L'objectif de la première partie de cette thèse est d'étudier le cas où, $J : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$; $J(x, \xi)$ est continue par rapport à x, s.c.i. par rapport à ξ, et satisfait $J(x, 0) = 0$, pour tout $x \in \Omega$, de plus

(J1) Il existe $M(x)$ in $L^\infty(\Omega)$ tel que, le domaine de $J(x, .) \subseteq \mathcal{B}(0, M(x))$ pour tout x dans Ω.

(J2) Pour $x \in \Omega$, $J(x, .)$ est convexe .

(J3) $0 \in Int(D(x))$, où

$$D(x) := \mathcal{D}(J(x, .)) \subseteq I\!\!R^n, \qquad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Pour comprendre nos situations, nous considérons le problème stationnaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} -\nabla \cdot a = \mu \\ a \in \partial_\xi J(x, \nabla u) \end{array} \right\} & \text{dans } \Omega \\ & \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nous commençons en minimisant la fonctionnelle intégrale suivante, pour1 < $p < \infty$:

$$\min I[u] = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega J(x, \nabla u) dx - \int_\Omega f u dx \right\}, \tag{1}$$

où $J : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$; $J(x, \xi)$est continue par rapport à x, s.c.i. par rapport à ξ,, $f \in L^2(\Omega)$.
Il existe de nombreuses d'études standard de cette équation. Si nous supposons que $J(x, .)$ est convexe, satisfait à coercitive $J(x, \nabla u) \geq \alpha |\nabla u|^p - \beta$, alors il existe une solution de problème minimisation. En utilisant l'argument de la dualité, nous obtenons le problème dual comme ci-dessous

$$\max I^*[\phi] = \max_{\phi \in L^{p'}(\Omega)^n} \left\{ - \int_\Omega J^*(x, \phi) dx \ : -\nabla \cdot \phi = f \right\}.$$

En terme de l'EDP, l'équation d'Euler-Lagrange associé à ce problème est équation elliptique avec condition de Dirichlet sur le borde :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} -\nabla \cdot \phi = f \\ \phi(x) \in \partial_\xi J(x, \nabla u) \end{array} \right\} & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$

De plus, si nous supposons que $J(x, .)$ satisfait la condition de croissance

$$\sup\{|w|; w \in \partial_\xi J(x, \xi)\} \leq C(1 + |\xi|^{p-1}), \tag{3}$$

alors nous avons «l'équivalence entre les trois problèmes". (voir la section 2 du chapitre 1 pour les détails).
Dans le cas où l'hypothèse (L3) n'est pas vrai, l'opérateur $A(x,.)$ se augmente rapidement par rapport à ξ. Dans cette situation, le flux n'est pas une fonction Lebesgue en général. Il est un vecteur d'une mesure de Radon. Donc, nous devons gérer l'équation (2) dans le cadre de l'EDP non linéaire avec le flux singulier. Les questions sont, pouvons-nous appliquer l'approche standard pour résoudre ce problème ? Même dans le cas stationnaire, une équation elliptique, comment pouvons-nous définir la solution et avoir l'existence de la solution, comment pouvons-nous caractériser le flux singulier, comment pouvons-nous obtenir l'équivalence entre le problème minimisation initiale, le problème dual et l'EDP ? Les questions sont plus difficiles dans l'équation de l'évolution . Comment pouvons-nous obtenir l'unicité de la solution ? Ces questions seront répondues dans le chapitre 1, chapitre 2 et 3.

L'objectif de la deuxième partie de cette thèse est d'étudier le problème de l'évolution où la dynamique est régie par un opérateur discret. Nous étudions l'équation d'évolution discrète qui décrivent le processus d'effondrement de tas de sable. Ceci est un exemple typique de phénomènes auto-organisés critiques exposées par une décantation critique. Nous considérons l'équation d'évolution discrète où la dynamique est régie par la fonction d'indicateur de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et nous donnons aussi quelques résultats numériques. C'est l'objectif du chapitre 4.

