dans $L^2(\Omega_0)$ associé à la forme quadratique

$$q_\theta^D(\psi) := \|\partial_s\psi + \dot\theta\partial_\tau\psi\|^2 + \|\nabla'\psi\|^2\,, \quad D(q_\theta^D) := \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)\,. \tag{10.1}$$

Comme on a supposé que $\dot\theta$ soit bornée, l'espace $C_0^\infty(\Omega_0)$ est un corps de q_θ^D. Par conséquent on peut faire nos calculs pour des fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\omega)$ On rappelle que $\mathcal{J}_1$ est la fonction propre de l'opérateur bidimensionnel $-\Delta_\omega^D - \beta^2\partial_\tau^2$ associée à la valeur propre λ_1. $\mathcal{J}_1$ est choisi positive et normalisée à 1 dans $L^2(\omega)$.

Comme on s'intéresse aux propriétés spectrales de l'opérateur H_θ^D au voisinage du seuil de son spectre essentiel λ_1 il est très utile d'utiliser la décomposition suivante :

$$\psi(s,t) = \mathcal{J}_1(t)\phi(s,t)\,, \tag{10.2}$$

où ϕ est une fonction de $C_0^\infty(\Omega_0)$ définie par la décomposition (10.2).

Par un calcul direct, en utilisant cette décomposition, on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\psi) &:= q_\theta^D(\psi) - \lambda_1\|\psi\|^2 \\ &= \|\partial_s\psi + \varepsilon\partial_\tau\psi + \beta\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + 2(\partial_s\psi + \varepsilon\partial_\tau\psi, \beta\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1) \\ &= \|\partial_s\psi\|^2 + \|\varepsilon\partial_\tau\psi\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + \|\beta\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 \\ &\quad + 2(\partial_\tau\psi, \beta\varepsilon\partial_\tau\psi) + 2(\partial_s\psi, \varepsilon\partial_\tau\psi) + 2(\partial_s\psi, \beta\partial_\tau\psi)\,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Cette décomposition va jouer un rôle primordial dans la preuve de notre Théorème.8.0.1.

Avant d'entamer le cas de torsion perturbé, on se pose la question suivante : Est-il possible de voir la positivité de $Q(\psi)$ pour une torsion périodique non perturbé ?

10.2 Positivité pour une torsion périodique

Il n'est pas clair, de l'expression de $Q(\psi)$ donnée par (10.3) que $Q[\psi] \geq 0$ si $\beta\varepsilon \geq 0$. En réalité, la positivité n'est pas tout à fait évidente même pour le

cas où la perturbation ε est nulle (tube périodiquement torsadé). par contre on peut l'établir comme suit :

Si $\varepsilon = 0$, (10.3) se réduit à :

$$Q(\psi) = \|\partial_s \psi\|^2 + \|\mathcal{J}_1 \nabla' \phi\|^2 + \|\beta \mathcal{J}_1 \partial_\tau \phi\|^2 + 2(\partial_s \psi, \beta \partial_\tau \psi)\,. \tag{10.4}$$

Le dernier terme de la partie droite de (10.4) s'écrit comme suit :

$$2(\partial_s \psi, \beta \partial_\tau \psi) = 2(\partial_s \psi, \beta \mathcal{J}_1 \partial_\tau \phi) + 2(\partial_s \psi, \beta \phi \partial_\tau \mathcal{J}_1)\,. \tag{10.5}$$

Par une intégration par parties par rapport à la variable longitudinale s, le second terme de la partie droite de l'égalité (10.5) est égal à zero :

$$2(\partial_s \psi, \beta \phi \partial_\tau \mathcal{J}_1) = \frac{1}{2}\beta \int_{\mathbb{R}\times\omega} (\partial_s \phi^2(s,t))(\partial_\tau \mathcal{J}_1^2(t)) ds dt = 0\,. \tag{10.6}$$

Par conséquent l'expression de $Q(\psi)$ devient :

$$Q(\psi) = \|\partial_s \psi + \beta \mathcal{J}_1 \partial_\tau \phi\|^2 + \|\mathcal{J}_1 \nabla' \phi\|^2 \geq 0\,. \tag{10.7}$$

Ceci signifie que, $H_\theta^D - \lambda_1 \geq 0$. A l'exception du cas où $\psi = 0$ (i.e. $\phi = 0$), l'inégalité (10.7) est toujours stricte. D'autre part, inégalité (10.7) devient stricte asymptotiquement lorsque $N \to \infty$ quand on considère la suite de fonction $\psi_N(x) = \phi_N(s)\mathcal{J}_1(x')$, où

$$\phi_N(s) := \begin{cases} 1, & \text{si } |s| \leq N\,; \\ \frac{2N-|s|}{N}, & \text{si } N < |s| < 2N\,; \\ 0, & \text{sinon}\,; \end{cases} \tag{10.8}$$

Par conséquent, $H_\theta^D - \lambda_1$ est critique dans un sens où ajouter un potentiel régulier, négatif, non identiquement nul et de petite valeur, d'une manière arbitraire à $H_\theta^D - \lambda_1$ conduit à l'apparition d'un spectre négatif. Ceci montre qu'il n'est pas possible d'avoir une inégalité de Hardy (8.8) si $\varepsilon = 0$ (i.e. une torsion constante $\dot{\theta} = \beta \neq 0$).

La question qui se pose naturellement maintenant est : a-t-on la positivité pour le cas d'une torsion répulsive ?

10.3 Positivité pour une torsion répulsive

En utilisant l'estimation (10.6), on réécrit la deuxième ligne de (10.3) comme suit :

$$Q(\psi) = \|\partial_s\psi - \varepsilon\partial_\tau\psi + \beta\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + 2(\varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1, \beta\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1) + 2(\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \beta\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1)\,. \tag{10.9}$$

On remarque bien que le terme avant dernier de la partie droite de l'égalité (10.9) est non négatif quand $\beta\varepsilon \geq 0$, en particulier pour une torsion répulsive.

Dans la suite, on va adopte cette restriction de signe.

Le dernier terme de la partie droite de l'égalité (10.9) est estimé en utilisant l'inégalité de Schwarz suivie par une inégalité de Young :

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \beta\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1) &\geq -2\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big\|\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big\| \\ &\geq -\delta\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big\|^2 - \frac{1}{\delta}\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big\|^2\,, \end{aligned} \tag{10.10}$$

pour δ positive. Le premier terme de la partie droite de (10.10) peut être contrôlé par l'avant dernier terme de la partie droite de l'égalité (10.9). On estime le deuxième terme de la partie droite de (10.10) par l'inégalité :

$$|\partial_\tau\phi| \leq d\,|\nabla'\phi|\,, \tag{10.11}$$

Ce terme sera contrôlé par le deuxième terme de la partie droite de (10.9) sous condition que $\beta\varepsilon$ est de valeur petite. Plus précisément, on a

$$Q(\psi) \geq \|\partial_s\psi + \varepsilon\partial_\tau\psi + \beta\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 + (2-\delta)\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big\|^2 + \left[1 - \frac{\|\beta\varepsilon\|_\infty\, d^2}{\delta}\right]\|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2\,. \tag{10.12}$$

Par conséquent, en choisissant $\delta = 2$, on arrive à démontrer la positivité :

Proposition 10.3.1. *On a $H_\theta^D - \lambda_1 \geq 0$ si le produit $\beta\varepsilon \geq 0$ et*

$$\|\beta\varepsilon\|_\infty\, d^2 \leq 2. \tag{10.13}$$

Cette proposition va nous permettre d'établir une inégalité de Hardy locale :

10.4 Une inégalité de Hardy locale

Supposons maintenant que $\beta\varepsilon > 0$, ceci signifie que nous sommes dans la situation de torsion globale répulsive. Il est important de rappeler que des inégalités de Hardy telles que (8.6) sont préalablement établies pour le cas d'une torsion locale (i.e. $\beta = 0$ et ε est à support compact) cf. [24] et [35]).

Dans la section précédente on a imposé que $\beta\varepsilon$ vérifie (10.13). Dans ce qui suit, on a besoin d'une condition plus forte que (10.13). En effet on suppose que

$$\|\beta\varepsilon\|_\infty d^2 < 2 \tag{10.14}$$

En choisissant dans (10.12) $\delta = \|\beta\varepsilon\|_\infty d^2$, en négligeant le premier terme de la partie droite de l'inégalité et en utilisant la décomposition (10.2) on obtient

$$Q(\psi) \geq (2 - \|\beta\varepsilon\|_\infty d^2) \left\| \sqrt{\beta\varepsilon}\, \frac{\partial_\tau \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_1} \psi \right\|^2 . \tag{10.15}$$

Cette inégalité est établie pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Par contre, on sait que $C_0^\infty(\Omega_0)$ est dense dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$, donc le résultat est valable pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$. Par conséquent (10.15) représente une inégalité de type Hardy (8.10) que nous présenterons dans le théorème suivant

Théorème 10.4.1. *:*
Soit $\beta\varepsilon \geq 0$ et $\beta\varepsilon \neq 0$. Alors

$$H_\theta^D - \lambda_1 \geq (2 - \|\beta\varepsilon\|_\infty d^2)\, \beta\varepsilon \left(\frac{\partial_\tau \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_1} \right)^2 . \tag{10.16}$$

Si la condition (10.14) est vérifiée, (10.16) est une inégalité de Hardy locale (cf.[35, 24]). La fonction ε peut être choisit à support compact dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie que ε s'annule sur une partie de $\mathbb{R}$. De plus, $\partial_\tau \mathcal{J}_1$ peut s'annuler sur une partie de $\overline{\omega}$. Par contre , il est important de signaler que $\partial_\tau \mathcal{J}_1$ ne peut pas être nulle sur une partie de ω de mesure positive, sans que ω ne soit

invariant par rotation. En réalité, Si on applique ∂_τ sur l'équation $(-\Delta_\omega - \beta^2\partial_\tau^2)\mathcal{J}_1 = \lambda_1\mathcal{J}_1$ et en remarquant que ∂_τ commute avec Δ' on obtient que la fonction $\eta := \partial_\tau\mathcal{J}_1$ satisfait également la même équation $(-\Delta_\omega - \beta^2\partial_\tau^2)\eta = \lambda_1\eta$ dans ω où la propriété de l'unicité de la continuité (en anglais the unique continuation property) s'applique.

Finalement, on remarque que la fonction de la partie droite de l'inégalité de Hardy local (10.16) peut diverger sur $\partial\Omega$ à cause de la présence de $\mathcal{J}_1$ au dénominateur , ce qui rappelle un peu l'inégalité de Hardy unidimensionnelle classique (7.9).

10.5 Une estimation brute

Dans la suite, on continue à adopter la condition de positivité stricte du produit $\beta\varepsilon$. Notre objectif est d'étendre l'inégalité de Hardy locale (10.16) à une inégalité de type Hardy globale avec une fonction positive définie dans Ω_0 dans la partie droite de l'inégalité (10.16). Ceci peut être réalisé en utilisant la présence de $\|\partial_s\psi\|$ et $\|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|$ dans (10.12).

On revient à l'expression de $Q(\psi)$ donnée dans la deuxième ligne de l'inégalité (10.3), on emploie (10.6) et on développe davantage cette expression comme suit :

$$\begin{aligned} Q(\psi) \;=\; & \|\partial_s\psi\|^2 + \|\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 + \|\varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + \|\beta\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\|^2 \\ & + 2\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big\|^2 + 2\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big\|^2 + 4\big(\sqrt{\beta\varepsilon}\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \sqrt{\beta\varepsilon}\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big) \\ & + 2(\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1) + 2(\partial_s\psi, \varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1) + 2\big(\partial_s\psi, (\varepsilon+\beta)\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big)\,. \end{aligned} \tag{10.17}$$

D'après l'inégalité de Young appliquée pour chacun des quatre derniers terme

de (10.17) on a

$$\begin{aligned}
|2(\partial_s\psi, \varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1)| &\leq \delta_s\|\partial_s\psi\|^2 + \delta_1^{-1}\|\varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\|^2 \\
|2\big(\partial_s\psi, (\varepsilon+\beta)\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big)| &\leq \delta_2\|\partial_s\psi\|^2 + \delta_2^{-1}\|(\varepsilon+\beta)\mathcal{J}\partial_\tau\phi\|^2 \\
\big|2\big(\sqrt{\beta\varepsilon}\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \sqrt{\beta\varepsilon}\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big)\big| &\leq \delta_3\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\big\|^2 + \delta_3^{-1}\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big\|^2 \\
|2(\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi, \varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1)| &\leq \delta_4\|\varepsilon\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\|^2 + \delta_4^{-1}\big\|\varepsilon\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi\big\|^2 \qquad (10.18)
\end{aligned}$$

avec $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4$, sont des réels positifs. En utilisant les inégalités de Young (10.18), (10.17) devient

$$\begin{aligned}
Q(\psi) &\geq (1-\delta_1-\delta_2)\|\partial_s\psi\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 \\
&+ \int_{\Omega_0}\Big((1-\delta_1^{-1}-\delta_4)\varepsilon^2 + 2(1-\delta_3)\beta\varepsilon\Big)|\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1|^2\,dsdt \\
&+ \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left[(1-\delta_2^{-1})\beta^2 + (1-\delta_2^{-1}-\delta_4^{-1})\varepsilon^2 + 2(1-\delta_2^{-1}-\delta_3^{-1})\beta\varepsilon\right]|\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi|^2\,dsdt \\
&. \qquad (10.19)
\end{aligned}$$

En choisissant $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{4}$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$ et $\delta_4 = 1$, (10.19) devient

$$\begin{aligned}
Q(\psi) \geq \frac{1}{2}\|\partial_s\psi\|^2 + \|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + \int_{\mathbb{R}\times\omega}(\beta\varepsilon - 4\varepsilon^2)|\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1|^2\,dsdt \\
- \int_{\mathbb{R}\times\omega}(3\beta^2 + 4\varepsilon^2 + 10\beta\varepsilon)|\mathcal{J}_1\partial_\tau\phi|^2\,dsdt\,. \qquad (10.20)
\end{aligned}$$

Finalement si on utilise l'inégalité (10.11), on conclue que

$$Q(\psi) \geq \frac{1}{2}\|\partial_s\psi\|^2 + c_1\|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2 + c_2\big\|\sqrt{\beta\varepsilon}\,\partial_\tau\mathcal{J}_1\phi\big\|^2\,, \qquad (10.21)$$

avec

$$c_1 = 1 - d^2\left(3\beta^2 + 4\|\varepsilon\|_\infty^2 + 10\|\beta\varepsilon\|_\infty\right), \qquad c_2 = 1 - 4\frac{\|\varepsilon\|_\infty}{|\beta|}\,, \qquad (10.22)$$

c_1 et c_2 sont des constantes positives si (8.9) est vérifiée.

10.6 Étude du problème transverse

Pour tout nombre réel $\epsilon \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mu_\epsilon := \inf_{\phi\in C_0^\infty(\omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\mathcal{J}_1\nabla'\phi\|^2_{L^2(\omega)} + \epsilon^2\|\phi\partial_\tau\mathcal{J}_1\|^2_{L^2(\omega)}}{\|\mathcal{J}_1\phi\|^2_{L^2(\omega)}}\,. \qquad (10.23)$$

Considérons la forme quadratique suivante :

$$q_\epsilon(\phi) := \|\mathcal{J}_1 \nabla\phi\|^2_{L^2(\omega)} + \epsilon^2 \|\phi\partial_\tau \mathcal{J}_1\|^2_{L^2(\omega)}\,, \qquad D(q_\epsilon) := C_0^\infty(\omega) \tag{10.24}$$

dans l'espace de Hilbert $L^2(\omega, \mathcal{J}_1^2(t)dt)$ et notons par $\tilde{q}_\epsilon$ sa clôture. Alors μ_ϵ est la plus petite valeur propre de l'opérateur auto-adjoint noté h_ϵ défini dans $L^2(\omega, \mathcal{J}_1^2(t)dt)$ associé à la forme quadratique $\tilde{q}_\epsilon$.

Notre objectif maintenant est de montrer que μ_ϵ est positive à l'exception du cas où $\epsilon = 0$ ou lorsque ω est invariant par rotation par rapport à l'origine.

Lemme 10.6.1. *Supposons que la frontière de ω, $\partial\omega$ est de classe C^4. Alors h_ϵ est un opérateur à résolvante compacte.*

Preuve du Lemme.10.6.1 :

Considérons la transformation unitaire suivante :

$$U : L^2(\omega, \mathcal{J}_1(t)^2 dt) \to \; L^2(\omega) : \{\phi \mapsto \mathcal{J}_1\phi\} \tag{10.25}$$

La transformation (10.25) est bien définie puisque $\mathcal{J}_1$ est strictement positive dans ω. Alors h_ϵ est unitairement équivalent à l'opérateur $\hat{h}_\epsilon := U h_\epsilon U^{-1}$ défini dans $L^2(\omega)$. Ce dernier est associé à la forme quadratique

$$\hat{q}_\epsilon(\psi) := \tilde{q}_\epsilon(U^{-1}\psi)\,, \qquad D(\hat{q}_\epsilon) := U(D(\tilde{q}_\epsilon)) \tag{10.26}$$

Notons ici que l'espace $C_0^\infty(\omega)$, qui est un corps de la forme quadratique $\tilde{q}_\epsilon$, est invariant à gauche par les deux opérateurs U et U^{-1}. Pour tout $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, par une intégration par parties il n'est pas difficile de vérifier que :

$$\hat{q}_\epsilon(\psi) = \|\nabla\psi\|^2_{L^2(\omega)} + \epsilon^2\, v_1(\psi) + v_2(\psi) \tag{10.27}$$

où

$$v_1(\psi) := \int_\omega \left(\frac{\partial_\tau \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_1}\right)^2 \psi^2 dt\,, \qquad v_2(\psi) := \int_\omega \frac{\Delta_\omega \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_1}\, \psi^2 dt. \tag{10.28}$$

Sans le terme de potentiel $\epsilon^2 v_1 + v_2$, la forme quadratique $\hat{q}_\epsilon$ est juste la forme quadratique associée à l'opérateur de Laplace de Dirichlet $-\Delta_\omega^D$ dans $L^2(\omega)$. Le domaine de la forme quadratique associée à $-\Delta_\omega^D$ Laplacien est $\mathcal{H}_0^1(\omega)$, or on sait que $\mathcal{H}_0^1 \hookrightarrow (\omega)L^2(\omega)$ est une injection compacte. Il est donc suffisent de montrer que le domaine de la forme est stable en ajoutant $\epsilon^2 v_1$ et v_2. Pour ce faire, on va utiliser plusieurs éléments :

(i) Par la théorie standard de la régularité elliptique (cf. [17, Sec. 6.3]), on a $\mathcal{J}_1 \in \mathcal{H}^4(\omega)$. Par conséquent , $\nabla \mathcal{J}_1 \in \mathcal{H}^3(\omega)$ et $\Delta \mathcal{J}_1 \in \mathcal{H}^2(\omega)$. En utilisant l'injection de Sobolev (cf. [1, Thm. 5.4]) $\mathcal{H}^2(\omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\omega})$, on a donc $\|\Delta_\omega \mathcal{J}_1\|_\infty < \infty$ et $\|\partial_\tau \mathcal{J}_1\|_\infty \leq d\|\nabla' \mathcal{J}_1\|_\infty < \infty$.

(ii) Pour tout domaine ω tel que $\partial\omega$ est de classe C^2, il existe (cf. [18, Lem. 4.6.1]) un nombre positif α_0 tel que $\mathcal{J}_1 \geq \alpha_0 d$, où $d(t) := dist(t, \partial\omega)$.

(iii) Pour tout domaine ω de régularité plus forte, en particulier qui satisfait les présentes hypothèses de régularités, L'inégalité de Hardy $-\Delta_\omega^D \geq c_0/d^2$ est vérifiée (cf. [18, Sec. 1.5]).

D'une part, on remarque que le domaine de la forme quadratique $\hat{q}_{\epsilon,1}(\psi) := \|\nabla'\psi\|^2_{L^2(\omega)} + \epsilon^2 v_1(\psi)$ est $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$. En réalité, à partir (i)–(ii) on déduit que :

$$v_1(\psi) \leq \frac{\|\partial_\tau \mathcal{J}_1\|^2_\infty}{\alpha_0^2} \int_\omega \frac{\psi^2}{d^2} \leq \frac{\|\partial_\tau \mathcal{J}_1\|^2_\infty}{c_0\, \alpha_0^2} \|\nabla'\psi\|^2_{L^2(\omega)}, \tag{10.29}$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, de telle façon que

$$\|\nabla'\psi\|^2_{L^2(\omega)} \leq \hat{q}_{\epsilon,1}(\psi) \leq \left(1 + \frac{\|\partial_\tau \mathcal{J}_1\|^2_\infty}{c_0\, \alpha_0^2}\right) \|\nabla'\psi\|^2_{L^2(\omega)}\,, \tag{10.30}$$

où $\psi \mapsto \|\nabla'\psi\|^2_{L^2(\omega)}$ est fermé dans $\mathcal{H}_0^1(\omega)$.

D'autre part, on considère v_2 comme une petite perturbation de $\hat{q}_{\epsilon,1}$. En utilisant (i)–(ii), on obtient :

$$|v_2(\psi)| \leq \frac{\|\Delta_\omega \mathcal{J}_1\|_\infty}{\alpha_0} \int_\omega \frac{\psi^2}{d} dt \leq \frac{\|\Delta_\omega \mathcal{J}_1\|_\infty}{\alpha_0} \left(\delta \int_\omega \frac{\psi^2}{d^2} dt + \delta^{-1} \int_\omega \psi^2 dt\right), \tag{10.31}$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ et $\delta > 0$.

Maintenant, en utilisant (iii), on déduit que :

$$|v_2(\psi)| \leq b \, \|\nabla' \psi\|^2_{L^2(\omega)} + C \, \|\psi\|^2_{L^2(\omega)} \, , \tag{10.32}$$

avec

$$b := \delta \frac{\|\Delta_\omega \mathcal{J}_1\|_\infty}{c_0 \, \alpha_0} \, , \qquad C := \delta^{-1} \frac{\|\Delta_\omega \mathcal{J}_1\|_\infty}{\alpha_0} \, . \tag{10.33}$$

Comme $\|\nabla' \psi\|^2_{L^2(\omega)}$ est élémentairement bornée par $\hat{q}_{\epsilon,1}(\psi)$ et δ peut être arbitrairement choisi de valeur petite, on conclue que v_2 est une perturbation relativement bornée de $\hat{q}_{\epsilon,1}$ avec la borne relative inférieure à 1 (en réalité, c'est égale à zero). Donc les domaines de $\hat{q}_{\epsilon,1}$ et $\hat{q}_\epsilon$ coïncident et ceci est dû au résultat de stabilité (cf. [32, Thm. VI.3.4]). □

Proposition 10.6.2. *Supposons que $\partial\omega$ est de classe C^4. Si $\epsilon \neq 0$ et ω est non invariant par rotation par rapport à l'origine alors on a $\mu_\epsilon > 0$.*

Preuve de Proposition.10.6.2 :

Par le Lemme.10.6.1, Le spectre de l'opérateur h_ϵ est purement discret. En particulier, le seuil spectral μ_ϵ est une valeur propre et l'infimum de (10.23) est atteint par sa fonction propre associée $\phi \in L^2(\omega, \mathcal{J}_1(t)^2 dt)$, c'est a dire :

$$\mu_\epsilon = \frac{\|\mathcal{J}_1 \nabla' \phi\|^2_{L^2(\omega)} + \epsilon^2 \|\phi \partial_\tau \mathcal{J}_1\|^2_{L^2(\omega)}}{\|\mathcal{J}_1 \phi\|^2_{L^2(\omega)}}, \tag{10.34}$$

En supposant que $\mu_\epsilon = 0$, il vient que $\|\mathcal{J}_1 \nabla' \phi\|_{L^2(\omega)} = 0$ et $\|\partial_\tau \mathcal{J}_1 \phi\|_{L^2(\omega)} = 0$. à partir de la première identification, comme $\mathcal{J}_1$ est positive, on déduit que ϕ est une fonction constante. En utilisant ceci dans la deuxième identification, on conclut que $\|\partial_\tau \mathcal{J}_1\|_{L^2(\omega)} = 0$, ce n'est possible que si ω est invariant par rotation par rapport à l'origine. □

10.7 Positivité uniforme dans la section transverse

On revient à (10.21) et on choisit les paramètres ε, β et d de telle façon que les constantes c_1 et c_2 sont positives.

