



**HAL**  
open science

# Mesures continues en mécanique quantique : quelques résultats et applications

Antoine Tilloy

► **To cite this version:**

Antoine Tilloy. Mesures continues en mécanique quantique : quelques résultats et applications. Physique Quantique [quant-ph]. PSL Research University, 2016. Français. NNT : . tel-01341922

**HAL Id: tel-01341922**

**<https://theses.hal.science/tel-01341922>**

Submitted on 5 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à l'École Normale Supérieure

## Mesure continue en mécanique quantique : quelques résultats et applications

**Ecole doctorale n°564**

Physique en Ile de France

**Spécialité** Physique

### COMPOSITION DU JURY :

M. ATTAL Stéphane  
Université Lyon 1,  
Rapporteur

M. BRICMONT Jean  
Université Catholique de Louvain,  
Rapporteur

M. BAUER Michel  
IPhT, CEA Saclay,  
Membre invité

M. BERNARD Denis  
LPTENS, École Normale Supérieure,  
Directeur de thèse

M. DALIBARD Jean  
Collège de France,  
Examineur

M. HUARD Benjamin  
LPA, École Normale Supérieure,  
Examineur

M. KUPIAINEN Antti  
University of Helsinki,  
Examineur

**Soutenu par Antoine TILLOY**  
**le 24 juin 2016**

Dirigée par **Denis Bernard**







Département  
de Physique  
École Normale  
Supérieure

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS

Spécialité : Physique

École doctorale : « Physique en Île-de-France »

réalisée

au Laboratoire de Physique Théorique de l'ENS

présentée par

**Antoine TILLOY**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

Sujet de la thèse :

**Mesures continues en mécanique quantique : quelques  
résultats et applications**

soutenue le 24 juin 2016

devant le jury composé de :

M.	Stéphane ATTAL	Rapporteur
M.	Michel BAUER	Membre invité
M.	Denis BERNARD	Directeur de thèse
M.	Jean BRICMONT	Rapporteur
M.	Jean DALIBARD	Examineur
M.	Benjamin HUARD	Examineur
M.	Antti KUPIAINEN	Examineur



# Préambule

Ce mémoire contient les résultats obtenus durant trois années de thèse au laboratoire de Physique théorique de l'ENS sous la direction de Denis Bernard. Il s'appuie sur les articles [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] publiés pendant ces trois ans et dont cinq sont reproduits en annexes C, D, E, F et G en anglais. Ce manuscrit contient aussi quelques résultats originaux notamment au chapitre 4 et en appendice B. La présentation s'éloigne quelque peu de celle des articles académiques. On a essayé autant que possible de se concentrer sur les résultats et arguments généraux en reléguant en annexes une partie des preuves et développements techniques. Le style se veut aussi un peu moins formel et on espère que la lecture y gagnera en fluidité sans que la précision ne souffre trop.



On s'intéresse dans cette thèse au problème de la mesure continue en mécanique quantique. La mesure est quelque chose de notoirement subtile en mécanique quantique, à la fois pour des raisons fondamentales et pour des raisons pratiques. Si l'on prend le formalisme orthodoxe pour argent comptant, alors le fait de mesurer, d'extraire de l'information sur quelque chose, est une opération loin d'être anodine qui obéit à des lois différentes de celles qui régissent le reste de la Physique. C'est aussi une opération qui est fondamentalement discrète et localisée dans le temps. Comme souvent, le problème posé par une telle spécificité de la mesure est expliqué de manière éloquente par Bell :

*“The problem of measurement and the observer is the problem of where the measurement begins and ends, where the observer begins and ends. Consider my spectacles, for example : if I take them off now, how far away must I put them before they are part of the object rather than part of the observer ?”*

John S. Bell, cité dans [9]

L'idée des mesures continues est en quelque sorte d'intégrer les «lunettes» au système étudié pour arrondir les angles du formalisme. Cela ne réduit évidemment pas l'ambiguïté théorique mais permet de répondre à un grand nombre de problèmes empiriques. L'objectif de cette thèse est d'essayer de comprendre quantitativement la dynamique induite par les mesures continues, de voir ce qu'elle contraint et ce qu'elle permet, le tout sans perdre de vue le contexte plus général des problèmes conceptuels liés à la mesure.

On commence par rappeler au chapitre 1 la construction de la théorie des mesures continues à partir de la méthode des interactions répétées. On profite du fait que l'on introduit une théorie déjà connue pour en expliciter les parallèles avec les modèles de collapse objectif et avec le problème du filtrage en théorie des probabilités classiques.

La majeure partie des résultats techniques nouveaux est présentée au chapitre 2. On y étudie la limite de mesure forte à partir des mesures continues et plus particulièrement deux phénomènes caractéristiques : les *sauts* et les *échardes* quantiques. On s'intéresse aussi brièvement à un problème d'extraction optimale d'information. Le chapitre 3 est consacré aux applications du formalisme et des résultats précédents. On s'intéresse à la possibilité du contrôle par l'intensité de la mesure et au comportement des marches aléatoires quantiques ouvertes, deux exemples où l'on peut appliquer presque directement les résultats du chapitre 2. On propose aussi une application inattendue du formalisme introduit au chapitre 1 à la gravité semi-classique. Le chapitre 4 est enfin consacrée à de possibles extensions plus spéculatives.



Le lecteur peu familier de la théorie des mesures continues peut progresser linéairement dans le mémoire. Le lecteur érudit et intéressé surtout par les résultats techniques utilisera probablement mieux son temps en allant directement aux annexes C à G qui sont toutes lisibles sans référence au reste. Enfin, le lecteur plus attiré par les questions fondamentales ou épistémologiques peut commencer par l'appendice A.

# Remerciements

Denis Bernard a été pour moi le directeur de thèse optimal : patient, il a eu la lourde tâche de filtrer mon exaltation brouillonne pour en extraire quelques idées correctes ; tolérant, il m'a laissé aller vers ce que j'aimais sans se formaliser quand je rechignais à faire un calcul. J'ai bénéficié de son immense culture en physique mathématique et de son impressionnante virtuosité formelle. Je remercie aussi Michel Bauer, qui, me suivant de plus loin, m'a initié aux infinis raffinements de la théorie des probabilités et a contribué à une grande partie des résultats présentés ici.

Mes remerciements vont ensuite aux rapporteurs qui ont accepté la tâche peu gratifiante de relire ce manuscrit. Merci à Stéphane Attal qui m'a initié à ce domaine de recherche. C'est en creusant ses articles que j'ai trouvé le matériau de mon premier résultat. Ces remerciements s'étendent au pack de ses étudiants et anciens étudiants qui ont hérité de lui leur chaleur. Merci à Jean Bricmont, qui des *Impostures intellectuelles* à *Making Sense of Quantum Mechanics* a aiguisé ma suspicion pour les affirmations grandiloquentes et émoussé ma tolérance au *bullshit*. Je remercie aussi les autres physiciens qui ont accepté de faire partie de mon jury. Merci à Jean Dalibard qui fut à l'origine de mon premier contact avec la mécanique quantique lors de son mémorable cours à l'X. Ce fut le début d'une envie irrépressible de la comprendre et d'en circonscrire le mystère. Merci à Benjamin Huard qui a accepté de discuter avec des théoriciens parfois déconnectés des réalités pratiques. Merci enfin à Antti Kupiainen, qui m'a permis d'étudier les systèmes quantiques ouverts au delà du cercle polaire et montré les vertus des bains d'eau glacée.

J'ai aussi été éclairé dans ma quête des fondements par des chercheurs rebelles d'une grande gentillesse. Detlef Dürr a été mon premier contact avec une communauté impressionnante de vivacité. Depuis son séminaire à l'*IHES* il y a maintenant presque deux ans, il n'a jamais manqué d'attentions envers moi. La confiance immédiate que lui et ses étudiants m'ont témoignée m'honore profondément. Je remercie aussi chaleureusement Dirk-André Deckert et Ward Struyve pour nos longues discussions sur les fondements et pour leur amitié. Je remercie enfin Lajos Diósi avec qui j'ai entamé une collaboration enrichissante et grâce à qui j'ai pu donner vie à une idée un peu folle.



Je n'ai pas souffert de la surpopulation chronique des bureaux de thésards de l'ENS, mes collègues appartenant invariablement à la fine fleur des doctorants. Je remercie Antoine Bourget, passionné de tout, des statistiques sur les rues de Paris aux groupes de Lie exceptionnels, Bruno le Floch, *légende* du bureau et codeur pour  $\text{\LaTeX}$ , Mathieu



Delorme, champion de fonctions spéciales et d'*Age of Empire II*, Thimothée Thiery virtuose des intégrales de chemin à la musique électronique, Thibault Maimbourg, maître de la dimension infinie, du basket et plus récemment du catch, et enfin Flavien Simon, stagiaire corpsard que nous avons perdu trop tôt à l'administration. Je remercie aussi les autres membres du laboratoire de physique théorique, ses assistantes Viviane et Sandrine ainsi que ses dinosaures attachants qui chassent sur la *Grille*.

J'ai aussi eu la chance de pouvoir enseigner à des étudiants brillants et curieux. Une grande partie du travail effectué durant cette thèse a été motivée par la volonté d'être digne de leur attention.

Une thèse ne se survit pas sans amis et je me suis appuyé immodérément sur les miens. Thomas a eu à débriefer les moindres aléas et fluctuations de ma recherche en camarade d'ascèse. Il a lissé les difficultés à grands coups d'écoute patiente, de frites à la graisse de bœuf et de Chouffe glacée. Augustin m'a aidé à chercher la vie intense avant de s'en aller la trouver à San Francisco, Irénée m'a soutenu dans ma passion des fondements quand Emmanuel a maintenu intact mon intérêt pour les débats et le monde non académique. Jonathan, enfin, m'a instillé par l'exemple la volonté de puissance nécessaire à cette longue entreprise.

Merci à ma famille et plus particulièrement à mes parents qui, bien que ne comprenant plus grand chose à ce que je fais depuis un moment, m'ont apporté un soutien sans aucune faille.

Je remercie enfin tous les autres, sous le regard de qui j'ai écrit et cherché. Je ne les oublie pas.

Nous avons tous besoin que quelqu'un nous regarde. On pourrait ranger en quatre catégories selon le type de regard sous lequel nous voulons vivre. La première cherche le regard d'un nombre infini d'yeux anonymes, autrement dit le regard du public.[...] Dans la deuxième catégorie, il y a ceux qui ne peuvent vivre sans le regard d'une multitude d'yeux familiers.[...] Vient ensuite la troisième catégorie, la catégorie de ceux qui ont besoin d'être sous les yeux de l'être aimé.[...] Enfin, il y a la quatrième catégorie, la plus rare, ceux qui vivent sous les regards imaginaires d'êtres absents.

Milan Kundera, *L'Insoutenable légèreté de l'être*

# Table des matières

Préambule	i
Remerciements	iii
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Mécanique quantique et mesure	1
1.1.1 Rudiments de mécanique quantique	1
1.1.2 Le problème de la mesure	2
1.1.3 Déplacer la coupure de Heisenberg	3
1.2 Des interactions répétées à la mesure continue	4
1.2.1 Interaction répétées	5
1.2.2 Limite de <i>scaling</i>	7
1.2.3 Phénoménologie élémentaire	10
1.2.4 Généralisations	13
1.2.5 Autres dérivations et représentations	16
1.2.6 Point de vue des modèles de Markov caché	18
1.3 Lien avec le programme de réduction dynamique	23
1.3.1 Idée et modèle jouet	23
1.3.2 Modèles physiques	25
1.3.3 Difficultés	26
1.4 Conclusion sur les mesures continues	28
<b>2 Résultats théoriques</b>	<b>29</b>
2.1 Mesure forte et sauts quantiques	29
2.1.1 Heuristique	30
2.1.2 Cas général	33
2.1.3 Discussion	38
2.2 Échardes quantiques	39
2.2.1 Remarques préliminaires sur la convergence	40
2.2.2 Existence des échardes	40
2.2.3 Formalisme du temps effectif et opérateurs anormaux	45
2.2.4 Discussion	49
2.3 Extraction optimale d'information	52
2.3.1 État de l'art	52
2.3.2 Mesure optimale pour un registre de qubits	57

2.3.3	Commentaires généraux . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>63</b>
3.1	Contrôle par l' <i>intensité</i> de la mesure . . . . .	63
3.1.1	Introduction . . . . .	63
3.1.2	Exemple minimal . . . . .	64
3.1.3	Cas <i>presque</i> général . . . . .	69
3.1.4	Réalisation expérimentale . . . . .	71
3.2	Marches quantiques ouvertes . . . . .	72
3.2.1	Construction standard des marches quantiques ouvertes . . . . .	73
3.2.2	Passage au Brownien quantique ouvert . . . . .	74
3.2.3	Comprendre la transition balistique $\rightarrow$ diffusif . . . . .	76
3.3	Gravité et mécanique quantique . . . . .	77
3.3.1	Introduction . . . . .	78
3.3.2	Difficultés du couplage classique / quantique naïf . . . . .	81
3.3.3	Classe de modèles prometteurs . . . . .	85
3.3.4	Discussion . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Extension du domaine de la théorie</b>	<b>93</b>
4.1	Extension à l'estimation a posteriori . . . . .	93
4.1.1	Cas classique . . . . .	93
4.1.2	Propositions . . . . .	94
4.1.3	Nouvelles idées . . . . .	99
4.2	Extension des résultats au discret . . . . .	102
4.2.1	Modèle considéré . . . . .	102
4.2.2	Sauts quantiques . . . . .	104
4.2.3	Échardes . . . . .	106
4.2.4	Discussion . . . . .	106
4.3	Et pour la route... . . . . .	107
4.3.1	Étendre la mesure continue aux théories des champs . . . . .	107
4.3.2	Gravitation . . . . .	108
	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>
	<b>Annexes</b>	<b>112</b>
<b>A</b>	<b>Remarques sur les fondements de la mécanique quantique</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Construction d'un modèle de Markov caché</b>	<b>123</b>
<b>C</b>	<b>Calcul de la fréquence des sauts induits par la mesure</b>	<b>131</b>
<b>D</b>	<b>Échardes dans les trajectoires quantiques</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>Zoom sur les trajectoires quantiques</b>	<b>161</b>
<b>F</b>	<b>Extraction optimale d'information d'un registre</b>	<b>171</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

vii

<b>G Gravité semi-classique et modèles de collapse objectifs</b>	<b>189</b>
<b>Liste de publications</b>	<b>203</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>205</b>



# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Mécanique quantique et mesure

La mécanique quantique est une théorie dans laquelle la mesure possède un statut assez original. Le fait de mesurer un système, d'extraire une information sur ses propriétés, induit une dynamique particulière, a priori distincte de l'évolution usuelle et qui fait en tout cas l'objet d'un postulat dédié. Cette spécificité fascinante de la mesure, qui apparaît au cœur de la «bizarrie» quantique, motive une grande partie des questions attaquées durant cette thèse. Même si les ambitions de cette dernière sont essentiellement limitées à une compréhension *pratique*<sup>1</sup> de la mesure, il convient de rappeler les difficultés d'ordre plus fondamental qui sont posées par le formalisme.

#### 1.1.1 Rudiments de mécanique quantique

Commençons par rappeler de manière très rapide les postulats fondamentaux de la mécanique quantique non relativiste pour un système *fermé*. Le premier postulat stipule que tout ce que l'on peut dire d'un système physique donné est contenu dans sa fonction d'onde ou son vecteur d'état  $|\psi\rangle$  qui est un rayon d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La signification profonde, de ce vecteur d'état, s'il y en a une, n'est pas éclairée par le formalisme qui se contente d'en donner une caractérisation opérationnelle. Le deuxième postulat précise la dynamique du système et stipule qu'il existe un opérateur auto-adjoint  $H$  qui génère l'évolution dans le temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle.$$

On travaillera par la suite dans un système d'unité dans lequel la constante de Planck réduite  $\hbar$  vaut 1. Le troisième postulat relie enfin le vecteur d'état à ce qui est observable, mesurable. Il se décompose en deux sous postulats. Il précise que la probabilité de mesurer le système dans un certain état  $|i\rangle$  d'une base orthonormée  $\{|1\rangle, \dots, |n\rangle\}$  est donnée par  $\mathbb{P}[|i\rangle] = |\langle i|\psi\rangle|^2$ , ce qu'on appelle parfois la *règle de Born*, et qu'à l'issue

---

1. Les aspects plus fondamentaux du «problème de la mesure» sont discutés dans l'appendice A. On discute aussi en section 1.3 le lien entre la résolution pratique et des résolutions fondamentales du problème.

de la mesure, le système se trouve dans l'état  $|i\rangle$ , ce qu'on appelle parfois le *collapse de la fonction d'onde*.

À ce stade, on peut d'ores et déjà se permettre quelques remarques. On décrit un système *fermé* (potentiellement l'univers) avec un vecteur d'état  $|\psi\rangle$  qui ne possède pas d'interprétation physique en l'absence de mesure, mesure qui ne peut venir que de l'extérieur. Par ailleurs, la mesure obéit à une règle distincte de l'évolution usuelle, ne serait-ce que parce qu'elle engendre une transition aléatoire qui contraste avec la dynamique déterministe prescrite par le deuxième postulat. Que l'on soit ou non intéressé par les fondements de la mécanique quantique, on doit admettre qu'il y a au minimum une certaine tension dans cette partie du formalisme dit orthodoxe. On peut citer Bell qui aborde le problème avec ironie dans *Against 'Measurement'* [10] :

Was the wave function of the world waiting to jump for thousands of millions of years until a single-celled living creature appeared? Or did it have to wait a little longer, for some better qualified system... with a PhD?

Plus sérieusement, qu'est ce qui fait qu'une certaine évolution est une mesure? Qu'est-ce même qu'un résultat de mesure? Pourrait-on se passer du postulat 3 en considérant un système assez gros contenant l'appareil de mesure lui-même? Comme on va le voir, la réponse à la dernière question est malheureusement négative<sup>2</sup> mais il est malgré tout instructif d'essayer d'appliquer le programme qui y est ébauché, c'est à dire de prendre en compte ce qui est extérieur au système.

### 1.1.2 Le problème de la mesure

Notre objectif est ici de mettre en évidence le problème de la mesure, c'est à dire le fait que même en intégrant l'environnement au système, il n'est pas possible de reproduire le postulat de la mesure sans autre hypothèse que le postulat 2 d'évolution linéaire. On considère désormais l'ensemble système + environnement (ce dernier contenant éventuellement l'appareil de mesure). L'ensemble est décrit par un rayon  $|\psi\rangle$  appartenant à l'espace de Hilbert total  $\mathcal{H}_t$  qui se décompose sur le système et l'environnement  $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_e$ .

Supposons pour simplifier que le système est simplement un *qubit*, c'est à dire un système à deux niveaux :  $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^2 = \text{Vect}\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . On imagine que le système est initialement dans un état superposé et isolé de l'environnement, *i.e.* que l'état total s'écrit par exemple :

$$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\text{env}\rangle$$

Avant d'être couplé à l'environnement, le système est dans une superposition cohérente. Cela signifie que  $\mathbb{P}[|0\rangle] = 1/2$  mais  $\mathbb{P}[(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}] = 1$ , la seconde probabilité distinguant cet état d'un simple mélange statistique.

On cherche désormais à savoir comment un tel état peut évoluer en fonction du temps, pour réaliser, par exemple, une mesure. Pour qu'une telle évolution conduise à une mesure dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , il faut qu'elle préserve les états propres correspon-

---

2. On peut consulter Bassi et Ghirardi [11] pour une preuve plus précise et générale de cette impossibilité.

dant, autrement dit que l'opérateur unitaire  $U_T$  donnant l'évolution totale vérifie :

$$\begin{aligned} U_T|0\rangle \otimes |\text{env}\rangle &= |0\rangle \otimes U_T^{(0)}|\text{env}\rangle = |0\rangle \otimes |\text{env } 0\rangle \\ U_T|1\rangle \otimes |\text{env}\rangle &= |1\rangle \otimes U_T^{(1)}|\text{env}\rangle = |1\rangle \otimes |\text{env } 1\rangle \end{aligned}$$

La linéarité de l'évolution implique ensuite que l'état total après un temps  $T$  partant de l'état superposé se trouve de la manière suivante :

$$|\psi_{t=0}\rangle \rightarrow U_T |\psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |\text{env } 0\rangle + |1\rangle \otimes |\text{env } 1\rangle]$$

Pour un environnement ou un appareil de mesure typique,  $\mathcal{H}_e$  possède une dimension  $D$  extrêmement grande. Pour une évolution elle aussi typique,  $|\text{env } 0\rangle$  et  $|\text{env } 1\rangle$  vont être deux rayons grosso modo aléatoires d'un espace de Hilbert de dimension astronomique et vont donc avoir un recouvrement extrêmement petit, plus précisément  $\langle \text{env } 0 | \text{env } 1 \rangle \propto 1/\sqrt{D} \rightarrow 0$ . C'est ce phénomène qui est à l'origine de la *décohérence*, *i.e.* du fait qu'après l'évolution on a toujours  $\mathbb{P}[|0\rangle] = 1/2$  mais  $\mathbb{P}[(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}] = 1/2$  à cause de la perte de cohérence dans l'environnement. Tout se passe ainsi *comme si* on possédait désormais un état statistiquement *soit* dans l'état  $|0\rangle$  *soit* dans l'état  $|1\rangle$ . Toute la subtilité, qui donne lieu à tant d'incompréhensions dans la littérature, est dans ce «*comme si*». En effet, si l'on utilise le postulat de la mesure pour tirer des prédictions de l'état après évolution, alors tout se passe comme si on avait un mélange statistique, mais cela suppose évidemment qu'on se donne le droit d'utiliser le postulat de la mesure à la fin, celui là même que l'on cherchait initialement à démontrer. À la fin de l'évolution, on a en réalité une superposition de poids égaux dans chaque pointeur. La cohérence a fuit dans l'environnement, la superposition n'a pas disparu, elle est devenue macroscopique à l'image du chat de Schrödinger, appareil de mesure malheureux d'une désintégration atomique. L'absence de cohérence au niveau du système n'est empiriquement équivalente au collapse qu'une fois ajouté le postulat de la mesure.

Notons que l'on peut très facilement démontrer l'apparition de la décohérence pour une large classe de modèles sans avoir besoin de faire l'hypothèse *ad hoc* que les états de l'environnement diffusent aléatoirement, là n'est pas la difficulté théorique, mais le risque est alors de se perdre dans la technique pour finir, une fois le résultat durement gagné, par confondre cohérence et superposition oubliant ainsi ce qu'on était venu chercher, un peu comme Villeret dans la fameuse scène du *Diner de cons*.

Il existe des solutions pragmatiques et des solutions théoriques plus débattues au problème de la mesure mais il faut accepter la déception suivante : il y a bel et bien un problème ou au minimum une ambiguïté qui, quoi que l'on fasse, ne sont *pas* résolus par la théorie de la décohérence (voir appendice A).

### 1.1.3 Déplacer la coupure de Heisenberg

Dans la situation précédente, il était donc vain de chercher à résoudre le problème de la mesure en intégrant l'appareil de mesure à l'environnement. Pour casser la superposition il eût fallu un nouvel appareil de mesure extérieur mesurant le précédent. La procédure précédente présente néanmoins un intérêt pratique en éloignant la bizarrerie



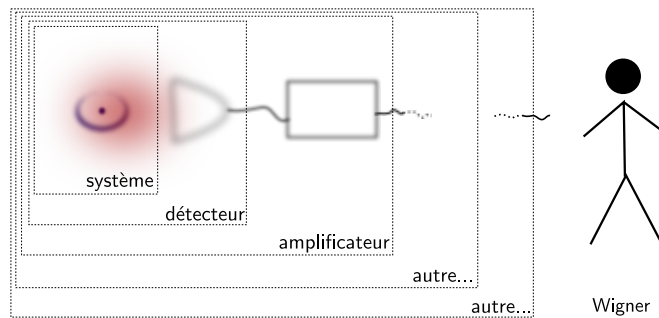


FIGURE 1.1 – Illustration des différentes coupures de Heisenberg possibles. On peut appliquer le postulat de la mesure à différents systèmes délimités par les lignes pointillées.

du postulat 3 du système étudié. Dans une situation où on n'est pas sûr que l'appareil de mesure (par exemple un photodétecteur) en est vraiment un, *i.e.* qu'on peut utiliser le postulat 3 pour décrire son évolution, alors on peut déplacer le problème d'un cran et intégrer l'appareil de mesure au système mettant ainsi la mesure une étape plus loin, par exemple au niveau de l'amplificateur. Si l'on possède un doute sur ce dernier, on peut de nouveau l'intégrer au système et réitérer la même procédure. Le moment où l'on choisit d'arrêter cette chaîne et d'appliquer le postulat 3 est la *coupure d'Heisenberg* (voir Fig. 1.1), parfois aussi appelée coupure de Von Neumann. À moins d'aller jusqu'à la conscience et de croire comme Wigner<sup>3</sup> que cette dernière est à l'origine du collapse, cette méthode est une fuite en avant, un déplacement, qui ne résout pas fondamentalement le problème mais permet de répondre à toutes les questions pratiques. La théorie est utilisable "*for all practical purposes*".

En plus de clarifier l'utilisation pratique du postulat de la mesure, le déplacement de la coupure de Heisenberg permet de définir une classe plus générale de mesures et en particulier les *mesures continues* qui sont l'objet d'étude principal de ce mémoire. Ce dernier n'a ainsi pas pour ambition initiale de proposer une nouvelle résolution du problème de la mesure (même si cette question est discutée en appendice) mais d'explorer les possibilités offertes par le déplacement de la coupure de Heisenberg<sup>4</sup>.

## 1.2 Des interactions répétées à la mesure continue

Dans ce qui suit, on va introduire les trajectoires quantiques de la manière la plus directe possible à partir des interactions répétées. Le lecteur à la recherche d'autres dérivations abordables de ces équations peut se référer à Brun [13] ou Jacobs *et al.* [14]. Pour rentrer directement dans le vif du sujet, on reporte le bref historique de leur

3. "It will remain remarkable, in whatever way our future concepts may develop, that the very study of the external world led to the scientific conclusion that the content of the consciousness is an ultimate reality." Eugene Wigner cité par Bricmont dans [9]. À sa décharge, on peut noter que Wigner a changé de point de vue au cours de sa vie pour se rapprocher de l'idée d'un mécanisme purement physique de collapse (voir par exemple Esfeld [12]).

4. Il se trouve que le formalisme que l'on obtiendra, combiné à une interprétation hétérodoxe, est aussi utilisable pour obtenir une résolution du problème de la mesure.

découverte en 1.2.5.

### 1.2.1 Interaction répétées

La méthode la plus simple permettant d'arriver au formalisme des mesures continues consiste à imaginer une succession rapide de mesures faibles obtenues en envoyant des *sondes* sur le système. Commençons donc par décrire une étape élémentaire de cette procédure. On considère que le système est décrit par un état (ou plus généralement une matrice densité) d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_s$ . Une sonde (*probe*) sera pour simplifier un qubit, c'est à dire un système physique décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}^2$ . On note  $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_p$  l'espace de Hilbert total. L'ensemble { système + sonde } est initialement dans un état produit  $|\Psi_{in}\rangle = |\psi\rangle \otimes |+\rangle_x = |\psi\rangle \otimes \frac{|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{2}} \in \mathcal{H}_{tot}$ . À l'interaction entre sonde et système correspond un opérateur unitaire  $U$  agissant sur l'espace de Hilbert total. À l'issue de l'interaction, le système est donc dans l'état  $|\Psi_{out}\rangle = U|\psi\rangle \otimes |+\rangle_x$  que l'on peut désormais décomposer sur la base  $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$  de  $\mathcal{H}_p$  :

$$|\Psi_{out}\rangle = B_+|\psi\rangle \otimes |+\rangle_z + B_-|\psi\rangle \otimes |-\rangle_z$$

où l'unitarité de  $U$  implique pour *seule* contrainte que  $B_+^\dagger B_+ + B_-^\dagger B_- = \mathbb{1}$ . Cette première étape d'évolution *intrique* système et sonde, cette dernière emportant ainsi une partie de l'information du système. L'analogue classique de cette étape consisterait à prendre une photo (éventuellement floue) d'un système de particules sans en regarder pour le moment le résultat.

La deuxième étape consiste à mesurer la sonde dans la base  $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$  pour en tirer un résultat binaire  $\delta = \pm 1$ . En oubliant alors l'état de la sonde après la mesure (qui est potentiellement détruite) l'état du système devient :

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{B_\pm|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|B_\pm^\dagger B_\pm|\psi\rangle}} \quad \text{avec probabilité } \mathbb{P}[\pm] = \langle\psi|B_\pm^\dagger B_\pm|\psi\rangle \quad (1.2.1)$$

Si  $B_+$  et  $B_-$  sont des projecteurs orthogonaux, alors la procédure précédente réalise une mesure projective indirecte. Inversement, si  $B_+ = B_- = \mathbb{1}/\sqrt{2}$ , il n'y a pas d'interaction entre le système et la sonde et on n'obtient aucune information. Pour toutes les autres valeurs intermédiaires, on obtient une mesure généralisée. Cette seconde étape est l'analogue classique du fait de regarder la photo et de s'en servir pour *mettre à jour* l'information possédée sur le système.

On obtient des mesures répétées lorsque l'on réitère la procédure précédente un grand nombre de fois avec une *nouvelle* sonde à chaque fois (voir Fig. 1.2). Après  $n$  étapes, l'état du système  $|\psi\rangle_n$  vaut :

$$|\psi\rangle_n = \frac{B_{\varepsilon_1} B_{\varepsilon_2} \dots B_{\varepsilon_n} |\psi\rangle}{\sqrt{\mathbb{P}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]}} \quad \text{avec probabilité } \mathbb{P}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] = \langle\psi|B_{\varepsilon_n}^\dagger \dots B_{\varepsilon_1}^\dagger B_{\varepsilon_1} \dots B_{\varepsilon_n}|\psi\rangle$$

où  $\varepsilon_i = \pm$ . Une réalisation du processus stochastique  $|\psi\rangle_i$ ,  $i \in [1, n]$  est une *trajectoire quantique* discrète. Si l'on souhaite revenir à la description dans l'espace de Hilbert total contenant les sondes, alors il faut considérer  $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_s \otimes \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_p^{(i)}$ . L'état initial s'écrit par exemple  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |+\rangle_x^{(1)} \otimes \dots \otimes |+\rangle_x^{(n)}$ . À l'étape  $i$ , l'opérateur

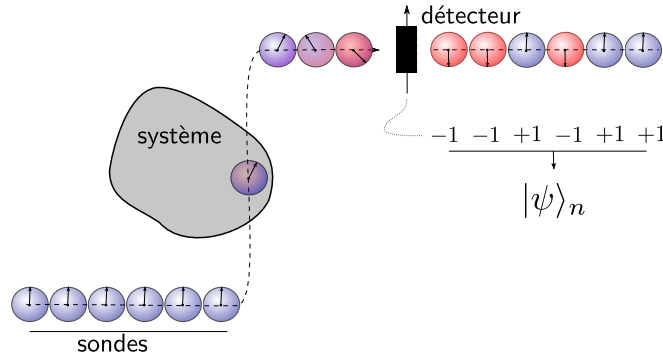


FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'une situation de mesure indirecte via des interactions répétées.

unitaire  $U_i$  agit sur le système et la  $i$ -ème sonde uniquement dont l'état appartient à  $\mathcal{H}_p^{(i)}$ . À la limite continue, la description dans l'espace de Hilbert total contenant l'infinité des sondes donne lieu aux *bruits quantiques*, formalisme auquel on préférera en général les trajectoires quantiques dans ce mémoire.

Avant de passer à la limite continue, on peut étendre le formalisme des interactions répétées aux cas où le système n'est pas dans un état pur. Ce dernier est alors décrit par une matrice densité  $\rho \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$  et l'équation (1.2.1) précisant l'évolution pour une itération devient simplement :

$$\rho \longrightarrow \frac{B_{\pm}\rho B_{\pm}^{\dagger}}{\text{tr}[B_{\pm}\rho B_{\pm}^{\dagger}]} \quad \text{avec probabilité } \mathbb{P}[\pm] = \text{tr}[B_{\pm}\rho B_{\pm}^{\dagger}] \quad (1.2.2)$$

qui est strictement équivalente à (1.2.1) dans le cas où  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , équation qui se dérive en calquant la méthode précédente. L'avantage de la représentation en matrice densité, même dans le cas d'états purs, est que les valeurs moyennes quantiques sont linéaires en la matrice densité alors qu'elles sont quadratiques en l'état. Cette linéarité facilite fortement la prise de valeurs moyennes sur les trajectoires quantiques, on se limitera donc à cette représentation par la suite. Faire la moyenne sur les trajectoires quantiques revient à moyenner à chaque itération sur les probabilités de réalisation ou, de manière équivalente, à effectuer la trace partielle sur l'état des sondes. On obtient alors à chaque étape une application complètement positive préservant la trace –*completely positive trace preserving (CPTP)*–, explicitement sous la forme dite de Krauss, envoyant une matrice densité moyennée sur une autre :

$$\bar{\rho} \longrightarrow B_+\bar{\rho}B_+^{\dagger} + B_-\bar{\rho}B_-^{\dagger}.$$

Cette représentation moyennée donnera une *équation maîtresse* sous la forme de Lindblad [15] à la limite continue.

**Réalisation expérimentale :** Les mesures répétées peuvent être réalisées expérimentalement. On peut mentionner par exemple l'expérience du groupe de Serge Haroche au Collège de France (voir Fig. 1.3) et qui a contribué à lui faire gagner le prix Nobel 2012 (voir par exemple [16] ou [17] pour une expérience similaire du groupe de

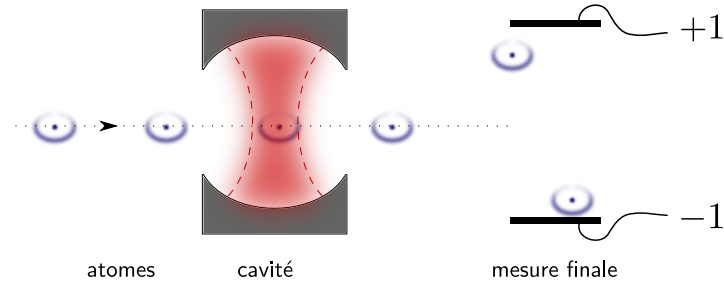


FIGURE 1.3 – Représentation *extrêmement simplifiée* de l’expérience du groupe de Serge Haroche. Des atomes sont envoyés successivement dans la cavité, s’intriquent avec un mode du champ électromagnétique et sont enfin mesurés.

Wineland). Dans cette expérience une cavité supraconductrice sélectionne un mode du champ électromagnétique qui peut être peuplé d’un nombre discret d’excitations (photons). L’espace de Hilbert du système est ici l’espace de Fock<sup>5</sup> associé à ce mode. On envoie ensuite des atomes oscillant entre deux états de Rydberg à travers la cavité contenant les photons, sonde qui peut ici aussi être assimilée à un système à deux niveaux. Le couplage photon-atome intrique sonde et système et une partie de l’information sur le champ est emportée par l’atome. On mesure enfin l’état de Rydberg de l’atome pour obtenir un résultat de mesure qui donne accès à une information sur la population dans la cavité. En itérant cette procédure, on peut connaître l’évolution du nombre de photons dans la cavité de manière non destructive en fonction du temps, prouesse qui fait l’originalité de cette expérience.

### 1.2.2 Limite de *scaling*

Pour obtenir une limite continue, on comprend intuitivement qu’il faut que chaque sonde ait une action négligeable sur le système et que les sondes soient envoyées à une fréquence très élevée. Une possibilité, qui correspond à la limite d’interactions faibles, est donc de prendre  $B_+$  et  $B_-$  tous deux proches de la limite sans interaction  $1/\sqrt{2}$  tout en prenant en compte la contrainte  $B_+^\dagger B_+ + B_-^\dagger B_- = \mathbb{1}$ . Pour simplifier, comme on ne cherche pas ici la généralité<sup>6</sup>, on peut faire l’hypothèse supplémentaire que la procédure n’introduit pas d’évolution unitaire supplémentaire déterministe sur le système.

En développant la contrainte au second ordre –second ordre qui sera nécessaire par la suite à cause du terme aléatoire– et en prenant en compte les restrictions précédentes

5. Même si un espace de Fock est *stricto sensu* de dimension infinie, l’expérience considérée est réalisée à basse température et seuls les premiers niveaux excités ont une probabilité non négligeable d’être peuplés. On peut donc se restreindre à un nombre fini d’états et considérer un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_s$  de dimension finie comme précédemment.

6. Voir par exemple [7] pour l’expression la plus générale.

on obtient :

$$\begin{aligned} B_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} + \sqrt{\varepsilon} N - \frac{\varepsilon}{2} N^\dagger N + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right) \\ B_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} - \sqrt{\varepsilon} N - \frac{\varepsilon}{2} N^\dagger N + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right), \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre qui vaudra  $dt$  à la limite continue et  $N$  est une matrice quelconque (pas forcément auto-adjointe). La deuxième étape, assez pénible, consiste à développer  $d\rho_t = \rho_{t+dt} - \rho_t$  (où on note désormais  $t = ndt$ ) jusqu'à l'ordre  $\varepsilon = dt$ . On obtient :

$$d\rho_t = \mathcal{D}[N](\rho_t)dt + \mathcal{H}[N](\rho_t)(dY_t - \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt) + \mathcal{O}(dt^{3/2}),$$

où on a utilisé les notations de Milburn et Wiseman [18] :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[N](\rho) &= N\rho N^\dagger - \frac{1}{2}\{N^\dagger N, \rho\} \\ \mathcal{H}[N](\rho) &= N\rho + \rho N^\dagger - \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho] \rho. \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $dY_t$  correspond ici au  $n$ -ième résultat de mesure  $\delta_n = \pm 1$  multiplié par  $\sqrt{dt}$ , *i.e.*  $Y_t = \sqrt{dt} \sum_{i=1}^n \delta_i$ . La troisième étape du raisonnement consiste à noter que  $Y$  est une somme de variables aléatoires indépendantes *presque* identiquement distribuées, de sorte que l'on s'attend à ce que ses incréments deviennent gaussiens en vertu du théorème centrale limite<sup>7</sup>. En acceptant cet argument, il ne reste qu'à déterminer la variance et la moyenne de  $dY_t$  sachant tous les résultats de mesure avant  $t$ , information que l'on résume dans la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{Y_u\}, u \in [0, t])$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dY_t | \mathcal{F}_t] &= \sqrt{dt} \left( \text{tr}[B_- \rho_t B_-^\dagger] - \text{tr}[B_+ \rho_t B_+^\dagger] \right) \simeq \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt \\ \mathbb{E}[dY_t^2 | \mathcal{F}_t] &= dt. \end{aligned}$$

Il existe par conséquent un processus de Wiener<sup>8</sup>  $W_t$  tel que  $dY_t = \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + dW_t$  ce qui nous fournit l'équation différentielle stochastique vérifiée par le *signal*, qui est le pendant continu des résultats de mesure dans le cas discret. Enfin, on a donc deux équations différentielles stochastiques (EDS) pour  $\rho$  et  $Y$  qui s'écrivent<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t \\ dY_t &= \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + dW_t. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

7. Évidemment, la variable  $dY_t$  que l'on a défini par commodité ne peut prendre que deux valeurs, mais en définissant une nouvelle variable  $dY_t$  égale à la somme de la précédente sur un grand nombre de petits intervalles, on comprend qu'elle deviendra gaussienne. Voir par exemple [4] pour une dérivation plus précise dans un cas particulier.

8. C'est à dire un mouvement Brownien, ou de manière moins rigoureuse un processus dont la dérivée est un bruit blanc.

9. Le bruit étant multiplicatif dans l'équation pour  $\rho$ , il est nécessaire de préciser la convention qui est ici Itô, ce qui signifie que le bruit  $dW_t$  est décorrélé de  $\rho_t$ . C'est la convention naturelle dans ce contexte, on peut alors très facilement prendre la moyenne de l'équation en supprimant le terme contenant le bruit, ce qui est moins naturel avec Stratonovitch.

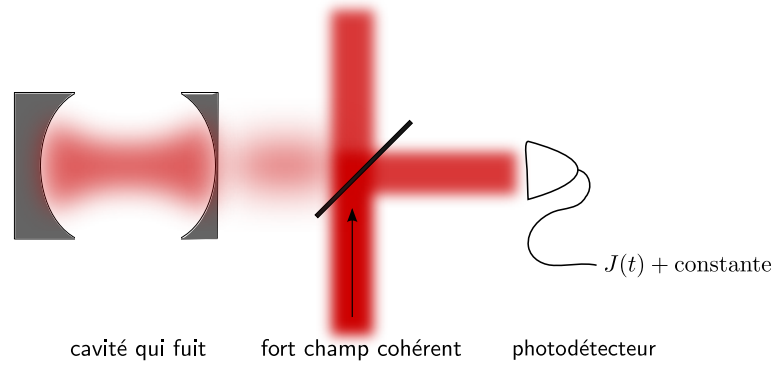


FIGURE 1.4 – Détection homodyme du champ s'échappant d'une cavité. Un fort champ cohérent est ajouté. Le signal obtenu contient à une constante près  $J(t) = \frac{dY_t}{dt}$ , où  $Y_t$  est donné par l'équation (1.2.4) pour  $N = a$  l'opérateur d'annihilation du mode de la cavité mesuré. On peut consulter [19] pour une dérivation de (1.2.4) dans ce contexte.

Ce jeu d'équations, qui permet de décrire l'évolution continue du système et du signal en fonction du temps est en général appelé *équation maîtresse stochastique* (EMS) par opposition à l'équation maîtresse qui en est la moyenne sur le bruit (c'est à dire lorsque l'on ne tient pas compte des résultats) et se lit simplement :  $\partial_t \bar{\rho}_t = \mathcal{D}[N](\bar{\rho}_t)$ .

Dans ce qui suit, on supposera en général que le système possède une dynamique *ouverte* propre en plus de la mesure, dynamique pouvant s'écrire  $\partial_t \rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)$  où  $\mathcal{L}$  est le générateur d'une application CPTP (par exemple  $\mathcal{L}(\bullet) = -i[H, \bullet]$ ). Par conséquent, la classe générale d'équations à laquelle on va s'attacher dans ce qui suit est composée des EDS de la forme :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t \quad (1.2.5)$$

où l'on a adimensionné  $N$  pour en extraire un taux  $\gamma$ . Il s'agira, si l'on veut, de la nouvelle équation de Schrödinger que l'on prendra pour donnée en oubliant peu à peu son origine. On peut malgré tout dire un mot sur sa réalisation expérimentale.

**Réalisation expérimentale :** Une première méthode –naïve mais fonctionnelle– est de suivre à la lettre la dérivation précédente et d'imaginer une situation à la Haroche où le couplage atome-cavité est faible et où les atomes sont envoyés à une fréquence élevée, c'est à dire où le continu est obtenu comme limite du discret.

Une autre manière d'obtenir l'équation (1.2.5) est possible sans utiliser l'étape intermédiaire du discret et est réalisée en optique quantique avec la détection homodyne (voir Fig. 1.4). La dérivation est alors un peu moins parlante mais on obtient le même type d'équations sans jamais passer par le discret (voir par exemple [18]). Plus généralement, on peut imaginer que tout appareil de mesure possédant un grand nombre de degrés de liberté internes, couplé de manière suffisamment faible avec le système et fournissant un signal à une résolution temporelle bien plus fine que le temps typique de collapse, peut être fidèlement décrit par le modèle précédent.

*Remarque 1* (Représentation linéarisée). L'équation maîtresse (1.2.5) est non linéaire à cause de la contrainte de normalisation de  $\rho_t$ . Il est parfois plus commode de tra-

vaille avec une version linéaire et d'imposer la normalisation a posteriori. On introduit alors la matrice densité non normalisée  $\tilde{\rho}_t$  vérifiant l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$d\tilde{\rho}_t = \mathcal{L}(\tilde{\rho}_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\tilde{\rho}_t) dt + \sqrt{\gamma} (N\tilde{\rho}_t + \tilde{\rho}_t N^\dagger) dY_t,$$

équation que l'on peut résoudre (en fonction de  $Y_t$ ) notamment dans les situations de mesure pure. On peut ensuite vérifier en utilisant le lemme d'Itô qu'il suffit de normaliser  $\tilde{\rho}_t$  pour obtenir  $\rho_t$ . Autrement dit, le processus stochastique  $\rho_t = \frac{\tilde{\rho}_t}{\text{tr}[\tilde{\rho}_t]}$  vérifie l'équation différentielle stochastique non linéaire (1.2.5) et est bien de trace 1.

### 1.2.3 Phénoménologie élémentaire

Comment se comporte l'équation (1.2.4) –dans un premier temps en l'absence d'autre dynamique– ? Pourquoi obtient-on bien quelque chose qui se comporte comme une mesure ? Un bon moyen de comprendre la dynamique induite par la mesure continue est d'étudier le premier exemple non trivial avant d'attaquer le cas général.

#### 1.2.3.a Exemple

Considérons donc un *qubit*, *i.e.* un système tel que  $\mathcal{H}_s = \text{Vect}\{|+\rangle, |-\rangle\} \simeq \mathbb{C}^2$ . Prenons  $N = (\sqrt{\gamma}/4) \sigma_z$ , ce qui correspond à une mesure dans la base canonique avec une «force» proportionnelle à  $\gamma$  qui a la dimension d'un taux. Dans la base canonique on peut paramétrer  $\rho$  de la manière suivante :

$$\rho = \begin{pmatrix} q & u \\ u^* & 1 - q \end{pmatrix}$$

et observer ce que le système d'équations (1.2.4) fournit une fois développé en composantes.

**Probabilités :** La probabilité  $q$  obéit à une équation fermée indépendante de la phase  $u$  :

$$dq_t = \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t. \quad (1.2.6)$$

Intuitivement, cette équation induit un collapse progressif vers les points fixes  $q = 1$  ou  $q = 0$  où le bruit s'annule. On est en effet naturellement attiré vers les points fixes d'une diffusion non uniforme. Plus précisément, le processus stochastique  $q_t$  est une *martingale* continue, *i.e.*  $q$  vérifie  $\mathbb{E}[dq_t | \mathcal{F}_t] = 0$ , et qui est par ailleurs bornée. Un résultat classique de théorie des probabilités [20, 21] généralement attribué à Doob est qu'un tel processus stochastique (martingale bornée) converge presque sûrement, réalisation par réalisation. La seule limite possible étant un point fixe de l'équation différentielle stochastique, on en conclut que  $q_t$  tend vers 0 ou 1 suivant la réalisation (voir Fig. 1.5). Mais avec quelle probabilité atteint-on l'une ou l'autre valeur ? La propriété de martingale garantit que l'on retrouve bien la règle de Born. En effet, cette dernière implique que  $\mathbb{E}[q_t | \mathcal{F}_0] = q_0$ . Par conséquent on a  $q_0 = 1 \times \mathbb{P}[q_t \rightarrow 1] + 0 \times \mathbb{P}[q_t \rightarrow 0] = \mathbb{P}[q_t \rightarrow 1]$ , soit exactement la règle de Born. On peut étudier

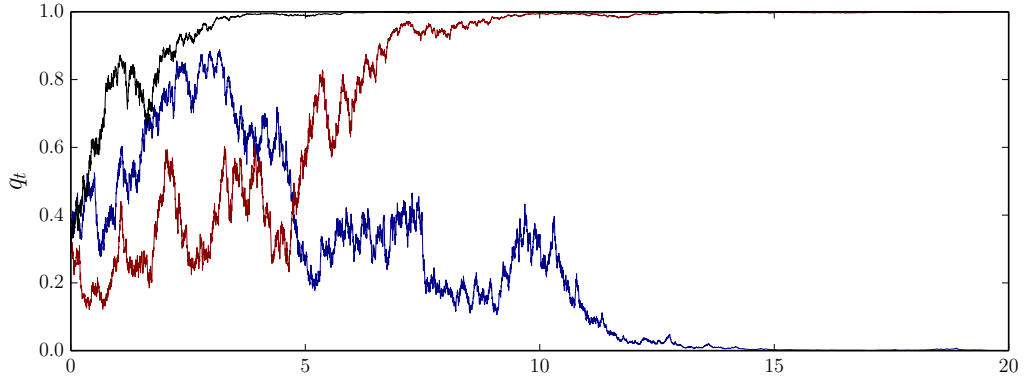


FIGURE 1.5 – Échantillon de trois trajectoires correspondant à la simulation naïve de l'équation (1.2.6) avec  $dt = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 1.0$  et  $q_0 = 1/3$  pour différentes réalisations du bruit.

la vitesse de convergence en s'intéressant par exemple à la quantité  $\Delta = \sqrt{q(1-q)}$ . L'application du lemme d'Itô fournit :

$$d\Delta_t = -\frac{\gamma}{8} \Delta_t dt + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma \Delta_t} (1 - 2q_t) dW_t.$$

Par conséquent, on a  $\mathbb{E}[\Delta_t] = e^{-\gamma t/8}$ , la convergence est exponentiellement rapide en moyenne avec un temps caractéristique de collapse  $\propto \gamma^{-1}$ .