0.1 Chapitre 1

Dans la Section 1 de ce chapitre, nous rappelons quelques outils utiles que nous utilisons dans la thèse.
Dans la section 2, en commençant par le problème de minimisation, nous résumons l'approche standard d'Euler-Lagrange pour résoudre le problème stationnaire. De cela, nous comprenons le rôle de chaque hypothèse. Une autre approche pour résoudre le problème est utilisant les arguments de la dualité et l'EDP provenir des relations extrémalité. À la fin de ce chapitre, nous montrons pourquoi nous ne pouvons pas appliquer ceux approche dans notre situation.

0.2 Chapter 2

Dans ce chapitre, nous considérons le problème stationnaire avec condition de Dirichlet sur le bord. Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ une measure du Radon donnée et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ être donnée, nous considérons l'équation suivante

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\nabla \cdot A = \mu \\ A \in \partial_\xi J(x, \nabla u) \end{array}\right\} & \text{dans } \Omega \\ \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $J : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$; $J(x, \xi)$ est continue par rapport à x, s.c.i. par rapport à ξ, et satisfait $J(x, 0) = 0$, pour tout $x \in \Omega$ et de plus

(J1) Il existe $M(x)$ dans $L^\infty(\Omega)$ tel que $D(x) \subseteq \mathcal{B}(0, M(x))$ pour tout x dans Ω.

(J2) Pour $x \in \Omega$, $J(x, .)$ est convexe.

(J3) $0 \in Int(D(x))$.

Le but du chapitre est de prouver l'existence d'une solution au problème (P_1). En outre, nous donnons la connexion entre le EDP, le problème de minimisation et le problème dual.
Pour résoudre le problème, nous approchons la fonction J par l'approximation de Yosida J_λ . Nous considérons le problème de la régularisation dans $W^{1,p}(\Omega)$ et nous obtenons les approximations de solution u_λ. Nous prouvons que u_λ en $W^{1,\infty}(\Omega)$. En utilisant les arguments de compacité nous obtenons solution u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ et flux Φ. En fait, nous montrons que le flux est une mesure de valeurs vectorielles . La partie régulière Φ_r par rapport à la mesure de Lebesgue) laisse dans $\partial_\xi J(x, \nabla u)$ et la partie singulière Φ_s est concentrée sur la frontière de $D(x)$ et est relié à la gradient tangentielle de u, $\nabla_{|\Phi_s|} u$ où $|\Phi_s|$ est la variation totale de Φ_s, au travers la fonction de support de $D(x)$. Un rappel sur tous ces outils est donnée dans le chapitre 2 . Pour donner notre premier résultat principal, nous noterons

$$K = \Big\{ z \in W^{1,\infty}(\Omega) \; ; \; \nabla z(x) \in D(x), \text{ p.p. } x \in \Omega, \; z = g \text{ in } \partial\Omega \Big\}$$

et

$$\mathcal{H}_g = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ such that } u = g \text{ on } \partial\Omega \right\}.$$

pour tout $x \in \Omega$, $S_{D(x)}$ la fonction de support de $D(x)$, est donné par

$$S_{D(x)}(p) = \sup \Big\{ p \cdot q \; ; \; q \in D(x) \Big\}, \quad \text{for any } (x, p) \in \Omega \times I\!R^n.$$

Nous considérons la fonction g dans l'ensemble suivant :

$$\mathcal{G} = \{g \in C(\partial\Omega), \exists g_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) : \nabla g_0 \in D(x); g_0 = g \text{ in } \partial\Omega\}.$$

