



**HAL**  
open science

# Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie

Teddy Chantrait

► **To cite this version:**

Teddy Chantrait. Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2014. Français. NNT : 2014ISAL0129 . tel-01339820

**HAL Id: tel-01339820**

**<https://theses.hal.science/tel-01339820v1>**

Submitted on 30 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## **Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie**

Présentée devant

**I'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE**

par

**Teddy CHANTRAIT**

Thèse soutenue le 17 décembre 2014 devant la Commission d'examen

### **Jury**

---

ALLIX OLIVIER	Professeur LMT Cachan	Président
NOELS LUDOVIC	Professeur Université de Liège	Rapporteur
BOUVET CHRISTOPHE	Professeur ISAE	Rapporteur
FAUCHER VINCENT	Ingénieur de recherche CEA	Examineur
LEON-DUFOUR JEAN-LUC	Expert Senior Airbus	Invité
RANNOU JOHANN	Ingénieur de recherche Onera	Encadrant
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon, IUF	Directeur de thèse

---

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<p><u>CHIMIE DE LYON</u>  <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a></p> <p>Sec :Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal            3<sup>e</sup> etage            Insa : R. GOURDON</p>	<p><b>M. Jean Marc LANCELIN</b>            Université de Lyon – Collège Doctoral            Bât ESCPE            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 13 95  <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>
E.E.A.	<p><u>ELECTRONIQUE,            ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u>  <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN  <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Gérard SCORLETTI</b>            Ecole Centrale de Lyon            36 avenue Guy de Collongue            69134 ECULLY            Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17  <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a></p>
E2M2	<p><u>EVOLUTION, ECOSYSTEME,            MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u>  <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a></p> <p>Insa : H. CHARLES</p>	<p><b>Mme Gudrun BORNETTE</b>            CNRS UMR 5023 LEHNA            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât Forel            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 06.07.53.89.13  <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a></p>
EDISS	<p><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-            SANTE</u>  <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a></p> <p>Sec :            Insa : M. LAGARDE</p>	<p><b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b>            INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1            Bâtiment IMBL            11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon            696621 Villeurbanne            Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16  <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a></p>
INFOMATHS	<p><u>INFORMATIQUE ET            MATHEMATIQUES</u>  <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a></p> <p>Sec :Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal            3<sup>e</sup> etage  <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Sylvie CALABRETTO</b>            LIRIS – INSA de Lyon            Bat Blaise Pascal            7 avenue Jean Capelle            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87  <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a></p>
Matériaux	<p><u>MATERIAUX DE LYON</u>  <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b>            INSA de Lyon            MATEIS            Bâtiment Saint Exupéry            7 avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28  <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a></p>
MEGA	<p><u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE            CIVIL, ACOUSTIQUE</u>  <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Philippe BOISSE</b>            INSA de Lyon            Laboratoire LAMCOS            Bâtiment Jacquard            25 bis avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37  <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a></p>
ScSo	<p><u>ScSo*</u>  <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a></p> <p>Sec : Viviane POLSINELLI            Brigitte DUBOIS            Insa : J.Y. TOUSSAINT</p>	<p><b>M. OBADIA Lionel</b>            Université Lyon 2            86 rue Pasteur            69365 LYON Cedex 07            Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48  <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a></p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie





---

## Résumé

Le temps CPU nécessaire pour la prévision fine des endommagements dans les structures composites de grandes tailles, comme un panneau stratifié raidi, est un frein pour la pratique du virtual testing. Partant de ce constat, ce travail a consisté à tirer avantageusement partie de la localisation spatiale et temporelle des délaminages, fissurations matricielles et ruptures de fibres qui peuvent apparaître pendant l'impact, pour le limiter. Ainsi une méthode de calcul multiéchelle en espace et en temps a été mise en place. Elle consiste à découper la structure impactée en deux zones. L'une est située autour du point d'impact : elle contient l'ensemble des sources de non-régularités du problème (contact, loi adoucissante, modèle de zone cohésive). Elle est traitée avec le code de dynamique explicite *Europlexus*. L'autre correspond à la partie complémentaire de cette première. Le problème mécanique y est beaucoup plus régulier et il est traité avec le code de dynamique implicite *Zset/Zébulon*. Un couplage peu intrusif, basé sur la méthode GC, est donc réalisé entre ces deux codes. Il permet d'utiliser une modélisation adaptée dans chacune des deux régions ce qui permet en particulier d'utiliser des pas de temps différents. Un rapport supérieur à 1000 peut ainsi être obtenu entre celui de l'explicite fixé par la condition de stabilité et celui de la partie complémentaire. Un gain de temps CPU significatif, confirmé par la simulation d'un impact réalisé sur un panneau composite raidi, est ainsi obtenu. Il est également montré que la répartition implicite/explicite peut évoluer au cours du calcul. Pour cela un mécanisme de bascule a été mis en place. Il permet de faire transiter une partie de la structure initialement traitée dans le code *Zset/Zébulon* dans *Europlexus*. Un gain de temps supplémentaire est alors obtenu sur le même cas d'application.

---

## Remerciements

Je souhaite profiter de ces premières pages pour mettre en avant et remercier les personnes qui ont, à leur façon, contribué à la réussite de ces travaux.

Messieurs les professeurs Christophe Bouvet et Ludovic Noels, je tiens tout particulièrement à vous remercier pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit de thèse. Je vous suis également très reconnaissant du temps que vous m'avez consacré, qu'il soit pour la lecture du document ou pour votre participation au jury de ma thèse. C'est aussi avec une grande fierté que j'associe le professeur Olivier Allix, Mr Vincent Faucher et Mr Jean-Luc Leon-Duffour à ces remerciements. Merci à vous cinq d'avoir porté vos regards d'experts sur mon travail et pour les discussions très enrichissantes que nous avons pu engager. Merci aussi à toi, Professeur Anthony Gravouil, pour la direction que tu as donné à ma thèse. Ce fut un réel plaisir de travailler à tes côtés et de pouvoir bénéficier de tes conseils si précieux. Super encadrant, Johann Rannou, je ne te remercierai jamais assez pour l'aide quotidienne que tu m'as donnée ainsi que pour ton encadrement bien mené.

L'excellente ambiance de travail dans laquelle j'ai évolué durant ces trois années de thèse à l'Onera mérite aussi amplement d'être soulignée. Que ce soit au DADS, au DMSM, au DMSC, ou au DTIM, j'ai toujours pu trouver des personnes prêtes et motivées pour m'aider. Je pense en particulier à Steve Belon, Julien Berthe, Eric Deletombe, François-Xavier Irisarri, Frédéric Laurin, Jean-François Maire, Pascal Paulmier, Jean-Michel Roche, Juliette Ryan, Thomas Vandellos avec qui j'ai collaboré dans le cadre du PRF transition «statique/dynamique». Il y a aussi toutes les personnes du bâtiment « E4 ». Chacune d'elles comprendra, les bienfaits fédérateurs des pauses café et des repas de fin d'année, d'où il résulte une entraide très appréciable. Franck, j'espère que tu vas continuer à faire perpétuer ces traditions «JLC approved» encore bien des années avec l'aide de Pascale et de Vincent. Je compte aussi sur vous, David, Florent, Jean-Didier, Louise, Serge, Sylvia, Vincent M pour entretenir le « A TABLE !!! » quotidien avec ses débats souvent fort intéressants. J'espère bien qu'avec Arjen, Frédéric et Noémie nous pourrions reproduire cette ambiance de travail si chaleureuse. En tout cas, merci à tous pour votre accueil !!!

Je suis également très reconnaissant envers les joueurs et les sportifs qui ont souvent accepté mes demandes de divertissements entre deux lignes de code : Amélie, Anaïs, Emmanuel, Georges, Irène, Jean-Briac, Jean-Didier, Jean-Patrick, Jean-Roch, Laurent, Louise, Olivier, Robin, Xavier, Vincent. Et puis envers mon éternel co-bureau Alex avec qui j'ai passé trois années exceptionnelles. Nous sommes tous passés par le « E4 » et cela s'est souvent terminé chez l'un ou chez l'autre. C'est vraiment agréable de vous avoir eu à mes côtés et j'espère que cela va continuer.

Maman, Papa, Antoine, Océane, Mathéo, ma famille, mes amis, comment vous dire

---

merci pour votre soutien inconditionnel ?

Je garderai de ces trois années de thèse le souvenir d'une période, certes, parfois rude, mais qui en vaut vraiment la peine et cela, c'est aussi grâce à vous.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
Notations . . . . .	1
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Problématique des impacts de faible énergie sur les composites stratifiés</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte industriel . . . . .	10
1.1.1 Usage des matériaux composites dans le secteur aéronautique . . .	10
1.1.2 Conséquences des impacts de faible énergie sur les stratifiés . . .	11
1.2 Compréhension et modélisation fine de l'impact . . . . .	14
1.2.1 Classification des impacts de faible énergie . . . . .	15
1.2.2 Mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés lors d'un impact de faible énergie . . . . .	18
1.2.3 État de l'art de la modélisation fine des impacts de faible énergie.	21
1.3 Conclusion . . . . .	24
<b>2 Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure struc- ture avec des codes implicite et explicite</b>	<b>27</b>
2.1 Problème de référence de la mécanique des milieux continus . . . . .	29
2.1.1 Principe des puissances virtuelles . . . . .	31
2.1.2 Discrétisation en espace et en temps . . . . .	31
2.2 Techniques de résolution d'un système linéaire . . . . .	43
2.2.1 Méthode de résolution directe . . . . .	44
2.2.2 Méthodes de résolution itératives . . . . .	44
2.3 Bilan . . . . .	47
2.4 Méthodes de ré-analyse . . . . .	47
2.4.1 Méthodes d'analyse descendantes . . . . .	47
2.4.2 Méthodes d'analyse globale/locale . . . . .	48
2.5 Méthodes de partitionnement . . . . .	49
2.5.1 Partition par éléments . . . . .	50
2.5.2 Partition par nœuds . . . . .	51
2.6 Méthodes de décomposition en sous-domaines . . . . .	53
2.6.1 Méthodes avec recouvrement . . . . .	54

2.6.2	Méthodes sans recouvrement . . . . .	57
2.7	Méthodes multiéchelles en espace et en temps . . . . .	62
2.7.1	Méthode GC . . . . .	63
2.7.2	Méthode PH . . . . .	69
2.7.3	Méthode GC bis . . . . .	73
2.7.4	Méthode MGC . . . . .	76
2.7.5	Méthode MGC dans le cas mono-échelle en temps . . . . .	76
2.7.6	Méthode MGC dans le cas multiéchelle en temps . . . . .	77
2.8	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Mise en place peu intrusive de la méthode GC par couplage de codes</b>	<b>79</b>
3.1	Orientation du travail de thèse et définition de sa problématique . . . . .	81
3.2	Choix de la méthode de couplage entre un algorithme implicite et un algorithme explicite . . . . .	82
3.2.1	Limitations <i>a priori</i> de la méthode choisie . . . . .	83
3.3	Approche peu intrusive par couplage de codes implicite et explicite basée sur la méthode GC . . . . .	84
3.3.1	Choix du couple de codes utilisés pour le couplage . . . . .	85
3.4	Validation de l'implémentation de la méthode de couplage proposée . . . . .	89
3.5	Simulations numériques d'impact de faible énergie sur panneau composite raidi par couplage de codes implicite/explicite . . . . .	102
3.5.1	Cas d'étude . . . . .	102
3.5.2	Modélisation mésoscopique des plis . . . . .	103
3.6	Analyse et comparaison de la méthode proposée vis-à-vis d'une solution explicite . . . . .	104
3.6.1	Analyse de la dissipation interfaciale due à l'utilisation de la méthode GC . . . . .	106
3.6.2	Analyse des temps de calcul dans la méthode de couplage . . . . .	108
3.7	Conclusion . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite</b>	<b>113</b>
4.1	Identification des besoins pour la mise en place de la stratégie de bascule dans la méthode de couplage . . . . .	114
4.1.1	Identification de la stratégie permettant la bascule de nouveaux sous-domaines. . . . .	115
4.1.2	Identification des champs à transférer lors de la bascule pour le nouveau problème d'interface implicite/explicite . . . . .	118
4.2	Mise en place du mécanisme de bascule dans la stratégie de couplage de codes proposée . . . . .	119
4.3	Validation de l'implémentation du mécanisme de bascule . . . . .	120
4.3.1	Bascule monoéchelle en temps . . . . .	120
4.3.2	Bascules avec des interfaces multiéchelles en temps . . . . .	122

---

4.4	Application au calcul d'impact sur stratifié . . . . .	131
4.4.1	Cas d'étude . . . . .	131
4.4.2	Résultats . . . . .	132
4.5	Conclusion . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>141</b>
5.1	Perspectives . . . . .	143
5.1.1	Axe numérique . . . . .	143
5.1.2	Validation expérimentale . . . . .	144
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>





## Notations

Nous utiliserons les notations suivantes dans ce document.

$\mathbb{N}$  : ensemble des nombres entiers

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{H}$  : espace de Hilbert.

$a$  : quantité scalaire de  $\mathbb{R}$ . Exemple : la masse volumique  $\rho$ .

$n, i, d$  et  $j$  sont des nombres entiers.

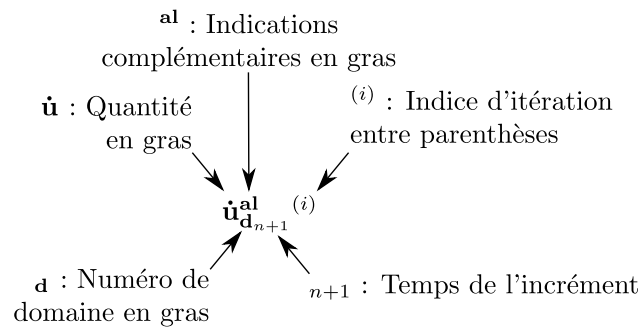
$*$  : quantité vectorielle de  $\mathbb{H}$ . Exemple : le champ de déplacement  $\underline{u}$ .

$\underline{*}$  : quantité tensorielle. Exemple : le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

$\mathbf{a}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^n$  (lettre en minuscule et en gras)

$\mathbf{A}$  : matrice de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (lettre en majuscule et en gras)

Nous serons amenés à manipuler des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et des matrices de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  à différents instants temporels, dans différents domaines et à différents indices d'itération. Pour cela, nous écrivons les différentes informations d'une quantité vectorielle comme indiqué sur la figure 1. Ainsi :



**FIGURE 1:** Exemple de notations et de position des informations autour d'une quantité vectorielle. Il s'agit ici du vecteur vitesse avec liaison (al) du domaine  $d$  pris à l'itération  $i$  de l'incrément en temps  $t_{n+1}$ .

$\mathbf{u}_{\mathbf{d}}$  : vecteur déplacement de  $\mathbb{R}^n$  du domaine  $d$ .

$\mathbf{u}_{\mathbf{d}_{n+1}}$  : vecteur déplacement de  $\mathbb{R}^n$  du domaine  $d$  pris à l'instant  $t_{n+1}$ .

$\mathbf{u}_{\mathbf{d}_n}^{(i)}$  : vecteur déplacement de  $\mathbb{R}^n$  du domaine  $d$  pris à l'instant  $t_n$  et à l'itération  $i$ .

$\mathbf{u}_n$  : vecteur déplacement de  $\mathbb{R}^n$  sans indication de domaine pris à l'instant  $t_n$ .

$\mathbf{u}_n^{(i)}$  : vecteur déplacement de  $\mathbb{R}^n$  sans indication de domaine pris à l'instant  $t_n$  et à l'itération  $i$ .

Il y a donc une différence entre  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ . Le premier symbole correspond au vecteur vitesse à l'instant  $t_n$  alors que le second correspond au vecteur vitesse du domaine  $n$  et l'instant  $n$  est pas précisé.

$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{sl}}{}^{(i)}{}_{\Gamma_{n+1}}$  se lit, vecteur vitesse sans liaison du sous-domaine  $d$  sur l'interface à l'itération  $i$  de l'incrément au temps  $t_{n+1}$ .



# Introduction

L'allègement et l'efficacité énergétique des avions est une préoccupation permanente de leurs constructeurs. Cela les conduit à utiliser une part de plus en plus significative de matériaux composites dans leurs produits. Ces derniers disposent effectivement de propriétés rapportées à leur masse très intéressantes. Ils sont ainsi utilisés en ce moment même dans des pièces de structures très sollicitées mécaniquement, tels que le caisson central de l'A380 ou encore des portions de fuselage de l'A350XWB dont l'une est visible sur la figure 2. Leur utilisation croissante fait donc émerger de nouvelles problématiques et celle des impacts de faible énergie en fait partie.



**FIGURE 2:** Portion de tronçon de fuselage en composite de l'A350XWB. Source site Airbus

Elle résulte d'un constat très simple : les propriétés mécaniques de certains composites peuvent être significativement diminuées à la suite d'un petit choc. En effet, différents endommagements, comme la fissuration matricielle, les ruptures de fibres ou encore le

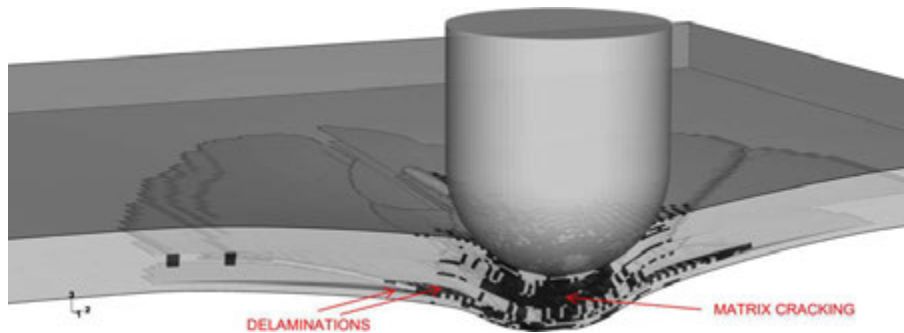
délaminage peuvent s'initier. De plus, ces dommages apparaissent essentiellement dans le cœur du stratifié et sur la face opposée à l'impact. Ainsi, il peut arriver qu'aucune trace apparente, témoignant de leur présence, ne soit visible à l'œil nu sur la face impactée. Ils sont donc difficilement détectables par des contrôles visuels. Par conséquent, il est nécessaire de s'assurer que les pièces restent fonctionnelles en présence de tels défauts jusqu'à ce qu'ils soient repérés. Et ce, même pour des cas de chargements sévères, comme la compression après impact (CAI) par exemple. Pour faire cela, les constructeurs privilégient actuellement une approche qui est majoritairement basée sur l'expérience, car peu d'alternatives existent. Les campagnes d'essais mises en place sont donc relativement longues et coûteuses comme de nombreux paramètres peuvent intervenir (angle d'impact, énergie, stratification...). D'autre part, il est inenvisageable de réaliser tous ces tests avec l'ensemble des paramètres et pour toutes les géométries/configurations issues du processus d'optimisation du design. Ainsi des coefficients de sécurité excessifs sont parfois utilisés, ce qui reste un frein pour l'allègement des structures.

La pratique du *virtual testing* qui consiste à tester numériquement les composants est un outil intéressant pour le développement de produits. Il permet de faire baisser les coûts et les marges de sécurité dans différents domaines. Le problème est qu'il ne peut pas être mise en place dans ce cadre particulier, car les simulations nécessaires ne sont pas encore applicables ici. Ainsi, des programmes de recherche et de nombreux travaux sont menés, en particulier dans la communauté scientifique, pour aller dans cette direction. Le WWFE I et II (*World Wide Failure Exercise*) sont des bons exemples pour illustrer la dynamique dans ce domaine. L'exercice a consisté à confronter le caractère prédictif des modèles matériaux composites des participants sur une base de 12 cas tests et sous chargement triaxial. Une vingtaine de laboratoires répartis à travers le monde ont participé.

C'est dans ce contexte que le projet de recherche fédérateur (PRF) *transition statique/dynamique dans les matériaux composites* interne à l'Onera est né. Les thèses de Julien Berthe [BER 13] et d'Emilie Troussat [TRO 13] récemment soutenues sont des exemples de travaux qui y ont été menés. L'une a contribué au développement d'un modèle de comportement unifié pour les sollicitations statiques et dynamiques. L'autre s'est intéressée à la mise en place d'un modèle numérique d'impact avec une composante importante d'essais de compréhension et de validation. Ce projet vise à apporter des éléments de réponse à certaines problématiques rencontrées par les industriels vis-à-vis des matériaux composites. En plus de la problématique des impacts de faible énergie, celle de la transition endommagement-rupture, ou encore de la tenue mécanique des assemblages et des structures sont également abordées. Par ailleurs, une campagne d'essais d'impacts et de CAI sur des panneaux composites raidis est réalisée afin d'alimenter ces travaux, et nous y reviendrons. Ce PRF comporte également un volet qui vise au développement de méthodes numériques adaptées aux problématiques présentées.

Le travail de thèse qui est proposé dans ce document a été réalisé dans ce cadre, au sein de l'équipe de mécanique numérique de la branche matériaux et structure de l'Onera, en collaboration avec l'équipe MSE du laboratoire LaMCoS de l'INSA de Lyon. Il s'inscrit dans une démarche plus large *d'amélioration des modèles* et il traite plus spécifiquement des problèmes liés au temps de résolution des simulations d'impact de faible

énergie. En effet, il est observé que le coût CPU de tels modèles est important avec des éprouvettes et il devient prohibitif pour des structures de dimensions plus grandes. Les travaux de [LOP 09b, LOP 09a] ont par exemple conduit au résultat de simulation proposé sur la figure 1.18. Il peut y être observé les différents endommagements évoqués précédemment, résultant d'un impact. Ces travaux, ainsi que ceux de [HON 13] parmi d'autres témoignent du fait que le caractère prédictif des modèles commence à être satisfaisant. Cependant, pour obtenir le résultat présenté sur la figure 1.18, 32 CPU et 4 jours de calcul ont été nécessaires et il s'agit là d'une petite structure ( $150 \times 175 \text{mm}^2$ ). Le pas-



**FIGURE 3:** Simulation numérique d'un stratifié composite  $[\pm 45/90/0/45/0_4/ - 45/0_2]_s$  impacté à 30 Joules 2 ms après le contact. Les endommagements des plis, dominés par la fissuration matricielle, sont représentés en noir et la transparence permet la visualisation des délaminages. Source : [LOP 09a].

sage de telles simulations à l'échelle industrielle pour la pratique du *virtual testing* est donc freiné par le coût de calcul.

Compte tenu des fortes non-régularités présentes dans les modèles d'impact (contact impacteur/cible, contacts inter-plis, lois adoussicantes...), la majorité des études réalisées dans ce domaine sont conduites avec des codes explicites. Ils sont effectivement plus efficaces que les codes implicites pour traiter les non-régularités. Cependant ils sont conditionnellement stables. Ainsi, le pas de temps utilisé ne peut pas dépasser le pas de temps critique de la structure qui dépend de la taille de maille. Or dans ces modèles, un maillage fin est nécessaire au moins localement dans la zone d'impact pour capter les endommagements. Cela conduit donc à un pas de temps critique petit devant le temps de simulation, ce qui pèse sur le coût CPU.

Les travaux de [FAG 10] sont une tentative pour aller dans cette direction. Les auteurs proposent un modèle d'impact sur un panneau composite raidi en associant deux échelles de modélisation. L'une est très fine dans la zone d'impact, ce qui permet de capter les endommagements, et l'autre est beaucoup plus grossière dans la partie complémentaire, ce qui permet de soulager le coût du calcul. Cependant, ils mettent en avant eux aussi les limitations liées au temps CPU. De nouvelles stratégies sont ainsi nécessaires pour pouvoir atteindre l'objectif industriel évoqué.

Il peut donc être observé dans le domaine des méthodes numériques une activité grandissante concernant le développement de stratégies adaptées à ces problématiques. Les

travaux exposés dans [DUP 11] visent ainsi à mettre en place une méthode multiéchelle d'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire. Les travaux de [BET 13] qui ont suivis sont de bons exemples illustrant cette tendance. Les méthodes qui y sont proposées ont toutes pour dénominateur commun la volonté d'adapter la stratégie de résolution d'un problème en fonction de ses paramètres locaux (chargement, finesse de maillage, modèles matériaux...). Elles sont cependant limitées, soit par leur caractère implicite (itérations d'équilibre à chaque pas de temps), soit par leur caractère explicite (limitation importante sur la valeur du pas de temps critique liée à la taille de maille).

Nous cherchons ainsi à adapter localement les méthodes numériques de résolution en fonction des échelles de temps requises (zone d'impact, zones lointaines) et du choix de l'intégrateur temporel (implicite/explicite). Ici, dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine de Schur duale, on considèrera généralement deux zones, l'une autour du point d'impact et l'autre dans la partie complémentaire. Les échanges d'informations sont alors concentrés au niveau de l'interface entre les deux sous-domaines. Chaque domaine est alors traité avec le code qui est le mieux adapté au problème local. En effet, près du point d'impact où de fortes non-régularités sont rencontrées, un code explicite avec des petits pas de temps est privilégié. Mais dans la partie complémentaire beaucoup plus régulière, un code implicite, qui permet l'utilisation de pas de temps bien plus grands, est choisi. Le coût du calcul est ainsi soulagé, ce qui permet d'étendre les simulations à de grandes structures. Cependant, le couplage entre ces deux codes n'est pas évident, car différentes échelles de temps numériques coexistent. Pour se faire, il est proposé de s'appuyer en particulier sur les travaux effectués au cours de ces quinze dernières années relatifs aux méthodes multi-échelles en espace et en temps, dans la lignée de la méthode GC [GRA 00]. Ces dernières diffèrent par la technique de raccord choisie à l'interface. Après avoir mis en place ce couplage, une stratégie permettant de gérer dynamiquement la répartition implicite/explicite est proposée. L'objectif de cette dernière est d'adapter le sous-domaine explicite à la zone de formation des endommagements dans la structure. Ainsi une approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie est ici proposée. Pour la développer, le document est organisé comme suit :

- Dans le chapitre 1, la problématique liée aux impacts de faible énergie est rapidement rappelée. Ensuite, une analyse plus fine de cette dernière est proposée afin d'en dégager les enjeux scientifiques. Pour cela, un classement des impacts de faible énergie basé sur une étude bibliographique est établi. Il permet de cibler le niveau de chargement auquel les structures étudiées ici sont soumises. D'autre part, une synthèse des mécanismes d'endommagement qu'ils engendrent est proposée à partir d'observations expérimentales issues de la littérature. Elle permet de faire ressortir les ingrédients qui devront être intégrés dans les modèles pour les prendre en compte. Une revue de différentes techniques de modélisation faites par la communauté scientifique dans ce cadre est alors proposée. Elle permet de mettre en avant les différentes limites qu'elles comportent et en particulier le coût de calcul élevé qui leur est associé.
- Dans le chapitre 2, une étude bibliographique axée sur les méthodes numériques

utiles pour le développement d'un couplage de codes structure/structure avec des codes implicite et explicite est proposée.

- Dans le chapitre 3, les conclusions faites dans les deux chapitres précédents sont reprises. Elles permettent de dégager des arguments qui justifient la stratégie proposée dans ce travail. Elle consiste à coupler le code de calcul implicite *Zset/Zébulon* avec le code de calcul de dynamique explicite *Europlexus* par la méthode GC de manière peu intrusive. Il est également exposé dans cette partie les choix techniques qui ont été faits pour la mettre en place. Différents cas de validation de la méthode proposée sont présentés. Des résultats de calculs d'impact de faible énergie sur un panneau composite raidi sont mis en avant. Ils permettent de démontrer l'efficacité de cette méthode. Ces calculs permettent par ailleurs de mettre en évidence des axes de progression qui sont développés dans le chapitre suivant.
- C'est ainsi qu'une extension de la stratégie de couplage développée jusqu'ici est proposée dans le chapitre 4. Elle consiste à faire évoluer la répartition implicite/explicite faite dans le maillage au cours du calcul. Pour cela un mécanisme de bascule est mis en place. Son principe de fonctionnement ainsi que sa mise en œuvre y sont développés.

Pour terminer, un bilan du travail réalisé et des résultats obtenus sont proposés. Les perspectives qu'il ouvre sont également mises en avant dans le chapitre 5.





# Chapitre 1

## Problématique des impacts de faible énergie sur les composites stratifiés

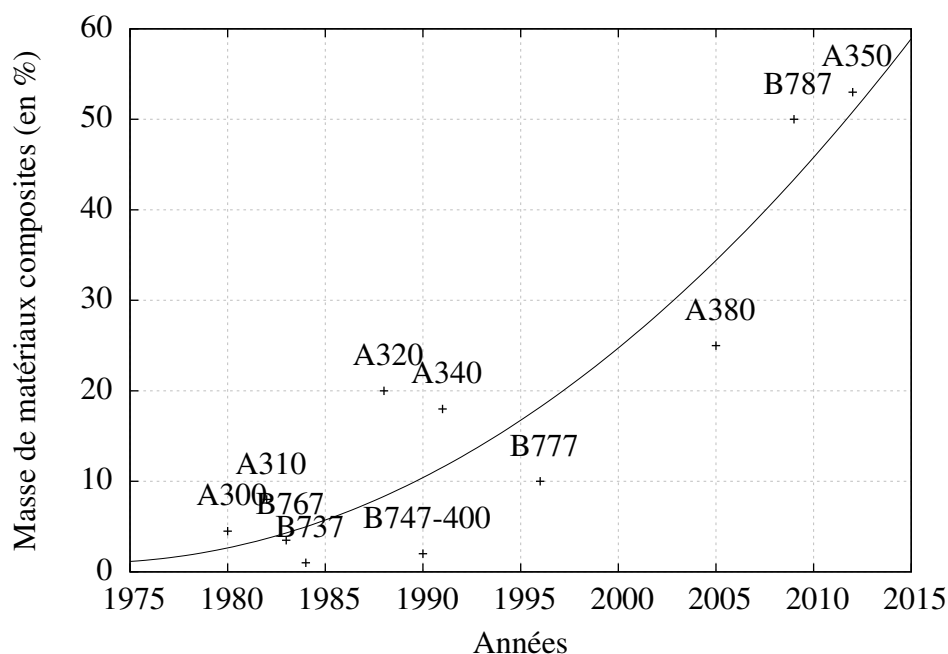
La problématique liée aux impacts de faible énergie sur les stratifiés qui fait l'objet de ce travail est rappelée dans ce chapitre. Les conséquences que peuvent avoir ces petits chocs sur les pièces de structure au niveau industriel sont ainsi abordées. Une analyse plus fine de cette problématique est ensuite proposée afin d'en dégager les enjeux scientifiques. Pour cela, un classement des impacts de faible énergie basé sur une étude bibliographique est établi. Par ailleurs, les mécanismes d'endommagement qu'ils engendrent sont détaillés à partir d'observations expérimentales issues de la littérature. Enfin, une revue de différentes techniques de modélisation faites par la communauté scientifique dans ce cadre est proposée. Elle permet d'en relever les différentes limites et de justifier le positionnement de ce travail.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte industriel . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1.1	Usage des matériaux composites dans le secteur aéronautique . . . .	10
1.1.2	Conséquences des impacts de faible énergie sur les stratifiés . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Compréhension et modélisation fine de l'impact . . . . .</b>	<b>14</b>
1.2.1	Classification des impacts de faible énergie . . . . .	15
1.2.2	Mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés lors d'un impact de faible énergie . . . . .	18
1.2.3	État de l'art de la modélisation fine des impacts de faible énergie. . .	21
<b>1.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>24</b>

---



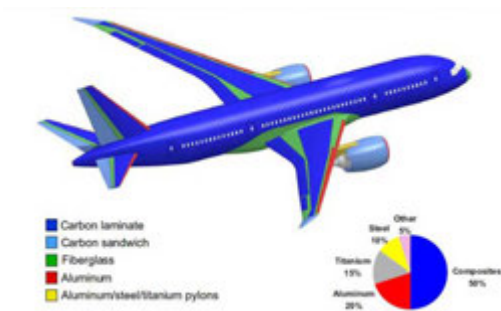
**FIGURE 1.1:** Évolution temporelle de l'utilisation des matériaux composites dans le secteur aéronautique. Source provenant en partie de : GAO analysis of information from FAA, NASA, Boeing Company, Jane's All the World's Aircraft, and Jane's Aircraft Upgrades.

## 1.1 Contexte industriel

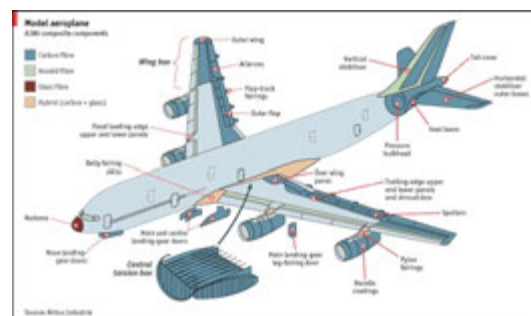
### 1.1.1 Usage des matériaux composites dans le secteur aéronautique

Les composites résultent de l'assemblage d'au moins deux matériaux non-missibles. Ils ont l'intérêt de pouvoir combiner les propriétés de chacun de leurs constituants, ce qui leur confère des caractéristiques très intéressantes que les composants, pris seuls, ne pourraient avoir. Leurs propriétés peuvent ainsi être ajustées et optimisées dans une certaine limite en fonction de l'application visée. L'engouement industriel pour cette famille de matériaux extrêmement large et variée peut donc être entrevue.

Dans le secteur aéronautique, le terme *matériau composite* est souvent utilisé pour désigner la classe de matériaux qui résultent de l'assemblage de fibres dans une matrice. Les fibres contribuent notablement à la rigidité. Elles assurent une part significative de la tenue mécanique. La matrice, quant à elle, contribue à la cohésion de l'ensemble des fibres entre elles. Elle transmet et redistribue également les efforts mécaniques aux fibres. Du fait de leurs propriétés spécifiques intéressantes (propriétés rapportées à la masse), ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les avions depuis ces dernières décennies comme le montre la figure 1.1. De plus, ils sont désormais choisis pour réaliser des composants très sollicités mécaniquement comme le tronçon central de l'A380 ou encore des éléments de fuselage dans l'A350-900 XWB (cf figures 1.3 et 1.2).



**FIGURE 1.2:** Répartition des matériaux composites dans les composants du Boeing B787.



**FIGURE 1.3:** Répartition des matériaux composites dans les composants de l'Airbus A380.

### 1.1.1.1 Les stratifiés de plis unidirectionnels

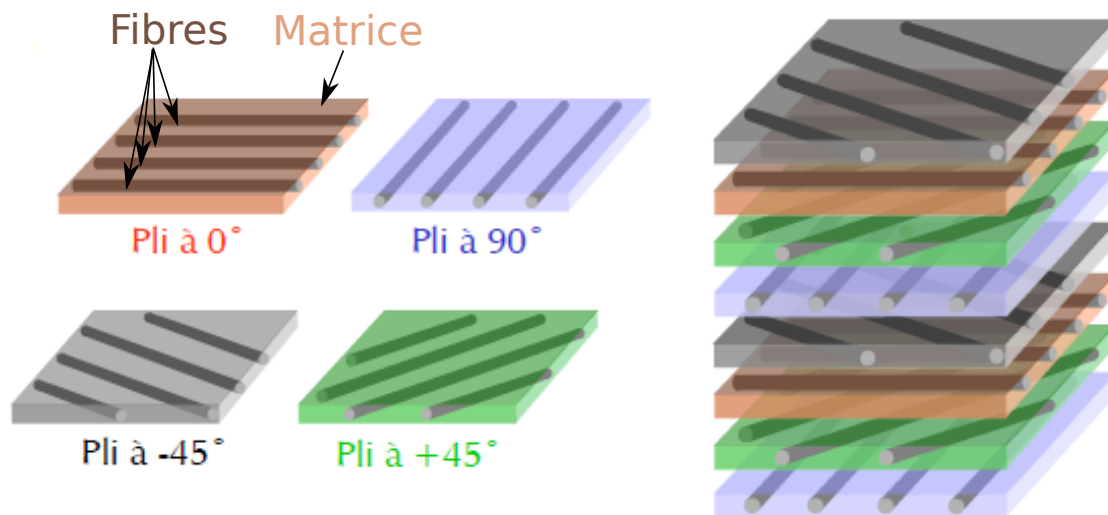
Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement aux composites *stratifiés* d'unidirectionnels à fibres longues. Ils résultent d'une stratification de plis Unidirectionnels (UD). Un pli UD est lui-même constitué d'un regroupement de fibres immergées dans une matrice. Ses fibres sont relativement longues par rapport à l'épaisseur du pli et elles sont toutes orientées dans la même direction. Un pli UD avec ses constituants (fibres et matrice) ainsi qu'une stratification sont représentés sur la figure 1.4. Il peut être noté que d'autres organisations spatiales des fibres existent dans un pli de stratifié. Elles peuvent par exemple être tissées, comme montré sur la figure 1.5.

### 1.1.2 Conséquences des impacts de faible énergie sur les stratifiés

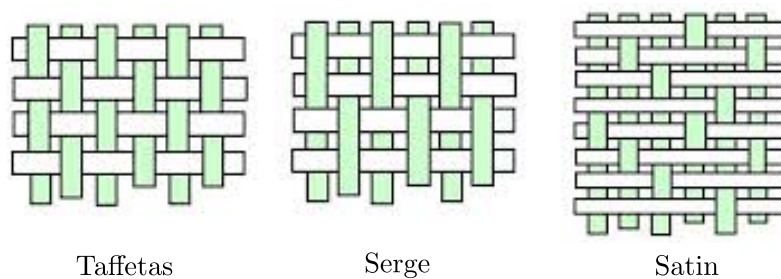
Durant son cycle de vie, un avion est amené à faire face à différentes éventualités d'impacts, comme on peut le voir sur la figure 1.6 qui illustre une partie des événements rencontrés. Parmi cette diversité, nous focalisons notre travail sur les impacts qualifiés de *faible énergie*. Ils peuvent être occasionnés, par exemple, par la chute d'un bagage ou la chute d'un outil. Ces *petits chocs* mettent en jeu une énergie qui est de l'ordre de grandeur de quelques dizaines de Joules.

Le problème pour les avionneurs est qu'ils sont potentiellement néfastes pour les structures. Différents endommagements, tels que de la fissuration matricielle, les ruptures de fibres ou encore le délaminage peuvent s'initier. En conséquence, les propriétés mécaniques des composants peuvent s'affaiblir. De plus, ces derniers sont difficilement détectables lors d'une inspection visuelle, car ils apparaissent essentiellement dans le cœur du stratifié et sur la face opposée à l'impact. Ainsi il peut arriver qu'aucune trace apparente, témoignant de leur présence, ne soit visible à l'œil nu sur la face impactée.

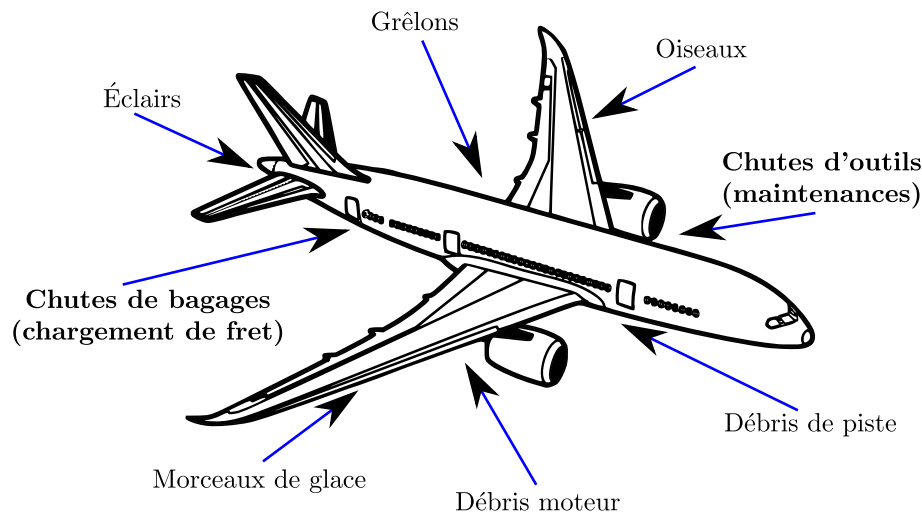
La figure 1.7 illustre ce phénomène. Une courbe de tendance de l'évolution de la résistance d'une structure en compression après impact en fonction de l'énergie d'impact est schématiquement représentée, ainsi que trois stades de dégradations caractéristiques. Le premier, dans le sens de l'énergie d'impact croissante, correspond à l'apparition des



**FIGURE 1.4:** Exemple de pli unidirectionnel avec leur principaux constituants (fibres, matrice) et d'un éclaté de stratifié composite à base de plis unidirectionnel.



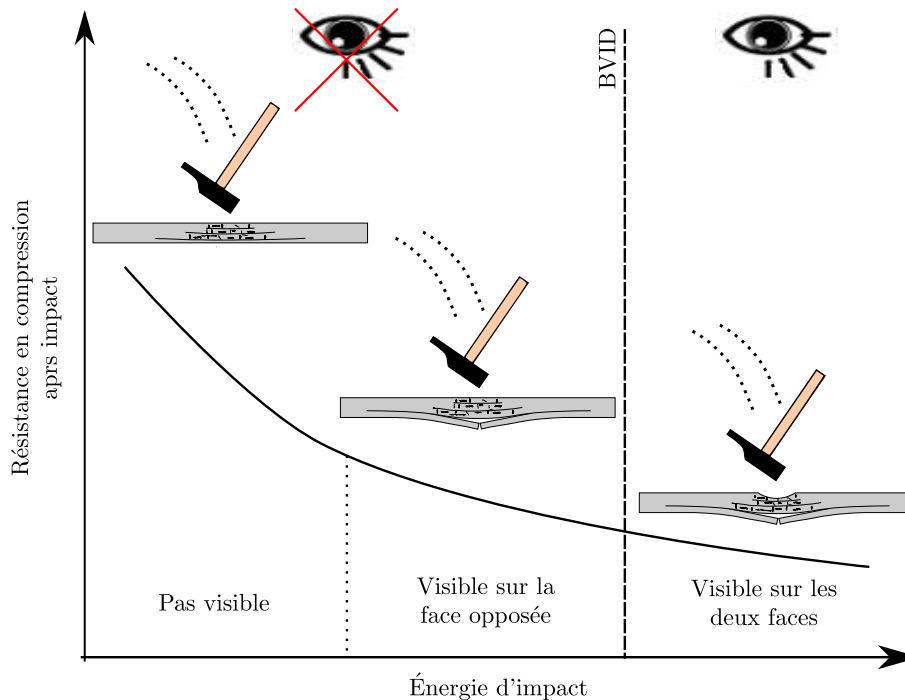
**FIGURE 1.5:** Exemple d'organisation des fibres longues dans un pli.



**FIGURE 1.6:** Illustrations d'évènements d'impacts rencontrés par un avions.

premières fissurations matricielles dans le cœur du composite. Elles sont invisibles à l'œil nu de part et d'autre de la pièce alors que la diminution de la résistance du composant en compression après impact a débuté. Pour un niveau d'énergie supérieur, les endommagements atteignent la face opposée à l'impact. Leur trace n'est cependant pas visible à l'œil nu sur la face impactée, mais à la différence du premier état, elle devient visible sur la face opposée. Les premiers délaminages et les premières ruptures de fibres peuvent avoir commencé et la résistance de la pièce en compression après impact continue de décroître. Pour le troisième stade, une empreinte résiduelle, aussi appelée indentation permanente, est visible à l'œil nu sur la face impactée et le défaut peut être repéré.

Afin de s'affranchir des conséquences potentiellement néfastes de ces endommagements sur les structures, les industriels ont mis en place la notion du BVID (Barely Visible Impact Damage). Il s'agit du seuil à partir duquel, les traces laissées sur la face impactée de la structure, peuvent être visuellement repérées. Dans le domaine aéronautique et aérospatial, il a été démontré qu'une indentation permanente entre 0.25 et 0.5 mm est détectable durant une inspection visuelle détaillée avec une probabilité supérieure à 90%. Dans [TRO 95], il a été montré que pour une indentation de 0.5 mm, cette probabilité atteignait 99% avec une confiance de 95%. Dans la pratique le BVID qui est souvent utilisé est de l'ordre de grandeur du millimètre. Ainsi, au delà de ce seuil, le défaut peut être considéré comme repéré pendant la phase d'inspection visuelle et les mesures nécessaires peuvent être appliquées. Mais dans le cas contraire, l'avionneur doit certifier que la structure impactée peut assurer ses fonctions jusqu'à l'inspection visuelle suivante ou le processus recommence. De nombreux tests sont ainsi réalisés à différents niveaux de la pyramide des essais. Ceci pour garantir que les structures puissent assurer leurs fonctions, en particulier en présence de défauts considérés comme non-détectables et donc en dessous du BVID. Cela implique, par exemple, qu'elles puissent être capables de résister à des cas de chargements sévères comme la Compression Après Impact (CAI), et ce pendant un certain temps d'utilisation du composant (notions de stabilité du défaut et de



**FIGURE 1.7:** Illustration de l'évolution de la résistance après impact en fonction de l'énergie d'impact. Le seuil du BVID est également visible.

fatigue). Une illustration de la pyramide des essais est proposée sur la figure 1.8. Elle permet de comprendre également que ces essais peuvent être réalisés sur des structures de plus en plus grandes, allant des pièces génériques en passant par différents modules, jusqu'à la structure complète. Limiter leur nombre permettrait ainsi de réduire les coûts. Pour tendre vers cet objectif, il est nécessaire de mettre en place des modèles robustes et fiables. L'apport potentiel des essais numériques dans ce domaine est donc important, et ils font l'objet depuis quelques années d'une intense activité dans la communauté scientifique. De cette manière, une partie des composants peut être testée virtuellement, ce qui est moins coûteux. C'est la pratique du *virtual testing*. Elle n'est cependant pas complètement possible dans le cadre des impacts de faible énergie comme nous allons le montrer.

## 1.2 Compréhension et modélisation fine de l'impact

Dans cette section, une classification des impacts de faible énergie sur stratifié composite est proposée afin de donner le cadre de notre étude vis-à-vis de cette sollicitation. Dans un second temps, les mécanismes d'endommagements observés expérimentalement sont exposés. Enfin, une revue des principales approches de simulation est réalisée.

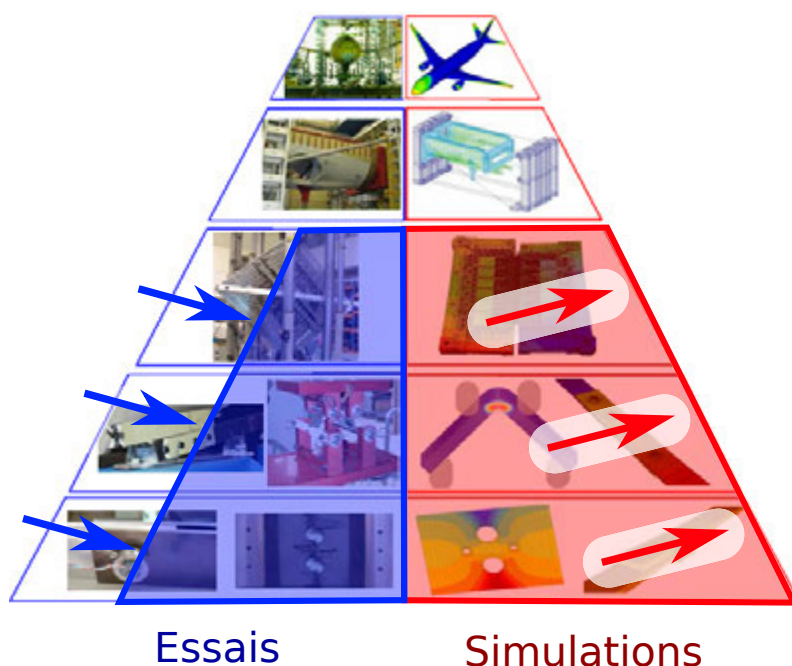


FIGURE 1.8: Illustration de la pyramide des essais. Source : [LAU 05].

### 1.2.1 Classification des impacts de faible énergie

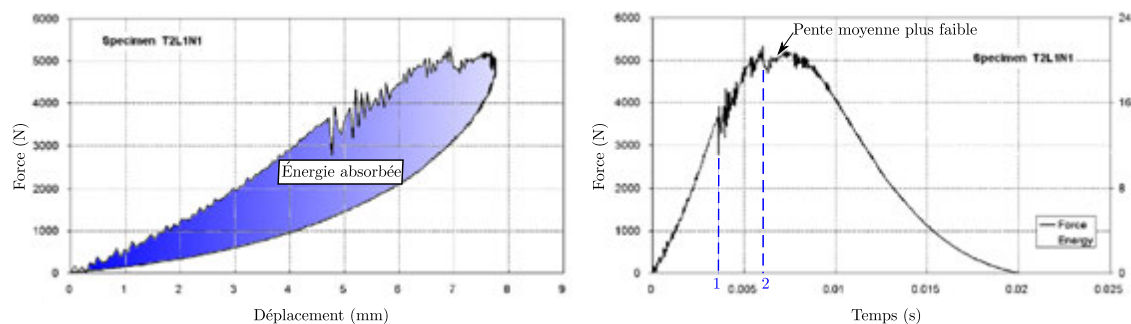
La réponse d'une plaque composite stratifiée soumise à un impact a été décrite dans de nombreuses études expérimentales. Parmi ces études, nous pouvons citer les travaux de [BEL 02]. Les auteurs étudient en particulier la réponse d'une plaque de stratifiés composite en fibre de verre/époxy pour différentes vitesses d'impact et différents niveaux d'énergie de l'impacteur. La sollicitation est générée par une masse tombante guidée, au bout de laquelle est fixé un impacteur hémisphérique conformément à la norme ASTM qui standardise une partie de ces essais. Parmi les configurations testées dans ces travaux, trois types de réponse de l'impacteur sont observées en fonction de l'énergie d'impact. Dans l'ordre d'énergie croissante, il peut rebondir sur la plaque, pénétrer dans cette dernière ou encore la perforer totalement. Dans les deux derniers cas, le niveau d'énergie est suffisant pour endommager la face impactée. Ainsi, cette étude se place dans le cas d'un rebond, car c'est la seule situation où les dégâts de l'impact peuvent être indétectables à l'œil nu vis-à-vis du BVID.

Dans le cas avec rebond, l'impacteur indente plus ou moins la cible puis repart dans la direction opposée. La différence d'énergie de l'impacteur avant et après l'impact correspond en première approximation au montant emmagasiné par la plaque. Il est en partie dissipé lors de la formation des endommagements. Les courbes caractéristiques force-déplacement et force-temps obtenues dans ce cas sont présentées sur la figure 1.9. Elles sont issues de la réponse d'une plaque composite stratifiée en fibre de verre époxy.

Il peut être observé que la courbe force-déplacement forme une boucle et l'aire contenue à l'intérieur correspond à l'énergie dissipée par la cible. Par ailleurs, deux seuils sont

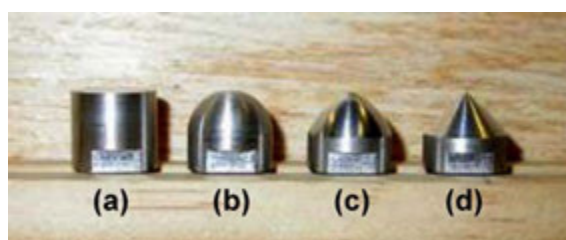


identifiés par les auteurs sur la courbe force-temps. Le premier est repéré sur la courbe par l'apparition de brusques oscillations qui sont attribuées aux premiers endommagements au sein du matériau (essentiellement de la fissuration matricielle). Le second est caractérisé par une brusque chute de la valeur de la force, suivie d'une nouvelle augmentation mais selon une pente plus faible. Il marque le début d'effets significatifs des dommages sur le comportement global de la cible, ce qui lui vaut le nom de seuil d'endommagement [TRO 13]. Il est attribué à l'apparition des premier délaminages.



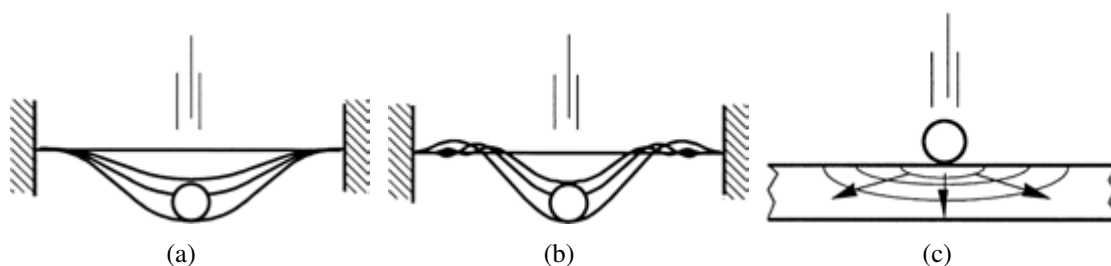
**FIGURE 1.9:** Courbes caractéristiques de force-déplacement et de force-temps issues de la réponse à un impact basse vitesse par masse tombante avec rebond d'une plaque composite stratifiée en fibres de verre/époxy. Source : [BEL 02].

La forme de l'impacteur étudiée dans [MIT 06, MIT 05] peut également avoir une influence sur la réponse de la cible impactée. Les auteurs observent et analysent leur effets sur les réponses d'impact de composites stratifiés en fibre de verre/polyester et en carbone/époxy. Ces plaques sont impactées à 4 et 6 Joules par un dispositif par masse tombante, certaines éprouvettes testées sont également précontraintes à différents niveaux. Les quatre formes d'impacteurs utilisées dans cette étude sont présentées sur la figure 1.10. D'après ces travaux, l'impacteur sphérique semble être le plus conservatif des trois formes vis-à-vis du BVID. Une forme d'impacteur sphérique sera donc choisie pour les modélisations faites dans ce travail.



**FIGURE 1.10:** Illustration de formes d'impacteur utilisées dans [MIT 06] pour étudier l'influence de sa forme sur la réponse d'un stratifié composite en fibre de verre/polyester précontraint soumis à un impact de 4 et 6 Joules. Source : [MIT 06].

Olson [OLS 00] propose de classifier les réponses possibles à un impact suivant le comportement de la cible :



**FIGURE 1.11:** Classification des réponses de la cible en fonction des modes de sollicitations. a) Réponse très lente se rapprochant d'un essai quasi-statique (temps d'impact "long"). b) Réponse dominée par la flexion de la structure (temps d'impact "court"). c) Réponse dominée par les propagations d'ondes hautes fréquences (temps d'impact "très court"). Source : [OLS 00].

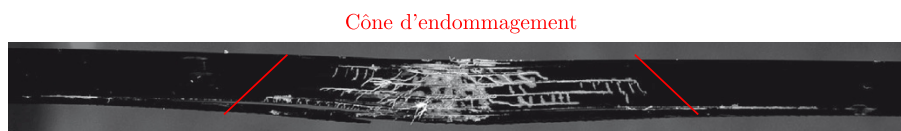
- L'un correspond à une réponse très lente. Dans ces conditions, les modes principalement sollicités sont ceux de basse fréquence. Le temps de réponse de la structure impactée est suffisamment long pour que les ondes de déformations liées à l'impact aient le temps de se propager et soient réfléchies sur les bords de cette dernière. Une illustration schématique de la déformation d'une éprouvette impactée dans ces conditions est proposée sur la figure 1.11(a). La déformée est donc proche de celle obtenue pour un essai quasi-statique, ce qui permet d'établir une équivalence entre ce type de réponse et celles réalisées en quasi-statique (impact / indentation statique). [ABD 09, TRO 13] proposent dans leur étude une comparaison entre des essais d'indentation et des essais d'impact de faible énergie. Pour cela les déplacements maximum obtenus lors des essais d'impact sont appliqués aux essais comparatifs quasi-statiques. Ils montrent que la force maximale obtenue est plus importante pour les essais dynamiques. Cependant les endommagements et l'énergie dissipée sont semblables.
- L'autre, à l'opposé, correspond à une réponse "très" dynamique. Dans ce cas, la réponse de la cible est dominée par des ondes de déformation hautes fréquences. Une illustration schématique de la déformation d'une éprouvette impactée dans ces conditions est proposée sur la figure 1.11(c).
- Le dernier type de réponse correspond à une situation intermédiaire entre les deux autres situations. Ici, la réponse de la cible est dominée par des modes de vibration et le temps de réponse est relativement court. Une illustration schématique de la déformation d'une éprouvette impactée dans ces conditions est proposée sur la figure 1.11(b).

Cette étude se positionne dans la catégorie des régimes de sollicitations qui sont à la frontière entre un régime très lent proche du quasi-statique et un régime très dynamique.

Le type de chargement que voit les structures étudiées dans ce travail a été présenté. Il est proposé maintenant de s'intéresser aux mécanismes d'endommagement observés expérimentalement dans les stratifiés composite soumis à de telles sollicitations.

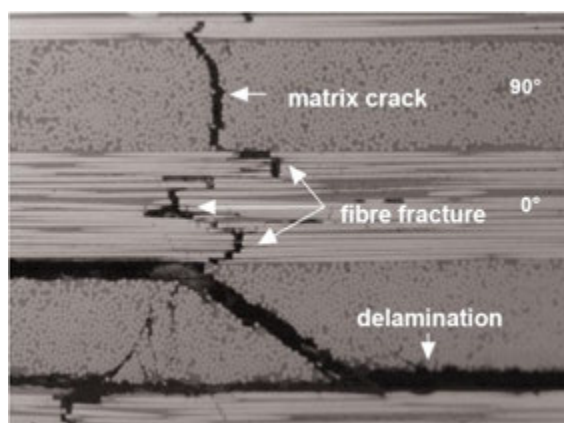
## 1.2.2 Mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés lors d'un impact de faible énergie

La coupe d'un stratifié composite  $[\pm 45/90/0/45/0_4/-45/0_2]_s$  impacté à 30 Joules est présentée sur la figure 1.12 [LOP 09b]. Elle illustre l'état d'endommagement qui est classiquement observé expérimentalement à la suite de ce type d'impact. Il est effective-



**FIGURE 1.12:** Illustration sur la coupe d'un stratifié carbone/époxy fibre longue  $[\pm 45/90/0/45/0_4/-45/0_2]_s$ , des mécanismes d'endommagements engendrés par un impact de 30 joules. Un liquide fluorescent a été ajouté pour une meilleure identification des endommagements dans l'épaisseur. Source : [LOP 09b].

ment observé que les dégradations du matériau sont généralement contenues dans un cône appelé *cône d'endommagement*, dont l'axe est dans la direction de l'épaisseur du pli et il passe à proximité du point d'impact. Sa base se situe sur le pli opposé à l'impact. Trois mécanismes de dégradation ayant déjà été évoqués ressortent des observations réalisées par de nombreux auteurs. Ils sont visibles sur la figure 1.13 issue des travaux de [DAV 04]. Il s'agit des modes d'endommagement suivant :

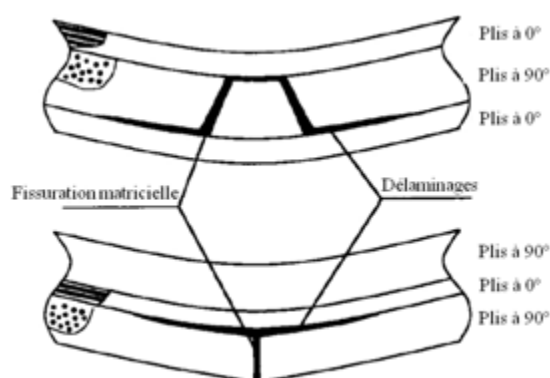


**FIGURE 1.13:** Illustration de modes de dégradation d'un stratifié composite. Source : [DAV 04].

### – Fissuration matricielle :

Elle correspond à l'apparition de fissures dans la matrice du composite. Elle est due à des ruptures de la matrice et à des décohésions fibres matrice [ABD 09]. Dans la chronologie d'apparition des endommagements proposée par différents travaux, il s'agit généralement du premier mode de dégradation observé [CHA 90, CHO 92]. [GUI 00] a en particulier observé le scénario d'apparition des dommages avec l'aide

de caméras rapides sur des composites à base de fibres de verre. Selon [CHO 92], ce type d'endommagement peut être à l'origine du délaminage. Une illustration des mécanismes de couplage entre la fissuration matricielle et le délaminage est proposée sur la figure 1.14. Deux d'entre eux sont illustrés sur cette dernière. Le premier, sur la partie supérieure de la figure, est dû à deux fissures matricielles orientées à  $45^\circ$  environ, générées à cause des contraintes de cisaillement. Dans ce cas, les auteurs observent que le délaminage a plutôt tendance à apparaître dans le pli inférieur au pli où ce type de fissures à  $45^\circ$  est apparu. Le second mécanisme est dû à une fissure transverse générée par une contrainte de traction liée à la flexion de la plaque. Dans ce cas, le délaminage a tendance à s'initier dans le pli supérieur à celui où ce type de fissuration matricielle transverse est apparu.