On remarque bien que les constantes c_1 et c_2 deviennent plus positives (i.e. c_1 et c_2 sont de valeur plus grande) si $\|\varepsilon\|_\infty$ diminue.

En utilisant la définition (10.23) et le théorème de Fubini, on obtient

$$Q(\psi) \geq \frac{1}{2}\|\partial_s\psi\|^2 + \left\|\sqrt{\mu}\,\psi\right\|^2, \tag{10.35}$$

avec

$$\mu(x) := c_1\,\mu_{\epsilon(s)} \qquad \text{où} \qquad \epsilon(s) := \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\,\beta\varepsilon(s)}\,. \tag{10.36}$$

Supposons que ω est différent d'un disque et d'une couronne (i.e. ω est non invariant par rotation par rapport à l'origine).

Supposons que $|\varepsilon|$ est une fonction non triviale sur un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$. Par la proposition 10.6.2 on sait que $s \mapsto \mu(s, t_2, t_3)$ est non triviale et non négative sur I (par définition, $\mu(x)$ ne dépend pas de $(t_2, t_3) \in \omega$). Par conséquent, on obtient

$$Q(\psi) \geq \frac{1}{4}\|\partial_s\psi\|^2 + \nu\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)}\,, \tag{10.37}$$

où ν est la plus petite valeur propre de l'opérateur unidimensionnel $-\frac{1}{4}\Delta_I^N + \mu$ défini dans $L^2(I)$. Notons bien que ν est positive car le potentiel μ est non-trivial et non négatif. Finalement, on est arrivé à établir le résultat crucial suivant :

Théorème 10.7.1. *Supposons que $\beta\varepsilon \geq 0$ et $\beta\varepsilon \neq 0$. Et supposons que ω est non invariant par rotation par rapport à l'origine et qu'il est de frontière $\partial\omega$ de classe C^4. Supposons que ε et β vérifient* (8.9). *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle borné sur lequel ε est non triviale alors on obtient que* (10.37) *est vérifiée pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$ avec un nombre positif ν.*

On remarque que (10.37) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$H^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \left(-\tfrac{1}{4}\Delta^{\mathbb{R}} + \nu\,\chi_I\right) \otimes 1\,, \tag{10.38}$$

où χ_I est la fonction caractéristique définie sur $I \times \omega$ et la partie droite de l'inégalité utilise l'identification suivante des espaces de Hilbert :

$$L^2(\Omega_0) \simeq L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\omega). \tag{10.39}$$

En particulier, toutefois ν est positive, on obtient une autre inégalité de type Hardy

$$H^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \nu\,\chi_{I\times\omega}\,. \tag{10.40}$$

10.8 Une inégalité de Hardy globale

La méthode suivie pour établir une inégalité de Hardy globale repose sur l'inégalité de Hardy locale préalablement établie (10.38) et l'inégalité de Hardy unidimensionnelle classiques (7.9). Par des calculs similaires a ceux utilisés dans [43] et [33, Sec. 7.2]). on démontre le théorème suivant :

Théorème 10.8.1. *Sous les hypothèses du Théorème 10.7.1, il existe une constante positive c qui dépend de β, la géométrie de ω et les propriété de ε telle que*

$$H^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \frac{c}{1+s^2} \tag{10.41}$$

est vérifiée dans le sens des formes quadratiques dans $L^2(\Omega_0)$.

Preuve du Théorème.10.8.1 :

Notons par s_0 le milieu de l'intervalle I. L'ingrédient principal de cette preuve est l'inégalité de type Hardy suivante réalisée pour l'opérateur de Schrödinger dans $L^2(\Omega_0)$ avec un potentiel construit à partir de la fonction caractéristique de $I \times \omega$:

$$\|\rho\psi\|^2 \leq 16\,\|\partial_s\psi\|^2 + (2 + \frac{64}{|I|^2})\,\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)} \tag{10.42}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$, où $\rho(s) := \frac{1}{\sqrt{1+(s-s_0)^2}}$. Cette inégalité est une conséquence de (7.9). En réalité, en suivant la méthode utilisée dans [24, Sec. 3.3], supposons que η est une fonction Lipschitzienne dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\eta(s) := \begin{cases} \frac{2|s-s_0|}{|I|}, & \text{si } |s-s_0| \leq \frac{|I|}{2}\,; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.43}$$

Pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, on écrit $\psi = \eta\psi + (1-\eta)\psi$, de telle façon que $(\eta\psi)(\cdot,t) \in \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}\backslash\{s_0\})$ pour tout $t \in \omega$. Alors, en utilisant le théorème de Fubini, on peut établir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|\rho\psi\|^2 &\leq 2\int_{\Omega_0} (s-s_0)^{-2}\,|(\eta\psi)(x)|^2\,dsdt + 2\,\|(1-\eta)\psi\|^2 \\ &\leq 8\,\|\partial_s(\eta\psi)\|^2 + 2\,\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)} \\ &\leq 16\,\|\eta\partial_s\psi\|^2 + 16\,\|(\partial_s\eta)\psi\|^2 + 2\,\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)} \\ &\leq 16\,\|\partial_s\psi\|^2 + (2+\frac{64}{|I|^2})\,\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)}\,. \end{aligned} \tag{10.44}$$

Par densité, ce résultat s'étend pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0) = D(Q) = D(q_\theta^D)$.

Le Théorème 10.7.1, nous donne que

$$Q(\psi) \geq \frac{1-\delta}{4}\|\partial_s\psi\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\partial_s\psi\|^2 + \nu\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)} \tag{10.45}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$ et $\delta \in (0,1]$, où ν est un nombre positif. En négligeant le premier terme de la partie droite de (10.45) et en utilisant (10.42), on obtient

$$Q(\psi) \geq \frac{\delta}{64}\|\rho\psi\|^2 + \left(\nu - \frac{\delta}{32}(1+\frac{32}{|I|^2})\right)\|\psi\|^2_{L^2(I\times\omega)}\,. \tag{10.46}$$

En utilisant la positivité de ν, on choisit $\delta = \min\{1, \frac{32\nu|I|^2}{(|I|^2+32)}\}$ on obtient

$$H^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \frac{c'}{1+(s-s_0)^2} \tag{10.47}$$

avec $c' = \frac{\delta}{64}$. Pour arriver à (10.41), on pose

$$c := c' \min_{s\in\mathbb{R}} \frac{1+s^2}{1+(s-s_0)^2} \tag{10.48}$$

où le minimum est une constante positive qui dépend de s_0 $\square$

Par l'équivalence unitaire entre $H^D_{\Omega_\theta}$ et $-\Delta^D_{\Omega_\theta}$ et comme la variable longitudinale s est inchangée par la rotation l'inégalité (10.41) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$-\Delta^D_{\Omega_\theta} - \lambda_1 \geq \frac{c}{1+s^2} \tag{10.49}$$

au sens des formes quadratiques dans $L^2(\Omega_\theta)$, avec la même constante c. Ceci permet d'établir le Théorème.8.0.1 comme conséquence du Théorème.10.8.1 en remarquant que $|s| \leq |x|$, où, par abus de notation, $|x|$ représente la magnitude du vecteur radial dans $\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^3$.

Chapitre 11

Appendice

Dans ce chapitre, nous allons donner les codes sources MATLAB qui nous ont permis d'effectuer les simulations numériques présentées dans la Section.9.3.

11.1 Code source pour calculer λ_1

Ce premier code que nous donnons est utilisé pour calculer la plus petite valeur propre de l'opérateur bidimensionnel $-\Delta^D - \beta^2\partial_\tau^2$ (dans la section.9.3 on a fixé la torsion constante pour $\beta = 1$).

On a également choisi $\omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$

==========

% Code pour calculer λ_1

```
close all ;
clear all ;
% On se fixe le rayon de la section transverse notée ici ly
```

$ly = 1.$;

% m représente le choix de la taille de la matrice de la discrétisation de l'opérateur 2d

$m = 19$;

% h représente le maillage qu'on va utiliser

$h = ly/(m+1)$;

% beta représente β de l'opérateur 2d $-\Delta_\omega^D - \beta^2\partial_\tau^2$

$beta = 1.$;

% initialisation de la matrice à zeros

$A = zeros(m^2)$;

for $j = 1 : m$

  for $k = 1 : m$

    $l = j + (k-1) * m$;

    $A(l,l) = (2./(h^2)) * (2. + ((beta * h)^2) * (j^2 + k^2))$;

  end end

for $j = 1 : m$

  for $k = 1 : m$

    $l = j + (k-1) * m$;

    if $(l < m * m)$ $A(l, l+1) = (*0.5 * k * (beta^2)) - ((1. + ((beta * j * h)^2))/(h^2))$;

    end

  end

end

for $j = 1 : m$

  for $k = 1 : m$

    $l = j + (k-1) * m$;

    $if(l > 1)A(l, l-1) = -((1. + (beta * j * h)^2)/(h^2)) - (0.5 * k * (beta^2))$;

    end

  end

```
end
for j = 1 : m
  for k = 1 : m
    l = j + (k − 1) ∗ m ;
    if (l < (m ∗ m) − m + 1)
     A(l, l + m) = (0.5 ∗ j ∗ (beta^2)) − ((1. + ((beta ∗ k ∗ h)^2))/(h^2));
    end
  end
end
for j = 1 : m
  for k = 1 : m
    l = j + (k − 1) ∗ m ;
    if (l > m) A(l, l − m) = −((1. + ((beta ∗ j ∗ h)^2))/(h^2)) − (0.5 ∗ k ∗
(beta^2)) ;
    end
  end
end for j = 1 : m
for k = 1 : m
  l = j + (k − 1) ∗ m ;
    if (l < m ∗ m − m)
     A(l, l + 1 + m) = 0.5 ∗ j ∗ k ∗ (beta^2) ;
    end
  end
end
for j = 1 : m
for k = 1 : m
  l = j + (k − 1) ∗ m ;
    if ((l < m∗(m−1)+1)&&(l > 1)) A(l, l+m−1) = −0.5∗j∗k∗(beta^2) ;
    end
```

```
    end
  end
  for j = 1 : m
    for k = 1 : m
      l = j + (k − 1) ∗ m ;
      if ((l > m)&&(l < m ∗ m))
       A(l, l − m + 1) = −0.5 ∗ j ∗ k ∗ (beta^2) ;
      end
    end
  end
  for j = 1 : m
    for k = 1 : m
      l = j + (k − 1) ∗ m ;
      if (l > m + 1)
       A(l, l − m − 1) = 0.5 ∗ j ∗ k ∗ (beta^2) ;
      end
    end
  end
  eig(A)
```

11.2 Cas d'une fonction caractéristique

Dans cette section nous allons donner le code source utilisé pour calculer le seuil du spectre de l'opérateur $-\Delta-(\dot{\theta}\partial_\tau+\partial_s)^2$, où ε est la fonction définie par (9.19)

```
==========================================

  close all ;
```

clear all ;

% M et N sont les paramètres responsables de la taille de la matrice (matrice de $M * N$ lignes et $M * N$ colonnes)

$N = 15$ $M = N$;

$K = N$;

$alphalist = [0, 2, 3, -0.1, -1.9, -2.25, -2.5, -2.75, -3]$;

alphaa=length(alphalist) ;

for $ii = 1 : alphaa \quad alpha = alphalist(ii)$

% a est la largeur utilisée pour des intervalles de la forme $(-a/2, a/2)$ suivant y et z)

$a = 1$;

$L = 100$;

$pi = 3.14159265$;

$mat3d = zeros(M * N * K)$;

% remplissage des autres termes

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

$l = m + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N$;

$mat3d(l, l) = ((k*pi/(2*L))^2)+(n*pi/a)^2+(m*pi/a)^2+(((n*pi)^2)/12+((m*pi)^2)/12-(m^2)/(2*n^2)-n^2/(2*m^2)-0.5)*(1+(2*alpha+(alpha^2))*((1/L)-(((-1)^k)/(k*pi))*sin(k*pi/L)))$;

$Id3(l, l) = 1$;

end

end

end

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

```
        l = m + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N;
          for j = 1 : M
            for i = 1 : N
              if((m ~= j)&&(i ~= n))
              c = j + (i - 1) * M + (k - 1) * M * N;
              mat3d(l, c) = (2 * n * i * m * j * (1 + ((-1)^(n + i))) * (1 +
((-1)^(m + j)))/(((n^2) - (i^2)) * ((m^2) - (j^2)))) * (1 + (2 * alpha + (alpha^2)) *
((1/L) - (((-1)^k)/(k * pi)) * sin(k * pi/L)));
            end
          end
        end
        end
      end
    end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
        l = m + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N;
        for j = 1 : M
          if(m ~= j)
            c = j + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N;
            mat3d(l, c) = (4*m*j*(n^2)*(1+(-1)^(m+j))/(((j-m)^2)*((m+
j)^2)))*(1+(2*alpha+(alpha^2))*((1/L)-(((-1)^k)/(k*pi))*sin(k*pi/L)));
          end
        end
        end
      end
    end
    for m = 1 : M
```

```
    for n = 1 : N
      for k = 1 : K
      l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
        for i = 1 : N
          if (n ∼= i)
            c = m + (i − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
            mat3d(l, c) = (4∗n∗i∗(m^2)∗(1+(−1)^(n+i))/(((i−n)^2)∗((i+
n)^2)))∗(1+(2∗alpha+(alpha^2))∗((1/L)−(((−1)^k)/(k∗pi))∗sin(k∗pi/L)));
          end
        end
      end
      end
  end
  for m = 1 : M
    for n = 1 : N
      for k = 1 : K
      l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
      for p=1 :K
        if(k ∼= p)
          c = m + (n − 1) ∗ M + (p − 1) ∗ M ∗ N;
          mat3d(l, c) = (2/((k−p)∗pi))∗sin((k−p)∗pi/(2∗L))∗cos((k−
p) ∗ pi/2);
          mat3d(l, c) = mat3d(l, c)−(2/((k+p)∗pi))∗sin((k+p)∗pi/(2∗
L)) ∗ cos((k + p) ∗ pi/2);
          mat3d(l, c) = mat3d(l, c)∗(2∗alpha+(alpha^2))∗(((n∗pi)^2)/12+
((m ∗ pi)^2)/12 − (m^2)/(2 ∗ (n^2)) − (n^2)/(2 ∗ (m^2)) − 0.5);
        end
      end
      end
```

```
    end
  end
  for m = 1 : M
    for n = 1 : N
      for k = 1 : K
      l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
        for j = 1 : M
          for p = 1 : K
            if ((k ∼= p)&&(j ∼= m))
              c = j + (n − 1) ∗ M + (p − 1) ∗ M ∗ N;
              mat3d(l, c) = (2/((k − p) ∗ pi)) ∗ sin((k − p) ∗ pi/(2 ∗ L)) ∗
cos((k − p) ∗ pi/2);
              mat3d(l, c) = mat3d(l, c) − (2/((k + p) ∗ pi)) ∗ sin((k + p) ∗
pi/(2 ∗ L)) ∗ cos((k + p) ∗ pi/2);
              mat3d(l, c) = mat3d(l, c) ∗ (4 ∗ m ∗ j ∗ (n^2) ∗ (1 + ((−1)^(m +
j))) ∗ (2 ∗ alpha + (alpha^2))/(((j − m)^2) ∗ ((m + j)^2)));
            end
          end
        end
      end
    end
  end for m = 1 : M
  for n = 1 : N
    for k = 1 : K
      l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;        for i = 1 : N
        for p = 1 : K
          if ((i ∼= n)&&(p ∼= k))
            c = m + (i − 1) ∗ M + (p − 1) ∗ M ∗ N;
```

$mat3d(l,c) = (2/((k-p)*pi))*sin((k-p)*pi/(2*L))*cos((k-p)*pi/2);$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c) - (2/((k+p)*pi))*sin((k+p)*pi/(2*L))*cos((k+p)*pi/2);$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c)*(4*n*i*(m^2)*(2*alpha+(alpha^2))*(1+((-1)^(n+i)))/(((i-n)^2)*((i+n)^2)));$

```
            end
          end
        end
        end
      end
    end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
        l = m + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N;
          for j = 1 : M
            for i = 1 : N
              for p = 1 : K
                if ((k ~= p)&&(n ~= i)&&(m ~= j))
                  c = j + (i - 1) * M + (p - 1) * M * N;
```

$A = (4*n*i*m*j*(2*alpha+(alpha^2))*(1+((-1)^(n+i)))*(1+((-1)^(m+j)))/(((n^2)-(i^2))*((m^2)-(j^2))*pi));$

$A = A*((1/(k-p))*sin((k-p)*pi/(2*L))*cos((k-p)*pi/2)-(1/(k+p))*sin((k+p)*pi/(2*L))*cos((k+p)*pi/2));$

$B = (8*n*i*m*j*(-1+((-1)^(n+i)))*(-1+((-1)^(m+j)))/(((n-i)^2)*((n+i)^2)*((m^2)-(j^2))*(pi^2)));$

$B = B-((8*n*i*m*j*(-1+((-1)^(n+i)))*(-1+((-1)^(m+j))))/(((m-j)^2)*((m+j)^2)*((n^2)-(i^2))*(pi^2)));$

$mat3d(l,c) = 2*k*p*(-1+((-1)^(k+p)))/(L*(p-k)*(p+k));$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c)+(alpha*(k+p)/(L*(k-p)))*sin((k-p)*pi/2)*sin((k-p)*pi/(2*L));$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c)-(alpha*(k-p)/(L*(k+p)))*sin((k+p)*pi/2)*sin((k+p)*pi/(2*L));$

$mat3d(l,c) = (mat3d(l,c)*B)+A;$

```
                end
              end
            end
          end
        end
        end
    end
    ns = 0;
    for l = 1 : M*N*K
      forc = 1 : M*N*K
        if (mat3d(l,c) ~= mat3d(c,l))
        ns = ns + 1;
        end
      end
    end
    ns
    Spectre=eig(mat3d);
    lambdaS=Spectre(1);
    lambdaS
    end
```

11.3 Cas de la fonction « chapeau »

Dans cette section nous donnons le code source pour le cas où la fonction de perturbation est de la forme (9.20)

==========

close all ;

clear all ;

$N = 15$

$M = N;$

$K = N;$

$a = 1;$

$L = 100;$

$pi = 3.14159265;$

$alphalist = [0, -3.75, -4, 0.1, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4];$

alphaa=length(alphalist) ;

for $ii = 1 : alphaa$ alpha=alphalist(ii)

$mat3d = zeros(M * N * K);$

$Id3 = zeros(M * N * K);$

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

$l = m + (n - 1) * M + (k - 1) * M * N;$

$mat3d(l, l) = ((k * pi/(2 * L))^2) + (n * pi/a)^2 + (m * pi/a)^2;$

$mat3d(l, l) = mat3d(l, l) + (((n*pi)^2)/12 + ((m*pi)^2)/12 - (m^2)/(2*n^2) - n^2/(2 * m^2) - 0.5) * (1 + (alpha/(3 * L)) * (3 + alpha) - (2 * alpha * L * ((-1)^k)/((k * pi)^2)) * (1 + alpha - cos(k * pi/L) - (alpha * L/(k * pi)) * sin(k * pi/L)));$

$Id3(l, l) = 1;$

```
        end
      end
    end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
        l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
          for j = 1 : M
            for i = 1 : N
              if ((m ∼= j)&&(i ∼= n))
                c = j + (i − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
                mat3d(l, c) = (2 ∗ n ∗ i ∗ m ∗ j ∗ (1 + ((−1)^(n + i))) ∗ (1 +
((−1)^(m + j)))/(((n^2) − (i^2)) ∗ ((m^2) − (j^2))));
                mat3d(l, c) = mat3d(l, c)∗(1+(alpha/(3∗L))∗(3+alpha)−
(2 ∗ alpha ∗ L ∗ ((−1)^k)/((k ∗ pi)^2)) ∗ (1 + alpha − cos(k ∗ pi/L) − (alpha ∗
L/(k ∗ pi)) ∗ sin(k ∗ pi/L)));
              end
            end
          end
        end
        end
      end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
        l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
          for j = 1 : M
            if (m ∼= j)
              c = j + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
```

$mat3d(l,c) = (4*m*j*(n^2)*(1+(-1)^(m+j))/(((j-m)^2)*((m+j)^2)))*(1+(alpha/(3*L))*(3+alpha)-(2*alpha*L*((-1)^k)/((k*pi)^2))*(1+alpha-cos(k*pi/L)-(alpha*L/(k*pi))*sin(k*pi/L)));$

end

end

end

end

end

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

$l = m + (n-1)*M + (k-1)*M*N;$

for $i = 1 : N$

if $(n \sim= i)$

$c = m + (i-1)*M + (k-1)*M*N;$

$mat3d(l,c) = (4*n*i*(m^2)*(1+(-1)^(n+i))/(((i-n)^2)*((i+n)^2)))*(1+(alpha/(3*L))*(3+alpha)-(2*alpha*L*((-1)^k)/((k*pi)^2))*(1+alpha-cos(k*pi/L)-(alpha*L/(k*pi))*sin(k*pi/L)));$

end

end

end

end

end

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

$l = m + (n-1)*M + (k-1)*M*N;$

for $p = 1 : K$

if $(k \sim= p)$

$c = m + (n-1) * M + (p-1) * M * N;$

$mat3d(l,c) = (8 * alpha * L/(((k-p) * pi)^2)) * cos((k-p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k-p) * pi)) * sin((k-p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k-p) * pi/(4 * L))^2);$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c) - (8 * alpha * L/(((k+p) * pi)^2)) * cos((k+p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k+p) * pi)) * sin((k+p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k+p) * pi/(4 * L))^2);$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c) * (((n * pi)^2)/12 + ((m * pi)^2)/12 - (m^2)/(2 * (n^2)) - (n^2)/(2 * (m^2)) - 0.5);$

end

end

end

end

end

for $m = 1 : M$

for $n = 1 : N$

for $k = 1 : K$

$l = m + (n-1) * M + (k-1) * M * N;$

for $j = 1 : M$

for $p = 1 : K$

if $((k \sim= p)\&\&(j \sim= m))$

$c = j + (n-1) * M + (p-1) * M * N;$

$mat3d(l,c) = (8 * alpha * L/(((k-p) * pi)^2)) * cos((k-p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k-p) * pi)) * sin((k-p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k-p) * pi/(4 * L))^2);$