Théorème 1. *On suppose que J satisfait les hypothèse (J1)-(J2). pour tout $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$,$g \in \mathcal{G}$, le problème*

$$(P_2) \qquad \min\left\{\int_\Omega J(x, \nabla z(x))\, dx - \int_\Omega z\, d\mu\ ;\ z \in \mathcal{H}_g\right\}$$

admet une solution u. Si, en outre J satisfait (J3), alors u est une solution du (P_2) si et seulement si $u \in K$ et, il existe $\Phi \in \mathcal{M}_b(\Omega)^n$ tel que

$$\Phi_r(x) \in \partial_\xi J(x, \nabla u(x)), \quad \mathcal{L}^n p.p.\ x \in \Omega \tag{4}$$

$$\frac{\Phi_s}{|\Phi_s|}(x) \cdot \nabla_{|\Phi_s|} u(x) = S_{D(x)}\left(\frac{\Phi_s}{|\Phi_s|}(x)\right), \quad |\Phi_s|\text{- } p.p.\ in\ \Omega \tag{5}$$

et

$$\int_\Omega \Phi_r \cdot \nabla\xi\, dx + \int_\Omega \nabla_{|\Phi_s|}\xi\, d\Phi_s = \int_\Omega \xi\, d\mu, \quad \text{pour tout } \xi \in C_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Si $\nabla_{|\Phi_s|} u(x) \in \overline{D(x)}$, $|\Phi_s|$- p.p. $x \in \Omega$, alors (5) est equivalent à

$$\frac{\Phi_s}{|\Phi_s|}(x) \in \partial I\!I_{\overline{D(x)}}(\nabla_{|\Phi_s|} u(x)) \quad |\Phi_s|\text{- p.p.} x \in \Omega, \tag{7}$$

où $\partial I\!I_{\overline{D(x)}}$ note le sous-gradient de la fonction indicatrice de $\overline{D(x)}$. En effet, (5) avec $\nabla u(x) \in D(x)$, $\mathcal{L}^n$-p.p. $x \in \Omega$, est une formulation générale de la formulation standard (7). Formellement, on peut dire que le problem (P_1) est régie par la formule suivante

$$(P_1') \qquad \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} -\nabla \cdot \Phi = \mu \\ \Phi_r \in \partial_\xi J(x, \nabla u), \quad \dfrac{\Phi_s}{|\Phi_s|} \in \partial_\xi I\!I_{\overline{D(x)}}(\nabla_{|\Phi_s|} u) \end{array}\right\} & \text{dans } \Omega \\ & \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Dans ce chapitre, la couple $(u, \Phi) \in W^{1,\infty}(\Omega) \times \mathcal{M}_b(\Omega)^n$ donc est donnée par Theorème 1 est appelée la solution faible du (P_1), et (P_1') est appelée la

formulation faible du (P_1). Le problème (P_2), en vertu du Theorème 1, il est simplement le problème minimisation associé à (P_1).
En particulier, en utilisant la définition du $\partial I\!I_{\overline{D(x)}}$, on peut déduire l'existence de la solution pour la formulation variationelle associée au problème (P_1)

$$\int_\Omega \Phi \cdot \nabla(u-\xi) \leq \int_\Omega (u-\xi)\, d\mu, \quad \text{pour tout } \xi \in K, \tag{8}$$

ainsi que son équivalence avec une formulation faible et le problème minimisation.
L'équivalence entre les trois formulations est résumée dans le corollaire suivant

Corollaire 1. *Sous des hypothèses (J1-J3), soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $(u, \Phi) \in K \times M_b(\Omega)^n$ sont donnés. Les propriétés suivantes sont équivalentes : :*

1. *(u, Φ) est une solution faible du (P_1).*
2. *(u, Φ_r) est une solution variationelle du (P_1).*
3. *u est une solution du prolème minimisation (P_2).*