**FIGURE 1.14:** Illustration du couplage introduit entre la fissuration matricielle et le délaminage. Source : [CHO 92].

#### – Délaminage :

Le délaminage d'un stratifié composite correspond à la séparation de deux plis adjacents. Cette séparation résulte de la propagation d'une fissure dans le plan formé à l'interface entre deux plis d'orientations différentes à l'échelle mésoscopique (échelle du pli). Cet endommagement est visible sur les micrographies présentées dans les figures 1.13 et 1.12. Si l'on regarde ce type de fissure à l'échelle microscopique, on observe une compétition entre une propagation dans la fine couche de matrice liant les plis du stratifié et la rupture de l'adhésion de la matrice sur les fibres. Cela donne donc, à cette échelle d'observation, une direction de propagation relativement erratique comme on peut le voir sur la figure 1.15 issue des travaux de [BUL 14]. Cependant, lorsque l'on s'éloigne un peu pour rejoindre l'échelle mésoscopique, la direction de propagation privilégiée évoquée plus haut est retrouvée. Par ailleurs, les aires de délaminage sont généralement en forme de doubles ellipses dont le grand axe est orienté selon la direction des fibres du pli adjacent à l'interface délaminée qui est le plus éloigné du point d'impact. La figure 1.16 provenant des travaux de [HAU 10] illustre cette forme de double ellipse pour le cas de plusieurs composites carbone/époxy  $[0_2/+60_2/-60_2]_s$  impactés à 18 Joules, ce qui montre aussi une reproductibilité des essais.

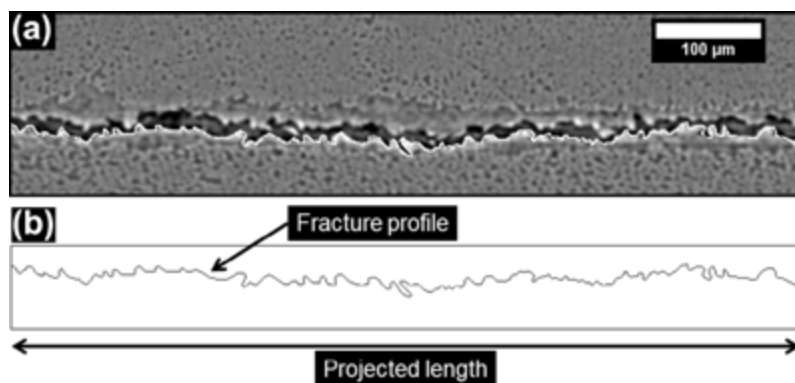


FIGURE 1.15: Exemple de trajet de délaminage. Source : [BUL 14].

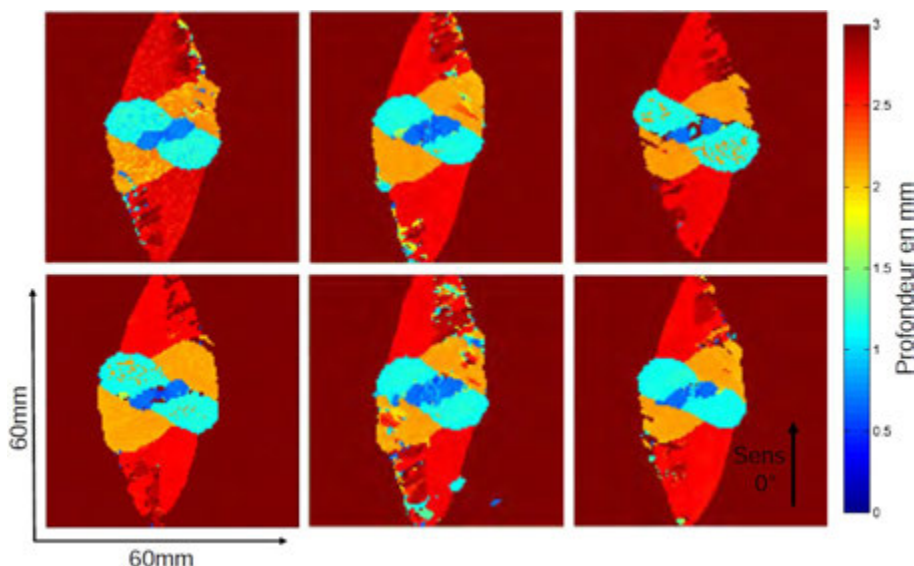


FIGURE 1.16: Illustration du contrôle ultra-sonore (D-scan) de panneaux composites carbone/époxy  $[0_2/+60_2/-60_2]_s$  impactés à 18 Joules. Source : [HAU 10].

– **Rupture de fibres :**

La rupture de fibres est un dommage précurseur de la ruine d'une structure stratifiée. Elle apparaît plus tardivement que la fissuration matricielle ou les délaminages dans le processus d'endommagement par impact. Dans un premier temps, les ruptures de fibres apparaissent à proximité de l'axe du cône d'endommagement, dans les plis situés vers la face opposée à l'impact. Les contraintes de traction élevées liées à la flexion de la plaque impactée ainsi que la présence de fissuration matricielle conduisent à l'endommagement des fibres. Leur rupture peut également survenir sous l'impacteur pour une énergie d'impact plus importante. Dans ce cas, des contraintes localement très élevées (cisaillement à proximité de l'aire de contact) et des effets d'indentation (rupture en compression) [DAV 04] engendrent

de telles ruptures.

Les différents mécanismes d'endommagement observés expérimentalement lors d'impact sur stratifié composite ont été évoqués. Ils sont majoritairement responsables de la perte des propriétés mécaniques des composants impactés. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte leur formation dans les modèles afin de déduire les caractéristiques résiduelles des pièces (par exemple en CAI). Une étude bibliographique des simulations réalisées dans ce domaine est donc proposée.

### 1.2.3 État de l'art de la modélisation fine des impacts de faible énergie.

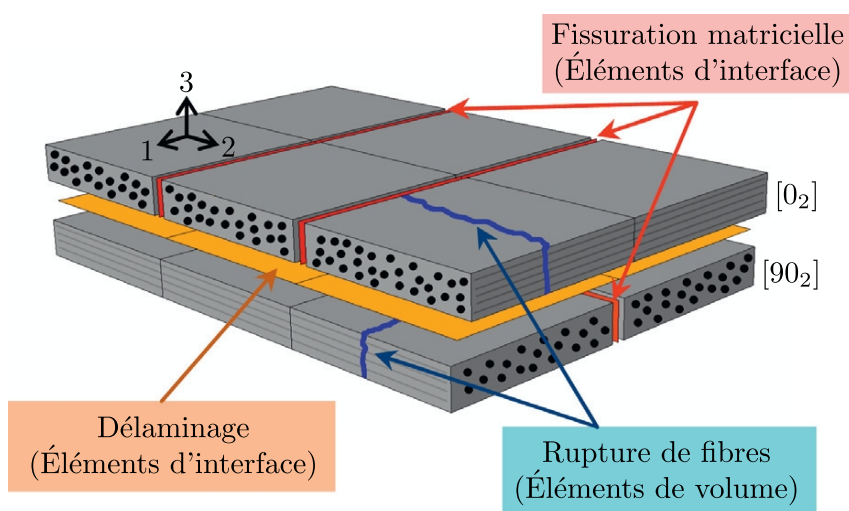
La stratégie utilisée dans les modèles pour tenir compte des mécanismes d'endommagements présentés précédemment résulte d'un compromis entre leur complexité et leur caractère prédictif. En effet, il existe des modèles simplifiés qui ne tiennent pas explicitement compte de ces mécanismes. Ceux consistant à appliquer des critères en contrainte ou en déformation à l'échelle du stratifié ou du pli à partir d'un calcul élastique en sont de bons exemples (Critère de contrainte max, critère de Tsai-Wu [TSA 71, CES 07], critère de Tsai-Hill [DEF 00], critère de Hashin [HAS 80]...). Ils ont l'avantage d'être relativement simples et opérationnels. Cependant ils ne suffisent plus pour l'impact car ils sont trop conservatifs. De nombreux travaux sont donc en cours dans la communauté scientifique pour lever cette limitation. Une revue non-exhaustive de travaux allant dans cette direction est proposée afin de dégager leurs tendances et leurs limitations.

Il apparaît, compte tenu des capacités de calcul actuelles, que l'échelle géométrique la plus fine explicitement représentée est souvent celle du pli. Une loi matériau mésoscopique ou mésomodèle est alors utilisée dans de nombreuses études comme dans [LOP 09a, QIU 14, GON 12] pour rendre compte des dégradations agissant aux échelles inférieures, telles que la fissuration matricielle et les ruptures de fibres. Les auteurs de [TRO 11, TRO 13] utilisent par exemple le modèle OPFM développé à l'Onera [LAU 05, LAU 07, CHA 11] et ceux de [LOP 09a] utilisent une extension du modèle de contrainte plane proposé par Maimí [MAI 07a, MAI 07b]. Ces relations de comportement adoucissantes permettent de rendre compte d'une partie des propriétés mécaniques résiduelles. Cependant, elles peuvent être sujettes au problème de dépendance du maillage. L'ajout d'une longueur caractéristique ou d'un effet retard peut alors être utilisé pour régulariser la solution, bien que ces techniques de calcul aient du mal à trouver un sens physique actuellement. Elles font donc l'objet de nombreux travaux [LAD 00, SUF 03].

D'autre part, des modèles de zones cohésives (MZC) tels que ceux proposés dans [ALF 01, BOS 06, TUR 06] sont aussi souvent utilisés dans ce cadre pour représenter le délaminage [DUP 11, TRO 11]. Ils sont ainsi insérés entre les plis du stratifié. Une étude de l'influence des paramètres cohésifs avec le modèle de [ALF 01], en particulier, est proposée dans [TRO 13]. Les auteurs montrent que toutes les interfaces cohésives doivent être intégrées dans les simulations. De plus, l'influence du couplage entre la dégradation

du pli et l'interface est examinée dans ces travaux. Pour cela, ils ont utilisé un couplage entre la variable d'effet de l'endommagement matriciel du modèle OPFM et les propriétés de l'interface inter-plis. Le modèle bi-linéaire qui a été mis en place dans [VAN 11, VAN 13] en particulier, a été utilisé pour cela. Par ailleurs, dans [LOP 09a] et dans [FAG 10], du contact avec frottement est ajouté entre les plis lorsque les éléments de zone cohésive sont supprimés après avoir été suffisamment dégradés. Les auteurs de [LOP 09a] montrent ainsi que cet ajout est important puisqu'il représente 15% de l'énergie dissipée.

Dans [BOU 09, BOU 12] puis dans [HON 13], les auteurs proposent également d'ajouter des éléments de zone cohésives (EZC) entre les plis afin de modéliser les fissurations matricielles dominantes dans la direction de leur épaisseur (splitting). Un schéma de principe du modèle numérique qu'ils proposent est montré sur la figure 1.17.



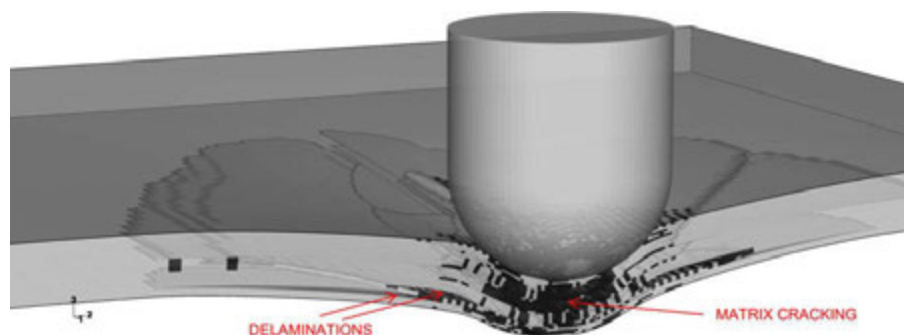
**FIGURE 1.17:** Schéma de principe du modèle numérique proposé par [HON 13].

La loi de comportement utilisée dans ces EZC permet de prendre en compte la non-refermeture des fissures créés, par l'intermédiaire d'un modèle de zone cohésive spécifiquement développé contenant une composante de déformation résiduelle de type élastoplastique. Les auteurs justifient cette non-refermeture par la présence des débris observés expérimentalement et formés pendant l'impact [ABD 09]. Ils avancent ainsi que ce phénomène permet d'expliquer en partie la présence de l'empreinte résiduelle. Cependant, cette technique présuppose de la position des fissurations matricielles intra-ply dominantes, ce qui est difficilement à prévoir, contrairement au délaminage par exemple.

Au delà des ingrédients qui peuvent être utilisés dans ces types de modèle (contact, lois endommageable, MZC...), il ressort également de cette partie de l'étude bibliographique que les simulations réalisées commencent à être relativement adaptées pour décrire un impact. Les comparaisons essais/calculs réalisées dans différentes études en témoignent ([LOP 09a, GON 12, TRO 13]). Elles sont faites sur la base de différents indicateurs, tels que les aires et les motifs de délaminage, ou encore les courbes force-déplacement. Une illustration du résultat de la simulation obtenue dans [LOP 09b] est



proposée sur la figure 1.18 où il peut être observé différents endommagements formés. Ainsi, des études qui se servent de ces résultats d'endommagement pour étudier leur effet sur la CAI, par exemple, commencent à voir le jour, comme dans [GON 12].



**FIGURE 1.18:** Simulation numérique d'un stratifié composite  $[\pm 45/90/0/45/0_4/-45/0_2]_s$  impacté à 30 Joules, 2 ms après le contact. Les endommagements des plis, dominés par la fissuration matricielle, sont représentés en noir et la transparence permet la visualisation des délaminages. Source : [LOP 09a].

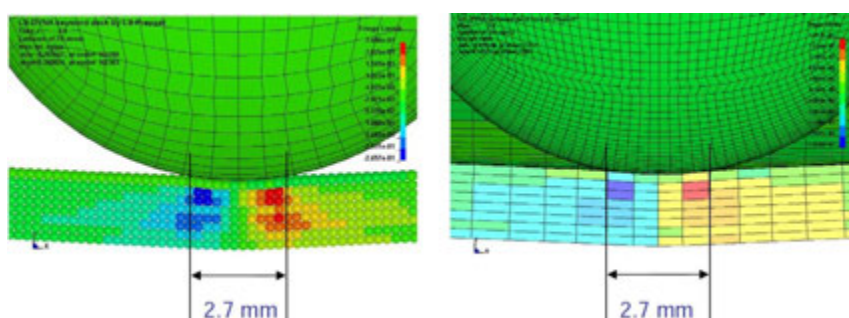
Cependant, les coûts de calcul concernant la formation des endommagements restent encore majoritairement trop élevés pour que ces modèles puissent être appliqués sur des structures dont l'ordre de grandeur est du mètre et plus. En effet, compte tenu des non-régularités présentes dans les simulations (contact, lois adoucissantes, MZC...), les codes explicites sont privilégiés. De nombreux travaux sont effectivement réalisés avec de tels codes comme par exemple dans [BOU 12, LOP 09a, GON 12, FAG 10, DUP 11]. Les auteurs de [LOP 09a] en particulier, soulignent que ce temps s'explique en partie par le pas de temps utilisé qui est très petit devant le temps caractéristique de la simulation. L'ordre de grandeur du pas de temps est de quelques nanosecondes et le temps caractéristique des simulations est de l'ordre grandeur de quelques millisecondes.

Un modèle numérique sur une pièce de structure relativement plus grande que celles des études qui viennent d'être évoquées est proposé dans [FAG 10]. Il s'agit d'un panneau composite raidi, de plusieurs dizaines de centimètres ( $450 \times 375 \text{ mm}^2$ ), renforcé par trois raidisseurs en forme de I. Dans leur modèle, les auteurs associent une modélisation à l'échelle mésoscopique dans la zone d'impact avec une modélisation plus grossière dans la partie complémentaire. Ils ont donc un modèle d'endommagement continu dans les plis avec un modèle de zone cohésive inter-plis pour le délaminage dans la zone d'impact. Dans la partie complémentaire, ils utilisent des éléments coque pour modéliser la peau du panneau, ainsi que les trois portions de plan des trois raidisseurs. Bien que les résultats obtenus par leur modélisation montrent l'aspect prédictif du modèle mis en place, ils mettent également en avant que le temps de calcul nécessaire pour réaliser ce genre de simulation est important. Leur modèle numérique comporte 100 000 éléments environ, et le coût du calcul s'élève à 96 heures sur 8 CPUs.

Vues sous un autre angle, les études de [FAG 10] et de [ILY 10] en particulier permettent de montrer que des couplages de modèles entre la zone d'impact et la partie



complémentaire sont de plus en plus fréquents. L'approche originale de [ILY 10] propose notamment un couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) dans *LS-DYNA*. Dans cette étude, les particules sont liées entre elles par une loi de comportement, pas encore endommageable, mais élastique linéaire et orthotrope. Elle permet de prévoir correctement les contraintes au sein du stratifié et autorise le branchement d'une fissure sans connaissance préalable de leur localisation. Cela semble donc prometteur pour la prévision des endommagements. Une comparaison entre un calcul entièrement éléments finis et le calcul couplé (EF/SPH) proposé est illustrée sur la figure 1.19 où l'on peut constater une assez bonne corrélation entre les deux modélisations. Bien que les travaux proposés dans [KIM 08] soit réalisés sur une

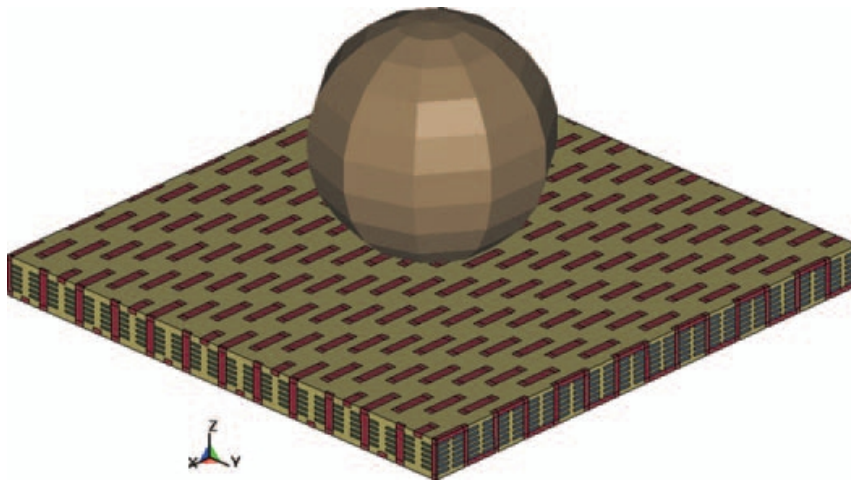


**FIGURE 1.19:** Comparaison des déplacements maximum obtenus entre le modèle couplé EF/SPH à gauche et le modèle élément finis à droite. Source [ILY 10].

plaque de composite tissé 3d impactée, ils permettent également de montrer la tendance qui vient d'être évoquée. En effet, dans ces travaux un couplage entre une petite portion du tissé 3d maillée finement et une partie plus grossière est réalisé dans le code explicite *LS-DYNA*. La partie maillée finement est représentée sur la figure 1.20 où l'on peut constater la présence des torons explicitement représentés dans la géométrie. Cette finesse de géométrie permet aux auteurs de montrer que l'évolution du comportement global de la structure peut être modifiée lorsque des défauts sont introduits dans le tissage. Or ces défauts sont difficiles à prendre en compte dans une loi homogénéisée. Ce modèle comporte 10 millions de DOF environ, ce qui a nécessité l'utilisation d'un super-calculateur. Cette étude avec celle de [FAG 10] en particulier indique une tendance qui consiste à affiner la modélisation numérique à des échelles toujours plus petites, au moins localement, et à coupler différents types de modélisations. Ces modèles permettent également de mieux maîtriser les conditions limites en proximité de la zone d'impact car elles sont délicates à modéliser comme l'ont montré les travaux de [TRO 13].

### 1.3 Conclusion

Compte tenu de l'importance du phénomène d'impact pour les industriels, de nombreux travaux sont menés depuis quelques années dans ce domaine. Cependant, il apparaît que très peu d'études existent dans la littérature concernant les impacts de faible



**FIGURE 1.20:** Modèle numérique d'une plaque de  $38.08 \times 37.68 \times 2.79 \text{ mm}^3$  en composite tissé impactée à basse vitesse avec représentation explicite des torons. Source [KIM 08].

énergie sur des structures industrielles stratifiées complexes qui ont une taille de l'ordre de grandeur du mètre. Les travaux de [FAG 10] sont une tentative pour aller dans cette direction. Cependant, les auteurs eux-mêmes soulignent les difficultés liées aux temps de calcul de tels problèmes. En effet, du point de vue de la modélisation des impacts sur de *petites* structures (éprouvette, plaque) par la méthode des éléments finis, il a été vu que la discrétisation spatiale requise est relativement fine en comparaison de la taille des structures à simuler. Cette finesse de maillage est nécessaire afin d'obtenir des résultats représentatifs en terme d'endommagement ou de rigidité post impact. Elle conduit à utiliser des tailles de maille qui sont au minimum de l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un pli soit quelques dixièmes de millimètres (0.26 mm pour du T700/M21). Cette échelle est à comparer avec la taille des structures que l'on souhaite simuler. Il est donc facilement compréhensible que compte tenu des capacités de calcul ainsi que des techniques de résolution actuelles, il est très coûteux de simuler un modèle discrétisé à l'échelle du pli sur la totalité d'une structure complexe comme un panneau stratifié raidi. D'autre part, la simulation d'impact de faible énergie est très non-régulière du fait du contact et des sauts de solution dues aux lois adoucissantes, ce qui peut conduire à des instabilités. La convergence des algorithmes itératifs implicites peut donc être très délicate. Le pas de temps est alors diminué au cours des itérations et il peut devenir plus intéressant du point de vue du coût du calcul d'utiliser un code explicite. La majorité des études que nous avons présentées dans la section précédente sont effectivement réalisées avec de tels codes. Il ne nécessitent effectivement pas de solveur non-linéaire ni d'opérateur tangent. La résolution potentiellement coûteuse en terme de temps CPU du système linéarisé obtenu avec les schémas implicites n'est ainsi plus nécessaire. Cependant, les codes explicites sont conditionnellement stables, comme détaillé dans le chapitre 2. De ce fait, un pas de temps de l'ordre de grandeur de quelques nanosecondes doit être choisi pour assurer leur stabilité. Il est donc très fin en comparaison de l'échelle de temps de la réponse de la structure qui est de l'ordre de grandeur de

quelques millisecondes. Nous proposons donc de mettre en place une stratégie qui permette de conserver les avantages de chacun de ces codes afin de diminuer le coût du calcul. Ainsi l'extension de modèle d'impact pourra se faire plus facilement à l'échelle industrielle. La seconde partie du chapitre 2 présente la famille de méthodes qui sera retenue pour réaliser cela.

# Chapitre 2

## Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

Les objectifs de ce chapitre sont d'apporter certains éléments du socle théorique et de présenter les méthodes admissibles pour réaliser un couplage de codes entre un code implicite et un code explicite. Pour cela, nous présentons dans un premier temps le système d'équations qui doit être résolu pour approcher la solution du problème de référence. On montre ainsi que dans le cadre de cette thèse, cela conduit à la résolution d'une succession de systèmes implicites ou explicites. Un point de vue des méthodes de résolution de ce type de système utilisé dans les codes de calcul est alors proposé. Ensuite, différentes classes de méthodes permettant de résoudre le système d'équations évoqué plus haut, par une approche par couplage de codes sont proposées.

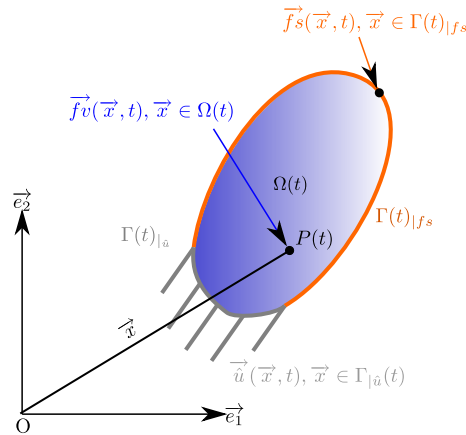
### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Problème de référence de la mécanique des milieux continus</b>	<b>29</b>
2.1.1	Principe des puissances virtuelles	31
2.1.2	Discrétisation en espace et en temps	31
<b>2.2</b>	<b>Techniques de résolution d'un système linéaire</b>	<b>43</b>
2.2.1	Méthode de résolution directe	44
2.2.2	Méthodes de résolution itératives	44
<b>2.3</b>	<b>Bilan</b>	<b>47</b>
<b>2.4</b>	<b>Méthodes de ré-analyse</b>	<b>47</b>
2.4.1	Méthodes d'analyse descendantes	47
2.4.2	Méthodes d'analyse globale/locale	48
<b>2.5</b>	<b>Méthodes de partitionnement</b>	<b>49</b>
2.5.1	Partition par éléments	50
2.5.2	Partition par nœuds	51

<b>2.6</b>	<b>Méthodes de décomposition en sous-domaines</b>	<b>53</b>
2.6.1	Méthodes avec recouvrement	54
2.6.2	Méthodes sans recouvrement	57
<b>2.7</b>	<b>Méthodes multiéchelles en espace et en temps</b>	<b>62</b>
2.7.1	Méthode GC	63
2.7.2	Méthode PH	69
2.7.3	Méthode GC bis	73
2.7.4	Méthode MGC	76
2.7.5	Méthode MGC dans le cas mono-échelle en temps	76
2.7.6	Méthode MGC dans le cas multiéchelle en temps	77
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>

---



**FIGURE 2.1:** Exemple d'un problème de référence en dimension 2 pour l'espace et représentation des distributions.

## 2.1 Problème de référence de la mécanique des milieux continus

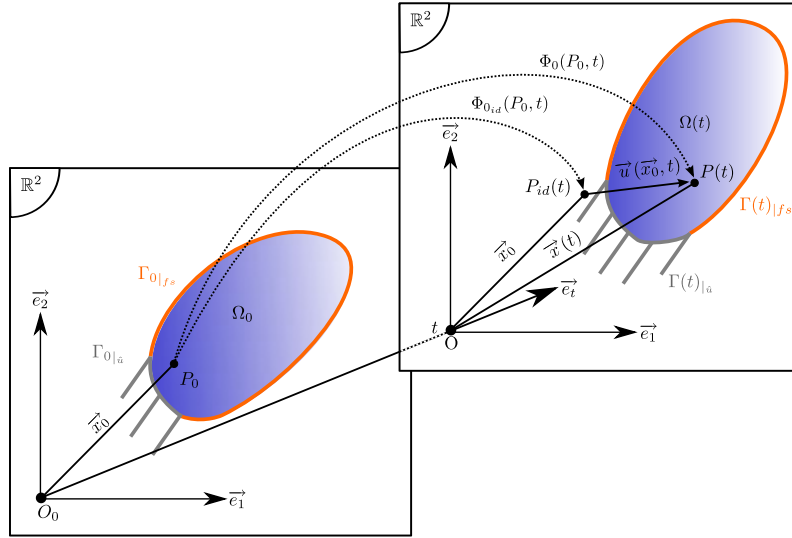
Le problème de mécanique classique illustré sur la figure 2.1 est considéré. C'est à dire que l'on a un domaine, délimité par sa frontière notée  $\Gamma(t) = \Gamma$ , qui occupe le volume  $\Omega(t) = \Omega$  de l'espace à un instant noté  $t$ . Il est soumis à cet instant, à un champ d'efforts volumiques représenté par la distribution notée  $\underline{f}_v$  dont le support est  $\Omega(t)$ , à un champ d'efforts surfaciques représenté par la distribution notée  $\underline{f}_s$  dont le support est une partie de la frontière du domaine notée  $\Gamma(t)|_{f_s} = \Gamma|_{f_s}$  et à un champ de déplacement imposé représenté par la distribution notée  $\underline{u}$ , dont le support est la partie restante de la frontière que l'on note  $\Gamma(t)|_{\hat{u}} = \Gamma|_{\hat{u}} = \Gamma \setminus \Gamma|_{f_s}$ .

Connaissant ces chargements, on cherche à caractériser l'évolution de la structure au cours du temps sur l'intervalle d'étude  $[t_0, t_f]$ . Les champs de déplacement et de vitesse initiaux, respectivement notés  $\underline{u}_0$  et  $\underline{v}_0$ , sont supposés connus dans le domaine  $\Omega(t_0) = \Omega_0$  au temps  $t_0$ . Le domaine  $\Omega_0$  constitue la configuration de référence. La transformation  $\underline{\phi}_0$  décrite dans la relation (2.1) et illustrée sur la figure 2.2 est introduite afin de caractériser le mouvement de la structure.

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_0 : \Omega_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Omega \\ (\underline{x}_0, t) &\longrightarrow \underline{x} = \underline{\phi}_0(\underline{x}_0, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$\underline{x}_0 = O_0 P_0$  est le vecteur qui permet de positionner le point  $P_0$  dans l'espace de départ associé au temps  $t_0$  et  $\underline{x} = O P$  est celui permettant de positionner le point  $P$  transporté de  $P_0$  par  $\underline{\phi}_0$  dans l'espace courant associé au temps  $t$ . Le champ de déplacement noté  $\underline{u}$  et défini par la relation suivante  $\underline{u} = \underline{\phi}_0(\underline{x}_0, t) - \underline{\phi}_{0, id}(\underline{x}_0, t) = \underline{\phi}_0(\underline{x}_0, t) - \underline{x}_0$  est également introduit pour caractériser l'évolution de la structure.  $\underline{\phi}_{0, id}$  est la transformation identité.

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite



**FIGURE 2.2:** Illustration des transformations introduites ainsi que de la notion de déplacement (d=2).

On note par ailleurs  $\rho$  la distribution de la masse dans la structure à l'instant  $t$  dont le support est  $\Omega$ . Munis de ces éléments et des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement que nous admettons ici, le champ de déplacement doit vérifier le système d'équations ci-dessous :

- Équilibre dynamique (forme locale) 123

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall \underline{x} \in \Omega, \rho(\underline{x}, t) \frac{d}{dt} [\underline{\dot{u}}(\underline{x}, t)] = \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)) + \underline{f}v(\underline{x}, t) \quad (2.2)$$

- Équation de liaison

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall \underline{x} \in \Gamma|_{ia}, \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\hat{u}}(\underline{x}, t) \quad (2.3)$$

- Conditions initiales en  $t = t_0$

$$\forall \underline{x} \in \Omega(t_0), \underline{u}(\underline{x}, t_0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \quad (2.4)$$

$$\forall \underline{x} \in \Omega(t_0), \underline{\dot{u}}(\underline{x}, t_0) = \underline{v}_0(\underline{x}) \quad (2.5)$$

- Relation de comportement

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_f], \forall \underline{x} \in \Omega, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) &= \underline{\underline{A}}(C(\underline{x}, t)) \\ C(\underline{x}, t) &= \left\{ \underline{\underline{\phi}}_0(\underline{x}_0, s), s \in [t_0, t], \underline{x}_0 \in \Omega_{0|influence}(\underline{x}, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Admissibilité statique

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall \underline{x} \in \Gamma|_{fs}, \underline{f}s(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (2.7)$$

Avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy où  $C(\underline{x}, t)$  est le cône d'influence du point  $\underline{x}$  à l'instant  $t$ .  $\Omega_{0|influence}$  est le domaine d'influence du point  $\underline{x}$  à l'instant  $t_0$ .  $\underline{\dot{u}}$  est le vecteur vitesse.

Le problème de référence que l'on vient de présenter est un cadre formel qui permet de décrire un problème de mécanique. Cependant, compte tenu de la complexité des géométries ainsi que des lois de comportements rencontrées dans la pratique, sa solution est rarement accessible directement. Ce problème est par conséquent écrit sous sa forme faible. Il s'agit du principe des puissances virtuelles qui est équivalent au problème de mécanique qui vient d'être présenté. Cependant, l'écriture du problème de mécanique sous sa forme faible est mieux adaptée pour mettre en place des techniques de résolution approchées.

### 2.1.1 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles est un cadre adapté pour mettre en place des techniques de résolution approchées. Pour l'obtenir, le produit scalaire  $L_2$  de (2.2) avec un champ de vecteur dit virtuel et noté  $\underline{v}^* \in \mathbb{H}_0^1$  est réalisé. Après intégration de ce résultat sur le domaine d'étude, en supposant la continuité du champ de vitesse dans  $\Omega$ , la relation (2.8), qui le constitue, est obtenue.

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall \underline{v}^* \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \left[ \rho(\underline{x}, t) \frac{d}{dt} [\underline{\dot{u}}(\underline{x}, t)] \cdot \underline{v}^*(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \text{sym} \left( \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^*(\underline{x}, t)) \right) \right] d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma_{fs}} \underline{f}s(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}^*(\underline{x}, t) d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{f}v(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}^*(\underline{x}, t) d\Omega \quad (2.8)$$

$\mathbb{H}_0^1$  est l'espace de Hilbert. Il est constitué de l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  de carrés sommables (la fonction et ses dérivées d'ordre premier par rapport à chacune de ses variables) et nulles sur la partie du bord du domaine, où les déplacements sont imposés. Le fait que les fonctions soient de carrés sommables signifie qu'elles sont à énergie finies.

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}^* \in C^1(\Omega) \setminus \underline{v}^*|_{\Gamma_{\dot{u}}} = \underline{0} \text{ et } \int_{\Omega} \underline{v}^* \cdot \underline{v}^* d\Omega < +\infty \\ \text{et } \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{x}} d\Omega < +\infty \text{ et } \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t} d\Omega < +\infty \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Un cadre théorique adapté pour mettre en place des techniques de résolutions approchées vient d'être présenté. Différentes techniques de solutions approchées du principe des puissances virtuelles (2.8) sont maintenant exposées.

### 2.1.2 Discrétisation en espace et en temps

La résolution analytique du problème de référence (2.8) est généralement inabordable. C'est pourquoi une démarche classique consiste à approximer le problème continu de



référence par un problème approché discrétisé en espace et en temps. En ce sens, l'espace de dimension infinie  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  est projeté dans l'espace de dimension finie  $\mathbb{H}_0^{1n}(\Omega)$  dont la dimension est  $n \in \mathbb{N}^*$ . C'est dans ce dernier qu'une approximation du problème de référence est recherchée [ZIE 71]. Le jeu consiste alors à trouver l'espace approché le plus adapté et de dimension la plus faible possible pour obtenir une approximation de la solution satisfaisante.

### 2.1.2.1 Discrétisation en espace

La formulation du déplacement discrétisé en espace par la méthode des éléments finis suivant est considérée. Davantage de détails peuvent être trouvés dans [BEL 99].

$$\tilde{\mathbf{u}}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^s \sum_{I=1}^{n_{pt}} n_I(\underline{x}) q_{Ii}(t) \underline{e}_i = \mathbf{N}(\underline{x}) \mathbf{q}(t) \quad (2.10)$$

Avec  $\tilde{\mathbf{u}}(\underline{x}, t)$  l'approximation du champ de déplacement dans  $\mathbb{H}_0^{1n}(\Omega)$ ,  $s$  est la dimension spatiale du problème et  $n_{pt}$  est le nombre de nœuds.  $n_I(\underline{x})$  est la fonction de forme associée au degré de liberté  $I$ ,  $q_{Ii}(t)$  est le déplacement du degré de liberté  $I$  dans la direction  $i$ .  $\mathbf{N}(\underline{x})$  est la matrice des fonctions de forme de dimension  $s \times n_{pt} * s$  et  $\mathbf{q}(t)$  est le vecteur des inconnues nodales de dimension  $n_{pt} * s$ . De manière analogue, le champ virtuel est également discrétisé avec les mêmes fonctions de forme.

$$\tilde{\mathbf{v}}^*(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^s \sum_{I=1}^{n_{pt}} n_I(\underline{x}) v_{Ii}^*(t) \underline{e}_i = \mathbf{N}(\underline{x}) \mathbf{v}^*(t) \quad (2.11)$$

Les inconnues  $v_{Ii}^*(t)$  peuvent être interprétés comme des perturbations virtuelles autour de la position d'équilibre dans la direction  $i$  du nœud  $I$  à l'instant  $t$ .  $\mathbf{v}^*(t)$  est le vecteur qui collectionne l'ensemble de ces inconnues et  $\tilde{\mathbf{v}}^*(\underline{x}, t)$  est l'approximation de  $\mathbf{v}^*(\underline{x}, t)$ .

Les discrétisations spatiales (2.10) et (2.11) sont réinjectées dans le principe des puissances virtuelles (2.8) en distinguant dans le vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{q}(t)$  et ses dérivées temporelles, les quantités inconnues et celles qui sont imposées par l'équation de liaison. On note ainsi  $\mathbf{u}(t)$  le vecteur des inconnues nodales non-imposées par l'équation de liaison. Ce vecteur est de dimension  $n$ . Les équations d'Euler ainsi obtenues conduisent au système semi-discrétisé (2.12) [HUG 87].

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0, t_f], \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec  $\mathbf{M}$  la matrice des masses, symétrique, définie et positive.  $\mathbf{f}^{\text{int}}$  le vecteur des forces internes et  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  le vecteur des forces extérieures. Dans le cas de l'élasticité linéaire,  $\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{K} \mathbf{u}(t)$  avec  $\mathbf{K}$  la matrice des rigidités. Les simple et double points au dessus des quantités représentent respectivement les dérivées du premier et du deuxième ordre par rapport au temps. Les déplacements et vitesses initiales discrétisées sont respectivement notés  $\mathbf{u}_0$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$ . On peut remarquer à ce stade que les forces

extérieures sont prises ici indépendantes des quantités cinématiques. Les forces suiveuses, par exemple, ne sont donc pas prises en compte ici, mais si besoin, le raisonnement qui va suivre peut être également tenu en les considérant.

### 2.1.2.2 Discrétisation en temps

Le système d'équations différentielles (2.12) reste souvent inabordable analytiquement. C'est pourquoi une discrétisation en temps est mise en place. Elle consiste à rechercher la solution, non pas sur toute la plage d'étude temporelle  $[t_0, t_f]$ , mais uniquement à certains instants ou piquets de temps dans cet intervalle. L'intérêt est que la discrétisation en temps du système d'équations différentielles (2.12) conduit généralement à résoudre une succession de systèmes linéaires implicites ou explicites, suivant le schéma d'intégration en temps choisi. Ainsi, la puissance de calcul des ordinateurs ainsi que leur efficacité pour résoudre de tels systèmes peut avantageusement être utilisée pour approcher des solutions de problème de grande taille. Il existe une grande variété de schémas d'intégration en temps. Nous détaillerons plus spécifiquement ceux de la famille de Newmark car la méthode de couplage que nous avons choisie dans ce travail est basée sur ces derniers. Par ailleurs, les schémas de Newmark sont largement répandus dans les codes de calcul existant par l'intermédiaire des schémas HHT [HIL 77].

Pour présenter les schémas de Newmark, la plage de temps  $[t_0, t_f]$  est coupée en  $n_{step} \in \mathbb{N}^*$  intervalles qui sont supposés équidistants pour des raisons de simplicité. On note alors  $\Delta t$  le pas de temps, c'est à dire la longueur d'un intervalle entre deux piquets de temps. On a ainsi  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  avec  $t_n$  et  $t_{n+1} \in [t_0, t_f]$  deux piquets de temps. L'indice  $n \in \llbracket 0, n_{step} - 1 \rrbracket$  indique le nombre d'intervalles entre  $t_0$ , le premier piquet de temps, et  $t_n$ . La famille des intégrateurs temporel de Newmark [NEW 59] est constituée de deux relations décrites dans (2.13) qui lient les déplacements, vitesses et accélérations discrétisés de l'instant  $t_n$  à ceux de l'instant  $t_{n+1}$ . Un intégrateur de Newmark est déterminé par le choix des deux paramètres notés  $\gamma$  et  $\beta$ .

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} &= {}^p\mathbf{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= {}^p\dot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec le prédicteur en déplacement  ${}^p\mathbf{u}_n$  et celui en vitesse  ${}^p\dot{\mathbf{u}}_n$  donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} {}^p\mathbf{u}_n &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - 2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \\ {}^p\dot{\mathbf{u}}_n &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{cases} \quad (2.14)$$

$\mathbf{x}_n$  est l'approximation du vecteur des inconnues  $\mathbf{x}(t_n)$  au temps  $t_n$ .

En introduisant les relations de Newmark (2.13) dans le système différentiel (2.12), le système d'équations suivant est obtenu tant que  $\gamma$  est différent de zéro, ce qui n'arrive

jamais en pratique pour des raisons de stabilité [HUG 87].

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_0 &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0)) \\ \forall n \in \llbracket 0, n_{\text{step}} - 1 \rrbracket, \\ \begin{cases} \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - p\dot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \\ \mathbf{u}_{n+1} = p\mathbf{u}_n + \frac{\beta\Delta t}{\gamma}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - p\dot{\mathbf{u}}_n) \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\gamma\Delta t}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - p\dot{\mathbf{u}}_n) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Par la suite, on cherche à réaliser un incrément du système (2.15) pour passer du temps  $t_n$  au temps  $t_{n+1}$ . On procède ainsi par récurrence, en supposant l'état du système connu à l'instant  $t_n$ , pour résoudre le problème sur la totalité de la plage d'étude, sachant que la procédure est initialisée à l'instant  $t_0$  par les conditions initiales et l'équation d'équilibre.

### 2.1.2.3 Expression algébrique générale du problème de mécanique discrétisé en temps par les schémas de Newmark avec les inconnues de l'équation d'équilibre en vitesse

Afin d'obtenir un système qui soit valide quelque soit le couple de paramètres de Newmark choisi et suffisamment général pour présenter de manière concise les méthodes de couplage, une méthode itérative de Newton-Raphson est mise en place. Par ailleurs les relations de Newmark seront également utilisées pour exprimer les inconnues de l'équation d'équilibre du système (2.15) avec les inconnues en vitesse et appliquer la méthode de Newton-Raphson avec ces dernières. Cela conduit ainsi à définir le résidu de l'équation d'équilibre du système (2.15) à l'itération  $i$  noté  $\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)})$  par la relation suivante avec  $i$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) = \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} - p\dot{\mathbf{u}}_n) + \underbrace{\mathbf{f}^{\text{int}}(p\mathbf{u}_n + \frac{\beta\Delta t}{\gamma}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} - p\dot{\mathbf{u}}_n), \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)})}_{\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \quad (2.16)$$

La relation suivante est obtenue en utilisant un développement au premier ordre du résidu avec la série de Taylor :

$$\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)}) = \mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) + \frac{d\mathbf{r}}{d\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) [\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}] + O\left([\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}]^2\right) \quad (2.17)$$

Négliger les termes non-linéaires en  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$  et annuler l'approximation linéaire obtenue à l'itération  $(i+1)$  permet d'obtenir la relation suivante comme l'ont montré [GÉR 93, BEL 99].

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) [\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}] = -\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) \quad (2.18)$$

En notant que :

$$\frac{d \mathbf{r}}{d \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}} \left( \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right) = \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right) \frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}} \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right) \quad (2.19)$$

et que :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}} = \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \quad (2.20)$$

d'après le schéma de Newmark. Le système d'équations (2.21) est obtenu [HUG 79]. Il doit être résolu pour chaque itération de l'algorithme de Newton jusqu'à satisfaire un critère de convergence défini par l'utilisateur.

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(i)} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = p \mathbf{u}_n + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \left( \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - p \dot{\mathbf{u}}_n \right) \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} = \frac{1}{\gamma \Delta t} \left( \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - p \dot{\mathbf{u}}_n \right) \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec  $\mathbf{A}^{(i)}$  l'opérateur symétrique défini positif à l'itération  $i$ , et  $\mathbf{b}^{(i)}$  le second membre défini par les relations suivantes :

$$\mathbf{A}^{(i)} = \frac{1}{\gamma \Delta t} \left( \mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C}_t^{(i)} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_t^{(i)} \right), \text{ avec } \mathbf{K}_t^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right) \text{ et} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C}_t^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}} \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right)$$

$$\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}} \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right) - \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{M} \left( \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} - p \dot{\mathbf{u}}_n \right) = \mathbf{A}^{(i)} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{r} \left( \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right)$$

$\mathbf{K}_t^{(i)}$  est l'opérateur de rigidité tangent à l'itération  $i$  et  $\mathbf{C}_t^{(i)}$  est l'opérateur d'amortissement tangent à l'itération  $i$ . Le système (2.21) est mis sous la forme condensée (2.23) suivante pour la suite :

$$\mathbf{A}^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{nk}(i+1)} = \mathbf{b}^{\text{nk}(i)} \quad (2.23)$$

Avec

$$\mathbf{A}^{\text{nk}(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta\Delta t}{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_n^{\text{nk}(i)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^{(i)} \\ \mathbf{u}_n^{(i)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_n^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\text{nk}(i)} = \mathbf{r}_{n+1}^{\text{nk}(i)} + \mathbf{O}^{\text{nk}(i)}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{nk}(i)} - \mathbf{N}^{\text{nk}}\dot{\mathbf{u}}_n^{\text{nk}},$$

$$\mathbf{r}_{n+1}^{\text{nk}(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}^{\text{nk}(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(i)} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{N}^{\text{nk}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{M} & \mathbf{0} & -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{M} \\ \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1\right)\Delta t\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{2}\right)\Delta t^2\mathbf{I} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

La résolution du système (2.23) permet de réaliser une itération de Newton avec les schémas de Newmark. C'est pourquoi les quantités définies dans (2.24) sont indicées avec deux lettres *nk*.

Il peut être remarqué que l'équation d'équilibre du système (2.21) peut également être résolue en termes d'inconnues en accélération ou en déplacement par réarrangement du système avec les relations de Newmark. Si  $\beta$  est nul, la résolution avec les inconnues en déplacement dans l'équation d'équilibre devient impossible. Par contre le système (2.21) reste licite lorsque les inconnues de cette équation sont écrites en vitesses ou en accélérations. L'écriture sous cette forme (en vitesses) présente donc un intérêt de généralisation d'écriture pour coupler différents schémas d'intégration en temps de la famille de Newmark, quelque soit les paramètres de Newmark choisis. Le choix du paramètre  $\beta$  dans les relations de Newmark peut conduire à un algorithme implicite ou explicite du point de vue algébrique. Cependant, du fait des temps de calcul CPU et des contraintes de programmation, l'implémentation des codes permettant de résoudre ces deux types de système est en pratique différente. C'est une raison qui permet de justifier le choix d'une approche par couplage de codes. Deux versions simplifiées du système (2.21) dans le cadre de l'élasticité linéaire, avec l'hypothèse des petites perturbations et dans le cas explicite sont maintenant présentées, avant d'introduire des remarques générales sur la stabilité et la consistance des algorithmes de Newmark. Ces deux cas particuliers sont utilisés dans le cadre du couplage de codes mis en place ; c'est pourquoi ils sont détaillés.

#### 2.1.2.4 Système implicite dans le cadre de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations

Dans le cas de l'élasticité linéaire avec l'hypothèse des petites perturbations, les forces internes s'écrivent de la manière suivante :  $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) = \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1}$ . Sous ces hypothèses, le système (2.21) peut être simplifié, puisque la méthode de Newton-Raphson

converge exactement, dès la première itération. Ainsi, pour ce cas particulier, il peut se mettre sous la forme suivante, bien qu'il reste exacte du point de vue algébrique tel qu'il est écrit dans la relation (2.21) :

$$\mathbf{A}^{\text{nlk}} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{nlk}} - \mathbf{N}^{\text{nlk}} \dot{\mathbf{u}}_n \quad (2.25)$$

Avec

$$\mathbf{A}^{\text{nlk}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{nlk}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta\Delta t}{\gamma}\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_n^{\text{nlk}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n \\ \mathbf{u}_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{n+1}^{\text{nlk}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{nlk}} = \frac{\mathbf{M} + \beta\Delta t^2\mathbf{K}}{\gamma\Delta t} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N}^{\text{nlk}} = \begin{bmatrix} \Delta t\mathbf{K} - \mathbf{K}^{\text{nlk}} & \mathbf{K} & (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2\mathbf{K} - (1 - \gamma)\Delta t\mathbf{K}^{\text{nlk}} \\ (\frac{\beta}{\gamma} - 1)\Delta t\mathbf{I} & -\mathbf{I} & (\frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{2})\Delta t^2\mathbf{I} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{I} & \mathbf{0} & (1 - \frac{1}{\gamma})\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

L'indice *nlk* faisant référence à *Newmark linéaire*. Il peut être souligné que le coût de résolution de ce système est dominé par la résolution du système linéaire (2.25). Par ailleurs comme l'opérateur n'évolue pas, sa factorisation peut avantageusement être conservée d'un incrément à l'autre. On remarque également que la factorisation de l'opérateur  $\mathbf{A}^{\text{nlk}}$  revient à factoriser l'opérateur  $\mathbf{K}^{\text{nlk}}$ . Enfin il peut être remarqué que ce système reste licite même si  $\beta$  est nul, car son déterminant est égal au déterminant de  $\mathbf{K}^{\text{nlk}}$  qui est aussi non nul.

### 2.1.2.5 Système explicite

On peut voir dans l'équation (2.22) que lorsque  $\beta$  est choisi égal à zéro, l'opérateur  $\mathbf{A}^{(i)}$  devient égal à  $\frac{\mathbf{M}}{\gamma\Delta t}$  lorsque les forces internes ne dépendent pas de la vitesse. Ainsi, si  $\mathbf{M}$  est remplacé par la matrice des masses lumpée notée  $\mathbf{M}_{\text{lumpe}}$  [HIN 76], le système (2.21) devient explicite. Par ailleurs, les non-linéarités sont plus faciles à gérer car elles peuvent être évaluées à l'aide du prédicteur en déplacement. De plus, la matrice des masses est stationnaire. De ce fait, une seule itération de Newton-Raphson est suffisante pour converger exactement. Ainsi, le système (2.21) peut être réécrit de la manière simplifiée suivante bien qu'il reste licite du point de vue algébrique tel qu'il est écrit dans (2.21) pour ce cas particulier :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\text{lumpe}} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(p\mathbf{u}_n) \\ \mathbf{u}_{n+1} = p\mathbf{u}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = p\dot{\mathbf{u}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{cases} \quad (2.27)$$

On constate ainsi que le système (2.27) est explicite. Il nécessite simplement l'inversion de la matrice des masses qui est triviale puisqu'elle est rendue diagonale. Le temps passé à

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

Algorithme	type	$\beta$	$\gamma$	stabilité conditionnelle	ordre de précision
Différence centrée	E	0	$\frac{1}{2}$	2	2
Fox & Goodwin	I	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{6}$	2
Accélération linéaire	I	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{3}$	2
Accélération moyenne	I	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\infty$	2
Accélération moy. modifiée	I	$\frac{(1-\alpha)^2}{1}$	$\frac{1}{2} - \alpha$	$\infty$	1

**FIGURE 2.3:** Principaux schémas de la famille de Newmark en fonction du couple de paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ .

résoudre ce système est donc relativement plus court que celui passé à résoudre le système implicite (2.25). La répartition du coût du calcul est donc différente entre un algorithme implicite et un algorithme explicite. Cependant, dans ce cas où  $\beta$  est nul, les schémas de Newmark deviennent instables si le pas de temps choisi est au delà d'un certain pas de temps critique. Les limites de stabilité des schémas de Newmark, quel que soit le couple de paramètres choisi, sont donc présentées plus en détail.

### 2.1.2.6 Choix des paramètres de Newmark, consistance et stabilité

Le choix des deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  dans les relations de Newmark peut conduire à différents schémas d'intégration en temps et leurs propriétés peuvent différer suivant le couple choisi. La figure 2.3 illustre différents schémas d'intégration en temps bien connus, obtenus avec les schémas de Newmark en fonction du couple de paramètres.

#### Consistance :

Le vecteur d'état défini par  $\mathbf{e}_n = [\dot{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_{n+1}]$  est introduit pour s'intéresser à la propriété de consistance des schémas de Newmark. Ce vecteur permet de caractériser le système (2.15) à l'instant  $t_n$  dans un cas élastique linéaire en petite perturbation. En effet, les accélérations associées peuvent être calculées par l'équation d'équilibre dynamique. La consistance de la méthode d'intégration est basée sur la comparaison de ce vecteur d'état pris entre deux instants successifs. Il est dit que le schéma d'intégration est consistant si il vérifie la propriété suivante :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{e}}(t_n) \quad (2.28)$$

Cette condition est bien vérifiée par les relations de Newmark puisque qu'elle donne :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Cette propriété est nécessaire car elle entraîne la convergence de la solution numérique vers la réponse exacte associée à la discrétisation lorsque le pas de temps  $\Delta t$  tend vers 0.

### Stabilité :

Un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas de temps d'intégration strictement positif  $t_{cr}$ , tel que pour tout pas de temps  $\Delta t \in [0, t_{cr}]$ , une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification non croissante de ce vecteur d'état  $\mathbf{e}_{n+j}$  à l'instant  $t_{n+j}$ . Cette propriété de stabilité des algorithmes de la famille de Newmark est classiquement présentée à partir d'un système linéaire non amorti par une analyse spectrale. Une analyse détaillée est donnée par Géradin et Rixen dans [GÉR 97] et par Hughes dans [HUG 87]. Un résumé des propriétés spectrales d'un problème de vibration libre non amorti est présenté dans ce paragraphe. Pour cela, les deux relations de Newmark (2.13) sont multipliées par la matrice de masse. Par ailleurs les deux relations provenant de l'équation d'équilibre linéaire libre d'effort extérieur aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  sont écrites. En combinant ces quatre relations (les deux relations de Newmark et les deux relations d'équilibre) la relation de récurrence suivante liant le vecteur d'état de l'instant  $t_n$  à celui de l'instant  $t_{n+1}$  est obtenue.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \gamma \Delta t \mathbf{K} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \mathbf{K} & \Delta t \mathbf{M} \\ (\gamma - 1) \Delta t \mathbf{K} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_n \quad (2.30)$$

Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{H} \mathbf{e}_n \quad (2.31)$$

Avec  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{H}_1$  la matrice d'amplification où :

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \gamma \Delta t \mathbf{K} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \mathbf{K} & \Delta t \mathbf{M} \\ (\gamma - 1) \Delta t \mathbf{K} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

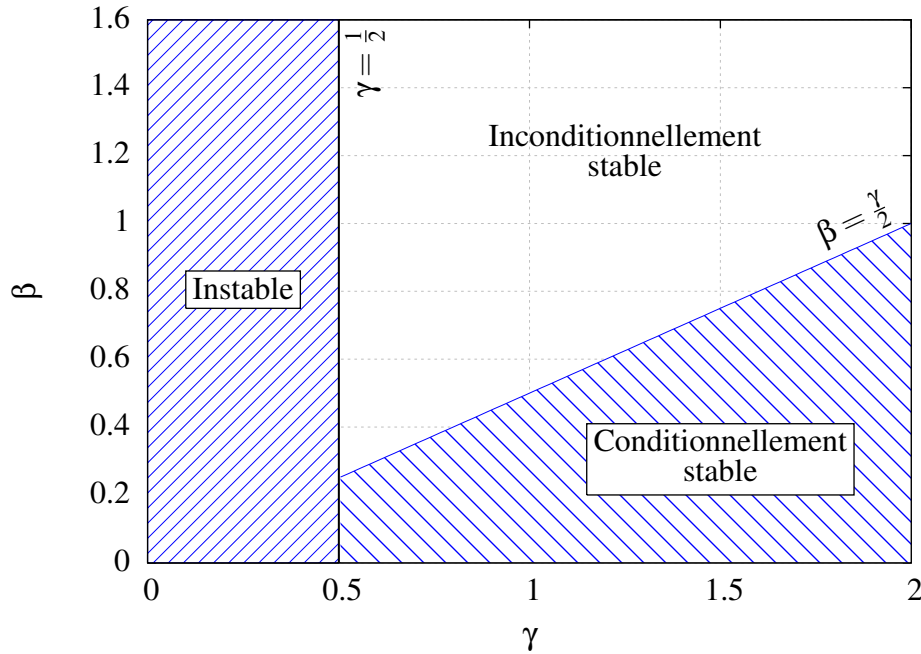
On comprend donc que les valeurs propres de cette dernière ne doivent pas dépasser 1, sinon la propriété de stabilité n'est pas vérifiée. Son analyse spectrale permet ainsi de dégager les conditions de stabilité de l'algorithme de Newmark. Pour cela, l'équation (2.30) est découplée et l'analyse est appliquée sur le mode le plus critique de la structure. On note sa pulsation naturelle  $\omega_{max}$ . L'équation (2.30) peut alors se réduire à :

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \xi^2 & \frac{\xi^2}{\omega_{max}^2 \Delta t} \\ -\omega_{max}^2 \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2} \xi^2\right) & 1 - \gamma \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Avec  $\xi^2 = \frac{\Delta t^2 \omega_{max}^2}{1 + \beta \omega_{max}^2 \Delta t^2}$

L'étude spectrale de la matrice de la relation 2.33 permet ainsi de dégager les conditions de stabilité de l'algorithme de Newmark synthétisées sur la figure 2.4 et décrites ci-après. L'algorithme de Newmark est stable dans les conditions suivantes :





**FIGURE 2.4:** Diagramme de stabilité des schémas d'intégration en temps de la famille de Newmark.

–  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $2\beta - \gamma \geq 0$ .

–  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $2\beta - \gamma < 0$  et le pas de temps vérifie la condition suivante :

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{1}{\omega_{max}} \frac{2}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} \quad (2.34)$$

Avec  $\omega_{max}$  la pulsation maximale de la structure.

**Bilan énergétique :**

Une autre méthode d'analyse des schémas numériques consiste à étudier l'évolution de l'énergie du système entre deux pas de temps. Dans le cas des schémas de Newmark, une expression explicite de ce bilan d'énergie est possible. Elle peut être utilisée pour identifier les conditions de stabilité de ce dernier. Pour cela, l'équation d'équilibre dynamique élastique semi-discrétisée et pré-muultipliée par les vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  est considérée, ce qui donne la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \right) = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^{ext} \quad (2.35)$$

Elle exprime la variation d'énergie mécanique ( $\mathcal{E}$ ) du système en fonction du travail des forces extérieures. L'énergie mécanique est définie comme la somme de l'énergie cinétique ( $\mathcal{K}$ ) et de l'énergie de déformation élastique ( $\mathcal{P}$ ).

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{P} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.36)$$

Après discrétisation en temps, il est intéressant d'observer l'évolution du bilan énergétique 2.35 entre deux instants sans présence de forces extérieures  $\mathbf{f}^{\text{ext}} = 0$ . Dans ce cas particulier, il est attendu que l'énergie mécanique du système soit conservée. Cependant le schéma d'intégration peut altérer cette conservation et trois cas peuvent se distinguer. En notant  $\Delta\{\mathcal{E}\} = \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathcal{K}_{u+1} - \mathcal{K}_u + \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n$  on a :

- Si  $\Delta\mathcal{E} < 0$ , le schéma numérique introduit de la dissipation numérique non physique dans le système. En conséquence l'énergie mécanique du système diminue. Il est couramment toléré qu'un schéma d'intégration numérique soit dissipatif dans la mesure où la valeur de la dissipation reste faible devant l'énergie mécanique du système.
- Si  $\Delta\mathcal{E} = 0$ , le schéma numérique est conservatif et il ne perturbe pas le bilan d'énergie globale du système.
- Si  $\Delta\mathcal{E} > 0$ , le schéma numérique introduit de l'énergie numérique non physique dans le système. Cela correspond à un schéma d'intégration en temps instable.