$mat3d(l,c) = mat3d(l,c) - (8 * alpha * L/(((k+p) * pi)^2)) * cos((k+p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k+p) * pi)) * sin((k+p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k+p) * pi/(4 * L))^2); mat3d(l,c) = mat3d(l,c) * (4 * m * j * (n^2) * (1 + ((-1)^(m+j)))/(((j-m)^2) * ((m+j)^2)));$

```
                end
              end
            end
          end    end end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
          l = m + (n − 1) ∗ M + (k − 1) ∗ M ∗ N;
          for i = 1 : N
            for p = 1 : K
              if ((i ∼= n)&&(p ∼= k))
                c = m + (i − 1) ∗ M + (p − 1) ∗ M ∗ N;
                mat3d(l, c) = (8 ∗ alpha ∗ L/(((k − p) ∗ pi)^2)) ∗ cos((k − p) ∗
pi/2) ∗ (alpha − (2 ∗ L ∗ alpha/((k − p) ∗ pi)) ∗ sin((k − p) ∗ pi/(2 ∗ L)) + 2 ∗
sin((k − p) ∗ pi/(4 ∗ L))^2);
                mat3d(l, c) = mat3d(l, c) − (8 ∗ alpha ∗ L/(((k + p) ∗ pi)^2)) ∗
cos((k + p) ∗ pi/2) ∗ (alpha − (2 ∗ L ∗ alpha/((k + p) ∗ pi)) ∗ sin((k + p) ∗ pi/(2 ∗
L)) + 2 ∗ sin((k + p) ∗ pi/(4 ∗ L))^2);
                mat3d(l, c) = mat3d(l, c) ∗ (4 ∗ n ∗ i ∗ (m^2) ∗ (1 + ((−1)^(n +
i)))/(((i − n)^2) ∗ ((i + n)^2)));
              end
            end
          end
        end
      end
    for m = 1 : M
      for n = 1 : N
        for k = 1 : K
```

$l = m + (n-1) * M + (k-1) * M * N;$

$for j = 1 : M$

for $i = 1 : N$

for $p = 1 : K$

if$((k \sim= p)\&\&(n \sim= i)\&\&(m \sim= j))$

$c = j + (i-1) * M + (p-1) * M * N;$

$A = (8 * alpha * L/(((k-p) * pi)^2)) * cos((k-p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k-p) * pi)) * sin((k-p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k-p) * pi/(4 * L))^2);$

$A = A - (8 * alpha * L/(((k+p) * pi)^2)) * cos((k+p) * pi/2) * (alpha - (2 * L * alpha/((k+p) * pi)) * sin((k+p) * pi/(2 * L)) + 2 * sin((k+p) * pi/(4 * L))^2);$

$A = A * (2 * n * i * m * j * (1 + ((-1)^(n+i))) * (1 + ((-1)^(m+j)))/(((n^2) - (i^2)) * ((m^2) - (j^2))));$

$B = (8 * n * i * m * j * (-1 + ((-1)^(n+i))) * (-1 + ((-1)^(m+j)))/(((n-i)^2) * ((n+i)^2) * ((m^2) - (j^2)) * (pi^2)));$

$B = B - ((8 * n * i * m * j * (-1 + ((-1)^(n+i))) * (-1 + ((-1)^(m+j))))/(((m-j)^2) * ((m+j)^2) * ((n^2) - (i^2)) * (pi^2)));$

$mat3d(l, c) = 2 * k * p * (-1 + ((-1)^(k+p)))/(L * (p-k) * (p+k));$

$mat3d(l, c) = mat3d(l, c) + 4 * (alpha * (p-k)/(pi * ((k+p)^2))) * sin((k+p) * pi/2) * sin((k+p) * pi/(4 * L))^2;$

$mat3d(l, c) = mat3d(l, c) + 4 * (alpha * (p+k)/(pi * ((k-p)^2)))*sin((k-p)*pi/2)*sin((k-p)*pi/(4*L))^2; mat3d(l, c) = (mat3d(l, c)* B) + A;$

end

end

end

end

```
    end
  end
  end
  ns=0 ;
  for l = 1 : M * N * K
    for c = 1 : M * N * K
      if (mat3d(l, c) ~= mat3d(c, l))
        ns = ns + 1;
      end
    end end
  ns
  Spectre = eig(mat3d);
  lambdaS = Spectre(1)
  end
```

Troisième partie

Effet d'une perturbation locale des conditions aux bords

La deuxième partie de cette thèse était consacrée à l'étude de la perturbation d'une déformation géométrique du guide d'onde. Nous avons démontré que le Laplacien de Dirichlet étudié dans un tube déformé par une torsion constante mais perturbée par une fonction de même signe admet un spectre discret vide. Ceci à été démontré en établissant, sous certaines conditions imposées sur la torsion, une inégalité de type Hardy.

Dans la présente partie, une autre forme de perturbation des guides d'onde sera inspectée. Il s'agit d'un changement au niveau des conditions aux bords considérées lors de l'étude du Laplacien dans le tube. En réalité, nous présentons une analyse des propriétés spectrales du Laplacien en présence simultanée d'une perturbation géométrique (la torsion) et d'une perturbation des conditions aux bords (la fenêtre de Neumann) sur une partie bornée de la frontière du tube. Nous allons répondre à ces trois questions principales :

(1) A-t-on une stabilité au niveau du spectre essentiel malgré la présence de la fenêtre de Neumann ?

(2) Sous quelles conditions peut-on créer des états liés sous le seuil du spectre essentiel ?

(3) Quelles critères doit satisfaire le guide d'onde pour avoir un spectre discret vide ?

Selon le type de la déformation géométrique, plusieurs cas de figure seront traités.

Il est important de signaler que les notations utilisées et certains résultats de cette partie sont traités dans un travail réalisé par Briet et Hammedi [8] intitulé « Twisted waveguide with a Neumann window » qui va être prochainement publié dans « Functional Analysis and Operator Theory For Quantum Physics ».

Avant d'étudier l'effet de la présence de deux types de perturbations (géométrique et des conditions aux bords), il est naturel de commencer notre

étude par le cas le moins compliqué, où on ajoute la fenêtre de Neumann sans appliquer de déformation géométrique :

Chapitre 12

Le tube droit

On note par $-\Delta^D_{\Omega_0}$ l'opérateur de Laplace de Dirichlet considéré sur le tube droit $\Omega_0 = \omega \times \mathbb{R}$, où ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière et on suppose qu'il est non invariant par rotation. Cet opérateur coïncide avec la fermeture de l'opérateur décrit par la décomposition suivante :

$$- \Delta_{\mathbb{R}} \times Id_\omega \oplus Id_{\mathbb{R}} \times (-\Delta^D_\omega); \tag{12.1}$$

avec $Id_{\mathbb{R}}$ et Id_ω sont, respectivement l'opérateur identité dans $L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur identité dans $L^2(\omega)$.

$\Delta_{\mathbb{R}}$ et Δ^D_ω représentent respectivement le Laplacien usuel et Le Laplacien de Dirichlet défini dans $L^2(\omega)$.

On sait que l'opérateur $-\Delta^D_\omega$ admet un spectre purement discret. Notons par $E_1 < E_2 < ...$ ses valeurs propres et par $\chi_1, \chi_2, ...$ leurs fonctions propres associées. Suivant la décomposition (12.1) on a

$$\sigma(-\Delta^D_{\Omega_0}) = \sigma_{ess}(-\Delta^D_{\Omega_0}) = [E_1, +\infty) \tag{12.2}$$

Ce modèle, préalablement étudié, nous a inspiré à se poser la question suivante :

Que se-passe-t-il si on remplaçait, sur une partie bornée de la frontière de Ω_0 les conditions de Dirichlet par des conditions de type Neumann ?

Pour répondre à cette question on se propose d'étudier le modèle suivant :

On s'intéresse à examiner le Laplacien avec des conditions aux bords de Dirichlet sur $\mathcal{D}$ et des condition de Neumann sur $\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est une partie ouverte bornée de $\partial\Omega_0$, $\mathcal{D} = \partial\Omega_0 \setminus \mathcal{N}$ et $\partial\Omega_0$ est de classe C^2. Il s'agit de l'opérateur qu'on note par :

$$\begin{aligned} H_0^{\mathcal{N}} &:= -\Delta \qquad (12.3)\\ D(H_0^{\mathcal{N}}) &:= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \quad | \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega_0), \quad \psi\lceil_{\mathcal{D}} = 0 \quad et \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\lceil_{\mathcal{N}} = 0\} \end{aligned}$$

et est associé à la forme quadratique

$$q_0^{\mathcal{N}}(\psi) = \| \nabla\psi \|^2, \quad D(q_0^{\mathcal{N}}) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \quad \psi\lceil_{\mathcal{D}} = 0\}. \qquad (12.4)$$

Si la fenêtre de Neumann est de la forme d'un anneau de largeur l alors on la note par $\mathcal{A}_a(l)$ et l'opérateur de Laplace avec des condition aux bords mixtes et sa forme quadratique associée seront notés respectivement par H_0^l et q_0^l . Notre étude est motivée par deux questions principales :

(1) Quel changement peut subir le spectre essentiel du Laplacien à cause de la présence de la fenêtre de Neumann ?

(2) Existent-ils des états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel ?

On entame la réponse à la première question dans la section suivante :

12.1 Stabilité du spectre essentiel

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 12.1.1. *Si $\mathcal{N}$ est une partie bornée de $\partial\Omega_0$ alors*

$$\sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}}) = [E_1, +\infty) \qquad (12.5)$$

12.1.1 Preuve du Théorème.12.1.1 :

L'idée de la preuve est inspirée de [8, 35] et elle consiste à démontrer deux inégalités. On commence par la première qui sera présentée dans le lemme suivant :

Lemme 12.1.2. *Si $\mathcal{N}$ est une partie bornée de $\partial\Omega_0$ alors*

$$inf(\sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}})) \geq E_1. \tag{12.6}$$

Preuve du Lemme.12.1.2 :

Tout d'abord on donne quelques notations nécessaires :

soit $I_a(l) := (a, a+l)$ un intervalle ouvert, borné de $\mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $l > 0$ et notons par $\mathcal{A}_a(l) := I_a(l) \times \partial\omega$ l'anneau de largeur l tel que $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_a(l)$.

$\omega_l := \omega \times \{a\}$ et $\omega_r := \omega \times \{a+l\}$ sont les deux sections transversales qui délimitent de part et d'autre l'anneau $\mathcal{A}_a(l)$.

H_0^{int} est l'opérateur de Laplace défini sur $L^2(\omega \times I_a(l))$ et ayant des conditions aux bords de Neumann sur $\mathcal{N}$, ω_l et ω_r, alors que sur $\mathcal{A}_a(l) \backslash \mathcal{N}$ on impose des conditions de Dirichlet. Sa forme quadratique associée est :

$$\begin{aligned} q_0^{int}(\psi) &:= \int_{I_a(l)\times\omega} \mid \nabla\psi(x) \mid^2 dx, \\ \psi \in D(q_0^{int}) &:= \{\psi\lceil_{I_a(l)\times\omega}, \quad \mid \psi \in D(q_0^{\mathcal{N}})\} \end{aligned} \tag{12.7}$$

H_0^{ext} est l'opérateur de Laplace défini sur $L^2((\mathbb{R} \setminus I_a(l)) \times \omega)$ et ayant des conditions aux bords de Neumann sur ω_l et ω_r, alors que sur $\partial\Omega_0 \setminus \mathcal{A}_a(l)$ on impose des contions de Dirichlet. Sa forme quadratique associée est :

$$\begin{aligned} q_0^{ext}(\psi) &:= \int_{(\mathbb{R}\backslash I_a(l))\times\omega} \mid \nabla\psi(x) \mid^2 dx, \\ \psi \in D(q_0^{ext}) &:= \{\psi\lceil_{(\mathbb{R}\backslash I_a(l))\times\omega}, \quad \mid \psi \in D(q_0^{\mathcal{N}})\} \end{aligned} \tag{12.8}$$

On sait que

$$H_0^{ext} \oplus H_0^{int} \leq H_0^{\mathcal{N}} \leq -\Delta_{\Omega_0}^D. \tag{12.9}$$

H_0^{int} est un opérateur à résolvante compacte, par conséquent l'infimum du spectre essentiel de $H_0^{\mathcal{N}}$ est estimé inférieurement comme suit :

$$\inf(\sigma_{ess}(H_0^{ext})) \leq \inf \sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}}) \tag{12.10}$$

D'autre part, d'après l'expression de la forme quadratique de H_0^{ext} on a, pour $\psi \in D(q_0^{\mathcal{N}})$:

$$\begin{aligned} q_0^{ext}(\psi) &:= \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \nabla\psi \mid^2 dx \geq \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \nabla'\psi \mid^2 dx \\ &\geq E_1 \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \psi \mid^2 dx \end{aligned} \tag{12.11}$$

Ceci implique que $\inf(\sigma_{ess}(H_0^{ext})) \geq E_1$. Par la suite en tenant compte de (12.10) on obtient l'inégalité voulue □

Maintenant, il ne manque que de démontrer l'inégalité contraire. On la présente dans le lemme suivant :

Lemme 12.1.3. *Si $\mathcal{N}$ est une partie bornée de $\partial\Omega_0$ alors*

$$\inf \sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}}) \leq E_1. \tag{12.12}$$

Preuve du lemme.12.1.3 :

L'idée de la preuve est de démontrer que tout élément E dans $[E_1, +\infty)$ appartient à $\sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}})$ en utilisant le critère de Weyl.

Soit $k \in \mathbb{R}$, tout élément de $[E_1, +\infty)$ s'écrit sous la forme $E := E_1 + k^2$. Soit φ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n(s) := \varphi(\frac{s}{n} - n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $\psi_n(s,t) := \varphi_n(s)\chi_1(t)e^{iks} \in D(q_0^{\mathcal{N}})$.

On calcule alors $\tilde{q}_0^{\mathcal{N}} := q_0^{\mathcal{N}}(\phi_n) - (E_1 + k^2) \parallel \phi_n \parallel^2$, où $\phi_n := \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

comme suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_0^{\mathcal{N}} &= \| \nabla\phi_n \|^2 - (E_1 + k^2) \| \phi_n \|^2 \\
&= \frac{1}{\| \psi_n \|^2}\Big(\| \nabla\psi_n \|^2 - k^2 \| \psi_n \|^2 - E_1 \| \psi_n \|^2 \Big) \\
&= \frac{1}{n \| \varphi \|^2_{L^2(\mathbb{R})}}\Big(\| \chi_1(\dot{\varphi}_n + ike^{iks}\varphi_n)e^{iks} \|^2 - k^2 \| \varphi_n\chi_1 \|^2 \Big) \\
&= \frac{\| \dot{\varphi} \|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{n^2 \| \varphi \|^2}. \qquad (12.13)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (12.13) on montre que $\tilde{q}_0^{\mathcal{N}}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On conclut que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Weyl, et par conséquent $\forall k \in \mathbb{R}$, $k^2 + E_1 \in \sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}})$. Ce qui signifie que $E_1 \geq \inf \sigma_{ess}(H_0^{\mathcal{N}})$ □

La preuve du théorème.12.1.1 est le résultat direct des deux lemmes 12.1.2 et 12.1.3 □

Après avoir démontrer la stabilité du spectre essentiel malgré la présence de la fenêtre de Neumann, la question qui se pose naturellement maintenant est : Existent-ils des états liés sous le seuil du spectre essentiel ?

12.2 Le spectre discret

On suppose, dans cette section, que la fenêtre de Neumann admet la forme d'un anneau $\mathcal{A}_a(l) = (a, a+l) \times \partial\omega$, $a \in \mathbb{R}$ et $l > 0$.

Le résultat qu'on désire démontrer est donné par le théorème suivant :

Théorème 12.2.1. *Si $\mathcal{N} = \mathcal{A}_a(l)$, $a \in \mathbb{R}$ et $l > 0$ alors*

$$\inf(\sigma(H_0^l)) < E_1 \qquad (12.14)$$

Ce théorème signifie qu'ils existent des états liés au dessous du seuil du spectre essentiel dés la présence d'une fenêtre de Neumann de la forme d'un anneau de largeur quelconque.

12.2.1 Preuve du Théorème.12.2.1

La preuve de ce théorème est basée sur l'idée variationnelle qui consiste à trouver une fonction test ϕ_δ dans $D(q_0^l)$ telle que

$$Q(\phi_\delta) := q_0^l(\phi_\delta) - E_1 \parallel \phi_\delta \parallel^2 < 0.$$

Pour construire une telle fonction test on a besoin, d'abord de définir les fonctions suivantes :

J est une fonction de $C_0^\infty(I_a(l))$ (i.e. $Supp(J) \subseteq I_a(l)$).

Soit $b > max\{\mid a \mid, \mid a+l \mid\}$ (évidement on a $I_a(l) \subset [-b, b]$) et pour $\delta > 0$ on définit la fonction $\varphi_{\delta,b}$ de la manière suivante :

$$\varphi_{\delta,b}(s) = \begin{cases} 1, & \text{sur } [-b, b], \text{ (en particulier sur } Supp(J)) \,; \\ e^{\delta^2(s+b)}, & \text{sur }]-\infty, -b] \,; \\ e^{-\delta^2(s-b)}, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.15}$$

On définit maintenant la fonction $\phi_{\delta,b}(s,t) := \chi_1(t)\varphi_{\delta,b}(s) + \delta J^2(s)$, où $\delta > 0$ Avec ces choix, calculons $Q(\phi_{\delta,b})$

$$\begin{aligned} Q(\phi_{\delta,b}) &= \parallel \nabla' \phi_{\delta,b} \parallel^2 + \parallel \partial_s \phi_{\delta,b} \parallel^2 - E_1 \parallel \phi_{\delta,b} \parallel^2 \\ &= \parallel \varphi_{\delta,b} \nabla' \chi_1 \parallel^2 - E_1 \parallel \varphi_{\delta,b}\chi_1 \parallel^2 + \parallel \dot{\varphi}_{\delta,b}\chi_1 + 2\delta J\dot{J} \parallel^2 \\ &\quad -\delta^2 E_1 \parallel J^2 \parallel^2 - 2\delta E_1(\varphi_{\delta,b}\chi_1, J^2) \end{aligned} \tag{12.16}$$

On développe le troisième terme de la partie droite de (12.16) comme suit :

$$\parallel \dot{\varphi}_{\delta,b}\chi_1 + 2\delta J\dot{J} \parallel^2 = \parallel \dot{\varphi}_{\delta,b}\chi_1 \parallel^2 + 4\delta^2 \parallel J\dot{J} \parallel^2 + 4\delta(\dot{\varphi}_{\delta,b}\chi_1, J\dot{J}) \tag{12.17}$$

Par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned} \parallel \dot{\varphi}_{\delta,b} \parallel^2 &= \delta^4 \left(\int_{-\infty}^{-b} e^{2\delta^2(s+b)} ds + \int_b^{+\infty} e^{-2\delta^2(s-b)} ds \right) \\ &= \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \delta^2 \end{aligned} \tag{12.18}$$

et comme $\dot{\varphi}_{\delta,b} = 0$ sur $Supp(J)$, le troisième terme de (12.16) se réduit à

$$\parallel \chi_1\dot{\varphi}_{\delta,b} + 2\delta J\dot{J} \parallel^2 = \delta^2(1 + \parallel J\dot{J} \parallel^2) \tag{12.19}$$

En utilisant

$$\| \varphi_{\delta,b}\nabla'\chi_1 \|^2 - E_1 \| \varphi_{\delta,b}\chi_1 \|^2 = 0 \tag{12.20}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\phi_{\delta,b}) &= \delta^2(1 + 4 \| J\dot{J} \|^2 - E_1 \| J^2 \|^2) - 2\delta E_1 \| \chi_1 \|_{L^1(\omega)} \| J \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \delta^2(1 + 4 \| J\dot{J} \|^2) - 2\delta E_1 \| \chi_1 \|_{L^1(\omega)} \| J \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{12.21}$$

En choisissant δ suffisamment petit on obtient $Q(\phi_{\delta,b}) < 0$ $\square$

Remarque 12.2.1. *Le Théorème.12.2.1 est également valable pour toutes fenêtre de Neumann bornée de forme quelconque mais qui contient une fenêtre de la forme d'un anneau $\mathcal{A}_a(l)$, $a \in \mathbb{R}$ et de largeur $l > 0$ quelconque.*

Il est temps maintenant d'étudier des cas plus compliqués où on applique la perturbation géométrique ainsi que le changement des conditions aux bords de Dirichlet par des conditions de Neumann sur une partie bornée du tube torsadé.

Chapitre 13

Torsion à support compact

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, borné, connexe, de frontière régulière et on suppose qu'il est non invariant par rotation par rapport à l'origine. Soit θ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$ et on note par $\dot{\theta}$ sa dérivée première. Le tube torsadé est $\Omega_\theta = \mathcal{L}_\theta(\Omega_0)$, où $\mathcal{L}_\theta$ est le difféomorphisme (2.17). Il est important de préciser, au début, la définition de ce qu'on appelle **torsion à support compact**

Définition 13.0.1. *Si $\dot{\theta}$ est une fonction continue à support compact alors, la torsion est dite à support compact (« twist with compact support » en anglais) .*

Ce type de torsion est étudié dans [24] et [35]. En supposant que $\dot{\theta}$ est une fonction continue, à support compact et de dérivée $\ddot{\theta}$ bornée, les auteurs de [24] montrent que $\sigma(-\Delta^D_{\Omega_\theta}) = \sigma_{ess}(-\Delta^D_{\Omega_\theta}) = [E_1, +\infty)$, où E_1 est la petite valeur propre du Laplacien de Dirichlet $-\Delta^D_\omega$ défini dans $L^2(\omega)$. En effet, pour démontrer un résultat pareil, ils ont établi une inégalité de type Hardy locale (cf.[24, Théorème 4]) et globale (cf. [24, Théorème 3]).

Dans [24] et [35] il est démontré qu'il s'agit, sous certaines conditions imposées sur la torsion $\dot{\theta}$, d'une stabilité du spectre si la partie perturbée du guide d'onde est locale. Ces deux travaux nous ont motivé à étudier un modèle avec le même type de déformation géométrique mais en changeant les conditions aux bords de Dirichlet, sur une partie bornée de la frontière du tube torsadé par les conditions de type Neumann. Il s'agit alors de l'étude spectrale de l'opérateur $-\Delta^{\mathcal{N}}_{\Omega_\theta}$ défini dans $L^2(\Omega_\theta)$ avec des conditions de Neumann sur $\mathcal{L}_\theta(\mathcal{N})$ et des condition de Dirichlet sur $\mathcal{L}_\theta(\mathcal{D})$, où $\mathcal{N}$ est une partie bornée de $\partial\Omega_0$ et $\mathcal{D} = \partial\Omega_0 \setminus \mathcal{N}$.

En utilisant le changement de variable expliqué dans la première partie de la thèse (Section.5.1) le problème revient à étudier l'opérateur :

$$H^{\mathcal{N}}_\theta = -\Delta_\omega - (\dot{\theta}\partial_\tau + \partial_s)^2. \tag{13.1}$$

On rappelle que $H^{\mathcal{N}}_\theta$ est associé à la forme quadratique

$$\begin{aligned} q^{\mathcal{N}}_\theta(\psi) &= \| \nabla'\psi \|^2 + \| \partial_s\psi + \dot{\theta}\partial_\tau\psi \|^2, \quad \psi \in D(q^{\mathcal{N}}_\theta) \\ D(q^{\mathcal{N}}_\theta) &= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \quad \psi\lceil_{\mathcal{D}} = 0\}. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Si la fenêtre de Neumann est un anneau (i.e. de la forme $\mathcal{A}_a(l) = (a, a+l)\times\partial\omega$, $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$), l'opérateur Hamiltonien et sa forme quadratique seront notés respectivement H^l_θ et q^l_θ.

Dans la première section de ce chapitre on va examiner l'effet de la présence d'une condition de Neumann sur une partie bornée du bord du tube torsadé sur le spectre essentiel de l'opérateur $H^{\mathcal{N}}_\theta$.