**Phases :** La phase  $u$  obéit à une équation différentielle stochastique qui n'est pas indépendante des probabilités mais qui possède néanmoins un comportement assez simple :

$$du_t = -\frac{\gamma}{8} u_t dt + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (2q_t - 1) u_t dW_t.$$

On a donc en particulier  $\partial_t \mathbb{E}[u_t] = -\frac{\gamma}{8} \mathbb{E}[u_t]$ . La phase décroît ainsi exponentiellement vite en moyenne, c'est la décohérence induite par la mesure. Une mesure continue induit donc un collapse des probabilités doublé d'un déphasage exponentiellement rapide.

**Signal :** Le signal  $Y_t$  vérifie l'EDS suivante :

$$dY_t = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (2q_t - 1) dt + dW_t.$$

Aux temps longs, c'est à dire pour  $t \gg \gamma^{-1}$ , on a  $2(q_t - 1) = \pm 1$  et par conséquent  $dY_t = \pm \sqrt{\gamma}/2 dt + dW_t$ . La valeur finale de  $q_t$  peut donc très simplement se lire<sup>10</sup> sur la pente du signal aux temps longs.

10. Il s'agit évidemment d'une méthode approchée, et  $\rho_t$  étant en toute rigueur une fonction de  $t$  et  $Y_t$  il est toujours possible de calculer exactement  $q_t$  en fonction du signal. Il s'agit d'une trivialité dans le discret, l'état quantique est nécessairement une fonction des résultats de mesure et du temps.



*Remarque 2.* L'équation (1.2.6) admet une solution analytique simple en terme de  $Y_t$  (la somme des résultats de mesure). En effet, on peut utiliser la remarque 1 pour exprimer  $\tilde{\rho}$  en fonction de  $Y$  puis normaliser pour obtenir :

$$q_t = \frac{q_0 e^{\sqrt{\gamma} Y_t}}{q_0 e^{\sqrt{\gamma} Y_t/2} + (1 - q_0) e^{-\sqrt{\gamma} Y_t/2}}. \quad (1.2.7)$$

Cette forme permet de reconstruire facilement la probabilité en fonction des résultats de mesure. Il n'y a pas de dépendance en la trajectoire de mesure complète mais seulement en la valeur finale de la somme (cette caractéristique est perdue dès qu'une autre dynamique est superposée à la mesure). L'expression (1.2.7) ne permet en revanche pas immédiatement de calculer la distribution de  $q$  car  $Y$  n'est *pas* Brownien. On verra à la remarque 4 comment calculer très facilement la distribution de  $Y$  et donc *in fine* celle de  $q$ . Le cas de la mesure pure étant le seul qui se prête aux résolutions exactes, on sera néanmoins contraint dans le reste de ce mémoire de s'appuyer sur les arguments généraux précédents.

*Remarque 3.* Avant de passer au cas général, notons la similarité entre l'équation (1.2.6) et la limite continue de l'équation de Wright-Fisher en dynamique des populations<sup>11</sup> (voir par exemple [22]) qui s'écrit :

$$dx_t = \sqrt{x_t(1 - x_t)} dW_t.$$

Le bruit possède ici deux points fixes et la propriété de martingale garantit que la probabilité d'atteindre le point fixe 1 vaut la valeur de départ. La similarité s'arrête là et la racine carrée –en plus de rendre l'existence de solutions fortes problématique [20]– modifie profondément la vitesse de convergence. Ici cette dernière n'est pas exponentielle mais plus brutale et les points fixes sont atteints presque sûrement en *temps fini* [22]. Il existe en dynamique des populations une équation possédant exactement le même terme de bruit que l'équation (1.2.6), *i.e.* sans la racine. Il s'agit de l'équation de Karlin-Kimura à la limite de grande population [23] mais cette dernière possède alors un terme en  $dt$  non trivial et en particulier non-linéaire qu'aucun modèle quantique ne peut reproduire.

### 1.2.3.b Cas presque général

Le comportement des équations de mesure continue générales est une extension simple du précédent exemple dans le cas où  $N$  est diagonalisable (ce qui correspond à une mesure sans démolition) et de valeurs propres  $\nu_i$  toutes de parties réelles distinctes (ce qui garantit que les espaces propres de la mesure ne sont pas dégénérés). On se place alors dans la base  $\mathcal{B} = \{|i\rangle\}_{1 \leq i \leq |\mathcal{H}_s|}$  dans laquelle  $N$  est diagonale, on note  $\forall i, q_i = \langle i | \rho_t | i \rangle$  les probabilités,  $\forall i \neq j, u_{ij} = \langle i | \rho_t | j \rangle$  les phases et on omet l'indice du temps par souci de clarté. L'équation (1.2.4) s'écrit alors en composantes :

$$\begin{aligned} dq_i &= q_i(\lambda_i - \sum_k q_k \lambda_k) dW_t \\ du_{ij} &= -\Delta_{ij} u_{ij} dt + u_{ij}(\nu_i + \nu_j^* - \sum_k q_k \lambda_k) dW_t, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

---

11. Je remercie Thierry Huillet qui m'a suggéré ce parallèle.

où on a utilisé les notations  $\lambda_i = \nu_i + \nu_i^*$  et  $\Delta_{ij} = \frac{1}{2}(|\nu_i|^2 + |\nu_j|^2 - 2\nu_i\nu_j^*)$ .

**Probabilités :** Les probabilités sont comme précédemment des martingales et, si toutes les valeurs propres  $\nu_i$  sont de parties réelles distinctes, les points fixes sont de la forme  $q_i = \delta_{ki}$ , la valeur de  $k$  dépendant de la réalisation. On obtient donc un collapse progressif des probabilités dans la base propre de  $N$ , la statistique de la valeur de  $q_i$  atteinte aux temps longs étant donnée par la règle de Born, *i.e.*  $\mathbb{P}[q_i \rightarrow 1] = q_i(0)$ .

**Phases :** Les phases décroissent exponentiellement en moyenne à un taux  $\Re[\Delta_{ij}] = \frac{1}{2}|\nu_i - \nu_j|^2$ . Plus deux valeurs propres de  $N$  sont différentes, c'est à dire plus elles permettent de distinguer deux pointeurs entre eux, plus les cohérences entre ces deux pointeurs décroissent vite. Notons au passage que dans le formalisme des mesures continues, les valeurs propres de l'opérateur mesuré ne sont pas de simples labels (comme pour une mesure projective) mais ont un impact sur la dynamique.

**Signal :** Le signal  $Y_t$  vérifie

$$dY_t = \sum_k \lambda_k q_k dt + dW_t.$$

Aux temps longs on a  $q_i = \delta_{ki}$  et la pente moyenne du signal, qui vaut alors  $\lambda_k$ , permet de remonter immédiatement au label du pointeur atteint.

### 1.2.4 Généralisations

Nous nous sommes jusqu'à maintenant contentés de traiter le cas de la mesure continue d'un unique opérateur mais la théorie se généralise pour inclure de multiples opérateurs mesurés simultanément. On peut comprendre intuitivement cette situation dans le discret comme l'envoi de plusieurs types de sondes différentes possédant un Hamiltonien d'interaction différent avec le système<sup>12</sup>. On donne ici les résultats sans preuve, cette dernière étant une généralisation directe de celle du cas à 1 opérateur.

#### 1.2.4.a Nombre discret d'opérateurs

On considère la mesure simultanée de  $n$  opérateurs  $A^\mu$ , l'équation maîtresse la plus générale que l'on peut écrire pour la matrice densité  $\rho_t$  et les  $n$  signaux  $Y^\mu$  s'écrit (voir par exemple [7]) :

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{1}{4}\Gamma_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}(\rho) dt + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}\mathcal{H}^\mu(\rho)dW^\nu \\ dY^\mu &= \text{tr}[A^\mu\rho_t] dt + dW^\mu, \end{aligned}$$

où on a utilisé la convention de sommation sur les indices répétés et les notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mu\nu}(\rho) &= A^\mu\rho A^{\nu\dagger} - \frac{1}{2}\{A^{\nu\dagger}A^\mu, \rho\} \\ \mathcal{H}^\mu(\rho) &= \mathcal{H}[A^\mu](\rho). \end{aligned}$$

<sup>12</sup>. Alternativement, on peut considérer l'envoi de sondes possédant un plus grand nombre de degrés de liberté.

Les processus  $W^\mu$  sont des Browniens dont la matrice de corrélation est non triviale et donnée par  $\Gamma^{-1}$ , soit la règle d'Itô suivante :

$$dW^\mu(t)dW^\nu(t) = [\Gamma^{-1}]^{\mu\nu} dt$$

où  $\Gamma$  est une matrice symétrique réelle positive. Le cas de la mesure simultanée de plusieurs opérateurs possède une plus grande liberté que ce que l'on pourrait imaginer naïvement et les bruits sont potentiellement corrélés<sup>13</sup>. Notons qu'il n'y a pas de lien direct entre  $\Gamma^{-1}$  la matrice de corrélation entre les bruits et le choix des opérateurs  $A^\mu$ . On peut très bien choisir des opérateurs qui ne commutent pas et avoir des bruits décorrélés ou se donner des opérateurs qui commutent tout en ayant des bruits corrélés<sup>14</sup>.

Dans le cas où les opérateurs  $A^\mu$  sont codiagonalisables, la phénoménologie est essentiellement la même que dans le cas d'un unique opérateur –à la vitesse de convergence près– dans le cas où tous les états de la base propre commune aux  $A^\mu$  peuvent être distingués. On entend par là que les seuls points fixes du bruit sur les probabilités soient de la forme  $q_i = \delta_{ki}$  comme précédemment. La condition est donc que la base propre des  $A^\mu$  soit unique.

#### 1.2.4.b Continuum d'opérateurs

On peut encore généraliser formellement la construction précédente à un continuum d'opérateurs  $A(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Ce type de généralisation permet de définir la plupart des modèles de collapse objectif utilisés en fondements de la mécanique quantique dans le cas où  $A(\mathbf{x})$  est l'opérateur densité de masse régularisée en  $\mathbf{x}$ . On préfère ici abandonner l'écriture en terme d'équations différentielles stochastiques et adopter une description en termes de champs gaussiens comme il est d'usage dans la littérature<sup>15</sup>. L'équation maîtresse la plus générale que l'on peut écrire pour la matrice densité  $\rho_t$  et le champ de signaux  $s(\mathbf{x}, t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{4} \int dx dy \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{D}[\mathbf{x}, \mathbf{y}](\rho) + \frac{1}{2} \int dx dy \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{H}[\mathbf{x}](\rho) w(\mathbf{y}) \\ s(\mathbf{x}, t) &= \text{tr}[A(\mathbf{x})\rho_t] + w(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

où  $w$  est un champ gaussien de fonction de corrélation :

$$\mathbb{E}[w(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{y}, \tau)] = \Gamma^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta(t - \tau).$$

13. L'éventuelle corrélation des bruits est la conséquence de la possible intrication des différentes sondes dans le modèle discret.

14. Il y a parfois une confusion dans la littérature sur les modèles de collapse objectif entre la régularisation spaciale appliquée aux opérateurs et la régularisation spatiale appliquée aux bruits qui par le même argument peuvent en réalité être fixées indépendamment l'une de l'autre.

15. On effectue ce changement principalement pour ne pas donner l'impression que l'on travaille au même niveau de rigueur mathématique que précédemment. En effet, on a besoin de définir un continuum de processus d'Itô potentiellement  $\delta$  corrélés,  $dW(x)dW(y) = \delta(x - y)dt$ , définition qui nous amène de toute façon à un niveau de rigueur de «physicien». Dans la littérature, l'écriture en terme de champ gaussien est aussi privilégiée pour ne pas séparer espace et temps de manière artificielle, notamment lorsque l'on cherche à construire des théories invariantes de Lorentz.

Comme précédemment,  $\Gamma$  est un noyau positif et on a utilisé les notations compactes évidentes :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\mathbf{x}, \mathbf{y}](\rho) &= A(\mathbf{x})\rho A^\dagger(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \left\{ A(\mathbf{y})^\dagger A(\mathbf{x}), \rho \right\} \\ \mathcal{H}[\mathbf{x}](\rho) &= \mathcal{H}[A(\mathbf{x})](\rho).\end{aligned}$$

### 1.2.4.c Autres généralisations possibles

On peut imaginer un certain nombre d'extensions au formalisme précédemment développé. La première idée à laquelle on pense immédiatement est de sortir du cadre markovien. Une telle généralisation est évidemment utile pour intégrer d'éventuels effets de mémoire dans le cas d'une unique observable mesurée mais, surtout, pour pouvoir construire des théories contenant des symétries comme l'invariance de Lorentz. En effet, on s'attend dans ce cas à ce que les corrélations spatiales entre les bruits (que l'on sait modéliser) donnent lieu naturellement à des corrélations temporelles et donc à des bruits colorés. Une telle généralisation est donc importante que ce soit pour construire des modèles de mesure plus fins ou pour les fondements où on a ultimement besoin de théories invariantes de Lorentz.

Évidemment, l'évolution d'un système ouvert non markovien pouvant a priori être quelconque, il ne s'agit pas de chercher l'évolution la plus générale, mais plutôt une classe d'évolutions facilement paramétrables et pour lesquelles on sait dire quelque chose de non trivial. À peine 10 ans après les débuts de la théorie de la mesure continue, Diósi, Strunz et Gisin [24, 25] ont introduit une classe d'équations de Schrödinger stochastiques à bruit coloré. Plus récemment, une large classe d'équations maîtresses non markoviennes et leur représentation en équations de Schrödinger stochastiques ont été classifiées par Diósi et Ferialdi [26]. Dans certains cas particuliers, on dispose même de solutions exactes [27]. Pourquoi, dès lors, présenter l'extension non markovienne de la mesure continue comme un problème ouvert ? C'est que si les modèles précédents donnent lieu à des trajectoires quantiques stochastiques qui permettent d'obtenir une fois moyennées une équation maîtresse non markovienne, ils ne possèdent pas d'interprétation claire en terme de mesure continue. Autrement dit, on n'est pas capable d'y mettre en évidence une quantité analogue au signal  $Y_t$ , c'est à dire un continuum de résultats associés à la trajectoire. Une telle introduction a malgré tout été proposée par Diósi [28] mais Gambetta et Wiseman ont montré qu'un tel signal n'était en général pas définissable en temps réel [29, 30] ce qui pose problème notamment si l'on souhaite parler de contrôle avec feedback. Le statut de la théorie non markovienne de la mesure continue est de ce fait encore largement ouvert, ce qui ne sera d'ailleurs pas sans nous poser des problèmes en 3.3.

Une autre généralisation souhaitable (sur laquelle on reviendra en 4.3.1) serait le passage à la théorie quantique des champs. Deux problèmes principaux se posent qui rendent la théorie non intuitive et l'entreprise largement ouverte. Premièrement, on ne peut mesurer des opérateurs locaux comme la densité de masse ou l'énergie sans une certaine régularisation spatiale sans quoi la décohérence induite est divergente. Cette régularisation spatiale est ensuite liée au second problème qui est la nécessité de l'invariance de Lorentz. La régularisation en espace donnant nécessairement lieu à une régularisation en temps, on doit d'une certaine manière introduire un formalisme non

markovien dont on a vu qu'il était aujourd'hui encore en chantier. Certaines théories ont néanmoins été proposées dans le contexte des fondements [31, 32] mais elles nécessitent de modifier de manière substantielle le formalisme usuel de la théorie quantique des champs et leur interprétation en terme de mesure continue est loin d'être évidente.

### 1.2.5 Autres dérivations et représentations

Il existe d'autres méthodes pour obtenir l'équation (1.2.5), la dérivation précédente, bien que probablement la plus directe, n'étant pas historiquement celle qui a permis d'arriver au résultat. La première référence<sup>16</sup> est due à Barchielli, Lanz et Prosperi en 1982 [34] et part directement du continu en utilisant le formalisme de l'intégrale de chemin (ils généralisent en fait un exemple de Mensky [35] pour l'oscillateur harmonique). La théorie est étendue en 1986 par Barchielli [36] en utilisant le formalisme des *bruits quantiques* puis Caves [37] qui résume les différentes approches et s'intéresse surtout aux équations maîtresses (moyennées) pour la position. À ce stade, la théorie est assez difficile à exploiter pour obtenir la dynamique conditionnée aux résultats de mesure car bruits quantiques et intégrales de chemin se prêtent mieux aux calculs de valeurs moyennes. C'est Diósi qui introduit en 1988 la formulation «moderne» en terme d'équation différentielle stochastique [38] pour la mesure continue de la position avec une preuve similaire à la notre. Les équations générales pour tout observable apparaissent ensuite dans Barchielli et Belavkin [39, 40].

Parallèlement, le même type d'équations a été développé dans la communauté des fondements de la mécanique quantique dans le but de résoudre le problème de la mesure, question sur laquelle on reviendra. Dans ce contexte, il n'y a pas de dérivation et les équations sont simplement conjecturées<sup>17</sup> pour obtenir un certain comportement limite souhaité (typiquement une réduction des superpositions quantiques macroscopiques dans une certaine base, généralement la position). On peut penser notamment aux travaux de Pearle [42, 43] et Diósi [44, 45] qui généralisent le modèle de réduction dynamique discret de Ghirardi, Rimini et Weber [46] (GRW).

Quittons désormais le fil historique pour présenter très brièvement une autre méthode pour dériver le formalisme des mesures continue ainsi que deux autres manières de le représenter.

Une manière alternative de comprendre la mesure continue est de la voir comme le couplage *faible* du système considéré avec un bain d'oscillateurs harmoniques répartis en un continuum de fréquences. Sous la double hypothèse que le couplage est infiniment faible et que la dynamique du bain est infiniment plus rapide que celle du système, on peut mesurer l'énergie du bain tous les  $dt$  pour obtenir une équation effective de la forme précédemment considérée (1.2.5) où l'opérateur  $N$  dépend de la forme du couplage bain-système<sup>18</sup>. On ne s'attardera pas ici sur cette méthode qui a le défaut

16. La paternité de ces équations pourtant simples est assez discutée. On cite en général une référence de 1980 en russe due à Belavkin mais lorsqu'on en lit une traduction (voir [33]), il est difficile de trouver un lien qui dépasse la proximité du titre.

17. C'est pour cette raison qu'il y a eu plus de tâtonnements dans le contexte des fondements, avec de nombreuses propositions incohérentes, jusqu'à ce que l'on réalise que toute modification déterministe non-linéaire de l'équation de Schrödinger ne pouvait fonctionner [41].

18. Une dérivation extrêmement claire du formalisme dans ce contexte et dans les *trois* représentations possibles est présentée dans le mémoire de M1 de Flavien Simon [47].

de demander une certaine vigilance sur la manière dont sont prises les approximations successives. En contre partie, il faut noter que cette dernière approche se prête mieux aux généralisations en particulier non markoviennes.

Outre les trajectoires quantiques, il existe deux autres représentations possibles du résultat : les bruits quantiques, qui est plus fine, et l'équation maîtresse (non stochastique) qui est plus grossière. Le formalisme des bruits quantiques (ou calcul stochastique quantique) a été introduit par Hudson et Parthasarathy [48] comme une généralisation non commutative du calcul d'Itô. Le lien *rigoureux* entre cette approche –essentiellement axiomatique et abstraite– et les mesures continues a ensuite été compris par Attal et Pautrat [49] dans le contexte des mesures répétées et par Accardi *et al.* [50, 51] puis Attal et Joye [52] dans le contexte du couplage faible avec un bain. Dans la mesure où l'on n'utilisera pas les bruits quantiques dans la suite de ce mémoire, il est raisonnable de se contenter d'une présentation rapide bien que probablement cryptique pour qui voudrait réellement s'en servir<sup>19</sup>. Là où l'on mesure les sondes (ou le bain) pour obtenir les trajectoires quantiques, l'idée des bruits quantiques est de garder l'espace de Hilbert complet (système + sondes) pour écrire la dynamique et conserver ainsi la possibilité de choisir ultérieurement la mesure à effectuer. Une grande partie de la subtilité mathématique de cette approche consiste à montrer que le *bon* espace de Hilbert limite pour les sondes, correspondant au produit tensoriel continu  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots$ , est l'espace de Fock bosonique  $\mathcal{F} \{ \mathbb{L}^2([0, t[, \mathbb{C}) \}$ , puis que l'on peut y écrire l'évolution simplement. On privilégie alors en général la représentation de Heisenberg et écrit l'évolution pour un opérateur  $A_t$  agissant éventuellement sur l'espace complet :

$$dA_t = \mathcal{D}^*[N](A)_t dt + [N^\dagger, A]_t d\xi_t + [N, A]_t d\xi_t^\dagger,$$

où  $\mathcal{D}^*$  est le super-opérateur dual à  $\mathcal{D}$  et  $d\xi_t$  et  $d\xi_t^\dagger$  sont des opérateurs agissant sur les sondes envoyées entre  $t$  et  $t + dt$ , *i.e.*  $\mathcal{F} \{ \mathbb{L}^2([t, t + dt[, \mathbb{C}) \}$ . Les bruits quantiques obéissent alors aux relations d'Itô quantique (à température nulle) :

$$d\xi_t d\xi_t^\dagger = dt \mathbb{1} \quad \text{et} \quad d\xi_t^\dagger d\xi_t = 0,$$

relations qui font intuitivement de  $d\xi_t^\dagger$  et  $d\xi_t$  les opérateurs créateurs et annihilateurs de  $\mathcal{F} \{ \mathbb{L}^2([t, t + dt[, \mathbb{C}) \}$ . Pour en déduire la représentation en terme de trajectoires quantiques (1.2.5), il faut mesurer les sondes. Plus précisément, pour obtenir exactement l'équation (1.2.5), il faut mesurer l'opérateur  $d\xi_t + d\xi_t^\dagger$  à chaque instant  $t$ ; le résultat fournissant alors le signal  $dY_t$  introduit précédemment (voir [7] pour plus de détails). De cette présentation sommaire il faut simplement retenir que le formalisme des bruits quantiques permet de représenter une situation de mesure continue dans l'espace complet, sans choisir a priori la mesure sur les sondes, et de retrouver la représentation en terme de trajectoires quantiques à l'aide d'une mesure d'opérateurs bien choisis sur ces dernières.

On retrouve –à l'autre extrême de la finesse de description– la représentation en terme d'équation maîtresse qui donne la dynamique de la la moyenne (au sens statis-

19. On peut consulter [7] pour une introduction (trop) courte à la *physicienne* avec un vocabulaire emprunté à la théorie quantique des champs. Le lecteur mathématiquement plus érudit préférera sans aucun doute l'approche rigoureuse d'Attal [53].

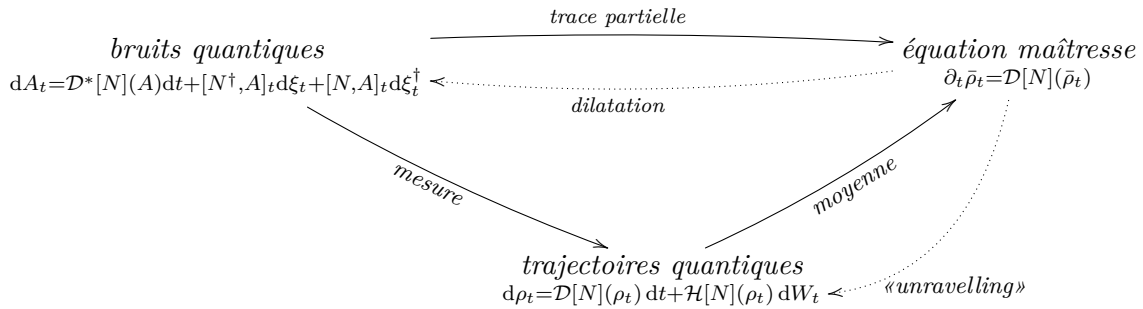
tique) de la matrice densité sur les trajectoires quantiques :

$$\partial_t \bar{\rho}_t = \mathcal{D}[N](\bar{\rho}_t).$$

De manière équivalente, c'est aussi l'équation que l'on obtient lorsque l'on trace sur les degrés de liberté du bain dans la méthode du couplage faible. Plus généralement, c'est le type d'équation que l'on utilise pour décrire les systèmes ouverts markoviens en l'absence d'extraction d'information sur l'environnement.

On peut évidemment passer d'une représentation à une autre. On passe facilement des trajectoires quantiques à l'équation maîtresse en moyennant sur les trajectoires et des bruits quantiques à l'équation maîtresse en traçant sur les degrés de liberté du bain. Pour l'étude d'un système ouvert markovien dont la dynamique est naturellement donnée sous forme d'une équation maîtresse, on peut aussi avoir envie de remonter à une représentation en trajectoires quantiques (qu'on appelle alors «*unravelling*»). Cette dernière n'est alors évidemment pas unique et on peut en particulier choisir un bruit gaussien ou un processus de saut. L'avantage est alors que les trajectoires quantiques préservent la pureté [54] de sorte qu'il est possible d'utiliser  $|\mathcal{H}_s|$  nombres pour paramétrer la dynamique (au lieu de  $|\mathcal{H}_s|^2$  pour l'équation maîtresse). C'est d'ailleurs cet intérêt numérique, noté pour la première fois par Dalibard, Mølmer et Castin [55] qui a fait la popularité des trajectoires quantiques au delà même des situations de mesure (voir aussi [56, 57]). Il est enfin possible de remonter de l'équation maîtresse aux bruits quantiques, opération que l'on appelle alors une dilatation (*dilatation*) et qui est essentiellement d'intérêt mathématique (en permettant de simplifier certaines preuves).

En résumé, on a trois représentations possibles entre lesquelles on peut facilement naviguer suivant la situation considérée :



Dans le reste de ce mémoire, on s'intéressera quasi exclusivement aux trajectoires quantiques et étudiera très ponctuellement les équations maîtresses correspondant à leur moyenne.

### 1.2.6 Point de vue des modèles de Markov caché

Le formalisme des mesures quantiques continues peut être vu comme une extension des modèles de Markov caché et de la théorie du filtrage en calcul stochastique. En particulier, l'équation (1.2.5) possède de fortes similarités avec l'équation de Kushner-Stratonovitch en théorie des probabilités classiques. À ma connaissance, si le parallèle est parfois évoqué de manière très heuristique dans la littérature, il n'a jamais été

donné explicitement<sup>20</sup> dans le cas général. Commençons par rappeler brièvement la définition d'un modèle de markov caché.

Un modèle de Markov caché en théorie des probabilités (classiques) est un processus de Markov  $R_n$  sur un graphe fini  $\mathcal{G}$  que l'on ne connaît que par l'intermédiaire de mesures (ou observations) bruitées  $\delta_n$ , le processus lui-même n'étant pas directement accessible (d'où le terme «caché»). L'objectif de la théorie du filtrage est de reconstruire la probabilité que le processus de Markov soit en un certain site à l'étape  $n$  sachant l'ensemble des observations avant  $n$ . Plus précisément, on note  $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\delta_k\}_{1 \leq k \leq n})$  l'information contenue dans les  $n$  premières mesures, on se donne  $\mathbb{P}[\delta_n | R_n]$  la probabilité d'obtenir un certain résultat de mesure sachant la valeur du processus de Markov et on se donne enfin  $M$  la matrice de Markov de  $R$ . Le problème du filtrage est alors de calculer  $\mathbb{P}[R_n | \mathcal{F}_n]$ .

### 1.2.6.a Un premier exemple presque trivial

Pour simplifier l'analyse, nous allons commencer par nous restreindre au cas où  $\mathcal{G}$  contient uniquement deux sites et où la matrice de Markov du processus  $R_n$  est triviale, autrement dit  $R_n = R = \text{constante}$  et le processus de Markov est en fait une unique variable cachée. Notre objectif étant ici de convaincre le lecteur le plus rapidement possible de la pertinence du parallèle, nous ne nous attarderons pas sur les preuves et laissons le traitement du cas général à l'appendice B.

Imaginons qu'une observation  $\delta_n = \pm 1$  apporte une petite quantité d'information sur la valeur de  $R$  (qui peut valoir 0 ou 1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\delta_n = 1 | R = 0] &= \frac{1 + \varepsilon}{2} \\ \mathbb{R}[\delta_n = 1 | R = 1] &= \frac{1 - \varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

L'application de la règle de Bayes permet de calculer simplement  $Q_n = \mathbb{P}[R | \mathcal{F}_n]$  en fonction de  $Q_{n-1}$  et  $\delta_n$  :

$$Q_n = \frac{(1 + \varepsilon \delta_n) Q_{n-1}}{(1 + \varepsilon \delta_n) Q_{n-1} + (1 - \varepsilon \delta_n)(1 - Q_{n-1})}.$$

Le lecteur peut d'ores et déjà remarquer que cette règle de mise à jour de la probabilité en fonction d'un résultat de mesure est exactement identique à la prescription quantique (1.2.2) dans le cas où  $B_+$ ,  $B_-$  et  $\rho$  sont diagonales dans la même base. Autrement dit, et même si l'étude de cet exemple ne fait évidemment pas office de preuve, une mesure indirecte quantique est a priori simplement une mesure imparfaite classique dans une certaine base doublée d'un déphasage, c'est à dire d'une suppression des coefficients non diagonaux dans la base d'intérêt.

Comme on l'a fait dans le cas quantique, on peut s'intéresser à la limite continue en posant  $t = ndt$  et  $\varepsilon = \sqrt{\gamma} \sqrt{dt}/2$  pour obtenir (voir par exemple l'appendice D pour une preuve) :

$$dQ_t = \sqrt{\gamma} Q_t (1 - Q_t) dW_t^{\mathcal{F}}, \quad (1.2.10)$$

<sup>20</sup>. Un cas analogue a néanmoins traité dans le contexte des fondements (mais sans utiliser ce vocabulaire) par Bedingham [58, 59] et on peut voir les traces d'un raisonnement similaire chez Laloë [60], encore une fois dans le contexte des fondements.



où  $W_t^{\mathcal{F}}$  est un processus de Wiener pour la filtration  $\mathcal{F}$ , soit exactement l'équation (1.2.6)! La «probabilité» dans un modèle de Markov caché dont la dynamique est triviale évolue exactement comme la probabilité d'un système quantique soumis à une mesure continue pure. L'avantage de la représentation en terme de modèle de Markov caché est que l'on possède un espace probabilisé plus grand dans lequel on peut considérer que la valeur finale atteinte par la probabilité est prédéterminée, ce qui permet notamment de conditionner facilement la trajectoire quantique à sa valeur finale. En effet, on peut introduire la filtration  $\mathcal{G}_t = \sigma(R, \mathcal{F}_t)$  qui contient l'information sur la valeur de la variable cachée en plus des résultats de mesure. Sous cette nouvelle filtration, le processus  $W_t^{\mathcal{F}}$  n'est plus un processus de Wiener et on peut écrire (voir appendice B)<sup>21</sup> :

$$dW_t^{\mathcal{F}} = dW_t^{\mathcal{G}} + \sqrt{\gamma} (R - Q_t) dt, \quad (1.2.11)$$

où  $W_t^{\mathcal{G}}$  est un processus de Wiener pour la filtration  $\mathcal{G}$  ce qui permet de réécrire l'équation (1.2.10) de la manière suivante :

$$dQ_t = \sqrt{\gamma} Q_t(1 - Q_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + \sqrt{\gamma} (R - Q_t) dt \right). \quad (1.2.12)$$

Cela signifie si l'on se donne  $Q_0$  en pratique, on peut simuler le processus stochastique  $Q_t$  directement avec l'équation (1.2.10) ou alors tirer  $R$  avec la probabilité  $Q_0$  puis simuler le processus stochastique  $Q_t$  avec l'équation (1.2.12) et on obtiendra deux processus avec exactement la même loi. Autrement dit, étant donné un ensemble de réalisations du processus, il est impossible de savoir avec quelle méthode il a été obtenu. L'avantage est alors que le comportement de l'équation (1.2.12) est tout à fait intuitif et on comprend bien que  $Q_t \rightarrow R$ . On exploitera cette idée lorsque l'on abordera la limite de mesure forte et les sauts quantiques.

*Remarque 4* (Distribution de  $q_t$ ). On peut exploiter la réécriture de l'équation (1.2.11) pour calculer la distribution explicite de  $Y$ , calcul a priori non trivial sans ce passage par les variables cachées. On a en effet en fonction du nouveau mouvement Brownien :

$$dY_t = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (2R - 1)dt + dW_t^{\mathcal{G}},$$

et en se souvenant que  $\mathbb{P}[R = 1] = q_0$  on a :

$$d\mathbb{P}[Y_t = y|q_0] = q_0 \frac{e^{-\frac{(y-\sqrt{\gamma}t/2)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy + (1 - q_0) \frac{e^{-\frac{(y+\sqrt{\gamma}t/2)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy. \quad (1.2.13)$$

On peut ensuite inverser l'équation (1.2.7) pour exprimer  $Y$  en fonction de  $q$  :

$$Y_t = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left( \ln \left[ \frac{q_t}{1 - q_t} \right] - \ln \left[ \frac{q_0}{1 - q_0} \right] \right),$$

---

21. Ce changement de mouvement Brownien rappelle le théorème de Girsanov [20].

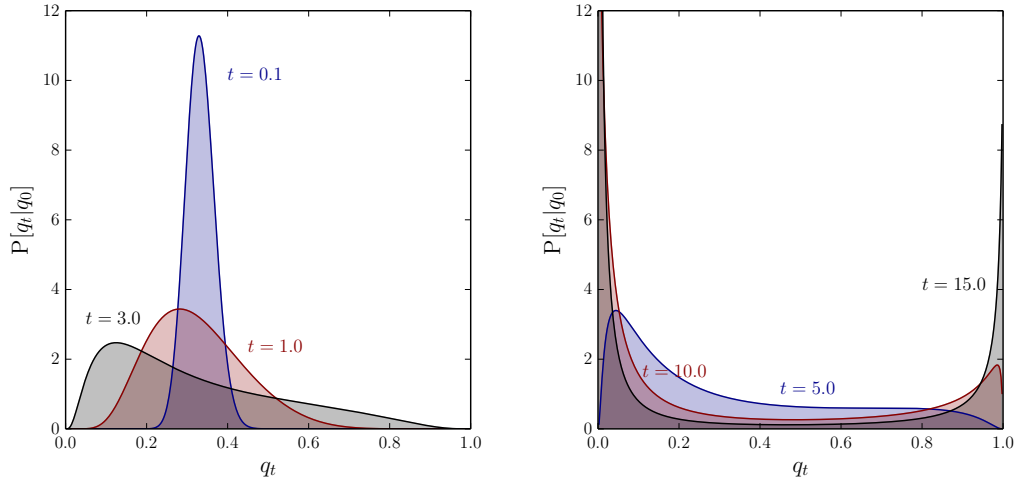


FIGURE 1.6 – Probabilité de  $q_t$  sachant  $q_0 = 1/3$ ,  $\gamma = 1.0$  pour différentes valeurs de  $t$  (temps « courts » à gauche et temps « longs » à droite).

soit finalement :

$$\begin{aligned} dP[q_t = q|q_0] = & \frac{2q_0}{\sqrt{2\pi\gamma t} q(1-q)} \exp \left[ -\frac{\left( \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left( \ln \left[ \frac{q}{1-q} \right] - \ln \left[ \frac{q_0}{1-q_0} \right] \right) - \sqrt{\gamma}t/2 \right)^2}{2t} \right] dq \\ & + \frac{2(1-q_0)}{\sqrt{2\pi\gamma t} q(1-q)} \exp \left[ -\frac{\left( \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left( \ln \left[ \frac{q}{1-q} \right] - \ln \left[ \frac{q_0}{1-q_0} \right] \right) + \sqrt{\gamma}t/2 \right)^2}{2t} \right] dq, \end{aligned}$$

distribution qui est tracée en Fig 1.6.

Il est remarquable qu'une équation a priori aussi simple :  $dq_t = \sqrt{\gamma}q_t(1-q_t)dW_t$  donne lieu à une distribution si compliquée. On peut ici mesurer la puissance du formalisme d'Itô en comparant cette dérivation *relativement* rapide avec le calcul de la même quantité dans le formalisme de intégrale de chemin développé dans [61] et qui nécessite plusieurs pages d'arguments.

### 1.2.6.b Cas général

Si l'on imagine très bien que l'exemple précédent se généralise aisément au cas d'un graphe de taille arbitraire, la question plus subtile est de savoir si la description en terme de processus de Markov caché s'étend aux cas où la mesure est doublée d'une dynamique ouverte générale de la forme  $\partial_t \rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)$ . Plus précisément, peut-on fixer une matrice de Markov  $M$  telle que les coefficients diagonaux de la matrice densité  $\rho_t$  s'interprètent comme les probabilités (sachant les résultats de mesure) d'un certain processus de Markov  $R_t$ . La réponse est négative si l'on demande que  $M$  soit une matrice indépendante du temps. Néanmoins, si l'on accepte la généralisation très non-classique que  $M$  puisse dépendre explicitement de  $\rho_t$ , alors on peut construire un

modèle de Markov caché correspondant à tout modèle de mesure continue + évolution. Nous allons nous contenter ici d'énoncer le résultat qui est démontré dans l'appendice **B**.

On cherche un modèle de Markov caché reproduisant l'équation (1.2.5) que l'on rappelle ici :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t, \quad (1.2.14)$$

pour  $N$  diagonalisable. On introduit alors le processus de sauts (caché)  $R_t$  à valeurs dans les projecteurs sur les états pointeurs  $|i\rangle\langle i|$  de  $N$ . À chaque instant, le processus  $R_t$  possède une probabilité  $M(\rho)_{i\leftarrow j} dt$  de passer du pointeur  $j$  au pointeur  $i$ . On fixe  $M(\rho)$  de la manière suivante :

$$M(\rho)_{i\leftarrow j} = \frac{\left[ \sum_{k \neq l} (\mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)} \right]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}} + \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)},$$

où  $[\bullet]^+$  dénote la partie positive et on a utilisé l'écriture de  $\mathcal{L}$  en composantes  $\mathcal{L}(\rho)^{(i,j)} = \sum_{k,l} \mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,j)} \rho^{(k,l)}$ . Notons comme prévu qu'avec cette définition  $R_t$  saute donc en général avec une probabilité qui dépend des coefficients non-diagonaux de  $\rho$ , comme si ces derniers *guidaient* le processus. On définit ensuite le modèle complet donnant l'évolution jointe entre  $\rho$  et  $R$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + \sqrt{\gamma} \text{tr} \left[ (N + N^\dagger)(R_t - \rho_t) \right] dt \right) \\ \mathbb{P} [R_{t+dt} = |i\rangle\langle i| \mid R_t = |j\rangle\langle j|] &= M(\rho_t)_{i\leftarrow j} dt. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

L'affirmation démontrée dans l'appendice **B** est que le  $\rho_t$  défini dans le modèle sans variable cachée par l'équation (1.2.14) possède *exactement la même loi* que le processus  $\rho_t$  défini par l'équation (1.2.15) dans l'espace probabilisé étendu contenant une variable cachée. Par ailleurs, dans ce second modèle on a  $\mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_t] = \text{diag}(\rho_t)$ , autrement dit les coefficients diagonaux de  $\rho_t$  s'interprètent comme les probabilités d'une variable cachée bien définie. L'état quantique possède dans l'interprétation de Markov caché un double statut *épistémique*, car les coefficients diagonaux s'interprètent comme des probabilités de quelque chose et *dynamique*<sup>22</sup>, car les coefficients non diagonaux ont un impact sur les taux de transition du processus de Markov caché.

*Remarque 5* (Cas classique). Dans le cas où  $M$  est indépendant de  $\rho$  (ce qui est le cas par exemple dès que  $\mathcal{L}$  est diagonal), on peut construire un modèle de Markov caché où la dynamique de la variable cachée ne dépend pas de  $\rho$ . L'état quantique  $\rho$  est alors simplement une manière commode de stocker les probabilités d'une chaîne de Markov et la mesure n'a pas de rétroaction sur la dynamique qui est purement markovienne. On dira dans ce cas que l'équation quantique initiale est « *classique* » au sens des modèles de Markov cachés.

Résumons le contenu de cette partie sur les modèles de Markov caché. En mécanique quantique, la mesure continue ne révèle pas a priori la valeur d'une variable cachée bien

22. Ce rôle dynamique est nécessaire et l'état quantique ne peut être purement épistémique et reproduire les résultats de la mécanique quantique orthodoxe, c'est le théorème de Pusey, Barrett et Rudolph (PBR) [62]

définie à chaque instant. Néanmoins, il est possible en étendant l'espace de probabilités de construire un modèle de Markov caché où la mesure continue révèle effectivement la valeur d'une variable cachée bien définie à chaque instant. Il n'y a évidemment pas de miracle et il faut accepter que la dynamique de la variable cachée dépende explicitement de l'état quantique<sup>23</sup>. Ce parallèle est malgré tout utile pour des raisons pratiques en donnant accès à d'autres méthodes de simulation de l'équation maîtresse stochastique, et «philosophiques» en offrant éventuellement un meilleur support à l'intuition pour qui aime raisonner classiquement<sup>24</sup>.

## 1.3 Lien avec le programme de réduction dynamique

### 1.3.1 Idée et modèle jouet

On a jusqu'à maintenant beaucoup insisté sur le fait que les mesures continues ne fournissent pas une résolution théorique du problème de la mesure mais n'étaient qu'un déplacement de la coupure de Heisenberg. En effet, même si les mesures continues peuvent permettre de se faire une *intuition* sur le fonctionnement de la mesure en mécanique quantique<sup>25</sup>, elles nécessitent pour leur définition même l'utilisation du postulat de la mesure. On peut malgré tout exploiter le formalisme précédemment développé pour construire les théories de «réduction dynamique» (ou aussi «collapse objectif»).

L'idée de ces diverses approches initiées par Ghirardi, Rimini, Weber, Pearle et Diósi [46, 44, 64] est de postuler une modification de l'équation de Schrödinger qui ait un impact minimal sur la dynamique microscopique mais qui permette de casser le principe de superposition à l'échelle macroscopique pour n'obtenir qu'une seule «réalité» à cette échelle. En brisant la linéarité, il devient possible de *démontrer* le postulat de la mesure –de montrer son *émergence*– en n'utilisant qu'un postulat modifié sur la dynamique. Dans ces modèles, la distinction microscopique/macroscopique perd son arbitraire et devient précisément définie par le choix des paramètres, nouvelles constantes fondamentales de la Nature. L'approche peut sembler *ad hoc*, il existe a priori une infinité de manières de modifier l'équation de Schrödinger si on lève la contrainte d'unitarité et cette trop grande liberté doit nous rendre suspicieux. En réalité, l'espace des théories est plus contraint qu'il n'y paraît et en imposant (1) la règle de Born (lien fonction d'onde/probabilités) et (2) l'impossibilité d'utiliser des états intriqués pour envoyer de l'information plus vite que la lumière (*no faster-than-light signalling*)<sup>26</sup>, on peut démontrer [65, 66] que toutes les modifications continues *et markoviennes* de l'équation de Schrödinger admissibles correspondent *formellement* à la mesure continue de quelque chose, c'est à dire à l'équation (1.2.5) pour un certain ensemble d'opérateurs  $N$ . C'est ce qui fait le lien formel, souvent peu exploité d'ailleurs, entre modèles de mesure continue et modèles de collapse objectif.

23. Sans quoi la théorie serait trivialement en contradiction avec l'inégalité de Bell.

24. Je dois confesser appartenir à cette catégorie d'êtres cognitivement limités.

25. Ce que [63] appelle comprendre l'émergence des faits.

26. En information quantique, on appelle en général «no faster than light signalling» le fait que l'intrication ne puisse être utilisée pour transmettre de l'information instantanément en mécanique quantique *non relativiste*. Voir 3.3.2.b pour plus de détails.

L'exemple le plus simple pour un système de particules *discernables* est le modèle jouet QMUPL (*Quantum Mechanics With Universal Position Localization*) [45] qui correspond à la mesure continue de la position (donné ici en 1d) :

$$d\rho_t = -i[H, \rho_t] dt + \gamma \mathcal{D}[\hat{X}](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[\hat{X}](\rho_t) dW_t \quad (1.3.1)$$

où le Hamiltonien est le Hamiltonien de la mécanique quantique standard et  $\gamma$  est ici un petit paramètre qui caractérise la force de la localisation spontanée. Cette équation (1.3.1) a été étudiée en détail par Bassi et Dürr [67, 68]. Nous allons nous contenter d'en expliquer le comportement avec des arguments intuitifs. En pratique, on souhaite que  $\gamma$  soit suffisamment petit pour que les termes responsables du collapse en position n'influencent pas la dynamique microscopique d'une particule unique. On souhaite par exemple qu'un tel terme reste petit devant le terme d'interaction coulombienne pour un électron dans un atome d'hydrogène ce qui donne approximativement :

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0 a_0} \gg \gamma a_0^2 \Rightarrow \gamma \ll \frac{e^2}{\varepsilon_0 a_0^3},$$

où  $a_0$  est le rayon de Bohr. Pour un tel  $\gamma$ , on s'attend à ce que toutes les prédictions de la théorie pour des systèmes microscopiques, typiquement les niveaux d'énergie atomiques, soient conformes à l'expérience et aux calculs effectués avec la mécanique quantique orthodoxe. Une particule unique est donc loin d'être localisée en position dans ce modèle, ce qui est d'ailleurs souhaitable car cela entrerait en contradiction avec la mécanique quantique.