En appliquant cette méthode au schéma de Newmark, il peut être montré que le bilan énergétique de ce schéma s'écrit de la manière suivante [HUG 87] dans le cas sans force extérieure :

$$\Delta \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \right\} = - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left[ \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \Delta \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right] \quad (2.37)$$

En présence de forces extérieures il faut ajouter le travail les concernant ( $\mathcal{W}$ ) dans le second membre de cette dernière, défini par la relation suivante :

$$\mathcal{W} = \Delta \mathbf{u}^T \left[ \langle \mathbf{f}^{\text{ext}} \rangle + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \Delta \mathbf{f}^{\text{ext}} \right]. \quad (2.38)$$

Avec  $\langle \mathbf{f}^{\text{ext}} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} + \mathbf{f}_n^{\text{ext}})$ .

Dans le cas général, ce schéma ne conserve pas l'énergie totale définie par la relation 2.36, mais la quantité  $\mathcal{T}^*$  définie par la relation suivante :

$$\mathcal{T}^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.39)$$

Un terme conservatif introduit par le schéma de Newmark vient donc s'ajouter à l'énergie mécanique  $\mathcal{T}$ . De plus, l'éventuelle dissipation numérique ( $\mathcal{D}$ ) introduite par ce schéma

peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\mathcal{D} = - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left[ \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \Delta \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right] \quad (2.40)$$

Ainsi il peut être observé que :

- Si  $\gamma = \frac{1}{2}$  la quantité  $\mathcal{T}^*$  est conservée.
- Si  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , le schéma de l'accélération moyenne est obtenu et l'énergie totale est conservée.
- Si  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $2\beta - \gamma = 0$ , l'énergie totale  $\mathcal{T}$  décroît entre deux instants.
- Si  $\gamma > \frac{1}{2}$  et  $2\beta > \gamma$ , l'énergie  $\mathcal{T}^*$  décroît entre deux instants.

Un désavantage du schéma de Newmark est que l'introduction de dissipation numérique, utile pour traiter les problèmes numériques causés par les hautes fréquences, entraîne une baisse de précision. C'est pourquoi des développements ont été réalisés afin de palier à cet inconvénient. Ils ont conduit aux  $\alpha$ -méthodes où l'équilibre est satisfait en moyenne, avec le paramètre de pondération  $\alpha$ , entre l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Il existe trois algorithmes de ce type, l'algorithme avec pondération des forces internes et des forces extérieures proposé par Hilber, Hughes et Taylor [HIL 77], l'algorithme avec pondération des efforts d'inertie proposé par Wood, Bossak et Zienkiewicz [WOO 80] et la méthode  $\alpha$  généralisée, proposée par Chung et Hulbert [CHU 93], dans laquelle les forces internes et les efforts extérieurs, ainsi que les efforts d'inertie sont pondérés séparément par deux paramètres distincts, qui sont respectivement notés  $\alpha_m$  et  $\alpha_f$  comme montré ci-dessous.

$$(1 + \alpha_m) \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \alpha_m \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n = (1 + \alpha_f) (\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}) - \alpha_f (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}}) \quad (2.41)$$

Les relations d'approximation des déplacements  $\mathbf{u}_{n+1}$  et vitesses  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  sont identiques à celles des schémas de Newmark, d'où la simplicité d'implémentation de tels algorithmes dans un code de calcul utilisant déjà les schémas Newmark. Afin d'optimiser la dissipation haute fréquence, une version explicite de la méthode  $\alpha$ -généralisée a été ensuite présentée par Chung et Hulbert [HUL 96].

L'ensemble des schémas d'intégration temporel cités précédemment, basés sur les schémas de Newmark, présentent des inconvénients pour le traitement des hautes fréquences induites par la discrétisation spatiale, ce qui peut altérer la qualité des résultats d'un calcul, notamment par l'introduction d'énergie numérique parasite [ERL 02]. Afin de remédier à cela, une attention particulière a été portée au développement de schémas d'intégration temporelle qui permettent d'améliorer la qualité des résultats d'un calcul en imposant la conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ou de l'énergie dans le cas général. L'un des premiers algorithmes à assurer la conservation des moments linéaires et angulaires ainsi que la conservation de l'énergie du système a été proposé par Simo et Tarnow [SIM 92a]. Cet algorithme, appelé Energy Momentum Conserving Algorithms, ou EMCA, cherche à vérifier les équations du mouvement au milieu

de chaque pas de temps  $t_{n+\frac{1}{2}}$ . De plus, [SIM 92b] a fourni une preuve de la stabilité inconditionnelle du schéma au point milieu, pour tout problème en dynamique non-linéaire où la loi de comportement dérive d'un potentiel (par exemple hyperélasticité non-linéaire).

Afin d'éviter l'excitation des modes numériques de hautes fréquences qui peuvent provoquer des oscillations non physiques et des problèmes de convergence lors des itérations, Armero et Romero ont proposé d'introduire de la dissipation numérique dans les schémas du point milieu [ARM 01a, ARM 01b]. Cet algorithme appelé Energy Dissipative Momentum Conserving algorithm (EDMC) préserve la conservation des moments linéaires et angulaires, et dissipe toujours de l'énergie, contrairement aux méthodes  $\alpha$ -généralisées. Ce type d'approche présente un grand intérêt notamment pour les problèmes de contact et des problèmes non-linéaires en élastodynamique. L'inconvénient de ces schémas est qu'ils dépendent de la loi de comportement utilisée, et ils sont par conséquent difficilement généralisables. Plus récemment, on peut citer les algorithmes d'intégration en temps, en dynamique des structures linéaires, proposés par Krenk avec conservation exacte de l'énergie [KRE 08, KRE 07, KRE 06a]. Il propose notamment des schémas avec des ordres de convergence élevés et une maîtrise de la dissipation numérique dans les hautes fréquences, sans altérer les basses fréquences [KRE 06b].

Un point important à souligner ici est que, quel que soit le schéma numérique d'intégration en temps utilisé, la résolution du système d'équations différentielles (2.12) discrétisé en temps aboutit à la résolution d'une succession de systèmes linéaires associés à un intégrateur temporel implicite ou explicite (en pratique, la matrice associée au schéma explicite est diagonale, et donc ne nécessite pas de résolution de système linéaire). Certaines techniques de résolution d'un système linéaire implicite sont ainsi proposées dans ce qui suit. Cela servira, d'une part, à avoir différents ordres de grandeur concernant la complexité algorithmique en fonction de la stratégie de résolution choisie. D'autre part, cela servira à choisir la technique de résolution du problème d'interface qui interviendra dans la technique de couplage de codes mise en place.

## 2.2 Techniques de résolution d'un système linéaire

Dans cette section on s'intéresse à différentes techniques de résolution d'un système linéaire qui à la forme suivante :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.42)$$

Avec  $\mathbf{A}$  une matrice inversible de dimension  $n \times n$ ,  $\mathbf{x}$  le vecteur inconnu de dimension  $n$  et  $\mathbf{b}$  un vecteur connu constituant le second membre de l'équation linéaire. Les méthodes de résolution directe et itérative sont deux classes de méthodes qui permettent de résoudre ce type de système linéaire (2.42). Les méthodes de résolution itératives se différencient des méthodes directes par une recherche approchée de la solution. En ce sens, la solution du système (2.42) est recherchée pas à pas et l'utilisateur s'autorise une erreur notée  $\varepsilon$  qu'il définit vis-à-vis de la solution exacte. Les méthodes itératives permettent ainsi

un compromis entre le temps de calcul accordé et la qualité de la solution désirée alors qu'une méthode directe retourne la solution exacte du problème, aux erreurs numériques près, liées à la troncature de représentation des nombres. D'avantages de détails sur ces méthodes peuvent être trouvés dans [DUR 08].

### 2.2.1 Méthode de résolution directe

Une méthode de résolution directe couramment employée est constituée de deux étapes. La première consiste à trouver la factorisation de la matrice  $\mathbf{A}$  et la seconde consiste à résoudre le système factorisé qui en découle.

La factorisation vise à trouver une décomposition de la matrice  $\mathbf{A}$  sous la forme d'un produit d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale sans termes nuls notée  $\mathbf{L}$  avec celle d'une matrice triangulaire supérieure à diagonale non-nulle notée  $\mathbf{U}$ . Les techniques de Gauss Jordan, de Crout ou encore de Cholesky peuvent par exemple être utilisées pour l'obtenir. Leur choix dépend des caractéristiques de  $\mathbf{A}$  (symétrique/non-symétrique, pleine/creuse...). Il est important de noter que lorsque  $\mathbf{A}$  est creuse, ce qui est souvent le cas avec la méthode des éléments finis en mécanique, la largeur de bande, notée  $b$ , de la matrice triangulée peut augmenter [GUE 04]. Cela peut donc poser des problèmes de stockage en mémoire. C'est pourquoi différentes stratégies sont développées afin de le limiter. La méthode multifrontale, qui consiste à renuméroter les inconnues du problème de manière à trouver un remplissage minimum, en est un exemple. La complexité algorithmique de l'étape de factorisation est en première approximation en  $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$  pour une matrice  $\mathbf{A}$  pleine, de taille  $n \times n$ , et en  $O(2nb^2)$  pour une matrice de même taille mais creuse avec  $b$  sa largeur de bande.

Une fois l'étape de factorisation accomplie, le système 2.42 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad (2.43)$$

L'intérêt de procéder ainsi est double. D'abord, la résolution est rapide. Elle consiste effectivement à réaliser la résolution de deux systèmes triangulaires. Le premier est triangulaire inférieur il permet d'obtenir un vecteur intermédiaire de calcul qui est utilisé pour résoudre le deuxième système triangulaire supérieur qui donne la solution. Et d'autre part, la factorisation peut avantageusement être conservée pour une résolution du système 2.42 avec d'autres seconds membres  $\mathbf{b}$ . Cela peut servir par exemple dans la résolution du système 2.25 page 37, dans lequel la matrice  $\mathbf{A}^{nkl}$  est constante durant toute la simulation. La complexité algorithmique de cette étape est en première approximation en  $O(2n^2)$ .

### 2.2.2 Méthodes de résolution itératives

Les méthodes itératives permettent en général de construire une suite de vecteurs qui tendent vers la solution du système (2.42) au fur et à mesure des itérations. La  $i^{\text{ème}}$  itération conduit à l'approximation  $\mathbf{x}^{(i)}$  de la solution. Le résidu associé est alors noté

$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)})$  et l'initialisation est notée  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Pour présenter différentes méthodes itératives la matrice  $\mathbf{A}$  est écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & -\mathbf{F} \\ & \mathbf{0} & \\ -\mathbf{E} & & \ddots \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Diag}} \quad (2.44)$$

Ainsi, les principales méthodes peuvent se présenter sous la forme suivante :

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{G}\mathbf{r}^{(i)} \quad (2.45)$$

Avec :

Méthode de Jacobi :	$\mathbf{G} = \mathbf{Diag}^{-1}$	
Méthode de Jacobi avec relaxation :	$\mathbf{G} = w\mathbf{Diag}^{-1}$	$(0 < w < 2)$
Méthode de Gauss-Seidel :	$\mathbf{G} = (\mathbf{Diag} - \mathbf{E})^{-1}$	
Méthode de Gauss-Seidel avec relaxation :	$\mathbf{G} = w(\mathbf{Diag} - \mathbf{E})^{-1}$	$(0 < w < 2)$

Dans la pratique, la méthode de Gauss-Seidel converge asymptotiquement deux fois plus vite que la méthode de Jacobi. On peut améliorer la vitesse de convergence en choisissant un paramètre de relaxation  $w$  adapté au problème considéré.

L'idée des méthodes de gradients est d'augmenter la vitesse de convergence en définissant un incrément  $\Delta\mathbf{x}$  en fonction d'une matrice qui dépend du résultat des itérations, et dont les paramètres sont optimisés suivant certains critères. Elles fonctionnent pour des matrices symétriques définies positives et sont des cas particuliers des méthodes de Krylov qui sont développées par exemple dans [SAA 03] et dans [GOS 03]. La méthode du gradient conjugué converge, en théorie, exactement vers la solution en un nombre fini  $n$  d'itérations, ce qui la rapproche des méthodes directes. De plus elle nécessite uniquement un produit matrice vecteur, ce qui est très intéressant du point de vue du temps CPU et du stockage en mémoire. Ceci permet effectivement de tirer avantageusement partie du creux de la matrice  $\mathbf{A}$  lorsqu'elle l'est. Cependant, les erreurs d'arrondis numériques et un mauvais conditionnement de la matrice peuvent entraîner une dégradation de l'orthogonalité des vecteurs au cours des itérations. Une procédure de réorthogonalisation peut alors être nécessaire. Il est également souvent intéressant de pré-conditionner la matrice  $\mathbf{A}$  pour augmenter la vitesse de convergence de l'algorithme du gradient conjugué. Le conditionnement d'une matrice est défini par le rapport de la valeur propre maximale sur la valeur propre minimale. On a ainsi :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)}{\min_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)} \quad (2.46)$$

Le pré-conditionnement consiste alors à trouver une matrice notée  $\mathbf{C}$ , facile à déterminer, de manière à faire tendre le conditionnement de  $\mathbf{CA}$  vers 1. On comprend donc que

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

---

le préconditionneur optimal est la matrice  $\mathbf{C}_{\text{opti}} = \mathbf{A}^{-1}$ . Mais le calcul de cette matrice a un coût numérique supérieur à la résolution du système linéaire lui-même. Le choix du pré-conditionneur résulte donc d'un compromis entre le temps de son évaluation et l'accélération de convergence qu'il engendre. Un pré-conditionneur relativement simple à mettre en œuvre est le préconditionnement de Jacobi. Dans ce cas, on pose  $\mathbf{C} = \mathbf{Diag}^{-1}$ . L'algorithme du gradient conjugué pré-conditionné est présenté dans 1. Dans le cas où  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  on retrouve l'algorithme du gradient conjugué. La complexité algorithmique

---

### Algorithme 1 Algorithme du gradient conjugué préconditionné

---

Choisir  $\mathbf{x}^{(0)}$  et  $\varepsilon$  :  
 Calculer  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$ , et poser  $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{C}\mathbf{r}^{(0)}$ ,  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}$   
**Pour**  $i = 0$  to  $i = m - 1$  **Faire**  
      $\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(i)}$  (Calcul du produit "opérateur direction de recherche")  
      $\alpha^i = \langle \mathbf{g}^{(i)} | \mathbf{r}^{(i)} \rangle / \langle \mathbf{v}^{(i)} | \mathbf{p}^{(i)} \rangle$  (paramètre optimal de descente)  
      $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha^i \mathbf{p}^{(i)}$  (nouvel itéré)  
      $\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - \alpha^i \mathbf{v}^{(i)}$  (nouveau résidu)  
     **Si** (Test d'arrêt  $\langle \mathbf{r}^{(i+1)} | \mathbf{r}^{(i+1)} \rangle < \varepsilon$  (par exemple) ) **Alors**  
         stop  
     **Fin si**  
      $\mathbf{g}^{(i+1)} = \mathbf{C}\mathbf{r}^{(i+1)}$  (résidu pré-conditionné)  
      $\beta^{i+1} = \langle \mathbf{g}^{(i+1)} | \mathbf{r}^{(i+1)} \rangle / \langle \mathbf{g}^{(i)} | \mathbf{r}^{(i)} \rangle$  (paramètre de conjugaison optimal)  
      $\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{g}^{(i+1)} + \beta^{i+1} \mathbf{p}^{(i)}$  (nouvelle direction de descente)  
**Fin pour**

---

de cette méthode est, par passage à la limite, dictée par le nombre d'opérations du produit entre la matrice  $\mathbf{A}$  et la direction de recherche  $\mathbf{p}^{(i)}$ , ainsi que le calcul du résidu pré-conditionné si la matrice de pré-conditionnement  $\mathbf{C}$  n'est pas diagonale. Si elle l'est, cela conduit à une complexité en  $O(mn^2)$  pour une matrice  $\mathbf{A}$  pleine et en  $O(mnb)$  pour une matrice  $\mathbf{A}$  bande avec  $b$  la largeur de bande de  $\mathbf{A}$  et  $m$  le nombre d'itération requis pour la convergence. Il faut ajouter à cela le coût de réorthogonalisation qui peut être significatif.

Comme il est montré dans la suite, la méthode de couplage choisie nécessite de résoudre un problème d'interface à chaque pas de temps. De plus un grand nombre de pas de temps doit être réalisé. Par ailleurs, l'opérateur d'interface qui intervient dans ce problème est dense et surtout constant. Ainsi il est préférable du point de vue du temps CPU d'utiliser une méthode directe dans laquelle la factorisation ou l'inverse est calculée ( $n$  résolution du système factorisé) plutôt que d'utiliser une méthode itérative qui nécessiterait une résolution pour chaque pas de temps.

## 2.3 Bilan

Plusieurs éléments peuvent être soulignés. La résolution approchée du problème de référence en mécanique nous conduit à la résolution d'une succession de systèmes linéaires associés à des intégrateurs temporels implicites ou explicites. Avec les schémas de Newmark, le coût de résolution du système implicite (2.21) devient très rapidement dominant, dès lors que le problème a un nombre de degrés de liberté important, dans le cas où le paramètre  $\beta$  est non-nul. Lorsque  $\beta$  est choisi nul, le système (2.21) est généralement rendu diagonal. L'inversion de l'opérateur du système (2.21) qui est rendu diagonal est donc triviale et relativement peu coûteuse en temps de calcul par rapport au cas où  $\beta \neq 0$ . De ce fait, les ordres de grandeurs des coûts de calcul changent d'un système explicite à un système implicite. C'est pourquoi, des codes de calcul dédiés et optimisés sont préférables à un code unique traitant les deux situations. Un algorithme explicite est effectivement toujours plus "rapide" en temps de calcul sur un incrément. Cependant lorsque l'on tient compte de l'aspect temporel et de la condition de stabilité de l'algorithme explicite, il peut être plus intéressant, du point de vue du temps de calcul, de faire un grand pas de temps implicite plutôt qu'un nombre important de petits pas de temps explicites. Nous allons donc présenter maintenant différentes techniques qui sont potentiellement admissibles pour coupler deux codes de calcul implicite et explicite.

## 2.4 Méthodes de ré-analyse

Les méthodes de ré-analyse sont des méthodes qui permettent d'affiner la modélisation d'une zone de la structure à moindre coût. Elles ont l'avantage d'être relativement simples de mise en œuvre.

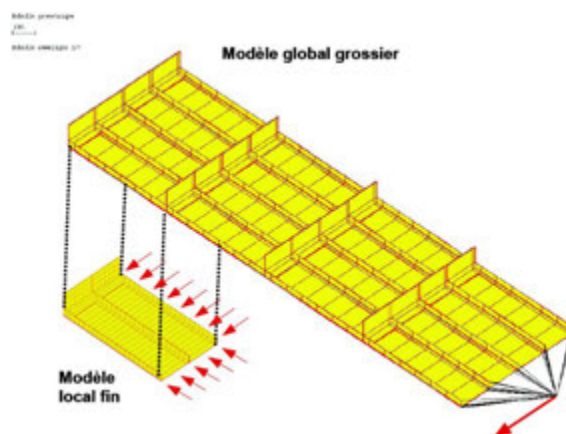
### 2.4.1 Méthodes d'analyse descendantes

Les méthodes d'analyse descendantes sont classiquement utilisées dans l'industrie pour étudier le comportement d'une zone locale de la structure. Le principe est alors de réaliser un premier calcul sur la structure globale considérée, maillée grossièrement, puis de définir une zone locale pour laquelle un calcul plus précis est nécessaire. Un maillage raffiné, comportant tous les détails utiles, et une modélisation adaptée du matériau (plasticité, endommagement) sont alors utilisés pour mener un nouveau calcul. Les conditions aux limites sont alors directement tirées du calcul global et peuvent être soit, des conditions en déplacement, soit en effort. Ce type de méthode permet ainsi de réaliser à moindre coût des simulations sur des zones localisées et sensibles d'une structure. Cependant, l'effet de la zone d'intérêt sur l'ensemble de la structure n'est pas pris en compte, le transfert d'informations ne se faisant que du maillage grossier vers le maillage local. Ces méthodes sont donc peu adaptées pour des problèmes dynamiques. Un exemple d'utilisation de cette méthode est donnée dans [CRE 09] pour évaluer son potentiel vis-à-vis du calcul de flambement sur panneau raidi. La figure 2.5 montre le cas test ainsi que les deux



## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

---



**FIGURE 2.5:** Exemple de cas test utilisé pour évaluer les méthodes de ré-analyse vis-à-vis du calcul de flambement sur panneau raidi. Source : [CRE 09].

maillages qui y sont utilisés.

### 2.4.2 Méthodes d'analyse globale/locale

Les méthodes d'analyse global/local permettent de prendre en compte l'influence du comportement local sur le reste de la structure. Différentes approches permettant le dialogue des deux échelles ont été mises en place. Dans [WHI 91, RAN 90], une méthode d'analyse locale/globale est proposée. Deux maillages sont réalisés : un maillage global de l'ensemble de la structure, et un maillage local de la zone d'intérêt. Ce second maillage peut non seulement être raffiné, mais comporter également des détails structuraux qui n'apparaissent pas dans le modèle global. Les maillages doivent cependant être compatibles à l'interface dans [WHI 91].

Les étapes de calcul sont les suivantes :

- 1°) Résolution du problème sur le maillage global ;
- 2°) Résolution du problème sur le maillage local : les conditions aux limites imposées sur le bord du domaine sont les déplacements interfaciaux issus de l'étape globale.
- 3°) Calcul du résidu d'équilibre entre les deux solutions
- 4°) Calcul de la correction à apporter à la solution global

Ces étapes sont répétées jusqu'à satisfaire un critère de convergence. La convergence de cette méthode est constatée à travers divers exemples pour lesquels le maillage local introduit une perte de raideur de la structure, notamment dans le cas de la présence de trous ou de l'utilisation de lois d'endommagement. Dans le cas où le maillage local conduit à un raidissement de la structure, la convergence n'est plus assurée. La correction apportée à la solution locale doit alors être relaxée.

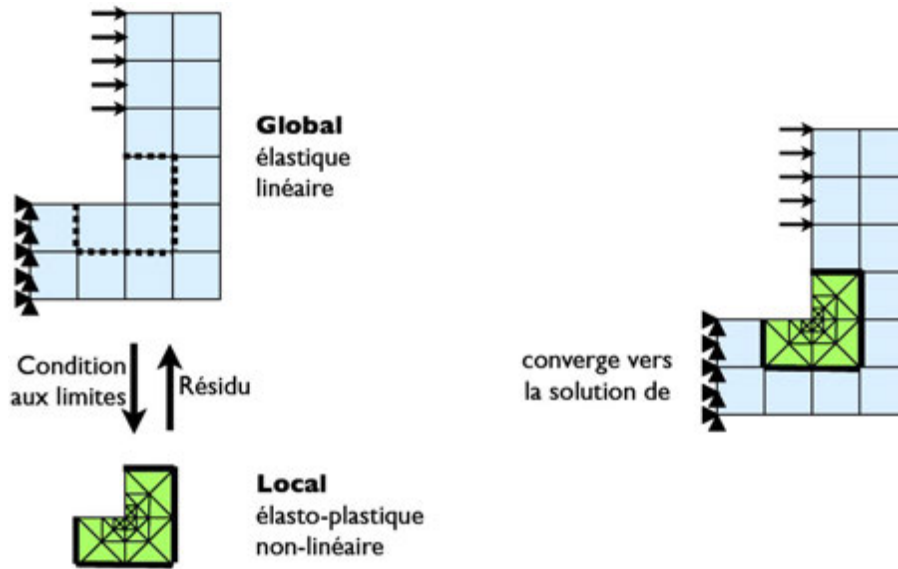


FIGURE 2.6: Schéma de principe de la méthode d'analyse globale locale. Source [GEN 09b].

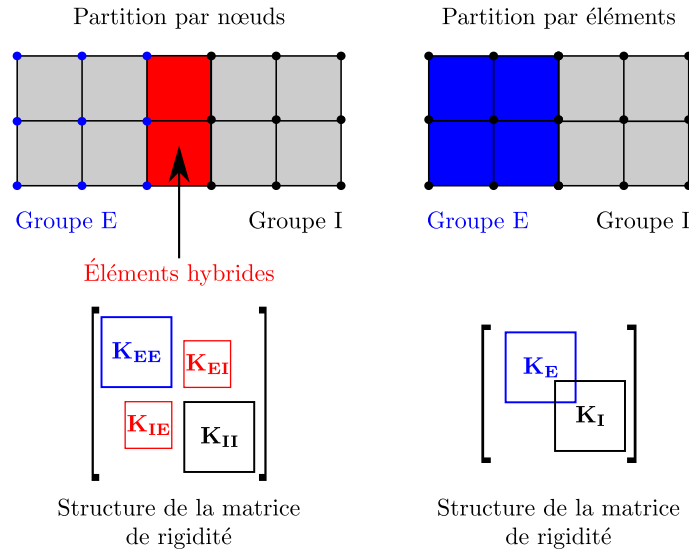
Dans [GEN 09a, GEN 09b], une approche similaire est adoptée afin de mettre en place une méthode de calcul locale/globale non intrusive du point de vue de l'implémentation dans le code de calcul utilisé. Un exemple de cas test utilisé dans ce travail est proposé sur la figure 2.6. La solution du problème est alors définie de telle sorte que, dans la zone de superposition des modèles, la solution soit celle du maillage local. Dans le reste de la structure, la solution est celle du maillage global. Deux types de raccord sont définis : le premier en déplacement et le second mixte. L'objectif principal de l'approche mise en place est de pouvoir utiliser une méthode d'analyse globale/locale dans des logiciels commerciaux, en particulier Abaqus.

Aucune modification n'a effectivement été réalisée dans ce dernier, la stratégie de couplage se fait de l'extérieur. Cependant cette méthode est limitée par son efficacité. Il n'y a effectivement aucun accès depuis l'extérieur du code pour conserver la factorisation de l'opérateur de rigidité. Ce point est très pénalisant pour ce type de méthode du point de vue du temps de calcul.

## 2.5 Méthodes de partitionnement

Les méthodes de partitionnement consistent à créer des régions dans un maillage global réalisé préalablement, puis un traitement spécifique du système d'équilibre est appliquée dans chacune d'elles. Il existe deux manières de créer les régions. Le partitionnement par nœuds et celui par éléments. Pour simplifier, deux partitions sont considérées. Une illustration de ces deux stratégies de partitionnement avec deux partitions est proposée sur la figure 2.7.

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite



**FIGURE 2.7:** Illustration des principes de partitionnement par nœuds et par éléments dans un maillage.

Le partitionnement par nœuds consiste à déclarer une partie des nœuds du maillage dans une partition et la partie complémentaire dans l'autre. Ainsi des éléments dit hybrides peuvent avoir des nœuds dans l'une et l'autre des partitions. Le partitionnement par éléments consiste à déclarer une partie des éléments du maillage dans une partition et la partie complémentaire dans l'autre.

### 2.5.1 Partition par éléments

#### 2.5.1.1 Méthode I-E

La méthode I-E ou méthode mixte en temps a été proposée dans [HUG 78] puis étendue au cadre non-linéaire dans [HUG 79]. Dans cette méthode, une partition de la structure par groupes d'éléments en deux partitions est réalisée, comme montré sur la partie de droite de la figure 2.7. Une partition est nommée E et l'autre est nommée I. Cette méthode consiste alors à modifier l'équation d'équilibre des éléments de la partition nommée E pour la rendre explicite. Dans la partition complémentaire, tout se passe classiquement. Ainsi le système d'équilibre de dynamique discrétisée avec les schémas de Newmark du groupe I peut s'écrire de manière classique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}0} &= \mathbf{M}_{\mathbf{I}}^{-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{I}0}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\mathbf{I}}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{\mathbf{I}0}, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}0})) \\
 \forall n \in \llbracket 0, n_{\text{step}} - 1 \rrbracket, \\
 \begin{cases} \mathbf{M}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n+1} + \mathbf{f}_{\mathbf{I}}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{\mathbf{I}n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n+1}) = \mathbf{f}_{\mathbf{I}n+1}^{\text{ext}} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{I}n+1} = {}^p \mathbf{u}_n + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} (\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n+1} - {}^p \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n+1} = {}^p \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}n+1} \end{cases} \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Avec les notations introduites dans l'équation (2.15), page 34, particularisées au groupe d'éléments I par l'indice I. Le système d'équilibre de dynamique discrétisé avec

les schémas de Newmark du groupe E est modifié pour rendre l'équation d'équilibre explicite. Le système proposé pour traiter les éléments du groupe E est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{E_0} &= \mathbf{M}_E^{-1} (\mathbf{f}_{E_0}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_E^{\text{int}}(\mathbf{u}_{E_0}, \dot{\mathbf{u}}_{E_0})) \\ \forall n \in \llbracket 0, n_{\text{step}} - 1 \rrbracket, \\ \begin{cases} \mathbf{M}_E \ddot{\mathbf{u}}_{E_{n+1}} &= \mathbf{f}_{E_{n+1}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_E^{\text{int}}({}^p\mathbf{u}_{E_n}, {}^p\dot{\mathbf{u}}_{E_n}) \\ \mathbf{u}_{E_{n+1}} &= {}^p\mathbf{u}_n + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} (\dot{\mathbf{u}}_{E_{n+1}} - {}^p\dot{\mathbf{u}}_{E_n}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{E_{n+1}} &= {}^p\dot{\mathbf{u}}_{E_n} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{E_{n+1}} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Avec les notations introduites dans l'équation (2.15), page 34, particularisées au groupe E par l'indice E. De plus, la matrice des masses  $\mathbf{M}_E$  est lumpée pour ce groupe d'éléments. Par ailleurs, le choix des paramètres de Newmark et du pas de temps est unique dans toute la structure, c'est pourquoi aucune distinction d'indice n'est faite sur le pas de temps,  $\gamma$  et  $\beta$ .

L'assemblage de ces deux systèmes permet d'obtenir le système I-E à résoudre. La stabilité de cette méthode a été démontrée par une approche énergétique dans le cadre linéaire. [LIU 82] ont ensuite proposé la méthode mE-I. La méthode mE-I consiste à intégrer les éléments des différents groupes avec un pas de temps différent. Le groupe des éléments implicites est actualisé une fois avec un grand pas de temps noté  $\Delta T$ , tandis que le groupe des éléments explicites est actualisé  $m$  fois avec un petit pas de temps noté  $\Delta t = \frac{1}{m} \Delta T$ . La stabilité de la méthode mE-I est vérifiée numériquement dans certains cas particuliers.

## 2.5.2 Partition par nœuds

[BEL 79] ont proposé les méthodes mixtes  $E-E$ ,  $E-I$ ,  $E^m-E$ ,  $I-I$ . Pour cela deux groupes de nœuds sont réalisés le premier est noté avec un indice 1 et le second avec un indice 2. Cela permet d'obtenir le système suivant à partir de la discrétisation en espaces, en supposant un vecteur des forces internes qui dépend uniquement du déplacement.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{\text{int}}(\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{f}_2^{\text{int}}(\mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{\text{ext}}(t) \\ \mathbf{f}_2^{\text{ext}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Le schéma d'intégration en temps de ces méthodes est écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \beta_I \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{h}_n \text{ pour l'implicite (I)} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \beta_E \mathbf{u}_n + \alpha_E \mathbf{u}_n + \mathbf{h}_{n-1} \text{ pour l'explicite (E)} \quad (2.51)$$

Le vecteur  $\mathbf{h}_n$  dépend des valeurs passées de  $\mathbf{u}$  et de ses dérivées.  $\mathbf{u}_{1_0}$  et  $\mathbf{u}_{2_0}$  sont supposés connus.

Dans les quatre méthodes proposées, la matrice des masses est rendue diagonale. On note  $\mathbf{M}_1$  celle du domaine 1 et  $\mathbf{M}_2$  celle du domaine complémentaire. Les méthodes obtenues se déclinent alors comme suit :

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

---

**Méthode E – E :** dans cette méthode, chaque domaine possède le même pas de temps et ils sont intégrés avec un schéma explicite dont les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont potentiellement différents. L'algorithme qui en découle est le suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1_{n+1}} = \beta_1 \mathbf{M}_1^{-1} \left( \mathbf{f}_{1_{n+1}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_1^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_n}, \mathbf{u}_{2_n}]^T \right) \right) + \alpha_1 \mathbf{u}_{1_n} + \mathbf{h}_{1_{n-1}} \\ \mathbf{u}_{2_{n+1}} = \beta_2 \mathbf{M}_2^{-1} \left( \mathbf{f}_{2_{n+1}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_2^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_n}, \mathbf{u}_{2_n}]^T \right) \right) + \alpha_2 \mathbf{u}_{2_n} + \mathbf{h}_{2_{n-1}} \end{cases} \quad (2.52)$$

Chaque équation peut ainsi être résolue en parallèle, pas de temps par pas de temps. Cette méthode est stable si le pas de temps global respecte le critère de stabilité de chaque sous-domaine.

**Méthode E – I :** dans cette méthode, chaque domaine possède le même pas de temps. Le domaine 1 est intégré avec un algorithme explicite et le domaine 2 avec un algorithme implicite. L'algorithme qui en découle est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1_{n+1}} = \beta_1 \mathbf{M}_1^{-1} \left( \mathbf{f}_{1_{n+1}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_1^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_n}, \mathbf{u}_{2_n}]^T \right) \right) + \alpha_1 \mathbf{u}_{1_n} + \mathbf{h}_{1_{n-1}} \\ \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{u}_{2_{n+1}} + \mathbf{f}_2^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_{n+1}}, \mathbf{u}_{2_{n+1}}]^T \right) = \mathbf{f}_{2_{n+1}}^{\text{ext}} - \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{h}_{2_n} \end{cases} \quad (2.53)$$

Une méthode itérative peut être utilisée pour la deuxième équation du système 2.53. Par ailleurs, la résolution de ce système est séquentielle. L'équation explicite est résolue en premier pour alimenter le calcul des forces internes de la deuxième équations du système (2.53).

**Méthode E<sup>m</sup> – E :** le domaine 2 est intégré avec un algorithme explicite et un pas de temps fin noté  $\Delta t$  et le domaine 1 avec un algorithme explicite, mais avec un pas de temps plus grand noté  $\Delta T = m\Delta t$ . L'algorithme qui en découle est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1_{n+m}} = \beta_1 \mathbf{M}_1^{-1} \left( \mathbf{f}_{1_{n+m}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_1^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_n}, \mathbf{u}_{2_n}]^T \right) \right) + \alpha_1 \mathbf{u}_{1_n} + \mathbf{h}_{1_{n-m}} \\ \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{u}_{2_{n+j}} + \mathbf{f}_2^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_{n+j}}, \mathbf{u}_{2_{n+j}}]^T \right) = \mathbf{f}_{2_{n+j}}^{\text{ext}} - \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{h}_{2_{n+j-1}} \text{ avec} \\ \mathbf{u}_{1_{n+j}} = \frac{m-j}{m} \mathbf{u}_{1_n} + \frac{j}{m} \mathbf{u}_{1_{n+m}} \end{cases} \quad (2.54)$$

La résolution de ce système est séquentielle. La première équation explicite est résolue en premier pour alimenter le calcul des forces internes de la deuxième équations du système (2.55) via l'interpolation linéaire des déplacements.

**Méthode I – I :** les domaines sont intégrés avec le même pas de temps, mais avec un algorithme implicite potentiellement différent. L'algorithme qui en découle est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta_1} \mathbf{M}_1 \mathbf{u}_{1_{n+1}} + \mathbf{f}_1^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_{n+1}}, \mathbf{u}_{2_{n+1}}]^T \right) = \mathbf{f}_{1_{n+1}}^{\text{ext}} - \frac{1}{\beta_1} \mathbf{M}_1 \mathbf{h}_{1_{n-1}} \\ \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{u}_{2_{n+1}} + \mathbf{f}_2^{\text{int}} \left( [\mathbf{u}_{1_{n+1}}, \mathbf{u}_{2_{n+1}}]^T \right) = \mathbf{f}_{2_{n+1}}^{\text{ext}} - \frac{1}{\beta_2} \mathbf{M}_2 \mathbf{h}_{2_{n-1}} \end{cases} \quad (2.55)$$

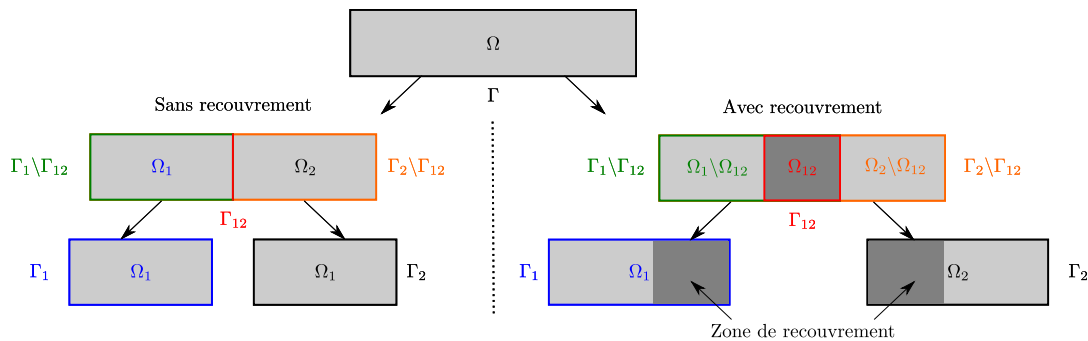
Dans ce cas, le système ne peut pas être découpé. C'est pourquoi les auteurs proposent de résoudre ce système par une relation maître esclave en choisissant un domaine qui

avance en premier dans le temps. Le calcul des forces internes dans le domaine maître est alors réalisé avec une extrapolation du déplacement des nœuds des éléments hybrides de la partie complémentaire.

Ces méthodes permettent ainsi de coupler différents schémas implicites ou explicites. Cependant, il n'y a pas de preuve de stabilité générale démontrant qu'elles sont stables lorsque des pas de temps différents sont utilisés. Elles ont servi de base pour la mise en place de méthodes multiéchelles en temps stables, comme la méthode GC par exemple. Pour cela, il a été nécessaire dans un premier temps de dédoubler les nœuds au niveau de l'interface entre les deux partitions. C'est le principe des méthodes de décomposition en sous-domaines.

## 2.6 Méthodes de décomposition en sous-domaines

Dans cette section, on s'intéresse aux méthodes de décomposition en sous-domaines. Ces méthodes consistent à découper une structure en un certain nombre noté  $d \in \mathbb{N}^*$  de sous-domaines. On note alors  $\Gamma_d$  la frontière du  $d^{\text{ième}}$  sous-domaine qui occupe le volume  $\Omega_d$  de  $\Omega$  à l'instant  $t_n$ . Pour simplifier la présentation, deux sous-domaines sont considérés ( $d=2$ ). La décomposition obtenue peut alors être avec ou sans recouvrement. C'est à dire que l'intersection de  $\Omega_1$  avec  $\Omega_2$  peut être de la dimension de l'espace géométrique  $s$ , dans le cas avec recouvrement, ou bien de dimension  $s - 1$ , dans le cas standard sans recouvrement. On note  $\Gamma_{12}$  la frontière de l'intersection de  $\Omega_1$  avec  $\Omega_2$  ( $\Gamma_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ) et  $\Omega_{12}$  la zone de recouvrement qui tend vers  $\emptyset$  dans le cas sans recouvrement. Une illustration de ces stratégies de découpage en deux sous-domaines est proposée sur la figure 2.8.



**FIGURE 2.8:** Illustration de décompositions en deux sous-domaines avec et sans recouvrement.

L'objectif des méthodes de décomposition en sous-domaines en mécanique est de résoudre le problème global décrit sur  $\Omega$ , tel que celui que l'on a présenté dans la partie précédente (2.8), dans chacun des sous-domaines. Le cœur de ces méthodes consiste à mettre en place une stratégie pour déterminer le chargement qui doit être appliqué dans

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

---

la zone commune aux sous-domaines, en tenant compte de l'équilibre global de la structure. Ainsi le chargement qu'impose la partie complémentaire d'un sous-domaine sur lui-même est vu comme une condition limite (en déplacement, en vitesse, en effort, mixte ...) et la résolution dans le sous-domaine se fait de manière "classique" une fois cette condition limite particulière trouvée. L'intérêt est ainsi de pouvoir paralléliser la résolution dans chacun des sous-domaines et de faciliter la modélisation du problème de mécanique. Afin de faciliter la compréhension de ces méthodes, une seule itération dans un incrément sera réalisée. La résolution totale du problème se faisant alors par la succession des étapes présentées. Nous allons donc voir comment la condition limite particulière de raccordement est prise en compte dans les différentes méthodes. Pour cela nous écrivons dans un premier temps le problème mécanique relatif à un sous-domaine sans tenir compte de la partie complémentaire. La condition limite imposée sur  $\Gamma_{12}$  est une condition en effort qui résulte de la force volumique du problème dynamique global sur l'interface. Le collage entre ce problème mécanique et ceux relatifs aux autres sous-domaines sera fait dans les différentes méthodes par des approches différentes. Ainsi le problème de dynamique relatif à un sous-domaine libre s'écrit de la manière suivante lorsque les sous-domaines sont discrétisés en espace et en temps avec les schémas de Newmark, avec un pas de temps identique dans chaque sous-domaine :

$$\mathbf{A}_d^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{\text{nk}(i+1)} = \mathbf{b}_d^{\text{nk}(i)} \quad (2.56)$$

Avec  $\mathbf{A}_d^{\text{nk}(i)}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{\text{nk}(i+1)}$ , et  $\mathbf{b}_d^{\text{nk}(i)}$  les opérateurs définis dans (2.24), page 36, relatifs au sous-domaine  $d$ . Chaque sous-domaine peut ainsi avoir son couple de paramètres de Newmark. Les différents sous-domaines peuvent ainsi être modélisés classiquement dans différents codes de calcul, ce qui permet une flexibilité de modélisation.

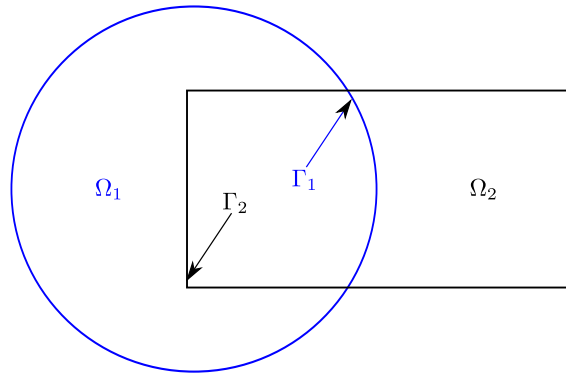
### 2.6.1 Méthodes avec recouvrement

#### 2.6.1.1 Méthode Schwarz

La méthode de Schwarz et les algorithmes qui s'en inspirent ont pour principe de résoudre des problèmes locaux dans chaque sous-domaine avec une condition limite à l'interface déduite de la solution sur la partie complémentaire. Ces algorithmes itératifs convergent vers la solution globale en assurant la continuité des solutions locales et de leurs dérivées normales aux interfaces des sous-domaines. Cette méthode est considérée comme la première méthode de décomposition de domaine développée pour la résolution du problème de Laplace et a été proposée par Schwarz en 1870. Initialement, ce problème a été résolu sur un domaine décomposé en deux sous-domaines recouvrant constitués d'un disque et d'un carré comme montré sur la figure 2.9, tel que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ avec } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset \quad (2.57)$$

Dans le cas d'un problème de dynamique tel que celui décrit dans (2.23), page 35, cette



**FIGURE 2.9:** Illustration de la décomposition de domaine du problème de Schwarz.

méthode conduit à l'algorithme suivant pour résoudre une itération notée par l'indice  $j$  :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \mathbf{b}_1^{\text{nk}(i)} & \text{sur } \Omega_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j)} & \text{sur } \Gamma_2 \cap \Omega_1 \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \mathbf{b}_2^{\text{nk}(i)} & \text{sur } \Omega_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} & \text{sur } \Gamma_1 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

Ainsi, lorsque la convergence est satisfaite, *via* un critère défini par l'utilisateur, à l'itération de Schwarz notée  $j^{\text{conv}}$ , on a  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(i+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j^{\text{conv}})}$ . Ainsi l'algorithme de Newton peut avancer à l'itération suivante et le processus de Schwarz recommence. Cette version de l'algorithme, qualifiée de multiplicatif, est séquentielle car le problème sur  $\Omega_1$  doit être résolu avant celui sur  $\Omega_2$ . Sa variante parallèle est la suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \mathbf{b}_1^{\text{nk}(i)} & \text{sur } \Omega_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j)} & \text{sur } \Gamma_2 \cap \Omega_1 \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \mathbf{b}_2^{\text{nk}(i)} & \text{sur } \Omega_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j)} & \text{sur } \Gamma_1 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

La modification de cet algorithme, qualifié d'additif, concerne la condition à l'interface pour le problème dans  $\Omega_2$  : en effet on utilise  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j)}$  au lieu de  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(j+1)}$ . Ainsi, les problèmes sur les deux sous-domaines peuvent être résolus en parallèle. A titre de comparaison, la différence entre les deux algorithmes multiplicatif et additif est de la même nature qu'entre les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires. Deux inconvénients pénalisent l'algorithme de Schwarz : la nécessité du recouvrement des sous-domaines et la lenteur de la convergence.



### 2.6.1.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin [DHI 98, DHI 10] s'adresse, par exemple, à des problèmes de la mécanique dont le domaine d'étude nécessite d'être partagé en plusieurs zones distinctes nécessitant des niveaux d'analyse différents et des modèles différents au sein d'une même structure. La méthode a pour principe de raccorder ces modèles dans le volume. Ainsi, dans les zones de coexistence, la modélisation globale est obtenue par le mélange de plusieurs modélisations. La stratégie Arlequin se présentant généralement sous une forme variationnelle, la jonction des modèles est imposée de manière faible. Afin de raccorder deux modèles différents, l'idée est d'activer des forces de couplages qui permettent de contrôler, dans la zone de recouvrement, l'écart entre les deux états mécaniques : déplacements, déformations, contraintes... Ce champ de force peut suivre un modèle rigide (approche Lagrangienne), ou un modèle élastique (pénalisation) ou encore une combinaison des deux (pénalisation-dualité). Le choix du modèle de jonction permet d'ajuster l'intensité du couplage. Pour ne pas compter deux fois l'énergie du système global dans la zone de recouvrement, chacun des travaux virtuels associé aux deux modèles est pondéré par des fonctions de pondération qui forment une partition de l'unité sur l'ensemble du domaine d'étude. Dans le cas de deux modèles, on considère deux distributions de pondération  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui sont définies par la relation (2.60) et une réalisation est illustrée sur la figure 2.10 :

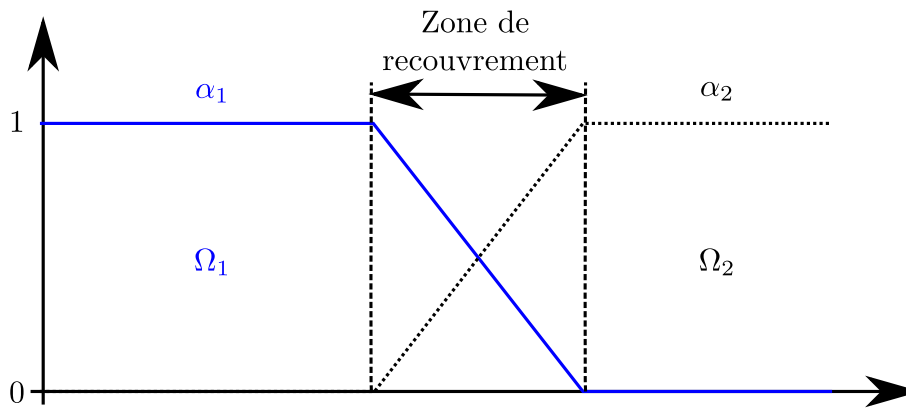


FIGURE 2.10: Illustration de fonctions de partition de l'unité pour deux sous-domaines.

$$\alpha_1 : \Omega_1 \longrightarrow [0, 1] \qquad \alpha_2 : \Omega_2 \longrightarrow [0, 1]$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ \alpha(\mathbf{x}) & \text{si non} \end{cases} \qquad \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ 1 - \alpha(\mathbf{x}) & \text{si non} \end{cases} \quad (2.60)$$

Où  $\alpha$  est la fonction de pondération à valeur dans la zone de recouvrement des sous-domaines.

## 2.6.2 Méthodes sans recouvrement

### 2.6.2.1 Méthode primale

Dans cette méthode sans recouvrement, souvent appelée méthode du complément de Schur, on impose implicitement la continuité cinématique du vecteur inconnu au niveau des interfaces entre les sous-domaines. La continuité de la vitesse est imposée ici. L'équilibre des efforts d'interface est vérifié *a posteriori*. Pour cela, les nœuds sont numérotés et deux groupes sont réalisés. L'un est constitué des nœuds internes au sous-domaine l'autre est constitué de ceux de l'interface avec ses voisins. Le système obtenu dans un sous-domaine est alors le suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{II}_d}^{(i)} & \mathbf{A}_{\text{I}\Gamma_d}^{(i)} \\ \mathbf{A}_{\Gamma\text{I}_d}^{(i)} & \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma_d}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\text{I}_d}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_d}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{(i+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{I}_d}^{(i)} \\ \mathbf{b}_{\Gamma_d}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_d^{(i)}} \quad (2.61)$$

La vitesse interfaciale de chaque sous-domaine est alors égale, ce qui donne dans le cas de deux sous-domaines  $\dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_1}^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_2}^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}^{\text{pl}}$ . La première équation du système (2.21) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\text{pl}} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{1\Gamma}^{\text{pl}} \\ & \mathbf{A}_2^{\text{pl}} & \mathbf{A}_{2\Gamma}^{\text{pl}} \\ \text{Sym} & & \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma}^{\text{pl}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1^{\text{pl}} \\ \dot{\mathbf{u}}_2^{\text{pl}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}^{\text{pl}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\text{pl}} \\ \mathbf{b}_2^{\text{pl}} \\ \mathbf{b}_{\Gamma\Gamma}^{\text{pl}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^{(i)}} \quad (2.62)$$

Avec  $\mathbf{A}_d^{\text{pl}} = \mathbf{A}_{\text{II}_d}^{(i)}$  l'opérateur du sous-domaine  $\Omega_d$ ,  $d \in \{1, 2\}$  qui est constitué de l'assemblage des contributions élémentaires de l'opérateur  $\mathbf{A}^{(i)}$ , introduit précédemment dans (2.22) dont les nœuds sont internes au sous-domaine  $d$  en question.  $\mathbf{A}_{\Gamma\Gamma}^{\text{pl}} = \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma_1}^{(i)} + \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma_2}^{(i)}$  l'opérateur issu de l'assemblage des contributions élémentaires de l'opérateur  $\mathbf{A}^{(i)}$  de chacun des sous-domaines dont les nœuds sont dans l'interface et  $\mathbf{A}_{\text{d}\Gamma}^{\text{pl}} = \mathbf{A}_{\text{I}\Gamma_d}^{(i)}$  est la partie de l'opérateur  $\mathbf{A}^{(i)}$  réalisant le couplage entre les quantités cinématiques internes de chacun des domaines et celles de l'interface globale. Cet opérateur est constitué de l'assemblage des contributions élémentaires réalisant le couplage entre les nœuds internes de chacun des domaines et les nœuds de l'interface globale.  $\dot{\mathbf{u}}_d^{\text{pl}} = \dot{\mathbf{u}}_{\text{I}_d}^{(i)}$  est la partie du vecteur vitesse inconnu  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$  introduit dans (2.21) dont les degrés de libertés sont internes au sous-domaine  $d$  et le vecteur  $\dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}$  est constitué des degrés de libertés du vecteur vitesse inconnue  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$  situés sur l'interface.  $\mathbf{b}_d^{\text{pl}} = \mathbf{b}_{\text{I}_d}^{(i)}$  est la contribution nodale de  $\mathbf{b}^{(i)}$  introduite précédemment dans (2.21) sur les nœuds internes au sous-domaine  $d$  en question.  $\mathbf{b}_{\Gamma}^{\text{pl}} = \mathbf{b}_{\Gamma_d}^{(i)}$  sont celles agissant sur les nœuds de l'interface. Le système (2.62) peut ensuite être découplé en un problème sans liaison et un problème avec liaison et sa résolution peut se faire par les trois étapes suivantes :

1. **Problèmes sans liaison primal** : Le système sans liaison suivant est résolu.

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_1^{\text{pl sl}} = \mathbf{b}_1^{\text{pl}} \\ \mathbf{A}_2^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_2^{\text{pl sl}} = \mathbf{b}_2^{\text{pl}} \end{cases} \quad (2.63)$$

2. **Problème d'interface primal** : Le problème d'interface est résolu. Il est déduit de la condensation du système (2.62) sur l'interface :

$$\mathbf{H} \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}^{\text{pl}} = \mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{pl}} \quad (2.64)$$

Où  $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma}^{\text{pl}} - \sum_{d=1}^2 \mathbf{A}_{\Gamma d}^{\text{pl}} \mathbf{A}_d^{\text{pl}-1} \mathbf{A}_{d\Gamma}^{\text{pl}}$  est l'opérateur d'interface en notant la trans-

posée de l'opérateur  $\mathbf{A}_{\Gamma d}^{\text{pl}}$  :  $\mathbf{A}_{\Gamma d}^{\text{plT}} = \mathbf{A}_{d\Gamma}^{\text{pl}}$ . Et  $\mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{pl}} = \mathbf{b}_{\Gamma}^{\text{pl}} - \sum_{d=1}^2 \mathbf{A}_{d\Gamma}^{\text{pl}} \mathbf{A}_d^{\text{pl}-1} \mathbf{b}_d^{\text{pl}} = \mathbf{b}_{\Gamma}^{\text{pl}} -$

$\sum_{d=1}^2 \mathbf{A}_{d\Gamma}^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_d^{\text{pl sl}}$ . La résolution du problème d'interface passe par l'inversion de la matrice  $\mathbf{H}$ , qui peut s'avérer coûteuse. Ce constat a conduit à la mise en place de méthodes de résolution telles que la méthode BDD [MAN 93]. L'objectif est alors de réduire le coût de calcul du problème d'interface. Un pré-conditionneur permettant d'obtenir une approximation de l'inverse de  $\mathbf{H}$  est utilisé, et l'équilibre est ensuite obtenu via une méthode itérative de type gradient conjugué.

3. **Problèmes avec liaison primal** : Le problème suivant est résolu.

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_1^{\text{pl}} = \mathbf{b}_1^{\text{pl}} - \mathbf{A}_{1\Gamma}^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}^{\text{pl}} \\ \mathbf{A}_2^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_2^{\text{pl}} = \mathbf{b}_2^{\text{pl}} - \mathbf{A}_{2\Gamma}^{\text{pl}} \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma}^{\text{pl}} \end{cases} \quad (2.65)$$

Cette technique nécessite donc de distinguer les contributions internes, de l'interface et de couplage de l'opérateur d'un sous-domaine, ce qui peut être intrusif pour une approche par couplage de codes. De plus, l'opérateur d'interface peut être difficile à évaluer sans accès aux opérateurs depuis l'extérieur des codes.

### 2.6.2.2 Méthode duale

Appliquer la méthode de décomposition de domaine duale sous la contrainte de satisfaire la continuité de vitesse et l'équilibre à l'interface au système (2.21) conduit au système (2.66), dans le cas de maillages compatibles [FAR 91, FAR 94]. Il est important de noter que du point de vue discret, il n'est pas équivalent d'imposer la continuité des déplacements, vitesses et accélérations [COM 02]. Nous choisissons de présenter cette méthode avec la condition de continuité de la vitesse interfaciale, car c'est la quantité cinématique qui sera également choisie dans les méthodes multiéchelles en temps, suite aux travaux de [GRA 00]. L'analogie présentée plus loin entre cette méthode et la méthode GC sera ainsi facilitée.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\text{nk}(i)} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_1^{\text{nk}T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\text{nk}(i)} & -\mathbf{C}_2^{\text{nk}T} \\ -\mathbf{C}_1^{\text{nk}} & -\mathbf{C}_2^{\text{nk}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk}(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk}(i)} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\text{nk}(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\text{nk}(i)} \\ \mathbf{b}_2^{\text{nk}(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Avec

$$\mathbf{C}_1^{\text{nk}T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\text{nk}(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_{n+1}^{(i)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Où  $\mathbf{A}_d^{\text{nk}(i)}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_d^{\text{nk}(i)}$  et  $\mathbf{b}_{d_{n+1}}^{\text{nk}(i)}$  sont respectivement l'opérateur  $\mathbf{A}^{\text{nk}(i)}$ , le vecteur des inconnues  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{nk}(i)}$  et le vecteur  $\mathbf{b}^{\text{nk}(i)}$  introduits précédemment dans la relation (2.24), page 36, relatifs au sous-domaine  $\Omega_d$ ,  $d \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ .  $\mathbf{C}_d^T$  est la transposée de l'opérateur de trace, c'est une matrice booléenne signée dans le cas de maillages compatibles. Sa taille est  $n_{d|\Gamma} \times n_d$  avec  $n_d$  le nombre de Degré De Liberté (DOF) du sous-domaine  $\Omega_d$  et  $n_{d|\Gamma}$  est celui du nombre de DOF de l'interface.  $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i)}$  est le vecteur inconnu des efforts d'interface de l'instant  $t_{n+1}$  (la taille de ce vecteur est  $n_{d|\Gamma}$ ). Lorsque des maillages incompatibles entre les sous-domaines sont utilisés, les matrices  $\mathbf{C}_d^T$  sont modifiées en conséquence pour pouvoir évaluer l'effort d'interface dans chacun des sous-domaines (opérations d'interpolation et d'extrapolation spatiale) [HER 02]. Le système (2.66) peut être résolu par une méthode avec et sans liaison. En effet, les deux premières lignes du système (2.66) permettent d'écrire le vecteur inconnu relatif à la ligne, en fonction d'une quantité avec et sans liaison, comme montré ci-dessous :

$$\dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{\text{nk}(i)} = \underbrace{\mathbf{A}_d^{\text{nk}^{-1}(i)} \mathbf{b}_d^{\text{nk}(i)}}_{\text{quantité sans liaison : } \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{\text{nk sl}(i)}} + \underbrace{\mathbf{A}_d^{\text{nk}^{-1}(i)} \left( \mathbf{C}_d^{\text{nk}T} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\text{nk}(i)} \right)}_{\text{quantité avec liaison : } \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{\text{nk al}(i)}} \quad (2.68)$$

En réinjectant ces deux relations dans la dernière ligne du système (2.66), une relation dépendant uniquement de l'effort d'interface inconnu et des quantités sans liaison est obtenue. Il s'agit du problème d'interface écrit dans la relation (2.70). Ainsi la résolution du système (2.66) peut se faire en réalisant les trois étapes suivantes :

1. **Problème sans liaison dual** : Les vitesses interfaciales sans liaison à l'instant  $t_{n+1}$  des sous-domaines 1 et 2 respectivement notées  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{sl}(i)} = \mathbf{C}_1^{\text{nk}} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk sl}(i)} = \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{sl}(i)}$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{sl}(i)} = \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{sl}(i)}$  sont calculées en résolvant (2.69) et en projetant les vitesses sans liaison obtenues sur l'interface du sous-domaine via son opérateur de trace. Les conditions initiales de ce système résultent de l'état d'équilibre convergé du problème couplé obtenu dans chaque sous-domaine à l'instant  $t_n$ .

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nk sl}(i)} = \mathbf{b}_1^{\text{nk}(i)} \\ \mathbf{A}_2^{\text{nk}(i)} \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nk sl}(i)} = \mathbf{b}_2^{\text{nk}(i)} \end{cases} \quad (2.69)$$

On remarque que le système d'équation (2.69) peut être parallélisé.