13.1 Stabilité du spectre essentiel

Le résultat de stabilité que nous allons démontrer est présenté par le théorème suivant (cf.[8]) :

Théorème 13.1.1. *Soit ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière et supposons qu'il est n'est pas invariant par rotation. Si $\mathcal{N}$ est une partie bornée non vide de $\partial\Omega_0$ alors on a*

$$\sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}}) = [E_1, +\infty), \tag{13.3}$$

où E_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta_\omega^D$.

13.1.1 Preuve du Théorème.13.1.1 :

Étant longue, on va diviser la démonstration de ce théorème en deux étapes. Commençons par la première étape :

a.Première étape :

La première étape consiste à démontrer le lemme suivant :

Lemme 13.1.2. *Sous les mêmes conditions énoncées dans le Théorème.13.1.1 on a $\sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}}) \subset [E_1, +\infty)$*

Preuve du Lemme.13.1.2

Tout d'abord, nous donnons quelques notations nécessaires pour la preuve :

Soit $\mathcal{A}_a(l) = (a, a+l) \times \partial\omega$, où $a \in \mathbb{R}$ et $l > 0$ sont choisis tels que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_a(l)$ et $Supp(\dot{\theta}) \subset I_a(l)$.

H_θ^D est l'opérateur ayant la même expression (13.1) et défini sur $L^2(\Omega_0)$ mais avec des conditions aux bords de Dirichlet partout sur $\partial\Omega_0$.

ω_l et ω_r sont les deux sections transverses qui délimitent de part et d'autre l'anneau $\mathcal{A}_a(l)$.

H_θ^{int} est l'opérateur ayant la même expression (13.1) défini sur $L^2(\omega \times I_a(l))$ et admettant des conditions aux bords de Neumann sur $\mathcal{N}$, ω_l et ω_r mais des conditions aux bords de Dirichlet sur $\mathcal{A}_a(l) \setminus \mathcal{N}$. Sa forme quadratique

associée est :

$$\begin{aligned} q_\theta^{int}(\psi) &= \int_{I_a(l)\times\omega} \mid \nabla'\psi(s,t) \mid^2 + \mid \partial_s\psi + \dot\theta\partial_\tau\psi \mid^2 dsdt, \quad \psi \in D(q_\theta^{int}), \\ D(q_\theta^{int}) &= \{\psi\lceil_{I_a(l)\times\omega}, \quad \mid \psi \in D(q_\theta^{\mathcal{N}})\}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

H_θ^{ext} est l'opérateur ayant la même expression (13.1), défini sur $L^2(\omega \times (\mathbb{R} \setminus I_a(l)))$ avec des conditions aux bords de Neumann sur ω_l et ω_r mais des conditions aux bords de Dirichlet sur $\partial\Omega_0 \setminus \mathcal{A}_a(l)$. Sa forme quadratique associée est :

$$\begin{aligned} q_\theta^{ext} &= \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \nabla'\psi \mid^2 + \mid \partial_s\psi + \dot\theta\partial_\tau\psi \mid^2 dsdt, \quad \psi \in D(q_\theta^{ext}), \\ D(q_\theta^{ext}) &= \{\psi\lceil_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega}, \quad \mid \psi \in D(q_\theta^{\mathcal{N}})\}. \end{aligned} \tag{13.5}$$

On sait que

$$H_\theta^{ext} \oplus H_\theta^{int} \leq H_\theta^{\mathcal{N}} \leq -\Delta_{\Omega_0}^D. \tag{13.6}$$

Il est bien connu que H_θ^{int} est un opérateur à résolvante compacte. Le seuil du spectre essentiel de $H_\theta^{\mathcal{N}}$ est alors estimé inférieurement comme suit :

$$\inf \sigma_{ess}(H_\theta^{ext}) \leq \inf \sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}}) \tag{13.7}$$

D'autre part, d'après l'expression de la forme quadratique de H_θ^{ext} on a, pour $\psi \in D(q_\theta^{\mathcal{N}})$:

$$\begin{aligned} q_\theta^{ext}(\psi) &= \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \nabla'\psi \mid^2 + \mid \partial_s\psi + \dot\theta\partial_\tau\psi \mid^2 dsdt, \\ &\geq \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \nabla'\psi \mid^2 dsdt, \\ &\geq E_1 \int_{(\mathbb{R}\setminus I_a(l))\times\omega} \mid \psi \mid^2 dsdt. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Ceci implique que $\inf(\sigma_{ess}(H_\theta^{ext})) \geq E_1$. Par la suite, en tenant compte de (13.7) on obtient l'inclusion du Lemme.13.1.2 voulu. □

Il ne manque que vérifier l'inclusion contraire :

b. Deuxième étape

La deuxième étape de la preuve du Théorème.13.1.1 est de de démontrer l'inclusion donnée par le Lemme suivant :

Lemme 13.1.3. *Sous les mêmes conditions du Théorème.13.1.1 on a*

$$[E_1, +\infty) \subset \sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}}) \tag{13.9}$$

Preuve du Lemme.13.1.3

L'idée de la preuve est de prouver que tout élément E dans $[E_1, +\infty)$ appartient à $\sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}})$ en utilisant le critère de Weyl .

Soit $k \in \mathbb{R}$, on peut écrire tout E dans $[E_1, +\infty)$ sous la forme $E := E_1 + k^2$.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\varphi_n(s) := \varphi(\frac{s}{n} - n)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, où φ est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifie $Supp(\varphi) \subset I_a(l)$.

Soit $\phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$ où $\psi_n = \varphi_n(s)\chi_1(t)e^{iks}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et calculons

$\tilde{q}_\theta^{\mathcal{N}}(\phi_n) := q_\theta^{\mathcal{N}}(\phi_n) - (E_1 + k^2) \parallel \phi_n \parallel^2$, $\forall k \in \mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_\theta^{\mathcal{N}}(\phi_n) &= q_\theta^{\mathcal{N}}(\phi_n) - (E_1 + k^2) \parallel \phi_n \parallel^2 \\
&= \frac{1}{\parallel \psi_n \parallel^2}\Big(\parallel \nabla'\psi_n \parallel^2 + \parallel (\dot\theta\partial_\tau + \partial_s)\psi_n \parallel^2 - (E_1 + k^2) \parallel \psi_n \parallel^2 \Big) \\
&= \frac{1}{n \parallel \varphi \parallel^2}\Big(\parallel \nabla'\psi_n \parallel^2 + \parallel (\dot\theta\partial_\tau + \partial_s)\psi_n \parallel^2 - (k^2 + E_1) \parallel \psi_n \parallel^2 \Big) \\
&= \frac{1}{n \parallel \varphi \parallel^2}\Big(\parallel \dot\theta\varphi_n\partial_\tau\chi_1 \parallel^2 + \parallel \dot\varphi_n\chi_1 \parallel^2 + k^2 \parallel \chi_1\varphi_n \parallel^2 \Big) \\
&+ \frac{1}{n \parallel \varphi \parallel^2}\Big(2Re(\dot\theta\varphi_n\partial_\tau\chi_1, \dot\varphi_n\chi_1) + 2Re(\dot\varphi_n\chi_1, ik\chi_1\varphi_n) - k^2 \parallel \chi_1\varphi_n \parallel^2 \Big) \\
&= \frac{1}{n \parallel \varphi \parallel^2}\Big(\parallel \dot\theta\varphi_n\partial_\tau\chi_1 \parallel^2 + \parallel \dot\varphi_n\chi_1 \parallel^2 \Big) \\
&\leq \frac{1}{n^2}\Big(\parallel \dot\theta \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})} \parallel \partial_\tau\chi_1 \parallel^2_{\mathbf{L}^2(\omega)} + \frac{\parallel \dot\varphi \parallel^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}}{\parallel \varphi \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})}}\Big)
\end{aligned} \tag{13.10}$$

L'inégalité (13.10) donne que

$\tilde{q}_\theta^{\mathcal{N}}(\phi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut alors que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de fonctions

de Weyl et par conséquent, $\forall k \in \mathbb{R}$, $E_1 + k^2 \in \sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}})$. Ceci nous permet d'obtenir l'inclusion $[E_1, +\infty) \subset \sigma_{ess}(H_\theta^{\mathcal{N}})$ □

La preuve du Théorème.13.1.1 est le résultat direct des deux inclusions données par le Lemme.13.1.2 et le Lemme.13.1.3 □

Remarques 13.1.1. *:*
(1) *la stabilité du spectre essentiel est démontrée pour toute fenêtre de Neumann $\mathcal{N}$ bornée et de largeur quelconque.*
(2) *Ce résultat de stabilité de spectre essentiel coïncide avec le résultat qu'on a démontré pour le cas du tube droit ($\dot{\theta} = 0$).*

Après avoir étudier le spectre essentiel de notre opérateur $H_\theta^{\mathcal{N}}$ il est temps d'examiner son spectre discret pour savoir si la fenêtre de Neumann donne naissance à des états liés au-dessous du seuil du spectre essentiel ou non.

13.2 Existence des états liés

On a montré, dans le Théorème.13.1.1 que $\sigma_{ess}(H_\theta^l) = [E_1, +\infty[$. Deux questions qui se posent naturellement sont :

(1)la fenêtre de Neumann engendre-t-elle la création des états liés sous E_1 ?

(2) Existe-t-il une relation entre la largeur de la fenêtre de Neumann et l'existence des états liés ?

La réponse à ces deux questions est positive. En effet, seules les fenêtres de Neumann de taille suffisamment grande donneront naissance à un spectre discret non vide. Ce problème est traité dans un travail réalisé par Briet et Hammedi intitulé « Twited waveguides with a Neumann window » [8] réalisé par Briet et Hammedi et sera publié prochainement dans « Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics ». Ce résultat important est présenté dans le Théorème suivant :

Théorème 13.2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l > 0$ et supposons que $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{A}_a(l)$. Il existe une largeur minimale notée $l_{min}(\omega, d) > 0$ telle que*

$$\forall l \ > \ l_{min} \text{ on a } \sigma_d(H_\theta^{\mathcal{N}}) \neq \emptyset. \tag{13.11}$$

13.2.1 Preuve du Théorème.13.2.1

Il est claire que sous la condition $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{A}_a(l)$, il est suffisant de démontrer le résultat pour l'opérateur H_θ^l puisque on a dans ce cas

$$H_\theta^{\mathcal{N}} < H_\theta^l \quad \forall \mathcal{A}_a(l) \subset \mathcal{N} \tag{13.12}$$

Par conséquent si H_θ^l admet des états liés alors $H_\theta^{\mathcal{N}}$ admet également un spectre discret non vide.

L'idée de la preuve repose sur la construction d'une fonction test ψ définie dans le domaine de q_θ^l telle que $\tilde{q}_\theta^l(\psi) := q_\theta^l(\psi) - E_1 \parallel \psi \parallel^2 < 0$.

Soit $\varphi_{a,l}$ la fonction définie dans $D(q_\theta^l)$ comme suit :

$$\varphi_{a,l}(s) := \begin{cases} \frac{10}{l}(s-a), & \text{si } s \in [a, a+\frac{l}{10}]\,; \\ 1, & \text{si } s \in [a+\frac{l}{10}, a+\frac{9l}{10}]\,; \\ -\frac{10}{l}(s-a-l), & \text{si } s \in [a+\frac{9l}{10}, a+l]\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons maintenant $\tilde{q}_\theta^l(\varphi_{a,l})$

$$\tilde{q}_\theta^l(\varphi_{a,l}) = \parallel \nabla' \varphi_{a,l} \parallel^2 + \parallel \dot{\theta}\partial_\tau \varphi_{a,l} + \partial_s \varphi_{a,l} \parallel^2 - E_1 \parallel \varphi_{a,l} \parallel^2 \tag{13.13}$$

Le premier terme de la partie droite de (13.13) est nul. Le deuxième terme de la partie droite de (13.13) se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \parallel \dot{\theta}\partial_\tau \varphi_{a,l} + \partial_s \varphi_{a,l} \parallel^2 &= \parallel \dot{\varphi}_{a,l} \parallel^2 \\ &= \frac{20}{l} \mid \omega \mid \end{aligned} \tag{13.14}$$

Le dernier terme de la partie droite de (13.13) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \| \varphi_{a,l} \|^2 &= | \omega | \Big(\frac{4l}{5} + \frac{100}{l^2} (\int_l^{l+\frac{l}{10}} (s-a)^2 ds + \int_{l+\frac{9l}{10}}^{l+l} (s-a-l)^2 ds) \Big) \\ &= \frac{13l}{15} | \omega | \end{aligned} \tag{13.15}$$

En utilisant (13.14) et (13.15) dans la partie droite de (13.13) on obtient :

$$\tilde{q}_\theta^l(\varphi_{a,l}) = | \omega | \, (\frac{20}{l} - \frac{13l}{15} E_1) \tag{13.16}$$

Donc si $l > l_{min} := \sqrt{\frac{300}{13E_1}}$ on obtient $\tilde{q}_\theta^l(\varphi_{a,l}) < 0$ $\square$.

On a montré que si le tube est droit, une fenêtre de Neumann de n'importe quelle largeur donne naissance à des états liés sous le seuil du spectre essentiel. Par contre, dans ce présent cas où la torsion est à support compact, la fenêtre de Neumann doit être suffisamment large pour créer un spectre discret non vide.

Une question naturelle qui peut se poser est :

Que se passe-t-il si la fenêtre de Neumann est petite ?

La réponse à cette question est expliquée dans le section suivante :

13.3 Absence des états liés

L'objectif de cette section est de préciser les conditions pour lesquelles les états liés créés par la présence de la fenêtre de Neumann se disparaissent. On va traiter plusieurs cas de figures qui différent par l'emplacement de la fenêtre de Neumann par rapport au support de la fonction de la torsion $\dot{\theta}$. En réalité, il existe trois grands cas :

• Le premier cas est lorsque les deux perturbations (géométrique et de condition aux bords) se réalisent séparément, ceci signifie que $\mathbf{Supp}(\dot{\theta}) \cap \mathbf{I_a(l)} = \varnothing$.

• Dans le deuxième cas, les deux perturbations se réalisent simultanément sur une partie du guide d'onde mais, sur d'autres parties du tube elles sont appliquées séparément. En d'autre termes c'est le cas où $\mathbf{Supp}(\dot{\theta}) \cap \mathbf{I_a}(\mathbf{l}) \neq \varnothing$.

• Dans le dernier cas la perturbation au niveau des conditions aux bords est choisie sur une partie du bords où le tube est torsadé. Plus précisément c'est le cas où $\mathbf{I_a}(\mathbf{l}) \subsetneqq \mathbf{Supp}(\dot{\theta})$.

La stratégie qu'on va adopter pour étudier tout ces différents cas de figure est la même. En effet, on va essayer toujours de réduire le présent problème spectral tridimensionnel à l'étude d'un opérateur de Schrödinger unidimensionnel. Le traitement de chaque cas est partiellement différent.

Le passage du présent problème à l'étude d'un problème unidimensionnel se réalise en trois étapes. Tout d'abord, on se propose d'établir une inégalité de type Hardy locale. Cette inégalité va nous permettre de passer, comme deuxième étape, à un opérateur unidimensionnel dont on donnera l'expression explicite dans chaque cas. La troisième étape sera d'étudier cet opérateur de Schrödinger unidimensionnel.

Au départ, on donne quelques notations qui seront utiles dans toute la suite :

Notons par $\theta_m := \inf(Supp(\dot{\theta}))$ et par $\theta_M := \sup(Supp(\dot{\theta}))$, donc on a évidement, $Supp(\dot{\theta}) \subseteq [\theta_m, \theta_M]$.

Soit g la fonction constante par morceaux définie comme suit :

$$g(s) := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad s \in I_a(l)\,, \\ E_1, & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{13.17}$$

On sait que

$$H_\theta^l \leq H_\theta^{\mathcal{N}} \quad \forall\, \mathcal{N} \subset \mathcal{A}_a(l),\ a \in \mathbb{R},\ l > 0 \tag{13.18}$$

Par cette inégalité, si H_θ^l n'admet pas d'états liés alors $\sigma_d(H_\theta^{\mathcal{N}}) = \varnothing$.

Il est convenable alors d'étudier l'opérateur H_θ^l puisqu'on peut conclure pour des fenêtres de Neumann de formes quelconques incluses dans $\mathcal{A}_a(l)$,

avec $l > 0$. Commençons par le premier cas, le cas le moins compliqué :

13.3.1 Premier cas : $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) = \varnothing$

Cette partie de ma thèse a fait l'objet d'un travail intitulé « Twisted waveguide with a Neumann window » [8], réalisé par Briet et Hammedi et va apparaitre prochainement dans « Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics ».

Ce cas correspond à deux cas de figure possibles :

$$\theta_m > a + l \quad ou \quad \theta_M < a$$

Dans ce qui suit nous donnons les calculs explicitement pour le cas où $\theta_M < a$. L'autre cas de figure se traite d'une manière analogue.

Le théorème suivant représente le résultat principal dans ce cas :

Théorème 13.3.1. *Soit ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière régulière et qui est non invariant par rotation. Soit θ une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ telle que $\dot{\theta} \in L^\infty(\mathbb{R})$, à support compact et $\ddot{\theta} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe un réel positif $d_{max}(\theta, \omega) > 0$ tel que pour tout $0 < d < d_{max}$ il existe un réel positif $l_{max}(d, \theta) > 0$ tel que pour tout $0 < l < l_{max}$ on a : si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_a(l)$ et $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(\mathcal{N}) = \emptyset$*

$$\sigma_d(H_\theta^l) = \emptyset \tag{13.19}$$

La preuve de ce théorème est très longue, raison pour la quelle on la divise en plusieurs étapes. Commençons par la première étape :

a.Une inégalité de Hardy locale

Le but de cette partie est de donner une preuve détaillée pour l'inégalité de type Hardy suivante :

Théorème 13.3.2. *Soit ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^2$ et qui est non invariant par rotation. Soit θ une fonction non identiquement nulle de $C^1(\mathbb{R})$. Supposons que $\dot{\theta}$ est à support compact et que $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) = \emptyset$. Alors pour $p \in (\theta_m, \theta_M)$ Il existe une fonction positive $\rho_p \geq 0$ telle que, $\forall\ \psi \in D(q_\theta^{\mathrm{N}})$*

$$\| \nabla'\psi \|^2 + \| \dot{\theta}\partial_\tau\psi + \partial_s\psi \|^2 - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \geq \int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \tag{13.20}$$

où ρ_p est donnée par :

$$\rho_p(s) := \begin{cases} \frac{C}{1+(s-p)^2}, & si\ s \in (-\infty, p)\ ; \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{13.21}$$

et C est une constante qui dépend de p, ω et θ.

La preuve de ce Théorème.13.3.2 nécessite d'établir plusieurs inégalités qu'on va présenter sous forme de lemmes. Commençons par le premier lemme ingrédient de la preuve du Théorème.13.3.2 :

Lemme 13.3.3. *Sous les mêmes conditions du Théorème.13.3.2, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ on a $\forall \psi \in D(q_\theta^l)$*

$$\int_\omega \int_\alpha^{+\infty} \mid \nabla'\psi \mid^2 + \mid \dot{\theta}\partial_\tau\psi + \partial_s\psi \mid^2 dsdt \geq \int_\omega \int_\alpha^{+\infty} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt. \tag{13.22}$$

<u>Preuve du lemme.13.3.3</u> :

On sait que :

$\forall\ \psi \in\ D(q_\theta^l)$ on a $\| \nabla'\psi(s,.) \|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)} \geq E_1 \| \psi(s,.) \|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)}$, pour presque tout $s \in \mathbb{R} \setminus I_a(l)$, et $\| \nabla'\psi(s,.) \|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)} \geq 0$ pour presque tout $s \in I_a(l)$.

On peut regrouper les deux inégalités en une seule en utilisant la définition

de la fonction g comme suit :

$$\| \nabla'\psi(s,.) \|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)} \geq g(s) \| \psi(s,.) \|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)}, \quad \textit{pour presque tout } s \in \mathbb{R} \tag{13.23}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on intègre (13.23) sur $[\alpha, +\infty[$, on obtient

$$\int_\omega \int_\alpha^{+\infty} | \nabla'\psi(s,t) |^2 \, dsdt \geq \int_\omega \int_\alpha^{+\infty} g(s) \mid \psi(s,t) |^2 \, dsdt \tag{13.24}$$

En ajoutant le terme positif $\displaystyle\int_\omega \int_\alpha^{+\infty} | \dot{\theta}\partial_\tau\psi(s,t) + \partial_s\psi(s,t) |^2 \, dsdt$ à la partie gauche de l'inégalité (13.24) on obtient (13.22). □

La preuve du Théorème.13.3.2 nécessite également la preuve de la proposition suivante :

Proposition 13.3.4. *Soit $p \in (\theta_m, \theta_M]$. Sous les mêmes conditions du Théorème.13.3.2, il existe $\rho_p > 0$ tel que $\forall \psi \in D(q^l_\theta)$:*

$$\int_{\Omega_p} | \nabla'\psi |^2 + | \dot{\theta}\partial_\tau\psi + \partial_s\psi |^2 \, dsdt - E_1 \int_{\Omega_p} | \psi |^2 \, dsdt \geq \int_{\Omega_p} \rho_p(s) \mid \psi |^2 \, dsdt \tag{13.25}$$

où $\Omega_p := (-\infty, p) \times \omega$.

La preuve de cette proposition est très longue et assez technique raison pour laquelle on la démontre à travers des résultats auxiliaires.

Pour des raisons de simplification, on va utiliser les notations suivantes : $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}$ *et* $\psi \in D(q^l_\theta)$ on définit :

$$\begin{aligned} q^A_1(\psi) &:= \| \chi_A \nabla'\psi \|^2 - E_1 \| \chi_A \psi \|^2, \qquad q^A_2(\psi) := \| \chi_A \partial_s\psi \|^2, \\ q^A_3(\psi) &:= \| \chi_A \dot{\theta}\partial_\tau\psi \|^2, \qquad q^A_{2,3}(\psi) := 2Re(\partial_s\psi, \chi_A \dot{\theta}\partial_\tau\psi) \end{aligned} \tag{13.26}$$

où χ_A est la fonction caractéristique définie sur $A \times \omega$. On définit les quantités $Q^A(\psi)$ et $Q(psi)$ comme suit :

$$Q^A(\psi) := q^A_1(\psi) + q^A_2(\psi) + q^A_3(\psi) + q^A_{2,3}(\psi); \tag{13.27}$$

$$Q(\psi) := q^{\mathbb{R}}_1(\psi) + q^{\mathbb{R}}_2(\psi) + q^{(\theta_m,\theta_M)}_3(\psi) + q^{(\theta_m,\theta_M)}_{2,3}(\psi). \tag{13.28}$$

La première inégalité qui sera utile dans la preuve de la proposition (13.3.4) est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 13.3.5. *Soit $p \in (\theta_m, \theta_M]$. Pour tout $\psi \in D(q_\theta^l)$ tel que $\psi(p,.) = 0$ on a : $\forall \alpha, \beta > 0$ il existe $\gamma_{\alpha,\beta} > 0$ tel que :*

$$| q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) | \leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + \alpha q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,p)}(\psi). \tag{13.29}$$

Preuve du Lemme.13.3.5

Considérons $\psi \in D(q_\theta^l)$ tel que $\psi(p,.) = 0$, alors $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_p)$. On sait qu'une telle fonction admet la décomposition : $\psi(s,t) := \chi_1(t)\phi(s,t)$ où $\phi \in C_0^\infty(\Omega_p)$ définie par cette décomposition. En utilisant une telle expression de ψ on obtient

$$q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) = \| \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \nabla' \phi \|^2, \quad q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) = \| \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \partial_s \phi \|^2$$

$$q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) = \| \chi_{(\theta_m,p)}\dot{\theta}(\chi_1 \partial_\tau \phi + \phi \partial_\tau \chi_1) \|^2$$

et

$$q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) = 2(\dot{\theta}\chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \partial_\tau \phi, \chi_1 \partial_s \phi) + 2(\dot{\theta}\chi_{(\theta_m,p)}\phi \partial_\tau \chi_1, \chi_1 \partial_s \phi) \tag{13.30}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz suivie par l'estimation de Young, le premier terme de la partie droite de (13.30) est estimé comme suit :

$$\begin{aligned} | 2(\dot{\theta}\chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \partial_\tau \phi, \chi_1 \partial_s \phi) | &\leq 2 \| \dot{\theta} \|_\infty \| \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \nabla' \phi \| \| \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1 \partial_s \phi \| \\ &\leq c_1 q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + \frac{\alpha}{2} q_2^{(\theta_m,p)}(\psi), \end{aligned} \tag{13.31}$$

où $c_1 := \frac{2}{\alpha} d^2 \| \dot{\theta} \|_\infty^2$ et $\alpha > 0$.