Pour comprendre la réduction des superpositions macroscopiques, il faut s'intéresser à un système de  $n$  particules régies par l'équation (1.3.1) et observer que le  $\gamma$  effectif auquel est soumis le centre de masse est renormalisé d'un facteur  $n^2$ . Pour simplifier encore l'analyse, considérons désormais qu'il n'existe que deux positions accessibles,  $|+\ell\rangle$  et  $|-\ell\rangle$  correspondant par exemple aux deux positions mécaniquement accessibles à l'aiguille d'un appareil de mesure. L'espace de Hilbert du système de  $n$  particules est donc  $\mathcal{H}_s = \bigotimes_{k=1}^n \mathbb{C}^2$ . L'opérateur position  $\hat{X}$  devient sur cet espace de Hilbert réduit :

$$\hat{X} = \ell \sum_{k=1}^n \sigma_z^{(k)},$$

où  $\sigma_z^{(k)}$  est l'opérateur  $\sigma_z$  agissant sur la  $k$ -ième particule et l'équation (1.3.1) se réécrit :

$$d\rho_t = \gamma \ell^2 \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_z^{(k)} \rho_t \sigma_z^{(l)} - \frac{1}{2} \left( \rho_t \sigma_z^{(l)} \sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(l)} \sigma_z^{(k)} \rho_t \right) \right] dt + \sqrt{\gamma} \ell \sum_{k=1}^n \mathcal{H}[\sigma_z^{(k)}](\rho_t) dW_t$$

où on a omis l'éventuel Hamiltonien d'interaction entre les positions  $\pm\ell$ . Considérons désormais une superposition macroscopique de ces  $n$  particules, c'est à dire un état  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  tel que :

$$|\psi\rangle = \frac{|+\ell\rangle \otimes |+\ell\rangle \otimes \dots \otimes |+\ell\rangle + |-\ell\rangle \otimes |-\ell\rangle \otimes \dots \otimes |-\ell\rangle}{\sqrt{2}}$$

La dynamique laisse stable l'espace de Hilbert engendré par  $|++\dots+\rangle$  et  $|--\dots-\rangle$ . Par conséquent, si l'on regarde une des particules de la superposition en ignorant les

autres, c'est à dire en regardant l'état  $\rho^{(1)} = \text{tr}_{(n-1)}(\rho)$  où on a fait la trace sur les  $n - 1$  particules restantes, on a à tout temps :

$$d\rho_t^{(1)} = \gamma n^2 \ell^2 \mathcal{D}[\sigma_z^{(1)}](\rho^{(1)}) dt + \sqrt{\gamma} n \ell \mathcal{H}[\sigma_z^{(1)}](\rho^{(1)}) dW_t.$$

Le paramètre de collapse est renormalisé du nombre de particules au carré. Ainsi, le passage du microscopique au macroscopique fournit une renormalisation de la vitesse de collapse effective d'un facteur  $n^2 \sim 10^{40}$  qui rend possible, du moins en principe, la coexistence entre des superposition microscopiques et une réalité macroscopique bien définie. On comprend donc intuitivement comment un modèle de réduction dynamique peut fonctionner. Évidemment dans ce contexte, l'interprétation est complètement différente de celle de la mesure continue où les équations correspondent seulement à une certaine limite du formalisme orthodoxe. Ici, on imagine que la modification est fondamentale et il n'y a pas d'observateur responsable du collapse.

### 1.3.2 Modèles physiques

Si le modèle QMUPL permet par sa compacité et son écriture simple en terme de mesure de comprendre rapidement le fonctionnement des modèles de collapse objectif, il n'est pas physique pour de nombreuses raisons. Ses limites principales sont une explosion quadratique de la décohérence en fonction de la distance qui est trop brutale pour être conciliable avec l'expérience et une apparente impossibilité à généraliser le modèle au cas de particules *indiscernables*.

On obtient des modèles plus physiques et plus facilement généralisables en remplaçant la position  $\hat{X}$  par la densité de masse régularisée  $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x})$  en chaque point  $\mathbf{x}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La régularisation est nécessaire pour la plupart des modèles afin d'éviter que le terme de collapse n'engendre une décohérence infinie. Dans le cas d'une particule unique<sup>27</sup> de masse  $m$ , on prend par exemple :

$$\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x}) = m \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} g_\sigma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) |\mathbf{y}\rangle\langle\mathbf{y}|,$$

où  $g_\sigma$  est typiquement une gaussienne de largeur  $\sigma$ . Pour écrire l'équation maîtresse stochastique, on utilise ensuite simplement le formalisme introduit pour la mesure continue d'un continuum d'observables en (1.2.9) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] - \frac{1}{8} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x}), [\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{y}), \rho]] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{H}[\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x})](\rho) w(\mathbf{y}), \quad (1.3.2)$$

où les intégrations sont à effectuer sur  $\mathbb{R}^3$ . Les deux modèles les plus couramment utilisés dans la littérature peuvent se mettre sous la forme précédente et ne se distinguent que par le choix du noyau  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Le choix le plus simple, qui consiste à

27. Le cas général avec  $n$  espèces de particules indiscernables de masse  $m_k$  en est la généralisation immédiate et on peut prendre par exemple :

$$\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n m_k \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} g_\sigma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) a_k^\dagger(\mathbf{y}) a_k(\mathbf{y}),$$

où  $a_k^\dagger(\mathbf{x})$  et  $a_k(\mathbf{x})$  sont les créateurs et annihilateurs pour l'espèce  $k$  au point  $\mathbf{x}$ .

prendre  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  donne le modèle *Continuous Spontaneous Localization* ou CSL introduit principalement par Pearle. Une autre possibilité, proposée par Diósi puis Penrose [69, 70, 71], consiste à prendre  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\gamma}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ . Ce second choix est en général motivé par des arguments heuristiques cherchant à mettre la gravitation à l'*origine* du collapse. Au delà de ces considérations assez vagues, on peut noter que ce second choix donne à  $\gamma$  la dimension de  $G$  la constante de gravitation. On peut alors potentiellement éliminer un paramètre du modèle en fixant<sup>28</sup>  $\gamma$  à un multiple entier ou une fraction simple de  $G$ .

Tous les modèles de collapse continus actuellement discutés possèdent une phénoménologie qualitativement similaire à celle de CSL ou DP et on renvoie le lecteur aux revues de Bassi *et al.* [72, 73] pour une zoologie détaillée. Une fois les modèles définis, il faut ensuite inévitablement une *interprétation* pour savoir comment relier le vecteur d'état (dont la dynamique a été modifiée) et le monde réel<sup>29</sup>. En effet, comme l'observateur n'est plus une notion primitive dans une telle théorie, il est impossible d'utiliser la règle de Born pour donner un sens au vecteur d'état : les résultats de mesure sont en effet censés être des propriétés émergentes de l'état ! La solution est de définir ce que l'on appelle en général une ontologie primitive, terme un peu pompeux pour dire «ce à quoi on accorde le statut de réalité» ou simplement «ce qui existe», le *stuff* (voir appendice A pour plus de détails). On voit alors la théorie comme la prescription de la dynamique pour cette ontologie primitive à partir de quoi tout doit potentiellement pouvoir se déduire. La solution la plus populaire (même si on va voir en 3.3 qu'elle pose des problèmes à bien des égards), est de définir la densité de masse  $\langle \varrho \rangle$  à partir du vecteur d'état de la manière suivante :

$$\langle \varrho \rangle(\mathbf{x}) = \text{tr}[\rho \hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{x})]. \quad (1.3.3)$$

Ce champ, fonction de l'espace-temps et à valeur scalaire, définissable a priori pour l'univers tout entier, est alors la seule chose «réelle» dans la théorie à partir de laquelle on postule que toutes les observations et prédictions peuvent se formuler. Le choix entre diverses ontologies cohérentes est à ce stade essentiellement une question de goût, mais on verra en 3.3 qu'on peut obtenir des résultats intéressants en faisant un choix différent de celui de l'équation (1.3.3).

### 1.3.3 Difficultés

Les modèles de collapse offrent une solution possible au problème de la mesure qui a l'avantage d'être définie de manière mathématiquement précise (avec le même formalisme que la théorie de la mesure continue). Cette solution n'est évidemment pas gratuite, et la résolution du problème initial se paie d'un certain nombre de défauts.

Le premier défaut immédiat est celui de l'arbitraire du choix des opérateurs définissant la base de collapse. Sans même aborder les subtilités de la régularisation et

---

28. On peut montrer (voir G) que des considérations sur la gravité semi-classique permettent en fait de fixer exactement le lien entre  $\gamma$  et  $G$  pour peu que l'on impose une contrainte assez naturelle de minimisation de la décohérence.

29. Cette étape est souvent ignorée car «non mathématique», elle est pourtant fondamentale car elle permet de désamorcer de nombreux faux problèmes comme le «tail problem» dont la discussion a empoisonné les débuts de la théorie (voir par exemple Tumulka [74]).

de la fonction à deux points du bruit, on pourrait imaginer une série de modèles localisant la matière dans une autre base de pointeurs que celle de la densité de masse. Dans le cas général, il est évidemment difficile de voir comment une telle prescription donnerait des objets macroscopiques localisés conformément à l'intuition, mais on ne peut pas l'éliminer a priori. On peut aussi être attaché à la structure symplectique de la mécanique quantique et regretter qu'elle soit détruite par le primat accordé à la position <sup>30</sup>.

Un autre défaut aux conséquences empiriques immédiates est la non conservation de l'énergie. La présence du bruit sans termes de friction tend à chauffer très lentement la matière : un gaz isolé décrit par un modèle de collapse est sujet à une infime élévation continue de température. Cette augmentation lente, qui a été observée dès la genèse des théories de collapse [46] n'est en conflit avec aucune observation actuelle, mais on est en droit de la trouver problématique au moins théoriquement. On peut construire des modèles rendant cette augmentation d'énergie convergente [75], mais on doit alors introduire un nouveau paramètre contrôlant l'amortissement nécessaire, ce qui réduit la simplicité et ainsi l'attractivité de l'approche.

Les modèles de collapse ont aussi un problème plus paradoxal : ils redonnent exactement la mécanique quantique orthodoxe, à des difficultés d'interprétation près, lorsque le paramètre de collapse  $\gamma$  tend vers 0. De ce fait, il est assez difficile de contraindre expérimentalement les valeurs de ce paramètre sans faire appel à des considérations philosophiques ou à une étude fine et inévitablement contestable des perceptions <sup>31</sup>. On verra en 3.3 une possible porte de sortie à ce problème utilisant la gravité semi-classique.

Les modèles de collapse se sont aussi montrés récalcitrants à des extensions à la théorie quantique des champs. Ce ne doit pas être une surprise et les difficultés sont naturelles si on a à l'esprit les problèmes rencontrés par la théorie de la mesure continue dans ce même domaine (voir 1.2.4.c). Il existe malgré tout quelques pistes avec un modèle de collapse discret sans interactions dû à Tumulka [77] ainsi que deux modèles plus généraux mais infiniment plus techniques proposés par Bedingham [31] et Pearle [32]. Ces derniers modèles sont néanmoins complexes ce qui rend l'étude de leur cohérence difficile <sup>32</sup>.

Résumons. Les modèles de collapse utilisent les mêmes mathématiques que la théorie de la mesure continue pour résoudre le problème de la mesure. Là où la mesure continue est vue comme une description phénoménologique dérivable de la mécanique quantique orthodoxe, les modèles de collapse prennent le point de vue que la modi-

---

30. Une réponse possible à cette objection est que la symétrie entre la position et son moment conjugué est de toute façon le propre de la mécanique quantique non relativiste. En relativité générale par exemple, la variété et son espace tangent sont deux objets mathématiques de nature fondamentalement différentes et il n'est pas absurde d'être «localisé» dans l'un sans l'être dans l'autre.

31. On peut par exemple imposer que les superpositions quantiques ne survivent pas au passage par le nerf optique ou qu'une certaine configuration des neurones soit suffisamment objective pour qu'il n'y ait pas de superposition d'états de conscience [76]. Même si ces études sont rigoureuses, leur interprétation est fortement conditionnée à des présupposés philosophiques qui sont justement ce que l'on cherche à éviter.

32. Le modèle de Bedingham, bien que particulièrement astucieux, introduit une non-linéarité qui permet de transmettre de l'information plus vite que la lumière. Le dernier modèle de Pearle ne semble pas contenir de problème similaire mais sa formulation assez implicite ne permet pas de garantir que d'autres phénomènes tout aussi bizarres n'émergent pas.



fication à la dynamique usuelle est fondamentale et ne nécessite pas d'observateurs. Ce second point de vue offre une solution précise au problème de la mesure qui se paie des difficultés précédemment énoncées. La question de savoir si le prix à payer est raisonnable, sachant notamment qu'il existe d'autres solutions possibles, est ouverte. La question ne restera cependant pas sans réponse éternellement puisque les valeurs raisonnables du paramètre de collapse [78] seront prochainement falsifiables expérimentalement.

## 1.4 Conclusion sur les mesures continues

Les mesures continues en mécanique quantique n'ajoutent pas d'éléments nouveaux à l'interprétation de la théorie quantique et permettent *a priori* simplement de décrire plus finement les mesures. L'idée est de s'appuyer sur l'interprétation orthodoxe mais d'inclure l'appareil de mesure au système (ou de décaler la coupure de Heisenberg d'un cran). La manière la plus simple d'obtenir des équations continues est de considérer des interactions répétées entre le système et des sondes dans la limite où le couplage est faible et le nombre de sondes envoyées par unité de temps élevé. La dynamique que l'on obtient a alors les bonnes propriétés d'une mesure (comme la règle de Born), la progressivité en plus. Le formalisme permet de traiter la mesure simultanée de plusieurs opérateurs, voire d'un continuum. La question de l'extension du formalisme à la théorie quantique des champs et à des dynamiques non markoviennes est en revanche ouverte. Par ailleurs, il est bien connu que la mesure quantique ne révèle pas une valeur pré-existante de l'observable mesuré. Pour autant, il est possible d'interpréter le formalisme des mesures quantiques continues en terme de variables cachées en exploitant la similarité formelle de la théorie avec les modèles de Markov caché en théorie des probabilités (et en particulier avec l'équation de Kushner-Stratonovitch en théorie du filtrage). Ce point de vue alternatif permet de simplifier certaines preuves et d'offrir un guide puissant à l'intuition. Il est enfin possible d'utiliser la théorie des mesures continues pour construire des modèles de collapse vus comme fondements de la mécanique quantique. L'idée est alors de ne plus voir la théorie comme effective (conformément à ce que sa dérivation initiale suggère) mais comme fondamentale. On peut alors s'en servir pour construire des théories physiques ne souffrant pas du problème de la mesure. Ce possible renversement de perspective rend le domaine d'application du formalisme des mesures continues extrêmement large, de l'optique quantique à la physique fondamentale.

La théorie a pris sa forme définitive entre la fin des années 1980 et le début des années 1990, il n'y a donc rien de nouveau dans ce mémoire sur la structure même des équations qui a été largement étudiée. Ce sont leurs applications (au contrôle par la mesure, à l'optimisation, aux fondements) ainsi que l'étude de leur comportement qui ont été peu considérés et qui constituent le cœur de la nouveauté que l'on va tâcher d'explorer.

# Chapitre 2

## Résultats théoriques

If we are going to stick to this damned quantum-jumping, then I regret I ever had anything to do with quantum theory.

---

Erwin Schrödinger, cité dans [79]

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude quantitative de la dynamique induite par les mesures continues à partir des équations et du formalisme précédemment introduits. Il s'agit, si l'on veut, de résultats de «*physique mathématique*», en ce sens que l'on cherche à comprendre des équations avec un regard désormais plus distant sur leur réalisation physique. Le niveau de rigueur, comme dans le reste de cette thèse, est malgré tout très inférieur à ce que des mathématiciens seraient en droit d'attendre. On explore dans les deux premières sections la manière dont les mesures continues s'approchent (ou non) des mesures projectives lorsque leur taux ou vitesse  $\gamma$  tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux *sauts quantiques* et aux *échardes quantiques* qui constituent les deux phénomènes principaux observés dans cette limite. La dernière section quitte la mesure forte pour s'intéresser justement à ce qui distingue la mesure continue d'une mesure projective : le fait que l'information ne s'extrait que progressivement.

### 2.1 Mesure forte et sauts quantiques

On possède maintenant un formalisme qui permet de décrire plus finement une situation de mesure que l'approche projective issue directement des postulats. Il est naturel de se demander ce qui se passe lorsque l'on augmente la force de la mesure continue pour la rendre quasi projective. Autrement dit, comment atteint-on un régime de mesure forte à partir d'une mesure continue ? La question est d'autant plus intéressante lorsqu'il existe une compétition non triviale entre mesure et évolution. Dans ce cas, on sait en effet qu'en répétant fréquemment des mesures projectives, on finit par bloquer le système dans un des états pointeurs, c'est l'*effet Zénon quantique*. Au premier ordre non trivial, on obtient des sauts entre différents pointeurs à une fréquence inversement proportionnelle à la fréquence des mesures répétées, ce sont les *sauts quantiques*. Plus précisément, considérons un état  $|\psi\rangle$  dont la dynamique est

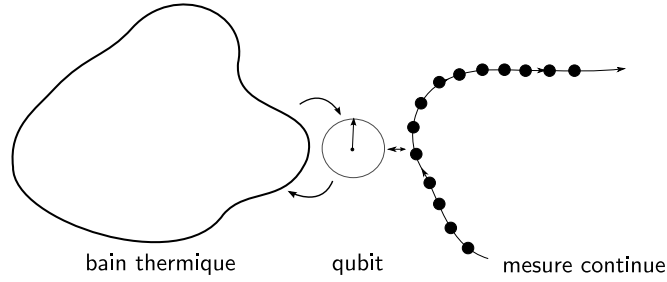


FIGURE 2.1 – On considère la mesure continue de l'énergie d'un qubit couplé à un bain thermique.

donnée par  $H$  et qui est mesuré tous les  $\Delta t = \gamma^{-1}$  dans la base  $\{|i\rangle\}_{1 \leq i \leq |\mathcal{H}_s|}$ . Partons d'un état  $|\psi\rangle_t = |i\rangle$ . Pour  $\Delta t$  assez petit on a :

$$|\psi\rangle_{t+\Delta t} \simeq (1 - i\Delta t H)|i\rangle$$

La probabilité de mesurer  $|j\rangle$  après  $\Delta t$  vaut alors  $|\langle i|H|j\rangle|^2 \Delta t^2 = |H_{ij}|^2 \Delta t^2$  soit une probabilité de saut par unité de temps entre  $i$  et  $j$  :

$$M_{i \leftarrow j} = |H_{ij}|^2 \Delta t = \frac{|H_{ij}|^2}{\gamma}.$$

Peut-on retrouver un phénomène analogue dans le cas des mesures continues ? Si oui, obtient-on quelque chose de plus, la description reste-t-elle quand même plus fine dans cette limite ? À l'exception d'une dérivation assez *ad hoc* dans [61] pour le cas particulier d'un qubit, ce problème a été assez peu étudié<sup>1</sup>. Il est malgré tout indispensable de l'explorer car ce type de régime *quasi Zénon* intéresse de plus en plus les expérimentateurs pour des systèmes aussi divers que les atomes froids sur réseaux optiques [81, 82, 83] et les qubits supraconducteurs [84, 85].

### 2.1.1 Heuristique

Avant de traiter le cas général, intéressons nous à l'exemple non-trivial le plus simple. On considère un qubit couplé à un bain thermique markovien dont on mesure continuellement l'énergie (voir Fig. 2.1). En l'absence de mesure, une bonne modélisation d'un bain thermique peut se faire à l'aide d'une évolution Lindbladienne  $\partial_t \rho_t = \mathcal{L}_{\text{th}}(\rho_t)$  pour un générateur de la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{th}}(\rho) = \lambda_{\uparrow} \mathcal{D}[\sigma_+](\rho) + \lambda_{\downarrow} \mathcal{D}[\sigma_-](\rho), \quad (2.1.1)$$

où  $\lambda_{\uparrow/\downarrow}$  représentent les taux d'excitation et de désexcitation induits par le bain. Une modification du ratio entre ces deux taux change la valeur de la température d'équilibre et la multiplication par un facteur global modifie la force du couplage entre le qubit et le bain. La mesure continue de l'énergie correspond à l'opérateur  $N = \frac{\gamma \sigma_z}{2}$  et l'équation pour l'évolution complète s'écrit donc :

$$d\rho_t = \mathcal{L}_{\text{th}}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[\sigma_z/2](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[\sigma_z/2](\rho_t) dW_t. \quad (2.1.2)$$

1. Très récemment, des questions similaires ont été explorées par Azouit, Sarlette et Rouchon [80]

La limite de la mesure forte correspond au cas  $\gamma \gg \lambda_{\uparrow/\downarrow}$  que nous allons étudier. En développant l'équation (2.1.2), on observe que les coefficients non diagonaux de  $\rho$  sont supprimés exponentiellement rapidement et n'ont de toute façon pas de rétroaction sur les probabilités. Toute la dynamique qui nous intéresse est donc paramétrée par un unique scalaire  $q_t = \langle 0|\rho_t|0\rangle$ , la population de l'état fondamental à l'instant  $t$ . Cette dernière quantité obéit à l'équation *fermée* suivante :

$$dq_t = \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t. \quad (2.1.3)$$

où on a introduit les notations  $\lambda = \lambda_{\uparrow} + \lambda_{\downarrow}$  et  $q_{eq} = \lambda/\lambda_{\downarrow}$ . C'est l'équation la plus simple permettant de mettre en évidence une compétition non triviale<sup>2</sup> entre une dynamique propre déterministe et une mesure continue. Le couplage entre le système et le bain, modélisé par le terme  $\lambda(q_{eq} - q_t) dt$  attire la population vers la probabilité d'équilibre  $q_{eq} \notin \{0, 1\}$  alors que la mesure tend à la tirer vers les points fixes 0 et 1 qui correspondent à une certitude parfaite dans la base propre de l'énergie.

Cette équation a été étudiée en détail par Bauer et Bernard [86], nous allons nous contenter ici d'en proposer une analyse élémentaire lorsque  $\gamma \gg \lambda$ . Une simulation numérique de l'équation (2.1.3) est fournie en Fig. 2.2. On observe que lorsque  $\gamma \gg \lambda$ , la probabilité  $q_t$  saute entre des plateaux à  $q = 0$  et  $q = 1$  (nous ignorons pour l'heure les fluctuations résiduelles). On voit ainsi émerger progressivement des *sauts quantiques* de trajectoires continues. Essayons de comprendre ce fait et de calculer les probabilités de sauts.

Lorsque la mesure est forte, le terme  $\sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t$  domine l'évolution dès que  $q_t$  s'éloigne un peu du bord  $q = 0$  ou  $q = 1$ . Par conséquent, le terme de mesure contraint la probabilité  $q_t$  à rester soit très près de 0 soit très près de 1 en première analyse. Admettons ce premier résultat, c'est à dire que  $q_t$  est approximativement un processus de Markov<sup>3</sup> entre 0 et 1 lorsque  $\gamma \rightarrow +\infty$  à  $\lambda$  fixé. Intéressons nous alors à l'évolution de la moyenne  $\bar{q}_t = \mathbb{E}[q_t|\mathcal{F}_0]$ . Pour obtenir l'équation différentielle ordinaire vérifiée par  $\bar{q}_t$ , il suffit de moyenniser l'équation (2.1.3) ce qui fournit :

$$\partial_t \bar{q}_t = \lambda(q_{eq} - \bar{q}_t). \quad (2.1.4)$$

Maintenant, si  $q_t$  est un processus de Markov, il est entièrement spécifié par les paramètres  $m_{0 \rightarrow 1}$  et  $m_{1 \rightarrow 0}$  taux de sauts entre 0 et 1, et 1 et 0. La valeur moyenne  $\bar{q}$  de  $q$  vérifie donc :

$$\partial_t \bar{q}_t = -m_{0 \rightarrow 1} \bar{q}_t + m_{1 \rightarrow 0} (1 - \bar{q}_t). \quad (2.1.5)$$

Il suffit désormais d'identifier les termes entre (2.1.4) et (2.1.5) pour obtenir :

$$\begin{aligned} m_{0 \rightarrow 1} &= \lambda(1 - q_{eq}) = \lambda_{\uparrow} \\ m_{1 \rightarrow 0} &= \lambda q_{eq} = \lambda_{\downarrow}. \end{aligned}$$

Dans ce cas très simple les taux de sauts étaient donc immédiatement lisibles sur l'équation maîtresse et on obtient à la limite de mesure continue forte ce qu'aurait fourni l'*unravelling* poissonien de l'équation thermique (2.1.1) sans mesure. Par ailleurs,

2. Notons en revanche qu'au sens des modèles de Markov caché définis en 1.2.6 cette équation reste malgré tout *classique*.

3. Notons que cela demande de faire l'hypothèse additionnelle assez forte que l'évolution de  $q$  vu comme processus de saut, est aussi markovienne ce qui n'est pas a priori évident.

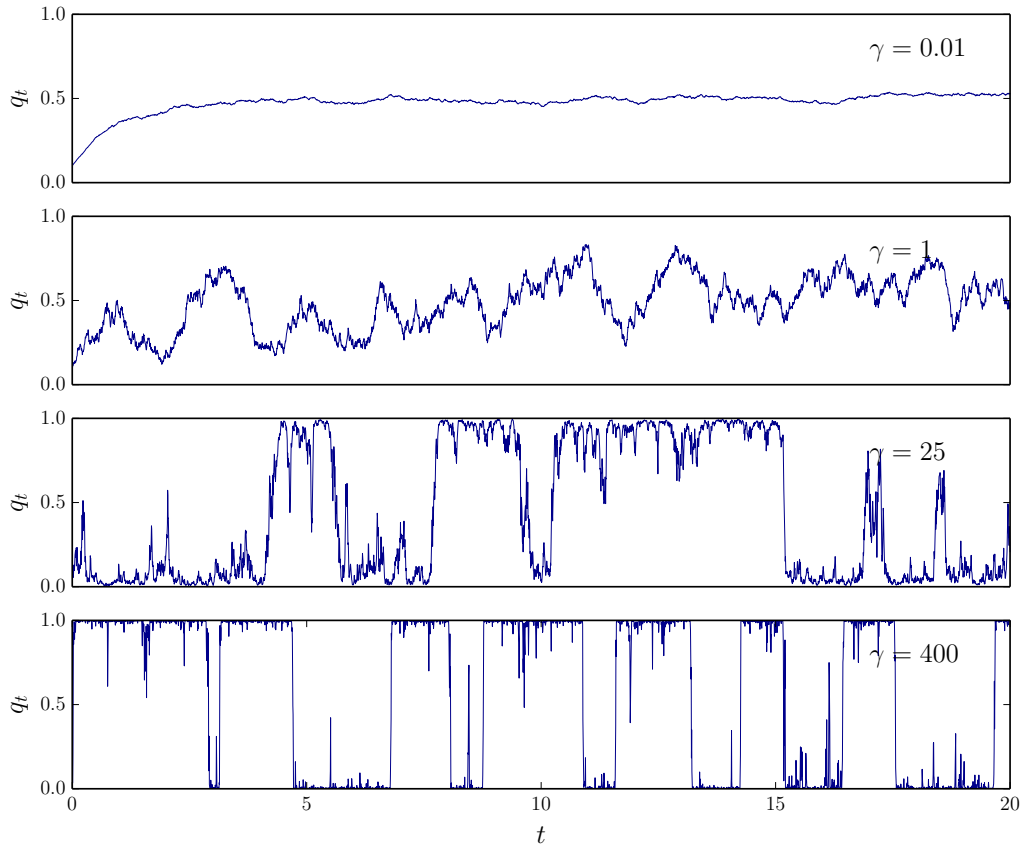


FIGURE 2.2 – Trajectoires de  $q_t$  obtenues par discrétisation naïve de (2.1.3) pour  $\lambda = 1$ ,  $q_{eq} = 0.5$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $q_0 = 0.1$ , et  $\gamma = 0.01, 1, 25$  et  $400$ .

la force la mesure ne possède ici aucune influence sur les taux de sauts qui restent constants lorsque  $\gamma \rightarrow +\infty$ ; on n'a en particulier pas d'effet Zeno quantique. On verra qu'il s'agit d'une caractéristique générale pour des sauts liés à un phénomène dissipatif comme le couplage à un bain (ou toute situation *classique* au sens des modèles de Markov caché 1.2.6).

*Remarque 6* (Markov caché). On a montré que lorsque  $\gamma \rightarrow +\infty$ ,  $q_t$  se comporte comme un processus de saut de matrice de Markov bien définie. En revanche, dans le modèle considéré, on n'a pas *a priori* de processus de saut *prédéfini* vers lequel  $q_t$  pourrait converger et on doit accepter que le comportement discret est en quelque sorte *émergent* et non préexistant. En utilisant l'analogie avec les modèles de Markov caché développée en 1.2.6 on peut malgré tout construire un modèle analogue dans lequel les sauts sont préexistants. Le modèle de Markov caché reproduisant la statistique de

l'équation (2.1.3) s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} dq_t &= \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + 2\sqrt{\gamma}(R_t - q_t) dt \right) \\ \mathbb{P}[R_{t+dt} = 1 | R_t = 0] &= \lambda_{\uparrow} dt \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[R_{t+dt} = 0 | R_t = 1] = \lambda_{\downarrow} dt. \end{aligned}$$

Dans ce modèle, l'équation différentielle stochastique contient le terme  $\gamma q_t(1 - q_t)(R_t - q_t)dt$  qui oblige  $q$  à rester proche de  $R$  quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, il est tout à fait possible d'avoir un modèle où  $q_t$  possède exactement la loi donnée par la mécanique quantique et où les sauts *préexistent* à la mesure. Notons que dans cette approche, il est très facile de retrouver les taux de saut à la limite et ces derniers sont simplement donnés par ceux de  $R_t$ , *i.e.*  $\lambda_{\uparrow/\downarrow}$ .

## 2.1.2 Cas général

Le cas général est traité en détail dans l'appendice C. On se contente dans cette partie de donner le résultat, d'ébaucher une idée de la preuve rigoureuse, de proposer des preuves alternatives non publiées et enfin de discuter le résultat ainsi que ses potentielles extensions.

### 2.1.2.a Résultat

Dans le cas général, on s'intéresse à l'équation (1.2.5), que l'on reproduit ici :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t, \quad (2.1.6)$$

pour  $N$  diagonalisable, *i.e.*  $N = \sum_i \nu_i |i\rangle\langle i|$ , dans la limite où  $\gamma \rightarrow +\infty$  en s'autorisant à faire éventuellement dépendre  $\mathcal{L}$  explicitement de  $\gamma$ . Le résultat qualitatif que l'on a observé sur l'exemple précédent reste valable dans le cas général : lorsque la mesure continue devient forte, la matrice densité se met à sauter entre les états propres de l'opérateur mesuré ; le phénomène des sauts quantique est *générique* et *universel* (voir Fig. 2.3). Cette première partie du résultat est finalement assez simple et se comprend bien avec à l'esprit l'analyse du cas de la mesure pure 1.2.3 où l'on a vu que le système était attiré vers les états pointeurs.

Pour quantifier ce qui se passe à la limite, il est nécessaire d'effectuer un rescaling de la dynamique en l'absence de mesure afin d'éviter que les transitions cohérentes ne soient complètement supprimées par l'effet Zénon. Il n'est pas possible d'appliquer un rescaling uniforme, car comme on l'a vu dans l'exemple précédent, certains sauts ne sont pas soumis à l'effet Zénon. Le scaling qui permet de garder le maximum de contributions non nulles sans introduire de terme singulier demande de séparer le générateur  $\mathcal{L}$  de l'évolution en l'absence de mesure en 4 termes et de les redéfinir séparément :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ll}^{ii} &= A_l^i + o(1) \\ \mathcal{L}_{kl}^{ii} &= \sqrt{\gamma} B_{kl}^i + o(\sqrt{\gamma}) \quad \text{pour } k \neq l \\ \mathcal{L}_{ll}^{ij} &= \sqrt{\gamma} C_l^{ij} + o(\sqrt{\gamma}) \quad \text{pour } i \neq j \\ \mathcal{L}_{kl}^{ij} &= \gamma D_{kl}^{ij} + o(\gamma) \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } k \neq l \text{ et } D_{kl}^{ij} = -d_{kl} \delta_k^i \delta_l^j \end{aligned}$$

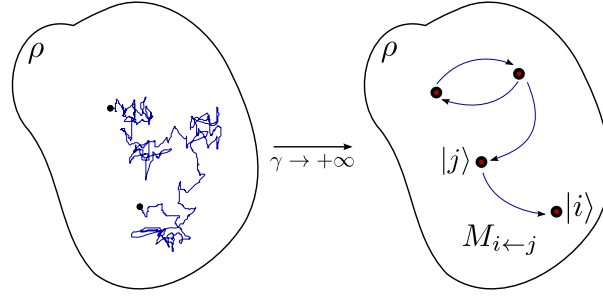


FIGURE 2.3 – Heuristique du passage d’un comportement diffusif à un comportement de saut entre pointeurs quand la mesure devient forte.

Intuitivement, l’effet Zénon n’a pas d’impact sur les termes envoyant directement les probabilités sur les probabilités (typiquement les phénomènes dissipatifs), l’effet Zénon tend à écraser les phases ce qui explique qu’il faille multiplier par  $\sqrt{\gamma}$  les termes où celles-ci se trouvent d’un côté et par  $\gamma$  les termes où elles se trouvent des deux côtés. Voir l’appendice C pour une discussion plus précise. Évidemment, il faut d’ores et déjà préciser que ce rescaling n’est pas *nécessaire* pour que la proposition soit valable : si l’on ne fait pas «grandir»  $B$  ou  $C$  comme  $\sqrt{\gamma}$  par exemple, ils disparaissent simplement du calcul des taux de sauts qui ne dépendent alors que de  $A$ . On a désormais tous les éléments pour écrire la proposition :

**Proposition** (Sauts quantiques). *Quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ ,  $\rho_t$  se comporte comme un processus de Markov à valeur sur les projecteurs sur les états propres  $|i\rangle\langle i|$  de  $N$  dans le sens que toutes ses fonctions à  $n$  points sont celles d’un processus de Markov de taux de transition :*

$$M_{i \leftarrow j} = A_j^i + 2 \Re \sum_{k < l} \frac{B_{kl}^i C_j^{kl}}{\Delta_{kl}} \quad (2.1.7)$$

avec  $\Delta_{kl} = \frac{1}{2} (|\nu_k|^2 + |\nu_l|^2 - 2\nu_k \nu_l^*) + d_{kl}$

On peut instancier cette proposition dans le cas d’un système fermé (en l’absence de mesure)  $\mathcal{L}(\bullet) = -i\sqrt{\gamma}[H, \bullet]$  et de valeurs propres  $\nu_i$  réelles. On obtient dans ce cas la formule simplifiée suivante :

$$M_{i \leftarrow j} = 4 \left| \frac{H_{ij}}{\nu_i - \nu_j} \right|^2.$$

### 2.1.2.b Idée de la preuve

La stratégie de la preuve proposée en C consiste à étudier le noyau de probabilité  $K_t(\rho_0, d\rho)$  qui donne la probabilité de passer de  $\rho_0$  à une nouvelle matrice densité  $\rho$  à  $d\rho$  près. Ce dernier vérifie une équation de Kolmogorov  $\partial_t K_t = K_t \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel du second ordre, parfois appelé opérateur de Dynkin, qui se déduit directement de l’équation (2.1.6). Ce dernier se décompose alors en deux termes  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \gamma \mathcal{D}_2$  et on a  $K_t = e^{t\mathcal{D}_0 + t\gamma \mathcal{D}_2}$ . L’idée est ensuite de noter que les seuls vecteurs

qui vont survivre à  $\gamma$  grand dès que  $t \neq 0$  sont ceux qui sont dans le noyau de  $\mathfrak{D}_2$ , ce dernier étant un opérateur négatif. Il s'agit ensuite d'effectuer un développement perturbatif autour des vecteurs propres restants pour calculer les taux de saut entre eux.

On peut donner ici une preuve plus simple bien que moins rigoureuse en exploitant une méthode similaire à celle de l'exemple précédent, c'est à dire en admettant que l'on obtient bien un processus de Markov sur les pointeurs de la mesure à la limite. On va par conséquent uniquement chercher à lire les taux de sauts sur l'équation maîtresse, c'est à dire l'équation maîtresse stochastique moyennée sur les trajectoires<sup>4</sup>. Cette approche permet d'effectuer un développement perturbatif directement sur un Lindbladien plutôt que sur un noyau de probabilité qui est un peu plus difficile à manier.

On considère l'équation (2.1.6) que l'on moyenne sur les trajectoires, c'est à dire :

$$\partial_t \bar{\rho}_t = \mathcal{L}(\bar{\rho}_t) = \mathcal{L}(\bar{\rho}_t) + \gamma \mathcal{D}[N](\bar{\rho}_t),$$

que l'on peut écrire en regroupant les puissances de  $\gamma$  :

$$\partial_t \bar{\rho}_t = (A + \sqrt{\gamma} (B + C) + \gamma (D + \mathcal{D}[N])) (\bar{\rho}_t). \quad (2.1.8)$$

L'objectif est d'effectuer un développement perturbatif des valeurs propres pour y lire les taux de sauts entre les pointeurs  $|i\rangle\langle i|$ . L'opérateur  $\mathcal{L}$  agit sur l'espace vectoriel  $S \simeq \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$  que l'on peut décomposer en somme directe  $S = S_0 \oplus S_1$  où  $S_0 = \ker(D + \mathcal{D}[N]) = \text{Vect} \{|i\rangle\langle i|, 1 \leq i \leq |\mathcal{H}_s|\}$ . On a alors les faits suivants :

$$\begin{aligned} A : S_0 &\longrightarrow S_0 \\ B + C : S_1 &\longrightarrow S_0 \text{ et } S_0 \longrightarrow S_1 \\ \mathcal{D} = D + \mathcal{D}[N] : S_1 &\longrightarrow S_1 \text{ et } \mathcal{D}|_{S_1} \text{ inversible,} \end{aligned}$$

où « $\longrightarrow$ » signifie «*envoie sur*» (même si tous les opérateurs agissent naturellement sur  $S$ ). On note ensuite  $E$  une valeur propre proche d'une valeur propre nulle de  $\mathcal{D}$  (les espaces propres associés à une valeur propre négative de  $\mathcal{D}$  sont exponentiellement supprimés, le seul développement perturbatif pertinent est donc autour du noyau  $S_0$  de  $\mathcal{D}$ ). On écrit donc

$$E = \gamma \times 0 + \sqrt{\gamma} \times E_1 + 1 \times E_0 + \mathcal{O}(\gamma^{-1/2}).$$

On peut écrire un développement perturbatif pour le vecteur propre correspondant :

$$x = x_0 + \gamma^{-1/2} x_{-1} + \gamma^{-1} x_{-2} + \mathcal{O}(\gamma^{-3/2})$$

où  $x_0 \in S_0$ . En utilisant ces deux expressions dans l'équation aux valeurs propres tirée de (2.1.8) on obtient :

$$\sqrt{\gamma} ((B + C)x_0 + \mathcal{D}x_{-1}) + Ax_0 + (B + C)x_{-1} + \mathcal{D}x_{-2} = \sqrt{\gamma} E_1 x_0 + E_1 x_{-1} + E_0 x_0,$$

---

4. Je remercie Denis qui a eu l'idée de cette «*preuve*» simplifiée.



Soit :

$$\begin{aligned} (B + C)x_0 + \mathcal{D}x_{-1} &= E_1x_0 \\ Ax_0 + (B + C)x_{-1} + \mathcal{D}x_{-2} &= E_1x_{-1} + E_0x_0 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Il suffit maintenant de décomposer  $x_{-1} = x_{-1}^{(0)} + x_{-1}^{(1)}$  avec  $x_{-1}^{(0)} \in S_0$  et  $x_{-1}^{(1)} \in S_1$ . La première ligne du système (2.1.9) fournit alors :

$$\begin{aligned} (B + C)x_0 + \mathcal{D}x_{-1}^{(1)} &= 0 \\ E_1x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne  $E_1 = 0$ . Par ailleurs, souvenons nous que  $\mathcal{D}$  est inversible sur  $S_1$ , on a donc  $x_{-1}^{(1)} = -\mathcal{D}_{|S_1}^{-1}(B + C)x_0$ . Le second ligne du système (2.1.9) permet quant à elle d'obtenir :

$$\begin{aligned} Ax_0 + (B + C)x_{-1}^{(1)} &= E_0x_0 \\ (B + C)x_{-1}^{(0)} + \mathcal{D}x_{-2} &= 0 \end{aligned}$$

On peut par conséquent écrire l'équation fermée suivante pour  $x_0$  :

$$\left[ A - (B + C)\mathcal{D}_{|S_1}^{-1}(B + C) \right] x_0 = E_0x_0$$

qui se simplifie en se souvenant des espaces de départ et d'arrivée de  $B$  et  $C$  en :

$$\underbrace{\left[ A - B\mathcal{D}_{|S_1}^{-1}C \right]}_M x_0 = E_0x_0.$$

Autrement dit, si l'on admet qu'à la limite  $\rho_t$  se comporte comme un processus de saut sur les pointeurs, alors la matrice  $\text{diag}(\bar{\rho}_t)$  qui contient les probabilités d'être en chaque site (ou pointeur) au temps  $t$  vérifie au premier ordre non trivial :  $\partial_t \text{diag}(\bar{\rho}_t) = M \text{diag}(\bar{\rho}_t)$  où  $\text{diag}(\bar{\rho}_t)$  est ici identifié à un vecteur colonne. Par conséquent,  $M$  contient directement les probabilités de passer d'un site à l'autre. Évidemment ce petit calcul ne fixe pas le choix de la combinaison linéaire de projecteurs  $|i\rangle\langle i|$  faisant office de site pour le processus de Markov limite et c'est l'analyse du cas de « mesure pure » qui valide ce choix des  $|i\rangle\langle i|$  (vecteurs propres de  $N$ ) pour les sites. Reste désormais à donner une forme plus parlante à  $M_{i \leftarrow j}$  en explicitant  $\mathcal{D}_{|S_1}^{-1}$ . L'inversion est simple car  $\mathcal{D}$  est un superopérateur diagonal sur  $S_1$  et on a pour  $i \neq j$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}|i\rangle\langle j| &= \left( -d_{ij} + \nu_i\nu_j^* - \frac{1}{2} [|\nu_i|^2 + |\nu_j|^2] \right) |i\rangle\langle j| \\ &= -\Delta_{ij}|i\rangle\langle j|, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement bien l'équation (2.1.7) :

$$M_{i \leftarrow j} = A_j^i + 2 \Re \sum_{k < l} \frac{B_{kl}^i C_j^{kl}}{\Delta_{kl}}.$$

On a comme on l'attendait deux contributions aux sauts, une première venant d'un terme dissipatif  $A$  couplant directement les pointeurs entre eux, et une, cohérente, passant par l'intermédiaire des coefficients non diagonaux et qui est supprimée avec un facteur  $\gamma^{-1}$  en l'absence de rescaling.

### 2.1.2.c Lien avec le formalisme de Markov caché

Comme pour l'exemple précédent, on peut comprendre ce résultat dans le formalisme des processus de Markov caché. Dans ce formalisme le processus de sauts « existe » déjà, même pour une mesure à  $\gamma \ll 1$  voire  $\gamma = 0$ . Quand  $\gamma$  devient grand *deux* choses importantes se produisent :

1. La partie diagonale de  $\rho$  se rapproche de la variable cachée  $R$ .
2. Les taux de transition de la variable cachée convergent et se moyennent de sorte que  $R$  devient de manière effective un processus de saut de matrice de Markov fixée.

Cette deuxième étape, qui n'était pas présente dans l'exemple, est nécessaire dans la mesure où l'équation (2.1.6) n'est en général pas *classique*, et la matrice de Markov de  $R$  dépend a priori de  $\rho$  à  $\gamma$  fini. Le miracle de la limite  $\gamma \gg 1$  est justement que cette dépendance a priori non triviale disparaît. Il est donc une nouvelle fois possible de voir cette limite où  $\rho$  se comporte comme un processus de sauts comme une réelle convergence vers un processus de saut préexistant, la seule différence étant que dans ce cas, la statistique du processus de saut sous-jacent dépend aussi explicitement de  $\gamma$ .

Pour être un peu plus précis, rappelons la forme du modèle de Markov caché correspondant à l'équation (2.1.6) et donné en (1.2.15) qui s'écrit :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t)dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + \sqrt{\gamma} \text{tr} \left[ (N + N^\dagger)(R_t - \rho_t) \right] dt \right)$$

$$\mathbb{P} [R_t = |i\rangle\langle i| \mid R_t = |j\rangle\langle j|] = M(\rho_t)_{i \leftarrow j}.$$

avec :

$$M(\rho)_{i \leftarrow j} = \frac{\left[ \sum_{k \neq l} (\mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)} \right]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}} + \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)},$$

Le fait que  $\rho$  se rapproche de  $R$  pour  $\gamma$  grand est immédiat et vient du terme supplémentaire  $\gamma \mathcal{H}[N](\rho_t) \text{tr} \left[ (N + N^\dagger)(R_t - \rho_t) \right]$  qui, en l'absence d'autre dynamique, fait converger  $\rho$  vers  $R$  exponentiellement rapidement sur une échelle de temps  $\gamma^{-1}$ . Si l'on admet que  $R$  est un processus de saut bien défini et non singulier à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ , alors  $R$  est essentiellement constant sur des durées d'ordre  $\gamma^{-1}$  et  $\rho_t$  converge rapidement vers  $R_t$ .

Le deuxième point, c'est à dire le fait que  $M(\rho)$  se comporte bien à grand  $\gamma$  n'est pas immédiatement évident et le calcul est rendu compliqué par la partie positive dans le cas non classique. Intuitivement, on a envie de remplacer  $\rho^{(k,l)}$  par l'état invariant à la limite grand  $\gamma$  en ignorant la partie positive, mais cette substitution est difficile à justifier. Encore une fois, la solution la plus simple est encore d'accepter que  $R$  est bien un processus de Markov à la limite et de calculer les taux de saut avec la méthode précédente. Le formalisme de Markov caché fournit donc indubitablement un meilleur support à l'intuition mais ne semble pas permettre une preuve plus simple hors du cas classique.

### 2.1.2.d Extensions

La proposition précédente pourrait être étendue de plusieurs manières. On peut tout d'abord se demander ce qui se passerait dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infini pour la mesure d'un opérateur à spectre continu. Le modèle QMUPL (voir 1.3.1) qui correspond à la mesure continue de la position entre typiquement dans cette catégorie. Il a été étudié en détail [67, 68] (dans le contexte des fondements) à la limite temps long qui donne une idée du comportement  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Les sauts entre des états pointeurs sont remplacés par la diffusion d'un paquet d'onde gaussien de variance fixée. On peut comprendre intuitivement ce comportement à partir de la proposition pour le cas discret en voyant cette diffusion comme la limite continue d'un processus de saut sur un nombre infini de pointeurs. La variance finie du processus limite est en revanche impossible à expliquer avec notre version discrète car elle provient manifestement du fait que la limite de spectre continu pour l'opérateur mesuré est prise avant la limite grand  $\gamma$ . En prenant les limites dans l'autre sens, on ne s'autorise qu'une fonction d'onde parfaitement localisée.

Une autre situation intéressante à étudier est celle de la mesure continue d'un opérateur dont le spectre est dégénéré avec la possibilité d'une dynamique cohérente à l'intérieur de chaque sous espace propre de la mesure. Dans ce cas on s'attend à conserver des sauts entre les sous espaces, mais on perd très probablement le caractère markovien des transitions à cause de la dynamique cohérente interne. Probablement plus difficile à étudier, cette situation aurait l'avantage de fournir des processus de sauts a priori très non triviaux avec des effets de mémoire variés.

On peut enfin proposer une généralisation immédiate au cas de la mesure simultanée de plusieurs opérateurs  $N^\mu$  codiagonalisables,  $N^\mu = \sum_i \nu_i^\mu |i\rangle\langle i|$ . On peut suivre la preuve simplifiée précédente, la seule modification apparaissant à l'expression de  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  (le prime dénotant le cas à plusieurs observables) où il devient nécessaire de sommer sur  $\mu$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'|i\rangle\langle j| &= \left( -d_{ij} + \sum_\mu \left[ \nu_i^\mu \nu_j^{\mu*} - \frac{1}{2} [|\nu_i^\mu|^2 + |\nu_j^\mu|^2] \right] \right) |i\rangle\langle j| \\ &= -\Delta'_{ij} |i\rangle\langle j|. \end{aligned}$$

La formule pour  $M_{i \leftarrow j}$  s'obtient ensuite simplement en substituant  $\Delta_{ij}$  dans l'équation (2.1.7) par la nouvelle matrice  $\Delta'_{ij}$  ainsi calculée.