Autre résultat important est la connexion entre (P_1), (P_2) et le problème dual du(P_1). On note que $J^* : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la transformation de Legendre-Fenchel de $J(., \xi)$, à savoir

$$J^*(x, y^*) = \sup\Big\{\langle y^*, \xi\rangle - J(x,\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\Big\}; \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Nous fixons $\tilde{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tel que $\tilde{g} = g$ in $\partial\Omega$ et on note par

$$T(g, \psi) = \int_\Omega \nabla\tilde{g} d\psi - \int_\Omega \tilde{g} d\mu$$

Remark 1. *Nous allons voir que dans nos résultats, la valeur de $T(g, \psi)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{g}$ dans Ω et ne dépend que de la trace de $\tilde{g}$ sur $\partial\Omega$ qui est égale à g. En effet, $T(g,\psi) = \int_{\partial\Omega} g\, \psi \cdot n dS$. En ce sens, nous pouvons voir les œuvres d'G.Q. Chen et H. Frid, où les auteurs donnent directement un sens de la trace d'une mesure $\psi \in \mathcal{M}_b(\Omega)^n$ tel quel $div(\psi) \in \mathcal{M}_b(\Omega)$*

On obtient le theorème suivant

Théorème 2. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Sous les hypotheses (J1-J3), le problème* (P_3)

$$\min\left\{\int_\Omega J^*(\psi_r(x))\,dx + \int_\Omega S_{D(x)}\left(\frac{\psi_s(x)}{|\psi_s(x)|}\right)\,d|\psi_s(x)| - T(g,\psi)\ ;\ \psi \in \mathcal{S}(\mu)\right\}$$

admet une solution $\Phi \in \mathcal{S}(\mu)$. D'ailleur Φ est une solution du problème (P_3) si et seulement s'il existe $u \in K$ tel que (u,Φ) est une solution faible du problème (P_1).

0.3 Chapitre 3

Dans ce chapitre nous considérons l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \partial_t u(t) - \nabla\cdot(\Phi(t)) = \mu(t) \\ \\ \Phi \in \partial_\xi J(x,\nabla u) \end{array}\right\} & \textit{dans} \quad \Omega,\ \text{pour } t \in (0,T) \\ \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma := (0,T)\times\partial\Omega, \\ \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{9}$$

où, $0 < T < \infty$, $Q = (0,T)\times\Omega$ et rappelle que J satisfait des hypothèses suivantes :

(J1) Il existe $M(x)$ dans $L^\infty(\Omega)$ tel que $D(x) \subseteq \mathcal{B}(0, M(x))$ pour tout x dans Ω.

(J2) Pour $x \in \Omega$, $J(x,.)$ est convexe.

(J3) $0 \in Int(D(x))$

Où μ dans $BV(0,T;w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$ qui est une sous-espace du $L^1(0,T;w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$. On note que

$$K = \left\{z \in W_0^{1,\infty}(\Omega)\ ;\ \nabla z(x) \in D(x),\ \text{p.p. } x \in \Omega\right\}$$

$$K_T = \left\{z \in \mathcal{C}([0,T);L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\ ;\ z(t) \in K \text{ pour tout } t \in [0,T)\right\}.$$

Alors, pour tout $u \in K_T$ et $\mu \in L^1(0,T;w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$ la qualité $\displaystyle\iint_Q u\,d\mu$ est bien définie.

En vertu du Chapitre 2, la formulation faible de cette équation est donnée par :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \partial_t u(t) - \nabla \cdot (\Phi_r(t) + \Phi_s(t)) = \mu(t) \\ \\ \Phi_r(t) \in \partial_\xi J(x, \nabla u(t)), \\ \dfrac{\Phi_s(t)}{|\Phi_s(t)|} \cdot \nabla_{|\Phi_s|} u(t) = S_{D(x)} \left(\dfrac{\Phi_s(t)}{|\Phi_s(t)|} \right) \end{array} \right\} & \text{dans} \quad (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma, \text{ pour} \quad (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Pour l'existence, nous considérons le problème de régularisation et en utilisant les arguments de compacité, nous obtenons une solution faible du (9). Ensuite, nous montrons que cette solution a également donné une solution variationnelle. Pour l'unicité, nous utilisons les techniques de doublement et dédoublement variables et nous obtenons la contraction quadratique de solutions variationnelles. Nous donnons notre premier résultat principal venant l'existence et l'unicité de la solution variationnelle