2. **Problème d'interface dual** : Le problème d'interface est résolu afin de déterminer l'effort d'interface  $\lambda_{n+1}^{(i)}$ . Ce problème est obtenu en condensant le système (2.66) sur sa troisième ligne. Cela conduit à l'équation (2.70) :

$$\underbrace{\left[ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_1^{(i)-1} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2^{(i)-1} \mathbf{C}_2^T \right]}_{\text{Somme des compléments de Schur}} \lambda_{n+1}^{(i)} = \underbrace{- \left( \dot{\mathbf{u}}_1^{\text{sl}}|_{\Gamma_{n+1}}^{(i)} + \dot{\mathbf{u}}_2^{\text{sl}}|_{\Gamma_{n+1}}^{(i)} \right)}_{\text{Saut des vitesses sans liaison interfaciale}} \quad (2.70)$$

Le système (2.70) est ensuite résolu directement en construisant l'opérateur d'interface, ou résolu par une méthode itérative. L'intérêt d'une résolution par une méthode itérative, comme celle du gradient conjugué par exemple, est que la construction de l'opérateur d'interface n'est pas nécessaire [FAR 91, GOS 06]. En effet, seul le produit entre l'opérateur d'interface et les directions de recherche provenant de cette méthode itératives sont nécessaires. Or le produit de l'une de ces directions de recherche avec l'opérateur d'interface peut être obtenu en combinant les vitesses interfaciales résultant des sous-problèmes dans lequel la direction de recherche est appliquée comme condition limite en effort, dans chacun des sous-domaines. Ce type de résolution est donc souvent privilégié lorsque l'on cherche à appliquer ces méthodes de DD dans le cadre de problème implicite non-linéaire. En effet, dans ce cadre, l'opérateur d'interface change et évolue en fonction des non-linéarités. Il est donc préférable d'utiliser une méthode itérative pour résoudre le problème d'interface, plutôt que de construire explicitement par factorisation l'opérateur d'interface tangent, relativement coûteux. De plus, si le pré-conditionneur de la méthode itérative est efficace, on peut obtenir l'effort d'interface en un nombre limité d'itérations, ce qui fait le succès des méthodes de type FETI.

3. **Problèmes avec liaison dual** : Les problèmes avec liaison sont résolus (2.71).

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\text{nk}}(i) \dot{\mathbf{u}}_1^{\text{nk}}(i) = \mathbf{b}_1^{\text{nk}}(i) + \mathbf{C}_1^{\text{nk}T} \lambda_{n+1}^{\text{nk}}(i) \\ \mathbf{A}_2^{\text{nk}}(i) \dot{\mathbf{u}}_2^{\text{nk}}(i) = \mathbf{b}_2^{\text{nk}}(i) + \mathbf{C}_2^{\text{nk}T} \lambda_{n+1}^{\text{nk}}(i) \end{cases} \quad (2.71)$$

Ce problème ressemble fortement au système résolu dans la première étape de cette méthode. Ici l'interaction liée au couplage entre les sous-domaines, obtenue à l'étape précédente lors de la résolution du problème d'interface, est ajoutée par l'intermédiaire des efforts d'interface. Cette étape de résolution peut donc aussi être réalisée en parallèle, pour chacun des sous-domaines. De plus, la factorisation de l'opérateur  $\mathbf{A}_d^{\text{nk}}(i)$ , réalisée lors de la résolution des problèmes sans liaison, peut être réutilisée.

### 2.6.2.3 Méthode mixte

On inclut ici les techniques de décomposition en sous-domaines qui s'appuient sur la méthode du Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski 1982], [Glowinski et Le Tallec

1990]. La méthode du Lagrangien augmenté est une combinaison des méthodes de Schur duale avec la méthode de pénalité. La fonctionnelle modifiée est définie à partir de la relation suivante :

$$J\left(\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)}, \lambda_{n+1}^{(i)}\right) = \sum_{d=1}^2 [L_d]^{(i)} - (\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)})^T \lambda_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{2} (\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)})^T \hat{\mathbf{A}}^{(i)} (\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)}) \quad (2.72)$$

Où  $\hat{\mathbf{A}}^{(i)}$  est un opérateur symétrique défini positif, souvent appelé opérateur tangent d'interface et où  $L_d^{(i)}$  est le potentiel associé au système linéarisé (2.21) relatif au sous-domaine  $d \in \{1, 2\}$ . La minimisation de la fonctionnelle (2.72) conduit aux équations d'Euler suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(i)} + \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_1^T \\ \text{Sym} & \mathbf{A}_2^{(i)} + \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)} \\ \lambda_{n+1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(i)} \\ \mathbf{b}_2^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

On peut également envisager cette technique à partir de la fonctionnelle suivante dans laquelle chaque sous-domaine peut avoir son propre opérateur tangent d'interface noté  $\hat{\mathbf{A}}_d^{(i)}$ .

$$J\left(\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)}, \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_{n+1}}^{(i)}, \lambda_{1_{n+1}}^{(i)}, \lambda_{2_{n+1}}^{(i)}\right) = \sum_{d=1}^2 \left[ L_d^{(i)} - (\mathbf{C}_d \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{(i)} + \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_{n+1}}^{(i)})^T \lambda_{d_{n+1}}^{(i)} + \frac{1}{2} (\mathbf{C}_d \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{(i)} + \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_{n+1}}^{(i)})^T \hat{\mathbf{A}}_d^{(i)} (\mathbf{C}_d \dot{\mathbf{u}}_{d_{n+1}}^{(i)} + \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_{n+1}}^{(i)}) \right] \quad (2.74)$$

La minimisation de la fonctionnelle (2.74) conduit aux équations d'Euler suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(i)} + \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{A}}_1^{(i)} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{A}}_1^{(i)} \\ & \mathbf{A}_2^{(i)} + \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{A}}_2^{(i)} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{A}}_2^{(i)} \\ \text{Sym} & & & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ & & & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ & & & & \hat{\mathbf{A}}_1^{(i)} + \hat{\mathbf{A}}_2^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{(i)} \\ \lambda_{1_{n+1}}^{(i)} \\ \lambda_{2_{n+1}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\Gamma_{n+1}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(i)} \\ \mathbf{b}_2^{(i)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Une stratégie avec et sans liaison peut être utilisée pour résoudre les systèmes (2.73) et (2.75) obtenus. Cette méthode a l'avantage de rendre les systèmes bien définis dans le cas statique où la présence de mouvement de corps rigide est possible lors de la décomposition en sous-domaines. Cependant, l'ajout de l'opérateur tangent d'interface peut s'avérer intrusif et potentiellement coûteux.

Les différentes techniques présentées permettent ainsi de coupler arbitrairement différents schémas d'intégrations. Cependant, elles sont limitées à l'utilisation d'un pas de temps unique pour toute la structure. Nous allons donc présenter des méthodes qui s'appuient en particulier sur la méthode de décomposition de domaine duale et qui permettent de s'affranchir de cette limitation.

## 2.7 Méthodes multiéchelles en espace et en temps

Les méthodes multiéchelles en espace et en temps consistent en premier lieu à découper la structure en un certain nombre de sous-domaines. Les différentes techniques de découpage spatial sont similaires à celles qui ont été vues dans la partie 2.6. L'ingrédient supplémentaire des méthodes présentées ici est que chaque sous-domaine dispose de sa propre discrétisation en temps, ainsi que de son propre schéma de résolution. Le schéma d'intégration en temps peut ainsi être propre au sous-domaine et adapté à la dynamique des sollicitations rencontrées dans ce dernier. En conséquence, un raccord en temps doit être fait au niveau de l'interface entre les sous-domaines. La stratégie adoptée pour réaliser ce raccord est un sujet actif de recherche, et différentes techniques sont proposées dans la littérature [COM 02][FAU 03][BOU 06] [PRA 04][MAH 10c][MAH 10b] [GHA 12] [BET 13]. Un état de l'art de ces méthodes est ici proposé. Nous limiterons la présentation au cas où la décomposition du domaine fait intervenir deux zones afin de faciliter leur compréhension. Une illustration du problème multiéchelle en espace et en temps est présentée sur la figure 2.11, dans le cas d'un découpage sans recouvrement avec maillages spatiaux compatibles.

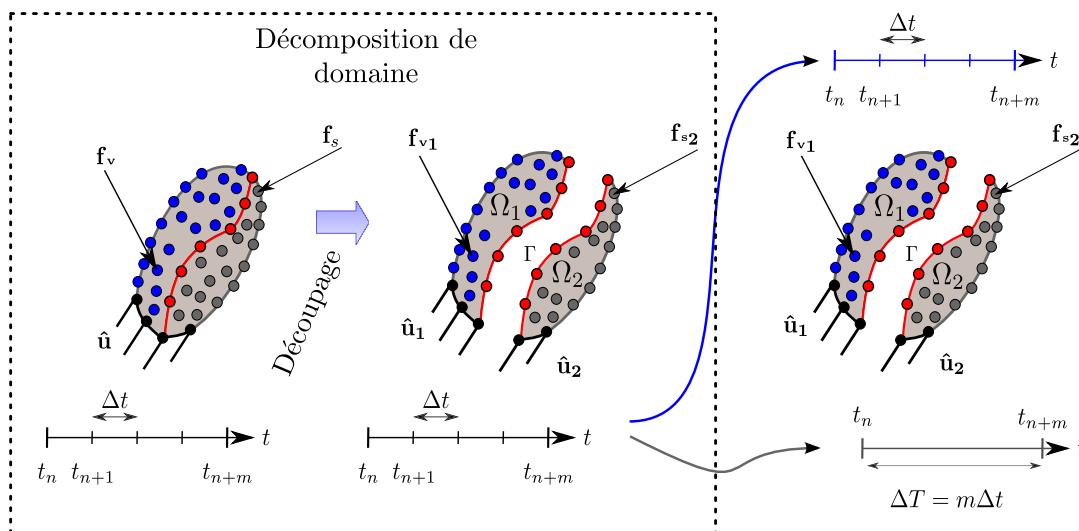


FIGURE 2.11: Principe d'une méthode multiéchelle en espace et en temps sans recouvrement.

Le pas de temps associé au sous-domaine  $\Omega_1$ , qui a l'échelle de temps la plus fine, est noté  $\Delta t$  et  $\Delta T$  est celui du sous-domaine complémentaire  $\Omega_2$ . Le rapport entre ces deux pas de temps défini par  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$  est noté  $m \in \mathbb{N}^*$ . On nommera parfois  $\Delta t$  le *pas de temps micro* et  $\Delta T$  le *pas de temps macro*. La présentation des méthodes multiéchelles en espace et temps est faite sur la base de ce problème, et on cherche à réaliser un incrément dans le domaine avec le pas de temps le plus grand. La résolution du problème sur la plage d'étude temporelle consiste alors à répéter les étapes présentées. Pour cela on suppose l'équilibre dynamique global résolu à l'instant  $t_n$ . On suppose également que cet instant est un point de rencontre entre les deux échelles de temps, c'est à dire que c'est un piquet de temps commun aux deux discrétisations en temps. L'équilibre global est alors recherché à l'instant  $t_{n+m} = t_n + m\Delta t = t_n + \Delta T$ .

### 2.7.1 Méthode GC

Cette méthode proposée dans [COM 02, GRA 01, GRA 00] permet de coupler différents schémas de la famille de Newmark avec différents pas de temps dans un problème de dynamique décomposé en sous-domaines. Sa stabilité est assurée dès lors que la stabilité relative au schéma de Newmark est satisfaite dans tous les sous-domaines. Cependant elle peut introduire de la dissipation numérique au niveau de l'interface. Le principe de fonctionnement de cette méthode est exposé avant de présenter différentes mises en œuvre.

#### Principe de la méthode

Le cas d'étude présenté dans l'introduction des méthodes multiéchelles en espace et en temps, section 2.7, avec deux sous-domaines et deux échelles de temps est choisi pour présenter la méthode GC. Pour faciliter la compréhension de cette méthode, on se place dans un premier temps dans un cas où le processus de Newton-Raphson du système (2.21) est inutile. Cela couvre donc toutes les combinaisons possibles de couplage entre l'Explicite (E) et l'Implicite Linéaire (IL) soit : (E/E, E/IL, IL/IL). Cette restriction permet cependant de traiter des non-linéarités géométriques et matériaux dans une partie explicite. Du point de vue du fonctionnement, cette méthode propose de réaliser un pas de temps macro en trois étapes majeures. Ces dernières présentent une grande similarité à celles rencontrées dans la méthode de décomposition de domaine duale. La première consiste à évaluer l'équilibre dynamique local obtenu dans chacun des sous-domaines sans tenir compte des interactions qu'il y a entre eux. La particularité ici par rapport à la première étape d'une méthode de décomposition de domaine duale (étape des problèmes sans liaison dual) est que chaque sous-domaine a son propre pas de temps. Les vitesses sans liaison dans chacun des sous-domaines au temps correspondant de l'avancée de leur pas de temps ( $t_{n+1}$  pour  $\Omega_1$  et  $t_{n+m}$  pour  $\Omega_2$ ) sont ainsi obtenues. La trace de ces vitesses sur l'interface, qualifiées de vitesses sans liaisons sur l'interface, sont alors récupérées. On note le résultat de cette première étape  $\hat{\mathbf{u}}_{1|\Gamma_{n+1}}^{\text{sl}}$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+m}}^{\text{sl}}$ . Cela correspond respectivement à la vitesse interfaciale sans liaison du sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Il est à noter que la



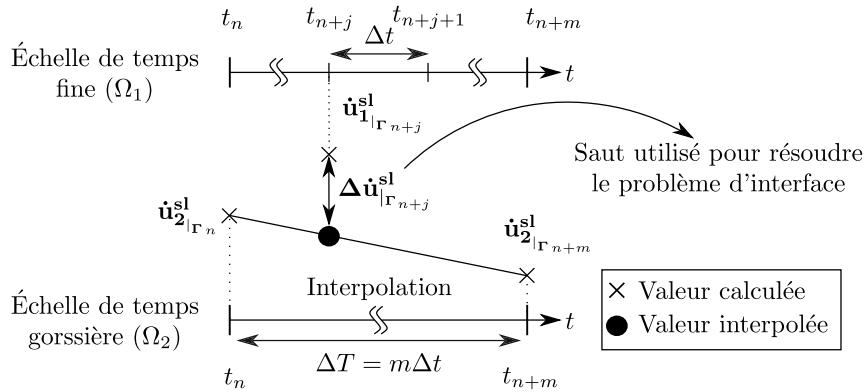
## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

quantité discrétisée choisie pour assurer la continuité interfaciale est la vitesse. Cela permet de garantir la stabilité de cette méthode, comme l'ont montré [COM 02, GRA 00] par une approche énergétique. Concernant l'aspect temporel de la condition de raccord, il est choisi dans cette méthode d'assurer la condition de continuité des vitesses à chaque pas de temps de l'échelle de temps la plus fine, ce qui se traduit par l'équation de continuité des vitesses interfaciales ci-dessous, où  $j$  désigne le nombre de pas de temps de l'échelle de temps la plus fine réalisés depuis le temps  $t_n$  :

### Équation de continuité (Méthode GC)

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{C}_1 \left( \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+j}}^{\text{sl}} + \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+j}}^{\text{al}} \right) + \mathbf{C}_2 \left( \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+j}}^{\text{sl}} + \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+j}}^{\text{al}} \right) = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

De manière à assurer la continuité de la vitesse à l'interface pour chaque pas de temps de l'échelle la plus fine en temps décrite dans la relation ci-dessus, la vitesse sans liaison du domaine grossier en temps  $\Omega_2$  devrait être calculée aux instants  $t_{n+j}$ . Le pas de temps du domaine  $\Omega_2$  pourrait donc être réduit afin de le rendre égal au pas de temps le plus fin. Cependant on se ramènerait alors au cas classique d'une méthode de décomposition de domaine duale et le caractère multiéchelle en temps serait perdu. La stratégie proposée par [COM 02] consiste donc à interpoler la vitesse sans liaison du domaine le plus grossier en temps, comme montré sur la figure 2.12. On a ainsi dans le cas d'une interpolation



**FIGURE 2.12:** Principe d'interpolation de la vitesse interfaciale sans liaison dans la méthode GC.

linéaire la relation suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \tilde{\mathbf{u}}_{2_{\Gamma_{n+j}}}^{\text{sl}} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{2_{\Gamma_n}}^{\text{sl}} + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{2_{\Gamma_{n+m}}}^{\text{sl}} \quad (2.77)$$

Des interpolations d'ordre plus élevé sont proposées dans [GAV 09], ce qui permet d'atténuer la dissipation d'énergie interfaciale engendrée par cette méthode. Avec cette interpolation, un saut de vitesse à l'interface peut donc être évalué à chaque pas de temps de l'échelle la plus fine en temps. Il est alors utilisé pour calculer l'effort d'interface qui doit

être appliqué afin de l'annuler. Le problème d'interface qui permet de réaliser cela est le suivant :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \underbrace{\left[ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]}_{\text{Somme des compléments de Schur}} \boldsymbol{\lambda}_{n+j} = - \underbrace{\left( \dot{\mathbf{u}}_{1|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}} + \tilde{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}} \right)}_{\substack{\text{Vitesses obtenues avec les} \\ \text{problèmes sans liaison} \\ \text{et avec interpolation}}} \quad (2.78)$$

Où  $\mathbf{A}_1^{-1}$  est l'inverse de l'opérateur  $\mathbf{A}_1$  qui est relatif au sous-domaine  $\Omega_1$ . De même,  $\mathbf{A}_2^{-1}$  est celui relatif au sous-domaine  $\Omega_2$ . Ils sont calculés avec la relation (2.22), page 35, et le pas de temps correspondant au sous-domaine.  $\boldsymbol{\lambda}_{n+j}$  est la force interfaciale au temps  $t_{n+j} = t_n + j\Delta t$  qui permet d'assurer la continuité de la vitesse interfaciale entre la vitesse interfaciale interpolée du sous-domaine  $\Omega_2$  et celle calculée du sous-domaine  $\Omega_1$ . Là encore, l'analogie avec une méthode de DD classique peut être remarquée.

La dernière étape consiste à actualiser le chargement des sous-domaines de manière à ce qu'ils tiennent compte de l'effort d'interaction avec ses sous-domaines voisins. Cette étape est donc analogue à l'étape qualifiée de problème avec liaison dans la méthode de DD classique. La différence ici, par rapport à une méthode de décomposition de domaine duale, est que chaque sous-domaine s'actualise à la fréquence de son pas de temps. Ainsi une boucle contenant ces trois étapes est réalisée dans le sous-domaine avec l'échelle de temps la plus fine, jusqu'à atteindre le point de rencontre suivant au temps  $t_{n+m}$ . Lorsque le sous-domaine fin en temps arrive au temps  $t_{n+m}$ , le problème avec liaison du domaine complémentaire est réalisé en parallèle et le processus peut recommencer pour aller au pas de temps macro suivant. Le problème d'interface est donc résolu à chaque pas de temps de l'échelle la plus fine. On montrera cependant que dans notre situation ce n'est pas pénalisant du point de vue du temps de calcul. Cette méthode conduit ainsi à un algorithme schématisé sur la figure 2.19 page 75 et décrit dans l'algorithme 2 dans le cas sans itération.

La version complètement non-linéaire est maintenant présentée pour deux sous-domaines. L'indice d'itération dans un sous-domaine est noté  $i_d$ . Deux boucles d'itérations sont effectivement réalisées. La première boucle d'itération se fait dans le sous-domaine fin en temps, à chaque pas de temps si les non linéarités l'exigent. La deuxième boucle s'effectue dans le sous-domaine grossier en temps pour qu'il converge. Nous limiterons la présentation à une itération macroscopique, car le processus décrit peut ensuite être étendu. Comme dans la partie précédente, les problèmes sans liaison sont évalués. Cela permet d'obtenir les vitesses interfaciales  $\dot{\mathbf{u}}_{1|\Gamma_{n+1}}^{\text{sl}} \quad (i_1=1)$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+m}}^{\text{sl}} \quad (i_2)$ . De manière analogue au cas précédent, la vitesse interfaciale à l'itération  $i_2$  du domaine macro en temps est interpolée par la relation suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \tilde{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}} \quad (i_2) = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_n}^{\text{sl}} + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+m}}^{\text{sl}} \quad (i_2) \quad (2.79)$$

$\dot{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_n}^{\text{sl}}$  ne porte pas d'indice d'itération car il s'agit de la vitesse sans liaison interfaciale convergée obtenue lors du pas de temps macro précédent. Le problème d'interface se

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite

---

réécrit alors de manière analogue et il prend la forme suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{H}^{\text{gc}(i_1|i_2)} \boldsymbol{\lambda}_{n+j}^{(i_1|i_2)} = \mathbf{b}^{(i_1|i_2)} \quad (2.80)$$

Avec

$$\mathbf{H}^{\text{gc}(i_1|i_2)} = \underbrace{\left[ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_1^{-1(i_1)} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2^{-1(i_2)} \mathbf{C}_2^T \right]}_{\substack{\text{Somme des compléments de Schur} \\ \text{de chacun des sous-domaines}}} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{b}^{(i_1|i_2)} = - \underbrace{\left( \dot{\mathbf{u}}_{1|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}(i_1)} + \tilde{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}(i_2)} \right)}_{\substack{\text{Vitesses obtenues avec les} \\ \text{problèmes sans liaison} \\ \text{et avec interpolation}}}$$

L'effort d'interface  $\boldsymbol{\lambda}_{n+j}^{(i_1|i_2)}$  obtenu par résolution de (2.80) est appliqué comme condition limite dans  $\Omega_1$ . Un processus itératif dans ce sous-domaine se met alors en œuvre. Ce processus consiste à évaluer la vitesse sans liaisons  $\dot{\mathbf{u}}_{1|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}(i_1+1)}$  à l'itération suivante, calculer l'effort d'interface correspondant  $\boldsymbol{\lambda}_{n+j}^{(i_1+1|i_2)}$  puis calculer le problème avec liaison, et ainsi de suite jusqu'à convergence du pas de temps. Le processus est alors répété pour chaque pas de temps du domaine micro jusqu'à atteindre le temps  $t_{n+m}$ . Le problème avec liaison dans le domaine grossier en temps est alors également réalisé. Si il y a convergence le processus s'arrête, sinon une nouvelle itération macro est réalisée ( $i_2 \leftarrow i_2 + 1$ ). Dans ce cas, l'état du domaine micro en temps est réinitialisé au temps  $t_n$  et le processus recommence jusqu'à convergence globale au pas de temps  $t_{n+m}$ .

---

### Algorithme 2 Incrément de l'algorithme GC du pas de temps $t_n$ à $t_{n+m}$

---

Calculer  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{sl}}$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{sl}}$  (Problème sans liaison dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ )

**Pour**  $j=1$  à  $j=m$  (*Boucle sur  $\Omega_1$  jusqu'au temps  $t_{n+m}$* ) **Faire**

**Si**  $j > 1$  **Alors**

Calculer  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+j}}^{\text{sl}}$  (problème sans liaison dans  $\Omega_1$ )

**Fin si**

Calculer  $\tilde{\mathbf{u}}_{2|\Gamma_{n+j}}^{\text{sl}}$  avec la formule (2.77)

Calculer  $\boldsymbol{\lambda}_{n+j}$  (Résoudre le problème d'interface avec la formule (2.78))

**Si**  $j < m$  **Alors**

Calculer  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+j}}$  (problème avec liaison dans  $\Omega_1$ )

**Fin si**

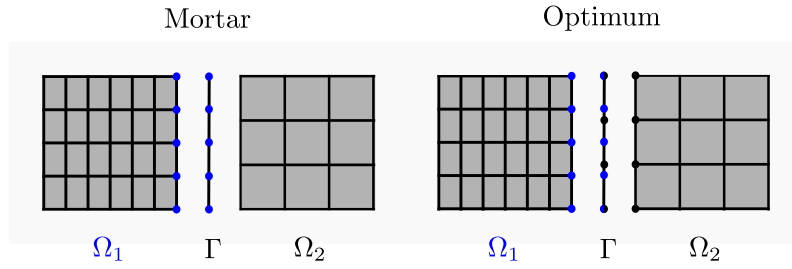
**Fin pour**

Calculer  $\dot{\mathbf{u}}_{1_{n+m}}$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}$  ( problèmes avec liaison dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ )

---

### Bilan énergétique

Le bilan énergétique de la méthode GC peut s'exprimer en sommant la contribution de



**FIGURE 2.13:** Exemple de maillage incompatible et choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange pour les méthodes mortar et optimum.

chacun des sous-domaines. Cela permet d'obtenir la relation suivante avec, les notations introduites lors du bilan énergétique des schémas de Newmark vu dans la partie 2.1.2.6, page 40 :

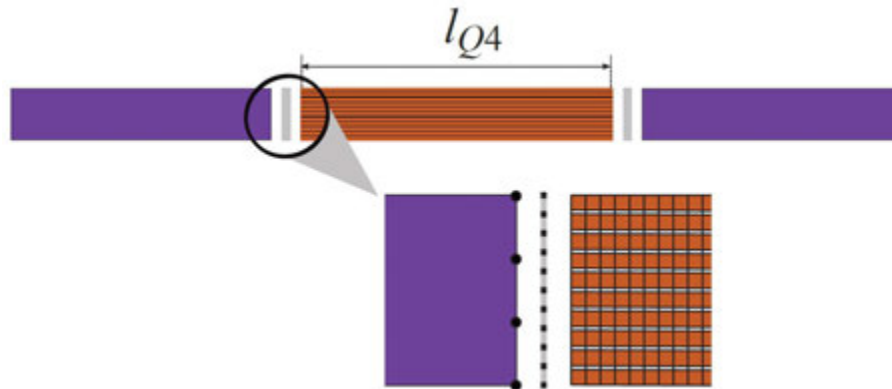
$$\begin{aligned} \Delta_2^m \mathcal{E}_1^* + \sum_{j=1}^m \Delta_1^j \mathcal{E}_2^* &= \Delta_2^m \mathcal{W} + \sum_{j=1}^m \Delta_1^j \mathcal{W} + \Delta_2^m \mathcal{D} + \sum_{j=1}^m \Delta_1^j \mathcal{D} + \\ \Delta_2^m \mathbf{u}_2^T \mathbf{C}_2^T &\left[ \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_2^m + \left( \frac{1}{2} - \gamma_2 \right) \Delta_2^m \boldsymbol{\lambda} \right] + \sum_{j=1}^m \left[ \Delta_1^j \mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_1^T \left[ \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_1^j + \left( \frac{1}{2} - \gamma_1 \right) \Delta_1^j \boldsymbol{\lambda} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

En notant  $\langle * \rangle_1^j = \frac{1}{2} (*_{n+j-1} + *_{n+j})$ ,  $\langle * \rangle_2^m = \frac{1}{2} (*_n + *_{n+m})$ ,  $\Delta_1^j * \mathbf{1} = *_{\mathbf{1}_{n+j}} - *_{\mathbf{1}_{n+j-1}}$  et  $\Delta_2^m * \mathbf{2} = *_{\mathbf{2}_{n+m}} - *_{\mathbf{2}_n}$ . La dissipation interfaciale qui peut être introduite par la méthode GC s'exprime donc par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} &= \Delta_2^m \mathbf{u}_2^T \mathbf{C}_2^T \left[ \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_2^m + \left( \frac{1}{2} - \gamma_2 \right) \Delta_2^m \boldsymbol{\lambda} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left[ \Delta_1^j \mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_1^T \left[ \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_1^j + \left( \frac{1}{2} - \gamma_1 \right) \Delta_1^j \boldsymbol{\lambda} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

### Gestion des maillages incompatibles

La gestion des maillages incompatibles pour cette méthode a été développée dans [FAU 03] sur la base des travaux de [HER 02]. Le premier point consiste à définir une discrétisation de la frontière  $\Gamma$  entre les sous-domaines. Différents espaces sont possibles, comme indiqué sur la figure 2.13. Des raccords mortar ou optimum peuvent être utilisés afin de vérifier la condition LBB. Dans le cas d'un raccord mortar, la discrétisation de l'interface est fixée par le maillage le plus fin. Dans le cas d'un raccord optimum, les deux maillages sont pris en compte et la discrétisation de la frontière correspond à la réunion des deux maillages sur la frontière. Le second point consiste à estimer les vitesses interfaciales sur les noeuds de la frontière. Pour cela, les fonctions de forme des éléments des maillages des sous-domaines sont utilisées. Pour des éléments linéaires, cela revient ainsi à réaliser des interpolations linéaires en espace des vitesses entre les noeuds les plus proches. Ces interpolations sont prises en compte lors de la construction des matrices



**FIGURE 2.14:** Exemple de problème de couplage explicite/explicite pour la simulation de grand délaminage utilisant la méthode GC. Source [DUP 11].

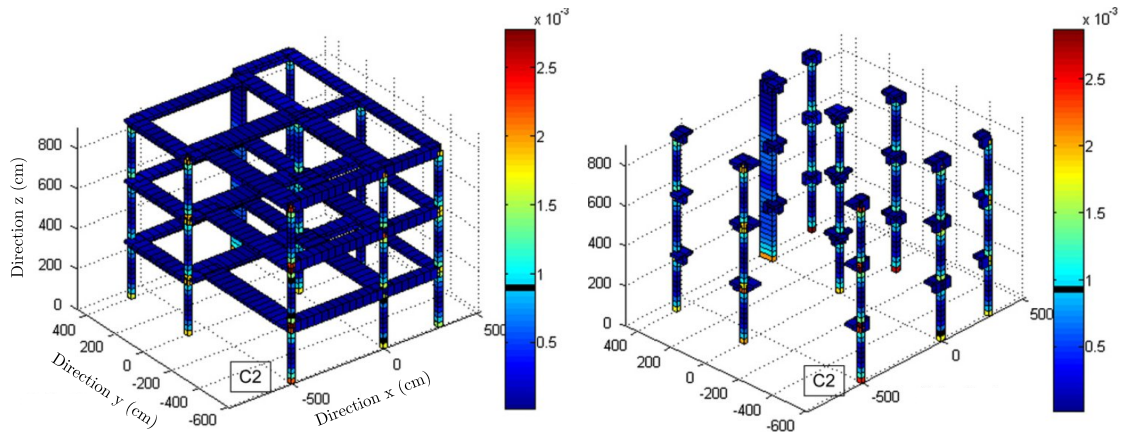
$C_d$  associées aux différents sous-domaines. Dans le cas de maillages compatibles, cet opérateur tend vers une matrice booléenne signée.

#### Mise en œuvre de la méthode GC

Dans [FAU 03] une extension de la méthode GC a été réalisée. Cette extension consiste à coupler différents sous-domaines explicites avec différents pas de temps. Le pas de temps d'un sous-domaine est fixé par le critère de stabilité de l'algorithme de Newmark. Cela a ainsi conduit les auteurs à utiliser des maillages incompatibles afin d'obtenir des rapports de pas de temps intéressants. Par ailleurs, la particularité de ce travail a consisté à ajouter une méthode de réduction modale dans un sous-domaine ayant un comportement linéaire.

La méthode GC a également été mise en œuvre dans [DUP 11] pour mettre en place une stratégie d'analyse de grands délaminages en dynamique transitoire. Dans ces travaux les auteurs proposent un couplage explicite/explicite 2D entre un sous-domaine contenant des éléments de zone cohésive et le domaine complémentaire contenant des éléments coques spécifiquement développés. Une illustration d'un cas test réalisé dans ce travail est proposé sur la figure 2.14. On distingue sur cette figure la partie centrale dans laquelle se propagent les délaminages, maillée finement, et la partie complémentaire constituée de deux sous-domaines maillés plus grossièrement, *via* l'utilisation des éléments plaque. Des maillages incompatibles sont utilisés à l'interface de ces sous-domaines afin d'obtenir des rapports de pas de temps intéressants du point de vue du temps de calcul. Le rapport entre le pas de temps du domaine central maillé finement et celui de la partie complémentaire est gouverné par le pas de temps critique propre au sous-domaine du fait du couplage explicite/explicite.

[BRU 11] a mis en place un couplage avec cette méthode entre le code de dynamique explicite Europlexus et le code de dynamique implicite CAST3M pour simuler la réponse dynamique de bâtiments lors d'un tremblement de terre. Le cas test présenté dans cet article est présenté sur la figure 2.15. La géométrie complète de l'étude est visible sur la partie gauche de la figure 2.15. La partie de cette géométrie traitée avec le code explicite est visible sur la partie de droite de cette même figure. La partie complémentaire de cette



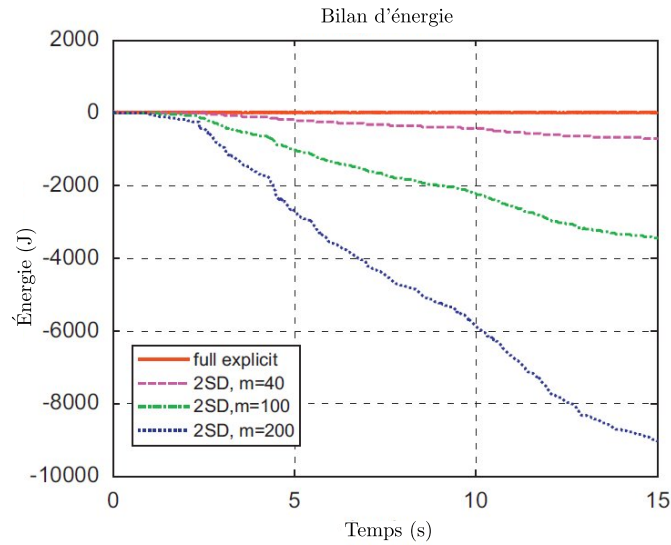
**FIGURE 2.15:** Comparaison de l'endommagement obtenu dans la structure entre le calcul de référence entièrement explicite à gauche et le calcul couplé implicite/explicite à droite avec un rapport de pas de temps de 200. Source [BRU 11].

partie est traitée avec le code implicite CAST3M. Cette décomposition de domaine conduit à un opérateur d'interface qui a une taille de  $396 \times 396$ . La structure maillée avec des éléments poutre contient 729 éléments et 708 noeuds, contenant chacun 6 degrés de liberté. Une étude de l'état de l'endommagement obtenu dans la structure par la méthode proposée et par un calcul entièrement explicite est réalisée. Un exemple de résultat obtenu est proposé sur la figure 2.15. Une étude de la dissipation numérique interfaciale liée à l'utilisation de la méthode GC est également proposée sur ce même cas test. Un exemple de résultat obtenu est proposé sur la figure 2.16 où l'évolution de la dissipation en fonction du rapport de pas de temps est visible. L'énergie dissipée est à comparer avec l'énergie totale du système qui est de l'ordre de  $5.10^5$  J à la fin de la simulation.

## 2.7.2 Méthode PH

Par la suite, Prakash et Hjelmstad ont proposé la méthode multiéchelle en temps (méthode PH) inspirée des travaux précédents. Plus de détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans les références suivantes [PRA 04, PRA 07]. Comme la méthode GC, cette méthode propose une méthode de couplage multiéchelle en temps pour coupler arbitrairement différents schémas de Newmark, avec différentes échelles de temps dans plusieurs sous-domaines. Il a été montré qu'elle conserve l'énergie du système quel que soit le ratio de pas de temps utilisé. Il n'y a donc pas de dissipation d'énergie interfaciale dans cette méthode, contrairement à la méthode GC. De plus, à la différence de la méthode GC cette méthode a pour principe de rechercher la continuité des vitesses sur l'interface aux instants de l'échelle grossière en temps, ce qui permet de limiter le nombre de résolution du problème d'interface. Cependant, cela nécessite une procédure itérative en présence de non-linéarité qui peut conduire à des temps de calculs plus importants que la méthode GC en présence de non-linéarités.

Avec le découpage sans et avec liaison, évoqué précédemment sur l'échelle grossière



**FIGURE 2.16:** Comparaison de la dissipation interfaciale numérique en fonction des rapports de pas de temps  $m = 40, 100$  et  $200$  et la solution entièrement explicite. L'énergie totale du système à la fin de la simulation est de l'ordre de  $5 \cdot 10^5$  J. Source [BRU 11].

en temps, la condition de continuité de la vitesse interfaciale s'écrit sous la forme suivante :

**Équation de continuité (méthode PH)**

$$\mathbf{C}_1 \left( \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+m}}^{\text{sl}} + \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+m}}^{\text{al}} \right) + \mathbf{C}_2 \left( \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{sl}} + \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{al}} \right) = \mathbf{0} \quad (2.84)$$

Elle diffère de celle de la méthode GC (2.76), car elle est recherchée aux pas de temps du domaine macroscopique en temps contrairement à la méthode GC où la continuité de la vitesse interfaciale est recherchée à tous les pas de temps. La stratégie de la méthode PH consiste alors à interpoler linéairement les différentes quantités cinématiques du domaine  $\Omega_2$  (domaine grossier en temps) entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+m}$  en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+j}}^{\text{nl sl}} = \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \dot{\mathbf{u}}_{2_n}^{\text{nl}} + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{2_n}^{\text{nl sl}} \\ \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+j}}^{\text{nl al}} = \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{nl sl}} \end{cases} \quad (2.85)$$

Il faut bien noter la présence de l'indice *nkl* qui indique que le vecteur interpolé est celui de Newmark, que l'on a défini dans la relation (2.26), page 37.

Les deux relations d'interpolation de (2.85), réinjectées dans l'équation d'équilibre du sous-domaine grossier en temps ( $\Omega_2$ ) permettent d'évaluer les résidus interpolés des problèmes avec et sans liaisons aux instants  $t_{n+j}$  de l'échelle fine en temps (échelle de temps du sous-domaine  $\Omega_1$ ). La trace sur l'interface du problème sans liaison est en particulier

notée  $\mathbf{s}_{n+j}$ . Et elle est définie par la relation suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{s}_{n+j} = \mathbf{C}_2 \left[ \mathbf{M}_2 \left( \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \ddot{\mathbf{u}}_{2n} + \frac{j}{m} \ddot{\mathbf{u}}_{2n+m}^{\text{sl}} \right) + \mathbf{K}_2 \left( \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \mathbf{u}_{2n} + \frac{j}{m} \mathbf{u}_{2n+m}^{\text{sl}} \right) - \mathbf{f}_{2n+j}^{\text{ext}} \right] \quad (2.86)$$

En passant les étapes de calcul, le problème couplé suivant est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{nkl}} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{ph}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\text{nkl}} & \mathbf{C}_2^{\text{nkl}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_1^{\text{nkl}T} & \mathbf{C}_2^{\text{nkl}T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{nkl}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{2n+m}^{\text{nkl}} \\ -\lambda_{n+m}^{\text{nkl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{ph}} \\ \mathbf{f}_{2n+m}^{\text{nkl}} - \mathbf{N}_2^{\text{nkl}} \dot{\mathbf{u}}_{2n}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

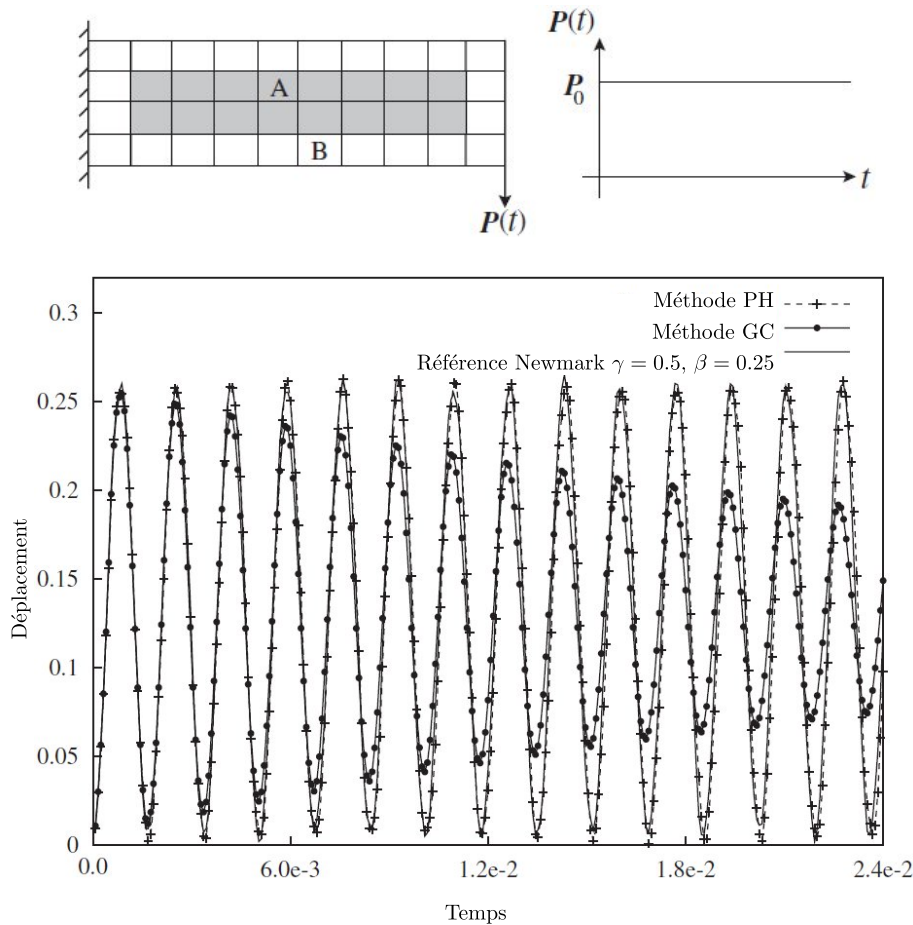
En reprenant les notations introduites dans (2.25), page 37, et avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{nkl}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\text{nkl}} & & & & \\ \mathbf{N}_1^{\text{nkl}} & \mathbf{A}_1^{\text{nkl}} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{N}_1^{\text{nkl}} & \mathbf{A}_1^{\text{nkl}} & \\ & & & & \mathbf{A}_1^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{ph}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \frac{1}{m} \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \frac{m}{m} \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{nkl}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1n+1}^{\text{nkl}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{1n+2}^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{1n+m}^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{ph}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1n+1}^{\text{nkl}} + \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \mathbf{s}_{1n+1}^{\text{nkl}} - \mathbf{N}_1^{\text{nkl}} \dot{\mathbf{u}}_{1n}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{f}_{1n+2}^{\text{nkl}} + \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \mathbf{s}_{1n+2}^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{1n+m}^{\text{nkl}} + \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \mathbf{s}_{1n+m}^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_1^{\text{nkl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{s}_{1n+j}^{\text{nkl}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{1n+j}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{\text{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{n+m}^{\text{nkl}} = \begin{bmatrix} \lambda_{n+m} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Le système (2.87) est alors résolu en trois étapes (problèmes sans liaison, problème d'interface, problèmes avec liaison) de manière analogue à ce qui a été fait dans la méthode duale pour le système 2.66, page 59. La particularité ici est que la première relation de (2.87) est un problème d'évolution nécessitant  $m$  pas de temps. Il faut noter également que la résolution des problèmes sans liaison de ce système nécessite une résolution séquentielle. En effet, le problème sans liaison du sous-domaine macro en temps doit être résolu en premier afin de pouvoir évaluer les projections des résidus d'interface des problèmes sans liaison interpolés aux pas de temps micro  $\mathbf{s}_{n+j}$  avec la relation (2.86). Ces quantités sont nécessaires pour évaluer le terme  $\mathbf{b}_{1n \rightarrow n+m}^{\text{ph}}$ . La boucle sur les pas de temps micro sans liaison peut ensuite être réalisée pour calculer les problèmes sans liaison du sous-domaine fin en temps. De même, le calcul de l'opérateur d'interface est plus coûteux que celui de la méthode GC, car la contribution dans cet opérateur du sous-domaine fin en temps nécessite de résoudre autant de fois qu'il y a de degrés de liberté sur l'interface



## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite



**FIGURE 2.17:** Comparaison de l'évolution du déplacement obtenu au centre de la poutre encastree entre la méthode PH, la méthode GC et le calcul de référence monoéchelle en temps. Les paramètres de Newmark sont  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$  et le rapport de pas de temps utilisé pour la méthode PH et GC est de 10. Source [PRA 04].

un problème incrémental contenant  $m$  pas de temps. En revanche, la contribution dans le domaine grossier en temps est la même.

L'algorithme résultant de cette méthode est schématisé sur la figure 2.19 page 75. Une comparaison de cette méthode avec la méthode GC est proposée dans [PRA 04]. Dans cette étude, différents cas tests académiques de dynamique linéaire sont réalisés. Un exemple de cas test réalisé dans cette étude est reporté sur la figure 2.17. On y voit la comparaison des déplacements obtenus au centre de la poutre encastree entre la méthode PH, la méthode GC et le calcul de référence monoéchelle en temps. Les paramètres de Newmark sont  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$  et le rapport de pas de temps utilisé pour la méthode PH et GC est de 10. Ce cas test permet de montrer la conservation de l'énergie de la méthode PH contrairement à la méthode GC. La méthode PH a récemment été étendue dans un cadre non-linéaire dans [PRA 07, PRA 14]. Cependant il n'y a pas de preuve de non-dissipation de l'énergie de la méthode PH dans ce cas. En pratique, pour les applications

en non-linéaire, la méthode PH semble néanmoins moins intéressante que la méthode GC, car les itérations non-linéaires doivent être réalisées sur l'échelle grossière en temps, conduisant à un coût numérique plus important que la méthode GC. Aussi, il est possible de contrôler l'énergie numérique dissipée dans la méthode GC en jouant sur le ratio  $m$  entre les différentes échelles de temps. Ceci sera étudié plus en détail dans les chapitres suivants, à travers les différentes applications de la méthode.

### 2.7.3 Méthode GC bis

La méthode GC bis développée dans [MAH 10a] puis dans [BRU 14] est une variante des deux méthodes que l'on vient de présenter (méthode GC et méthode PH) puisqu'elle utilise une interpolation temporelle des quantités cinématiques du sous-domaine grossier en temps  $\Omega_2$  similaire à celle de la méthode GC. Cependant la continuité de la vitesse au niveau de l'interface est recherchée uniquement sur l'échelle de temps grossière comme la méthode PH. Ainsi les quantités cinématiques du sous-domaine grossier en temps  $\Omega_2$  sont linéairement interpolées aux instants de l'échelle fine par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{u}_{2_{n+j}}^{\text{nl sl}} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{u}_{2_n}^{\text{nl sl}} + \frac{j}{m} \mathbf{u}_{1_{n+m}}^{\text{nl sl}} \\ \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{u}_{2_{n+j}}^{\text{nl al}} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{u}_{2_n}^{\text{nl al}} + \frac{j}{m} \mathbf{u}_{2_{n+m}}^{\text{nl al}} \end{cases} \quad (2.89)$$

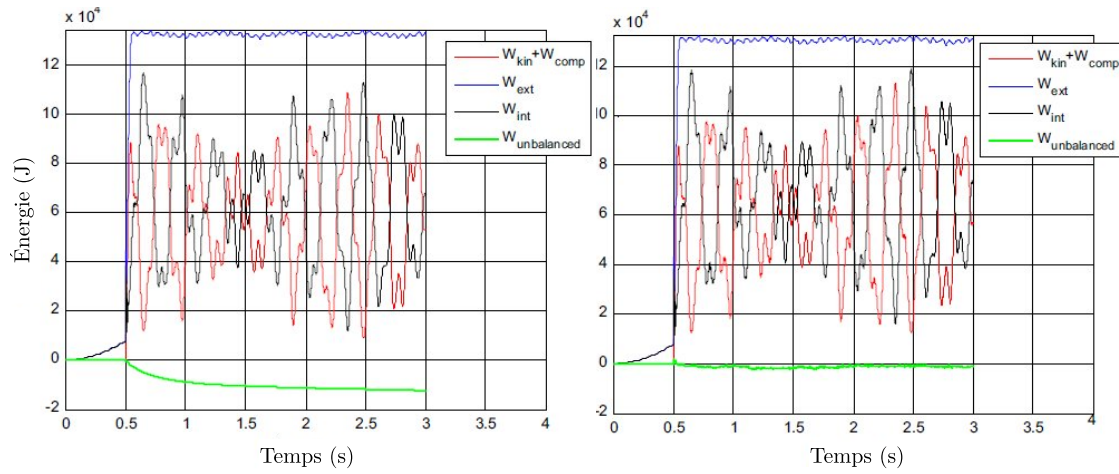
Il faut bien noter la distinction d'interpolation entre cette méthode et la méthode PH. En effet, ici on distingue les contributions cinématiques du problème avec et sans liaisons de l'instant  $t_n$ , qui sont respectivement réparties dans l'interpolation des quantités cinématiques prises à l'instant  $t_{n+j}$  avec et sans liaison. Dans l'interpolation cinématique de la méthode PH, la totalité de la contribution cinématique du problème avec et sans liaisons de l'instant  $t_n$  (donc  $\mathbf{u}_{2_n}^{\text{nl}}$ ) est attribuée à la quantité cinématique sans liaisons prise à l'instant  $t_{n+j}$ . De manière analogue à la méthode PH, les deux relations d'interpolation (2.89) permettent d'évaluer le résidu des problèmes dans ce domaine  $\Omega_2$  avec et sans liaisons aux instants  $t_{n+j}$  de l'échelle fine du sous-domaine  $\Omega_1$ . Avec cette interpolation, il peut être montré, en faisant l'hypothèse que les forces extérieures du domaine grossier en temps sont linéairement interpolées sur l'échelle de temps fine ( $\mathbf{f}_{2_{n+j}}^{\text{ext}} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{f}_{2_n}^{\text{ext}} + \frac{j}{m} \mathbf{f}_{2_{n+m}}^{\text{ext}}$ ), que l'effort d'interface peut également être interpolé linéairement par la relation suivante :

$$\lambda_{n+j} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \lambda_n + \frac{j}{m} \lambda_{n+m} \quad (2.90)$$

Le système couplé obtenu peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{nl}} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{ph}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\text{nl}} & \mathbf{C}_2^{\text{nl}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_1^{\text{nl}T} & \mathbf{C}_2^{\text{nl}T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{nl}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{nl}} \\ -\lambda_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{gcb}} \\ \mathbf{f}_{2_{n+m}}^{\text{nl}} - \mathbf{N}_2^{\text{nl}} \dot{\mathbf{u}}_{2_n}^{\text{nl}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

## 2. Méthodes numériques pour le développement d'un couplage structure structure avec des codes implicite et explicite



**FIGURE 2.18:** Comparaison entre le bilan énergétique obtenu avec la méthode GC (à gauche) et celui obtenu avec la méthode GC bis (à droite) pour un rapport de pas de temps de 40 sur le cas test présenté figure 2.15, page 69, dans un cadre linéaire. Source [BRU 14].

avec les notations introduites dans (2.88) page 71 et :

$$\mathbf{b}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{gcb}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1_{n+1}}^{\text{nkl}} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \lambda_n^{\text{nkl}} - \mathbf{N}_1^{\text{nkl}} \mathbf{u}_{1_n}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{f}_{1_{n+2}}^{\text{nkl}} + \left(1 - \frac{2}{m}\right) \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \lambda_n^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{1_{n+m}}^{\text{nkl}} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Une stratégie avec et sans liaison analogue à celle réalisée dans la méthode PH pour le système (2.87), page 71, est alors utilisée pour résoudre le système (2.91). Cela conduit à un algorithme schématisé sur la figure 2.19, page 75. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode PH est que l'étape de calcul des problèmes sans liaison est parallélisable, puisque le second membre de sa première relation ( $\mathbf{b}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{gcb}}$ ) ne dépend plus du sous-domaine complémentaire, mais uniquement de l'effort d'interface de l'instant  $t_n$  qui est connu au moment de la résolution. Cependant, de l'énergie numérique est dissipée à l'interface dans cette méthode, comme l'on montré [BRU 14]. Une implémentation par couplage de code de cette méthode est proposée dans [BRU 14]. Une comparaison entre cette méthode et la méthode GC est également réalisée. La comparaison entre le bilan énergétique obtenu avec la méthode GC et celui obtenu avec la méthode GC bis extrait de cette étude est visible sur la figure 2.18. Ce résultat est obtenu dans un cadre linéaire. Les auteurs reprennent la géométrie du bâtiment présenté précédemment sur la figure 2.15, page 69, et ils utilisent un rapport de pas de temps de 40. Ce résultat montre que cette méthode dissipe de l'énergie à l'interface comme la méthode GC. Cependant la dissipation est plus faible dans le cas de la méthode GC bis.

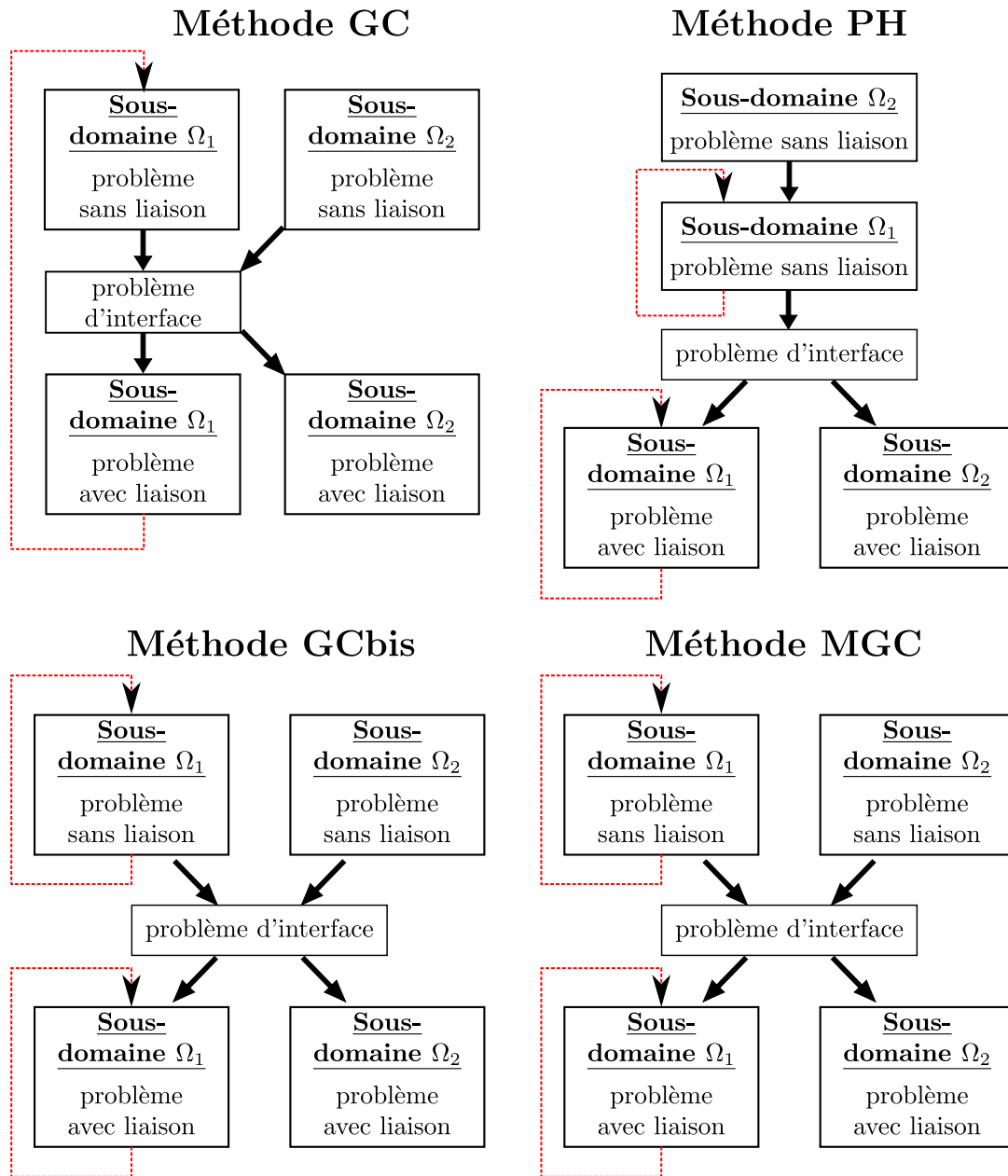


FIGURE 2.19: Schématisation des méthodes GC, PH, GCbis et MGC.

### 2.7.4 Méthode MGC

N.Mahjoubi [MAH 10b, MAH 10c, MAH 10a] a apporté une nouvelle vision de la technique de raccord temporel. Pour la mettre en œuvre il est reparti du formalisme variationnel du problème de mécanique continu linéaire qu'il intègre sur le temps entre deux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . De cette manière, il "relaxe" l'équation du mouvement en la vérifiant uniquement à un instant noté  $t_{n+\xi}$  (pour le cas particulier des schémas de Newmark, il montre que  $\xi = \gamma$  par une analyse énergétique). Il montre par ce formalisme que la condition de raccord entre les sous-domaines à vérifier pour ne pas introduire de dissipation est de vérifier que, en moyenne sur le temps, la continuité du champ de vitesse à l'interface des deux domaines est nulle sans faire d'hypothèse sur le schéma d'intégration en temps. Ainsi la technique de couplage mise en place permet d'étendre la méthode de couplage à d'autres schémas d'intégration en temps. Cette technique n'est pas limitée aux schémas d'intégration de Newmark, contrairement aux méthodes GC, GC bis, et PH. Cependant, elle est écrite pour des problèmes d'élasticité linéaire avec l'hypothèse des petites perturbation.

### 2.7.5 Méthode MGC dans le cas mono-échelle en temps

L'équation de continuité obtenue sous la forme continue en temps est la suivante pour un cas mono-échelle en temps :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 dt = \mathbf{0} \quad (2.93)$$

Elle peut ainsi être approximée par les méthodes présentées ci-dessous.

- **Introduction d'une primitive de ( $\Delta \mathbf{u} = \int \dot{\mathbf{u}} dt$ )**

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 dt = \mathbf{C}_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{C}_2 \Delta \mathbf{u}_2 \quad (2.94)$$

- **Approximation au premier ordre en introduisant la notion de moyenne arithmétique**

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 dt \simeq \Delta t (\mathbf{C}_1 \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{1_{n+1}} + \mathbf{C}_2 \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{2_{n+1}}) \quad (2.95)$$

Avec  $\bar{\dot{\mathbf{u}}}_{d_{n+1}}$  une approximation de la valeur moyenne de la vitesse sur l'intervalle de temps  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{u}}_d dt$

Le système couplé, une fois discrétisé en temps à l'aide d'un schéma d'intégration de Newmark, peut être mis sous la forme suivante, dans le cas de l'approximation de

l'intégrale de compatibilité de la vitesse interfaciale à la moyenne arithmétique ( $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_{n+1}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_{n+1}} + \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_n}}{2}$ ) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\text{mgc}} & -\mathbf{C}_2^{\text{nkl}} \\ -\mathbf{C}_1^{\text{nkl}T} & -\mathbf{C}_2^{\text{nkl}T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{u}}_{1_{n+1}}^{\text{nkl}} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+1}}^{\text{nkl}} \\ \lambda_{n+1}^{\text{nkl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1_{n+1}}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{b}_{2_{n+1}}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{w}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Avec les notations introduites précédemment ainsi que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{d}}^{\text{mgc}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{d}}^{\text{mgc}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta_d \Delta t}{\gamma_d} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\gamma_d \Delta t} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, & \Delta \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{nkl}} &= \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{nkl}} - \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_n}^{\text{nkl}}, \\ \mathbf{w}_{12} &= \begin{bmatrix} -2\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1_n} - 2\mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2_n} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{mgc}} &= \mathbf{f}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_{\mathbf{d}}^{\text{mgc, nkl}} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}_n}^{\text{nkl}}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{mgc}} = \begin{bmatrix} \gamma_d \mathbf{f}_{\mathbf{d}_{n+1}}^{\text{ext}} + (1 - \gamma_d) \mathbf{f}_{\mathbf{d}_n}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{\mathbf{d}}^{\text{mgc}} = \begin{bmatrix} \gamma_d \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{d}} & \mathbf{K}_{\mathbf{d}} & \left(\frac{\gamma_d}{2} - \beta_d\right) \Delta t^2 \mathbf{K}_{\mathbf{d}} \\ \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{0} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_d}{\gamma_d}\right) \Delta t^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\gamma_d} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Où l'opérateur dynamique du sous-domaine  $d$  s'exprime de la façon suivante  $\mathbf{K}_{\mathbf{d}}^{\text{mgc}} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_{\mathbf{d}} + \beta_d \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{d}}$ . Le système (2.96) obtenu est donc différent de celui obtenu par une méthode de couplage duale avec un schéma de Newmark, ou avec la méthode GC mono-échelle en temps. Ceci provient de la relaxation de l'équation d'équilibre, qui n'est plus vérifiée au pas de temps  $t_{n+1}$  mais à un instant entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Sa résolution peut alors être faite en utilisant une stratégie avec et sans liaison, comme celle présentée dans la résolution du problème couplé avec la méthode de décomposition de domaine duale, page 59.