### 2.1.3 Discussion

On a montré que lorsqu'une mesure continue devient «forte», la dynamique *qualitative* de l'état du système s'approche effectivement de ce que l'on attendrait d'une itération rapide de mesures projectives : on observe des sauts entre les états propres de l'observable mesurée. Néanmoins, et comme on pouvait s'y attendre, prendre la limite à partir de la mesure continue donne accès à une dynamique plus fine dépendant de plus de paramètres. En effet, l'expression des taux de saut  $M_{i \leftarrow j}$  dépend explicitement des valeurs propres de l'observable mesurée, valeurs propres qui ne sont que de purs labels sans connotation dynamique dans le cas de mesures projectives itérées. On peut

donc expérimentalement faire une différence entre la mesure continue de deux observables qui partagent par ailleurs les mêmes espaces propres. Plus surprenant, et pour peu que l'on connaisse la dynamique en l'absence de mesure, on peut aussi faire la différence entre une mesure projective itérée et la mesure continue de *n'importe quelle* observable.

La mesure projective ne distingue pas les sites les uns par rapport aux autres et correspond au cas  $\Delta_{ij} = \text{constante}$  pour  $i \neq j$  et, de ce fait, ne peut pas être reproduite par la mesure continue d'une unique observable qui conserve nécessairement une structure unidimensionnelle. En effet, en se restreignant au cas d'une dynamique pure et de valeurs propres  $\nu_i$  réelles pour simplifier, les taux de sauts entre  $i$  et  $j$  dépendent de la différence des valeurs propres  $|\nu_i - \nu_j|$ . Mais il est évidemment trivial d'observer que toutes ces différences ne peuvent être identiques dès que  $|\mathcal{H}_s| \geq 3$  : mesurer une unique observable munit le graphe  $\mathcal{G}$  des sites  $i$  d'une structure unidimensionnelle (déterminée par l'ordre des valeurs propres) qui biaise nécessairement la convergence et les sauts. Un moyen d'obtenir *exactement* (*i.e.* à la fois qualitativement et quantitativement) le cas projectif à partir de mesures continues est de mesurer simultanément  $|\mathcal{H}_s|$  projecteurs  $|i\rangle\langle i|$ . On a alors une symétrie parfaite entre tous les états propres qui est impossible à obtenir avec une unique observable dont la structure unidimensionnelle ne peut s'accommoder d'un graphe complet.

On peut résumer les progrès de notre exploration jusqu'à maintenant. Lorsqu'un système quantique est mesuré continuellement et fortement, il se met à sauter entre les états pointeurs, comportement intuitif et similaire à ce que l'on obtient dans le cas de mesures projectives répétées. On peut calculer explicitement les taux de saut entre chaque état propre, ces derniers dépendent explicitement des valeurs propres de l'opérateur mesuré ce qui contraste cette fois ci avec le cas de la mesure projective. Cette liberté additionnelle est néanmoins doublée d'une contrainte dans le cas de la mesure d'une unique observable : les taux de saut dépendent de la différence des valeurs propres et possèdent de ce fait une structure unidimensionnelle qui ne peut reproduire le cas projectif qu'en dimension 2.

## 2.2 Échardes quantiques

On a jusqu'à maintenant accepté que s'il existait des différences *quantitatives* entre la limite forte de mesures continues et des mesures projectives itérées, le comportement *qualitatif* de sauts entre pointeurs était néanmoins identique. Un regard rapide sur les simulations numériques montre pourtant que des fluctuations autour du processus de saut semblent persister à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  (voir Fig. 2.2 et 2.4). Ces dernières semblent en effet s'affiner à mesure que la force de la mesure augmente sans pour autant que leur amplitude typique ne décroisse. C'est ce phénomène –qu'une analogie rapide avec les mesures projectives itérées ne permet pas naturellement d'anticiper– que nous avons appelé les *échardes quantiques* [4, 1] et que nous allons étudier dans cette section.

Là où l'étude précédente était extrêmement générale, les résultats sur les échardes qui suivent se limitent à deux cas simples avec  $|\mathcal{H}_s| = 2$  où il est possible de paramétrer la dynamique par un unique scalaire. Pour autant, à la fois l'intuition et les simulations numériques suggèrent que le phénomène possède la même universalité que les sauts,

même si nos méthodes analytiques échouent pour le moment dans tout contexte plus général.

### 2.2.1 Remarques préliminaires sur la convergence

Avant d'étudier les échardes plus en détail, notons que leur existence n'entre pas en contradiction avec les résultats de la section précédente. On peut en effet dire quelques mots sur la convergence vers le processus de saut. Nous avons montré la convergence en loi de  $\rho$  vers un processus de Markov dans le sens que toutes les fonctions à  $N$  points de la forme  $\mathbb{E}[f(\rho_{t_1}, \dots, \rho_{t_N})]$  convergent vers leur expression calculée avec le processus de Markov limite. En l'absence de processus de Markov sous-jacent vers lequel converger, il est difficile a priori de demander plus. Ici encore, passer à l'expression en terme de processus de Markov cachés permet de rendre les choses plus précises. Dans ce contexte, on a en effet un processus vers lequel on converge et on peut se poser la question de l'existence ou non de convergences plus fortes que la convergence en loi.

Considérons pour simplifier le cas classique où le processus de saut sous-jacent  $R$  possède une statistique indépendante de  $\gamma$  (voir par exemple le cas traité en 2.1.1). Dans ce cas, on peut assez facilement montrer la convergence suivante :

$$\text{soit } t > 0, \|R_t - \rho_t\| \xrightarrow[\gamma \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ en probabilité,}$$

où  $\|\bullet\|$  dénote une norme sur  $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$  de dimension finie. Cette convergence implique<sup>5</sup> par exemple :

$$\|R - \rho\|_{L_p} = \sqrt[p]{\int_{t_0}^{t_1} dt \|R_t - \rho_t\|^p} \xrightarrow[\gamma \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ en probabilité.}$$

Autrement dit, on peut tout à fait obtenir une convergence plus forte que la convergence en loi en incluant des variables cachés (ou, si on n'aime pas ce terme, en augmentant la taille de l'espace probabilisé). L'existence des échardes vient en fait de l'absence d'une convergence encore plus forte au niveau du processus. En effet, on va montrer que pour  $t_0$  et  $t_1$  tels que  $\forall t \in [t_0, t_1], R_t = \text{constante}$  on a le résultat contre-intuitif suivant :

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|R_t - \rho_t\| \xrightarrow[\gamma \rightarrow +\infty]{} \text{constante} \neq 0.$$

Même sur un intervalle où le processus de saut sous-jacent est constant, c'est à dire intuitivement où il n'y a pas de sauts,  $\rho$  fait un certain nombre (au moins d'ordre 1) d'excursions d'ordre 1 même à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

### 2.2.2 Existence des échardes

Comme annoncé précédemment, les résultats sur les échardes se limitent à deux cas particuliers où la dynamique est paramétrable par un unique scalaire. Nous allons ici nous intéresser à l'exemple le plus simple d'un qubit couplé à un bain thermique et fournir une fois encore des preuves intuitives. Les dérivations pour les deux exemples ainsi qu'une discussion physique plus détaillée sont laissées en appendice D.

5. On se rappelle que  $t \rightarrow \|\rho_t - R_t\|$  est borné

L'équation que l'on considère dans cette partie (et la suivante) est l'équation maîtresse stochastique (2.1.3) pour la probabilité de l'état fondamental d'un qubit couplé à un bain thermique et dont on mesure continuellement l'énergie :

$$dq_t = \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t, \quad (2.2.1)$$

équation dont on a déjà ébauché l'étude en 2.1.1. Commençons par un argument heuristique pour l'existence des échardes. Près d'un bord, typiquement  $q = 0$ , on peut linéariser l'équation précédente (2.2.1) pour obtenir :

$$dq_t = \lambda q_{eq} dt + \sqrt{\gamma} q_t dW_t. \quad (2.2.2)$$

Dans cette limite,  $P(q, t) = \mathbb{P}[q_t = q | q_0]$  vérifie l'équation de Fokker-Planck<sup>6</sup> associée à (2.2.2) :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\lambda q_{eq} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (q^2 P). \quad (2.2.3)$$

On atteint la mesure stationnaire, c'est à dire  $P(q, t) = P^\infty(q)$  en un temps de l'ordre de  $\gamma^{-1}$ , c'est à dire quasi instantanément à la limite. Cette dernière vérifie alors simplement l'équation (2.2.3) sans la dérivée en temps qui donne une fois intégrée sur  $q$  :

$$\lambda q_{eq} P^\infty(q) = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial q} (q^2 P^\infty),$$

équation qui s'intègre avec une simple séparation des variables pour donner  $P^\infty$  qu'on intègre une nouvelle fois pour obtenir la fonction de répartition  $F(q) = \int_0^q dQ P^\infty(Q)$  :

$$F(q) = e^{-\frac{2\lambda q_{eq}}{\gamma q}}. \quad (2.2.4)$$

La probabilité d'avoir une grande valeur de  $q$  décroît donc bien avec  $\gamma$ . Néanmoins, cette décroissance est compensée par le nombre de «tentatives» pour effectuer une excursion. En effet, l'échelle de temps typique sur laquelle évolue  $q_t$  est  $\gamma^{-1}$ ,  $q_t$  et  $q_{t+\gamma^{-1}}$  sont par conséquent presque décorrélés. La probabilité que le maximum  $\max_{t_0, t_1}(q_t)$  de  $q$  sur

---

6. Pour une équation différentielle stochastique de la forme  $dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dW_t$ , on trouve l'équation de Fokker-Planck vérifiée par  $P(x, t) = \mathbb{P}[X_t = x | X_0]$  en calculant  $d\mathbb{E}[\phi(X_t)]$  pour une fonction  $\phi$  test de deux manières différentes. La première méthode consiste à appliquer le lemme d'Itô en faisant rentrer le «d» dans l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d\phi(X_t)] &= \int_{\mathbb{R}} dx P(x, t) \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} g^2(x, t) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \phi(x) \left( -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) P(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x, t) P(x, t)) \right). \end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à dériver directement la moyenne écrite sous sa forme intégrale :

$$d\mathbb{E}[\phi(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \phi(x) dt.$$

En écrivant l'égalité des deux expressions précédentes on obtient finalement l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) P(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x, t) P(x, t))$$

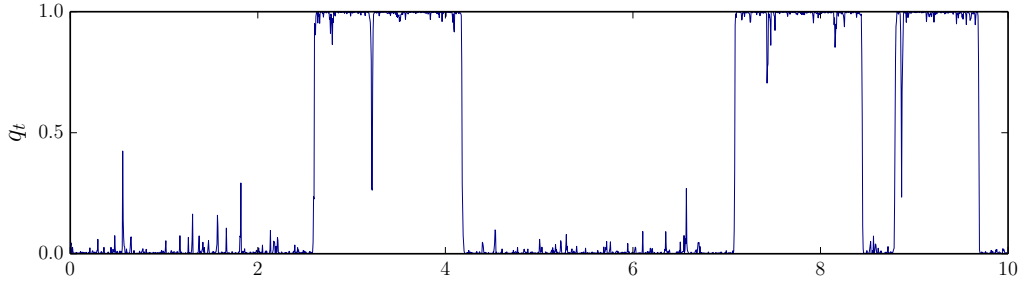


FIGURE 2.4 – Une réalisation de (2.2.1) pour  $\lambda = 1$ ,  $q_{eq} = 0.5$ ,  $\gamma = 400$ ,  $dt = 5.10^{-4}$ . On note qu'aux sauts se superposent des pics, extrêmement fins mais dont la hauteur est d'ordre 1 : ce sont les *échardes*.

$[t_0, t_1]$  soit inférieur à  $m$  est donc calculable en supposant que l'on tire  $\gamma(t_1 - t_0)$  fois la variable  $q$  avec la fonction de répartition (2.2.4) ce qui fournit :

$$\mathbb{P}[\max_{t_0, t_1}(q_t) < m] \simeq F(m)^{\gamma(t_1 - t_0)} = e^{-2\lambda q_{eq}(t_1 - t_0)/m},$$

ce qui fournit  $\mathbb{P}[\max_{t_0, t_1}(q_t) \geq m] \simeq 1 - e^{-2\lambda q_{eq}(t_1 - t_0)/m}$ . Cette probabilité est indépendante de  $\gamma$ , on en déduit que  $q$  fait typiquement des excursions d'ordre 1 même sur un intervalle où il n'y a pas de sauts (car on se souvient qu'on a obtenu le résultat avec l'équation linéarisée). Ces excursions qui persistent à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  sont les échardes quantiques, ou « *spikes* » (voir Fig. 2.4).

*Remarque 7* (Markov caché). La réécriture en terme de processus de Markov caché permet d'éviter d'avoir à recourir à l'équation linéarisée dans le raisonnement précédent. On se souvient en effet (voir remarque 6) que l'équation (2.2.1) est équivalente au modèle suivant :

$$\begin{aligned} dq_t &= \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + 2\sqrt{\gamma}(R_t - q_t) dt \right) \\ \mathbb{P}[R_{t+dt} = 1 | R_t = 0] &= \lambda_{\uparrow} dt \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[R_{t+dt} = 0 | R_t = 1] = \lambda_{\downarrow} dt. \end{aligned}$$

L'avantage de cette réécriture est qu'elle permet de séparer précisément le phénomène des échardes du phénomène des sauts. Le processus  $R$  saute sur une échelle de temps de l'ordre de  $\lambda^{-1}$  alors que la dynamique typique de  $q$  (à  $R$  fixé) a lieu sur une échelle de temps bien plus courte de l'ordre de  $\gamma^{-1}$ . Pour étudier les échardes, on peut se placer sur une échelle de temps où il n'y a pas de sauts, c'est à dire où  $R$  est fixé (par exemple  $R = 0$ ) et n'étudier que la dynamique « rapide » à l'échelle  $\gamma^{-1}$ . Ainsi, sur un intervalle de temps où  $q$  est conditionné à rester proche de 0 en probabilité (la même analyse se fait pour  $q$  proche de 1),  $q$  obéit à l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dq_t = \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} - 2\sqrt{\gamma} q_t dt \right). \quad (2.2.5)$$

L'avantage de cette dernière équation par rapport à (2.2.1) est qu'elle possède une mesure stationnaire  $P^{\infty}$  qui n'est pas perturbée par le processus de saut et dont la masse est concentrée en 0 (au lieu d'une distribution bimodale avec des pics en 0 et en 1

pour la mesure stationnaire de (2.2.1)). Cette dernière est dans le noyau de l'opérateur de Fokker-Planck associé à (2.2.5) et vérifie donc :

$$0 = -\frac{\partial}{\partial q} \left( (\lambda - q_{eq}) - 2\gamma q^2(1-q) \right) P^\infty + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left( q^2(1-q)^2 P^\infty \right)$$

qu'on peut s'amuser à résoudre pour tout  $\gamma$  et dont la solution se simplifie quand  $\gamma \gg \lambda$  pour donner :

$$P^\infty(q) \simeq \left( \frac{1-q}{q} \right)^2 \frac{e^{-\frac{2\lambda q_{eq}}{\gamma q}}}{\gamma/(2\lambda q_{eq})}.$$

Contrairement au cas linéaire on peut ici calculer la moyenne de  $q$  et on obtient  $\mathbb{E}[q_\infty] \propto \gamma^{-1} \rightarrow 0$ , autrement dit  $q$  reste proche de 0 en moyenne qui est ici la valeur de la variable cachée, mais le même argument que précédemment avec le calcul du maximum montre que la probabilité d'une excursion d'ordre 1 est finie et indépendante de  $\gamma$  à la limite. Bref il y a bien des échardes et celles-ci sont nécessairement infiniment fines.

Nous avons donc montré, ou au moins suggéré, qu'il existe nécessairement des échardes, fluctuations infiniment fines qui «décorent» les plateaux entre chaque saut de  $q$ . Les arguments utilisés impliquent par ailleurs que la statistique de ces échardes converge à la limite  $\gamma + \infty$ . Ces échardes sont évidemment absentes dans le cas de mesures projectives itérées rapidement où aucune excursion hors des plateaux n'est tolérée, le comportement qualitatif est en fait lui aussi différent dans le cas de mesures continues.

On peut en fait faire mieux que montrer que les échardes existent et calculer exactement leur distribution. Le calcul, bien que relativement simple, est laissé en appendice D (et plus précisément en D.7) et on se contente d'en donner ici le résultat. À ce stade, on ne peut plus se contenter de dire que les échardes sont des «excursions infiniment fines» et il faut se donner une définition formelle provisoire (qui sera complétée en 2.2.3). On s'intéresse une fois encore au cas  $q$  proche de 0 (le cas  $q$  proche de 1 se traitant de manière analogue) et on se donne  $\varepsilon$  et  $\delta$  tels que :

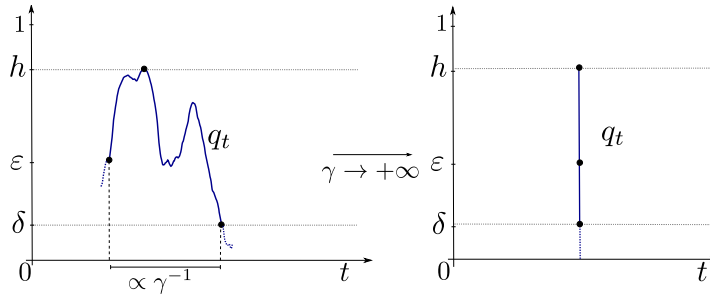
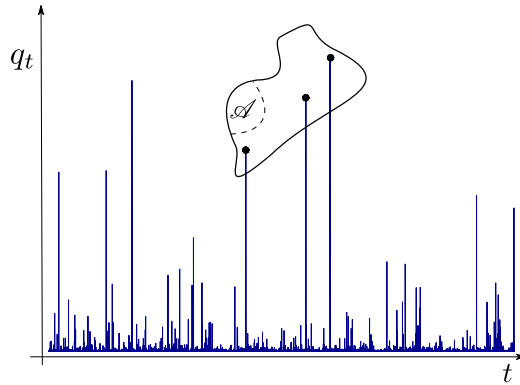
$$0 < \gamma^{-1} \ll \delta \ll \varepsilon \ll 1$$

À  $\gamma$  fixé, on *définit* une écharde de hauteur  $h > \varepsilon$  comme une trajectoire  $q_t$  de  $q_{t_1} = \varepsilon$  à  $q_{t_2} = \delta$  et dont le maximum entre ces deux points vaut  $h$  (voir Fig. 2.5). On identifiera souvent l'écharde, qui est au sens strict une trajectoire, à la valeur de son maximum  $h$  dans la mesure où quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ , la trajectoire est parcourue en un temps infiniment court. La définition précédente n'est valable –à  $\gamma$  fixé– que pour des échardes plus grandes que  $\varepsilon$ . Pour autant, à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  on peut rendre  $\varepsilon$  aussi petit que l'on veut et définir des échardes de tailles arbitrairement petites. Avec cette définition pour les échardes, on a la proposition suivante :

**Proposition** (Distribution des échardes). *Sur un intervalle où  $q_t$  ne saute pas et reste en moyenne près de 0, le nombre d'échardes finissant dans le domaine  $\mathcal{A}$  du plan  $q, t$  (voir Fig. 2.6) est un processus de Poisson d'intensité  $\mu = \int_{\mathcal{A}} d\nu(q, t)$  avec :*

$$d\nu(q, t) = dt dq \frac{\lambda q_{eq}}{q^2} \tag{2.2.6}$$



FIGURE 2.5 – Définition d'une écharde de hauteur  $h$ .FIGURE 2.6 – La statistique du nombre d'échardes (ici 3) possédant leur maximum dans le domaine  $\mathcal{A}$  est donné par la proposition.

La proposition reste évidemment valable dans le cas où  $q$  est près de l'autre bord, auquel cas on a :

$$d\nu(q, t) = dt dq \frac{\lambda(1 - q_{eq})}{(1 - q)^2}.$$

On observe ainsi que les échardes sont invariantes d'échelle et qu'il en existe par conséquent un nombre infini de «petites» à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Notons encore une fois ce que cette proposition a de surprenant si l'on a à l'esprit seulement le fait que les mesures continues fortes doivent se comporter comme des mesures.

*Remarque 8 (Autre exemple).* L'exemple que l'on a étudié, et qui correspond à la mesure continue de l'énergie d'un qubit couplé à un bain thermique, possède le défaut d'être *classique* (au sens des modèles de Markov caché). L'état du système n'étant jamais pur, il est tentant d'associer les échardes à une ignorance purement classique. En fait, on sait traiter un autre exemple dans lequel l'état du système est pur à chaque instant et pour lequel on observe aussi des échardes avec la même statistique. Il s'agit de la mesure continue de l'observable  $\sigma_z$  (au taux  $\gamma$ ) pour un qubit dont le Hamiltonien est  $\sqrt{\gamma}\omega\sigma_y/2$ . Dans ce cas l'état du système est pur à chaque instant et obéit à l'équation maîtresse stochastique :

$$d\rho_t = -i\frac{\omega\sqrt{\gamma}}{2}[\sigma_y, \rho_t] dt + \gamma\mathcal{D}[\sigma_z/2](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma}\mathcal{H}[\sigma_z/2](\rho_t) dW_t$$

On peut montrer que quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ , la variable aléatoire  $q_t = \langle +_z | \rho_t | +_z \rangle$  vérifie une équation similaire à celle que l'on a étudié précédemment à l'intérieur de l'intervalle  $]0, 1[$ . On peut alors prouver (voir D.7.2) que  $q_t$  possède des échardes dont la statistique est identique à celle de la formule (2.2.6) avec la substitution  $\lambda_{q_{eq}} \rightarrow \omega^2$ . Autrement dit, les échardes sont visibles aussi dans une situation que l'on pourrait qualifier de purement quantique même si l'analyse y est plus délicate. On continuera à étudier l'équation (2.2.1) par la suite tout en gardant à l'esprit que le phénomène des échardes est en réalité plus général.

### 2.2.3 Formalisme du temps effectif et opérateurs anormaux

Les résultats de la section 2.1 nous ont montré que l'on avait une convergence en loi de la matrice densité vers un processus de saut à la limite de mesure forte. Néanmoins, on a vu que cette convergence trop grossière ratait un phénomène important, les échardes, ces dernières se manifestant de manière quantitative dans la statistique des maxima locaux des probabilités calculées avec  $\rho$ . Ces échardes, infiniment fines à la limite, sont a priori impossibles à capturer par une limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  effectuée *directement* au niveau du processus stochastique, *i.e.* l'équation (2.2.1) ne possède pas de limite bien définie quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Ou pour reformuler ce problème de manière peut-être un peu plus parlante : le *dessin* d'une trajectoire de  $q_t$  possède intuitivement une limite où on voit les échardes alors que  $q_t$ , vu comme un processus stochastique, n'en possède pas naturellement. Une question dès lors se pose : *existe-t-il un moyen de définir une limite au niveau du processus qui capte le phénomène des échardes*<sup>7</sup> ?

En exploitant le fait que le dessin d'une trajectoire possède une statistique convergente (que précise l'équation (2.2.6)), on pourrait être tenté<sup>8</sup> de définir une convergence au niveau du processus stochastique en utilisant la distance de Hausdorff sur le plan  $(q, t)$  qui correspond bien à l'idée que c'est en tant que sous-ensemble du plan plus qu'en tant que fonction que  $q_t$  converge quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . S'il semble possible de définir l'ensemble limite avec cette méthode [87], démontrer même heuristiquement la convergence paraît hors de portée. La difficulté vient du fait que  $q_t$  est un processus continu à  $\gamma$  fini mais que les échardes sont un processus ponctuel à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ . La situation serait beaucoup plus simple si le processus limite était lui aussi continu, si l'on avait une méthode pour *déplier* les échardes. C'est cette seconde voie que l'on va explorer ici et qui est présentée plus en détail en appendice E. L'idée est de redéfinir le temps de manière dynamique pour qu'il ne s'écoule que lorsqu'il se passe réellement quelque chose et que l'on puisse donner à chaque écharde une durée finie à la limite. Avec ce nouveau temps *effectif*, le processus  $q$  possédera une limite bien définie (et en particulier *continue*) quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

---

7. Cette question est a priori un peu plus mathématique que la moyenne des problèmes abordés dans cette thèse. Néanmoins, y répondre peut éventuellement permettre de faire de menues avancées pratiques, fussent-elles simplement confinées à l'amélioration de la présentation visuelle des résultats expérimentaux.

8. L'idée a été suggérée par Martin Hairer.

### 2.2.3.a Temps effectif

On aimerait que le temps effectif  $\tau$  s'écoule d'une manière proportionnelle aux variations de l'état du système. Dans le discret, pour des mesures faibles itérées tous les  $\Delta t$ , on peut proposer une définition de la forme :

$$\Delta\tau_n = \text{tr} \left[ (\rho_{n+1} - \rho_n)^2 \right], \quad (2.2.7)$$

où le carré permet d'obtenir le bon comportement à la limite<sup>9</sup>. Il y a évidemment d'autres possibilités compatibles avec ce scaling (avec par exemple la possibilité d'insérer un opérateur). Cette prescription très générale de redéfinition du temps est a priori applicable quel que soit le système et quelle que soit la dimension. Pour autant, et comme précédemment, nous n'avons été capables d'obtenir des résultats analytiques que pour l'exemple simple des fluctuations thermiques d'un qubit (2.2.1) :

$$dq_t = \lambda(q_{eq} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t. \quad (2.2.8)$$

Dans ce contexte continu, un équivalent de la définition discrète (2.2.7) est de choisir un temps effectif proportionnel à la variation quadratique de  $q_t$ , *i.e.* plus précisément :

$$\tau(t) = \int_0^t (dq_t)^2 = \gamma \int_0^t q_t^2(1 - q_t)^2 dt$$

On peut alors réécrire l'équation (2.2.8) avec ce nouveau paramètre pour obtenir :

$$dq_\tau = \frac{\lambda(q_{eq} - q_\tau)}{\gamma q_\tau^2(1 - q_\tau)^2} d\tau + dB_\tau, \quad (2.2.9)$$

où  $B_\tau$  est un processus de Wiener (en tant que fonction de  $\tau$ ) que l'on obtient à partir de  $W_t$  en posant :  $dB_\tau = \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t$ . L'avantage de cette réécriture, c'est que le terme en  $d\tau$  dans (2.2.9) devient nul dès que  $q_\tau \neq 0$  ou 1 quand  $\gamma \rightarrow +\infty$  et ne persiste que sous la forme d'une condition aux limites qui empêche  $q_\tau$  de traverser les bords 0 et 1. On peut montrer la proposition suivante (voir E) :

**Proposition** (Limite en temps effectif). *Quand  $\gamma \rightarrow +\infty$  :*

1.  $q_\tau$  est simplement un mouvement Brownien réfléchi en 0 et 1 (voir Fig. 2.7).
2. On peut relier temps effectif  $\tau$  et temps réel  $t$  de manière exacte en utilisant les temps locaux<sup>10</sup>  $L_\tau$  et  $U_\tau$  passés par  $q_\tau$  respectivement en 0 et en 1 :

$$t(\tau) = \frac{L_\tau}{\lambda q_{eq}} + \frac{U_\tau}{\lambda(1 - q_{eq})}$$

En temps effectif, le comportement limite de  $q_\tau$  est ainsi extrêmement simple et parfaitement bien défini. On peut en profiter pour donner une nouvelle définition directe des sauts et des échardes (sans procédure avec des  $\varepsilon$  et  $\delta$ ) :

9. En effet on a  $|\rho_t| \propto \sqrt{dt}$ .

10. Le temps local  $L_t$  d'un processus Brownien  $X_t$  en 0 est défini de manière informelle comme le temps (rescalé) que passe le processus en 0, *i.e.* :

$$L_t = \int_0^t du \delta(X_u),$$

où cette définition un peu impropre avec une masse de Dirac doit être comprise comme la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  pour une suite de Dirac  $\delta_\epsilon$  quelconque.

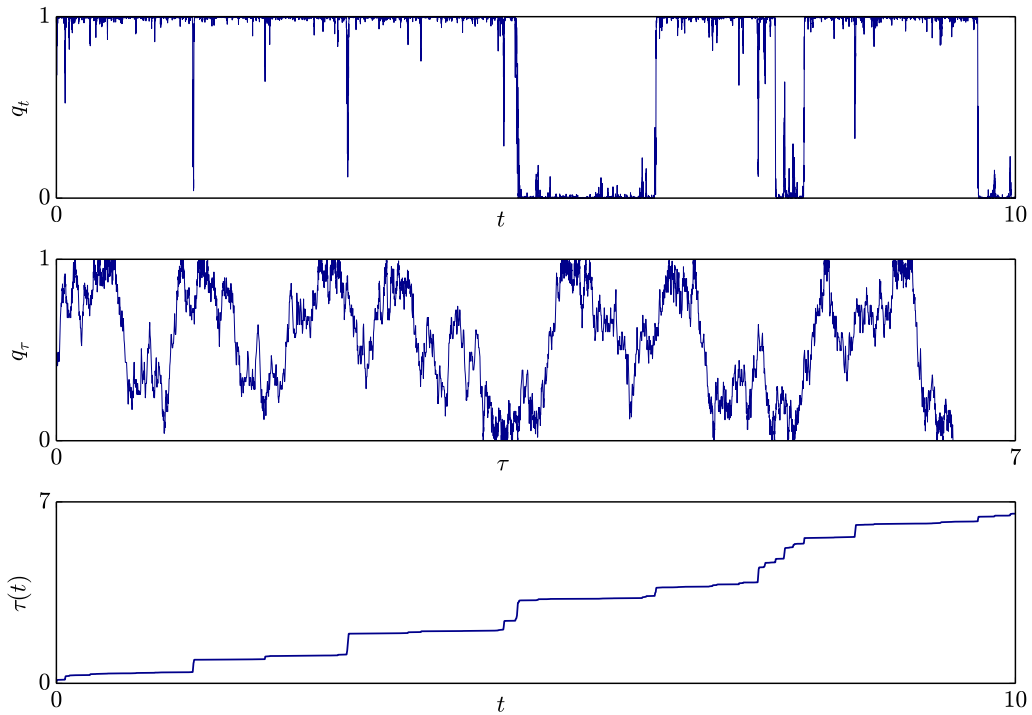


FIGURE 2.7 – Une réalisation de l'équation (2.2.8) en temps réel  $t$  (haut) et en temps effectif  $\tau$  (milieu) pour  $\gamma \rightarrow +\infty$ . On donne aussi le temps effectif  $\tau(t)$  en fonction du temps réel  $t$  en bas.

- Un saut est une trajectoire de  $q_\tau$  passant de 0 à 1 ou de 1 à 0.
- Une écharde est une trajectoire de  $q_\tau$  passant de 0 à 0 ou de 1 à 1.

Les échardes qui étaient instantanées en temps réel sont dépliées en une excursion d'un mouvement Brownien en temps effectif. On comprend alors leur nombre infini grâce à la propriété de récurrence en 0 du mouvement Brownien. Le deuxième point de la proposition permet de remonter au temps réel à partir de la description en temps effectif. Ce deuxième point étant légèrement plus technique et moins intuitif que la limite Brownienne en temps effectif, on renvoie le lecteur à l'appendice E pour plus de détails.

### 2.2.3.b Opérateur anormaux

Cette nouvelle manière de définir la limite de mesure forte à l'aide du temps effectif permet d'aller encore plus loin que la description en terme d'échardes et de sauts. En effet, pour une certaine réalisation d'échardes et de sauts, la description en temps effectif contient encore de nombreuses quantités fluctuantes. Il y a une infinité de trajectoires possibles reliant 0 à 1 par exemple, ce qui signifie que ce qui donne un saut à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  en temps réel peut malgré tout conserver une structure interne plus fine en temps effectif. Le même raisonnement s'applique à une écharde de hauteur  $h$  donnée.

On appelle opérateur anormal une fonction  $\mathcal{O}$  de  $\rho$  (vue comme trajectoire sur l'intervalle  $\mathcal{I}$ ) telle que :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{O}(\rho)] \neq \mathbb{E}[\mathcal{O}(\rho^{\mathcal{M}})],$$

où  $\rho^{\mathcal{M}}$  est le processus de Markov limite (contenant donc uniquement les sauts) vers lequel  $\rho$  converge en loi. Cette convergence, bien que faible, impose que les fonctions de la forme  $f(\rho_{t_1}, \dots, \rho_{t_k})$  ne peuvent être anormales. En revanche, en s'inspirant des échardes on peut facilement construire des opérateurs anormaux, par exemple :

$$\mathcal{X}(\rho) = 1 \text{ si } \exists t \in \mathcal{I}, \langle 0|\rho_t|0 \rangle = 1/2, \quad = 0 \text{ sinon,}$$

où l'existence des échardes impose de manière évidente que :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{X}(\rho)] > \mathbb{E}[\mathcal{X}(\rho^{\mathcal{M}})]$$

(voir **D** pour une version quantitative de cette affirmation). L'existence d'opérateurs anormaux comme  $\mathcal{X}$  est ce qui avait motivé notre étude initiale des échardes. Le temps effectif permet d'aller plus loin. On appelle opérateur *fortement* anormal une fonction  $\mathcal{O}$  de  $\rho$  telle que *même en prenant la limite de  $\rho$  en tenant compte des échardes, on ne peut pas reconstruire la moyenne de la fonction, i.e. :*

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{O}(\rho)] \neq \mathbb{E}[\mathcal{O}(\rho^{\mathcal{E}})], \quad (2.2.10)$$

où  $\rho^{\mathcal{E}}$  est le processus ponctuel saut + échardes limite reconstruit à l'aide de (2.2.6). Dans cette définition un peu informelle, on accepte que le terme de droite dans (2.2.10) ne soit lui même pas défini. Un opérateur  $\mathcal{Y}$  tel que :

$$\mathcal{Y}(\rho) = \sum_i \Delta\tau_i(\rho),$$

où  $\Delta\tau_i(\rho)$  est le temps effectif qui s'écoule pendant le  $i$ -ème saut de  $\rho$  sur  $\mathcal{I}$ , est fortement anormal bien que trivial à calculer en temps effectif.

La description en temps effectif permet donc a priori de faire passer plus de quantités à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  que l'approche «brutale» consistant à remplacer le processus  $\rho$  par sa limite de Markov. Évidemment, la question se pose de savoir s'il existe des quantités anormales physiques que l'on peut effectivement avoir envie de transporter à la limite. Le paragraphe suivant présente un tel exemple sur lequel on est capable d'effectuer des calculs exacts.

### 2.2.3.c Un exemple

Un problème non trivial à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  qui se traite particulièrement bien à l'aide du formalisme du temps effectif est celui de l'évolution de l'entropie linéaire <sup>11</sup>  $S^L = 1 - \text{tr}[\rho^2] = 2q_t(1 - q_t)$ . En temps réel et à  $\gamma$  fini, la formule d'Itô fournit :

$$dS_t^L = 2\lambda(1 - 2q_t)(q_{eq} - q_t)dt + q_t(1 - q_t) [2\sqrt{\gamma}(1 - 2Q_t)dW_t - 2\gamma q_t(1 - q_t)dt],$$

11. Le logarithme divergent en 0 de l'entropie de Von Neumann rend malheureusement les calculs avec cette dernière infiniment plus pénibles.

équation qui n'a pas de limite claire quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . On peut en trouver une facilement en temps effectif. Dans cette limite  $q_\tau$  est un mouvement Brownien réfléchi et vérifie donc <sup>12</sup> :  $dq_\tau = dB_\tau + dL_\tau - dU_\tau$ . En appliquant la formule d'Itô à  $S^L$  on obtient une équation très simple pour  $S_\tau^L$  à  $\gamma = +\infty$  :

$$dS_\tau^L = 2(1 - 2q_\tau) dB_\tau - 2 dt + 2(dL_\tau + dU_\tau),$$

où on identifie la facilement la contribution de la mesure dans les deux premier termes et la contribution du bain localisée sur les bords et contenue dans le dernier terme. Il est ainsi possible de faire du calcul différentiel (stochastique) à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  grâce au formalisme du temps effectif.

## 2.2.4 Discussion

Après ces longs développements peut-être un peu techniques sur les subtilités du passage à la limite, on a pu observer que le comportement *qualitatif* de mesures continues fortes était bien plus riche <sup>13</sup> que celui des mesures projectives avec une variété de nouveaux phénomènes.

En oubliant pour le moment les opérateurs fortement anormaux, on peut s'interroger sur le statut physique des échardes (voir **D** pour une discussion complémentaire). Est-il possible de qualifier ces échardes de *quantiques*, de *réelles*? Sinon ont-elles au moins une pertinence opérationnelle? Est-il possible de les observer expérimentalement?

### 2.2.4.a De la réalité des échardes

Il est toujours un peu délicat de parler du caractère réel ou non d'un certain phénomène en mécanique quantique dans la mesure où l'*ontologie*, c'est à dire l'ensemble des objets auquel on attribue un statut de réalité dans la théorie, dépend de l'interprétation choisie et n'est pas fixée par le formalisme (voir appendice **A**). Le cas des échardes n'échappe malheureusement pas à cette ambiguïté. Les échardes sont en effet aussi «réelles» que peut l'être le vecteur d'état. Dans *certaines* interprétations du type collapse objectif, la matière, ce qui est réel au point  $x$  (en anglais on dirait le «*stuff*») est une fonction du vecteur d'état, typiquement  $\text{tr}[\rho \hat{M}(x)]$  où  $\hat{M}(x)$  est l'opérateur densité de masse régularisé en  $x$ . Par conséquent, les échardes correspondent dans ce contexte à des fluctuations extrêmement abruptes de la distribution de matière (si l'on imagine par exemple le système à deux niveaux d'un électron dans un double puits pouvant passer de l'un à l'autre par effet tunnel). C'est d'ailleurs un des arguments (loin en revanche d'être le plus fort) pour privilégier d'autres ontologies dans les modèles de collapse objectif. À l'inverse, la simple existence d'une interprétation en terme de variables cachées, qui est en fait une version jouet d'une théorie du type de Broglie-Bohm, montre qu'il est tout à fait possible d'avoir une ontologie entièrement exempte d'échardes et dans laquelle ces dernières ne sont qu'un artefact de modélisation.

12. Cette écriture est liée à la formule de Tanaka [88], voir **E**

13. La richesse supplémentaire des mesures continues fortes pourrait motiver l'exploration d'un nouveau formalisme «Copenhague +  $\varepsilon$ » où ces dernières seraient substituées aux mesures projectives habituellement utilisées dans le postulat de la mesure.

La question de savoir si les écharde sont un phénomène quantique est en revanche plus fermée. On peut obtenir des écharde dans des cas *classiques* au sens des modèles de Markov caché<sup>14</sup>, c'est à dire dans lesquels la mécanique quantique ne joue aucun rôle et dans lesquels tout peut être réécrit en terme de probabilités usuelles. Les écharde sont dans ce cas un pur produit de l'ignorance sur le système : elles sont classiques pour toute définition raisonnable du terme «classique». On peut en revanche aussi observer des écharde pour des systèmes sans modèle classique équivalent et pour lesquels l'origine des écharde est donc nécessairement quantique. Ces dernières ne sont donc pas un phénomène purement quantique –les voir ne suffit pas à s'assurer de la présence d'un effet quantique– mais leur origine est dans certains cas inexplicable sans recourir à la mécanique quantique.

### 2.2.4.b Écharde et contrôle

Plutôt que de se demander si les écharde sont *vraiment* quantiques ou même physiques, on peut regarder quel impact elles ont sur notre manière de prédire et de rétroagir sur l'état d'un système. Les écharde ont indubitablement un impact sur la prédiction et ces fluctuations d'ordre 1 qui persistent quand  $\gamma \rightarrow +\infty$  montrent une limite intrinsèque à notre capacité à «parier» de manière sûre sur l'état du système.

*Remarque 9* (Illustration avec un jeu de bonneteau). La caractère surprenant des écharde du point de vue de la prédiction peut être illustré à l'aide d'un petit jeu de bonneteau simplifié (présenté plus en détail en **D**). On imagine qu'une bille peut être dans deux boîtes  $L$  et  $R$  avec une probabilité  $\lambda dt$  de sauter de l'une à l'autre par unité de temps. On a accès à une série très rapide de photos floues de la boîte (en temps réel) qui donnent chacune une petite information sur la position de la bille. On peut montrer<sup>15</sup> que la probabilité  $p_t$  que l'on attribue à la proposition «la bille est à gauche» sachant les photos floues vérifie exactement l'équation (2.1.3), *i.e.*<sup>16</sup> :

$$dp_t = \lambda(p_t - \frac{1}{2}) dt + \sqrt{\gamma} p_t(1 - p_t) dW_t,$$

où  $\gamma$  est proportionnel à la vitesse à laquelle les photos sont prises et à leur qualité. À grand  $\gamma$ , on sait donc que  $p_t$  a des écharde d'ordre 1. Même sur un intervalle de temps  $\mathcal{I}$  pendant lequel la bille *ne saute pas*, la probabilité qu'il existe au moins un instant où on a tort sur sa position converge vers une constante non nulle quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Autrement dit, quelle que soit la fréquence à laquelle j'extrait de l'information sur la position de la bille, si je dois dire à chaque instant *en temps réel* où je pense que la bille se trouve, alors la probabilité que je me trompe au moins une fois ne peut pas être arbitrairement réduite<sup>17</sup>. La personne qui a accès à la position de la variable

14. C'est d'ailleurs motivés par cette question (posée de manière répétée notamment par Irénée Frérot), que nous nous sommes intéressés aux modèles à variables cachées. Des interrogations purement «philosophiques» peuvent déboucher sur des résultats mathématiques (que l'on estime ou pas qu'ils aient un intérêt dans ce cas précis).

15. On a en fait reconstruit le modèle de Markov caché classique reproduisant (2.1.3).

16. Notons que les écharde sont numériquement robustes et ne nécessitent pas la limite continue. Tout ce qui est dit dans cette remarque reste vrai si la quantité d'information contenue dans chaque photo est fixée, c'est à dire ni maximale ni infinitésimale.

17. Dans l'exemple proposé, si  $|Z| = \lambda^{-1}$ , la probabilité d'erreur se calcule avec la formule sur les écharde (2.2.6) et on trouve  $\mathbb{P}[\text{au moins une erreur}] = 1/2$ .

cachée, typiquement celui qui manipule les boîtes, peut lui aussi reconstruire  $p_t$  et savoir quand je me trompe. Il peut alors décider de me demander où je pense que la bille se trouve exactement au mauvais moment et extraire de l'information à une fréquence plus élevée ne peut paradoxalement pas me sauver. Il s'agit si l'on veut d'une explication excessivement savante –ou pédante– de pourquoi on perd toujours au bonneteau<sup>18</sup>.

Avoir des limites à la capacité de prédire impose aussi des difficultés pour contrôler le système. Imaginons un protocole de contrôle dans lequel une action spécifique (éventuellement coûteuse) est réalisée dès que le système quitte un état cible (c'est typiquement le genre de procédures auxquelles on s'intéressera en 3.1). On peut choisir de déclencher cette action lorsque la probabilité d'être dans l'état voulu devient inférieure à une certaine valeur prédéfinie, par exemple 50%. On imagine naïvement que si la force de la mesure continue est suffisamment élevée, on ne déclenchera l'action que lorsque c'est nécessaire. La présence des échardes montre au contraire que l'on va réagir bien trop souvent, et ce quelle que soit la force de la mesure continue. Pour ne pas se faire piéger, il faut nécessairement soit moyenniser sur un petit intervalle de temps, soit introduire une forme d'hystérésis qui empêche le contrôleur d'être déclenché trop fréquemment par les fluctuations. Comme les échardes existent évidemment dans notre connaissance du système, elle ont au moins une importance opérationnelle que l'on ne peut négliger (à défaut d'avoir un statut physique clair).

#### 2.2.4.c Observer les échardes *quantiques*

Les échardes pouvant être obtenues par de simples observations classiques bruitées d'un processus classique de saut, il faut d'abord se demander ce que l'on compte ou accepte de valider comme observation d'échardes *quantiques*. Afin d'éliminer l'interprétation classique des échardes, une possibilité est de travailler avec des états suffisamment purs pour que les échardes soient inexplicables par de l'ignorance classique. Dans le cas d'un qubit, les échardes dues à des erreurs classiques (ou du moins explicables avec un modèle classique) sont radiales dans la boule de Bloch, alors que les échardes quantiques, compatibles avec la pureté, sont orthoradiales. Même s'il n'y a pour le moment pas de critère quantitatif précis, l'observation de fluctuations rapides d'ordre 1, invariantes d'échelle, «suffisamment proches» de la sphère de Bloch ou au moins approximativement orthoradiales, constituerait une preuve expérimentale probablement satisfaisante de leur existence.

Un moyen de satisfaire les contraintes précédentes est de travailler avec un qubit mesuré selon  $\sigma_z$  et soumis à un champ extérieur imposant un Hamiltonien selon un axe orthogonal, typiquement  $\sigma_x$  (qui correspond à l'exemple de la remarque 8). Toute implémentation de cette situation idéale théorique est a priori valable même si des contraintes quantitatives s'ajoutent. Il faut en effet que l'efficacité de la détection soit

---

18. La similarité entre cet exemple et le *vrai* jeu de bonneteau est évidemment limitée et le lecteur est invité à ne pas prendre le parallèle trop au sérieux. En pratique, on obtient de l'information surtout au moment où la bille passe furtivement d'un compartiment à un autre et on en perd petit à petit sinon, à mesure que l'on oublie la succession rapide des mouvements effectués par le prestidigitateur expérimenté. À cela s'ajoute en pratique la probabilité élevée que l'on ait affaire à un charlatan usant éventuellement de gobelets truqués.



suffisante pour conserver une pureté élevée, que le « $\gamma$ » de la mesure continue soit élevé devant la fréquence des oscillations de Rabi et enfin que la bande passante<sup>19</sup> des divers mécanismes d’amplification du signal puisse être rendue supérieure à  $\gamma$ . Ces contraintes semblent compatibles avec une implémentation dans un qubit supraconducteur couplé à une cavité micro-onde (éventuellement dans les expériences du groupe de Benjamin Huard au Laboratoire Pierre Aigrin de l’École Normale Supérieure).

Si observer les échardes paraît à portée, *vérifier* que les échardes correspondent à quelque chose<sup>20</sup> est a priori plus difficile. En effet, il faudrait en principe être capable d’arrêter l’évolution et d’effectuer la tomographie complète de l’état (ou au moins une mesure forte dans une autre base) une fois «sur» une écharde. Cela permettrait de s’assurer que l’information contenue dans les éléments non diagonaux –justement celle qui garantit que les échardes sont quantiques– est bien réelle. Le problème est qu’il est difficile de reconstruire l’état en temps réel avec l’équation maîtresse stochastique afin de rétroagir sur le système en un temps  $\Delta t \ll \gamma^{-1}$  qui est la durée typique d’une écharde. On pourrait imaginer arrêter la mesure continue aléatoirement, reconstruire a posteriori l’état à partir des mesures continues et post-sélectionner les cas où on était effectivement sur une écharde. Mais la largeur des échardes étant typiquement  $\propto \gamma^{-1}$ , le nombre d’événements à conserver décroît justement fortement dans le régime d’intérêt. Il faudrait donc a priori soit une méthode de feedback en temps réel, soit une énorme quantité de données, pour obtenir une observation robuste à la fois directe et indirecte des échardes.