Une intégration par parties appliquée deux fois et en utilisant le fait que $\dot{\theta}(\theta_m) = 0$ et $\phi(p,t) = 0$, $\forall t \in \omega$, le deuxième terme de la partie droite de (13.30) s'écrit comme suit

$$2(\dot{\theta}\chi_{(\theta_m,p)}\phi \partial_\tau \chi_1, \chi_1 \partial_s \phi) = (\chi_{(\theta_m,p)}\ddot{\theta}\phi\chi_1, \chi_1 \partial_\tau \phi) \tag{13.32}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient :

$$| (\chi_{(\theta_m,p)}\ddot{\theta}\phi\chi_1, \chi_1\partial_\tau\phi) |^2 \leq d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) \parallel \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1\phi \parallel^2 \tag{13.33}$$

Soit $p' \in (\theta_m, \theta_M)$ et $r > 0$ tel que $(p'-r, p') \subset (\theta_m, p)$ et $| \dot{\theta}(s) | \geq \dot{\theta}_0 > 0$, $\forall s \in (p'-r, p')$, dans ce cas, par la même manière utilisée dans [24, Lemme.3] on montre que

$$\begin{aligned} \parallel \chi_{(\theta_m,p)}\chi_1\phi \parallel^2 &\leq c_2\Big(q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \parallel \chi_{(p'-r,p')}\chi_1\phi \parallel^2 \Big) \\ &\leq c_2\Big(q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \dot{\theta}_0^{-2} \parallel \chi_{(p'-r,p')}\dot{\theta}\chi_1\phi \parallel^2 \Big) \end{aligned}$$

où $c_2 := \max\Big\{2 + 16\frac{(p-\theta_m)^2}{r^2}, 4(p-\theta_m)^2\Big\}$.

D'autre part, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\dot{\theta}(s)\chi_1\phi(s,.) \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$, alors en utilisant le Lemme.1 de [24], il existe $\lambda > 0$ qui dépend de ω tel que :

$$\parallel \chi_{(p'-r,p')}\dot{\theta}\chi_1\phi \parallel^2 \leq \parallel \chi_{(\theta_m,p)}\dot{\theta}\chi_1\phi \parallel^2 \leq \lambda^{-1}\Big(q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty^2 q_1^{(\theta_m,p)}(\psi)\Big) \tag{13.34}$$

Par conséquent, les inégalités (13.34), (13.34) et (13.32) donnent

$$| (\chi_{(\theta_m,p)}\ddot{\theta}\phi\chi_1, \chi_1\partial_\tau\phi) |^2 \leq \Big(c_3 q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + \frac{\alpha}{2}q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,p)}(\psi)\Big)^2 \tag{13.35}$$

avec $c_3 := \max\Big\{\frac{d\|\ddot{\theta}\|_\infty\|\dot{\theta}\|_\infty\sqrt{c_2}}{\dot{\theta}_0\sqrt{\lambda}}, \frac{d^2\|\ddot{\theta}\|_\infty^2 c_2}{\alpha}, \frac{d^2\|\ddot{\theta}\|_\infty^2 c_2}{2\beta\dot{\theta}_0^2\lambda}\Big\}$. En conséquence, (13.31) et (13.35) impliquent (13.29) avec $\gamma_{\alpha,\beta} := c_1 + c_3$. □

Le deuxième Lemme nécessaire pour la preuve de la Proposition.13.3.4 est une déduction du Lemme.13.3.5 :

Lemme 13.3.6. *Sous les mêmes conditions de la Proposition.13.3.4, pour tout $\psi \in D(q_\theta^l)$ telle que $\psi(p,.) = 0$ où $p \in (\theta_m, \theta_M]$, pour $\alpha < 1$ il existe $\gamma > 1$ tel que :*

$$q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) \leq \frac{\gamma}{1-\alpha}\Big(q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_{2,3}^{\theta_m,p}(\psi)\Big) \tag{13.36}$$

<u>Preuve du Lemme.13.3.6 :</u>

D'après le lemme.13.3.4, pour $\alpha < 1$ et $\beta = 1$ il existe $\gamma_{\alpha,1} > 0$ tel que

$$| q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) | \leq \gamma_{\alpha,1} q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + \alpha q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_3^{(\theta_m,p)}(\psi). \tag{13.37}$$

Soit $\gamma := \max(1, \gamma_{\alpha,1})$. On multiplie (13.37) par γ^{-1} comme suit :

$$\gamma^{-1} | q_{2,3}^{(\theta_m,p)} | \leq \alpha\gamma^{-1} q_2^{(\theta_m,p)} + \gamma^{-1} q_3^{(\theta_m,p)} + \gamma^{-1}\gamma_{\alpha,1} q_1^{(\theta_m,p)} \tag{13.38}$$

En utilisant que $\gamma^{-1}\gamma_{\alpha,1} \leq 1$, on obtient :

$$\gamma^{-1} | q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) | \leq \alpha\gamma^{-1} q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \gamma^{-1} q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) \tag{13.39}$$

Maintenant en écrivant $q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) = \gamma^{-1} q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) + (1-\gamma^{-1}) q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi)$ et en utilisant (13.39) pour remplacer $\gamma^{-1} q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi)$ on déduit que :

$$\begin{aligned}
Q^{(\theta_m,p)}(\psi) &= q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&= q_1^{(\theta_m,p)}(\theta_m, p) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + \gamma^{-1} q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&\quad +(1-\gamma^{-1}) q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&\geq q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) - \alpha\gamma^{-1} q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&\quad -\gamma^{-1} q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) - q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + (1-\gamma^{-1}) q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&\geq (1-\gamma^{-1})(q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi)) + (1-\frac{\alpha}{\gamma}) q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) \\
&\geq (1-\gamma^{-1})\Big(q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi)\Big) \\
&\quad +\gamma^{-1}(1-\alpha) q_2^{(\theta_m,p)}(\psi).
\end{aligned} \tag{13.40}$$

Par contre on sait que $q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) \geq 0$, donc on arrive a (13.36) □

Maintenant, on est prêt pour entamer la preuve de la Proposition.13.3.4 :

Preuve de la Proposition.13.3.4 :

Soit $p \in (\theta_m, \theta_M]$, tel que $\dot{\theta}$ est non identiquement nulle sur $(p-r, p)$.

Soit f la fonction définie comme suit :

$$f(s) := \begin{cases} 0, & \text{si } s \in [p, +\infty]\,; \\ \frac{p-s}{r}, & \text{si } s \in [p-r, p]\,; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.41}$$

Soit $\widetilde{f}(s,t) := \chi_\omega(t) \otimes f(s)$, où χ_ω est la fonction caractéristique définie sur ω. On peut écrire tout $\psi \in D(q_\theta^l)$ sous la forme de la somme suivante : $\psi(s,t) = \psi(s,t)\widetilde{f}(s,t) + (1-\widetilde{f}(s,t))\psi(s,t)$.
Par des calculs directs on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_p} \frac{\mid \psi(s,t) \mid^2}{1+(s-p)^2} dsdt &= \int_{\Omega_p} \frac{\mid \psi f(s) + (1-f(s))\psi \mid^2}{1+(s-p)^2} dsdt \\
&\leq 2\Big(\int_{\Omega_p} \frac{\mid f(s)\psi \mid^2}{1+(s-p)^2} dsdt + \int_{\Omega_p} \frac{\mid (1-f(s))\psi \mid^2}{1+(s-p)^2} dsdt \Big) \\
&\leq 2\Big(\int_{\Omega_p} \frac{\mid f(s)\psi \mid^2}{(s-p)^2} dsdt + \int_\omega \int_{p-r}^p (1-f(s))^2 \mid \psi \mid^2 dsdt \Big) \\
&\leq 2\Big(\int_{\Omega_p} \frac{\mid f(s)\psi \mid^2}{(s-p)^2} dsdt + \int_\omega \int_{p-r}^p \mid \psi \mid^2 dsdt \Big) \qquad (13.42)
\end{aligned}$$

Comme $\dot{\theta}$ n'est pas identiquement nulle sur $(p, p-r)$, on peut appliquer le lemme.6.1 de l'article [35], par conséquent le deuxième terme de la dernière ligne de la partie à droite de l'inégalité (13.42) est estimé comme suit :

$$\int_\omega \int_{p-r}^p \mid \psi \mid^2 dsdt \leq \lambda_0^{-1} Q^{(p-r,p)}(\psi), \qquad (13.43)$$

où λ_0 une constante strictement positive qui dépend de θ p, r et ω. D'où on arrive à :

$$\int_\omega \int_{p-r}^p \mid \psi \mid^2 dsdt \leq \lambda_0^{-1} Q^{(-\infty,p)}(\psi) \qquad (13.44)$$

Cette dernière inégalité est obtenue en utilisant le fait que $Q^A(\psi) \geq 0 \; \forall \; A \subset \mathbb{R} \setminus I_a(l)$ D'autre part, comme $\psi(p,.)f(p) = 0$ on peut alors appliquer l'inégalité de Hardy classique (7.10) sur la fonction $f\psi$ pour estimer le premier terme de la partie droite de (13.42) somme suit :

$$\begin{aligned}
\int_\omega \int_{-\infty}^p \frac{\mid \psi f \mid^2}{(s-p)^2} dsdt &\leq 4 \int_\omega \int_{-\infty}^p \mid \partial_s(\psi f) \mid^2 dsdt \\
&\leq 4(q_2^{(-\infty,\theta_m)}(\psi f) + q_2^{(\theta_m,p)}(\psi f)) \qquad (13.45)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\dot{\theta}(s) = 0$ et $f = 1$ sur $(-\infty, \theta_m]$ donc on a :

$$q_2^{(-\infty,\theta_m)}(f\psi) = q_2^{(-\infty,\theta_m)}(\psi) = \| \chi_{(-\infty,\theta_m)}(\dot{\theta}\partial_\tau \psi + \partial_s \psi) \|^2 \qquad (13.46)$$

Puisque $q_1^{(-\infty,\theta_m)}(\psi) \geq 0$ on obtient :

$$q_2^{(-\infty,\theta_m)}(\psi f) \leq Q^{(-\infty,\theta_m)}(\psi) \tag{13.47}$$

Comme $f(p)\psi(p,.) = 0$ alors le Lemme.13.3.6 est applicable, par conséquent pour $\alpha < 1$, $\gamma > 1$ on a :

$$q_2^{(\theta_m,p)}(f\psi) \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} Q^{(\theta_m,p)}(f\psi) \tag{13.48}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \| \chi_{(\theta_m,p)}(\dot{\theta}\partial_\tau(f\psi) + \partial_s(f\psi)) \|^2 &= \| \chi_{(\theta_m,p)}(\dot{\theta} f\partial_\tau\psi + f\partial_s\psi + f'\psi) \|^2 \\ &\leq 2 \| \chi_{(\theta_m,p)}(\dot{\theta}\partial_\tau\psi + \partial_s\psi) \|^2 + \frac{2}{r^2} \| \chi_{(p-r,p)}\psi \|^2 \end{aligned} \tag{13.49}$$

En utilisant le Lemme.6.1 de l'article [35] on obtient

$$\begin{aligned} q_2^{(\theta_m,p)}(\psi f) &\leq \frac{2\gamma}{1-\alpha}\Big(Q^{(\theta_m,p)}(\psi) + \frac{2}{\lambda_0 r^2} Q^{(p-r,p)}(\psi)\Big) \\ &\leq c' Q^{(\theta_m,p)}(\psi) \end{aligned} \tag{13.50}$$

avec $c' = \frac{2\gamma}{1-\alpha}(1 + \frac{2}{\lambda_0 r^2})$. (13.47) et (13.50) donnent :

$$q_2^{(-\infty,p)}(f\psi) \leq (1+c') Q^{(-\infty,p)}(\psi) \tag{13.51}$$

(13.43) et (13.51) donnent que

$$Q^{(-\infty,p)}(\psi) \geq C \int_{\Omega_p} \frac{| \psi(s,t) |^2}{1+(s-p)^2} dsdt = \int_{\Omega_p} \rho_p | \psi |^2 \, dsdt \tag{13.52}$$

avec $C^{-1} = 8(1+c') + \frac{2}{\lambda_0}$.

Finalement, en appliquant le Lemme.13.3.3 pour $\alpha = p$ (utilisé pour construire la fonction ρ_p), en déduit (13.20) □

Il est temps maintenant de passer à la deuxième étape de la preuve du Théorème.13.3.1 :

b.Réduction à un problème unidimensionnel :

Dans cette partie, notre objectif est de montrer que, sous certaines conditions sur la section transverse ω, étudier l'opérateur Hamiltonien tridimensionnel H_θ^l est équivalent à déterminer les propriétés spectrales d'un opérateur de Schrödinger unidimensionnel qu'on va préciser. Ceci se résume dans la proposition suivante :

Proposition 13.3.7. *Considérons l'inégalité suivante :* $\forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 + 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds \geq 4E_1 \int_{I_a(l)} \mid \varphi(s) \mid^2 ds, \tag{13.53}$$

Sous les mêmes conditions du théorème.13.3.1Il existe $d_{max} > 0$ *tel que* $\forall d < d_{max}$ *l'inégalité (13.53) est une condition suffisante pour établir*

$$\| \nabla' \psi \|^2 + \| \dot{\theta}\partial_\tau \psi + \partial_s \psi \|^2 - E_1 \| \psi \|^2 \geq 0, \quad \forall \psi \in D(q_\theta^N). \tag{13.54}$$

Cette proposition signifie qu'il est suffisant de démonter la positivité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

$$-\frac{d^2}{ds^2} + 2\rho_p(s) - 4E_1 \chi_{I_a(l)} \tag{13.55}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ pour obtenir que $-\Delta_\omega - (\dot{\theta}\partial_\tau + \partial_s)^2 - E_1 \geq 0$.

Preuve de la Proposition 13.3.7 :

On commence par les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} Q(\psi) &= \| \nabla' \psi \|^2 + \| \partial_s \psi + \dot{\theta}\partial_\tau \psi \|^2 - E_1 \| \psi \|^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\| \nabla' \psi \|^2 - E_1 \| \psi \|^2 + \| \partial_s \psi + \dot{\theta}\partial_\tau \psi \|^2 - \int_{\Omega_0} (E_1 - g(s)) \mid \psi \mid^2 dsdt \Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\| \nabla' \psi \|^2 + \| \partial_s \psi + \dot{\theta}\partial_\tau \psi \|^2 - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \Big) \end{aligned} \tag{13.56}$$

où g est donnée par (13.17). On utilise (13.20) pour estimer la dernière ligne

de la partie droite de (13.56) pour obtenir :

$$Q(\psi) \geq \frac{1}{2}\Big(\parallel \partial_s\psi+\dot{\theta}\partial_\tau\psi \parallel^2 + \parallel \nabla'\psi \parallel^2 -E_1 \parallel \psi \parallel^2 + \int_{\Omega_0} (\rho_p(s)+g(s)-E_1) \mid \psi \mid^2 dsdt\Big) \tag{13.57}$$

On développe le premier terme de la partie droite de (13.57) :

$$\parallel \partial_s\psi + \dot{\theta}\partial_\tau\psi \parallel^2 = \parallel \partial_s\psi \parallel^2 + \parallel \dot{\theta}\partial_\tau\psi \parallel^2 + 2(\partial_s\psi, \dot{\theta}\partial_\tau\psi) \tag{13.58}$$

Pour estimer le dernier terme dans la partie droite de (13.57) on va utiliser le lemme.13.3.5 pour :

Soit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: alors il existe un réel positif $\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ tel que :

$$\mid q_{2,3}^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) \mid \leq \gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} q_1^{(\theta_m,\theta_M)} + \frac{1}{2} q_2^{\mathbb{R}}(\psi) + \frac{1}{2} q_3^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi), \tag{13.59}$$

où $\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} := \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + 4d^2 \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty^2$,

$\widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} := max\Big\{ \frac{d\|\dot{\theta}\|_\infty \|\ddot{\theta}\|_\infty \sqrt{f(L)}}{\dot{\theta_0}\sqrt{\lambda}}, \frac{d^2\|\ddot{\theta}\|_\infty^2 f(L)}{\lambda\dot{\theta}_0^2}, 2d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 f(L)\Big\}$

et $f(L) := max\{2 + \frac{8L^2}{r^2}, 4L^2\}$

En utilisant (13.59) dans (13.58) et en remplaçant le second terme de la partie droite de (13.57) par l'estimation résultante on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\psi) &\geq \frac{1}{4} q_2^{(\mathbb{R})}(\psi) + \frac{1}{4} q_3^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) + \frac{1-\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{2} q_1^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - E_1 \int_l^{l+a} \mid \psi \mid^2 dsdt \end{aligned} \tag{13.60}$$

On sait que :

$$\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq \mathcal{B}d + \mathcal{A}d^2$$

avec $\mathcal{A} := \frac{\|\ddot{\theta}\|_\infty^2 f(L)}{\lambda\dot{\theta}_0^2} + 2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 f(L) + 4 \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty^2$, $\mathcal{B} := \frac{\|\dot{\theta}\|_\infty \|\ddot{\theta}\|_\infty \sqrt{f(L)}}{\dot{\theta_0}\sqrt{\lambda}}$. On pose $\Delta := \mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}$. Il est suffisant de prendre $0 < d < d_{max} := \frac{-\mathcal{B}+\sqrt{\Delta}}{2\mathcal{A}}$ pour avoir $\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} < 1$. pour un tel choix de la d on : $(1-\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) q_1^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) \geq 0$. Par conséquent on obtient, si $0 < d < d_{max}$:

$$Q(\psi) \geq \frac{1}{4} \parallel \partial_s\psi \parallel^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - E_1 \int_\omega \int_l^{l+a} \mid \psi \mid^2 dsdt \tag{13.61}$$

Ce qui signifie que, sous la condition imposée sur d, il est suffisent de montrer que $\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi' \mid^2 + 2\rho_p \mid \varphi \mid^2 ds - 4E_1 \int_a^{a+l} \mid \varphi \mid^2 ds \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ pour démontrer la positivité de l'opérateur $-\Delta_\omega - (\dot{\theta}\partial_\tau + \partial_s)^2 - E_1$.
On va consacrer la partie suivante à l'étude de l'opérateur unidimensionnel.

c.Étude de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Dans cette partie on veut déterminer les critères relatifs à largeur de la fenêtre de Neumann pour assurer la positivité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel :

$$-\frac{d^2}{ds^2} + 2\rho_p - 4E_1\chi_{I_a(l)} \tag{13.62}$$

ρ_p est la fonction donnée par (13.77) et $I_a(l) = (a, a+l)$. En réalité, on veut établir la proposition suivante :

Proposition 13.3.8. *:*
Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, il existe $l_{max}(\theta, d) > 0$ tel que $\forall\ 0 < l < l_{max}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 + 2c\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds \geq 4E_1 \int_{I_a(l)} \mid \varphi(s) \mid^2 ds \tag{13.63}$$

Pour démonter cette proposition on va utiliser une technique utilisée dans [5].

Preuve de la Proposition.13.3.8 :

On définit la fonction suivante :

$$\Phi_-(s) := \begin{cases} C(\frac{\pi}{2} + \arctan(s-p)), & si\ s < p\,; \\ \frac{\pi C}{2}, & \text{si } s \geq p. \end{cases} \tag{13.64}$$

où p est le même réel utilisé pour définir la fonction ρ_p. Il est clair que $\Phi'_- = \rho_p$. Pour tout $t \in I_a(l)$ puisque $\Phi_-(s) = \frac{\pi C}{2}$ pour $s \geq p$ On peut alors

écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\pi C}{2}\varphi(t) = \Phi_-(t)\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{t} (\Phi_-(s)\varphi(s))' ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \Phi'(s)\varphi(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \Phi_-(s)\varphi'(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \rho_p(s)\varphi(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \Phi(s)\varphi'(s)ds \quad (13.65)\end{aligned}$$

Par contre on sait que $\rho_p(s) = 0$ pour tout $s \in (p, +\infty)$, donc (13.65) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\pi C}{2}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)\varphi(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \Phi_-(s)\varphi'(s)ds \qquad (13.66)$$

On essaie par la suite d'estimer le carré (13.66), $\forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2 C^2}{4}\varphi^2(s) &= \Big(\int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)\varphi(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \Phi_-(s)\varphi'(s)ds\Big)^2 \\ &\leq 2\Big((\int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)\varphi(s)ds)^2 + (\int_{-\infty}^{t} \Phi_-(s)\varphi'(s)ds)^2\Big) (13.67)\end{aligned}$$

Par suite on utilise l'inégalité de Cauchy−Schwarz pour obtenir :

$$\frac{\pi^2 C^2}{4}\varphi^2(s) \leq 2\Big(\int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)ds \int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \Phi_-^2(s)ds \int_{-\infty}^{t} \varphi'^2(s)ds\Big) \qquad (13.68)$$

D'une part, la définition des fonctions Φ_- et ρ_p donne :

$$\int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)ds = \int_{-\infty}^{p} \Phi_-'(s)ds = \Phi_-(p) = \frac{\pi C}{2} \qquad (13.69)$$

D'autre part la définition de Φ_- et un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} \Phi_-^2(s)ds &= \int_{-\infty}^{p} \Phi_-^2(s)ds + \int_{p}^{t} \Phi_-^2(s)ds \\ &= C^2 \int_{-\infty}^{0} (\frac{\pi}{2} + \arctan s)^2 ds + \frac{\pi^2 C^2}{4}(t-p) \\ &= C^2 \pi \ln 2 + \frac{\pi^2 C^2}{4}(t-p) \qquad (13.70)\end{aligned}$$

Maintenant on utilise (13.69) et (13.70) dans (13.68) on obtient, $\forall\varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{\pi^2C^2}{4} \mid \varphi(t) \mid^2 \leq \pi C \int_{-\infty}^{p} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \Big(2C^2\pi \ln 2 + \frac{\pi^2C^2}{2}(t-p)\Big) \int_{-\infty}^{t} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds$$

On multiplie les deux cotés par $\frac{4}{\pi^2C^2}$ et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds &\leq \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \quad , \\ \int_{-\infty}^{p} \rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds &= \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds. \end{aligned} \tag{13.71}$$

on obtient :

$$\mid \varphi(t) \mid^2 \leq \frac{4}{\pi C} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \Big(\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(t-p)\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \tag{13.72}$$

On intègre (13.72) sur l'intervalle $I_a(l)$, $\forall\varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{I_a(l)} \mid \varphi(t) \mid^2 &\leq \frac{4}{\pi C} \int_{I_a(l)} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)dtds \\ &\quad + \int_{I_a(l)} \Big(\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(t-p)\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 dtds \\ &\leq \frac{4l}{\pi C} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds \\ &\quad + \Big((\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p))l + l^2\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \\ &\leq \Big(l(\frac{2}{\pi C} + \frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p)) + l^2\Big) \int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s)\varphi^2(s) + \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \end{aligned} \tag{13.73}$$

Et on multiplie par $4E_1$ pour obtenir, $\forall\varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$

$$4E_1 \int_{l}^{l+a} \mid \varphi(t) \mid^2 dt \leq 4E_1P(l) \int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 + \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \tag{13.74}$$

avec $P(l) := 2l(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + a - p) + l^2$. Par conséquent, il sera suffisant que $P(l) < \frac{1}{4E_1}$ pour obtenir (13.63).