## 2.7.6 Méthode MGC dans le cas multiéchelle en temps

Dans ce cas, la condition de continuité des vitesses au niveau de l'interface peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\int_{t_n}^{t_{n+m}} \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 dt = \sum_{j=1}^m \Delta t \mathbf{C}_1 \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n+j-1}}^{t_{n+j}} \dot{\mathbf{u}}_1 dt + m \Delta t \mathbf{C}_2 \frac{1}{m \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+m}} \dot{\mathbf{u}}_2 dt = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

On utilise là aussi, les approximations des intégrales de vitesse à leur moyenne arithmétique, comme cela a été fait précédemment pour le cas mono-échelle en temps. En passant les étapes de calculs, le système couplé suivant peut être obtenu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{mgc}} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\text{mgc}} & \mathbf{C}_2^{\text{nkl}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_1^{\text{mgc}T} & \mathbf{C}_2^{\text{mgc}T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{u}}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{nkl}} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}}_{2_{n+m}}^{\text{nkl}} \\ -\lambda_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{f}_{2_{n+m}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_2^{\text{mgc}} \dot{\mathbf{u}}_{2_n}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

en utilisant les notations introduites précédemment ainsi que :

$$\mathbf{A}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{mgc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\text{mgc}} & & & & \\ \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{A}_1^{\text{mgc}} & & & \\ \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{A}_1^{\text{mgc}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \dots & \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} & \mathbf{A}_1^{\text{mgc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{nkl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1^{\text{nkl}} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_1^{\text{mgc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1_{n+1}}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{C}_{1_{n+2}}^{\text{mgc}} \\ \mathbf{C}_{1_{n+3}}^{\text{mgc}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{1_m}^{\text{mgc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{1_{n \rightarrow n+m}}^{\text{mgc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1_{n+1}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} \dot{\mathbf{u}}_{1_n}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{f}_{1_{n+2}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} \dot{\mathbf{u}}_{1_n}^{\text{nkl}} \\ \mathbf{f}_{1_{n+3}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} \dot{\mathbf{u}}_{1_n}^{\text{nkl}} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{1_{n+m}}^{\text{mgc}} - \mathbf{N}_1^{\text{mgc}} \dot{\mathbf{u}}_{1_n}^{\text{nkl}} \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{C}_{d_j}^{\text{mgc}} = (2(m-j) + 1) \Delta t \mathbf{C}_d^{\text{nkl}}, \quad d \in \{1, 2\}$$

Une méthode avec et sans liaison est utilisée pour résoudre le système (2.99). L'algorithme qui en découle est schématisé sur la figure 2.19, page 75. Il nécessite la résolution d'un problème incrémental à m pas de temps pour réaliser le calcul des problèmes avec et sans liaisons de l'échelle de temps fine. Le système à résoudre est effectivement similaire à celui de la méthode GC bis.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer que la recherche d'une solution approchée du problème de mécanique continu conduit à la résolution d'une succession de systèmes. Ces systèmes peuvent être explicite ou implicite dans le cas d'une discrétisation en temps par les schémas de Newmark. Or ces deux classes d'algorithme impliquent une répartition des coûts de calculs différente ainsi que des techniques et des stratégies de résolution adaptées. Différentes approches permettant d'allier les performances de ces deux types d'algorithme ont alors été présentées. Il est donc intéressant d'appliquer l'une d'elles dans le cadre de la problématique des impacts de faible énergie.

## Chapitre 3

# Mise en place peu intrusive de la méthode GC par couplage de codes

Dans cette partie, nous reprenons les conclusions qui ont été faites dans les deux chapitres précédents. Elles permettent de dégager des arguments qui justifient la stratégie proposée ici. Cette dernière porte sur le développement d'un couplage peu intrusif entre le code de calcul implicite *Zset/Zébulon* et le code de calcul de dynamique explicite *Europlexus*, par la méthode GC. Il y est également exposé les choix techniques qui ont été faits pour mettre en place cet outil. Différents cas de validation de la méthode proposée sont présentés et des résultats de calculs d'impact de faible énergie sur un panneau composite raidi qui ont fait l'objet de l'article [CHA 14] sont également mis en avant. Ils permettent de démontrer que cette méthode est efficace dans notre cas. Ces calculs mettent également en évidence des axes de progressions qui seront réalisés dans ce travail et développés dans le chapitre suivant.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Orientation du travail de thèse et définition de sa problématique . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Choix de la méthode de couplage entre un algorithme implicite et un algorithme explicite . . . . .</b>	<b>82</b>
3.2.1	Limitations <i>a priori</i> de la méthode choisie . . . . .	83
<b>3.3</b>	<b>Approche peu intrusive par couplage de codes implicite et explicite basée sur la méthode GC . . . . .</b>	<b>84</b>
3.3.1	Choix du couple de codes utilisés pour le couplage . . . . .	85
<b>3.4</b>	<b>Validation de l'implémentation de la méthode de couplage proposée . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>3.5</b>	<b>Simulations numériques d'impact de faible énergie sur panneau composite raidi par couplage de codes implicite/explicite . . . . .</b>	<b>102</b>
3.5.1	Cas d'étude . . . . .	102
3.5.2	Modélisation mésoscopique des plis . . . . .	103
<b>3.6</b>	<b>Analyse et comparaison de la méthode proposée vis-à-vis d'une solution explicite . . . . .</b>	<b>104</b>



3.6.1	Analyse de la dissipation interfaciale due à l'utilisation de la méthode GC . . . . .	106
3.6.2	Analyse des temps de calcul dans la méthode de couplage . . . . .	108
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>110</b>

---

### 3.1 Orientation du travail de thèse et définition de sa problématique

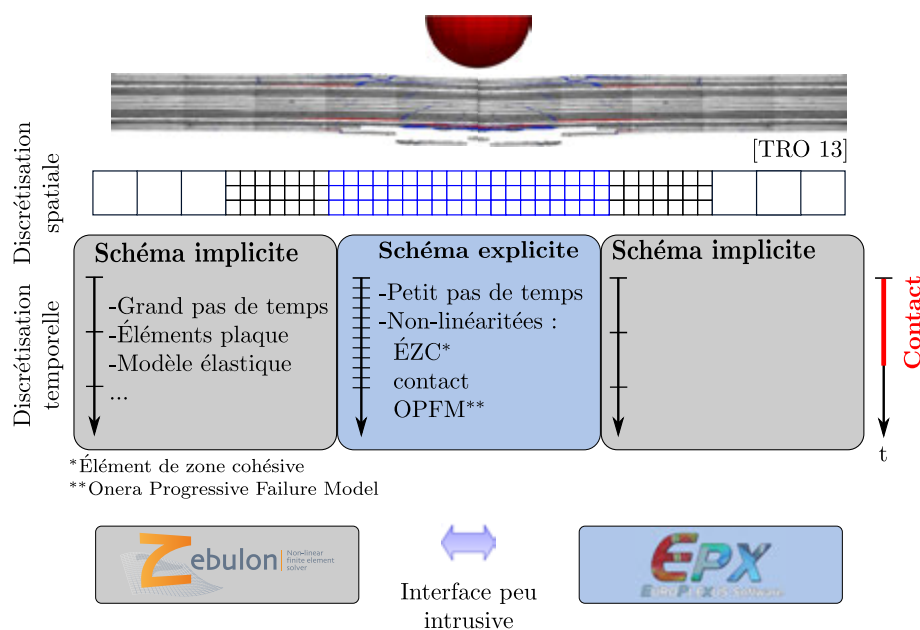
Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les dégradations post-impact sont contenues dans le cône d'endommagement. Or, c'est dans cette zone que se trouvent les principales sources de difficultés numériques. De fortes sources de non-linéarités y sont effectivement présentes (contact, endommagements, délaminages,...). Une grande partie des études réalisées dans ce domaine sont ainsi conduites avec des codes explicites afin d'obtenir une solution suffisamment précise. Certains travaux, comme ceux de [DEL 11], utilisent des codes implicites, bien que la convergence de ces algorithmes soit délicate ici. Par ailleurs, la taille de maille requise est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un pli, soit quelques dixièmes de millimètres. Elle est nécessaire au moins dans la zone d'impact, afin d'obtenir des résultats pertinents en termes d'endommagement. Cela conduit ainsi à utiliser un pas de temps qui est de l'ordre de grandeur de la dizaine de nanosecondes pour satisfaire la condition de stabilité des codes explicites (condition CFL). L'ordre de grandeur du temps de simulation est de quelques millisecondes. Ainsi un grand nombre d'incrément explicites doit être considéré. Le pas de temps utilisé dans les algorithmes explicites est proche du pas de temps critique et il est identique dans toute la structure. Une grande partie du modèle numérique est donc calculée avec un pas de temps bien plus petit que celui réellement nécessaire, ce qui conduit à un sur-coût. Il s'agit de la zone où le maillage est dérafiné par rapport à la densité utilisée dans la zone d'impact. Ce sur-coût est d'autant plus important que le temps caractéristique du phénomène à simuler est long. Nous proposons donc, de tirer parti de la localisation spatiale des endommagements pour adopter une stratégie multiéchelle en espace et en temps numérique. Cette stratégie consiste ainsi à découper la structure en deux zones d'espace (aspect multiéchelle en espace) dans le but de séparer les difficultés et les coûts numériques. L'une est située autour du point d'impact, elle doit contenir l'ensemble des endommagements. Elle est ainsi traitée avec un algorithme explicite et un pas de temps relativement fin. Dans ce sous-domaine, tous les éléments ont globalement la même taille et le même pas de temps critique. L'autre correspond à la partie complémentaire de cette première, le problème mécanique y est beaucoup plus régulier. La stabilité inconditionnelle des algorithmes implicites est ainsi mise à profit afin d'utiliser un pas de temps relativement plus grand, ce qui permet ainsi de soulager le coût du calcul. L'aspect multiéchelle en temps prend donc son sens ici puisque chaque zone a sa propre échelle de temps numérique (une échelle de temps numérique fine dans la partie explicite et une plus grossière dans la partie complémentaire). L'objectif étant de faire focaliser la puissance de calcul dans la partie explicite. Une illustration synthétique de la stratégie est proposée sur la figure 3.1. Pour la mettre en place, nous proposons de choisir une méthode de couplage qui permet le raccord entre les deux zones d'espace et de temps numérique évoquées, sachant que la partie explicite est sujette à de fortes sources de non-linéarité.

## 3.2 Choix de la méthode de couplage entre un algorithme implicite et un algorithme explicite

La stratégie proposée nécessite de découper spatialement la structure en deux zones. Comme nous l'avons vu dans la partie relative aux méthodes de décomposition en sous-domaines du chapitre 2, un premier choix doit ainsi être fait entre une technique de découpage avec ou sans recouvrement. Le recouvrement peut être utile, en particulier pour adoucir la transition d'une modélisation à l'autre dans la zone où plusieurs modélisations coexistent. Un exemple d'application est proposé dans les travaux de [GHA 13]. Ils permettent de raccorder un modèle 1D avec un modèle 3D pour la simulation de machines tournantes où chaque sous-domaine a sa propre échelle de temps. Cependant, les travaux de [TOU 12], entre autres, ont montré que la règle d'intégration à mettre en place dans la zone de recouvrement volumique est délicate pour des maillages incompatibles. Notre choix s'oriente ainsi vers une stratégie de découpage sans recouvrement. Cela permet de minimiser la taille de l'opérateur d'interface et les flux d'échanges d'information entre la partie implicite et la partie explicite. En effet, ces méthodes nécessitent un raccord en surface, alors que les stratégies avec recouvrement nécessitent un raccord en volume pour des cas standards de couplage 3D/3D. L'espace des multiplicateurs de Lagrange qui permet le collage entre les deux zones évoquées est ainsi minimisé. Parmi les méthodes de la littérature qui entrent dans le cadre d'une décomposition de domaine sans recouvrement, avec la possibilité d'avoir des pas de temps différents, notre choix s'est porté sur la méthode GC. Elle permet effectivement le couplage d'un algorithme explicite et d'un algorithme implicite, où les deux types d'algorithmes sont issus des schémas d'intégration en temps de la famille de Newmark. De plus, elle permet *a priori* de gérer les non-linéarités présentes dans notre problème, et ceci de manière plus efficace, du point de vue du coût du calcul, que les méthodes GC bis et PH. En effet, ces deux dernières peuvent également coupler des algorithmes implicite et explicite, mais elles nécessitent des itérations dans le domaine grossier en temps en présence de non-linéarités. Et ce, même si, ces dernières sont uniquement présentes dans la partie avec l'échelle de temps la plus fine. Cela conduit ainsi, dans notre cas, à un ensemble d'incrément dans le domaine explicite pour chaque itération globale. Or, ces boucles ne sont pas envisageables ici car les incrément explicites sont relativement coûteux en temps CPU, ce qui rend ces méthodes inefficaces par rapport à la méthode GC. Bien que la méthode MGC permette de coupler arbitrairement n'importe quel schéma d'intégration en temps, sans introduire de dissipation interfaciale, elle ne semble pas adaptée à notre problématique car elle ne permet pas pour l'instant de traiter des problèmes non-linéaires.

Par ailleurs, il n'est pas envisageable dans le cadre de cette thèse de développer l'ensemble des outils nécessaires à la simulation des impacts de faible énergie, comme par exemple un algorithme de contact, des éléments de zones cohésives ou encore des lois matériaux adaptées. Pour cela, nous cherchons dans la mesure du possible à nous appuyer sur des outils existants. Il est donc choisi d'adopter une approche de couplage d'algorithme implicite/explicite par un couplage de codes implicite/explicite. Ainsi une

grande partie des outils disponibles dans les codes choisis, et en particulier utiles pour la simulation des impacts de faible énergie sur structure composite pourront être utilisés avec l'approche proposée. Enfin, dans l'optique d'avoir une méthode qui soit extensible pour aller vers l'échelle industrielle, il sera montré également qu'elle est peu intrusive vis-à-vis des développements informatiques à réaliser dans les codes. Un schéma de principe synthétisant les différents aspects de la stratégie qui vient d'être exposée est proposé sur la figure 3.1.



**FIGURE 3.1:** Illustration de la stratégie couplage implicite/explicite proposée entre le code de calcul implicite *Zébulon* et le code de calcul explicite *Europlexus*.

### 3.2.1 Limitations *a priori* de la méthode choisie

Comme vu dans le chapitre 2, la méthode GC est restreinte aux couplages des schémas d'intégration en temps de la famille de Newmark. Cette limitation ne semble pas gênante, car ces algorithmes d'intégration en temps sont présents dans un grand nombre de codes de calcul. Cette méthode peut également entraîner une dissipation d'énergie numérique à l'interface définie par la relation 2.83, page 67. Une attention doit donc être portée sur les conséquences que cela engendre vis-à-vis de notre problématique.

D'autre part, deux cas de figure peuvent se présenter concernant les non-linéarités dans la partie implicite. Soit il y a une présence de non-linéarités dans cette partie et alors l'algorithme GC nécessite une boucle d'itération dans la partie implicite. Cela implique donc de recalculer l'ensemble de la boucle explicite pour chaque itération implicite, comme montré dans [GRA 01], ce qui s'avérerait coûteux dans ce cadre. Soit, il n'y en a pas et par conséquent, aucune boucle d'itération non-linéaire n'est nécessaire. Nous nous restreignons donc à modéliser la partie implicite en linéaire.

Un autre aspect qui semble également important dans la méthode GC concerne la résolution du problème d'interface. En effet, il est résolu à l'échelle du domaine le plus fin en temps. Sa résolution est donc fréquente, et dans un souci de performance on comprend rapidement qu'elle peut être un goulet d'étranglement de la méthode.

Deux paramètres sont importants pour conditionner son efficacité. Le premier concerne le choix de la zone de découpage. En effet, la décomposition de domaine utilisée positionne l'interface dans le maillage, ce qui conditionne sa taille et celle de l'opérateur d'interface qui en découle. Le deuxième point concerne la stratégie de résolution du problème d'interface. En effet, l'opérateur d'interface résulte de la somme des compléments de Schur de chacun des sous-domaines. Or, la contribution d'un sous-domaine explicite dans cet opérateur correspond à la partie diagonale de la matrice des masses, lumpée, projetée sur l'interface et inversée. Cette contribution est donc une matrice diagonale qui a la taille du nombre de degrés de liberté de l'interface. Elle est constante tout au long de la simulation, tant que la masse volumique du domaine ne change pas, même en présence de non-linéarité géométrique [BEL 86]. Un couplage explicite/explicite conduit donc à un opérateur diagonal et constant, ce qui est intéressant puisqu'il est peu coûteux à construire et à inverser. Cependant, cette stratégie nécessite des maillages incompatibles à l'interface afin de pouvoir utiliser des rapports de pas de temps intéressants entre la zone fine en temps et celle plus grossière, comme l'ont montré les travaux de [FAU 03]. Par ailleurs, la contribution de la partie implicite dans l'opérateur d'interface est le complément de Schur de l'opérateur tangent du sous-domaine. Il s'agit donc d'une matrice dense qui a la taille du nombre de degrés de liberté de l'interface. On peut noter également que ce complément de Schur est constant lorsque le sous-domaine est implicite, sous l'hypothèse d'élasticité linéaire en petite perturbation (cas dans lequel se place ce travail). Ainsi, l'opérateur d'interface résultant d'un couplage implicite/explicite est dense. Il est même constant si le sous-domaine implicite est linéaire.

Nous proposons de coupler un code implicite avec un code explicite par la méthode GC. Par ailleurs, du point de vue du coût du calcul, nous nous plaçons dans le cas où le sous domaine implicite est linéaire. La mise en place de cette stratégie est ainsi développée dans ce qui suit.

### **3.3 Approche peu intrusive par couplage de codes implicite et explicite basée sur la méthode GC**

Dans cette section, les choix techniques concernant la mise en œuvre d'un couplage de codes peu intrusifs entre un code implicite et un code explicite par la méthode GC sont exposés. Pour cela le choix du couple de codes de calcul utilisés dans ce travail est d'abord justifié. Puis, l'évaluation de l'intrusivité dans les codes, nécessaire pour la mise en place de la méthode est réalisée.

### 3.3.1 Choix du couple de codes utilisés pour le couplage

Le code de calcul de dynamique implicite non-linéaire et *a fortiori* linéaire *Zset/Zébulon* est utilisé dans ce travail pour la partie implicite. Il est co-développé par l'Onera, le centre des matériaux de l'École des mines de Paris et la société NW numerics. C'est un code orienté objet, écrit en langage C/C++. Ce logiciel présente l'avantage d'être capable de traiter des problèmes industriels, tout en étant suffisamment souple pour expérimenter de nouveaux outils numériques. Pour la partie explicite, le code de dynamique explicite *Europlexus* est utilisé. Il est écrit en langage Fortran et est co-développé par le CEA et le JRC ISPRA en Italie. L'Onera fait partie de son consortium de développement. Le choix de ce couple de codes a été réalisé sur la base de plusieurs arguments. Premièrement l'Onera dispose des fichiers sources de ces deux codes, ce qui permet d'effectuer les développements potentiellement nécessaires pour cette étude. Par ailleurs, *Zset/Zébulon* dispose d'une bibliothèque matériau *Z-mat* qui est également interfacée avec *Europlexus*. Cela permet ainsi l'utilisation des modèles de matériaux composites avancés qui sont développés au Département Mécanique des Structures Composite de l'Onera (DMSC), comme le modèle OPFM [LAU 07] dans une phase de mise en place. Ce couplage peut devenir un goulet d'étranglement pour le code *Europlexus* comme il le sera montré. D'autre part, ces codes de calculs disposent d'ingrédients de modélisation avancés tels que la gestion du contact, des modèles et des éléments de zone cohésive ou encore des outils de maillages. Ces ingrédients peuvent ainsi être utilisés pour réaliser des modèles représentatifs d'impact de faible énergie sur de grandes structures, ce qui permet de démontrer la viabilité de la méthode proposée à cet échelle.

Le couple de codes (*Zset/Zébulon*, *Europlexus*) est choisi dans ce travail. Cependant, nous souhaitons que la méthode mise en place soit la moins intrusive possible en termes de programmation. Ainsi, elle pourra être étendue à d'autres couples de codes de calcul, ce qui est un pas pour aller vers une phase d'industrialisation. Pour cela, nous proposons d'identifier les flux de données ainsi que les points d'entrée qu'elle nécessite dans ces derniers pour la mettre en œuvre.

#### 3.3.1.1 Identification des flux de données et des points d'entrée dans les codes nécessaires à la mise en œuvre de la méthode GC par couplage de codes

Pour réaliser cette étape d'identification, nous adoptons une vision par code. Chaque code associé à un sous-domaine doit ainsi résoudre un système qui a la forme de celui présenté dans la relation (2.21), page 35, où les quantités qui interviennent sont relatives au sous-domaine qu'il traite. Bien entendu, dans la pratique, ce système peut éventuellement être simplifié dans le cas explicite et dans le cas implicite linéaire comme nous l'avons montré. Nous cherchons donc à réaliser l'avancée d'un pas de temps dans l'un des codes. En adoptant cette vision, il peut être constaté que les trois étapes de la méthode de décomposition de domaine duale sont retrouvées pour chaque pas de temps. Les flux de données nécessaires entre ces trois étapes sont ainsi analysés.

– **Problème sans liaison :**

Une méthode est nécessaire pour extraire la vitesse interfaciale d'un groupe de nœuds du sous-domaine (ici ceux de l'interface) à la fin de chaque problème sans liaison. Un point d'entrée dans le code est donc nécessaire en fin d'incrément. La vitesse interfaciale peut ensuite être envoyée au problème d'interface.

– **Problème avec liaison :**

L'étape du problème avec liaison d'un sous-domaine nécessite l'effort d'interface correspondant à son pas de temps. Le problème avec liaison peut ensuite être résolu. Pour cela, il est nécessaire d'appliquer une condition limite en effort sur un groupe de nœuds (ici ceux de l'interface) en début d'incrément. On peut noter également que les conditions initiales des problèmes avec et sans liaisons d'un sous-domaine doivent être les mêmes. Cela nécessite donc une méthode supplémentaire qui permette d'initialiser les problèmes avec et sans liaison avec les mêmes champs.

– **Problème d'interface :**

L'étape du problème d'interface nécessite les vitesses interfaciales de chaque sous-domaine. Par ailleurs, l'opération d'interpolation de la vitesse interfaciale grossière en temps nécessite le stockage de la vitesse interfaciale sans liaison du sous-domaine grossier en temps de l'instant précédent ( $t_{n-m}$ ). Une fois le problème d'interface résolu, il fournit la condition limite particulière en effort qu'il doit communiquer aux différents sous-domaines lorsqu'ils en ont besoin. C'est à dire lorsque le temps auquel est évalué l'effort d'interface correspond au temps auquel le sous-domaine traite son problème avec liaison.

Les besoins en termes d'intrusivité dans les codes sont maintenant examinés pour résoudre le problème d'interface.

*Résolution du problème d'interface :*

Comme il l'a été montré, l'opérateur d'interface est constant tout au long de la simulation avec nos hypothèses. Nous proposons donc de calculer son inverse en début de calcul. Ainsi, seuls des produits matrice/vecteurs sont à réaliser pour tous les incréments explicites. Une stratégie alternative et équivalente sur le plan du coût numérique est de factoriser l'opérateur d'interface en début de calcul. La résolution consiste alors à réaliser les opérations de descente et de remontée tout au long de la simulation. Seule une stratégie de résolution directe est développée ici. Pour cela, l'assemblage des compléments de Schur de chacun des sous-domaines doit être réalisé. Or la construction d'un complément de Schur fait appel aux mêmes méthodes que celles utilisées pour calculer les problèmes avec et sans liaison. En effet, avec les trois fonctions évoquées, le calcul du complément de Schur d'un sous-domaine peut être réalisé en sollicitant successivement chacun des degrés de liberté de son interface avec un effort unitaire. Les vitesses interfaciales engendrées par ces chargements, moyennant les mêmes conditions initiales, sont alors

récupérées puis stockées pour obtenir le complément de Schur du sous-domaine. Il peut être mentionné également qu'aucune méthode supplémentaire n'est nécessaire dans le cas d'une résolution itérative du problème d'interface. Les vecteurs unitaires de sollicitation utilisés pour le calcul du complément de Schur sont, dans ce cas, simplement remplacés par les directions de recherche données par la méthode itérative, comme celle du gradient conjugué par exemple. Néanmoins, la résolution itérative doit être faite pour chaque pas de temps explicite. C'est pourquoi nous n'utilisons pas cette méthode.

### **Taille des données, fréquence des échanges**

La taille des données à échanger dans la méthode GC est gouvernée par le nombre de degrés de liberté de l'interface. Il peut être noté également que, du point de vue du problème global, ces transferts ne se font pas à la même fréquence. En effet, les échanges de données entre un code et l'entité chargée de résoudre le problème d'interface sont gouvernés par le pas de temps du sous-domaine. Ainsi le sous-domaine fin en temps a un besoin d'échanger de l'information plus fréquemment avec le problème d'interface que le sous-domaine grossier en temps. Ce constat nous conduit donc à localiser spatialement et temporellement les données pour limiter le coût de leurs échanges. Il est donc nécessaire que le problème d'interface soit résolu dans le code qui traite le sous-domaine micro en temps. Par ailleurs, l'organisation des données peut être complètement différente dans chacun des codes, mais de l'extérieur, et en particulier pour le problème d'interface, il est nécessaire qu'elle soit cohérente d'un code à l'autre. Autrement dit, un vecteur comme l'effort d'interface pris à l'extérieur des codes doit pouvoir être interprété dans chacun des codes de la même manière, bien que sa représentation en interne du code puisse être complètement différente. Les deux méthodes évoquées doivent ainsi permettre de réaliser cette cohérence des données. Dans notre cas, un maillage global est généré, puis il est découpé en sous-domaines. Ainsi, la numérotation des noeuds est commune entre chaque sous-domaine. Cette numérotation est alors utilisée pour réaliser l'opérateur de trace évoqué.

#### **3.3.1.2 Bilan des développements à réaliser dans les codes**

Trois méthodes sont donc à développer dans chacun des codes pour mettre en place le couplage proposé.

- L'une consiste à imposer une condition limite en effort sur un groupe de noeuds du sous-domaine en début d'incrément. Il s'agit donc d'une méthode qui existe naturellement dans les codes de calcul pour modifier le second membre du système mécanique à résoudre. La particularité ici est qu'elle doit être interfacée afin d'être utilisable au début de tous les incréments. Sa signature est la suivante :

$$add\_reaction(\hat{\mathbf{f}}, nodes\_ID)$$

Avec  $\hat{\mathbf{f}}$  le vecteur à ajouter sur le groupe de noeuds nommé `nodes_ID`.



- L'autre consiste à récupérer le vecteur vitesse sur un groupe de nœuds du sous-domaine en fin d'incrément. La signature de cette méthode est la suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_{|\text{node\_ID}} = \text{get\_nodal\_velocity}(\text{nodes\_ID})$$

Avec  $\dot{\mathbf{u}}_{|\text{node\_ID}} = \mathbf{C}_{\text{d}_{\text{nodes\_ID}}} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$  le vecteur vitesse du groupe de nœuds `nodes_ID`. Il s'agit là aussi d'une méthode qui existe naturellement dans les codes de calcul par éléments finis. Elle doit simplement être interfacée pour être utilisée à la fin de chaque incrément.

- La troisième est un mécanisme positionné en fin d'incrément qui permet de réinitialiser les champs dans leur état de début d'incrément. Cette méthode permet d'obtenir des conditions initiales identiques dans les problèmes avec et sans liaison, ainsi que lors de la construction des compléments de Schur. Dans le cas d'un code implicite non-linéaire, ce mécanisme est nécessairement présent. C'est celui qui permet de valider une boucle de Newton-Raphson. La particularité ici est qu'il doit être interfacé. Ainsi, il peut être utilisé de l'extérieur afin de réaliser différents passages dans le système linéaire du code implicite avec d'autres seconds membres. De cette manière, le passage successif dans le système linéaire du sous-domaine (problèmes avec et sans liaison, calcul des compléments de Schur) consiste simplement à réaliser les opérations de descente et de remontée de l'opérateur factorisé avec un second membre différent. Dans le code explicite, ce mécanisme n'est pas naturellement présent. Il doit donc être ajouté. Cependant il est relativement simple à mettre en œuvre. En effet, comme le montre la figure 3.3, page 91, il n'est pas nécessaire de recalculer les forces internes au cours des problèmes avec liaison dans le sous-domaine explicite. Ainsi, le mécanisme à mettre en place doit simplement permettre de recalculer les quantités cinématiques inconnues (vitesses et accélérations) avec de nouvelles forces extérieures. Aucune réinitialisation et aucun stockage de champs n'est nécessaire pour cela.

Chaque code peut ainsi être vu comme un objet au sens de la programmation orientée objet. Ce dernier comporte trois méthodes. L'une pour récupérer une vitesse sur un groupe de nœuds à la fin d'un incrément, l'autre pour ajouter un effort sur un groupe de nœuds au début d'un incrément et enfin une pour agir sur le mécanisme qui permet de valider ou d'invalider le calcul d'un incrément. Les développements à réaliser pour mettre en place la méthode GC par couplage de codes sont donc très limités. Il s'agit effectivement d'interfacier des fonctions qui sont, pour la plupart, nécessairement présentes dans les codes. Il faut simplement les rendre accessibles dynamiquement en cours de calcul.

#### 3.3.1.3 Interfaçage des codes de calculs

Le choix du langage pour développer l'environnement du couplage entre le couple de codes évoqué s'est porté sur Python. Ce langage interprété permet une efficacité de développement puisqu'il n'a pas besoin d'être compilé. Il est par ailleurs multiplateforme,

ce qui le rend facilement utilisable dans différents environnements informatiques. Par ailleurs, un grand nombre de librairie libres et performantes sont disponibles. Les librairies Numpy, Scipy et matplotlib sont de bons exemples et sont très utilisées dans le domaine scientifique. La librairie Numpy est en particulier mise à contribution pour les opérations d'algèbre linéaire, comme la résolution du problème d'interface ou les interpolations. La librairie mpi4py, qui interface le standard MPI-2, est également utilisée pour les dialogues entre les codes de calcul. Elle permet d'échanger aisément des données, comme par exemple des tableaux Numpy entre plusieurs processus, qu'ils soient sur une machine unique ou sur un réseau. Cela permet ainsi de pouvoir utiliser la stratégie proposée sur cluster. Le langage Python dispose également d'une interface avec la langage C/C++ et le langage fortran (Embedding Python<sup>1</sup>). L'interface des deux codes choisis avec Python est ainsi facilitée. Afin de gérer le transfert des données, une interface minimale a ainsi été développée dans les deux codes évoqués. Elle consiste à initialiser un interpréteur Python au démarrage de chaque code. L'interfaçage permet ainsi de donner la main à l'interpréteur Python aux points d'entrée identifiés du code.

L'interpréteur exécute alors une méthode Python dédiée contenues dans un script, pour chaque point d'entrée (Extending Python). Les opérations nécessaires peuvent ainsi être codées dans ces méthodes. Par ailleurs, l'interpréteur Python partage la mémoire du code. Il peut donc avoir accès à certaines données ou certains objets du code, comme le vecteur vitesse, par exemple. Ainsi, seuls des échanges de pointeurs sont réalisés entre le code et l'environnement Python. Ils sont donc relativement peu coûteux du point de vue informatique, comparativement à une copie en mémoire. Une illustration de l'interface Zset/Zébulon/Python est proposée sur la figure 3.2 et celle entre Europlexus/Python est proposée sur la figure 3.3.

Une illustration synthétique des flux temporels des données et des techniques d'échange utilisées entre le code Zset/Zébulon et le code Europlexus est également proposée sur la figure 3.4. On retrouve sur cette figure les deux codes évoqués. Au centre, dans l'encadré en pointillé jaune se trouve un script Python qui réalise la résolution du problème d'interface. Il est attaché au lancement du calcul, au code qui a le pas de temps le plus petit. Il partage ainsi la mémoire de ce dernier. Les échanges de données entre le sous-domaine fin en temps et le problème d'interface se font ainsi par passage de pointeurs entre ce script et le code qui a le pas de temps le plus fin. Les données échangées avec le sous-domaine grossier en temps sont faites avec des méthodes MPI de la classe mpi4py. Une copie est alors nécessaire.

### 3.4 Validation de l'implémentation de la méthode de couplage proposée

Une base de cas tests a été mise en place pour garantir la bonne implémentation de la méthode. Cette base est enrichie au fur et à mesure des développements. Elle comporte

1. <https://docs.python.org/2/extending/>

### 3. Mise en place peu intrusive de la méthode GC par couplage de codes

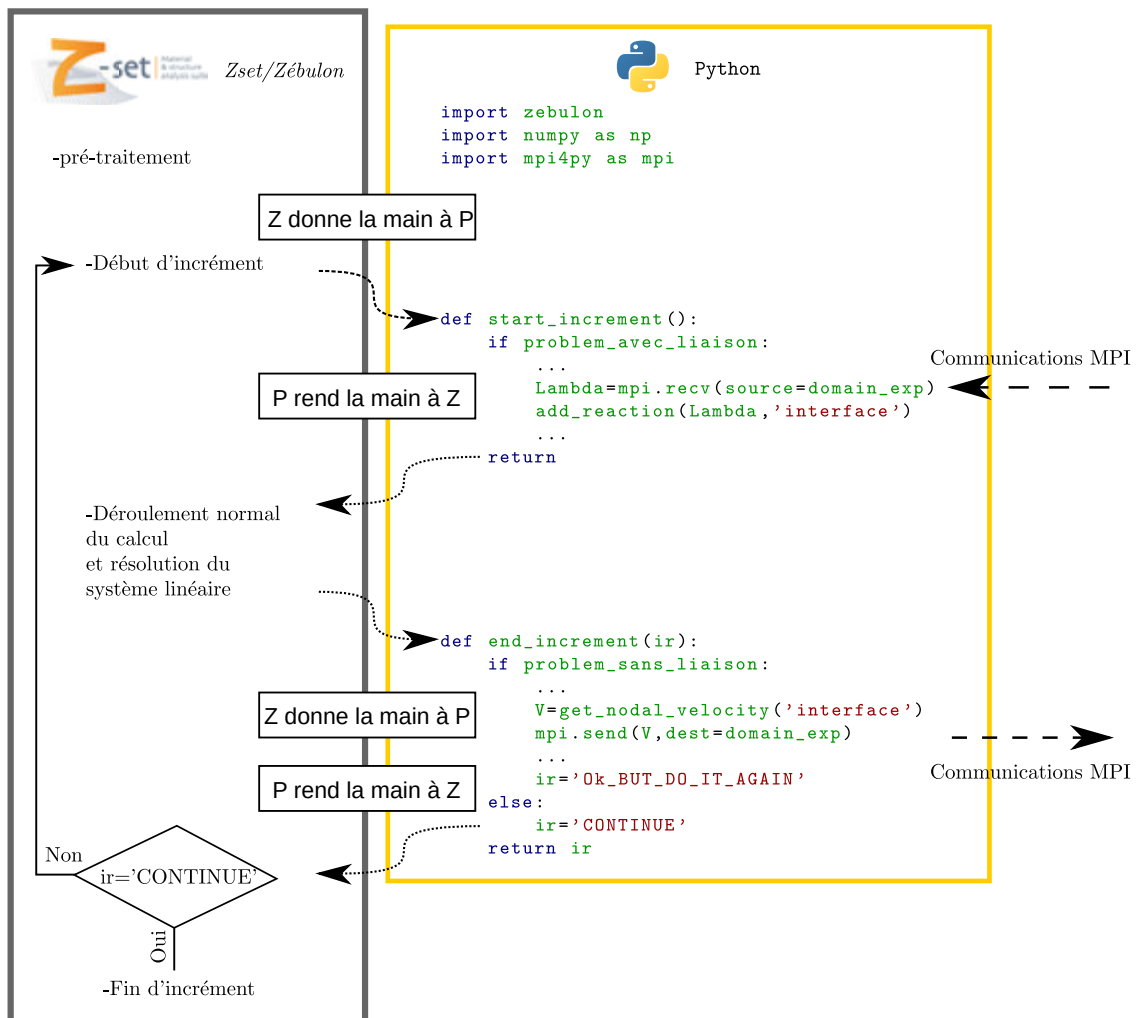


FIGURE 3.2: Illustration de l'interfaçage de Zset/Zébulon/Python.

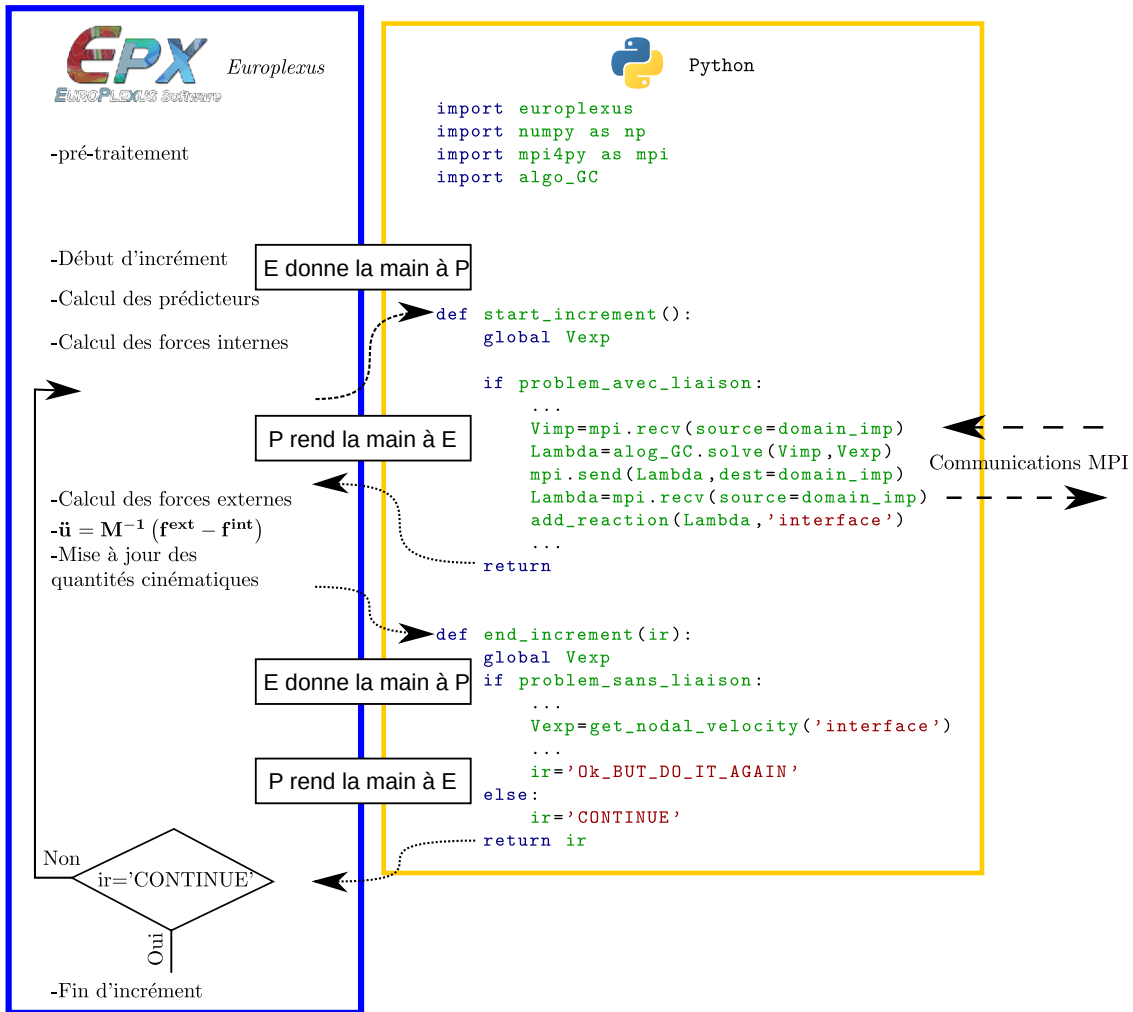
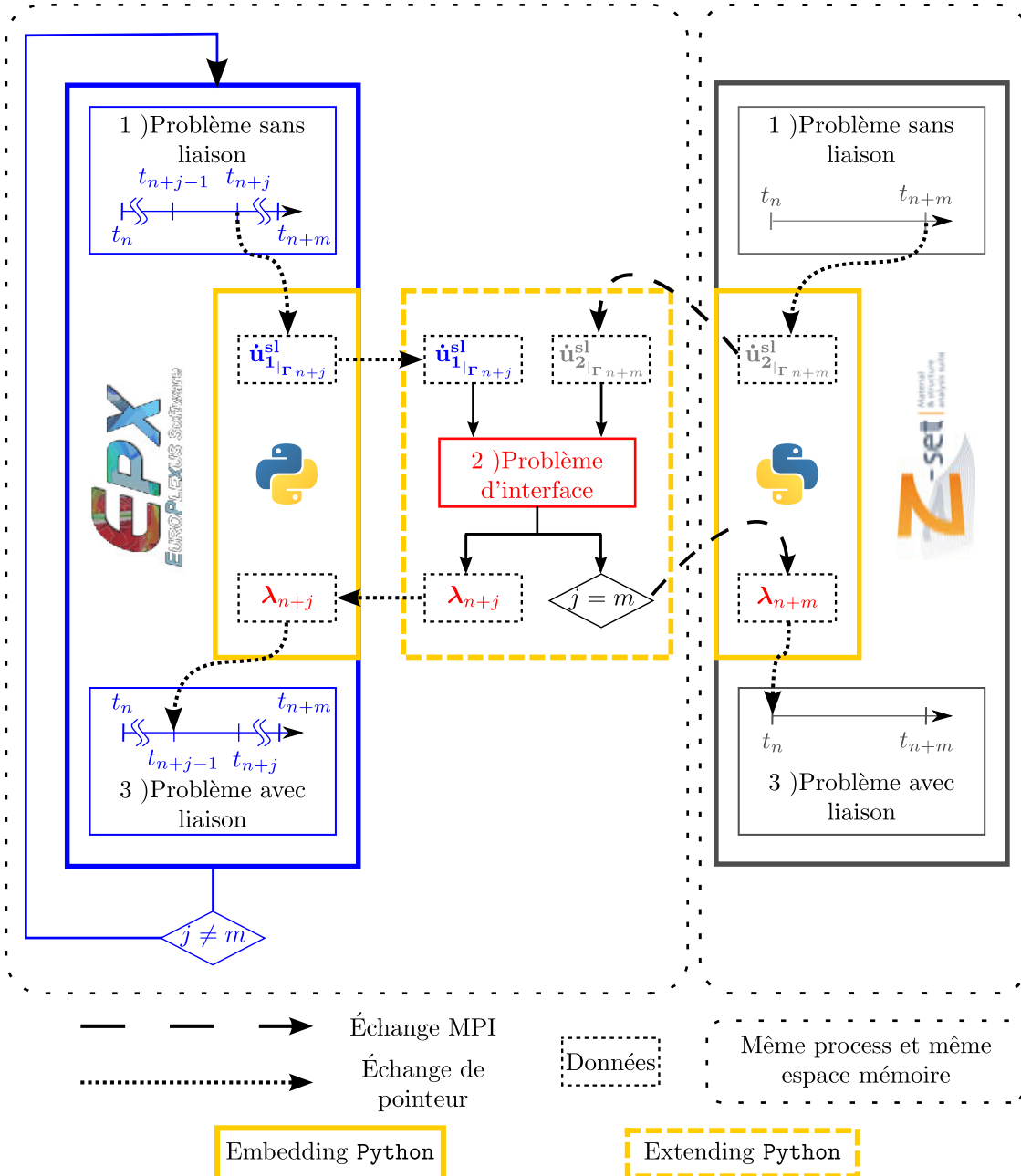


FIGURE 3.3: Illustration de l'interface de Europlexus/Python.

### 3. Mise en place peu intrusive de la méthode GC par couplage de codes



**FIGURE 3.4:** Illustration des flux temporels des données et des techniques d'échange pour une mise en œuvre de la méthode GC par couplage de codes. Les codes utilisés ici sont *Europlexus* pour la partie explicite et *Zset/Zébulon* pour la partie implicite.

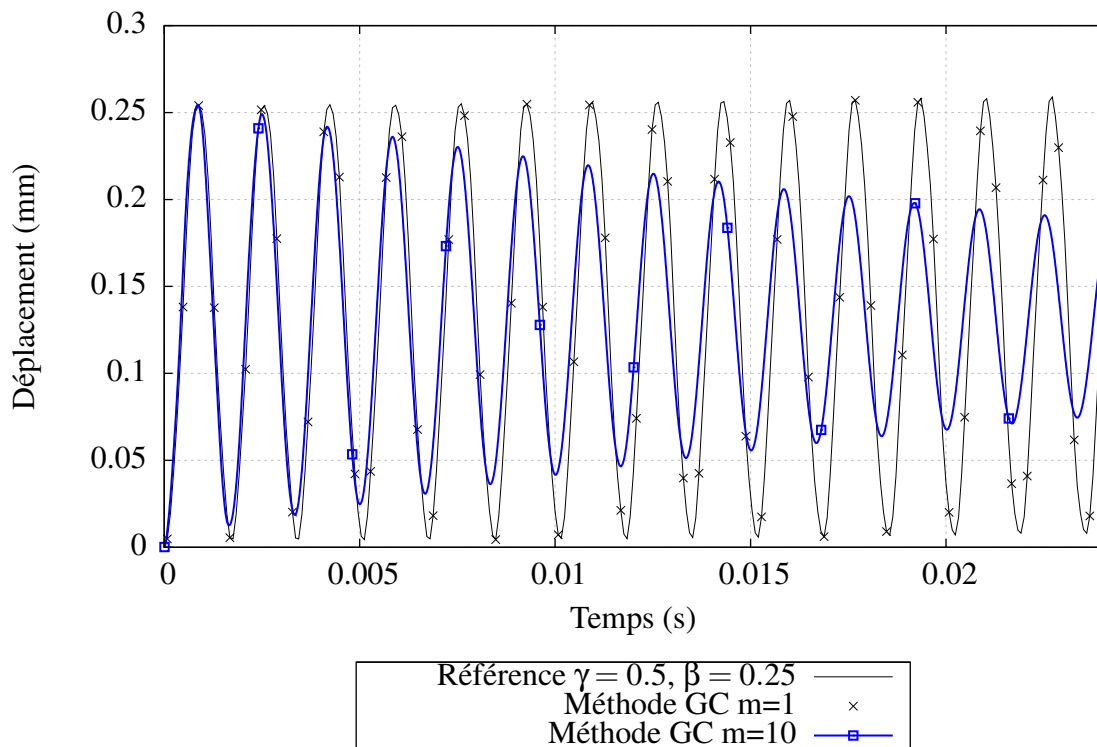
actuellement plus d'une cinquantaine de cas tests . Ils ne seront donc pas tous détaillés. Une difficulté rencontrée dans ce travail est effectivement l'absence de solution de référence dans la plupart des situations de couplage. Chaque brique élémentaire doit ainsi être testée, et des situations de couplage particulières doivent être trouvées pour cette étape de validation. Un couplage (*Europlexus*, *Europlexus*) avec un rapport de pas de temps de 1 est un exemple de couplage particulier mis en place pour être comparé à une solution de référence obtenue sans couplage dans *Europlexus*.

Dans un objectif de validation de la méthode proposée, le cas test réalisé dans la section 6.3 intitulée *2D cantilever beam problem* de l'article [PRA 04] a été reproduit. La géométrie, ainsi que la décomposition de domaine utilisée est visible sur la figure 2.17, page 72. Un couplage de deux instances de *Zset/Zébulon* est donc réalisé, l'une traite la partie A et l'autre la partie B du domaine. Les courbes présentées sur la figures 3.5 illustrent le déplacement en fonction du temps, obtenu avec la méthode par couplage de codes implémentée dans ce travail. Une comparaison entre ce résultat et celui obtenu par les auteurs permet de montrer le bon fonctionnement de la méthode proposée dans ce cadre. De plus, le déplacement issu de cette même décomposition de domaine, mais avec un rapport de pas de temps de 1 a également été ajouté sur la figure 3.5. Il peut être observé un très bon accord entre la solution de référence réalisée avec *Zset/Zébulon* sans couplage et celle obtenue avec le calcul couplé (*Zset/Zébulon*, *Zset/Zébulon*). Ce résultat est attendu puisque dans ce cas particulier, la méthode de couplage est équivalente, à la précision machine près, à un calcul par éléments finis classique, si les mêmes paramètres de Newmark sont utilisés partout. L'évolution de l'énergie dissipée à l'interface est également présentée sur la figure 3.6. Il peut être noté que l'énergie dissipée ici est relativement importante. Cependant, ce problème n'est pas clairement multiéchelle, ce qui permet de l'expliquer. On montrera qu'elle est négligeable pour notre application.

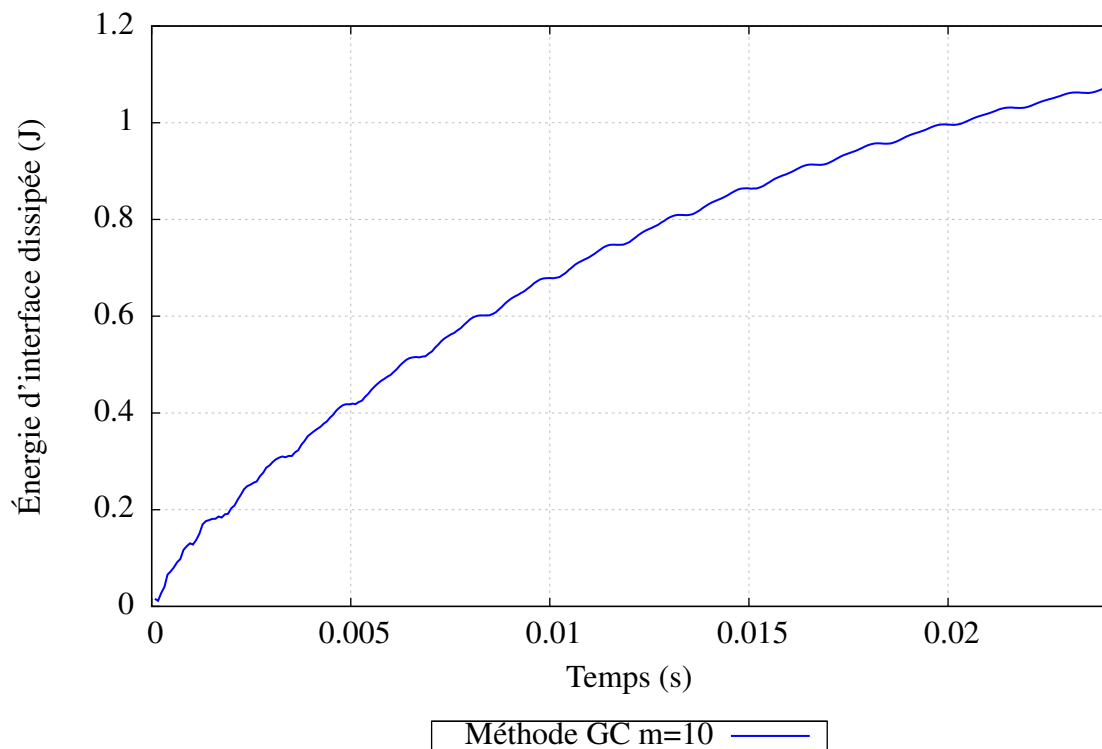
Certains résultats obtenus avec la géométrie illustrée sur la figure 3.7 sont également présentés pour montrer le fonctionnement de la méthode proposée en 3D avec du contact. Il s'agit d'une poutre encastree impactée. Elle est décomposée en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une interface contenant 25 nœuds. Ce cas test comporte une source de non-linéarité introduite par la présence du contact entre l'impacteur et la poutre. Les paramètres de Newmark utilisés lorsqu'aucune précision supplémentaire n'est faite sont ( $\beta = 0.5, \gamma = 0.25$ ) dans *Zset/Zébulon* (*Zeb*) et le couple ( $\beta = 0, \gamma = 0.25$ ) est utilisé dans le code *Europlexus* (*Epx*). Les caractéristiques du matériau utilisé dans l'ensemble de la structure, ainsi que la vitesse initiale de l'impacteur sont reportées dans le tableau suivant :

E	200000	Mpa
v	0.3	
$\rho$	$7.827 \times 10^{-9}$	$t.mm^{-3}$
Vitesse de l'impacteur	20000	$mm.s^{-1}$

Différentes combinaisons de couplage sont utilisées pour rechercher une solution de l'histoire du déplacement du point de contrôle. Sa position est visible sur la figure 3.7. Des paramètres de couplage pour lesquels aucune solution de comparaison de référence

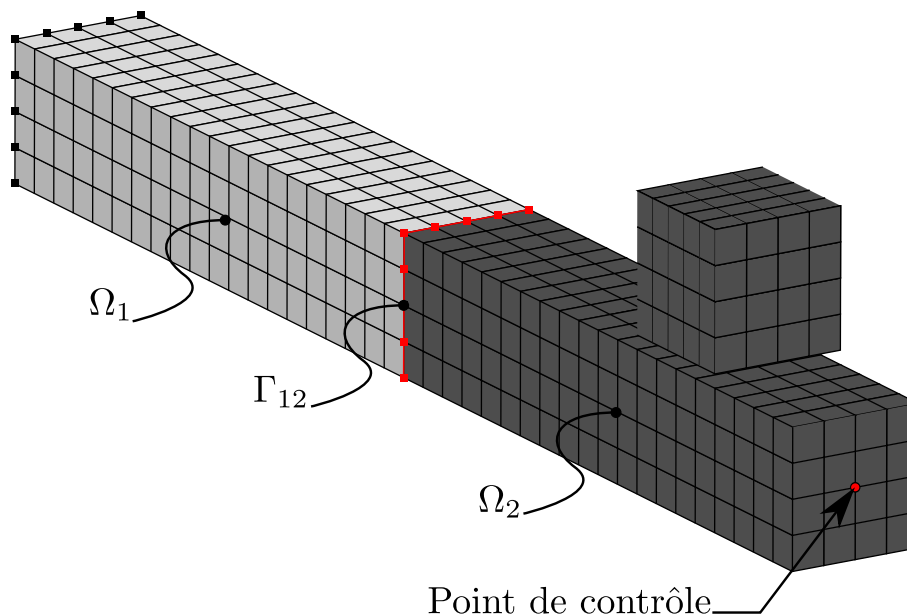


**FIGURE 3.5:** Reproduction du cas test proposé par [PRA 04] dans la section 6.3 intitulée *2D cantilever beam problem* par la méthode de couplage de code proposée dans ce travail. La géométrie et le chargement de ce cas test sont illustrés sur la figure 2.17 page 72. **Remarque :** Une partie des points seulement sont représentés par soucis de clarté de la figure.



**FIGURE 3.6:** Évolution de la dissipation d'énergie interfaciale du cas test proposé par [PRA 04] dans la section 6.3 intitulée *2D cantilever beam problem* de cet article par la méthode de couplage de code proposée dans ce travail. La géométrie et le chargement de ce cas test sont illustrés sur la figure 2.17 page 72.



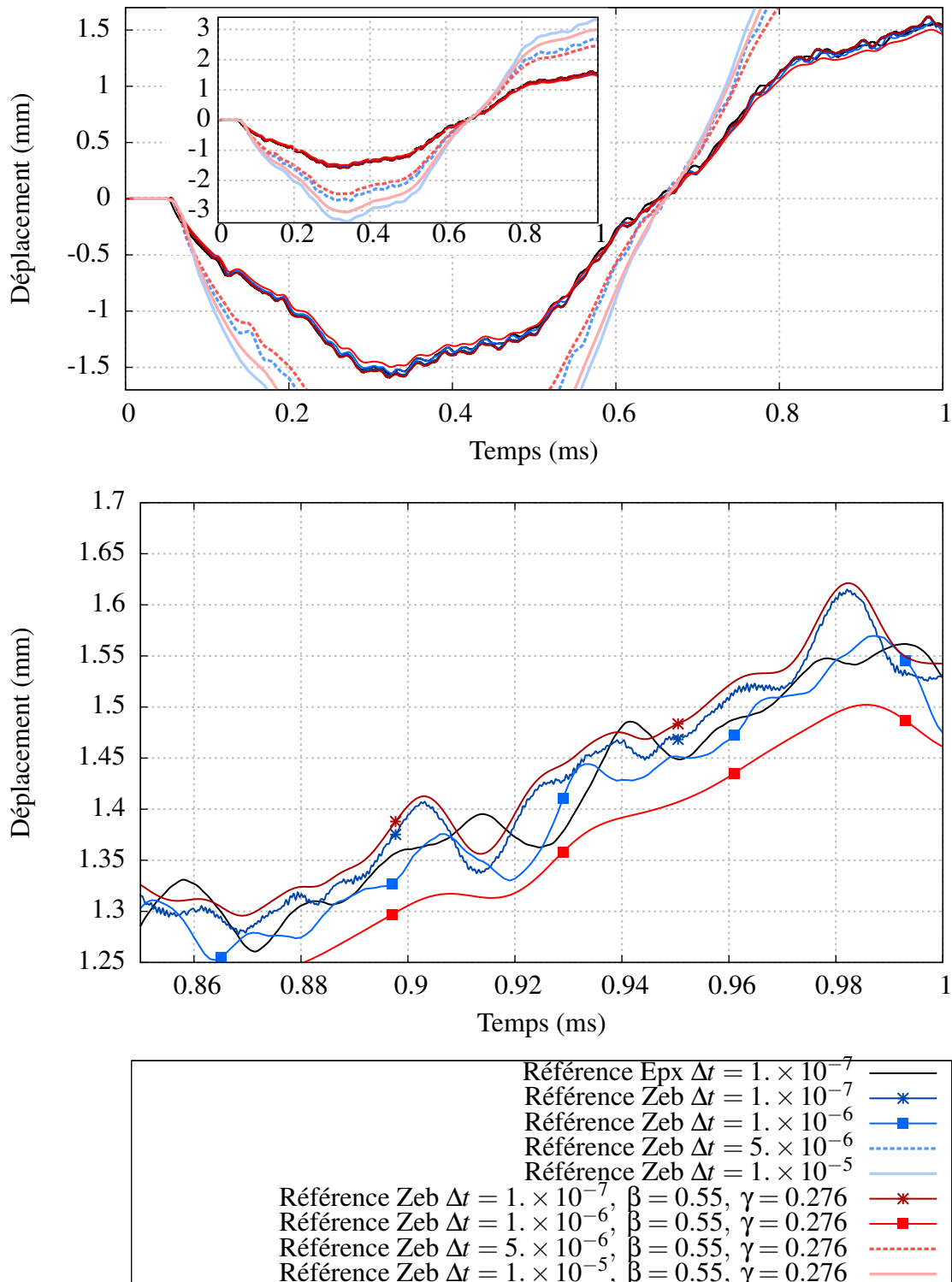


**FIGURE 3.7:** Illustration de la géométrie de la poutre 3D encadrée et impactée utilisée pour contribuer à la validation de l'implémentation de la méthode proposée

classique ne peut être obtenue sont utilisés. C'est pourquoi, une étude de convergence est réalisée. Nous proposons dans un premier temps de réaliser une étude de convergence sans couplage, ce qui permet d'avoir des indicateurs de comparaison pour les solutions couplées.

Les courbes présentes sur la figure 3.8 montrent la convergence de l'histoire du déplacement du point de contrôle choisi par raffinement du pas de temps dans *Zset/Zébulon* sans couplage. Les déplacements obtenus avec *Europlexus* pour un pas de temps de  $1 \times 10^{-8}s$  sont également ajoutés à cette figure. La courbe obtenue dans *Zset/Zébulon* avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-7}s$  permet de mettre en évidence les oscillations hautes fréquences qui peuvent être rencontrées lors de la simulation d'une réponse dynamique, avec un schéma de Newmark sans amortissement (courbe *Référence Zeb*  $\Delta t = 1. \times 10^{-7}s$ ). Il peut également être observé sur cette figure l'influence de la dissipation numérique liée au choix des paramètres de Newmark en comparaison de leur courbe équivalente sans dissipation. La comparaison de l'ensemble de ces courbes permet de mettre en évidence que les simulations implicites avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-6}s$  et  $1 \times 10^{-7}s$  sont relativement bien convergées en temps pour la discrétisation en espace choisie. De même, la solution *Europlexus* avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-7}s$  semble également convergée. Elles serviront donc de comparaison pour la suite.