## 2.3 Extraction optimale d’information

On abandonne dans cette section l’étude de la mesure continue forte pour s’intéresser à des problèmes d’optimisation. On a cherché précédemment à montrer quelles similarités (les sauts) et différences (leur taux, les échardes) il y avait entre la mesure continue forte et les mesures projectives. On s’intéresse ici à la spécificité de la mesure continue hors du régime fort : son caractère lent et progressif. Si la mesure met un certain temps, de nouvelles question auparavant inaccessibles ou dénuées de sens peuvent être posées. Combien de temps met-on à extraire une certaine quantité d’information ? Ce temps peut-il être optimisé avec des «ressources» (en terme d’appareils de mesure) fixées ? Un schéma optimal pour mesurer vite est il le même qu’un schéma pour acquérir de l’information vite ? Les éventuels gains en vitesse sont-ils d’origine quantique ou classique ?

### 2.3.1 État de l’art

#### 2.3.1.a Présentation du problème

L’objectif des schémas d’extraction optimale d’information est d’accélérer la vitesse de convergence d’une certaine *métrique* d’information avec des ressources en mesure

19. On pourrait ajouter la fréquence finale de discrétisation mais cette dernière est en général bien plus élevée que la bande passante des amplificateurs en amont.

20. C’est à dire vérifier que l’état que l’on attribue au système à l’aide des mesures continues et qui contient des échardes correspond bien à l’état réel du système.

fixées et en s'autorisant un contrôle Hamiltonien en temps réel sur le système. Typiquement, on mesure continuellement un certain opérateur  $\mathcal{O}$ , on se donne un certain Hamiltonien de contrôle dépendant du temps  $H(t)$  tel que l'état  $\rho$  du système évolue selon :

$$d\rho_t = -i[H(t), \rho_t] dt + \gamma \mathcal{D}[\mathcal{O}](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t) dW_t,$$

et on cherche à maximiser la vitesse de convergence d'une certaine mesure d'information comme l'entropie en jouant sur  $H(t)$ . Si  $H$  dépend explicitement des résultats de mesure passés, alors on a un schéma avec boucle de rétroaction fermée (*closed loop*), si l'évolution de  $H$  est fixée au départ, ce qui est plus facile à réaliser en pratique, on a un schéma de contrôle ouvert (*open loop*). On ne se donne aucune restriction sur l'amplitude de  $H$  et on peut donc supposer que l'on est capable d'appliquer des unitaires instantanés. Par un simple changement de point de vue, on fait en général le choix d'appliquer l'unitaire à  $\mathcal{O}$  plutôt qu'à  $\rho$  ce qui revient à considérer qu'on «tourne» l'appareil de mesure plutôt que l'état (ce qui est évidemment équivalent). On considère alors plutôt l'équation :

$$d\rho_t = \gamma \mathcal{D}[U_t \mathcal{O} U_t^\dagger](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[U_t \mathcal{O} U_t^\dagger](\rho_t) dW_t. \quad (2.3.1)$$

On aimerait en théorie utiliser l'entropie de Von-Neumann  $S(\rho) = -\rho \ln \rho$  comme mesure de l'information (ou éventuellement l'entropie de Shannon prise dans une certaine base) mais on est assez vite confronté au fait que le logarithme rend le calcul stochastique et l'écriture de problèmes d'optimisation inextricables<sup>21</sup>. En pratique, la plupart des auteurs utilisent soit l'entropie linéaire  $S^L(\rho) = 1 - \text{tr}[\rho^2]$  soit l'infidélité  $\Delta(\rho) = 1 - \Lambda_1(\rho)$  où  $\Lambda_1(\rho)$  est la plus grande valeur propre de  $\rho$ .

On peut ensuite chercher un schéma localement optimal, c'est à dire pour lequel  $\mathbb{E}[df_t | \mathcal{F}_t]$  (où  $f_t$  est la mesure d'information choisie) est extremal, ou plus rarement –car c'est souvent très difficile– un schéma globalement optimal, *i.e.* tel que  $\mathbb{E}[f(t_{\text{final}})]$  soit extremal. Dans le premier cas, on peut travailler directement sur l'équation différentielle stochastique vérifiée par la métrique d'information alors que dans le second cas, on doit se plonger dans les raffinements du contrôle stochastique et des équations de Hamilton-Bellman-Jacobi (HBJ) où les solutions analytiques sont rarissimes. La plupart de la littérature ainsi que les ambitions de cette section se limitent ainsi au premier problème.

Une ultime distinction, peut-être la plus importante, se fait entre les schémas dans lesquels tous les coups sont permis pour acquérir l'information rapidement (e.g. changer fortement les propriétés de l'état qu'on est en train de mesurer), c'est le problème de la *purification optimale*, et les schémas pour lesquels on veut que l'action globale sur le système (mesure + contrôle) continue à être globalement une mesure<sup>22</sup>, c'est le problème de la *mesure optimale*.

21. En particulier, il n'est pas tout à fait évident d'écrire une formule d'Itô pour calculer  $dS_t$  dans la mesure où  $\rho_t$  et  $d\rho_t$  ne commutent pas. En travaillant un peu, on peut vérifier que la formule intégrale suivante fonctionne :

$$dS_t = -\gamma \text{tr} \left[ \mathcal{D}[\mathcal{O}](\rho_t) \log \rho_t + \int_0^{+\infty} ds s (s + \rho_t)^{-1} (\mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t) (s + \rho_t)^{-1})^2 \right] dt - \sqrt{\gamma} \text{tr} \left[ \mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t) \log \rho_t \right] dW_t$$

mais elle n'est pas facile à manipuler et je n'ai pas réussi à trouver mieux...

22. On veut par exemple que le résultat final corresponde à une mesure dans une certaine base et que sa statistique soit donnée par la règle de Born

### 2.3.1.b Purification

Commençons par nous intéresser à la purification optimale pour un qubit. On se donne  $\sigma_z$  comme opérateur mesuré, on note  $\rho_t = \frac{\mathbb{1} + \vec{\alpha}_t \cdot \vec{\sigma}}{2}$  et on choisit de prendre le point de vue dual de l'équation (2.3.1). Le problème devient ainsi d'optimiser l'extraction d'information pour la mesure de  $\sigma_{u_t} = \vec{u}_t \cdot \vec{\sigma}$  où  $\vec{u}_t$  le paramètre dynamique de contrôle sur lequel on cherche à optimiser. En appliquant le lemme d'Itô à  $S^L = 1 - \text{tr}[\rho^2]$  on obtient :

$$\mathbb{E}[dS_t^L | \mathcal{F}_t] = -\gamma \text{tr} \left[ 2 \rho_t \mathcal{D}[\sigma_{u_t}](\rho_t) + \mathcal{H}[\sigma_{u_t}](\rho_t)^2 \right] dt. \quad (2.3.2)$$

On obtient donc un schéma de purification *localement* optimal pour :

$$\vec{u}_t = \underset{\vec{u}_t \in S_2}{\text{argmax}} \left\{ \text{tr} \left[ 2 \rho_t \mathcal{D}[\sigma_{u_t}](\rho_t) + \mathcal{H}[\sigma_{u_t}](\rho_t)^2 \right] \right\}.$$

On peut ensuite s'amuser à faire un peu d'algèbre en utilisant  $\sigma_u \sigma_v = u \cdot v \mathbb{1} + i \sigma_{u \wedge v}$  pour obtenir après quelques lignes de calcul vectoriel élémentaire :

$$\mathbb{E}[dS_t^L | \mathcal{F}_t] = -2\gamma \left[ (1 - \vec{\alpha}_t \cdot \vec{\alpha}_t)(1 - [\vec{\alpha}_t \cdot \vec{u}_t]^2) \right] dt.$$

Le schéma est localement optimal pour  $\vec{u}_t \perp \vec{\alpha}_t$  qui est le résultat proposé par Jacobs en 2003 [89]. Notons que pour ce choix, l'évolution est particulièrement simple et le lemme d'Itô fournit :

$$dS_t^L = -4\gamma S_t^L dt.$$

L'extraction d'information est *déterministe* dans le schéma optimal et  $S_t^L = S_0^L e^{-4\gamma t}$ . La trajectoire de  $\rho_t$  dans la boule de Bloch reste évidemment aléatoire et comme l'évolution tend à rendre  $u$  et  $\alpha$  parallèles, il faut constamment faire tourner la base de mesure avec un *feedback* actif.

On peut comparer ce résultat au cas sans contrôle –paradoxalement légèrement plus technique– dans lequel on a  $\sigma_u = \sigma_z$  et  $\rho = (\mathbb{1} + (2q - 1)\sigma_z)/2$  ce qui fournit  $S_t^L = 2q_t(1 - q_t)$  et :

$$dq_t = 4\sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t,$$

équation que l'on a résolue à la remarque 2. En injectant la solution dans l'expression de  $S^L$  on obtient l'expression exacte suivante :

$$S_t^L = \frac{S_0^L}{\left[ (1 - q_0)e^{-2\sqrt{\gamma}Y_t} + q_0e^{2\sqrt{\gamma}Y_t} \right]^2}. \quad (2.3.3)$$

où on se souvient que  $Y$  n'est pas un mouvement Brownien mais le signal. En utilisant l'expression (1.2.13) pour la distribution de  $Y$  on obtient :

$$\mathbb{E}[S_t^L] = \frac{e^{-2\gamma t}}{\sqrt{8\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\cosh(2\sqrt{\gamma}y)} dy$$

où on a pris  $q_0 = 1/2$  pour simplifier l'expression. On peut en calculer explicitement l'équivalent à  $t$  grand pour obtenir :

$$\mathbb{E}[S_t^L] \sim \sqrt{\frac{\pi}{32\gamma}} \frac{e^{-2\gamma t}}{\sqrt{t}}.$$

Le schéma «optimal» améliore donc d'un facteur 2 le taux de convergence de la moyenne de l'entropie linéaire (au terme sous dominant  $\sqrt{t}$  près). Paradoxalement, ce schéma n'est pas très utile en pratique car on préfère en général optimiser le temps nécessaire pour atteindre une certaine entropie linéaire cible plutôt que la moyenne de l'entropie linéaire pour un certain temps. Pour estimer le temps nécessaire pour atteindre une entropie cible, on peut regarder le comportement asymptotique de  $S_t^L$ . Aux temps longs, on a  $Y_t \sim \pm 2\sqrt{\gamma}dt$  soit en utilisant l'équation (2.3.3)  $S_t^L \sim e^{-8\gamma t}$  pour le cas sans contrôle. Autrement dit, l'algorithme sans contrôle est *typiquement* 2 fois plus rapide que l'algorithme optimal! Ce fait surprenant est à l'origine d'une énorme quantité de confusion dans la littérature, notamment dans l'article original [89] et on peut consulter [19, 90, 91] pour diverses explications du phénomène. L'algorithme optimal consistant à mesurer constamment orthogonalement à l'état dans la boule de Bloch possède malgré tout l'avantage d'être parfaitement déterministe : on sait exactement combien de temps il faut pour arriver à une certaine entropie linéaire cible ce qui peut-être utile dans le cas où on doit purifier de nombreux états différents en parallèle.

Dans le cas général, pour un espace de Hilbert de dimension  $|\mathcal{H}_s|$  quelconque, l'algorithme optimal *n'est pas connu*. On peut montrer qu'il est possible de gagner un facteur d'ordre  $|\mathcal{H}_s|$  pour la mesure d'un opérateur dont les valeurs propres sont linéairement espacées en cherchant notamment à maximiser la complémentarité entre l'état du système et l'opérateur mesuré en temps réel [92, 93] (prescription qui est l'analogue multidimensionnel de l'orthogonalité dans la boule de Bloch). On peut montrer que cette prescription seule n'est pas suffisante pour atteindre l'accélération maximale [94] et on peut démontrer que des gains  $\propto |\mathcal{H}_s|^2$  sont accessibles en ajoutant aux méthodes quantiques utilisant la complémentarité des astuces classiques qui dépendent de manière cruciale du spectre de l'opérateur mesuré.

Dans le cas du qubit et dans le cas général, les schémas optimaux nécessitent un asservissement en temps réel du système pour rendre constamment la mesure orthogonale à l'état (resp. complémentaire à l'état dans le cas général). Il serait évidemment préférable de posséder une stratégie sans asservissement –*open-loop*– permettant d'obtenir des gains comparables, éventuellement à un préfacteur près. Pour un qubit, un bon moyen d'être typiquement orthogonal à l'état est de faire tourner rapidement et aléatoirement l'opérateur mesuré. À la limite où cette rotation est effectuée très fréquemment, on obtient l'évolution en moyennant l'équation (2.3.2) sur la sphère de Bloch<sup>23</sup>. En dimension quelconque, la prescription équivalente consiste à moyennner l'équation (2.3.1) sur le groupe unitaire muni de la mesure de Haar. Combes et al. [96] ont montré qu'on obtient dans ce cas une accélération de la convergence  $\sim \frac{2}{3}|\mathcal{H}_s|$ .

### 2.3.1.c Mesure optimale

L'objectif de la mesure optimale est toujours d'obtenir une extraction d'information rapide mais avec cette fois-ci la contrainte additionnelle que les propriétés mesurées ne changent pas. Autrement dit, on s'interdit ici de changer les espaces propres de la mesure afin que l'opération globale continue à être une mesure (ce qui n'était évidem-

23. Une autre possibilité est d'alterner très rapidement entre les trois axes orthogonaux de mesure. On peut montrer que le gain est alors analogue [95].

ment pas le cas dans les schémas de purification optimale précédents). Cela restreint le contrôle à des *permutations* de vecteurs dans la base propre de l'opérateur mesuré. De telles opérations préservent la *classicalité* (au sens des modèles de Markov caché) de la procédure et les gains éventuels ne sont pas attribuables à la mécanique quantique (ce qui ne les rend évidemment pas moins réels). On considérera donc par la suite des matrices densité *diagonales* dans la base de la mesure. Pour un qubit, on n'attend pas de gain car les permutations de la base sont triviales, mais on espère des améliorations de vitesse en dimensions  $|\mathcal{H}_s|$  supérieures.

Comme on va étudier en détail la mesure optimale d'un registre de qubits en 2.3.2 et surtout en F, on va rester pour le moment à un niveau d'explication intuitif. Considérons un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_s$  de dimension  $n \geq 3$ . On considère la mesure d'un opérateur  $\hat{J}$  dont les valeurs propres  $\lambda_i$ , rangées par ordre décroissant, sont linéairement espacées. On se souvient que la vitesse de convergence dépend de manière cruciale de  $|\lambda_i - \lambda_j|$  (voir par exemple (1.2.8) ou (2.1.7)) : le taux auquel une superposition de  $|i\rangle$  et  $|j\rangle$  *collapse* vers un des deux états propres est proportionnel à  $|\lambda_i - \lambda_j|^2$ . Cette simple constatation permet de trouver facilement la stratégie localement optimale.

Pour la mesure optimale, on considère en général une autre métrique, l'infidélité, dont on rappelle l'expression :  $\Delta_t = 1 - \Lambda_1(\rho_t)$  où  $\Lambda_i(\rho)$  est la  $i$ -ème valeur propre de  $\rho$  dans l'ordre décroissant. Pour que l'infidélité réduise «vite», il faut que  $\Lambda_2(\rho)$  décroisse le plus vite possible. Le problème c'est que comme le taux de convergence est proportionnel à  $|\lambda_i - \lambda_j|^2$ , il y a toutes les chances qu'aux temps longs,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  correspondent à deux sites  $i$  et  $j$  tels que  $|\lambda_i - \lambda_j| = \min_{k \neq l} |\lambda_k - \lambda_l| = 1$  car c'est entre deux états de ce type que le collapse est le plus lent, la mesure discrimine mal deux états dont les valeurs propres associées sont proches. L'idée est alors d'effectuer une permutation de la base telle que  $\Lambda_1$  soit envoyé sur  $\lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  sur  $\lambda_n$ ,  $\Lambda_3$  sur  $\lambda_{n-1}$ , etc. Dans cette nouvelle base,  $\Lambda_2$  décroît en moyenne  $n^2$  fois plus vite. Si on admet que c'est la décroissance de  $\Lambda_2$  qui domine la vitesse de convergence de l'infidélité, alors on s'attend à ce qu'un tel schéma apporte un gain d'ordre  $|\mathcal{H}_s|^2$  sur le temps caractéristique de convergence ce qui est effectivement le cas [97]. On écrivant explicitement l'expression de  $d\Delta_t$ , on voit immédiatement qu'un tel schéma est aussi *localement* optimal.

Comme dans le cas de la purification, la procédure localement optimale précédente demande de contrôler le système en temps réel conditionnellement aux résultats de mesure. En effet, une fois dans une base dans laquelle  $\Lambda_2$  décroît «rapidement», cette dernière finit par croiser  $\Lambda_3$  et il faut de nouveau changer de base. On peut se demander s'il existe une procédure *open-loop* du même type que la moyenne sur le groupe unitaire pour la purification dans le cas de la mesure. La réponse est positive. Un bon moyen d'avoir un écart  $|\lambda_i - \lambda_j| \gg 1$  pour *tous* les états  $i \neq j$  est de changer constamment aléatoirement de base de mesure. Encore une fois, si ce changement est effectué rapidement, cela revient à moyenniser l'équation d'évolution sur le groupe de permutations de la base de pointeurs (au lieu du groupe unitaire pour la purification). L'écart entre deux valeurs propres tirées aléatoirement est toujours  $\propto n$  et on s'attend donc à un gain de l'ordre de  $|\mathcal{H}_s|^2$ , c'est à dire la même chose que pour le schéma localement optimal à un pré-facteur près. C'est un résultat que l'on peut aussi prouver sans trop de difficulté en encadrant  $\mathbb{E}[d\Delta_t]$  [96].

### 2.3.2 Mesure optimale pour un registre de qubits

On quitte désormais cette courte revue de l'état de l'art pour s'intéresser à un problème de mesure optimale particulier dans lequel la solution habituellement proposée peut-être largement améliorée. Pour plus de détails notamment techniques, on pourra se reporter à l'appendice F. On s'intéresse à la mesure optimale d'un registre de qubits. La lecture d'un registre n'est pas un problème *puremment* éthéré ou académique puisqu'il s'agit de la dernière étape nécessaire d'un calcul quantique. Même s'il n'est pas aujourd'hui possible de construire de grands registres de qubits pour lesquels une amélioration de la vitesse de mesure apporte un gain déterminant, on peut imaginer que la situation change dans un futur proche.

#### 2.3.2.a Énoncé du problème

On considère la mesure continue d'un *registre* de  $n$  qubit. On considère que les qubits sont mesurés séparément et indépendamment par  $n$  détecteurs. L'état du système  $\rho_t \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$  avec  $\mathcal{H}_s = \bigotimes_{k=1}^n \mathbb{C}^2$  vérifie l'équation maîtresse stochastique<sup>24</sup> :

$$d\rho_t = 2\gamma \sum_{i=1}^n \mathcal{D}[\sigma_z^{(i)}](\rho_t) dt + \sqrt{2\gamma} \sum_{i=1}^n \mathcal{H}[\sigma_z^{(i)}](\rho_t) dW_t^{(i)} \quad (2.3.4)$$

où

$$\sigma_z^{(i)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \sigma_z \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$$

avec  $\sigma_z$  en  $i$ -ème position. Les processus de bruit ne sont pas corrélés, *i.e.*  $dW_t^{(i)} dW_t^{(j)} = \delta_{ij} dt$ , trace de l'indépendance des détecteurs. On donne l'équation (2.3.4) pour que le modèle considéré soit clair, mais on va rester à un niveau d'explication heuristique dans ce paragraphe et le suivant.

Avant d'exposer brièvement les schémas optimaux *open-loop* et *closed-loop*, regardons pourquoi on s'attend à ce qu'une accélération d'un facteur  $\propto n$  soit effectivement atteignable. Les détecteurs mesurent les qubits séparément. En admettant que l'état initial soit maximalelement mélangé, la probabilité d'un certain état, par exemple  $|\bar{0}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$ , s'écrit comme le produit des probabilités *marginales* pour chaque qubit<sup>25</sup>. À cause de cette forme produit, on peut se convaincre facilement que l'état le plus probable (dont la probabilité vaut  $\Lambda_1$ ) et l'état le «deuxième plus probable» (dont la probabilité vaut  $\Lambda_2$ ) diffèrent seulement d'un bit, par exemple en position  $i$ . Seul un détecteur, celui en position  $i$ , apporte donc réellement une information utile permettant de séparer ces deux états, séparation dont on a vu qu'elle était le processus dominant la convergence. Un «bon» schéma de mesure optimale devrait être capable d'exploiter constamment la puissance de discrimination des  $n$  détecteurs et fournir une accélération d'un facteur d'ordre  $n$  comparativement au cas sans contrôle.

Le concept clé dans cette situation, qui va permettre d'ordonner les états d'une manière analogue à ce que l'on avait fait dans le cas de la mesure d'un unique opérateur, est celui de distance de Hamming [99]. La distance de Hamming entre deux

24. Le facteur 2 devant  $\gamma$  est choisi pour coller à la convention utilisée dans la littérature, notamment dans [98].

25. Encore une fois, on rappelle que la situation est classique et qu'on peut donc avoir en tête que la configuration du registre est bien définie et inconnue et qu'on cherche simplement à en calculer la probabilité en fonction des résultats de mesure.

configurations de bits est égale au nombre de bits différents entre elles. Dans le modèle de mesure que l'on considère, la vitesse à laquelle un mélange de deux états collapse est proportionnelle à la distance de Hamming entre les deux configurations correspondantes (la distance de Hamming compte essentiellement le nombre de détecteurs «utiles»). L'idée du schéma localement optimal est d'implémenter un changement de base en temps réel tel que l'état correspondant à  $\Lambda_1$  soit fixé, par exemple  $|\bar{0}\rangle$  et que les autres soient ensuite ordonnés en fonction de la distance de Hamming à l'état le plus probable. On envoie par exemple l'état correspondant à  $\Lambda_2$  sur  $|\bar{1}\rangle = |11\dots 1\rangle$ , à  $\Lambda_3$  sur  $|011\dots 1\rangle$  etc. . On s'attend dans ce cas à un gain d'ordre  $n$  sur le taux de convergence ce qui est effectivement ce que Combes et al. [97] obtiennent.

Encore une fois, plutôt qu'un algorithme en temps réel, on peut imaginer un schéma *open-loop* consistant à permuter très rapidement la base de mesure. On s'attend dans ce cas à un gain du même ordre, *i.e.*  $\propto n$  qui est effectivement ce que Combes et al. [98] parviennent à montrer. En fait, dans ce cas précis, on peut calculer exactement la valeur du gain obtenu (voir appendice F), mais il s'agit d'un résultat essentiellement académique puisque ce schéma est de toute façon inutilisable en pratique.

En effet, que ce soit en *open-loop* ou en *closed-loop*, les schémas précédents pour le registre de qubits présentent un défaut rédhibitoire qui les rend inexploitable en pratique ; défaut qui a été, il me semble, largement sous estimé dans la littérature. Les gains linéaires fournis par les deux approches rendent l'algorithme particulièrement utile pour les grands registres. Le problème c'est que là où l'indépendance des probabilités permettait à la procédure sans contrôle de ne stocker que  $n$  nombres correspondant aux  $n$  marginales, le constant brassage de la base nécessite de stocker les  $2^n$  probabilités correspondant aux configurations complètes. Le gain linéaire en vitesse s'accompagne donc d'un coût exponentiel en mémoire qui limite en pratique les possibilités d'utilisation des algorithmes précédents à des registres de quelques qubits. Se pose immédiatement la nécessité de ce coût exponentiel : ce dernier est-il la contrepartie nécessaire du gain en vitesse linéaire ? Peut-on avoir le beurre et l'argent du beurre<sup>26</sup> ? Un autre problème des méthodes précédentes est qu'elles demandent en théorie d'être capable d'effectuer un nombre grand (typiquement  $[2^n!]$  pour le cas *open-loop*) de permutations de la base, nombre absolument inatteignable en pratique. Est-il possible d'être plus frugal ?

### 2.3.2.b Heuristique de la solution

Pour être réellement utilisable, il faut donc un algorithme au coût en mémoire modéré (polynomial mais idéalement linéaire en le nombre de bits) et parcimonieux avec les opérations de contrôle. L'idée des algorithmes précédents consistant à s'intéresser à la distance de Hamming peut être conservée mais c'est le choix des permutations à effectuer sur la base qui est à modifier.

Intuitivement, on a besoin de beaucoup de mémoire parce que l'on utilise beaucoup de bases différentes. Peut-on réduire le nombre de bases utilisées et conserver le même gain ? Demander que les états soient tous «éloignés» en moyenne les uns par rapport aux autres du point de vue de la distance de Hamming en utilisant seulement un

---

26. Comme beaucoup de maximes populaires, cette dernière souffre heureusement de quelques exceptions.

nombre «petit» de bases apparaît impossible<sup>27</sup>. Mais rien ne nous oblige en fait à ce que les états soient loin les uns par rapport aux autres, ils suffit qu'ils soient loin du «candidat», c'est à dire de l'état associé à la valeur propre  $\Lambda_1$ . Avec seulement deux bases, tous les états peuvent être à une distance de Hamming moyenne  $n/2$  d'un certain état *donné*. La solution est simplement de choisir une première base quelconque  $\mathcal{B}$  et une seconde  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans laquelle le candidat ainsi que son opposé bit à bit sont retournés.

L'idée du nouvel algorithme est donc de commencer par effectuer une mesure continue du registre sans contrôle jusqu'à ce qu'un premier candidat se dégage (tel par exemple que  $\Lambda_1$  dépasse  $1/2$ ). Ensuite, mesurer alternativement dans  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$ , cette étape devant entraîner un collapse  $n/2$  fois plus rapide vers le candidat si ce dernier est le bon. Dans le cas contraire, si le candidat change, recommencer l'algorithme du début. Si l'on admet :

1. que l'étape initiale de sélection du candidat prend un temps négligeable si l'on s'intéresse au comportement asymptotique de la log-infidélité,
2. que le nombre de fois que l'on doit recommencer l'algorithme au début est fini en moyenne ( $= 2$ ) et donc que cette possibilité n'a pas d'impact sur le comportement asymptotique de la log infidélité,
3. que l'on gagne bien un facteur  $n/2$  quand on mesure dans  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  successivement,
4. que l'on peut reconstruire exactement la probabilité des états avec la donnée  $2n$  probabilités marginales dans  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,

alors l'algorithme fait bien ce que l'on voulait et fournit un gain de vitesse d'ordre  $n$  ( $= n/2$ ), pour une utilisation linéaire de mémoire ( $2n$ ) et avec un nombre fini (2 en moyenne) d'opérations de contrôle. Ces 4 points techniques, a priori crédibles, sont prouvés rigoureusement en appendice F. De manière intéressante l'algorithme obtenu n'est pas strictement *open-loop* car on a un petit nombre d'opérations de contrôle à effectuer. Cependant la convergence asymptotique n'est pas sensible à un éventuel délai de feedback (éventuellement d'ordre  $\gamma^{-1}$ ) ce qui rend l'algorithme malgré tout très robuste et «*quasi open-loop*» dans le sens que l'on n'a pas strictement besoin d'un contrôle en temps réel. Compte tenu de sa forme particulière où on devine un candidat qu'on «vérifie» ensuite rapidement avec deux bases complémentaires, on a proposé le nom de «Guess and Check» (GC) pour le schéma précédent.

Même si l'algorithme améliore de nombreuses faiblesses des approches précédentes qui les rendaient irréalisables, il souffre d'une de leurs limitations : ses gains théo-

---

27. Cette impossibilité semble pouvoir être liée à la théorie du codage [100]. La borne de Plotkin [101] montre par exemple qu'il est impossible d'espérer obtenir une distance de Hamming  $d = n/2$  en moyenne entre tous les états en utilisant un nombre  $k$  «petit» de bases. Cette dernière stipule en effet que le nombre maximum  $\mathcal{N}$  de mots que l'on peut coder avec  $N$  bits en conservant une distance de Hamming  $d = N/2$  entre chaque mot est borné :

$$\mathcal{N} \leq 2N.$$

Dans notre cas, on a  $\mathcal{N} = \frac{2^n}{k}$ ,  $N = n \times k$  soit dans le meilleur des cas :  $\frac{2^n}{k} \leq 2n \times k$  ce qui demande que  $k$  soit exponentiel en le nombre de bits. Dans le cas général, si on ne demande pas une distance de Hamming  $d = n/2$  mais une autre fraction de  $n$ , je ne connais pas d'inégalité permettant de conclure (la borne de Singleton [102], bien que générale, n'est pas assez contraignante), je ne doute cependant pas que le résultat survive.



riques sont uniquement asymptotiques et généralement très inférieurs pour une cible d'infidélité réaliste.

### 2.3.3 Commentaires généraux

Cette exploration des problèmes d'extraction d'information optimale a permis de proposer un nouvel algorithme, peut-être le seul effectivement réalisable, pour la mesure d'un registre de qubits. C'est un résultat qu'on est en droit de juger modeste mais qui montre que malgré l'abondance de littérature sur le sujet, il reste des problèmes intéressants à attaquer. On peut proposer quelques pistes futures pour tout opportuniste souhaitant attaquer des problèmes «*low risk – low reward*» qui ne révolutionnent pas la Physique mais sont plaisants à étudier, ne serait-ce que pour mieux comprendre les équations maîtresses stochastiques utilisées en mesure continue.

La littérature actuelle –et notre contribution n'y fait pas exception– s'est uniquement focalisée sur l'optimisation *asymptotique* de l'extraction d'information. Les simulations numériques montrent malheureusement que lorsque la taille de l'espace de Hilbert considéré grandit, la vitesse obtenue en pratique peut être très inférieure à ce que le comportement à  $t \rightarrow +\infty$  peut laisser supposer (voir appendice F). Pourtant, comme on est capable de calculer exactement la distribution de n'importe quelle quantité pour une mesure pure (en s'inspirant par exemple de la remarque 4), obtenir des résultats aux temps intermédiaires n'est pas inaccessible en principe. Cela demande de sortir de l'approche «usuelle» consistant à étudier directement et exclusivement le processus stochastique pour passer à l'approche duale sur la densité de probabilité de la quantité considérée. Il s'agit d'un angle d'attaque probablement plus lourd et moins «joli» mathématiquement, mais les divers paradoxes que l'on a observés notamment pour la purification optimale d'un qubit montrent que l'entreprise n'est pas sans intérêt.

Que ce soit pour la purification ou la mesure optimale, et à l'exception du cas particulier des registres, les seuls observables considérées ont été celles possédant un espacement linéaire entre les valeurs propres. Beaucoup de résultats dépendent directement de ce choix qui est pourtant assez restrictif et pas forcément motivé<sup>28</sup>. On pourrait se demander quels résultats sont valables pour des observables ayant une structure différente, par exemple pour la mesure continue simultanée de  $|\mathcal{H}_s|$  projecteurs sur les états d'une base orthonormée donnée. Dans ce dernier cas, la structure unidimensionnelle disparaît et tous les états sont discriminables avec la même facilité. On imagine assez volontiers que les gains que l'on peut obtenir dans cette situation sont moindres et on peut se demander comment caractériser les cas où il est possible d'obtenir un certain gain.

Nous n'avons que superficiellement étudié le problème de la mémoire, c'est à dire le problème de la représentation d'un état avec un nombre petit de paramètres. Dans le cas d'un registre de qubits on a proposé une méthode, mais il serait intéressant de généraliser au cas de systèmes quelconques pour voir si une telle économie y est possible. Ce problème de l'explosion du nombre exponentiel du nombre de degré de liberté a été largement attaqué dans d'autres domaines (et notamment en matière

---

28. Pourquoi, par exemple, devrait-on privilégier la structure unidimensionnelle qu'un tel choix induit ?

condensée) avec l'introduction des réseaux de tenseurs [103] qui permettent d'approcher des états «physiques» d'espace de Hilbert de dimension  $2^n$  avec un nombre uniquement polynomial de paramètres [104]. Il n'est pas impossible qu'une telle technologie puisse-t-être utilisée dans le contexte de l'extraction optimale d'information<sup>29</sup>.

Enfin, mentionnons que le caractère classique de la mesure optimale a été sous exploité et qu'il permet de trivialisier certaines preuves existantes inutilement obscurcies par l'écriture quantique. Peut-être est-il possible de profiter de cette nouvelle manière de présenter le problème pour trouver d'autres situations d'intérêt ou faire le lien avec des problèmes déjà résolus en théorie des probabilités (classiques).

---

29. Il s'agirait d'un juste retour aux sources puisque ces modèles furent inventés pour résoudre des problèmes en information quantique.



# Chapitre 3

## Applications

Les «applications» de ce chapitre se distinguent des «résultats» précédents en ce qu'elles ne demandent a priori pas de nouveaux développements mathématiques mais utilisent les théorèmes précédemment démontrés (pour la section 3.1) ou simplement la structure générale des équations introduites au premier chapitre (pour les sections 3.2 et 3.3).

### 3.1 Contrôle par l'intensité de la mesure

#### 3.1.1 Introduction

L'objectif du contrôle quantique est de guider un système d'intérêt vers un état cible en exploitant l'information obtenue en temps réel par une mesure continue. Comme dans la section 2.3, la partie «active» du contrôle que l'on s'autorise est typiquement un Hamiltonien dépendant du temps et (ici) borné. La théorie générale présente de fortes similarités avec la théorie classique du contrôle stochastique et a été posée sur les mêmes bases mathématiques rigoureuses [105, 106]. Les protocoles optimaux sont généralement inconnus (à part une exception dans le cas d'un qubit [107]) car à la liberté du Hamiltonien de contrôle s'ajoute la liberté de l'opérateur mesuré. Le caractère non-commutatif de la mécanique quantique ajoute ici la subtilité que la mesure ne possède pas seulement un effet de conditionnement bayésien mais aussi un réel impact sur la dynamique (en contractant les phases dans la base propre de mesure). Agir sur la mesure permet ainsi non seulement de modifier l'extraction d'information –la partie passive du contrôle– mais aussi d'influencer activement la dynamique.

En fait, en utilisant simplement la rétroaction de la mesure, il est possible de contrôler un système sans utiliser de Hamiltonien additionnel. En changeant dynamiquement l'opérateur mesuré on peut même contrôler le système aussi bien qu'avec un actuateur externe [108, 109] (voir [110] pour une étude similaire dans le discret), situation évidemment impossible en classique. On peut se demander s'il est possible de faire avec encore moins. Peut-on contrôler un système quantique en gardant l'opérateur mesuré fixe et en ne jouant qu'avec l'intensité  $\gamma$  de la mesure ?

Dans ce qui suit, on ne va pas tant s'intéresser à la préparation d'états arbitraires, qui est manifestement impossible avec une contrainte aussi forte, qu'à la construction de dynamiques hors équilibre *intéressantes*. L'idée est d'exploiter notre étude des sauts

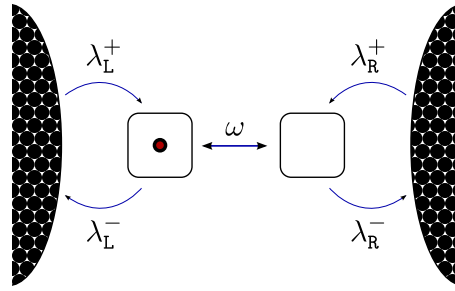


FIGURE 3.1 – Modèle minimal : la particule rouge peut sauter d’un site à l’autre de manière cohérente (double flèche) ou d’un site à un bain de manière dissipative (simples flèches).

quantiques en 2.1 et en particulier la découverte que les taux de sauts dans la limite de mesure forte sont renormalisés différemment pour un couplage dissipatif et pour un couplage cohérent. Jouer sur l’intensité de la mesure permet par conséquent de favoriser une transition par rapport à un autre et cela conditionnellement à l’état du système. Même si on n’a ainsi qu’une prise rudimentaire sur la dynamique du système, on va voir que cette dernière est suffisante pour modifier profondément les propriétés thermodynamiques observées par rapport au cas sans contrôle.

### 3.1.2 Exemple minimal

#### 3.1.2.a Modèle

On peut commencer par étudier un exemple minimal (voir [6] pour plus de détails) dans lequel les comportements «*intéressants*» annoncés précédemment peuvent être observés. On considère un système (ouvert) à trois niveaux  $\mathcal{H}_s = \text{Vect}\{|0\rangle, |L\rangle, |R\rangle\}$  qui correspondent typiquement à une particule pouvant occuper le site de gauche, le site de droite ou aucun site d’une double boîte (voir Fig. 3.1). On imagine qu’il existe un Hamiltonien  $H$  de couplage permettant un «*tunnelling*» cohérent entre  $|L\rangle$  et  $|R\rangle$  :

$$H = \frac{\omega}{2} (|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|).$$

On suppose que des particules peuvent aussi être injectées par des réservoirs markoviens à gauche et à droite ce qui ajoute à l’évolution les termes dissipatifs suivants :

$$\begin{aligned} L_L(\rho) &= \lambda_L^- \mathcal{D}[|L\rangle\langle 0|](\rho) + \lambda_L^+ \mathcal{D}[|0\rangle\langle L|](\rho) \\ L_R(\rho) &= \lambda_R^- \mathcal{D}[|R\rangle\langle 0|](\rho) + \lambda_R^+ \mathcal{D}[|0\rangle\langle R|](\rho), \end{aligned}$$

où  $\lambda_L^+$  et  $\lambda_L^-$  correspondent aux taux d’injection et de capture à gauche (resp. pour  $\lambda_R^+$  et  $\lambda_R^-$  à droite). Multiplier ces taux par une constante modifie le couplage au réservoir et changer leur ratio modifie le potentiel chimique associé. On suppose enfin que l’on est capable de mesurer continuellement la position de la particule à l’aide de l’opérateur <sup>1</sup>

1. On aurait pu tout aussi bien considérer la mesure continue des trois projecteurs  $|0\rangle\langle 0|$ ,  $|L\rangle\langle L|$  et  $|R\rangle\langle R|$  au même taux  $\gamma(t)$ . Dans ce second cas, la mesure distingue aussi bien les états deux à deux

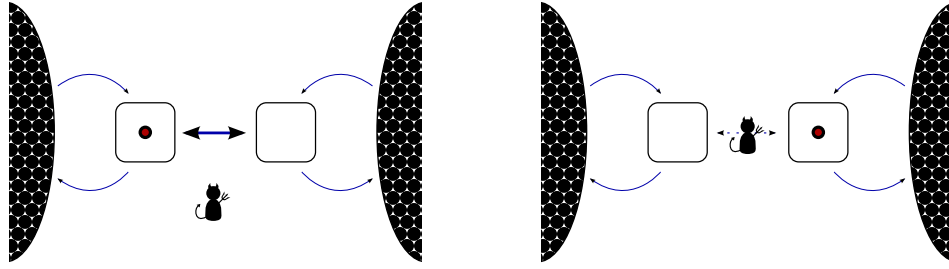


FIGURE 3.2 – Heuristique de la méthode de contrôle du flux. La force de la mesure permet d'ouvrir ou de fermer la transition cohérente *conditionnellement* à la position de la particule et ainsi de créer un biais.

$\mathcal{O} = |\text{L}\rangle\langle\text{L}| - |\text{R}\rangle\langle\text{R}|$  à un taux  $\gamma(t)$ . La matrice densité du système obéit donc finalement à l'équation différentielle stochastique :

$$d\rho_t = -i[H, \rho_t] dt + L_L(\rho_t) dt + L_R(\rho_t) dt + \gamma(t) \mathcal{D}[\mathcal{O}](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma(t)} \mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t) dW_t. \quad (3.1.1)$$

Que le lecteur ne se laisse pas impressionner par l'abondance de termes, la situation physique considérée est relativement simple. On a une «chaîne» de deux sites, couplés entre eux par un Hamiltonien, couplés chacun à l'extérieur par un bain et on mesure continuellement le tout. C'est le modèle le plus simple dans lequel on peut avoir une dynamique hors équilibre non triviale (typiquement un flux moyen de particules d'un réservoir à l'autre) et une compétition entre mesure continue, dynamique incohérente et dynamique cohérente. Bien que ce modèle soit aussi pertinent à étudier pour  $\gamma$  du même ordre que  $\omega$  et  $\lambda_{L/R}^\pm$ , on va s'intéresser à la limite mesure forte (ou semi-classique) dans laquelle la mesure domine la dynamique.

Pour construire une dynamique hors équilibre non triviale, on va s'inspirer du démon de Maxwell classique. Le couplage cohérent entre L et R est une «porte» que la mesure peut fermer ou ouvrir grâce à l'effet Zénon : plus la mesure est forte, plus cette transition est bloquée. À l'inverse, les connections dissipatives aux bains ne sont pas touchées par la mesure. En jouant sur la force de la mesure on peut choisir d'ouvrir ou de fermer la porte entre L et R, *sans influence* sur les autres taux de transition, et conditionnellement à la position de la particule (voir Fig. 3.2). On peut ainsi espérer biaiser le flux de particules vers la gauche ou vers la droite, éventuellement dans le sens inverse à celui qui serait induit par la différence de potentiels chimiques en l'absence de contrôle. Ce qui suit n'est que la mise en équations un peu pédante de cette trivialité.

### 3.1.2.b Limite $\gamma \rightarrow +\infty$ et calcul du flux

Avant de nous attaquer au cas avec contrôle, regardons ce qui se passe lorsque  $\gamma(t) \equiv \text{constante}$ . À la limite de mesure forte, on peut utiliser le théorème (2.1.7) pour simplifier fortement la dynamique du système donnée par (3.1.1). La matrice densité

---

alors que pour  $\mathcal{O} = |\text{L}\rangle\langle\text{L}| - |\text{R}\rangle\langle\text{R}|$  on distingue mieux L et R (la différence des valeurs propres vaut 2) que 0 et L ou R (la différence des valeurs propres vaut 1). Cette asymétrie étant sans conséquence sur l'esprit des résultats, on a choisi d'aller au plus simple.

$\rho$  devient un processus de Markov *classique* entre les états pointeurs  $|0\rangle\langle 0|$ ,  $|L\rangle\langle L|$  et  $|R\rangle\langle R|$  et on a les taux de transition suivants :

$$\begin{aligned} M_{L\leftarrow R} &= M_{R\leftarrow L} = \frac{\omega^2}{4\gamma}, \\ M_{L\leftarrow 0} &= \lambda_L^+, \\ M_{0\leftarrow L} &= \lambda_L^-, \\ M_{R\leftarrow 0} &= \lambda_R^+, \\ M_{0\leftarrow R} &= \lambda_R^-. \end{aligned}$$

Dans cette limite, on peut calculer extrêmement facilement  $\mathbb{P}_i(t)$ , la probabilité que l'état soit au site  $i = 0, L$  ou  $R$  en  $t$  comme pour n'importe quel processus de Markov et on a :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}_i(t) = \sum_{k \in \{0, L, R\}} M_{i\leftarrow k} \mathbb{P}_k(t),$$

avec la convention  $M_{i\leftarrow i} = -\sum_{k \neq i} M_{k\leftarrow i}$ . Aux temps longs, la probabilité stationnaire  $\mathbb{P}_i^\infty$  est dans le noyau de  $M$  et on calcule explicitement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^\infty &= \frac{(\lambda_L^- \lambda_R^-)(1 + \kappa)}{\Sigma}, \\ \mathbb{P}_L^\infty &= \frac{\kappa(\lambda_L^+ \lambda_R^+) + \lambda_L^+ \lambda_R^-}{\Sigma}, \\ \mathbb{P}_R^\infty &= \frac{\kappa(\lambda_R^+ \lambda_L^+) + \lambda_R^+ \lambda_L^-}{\Sigma}, \end{aligned}$$

avec  $\kappa = \frac{\omega^2}{4\gamma}$  et :

$$\Sigma = \lambda_R^+ \lambda_L^- + \lambda_R^- \lambda_L^+ + \lambda_R^- \lambda_L^- + \kappa(\lambda_R^- + \lambda_L^- + 2\lambda_R^+ + 2\lambda_L^-).$$

La limite grand  $\gamma$  n'était pas nécessaire pour ce calcul que l'on peut très bien effectuer sans cette simplification. Le réel avantage de cette approche *semi-classique* par essence est qu'elle permet d'obtenir une caractérisation classique du flux. En effet, il suffit de faire la différence entre le nombre de trajectoires  $L \rightarrow R$  et le nombre de trajectoires  $R \rightarrow L$  (ou compter le nombre de tours dans le triangle  $(0, L, R)$ , voir Fig. 3.3). Le flux de particules  $J$  allant de gauche vers la droite est alors un processus stochastique *scalaire* dont la moyenne aux temps longs vaut simplement :

$$\mathbb{E}^\infty[J] = M_{L\leftarrow R} \mathbb{P}_R^\infty - M_{R\leftarrow L} \mathbb{P}_L^\infty,$$

soit :

$$\mathbb{E}^\infty[J] = \kappa \frac{\lambda_L^+ \lambda_R^- - \lambda_R^+ \lambda_L^-}{\Sigma} \underset{\gamma \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa \frac{\lambda_L^+ \lambda_R^- - \lambda_R^+ \lambda_L^-}{\lambda_R^+ \lambda_L^- + \lambda_R^- \lambda_L^+ + \lambda_R^- \lambda_L^-}.$$

Pour fixer les idées on peut prendre un taux de capture par les réservoirs constant  $\lambda_{L/R}^- = \lambda$  et jouer uniquement sur les taux d'injection  $\lambda_{R/L}^+ = \lambda_{R/L}$  pour obtenir :

$$\mathbb{E}^\infty[J] \underset{\gamma \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa \frac{\lambda_L - \lambda_R}{\lambda_R + \lambda_L + 1},$$

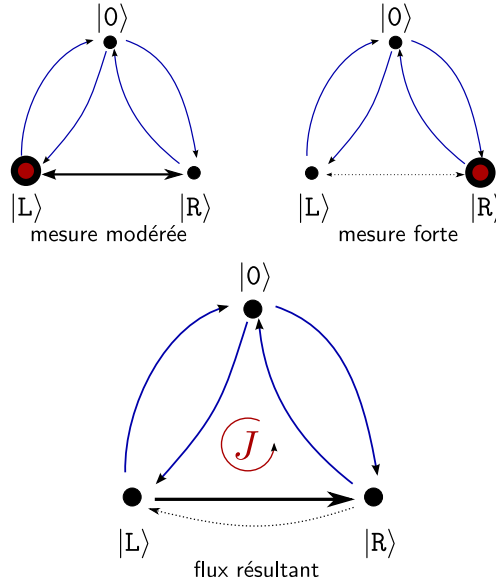


FIGURE 3.3 – On mesure modérément quand la particule est à gauche et fort quand elle est à droite. On biaise ainsi les taux de transition et crée un flux moyen strictement positif de la gauche vers la droite.

expression dont le comportement est intuitif et correspond à ce qu'on attendrait classiquement dans le cas où la transition entre L et R serait limitante. On observe naturellement que si le potentiel chimique est plus élevé à gauche qu'à droite, on a un flux de particules de la gauche vers la droite (et inversement si le potentiel chimique est plus élevé à droite).

### 3.1.2.c Contrôle du flux moyen

Comme annoncé dans la présentation du modèle, le couplage cohérent entre L et R va jouer le rôle de la «porte» entre les deux compartiments comme pour le démon de Maxwell classique. L'idée est de mesurer plus fort quand la particule est en R que lorsqu'elle est en L, de sorte que sa probabilité d'effectuer la transition  $R \rightarrow L$  soit plus faible que la probabilité du saut  $L \rightarrow R$  (voir Fig. 3.3). On choisit donc deux forces de mesure  $\gamma_{\min}$  et  $\gamma_{\max}$  que l'on utilise suivant que la particule est à gauche ou à droite. Notons que dans les deux cas, on garde  $\gamma$  très grand devant les autres paramètres de la dynamique  $\omega$  et  $\lambda_{L/R}^{\pm}$  afin que  $\rho_t$  reste un processus de saut à tout temps.