Théorème 3. *Pour tout $u_0 \in K$ et $\mu \in BV(0,T; w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$, (9) admet une solution variationelle (u, Φ) ; i.e. $u \in K_T$, $u(0) = u_0$, $\Phi \in L^1(Q)^n$, et pour tout $\xi \in K$*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t) - \xi|^2 + \int_\Omega \Phi(t) \cdot \nabla(u(t) - \xi) \leq \int_\Omega (u(t) - \xi)\, d\mu(t) \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T). \tag{11}$$

De plus, if (u_i, Φ_i) est une solution variationnelle de (P_{μ_i}), pour $i \in \{1,\ 2\}$, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \int_\Omega (u_1(t) - u_2(t))\, d(\mu_1(t) - \mu_2(t)) \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T).$$

En particulier, on a l'unicité de u, tel que (u, Φ) est une solution variationnelle de (9).

Pour la formulation faible (10), nous montrons le résultat suivant

Théorème 4. *Soit* $u_0 \in K$ *et* $\mu \in BV(0,T; w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$. *Alors,* (u, Φ_r) *est une solution variationnelle de (9) si et seulement si* $u \in K_T$, $u(0) = u_0$, $\partial_t u \in L^\infty(0,T; w^* - \mathcal{M}_b(\Omega))$, $\Phi_s(t) \in L^\infty(0,T; w^* - \mathcal{M}_b(\Omega)^n)$ $\Phi_s(t) \perp \mathcal{L}^n$, *et pour* $\mathcal{L}^1 - p.p.$ $t \in (0,T)$ *nous obtenons*

$$\Phi_r(t) \in \partial_\xi J(., \nabla u), \quad \mathcal{L}^n\text{-}p.p.\ \Omega,$$

$$\frac{\Phi_s(t)}{|\Phi_s(t)|} \cdot \nabla_{|\Phi_s|} u(t) = S_{D(x)}\left(\frac{\Phi_s(t)}{|\Phi_s(t)|}\right) \quad |\Phi_s(t)|\text{ - } p.p.\ dans\ \Omega.$$

De plus, pour tout $\xi \in C_0^1(\Omega)$, *on a*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\xi + \int_\Omega \Phi_r(t)\cdot\nabla\xi + \int_\Omega \nabla_{|\Phi_s(t)|}\xi\, d\Phi_s(t) = \int_\Omega \xi\, d\mu(t), \qquad dans\ \mathcal{D}'(0,T).$$

0.4 Chapter 4

Dans ce chapitre, nous contribution à l'étude de la dynamique d'un tas de sable. Nous étudions le modèle discret de l'effondrement d'une pile. Nous commençons par établir le modèle, nous montrons existence et l'unicité de la solution. Ensuite, en utilisant arguments dual, nous étudions le calcul numérique de la solution et nous présentons quelques simulations numériques. Nous considérons la surface de la pile être divisé en cubes de point entier $i \in \mathbb{Z}^n$. Le modèle ici consiste à trouver pour chaque $t > 0$ la fonction $u : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, où $u(i)$ décrit la densité de cubes à la position i, répondant à l'équation discrète suivante

$$(DM) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,i) + \displaystyle\sum_{j: j\sim i} \sigma(t,i,j) = 0,\ t > 0,\ i \in \mathbb{Z}^n, \\ \\ |u(t,i) - u(t,j)| \leq c(t) \text{ pour } i \sim j, \\ \\ \sigma(t,i,j) = -\sigma(t,j,i) \text{ et } support(\sigma(t,.,.)) \subseteq X_{c(t)}(u(t)). \end{cases}$$

où $i \sim j$ ca veut dire $|i - j| \leq 1$, la fonction $c : [0,T) \to \mathbb{R}^+$ satisfait $\lim_{t\to T} c(t) = 1$ et

$$X_r(v) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n : |v(i) - v(j)| = r \text{ et } i \sim j\}.$$