La convergence des solutions couplées dans le cadre d'un couplage (*Zset/Zébulon*, *Europlexus*) est maintenant étudiée. Les courbes présentes sur la figure 3.9 illustrent la convergence des déplacements du point de contrôle en fonction du rapport de pas de temps choisi pour un couplage (*Zset/Zébulon* avec  $\beta = 0.5, \gamma = 0.25$  dans  $\Omega_1$ , *Europlexus* dans  $\Omega_2$ ) par raffinement du pas de temps implicite. Il peut être observé que plus le rap-



**FIGURE 3.8:** Convergence du déplacement du point de contrôle par raffinement du pas de temps dans *Zset/Zébulon* et dans *Europlexus* sans couplage. **Remarque :** Les marqueurs de courbes ne correspondent pas à la discrétisation temporelle.

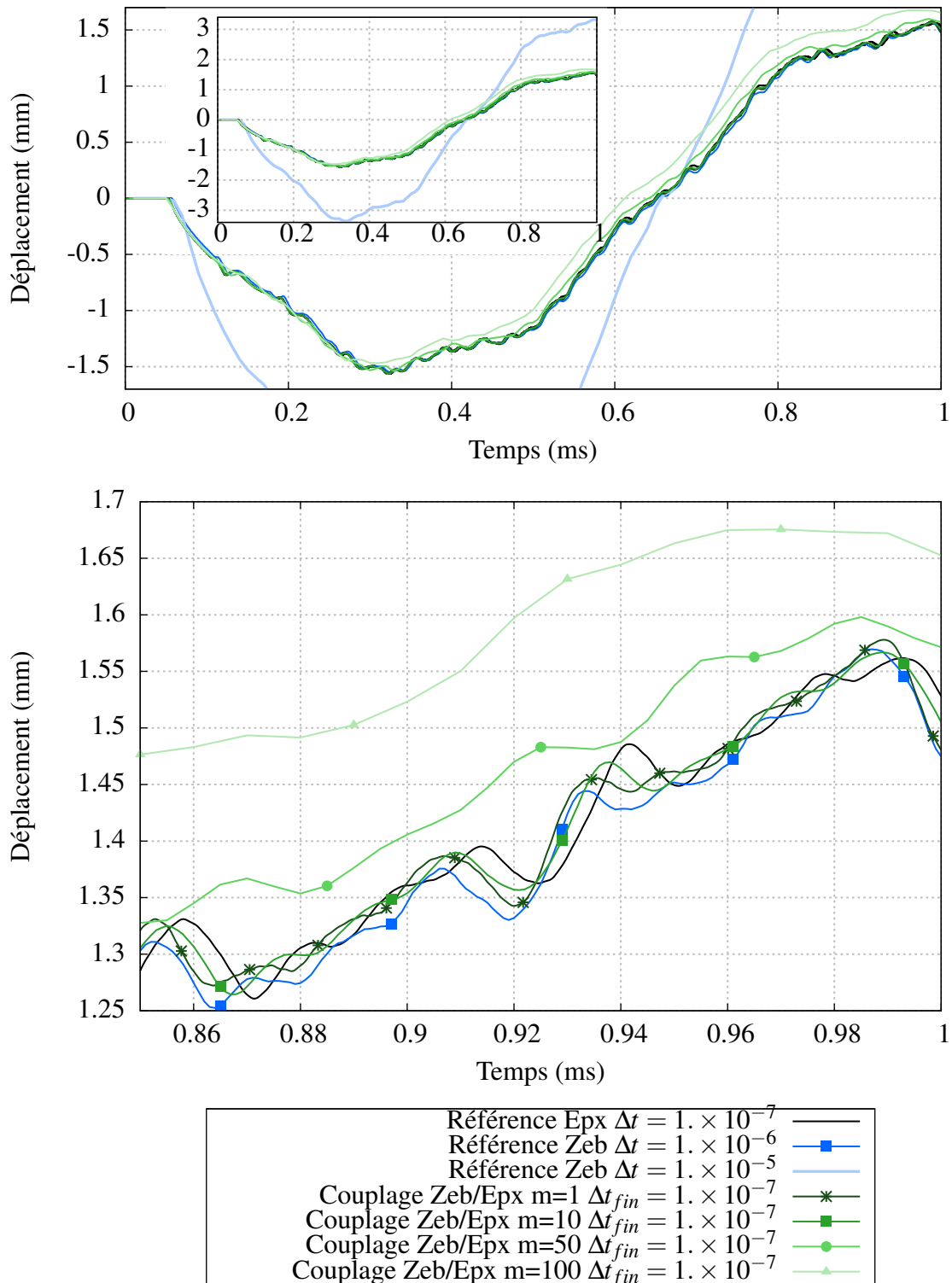
port de pas de temps des solutions couplées augmente, plus les courbes s'éloignent des solutions convergées (la solution couplée avec un rapport de pas de temps de 1 et les deux obtenues dans *Zset/Zébulon* et dans *Europlexus* sans couplage considérées convergées). Il peut être observé que la courbe avec un rapport de pas de temps de 100 est relativement plus éloignée de la réponse moyenne des autres courbes. Cet écart peut s'expliquer par le pas de temps utilisé dans la partie implicite, qui est de  $1 \times 10^{-5} s$ . Ainsi, la discrétisation en temps dans cette partie est grossière pour ce problème, comme le montre la figure 3.8.

Par ailleurs, il peut être montré que pour un rapport de pas de temps de 1 la solution couplée n'est ni égale à la solution entièrement explicite ni égale à la solution implicite obtenue avec le même pas de temps. Ce résultat n'est pas surprenant, mais il illustre le fait qu'aucune solution de comparaison obtenue avec une méthode éléments finis classique n'existe. Ainsi une méthode de validation adaptée doit être mise en place pour assurer la bonne implémentation de la méthode, ce qui justifie la mise en place d'une base de tests.

Des résultats analogues à ceux qui viennent d'être présentés sont reproduits. Cependant, de l'amortissement numérique est introduit dans le schéma de Newmark de la partie implicite. Pour cela, les paramètres de Newmark suivants sont utilisés  $\beta = 0.55$ ,  $\gamma = 0.276$  dans *Zset/Zébulon*. Les déplacements du point de contrôle alors obtenus sont reportés sur la figure 3.10. Ils sont similaires à ceux obtenus sans amortissement (figure 3.9). Néanmoins, un lissage des courbes peut-être observé sur les solutions couplées avec amortissement.

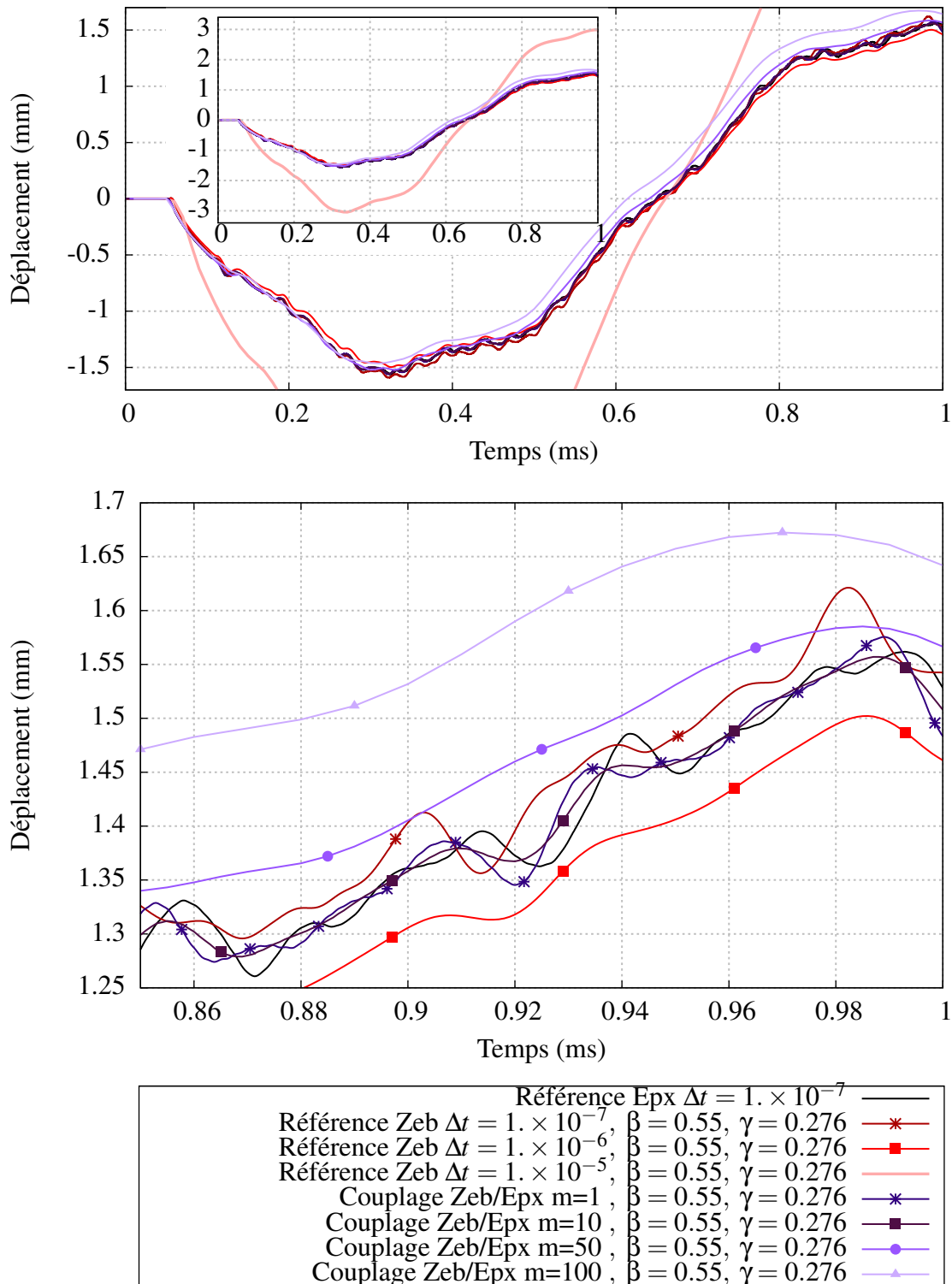
Les courbes présentes sur la figures 3.11 illustrent la dissipation interfaciale liée à la méthode GC en fonction du rapport de pas de temps choisi pour l'ensemble des calculs couplés qui viennent d'être présentés (avec et sans amortissement numérique du schéma d'intégration dans la partie implicite). Il peut être observé sur la figure 3.11 que l'énergie dissipée est d'autant plus importante que le rapport de pas de temps est grand. Son expression est donnée par la relation 2.83 page 67. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que l'amortissement du schéma d'intégration introduit par le choix des paramètres de Newmark dans la partie implicite a une influence sur la dissipation interfaciale liée à la méthode GC. Ce résultat peut être expliqué par le travail de l'effort d'interface qui est limité avec de l'amortissement numérique dans le schéma de Newmark de la partie implicite. Les hautes fréquences sont effectivement amorties par l'amortissement du schéma numérique dans le volume, ce qui peut limiter leurs effets au niveau de l'interface.

Ces résultats permettent ainsi de montrer la bonne implémentation de la méthode proposée. Cependant, le cas test choisi ne permet pas de faire un bilan sur le coûts CPU car il n'est pas suffisamment gros en termes de taille de degrés de liberté. Nous proposons donc d'appliquer cette stratégie dans le cadre de notre problématique, afin d'en évaluer son potentiel. Pour cela, différentes simulations sont réalisées sur un panneau composite raidi impacté à 10J.

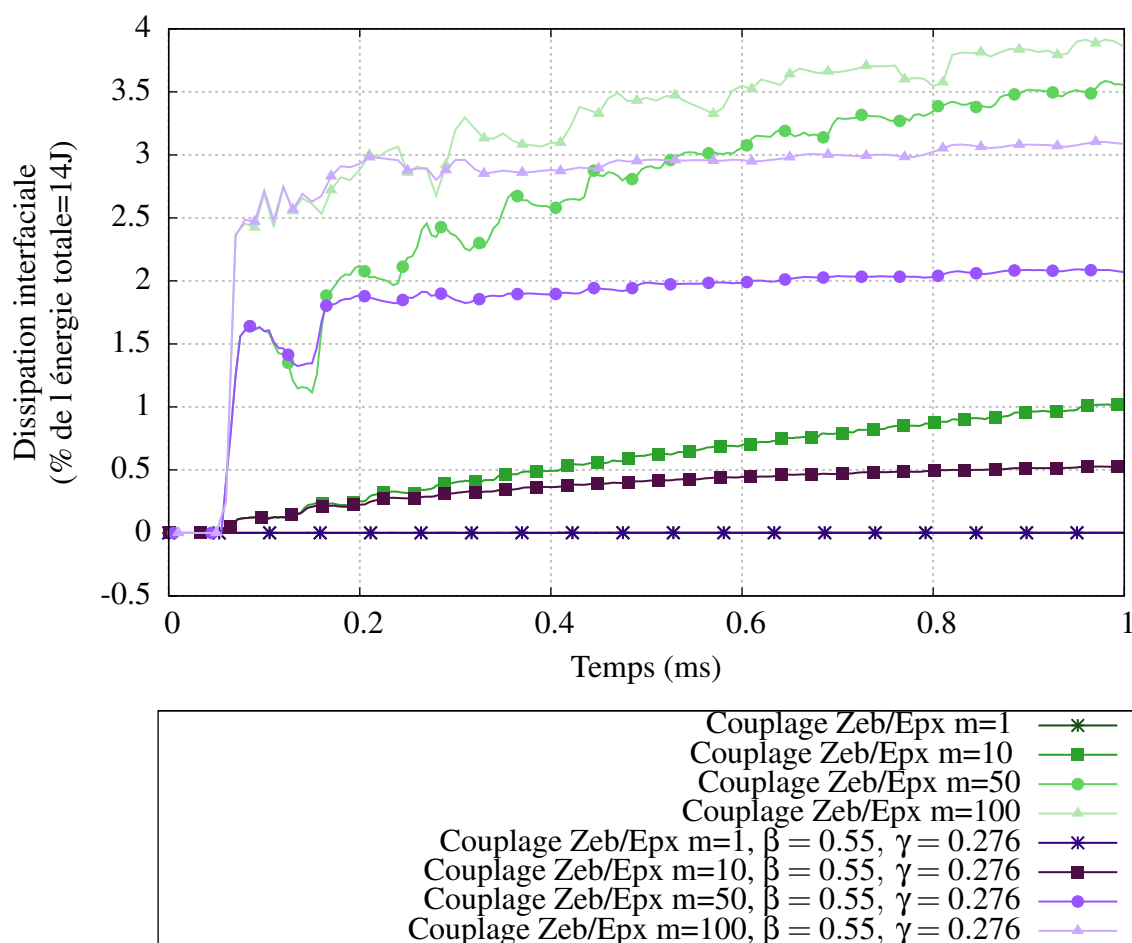


**FIGURE 3.9:** Convergence du déplacement du nœud de contrôle par raffinement du pas de temps implicite pour un couplage (*Zset/Zébulon* dans  $\Omega_1$ , *Europlexus* dans  $\Omega_2$  avec  $\Delta t_{Epx} = 1. \times 10^{-7} s$ ).

### 3. Mise en place peu intrusive de la méthode GC par couplage de codes



**FIGURE 3.10:** Évolution du déplacement du nœud de contrôle par raffinement du pas de temps implicite pour un couplage (*Zset/Zébulon* dans  $\Omega_1$  avec  $\beta = 0.55$ ,  $\gamma = 0.276$ , *Europlexus* dans  $\Omega_2$  avec  $\Delta t_{Epx} = 1. \times 10^{-7}$  s).



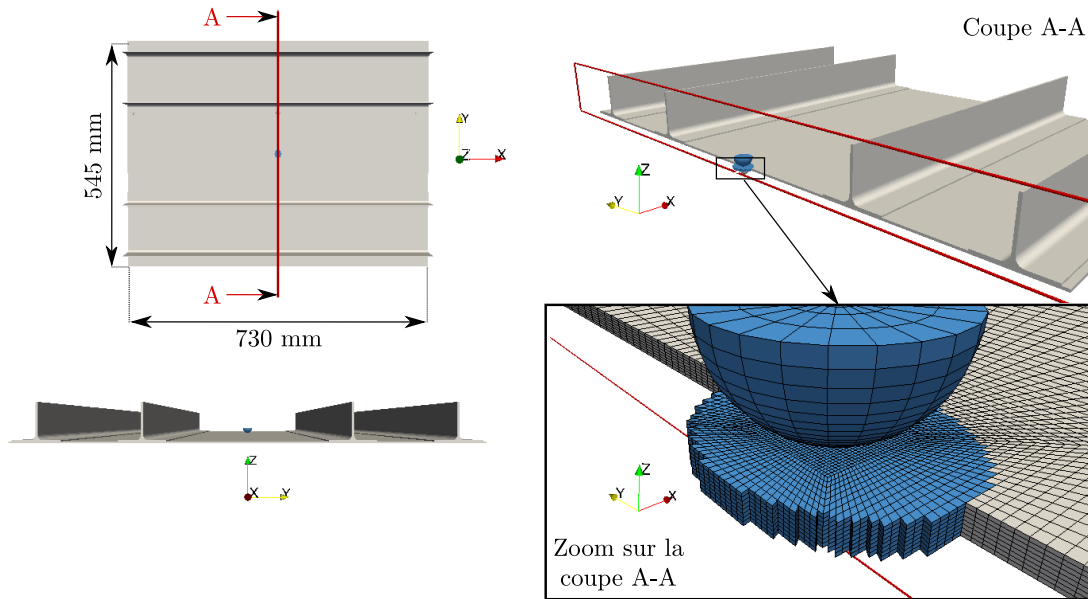
**FIGURE 3.11:** Évolution de la dissipation d'énergie numérique interfaciale en fonction du rapport de pas de temps pour différents couplages (*Zset/Zébulon* dans  $\Omega_1$ , *Europlexus* dans  $\Omega_2$  avec  $\Delta t_{Epx} = 1. \times 10^{-7}s$ ).

### 3.5 Simulations numériques d'impact de faible énergie sur panneau composite raidi par couplage de codes implicite/explicite

Dans le cadre du projet de recherche fédérateur transition statique/dynamique interne à l'Onera, évoqué en introduction, une campagne d'essais sur des panneaux composites raidis est actuellement en cours. Ils ont des dimensions qui sont de l'ordre de grandeur du mètre. Il s'agit donc de structures représentatives de composants qui peuvent être trouvés dans le milieu industriel. Dans l'objectif de réaliser des comparaisons essais/calculs, nous choisissons une géométrie qui se rapproche de celles physiquement testées dans cette campagne. Cependant, au moment où ces calculs ont été menés, nous ne disposions pas de l'ensemble des paramètres finaux des essais tels que les dimensions précises de la géométrie, l'empilement ou encore les niveaux d'énergie d'impact. Une configuration représentative a donc été choisie. L'objectif ici est de montrer la capacité de la méthode GC à simuler les impacts de faible énergie sur de grandes structures composites, sans trop se préoccuper de la qualité physique du modèle numérique. Un panneau composite raidi impacté à 10 Joules est ainsi choisi pour cette étude, mais aucun élément de zone cohésive n'est utilisé.

#### 3.5.1 Cas d'étude

Une illustration de la géométrie du panneau, de la décomposition de domaine ainsi que du maillage de la zone impactée est proposée sur la figure 3.12. Dans les calculs couplés réalisés, la partie en bleu est traitée avec le code de calcul *Europlexus* et la partie complémentaire en gris est traitée avec *Zset/Zébulon* ( $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ). Le choix de cette décomposition de domaine est faite *a priori*. C'est-à-dire que la taille de la zone explicite doit être suffisamment grande pour contenir l'ensemble des endommagements mais pas trop grande non-plus afin de limiter le coût de la partie explicite, comme il le sera montré. Pour cela, différentes simulations ont été réalisées afin d'identifier une répartition implicite/explicite adaptée. Le pas de temps de la partie explicite est fixé pour toutes les simulations présentées ici à  $1. \times 10^{-8}$ s, ce qui est compatible avec le pas de temps critique de la zone d'impact. L'empilement du panneau est  $[90, 45, 0, 0, -45]_s$  pour la peau et  $[90, 45, 0, -45]_s$  pour les raidisseurs. La taille de maille est comprise entre 5mm dans la partie la plus grossière et 0.25mm dans la partie la plus raffinée, localisée dans la zone d'impact. Dans ce cas test, tous les plis sont discrétisés. Ils contiennent un élément chacun dans leur épaisseur et ce, dans toute la structure. L'épaisseur d'un pli est de 0.25 mm. Le problème comporte environ 1 million de degrés de liberté dont 94% des nœuds situés dans la partie implicite. La taille du problème d'interface est de 4428 degrés de liberté. L'impacteur a un rayon de 8mm, une vitesse initiale de  $10m.s^{-1}$  et une masse de 0.2kg, ce qui conduit à un impact de 10J.



**FIGURE 3.12:** Illustration de la géométrie, de la décomposition de domaine ainsi que du maillage de la zone impactée utilisés pour le cas d'étude. La partie en bleu est traitée avec le code de calcul *Europlexus*, la partie complémentaire en gris est traitée avec *Zset/Zébulon* dans les calculs couplés.

### 3.5.2 Modélisation mésoscopique des plis

La loi matériau utilisée pour réaliser ces simulations est issue d'une version simplifiée du modèle Onera Progressive Failure Modèle (OPFM). Il s'agit d'une relation élastique endommageable formulée explicitement avec des critères de rupture de type Hashin, qui est codée dans *Zmat*. L'utilisation de cette loi dans *Europlexus* est possible par le module matériau *Europlexus/Zmat* précédemment évoqué. Elle prend la forme suivante :

$$\sigma = \tilde{\mathbf{C}}\varepsilon \quad (3.1)$$

Avec  $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$  le tenseur d'ordre quatre qui représente la souplesse du matériau et qui est défini par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \underline{\mathbf{S}}_0 + d_1\underline{\mathbf{H}}_1 + d_2\underline{\mathbf{H}}_2 + d_3\underline{\mathbf{H}}_3 \quad (3.2)$$

$d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  sont respectivement les variables d'endommagement dans les sens fibres, matrice transverse et hors plan. Les tenseurs d'ordre quatre  $\underline{\mathbf{H}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_2$  et  $\underline{\mathbf{H}}_3$  sont les tenseurs des effets. Ils permettent d'augmenter les composantes appropriées de la souplesse d'un pli en fonction des variables d'endommagement. Initialement, la souplesse du pli est égale à  $\underline{\mathbf{C}}_0^{-1} = \underline{\mathbf{S}}_0$  lorsqu'aucun endommagement n'est présent. L'énergie due aux endommagements s'exprime ainsi sous la forme suivante :

$$e_{dam} = \int_y^{t+\Delta t} \sum_{i=1}^3 \sigma : \underline{\mathbf{H}}^i : \sigma \dot{d}_i dt \quad (3.3)$$



Elle peut être intégrée par la relation suivante :

$$\Delta e_{dam} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{t+\frac{1}{2}\Delta t} : \underline{\mathbf{H}}^i : \sigma_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \left( d_i^{t+\Delta t} - d_i^t \right) \quad (3.4)$$

D'autre part, l'évolution des variables d'endommagement est limitée par une loi à effet retard. Cette régularisation permet d'éviter les problèmes de localisation des endommagements conduisant à une dépendance au maillage, bien que les paramètres d'effet retard soient difficiles à choisir. Les lois d'évolution sont les suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, d_i = \max \left( \max_t (d_i(t)), \tilde{d}_i \right) \text{ avec } \begin{cases} \frac{\partial \tilde{d}_i}{\partial t} = \frac{1}{\tau_i} (\alpha_i (\sqrt{f_i} - 1)^{p_i} - \tilde{d}_i) & \text{si } f_i > 1 \\ \frac{\partial \tilde{d}_i}{\partial t} = 0 & \text{si } f_i \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont les seuils d'activation des variables d'endommagement, respectivement dans les sens fibres, matrice transverse et hors plan.  $\alpha_i$ ,  $p_i$  et  $\tau_i$  sont les paramètres de contrôle de la cinétique de l'endommagement dans les trois directions principales d'un pli. Les paramètres  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont les paramètres des effets retard dans les sens fibres, matrice transverse et hors plan. Les seuils d'activation des variables d'endommagement sont exprimés en déformation. Ces critères de rupture prennent la forme suivante :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, f_i = \eta_i f_i^t + (1 - \eta_i) f_i^c \text{ avec } \begin{cases} \eta_i = 1 & \text{si } \sigma_{ii} > 0 \\ \eta_i = 0 & \text{si } \sigma_{ii} \leq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Et :

$$\text{Traction sens fibre : } f_1^t = \left( \frac{\varepsilon_{11}}{X_t} \right)^2$$

$$\text{Compression sens fibre : } f_1^c = \left( \frac{\varepsilon_{11}}{X_c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{12}}{S_{12}^f} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{13}^f} \right)^2$$

$$\text{Traction sens transverse : } f_2^t = \left( \frac{\varepsilon_{22}}{Y_t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{12}}{S_{12}^m} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{13}^m} \right)^2$$

$$\text{Compression sens transverse : } f_2^c = \left( \frac{\varepsilon_{22}}{Y_c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{12}}{S_{12}^m} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{13}^m} \right)^2$$

$$\text{Traction hors-plan : } f_3^t = \left( \frac{\varepsilon_{33}}{Z_t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{13}^m} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{23}}{S_{23}^m} \right)^2$$

$$\text{Compression hors-plan : } f_3^c = \left( \frac{\varepsilon_{33}}{Z_c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{13}^m} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{23}}{S_{23}^m} \right)^2$$

Les différents paramètres relatifs au modèle matériau utilisé sont reportés dans les tableaux suivants. Ils ont été identifiés en statique sur le T700GC/M21.

### 3.6 Analyse et comparaison de la méthode proposée vis-à-vis d'une solution explicite

Pour cela, un calcul entièrement explicite est réalisé ainsi que trois calculs couplés. Les calculs couplés sont réalisés en fixant le pas de temps de la partie explicite et en

$E_1$	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12} = G_{13}$	$\rho$
115000 MPa	8500 MPa	0.32	0.4	9000 MPa	1580 kg.m <sup>-3</sup>

**TABLE 3.1:** Table des paramètres du matériau élastique transverse et de la densité utilisés.

$H_{11}^1$	$H_{55}^1$	$H_{66}^1$	$H_{22}^2$	$H_{44}^2$	$H_{66}^2$	$H_{33}^3$	$H_{44}^3$	$H_{55}^3$
$\eta_1 S_{011}$	$0.084 S_{055}$	$0.143 S_{066}$	$\eta_2 S_{022}$	$0.28 S_{044}$	$0.7 S_{066}$	$\eta_3 S_{033}$	$0.28 S_{044}$	$0.7 S_{055}$

**TABLE 3.2:** Table des coefficients non-nuls des tenseurs des effets exprimés avec les notations de Voigt.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
20.	0.5	0.5	2	1	1	$1 \times 10^{-3} s$	$1 \times 10^{-6} s$	$1 \times 10^{-6} s$

**TABLE 3.3:** Table des paramètres utilisés pour les lois d'endommagement et pour l'effet retard.

$X_c$	$X_t$	$Y_c$	$Y_t$	$Z_c$	$Z_t$	$S_{12}^f$	$S_{13}^f$	$S_{12}^m$	$S_{13}^m$	$S_{23}^m$
0.017	-0.011	0.009	-0.025	0.006	-0.025	0.02	0.02	0.009	0.009	0.009

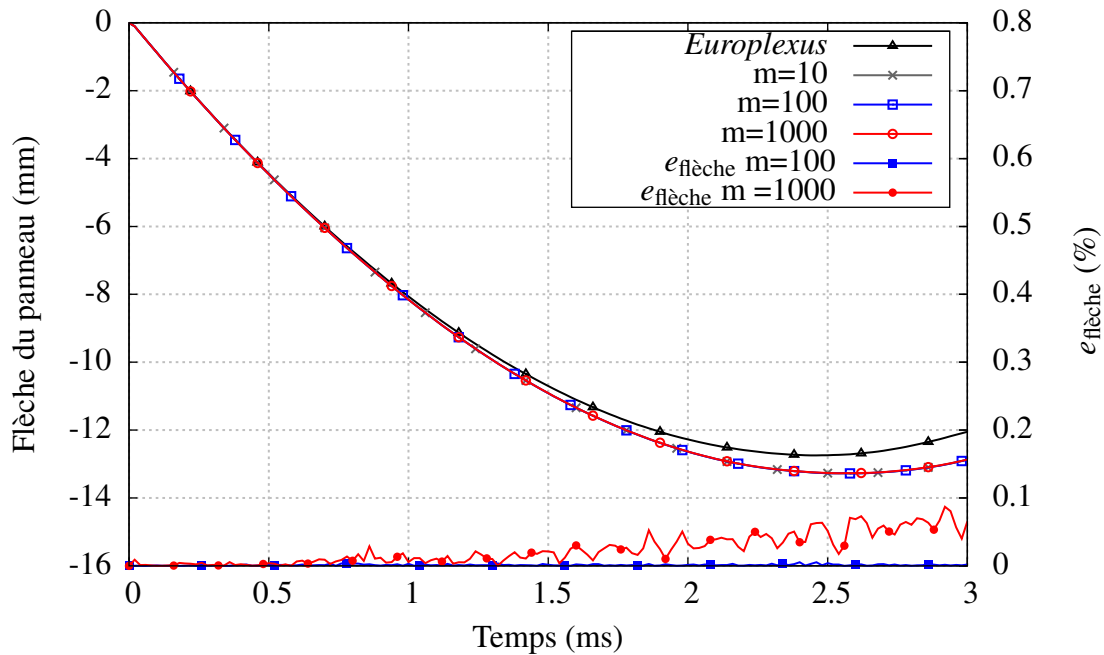
**TABLE 3.4:** Table des seuils de déformation utilisés dans les critères de rupture.

définissant le pas de temps de la partie complémentaire. Les rapports 10, 100 et 1000 sont choisis pour cette étude, sachant que le pas de temps de la partie explicite est fixé à  $1 \times 10^{-8} s$ . Ce pas de temps est compatible avec le critère de stabilité de l'algorithme explicite.

Les courbes présentes sur la figure 3.13 montrent l'évolution de la flèche du panneau composite impacté obtenu pour le calcul entièrement explicite, et celle obtenue par les trois calculs couplés. Pour l'ensemble de ces quatre calculs, il peut être observé une très bonne corrélation concernant l'évolution de la flèche du panneau composite. Cette observation est confirmée par la mesure de l'erreur sur la valeur du déplacement visible sur cette même figure. La courbe de référence choisie pour le calcul de cette erreur et celle obtenue pour le rapport  $m=10$  et la relation de calcul est la suivante :

$$e_{\text{flèche}}(t_n) = \frac{|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{m=10}|}{\max_t (|\mathbf{u}^{m=10}|)} \quad (3.7)$$

Concernant les endommagements induits par l'impact, une comparaison des cartographies d'endommagement dans le sens transverse obtenues pour la solution explicite, ainsi que celles obtenues pour les calculs couplés avec les deux valeurs extrêmes des rapports



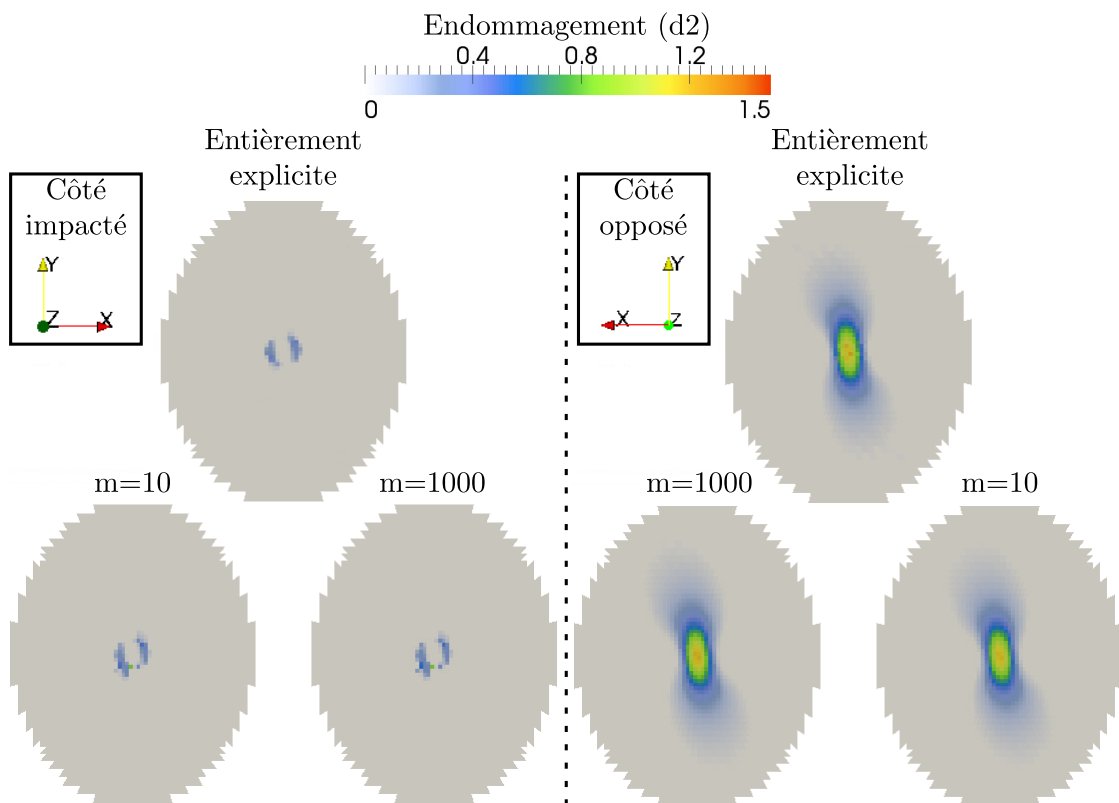
**FIGURE 3.13:** Comparaison de la flèche du panneau obtenue avec le calcul de référence et des calculs couplés pour différents rapports de pas de temps.

de pas de temps ( $m=10$  et  $m=1000$ ) est proposée sur la figure 3.14. Il peut ainsi être observé une très bonne corrélation entre l'ensemble de ces cartographies. De plus, les endommagements formés sont plus importants sur la face opposée à l'impact en comparaison de ceux créés sur la face impactée. Ceci est donc en accord avec les observations expérimentales qui ont été évoquées dans le chapitre 1.

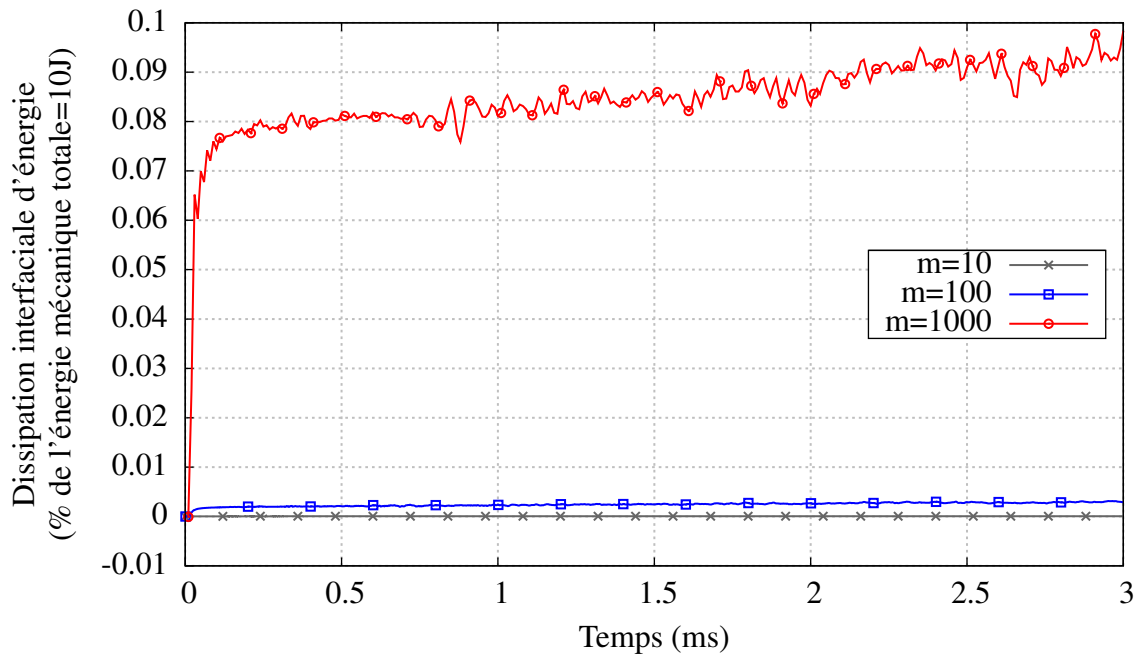
### 3.6.1 Analyse de la dissipation interfaciale due à l'utilisation de la méthode GC

La figure 3.15 permet de montrer l'évolution temporelle de la dissipation interfaciale en fonction du rapport de pas de temps choisi pour les trois calculs couplés présentés. Le calcul de cette énergie est réalisé avec la relation 2.83, page 67. Il peut être observé que plus le rapport de pas de temps augmente, plus le niveau d'énergie dissipée est élevé. Par ailleurs, il apparaît que la dissipation augmente très rapidement dans les premiers instants de la simulation, ce qui correspond aux sollicitations hautes fréquences liées au contact entre l'impacteur et la cible. Néanmoins, le niveau d'énergie dissipée reste faible devant l'énergie totale du système. En effet, l'énergie dissipée maximum observée ne dépasse pas 0.1% de l'énergie totale du système initial, même pour un rapport de pas de temps élevé égal à 1000.

La figure 3.16 illustre l'évolution temporelle de la dissipation d'énergie par endom-



**FIGURE 3.14:** Illustration de cartographies d'endommagement dans le sens transverse, obtenues avec un calcul entièrement explicite, ainsi que celles obtenues pour les valeurs extrêmes des pas de temps choisis ( $m=10$  et  $m=1000$ )

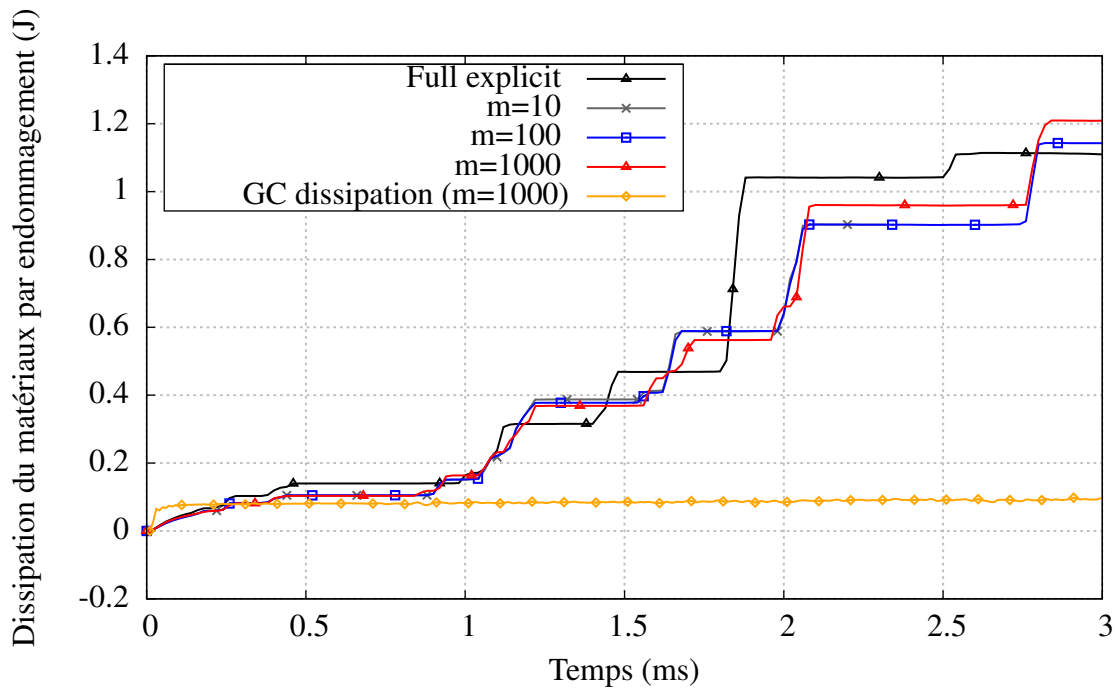


**FIGURE 3.15:** Évolution de la dissipation d'énergie d'interface liée à l'utilisation de la méthode GC.

agement, pour les différentes simulations réalisées. Il peut être observé sur cette figure une bonne corrélation entre l'ensemble des courbes. Par ailleurs, l'énergie interfaciale dissipée par la méthode GC pour un rapport de pas de temps de 1000 a été ajoutée sur ce graphique. La comparaison de son niveau d'énergie avec celui dissipé par le matériau permet de montrer que, même pour un rapport de pas de temps élevé (1000), la dissipation interfaciale due à la méthode GC reste faible à la fin de la simulation.

### 3.6.2 Analyse des temps de calcul dans la méthode de couplage

La figure 3.17 illustre les temps CPU obtenus avec le calcul complètement explicite et ceux obtenus avec les trois valeurs de  $m$  choisies. Le temps de simulation nécessaire pour réaliser un calcul couplé est la somme des cinq contributions visibles sur la figure 3.17. Il s'agit du temps passé dans les problèmes avec et sans liaisons de chacun des sous-domaines, ainsi que le temps passé à résoudre le problème d'interface. Le temps de calcul des compléments de Schur implicite n'est pas présent dans ce bilan, car il est négligeable devant le reste des coûts CPU. Il est à noter qu'une méthode de calcul parallèle a été mise en place pour l'obtenir. Ainsi 25 minutes environ sont nécessaires pour sa construction avec huit instances de *Zset/Zébulon*. Cette parallélisation consiste effectivement à utiliser plusieurs instances de *Zset/Zébulon*, chacune d'elle calcule alors une partie du complément de Schur implicite.



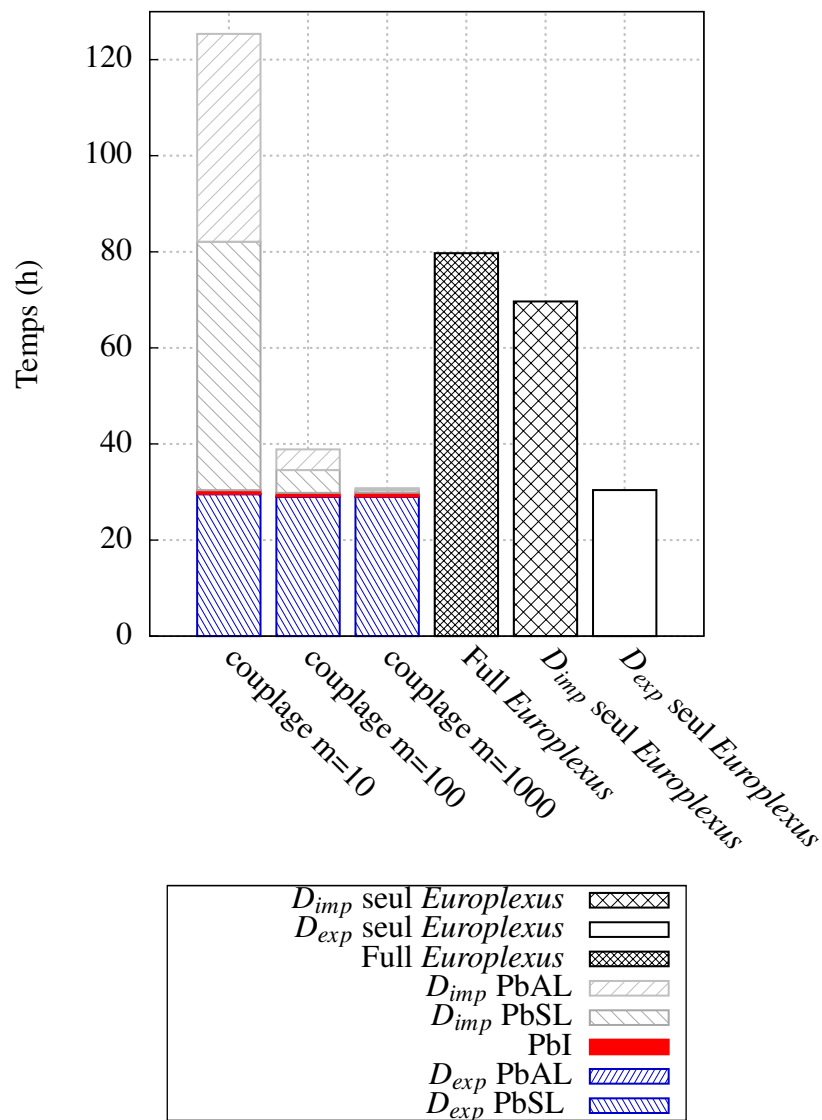
**FIGURE 3.16:** Comparaison des courbes de dissipation dues à l'endommagement obtenues avec le calcul *Europlexus* et les trois calculs couplés étudiés.

Il peut être constaté sur cette figure que le temps passé dans la partie explicite et dans la résolution du problème d'interface sont identiques pour les trois calculs couplés. Ce résultat est attendu, puisque le pas de temps explicite est le même pour chacun d'entre eux. Par ailleurs, il peut être observé que le temps passé à résoudre le problème d'interface est négligeable devant les autres contributions, bien que celui-ci soit résolu à chaque pas de temps fin. Le temps passé à résoudre le problème avec liaison dans la partie explicite est également négligeable devant les autres temps de calcul. Ceci s'explique par le schéma de résolution explicite. En effet, dans l'étape des problèmes avec liaison de la partie fine en temps, seules les quantités cinématique, ainsi que le calcul des forces externes sont à mettre à jour, comme le montre le schéma du code *Europlexus* 3.3, page 91. Ces opérations sont donc négligeables devant le calcul des forces internes. Ce dernier est réalisé une seule fois par incrément pendant l'étape du problème sans liaison. Dans la partie implicite, il peut être observé que la contribution du temps passé à résoudre l'étape des problèmes sans et avec liaisons est globalement identique. Ce résultat est également attendu, puisqu'une fois la première factorisation réalisée dans le tout premier problème sans liaison, la majorité du temps de calcul de la partie implicite est consommée par la réalisation des étapes de descente et de remontée de la résolution du système. La figure 3.17 permet également de montrer que le temps de simulation global diminue lorsque le rapport de pas de temps augmente. Dans ce cas test, il peut même être constaté que pour un rapport de pas de temps de 1000, la majorité du temps de calcul est consommée

par le sous-domaine explicite. Cela signifie que l'effort numérique est concentré sur ce sous-domaine sans dégrader la qualité des résultats, compte tenu des observations réalisées juste avant. Les temps nécessaires à la résolution de chacun des sous-domaines pris seul et simulé avec *Europlexus* sont également proposés sur cette figure pour montrer cela. Ils ont été évalués en encastrant l'interface. La solution mécanique n'est donc pas la même que celle obtenue avec les calculs couplés. Cependant, ils permettent de donner un très bon ordre de grandeur du temps nécessaire pour traiter les deux zones seules et sans couplage. La méthode proposée permet ainsi une accélération du temps de résolution sur ce cas d'application. Elle permet effectivement de réduire le coût du calcul de la partie complémentaire.

## 3.7 Conclusion

La mise en place de la méthode GC par couplage de codes implicite/explicite entre respectivement le code de dynamique explicite *Europlexus* et le code de dynamique implicite *Zset/Zébulon* a été proposée dans ce chapitre. Il a été montré que ce couplage est peu intrusif vis-à-vis des développements à réaliser dans les codes, et qu'il permet de coupler facilement des logiciels éléments finis dans des langages différents. De plus, après avoir validé l'implémentation de la méthode proposée sur des cas relativement simples, une comparaison avec un calcul éléments finis explicite classique dans *Europlexus* seul, a été menée sur un modèle relativement représentatif de notre problématique. Nous avons aussi montré avec les calculs d'impact réalisés sur un panneau composite raidi que l'énergie interfaciale dissipée par la méthode GC est très faible. En effet, elle est négligeable devant l'énergie totale du système (moins de 0.1%), mais également devant l'énergie dissipée par les endommagements liés au matériau. Par ailleurs, l'étude des temps de calcul a démontré qu'un gain de temps est obtenu avec la stratégie proposée pour notre problématique. Elle a également mis en avant que le temps de résolution du problème d'interface est négligeable dans la contribution du temps de calcul total, bien qu'il soit effectué à tous les pas de temps du code explicite. La majorité du coût CPU est effectivement consommée dans la partie explicite. Il ressort ainsi de ce chapitre que le choix de la taille de la zone explicite est cruciale. Il conditionne effectivement au premier ordre le temps de calcul lorsqu'un rapport de pas de temps élevé est utilisé. De plus, il a été souligné que le choix du découpage est actuellement arbitraire, et il nécessite une bonne connaissance du problème, ce qui est limitant. Ceci nous amène donc à vouloir mettre en place un mécanisme de bascule implicite/explicite. Il consiste à minimiser la taille de la zone explicite durant la simulation. L'objectif étant de faire focaliser l'effort de résolution dans une zone de l'espace qui évolue dans le temps. Ce mécanisme peut également permettre de relaxer la contrainte liée au choix de la répartition implicite/explicite initiale.



**FIGURE 3.17:** Comparaison du temps de calcul nécessaire à la simulation du panneau dans *Europlexus* et avec la méthode couplée pour différents rapports de pas de temps.





## Chapitre 4

# Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

Une extension de la stratégie de couplage développée dans ce travail est proposée dans ce chapitre. Elle consiste à faire évoluer la taille de la zone explicite au cours du calcul. Pour cela, un mécanisme de bascule est mis en place. Son principe de fonctionnement, ainsi que sa mise en œuvre sont développés dans cette partie.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Identification des besoins pour la mise en place de la stratégie de bascule dans la méthode de couplage . . . . .</b>	<b>114</b>
4.1.1	Identification de la stratégie permettant la bascule de nouveaux sous-domaines. . . . .	115
4.1.2	Identification des champs à transférer lors de la bascule pour le nouveau problème d'interface implicite/explicite . . . . .	118
<b>4.2</b>	<b>Mise en place du mécanisme de bascule dans la stratégie de couplage de codes proposée . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>4.3</b>	<b>Validation de l'implémentation du mécanisme de bascule . . . . .</b>	<b>120</b>
4.3.1	Bascule monoéchelle en temps . . . . .	120
4.3.2	Bascules avec des interfaces multiéchelles en temps . . . . .	122
<b>4.4</b>	<b>Application au calcul d'impact sur stratifié . . . . .</b>	<b>131</b>
4.4.1	Cas d'étude . . . . .	131
4.4.2	Résultats . . . . .	132
<b>4.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>133</b>

---

Les bilans des temps de calcul obtenus lors des simulations sur panneau composite raidi nous amènent au constat suivant. La stratégie de couplage proposée permet de faire focaliser l'effort de résolution numérique dans la zone explicite. D'autre part, on observe que les non-linéarités sont localisées spatialement et temporellement. C'est à dire que les endommagements se répandent dans la structure au cours du temps. Ainsi, pour mener la simulation jusqu'à sa fin, la taille de la zone explicite doit actuellement contenir l'ensemble des endommagements qui sont susceptibles de se former pendant toute la plage de temps étudiée. L'effort de résolution numérique est par conséquent focalisé dans une région qui n'est pas nécessairement optimisée. Nous proposons ici de lever cette limitation par la mise en place d'un mécanisme de bascule. Il consiste à faire évoluer la décomposition de domaine durant la simulation, mais également à faire évoluer la stratégie de résolution de certaines parties de la structure. Compte tenu de la croissance des endommagements, nous nous restreignons à la croissance de la zone explicite. Ainsi, une partie des éléments initialement traités avec le code de calcul *Zset/Zébulon*, changent de sous-domaine et sont traités avec le code de calcul *Europlexus* après la bascule. Un tel mécanisme est illustré sur la figure 4.1. Il est appliqué à une structure composée de trois régions. Initialement, l'un des sous-domaines est composé de l'union des régions nommées  $\Omega_{II}$  et  $\Omega_{IE} = DI_1$ , l'autre est composé de la partie complémentaire  $\Omega_{EE} = DE_1$  ce qui forme la décomposition spatiale initiale DD1. Un calcul couplé, tel que ceux que nous avons présenté dans le chapitre précédent, est alors mené avec cette répartition jusqu'à l'instant de bascule noté  $t_b$ . Une nouvelle décomposition en sous-domaines, notée DD2, est alors formée et le calcul couplé doit pouvoir se poursuivre avec elle. Dans le mécanisme de bascule proposé sur la figure 4.1, le nouveau découpage est constitué d'un sous-domaine formé de la zone  $\Omega_{II} = DI_2$ , l'autre étant composé de la partie complémentaire  $\Omega_{IE} \cup \Omega_{EE} = DE_2$ . Afin de la mettre en place, une analyse des répercussions que cette stratégie implique dans l'algorithme de couplage de codes proposé jusqu'ici est réalisée. Par ailleurs, pour des raisons de simplicité, il est supposé que  $t_b$  est un point de rencontre des échelles temporelles des sous-domaines dans tout ce qui suit.

### 4.1 Identification des besoins pour la mise en place de la stratégie de bascule dans la méthode de couplage

L'exemple de bascule proposé sur la figure 4.1 permet de mettre en évidence un certain nombre de répercussions immédiates dans la stratégie de couplage proposée. En effet, le changement de décomposition de domaine peut impliquer la création et la destruction d'interfaces lors d'une bascule, ce qui implique de les gérer dynamiquement. Par ailleurs, ce mécanisme peut nécessiter de changer l'algorithme de résolution dans certaines parties de la structure pendant le calcul. Dans l'exemple proposé sur la figure 4.1, la partie  $\Omega_{IE}$  initialement traitée avec les paramètres du sous-domaine  $DI_1$ , est traitée avec ceux du sous-domaine  $DE_2$  à la suite de la bascule. Ainsi, des stratégies permettant le démarrage du calcul des nouvelles zones de DD2 sont nécessaires pour poursuivre le couplage. Nous proposons donc de regarder dans un premier temps les stratégies de démarrage à adopter

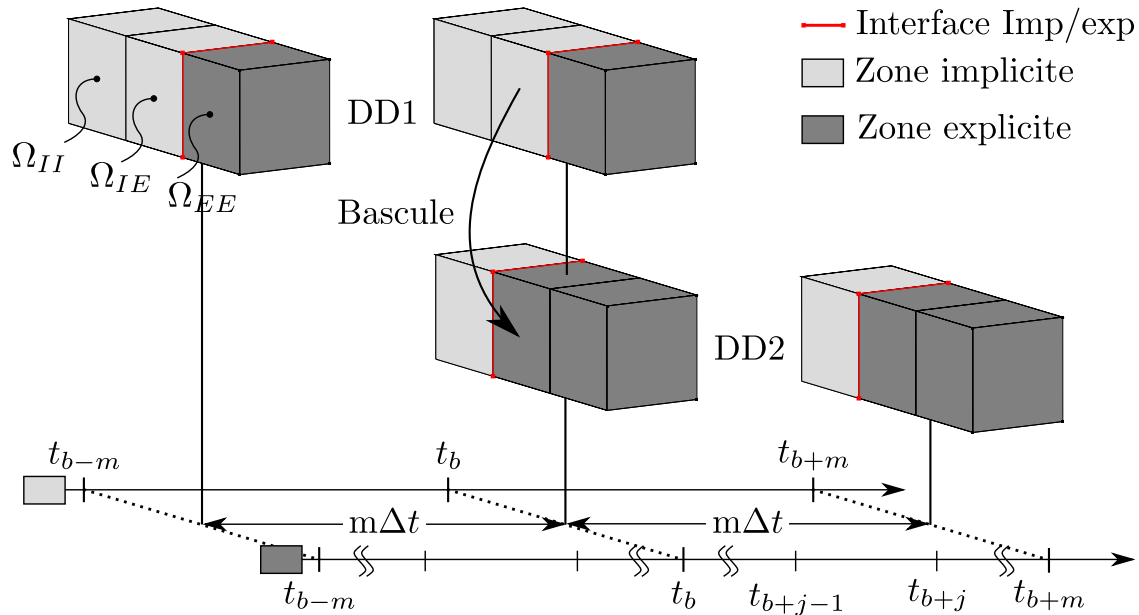


FIGURE 4.1: Illustration du mécanisme de bascule proposé dans ce travail.

dans chacune des régions sans tenir compte de la gestion dynamique de la décomposition de domaine, de manière à séparer les difficultés que comportent ces deux aspects.

#### 4.1.1 Identification de la stratégie permettant la bascule de nouveaux sous-domaines.

Afin d'identifier la stratégie permettant le démarrage de nouveaux sous-domaines à partir des quantités calculées sur la configuration avant bascule DD1, nous proposons de se focaliser sur chacune des régions de la structure :  $\Omega_{II}$ ,  $\Omega_{IE}$  et  $\Omega_{EE}$ .

##### Initialisation d'un sous-domaine implicite avec des champs provenant d'un sous-domaine implicite (région $\Omega_{II}$ )

Dans ce cas, l'initialisation du nouveau sous-domaine implicite est relativement simple. En effet, d'après les hypothèses que nous avons faites pour mettre en place la méthode de couplage de codes, le sous-domaine implicite est linéaire. Ainsi, aucun effet d'histoire n'existe. Les quantités cinématiques correspondant à ce nouveau domaine implicite, issues de la région correspondante dans l'ancienne décomposition de domaine, sont donc suffisantes pour évaluer l'état d'équilibre dynamique de  $\Omega_{II}$ . Les champs à transférer sont donc les champs cinématiques nodaux ( $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ) correspondant à la région en question (ici  $\Omega_{II}$ ), pris à l'instant de bascule dans  $DI_1$ .

##### Initialisation d'un sous-domaine explicite avec des champs provenant d'un sous-domaine explicite (région $\Omega_{EE}$ )

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---

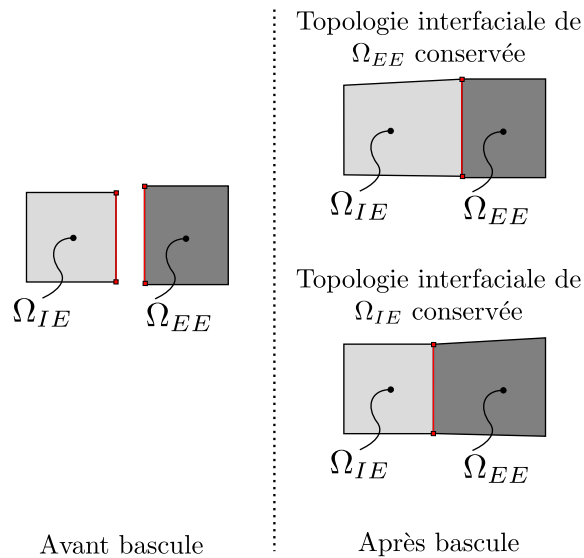
Dans le cas d'un transfert de l'implicite vers l'explicite, le nouveau sous-domaine a besoin des champs nodaux ( $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ) et des champs par élément (contrainte, déformation, variables internes) pour retrouver l'état mécanique obtenu dans l'ancien sous-domaine explicite, dans le nouveau. Cette initialisation peut donc être vue comme le redémarrage classique de la région  $\Omega_{EE}$ .