On peut refaire la même analyse que précédemment avec les taux modifiés :

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{L \leftarrow R} &= \frac{\omega^2}{4\gamma_{\max}} = \kappa_{\min}, \\ \tilde{M}_{R \leftarrow L} &= \frac{\omega^2}{4\gamma_{\min}} = \kappa_{\max}, \\ \tilde{M}_{L \leftarrow 0} &= \lambda_L^+, \\ \tilde{M}_{0 \leftarrow L} &= \lambda_L^-, \\ \tilde{M}_{R \leftarrow 0} &= \lambda_R^+, \\ \tilde{M}_{0 \leftarrow R} &= \lambda_R^-, \end{aligned}$$

pour obtenir :

$$\mathbb{E}^\infty[J] \underset{\kappa_{\min}, \kappa_{\max} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\kappa_{\max} \lambda_L - \kappa_{\min} \lambda_R}{\lambda_R + \lambda_L + 1},$$

où on a effectué comme précédemment les simplifications  $\lambda_{L/R}^- = \lambda$  et  $\lambda_{R/L}^+ = \lambda_{R/L}$ . On observe ainsi que pour  $\frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} > \frac{\lambda_R}{\lambda_L}$ , on peut créer un flux de particule dans le sens *opposé* à celui prévu par la dynamique sans contrôle. L'opérateur peut contrôler le flux, sa direction et son intensité, avec pour seul paramètre libre la force de la mesure.

*Remarque 10* (Échardes). Si c'est la proposition sur les sauts qui permet de comprendre le fonctionnement du contrôle par la mesure, la section sur les échardes n'est pour autant pas inutile pour l'implémentation du protocole. En effet, la présence des échardes à  $\gamma \rightarrow +\infty$  rend légèrement non trivial le choix du critère permettant de dire que la particule est ou non à gauche. Une méthode naïve comparant simplement  $\mathbb{P}_L(t)$  et  $\mathbb{P}_R(t)$  risque de déclencher de manière intempestive un changement de la force de mesure. La présence des échardes impose soit de moyenniser ces probabilités sur un temps de l'ordre de  $\gamma^{-1}$ , soit d'introduire une hystérésis.

*Remarque 11* (Interprétation). Le fait qu'il soit possible de contrôler une quantité thermodynamique potentiellement macroscopique comme un flux de particules en jouant uniquement sur la force de la mesure peut sembler paradoxal si on voit cette dernière comme une simple acquisition d'information passive sur un système. Comment, en effet, pourrait-on modifier la thermodynamique d'un objet en «clignant des yeux», même de manière subtile? Afin de dissiper tout malentendu, il convient d'insister sur le fait que ce n'est pas de cette manière que fonctionne la méthode précédente. Souvenons nous que la mesure continue contient deux parties, une phase d'interaction avec une sonde et une phase de mesure projective de la sonde. Modifier le ratio de sondes mesurées ne change *pas* les propriétés du processus de Markov limite. En jouant sur  $\gamma$ , on modifie la quantité de sondes envoyées par unité de temps ou de manière équivalente la force de leur interaction avec le système, on a donc un effet mécanique direct sur ce dernier qui ne se limite pas à une acquisition d'information et qui explique qu'un contrôle soit possible. Sauf à croire comme Ptolémée que les yeux émettent les rayons qui permettent de voir les choses<sup>2</sup> un peu comme le sonar des chauve-souris, on ne

2. Notons que cette théorie est trivialement falsifiée comme l'a remarqué le physicien et philosophe perse Alhazen au XI-ième siècle : si les yeux émettaient vraiment le flux qui nous permet de voir les choses, alors on verrait aussi bien le jour que la nuit.

peut contrôler quoi que ce soit en clignant des yeux, et c'est plutôt en allumant et éteignant subtilement la lumière que la méthode précédente parvient, en apparence, à défier la thermodynamique.

### 3.1.3 Cas presque général

L'exemple précédent s'étend facilement à un cas plus général sur un graphe  $\mathcal{G}$  quelconque de  $|\mathcal{H}_s|$  sites. Pour simplifier légèrement la situation, on va considérer une évolution en l'absence de mesure induite par le générateur :

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{A}(\rho) - i[H, \rho],$$

où  $\mathcal{A}$  est un supéroperateur restreint à la diagonale de  $\rho$ , *i.e.*  $\mathcal{A}(\rho)_{ij} = \delta_{ij} \sum_k A_{ik} \rho_{kk}$ , que l'on peut donc voir comme une simple matrice et qui code pour une évolution dissipative générale. On suppose qu'on mesure continuellement l'opérateur  $\mathcal{O} = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$  où tous les  $\lambda_k$  sont réels et différents. On écrit la force de la mesure  $\gamma(t)$  sous la forme  $\gamma(t) = \Gamma c(t)$  qui fait apparaître un paramètre de scaling  $\Gamma$  et le contrôle  $c$ . Pour simplifier on rescale aussi le Hamiltonien que l'on note  $H = \sqrt{\Gamma} h$ . À  $\Gamma$  fixé, la matrice densité  $\rho$  du système considéré obéit donc à l'équation différentielle stochastique :

$$d\rho_t = \mathcal{A}(\rho_t) dt - i[H, \rho_t] dt + \Gamma c(t) \mathcal{D}[\mathcal{O}](\rho_t) dt + \sqrt{\Gamma c(t)} \mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t) dW_t.$$

qui est simplement la généralisation à un nombre arbitraire de dimensions (et à un rescaling près) de (3.1.1). La proposition (2.1.7) sur les sauts nous dit que quand  $\Gamma \rightarrow +\infty$ ,  $\rho_t$  devient un processus de saut de matrice de Markov  $M$  telle que :

$$M_{i \leftarrow j} = \mathcal{A}_{ij} + \frac{1}{4c} \left| \frac{h_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} \right|^2, \quad \text{pour } i \neq j$$

avec encore une fois la convention que  $M_{i \leftarrow i} = -\sum_{k \neq i} M_{k \leftarrow i}$ . Le contrôle par la mesure consiste à faire dépendre la force de la mesure du site sur lequel se trouve le processus de Markov et donc d'avoir  $c \rightarrow c_j$ . Pour simplifier on introduit la matrice  $\mathcal{B}_{ij} = \left| \frac{h_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} \right|^2$  et le vecteur  $\kappa_i = 1/(4c_i)$  qu'on identifiera avec la matrice diagonale correspondante  $\kappa = \sum_i \kappa_i |i\rangle\langle i|$ . La liberté induite par le contrôle est ainsi symbolisée par les  $|\mathcal{H}_s|$  composantes de  $\kappa$  et la matrice du Markov en présence de contrôle devient :

$$\tilde{M} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \kappa \quad (\text{pour les coefficients non-diagonaux}),$$

et  $\tilde{M}_{i \leftarrow i} = -\sum_{k \neq i} \tilde{M}_{k \leftarrow i}$ . Comprendre les propriétés du système contrôlé revient dès lors simplement à étudier la nouvelle matrice de Markov  $\tilde{M}$  en fonction de  $\kappa$ .

On peut commencer par étudier le cas purement cohérent, c'est à dire le cas où  $\mathcal{A} = 0$ . Dans ce cas, pour  $\kappa = \mathbb{1}$  on a  $\tilde{M}$  symétrique et donc en faisant une hypothèse classique d'ergodicité, on obtient que la probabilité stationnaire  $\mathbb{P}^\infty(\mathcal{B})$  est uniforme sur  $\mathcal{G}$  et qu'il n'y a pas de flux à l'équilibre. En jouant sur la force de la mesure, on peut biaiser arbitrairement cette probabilité. En effet, on a :

$$\mathbb{P}_i^\infty(\mathcal{B}\kappa) = \frac{[\kappa^{-1} \mathbb{P}^\infty(\mathcal{B})]_i}{\|\kappa^{-1} \mathbb{P}^\infty(\mathcal{B})\|_1} = \frac{\kappa_i^{-1}}{\|\kappa^{-1}\|_1}.$$

Autrement dit, il est possible d'obtenir n'importe quelle probabilité stationnaire cible sur le graphe avec le contrôle approprié. Il est en revanche impossible de créer un flux dans cette situation, et ce quel que soit le contrôle appliqué. En effet, le flux  $J_{i \leftarrow j}(\mathcal{B}\kappa)$  de probabilité moyen de  $j$  vers  $i$  est toujours contraint par la condition de balance détaillée :

$$J_{i \leftarrow j}(\mathcal{B}\kappa) = \mathbb{P}_j^\infty(\mathcal{B}\kappa)\mathcal{B}_{ij}\kappa_j - \mathbb{P}_i^\infty(\mathcal{B}\kappa)\mathcal{B}_{ji}\kappa_i = \frac{\mathcal{B}_{ij}}{\|\kappa^{-1}\|_1}(\kappa_j^{-1}\kappa_j - \kappa_i^{-1}\kappa_i) = 0.$$

Ce résultat est assez intuitif, si on n'a que des transitions cohérentes, jouer sur l'effet Zénon avec la mesure a pour unique conséquence que de ralentir ou accélérer l'écoulement local du temps. Cela permet de biaiser la probabilité stationnaire mais évidemment pas le flux moyen qui reste nul.

Supposons désormais que  $\mathcal{A}$  est la matrice de Markov d'un processus *sans* flux à l'équilibre, *i.e.* :

$$J_{i \leftarrow j} = \mathbb{P}_j^\infty(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{A}_{i \leftarrow j} - \mathbb{P}_i^\infty(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{A}_{j \leftarrow i},$$

où  $\mathbb{P}^\infty(\mathcal{A})$  est la probabilité stationnaire du processus de Markov de matrice  $\mathcal{A}$ . Alors, en l'absence de dynamique cohérente il n'y a évidemment aucune possibilité de contrôle puisque la mesure n'a pas d'influence sur la dynamique dissipative. Néanmoins, en combinant ces deux dynamiques sans flux, on peut créer une dynamique avec flux. Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}\kappa$  sont les matrices de Markov de processus sans flux à l'équilibre, alors  $\tilde{M} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\kappa$  peut avoir un flux non nul comme le montre l'exemple minimal étudié précédemment. En fait, le phénomène est même *générique* et on peut *presque* toujours biaiser une des transitions pour créer du flux. C'est assez intuitif mais on peut malgré tout vouloir s'en convaincre par le calcul en posant :

$$\kappa_i = \varepsilon \delta_{il},$$

pour un certain  $l$  à choisir plus tard et en supposant –uniquement par commodité– que tous les  $\mathcal{A}_{ij}$  sont non nuls. On peut réécrire la condition d'absence de flux comme l'égalité suivante pour tout cycle de trois sites  $i, j, k$

$$j_{ijk}^\circ = \tilde{M}_{ij}\tilde{M}_{jk}\tilde{M}_{ki} - \tilde{M}_{ik}\tilde{M}_{kj}\tilde{M}_{ji} = 0 \quad (3.1.2)$$

Au premier ordre en  $\varepsilon$  on a :

$$j_{ijl}^\circ = \varepsilon \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{li}\mathcal{B}_{jl} - \varepsilon \mathcal{A}_{lj}\mathcal{A}_{ji}\mathcal{B}_{il}.$$

En ce souvenant que  $\mathcal{A}$  vérifie la condition (3.1.2) on obtient :

$$j_{ijl}^\circ = \varepsilon \frac{\mathcal{A}_{lj}\mathcal{A}_{ji}}{\mathcal{A}_{jl}} [\mathcal{A}_{il}\mathcal{B}_{jl} - \mathcal{B}_{il}\mathcal{A}_{jl}],$$

expression qui est non nulle à condition qu'il existe  $i, j, l$  tels que :

$$\frac{\mathcal{A}_{il}}{\mathcal{A}_{jl}} \neq \frac{\mathcal{B}_{il}}{\mathcal{B}_{jl}},$$

qui est vérifiée pour au moins un  $l$  dans la situation peu restrictive où  $\mathcal{A}$  n'est pas proportionnelle à  $\mathcal{B}$ .

Après ces développements quelque peu formels, résumons ce qu'il y a à retenir du cas général. En faisant simplement varier la force de la mesure :

- On peut contrôler la distribution stationnaire sur les pointeurs pour peu que la dynamique contienne une partie cohérente.
- On peut créer du flux de manière générique –dans un système dans lequel il n’y en a pas sans contrôle– pour peu que ce dernier contienne à la fois des transitions dissipatives et cohérentes.

La conclusion plus générale est que lorsque l’on a la capacité de mesurer continuellement un système quantique, alors on a de manière générique une prise pour influencer ses propriétés à l’équilibre et une capacité à engendrer une dynamique hors équilibre non triviale.

*Remarque 12* (Paradoxe de Parrondo). On vient de voir qu’il était possible de créer un flux moyen dans un système quantique en alternant entre deux situations ( $\gamma_{\min}$  et  $\gamma_{\max}$ ), dans lesquelles le flux stationnaire est nul. On a vu dans le premier exemple minimal qu’il était même possible de créer un flux net dans un certain sens en alternant entre deux situations dans lesquelles le flux va naturellement dans l’autre sens. Ce phénomène rappelle le paradoxe de Parrondo [111] dans lequel un joueur alternant entre deux jeux perdant en moyenne parvient à dégager un profit et c’est un mécanisme analogue qui permet le fonctionnement des moteurs browniens [112, 113, 114].

*Remarque 13* (Robustesse). Même si l’étude précédente a été faite exclusivement dans la limite où la mesure est forte, il ne fait aucun doute que les résultats sont qualitativement robustes et restent valables pour une mesure faible. C’est d’ailleurs un régime qu’il serait intéressant d’étudier à l’avenir car, en l’absence de rescaling de la dynamique cohérente, il existe certainement un optimum non trivial de  $\gamma$  permettant d’obtenir un flux maximal. En effet, plus la mesure est forte, mieux on connaît le système et donc mieux on peut le contrôler. L’effet Zénon quant à lui commande d’utiliser la mesure la plus faible possible pour ne pas trop renormaliser les transitions cohérentes et ne pas geler le flux. Il faut acquérir de l’information pour contrôler mais en acquérir trop sabote la dynamique que l’on souhaite engendrer. Explorer ce régime fournirait probablement quelques intuitions sur la bonne manière de formuler la thermodynamique quantique en présence de mesures répétées.

### 3.1.4 Réalisation expérimentale

L’idée qui a motivé l’exemple minimal étudié précédemment (et l’article [6] correspondant) –avant même en fait que la proposition générale sur les sauts ne soit connue– était de contrôler le flux dans une double boîte quantique (*double quantum dot*) mesurée par un point quantique (*quantum point contact*) et couplée à deux réservoirs d’électrons (*source* et *drain*). Il se trouve que les ordres de grandeurs aujourd’hui atteignables sur les doubles boîtes y rendent le régime que nous avons étudié complètement irréaliste. En pratique, le couplage avec l’environnement (phonons, champ électromagnétique, etc.) rend le *tunneling* entre les deux boîtes incohérent aux échelles où on est capable de l’observer. De plus, le temps typique de mesure  $\gamma^{-1}$  est en général bien plus grand que les autres constantes de la dynamique. Intuitivement, un tel système est donc bien mieux modélisé par une équation différentielle stochastique de la forme :

$$d\rho_t = -i[H_\omega, \rho_t]dt + L_L(\rho_t)dt + L_R(\rho_t)dt + (\gamma(t) + \Gamma_E) \mathcal{D}[\mathcal{O}](\rho_t)dt + \sqrt{\gamma(t)} \mathcal{H}[\mathcal{O}](\rho_t)dW_t,$$

où  $\omega$  et  $\Gamma_E$ , qui correspond à la décohérence induite par l'environnement, sont plusieurs ordres de grandeur au dessus des valeurs atteignables par  $\gamma(t)$ . Le tunneling entre L et R apparaît ainsi incohérent (ou classique) et se fait à un taux :

$$M_{L \leftrightarrow R} = \frac{\omega^2}{4(\Gamma_E + \gamma(t))},$$

que le contrôle ne peut donc influencer que de manière extrêmement marginale.

En pratique, il vaut probablement mieux explorer d'autres types de systèmes sur lesquels on a un bon contrôle (voir par exemple [115] pour une revue). On peut penser par exemple aux qubits supraconducteurs pour lesquels on peut atteindre la bonne hiérarchie d'ordres de grandeur entre dynamique cohérente interne et vitesse de mesure. Dans ces systèmes en revanche, on n'a pas d'équivalent immédiat de «flux de particules». Les qubits supraconducteurs ont aussi l'avantage (mais ici le défaut) d'être plus facilement contrôlables ce qui rend l'action par la force de la mesure seule inutilement restrictive. On peut néanmoins imaginer les utiliser pour une preuve de principe dans l'espoir d'utiliser la méthode un jour pour le contrôle du transport quantique mésoscopique.

## 3.2 Marches quantiques ouvertes

Les marches quantiques ouvertes (*open quantum random walks* ou OQW) sont une généralisation des marches aléatoires usuelles introduites par Attal, Petruccione, Sabot et Sinayskiy [116] en 2012 (voir aussi [117, 118]). Elles sont à distinguer des marches aléatoires quantiques tout court (que l'on pourrait appeler *unitaires* ou UQW), qui ont déjà été largement étudiées [119] depuis les années 1990 et qui sont à la base de nombreux algorithmes quantiques comme l'algorithme de Grover [120]. Les marches quantiques unitaires sont *inspirées* des marches aléatoires classiques mais n'ont de marche que le nom puisqu'il est impossible d'y définir une notion de trajectoire. Les marches quantiques *ouvertes* sont à l'inverse des processus stochastiques *classiques*, dans le sens que leur trajectoire est toujours bien définie, mais *non-markoviens* et c'est dans cette non-markovianité particulière que réside leur caractère quantique. L'intérêt des OQW n'est pas seulement mathématique dans la mesure où elles constituent une implémentation possible du calcul quantique dissipatif [121, 122] et sont en principe réalisables expérimentalement [123, 124, 125, 126], deux caractéristiques qui motivent indubitablement leur exploration.

Les marches quantiques ouvertes ne sont pas non plus sans rapport avec l'étude précédente. Comme leur nom l'indique, il existe un lien direct entre ces marches et les systèmes ouverts et plus particulièrement les interactions répétées, lien que l'on va expliciter. Il est ainsi possible d'importer les résultats dérivés précédemment dans le contexte des mesures pour comprendre le comportement des OQW<sup>3</sup>. Ce parallèle va nous permettre de définir une limite continue pour les marches quantiques ouvertes, le

---

3. Il faut noter que nous avons historiquement fait le cheminement opposé. C'est en comprenant le comportement des marches aléatoires quantiques ouvertes aux temps courts, *puis* en découvrant le parallèle avec le formalisme des mesures répétées, que nous avons découvert les résultats plus généraux du chapitre 2 (modeste découverte qui peut être mise au crédit des OQW).

mouvement brownien quantique ouvert (OQBM), et de comprendre le comportement balistique et diffusif de ce dernier.

### 3.2.1 Construction standard des marches quantiques ouvertes

On peut donner la définition des marches quantiques ouvertes dans un cadre relativement général, pour un graphe  $\mathcal{G}$  quelconque, pas forcément fini. Par simplicité on va en revanche se limiter à un espace interne (parfois appelé gyroscope ou *coin space*)  $\mathcal{H}$  de dimension fini. Une marche aléatoire quantique ouverte est une évolution stochastique d'un doublet  $(x, \rho)$  constitué d'une position  $x$  sur un graphe  $\mathcal{G}$  et d'une matrice densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  qui joue le rôle de degré de liberté interne du marcheur :

$$(x_i, \rho_i) \xrightarrow{\text{stochastique}} (x_{i+1}, \rho_{i+1})$$

Plus précisément, on a avec probabilité  $\Pi[y] = \text{tr}[B_{y \leftarrow x_i} \rho_i B_{y \leftarrow x_i}^\dagger]$  :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= y \\ \rho_{i+1} &= \frac{B_{y \leftarrow x_i} \rho_i B_{y \leftarrow x_i}^\dagger}{\Pi[y]} \end{aligned}$$

où les matrices  $B_{y \leftarrow x}$  spécifient les propriétés statistiques de la marche et sont les équivalents matriciels des racines de probabilités de transition pour une marche aléatoire classique (voir Fig. 3.4). La conservation de la probabilité implique une unique contrainte pour ces matrices :

$$\sum_{y \in \mathcal{G}} B_{y \leftarrow x}^\dagger B_{y \leftarrow x} = \mathbb{1}.$$

Le processus stochastique ainsi construit et restreint au graphe  $\mathcal{G}$  est non markovien et les probabilités de saut dépendent de la trajectoire passée. L'évolution globale en tenant compte de l'information sur l'espace interne est en revanche bien markovienne. Notons qu'il n'y a évidemment aucune objection à parler de trajectoire du marcheur, cette dernière étant simplement la succession des positions  $x_i$  occupées par ce dernier.

Une marche aléatoire quantique ouverte peut aussi facilement être interprétée comme une suite de mesures répétées doublée d'un *feedback* non trivial des résultats de mesure passés sur le choix des mesures futures. La position sur le graphe peut alors être interprétée comme l'état du contrôleur. Supposons que le contrôleur est dans un état  $x_i$  et que le système à mesurer est dans un état  $\rho_i$ . On suppose qu'on applique au système la mesure généralisée (dépendant de l'état du contrôleur suivante) :

$$\rho_i \rightarrow \frac{B_{y, x_i} \rho_i B_{y, x_i}^\dagger}{\Pi[y]} \quad \text{avec probabilité} \quad \Pi[y] = \text{tr}[B_{y, x_i} \rho_i B_{y, x_i}^\dagger].$$

Le résultat, que l'on note alors  $y$ , est le nouvel état du contrôleur qui permet de choisir les mesures généralisées à appliquer à l'étape suivante. Dans le cas où la marche aléatoire est *homogène*, typiquement sur  $\mathbb{R}^d$ , alors les matrices  $B$  ne dépendent pas du site et on peut supprimer la partie rétroaction du contrôleur. L'OQW est alors équivalente à une suite de mesures répétées sur un espace interne dont les résultats correspondent aux changements de position successifs d'un marcheur. Ce parallèle permet de définir une limite continue commode en s'inspirant du résultat sur les mesures répétées.

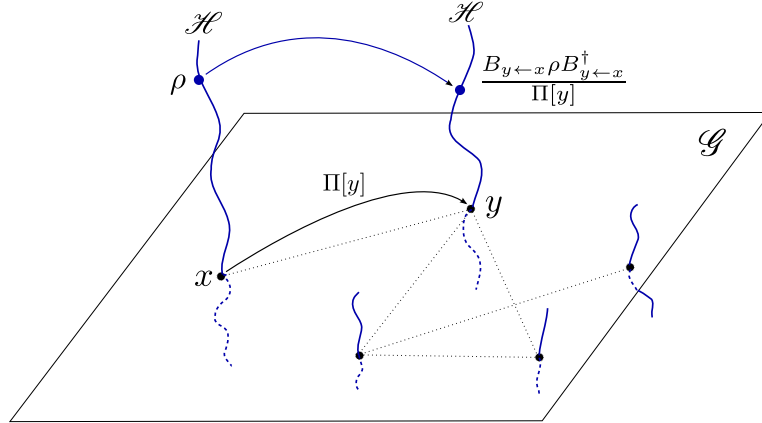


FIGURE 3.4 – Marche aléatoire quantique ouverte sur un graphe  $\mathcal{G}$ . Le degré de liberté interne  $\rho$  du marcheur peut être vu comme un élément d’une fibre au dessus de chaque point du graph.

### 3.2.2 Passage au Brownien quantique ouvert

On va construire le Brownien quantique homogène à une dimension mais la construction se généralise aisément au cas inhomogène et en dimension arbitraire (voir [7]). On commence par simplifier l’évolution 3.2.1 au cas  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ , homogène et pour des sauts vers les plus proches voisins :

$$x_{i+1} = x_i \pm 1$$

$$\rho_{i+1} = \frac{B_{\pm} \rho_i B_{\pm}^\dagger}{\Pi_{\pm}},$$

avec probabilité  $\Pi_{\pm} = \text{tr}[B_{\pm} \rho_i B_{\pm}^\dagger]$  et la condition  $B_+^\dagger B_+ + B_-^\dagger B_- = \mathbb{1}$ . On obtient la limite continue comme en 1.2.2 et finalement comme pour une marche aléatoire classique en développant  $B_+$  et  $B_-$  au voisinage de  $\mathbb{1}/2$ . Contrairement à (1.2.3) où on ne cherchait pas la généralité mais simplement à obtenir une mesure, on veut ici l’expression donnant l’équation la plus complète possible à la limite. Le développement le plus général s’écrit [7] :

$$B_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} + \sqrt{\varepsilon} N - \varepsilon(iH + M + \frac{1}{2} N^\dagger N) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right)$$

$$B_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} - \sqrt{\varepsilon} N - \varepsilon(iH - M + \frac{1}{2} N^\dagger N) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right),$$

où  $H$  est auto-adjoint mais  $M$  et  $N$  sont quelconques. Avec le même raisonnement qu’en 1.2.2, on obtient la limite continue suivante :

$$\begin{aligned} dx_t &= \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + dW_t \\ d\rho_t &= -i[H, \rho_t] dt + \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

expression qui, on le rappelle, utilise les notations :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[N](\rho) &= N\rho N^\dagger - \frac{1}{2}\{N^\dagger N, \rho\} \\ \mathcal{H}[N](\rho) &= N\rho + \rho N^\dagger - \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho] \rho.\end{aligned}$$

La matrice  $M$  est donc une simple «jauge» qui disparaît dans la dynamique. On peut se référer aux Fig. 3.6 et 3.7 pour des exemples de trajectoires.

Dans ce contexte unidimensionnel et homogène, la position du marcheur est exactement le signal des mesures continues. Pour autant, même si les deux concepts sont formellement équivalents, l'interprétation en terme de position modifie les questions que l'on se pose naturellement. Notamment, on peut se demander comment calculer la distribution  $\mathcal{P}(x, t)$  de  $x_t$ , quantité essentielle pour une marche aléatoire, mais a priori sans aucun intérêt si  $x_t$  était une somme de résultats de mesure. En raison du caractère non markovien de  $x_t$  considéré seul, il n'y a pas d'espoir de trouver une équation aux dérivées partielles fermée à la Fokker-Planck pour  $\mathcal{P}$ , mais on peut écrire  $\mathcal{P}$  comme la trace d'un objet qui en possède une.

On définit ainsi :

$$\check{\rho}(x, t) = \mathbb{E}[\rho_t | x_t = x] \mathcal{P}(x, t),$$

qui est en quelque sorte la généralisation «non-commutative» de la probabilité d'être en  $x$ . On a bien  $\text{tr}[\check{\rho}(x, t)] = \mathcal{P}(x, t)$ , mais  $\check{\rho}$  possède l'avantage d'obéir à une équation autonome. En effet, soit une fonction test  $\varphi$ , on a :

$$\mathbb{E}[\varphi(x_t) \rho_t] = \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) \check{\rho}(x, t).$$

On peut calculer  $\partial_t \mathbb{E}[\varphi(x_t) \rho_t]$  en utilisant le lemme d'Itô dans l'espérance ou en dérivant directement dans l'intégrale. On obtient ainsi après calcul :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{2} \check{\rho}(x, t) \partial_x^2 \varphi(x) + (N \check{\rho}(x, t) + \check{\rho}(x, t) N^\dagger) \partial_x \varphi(x) \\ + [-i[H, \check{\rho}(x, t)] + \mathcal{D}[N](\check{\rho}(x, t))] \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \partial_t \check{\rho}(x, t) \varphi(x),\end{aligned}$$

soit en intégrant par partie :

$$\partial_t \check{\rho} = \frac{1}{2} \partial_x^2 \check{\rho} - (N \partial_x \check{\rho} + \partial_x \check{\rho} N^\dagger) - i[H, \check{\rho}] + \mathcal{D}[N](\check{\rho}), \quad (3.2.2)$$

équation qui est l'équivalent de l'équation de Fokker-Planck pour une marche quantique ouverte. On peut la résoudre numériquement pour obtenir la distribution de probabilité  $\mathcal{P}$  de  $x_t$  et observer les non-gaussianités caractéristiques des marches quantiques ouvertes (voir Fig. 3.5).

Le mouvement brownien quantique ouvert 1d montre deux types d'anomalies par rapport au mouvement brownien usuel (voir [8, 7] pour une étude plus détaillée) :

1. la présence de plusieurs<sup>4</sup> gaussiennes aux temps longs (au lieu d'une seule) pour certaines conditions initiales,

---

4. On a au maximum  $n = |\mathcal{H}|$  gaussiennes différentes [127].



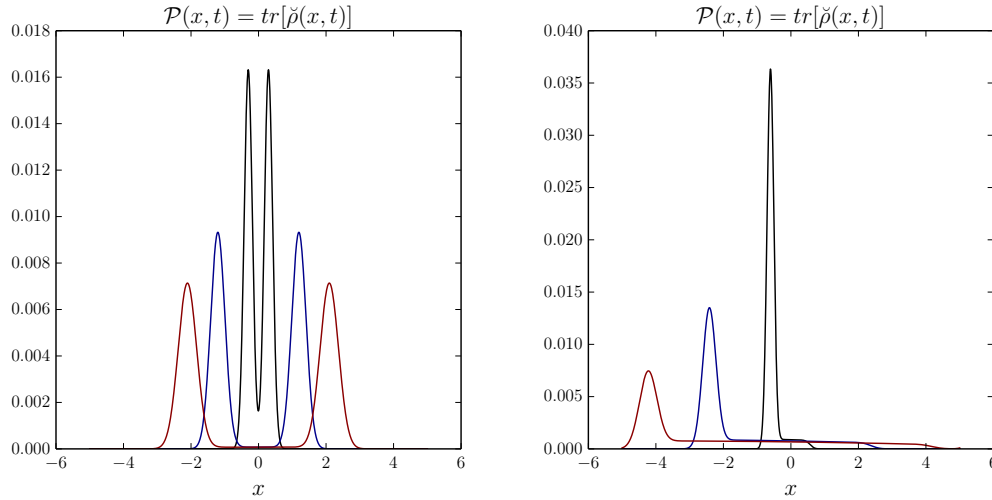


FIGURE 3.5 –  $\mathcal{P}$  obtenu avec l'équation (3.2.2) pour  $|\mathcal{H}| = 2$ ,  $N = \sqrt{\gamma}\sigma_z$ ,  $H = \omega\sigma_y$ . En noir,  $t = 0.01$ , en bleu  $t = 0.04$ , en rouge  $t = 0.07$ .

– à gauche –  $\gamma = 225$ ,  $\omega = 10^2$ ,  $\rho_0 = \text{diag}(0.5, 0.5)$ ,  $x_0 = 0$

– à droite –  $\gamma = 900$ ,  $\omega = 10^4$ ,  $\rho_0 = \text{diag}(1.0, 0.0)$ ,  $x_0 = 0$

Calculs effectués avec **julia** et une discrétisation naïve de (3.2.2) pour  $dt = 10^{-5}$ ,  $dx = 10^{-3}$ . Les résultats sont robustes et le calcul exact en discret fournit des distributions analogues (voir par exemple dans [8]).

2. un comportement très non gaussien aux temps courts, qui se manifeste notamment par la présence d'une grande région où la distribution est quasi-uniforme.

Le premier phénomène a été observé dès le départ [116] et il fait l'objet d'un théorème centrale limite [128]. La présence de plusieurs gaussiennes est en fait un peu moins surprenante qu'il n'y paraît et ne se «voit» pas au niveau des trajectoires individuelles. Intuitivement, on peut considérer qu'on tire au hasard au départ le paquet gaussien que l'on va suivre<sup>5</sup> pour l'évolution ultérieure.

La seconde non-gaussianité est plus surprenante et on va voir en 3.2.3 qu'elle se manifeste aussi au niveau des trajectoires.

### 3.2.3 Comprendre la transition balistique → diffusif

Le comportement aux temps courts peut se comprendre en étudiant l'équation de Fokker-Planck (3.2.2) mais il existe une limite dans laquelle il est plus simple de revenir à l'expression directe (3.2.1). Sans surprise, il s'agit de la situation dans laquelle  $N = \sqrt{\gamma}\mathbb{N} = \sqrt{\gamma}\mathbb{N}^\dagger$ , et  $H = \sqrt{\gamma}\mathbb{H}$  qui est formellement analogue à une situation de mesure forte (voir Fig. 3.7). Dans ce cas on peut utiliser la proposition (2.1.7) pour simplifier l'évolution du gyroscope  $\rho$ . Quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ ,  $\rho$  saute entre les pointeurs de

5. Plus précisément, on peut une fois encore comprendre ce résultat en terme de variables cachées, en particulier dans le cas  $H = 0$  qui est *classique* au sens des modèles de Markov caché. Pour chaque valeur de la variable cachée, une réalisation de l'OQBM est un mouvement brownien *drifté* classique, le drift dépendant de la valeur de la variable cachée.

$N$  avec des taux de transition finis que l'on peut calculer à l'aide de l'équation (2.1.7). Si  $\rho$  est sur le pointeur  $|i\rangle\langle i|$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  de  $N$  on a :

$$dx_t = 2\sqrt{\gamma}\lambda_i dt.$$

Le marcheur possède ainsi un comportement *balistique* (à un petit bruit additionnel près) dont la pente change de manière abrupte lorsque le gyroscope fait un saut (voir Fig 3.7). Si l'on retranche au processus  $x_t$  sa dérive moyenne qui vaut  $d_t = 2\sqrt{\gamma}\sum_{i=1}^{|\mathcal{N}|} \tau_i \lambda_i t$  –où  $\tau_i$  est le temps moyen passé par le gyroscope dans le pointeur  $i$ , alors  $x_t$  va bien atteindre une distribution gaussienne aux temps longs. La variance de la gaussienne finale n'a en revanche aucun rapport avec la variance du bruit  $W_t$  présent dans l'équation initiale (3.2.1) et vient de l'alternance entre des mouvements balistiques de vitesses différentes. Le coefficient de diffusion effectif dépend alors des taux de saut entre pointeur et est proportionnel à  $\sqrt{\gamma}$ , c'est à dire beaucoup plus grand que ce l'on attendrait naïvement si le comportement gaussien venait de la dérivée seconde<sup>6</sup> dans (3.2.2).

Résumons, pour des temps courts comparés à  $M_{i\leftarrow j}^{-1}$ , le taux de saut entre les pointeurs, la distribution de  $x_t$  apparaît très non gaussienne car elle est dominée par le parcours moyen balistique entre les sauts. Pour des temps longs devant  $M_{i\leftarrow j}^{-1}$  en revanche, les parcours balistiques entre chaque saut du gyroscope peuvent se voir comme les incréments indépendants d'une marche aléatoire classique et le comportement effectif de la marche est gaussien.

Le brownien quantique ouvert est un processus stochastique non markovien en position qui possède une dynamique intéressante –dans certains régimes de paramètres– mêlant comportement balistique aux temps courts et fluctuations gaussiennes aux temps longs. Ce comportement le rend a priori intéressant pour modéliser le transport quantique qui possède une transition analogue mais que l'on ne sait pas encore bien modéliser<sup>7</sup> ou éventuellement des situations sans lien avec la mécanique quantique comme l'étude de la matière active et la biologie.

### 3.3 Gravité et mécanique quantique

Que le lecteur peu familier des questions relatives à la quantification de la gravité ne s'émeuve pas d'un tel titre, cette section ne demande aucune connaissance particulière des hypothèses actuellement avancées en gravité quantique. Pas de supersymétrie, de cordes ni de boucles<sup>8</sup>, l'objectif est ici de montrer comment le problème de l'unification entre gravité et mécanique quantique peut être éclairé par une étude assez élémentaire de situations non-relativistes et l'utilisation d'idées héritées de la mesure continue, du contrôle et des modèles de collapse. Galvanisé par l'ignorance exaltée typique du physi-

6. On pourrait d'ailleurs supprimer cette dérivée seconde et avoir toujours un comportement gaussien aux temps longs [8].

7. On peut comprendre le transport balistique quantique en 1d à l'aide des théories conformes hors équilibre [129] mais ces dernières ne permettent pas (encore) de modéliser le passage au diffusif pour les temps longs.

8. Concepts dont la compréhension est de toute façon hors de portée des capacités intellectuelles du présent auteur.

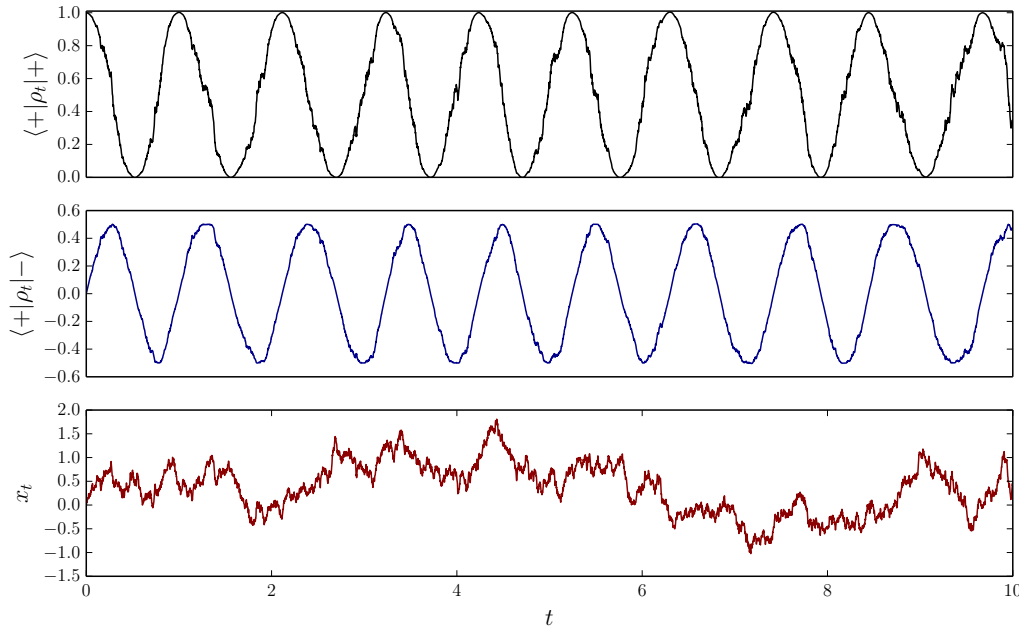


FIGURE 3.6 – Trajectoire de (3.2.1) pour  $N = \sqrt{\gamma}\sigma_z$ ,  $H = \omega\sigma_y$  avec  $\omega = 3$  et  $\gamma = 0.1$ . Les courbes sont obtenues par discrétisation naïve de (3.2.1) avec  $dt = 10^{-4}$ . Le marcheur et le gyroscope sont faiblement couplés et la situation est formellement équivalente à une mesure continue faible.

ciens sorti de son domaine de compétence, on pourra se prendre à rêver de contributions de la théorie des mesures continue à une hypothétique théorie du tout.

### 3.3.1 Introduction

#### 3.3.1.a Contexte

Il n'existe pas de théorie physique cohérente unifiant mécanique quantique et gravité qui soit aujourd'hui précisément définie ou même capable de faire des prédictions testables dans des situations simples. Cette constatation désormais banale motive une quantité de recherche impressionnante en physique théorique, en particulier dans les institutions de recherche prestigieuses. Depuis environ un demi-siècle, la recherche sur la *gravité quantique* a donné lieu à une foule de résultats mathématiques indubitablement originaux mais à remarquablement peu de résultats physiques indiscutables [130]. À ce stade une précision est fondamentale : on désigne en général par théorie de *gravité quantique* toutes les théories dans lesquelles, que ce soit de manière primitive ou émergente, les degrés de liberté dynamiques de l'espace-temps sont quantifiés<sup>9</sup>. Rien n'oblige pourtant l'unification à se faire de cette manière et il est tout à fait imaginable

9. On pourrait dire plus prosaïquement qu'une théorie de gravité quantique est une théorie dans laquelle un certain schéma de perturbation fait apparaître une particule *quantique* (un graviton) vecteur de l'interaction.

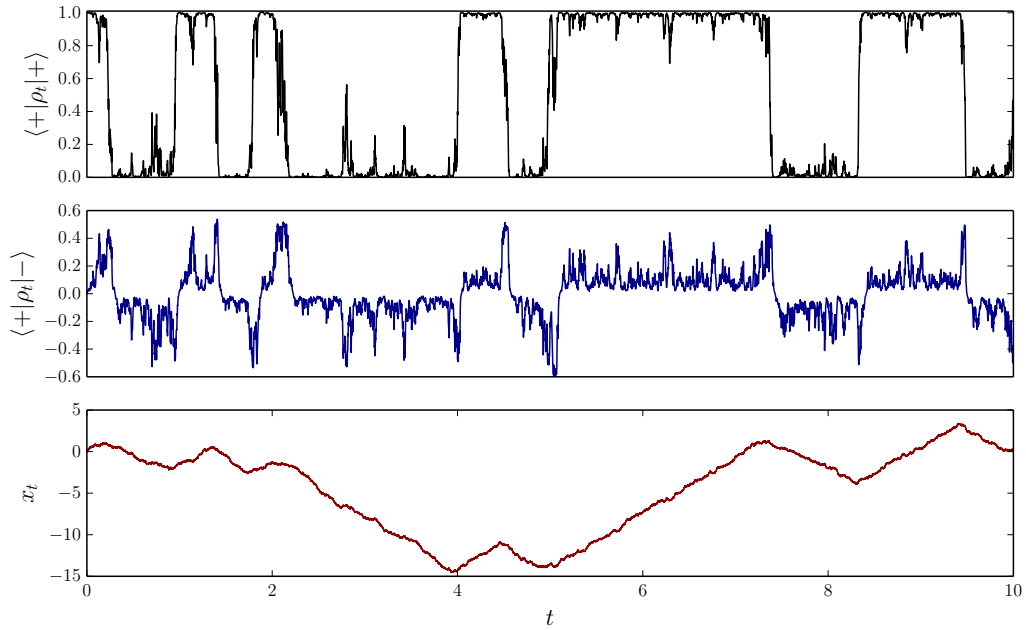


FIGURE 3.7 – Trajectoire de (3.2.1) pour  $N = \sqrt{\gamma}\sigma_z$ ,  $H = \omega\sigma_y$  avec  $\omega = 3$  et  $\gamma = 10.0$ . Les courbes sont obtenues par discrétisation naïve de (3.2.1) avec  $dt = 10^{-4}$ . Le marcheur et le gyroscope sont fortement couplés et la situation est formellement équivalente à une mesure continue forte.

que la gravité elle-même ne soit pas quantifiée dans une «théorie du tout» [131]. Nous allons utiliser le formalisme développé au chapitre 1 pour explorer une voie quasi inexplorée : une unification *semi-classique* dans laquelle la matière est quantique mais l'espace-temps classique. Avant cela, il convient peut-être de rappeler les arguments usuels —discutables et insuffisamment discutés— pour lesquels on privilégie en général l'approche infiniment plus difficile d'une quantification complète incluant les degrés de liberté gravitationnels.

Une brève étude éminemment non-scientifique montre que les physiciens qui explorent la voie de la gravité quantique utilisent principalement trois types d'arguments pour défendre leur approche. Le premier est philosophique. La gravité doit être quantifiée car la théorie quantique est une méta-théorie plus qu'une théorie de la matière, une méthode ultime et indépassable pour construire des théories physiques acceptables. Cet absolutisme est en général guidé par une compréhension contestable des implications *réelles* du formalisme (voir A) et il est raisonnable de lui accorder un crédit limité, surtout alors que la voie de la quantification s'avère extrêmement difficile en pratique. Le second argument est un épouvantail. L'approche semi-classique naïve proposée par Møller et Rosenfeld [132, 133] en 1962 donne lieu à des incohérences théoriques que l'on va détailler plus tard et qui ont été identifiées en partie par Hannah et Eppley en 1977 [134]. De plus, à quelques ambiguïtés d'interprétation près, on peut considérer que l'approche de Møller et Rosenfeld a aussi été falsifiée expérimentalement par Page

et Geiker en 1981 [135]. Mais cet échec d'une théorie naïve vieille de plus de 50 ans ne peut être utilisé comme une preuve de l'impossibilité d'une gravité fondamentalement semi-classique qu'au prix d'un sophisme grossier. On verra qu'aussi naturelle qu'elle puisse sembler, l'approche de Møller et Rosenfeld est loin d'être la plus raisonnable quand on a à l'esprit les modèles de mesure continue. Reste le dernier argument, la gravité quantique comme tapis sous lequel cacher les problèmes du modèle standard. Il est «*bien connu*» que le secteur électrofaible du modèle standard contient un pôle de Landau : la constante de couplage diverge pour une énergie élevée mais finie estimée à  $10^{286}$  eV. On *espère* qu'une gravité quantifiée apporte un *cut-off* en distance qui permette de régulariser la théorie. On ne s'attaquera évidemment pas à ce problème mais on peut simplement mentionner qu'invoquer ici la quantification de la gravité comme solution est un moyen de s'abstenir de résoudre quoi que ce soit. Par ailleurs, on peut imaginer nombre d'autres mécanismes non gravitationnels qui viendraient supprimer le pôle de Landau<sup>10</sup>. Les arguments en faveur de la quantification de la gravité n'apparaissent donc pas complètement définitifs et il ne semble pas impossible en principe d'*essayer* la voie semi-classique.

### 3.3.1.b Limite newtonienne

Les difficultés rencontrées par l'approche standard à la gravité semi-classique se manifestent presque toutes à la limite newtonienne. Les subtilités et paradoxes que l'on rencontre avec la gravité sont en effet d'avantage d'origine quantique que relativiste. C'est pourtant une limite qui est peu étudiée, les efforts se concentrant principalement sur les *très* hautes énergies<sup>11</sup> et la cosmologie. Pourtant, il est probable que les premiers effets à la fois gravitationnels et quantiques que l'on réussira à observer le seront à basse énergie [136].

Concentrons nous désormais sur la gravité semi-classique. À la limite newtonienne, on a de la matière quantique et un champ gravitationnel scalaire classique. Il faut alors comprendre qu'il y a deux questions fondamentalement différentes à se poser, une très facile (et validée) et une plus difficile (et aussi plus ouverte). Étant donné un champ gravitationnel extérieur, on sait très bien comment calculer la dynamique de la matière quantique : il suffit d'ajouter le potentiel correspondant dans l'équation de Schrödinger. Non seulement cette prescription est raisonnable mais elle est aussi expérimentalement validée : on sait par exemple prédire avec précision comment une particule quantique tombe dans le champ gravitationnel terrestre [137]. La question bien plus subtile est de savoir comment de la matière quantique crée le champ gravitationnel au départ. Le lecteur peut prendre ici quelques instants pour se demander quelle prescription lui semble naturelle. Par exemple, pour une particule dans un état de superposition  $|gauche\rangle + |droite\rangle$ , observe-t-on une force d'attraction entre les deux pics de la fonction d'onde ? Une telle question est a priori ouverte...

Évidemment, à la limite newtonienne, on pourrait imaginer régler le problème en *supprimant* le champ gravitationnel et en implémentant l'attraction entre particules

10. Les théories de grande unification, malgré leur relatif échec, apportent l'exemple d'un tel mécanisme.

11. À se concentrer sur l'échelle de Planck où la «nouvelle physique» était supposée émerger, on a laissé de côté les situations plus simples où aucune théorie n'apportait pourtant de prédiction claire.

comme en électrostatique avec un potentiel de paire  $\hat{V}$ , qui s'écrirait typiquement, dans un cas à 2 particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  :

$$\hat{V} = \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{Gm_1m_2}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| \otimes |\mathbf{y}\rangle\langle\mathbf{y}|.$$

Néanmoins, même si on s'intéresse à la limite newtonienne pour sa simplicité, on tient au champ et aux degrés de liberté gravitationnels dont on sait qu'ils existeront forcément de manière autonome en relativité générale. Dès lors, on veut une version newtonienne qui permette la définition d'un champ gravitationnel classique, ce qui exclut le potentiel de paire trivial ci-dessus. Dans ce qui suit, l'objectif sera donc de faire une proposition claire de la manière dont un tel champ gravitationnel peut être créé par la matière quantique et d'en suggérer une extension relativiste raisonnable.