Le problème alors devient de chercher les solutions de l'inégalité $P(l) < \frac{1}{4E_1}$. Le discriminant de l'équation de second dégrée associée est : $\Delta' :=$

$(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + a - p)^2 + \frac{1}{4E_1} > 0$. Par conséquent, pour $0 < l < l_{max} := -(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + l) + \sqrt{\Delta'}$ on a $P(l) < 0$. Ceci signifie que pour une fenêtre de Neumann ne dépassant pas une largeur maximale, le spectre discret de l'opérateur H_θ^l est vide.

Passons maintenant à l'étude du deuxième cas.

13.3.2 Deuxième cas : $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) \neq \varnothing$

Comme le cas précédent, ils existent deux cas de figures qui donnent un intersection non vide :

$$a < \theta_m < a + l < \theta_M \quad ou \quad \theta_m < a < \theta_M < a + l$$

Nous choisissant d'étudier le cas où $\theta_m < a < \theta_M < a+l$, mais il faut signaler que l'autre cas de figure se traite d'une manière similaire.

On se propose de démontrer que sous certaines conditions imposées sur la fenêtre de Neumann et la section transverse ω, $\sigma_d(H_\theta^{\mathcal{N}}) = \emptyset$. En effet le résultat est donné dans le théorème suivant :

Théorème 13.3.9. *Soit ω un ouvert borné de frontière régulière et supposons qu'il est non invariant par rotation. Soit θ une fonction de classe C^1 telle que sa fonction dérivée $\dot{\theta}$ est à support compact. Supposons de plus que $\dot{\theta}, \ddot{\theta} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sous ces conditions, s'il existe un réel positif δ assez petit tel que $\frac{\|\ddot{\theta}\|_\infty^2}{L^2} \leq \delta^2 \leq \frac{1}{2}$ alors il existe $d_{max}(L, \theta) > 0$ tel que pour tout $d < d_{max}$ il existe $l_{max}(\theta, d) > 0$ telle que pour $0 < l < l_{max}$, si $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}(l)$ et $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) \neq \emptyset$, on a*

$$\sigma_d(H_\theta^{\mathcal{N}}) = \emptyset \tag{13.75}$$

Comme le cas précédent on divise la preuve sur trois étapes : commençons par la première

a.Une inégalité de Hardy locale

En réalité, les estimations démontrées dans le premier cas pour établir l'inégalité de Hardy (13.3.2) sont encore valables dans ce cas, mais il est très important de signaler que le choix du point p est différent. En effet dans ce cas p doit être dans $(\theta_m, a]$. Pour un p ainsi choisi on a le théorème suivant

Théorème 13.3.10. *Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ et qui est non invariant par rotation. Soit θ une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ et non identiquement nulle. Supposons que $\dot{\theta}$ est à support compact et que $Supp(\dot{\theta}) \cap I_a(l) \neq \emptyset$. Il existe une fonction positive $\rho_p > 0$ telle que, $\forall\ \psi \in D(q_\theta^{\mathcal{N}})$ on a*

$$\| \nabla'\psi \|^2 + \| \dot{\theta}\partial_\tau\psi + \partial_s\psi \|^2 - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \geq \int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \tag{13.76}$$

où ρ_p est donnée pour $p \in (\theta_m, a]$ par :

$$\rho_p(s) := \begin{cases} \frac{C}{1+(s-p)^2}, & si\ s \in (-\infty, p)\ ; \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{13.77}$$

et C est la même constante du cas précédent

Comme il s'agit de la même preuve que dans le cas précédent on passe directement à la deuxième étape :

b.Réduction à un opérateur de Scrödinger 1D

Tout d'abord on doit démontrer la proposition suivante :

Proposition 13.3.11. *Considérons l'inégalité suivante :* $\forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 + 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds \geq (4 + \frac{2}{\lambda_0}) E_1 \int_{a-\delta}^{a+l} \mid \varphi(s) \mid^2 ds, \tag{13.78}$$

pour

$$\frac{\| \ddot{\theta} \|^2}{L^2} < \delta^2 < \frac{1}{2} \tag{13.79}$$

Il existe $d_{max} > 0$ *tel que* $\forall d < d_{max}$ *l'inégalité (13.78) est une condition suffisante pour établir*

$$\| \nabla' \psi \|^2 + \| \dot{\theta} \partial_\tau \psi + \partial_s \psi \|^2 - E_1 \| \psi \|^2 \geq 0, \quad \forall \psi \in D(q_\theta^{\mathcal{N}}) \tag{13.80}$$

Cette proposition signifie que pour L, θ et δ vérifiant (13.79) et si l'épaisseur du tube ne dépassait pas une épaisseur maximale d_{max}, il est suffisant de démontrer la positivité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

$$-\frac{d^2}{ds^2} + 2\rho_p(s) - (4 + \frac{2}{\lambda_0}) E_1 \chi_{(a-\delta, a+l)} \tag{13.81}$$

dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ pour obtenir que l'opérateur tridimensionnel $-\Delta_\omega - (\dot{\theta}\partial_\tau + \partial_s)^2 - E_1 \geq 0$.

Preuve de la Proposition 13.3.11

Soit $\delta > 0$ et pour $\theta_m < p < a - \delta$. L'inégalité de Hardy locale (13.76) s'applique. Comme dans les calculs du cas précédent, en utilisant l'inégalité de Hardy (13.76) on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\psi) \quad \geq \quad & \frac{1}{2}\Big(q_1^{\mathbb{R}}(\psi) + q_2^{\mathbb{R}}(\psi) + q_3^{(\theta_m, \theta_M)} + q_{2,3}^{(\theta_m, \theta_M}(\psi) \\ & + \frac{1}{2}\Big(\int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt + -E_1 \int_{I_a(l)} \mid \psi \mid^2 dsdt \Big) \end{aligned} \tag{13.82}$$

On divise le dernier terme de la première ligne de la partie droite de l'inégalité (13.82) comme suit :

$$q_{2,3}^{(\theta_m, \theta_M)}(\psi) = q_{2,3}^{(\theta_m, a)}(\psi) + q_{2,3}^{(a, \theta_M)}(\psi) \tag{13.83}$$

Pour estimer le premier terme de la partie droite de (13.83) on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 13.3.12. *Soit $\delta > 0$. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ il existe $\gamma_{\alpha,\beta}$ telle que*

$$\begin{aligned} q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(\psi) \leq\ & \gamma_{\alpha,\beta} q_1(\theta,a)(\psi) + (2\alpha + \frac{1}{\alpha_2}) q_2^{(a-\delta,a)}(\psi) + 2\alpha q_2^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) \\ & +(\beta + \frac{\alpha_1}{\delta^2} + 4\alpha_2) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) \\ & +(\frac{1}{\alpha_1\lambda_0} + \frac{2\alpha}{\delta^2\lambda_0})(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \end{aligned} \tag{13.84}$$

avec α_1 et α_2 sont des réels positifs.

Preuve du lemme.13.3.12 :

Soit f la fonction continue définie comme suit :

$$f(s) := \begin{cases} 1, & \text{sur } (-\infty, a-\delta]\,; \\ \frac{a-s}{\delta}, & \text{sur } [a-\delta, a]\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.85}$$

Notons par $\bar{f} := 1 - f$. Il est facile de voir que $f + \bar{f} = 1$ et $f' + \bar{f}' = 0$. En utilisant ceci on peut écrire une fonction $\psi \in D(q_\theta^l)$ sous la forme $\psi = f\psi + \bar{f}\psi$. En employant cette expression de ψ, $q_{2,3}^{(\theta_m,a)}$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} q_{2,3}^{(\theta_m,a)} &= 2\Big(\chi_{(\theta_m,a)}\dot{\theta}\partial_\tau(f\psi + \bar{f}\psi), \partial_s(f\psi + \bar{f}\psi)\Big) \\ &= 2\Big((\chi_{(a-\delta)}\dot{\theta} f\partial_\tau\psi, \bar{f}'\psi + \bar{f}\partial_s\psi) + (\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta}\bar{f}\partial_\tau\psi, f'\psi + f\partial_s\psi)\Big) \\ &\quad +(\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta}\bar{f}\partial_\tau\psi, \bar{f}'\psi + \bar{f}\partial_s\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(f\psi)\Big) \\ &= q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(f\psi) + 2\Big((\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta}(1+f)\partial_\tau\psi, \bar{f}\partial_s\psi) + \frac{1}{\delta}(\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta} f\partial_\tau\psi, \psi)\Big) \\ &= q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(f\psi) + ST \end{aligned} \tag{13.86}$$

avec $ST := 2(\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta}(1+f)\partial_\tau\psi, \bar{f}\partial_s\psi) + \frac{2}{\delta}(\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta} f\partial_\tau\psi, \psi)$.

On sait que $f\psi \in \mathcal{H}_0^1((-\infty, a) \times \omega)$, par conséquent pour estimer le premier terme de la partie droite de (13.86) on applique le lemma.13.3.5.

Ceci signifie que pour $\alpha,\ \beta > 0$ il existe $\gamma_{\alpha,\beta} > 0$ telle que

$$q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(f\psi) \leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,a)}(f\psi) + \alpha q_2^{(\theta_m,a)}(f\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,a)}(f\psi) \tag{13.87}$$

On veut avoir une estimation avec un terme de droite ne dépendant que de ψ. Puisque $\mid f \mid < 1$ on obtient :

$$q_1^{(\theta_m,a)}(f\psi) \leq q_1^{(\theta_m,a)}(\psi) \quad and \quad q_3^{(\theta_m,a)}(f\psi) \leq q_3^{(\theta_m,a)}(\psi) \tag{13.88}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} q_2^{(\theta_m,a)}(f\psi) &= \parallel \chi_{(\theta_m,a)}(f'\psi + f\partial_s\psi) \parallel^2 \\ &\leq 2 \parallel \chi_{(\theta_m,a)}\partial_s\psi \parallel^2 + \frac{2}{\delta^2} \parallel \chi_{(a-\delta,a)}\psi \parallel^2 \\ &\leq 2q_2^{(\theta_m,a)}(\psi) + \frac{2}{\delta^2\lambda_0} Q^{(a-\delta,a)}(\psi) \\ &\leq 2q_2^{(\theta_m,a)}(\psi) + \frac{2}{\delta^2\lambda_0}(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \end{aligned} \tag{13.89}$$

En groupant (13.88) et (13.89), (13.87) devient

$$q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(f\psi) \leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,a)}(\psi) + 2\alpha q_2^{(\theta_m,a)}(\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,a)}(\psi) + \frac{2\alpha}{\delta^2\lambda_0}(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \tag{13.90}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Young le deuxième terme de la partie droite de (13.86) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mid ST \mid &\leq \frac{2}{\delta} \mid (\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta} f \partial_\tau\psi, \psi) \mid + 2 \mid (\chi_{(a-\delta,a)}\dot{\theta}(f+1)\partial_\tau\psi, \bar{f}\partial_s\psi) \mid \\ &\leq \frac{\alpha_1}{\delta^2} q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_1} \parallel \chi_{(a-\delta,a)}\psi \parallel^2 + 4\alpha_2 q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_2} q_2^{(a-\delta,a)}(\psi) \\ &\leq (\frac{\alpha_1}{\delta^2} + 4\alpha_2) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_2} q_2^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_1\lambda_0} Q^{(a-\delta,a)}(\psi) \\ &\leq (\frac{\alpha_1}{\delta^2} + 2\alpha_2) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_2} q_2^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_1\lambda_0}(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \end{aligned} \tag{13.91}$$

où $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. En utilisant (13.91) et (13.90) on arrive à (13.84). Le deuxième terme de (13.83) est estimé par l'inégalité de Young comme suit :

$$\mid q_{2,3}^{(a,\theta_M)}(\psi) \mid \leq \alpha_3 q_3^{(a,\theta_M)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_3} q_2^{(a,\theta_M)}(\psi) \tag{13.92}$$

où $\alpha_3 > 0$. Maintenant on utilise (13.84) et (13.92) dans (13.82), on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\psi) \;\geq\; & \frac{1}{2}\Big((1-\gamma_{\alpha,\beta})q_1^{(\theta_m,a)}(\psi) + q_1^{\mathbb{R}\setminus(\theta_m,a)} + (1-2\alpha)q_2^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) \\ & +(1-2\alpha-\frac{1}{\alpha_2})q_2^{(a-\delta,a)} + (1-\frac{1}{\alpha_3})q_2^{(a,\theta_M)}(\psi) + q_2^{\mathbb{R}\setminus(\theta_m,\theta_M)} \\ & +(1-\beta)q_3^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) + (1-\beta-\frac{\alpha_1}{\delta^2}-2\alpha_2)q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) \\ & +C\int_{\Omega_0}\rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - (\frac{2\alpha}{\delta^2\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_1\lambda_0})Q(\psi) \\ & +(1-\alpha_3)q_3^{(a,\theta_M)}(\psi) - (1+\frac{2\alpha}{\delta^2\lambda_0}+\frac{1}{\alpha_1\lambda_0})E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2 \Big) \\ & . \end{aligned} \tag{13.93}$$

En choisissant $\beta = \frac{1}{4}$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha = \frac{\delta^2}{4}$ on obtient :

$$\begin{aligned} (1+\frac{1}{2\lambda_0})Q(\psi) \;\geq\; & \frac{1}{2}\Big((1-\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}} - (\frac{1}{4\delta^2}+8)d^2 \parallel \dot\theta \parallel^2) \parallel \chi_{(a-\delta,a)\nabla'\psi} \parallel^2 \\ & +(1-d^2 \parallel \dot\theta \parallel_\infty^2) \parallel \chi_{(a,\theta_M)}\nabla'\psi \parallel^2 + \frac{1}{2}q_2^{\mathbb{R}}(\psi) \\ & + \int_{\Omega_0}\rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - (2+\frac{1}{\lambda_0})E_1 \parallel \chi_{(a-\delta,a+l)}\psi \parallel^2 \\ & +(1-\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}})q_1^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi)\Big). \end{aligned} \tag{13.94}$$

Si on suppose $\parallel \ddot\theta \parallel^2 < \delta^2 L^2$, $\delta^2 < \frac{1}{2}$ et en utilisant que $\parallel \dot\theta \parallel_\infty^2 \leq L^2 \parallel \ddot\theta \parallel_\infty^2$ on obtient :

$$\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{2}} \leq d^2(2L^4 + c_2L^2 + \frac{L^2c_2}{8\dot\theta_0^2\lambda}) + d\frac{L^2\sqrt{c_2}}{4\sqrt{\lambda}} \tag{13.95}$$

On note $d_1 := \frac{-\mathcal{B}+\sqrt{\Delta}}{2\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} := 2L^4 + c_2L^2 + \frac{L^2C_2}{8\dot\theta_0^2\lambda}$, $\mathcal{B} := \frac{L^2\sqrt{c_2}}{4\sqrt{\lambda}}$, $\Delta := \mathcal{B}^2 + 2\mathcal{A} > 0$ Alors il suffit de prendre $d < d_{max} := \min(d_1, \frac{1}{4\sqrt{2}L^2})$ pour avoir $\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}$, $1 - d^2 \parallel \dot\theta \parallel_\infty^2 \geq 0$ et $\frac{1}{2} - d^2 \parallel \dot\theta \parallel_\infty^2 (\frac{1}{4\delta^2}+8) > 0$. Alors sous ces conditions on a :

$$(1+\frac{1}{2\lambda_0})Q(\psi) \geq \frac{1}{4}q_2^{\mathbb{R}}(\psi) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - (1+\frac{1}{2\lambda_0})E_1 \parallel \chi_{(a-\delta,a+l)}\psi \parallel^2 \tag{13.96}$$

Ceci signifie que, pour montrer que $Q(\psi) \geq 0$ il sera suffisant de prouver que $\forall\psi \in D(q_\theta^l)$ on a

$$q_2^{\mathbb{R}}(\psi) + 2\int_{\Omega_0}\rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - (4+\frac{2}{\lambda_0})E_1 \parallel \chi_{(a-\delta,a+l)}\psi \parallel^2 \geq 0 \tag{13.97}$$

C'est équivalent à démontrer que $\forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi' \mid^2 + 2\int_{\mathbb{R}} \rho_p(s) \mid \varphi \mid^2 ds - (4 + \frac{2}{\lambda_0})E_1 \int_{a-\delta}^{a+l} \mid \varphi \mid^2 ds \geq 0 \qquad (13.98)$$

b.Étude de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Dans cette partie, sous les conditions du Théorème (13.3.9), on veut montrer la positivité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel. On se propose alors de démontrer la proposition suivante :

Proposition 13.3.13. *Sous les mêmes conditions du théorème.13.3.9, s'il existe un réel δ tel que $\frac{\|\ddot{\theta}\|_\infty^2}{L^2} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ assez petit, il existe $l_{max} > 0$ tel que $\forall\ l < l_{max}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 + 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds \geq (4 + \frac{2}{\lambda_0})E_1 \int_{I_+} \mid \varphi(s) \mid^2 ds \quad (13.99)$$

où $I_+ := (a - \delta, a + l)$

Preuve de la proposition.13.3.13 :

Pour le même choix de la fonction Φ_- du premier cas et pour le même p choisi dans l'expression de (13.77) dans l'inégalité de Hardy (13.76 on a :

$$\mid \varphi(t) \mid^2 \leq \frac{4}{C\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \Big(\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(t-p)\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \quad (13.100)$$

On intègre les deux cotés de l'inégalité (13.100) sur I_+, et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{I_+} \mid \varphi(t) \mid^2 &\leq \frac{4(l+\delta)}{C\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds \\
&\quad + \Big((\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p))(l+\delta) + (l+\delta)^2\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds\Big) \\
&\leq P(\delta, l) \int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds
\end{aligned}$$

avec $P(\delta, l) = \Big((l+\delta)(\frac{2}{C\pi} + \frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p)) + (l+\delta)^2\Big)$. Finalement en

multipliant les deux cotés de l'inégalité par $E_1(4+\frac{2}{\lambda_0})$ on obtient :

$$(4+\frac{2}{\lambda_0})E_1\int_{a-\delta}^{l+a} \mid \varphi(t) \mid^2 dt \leq (4+\frac{2}{\lambda_0})E_1P(l,\delta)\int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 + \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \tag{13.101}$$

En choisissant $l \leq l_{max}$ avec

$$l_{max} := -(\frac{1}{\pi C}+\frac{4\ln 2}{\pi}+a-p)+\sqrt{(\frac{1}{\pi C}+\frac{4\ln 2}{\pi}+a-p)^2+((4+\frac{9}{\lambda_0})E_1)^{-1}}-\delta$$

Ici δ est choisi suffisamment petit pour assurer que $l_{max} > 0$.

Remarque 13.3.1. *Le cas où $\theta_m < a < a+l = \theta_M$ est un cas critique. La condition que $\theta_m \neq a$ nous permet d'établir l'inégalité de Hardy locale qui représente la base de la preuve de notre résultat. Il faut indiquer que si $Supp(\dot{\theta}) = [a, a+l]$ nos résultats ne sont plus valables*

Il ne reste qu'un seul cas à traiter, c'est le cas le plus compliqué et qui demande plusieurs estimations. Raison pour laquelle on le traite séparément

13.3.3 Troisième cas $I_a(l) \subsetneqq Supp(\dot{\theta})$

Il est important de signaler que l'inclusion est évidement stricte, puisque si $I_a(l) = Supp(\dot{\theta})$ on perd l'inégalité de Hardy locale

On se met alors dans le cas où $\theta_m < a < a+l < \theta_M$. Le but principal dans cette partie est de démontrer le suivant :

Théorème 13.3.14. *Si $I_a(l) \subset Supp(\dot{\theta})$, s'il existe un réel $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe $d_{max}(\theta,\omega)$ tel que pour tout $d < d_{max}$ il existe l_{max} tel que pour tout $l < l_{max}(\theta,d,\omega)$ on a si $I_a(l) \subset Supp(\dot{\theta})$, $\sigma_d(H_\theta^l) = \emptyset$*

La preuve de ce Théorème, comme dans les deux autres cas, se base sur l'inégalité de type Hardy locale.