##### **Initialisation d'un sous-domaine explicite avec des champs provenant d'un sous-domaine implicite (région $\Omega_{IE}$ )**

Dans le cas d'un transfert de l'implicite linéaire vers l'explicite développé dans les travaux de [NOE 02, NOE 04a] et de [JUN 98], il est nécessaire de prendre certaines précautions. Nous nous assurons effectivement qu'au moment de la bascule, aucun seuil de la loi matériau utilisée n'a été franchi dans le sous-domaine initialement implicite. Cette hypothèse permet ainsi d'obtenir un état dans le nouveau sous-domaine explicite qui semble cohérent avec la thermodynamique. Ainsi seules les quantités cinématiques du sous-domaine implicite sont utilisées pour initialiser le nouveau sous-domaine explicite. L'ensemble des quantités cinématiques reçues ( $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ) dans le sous-domaine explicite est alors utilisé pour initialiser ses quantités cinématiques. De plus, le champ de déplacement reçu est utilisé pour calculer les forces internes de cette région de la structure. Il faut veiller dans cette phase à évaluer correctement la déformation. En effet, le code *Europlexus* fonctionne naturellement en grande déformation. Ainsi, il est nécessaire durant le calcul des forces internes de tronquer la partie quadratique de la mesure de la déformation, afin d'obtenir le même champ de déformation que celui calculé dans le code *Zset/Zébulon*. Le champ de forces internes qui en découle est ainsi le même que celui de l'implicite, dans la mesure où la formulation des éléments est identique dans les deux sous-domaines. L'état d'équilibre de la zone implicite avant bascule, obtenue dans *Zset/Zébulon*, peut ainsi être recréé dans *Europlexus*. Cependant, comme la matrice des masses est lumpée dans le code explicite, l'état initial imposé n'est pas une solution du système explicite. Une mesure du déséquilibre dans le sous-domaine basculé entre l'implicite et l'explicite peut être évaluée avec la relation suivante, dans le cas où les forces internes sont identiques dans la zone avant et après bascule :

$$\Delta \mathbf{eq}_{\text{imp/exp}_b} = (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{\text{lump}}) \ddot{\mathbf{u}}_b \quad (4.1)$$

Nous portons ici une remarque sur les champs cinématiques nodaux au niveau de l'ancienne interface implicite/explicite. En effet, le calcul couplé sur la configuration initiale permet de satisfaire la continuité de la vitesse interfaciale à l'instant de bascule. Cependant, il n'y a pas continuité du déplacement ni de l'accélération au niveau de l'interface implicite/explicite à l'instant de bascule dans la configuration initiale. Le passage à la nouvelle configuration peut donc poser la question de la stratégie à mettre en place pour imposer la continuité de l'ensemble des quantités cinématiques interfaciales. Une première stratégie qui a été examinée consiste à conserver l'ancienne interface implicite/explicite comme montré sur le cas 3 de la figure 4.4. Dans cette situation la question ne se pose pas puisqu'il n'est pas nécessaire de chercher à imposer cette continuité. Plusieurs instances



**FIGURE 4.2:** Illustration de deux stratégies possibles pour imposer la continuité du champs de déplacement lors de la bascule.

du code *Europlexus* sont alors actives après la bascule (une par sous-domaine explicite). Ceci revient donc à paralléliser *Europlexus* par la méthode de couplage proposée, lorsque des pas de temps identiques sont utilisés dans chaque sous-domaine explicite. Des calculs couplés avec 9 sous-domaines explicites ont par exemple été réalisés dans ce travail [CHA 13b, CHA 13a]. Cependant, dans le cadre de la bascule, le nombre d'interfaces explicite/explicite peut devenir conséquent si un nombre important de bascules est envisagé. Cette stratégie soulève donc la question de l'équilibrage des charges et de l'efficacité de la méthode (taille du problème d'interface et nombre de communications). De plus, les délaminages que nous souhaitons intégrer dans nos simulations nécessitent de gérer le contact inter-domaines. Ainsi, l'effort nécessaire pour aller dans cette direction semble inapproprié au cadre de cette thèse. De plus, ces difficultés peuvent être rejetées dans le mécanisme de parallélisation interne de chaque code. Il est donc préféré d'adopter une méthode dans laquelle nous focalisons sur le couplage de deux zones uniquement. La parallélisation pouvant être faite dans un second temps dans chacune de ces deux zones par les codes. Ainsi, la continuité des champs nodaux après bascule est souhaitée. La figure 4.2 illustre deux stratégies possibles pour le faire sur les champs de déplacement. D'autres stratégies sont possibles comme par exemple imposer des champs cinématiques nodaux moyens.

Pour gommer les discontinuités de l'ancienne interface implicite/explicite, il est choisi ici de fusionner les nœuds de l'interface en question et d'appliquer dessus les trois champs cinématiques issus de la région  $\Omega_{EE}$ . Ce choix permet ainsi de conserver l'état d'équilibre de la zone  $\Omega_{EE}$  à l'instant de bascule.

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

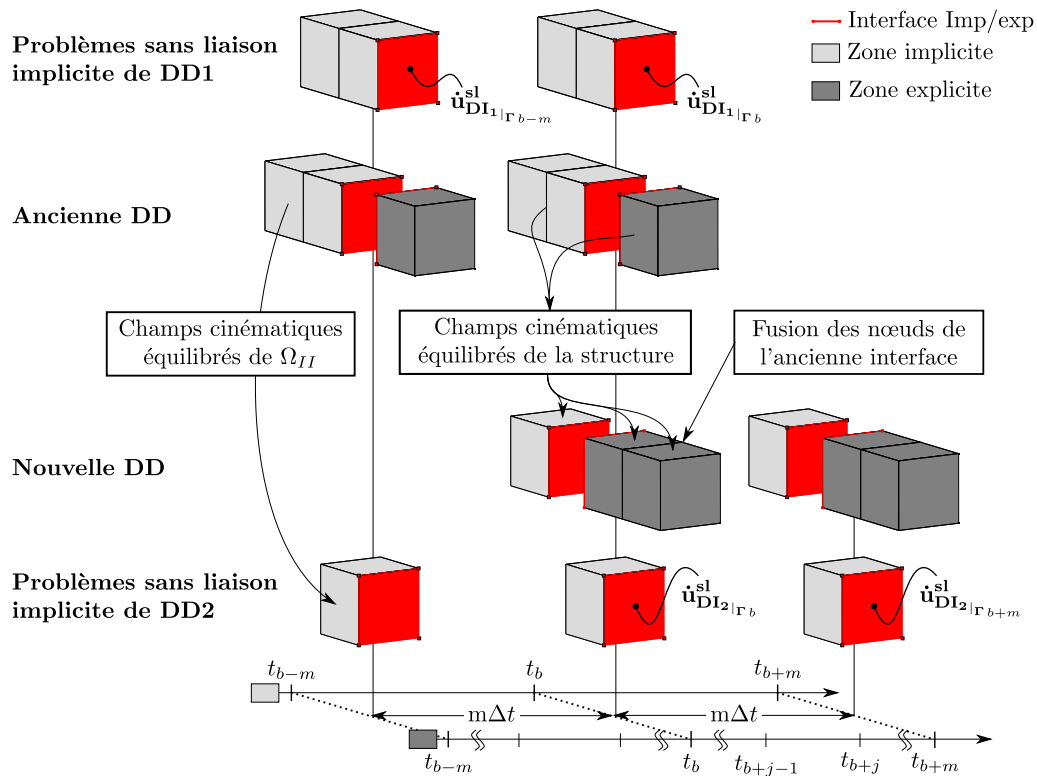


FIGURE 4.3: Illustration des champs à transférer pour le mécanisme de bascule.

#### 4.1.2 Identification des champs à transférer lors de la bascule pour le nouveau problème d'interface implicite/explicite

Un problème d'interface multiéchelle en temps nécessite avec la méthode GC l'interpolation en temps de la vitesse interfaciale du sous-domaine grossier, comme montré sur la figure 2.12, page 64. Or, lors de la bascule, une nouvelle interface multiéchelle en temps est créée dans les cas classiques. Ainsi, pour appliquer la méthode GC, il est nécessaire d'évaluer cette dernière à l'instant de bascule qui est relative à la nouvelle zone grossière en temps ( $\dot{\mathbf{u}}_{\text{DI}_2|_{\Gamma^b}}^{\text{sl}}$ ). Cette quantité intervient dans la relation 2.77, page 64. La stratégie que nous proposons pour cela consiste à transférer également les champs cinématiques équilibrés de l'instant  $t_{b-m}$ . Ainsi, au moment de la bascule, ces champs nodaux sont appliqués dans la partie correspondant au nouveau sous-domaine implicite. Une étape sans liaison est alors réalisée afin de déterminer  $\dot{\mathbf{u}}_{\text{DI}_2|_{\Gamma^b}}^{\text{sl}}$ . Cette phase permet également de calculer la factorisation de l'opérateur implicite qui restera le même à l'instant  $t_b$ , compte tenu de l'hypothèse de linéarité du sous-domaine implicite. Un schéma récapitulant les transferts lors d'une bascule est proposé sur la figure 4.3.

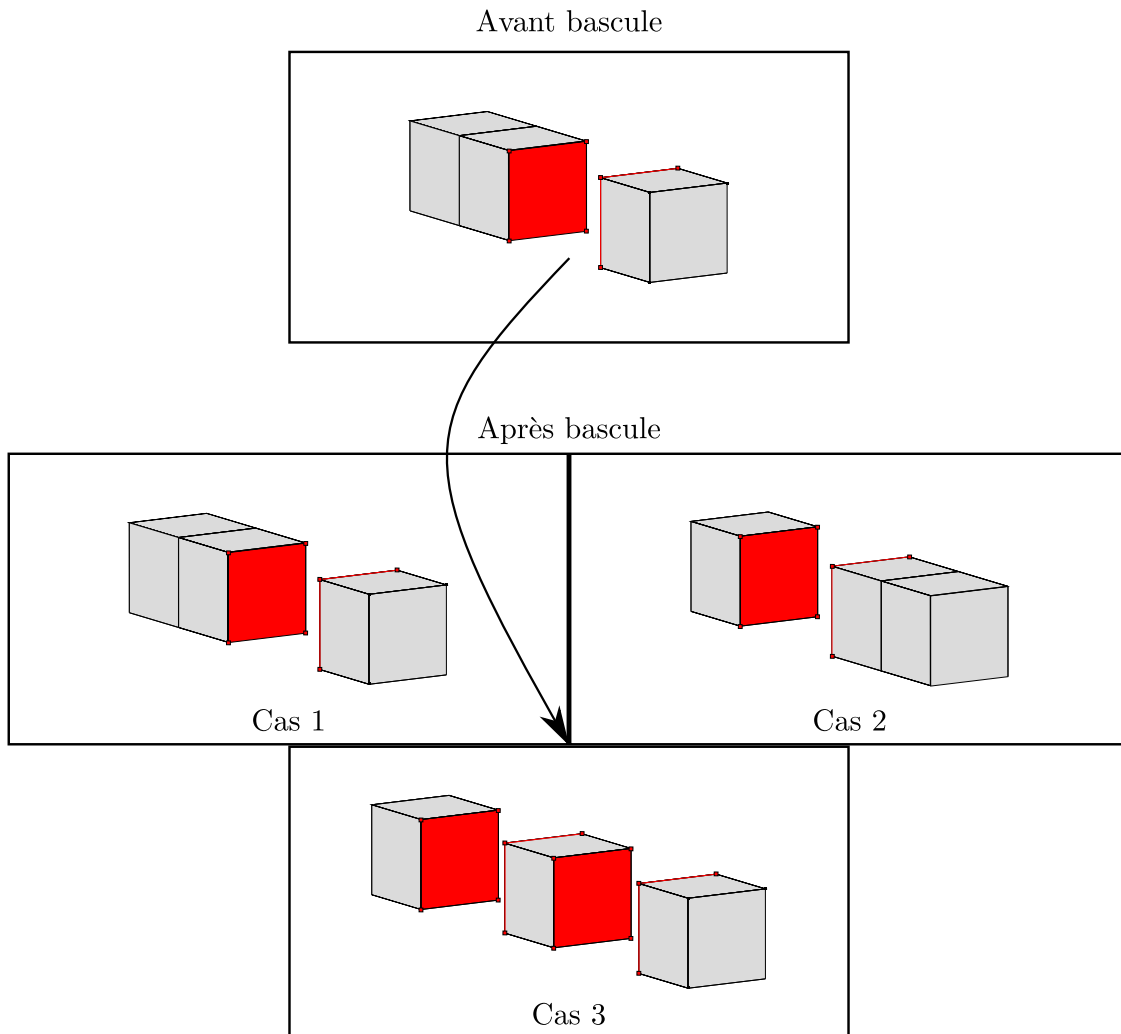


FIGURE 4.4: Illustration de décompositions de domaine possibles pour le mécanisme de bascule en partant d'une décomposition à deux sous-domaines.

## 4.2 Mise en place du mécanisme de bascule dans la stratégie de couplage de codes proposée

Nous proposons de nous intéresser aux bascules impliquant les changements de décomposition en sous-domaines, illustrés sur la figure 4.4. Ces cas permettent de valider la bonne implémentation de la méthode proposée, en choisissant intelligemment le changement de décomposition de domaine (cas 1, 2 ou 3) et les paramètres qui sont modifiés entre les trois régions  $\Omega_{II}$ ,  $\Omega_{IE}$  et  $\Omega_{EE}$  lors de la bascule. Nous nous limitons également ici à la présentation d'une seule bascule. Le processus pouvant par la suite être répété. Il faut cependant avoir à l'esprit que, dès qu'une bascule est réalisée, elle implique de recalculer les compléments de Schur de chacun des nouveaux sous-domaines dans la mesure où des paramètres sont modifiés (taille du domaine, paramètres de Newmark, pas de temps...).



#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

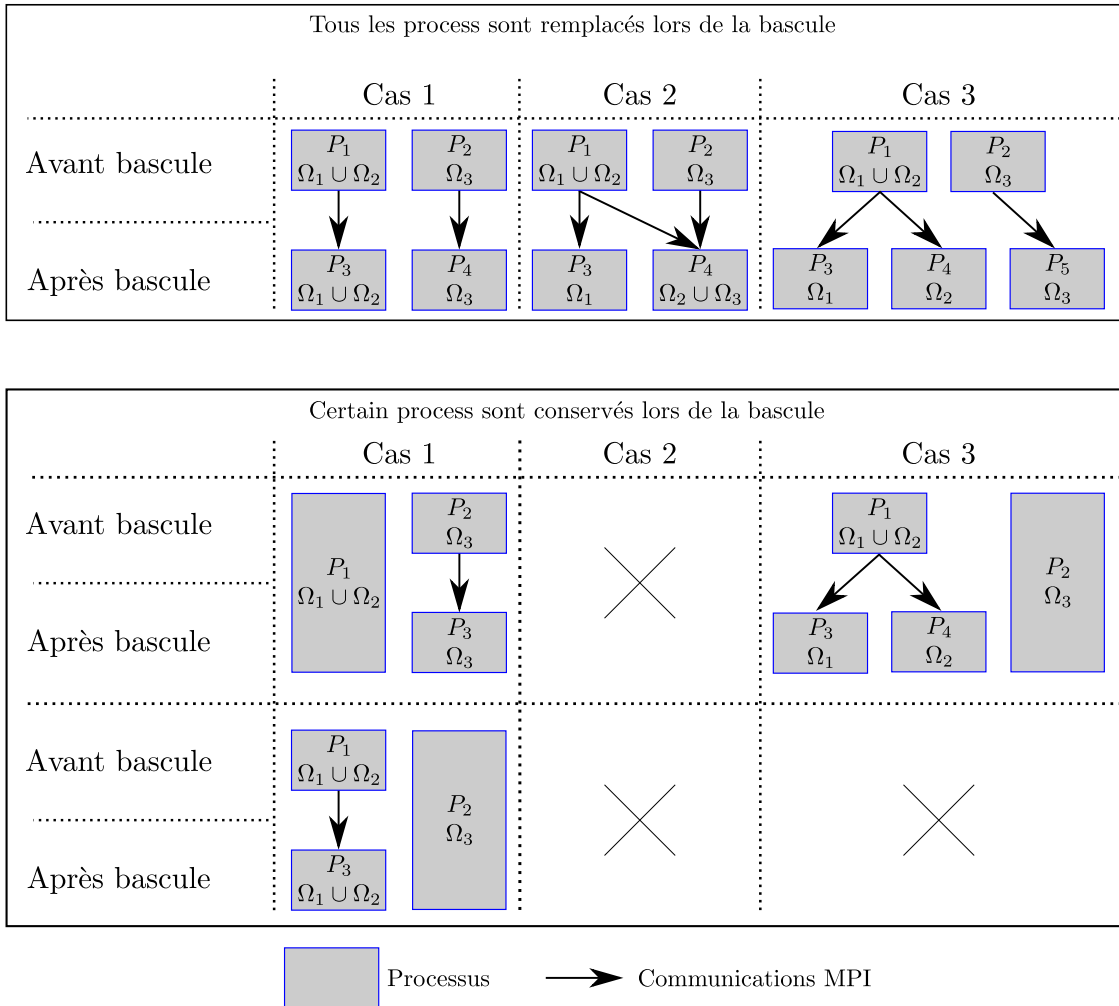
---

Dans le but de simplifier la mise en place de la gestion dynamique des sous-domaines et des codes traitant les différents sous-domaines, nous proposons de définir l'ensemble des sous-domaines au début du calcul. Ainsi, ils sont tous connus à l'avance et il y a au départ de ces simulations un processus *Zset/Zébulon* ou *Europlexus* pour chacun d'eux. Les processus contenant les sous-domaines initiaux exécutent alors le calcul couplé de manière classique, jusqu'à l'instant de bascule. Pendant ce temps, les autres processus sont placés en attente. A l'instant  $t_b$ , les deux processus initialement actifs transfèrent les champs nécessaires à la reprise des nouveaux sous-domaines, aux processus en attente via des méthodes MPI. Les opérations d'extraction étant réalisées par des méthodes Python similaires à celles mise en place pour la méthode GC. Une méthode permettant d'extraire les champs aux points d'intégration a cependant été ajoutée dans le code explicite. Cette étape de transfert nécessite donc une table de communications afin que les quantités des sous-domaines initiaux soient envoyées aux nouveaux sous-domaines adéquats pendant la bascule. Les processus initialement en attente reçoivent ainsi les champs nécessaires à l'initialisation du sous-domaine qu'ils traitent, et le calcul couplé avec la nouvelle décomposition de domaine peut se poursuivre. Une illustration des communications MPI possibles pour le transfert de champs entre les différents processus pendant le mécanisme de bascule pour les trois décompositions en sous-domaine choisies est proposée sur la figure 4.5. Il est à noter que pour certains changements de décomposition de domaine proposés, il est possible et utile de conserver certains process initiaux. Cela évite ainsi des transferts de champs. Pour les cas 2 et 3, certaines configurations de communication ne sont pas proposées (elles sont donc représentées sur la figure par des croix). Elles nécessitent effectivement l'utilisation de méthodes pour ajouter ou supprimer des éléments dans un code au cours du calcul. L'ensemble des fonctionnalités n'est pas disponible actuellement dans les codes choisis, c'est pourquoi nous ne nous y intéresserons pas.

### 4.3 Validation de l'implémentation du mécanisme de bascule

#### 4.3.1 Bascule monoéchelle en temps

L'évolution du déplacement du point de contrôle de la structure présentée sur la figure 4.1 est proposé sur la figure 4.6, pour les changements de décomposition de domaine étudiés (cas 1, cas 2 et cas 3 représentés sur la figure 4.4). Un schéma d'intégration de Newmark identique est utilisé dans toute la structure et pour toute la durée de la simulation. Les paramètres utilisés sont  $\beta = 0.$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-8}s$ . Ainsi, un rapport de pas de temps de 1 est utilisé pour les deux interfaces avant et après bascule. Il s'agit donc d'une bascule entre codes *Europlexus*. Deux matériaux différents sont utilisés dans la structure afin de mettre en évidence que le calcul des compléments de Schur est correct après la bascule dans la deuxième situation. Dans  $\Omega_1$ , un matériau linéaire isotrope transverse dont les paramètres sont indiqués dans le tableau ci-dessous est utilisé.



**FIGURE 4.5:** Illustration de certaines communications MPI pour le transfert de champs entre process pendant le mécanisme de bascule, pour les trois décompositions en sous-domaines proposées sur la figure 4.4.

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---

$E_l$	115000.	Mpa
$E_t$	8500.	Mpa
$g_{lt}$	9000.	Mpa
$\nu_{lt}$	0.32	
$\nu_{tt}$	0.4	
$\rho$	$1.580 \times 10^{-9}$	$t.mm^{-3}$

Dans  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$ , seule la masse volumique du matériau utilisé dans  $\Omega_1$  est changée. Une valeur de  $1.580 \times 10^{-6} tmm^{-3}$  est choisie pour ces deux zones. Le chargement imposé dans ces cas test correspond au déplacement présenté sur les figures 4.6. Il est appliqué sur la face de  $\Omega_3$  qui est sur l'extrémité de la structure et à l'opposé du point de contrôle. Le calcul de référence proposé sur la figure 4.6 est réalisé avec *Europlexus* et les mêmes paramètres que les calculs couplés avec bascule. Les deux situations testées permettent ainsi de conclure que le mécanisme de bascule fonctionne correctement entre plusieurs instances du codes *Europlexus*. Elles permettent également de montrer que le transfert de champs de code explicite à code explicite fonctionne correctement. Par ailleurs, la deuxième situation de bascule (cas 2) permet de montrer que la création de la nouvelle interface est bien réalisée dans ce cadre, puisque l'ensemble des points obtenus dans les deux cas de bascule sont confondus avec la solution de référence *Europlexus* sans couplage.

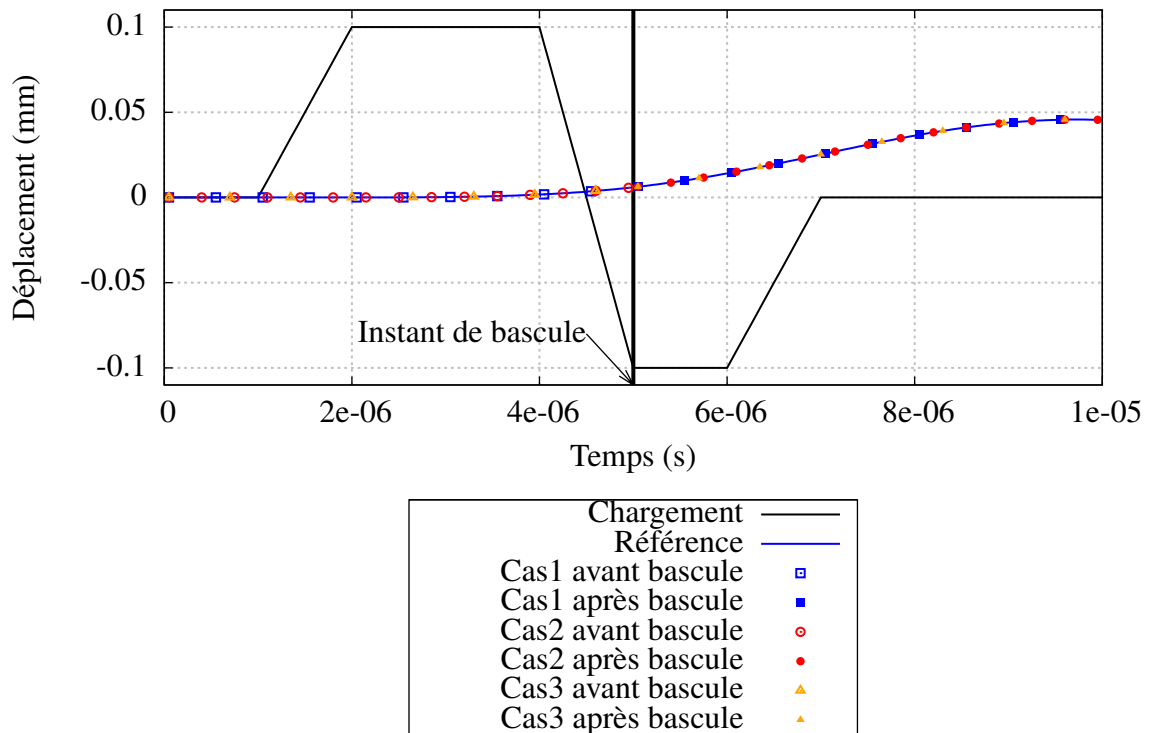
L'équivalent des cas tests qui viennent d'être présentés avec des codes *Europlexus* est réalisé avec des codes *Zset/Zébulon* et les paramètres suivant  $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Delta t = 1 \times 10^{-7} s$ . Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.7. Ils permettent de valider le mécanisme de redémarrage de sous-domaines de *Zset/Zébulon* à *Zset/Zébulon*, ainsi que la création de la nouvelle interface. Le bon calcul des compléments de Schur des nouveaux sous-domaines est également démontré, puisque les point obtenus dans les deux cas de bascule sont confondus avec la solution de référence *Zset/Zébulon* sans couplage.

### 4.3.2 Bascules avec des interfaces multiéchelles en temps

Comme il peut être observé sur les figures 4.6 et 4.7, l'historique du déplacement du point de contrôle est différent entre l'algorithme implicite et explicite car la matrice des masses est lumpée dans *Europlexus* et le cas test comporte seulement trois éléments. Il s'agit donc d'une situation dégénérée pour un couplage implicite/explicite. Un cas test plus représentatif est donc choisi pour montrer le fonctionnement de la bascule dans une situation mieux adaptée. Pour cela, la poutre qui a été utilisée dans le chapitre précédent est réutilisée. Les différentes décompositions de domaine choisies ici sont illustrées sur la figure 4.8, page 126.

#### 4.3.2.1 Validation du calcul de la vitesse sans liaison dans la nouvelle décomposition de domaine

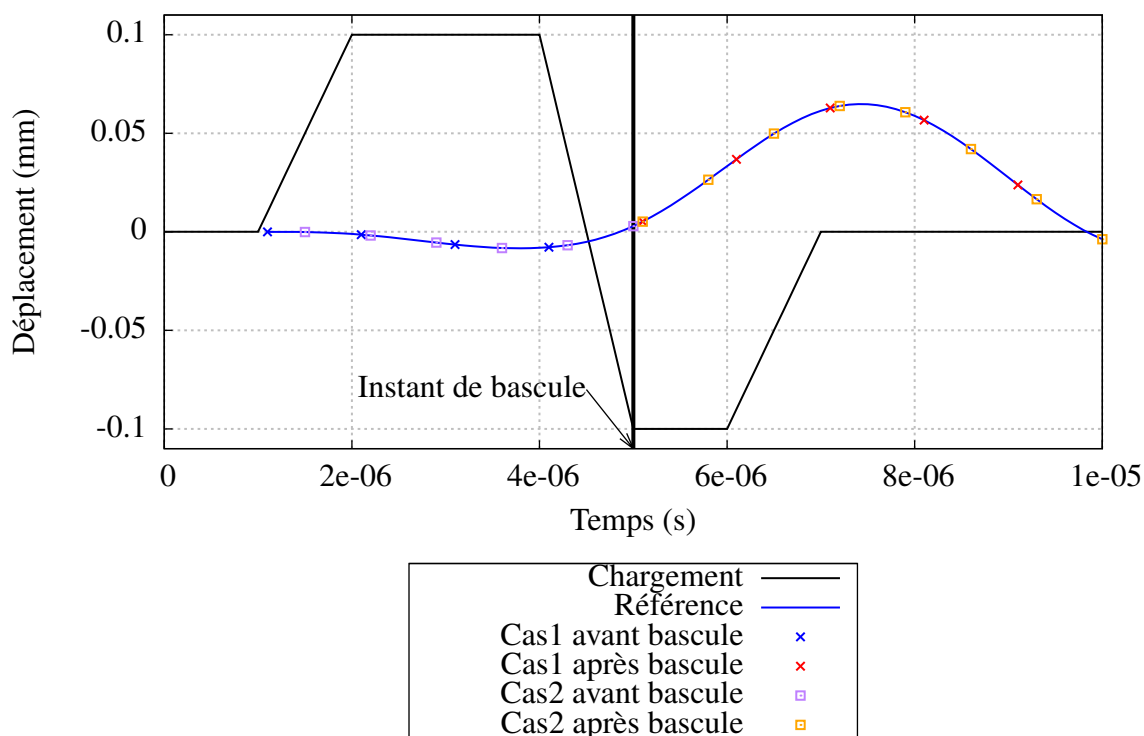
Sur la figure 4.9 est présenté l'évolution du déplacement du point de contrôle de la poutre pour deux calculs. L'un correspond à un calcul couplé de référence entre *Europlexus* et *Zset/Zébulon*, sans bascule, avec un rapport de pas de temps de 10. Ce dernier



**FIGURE 4.6:** Validation du mécanisme de bascule entre codes *Europlexus* avec un Schéma de Newmark identique dans toute la structure et sur toute la durée de la simulation. Les paramètres utilisés sont  $\beta = 0.$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-8} s$ .

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---



**FIGURE 4.7:** Validation du mécanisme de bascule entre codes *Zset/Zébulon* avec un Schéma de Newmark identique dans toute la structure et sur toute la durée de la simulation. Les paramètres utilisés sont  $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\Delta t = 1 \times 10^{-7} s$ .

a été présenté dans la section 3.4, page 89 et illustré sur la figure 3.9, page 99, avec la décomposition de domaine DD2.

L'autre correspond à un calcul couplé avec bascule. La bascule qui est choisie ici conserve la décomposition de domaine initiale, ainsi que les paramètres respectifs de chacun des sous-domaines. La décomposition de domaine DD2 illustrée sur la figure 4.8 est utilisée. Le rapport de pas de temps est de 10 avant et après bascule et aucune nouvelle interface n'est créée. Il s'agit donc, dans ce cas particulier, d'une reprise de calcul couplé. Cependant, ce cas test met en évidence que le calcul de la vitesse sans liaison nécessaire au problème d'interface est bien réalisée lors de la bascule, puisque les deux courbes sont confondues. De même, le bon fonctionnement des transferts de champs *Zset/Zébulon/Zset/Zébulon* et *Europlexus/Europlexus* pour les deux sous-domaines est également mis en évidence.

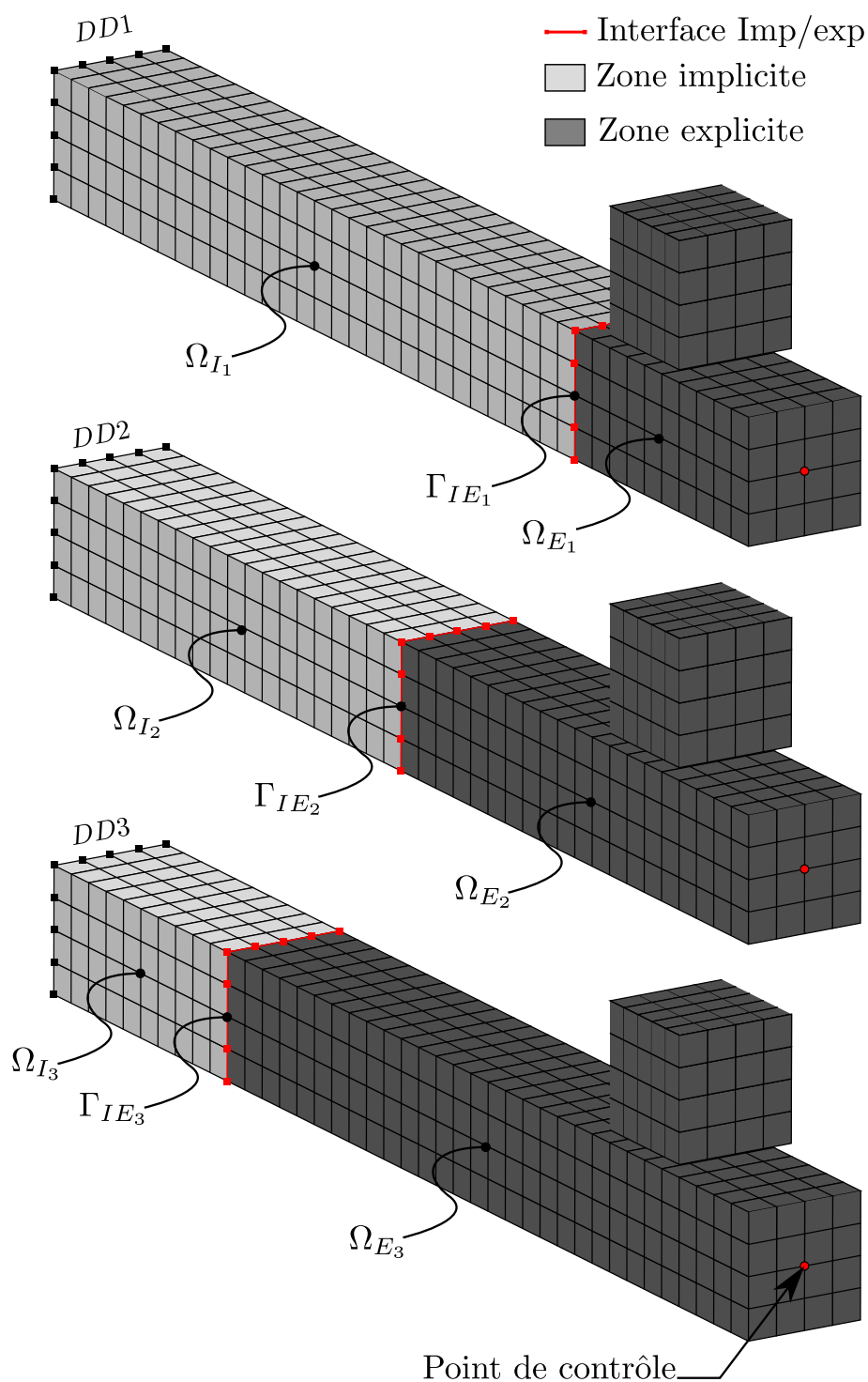
#### 4.3.2.2 Étude de convergence

Il est proposé maintenant de s'intéresser à la configuration de bascule qui est la plus intéressante du point de vue de l'application. Celles qui viennent d'être présentées étant des cas particuliers, choisis spécifiquement pour la phase de validation. Différents cas de bascule Implicite/explicite avec différents changements de décomposition de domaine sont ainsi proposés. Pour cela, les trois décompositions de domaine DD1, DD2 et DD3 illustrées sur la figure 4.8 sont utilisées. Par ailleurs, trois instants de bascule sont étudiés sur le cas de la poutre 3D impactée  $t_{b1} = 2.5 \times 10^{-4}s$ ,  $t_{b2} = 5 \times 10^{-4}s$  et  $t_{b3} = 7.5 \times 10^{-4}s$ .

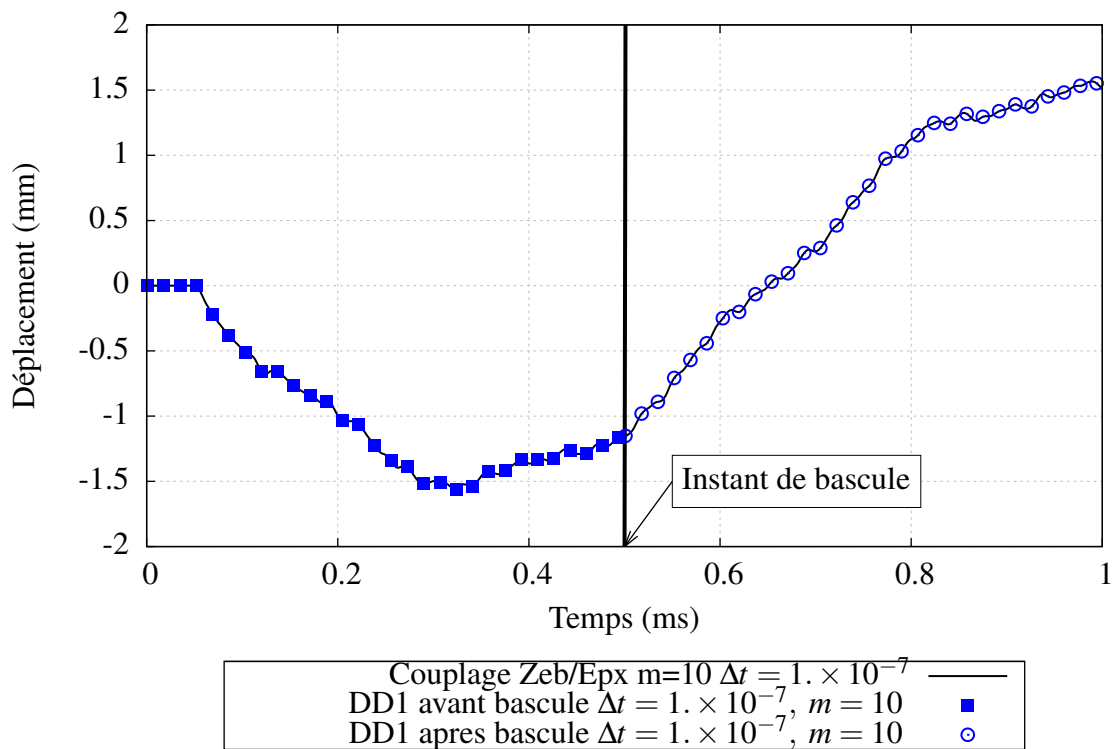
Les figures 4.10 et 4.11 présentent certaines combinaisons de ces paramètres d'étude. La figure 4.10 illustre en particulier l'évolution du déplacement du point de contrôle en fonction de l'instant de bascule, pour un passage de la décomposition de domaine DD1 à DD2. La figure 4.11 illustre la même quantité mais pour une bascule de la décomposition de domaine DD1 à DD3. Dans ces simulations, le pas de temps explicite est de  $1 \times 10^{-7}s$  et celui de la partie implicite est de  $1 \times 10^{-6}s$ . Un rapport de pas de temps de 10 est donc présent aux interfaces implicite/explicite. Concernant la figure 4.10, il peut être observé que plus la bascule tarde à être déclenchée, plus la solution est similaire à celle obtenue avec le calcul couplé de la décomposition de domaine initiale DD1 sans bascule. Inversement, plus la bascule est précoce, plus la solution se corrèle avec la solution obtenue par le calcul couplé réalisé sur la décomposition de domaine DD2 sans bascule. Concernant la figure 4.11, un constat similaire à celui qui vient d'être réalisé peut être fait.

Par ailleurs, il peut être observé, avec les solutions de comparaison couplées sans bascule, que plus la DD comporte d'éléments implicites, plus la solution a tendance à se corrèler avec la solution entièrement implicite. Inversement, plus il y a d'éléments explicites, plus la solution a tendance à se corrèler avec la solution entièrement explicite. Les résultats avec bascule sont également cohérents avec cette remarque, en observant la répartition spatiale et temporelle des éléments dans les zone implicite et explicite tout au long de la simulation.

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite



**FIGURE 4.8:** Illustration des décompositions de domaine DD1, DD2 et DD3 utilisées pour la validation de la bascule implicite→explicite.



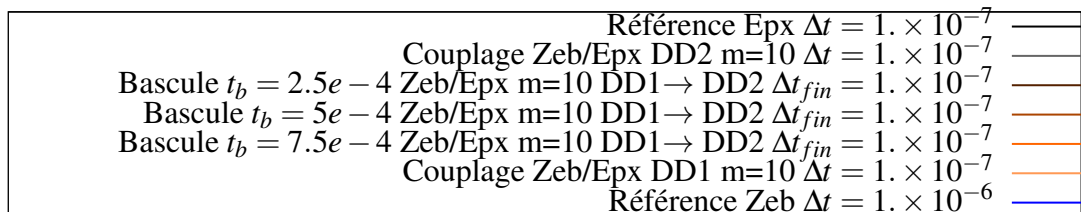
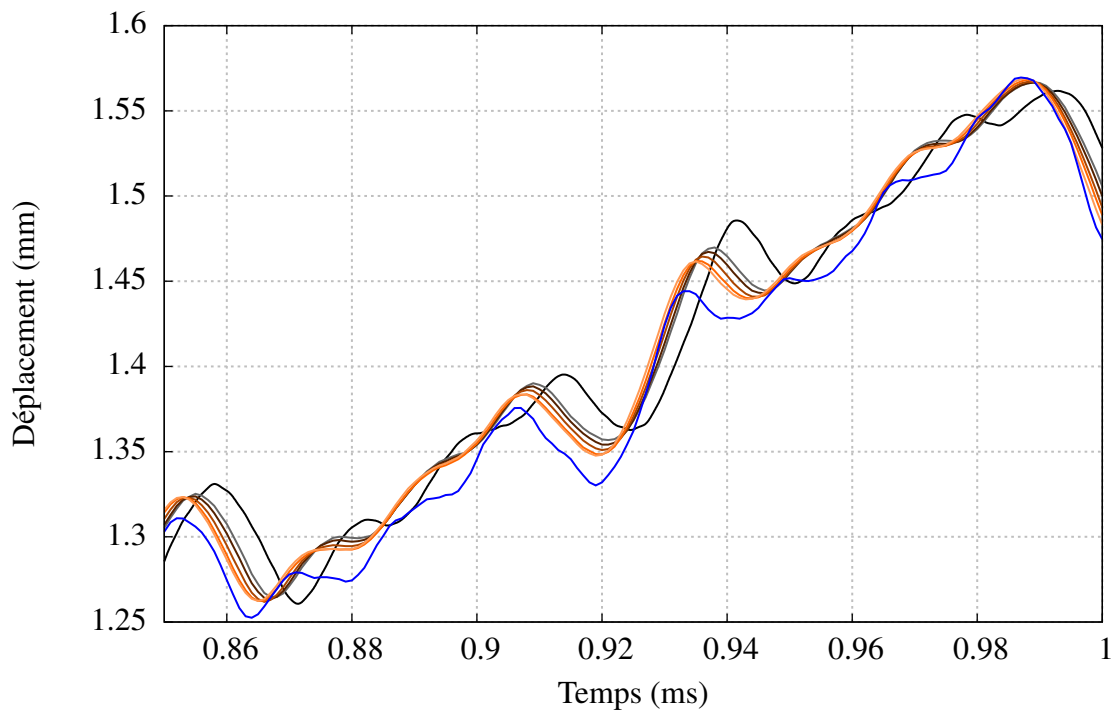
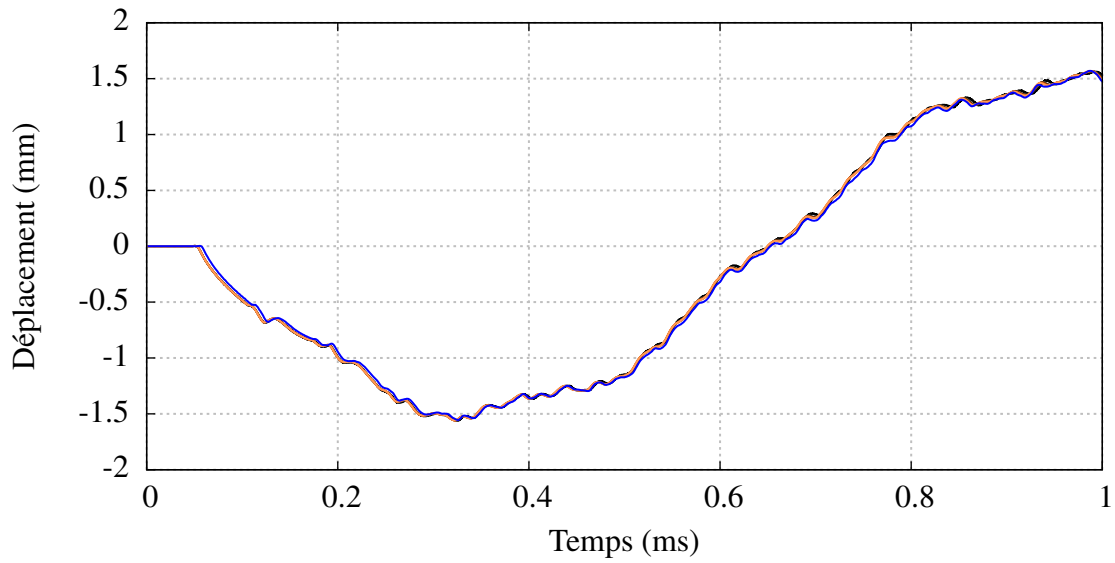
**FIGURE 4.9:** Validation du calcul de la vitesse sans liaison du sous-domaine grossier en temps lors d'une bascule. Ces résultats sont obtenus avec une bascule qui conserve la décomposition de la poutre DD2 illustrée sur la figure 3.7, page 96, et avec un rapport de pas de temps de 10.



#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

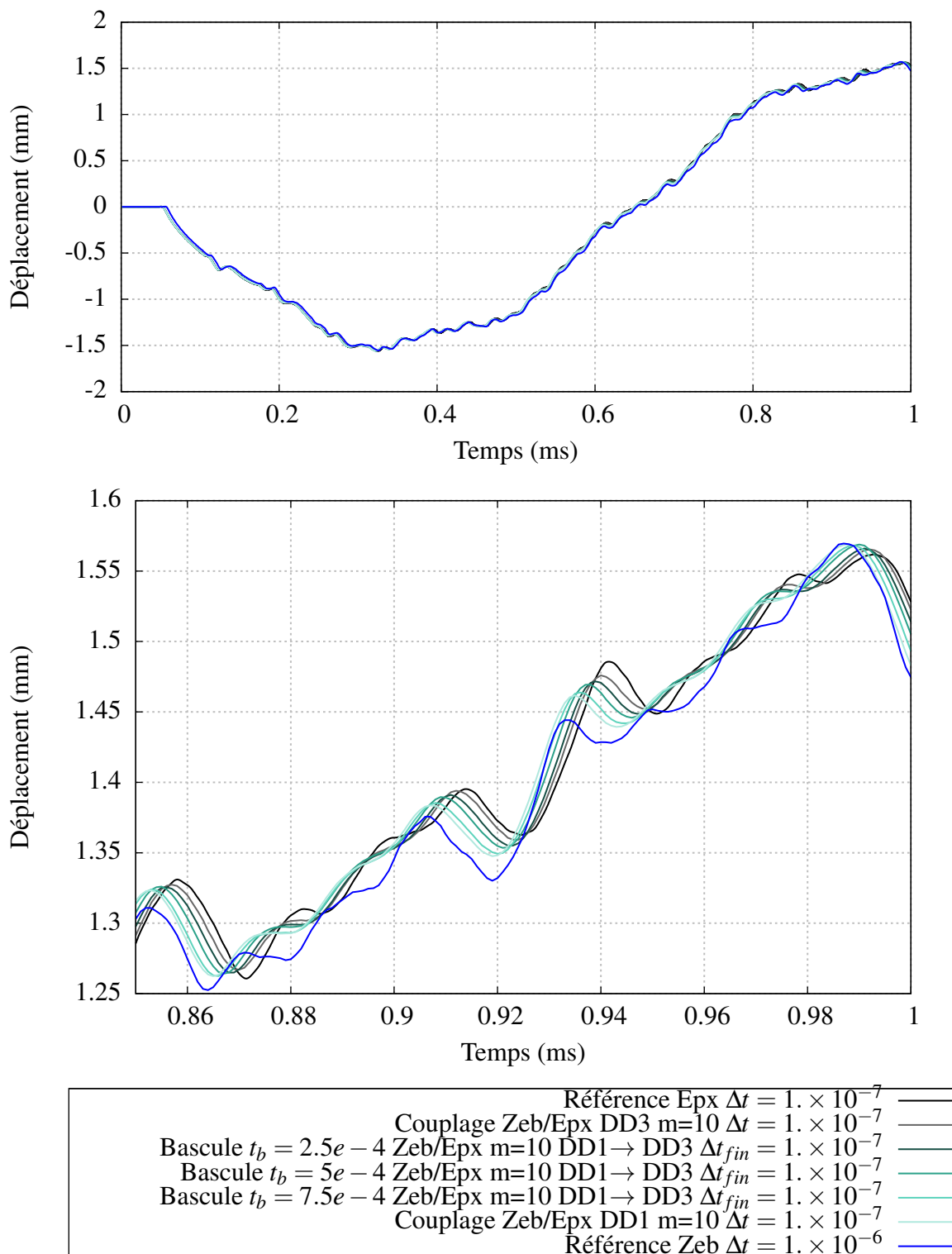
---

La solution avec la bascule la plus tardive ( $t_{b3} = 7.5 \times 10^{-4}s$ ) et qui est majoritairement réalisée avec la décomposition de domaine DD1 a effectivement spatialement et temporellement des éléments majoritairement intégrés avec un algorithme implicite et un pas de temps de  $1 \times 10^{-6}s$ . C'est pourquoi, elle se rapproche de la solution de référence implicite intégrée avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-6}s$ . A l'opposée, la solution avec bascule précoce ( $t_{b3} = 7.5 \times 10^{-4}s$ ) et qui est majoritairement réalisée avec la décomposition de domaine DD3 a spatialement et temporellement des éléments majoritairement intégrés avec *Europlexus* et avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-7}s$ . C'est pourquoi, elle se rapproche de la solution de référence explicite intégrée avec un pas de temps de  $1 \times 10^{-7}s$ .

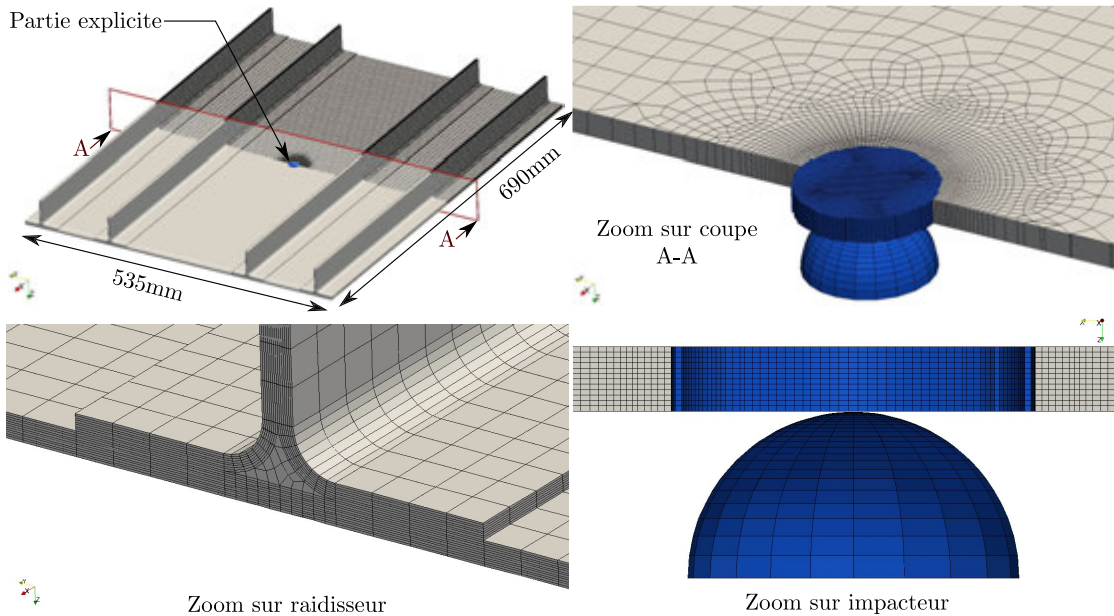


**FIGURE 4.10:** Etude de convergence pour le passage de la DD1 à la DD2.

4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite



**FIGURE 4.11:** Etude de convergence pour le passage de la DD1 à la DD3.



**FIGURE 4.12:** Illustration de la géométrie et d'une partie du maillage utilisées pour ce cas d'étude. La décomposition de domaine présentée correspond à la DD3. La partie partie en bleu est traitée avec le code de calcul *Europlexus*, la partie complémentaire en gris est traitée avec *Zset/Zébulon*.

## 4.4 Application au calcul d'impact sur stratifié

Il est proposé dans cette section d'appliquer le mécanisme de bascule au calcul d'impact sur stratifié. Pour cela, une simulation sur panneau composite raidi, impacté à 20 joules, est réalisée. Sa géométrie correspond à celle qui est utilisée lors des essais expérimentaux conduits à l'Onera. Une succession de trois bascules est proposée ici pour mener le calcul décrit.

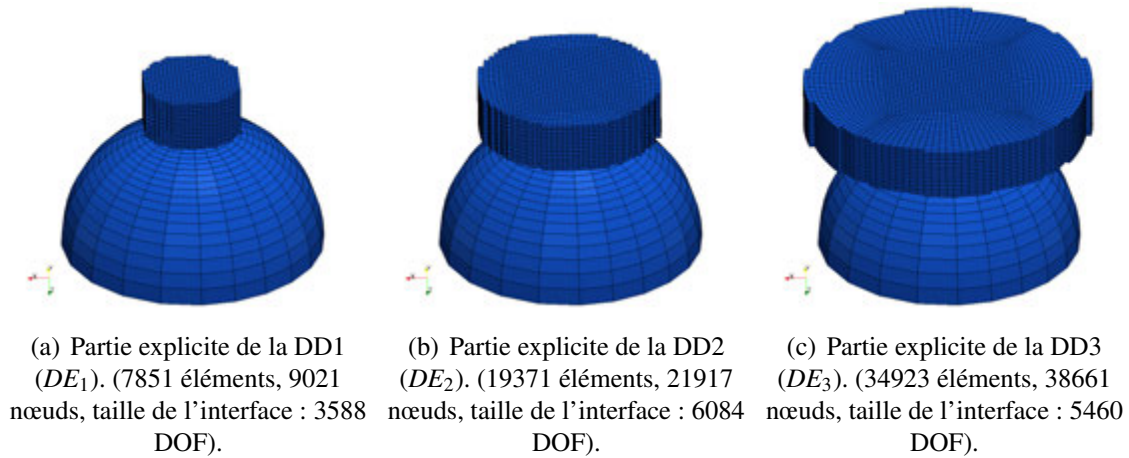
### 4.4.1 Cas d'étude

Une illustration de la géométrie du panneau, du maillage ainsi que d'une décomposition de domaine utilisée dans cette étude est proposée sur la figure 4.12. L'empilement est  $[90, 45, 0, 0, -45, 90, 90, -45, 0, 0, 45, 90]$  pour la peau et  $[45, 0, -45, 0, 45, 0, -45, 90]$  pour les raidisseurs, ce qui est représentatif d'une stratification industrielle. La taille de maille est comprise entre 5mm dans la partie la plus grossière, et 0.25mm dans la partie la plus raffinée qui est localisée dans la zone d'impact. Tous les plis sont discrétisés et ils contiennent un élément chacun dans leur épaisseur et ce dans toute la structure. L'épaisseur d'un pli est de 0.26 mm. L'impacteur a un rayon de 8mm, une vitesse initiale de  $14.1m.s^{-1}$  et une masse de 0.2kg, ce qui conduit à un impact de 20J.

Trois décompositions de domaine sont utilisées, elles sont notées DD1, DD2 et DD3. La zone traitée avec le code *Europlexus* ( $\beta = 0, \gamma = 0.5$ ) de chacune d'elles est présen-

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---



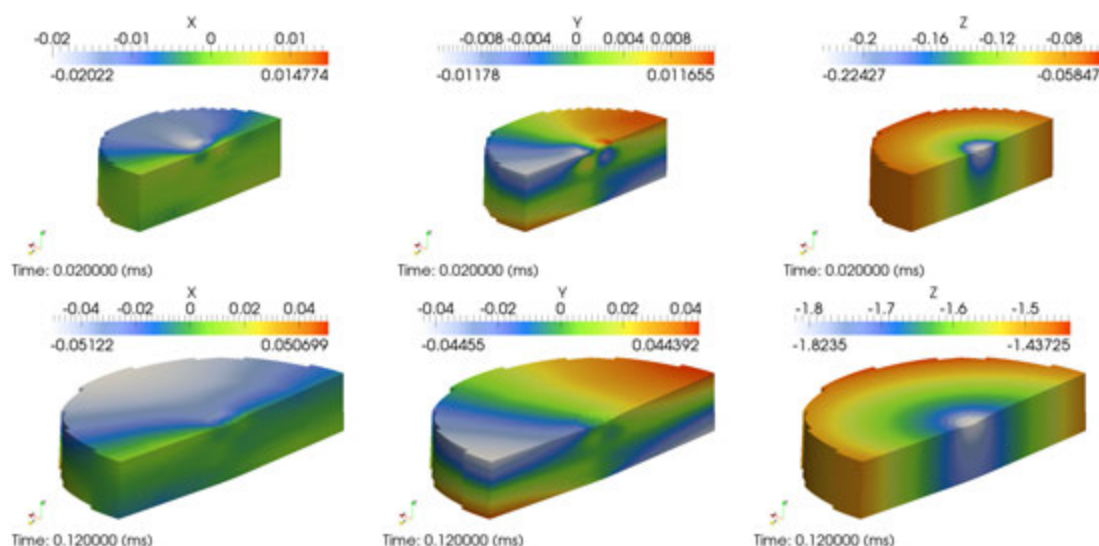
**FIGURE 4.13:** Parties explicites traitées par *Europlexus* pour les trois décompositions de domaine de cette étude.

tée sur la figure 4.13. La partie complémentaire du maillage, non représentée, est traitée avec *Zset/Zébulon* ( $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ). Le maillage est inchangé pour l'ensemble des découpages considérés. Il comporte 472023 éléments et 1543149 DOF.

Le calcul couplé avec bascule réalisé ici débute avec la DD1. Il se poursuit sur cette dernière jusqu'à l'instant  $tb_1 = 2. \times 10^{-5}s$  où un premier mécanisme de bascule est appliqué. La zone explicite passe alors du  $DE_1$  au  $DE_2$  (cf figures 4.13(a) et 4.13(b)) Le calcul couplé se poursuit ainsi sur la DD2 jusqu'au second mécanisme de bascule déclenché à l'instant  $tb_2 = 1.2 \times 10^{-5}s$ . Ce dernier permet de passer de la DD2 à la DD3. La partie explicite devient alors le  $DE_3$  (cf figure 4.13(c)). Les instants de bascule ont été déterminés afin de garantir qu'aucun seuil d'endommagement du matériau ne soit franchi dans les zones implicites. Le pas de temps explicite est fixé à  $5. \times 10^{-9}s$  pour toute l'étude, ce qui est compatible avec la condition CFL. Celui de la partie implicite est fixé à  $1. \times 10^{-6}s$ , ce qui conduit à un rapport de pas de temps de 200 pour chacune des trois interfaces implicite/explicite relatives aux trois DD. Un calcul couplé avec le même rapport de pas de temps est également réalisé sur la DD3, sur toute la plage d'étude, afin de réaliser un comparaison avec et sans bascule.

#### 4.4.2 Résultats

Il est proposé sur les figures 4.15, 4.16, 4.17 et 4.18 des cartographies de l'évolution de l'endommagement obtenu avec les deux méthodes. Les deux premières sont relatives au calcul sans bascule et les deux suivantes concernent le calcul avec bascule. Pour chaque pas de temps présenté, trois vues sont proposées. Celle la plus à gauche correspond à la face impactée et celle la plus à droite à la face opposée (l'impacteur est masqué). Seule la partie explicite de la décomposition de domaine *en cours* est présentée. La comparaison de l'ensemble de ces cartographies permet de montrer une très bonne adéquation entre les deux méthodes concernant l'historique des endommagements.



**FIGURE 4.14:** Illustration des champs nodaux dans les parties explicites des nouvelles décompositions de domaine utilisées aux instants de bascule  $tb_1$  et  $tb_2$ . ( $DE_2$  sur la partie supérieure de la figure et  $DE_3$  sur la partie inférieure).

D'autre part, les cartographies des champs de déplacements pris aux deux instants de bascule  $tb_1$  et  $tb_2$  peuvent être observé sur la figure 4.14. Leur continuité dans les trois composantes proposées est visible. Un constat similaire peut être fait sur celles de vitesse et d'accélération. Il faut noter que ces champs sont ceux imposés comme *conditions initiales* dans les nouveaux sous-domaines explicites  $DE_2$  et  $DE_3$ . Une partie de ces derniers proviennent donc du sous-domaine implicite de l'ancienne décomposition de domaine.