### 3.3.2 Difficultés du couplage classique / quantique naïf

#### 3.3.2.a Des absurdités de Møller-Rosenfeld et Schrödinger-Newton

Commençons par expliquer l'approche historique de Møller et Rosenfeld à la gravité semi-classique. Le problème posé par une telle théorie est le même que pour toutes les théories semi-classiques : on doit coupler des nombres à des opérateurs. Dans l'équation d'Einstein, qui explique comment la matière courbe l'espace, on a en effet naïvement :

$$G_{\mu\nu}(x) \stackrel{?}{=} 8\pi G \hat{T}_{\mu\nu}(x),$$

mais le tenseur d'Einstein est associé à une métrique *classique*, c'est un nombre, alors que le tenseur énergie impulsion est un opérateur. Une manière d'obtenir un nombre à partir d'un opérateur est de prendre une valeur moyenne et c'est ce que font sans hésitation Møller et Rosenfeld :

$$G_{\mu\nu}(x) = 8\pi G \langle \Psi | \hat{T}_{\mu\nu}(x) | \Psi \rangle_{\text{plc}(x)}, \quad (3.3.1)$$

où la valeur moyenne est prise sur le cône de lumière passé pour préserver l'invariance relativiste. Comme on l'a annoncé précédemment, les difficultés de cette équation, lorsqu'elle est prise pour fondamentale, se manifestent immédiatement à la limite newtonienne dans laquelle on obtient l'équation de Schrödinger-Newton. À la limite non relativiste, l'équation (3.3.1) devient en effet :

$$\nabla^2 \Phi(x) = 4\pi G \langle \Psi | \hat{\rho}(x) | \Psi \rangle, \quad (3.3.2)$$

où  $\Phi$  est le potentiel newtonien et  $\hat{\rho}(x)$  l'opérateur densité de masse en  $x$  :

$$\hat{\rho}(x) = m |x\rangle\langle x| \quad \text{pour une unique particule de masse } m,$$

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{k=1}^n m_k a_k^\dagger(x) a_k(x) \quad \text{pour } n \text{ espèces de particules différentes de masse } m_k.$$

Le champ gravitationnel peut alors être intégré à l'équation de Schrödinger en ajoutant un potentiel  $\hat{V}$  de la forme :

$$\hat{V} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

$$i\partial_t\Psi = \left( -\frac{1}{2m}\nabla^2 - Gm^2 \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \frac{|\Psi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right) \Psi,$$

équation déterministe manifestement non linéaire. Une telle équation possède un certain nombre de problèmes lorsqu'elle est prise au sérieux comme équation fondamentale. Un premier problème, très général, est le fait qu'une équation déterministe et non-linéaire permet de transmettre de l'information instantanément *en utilisant l'intrication*<sup>12</sup> [41]. Le deuxième problème, particulièrement gênant, est que dans une telle théorie les *superpositions décohérentes*<sup>13</sup> s'attirent. Autrement dit, dans l'expérience de pensée de Schrödinger, les chats mort et vivant interagissent et ce même en prenant la décohérence en compte.

Plus précisément, dans l'expérience de Schrödinger on a un état de la forme :

$$|\Psi\rangle = |\text{atome désintégré}\rangle \otimes |\text{chat mort}\rangle \otimes |\text{environnement 1}\rangle \\ + |\text{atome non désintégré}\rangle \otimes |\text{chat vivant}\rangle \otimes |\text{environnement 2}\rangle,$$

où la décohérence se manifeste dans le fait que

$$\langle \text{environnement 1} | \text{environnement 2} \rangle \simeq 0,$$

ce qui rend cette superposition inobservable en pratique (pour la mécanique quantique standard qui est linéaire). Néanmoins, il suffit de mettre cet état dans (3.3.2) pour se rendre compte que l'orthogonalité des états de l'environnement ne permet pas de supprimer l'interaction entre les deux termes. Évidemment, on a pris ici un chat, mais l'intrication se propage sur des objets de plus en plus gros jusqu'à atteindre des situations de plus en plus ridicules de superpositions décohérentes en interaction. C'est d'ailleurs en remplaçant le chat par une boule métallique pouvant se trouver à droite ou à gauche que Page et Geiker [135] ont mis en évidence expérimentalement l'échec de cette approche semi-classique. Si l'équation de Schrödinger Newton est malgré tout étudiée, c'est soit parce qu'elle est vue comme une approximation de champ moyen à une description plus fondamentale inconnue, soit parce que les auteurs ont en tête (sans forcément l'écrire) un mécanisme de collapse venant supprimer les superpositions macroscopiques. Un tel mécanisme permet de supprimer les chats de Schrödinger gravitationnels mais il ne permet pas seul de construire une théorie cohérente, en particulier à cause du premier problème de transmission d'information plus vite que la lumière.

---

12. On va y revenir mais il est important d'être précis car une telle affirmation est souvent mal comprise. Évidemment, on s'intéresse ici à la limite non relativiste, et donc il n'est pas surprenant que de l'information puisse éventuellement se transmettre instantanément, ne serait-ce que par l'intermédiaire des forces gravitationnelles. Le problème est que cette information puisse se transmettre par l'intrication : Alice et Bob peuvent alors communiquer en partageant un état EPR. En information quantique, on appelle en général « *no faster than light signalling* » –condition qui en fait ne dépend pas de la vitesse de la lumière– le fait que l'intrication ne puisse être utilisée pour transmettre de l'information instantanément en mécanique quantique non relativiste.

13. C'est d'ailleurs une raison supplémentaire pour ne pas confondre mélanges statistiques et superpositions décohérentes, distinction sur laquelle on a lourdement insisté au chapitre 1 et en appendice A.

### 3.3.2.b Transmission d'information dans les théories non-linéaires

Pour comprendre le problème de transmission d'information instantanée posé par l'équation de Schrödinger-Newton et pour le résoudre dans une nouvelle approche, il convient de prendre un peu de recul et de se demander à quel niveau de la théorie quantique la linéarité est nécessaire. On peut généraliser facilement le résultat de Gisin [41], proposé initialement pour des théories déterministes, au cas de théories contenant un terme aléatoire (ce qui permet d'étendre le résultat aux modèles de collapse). On a alors le pseudo-théorème<sup>14</sup> suivant :

—Une fois écrite sous forme d'équation maîtresse, c'est à dire en matrice densité *et* moyennée sur le bruit, la dynamique doit être linéaire. Dans le cas contraire, on peut transmettre de l'information via l'intrication.—

Ce résultat, qui paraît assez fort, est en fait extrêmement facile à démontrer. L'idée est simplement qu'une non linéarité permet de distinguer superpositions décohérentes et mélanges statistiques. On considère une situation où Alice possède un certain système physique éventuellement compliqué intriqué avec un qubit possédé par Bob. On suppose que Bob est très éloigné d'Alice de sorte qu'aucune «force» dont la vitesse de propagation est finie ne puisse interférer dans la situation considérée. L'état global du système s'écrit :

$$|\Psi\rangle = |\text{ystème compliqué 1}\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + |\text{ystème compliqué 2}\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B.$$

La non linéarité de la dynamique en matrice densité implique que l'on peut choisir le système d'Alice tel que :

$$\partial_t \rho_A^{(1)+(2)} \neq \frac{1}{2} \partial_t \rho_A^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_t \rho_A^{(2)},$$

où on a :

$$\begin{aligned} \rho_A^{(1)}(0) &= |\text{ystème compliqué 1}\rangle \langle \text{ystème compliqué 1}| \\ \rho_A^{(2)}(0) &= |\text{ystème compliqué 2}\rangle \langle \text{ystème compliqué 2}| \\ \rho_A^{(1)+(2)}(0) &= \frac{\rho_A^{(1)}(0) + \rho_A^{(2)}(0)}{2}. \end{aligned}$$

Autrement dit, la non linéarité implique que l'on peut trouver une situation dans laquelle la statistique des mesures faites par Alice (qui se lit dans la matrice densité) dépend du fait que Bob a ou non mesuré<sup>15</sup> son qubit. De cette manière, Bob peut transmettre de l'information à Alice ! Il suffit pour cela qu'Alice et Bob disposent d'un grand nombre de copies du système précédent et que Bob choisisse de mesurer ou non son qubit sur un certain sous ensemble de copies pour envoyer à Alice un message en

14. C'est un pseudo-théorème car on pourrait évidemment imaginer des modèles conspirationnistes massivement non-locaux rendant toujours la non linéarité inobservable et interdisant en pratique de considérer la situation de la preuve.

15. Le résultat reste valable que cette mesure soit comprise comme fondamentale et axiomatique, dans l'esprit de l'interprétation de Copenhague, ou comme approximative, via un appareil de mesure dont l'évolution est régie par un modèle de collapse objectif.



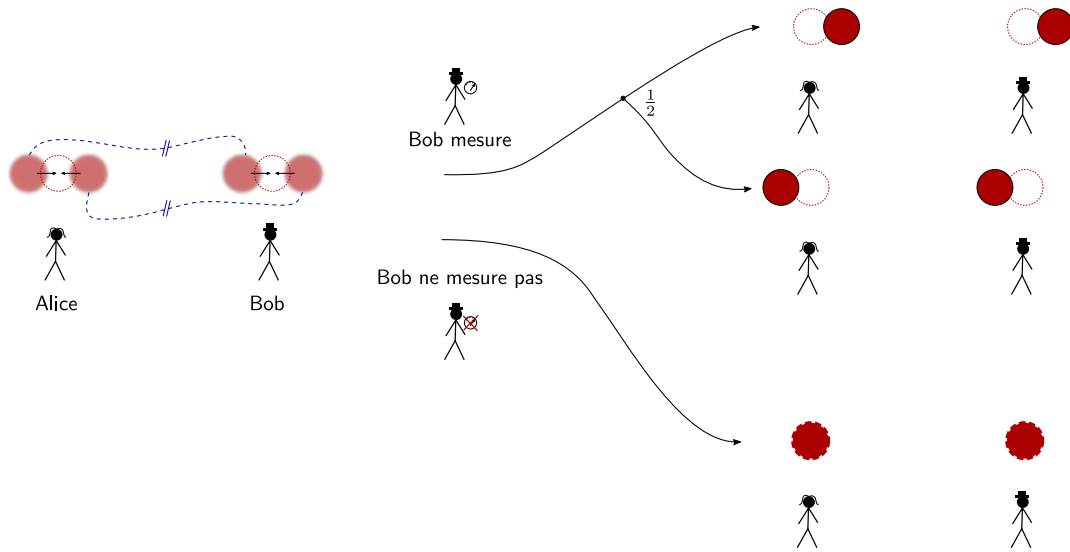


FIGURE 3.8 – Si Alice et Bob partagent un état intriqué et qu’une dynamique non linéaire attire localement les deux superpositions, alors Bob peut communiquer un bit d’information à Alice en choisissant ou non de mesurer son état à l’instant initial. En effet, si Bob a mesuré son état au départ, la masse d’Alice se trouve à gauche ou à droite, alors que si les superpositions ont été maintenues, la masse d’Alice a été attirée vers le centre.

binaire. Pour rendre la situation plus concrète, voyons à quoi pourrait ressembler la méthode dans le cas de l’équation de Schrödinger-Newton.

On suppose qu’Alice et Bob partagent un état intriqué de la forme :

$$|\Psi\rangle = |\text{masse à gauche}\rangle_A |\text{masse à gauche}\rangle_B + |\text{masse à droite}\rangle_A |\text{masse à droite}\rangle_B$$

où les positions droite et gauche sont distantes de quelques centimètres pour chacun alors qu’Alice et Bob sont très éloignés l’un de l’autre (voir Fig. 3.8). L’équation de Schrödinger Newton prédit que pour un tel état, les masses d’Alice et de Bob sont attirées vers le centre. En revanche, si l’un ou l’autre mesure la position de sa masse, la dynamique est arrêtée. Alice et Bob peuvent ainsi communiquer. Alice peut par exemple regarder si la masse est au centre après un certain temps, si c’est le cas c’est que Bob n’a pas mesuré de son côté et cette information s’est propagée arbitrairement vite. On voit que l’interaction gravitationnelle que l’on utilise ici n’est pas limitante : on s’en sert uniquement sur quelques centimètres, elle pourrait être extrêmement lente. C’est l’intrication qui est le réel vecteur de l’information. Ainsi la prescription de Møller et Rosenfeld :

$$G_{\mu\nu}(x) = 8\pi G \langle \Psi | \hat{T}_{\mu\nu}(x) | \Psi \rangle_{\text{plc}(x)},$$

équation qui semble naïvement raisonnable et compatible avec la relativité (à cause de la moyenne sur le cône de lumière passé) permet en réalité la transmission d’information plus vite que la lumière.

*Remarque 14* (Et si on acceptait le «*faster-than-light signalling*»?). Comme on croit en général que la possibilité de transmettre de l’information plus vite que la lumière est

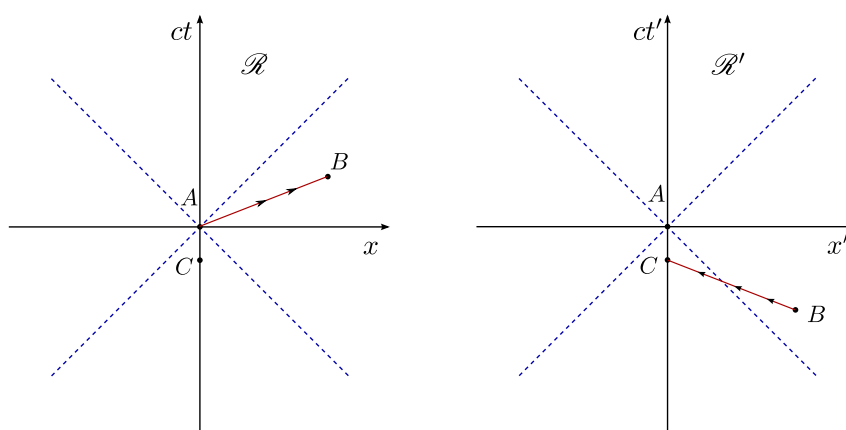


FIGURE 3.9 – La possibilité d’influences causales plus rapides que la lumière combinée à l’invariance de Lorentz permet à  $A$  d’influencer indirectement  $C$  qui est dans son passé.

inhérente à toute théorie de la gravité semi-classique<sup>16</sup>, on cherche parfois à se rassurer en se disant que cette capacité est inexploitable en pratique. Ce serait oublier qu’une telle possibilité, même théorique, est *logiquement* incompatible avec l’invariance de Lorentz. Considérons deux points  $A$  et  $B$  de l’espace temps séparés par un intervalle de genre espace. Alors il existe un référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel  $A$  est avant  $B$  et un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel  $B$  est avant  $A$ . Il est donc possible que  $A$  influence causalement  $B$  puis que  $B$  influence un événement  $C$  juste avant  $A$  (voir Fig. 3.9). Autrement dit, l’invariance de Lorentz couplée à la possibilité de causes se transmettant plus vite que la lumière permet d’influencer causalement le passé. On tombe alors sur les paradoxes logiques usuels du voyage dans le passé qu’aucune théorie cohérente ne peut tolérer.

Notons que la condition de Gisin est extrêmement restrictive. Un modèle de collapse quelconque est non-linéaire et aléatoire, mais donne lieu par construction à une équation maîtresse linéaire. Pourtant, on peut être sûr que tout terme non linéaire supplémentaire que l’on y ajoutera, typiquement à la Schrödinger-Newton, viendra nécessairement briser cette linéarité durement construite. Mais cette contrainte est aussi une chance car elle montre qu’il n’existe en réalité que peu de manières de construire des théories semi-classiques cohérentes même à partir de modèles de collapse : on ne peut y aller au hasard et il faut que la construction même du couplage garantisse la cohérence.

### 3.3.3 Classe de modèles prometteurs

#### 3.3.3.a Mesure continue et feedback

Avant même de parler des mesures continues, demandons nous comment on peut coupler classiquement deux systèmes en mécanique quantique. Une solution est qu’un

16. On va voir par la suite que ça n’est évidemment pas le cas.

observateur mesure le premier, puis effectue une action sur le second conditionnellement au résultat obtenu. Une telle procédure, qui correspond à un contrôle trivial, est garantie par construction de donner lieu à une évolution logiquement cohérente. La même procédure est possible pour une mesure continue, l'analogie des résultats étant cette fois-ci le signal. Le signal est donc une quantité «classique» (en tant que résultat de mesure) dont on peut se servir pour modifier l'évolution future du système.

Évidemment, on n'a pas le droit d'invoquer la mesure continue si l'on cherche à construire une théorie fondamentale. Pour autant, on a le droit de se souvenir que les modèles de collapse continus comme CSL sont *formellement* équivalents à des modèles de mesure continue. Ainsi, même si on ne l'écrit jamais, on peut toujours définir l'équivalent d'un signal pour un modèle de collapse objectif. Comme les modèles de collapse correspondent tous à la mesure locale de la densité de masse, on a accès à un champ stochastique interprétable comme une densité locale de masse et qui possède les *bonnes* propriétés d'un résultat de mesure classique. Plus précisément, pour un modèle de collapse continu défini par l'équation (1.3.2) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] - \frac{1}{8} \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x}), [\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{y}), \rho]] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{H}[\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x})](\rho) w(\mathbf{y}) \quad (3.3.3)$$

on peut définir un «signal»  $\varrho(\mathbf{x})$  en exploitant la similarité formelle avec les mesures continues :

$$\varrho(\mathbf{x}) = \text{tr} [\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{x}) \rho] + w(\mathbf{x}),$$

où on omet encore une fois les indices temporels pour ne pas surcharger l'écriture. Il n'y a ensuite qu'un pas pour mettre un tel champ stochastique, qui correspond intuitivement à un «champ de densité de masse», à la source du champ gravitationnel :

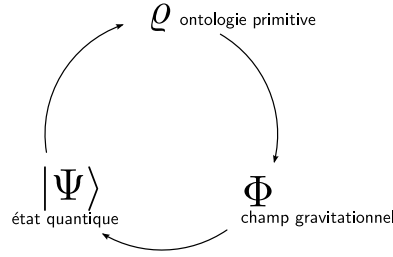
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \varrho. \quad (3.3.4)$$

Évidemment, dans ce contexte,  $\varrho$  n'a aucune interprétation en terme de résultat de mesure, mais c'est le parallèle formel avec la théorie de la mesure continue qui fait fonctionner l'ensemble. En effet, la rétroaction du champ gravitationnel ainsi créée sur la matière peut s'interpréter à l'intérieur de la mécanique quantique orthodoxe comme un simple schéma de contrôle avec *feedback*. La cohérence de la théorie est garantie par construction <sup>17</sup> !

*Remarque 15* (Lien avec l'ontologie primitive). Le champ stochastique  $\varrho$  précédemment défini peut être choisi comme *ontologie primitive* de la théorie (voir appendice A pour une discussion du concept). Il est alors particulièrement naturel de le coupler au champ gravitationnel. On a intuitivement le schéma suivant :

---

17. Il existe en fait un faisceau d'arguments suggérant que la méthode que nous avons proposée (utiliser un champ interprétable en terme de résultats de mesures continues) est en réalité la seule possible [138, 139, 140]. Bizarrement, les auteurs n'avaient jamais pensé appliquer une telle idée à la gravité.



où l'ontologie primitive (le champ stochastique de densité de masse) crée le champ gravitationnel qui modifie la dynamique de l'état quantique qui détermine à son tour la statistique du champ de masse.

### 3.3.3.b Construction pour les modèles de collapse

Maintenant que l'on a donné intuitivement la marche à suivre, reste à faire les calculs pour voir ce que la prescription (3.3.4) implique précisément. À ce stade, le lecteur peut se référer à l'appendice G pour plus de détails. L'équation de Poisson (3.3.4) s'intègre immédiatement pour donner le champ gravitationnel :

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \frac{\varrho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

On obtient ensuite le potentiel gravitationnel  $\hat{V}$  en fonction du champ en posant :

$$\hat{V} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\varrho}_{(\sigma)}(\mathbf{x}),$$

où l'indice  $(\sigma)$  désigne une régularisation *optionnelle*<sup>18</sup> par une gaussienne de largeur  $\sigma$ . Reste à intégrer ce potentiel dans l'équation de Schrödinger. La présence de bruit blanc multiplicatif demande cependant de faire un peu attention : on souhaite que la procédure corresponde à un schéma de feedback, par conséquent on veut que le potentiel agisse infinitésimalement après l'évolution «libre». Autrement dit on pose :

$$\rho + d\rho = e^{-i\hat{V}dt} (\rho + d\rho^{\text{libre}}) e^{i\hat{V}dt},$$

où  $d\rho^{\text{libre}}$  correspond à l'évolution sans gravitation donnée par l'équation (3.3.3). Après calcul on obtient :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho^{\text{libre}}}{dt} - i \left[ \hat{V}_p + \int d\mathbf{x} w(\mathbf{x}) \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{x}), \rho \right] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Gamma^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{x}), \left[ \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{x}), \rho \right] \right] \quad (3.3.5)$$

où on a désormais le potentiel de paire :

$$\hat{V}_p = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\varrho}_{(\sigma)}(\mathbf{x}) \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{x}),$$

18. Suivant le modèle de collapse précis considéré, on peut ou non s'abstenir de mettre cette régularisation.

avec la notation :

$$\hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \frac{\hat{\varrho}_{(\sigma)}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

L'équation (3.3.5) résume la dynamique de notre classe de modèles de gravitation semi-classique. En fixant  $\Gamma$ , on peut obtenir la proposition pour différents modèles de collapse et en particulier les classiques CSL et DP.

### 3.3.3.c Propriétés élémentaires

Par construction, la proposition précédente ne souffre pas des problèmes de l'approche semi-classique naïve à la Schrödinger Newton. Une fois moyennée sur le bruit, l'équation (3.3.5) est linéaire ce qui sauve la théorie du théorème d'impossibilité de Gisin. L'utilisation d'un modèle de collapse sous-jacent empêche aussi les chats de Schrödinger gravitationnels. Plus généralement, la construction –dont le formalisme est interprétable dans un langage purement orthodoxe– garantit la cohérence globale de la théorie sans qu'il n'y ait besoin d'effectuer des vérifications spécifiques.

Le modèle fait apparaître un terme de couplage  $\hat{V}_p$  de paire effectif qui est exactement celui que l'on aurait mis à la main intuitivement. De manière remarquable, ce dernier ne contient pas d'autointeraction (ou plutôt, l'énergie d'autointeraction est constante et par conséquent renormalisable) alors même que notre construction utilise un champ comme intermédiaire : les deux pics d'une fonction d'onde d'une particule ne s'attirent pas ! C'est un résultat fondamental car les propositions expérimentales visant à mettre en évidence la quantification de la gravitation testent en pratique la présence d'une autointeraction à la Schrödinger-Newton [141]. Néanmoins, notre classe de modèles montre que l'absence d'une telle autointeraction est tout à fait compatible avec une gravité semi-classique !

Le modèle donne aussi lieu à une décohérence supplémentaire d'origine gravitationnelle. Un aspect fascinant de cette nouvelle décohérence est que son intensité est inversement proportionnelle à la force de la décohérence «intrinsèque» en l'absence de gravitation<sup>19</sup>. Cela rend ainsi les faibles valeurs de  $\Gamma$  falsifiables alors qu'elles n'étaient précédemment que philosophiquement exclues [78]. Le lecteur intéressé peut consulter l'appendice G pour d'autres caractéristiques de ces modèles et les dérivations des propriétés précédemment évoquées.

### 3.3.4 Discussion

On a proposé un modèle de gravité semi-classique effaçant les problèmes conceptuels connus de l'approche usuelle due à Møller et Rosenfeld. Le modèle est entièrement explicite dans la mesure où il est possible d'obtenir l'équation maîtresse stochastique régissant la dynamique couplée de manière exacte. On peut ainsi directement l'appliquer aux situations expérimentales proposées [136] dans lesquelles une théorie unifiée de la gravité et de la mécanique quantique est nécessaire. Reste maintenant à montrer

19. Intuitivement, un collapse fort, correspondant à une mesure forte, fait fortement décohérer l'état en position, en contrepartie, le bruit d'origine gravitationnelle est faible car la distribution de masse est bien connue. Un collapse faible, à l'inverse, induit un fort bruit gravitationnel et c'est alors la décohérence gravitationnelle qui domine.

comment notre approche pourrait raisonnablement se dériver comme approximation d'une théorie invariante de Lorentz. À ce stade, en particulier parce que l'on ne dispose pas encore de modèles de collapse relativistes facilement maniables en espace courbe <sup>20</sup> (voir notamment 1.3.3), la discussion devient inévitablement plus spéculative.

### 3.3.4.a Extension relativiste (avec les mains)

Pour la construction d'un modèle relativiste, on imagine disposer d'un modèle de collapse formellement analogue à la mesure du tenseur énergie impulsion local régularisé en chaque point  $\hat{T}_\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ . De manière *très heuristique*, on doit alors avoir une équation d'évolution de la forme de (3.3.3) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] - \frac{1}{8} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\hat{T}_\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{x}), [\hat{T}_{\mu\nu\sigma}(\mathbf{y}), \rho]] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{H}[\hat{T}_\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{x})](\rho) w_{\mu\nu}(\mathbf{y})$$

vue comme équation de Tomonaga-Schwinger pour une certaine foliation de l'espace-temps et une certaine théorie quantique des champs *raisonnablement* régularisée. On peut ensuite définir :

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \text{tr}[\rho \hat{T}_\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{x})] + w^{\mu\nu}(\mathbf{x}).$$

L'interprétation en terme de résultat de mesure garantit l'invariance par difféomorphisme de  $T^{\mu\nu}(\mathbf{x})$  alors même que sa décomposition en moyenne + bruit laisserait naïvement penser que ce champ dépend de la foliation (voir par exemple [31] pour une situation analogue). Le problème est ensuite son absence de conservation à cause du bruit ; conservation que l'on peut être tenté mettre à la main en fixant une partie du bruit comme une jauge <sup>21</sup>. Une fois qu'on en est arrivé là, on n'est de toute façon plus vraiment à ça près. En imaginant que tout tienne et qu'on soit capable de donner un sens aux objets, on peut engendrer la courbure à partir du champ d'énergie impulsion :

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 8\pi G T_{\mu\nu}(\mathbf{x}).$$

La régularisation en espace engendrant une régularisation en temps à cause de l'invariance relativiste, le bruit n'est plus blanc mais coloré. Le champ  $T_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  n'est ainsi plus divergeant et l'équation semble à peu près bien définie <sup>22</sup>. En croisant les doigts, on a alors un couplage entre une relativité générale classique et de la matière quantique décrite par une théorie quantique des champs dans laquelle les incohérences usuelles ne sont *a priori* pas présentes.

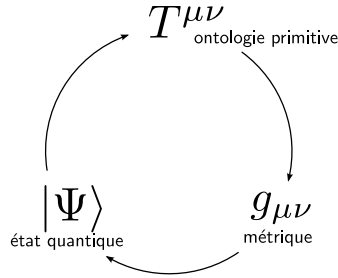
On donne parfois le résumé heuristique suivant pour la relativité générale : la matière courbe l'espace-temps et la courbure de l'espace-temps influe sur la dynamique de la matière. Dans le modèle proposé, on a un intermédiaire entre espace-temps et matière. L'état quantique détermine la loi d'évolution d'un champ stochastique d'énergie

20. On pourrait ajouter qu'on ne dispose pas non plus de théorie quantique des champs qui ne soit pas purement axiomatique.

21. On peut imaginer, comme l'ont suggéré *très* récemment Josset, Perez et Sudarsky, d'utiliser la gravité unimodulaire dans laquelle la conservation du tenseur énergie impulsion est remplacée par une condition sur la métrique. Au passage, les auteurs montrent que l'utilisation d'un modèle de collapse fait émerger une constante cosmologique effective compatible avec les mesures actuelles [142]!

22. On peut au moins se satisfaire de n'avoir pas a priori de production instantanée de trous noirs...

impulsion. Ce dernier courbe l'espace temps, courbure qui influe ensuite sur la dynamique de l'état quantique. Dans le langage des théories à ontologie primitive [143] (voir A), on a un espace-temps dynamique, une loi (l'état quantique) et une ontologie primitive (le champ stochastique). Schématiquement on a ainsi la représentation suivante analogue à celle de la remarque 15 :



où l'ontologie primitive (le champ stochastique de « tenseur énergie impulsion ») courbe l'espace-temps qui modifie la dynamique de l'état quantique qui détermine à son tour la statistique du champ stochastique de « tenseur énergie impulsion ».

### 3.3.4.b Autres approches

Notre approche à la gravité semi-classique vue comme théorie potentiellement fondamentale peut être rapidement contrastée avec des entreprises antérieures. L'idée de construire une théorie de la gravité semi-classique *stochastique* n'est pas nouvelle (voir [144, 145]). L'objectif de cette approche originelle était en revanche bien plus modeste : l'idée était simplement de raffiner l'approche de Møller et Rosenfeld à la main et de manière perturbative en ajoutant les fluctuations quantiques du tenseur énergie impulsion dans le terme source :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left\{ \langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle + \langle \Delta \hat{T}_{\mu\nu}^2(x) \rangle \times \text{bruit classique} \right\}. \quad (3.3.6)$$

L'espoir est qu'une telle théorie soit quantitativement plus proche d'une hypothétique gravité quantique sous-jacente. La prescription (3.3.6) ressemble superficiellement à la notre mais elle ne résout ici aucun des problèmes fondamentaux de l'approche de Møller et Rosenfeld (transport d'information plus vite que la lumière et chats de Schrödinger gravitationnels). Le bruit est purement *ad hoc* et la transformation des fluctuations quantiques en fluctuations classiques, qui rappelle l'approximation effectuée en cosmologie inflationniste, élimine d'emblée les prétentions fondationnelles de l'approche.

Une autre idée antérieure, est de combiner un modèle de collapse comme GRW et le couplage par la moyenne à la Møller Rosenfeld [146]. Une telle approche résout le problème des chats de Schrödinger gravitationnels mais contient toujours les anomalies dues à la non linéarité. On pourrait ajouter que l'approche est aussi moins satisfaisante philosophiquement que la notre car elle n'utilise pas autant la structure propre des modèles de collapse.

### 3.3.4.c Conclusion sur la gravité semi-classique

Nous avons présenté une théorie de la gravité semi-classique qui apparaît suffisamment cohérente à la limite Newtonienne et généralisable de manière crédible pour être

prise au sérieux comme une *potentielle* théorie «fondamentale». À notre connaissance, il n'existe pas aujourd'hui d'alternative et les autres voies d'unification actuellement explorées intensivement contiennent toutes un secteur gravitationnel quantifié. Même si la probabilité que la théorie proposée décrive effectivement la réalité est sans aucun doute assez mince, sa simple existence montre que la voie de la gravité semi-classique n'est pas impossible à emprunter et mérite d'être explorée.

Les modèles de collapse sont souvent considérés comme une solution assez *ad hoc* au problème de la mesure et cette critique est très certainement méritée. Le fait qu'il semblent être un outil *indispensable* pour la construction de théories semi-classiques cohérentes leur donne en revanche une justification inespérée. Alternativement, si l'on accepte que le *prix* des modèles de collapse a déjà été payé pour la résolution du problème de la mesure, alors la théorie que nous avons proposé vient gratuitement, sans nouveau paramètre ni hypothèse douteuse<sup>23</sup>.

---

23. Après cette exploration, on peut regretter qu'il ne soit pas possible de comparer les prédictions simples de cette section avec celles de théories où le secteur gravitationnel est aussi quantifié. En effet, à force d'attaquer les problèmes les plus difficile et profonds (perte d'information dans les trous noirs, multivers ou tout phénomène se manifestant à l'échelle de Planck) à l'aide d'outils de plus en plus raffinés et exotiques (supercordes en 11 dimensions, gravité quantique à boucle, supergravité, triangulations dynamique causales, mousses de spin, correspondance AdS-CFT, conjecture ER=EPR), la communauté de la gravité quantique semble avoir délaissé les situations simples, un jour testables, et pour lesquelles on manque de propositions. Sous la plume d'un des physiciens les plus connus du domaine, dans un cours à l'*Institute for Advanced Study* [147], on lit plutôt ce genre de discussion :

*“Suppose that after successfully teleporting  $C$ , Alice and Bob conclude that there must be a wormhole connecting their black holes. Bob sends a classical message to Alice telling her that he will jump into his black hole if she will jump in to hers. With suitable preparation they will meet and indeed discover that the black holes are connected by an Einstein-Rosen bridge.”*

Il n'est évidemment pas interdit de faire des expériences de pensée et de s'intéresser à des questions éventuellement très spéculatives. Mais on peut se demander si on ne laisse pas dans le même temps des problèmes comparativement plus simples et accessibles sans réponse.





# Chapitre 4

## Extension du domaine de la théorie

Ce chapitre contient des travaux à un niveau d'avancement inférieur, résultats non publiés qui constituent peut-être des pistes à explorer à l'avenir. L'objectif est d'étudier des extensions possibles de la théorie des mesures continues. On présente dans la première section les diverses approches permettant d'étendre la théorie à l'estimation a posteriori. On s'attaque ensuite à l'extension des résultats du chapitre 2 au discret, c'est à dire le passage des mesures continues aux mesures répétées. On discute enfin plus brièvement une hypothétique extension à la théorie quantique des champs et on risque une allusion à de nouvelles applications à la gravité.

### 4.1 Extension à l'estimation a posteriori

Dans la théorie de la mesure continue, on détermine l'état du système au temps  $t$  en fonction des résultats de mesure *antérieurs*. On aimerait étendre le formalisme pour intégrer l'information future et pouvoir attribuer a posteriori au système un état différent reflétant cette information additionnelle. Un tel problème a été abordé dès la fin des années 1980 par Aharonov, Albert et Vaidman pour des mesures discrètes et a donné lieu à l'introduction du concept de *weak value* [148]. Dès le départ, il fut cependant clair que le comportement de cette nouvelle grandeur était étonnamment paradoxal [149]. L'introduction des mesures continues et le parallèle avec les modèles de Markov caché permet de reconsidérer cette question et d'explorer de nouveaux équivalents quantiques de l'estimation a posteriori.

#### 4.1.1 Cas classique

Avant de nous attaquer au cas quantique qui contient quelques subtilités, commençons par rappeler les définitions classiques que l'on cherche à reproduire. On considère un modèle très général (pas forcément Markov caché) où des observations  $Y_t$  donnent une certaine quantité d'information (on ne précise pas comment) sur une variable d'intérêt  $R_t$ , qui ne peut être connue que par l'intermédiaire de ces mesures. On suppose pour simplifier que les mesures  $Y_t$  n'ont pas de rétroaction mécanique sur  $R_t$ . On note comme il est d'usage  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \sigma(\{Y_u\}_{u \in \mathcal{I}})$  l'information contenue dans les mesures effectuées aux temps  $u \in \mathcal{I}$  où  $\mathcal{I}$  est typiquement un intervalle.

Le problème du *filtrage* ou de l'estimation *forward* (ou encore a priori) est de calculer la probabilité de  $R_t$  sachant les résultats de mesure antérieurs.

$$\vec{\mathbb{P}}[R_t] = \mathbb{P} \left[ R_t \mid \mathcal{F}_{[0,t]} \right]$$

C'est typiquement la quantité intéressante si on veut faire de l'estimation en temps réel ou du contrôle. Une trajectoire  $\rho_t$  en est l'analogue quantique, c'est une quantité qui ne dépend que des résultats de mesure passés.

Le problème du lissage (*smoothing*) ou de l'estimation *forward-backward* (ou encore a posteriori) est de calculer la probabilité de  $R_t$  sachant *tous* les résultats de mesure.

$$\overleftrightarrow{\mathbb{P}}[R_t] = \mathbb{P} \left[ R_t \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right] \quad (4.1.1)$$

C'est la quantité intéressante si l'on veut l'estimation la plus précise possible sans avoir besoin de la donner en temps réel. Cette quantité n'a pas d'équivalent quantique immédiat même si on va voir qu'il existe deux propositions radicalement différentes suivant l'analogue quantique de  $R_t$  choisi.

Il existe une troisième quantité d'intérêt dans ce contexte, c'est la trajectoire  $R^V$  la plus probable sachant tous les résultats de mesure. En effet, la trajectoire constituée des  $R_t$  les plus probables à chaque temps  $t$  (du point de vue de la probabilité lissée) n'a aucune raison d'être globalement la trajectoire la plus probable. On appelle en général la trajectoire  $R^V$  chemin de Viterbi (*Viterbi path*) du nom de l'algorithme qui permet de la calculer pour un nombre discret de mesures.

$$R^V = \operatorname{argmax}_R \mathbb{P} \left[ R \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right].$$

Cette trajectoire ne possède pas non plus d'analogue quantique évident.

Jusqu'à maintenant, la théorie de la mesure continue s'est concentrée sur le filtrage en l'absence d'équivalent quantique évident pour la probabilité lissée et le chemin de Viterbi. Deux propositions de généralisation ont récemment émergé pour la probabilité lissée. On va les décrire brièvement avant de suggérer une troisième voie et de proposer deux nouvelles approches possibles à la définition du *Viterbi path*.

## 4.1.2 Propositions

### 4.1.2.a *Past quantum state*

La première idée pour généraliser au cas quantique la notion d'état a posteriori s'inspire directement des *weak-values*. Elle a été introduite par Gammelmark, Julsgaard et Mølmer (GJM) [150] en 2013 et a déjà été appliquée avec succès pour l'analyse des résultats d'au moins trois groupes expérimentaux différents [151, 152, 153].

L'idée de GJM est de considérer une situation où, en plus d'être soumis à des mesures répétées, le système est couplé à une sonde additionnelle à l'instant  $t$ . On imagine que cette sonde est mesurée mais que le résultat  $\alpha$  est inconnu. Peut-on calculer la probabilité  $\mathbb{P}[\alpha]$  associée à ce résultat sachant toutes les autres mesures aux temps antérieurs et ultérieurs? Connaître le résultat des mesures ultérieures permet-il d'améliorer la prédiction? Évidemment, la situation considérée n'est pas exactement

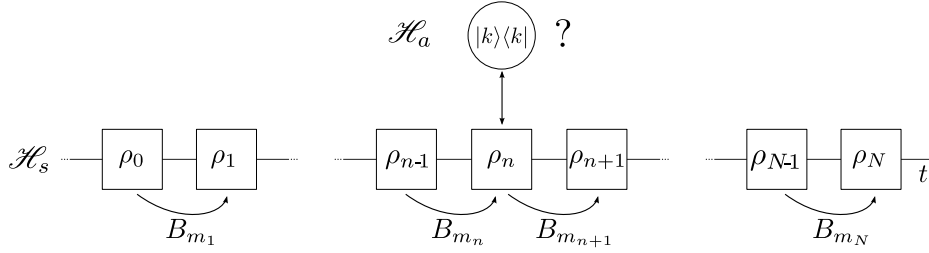


FIGURE 4.1 – Représentation schématique de l'évolution considérée. En plus des mesures répétées, le système est intriqué avec une sonde à l'étape  $n$ , sonde qui est mesurée dans une base de pointeurs  $|k\rangle$ , le résultat étant inconnu.

une situation de mesures répétées puisqu'il faut ajouter le couplage à cette sonde supplémentaire. Néanmoins, on pourra ultimement rendre ce couplage aussi petit que possible. Commençons par décrire la situation pour des mesures répétées discrètes et généralisons ensuite au continu.

On considère un système de matrice densité  $\rho \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$  et une sonde d'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_a$ , l'ensemble étant initialement dans un état produit  $\rho_0 \otimes |s\rangle\langle s|$ . On imagine que le système est soumis à des mesures généralisées répétées de la forme :

$$\rho_i \rightarrow \rho_{i+1} = \frac{B_m \rho B_m^\dagger}{\Pi[m]}$$

où le résultat  $m$  est obtenu avec probabilité  $\Pi[m] = \text{tr}[B_m \rho B_m^\dagger]$ . On suppose qu'à l'instant  $n$ , le système est intriqué avec la sonde, cette dernière étant ensuite mesurée projectivement dans une certaine base  $\{|k\rangle\}$  d'états pointeurs (le résultat  $k$  étant inconnu). L'évolution correspondante s'écrit :

$$\rho_n \otimes |s\rangle\langle s| \rightarrow \sum_k A_k \rho_n A_k^\dagger \otimes |k\rangle\langle k|.$$

Le lecteur peut se référer à la figure 4.1 pour une représentation schématique de l'évolution considérée. L'application des règles usuelles de la mécanique quantique permet de calculer exactement la probabilité du résultat de mesure  $k$  sachant l'intégralité des résultats de mesure antérieurs  $m_1, \dots, m_n$  et ultérieurs  $m_n, \dots, m_N$  effectuées sur le système. On a en effet :

$$\mathbb{P}[\alpha = k] = f(\Xi_n) = \frac{\text{tr} [E_n A_k \rho_n A_k^\dagger]}{\sum_l \text{tr} [E_n A_l \rho_n A_l^\dagger]},$$

où l'état a posteriori  $\Xi_n$  est le couple d'opérateurs  $(\rho_n, E_n)$  avec  $\rho_n$  la matrice densité au temps  $n$  et  $E_n$  la matrice des effets :

$$\rho_n = \frac{B_{m_n} B_{m_{n-1}} \dots B_{m_1} \rho_0 B_{m_1}^\dagger \dots B_{m_{n-1}}^\dagger B_{m_n}}{\text{tr}[B_{m_n} B_{m_{n-1}} \dots B_{m_1} \rho_0 B_{m_1}^\dagger \dots B_{m_{n-1}}^\dagger B_{m_n}]},$$

$$E_n = \frac{B_{m_{n+1}}^\dagger B_{m_{n+2}}^\dagger \dots B_{m_N}^\dagger \mathbb{1} B_{m_N} \dots B_{m_{n+2}} B_{m_{n+1}}}{\text{tr}[B_{m_{n+1}}^\dagger B_{m_{n+2}}^\dagger \dots B_{m_N}^\dagger \mathbb{1} B_{m_N} \dots B_{m_{n+2}} B_{m_{n+1}}]},$$

où  $E_n$  correspond par conséquent à la matrice densité évoluée à l'envers à partir de l'identité au temps  $N$ . On possède une sorte d'équivalent du lissage dans le sens qu'on peut calculer la probabilité de *quelque chose* a posteriori d'une manière qui a un sens précis. Le défaut est double : on a dû changer la situation physique, l'évolution globale est ainsi modifiée et on possède désormais un couple d'objets alors qu'on préférerait en avoir un seul. En faisant tendre l'interaction vers 0 on peut néanmoins définir une nouvelle matrice densité indépendante de la sonde. On s'intéresse pour cela au cas où  $|\mathcal{H}_a| = 2$  et  $\alpha = \pm 1$  et on pose :

$$\begin{aligned} A_+ &= \varepsilon \mathbf{A} \\ A_- &= \mathbb{1} - \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

et on définit :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_w = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\alpha].$$

On a alors :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_w = \text{tr}[\mathbf{A} \rho_n^{(P)}],$$

où  $\rho_n^{(P)}$  est la matrice densité a posteriori <sup>1</sup> :

$$\rho_n^{(P)} = \frac{\rho_n E_n}{\text{tr}[\rho_n E_n]},$$

matrice qui n'est en général *pas* hermitienne. Cette matrice est l'analogie quantique de la probabilité lissée dans ce contexte. La matrice densité a posteriori se définit de manière immédiate à la limite temps continu. Dans ce cas  $\rho_t$  vérifie une équation maîtresse stochastique standard et  $E_t$  une équation maîtresse stochastique où le temps est renversé. On peut démontrer (voir [150]) que  $\rho^{(P)}$  est effectivement plus lisse <sup>2</sup> que  $\rho$ . En particulier,  $\rho^{(P)}$  ne contient pas d'échardes à la limite de mesure forte (voir D). Cette régularité se paie évidemment de la même difficulté interprétative que pour les *weak values*.

La caractérisation opérationnelle en terme de sonde couplée de manière infinitésimale peut aussi sembler un peu indirecte. On peut proposer la caractérisation contre-factuelle intuitive suivante : si l'on avait interagi de manière infinitésimale avec le système en  $t$ , alors l'influence moyenne que l'on aurait ressentie est contenue dans la matrice densité a posteriori. Cette dernière est en quelque sorte ce que l'on aurait vu du système si l'on s'était donné la peine de le regarder.

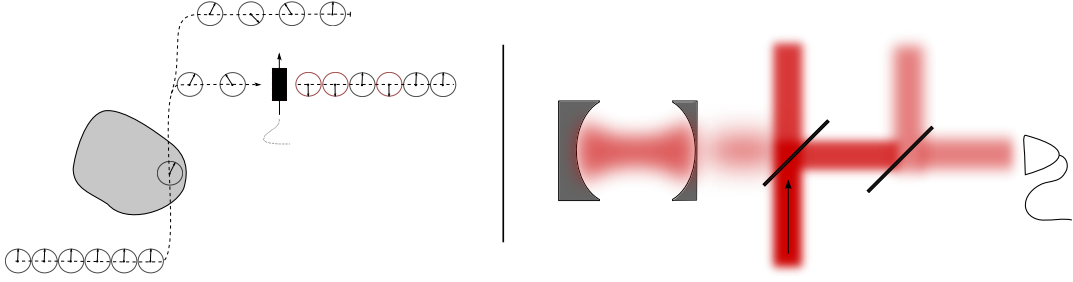


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de la situation considérée par Guevara et Wiseman. À gauche, la représentation en terme d'interactions répétées où une fraction des sondes est perdue et n'est pas mesurée et à droite en terme de détection homodyne où une partie du champ est détournée du détecteur.

#### 4.1.2.b Quantum state smoothing

Une autre manière d'utiliser l'information future est de s'en servir pour améliorer a posteriori la pureté d'un état après une suite de mesures d'efficacité  $\eta < 1$ . Proposé en 2015 par Guevara et Wiseman [154] (GW), le *Quantum Smoothed state* (état lissé) répond à cet objectif. On peut présenter brièvement l'idée de GW en la reformulant directement pour des mesures continues. L'idée est de considérer une équation maîtresse stochastique standard de la forme :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) \left( dY_t - \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt \right),$$

que l'on a écrit cette fois-ci explicitement en fonction du *signal*  $Y_t$  des mesures plutôt que du brownien  $W_t$  (deux processus qui sont, on le rappelle, reliés par  $dY_t = \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + dW_t$ ). Cette matrice densité  $\rho_t$  est la matrice densité «vraie» mais elle est en pratique inconnue. GW supposent en effet que seule une fraction du signal est observable, le reste étant perdu<sup>3</sup> typiquement à cause d'inefficiences au niveau du détecteur (voir Fig. 4.2 pour deux représentations possibles de la situation considérée). En pratique cela revient à décomposer le signal  $Y_t$  en une partie observable  $Y_t^{(1)}$  et une partie inobservée  $Y_t^{(2)}$  :

$$dY_t = dY_t^{(1)} + dY_t^{(2)},$$

où on a :

$$\begin{aligned} dY_t^{(1)} &= \eta_1 \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + \sqrt{\eta_1} dW_t^{(1)} \\ dY_t^{(2)} &= \eta_2 \text{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt + \sqrt{\eta_2} dW_t^{(2)}, \end{aligned}$$

1. Notons que prescription dépend fortement du choix effectué en (4.1.2). Si l'on avait choisi de développer symétriquement  $A_+$  et  $A_-$  en choisissant :

$$\begin{aligned} A_+ &= \mathbf{1}/\sqrt{2} + (\varepsilon/\sqrt{2})\mathbf{A} \\ A_- &= \mathbf{1}/\sqrt{2} - (\varepsilon/\sqrt{2})\mathbf{A}, \end{aligned}$$

alors on aurait plus naturellement posé  $\rho_n^{(P)} = \frac{\{\rho_n, E_n\}}{2\text{tr}[\rho_n E_n]}$ .