Nous obtenons la solution unique de (DM) dans le théorème suivant

Théorème 5. *On suppose que* $c \in W^{1,\infty}(0,T)$, $u_0 \in K(c(0))$ *et* $0 < T < \infty$. *Alors le problème (DM) admet uniquement une solution* $u \in W^{1,1}\Big(0,T;\, \ell^2(\mathbb{Z}^n)\Big)$ *et* u *satisfait*

$$\begin{cases} u_t(t) + \partial I\!I_{K(c(t))}(u(t)) \ni 0 \text{ for } t \in (0,T) \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, si u_λ *est une* λ*- solution approximative, alors*

$$u_\lambda \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}([0,T);\ell^2(\mathbb{Z}^n)) \qquad \text{si } \lambda \longrightarrow 0.$$

Pour le calcul numérique, nous essayons de discrétisation (DM) par le schéma implicite d'Euler, le problème générique est donnée par

$$(DSP) \qquad \begin{cases} v(i) + \displaystyle\sum_{j:j\sim i} \sigma(i,j) = g(i) & \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}^n, \\ \\ v \in K(r), \quad \sigma(i,j) = -\sigma(j,i) & \text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n, \\ \\ \text{ et } \ support(\sigma) \subseteq X_r(v), \end{cases}$$

où $r \geq 1$ est une constant donnée et $g : \mathbb{Z}^2 \to I\!R$ est une application donnée. Pour $r > 0$, nous introduisons l'ensemble convexe

$$K(r) = \{z \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) : |z(i) - z(j)| \leq r \quad \text{pour} \quad i \sim j\}.$$

Nous prouvons le résultat principal suivant

Théorème 6. *Soit* $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *et* $v \in K(r)$. *Alors* $v = I\!P_{K(r)}(g)$ *si et seulement s'il existe* $\sigma \in \ell^1(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$, *tel que* (v,σ) *satisfait (DSP).*

Rappeler que $v = I\!P_{K(r)}(g)$ si et seulement si $v \in K(r)$ et

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v - g\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} = \min_{z \in K(r)} J(z). \tag{12}$$

Soit $G :\ \ell^1(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n) \longrightarrow I\!R$ est défini par

$$G(\eta) = -\frac{1}{2}\sum_i \Big(\sum_{j:j\sim i} \eta(i,j) - \eta(j,i)\Big)^2 - \sum_i \Big(\sum_{j:j\sim i} \eta(i,j) - \eta(j,i)\Big) g(i) - r\sum_{i,j} |\eta(i,j)|. \tag{13}$$

Nous noterons par $\mathcal{S}_{as} = \Big\{\hat{\mu} \in \ell^1_{as}(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)\ ; \hat{\mu}(i,j) = 0 \text{ pour } |i-j| > 1\Big\}$, où

$$\ell^1_{as}(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n) = \Big\{\hat{\mu} \in \ell^1(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)\ ; \hat{\mu}(i,j) = -\hat{\mu}(j,i), \text{ pour tout } (i,j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n\Big\}$$

Nous montrons que

Théorème 7. *Soit $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ et $v := \mathbb{P}_{K(r)}(g)$. Alors, Il existe $w \in \mathcal{S}_{as}$ et $v \in K(r)$ tel que*

$$G(w) = \max_{\eta \in \mathcal{S}_{as}} G(\eta) = \min_{z \in K(r)} J(z) = J(v).$$

De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}^n$, $v(i) = g(i) + \sum_{j : j \sim i} \Big(w(i,j) - w(j,i)\Big)$.

De cela, nous donnons la méthode numérique pour minimiser la fonctionnelle G. Alors nous obtenons des simulations numériques pour notre modèle