L'accélération en temps CPU de la méthode proposée, notée  $A_{bascule}$ , peut s'évaluer par la relation suivante :

$$A_{bascule} = \frac{t_{CPU}^{Ref}(tb_2) - t_{CPU}^{Avec\ bascule}(tb_2)}{t_{CPU}^{Ref}(tb_2)} \quad (4.2)$$

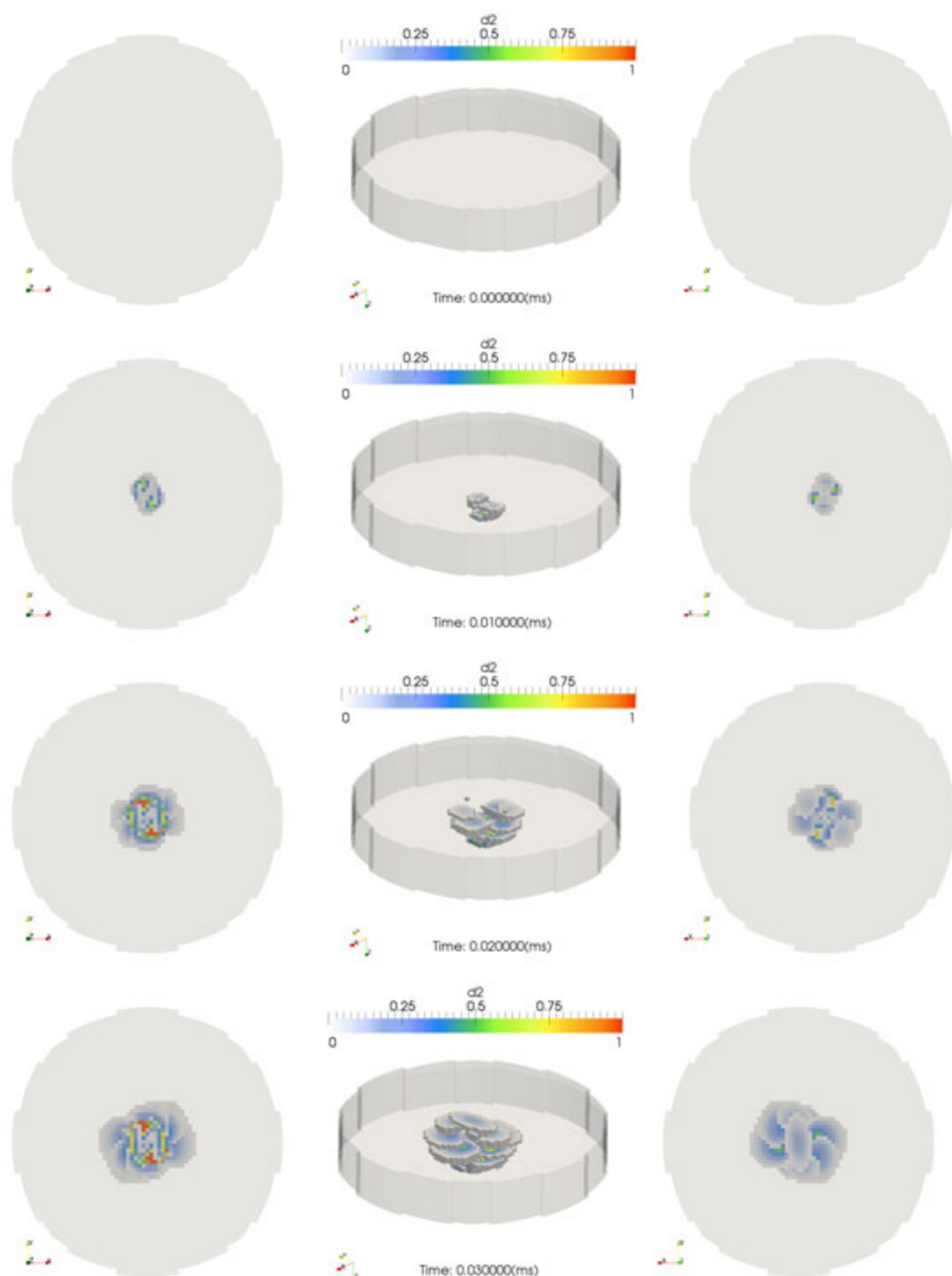
Avec  $t_{CPU}^{Ref}(tb_2)$  le temps CPU nécessaire pour atteindre l'instant de simulation  $tb_2$  avec le calcul de référence et  $t_{CPU}^{Avec\ bascule}(tb_2)$  est celui nécessaire pour atteindre le même instant mais avec la méthode de bascules proposée. Le calcul de référence choisi pour évaluer ce gain de temps est le calcul couplé réalisé sur DD3. Ainsi, la puissance de calcul allouée dans les deux situations comparées est la même, ce qui n'entraîne pas de biais dans la mesure de  $A_{bascule}$ . Une accélération qui est de l'ordre de 50% est ainsi obtenue. La répartition des temps de calcul correspondant est reportée sur la figure 4.19.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a débuté en partant du constat que le coût CPU de la partie explicite est dominant dans notre application en utilisant la stratégie de couplage proposée dans

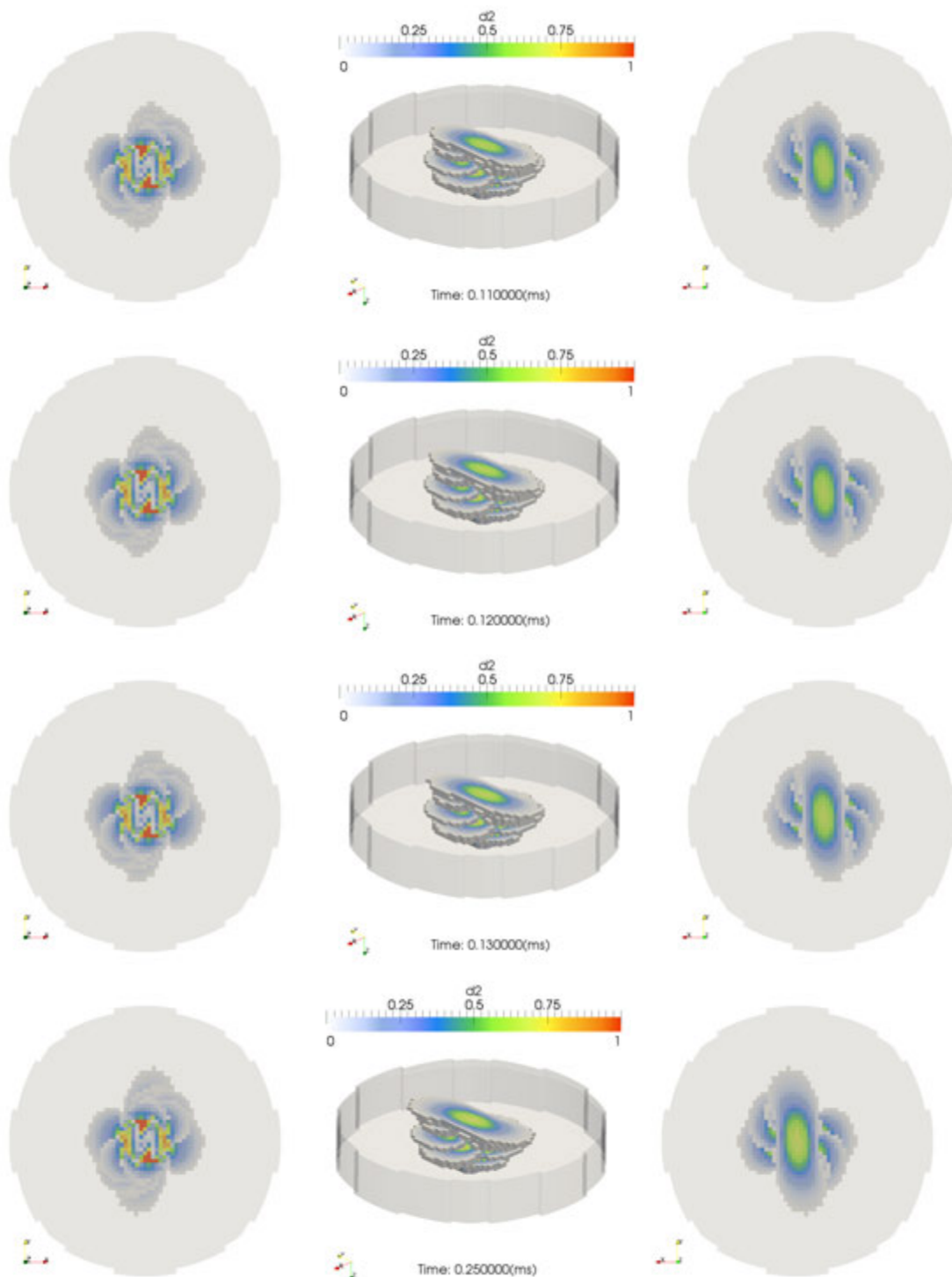
#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---



**FIGURE 4.15:** Cartographies d'endommagement dans le sens matriciel, obtenues avec le calcul couplé de référence avec la DD3 (partie 1).



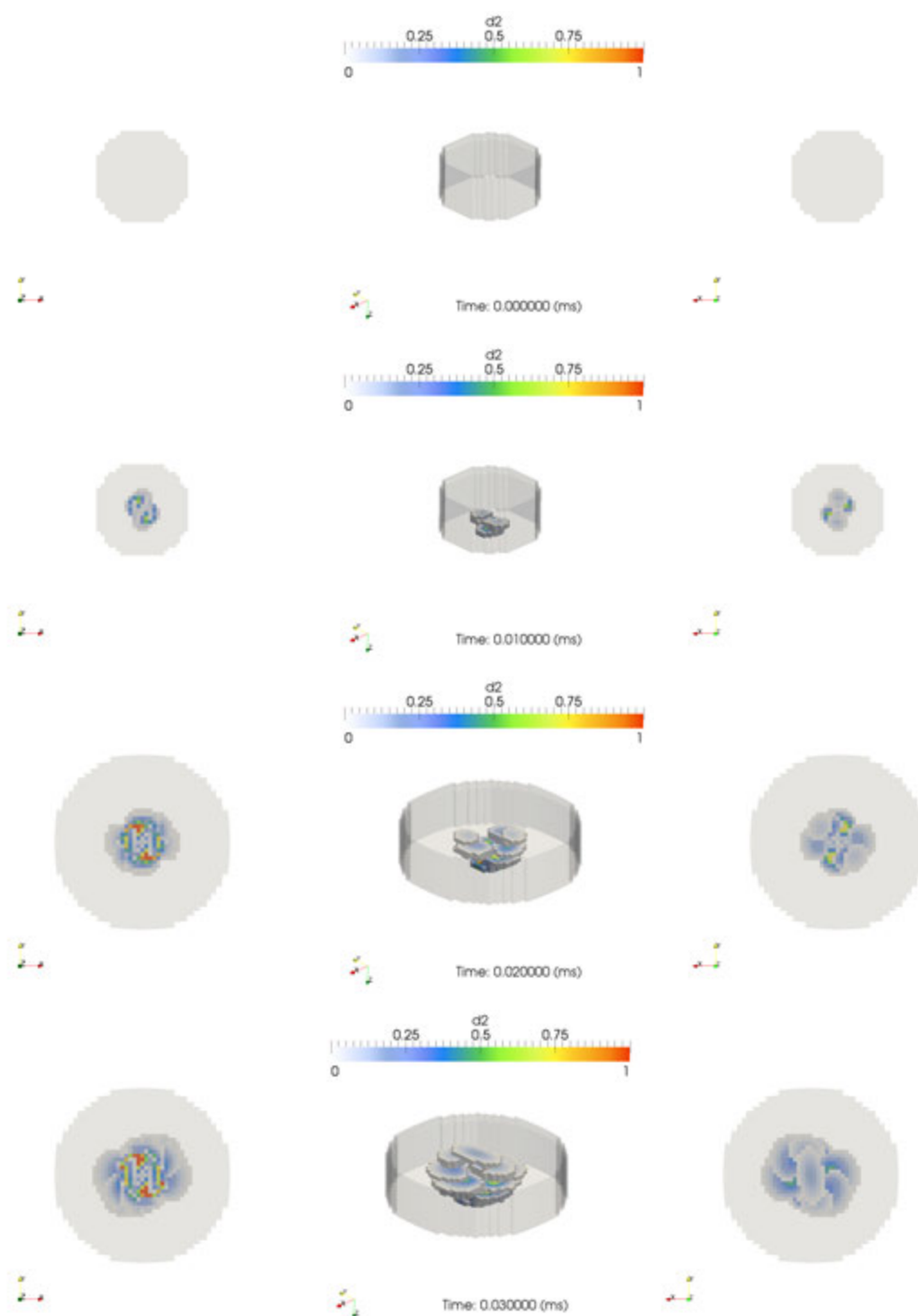


**FIGURE 4.16:** Cartographies d'endommagement dans le sens matriciel, obtenues avec le calcul couplé de référence avec la DD3 (partie 2).

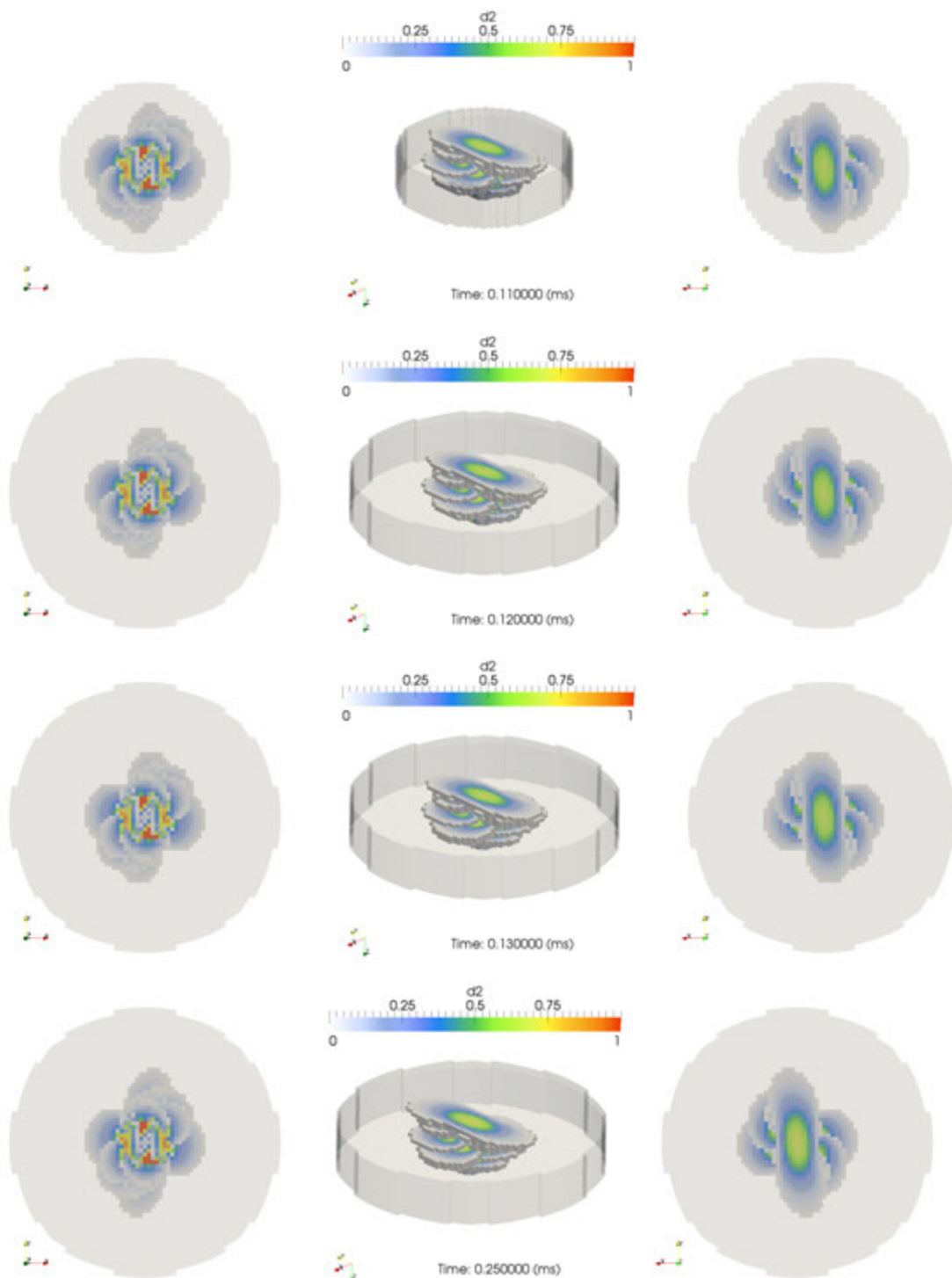


#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---

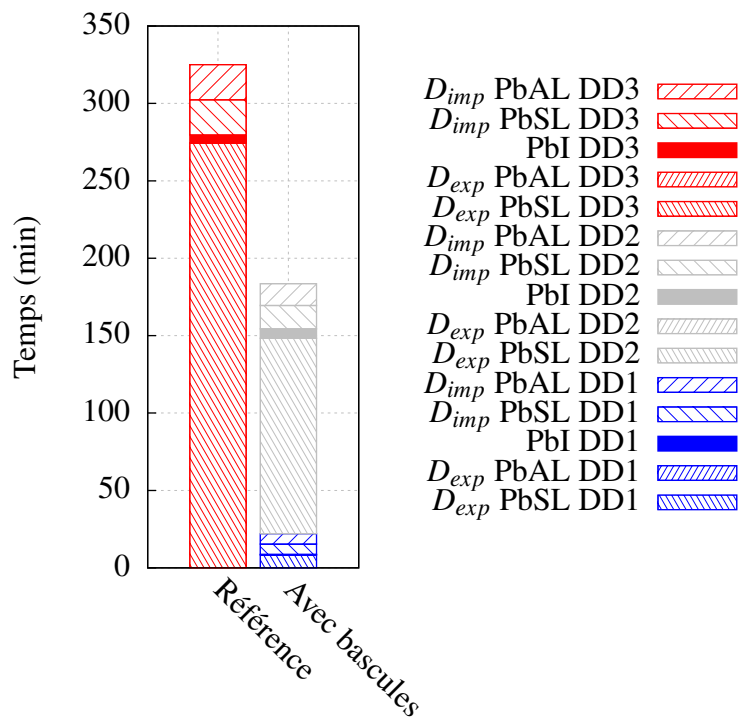


**FIGURE 4.17:** Cartographies d'endommagement dans le sens matriciel, obtenues avec le calcul avec bascule (partie 1).



**FIGURE 4.18:** Cartographies d'endommagement dans le sens matriciel, obtenues avec le calcul avec bascule (partie 2).

4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite



**FIGURE 4.19:** Comparaison des temps de calcul pour atteindre l'instant de simulation  $tb_2$  avec le calcul de référence et avec la méthode de bascules proposée. (PbSL : Problèmes sans liaison, PbAL : Problèmes avec liaison, PbI : Problèmes d'interface).

le chapitre 3. En effet, bien que cette dernière permette déjà une accélération du calcul par rapport à une simulation classique, ses performances restent freinées ici par la taille statique de la zone explicite. Un mécanisme de bascule consistant à la faire évoluer dynamiquement a ainsi été proposé dans ce chapitre. Sa mise en place a été développée. Elle a révélée qu'une intrusivité plus importante que celle requise pour la méthode GC du point de vue de la programmation est nécessaire. Néanmoins, elle reste limitée. De plus, sa mise en place a conduit à s'interroger sur la stratégie à adopter pour imposer la continuité de champs cinématiques nodaux lors de la suppression d'une interface implicite/explicite. Cependant, après avoir proposé certaines pistes pour répondre à cette question, il a été montré, par la simulation d'un panneau composite raidi impacté en particulier, que le mécanisme de bascule est intéressant sur le plan du coût CPU. En effet, la comparaison de l'historique des endommagements obtenus avec la stratégie proposée et avec une méthode de référence, a permis d'étayer cette conclusion puisque ces derniers ne sont pas affectés de manière significatifs. Ainsi, la bascule permet d'obtenir une accélération supplémentaire du temps CPU. Un facteur de l'ordre de 2 a effectivement été mesuré. Ce travail comporte certaines limites et il ouvre également sur un certain nombre de perspectives qui sont reportées dans le bilan de ce travail.

#### 4. Extension de la stratégie de couplage par la mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite

---

# Chapitre 5

## Bilan et perspectives

L'allègement des aéronefs ainsi que leur efficacité énergétique est une préoccupation permanente des constructeurs. C'est pourquoi, les matériaux composites, qui disposent de propriétés spécifiques très intéressantes, prennent progressivement une part de plus en plus significative dans les composants des appareils. Ils sont aujourd'hui choisis pour réaliser des pièces de structures très sollicitées mécaniquement, tels que le caisson central de l'A380 ou encore une partie du fuselage de l'A350XWB. Néanmoins, comme il a été montré dans le chapitre 1, ces matériaux restent vulnérables aux impacts de faible énergie. Ces derniers peuvent engendrer des endommagements comme de la fissuration matricielle, des ruptures de fibres ou encore du délaminage. Ceci pose problème, car les propriétés mécaniques des pièces sont dégradées et il est difficile de détecter cela par de simples inspections visuelles (notion de BVID). Ainsi, des campagnes d'essais relativement onéreuses sont réalisées dans le milieu industriel pour s'assurer que le dimensionnement des composants sujets à ce phénomène est adapté. C'est pourquoi la pratique du *virtual testing* est souhaitable dans ce cadre, car elle permet de réduire les coûts en rationalisant ces dernières. Cependant, elle peine à être mise en place dans notre cadre, car la simulation des impacts est très délicate. Ces difficultés ont été évoquées dans l'étude bibliographique du chapitre 1, qui a permis de montrer que certaines simulations semblent suffisamment prédictives vis-à-vis des endommagements créés. Néanmoins, elles demeurent excessivement gourmandes en temps de calcul pour être appliquées à des composants industriels. La plupart sont effectivement appliquées sur de petites pièces ou éprouvettes, et le temps de calcul est déjà très important. La durée importante de ces simulations est en partie liée au pas de temps petit requis par les codes explicites pour garantir leur stabilité. Ceux-ci sont effectivement privilégiés du fait des fortes non-régularités qui sont rencontrées (contact, lois adoucissantes). D'autre part, l'état de l'art a également montré que les sources d'instabilités sont essentiellement localisées dans le cône d'endommagement. D'où l'idée de rechercher une méthode qui permette d'en tirer partie.

Une étude bibliographique axée sur les méthodes de couplage de codes implicite/explicite a alors été proposée dans le chapitre 2. En effet, après avoir montré les spécificités

propres aux algorithmes implicites et explicites, différentes techniques qui permettent de couper une structure en plusieurs zones ont été exposées. Elles permettent ainsi de séparer la zone d'impact, où les non-régularités sont présentes, de la partie complémentaire bien plus régulière. De ce fait, un traitement mieux adapté à chacun des sous-domaines peut être envisagé. Le choix de l'algorithme implicite semble en particulier plus optimum pour le calcul de la zone non-impactée, puisque sa stabilité inconditionnelle permet l'utilisation de pas de temps beaucoup plus grands que ceux de l'explicite. Néanmoins, cela nécessite l'utilisation de pas de temps différents dans un même calcul. Ainsi un état de l'art des méthodes multi-échelles en espace et en temps a été réalisé. Parmi ces dernières, nous avons retenu la méthode GC, car c'est la méthode qui semble la mieux adaptée à notre problématique. Elle permet effectivement de coupler arbitrairement tous les schémas stables de la famille de Newmark, sans dégrader les propriétés de stabilité de chaque sous-domaine. De plus, elle permet de gérer efficacement les non-régularités présentes dans la zone d'impact explicite, ce qui n'est pas le cas d'autres méthodes concurrentes.

Compte tenu des spécificités des algorithmes implicite et explicite et des codes qui en découlent, cela nous a conduit à proposer une approche par couplage de codes implicite/explicite, basée sur la méthode GC, qui a été décrite dans le chapitre 3. Il a ainsi été montré que l'implémentation de cette méthode peut être faite de manière peu intrusive. Ceci est un point fort de la stratégie proposée, puisqu'elle peut être appliquée à d'autres couples de codes que ceux utilisés dans ce travail, dès l'instant qu'ils disposent de l'interface qui a été explicitée. En effet, il a été montré qu'elle nécessite d'interfacer des mécanismes qui sont, pour la plupart, déjà naturellement présents dans les codes de calcul. Après avoir validé le fonctionnement de ce couplage sur des cas académiques, il a été montré que ce dernier est plus efficace pour notre problématique que la méthode de référence basée sur un calcul explicite complet. Une accélération du temps de calcul a effectivement été observée lors de la simulation de l'impact sur un panneau composite raidi de dimension conséquente. L'analyse fine du bilan des temps CPU obtenus a également fait émerger un axe d'amélioration. En effet, le rapport de pas de temps élevé entre celui de la zone impactée et celui de la partie complémentaire, permet de faire focaliser l'effort de résolution numérique dans le domaine traité avec le code *Europlexus*. Ainsi la partie complémentaire peut être de taille importante, sans toutefois affecter le temps global de simulation. Cet effet a été accentué en utilisant un maillage 3D dans toute la partie complémentaire. Néanmoins, même en faisant cela, il a été montré que le coût CPU de cette partie peut être rendu négligeable devant celui de la partie impactée. Cela permet donc d'étendre la simulation d'impact de faible énergie, qui était jusqu'alors essentiellement réalisée sur de petites structures, à des structures de taille beaucoup plus grande et ce, avec un surcoût de calcul très faible. Cependant, la durée des simulations, même sur des petites structures, reste élevée. C'est pourquoi, il a été proposé de travailler sur la réduction de cette dernière.

Partant du constat que le temps de calcul est globalement conditionné par la taille de

la zone explicite dans la méthode couplée, il a été proposé une stratégie de bascule qui consiste à optimiser dans une certaine mesure les dimensions de cette dernière au cours du calcul. La mise en place de ce mécanisme a été proposée dans le chapitre 4. Elle a soulevé une question concernant la stratégie à adopter pour ne pas avoir une taille d'interface qui croit lors de chaque bascule et qui devienne excessive. Cela nous a conduit à adopter une technique pour fusionner les nœuds des anciennes interfaces implicite/explicite. L'idée étant de conserver deux sous-domaines tout au long du calcul. Le choix d'imposer la continuité des champs cinématiques issus de l'ancien sous-domaine explicite s'est avéré suffisant pour notre application. En effet, le calcul d'impact sur panneau composite raidi avec bascule présenté a permis de montrer une accélération supplémentaire sur le temps CPU, bien que deux bascules seulement aient été réalisées. Ceci ouvre donc de nombreuses perspectives.

## 5.1 Perspectives

### 5.1.1 Axe numérique

Tous les calculs couplés avec bascule qui ont été menés dans ce travail sont stables. Ceci ne constitue pas une preuve de stabilité générale et il serait intéressant de le démontrer. Par ailleurs, bien que le choix que nous avons fait pour imposer la continuité interfaciale après bascule se soit avéré suffisant pour notre application, d'autres sont possibles, comme il l'a été évoqué. Leur étude peut donc être intéressante et l'influence qu'ils peuvent avoir sur la stabilité est une question qui reste également à traiter.

Un nombre de bascules plus important que celui qui a été proposé ici peut également être envisagé, ce qui aurait pour effet de diminuer encore le coût du calcul. Un critère ou une heuristique pourrait par exemple déterminer la taille optimum de la zone explicite au cours du calcul, ce qui permettrait également de s'affranchir de la contrainte du choix a priori des zones explicites. Ainsi, dans un cas limite, une répartition implicite/explicite optimisée pourrait être envisagée à chaque pas de temps macroscopique. Sans en aller jusque là, il est évident que la stratégie de résolution directe du problème d'interface implicite/explicite choisie pour le moment sera impactée. En effet, dans l'état actuel, le calcul des compléments de Schur doit être réalisé pour chaque bascule. Ainsi on s'attend à ce que le coût de calcul de ces opérateurs devienne non négligeable. La mise en place d'une technique de résolution itérative de type Krylov pourrait donc s'avérer fructueuse dans ce cas.

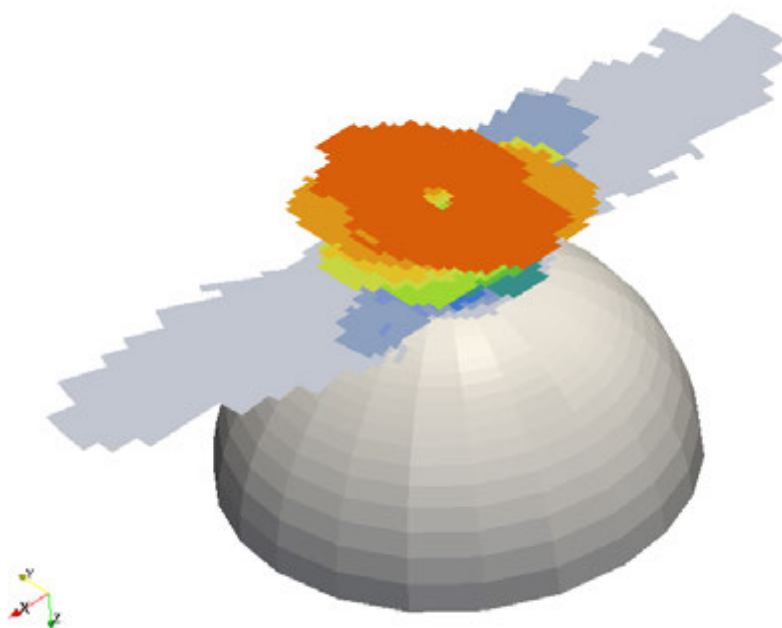
Il a également été constaté que le taux d'évolution des endommagements est relativement rapide après l'impact. Il diminue ensuite. Cela laisse penser que l'algorithme implicite puisse être utilisé dans la zone d'impact, au-delà d'un certain temps. Ainsi une bascule de l'explicite vers l'implicite, telle que celle proposée par [NOE 04b, NOE 04a] peut être envisagée. Il serait donc intéressant de la mettre en place dans le cadre de la méthode GC. Cet outil permettrait par ailleurs de diminuer la taille de la zone explicite d'une bascule à l'autre, ce qui n'est pas possible pour le moment. Aussi, il donnerait



la possibilité d'enchaîner un calcul statique avant ou après impact. Cela permettrait par exemple de faire des calculs de *mise à chaud* suivis d'impact ou encore des calculs de compression après impact.

### 5.1.2 Validation expérimentale

L'outil de couplage peu intrusif proposé présente des qualités intéressantes sur le plan du coût du calcul, en particulier pour simuler les impacts de faible énergie sur de grandes structures. Par conséquent, il serait intéressant dans un futur proche de réaliser des comparaisons essais/calculs afin de montrer la cohérence de l'ensemble du modèle numérique sur de telles structures. Pour mettre en place une telle démarche, il faudrait compléter le modèle numérique que nous avons proposé en ajoutant des éléments de zone cohésive. Cela permettrait ainsi de tenir compte du délaminage. Les prémices de ce travail ont été entamés et nous proposons sur la figure 5.1 un motif d'endommagement obtenu avec un



**FIGURE 5.1:** Illustration du motif d'endommagement obtenu avec la stratégie de couplage proposée lors de la simulation d'un impact à 20J sur panneau composite raidi élastique (une couleur par interface).

tel calcul couplé. Ce dernier a été réalisé avec la géométrie qui a été présentée sur la figure 4.12 page 131. Bien qu'une localisation apparente soit observable, ce résultat montre la faisabilité de la méthode. Les paramètres du modèle doivent cependant encore être ajustés et une maîtrise plus fine des modèles de zone cohésive, dans *Europlexus* en particulier, est nécessaire. Néanmoins, il peut déjà être observé que la forme en double ellipse

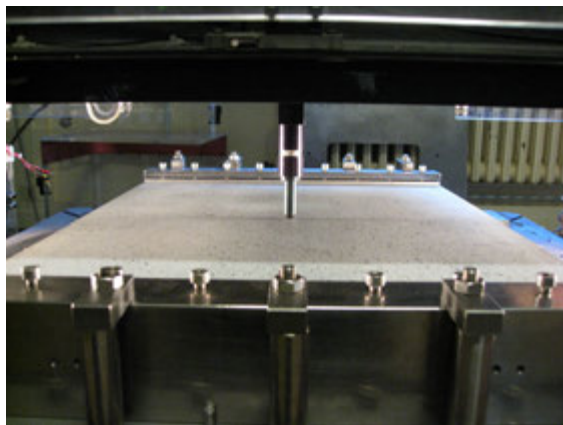
classiquement observée se dégage du motif d'endommagement.

D'autre part, comme nous l'avons évoqué, une campagne expérimentale a été menée à l'Onera sur la géométrie que nous avons utilisée dans le chapitre 4 en particulier, ainsi que sur d'autres panneaux. La visualisation du montage expérimental d'impact est proposée sur la figure 5.2. Il a permis d'obtenir une base de données très riche, qu'il conviendra d'exploiter. Nous proposons à titre d'exemple sur la figure 5.3 deux macrographies qui illustrent l'endommagement laissé par l'impact sur les deux faces du panneau impacté à 20J. Il peut ainsi être observé un délaminage conséquent sur la face opposée à l'impact, alors que les traces laissées coté impacté sont relativement faibles, ce qui vient appuyer la problématique du BVID. Les cartographies présentes sur cette même figure, obtenues par DSCAN et CSCAN, permettent d'apprécier les dimensions de ces endommagements dans le volume (échelle en millimètre). Les lignes apparentes sur les parties inférieure et supérieure de ces deux derniers clichés sont le résultat de la sur-épaisseur induite par la présence des raidisseurs. Par ailleurs, des impacts sous raidisseurs ont également été menés dans ces campagnes. Il est proposé à titre d'exemple, sur la figure 5.4, une macrographie et un DSCAN obtenus sur un autre panneau composite raidi, de dimension plus petite, lors d'essais incrémentaux d'impact sous raidisseur (plusieurs impacts successifs à énergie croissante).

Dans un futur un peu plus lointain, il sera intéressant également de chaîner la modélisation d'impact proposée avec des calculs de compression après impact, comme il l'a été évoqué. L'objectif sera alors de déterminer numériquement les performances résiduelles des pièces de structures. Des essais de CAI ont ainsi débuté à l'Onera pour aller dans cette direction. La figure 5.5 illustre le montage de CAI d'un panneau composite raidi identique à celui que nous avons étudié. Tous ces résultats expérimentaux demandent donc simplement à être exploités et à être comparés à des simulations.



(a)

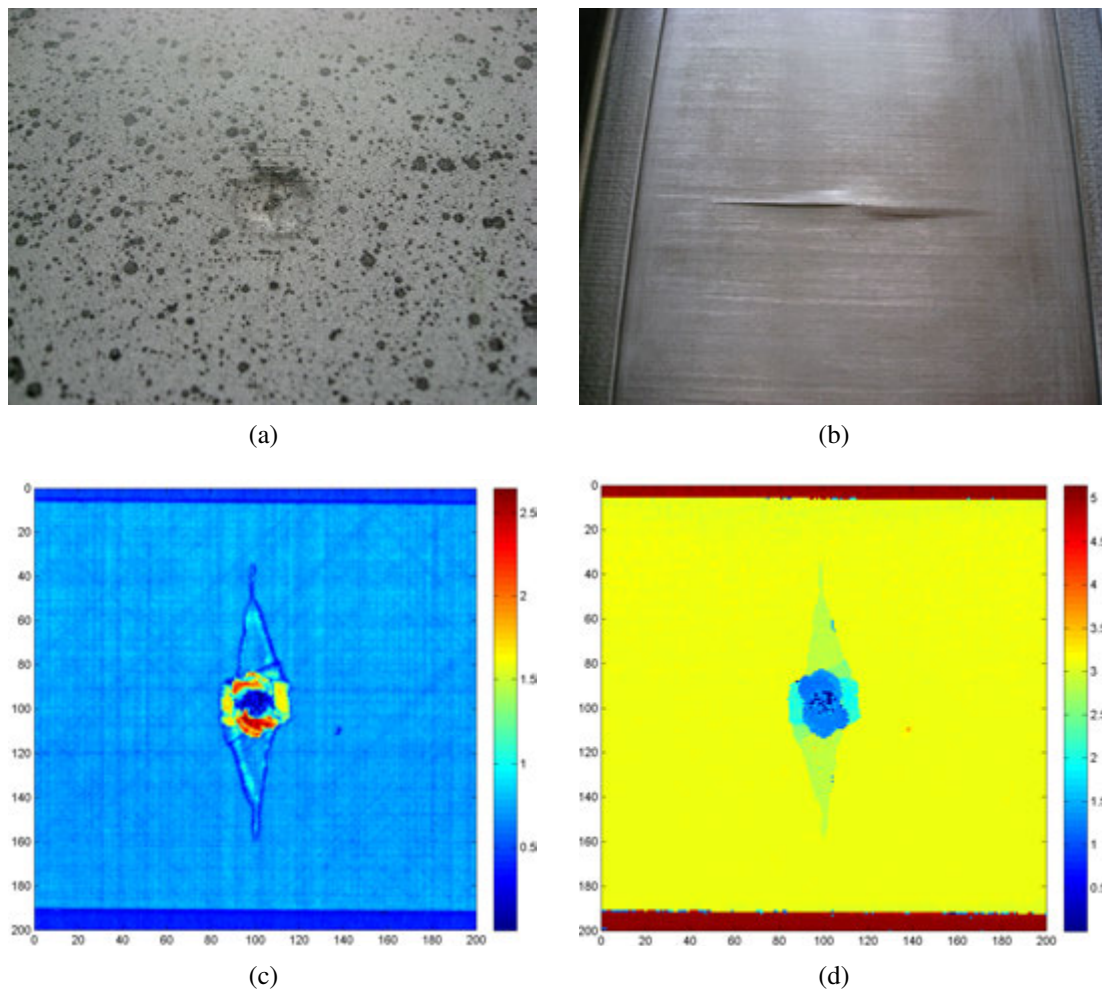


(b)

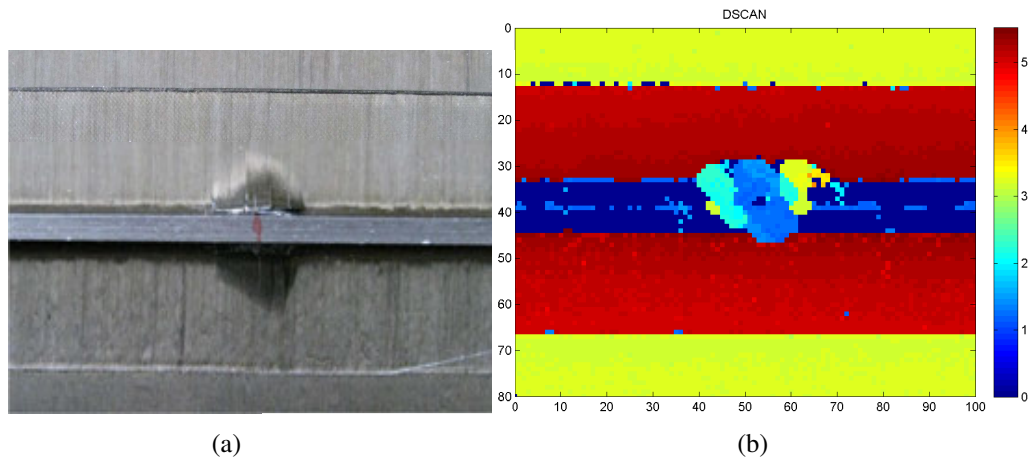


(c)

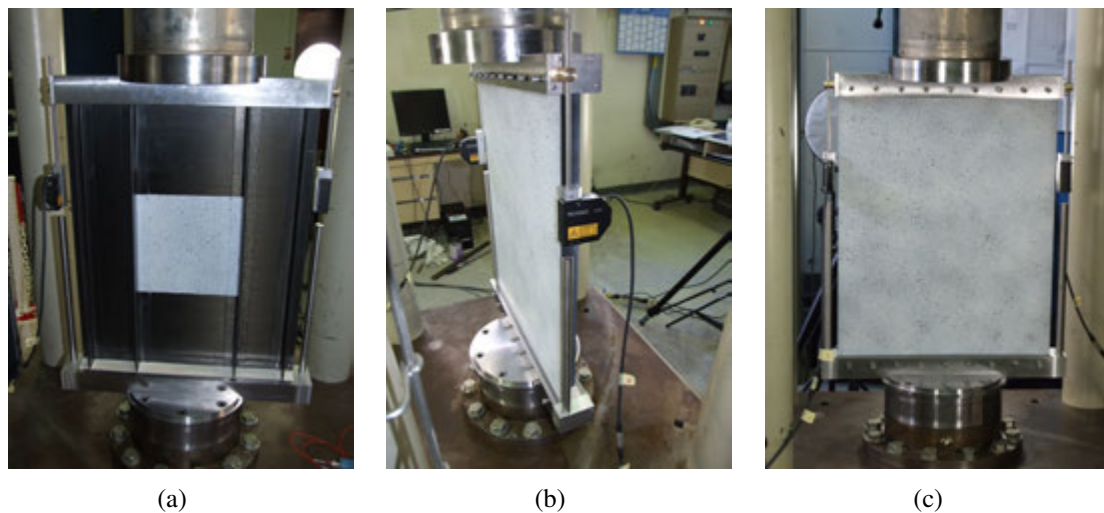
**FIGURE 5.2:** Illustration du montage pour les impacts par masse tombante. a) Colonne de chute. b) Impacteur en appui sur la face impactée d'un panneau composite raidi encasté. c) Moyen de mesure par laser du déplacement sur la face opposée à l'impact.



**FIGURE 5.3:** Illustration des traces laissées par l'impact à 20 J sur la partie centrale d'un grand panneau composite raidi. a) Face impactée. b) Face opposée à l'impact. c) Cscan et d) Dscan.



**FIGURE 5.4:** Illustration des traces laissées par des impacts incrémentaux sur le raidisseur d'un petit panneau composite raidi. a) macrographie en fin d'essai b) Dscan du deuxième impact (28.7J).



**FIGURE 5.5:** Illustration du montage d'un panneau composite raidi dans la presse de 150 t pour compression après impact.

# Bibliographie

- [ABD 09] ABDALLAH E. A., BOUVET C., RIVALLANT S., BROLL B., BARRAU J.-J.  
Experimental analysis of damage creation and permanent indentation on highly oriented plates. *Composites Science and Technology*, vol. 69, n° 7, 2009, p. 1238–1245, Elsevier.
- [ALF 01] ALFANO G., CRISFIELD M.  
Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 50, n° 7, 2001, p. 1701–1736, Wiley Online Library.
- [ARM 01a] ARMERO F., ROMERO I.  
On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for non-linear dynamics. Part I : low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 20-21, 2001, p. 2603–2649, Elsevier.
- [ARM 01b] ARMERO F., ROMERO I.  
On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II : second-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 51-52, 2001, p. 6783–6824, Elsevier.
- [BEL 79] BELYTSCHKO T., YEN H.-J., MULLEN R.  
Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, 1979, p. 259–275, Elsevier.
- [BEL 86] BELYTSCHKO T., HUGHES T. J.  
Computational methods for transient analysis. *North-Holland*, vol. 1, 1986.
- [BEL 99] BELYTSCHKO T., MORAN B., LIU W. K.  
*Nonlinear finite element analysis for continua and structures*, vol. 1. Wiley, 1999.
- [BEL 02] BELINGARDI G., VADORI R.  
Low velocity impact tests of laminate glass-fiber-epoxy matrix composite material plates. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 27, n° 2, 2002, p. 213–229, Elsevier.
- [BER 13] BERTHE J.  
Comportement thermo-visco-élastique des composites CMO-De la statique à la dynamique grande vitesse. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2013.



- [BET 13] BETTINOTTI O., ALLIX O., MALHERBE B.  
A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics. *Computational Mechanics*, , 2013, p. 1–14, Springer.
- [BOS 06] VAN DEN BOSCH M., SCHREURS P., GEERS M.  
An improved description of the exponential Xu and Needleman cohesive zone law for mixed-mode decohesion. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, n° 9, 2006, p. 1220–1234, Elsevier.
- [BOU 06] BOUREL B.  
Calcul multi-domaines et approches multi-échelles pour la simulation numérique de crashes automobiles. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
- [BOU 09] BOUVET C., CASTANIÉ B., BIZEUL M., BARRAU J.-J.  
Low velocity impact modelling in laminate composite panels with discrete interface elements. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 14, 2009, p. 2809–2821, Elsevier.
- [BOU 12] BOUVET C., RIVALLANT S., BARRAU J.-J.  
Low velocity impact modeling in composite laminates capturing permanent indentation. *Composites Science and Technology*, , 2012, Elsevier.
- [BRU 11] BRUN M., BATTI A., LIMAM A., COMBESURE A.  
Implicit/explicit multi-time step co-computations for predicting reinforced concrete structure response under earthquake loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, , 2011, Elsevier.
- [BRU 14] BRUN M., BATTI A., COMBESURE A., GRAVOUIL A.  
External coupling software based on macro-and micro-time scales for explicit/implicit multi-time-step co-computations in structural dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 86, 2014, p. 101–119, Elsevier.
- [BUL 14] BULL D., SCOTT A., SPEARING S., SINCLAIR I.  
The influence of toughening-particles in CFRPs on low velocity impact damage resistance performance. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 58, 2014, p. 47–55, Elsevier.
- [CES 07] CESARI F., DAL RE V., MINAK G., ZUCHELLI A.  
Damage and residual strength of laminated carbon–epoxy composite circular plates loaded at the centre. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 38, n° 4, 2007, p. 1163–1173, Elsevier.
- [CHA 90] CHANG F.-K., CHOI H. Y., JENG S.-T.  
Study on impact damage in laminated composites. *Mechanics of Materials*, vol. 10, n° 1, 1990, p. 83–95, Elsevier.
- [CHA 11] CHARRIER J.-S., CARRÈRE N., LAURIN F., GONCALVES-NOVO E., MAHDI S. et al.  
Proposition d’une méthode d’analyse dédiée aux structures composites soumises à

- des sollicitations hors-plans. *Comptes-rendus des 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17)*, , 2011.
- [CHA 13a] CHANTRAIT T., RANNOU J., GRAVOUIL A.  
Approches multiéchelles en espace et en temps pour la simulation d'impacts de faible énergie sur les structures composites. *11e Colloque National en Calcul des Structures*, 2013.
- [CHA 13b] CHANTRAIT T., RANNOU J., GRAVOUIL A.  
Low intrusive coupling of implicit and explicit integration schemes for structural dynamics : application to low energy impacts on composite structures. *V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, 2013.
- [CHA 14] CHANTRAIT T., RANNOU J., GRAVOUIL A.  
Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 86, 2014, p. 23–33, Elsevier.
- [CHO 92] CHOI H. Y., CHANG F.-K.  
A model for predicting damage in graphite/epoxy laminated composites resulting from low-velocity point impact. *Journal of Composite Materials*, vol. 26, n° 14, 1992, p. 2134–2169, Sage Publications.
- [CHU 93] CHUNG J., HULBERT G.  
A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of applied mechanics*, vol. 60, n° 2, 1993, p. 371–375, American Society of Mechanical Engineers.
- [COM 02] COMBESCURE A., GRAVOUIL A.  
A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, n° 11-12, 2002, p. 1129–1157, Elsevier.
- [CRE 09] CRESTA P.  
Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [DAV 04] DAVIES G., OLSSON R.  
Impact on composite structures. *Aeronautical Journal*, vol. 108, n° 1089, 2004, p. 541–563, Royal Aeronautical Society.
- [DEF 00] DE FREITAS M., SILVA A., REIS L.  
Numerical evaluation of failure mechanisms on composite specimens subjected to impact loading. *Composites Part B : Engineering*, vol. 31, n° 3, 2000, p. 199–207, Elsevier.
- [DEL 11] DELIÉGE G., HANNAY S., PONTHOT J.-P. et al.  
Modélisation par éléments finis de l'endommagement de composites laminés à fibres tissées soumis à impact. *10e Colloque National en Calcul des Structures*, 2011.



- [DHI 98] DHIA H. B.  
Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, n° 12, 1998, p. 899–904, Elsevier.
- [DHI 10] DHIA H. B., JAMOND O.  
On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 199, n° 21, 2010, p. 1403–1414, Elsevier.
- [DUP 11] DUPLEIX-COUDERC C.  
Sur une stratégie multi-échelle d'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2011.
- [DUR 08] DUREISSEIX D.  
Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis. , 2008.
- [ERL 02] ERLICHER S., BONAVENTURA L., BURSI O.  
The analysis of the generalized- $\alpha$  method for non-linear dynamic problems. *Computational Mechanics*, vol. 28, n° 2, 2002, p. 83–104, Springer.
- [FAG 10] FAGGIANI A., FALZON B.  
Predicting low-velocity impact damage on a stiffened composite panel. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 41, n° 6, 2010, p. 737–749, Elsevier.
- [FAR 91] FARHAT C., ROUX F.-X.  
A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 6, 1991, p. 1205–1227, Wiley Online Library.
- [FAR 94] FARHAT C., CRIVELLI L., ROUX F.-X.  
A transient FETI methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n° 11, 1994, p. 1945–1975, Wiley Online Library.
- [FAU 03] FAUCHER V., COMBESURE A.  
A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, n° 5, 2003, p. 509–533, Elsevier.
- [GAV 09] GAVOILLE S.  
Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009.
- [GEN 09a] GENDRE L., ALLIX O., GOSSELET P., COMTE F.  
Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, vol. 44, n° 2, 2009, p. 233–245, Springer.
- [GEN 09b] GENDRE L.  
Approche globale/locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009.

- [GÉR 93] GÉRADIN M., RIXEN D.  
*Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*, vol. 2. Masson Paris, 1993.
- [GÉR 97] GÉRADIN M., RIXEN D.  
*Mechanical vibrations*. John Wiley, 1997.
- [GHA 12] GHANEM A., TORKHANI M., MAHJOUBI N., BARANGER T., COMBESCURE A.  
Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, , 2012, Elsevier.
- [GHA 13] GHANEM A.  
Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin. Thèse de doctorat, Lyon, INSA, 2013.
- [GON 12] GONZÁLEZ E., MAIMÍ P., CAMANHO P., TURON A., MAYUGO J.  
Simulation of drop-weight impact and compression after impact tests on composite laminates. *Composite Structures*, vol. 94, n° 11, 2012, p. 3364–3378, Elsevier.
- [GOS 03] GOSSELET P.  
Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2003.
- [GOS 06] GOSSELET P., REY C.  
Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of computational methods in engineering*, vol. 13, n° 4, 2006, p. 515–572, Springer.
- [GRA 00] GRAVOUIL A.  
Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2000.
- [GRA 01] GRAVOUIL A., COMBESCURE A.  
Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 1, 2001, p. 199–225, Wiley Online Library.
- [GUE 04] GUERMOUCHE A.  
Étude et optimisation du comportement mémoire dans les méthodes parallèles de factorisation de matrices creuses. Thèse de doctorat, Lyon, École normale supérieure (sciences), 2004.
- [GUI 00] GUILLAUMAT L.  
Reliability of composite structures—impact loading. *Computers & Structures*, vol. 76, n° 1, 2000, p. 163–172, Elsevier.
- [HAS 80] HASHIN Z.  
Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of applied mechanics*, vol. 47, n° 2, 1980, p. 329–334, American Society of Mechanical Engineers.

- [HAU 10] HAUTIER M.  
Analyse des réparations des matériaux composites : mise en œuvre d'un procédé pas infiltration et étude du comportement mécanique. Thèse de doctorat, Toulouse 3, 2010.
- [HER 02] HERRY B., DI VALENTIN L., COMBESURE A.  
An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 55, n° 8, 2002, p. 973–1003, Wiley Online Library.
- [HIL 77] HILBER H. M., HUGHES T. J., TAYLOR R. L.  
Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 5, n° 3, 1977, p. 283–292, Wiley Online Library.
- [HIN 76] HINTON E., ROCK T., ZIENKIEWICZ O.  
A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 4, n° 3, 1976, p. 245–249, Wiley Online Library.
- [HON 13] HONGKARNJANAKUL N., BOUVET C., RIVALLANT S.  
Validation of low velocity impact modelling on different stacking sequences of CFRP laminates and influence of fibre failure. *Composite Structures*, vol. 106, n° 0, 2013, p. 549 - 559.
- [HUG 78] HUGHES T., LIU W.  
Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, n° 2, 1978, p. 371–374, American Society of Mechanical Engineers.
- [HUG 79] HUGHES T. J., PISTER K. S., TAYLOR R. L.  
Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, 1979, p. 159–182, Elsevier.
- [HUG 87] HUGHES T.  
*The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-hall, 1987.
- [HUL 96] HULBERT G., CHUNG J.  
Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 137, n° 2, 1996, p. 175–188, Elsevier.
- [ILY 10] ILYAS M.  
Damage modeling of carbon epoxy laminated composites submitted to impact loading. Thèse de doctorat, 2010.
- [JUN 98] JUNG D., YANG D.  
Step-wise combined implicit–explicit finite-element simulation of autobody stamping processes. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 83, n° 1, 1998, p. 245–260, Elsevier.

- [KIM 08] KIM S. J., JI K. H., PAIK S. H.  
Numerical simulation of mechanical behavior of composite structures by supercomputing technology. *Advanced Composite Materials*, vol. 17, n° 4, 2008, p. 373–407, Taylor & Francis.
- [KRE 06a] KRENK S.  
Energy conservation in Newmark based time integration algorithms. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, n° 44-47, 2006, p. 6110–6124, Elsevier.
- [KRE 06b] KRENK S.  
State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 65, n° 5, 2006, p. 595–619, Wiley Online Library.
- [KRE 07] KRENK S.  
The role of geometric stiffness in momentum and energy conserving time integration. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 71, n° 6, 2007, p. 631–651, Wiley Online Library.
- [KRE 08] KRENK S.  
Extended state-space time integration with high-frequency energy dissipation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, n° 12, 2008, p. 1767–1787, Wiley Online Library.
- [LAD 00] LADEVÈZE P., ALLIX O., DEÛ J.-F., LÉVÊQUE D.  
A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 183, n° 1, 2000, p. 105–122, Elsevier.
- [LAU 05] LAURIN F.  
Approche multi-échelles des mécanismes de ruine progressive des matériaux stratifiés et analyse de la tenue des structures composites. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2005.
- [LAU 07] LAURIN F., CARRERE N., MAIRE J.-F.  
A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 38, n° 1, 2007, p. 198–209, Elsevier.
- [LIU 82] LIU W., BELYTSCHKO T.  
Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis. *Computers & Structures*, vol. 15, n° 4, 1982, p. 445–450, Elsevier.
- [LOP 09a] LOPES C., CAMANHO P., GÜRDAL Z., MAIMÍ P., GONZÁLEZ E.  
Low-velocity impact damage on dispersed stacking sequence laminates. Part II : Numerical simulations. *Composites Science and Technology*, vol. 69, n° 7, 2009, p. 937–947, Elsevier.
- [LOP 09b] LOPES C., SERESTA O., COQUET Y., GÜRDAL Z., CAMANHO P., THUIS B.

- Low-velocity impact damage on dispersed stacking sequence laminates. Part I : Experiments. *Composites Science and Technology*, vol. 69, n° 7, 2009, p. 926–936, Elsevier.
- [MAH 10a] MAHJOURI N.  
Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures. Thèse de doctorat, 2010.
- [MAH 10b] MAHJOURI N., GRAVOUIL A., COMBESURE A., GREFFET N.  
A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with incompatible time steps in structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, , 2010, Elsevier.
- [MAH 10c] MAHJOURI N., KRENK S.  
Multi-time-step domain coupling method with energy control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, n° 13, 2010, p. 1700–1718, Wiley Online Library.
- [MAI 07a] MAIMÍ P., CAMANHO P. P., MAYUGO J., DÁVILA C.  
A continuum damage model for composite laminates : Part I–Constitutive model. *Mechanics of Materials*, vol. 39, n° 10, 2007, p. 897–908, Elsevier.
- [MAI 07b] MAIMÍ P., CAMANHO P. P., MAYUGO J., DÁVILA C.  
A continuum damage model for composite laminates : part II–computational implementation and validation. *Mechanics of Materials*, vol. 39, n° 10, 2007, p. 909–919, Elsevier.
- [MAN 93] MANDEL J.  
Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 9, n° 3, 1993, p. 233–241, Wiley Online Library.
- [MIT 05] MITREVSKI T., MARSHALL I., THOMSON R., JONES R., WHITTINGHAM B.  
The effect of impactor shape on the impact response of composite laminates. *Composite Structures*, vol. 67, n° 2, 2005, p. 139–148, Elsevier.
- [MIT 06] MITREVSKI T., MARSHALL I., THOMSON R., JONES R.  
Low-velocity impacts on preloaded GFRP specimens with various impactor shapes. *Composite structures*, vol. 76, n° 3, 2006, p. 209–217, Elsevier.
- [NEW 59] NEWMARK N.  
A method of computation for structural dynamics. *Proc. ASCE*, vol. 85, 1959, p. 67–94.
- [NOE 02] NOELS L., STAINIER L., PONTHOT J.-P., BONINI J.  
Combined implicit-explicit algorithms for non-linear structural dynamics. *Revue Européenne des Éléments*, vol. 11, n° 5, 2002, p. 565–591, Taylor & Francis.
- [NOE 04a] NOELS L., STAINIER L., PONTHOT J.-P.  
Combined implicit/explicit algorithms for crashworthiness analysis. *International journal of impact engineering*, vol. 30, n° 8, 2004, p. 1161–1177, Elsevier.

- [NOE 04b] NOELS L., STAINIER L., PONTHOT J.-P.  
Combined implicit/explicit time-integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming. *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 168, n° 1, 2004, p. 331–339, Elsevier.
- [OLS 00] OLSSON R.  
Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 31, n° 8, 2000, p. 879–887, Elsevier.
- [PRA 04] PRAKASH A., HJELMSTAD K.  
A FETI-based multi-time-step coupling method for Newmark schemes in structural dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 13, 2004, p. 2183–2204, Wiley Online Library.
- [PRA 07] PRAKASH A.  
*Multi-time-step domain decomposition and coupling methods for non-linear structural dynamics*. ProQuest, 2007.
- [PRA 14] PRAKASH A., TACIROGLU E., HJELMSTAD K. D.  
Computationally efficient multi-time-step method for partitioned time integration of highly nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, vol. 133, n° 0, 2014, p. 51 - 63.
- [QIU 14] QIU A., FU K., LIN W., ZHAO C., TANG Y.  
Modelling low-speed drop-weight impact on composite laminates. *Materials & Design*, vol. 60, 2014, p. 520–531, Elsevier.
- [RAN 90] RANSOM J. B., KNIGHT JR N. F.  
Global/local stress analysis of composite panels. *Computers & Structures*, vol. 37, n° 4, 1990, p. 375–395, Elsevier.
- [SAA 03] SAAD Y.  
*Iterative methods for sparse linear systems*. Siam, 2003.
- [SIM 92a] SIMO J., TARNOW N.  
The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 43, n° 5, 1992, p. 757–792, Springer.
- [SIM 92b] SIMO J. C., TARNOW N., WONG K.  
Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 100, n° 1, 1992, p. 63–116, Elsevier.
- [SUF 03] SUFFIS A., LUBRECHT T. A., COMBESURE A.  
Damage model with delay effect : Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International journal of solids and structures*, vol. 40, n° 13, 2003, p. 3463–3476, Elsevier.

- [TOU 12] TOUZEAU J.  
Approches numérique multi-échelle/multi-modèle de la dégradation des matériaux composites. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2012.
- [TRO 95] TROPIS A., THOMAS M., BOUNIE J., LAFON P.  
Certification of the composite outer wing of the ATR72. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 209, n° 4, 1995, p. 327–339, SAGE Publications.
- [TRO 11] TROUSSET E., RANNOU J., LAURIN F., GUILLAUMAT L., MAIRE J.-F.  
*Vers la prévision des dommages induits par un impact basse vitesse sur structures composites stratifiées ou tissées. JNC 17, Poitiers, 2011.*
- [TRO 13] TROUSSET E.  
Prévision des dommages d'impact basse vitesse et basse énergie dans les composites à matrice organique stratifiés. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech - Onera, 2013.
- [TSA 71] TSAI S. W., WU E. M.  
A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials*, vol. 5, n° 1, 1971, p. 58–80, SAGE Publications.
- [TUR 06] TURON A., CAMANHO P. P., COSTA J., DÁVILA C.  
A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, vol. 38, n° 11, 2006, p. 1072–1089, Elsevier.
- [VAN 11] VANDELLOS T.  
Développement d'une stratégie de modélisation du délaminage dans les structures composites stratifiées. Thèse de doctorat, Thèse Université Bordeaux 1, 2011.
- [VAN 13] VANDELLOS T., HUCHETTE C., CARRÈRE N.  
Proposition of a framework for the development of a cohesive zone model adapted to Carbon-Fiber Reinforced Plastic laminated composites. *Composite Structures*, vol. 105, 2013, p. 199–206, Elsevier.
- [WHI 91] WHITCOMB J. D.  
Iterative global/local finite element analysis. *Computers & structures*, vol. 40, n° 4, 1991, p. 1027–1031, Elsevier.
- [WOO 80] WOOD W., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.  
An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n° 10, 1980, p. 1562–1566, Wiley Online Library.
- [ZIE 71] ZIENKIEWICZ O. C., MORICE P.  
*The finite element method in engineering science*, vol. 1977. McGraw-hill London, 1971.