Cependant, ce qui rend ce cas différent est la possibilité d'établir plusieurs inégalités de Hardy. Dans ce qui suit, on va donner les différents types d'inégalité de Hardy qu'on peut réaliser

a-Des inégalités de Hardy locales

Ce cas est un peu différent et représente un cas particulier en plusieurs niveaux. Plusieurs changements seront observés aux niveaux des estimations que nous allons établir. C'est un cas plus compliqué que les autres cas et nécessite plus de prudence pour réaliser les estimations voulues. Le premier résultat qui va nous permettre d'établir une inégalité de Hardy locale se résume dans le théorème suivant :

Théorème 13.3.15. *Sous les mêmes conditions du Théorème.13.3.14, pour $p \in (\theta_m, a)$ et $q \in (a+l, \theta_M)$ ils existent des constantes positives C_p et C_q telles que*

$$q_\theta^l(\psi) - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \geq \int_\omega \int_{-\infty}^{p} \frac{C_p}{1+(s-p)^2} \mid \psi \mid^2 dsdt \quad (13.102)$$

et

$$q_\theta^l(\psi) - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \geq \int_\omega \int_{q}^{+\infty} \frac{C_q}{1+(s-q)^2} \mid \psi \mid^2 dsdt \quad (13.103)$$

Remarque 13.3.2. *une inégalité qui résulte des deux inégalités (13.102) et (13.103) réalisées dans le Théorème.13.3.15 est la suivante :*

$$q_\theta^l(\psi) - \int_{\Omega_0} g(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \geq \int_{\Omega_0} \rho(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \quad (13.104)$$

avec

$$\rho(s) := \begin{cases} \frac{C_p}{2(1+(s-p)^2)}, & si\ s < p\,; \\ 0 & si\ \ p < s < q\,; \\ \frac{C_q}{2(1+(s-q)^2)}, & sinon. \end{cases} \quad (13.105)$$

<u>Preuve du Théorème.13.3.15</u>

Tandis que la première inégalité (13.102) est préalablement établie dans les cas précédents (avec $C_p = C$), la preuve de la deuxième inégalité (13.103) est nouvelle mais qui s'établit et se montre par les mêmes techniques utilisées pour (13.102). Par contre il est important de signaler que le Lemme.13.3.5 utilisé dans le premier cas devient sous la forme suivante :

Lemme 13.3.16. *Sous les mêmes conditions du Théorème.13.3.15 et en utilisant les mêmes notations données dans 5.23,d'une part, pour* $p \in (\theta_m, a]$ *et pour* $\psi \in D(q_\theta^l)$ *telle que* $\psi(p,.) = 0$, $\forall \alpha, \beta > 0$ *il existe* $\gamma_{\alpha,\beta}$ *telle que*

$$| \, q_{2,3}^{(\theta_m,p)}(\psi) \, | \leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,p)}(\psi) + \alpha q_2^{(\theta_m,p)}(\psi) + \beta q_3^{(\theta_m,p)}(\psi) \tag{13.106}$$

où

$$\gamma_{\alpha,\beta} = \frac{2}{\alpha} d^2 \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty^2 + max\Big\{ \frac{d \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty \sqrt{c_2}}{\dot{\theta}_0 \sqrt{\lambda}}, \frac{d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 c_2}{\alpha}, \frac{d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 c_2}{2\beta \dot{\theta}_0^2 \lambda} \Big\} \tag{13.107}$$

avec

$$c_2 = max\{2 + 16 \frac{| \, p - \theta_m \, |^2}{r^2}, 4 \, | \, p - \theta_m \, |^2\} \quad et \quad | \, \dot{\theta} \, | \geq \dot{\theta}_0 > 0, \; \forall s \in (p' - r, p) \subset (\theta_m, p] \tag{13.108}$$

D'autre part, pour $q \in [a + l, \theta_M)$ *et pour* $\psi \in D(q_\theta^l)$ *telle que* $\psi(q,.) = 0$, $\forall \alpha', \beta' > 0$ *il existe* $\gamma'_{\alpha',\beta'}$ *telle que*

$$| \, q_{2,3}^{(q,\theta_M)}(\psi) \, | \leq \gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(q,\theta_M)}(\psi) + \alpha' q_2^{(q,\theta_M)}(\psi) + \beta' q_3^{(q,\theta_M)}(\psi) \tag{13.109}$$

où

$$\gamma'_{\alpha',\beta'} = \frac{2}{\alpha'} d^2 \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty^2 + max\Big\{ \frac{d \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty \parallel \dot{\theta} \parallel_\infty \sqrt{c'_2}}{\dot{\theta}_+ \sqrt{\lambda}}, \frac{d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 c'_2}{\alpha'}, \frac{d^2 \parallel \ddot{\theta} \parallel_\infty^2 c_2}{2\beta' \dot{\theta}_+^2 \lambda} \Big\} \tag{13.110}$$

avec

$$c'_2 = max\{2 + 16 \frac{| \, \theta_M - q \, |^2}{r^2}, 4 \, | \, \theta_M - q \, |^2\} \quad et \quad | \, \dot{\theta} \, | \geq \dot{\theta}_+ > 0, \; \forall s \in (q', q' + r) \subset [q, \theta_M) \tag{13.111}$$

La preuve de ce lemme est la même utilisée dans le premier cas, il suffit de remplacer l'intervalle (θ_M, p) par (q, θ_M). On passe directement à la partie la plus délicate :

b-Réduction à un problème unidimensionnel

On rappelle que comme dans les cas précédents , l'utilisation de l'inégalité de Hardy locale (13.102) nous permet d'établir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} Q(\psi) &:= q_\theta^l(\psi) - E_1 \parallel \psi \parallel^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\Big(q_1^{\mathbb{R}}(\psi) + q_2^{\mathbb{R}}(\psi) + q_3^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) + q_{2,3}^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) + \int_{\Omega_0} \rho_p(s) \mid \psi \mid^2 dsdt \\ &- E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2 \Big) \end{aligned} \tag{13.112}$$

où ρ_p est donné par (13.77).

Le dernier terme de la partie droite de l'inégalité s'écrit comme suit :

$$q_{2,3}^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) = q_{2,3}^{(\theta,a)}(\psi) + q_{2,3}^{(a,a+l)}(\psi) + q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)}(\psi) \tag{13.113}$$

Soit f la fonction suivante :

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{sur } (-\infty, a-\delta) \cup (a+l+\delta, +\infty)\,; \\ \frac{-s+a}{\delta}, & \text{sur } [a-\delta, a]\,; \\ 0, & \text{sur } [a, a+l]\,; \\ \frac{s-l+a}{\delta}, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.114}$$

et on note par $\bar{f} = 1 - f$. En écrivant $\psi = f\psi + \bar{f}\psi$ on essai d'estimer (13.113). Comme dans le deuxième cas, en utilisant cette décomposition, le premier terme de la partie droite de l'égalité (13.113) est estimé, en utilisant la première inégalité (13.106) du lemme13.3.16 et d'autres estimations expliquées dans le cas précédent comme suit :

$$\begin{aligned} \mid q_{2,3}^{(\theta_m,a)}(\psi) \mid &\leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,a)}(\psi) + 2\alpha q_2^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) + (2\alpha + \frac{1}{\alpha_2}) q_2^{(a-\delta,a)} \\ &+ \beta q_3^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) + (\beta + \frac{\alpha_1}{\delta^2} + 4\alpha_2) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) \\ &+ (\frac{1}{\alpha_1\lambda_0} + \frac{2\alpha}{\delta^2\lambda_0})\Big(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2 \Big) \end{aligned} \tag{13.115}$$

où $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $\gamma_{\alpha,\beta}$ est donnée par (13.107).

Le deuxième terme de (13.113) est contrôlé par l'inégalité de Young suivante :

$$| q_{2,3}^{a,a+l}(\psi) | \leq \alpha_3 q_2^{(a,a+l)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_3} q_3^{a,a+l}(\psi) \tag{13.116}$$

Le troisième terme de (13.113) se décompose en deux quantités :

$$\begin{aligned} q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)} &= q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) + 2\Big(\frac{1}{\delta}(\chi_{(a+l,a+l+\delta)}\dot{\theta} f \partial_\tau \psi, \psi) + (\chi_{(a+l,a+l+\delta)}\dot{\theta}(1+f)\partial_\tau, \bar{f}\partial_s\psi)\Big) \\ &= q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) + ST2 \end{aligned} \tag{13.117}$$

où $ST2 := 2\Big(\frac{1}{\delta}(\chi_{(a+l,a+l+\delta)}\dot{\theta} f \partial_\tau \psi, \psi) + (\chi_{(a+l,a+l+\delta)}\dot{\theta}(1+f)\partial_\tau, \bar{f}\partial_s\psi)\Big)$ Comme $f\psi \in \mathcal{H}_0^1((a+l,+\infty)\times\omega)$, on peut appliquer la deuxième inégalité (13.109) du lemme.13.3.16, ie, pour $\alpha', \beta' > 0$ il existe $\gamma'_{\alpha',\beta'} > 0$ telle que

$$| q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) | \leq \gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) + \alpha' q_2^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) + \beta' q_3^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) \tag{13.118}$$

Par les mêmes techniques du premier cas, on arrive a :

$$q_2^{(a+l,\theta_M)} \leq 2q_2^{(a+l,\theta_M)} + \frac{2}{\delta^2\lambda_0}\Big(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2\Big) \tag{13.119}$$

On sait que $q_1^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) \leq q_1^{(a+l,\theta_M)}(\psi)$ et $q_3^{(a+l,\theta_M)}(f\psi) \leq q_3^{(a+l,\theta_M)}(\psi)$, alors, on obtient :

$$\begin{aligned} | q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)} | &\leq \gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(a+l,\theta_M)}(\psi) + 2\alpha' q_2^{(a+l,\theta_M)}(\psi) + \beta' q_3^{(a+l,\theta_M)}(\psi) \\ &+ \frac{2\alpha'}{\delta^2\lambda_0}(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi) \parallel^2 \end{aligned} \tag{13.120}$$

D'autre part le deuxième terme de (13.117) est estimé comme suit

$$\begin{aligned} | ST2 | &\leq \frac{1}{\alpha_5} q_2^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) + (\frac{\alpha_4}{\delta^2} + 4\alpha_5) q_3^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) \\ &+ \frac{1}{\alpha_4\lambda_0}(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \end{aligned} \tag{13.121}$$

(13.120) et (13.121) donnent

$$\begin{aligned} | q_{2,3}^{(a+l,\theta_M)}(\psi) | &\leq \gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(a+l,\theta_M)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_5} q_2^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) + 2\alpha' q_2^{(a+l,\theta_M)}(\psi) \\ &+ (\frac{\alpha_4}{\delta^2} + 4\alpha_5) q_3^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) + \beta' q_3^{(a+l,\theta_M)}(\psi) \\ &+ (\frac{2\alpha'}{\delta^2\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_4\lambda_0})(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2) \end{aligned} \tag{13.122}$$

Finalement, en utilisant (13.84), 13.116 et (13.122) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mid q_{2,3}^{(\theta_m,\theta_M)}(\psi) \mid &\leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^{(\theta_m,a)}(\psi) + \gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(a+l,\theta_M)}(\psi) \\
&+ 2\alpha q_2^{\theta_m,a-\delta}(\psi) + (2\alpha + \frac{1}{\alpha_2}) q_2^{a-\delta,a}(\psi) + \alpha_3 q_2^{a,a+l}(\psi) \\
&+ (2\alpha' + \frac{1}{\alpha_5}) q_2^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) + 2\alpha' q_2^{(a+l+\delta,\theta_M)}(\psi) \\
&+ \beta q_3^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) + (\frac{\alpha_1}{\delta^2} + 4\alpha_2 + \beta) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + \frac{1}{\alpha_3} q_3^{(a,a+l)}(\psi) \\
&+ (\frac{\alpha_4}{\delta^2} + 4\alpha_5 + \beta') q_3^{(a+l,a+l+\delta)} + \beta' q_3^{(a+l+\delta,\theta_M)} \\
&+ (\frac{2(\alpha+\alpha')}{\delta^2\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_4\lambda_0})(Q(\psi) + E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)\psi} \parallel^2) \\
&. \qquad (13.123)
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise (13.123) dans l'expression (13.112) on obtient, en posant $Ct := 1 + \frac{\alpha+\alpha'}{\delta^2\lambda_0} + \frac{1}{2\alpha_1\lambda_0} + \frac{1}{2\alpha_1\lambda_0}$

$$\begin{aligned}
CtQ(\psi) &\geq \frac{1}{2}\Big((1-\gamma_{\alpha,\beta}) q_1^{(\theta_m,a)(\psi)} + q_1^{(a,a+l)}(\psi) + (1-\gamma'_{\alpha',\beta'} q_1^{(a+l,\theta_M)}(\psi) + q_2^{\mathbb{R}\setminus(\theta_m,\theta_M)}(\psi) \\
&+ (1 - 2\alpha - \frac{1}{\alpha_2}) q_2^{(a-\delta,a)}(\psi) + (1-2\alpha) q_2^{(\theta_m,a-\delta)}(psi) + (1-\alpha_3) q_2^{(a,a+l)}(\psi) \\
&+ (1 - 2\alpha' - \frac{1}{\alpha_5}) q_2^{(a+l,a+l+\delta,a)} + (1-2\alpha') q_2^{(a+l+\delta,\theta_M)}(\psi) \\
&+ (1-\beta) q_3^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi) + (1 - \beta - \frac{\alpha_1}{\delta^2} - 4\alpha_2) q_3^{(a-\delta,a)}(\psi) + (1 - \frac{1}{\alpha_3}) q_3^{(a,a+l)}(\psi) \\
&+ (1-\beta') q_3^{(a+l+\delta,\theta_M)}(\psi)(1 - \frac{\alpha_4}{\delta^2} - 4\alpha_5 - \beta') q_3^{(a+l,a+l+\delta)}(\psi) \\
&+ \int_{\Omega_0} \rho(s) \mid \psi \mid^2 dsdt - (1 + \frac{2(\alpha+\alpha')}{\delta^2\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_1\lambda_0} + \frac{1}{\alpha_4\lambda_0}) E_1 \parallel \chi_{(a,a+l)}\psi \parallel^2 \Big) \\
&. \qquad (13.124)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \alpha' = \frac{\delta^2}{4}$, $\beta = \beta' = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 4$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_4 = 2$ et en

supposant que $\delta^2 < \frac{1}{2}$ on arrive à

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{\lambda_0})Q(\psi) &\geq \frac{1}{2}\Big((1-\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}})q_1^{(\theta_m,a-\delta)}(\psi)+(1-\gamma'_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}})q_1^{(a+l+\delta,\theta_M)}(\psi)\\ &\geq \frac{1}{2}q_2^{\mathbb{R}}(\psi)+\int_{\Omega_0}\rho(s)\mid\psi\mid^2 dsdt+(2+\frac{2}{\lambda_0})E_1\parallel\chi_{a-\delta,a+l+\delta}\psi\parallel^2\\ &+ (\frac{1}{2}-\gamma_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}})+(\frac{1}{2}-d^2\parallel\dot\theta\parallel_\infty^2(16+\frac{2}{\delta^2}))\parallel\chi_{(a-\delta,a)}\nabla'\psi\parallel^2\\ &+ (1-d^2\parallel\dot\theta\parallel_\infty^2)\parallel\chi_{(a,a+l)}\nabla'\psi\parallel^2\\ &+ ((\frac{1}{2}-\gamma'_{\frac{\delta^2}{4},\frac{1}{4}})+(\frac{1}{2}-d^2\parallel\dot\theta\parallel_\infty^2(16+\frac{2}{\delta^2}))\parallel\chi_{(a+l,a+l+\delta)}\nabla'\psi\parallel^2\Big)\end{aligned} \tag{13.125}$$

Si $d < d_{max} = min\{d_1, d_2, \frac{1}{4\sqrt{2}L^2}\}$ avec $d_1 := \frac{-\mathcal{B}+\sqrt{\Delta_1}}{2\mathcal{A}}$ où $\mathcal{A} = 2L^4 + c_2 + \frac{L^2c_2}{8\dot\theta_0^2\lambda}$, $\mathcal{B} = \frac{L^2\sqrt{c_2}}{4\sqrt{\lambda}}$ $\Delta_1 = \mathcal{B}^2 + 2\mathcal{A}$ et $d_2 := \frac{-\mathcal{B}'+\sqrt{\Delta_2}}{2\mathcal{A}'}$ où $\mathcal{A}' = 2L^4 + c_2' + \frac{L^2c_2'}{8\dot\theta_+^2\lambda}$, $\mathcal{B}' = \frac{L^2\sqrt{c_2'}}{4\sqrt{\lambda}}$ $\Delta_2 = (\mathcal{B}')^2 + 2\mathcal{A}'$ on obtient que

$$(1+\frac{1}{\lambda_0})Q(\psi) \geq \frac{1}{4}q_2^{\mathbb{R}}(\psi)+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\rho(s)\mid\psi\mid^2 dsdt-(1+\frac{1}{\lambda_0})E_1\parallel\chi_{a-\delta,a+l+\delta}\psi\parallel^2 \tag{13.126}$$

De cette dernière inégalité, il est clair qu'il est suffisant de montrer que

$$q_2^{\mathbb{R}}(\psi)+2\int_{\Omega_0}\rho(s)\mid\psi\mid^2 dsdt \geq 4(1+\frac{1}{\lambda_0})E_1\parallel\chi_{a-\delta,a+l+\delta}\psi\parallel^2 \tag{13.127}$$

ce qui revient à montrer la relation suivante :

$$\forall\varphi\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}),\quad \int_{\mathbb{R}}\mid\varphi'(s)\mid^2+2\rho(s)\mid\varphi(s)\mid^2 ds \geq 4(1+\frac{1}{\lambda_0})E_1\int_{a-\delta}^{a+l+\delta}\mid\varphi\mid^2 ds \tag{13.128}$$

on consacre la prochaine partie pour démontrer l'inégalité précédente

c.Étude de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Dans cette partie, sous les conditions du Théorème.13.3.14, on veut montrer la positivité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel. On se propose alors de démontrer la proposition suivante :

Proposition 13.3.17. *Sous les mêmes conditions du Théorème.13.3.14, s'il existe un réel δ tel que $\frac{\|\ddot{\theta}\|_\infty^2}{L^2} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ assez petit, il existe $l_{max} > 0$ tel que $\forall\ l < l_{max}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 + 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 ds \geq (4 + \frac{2}{\lambda_0})E_1 \int_{I_+} \mid \varphi(s) \mid^2 ds \quad (13.129)$$

où $I_+ := (a - \delta, a + l + \delta)$

Preuve de la Proposition.13.3.17 :

Pour le même choix de la fonction Φ_- du premier cas et pour le même p choisi dans l'expression de (13.77) on a :

$$\mid \varphi(t) \mid^2 \leq \frac{4}{C\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \Big(\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(t-p)\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \quad (13.130)$$

On intègre les deux cotés de l'inégalité (13.130) sur I_+, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{I_+} \mid \varphi(t) \mid^2 &\leq \Big(\frac{4(l+\delta)}{C\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \Big((\frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p))(l+\delta) + (l+\delta)^2\Big) \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds\Big) \\ &\leq \Big((l+\delta)(\frac{2}{C\pi} + \frac{8\ln 2}{\pi} + 2(a-p)) + (l+\delta)^2\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s)\varphi^2(s)ds + \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi'(s) \mid^2 ds\Big) \end{aligned}$$

finalement en multipliant les deux coté de l'inégalité par $4E_1(1 + \frac{1}{\lambda_0})$ on obtient :

$$4(1 + \frac{1}{\lambda_0})E_1 \int_{a-\delta}^{l+a} \mid \varphi(t) \mid^2 dt \leq P(l,\delta) \int_{\mathbb{R}} 2\rho_p(s) \mid \varphi(s) \mid^2 + \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \quad (13.131)$$

où $P(l,\delta) = (4 + \frac{2}{\lambda_0})E_1\Big(2(l+\delta)(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + a - p) + (l+\delta)^2\Big)$. En choisissant $l \leq l_{max}$ avec

$$l_{max} := -(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + a - p) + \sqrt{(\frac{1}{\pi C} + \frac{4\ln 2}{\pi} + a - p)^2 + ((4 + \frac{9}{\lambda_0})E_1)^{-1}} - \delta$$

Ici δ est choisi suffisamment petit pour assurer que $l_{max} > 0$.

Chapitre 14

Torsion constante (périodique)

On commence par définir ce qu'on appelle torsion constante

Définition 14.0.1. *Si $\dot{\theta}(s) = \beta$, $\forall s \in \mathbb{R}$, où $\beta \in \mathbb{R}^*$ alors la torsion est dite constante ou périodique.*

On note par H_β^D l'opérateur unitairement équivalent à l'opérateur de Laplace de Dirichlet $-\Delta_{\Omega_\beta}^D$ défini dans le tube torsadé Ω_β. Par changement de coordonnées (5.1), l'expression de H_β^D est donnée par :

$$\mathrm{H}_\beta^D = -\Delta_\omega - (\partial_s + \beta\partial_\tau)^2. \tag{14.1}$$

H_β^D est associé à la forme quadratique suivante :

$$q_\beta^D = \int_{\Omega_0} |\nabla'\psi|^2 + |\partial_s\psi + \beta\partial_\tau\psi|^2 dsdt, \quad D(q_\beta^D) = \mathcal{H}_0^1(\Omega_0). \tag{14.2}$$

Ce type de déformation a été étudié dans [11] et [23]. À l'aide d'une décomposition de type Floquet, les auteurs de [23] montrent que le spectre de H_β^D est purement absolument continue et que $\sigma(H_\beta^D) = [\lambda_1, +\infty)$, où λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur bidimensionnel $-\Delta_\omega^D - \beta^2\partial_\tau^2$ définie sur $\mathrm{L}^2(\omega)$ avec des conditions aux bords de Dirichlet et dont l'expression est :

$$\lambda_1 := \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_0^1(\omega)\varphi\neq 0} \frac{\| \nabla'\varphi \|_{\mathrm{L}^2(\omega)}^2 + \beta^2 \| \partial_\tau\varphi \|_{\mathrm{L}^2(\omega)}^2}{\| \varphi \|_{\mathrm{L}^2(\omega)}^2} > 0 \tag{14.3}$$

On note par $\mathcal{J}_1$ la fonction propre associée à λ_1 et vérifiant la caractérisation spectrale suivante :

$$-\Delta_\omega^D \mathcal{J}_1 - \beta^2 \partial_\tau^2 \mathcal{J}_1 = \lambda_1 \mathcal{J}_1 \tag{14.4}$$

Dans [11] et [23] on conclut que la perturbation d'un guide d'onde par une torsion constante augmente le seuil spectral tout en conservant le spectre discret vide. Ceci nous a motivé à étudier le même modèle mais en changeant sur une partie bornée de la frontière les conditions de Dirichlet par des conditions de Neumann. En effet On va étudier l'opérateur $H_\beta^{\mathcal{N}} := -\Delta_\omega - (\beta\partial_\tau + \partial_s)^2$, avec des conditions aux bords de Neumann sur $\mathcal{N}$ et des conditions de Dirichlet sur $\mathcal{D}$ et dont le domaine est :

$$D(H_\beta^{\mathcal{N}}) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \quad H_\beta^{\mathcal{N}}\psi \in L^2(\Omega_0), \quad \psi\lceil_{\mathcal{D}} = 0 \ et \ \frac{\partial \psi}{\partial n}\lceil_{\mathcal{N}} = 0\}. \tag{14.5}$$

$H_\beta^{\mathcal{N}}$ est associé à la forme quadratique :

$$\begin{aligned} q_\beta^{\mathcal{N}} &= \| \nabla'\psi \|^2 + \| \partial_s\psi + \dot{\theta}\partial_\tau\psi \|^2; \\ D(q_\beta^{\mathcal{N}}) &= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \quad | \ \psi\lceil_{\mathcal{D}} = 0\} \end{aligned} \tag{14.6}$$

Notre objectif dans cette partie est de préciser sous quelles conditions les états liés créés par la fenêtre de Neumann existent encore margé la torsion.

14.1 Le spectre essentiel

Dans le cas du tube droit également dans le cas du tube torsadé localement, on a utilisé une technique bien connue pour démontrer la stabilité du spectre essentiel. On parle ici du bracketing de Neumann. On a vu que le fait d'ajouter une condition de Neumann sur $\{s_0\} \times \omega$ n'a pas d'influence sur le spectre essentiel de l'opérateur (cf.[35]).

Dans cette section nous allons montrer que cette technique ne peut pas être adapter, puisque la condition de Neumann ajoutée admet un effet sur le seuil du spectre essentiel. Cette partie de la thèse est traité dans [9]. En effet

On montre qu'ajouter une condition de Neumann sur $\{s_0 = 0\} \times \omega$, donne naissance à des éléments du spectre sous λ_1.

Imposons une condition de Neumann sur $\{s_0 = 0\} \times \omega$ i.e. on considère l'opérateur H_β^N défini dans $L^2(\mathbb{R} \times \omega)$ associé à la forme quadratique $q_\beta^N = \| \nabla'\psi \|^2 + \| \partial_s\psi + \beta\partial_\tau\psi \|^2$ de domaine $D(q\beta^N) := D_- \oplus D_+$ où D_+ (respectivement D_-) est l'ensemble des restrictions des fonctions dans $\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}\times\omega)$ sur $(0, +\infty) \times \omega$ (respectivement, $(-\infty, 0) \times \omega$). Évidement, $H_\beta^D \geq H_\beta^N$. Par contre, cette comparaison ne donne pas une idée claire sur le spectre de l'opérateur H_β^N Notre objectif dans cette section est de montrer le résultat suivant :

Proposition 14.1.1. *Soit* $\beta \neq 0$ *alors* $\inf \sigma(H_\beta^N) < \lambda_1$

Preuve de la Proposition.14.1.1 :

La preuve est basée sur l'idée de construire une fonction test $\psi \in D(q_\beta^N)$ telle que $Q^N(\psi) := q_\beta^N(\psi) - \lambda_1 \| \psi \|^2 < 0$ Tout d'abord, nous montrons que Q^N tend vers zero pour un bon choix de fonction test. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière telle que $\varphi(s) = 1$ pour $s \in [-1, 1]$ et $\varphi(s) = 0$ pour $|s| \geq 2$. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, soit $\varphi_n(s) := \varphi(s/n)$. On remarque bien que $\varphi_n \mathcal{J}_1 \in D(q_\beta^D) \subset D(q_\beta^N)$. Alors

$$Q^N(\varphi_n \mathcal{J}_1) = \|\dot{\varphi}_n \mathcal{J}_1\|^2 - 2(\dot{\varphi}_n \mathcal{J}_1, \beta\varphi_n \partial_\tau \mathcal{J}_1) = \|\dot{\varphi}_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{n}\|\dot{\varphi}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

La deuxième inégalité a été déduite par l'utilisation d'une intégration par parties et du fait que $\mathcal{J}_1$ est normalisée . Par la suite, on va ajouter une petite perturbation dans l'expression de la fonction test

$$\psi_\delta(x) := \varphi_n(s)\mathcal{J}_1(t) + \delta\,\phi(x)\,,$$

où δ est un petit paramètre réel et $\phi \in D(q_\beta^N)$ sera déterminé ultérieurement.

En choisissant ϕ de valeur réelle, on peut écrire

$$Q^N(\psi_\delta) = Q^N(\varphi_n \mathcal{J}_1) + 2\,\delta\, Q^N(\phi, \varphi_n \mathcal{J}_1) + \delta^2\, Q^N(\phi)\,. \tag{14.7}$$

On précise maintenant que

$$\phi(x) := \rho(s)\tau(t)\mathcal{J}_1(t)\,, \qquad \text{avec} \qquad \tau(t) := -\arctan\frac{t_3}{t_2}$$

et ρ est une fonction à valeurs réelles supportée sur $[-1, 0]$ telle que $\rho(0) \neq 0$. On remarque bien que $\phi \in D(q_\beta^N)$, mais elle n'appartient pas $D(q_\beta^D)$.

On intègre par parties suivant les variables transverse (t_2, t_3) et en employant la propriété spectrale que satisfait $\mathcal{J}_1$ et λ_1 ,il n'est pas difficile de montrer que

$$Q^N(\phi, \varphi_n \mathcal{J}_1) = (\partial_1\phi, \dot{\varphi}_n \mathcal{J}_1) - (\partial_1\phi, \beta\varphi_n \partial_\tau \mathcal{J}_1) + (\beta\phi, \dot{\varphi}_n \partial_\tau \mathcal{J}_1) \tag{14.8}$$

Comme on sait $\varphi_n = 1$ sur $Supp(\rho)$, donc le premier ainsi que le dernier terme de la partie droite de 14.8 sont nuls. En intégrant par parties l'intégrale qui reste et en utilisant le fait que $\mathcal{J}_1$, est normalisée on conclue que

$$Q^N(\phi, \varphi_n \mathcal{J}_1) = -(\partial_1\phi, \beta\varphi_n \partial_\tau \mathcal{J}_1) = -\beta\rho(0)\int_\omega \tau \mathcal{J}_1 \partial_\tau \mathcal{J}_1 = \frac{\beta\rho(0)}{2}\,.$$

Pour fixer le signe de cette dernière expression de Q^N, on choisit $\rho(0) = -\beta$. Par conséquent le terme mixte de la partie droite de (14.7) est négatif indépendamment de n pour tout δ positif. De plus, la somme avec le dernier terme peut rester négative en choisissant δ suffisamment petit. Finalement, en choisissant n suffisamment grand, la somme de tout les termes dans (14.7) reste négative.

14.2 Existence des états liés

Notons par $\mathcal{E} := \inf(\sigma_{ess}(H_\beta^N))$. On sait que $0 < \mathcal{E} \leq \lambda_1$. On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 14.2.1. *Il existe $l_{min} > 0$ tel que pour tout $l > l_{min}$ on a $\sigma_d(H_\beta^{\mathcal{N}}) \neq \emptyset$ où $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{A}_a(l)$.*

Preuve du théorème.14.2.1

Si $\mathcal{A}_a(l) \subseteq \mathcal{N}$ on a $H_\beta^{\mathcal{N}} \leq H_\beta^l$. Alors il suffit de démontrer le résultat pour H_β^l. La démonstration de ce théorème se base principalement sur l'idée de construire une fonction test ϕ_δ dans $D(q_\beta^l)$ telle que

$$Q_\beta(\phi_\delta) = q_\beta^l(\phi_\delta) - \mathcal{E} \parallel \phi_\delta \parallel^2 < 0$$

Considérons la même fonction $\varphi_{l,a}$ d'expression (13.2.1) utilisée pour le cas de la torsion à support compact. Calculons maintenant $\tilde{q}_\beta^l(\varphi_{l,a})$

$$\tilde{q}_\beta^l(\varphi_{l,a}) = \parallel \nabla' \varphi_{l,a} \parallel^2 + \parallel \beta \partial_\tau \varphi_{l,a} + \partial_s \varphi_{l,a} \parallel^2 - \mathcal{E} \parallel \varphi_{l,a} \parallel^2 \tag{14.9}$$

Le premier terme de la partie droite de (14.9) est nul. Le deuxième terme de la partie droite de (14.9) est donné par :

$$\parallel \beta \partial_\tau \varphi_{l,a} + \partial_s \varphi_{l,a} \parallel^2 = \frac{20}{l} \mid \omega \mid$$

On sait que le dernier terme de la partie droite de (14.9) est donné par :

$$\parallel \varphi_l \parallel^2 = \frac{13l}{15} \mid \omega \mid$$

En utilisant (14.10) et (14.10) dans la partie droite de (14.9) on obtient :

$$\tilde{q}_\beta^l(\varphi_{l,a}) = \mid \omega \mid (\frac{20}{l} - \frac{13l}{15}\mathcal{E}) \tag{14.10}$$

Donc si $l > l_{min} := \sqrt{\frac{300}{13\mathcal{E}}}$ on obtient $\tilde{q}_\beta^l(\varphi_l) < 0 \quad \square$.

Un autre résultat est établi si on arrive à montrer de plus que $\mathcal{E} = \lambda_1$:

Théorème 14.2.2. *Soit ω un ouvert borné connexe de frontière régulière et supposons qu'il est non invariant par rotation. Si de plus on arrive à montrer que $\mathcal{E} = \lambda_1$ alors pour tout $l > 0$ on a $\sigma_d(H_\beta^l) \neq \varnothing$*

Preuve du théorème.14.2.2

La preuve repose sur la même stratégie utilisé dans le théorème précédent. Pour les mêmes choix des fonctions J, φ_δ, $\delta > 0$ utilisées dans le cas du tube droit nous construisons la fonction test $\phi_\delta := \mathcal{J}_1\varphi_\delta + \delta J^2$. Calculons $Q_\beta(\phi_\delta)$

$$Q_\beta(\phi_\delta) = \| \nabla'\phi_\delta \|^2 + \| \beta\partial_\tau\phi_\delta + \partial_s\phi_\delta \|^2 - \lambda_1 \| \phi_\delta \|^2 \tag{14.11}$$

On développe le deuxième terme de la partie droite de (14.11) comme suit :

$$\begin{aligned} \| \beta\partial_\tau\phi_\delta + \partial_s\phi_\delta \|^2 &= \| \beta\varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1 + \dot{\varphi}_\delta\mathcal{J}_1 + 2\delta J\dot{J} \|^2 \\ &= \beta^2 \| \varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1 \|^2 + \| \dot{\varphi}_\delta\mathcal{J}_1 \|^2 + 4\delta^2 \| J\dot{J} \|^2 \\ &+ 4\delta\Big(\dot{\varphi}_\delta\mathcal{J}_1, J\dot{J}\Big) + 4\beta\delta\Big(\varphi_\rho\partial_\tau\mathcal{J}_1, \dot{J}J\Big) + 2\beta\Big(\varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1\dot{\varphi}_\delta\Big) \end{aligned} \tag{14.12}$$

on sait que $\Big(\dot{\varphi}_\delta\mathcal{J}_1, J\dot{J}\Big) = 0$ puisque $\dot{\varphi}_\delta(s) = 0$ *sur* $Supp(J)$. Le second terme de la dernière ligne de la partie droite de (14.12) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \Big(\varphi_\rho\partial_\tau\mathcal{J}_1, \dot{J}J\Big) &= \int_\omega \partial_\tau\mathcal{J}_1(t)dt \int_l^{l+a} \dot{J}(s)J(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\omega \partial_\tau\mathcal{J}_1(t)dt(J^2(l+a) - J^2(l)) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14.13}$$

Avec un calcule similaire on estime le dernier terme de la partie droite de (14.12) de la même manière comme suit :

$$\begin{aligned} \Big(\varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1\dot{\varphi}_\delta\Big) &= \int_\omega \mathcal{J}_1(t)\partial_\tau\mathcal{J}_1(t)dt \int_{\mathbb{R}} \dot{\varphi}_\delta(s)\varphi_\delta(s)ds \\ &= \frac{1}{4}\int_\omega \partial_\tau\mathcal{J}_1^2(t)dt \int_{\mathbb{R}} (\varphi_\delta^2)'(s)ds \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14.14}$$

Par suite (14.12) sera réduite à :

$$\| \beta\partial_\tau\phi_\delta + \partial_s\phi_\delta \|^2 = \beta^2 \| \varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1 \|^2 + \| \dot{\varphi}_\delta\mathcal{J}_1 \|^2 + 4\delta^2 \| J\dot{J} \|^2 \tag{14.15}$$

On sait que λ_1 vérifie la propriété spectrale :

$$\| \varphi_\delta\nabla_t\mathcal{J}_1 \|^2 + \beta^2 \| \varphi_\delta\partial_\tau\mathcal{J}_1 \|^2 - \lambda_1 \| \varphi_\delta\mathcal{J}_1 \|^2 = 0 \tag{14.16}$$

En utilisant (14.15) et (14.16) on obtient :

$$\begin{aligned} Q_\beta(\phi_\delta) &= \Big(1 + 4 \mid \omega \mid \| J\dot{J} \|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda_1 \| J^2 \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \mid \omega \mid \Big)\delta^2 - 2\delta\lambda_1 \| \mathcal{J}_1 \|_{L^1(\omega)} \| J \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \Big(1 + 4 \mid \omega \mid \| J\dot{J} \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \Big)\delta^2 - 2\delta\lambda_1 \| \mathcal{J}_1 \|_{L^1(\omega)} \| J \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{14.17}$$

En choisissant δ suffisamment petit on arrive à $Q_\beta(\phi_\delta) < 0$ $\square$

Chapitre 15

Appendice

15.1 Quelques rappels des résultats utilisés

Lemme 15.1.1. *([35, Lemme.6.1])*

Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ on considère les notations suivantes :

$$\begin{aligned} q_\theta^I(\psi) &:= \int_I \int_\omega \mid \nabla'\psi(s,t) \mid^2 + \mid \dot{\theta}\partial_\tau\psi(s,t) + \partial_s\psi(s,t) \mid^2 dsdt, \quad \forall \psi \in D(q_\theta^I) \\ D(q_\theta^I) &:= \{\varphi\lceil(I \times \omega) \mid \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)\} \end{aligned} \tag{15.1}$$

et notons par $\lambda(\dot{\theta}, I)$ la constante positive suivante :

$$\lambda(\dot{\theta}, I) := \inf_{\varphi \in D(q_\theta^I)\setminus 0} \frac{q_\theta^I(\varphi) - E_1 \parallel \varphi \parallel^2_{L^2(I\times\omega)}}{\parallel \varphi \parallel^2_{L^2(I\times\omega)}} \geq \lambda_0 > 0 \tag{15.2}$$

La positivité de λ_0 est donnée par le lemme.6.1 dans l'article [35].

On rappelle le Théorème.6.5 démontré dans l'article [35] et qui donne une inégalité de Hardy locale valable pour tout intervalle sur lequel la fonction de la torsion est non nulle.

Théorème 15.1.2. *Une inegalité local de type Hardy ([35, Theoreme6.5]) Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ qui est non invariant par rotation par*

rapport à l'origine. On note par $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert borné. Supposons que $\dot{\theta} \in L^{\infty}(I)$ est une fonction à valeur réelle telle que $\dot{\theta} \neq 0$ sur un intervalle I of de mesure real . Soit $\{I_j\}_{j\in K}$ une collection des parties disjointes de I, $K \in \mathbb{N}$ alors pour $\psi \in D(q_{\theta}^{I})$ on a

$$q_{\theta}^{I}(\psi) - E_1 \parallel \psi \parallel 2_{L^2(I\times\omega)} \geq \sum_{j\in K} \lambda(\dot{\theta}, I_j) \int_{I_j} \int_{\omega} \mid \psi(s,t) \mid^2 dsdt \tag{15.3}$$

En utilisant les mêmes notations utilisées dans ce travail on donne le lemme suivant :

Lemme 15.1.3. *([24, Lemme.3])*

Sous les mêmes conditions énoncées dans le lemme.15.1.2 et pour tout nombres positifs α et β il existe une constante positive $\gamma_{\alpha,\beta}$ qui dépend de $\dot{\theta}\lceil A$ et ω telle, pour tout $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_0)$ on a :

$$\mid q_{2,3}^{A} \mid \leq \gamma_{\alpha,\beta} q_1^A + \alpha q_2^B + \beta q_3^A \tag{15.4}$$

Où A ici peut être n'importe quelle collection finie ou infinie des intervalles A_j et $B := (\inf A, \sup A)$

$\gamma_{\alpha,\beta} := \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} + 2d^2\alpha^{-1} \parallel \dot{\theta}\lceil A \parallel_{\infty}^2$

$\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} := max\{\sqrt{c_3} \parallel \dot{\theta} \parallel_{\infty}, \frac{c_3}{2\beta}, c_3\lambda\dot{\theta}_0\alpha^{-1}\}$.

$c_3 := d^2 \parallel \ddot{\theta}\lceil A \parallel_{\infty}^2 c(A, A')\lambda^{-1}\dot{\theta}_0^{-2}$ $A' \subset A$ *and* $\mid \dot{\theta}(s) \mid \geq \dot{\theta}_0 > 0, \forall s \in A'$

$C(A, A') := max\{2 + 16(\frac{|A|}{|A'|})^2, 4 \mid A \mid^2\}$

$$\lambda := \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_0^1(\omega)\setminus 0} \frac{\parallel \varphi \parallel_{\mathbf{L}^2(\omega)}^2 - E_1 \parallel \varphi \parallel_{\mathbf{L}^2(\omega)}^2 + \parallel \partial_{\tau}\varphi \parallel_{\mathbf{L}^2(\omega)}^2}{\parallel \varphi \parallel_{\mathbf{L}^2(\omega)}^2} > 0 \tag{15.5}$$

Bibliographie

[1] R. A. Adams ; *Sobolev spaces* ; Academic Press, New York (1975).

[2] W. H. Bragg and W. L. Bragg ; *The reflexion of X-rays by crystals* Proc. R. Soc. Lond. A 88 (1913)

[3] A. S. Bonnet-Bendhia et P. Joly ; Cours M.2 : Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et applications à l'étude des ondes guidées.

[4] S. Ben Haris, M. Ben Saleh and H. Najar ; *On the discret apectrum of spatial quantum waveguide with a disc window* ; Math. Phy. Geo.(2010).

[5] D. Borisov, T. Ekholm, and H. Kovarík ; *Spectrum of the Magnetic Schrödinger Operator in a Waveguide with Combined Boundary Conditions* Ann. Henri Poincaré 6 (2005).

[6] D. Borisov, P. Exner, R. Gayl'shin and D. Krejčiřík ; *Bound states in weakly deformed strips and layers* ; Ann. Henri Poincaré 2 (2001).

[7] W. Bulla, F. Gerztesy, W. renger and B. Simon ; *Weakly coupled bound states in quantum waveguides* ; Proc. Amer.Math. Soc. 127 (1997).

[8] P. Briet and H. Hammedi ; *Twisted waveguide with a Neumann window* to appear in Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics, Editors : J. Dittrich, H. Kovařík and A. Laptev, EMS Publishing House, EMS Series of Congress Reports(ECR)

[9] P. Briet, H. Hammedi and D. Krejčiřík ; *Hardy inequalities in globally twisted waveguides* ; Letters in Mathematical Physics (2015).

[10] P. Briet, H. Kovařík and G. Raikov ; *Scattering in twisted waveguides* ; J. Funct. Anal. 266 (2014) ;

[11] P. Briet, H. Kovařík, G. Raikov and E. Soccorsi ; *Eigenvalue asymptotics in a twisted waveguide* ; Commun. In Patial Diff. Equations Vol. 34 (2009).

[12] G. Bouchitté, M. L. Mascarenhas and L. Trabucho ; *On the curvature and torsion effect in one-dimentional waveguides*, ESAIM : Control, Optimisation and calculus of variations 13 (2007).

[13] I. J. Clark and A. J. Bracken ; *Effective potentials of quantum strip waveguides and their dependence upon torsion* ; J. Phys. A. Math. Gen 29 pp 339-348 (1996).

[14] I. J. Clark and A. J. Bracken ; *Bound states in tubular quantum waveguides with torsion* J. Phys. A : Math : Gen 29 (1996).

[15] B. Chenaud, P. Duclos, P. Freitas and D. Krejčiřík ; *Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes* ;Differential Geom. Appl. 23 (2005),

[16] P. Exner and D. Barseghyan ;*Spectral estimates for Dirichlet Laplacians on perturbed twisted tubes* ; Math. Ph (2012).

[17] L. C. Evans ; partial equations ; Graduate Studies in Mathematics, vol.19 American Mathematical Society, Peovidence (1998).

[18] E. B. Davies ; *Heat kernels and spectral theory* ; Combridge University Press, Combridge (1989).

[19] P. Duclos and P. Exner ; *Curvature induced bound states in quatum waveguides in two and three dimentions* ; Rev. Math. Phys. 7(1),pp 73-102 (1995).

[20] P. Duclos, P. Exner and D. Krejčiřík ; *Bound states in quantum layers* ; J. Phys. A 34 (2001).

[21] P. Duclos and P. Exner ; *Curvature vs. thickness in quantum waveguides* Czech. J. Phys 41 (1991).

[22] J. Dittrich and J. Kříž ; *Curved planar quantum wires with Dirichlet Neumann boundary conditions* ; J. Phys. A 35 (2001).

[23] P. Exner and H. Kovařík ; *Spectrum of the Schrödinger operator in perturbed periodically twisted tube*, Lett. Math. Phys. 73 (2005).

[24] T. Ekholm, H. Kovařík, D. Krejčiřík ; *A hardy inequality in twisted waveguides* ; Arch. Ration. Mech. Anal. 188, no. 2, 245-264 (2008).

[25] P. Exner and P. Šeba ; *Bound states and scattering in quatum waveguides coupled lately through a boundry window* ; Jour. Math. Phys (1989).

[26] P. Exner ; *Bound States in quantum waveguides of a slowly decaying curvature* J. Math. Phys. 34 (1993).

[27] P. Exner, P. Freitas and D. Krejčiřík ; *A lower bound to the spectral threshold in curved tubes* ; R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 460 (2004).

[28] F. Bentosela,*Impuretés dans un cristal : Justification mathématique et corrections à l'approximation de la masse effective, diffusion* ; Thèse pour obtenir le grade de docteur en sciences, Université d'Aix Marseille II, U.E.R. de Luminy (1977).

[29] G. H. Hardy ; *Note on a theorem of Hilbert* ; Math. Zeit. 6 (1920).

[30] J. Goldstone and R. L. Jaffe ; *Bound states in twisting tubes* ; Phys. Rev (1992).

[31] P. D. Hislop and I. M. Sigal ; *Introduction to spectral Theory with applications to Schrödinger opertators* ; Springer (1996).

[32] T. Kato ; Perturbation theory for linear operators ; Springer-Verlag, Berlin (1966).

[33] M. Kolb and D. Krejčiřík ; *The Brownian traveller on manifolds* ; J. Spectr. Theory (2013).

[34] W. Klingenberg ; *A course in differential geometry* ; Springer-Verlag, New York, (1978).

[35] D. Krejčiřík ; *Twisting versus bending in quantum waveguides* ; Analysis on Graphs and Applications (Cambridge 2007) ; Proc. Sympos. Pure Math. ; Amer. Math. Soc. Providence, RI, **77** (2008)

[36] D. Krejčiřík ; *Waveguides with asymptotically diverging twisting* ; Appl. Math. Lett. 46 (2015).

[37] D. Krejčiřík and R. Tiendre de Aldecoa ; *The nature of the essentiel spectrum in curved quantum waveguides* ; J. Phys. A 37 (2004),

[38] D. Krejčiřík ; *Spectrum of the Laplacian in narrow tubular neighberhoods of hypersurfaces with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions* ; ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations 15 (2009).

[39] D. Krejčiřík and H. Šedováková ; *The effective Hamiltonian in curved quantum waveguides under mild regularity assumptions* ; Rev. Math. Phys. 24 (2012).

[40] D. Krejčiřík and E. Zuazua ; *The Hardy inequality and the heat equation in twisted tubes*, J.Math. Pures. Appl.94 (2010).

[41] D. Krejčiřík and E. Zuazua ; *The asymptotic behaviour of the heat equation in a twisted Dirichlet-Neumann waveguide*, J. Differential Equations 250 (2011).

[42] D. Krejčiřík ; *Geometrically induced spectral properties of physiscal systems* DSC Thesis, Academy of sciences of the Czeck Republic (2012).

[43] D. Krejčiřík ; *Hardy inequality in strips on ruled surfaces* ; J. Inequal. Appl. (2006).

[44] J. T. Londergan, J. P. Carini and D. P. Murdock ; *Binding and scattering in two-dimensional systems* ; LNP, vol. m 60 Springer Berlin (1999).

[45] L. D. Landau and E.M.Lifshitz ; *Quantum mecanics* ; Pergamon Press Oxford (1977).

[46] J. M . Monier ; *Géometrie Tome 7, cours et 400 exercices corrigés* (2006).

[47] H. Najar and M. Raissi ; *On the spectrum of the Shrodinger operator with Aharonov-Bohm magnetic field in quantum waveguide with Neumann window* ; Math. Meth. Appl. Sci. Vol 39 (2016)

[48] E. B. de Oliveira ; *Quantum singular operator limits of thin Dirichlet tubes via* $\Gamma-$ *convergence,* Rep. Math. Phys. 66 (2010).

[49] H. Najar, O. Olendski ; *Spectral and localization properties of Dirichlet waveguide with two concentric Neumann discs* ; J. Phys. A : Math. Theor. 44 305304 (2011).

[50] A. Pleijel ; *A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes* ; Ark. Mat 2 (1953-1954)

[51] M. Raissi ; *Stark effect in quantum waveguide with Neumann window*(2015)

[52] Reed Simon ; *Methods of modern mathematical physics vol IV*(1978).

[53] B. D. Sleeman ; *The inverse problem of accoustic scattering* ; IMAJ. Appl. Math 29 (1982).

[54] M. Spivak ; *A comprehensive introduction to differential geometry Vol II publish or Perish* ; Houston Texas (1979).

[55] Vincent Jacque ; *Thèse de doctorat : Source de photons uniques et interférences à un seul photon. De l'expérience des fentes d'Young au choix retardé*(2007)

[56] J. Weidmann ; *Linear operators in Hilbert spaces* ; Springer-Verlag, New York Inc. (1980).

[57] S. Zaremba ; *Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace* ; Bulletin international de l'académie des sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Seri A, sciences mathématiques (in french)(1910).