2. Plus précisément,  $\rho^{(P)}$  peut s'écrire comme l'intégrale d'un processus d'Itô et est donc de classe  $\mathcal{C}^{3/2}$ .

3. En terme de mesures répétées cela revient à ne mesurer qu'une fraction des sondes.

avec  $\eta_1 + \eta_2 = 1$  et  $W^{(1)}$  et  $W^{(2)}$  des processus de Wiener indépendants. En pratique, comme seul  $Y_t^{(1)}$  est connu, à la fois  $W^{(1)}$  et  $W^{(2)}$  sont inconnus car ils nécessitent de connaître la matrice densité vraie pour être reconstruits. Avec la connaissance de  $Y_t^{(1)}$  on peut en revanche facilement construire  $\vec{\rho} = \mathbb{E}[\rho_t | Y_u^{(1)}, u \leq t]$ , qui correspond simplement à la matrice densité usuelle pour une mesure avec efficacité  $\neq 1$  et on a :

$$\begin{aligned} d\vec{\rho}_t &= \mathcal{L}(\vec{\rho}_t) dt + \mathcal{D}[N](\vec{\rho}_t) dt + \mathcal{H}[N](\vec{\rho}_t) \left( dY_t^{(1)} - \eta_1 \text{tr}[(N + N^\dagger) \vec{\rho}_t] dt \right) \\ &= \mathcal{L}(\vec{\rho}_t) dt + \mathcal{D}[N](\vec{\rho}_t) dt + \sqrt{\eta_1} \mathcal{H}[N](\vec{\rho}_t) d\vec{W}_t, \end{aligned}$$

où  $\vec{W}$  est un processus de Wiener vis à vis de la filtration engendrée par les résultats de mesure observés (et donc *pas* vis à vis de l'information totale),

$$d\vec{W} = \eta_1^{-1/2} \left( dY_t^{(1)} - \eta_1^{1/2} \text{tr}[(N + N^\dagger) \vec{\rho}_t] dt \right).$$

Jusque là, rien qui ne soit pas traditionnel. GM proposent alors de définir l'état lissé  $\overleftarrow{\rho}$  en conditionnant aussi sur les résultats de mesure futurs :

$$\overleftarrow{\rho}_t = \mathbb{E} \left[ \rho_t | Y_u^{(1)}, u \leq t \text{ et } u > t \right].$$

Dans ce cas il n'existe pas a priori de système d'équations simples vérifiées par  $\overleftarrow{\rho}$  et GM se contentent de démontrer numériquement que  $\overleftarrow{\rho}$  est typiquement plus *pur*<sup>4</sup> que la matrice densité usuelle «*forward*»  $\vec{\rho}$ . En revanche, la procédure n'améliore typiquement pas la régularité et  $\overleftarrow{\rho}$  semble garder une variation quadratique finie dans toutes les situations. La caractérisation opérationnelle de la procédure n'est pas non plus immédiatement évidente. À quoi bon se rapprocher de  $\rho_t$  la matrice densité «vraie» qui n'est connue de personne<sup>5</sup> ? On peut imaginer que le signal  $Y_t^{(2)}$  n'est en fait pas perdu mais mesuré par un autre observateur, l'état lissé permet alors au premier observateur de mieux estimer la statistique des résultats du second, mais on n'a pour le moment guère mieux.

#### 4.1.2.c Discussion

Les deux procédures précédentes abordent le problème du lissage de manière très différente et généralisent la situation classique avec des philosophies orthogonales. GJM n'ont pas de variable cachée mais calquent la construction classique en voyant la matrice densité  $\rho_t$  comme une *probabilité* généralisée qui peut donc être raffinée a posteriori. Pour GW,  $\rho_t$  est au contraire la «variable cachée» à estimer. L'approche de GJM essaie en quelque sorte de réduire l'incertitude quantique alors que celle de GW la voit comme indépassable et utilise les résultats futurs pour réduire l'incertitude classique qui la décore. Le coût de la radicalité de GJM est la construction d'une matrice non hermitienne dont les coefficients diagonaux n'ont pas d'interprétation probabiliste claire. La relative prudence de GW donne lieu à une procédure qui ne change pas

4. Le résultat reste a priori valable pour d'autres métriques d'information comme l'entropie de Von Neumann.

5. Howard Wiseman l'appelle par conséquent «matrice densité de Dieu» dans ses présentations, signe que l'utilité pratique de la procédure n'est pas encore entièrement claire.

la régularité de l'état (malgré son nom, la procédure n'offre pas de lissage) et n'est utilisable que dans les cas où l'efficacité de la mesure est différente de 1.

GJM et GW raisonnent par *analogie* avec les modèles de Markov caché, mais puisqu'on a construit précédemment (voir 1.2.6 et B) un parallèle *exact* entre ces modèles et la mesure continue, pourquoi ne pas l'utiliser ?

### 4.1.3 Nouvelles idées

#### 4.1.3.a Lissage et *Viterbi Path* avec les variables cachées

On peut utiliser le parallèle avec les modèles de Markov caché pour proposer une nouvelle définition du lissage et un premier analogue quantique du chemin de Viterbi. On considère toujours une situation de mesure continue modélisée par une équation maîtresse stochastique de la forme :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t^{\mathcal{F}},$$

où on précise que le processus  $W^{\mathcal{F}}$  est un processus de Wiener du point de vue de la filtration naturelle associée aux résultats de mesure. On rappelle (voir 1.2.6) que cette équation peut se réécrire en faisant explicitement intervenir une variable cachée  $R_t$  telle que les coefficients diagonaux de  $\rho_t$  dans la base propre de  $N$  s'interprètent comme les probabilités de  $R_t$ ,

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) \left( dW_t^{\mathcal{G}} + \sqrt{\gamma} \text{tr} \left[ (N + N^\dagger)(R_t - \rho_t) \right] dt \right)$$

$$\mathbb{P} [R_{t+dt} = |i\rangle\langle i| \mid R_t = |j\rangle\langle j|] = M(\rho_t)_{i \leftarrow j} dt.$$

avec :

$$M(\rho)_{i \leftarrow j} = \frac{\left[ \sum_{k \neq l} (\mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)} \right]^+ + \mu_{ij}}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}} + \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)}.$$

Avec une telle réécriture en tête, on peut simplement définir  $\rho^{\text{smooth}}$  en utilisant la définition classique (4.1.1) :

$$\rho_t^{\text{smooth}} = \mathbb{E} \left[ R_t \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right].$$

Cette nouvelle matrice densité lissée dépend de la base de mesure et supprime l'information des coefficients diagonaux. En contrepartie, elle possède une interprétation probabiliste immédiate, apporte une information supplémentaire quelle que soit l'efficacité de la mesure, et est plus régulière que  $\rho_t$ . En effet, dans le cas où  $\mathcal{L}$  préserve la diagonalité de  $\rho$  dans la base propre de  $N$ , *i.e.* dans le cas *classique*, la matrice densité lissée coïncide avec la proposition de GJM  $\rho^{\text{smoothed}} = \rho_{\text{P}}$  qui est régulière. Dans le cas général, le calcul explicite est rendu difficile par la dépendance des taux de saut en la matrice densité  $\rho_t$  *forward*.

Cette dépendance implique d'ailleurs un sens privilégié de l'écoulement du temps qui rend la procédure proposée malgré tout asymétrique. Les taux de saut dépendent en effet d'une quantité calculable dans un sens mais pas dans l'autre,  $\rho_t$  possède un impact dynamique sur la variable cachée mais pas  $E_t$ . Par ailleurs, en dépit de ses avantages



précédemment cités,  $\rho^{\text{smoothed}}$  possède le défaut de ne posséder aucune caractérisation opérationnelle, la matrice n'est liée à rien de mesurable. On peut seulement en proposer la caractérisation contrefactuelle *un peu vide* suivante : si l'on avait fait une mesure projective en  $t$ , alors on aurait mesuré  $R_t$  et  $\rho_t^{\text{smooth}}$  en fournirait la meilleure estimation. Mais il est bien connu que les mesures non effectuées n'ont pas de sens et la procédure permet ainsi a priori au mieux de lisser numériquement des courbes expérimentales.

On peut de la même manière définir un chemin de Viterbi  $\rho^V$  comme en classique avec la définition :

$$\rho^V = \operatorname{argmax}_R \mathbb{P} \left[ R \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right],$$

qui correspond en quelque sorte à la trajectoire de sauts entre pointeurs sous jacente la plus probable sachant l'ensemble des résultats de mesure. Dans le discret, elle est a priori calculable numériquement avec l'algorithme de Viterbi classique [155].

Les deux nouvelles définitions proposées dépendent évidemment de la base propre de la mesure et supposent d'une certaine manière que cette dernière est stable. Pour autant elles constituent probablement l'extension la plus directe et la plus simple des définitions classiques et méritent d'être étudiées et comparées quantitativement avec les procédures de GJM et GW.

#### 4.1.3.b Viterbi state avec l'intégrale de chemin

L'approche de GW peut être utilisée pour proposer une autre définition de l'état de Viterbi, définition qui permet de faire des calculs un peu plus explicites. On considère la même situation que celle de GW où une partie de l'information est perdue. Au lieu de considérer comme GW la moyenne conditionnée à tous les résultats  $\overleftarrow{\rho}_t = \mathbb{E} \left[ \rho_t \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right]$ , on peut regarder la trajectoire la plus probable :

$$\rho^{\text{Vs}} = \operatorname{argmax}_\rho \mathbb{P} \left[ \rho \mid \mathcal{F}_{[0,+\infty[} \right],$$

ou l'exposant Vs est l'abréviation de *Viterbi state*. Cette quantité représente la trajectoire la plus probable de la matrice densité vraie sachant tous les résultats de mesure. Étant donné les résultats expérimentaux, c'est la meilleure reconstruction que l'on puisse espérer. L'avantage de cette quantité par rapport à l'état lissé de GW et le chemin de Viterbi défini précédemment est que l'on peut en donner une expression un peu plus explicite en l'exprimant comme le point col d'une intégrale de chemin<sup>6</sup>.

On peut représenter tout processus d'Itô sous la forme d'une intégrale de chemin à l'aide d'une technique inventée par Martin Siggia et Rose [156] et écrit sous forme intégrale moderne par de Dominicis [157] et Janssen [158] (MSRdDJ). Pour l'équation qui nous intéresse ici, c'est à dire :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) \left( dY_t^{(1)} + dY_t^{(2)} - \operatorname{tr}[(N + N^\dagger)\rho_t] dt \right),$$

6. Il faut voir les calculs qui suivent comme une suggestion de ce à quoi le résultat pourrait ressembler plutôt que comme des développements rigoureux. À terme, il faudrait idéalement dériver les équations finales (4.1.3) avec une méthode plus sûre comme le théorème de Girsanov.

la prescription de MSRdDJ consiste à introduire l'action  $S$  suivante<sup>7</sup> :

$$S[\rho, \tilde{\rho}, W^{(1)}, W^{(2)}] = \int_{t_0}^{t_1} dt \operatorname{tr} \left\{ \tilde{\rho}_t [\partial_t \rho_t - \mathcal{L}(\rho_t) - \mathcal{D}[N](\rho_t) - \mathcal{H}[N](\rho_t) (\sqrt{\eta_1} \partial_t W_t^{(1)} + \sqrt{\eta_2} \partial_t W_t^{(2)})] \right\} - \frac{\partial_t W_t^{(1)2}}{2} - \frac{\partial_t W_t^{(2)2}}{2},$$

où  $\tilde{\rho}$  est un multiplicateur sans interprétation physique. Cette action permet de calculer la valeur moyenne de n'importe quel opérateur de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[\mathcal{O}(\rho)] \propto \int \mathcal{D}[\rho] \mathcal{D}[\tilde{\rho}] \mathcal{D}[W^{(1)}] \mathcal{D}[W^{(2)}] \mathcal{O}[\rho] e^S$$

et encode ainsi typiquement le processus stochastique. On peut réécrire cette expression en fixant  $Y^{(1)}$  :

$$S[\rho, \tilde{\rho}, W^{(2)}] = \int_{t_0}^{t_1} dt \operatorname{tr} \left\{ \tilde{\rho}_t [\partial_t \rho_t - \mathcal{L}(\rho_t) - \mathcal{D}[N](\rho_t) - \mathcal{H}[N](\rho_t) (\partial_t Y_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho) + \sqrt{\eta_2} \partial_t W_t^{(2)})] \right\} - \frac{(\partial_t Y_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho))^2}{2\eta_1} - \frac{\partial_t W_t^{(2)2}}{2}$$

où on a utilisé la notation  $U(\rho) = \operatorname{tr}[(N + N^\dagger)\rho]$ . On peut désormais calculer le chemin le plus probable<sup>8</sup> (*Viterbi state*) en différentiant l'action par rapport à  $\rho$ , au multiplicateur  $\tilde{\rho}$  et au bruit, *i.e.* en fixant :

$$\frac{\delta S}{\delta \tilde{\rho}_t} = 0; \quad \frac{\delta S}{\delta \rho_t} = 0; \quad \frac{\delta S}{\delta \partial_t W_t^{(2)}} = 0,$$

ce qui fournit :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \mathcal{L}(\rho_t) dt + \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \mathcal{H}[N](\rho_t) (dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t) dt + \sqrt{\eta_2} dW_t^{(2)}) \\ -d\tilde{\rho}_{t-dt} &= \mathcal{L}^*(\rho_t) dt + \mathcal{D}^*[N](\rho_t) dt - (N + N^\dagger) (dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t) dt) \\ &\quad + [N^\dagger \tilde{\rho} + \tilde{\rho} N - \operatorname{tr}((N + N^\dagger)\rho_t) \tilde{\rho}_t - \operatorname{tr}(\rho_t \tilde{\rho}_t) (N + N^\dagger)] \\ &\quad \times (dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t) dt + \sqrt{\eta_2} dW_t^{(2)}) \\ dW_t^{(2)} &= \sqrt{\eta_2} \operatorname{tr} [\tilde{\rho}_t \mathcal{H}[N](\rho_t)] dt \end{aligned},$$

où on omet l'exposant «Vs» pour ne pas surcharger l'écriture. L'expression précédente

7. On omet ici le Jacobien qui apparaît dans la normalisation.

8. On choisit en fait le minimum de l'action comme *définition* du chemin le plus probable. Il est peu vraisemblable que cette définition fournisse le même résultat que la limite d'une discrétisation ou même que toute autre définition mathématiquement raisonnable dans le continu. En l'absence de bruit faible, l'action MSR ne donne pas plus.

donne finalement,

$$\begin{aligned}
d\rho_t &= \mathcal{L}(\rho_t) dt + \mathcal{D}[N](\rho_t)dt + \mathcal{H}[N](\rho_t)(dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t)dt + \eta_2 \text{tr}[\tilde{\rho}_t \mathcal{H}[N](\rho_t)] dt) \\
-d\tilde{\rho}_{t-dt} &= \mathcal{L}^*(\rho_t) dt + \mathcal{D}^*[N](\rho_t) dt - (N + N^\dagger)(dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t)dt) \\
&\quad + [N^\dagger \tilde{\rho}_t + \tilde{\rho}_t N - \text{tr}((N + N^\dagger)\rho_t)\tilde{\rho}_t - \text{tr}(\rho_t \tilde{\rho}_t)(N + N^\dagger)] \\
&\quad \times (dY_t^{(1)} - \eta_1 U(\rho_t)dt + \eta_2 \text{tr}[\tilde{\rho}_t \mathcal{H}[N](\rho_t)] dt).
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Un tel système d'équations différentielles stochastiques généralise la proposition de Chantasri et Jordan [159] au cas où toutes les mesures ne sont pas perdues. Il n'est pas très facile de résoudre un tel système, même numériquement, car on a des conditions aux limites mixtes (initiale sur  $\rho$  et finale sur  $\tilde{\rho}$ ). On peut néanmoins calculer d'assez bonnes approximations des solutions en résolvant pour un certain nombre de conditions initiales puis en essayant de se rapprocher des bonnes conditions finales par dichotomie.

La méthode proposée permet de repurifier une trajectoire quantique et pourrait de ce fait être utile pour nettoyer des résultats expérimentaux a posteriori (ne serait-ce que pour les courbes soient plus «jolies»). Il y a évidemment encore un travail important à effectuer pour s'assurer qu'on est effectivement capable d'approximer fidèlement les solutions de (4.1.3), étudier leurs propriétés et éventuellement leur trouver d'autres intérêts pratiques.

## 4.2 Extension des résultats au discret

Les résultats que l'on a obtenus pour la limite de mesure forte sont plus robustes qu'il n'y paraît. La situation que l'on a étudiée en 2.1 et 2.2 peut en effet sembler exotique. On a effectué une première limite pour passer des mesures faibles itérées aux mesures continues, puis on a pris la limite de mesure forte à partir de cette première limite. En réalité, les simulations numériques montrent que la première limite, bien qu'indéniablement *pratique* puisqu'elle permet de faire du calcul différentiel, n'est manifestement pas nécessaire. Plus précisément, si l'on considère des mesures faibles (mais pas *infinitement* faibles) itérées et que l'on fait simplement tendre la fréquence de ces dernières vers  $+\infty$ , le comportement limite que l'on obtient est (au moins qualitativement) similaire à ce que l'on a observé au chapitre 2 (voir Fig. 4.3). Cette nouvelle situation est pourtant bien plus générale! Si nos résultats s'y exportent vraiment, alors il est indispensable de le prouver.

Dans ce qui suit on va préciser la situation générale simple que l'on a à l'esprit. On va montrer qu'il est possible d'y démontrer un nouveau théorème sur les sauts. Dans ce nouveau contexte, un analogue de la proposition sur la distribution des échardes est en revanche manifestement plus difficile à prouver mais on peut se risquer à une conjecture. Plus généralement, le fait que ces résultats semblent s'étendre montre qu'il est possible de définir une *nouvelle limite continue* pour les trajectoires quantiques.

### 4.2.1 Modèle considéré

On considère qu'un système possédant une dynamique propre est soumis à une mesure faible sans démolition tous les  $\Delta t$ . La mesure faible est symbolisée par l'application

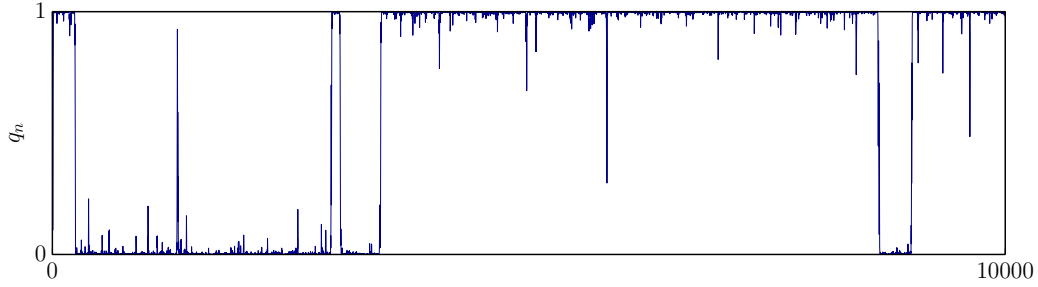


FIGURE 4.3 – Trajectoire quantique discrète  $q_n = q(n\Delta t)$  générée à partir de l'équation (4.2.6) pour  $\lambda = 1$ ,  $q_{eq} = 0.5$ ,  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $\varepsilon = 0.5$  c'est à dire une limite de mesure forte obtenue à partir de mesures faibles discrètes (et *pas* infiniment faibles). La trajectoire est qualitativement similaire à ce que l'on observe en partant de trajectoires quantiques continues.

stochastique  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{M}(\rho) = \frac{\Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]} \text{ avec probabilité } \Pi[\alpha] = \text{tr}[\Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger].$$

Les matrices  $\Omega_\alpha$  sont codiagonalisables, ce qui est équivalent à la condition de non-démolition, et on a  $\sum_i \Omega_\alpha^\dagger \Omega_\alpha$  par conservation de la probabilité. On note  $|k\rangle$  les pointeurs de la base dans laquelle les  $\Omega_\alpha$  sont diagonaux. On note  $\bar{\mathcal{M}}$  l'application complètement positive correspondant à la moyenne de  $\mathcal{M}$  :  $\bar{\mathcal{M}} = \sum_i \Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger$ . On suppose que l'évolution du système entre chaque mesure est donnée par une application complètement positive  $\phi_{\Delta t}$  possédant un générateur  $\mathcal{L}$ , *i.e.*  $\phi_{\Delta t} = e^{\Delta t \mathcal{L}}$ .

La dynamique consiste en l'itération de l'application stochastique  $\chi = \mathcal{M} \circ \phi_{\Delta t}$ , *i.e.* on s'intéresse à la trajectoire quantique discrète  $\rho_n = \chi^n \rho_0$ . Faire tendre la fréquence des mesures vers l'infini correspond à prendre la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  avec  $t = n\Delta t$ . Comme pour les sauts obtenus dans le cas continu, il faut *rescaler* la dynamique propre pour éviter que les transitions dissipatives ne soient les seules à survivre. Il faudrait évidemment faire le même type d'analyse sérieuse qu'en C pour déterminer le *rescaling* le plus général. Pour une première étude on peut simplement essayer de prendre la même redéfinition qu'en 2.1 :

$$\mathcal{L} = A + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}(B + C) + \frac{1}{\Delta t}D$$

où on rappelle que  $A$  envoie les probabilités sur les probabilités,  $B$  les phases sur les probabilités,  $C$  les probabilités sur les phases,  $D$  les phases sur les phases ; et  $D$  est diagonal :  $D_{kl}^{ij} = -\delta_k^i \delta_l^j d_{kl}$ . En pratique le rescaling en  $1/\Delta t$  de  $D$  est un peu artificiel. Dans toutes les situations simples, typiquement évolution Hamiltonienne + couplage à un environnement thermique,  $D = 0$  et les calculs suivant sont un peu plus simples (et le lecteur peut raisonnablement fixer  $D = 0$  quand bon lui semble sans perte excessive de généralité).

### 4.2.2 Sauts quantiques

Le fait que la limite est bien une limite de saut est assez clair. En l'absence d'évolution propre, l'application stochastique  $\mathcal{M}$  fait naturellement tendre le système vers un des états pointeurs (voir par exemple [160]). Quand  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{M}$  domine la dynamique et le système est presque tout le temps dans un pointeur de la mesure. Reste à savoir quel sont les taux de transition entre les différents pointeurs. Pour cela on peut utiliser le même type d'approche perturbative sur l'équation maîtresse (moyennée) qu'en 2.1.2.b. L'idée est de faire apparaître les taux de saut sur l'équation aux valeurs propres de l'évolution élémentaire moyenne :

$$\bar{\Delta} = \bar{\chi} - \mathbf{1} = \bar{\mathcal{M}} \circ \phi_{\Delta t} - \mathbf{1}.$$

Par la suite, on note  $\Delta t = dt$  pour mettre l'accent sur le fait qu'on attend une limite continue bien définie de processus de saut. La première chose à faire est de développer  $\phi_{dt}$  jusqu'au premier ordre en  $dt$ . À cause du terme  $D \neq 0$  cette application n'est pas infinitésimale à la limite et le développement est du coup un tout petit peu non trivial. On a en effet :

$$\begin{aligned} \phi_{dt} &= e^{dt\mathcal{L}} \\ &= e^D + \sqrt{dt}(Bf(D) + f(D)C) + dt \left( A + \frac{BC}{2} + g(D, CB) \right) + \mathcal{O}(dt^{3/2}) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

avec

$$\begin{aligned} f(D) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D^{n-1}}{n!} \longrightarrow f(D)_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j \frac{1 - e^{-d_{kl}}}{d_{kl}} \text{ pour } d_{kl} \neq 0 \text{ et } 1 \text{ sinon} \\ g(D, CB) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{D^k C B D^{n-k-2}}{n!}. \end{aligned}$$

Encore une fois, notons que le lecteur peut fixer  $D = 0$  sans perte excessive de généralité. De plus, la fonction  $g$  n'est utile que pour écrire l'équation (4.2.1) et n'apparaît pas par la suite. L'objectif est désormais d'écrire l'équation aux valeurs propres pour  $\bar{\Delta}$  :

$$\bar{\Delta}x = Ex. \quad (4.2.2)$$

On peut ensuite développer perturbativement valeurs propres et vecteurs propres :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sqrt{dt}x_{-1} + dt x_{-2} + \mathcal{O}(dt^{3/2}) \\ E &= E_0 + \sqrt{dt}E_{-1} + dt E_{-2} + \mathcal{O}(dt^{3/2}) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

On s'intéressera par la suite aux valeurs propres au voisinage de  $E_0 = 0$  car, comme en 2.1.2.b tous les états correspondant aux valeurs propres non nulles sont écrasés à la limite. Reste désormais à calculer, *i.e.* à insérer le développement (4.2.3) dans l'équation aux valeurs propres (4.2.2) et à écrire les équations obtenues aux ordres  $\sqrt{dt}$  et  $dt$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{dt} : (\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbf{1})x_{-1} + \bar{\mathcal{M}}f(D)Cx_0 &= E_{-1}x_0 \\ dt : (\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbf{1})x_{-2} + \bar{\mathcal{M}}(Bf(D) + f(D)C)x_{-1} + Ax_0 + \frac{1}{2}BCx_0 &= E_{-1}x_{-1} + E_{-2}x_0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

car  $\bar{\mathcal{M}}A = A$  et  $\bar{\mathcal{M}}B = B$ . On suit toujours la même idée qu'en 2.1.2.b et on décompose l'espace vectoriel sur lequel agit  $\bar{\Delta}$  de la manière suivante :  $S \simeq \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s = S_0 \oplus S_1$ , avec  $S_0 = \text{Ker}(\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbb{1})$ . On décompose ensuite  $x_{-1}$  sur cette somme directe  $x_{-1} = x_{-1}^{(0)} + x_{-1}^{(1)}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbb{1})x_{-1}^{(1)} + \bar{\mathcal{M}}f(D)Cx_0 &= 0 \\ E_{-1}x_0 &= 0 \end{aligned}$$

L'opérateur  $(\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbb{1})$  est inversible sur  $S_1$  et on peut donc écrire

$$x_{-1}^{(1)} = -(\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbb{1})_{|S_1}^{-1} \bar{\mathcal{M}}f(D)Cx_0.$$

La deuxième ligne de l'équation (4.2.4) donne quant à elle :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{M}}e^D - \mathbb{1})x_{-2} + \bar{\mathcal{M}}f(D)Cx_{-1}^{(0)} &= 0 \\ Bf(D)x_{-1}^{(1)} + Ax_0 + \frac{1}{2}BCx_0 &= E_{-2}x_0 \end{aligned}$$

En insérant l'expression de  $x_{-1}^{(1)}$  à la deuxième ligne on obtient :

$$\underbrace{\left[ A + \frac{1}{2}BC + Bf(D)(\mathbb{1} - \bar{\mathcal{M}}e^D)_{|S_1}^{-1} \bar{\mathcal{M}}f(D)C \right]}_M x_0 = E_{-2}x_0$$

où on reconnaît comme précédemment la matrice  $M$  telle que  $\bar{\Delta}x_0 = dtMx_0$ , *i.e.* la matrice contenant les taux de transition entre pointeurs. On peut être explicite en introduisant une expression en composantes pour  $\bar{\mathcal{M}}$  :

$$\Omega_\alpha = \sum \nu_\alpha^{(k)} |k\rangle \langle k| \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j \sum_\alpha \nu_\alpha^{(i)} \nu_\alpha^{(j)*}.$$

On obtient ainsi :

$$M_{i \leftarrow j} = A_j^i + \Re \sum_{k>l} B_{kl}^i C_j^{kl} \left( 1 + 2 \left[ \frac{1 - e^{-d_{kl}}}{d_{kl}} \right]^2 \left[ \frac{\sum_\alpha \nu_\alpha^{(k)} \nu_\alpha^{(l)*}}{1 - e^{-d_{kl}} \sum_\alpha \nu_\alpha^{(k)} \nu_\alpha^{(l)*}} \right] \right)$$

Ce qui se simplifie pour  $D = 0$  (le cas qui servira probablement dans la plupart des situations) en :

$$M_{i \leftarrow j} = A_j^i + \Re \sum_{k>l} B_{kl}^i C_j^{kl} \left( 1 + 2 \left[ \frac{\sum_\alpha \nu_\alpha^{(k)} \nu_\alpha^{(l)*}}{1 - \sum_\alpha \nu_\alpha^{(k)} \nu_\alpha^{(l)*}} \right] \right).$$

Aux réserves sur la généralité du scaling près, on voit que l'on peut étendre la proposition sur les sauts à une situation de mesures répétées sans limite continue.

### 4.2.3 Échardes

Les échardes semblent pouvoir aussi bien se passer de la limite continue pour apparaître dans une situation de mesure forte. Ce résultat est assez contre intuitif et semble même impossible à première vue. En effet, dans une situation où l'on itère des mesures faibles discrètes, la matrice densité du système possède une évolution discontinue entrecoupée de sauts (pas entre pointeurs) de taille finie. Il est difficile d'imaginer qu'une telle évolution puisse donner lieu à une distribution continue et invariante d'échelle pour les maxima locaux (échardes). Et pourtant, au moins visuellement, il est difficile de distinguer une limite de mesure forte venant d'une mesure continue ou de mesures faibles itérées. Essayons au moins de donner précisément une conjecture minimale.

Même à la limite continue, nous n'avons en réalité exploré les échardes que dans deux situations précises avec  $|\mathcal{H}_s| = 2$ . La plus simple des deux consistait en la mesure continue de l'énergie pour un qubit couplé à un bain thermique. Dans ce cas la population  $q_t$  de l'état fondamental vérifiait l'équation différentielle stochastique :

$$dq_t = \lambda(q_{\text{eq}} - q_t) dt + \sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t. \quad (4.2.5)$$

Comme on l'a vu en 1.2.6, la partie mesure  $\sqrt{\gamma} q_t(1 - q_t) dW_t$  peut être vue comme la limite continue de l'évolution discrète :

$$q \rightarrow \frac{(1 + \varepsilon\delta)q}{(1 + \varepsilon\delta)q + (1 - \varepsilon\delta)(1 - q)} \quad \text{avec probabilité } \mathbb{P}[\delta = 1] = q \quad (4.2.6)$$

où  $\delta = \pm 1$  est le résultat de mesure, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et que l'itération élémentaire discrète est répétée rapidement. Le cas « discret » le plus simple que l'on puisse imaginer est donc l'évolution :

$$\begin{aligned} \partial_t q_t &= \lambda(q_{\text{eq}} - q_t) \\ q_t &\rightarrow \frac{(1 + \varepsilon\delta)q_t}{(1 + \varepsilon\delta)q_t + (1 - \varepsilon\delta)(1 - q_t)} \quad \text{tous les } \Delta t, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

qui correspond à un couplage à un bain doublé d'une mesure faible de l'énergie tous les  $\Delta t$ . La conjecture que l'on peut faire est que l'évolution (4.2.7) quand  $\Delta t \rightarrow 0$  à  $\varepsilon \neq 1$  fixé donne lieu *exactement* à la même distribution d'échardes que l'équation (4.2.5) à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Cette conjecture semble numériquement crédible mais la preuve apparaît pour le moment hors de portée des outils introduits dans cette thèse.

### 4.2.4 Discussion

En imaginant que l'on réussisse à prouver une version un peu plus générale de la conjecture sur les échardes en plus de la proposition sur les sauts qui est déjà plus solidement établie, on est une nouvelle fois surpris par le caractère extrêmement particulier des mesures projectives. En effet, les mesures purement projectives du postulat de la mesure apparaissent comme qualitativement isolées et extrêmement particulières au milieu de l'ensemble des mesures possibles. Ajouter une probabilité d'erreur, fut elle infime, transforme une mesure projective en une mesure faible pour laquelle la dynamique est bien plus riche (avec notamment la présence d'échardes). Les mesures continues, qui peuvent apparaître à première vue aussi comme un cas assez particulier,

semblent en revanche capter plus finement l'étendue des comportements possibles à la limite de mesure forte et constituent de ce fait un meilleur guide que les mesures de Von Neumann pour l'exploration de cette limite.

### 4.3 Et pour la route...

Les sections précédentes de ce chapitre présentaient des extensions possibles du formalisme et des résultats présentés dans cette thèse. Bien que spéculatives, ces propositions étaient étayées par des calculs préliminaires et des arguments d'une solidité raisonnable. Alors que l'on approche la conclusion de cette thèse, on peut se risquer à quelques propositions pour des recherches futures ; esquisse d'un programme pour une extension de la théorie à deux domaines, la théorie quantique des champs et la gravité.

#### 4.3.1 Étendre la mesure continue aux théories des champs

Faire passer la théorie de la mesure continue de la mécanique quantique en espace de Hilbert discret à la théorie quantique des champs est une tâche naturelle et a priori inévitable. Les intérêts d'une telle généralisation seraient nombreux. Du point de vue de la physique fondamentale, une telle théorie pourrait permettre d'introduire facilement les détecteurs dans la description sans avoir à recourir à des modèles purement quantiques. Une telle théorie donnerait aussi accès à la possibilité de faire du couplage semi-classique, notamment pour la gravité, à partir de théories plus réalistes que la mécanique quantique non-relativiste. Maîtriser la mesure continue dans des théories avec un continuum de degrés de liberté permettrait d'étendre son domaine d'application – aujourd'hui essentiellement confiné à l'optique quantique – à la matière condensée. On pourrait notamment s'intéresser au transport électronique et à sa statistique sans avoir à recourir au formalisme habituel des mesures projectives à l'instant initial et final. Une telle théorie permettrait aussi de mieux comprendre les modèles possédant des propriétés topologiques non triviales, que ce soit pour étudier leur stabilité vis à vis de la mesure ou pour savoir comment extraire l'information quantique qui y est éventuellement encodée. D'un point de vue purement mathématique (et encore plus spéculatif), la mesure continue permet de produire des théories statistiques des champs (le champ étant alors le signal) à partir de théories quantiques des champs et on pourrait imaginer en produire ainsi des non triviales.

La difficulté principale, déjà évoquée, est que la théorie de la mesure fait apparaître des termes quadratiques en les opérateurs mesurés  $\mathcal{D}[\hat{O}(x)](\rho) \propto \hat{O}^2(x)\rho$  ce qui donne des quantités divergentes pour des opérateurs locaux. Le problème est que cette divergence n'est typiquement pas renormalisable et a des conséquences physiques observables (comme la décohérence infinie). Il faut donc régulariser la théorie. On peut soit régulariser les opérateurs  $\hat{O}(x) \rightarrow \hat{O}_\sigma(x)$  mesurés eux mêmes, soit introduire une régularisation via la corrélation entre les bruits, avec un noyau  $\Gamma(x, y) \neq \delta(x - y)$ . Dans le premier cas, on détruit, faute de mieux, la localité de la théorie. C'est la voie la plus utilisée et celle que l'on a suivie en 3.3. Dans le second cas, on peut conserver des opérateurs locaux et la non localité ne se manifeste que dans le bruit, donc dans l'aléa. La difficulté est alors de trouver des  $\Gamma(x, y)$  interprétables comme des fonctions de corrélation (donc, notamment, dont la transformée de Fourier est positive) et qui



ont des bonnes propriétés d'invariance (conforme par exemple, pour ne pas introduire de nouvelle échelle dans le problème). Alternativement on peut essayer de redéfinir complètement la théorie quantique des champs pour y adapter la mesure continue dès le départ, approche suivie en quelque sorte par Pearle [32] dans le contexte des fondements.

La prochaine étape raisonnable est probablement d'étudier une classe de modèles simples, comme la mesure continue d'opérateurs locaux pour des fermions libres 1d. Plutôt que de chercher la situation la plus générique, on doit pouvoir observer sur quelques modèles jouets quelles sont les pistes prometteuses pour définir correctement une hypothétique théorie générale.

### 4.3.2 Gravitation

Construire un modèle complet de gravité semi-classique relativiste semble inatteignable à court terme, ne serait-ce que parce que les différentes pièces du puzzle (théorie quantique des champs en espace courbe, modèles de collapse) ne sont que partiellement comprises dans ce domaine. Même si un tel modèle était disponible, il serait probablement plus utile d'étudier quelques situations simples, éventuellement à l'aide de modèles jouet, dans lesquelles l'approche standard fonctionne mal ou fait des prédictions ambiguës.

On peut penser à quelques exemples. L'idée est d'oublier provisoirement toutes les contraintes d'une théorie unifiée. Le formalisme que l'on a développé à la section 3.3 fonctionne à la limite newtonienne. Une application immédiate serait à un modèle jouet de cosmologie inflationniste. Dans ce contexte, les perturbations autour de la métrique plate donnent en effet lieu à une description newtonienne effective. Au facteur d'échelle prêt, on doit donc pouvoir utiliser directement notre formalisme<sup>9</sup>. Notre modèle grossier brisera évidemment toutes les invariances et introduira une distance caractéristique à cause de la régularisation des opérateurs locaux mais on peut espérer pouvoir comparer malgré tout de manière profitable les résultats obtenus avec celles d'autres modèles.

Plus généralement, l'avantage de notre approche est qu'elle permet de sortir de la situation usuelle où la matière quantique évolue dans un *background* fixe pour avoir un espace-temps dynamique. Les modèles de collapse en *background* fixe ont déjà permis à Okon *et al.* d'attaquer des problèmes aussi exotiques que le paradoxe de l'information dans les trous noirs [161]. Il ne fait aucun doute qu'en ajoutant la possibilité de prendre en compte au moins perturbativement une rétroaction sur l'espace-temps à l'aide de notre mécanisme on puisse trouver de nouvelles situations intéressantes. On pourrait, en rêvant, construire un modèle (sans invariance relativiste) adapté à un système de coordonnées particulier (comme une métrique à symétrie sphérique dans les coordonnées de Schwarzschild) pour étudier le problème de la singularité<sup>10</sup>.

En redescendant sur Terre, la priorité est de faire des prédictions précises à la limite newtonienne pour des situations expérimentales crédibles. On peut notamment penser aux expériences du projet MAQRO (*Macroscopic Quantum Resonators*)[162]

9. Idée suggérée par Daniel Sudarsky.

10. Il ne semble en effet pas impossible que les fluctuations de la métrique induite par le collapse ne régularisent la singularité.

pour lesquelles il y a peu de prédictions quantitatives hors des calculs effectués avec l'équation de Schrödinger-Newton.



# Conclusion

Au terme de cette longue exploration des mesures continues, on peut résumer brièvement les quelques résultats originaux que l'on a obtenus. Sur le front « technique », on s'est principalement intéressé à la limite « forte » des mesures continues. On a obtenu un théorème permettant de comprendre l'émergence des *sauts quantiques* et de calculer leur statistique dans le cas général. Dans un cas simple, on a mis en évidence un phénomène plus original, les *échardes quantiques*, fluctuations inattendues dont on a proposé une caractérisation. Guidé par la découverte de ces deux phénomènes, on a introduit une redéfinition du temps dans les trajectoires quantiques qui offre une description unifiée et simplifiée de la limite de mesure forte. On a consacré une étude plus brève à l'extraction optimale d'information. Dans ce domaine, la contribution principale de cette thèse consiste en l'introduction d'un algorithme exponentiellement plus frugal en ressources que les méthodes précédemment avancées.

Du côté des « applications », on a exploré une forme de contrôle a priori extrêmement faible par l'intensité de la mesure. On a montré qu'elle permettait d'engendrer des dynamiques hors équilibre non triviales et de contrôler essentiellement n'importe quelle distribution d'équilibre semi-classique. On s'est ensuite intéressé aux marches quantiques ouvertes où on a compris la transition entre un comportement balistique et un comportement diffusif à partir d'une reformulation en terme de mesure continue. On a exploité la puissance du formalisme des mesures continues et en particulier sa capacité à modéliser des dynamiques semi-classiques cohérentes pour explorer l'hypothèse d'une gravité fondamentalement semi-classique. À la limite newtonienne on a proposé un modèle simple, explicite, et exempt des difficultés de l'approche traditionnelle.

On a enfin suggéré quelques « ouvertures », idées pas tout à fait abouties pour étendre le domaine d'application de la théorie des mesures continues. On s'est intéressé à l'estimation a posteriori où on a proposé deux possibles définitions du concept de « chemin le plus probable » pour les trajectoires quantiques. On a aussi montré que nos résultats techniques sur la mesure forte étaient vraisemblablement exportables au cas de mesures répétées, sans nécessité de prendre une limite continue au départ. Dans le cas des sauts, on a donné une preuve de « physicien » et on s'est contenté d'une conjecture dans le cas des échardes.

\*  
\*\*

L'objectif de cette thèse était aussi de clarifier un certain nombre de liens souvent laissés implicites entre différents domaines et approches. On a explicité la connexion entre les modèles de collapse utilisés en fondements et la théorie de la mesure continue

en écrivant les deux dans le même langage. On a aussi clarifié le lien entre le filtrage en théorie des probabilités et la mesure quantique en construisant un modèle de Markov caché explicite pour le cas quantique. De manière plus modeste, la connexion entre marches aléatoires ouvertes et mesure quantique avec *feedback* a permis d'étendre le champ d'application du théorème sur les sauts. On a enfin fait le lien entre couplage semi-classique et contrôle quantique markovien, parallèle qui a motivé notre courte exploration du problème de la gravité semi-classique.

On peut, puisque c'est l'usage, se risquer à donner quelques perspectives. La théorie des mesures continues a été inventée presque trop tôt, alors que ses possibilités d'applications pratiques étaient encore modestes. Comme on a tenté de le montrer dans ce mémoire, elles sont pourtant aujourd'hui au centre d'un nombre important de développements prometteurs, qu'ils soient théoriques ou expérimentaux, fondamentaux ou appliqués. L'utilité du formalisme est inévitablement reconnue dans le champ expérimental et il ne fait aucun doute que son usage va s'intensifier à mesure que le domaine des systèmes quantiques finement contrôlables va s'étendre. On peut penser à la matière condensée et plus généralement à tous les systèmes possédant un grand nombre de particules ou excitations. Enfin, c'est peut-être du côté de la théorie et de la physique fondamentale –où le postulat de la mesure est le plus gênant et où les outils liés à la mesure continue sont pratiquement inconnus– que l'on peut espérer de nouveaux développements inattendus.



Il est un peu périlleux de tirer des conclusions normatives d'une unique et courte expérience personnelle. Faire le lien entre différents points de vues et représentations semble néanmoins être une manière productive ou en tout cas intéressante de faire de la recherche. Ne pas s'interdire de poser des questions fondamentales, les garder à l'esprit sans se laisser aveugler par elles, et s'en servir de motivation pour faire avancer des problèmes pratiques est aussi un moyen de rendre la recherche stimulante. Durant cette thèse, le rôle des «questions fondamentales» a sans conteste été joué par le *problème de la mesure* et plus généralement par les fondements de la mécanique quantique. On espère avoir réussi à montrer que ces questionnements quasi métaphysiques ne sont pas totalement stériles puisqu'ils sont sources de motivation autant que d'idées pour aborder des problèmes même techniques. On peut finalement laisser la parole à Bell :

*“One wants to be able to take a realistic view about the world, to talk about the world as if it is really there, even when it is not being observed. I certainly believe in a world that was here before me, and will be here after me, and I believe you are part of it! And I believe that most physicists take this point of view when they are being pushed into a corner by philosophers.”*

John S. Bell, interview à la BBC [9]

La physique théorique est d'autant plus passionnante que l'on reste attaché à cette trivialité...

# Annexe A

## Quelques remarques sur les fondements de la mécanique quantique

La question des fondements de la mécanique quantique n'est pas le sujet principal de cette thèse. Pour autant, il ne fait aucun doute que ce problème a été central dans les réflexions qui ont mené à son élaboration et il me semble légitime de lui attribuer une petite place en appendice. Il existe sur le sujet, au milieu d'une quantité de contributions incohérentes ou réinventant la roue, quelques articles et livres de grande qualité. On peut penser au livre de Laloë [163] qui offre un panorama clair et sans parti pris des fondements et au dernier ouvrage de Bricmont [9] riche de ses références historiques. Le lecteur dont le temps est plus limité peut consulter le remarquable article de Goldstein dans *Physics Today* [164]. La contribution qui suit, inévitablement inférieure et indubitablement incomplète, a pour objectif de présenter quelques aspects des fondements en insistant sur leurs apports conceptuels mais aussi éventuellement pratiques.

### A.1 De l'existence du problème

*“Bohr brainwashed a whole generation of physicists into thinking that the job was done 50 years ago.”*

Murray Gell-Mann, cité dans [9]

Évidemment, pour que les fondements de la mécanique quantique aient un intérêt, encore faut-il qu'il y ait un problème à résoudre, ce que tout le monde n'est, semble-t-il, pas prêt à concéder [165]. Avant de faire l'éloge des vertus d'une recherche rigoureuse sur les fondements, il convient peut-être de se convaincre de l'étendue du problème pré-existant.

Le problème fondamental posé par la formalisation standard<sup>1</sup> de la mécanique

---

1. J'utilise le terme «formalisme standard» de manière assez libérale, pour désigner les interprétations que l'on regroupe en général sous le qualificatif vague de «Copenhague» ou «néo-Copenhague» et qui sont celles que l'on trouve en général dans les livres sérieux. Plus généralement, rentre dans le «formalisme standard» toute interprétation dans laquelle le postulat de la mesure est fondamental ou indépassable (qu'il soit compris comme un phénomène physique ou une simple règle épistémique).

quantique est celui de la non existence a priori d'un monde macroscopique tangible et objectif. Un corollaire, qui est en général celui sur lequel se concentrent les débats est le problème de la mesure, c'est à dire l'impossibilité de réduire le postulat de la mesure à des phénomènes physiques.

Il existe à ma connaissance deux négations possibles de l'existence même du problème :

1. le problème est déjà résolu par la théorie «moderne» de la décohérence qui explique de manière satisfaisante l'émergence des faits,
2. le problème vient de préjugés philosophiques dépassés, il n'y a pas de réalité, ou plutôt vouloir en parler c'est se compromettre avec la métaphysique et renoncer à la science.

Dans le premier cas, on admet que le problème est réel ou plutôt l'a été, mais on affirme qu'il est résolu par une théorie, la décohérence, qui parce qu'elle peut être raisonnablement incluse dans le formalisme orthodoxe, n'en entame pas la suprématie. Dans le second cas, on critique la légitimité même de la question en s'appuyant sur un argument de scientificité paresseux. Il me semble que ceux que les fondements laissent froids se divisent à peu près équitablement entre les deux catégories et oscillent le plus souvent entre l'une et l'autre ligne de défense en fonction de la situation. Il peut être utile d'expliquer pourquoi ces deux arguments sont inadéquats ; plus précisément démontrablement faux pour le premier et philosophiquement douteux pour le second.

### A.1.1 De la décohérence

On a déjà dit quelques mots sur la théorie de la décohérence en 1.1.2 mais le sujet mérite qu'on s'y attarde.

L'objectif de la théorie de la décohérence est d'expliquer comment le couplage d'un système de matrice densité  $\rho^{(S)}$  à un environnement extérieur muni de certaines propriétés raisonnables entraîne la décroissance rapide des coefficients non diagonaux de  $\rho^{(S)}$  dans une certaine base. La décohérence permet de comprendre à la fois la vitesse de décroissance et le choix de la base de diagonalisation de  $\rho^{(S)}$ . Notons dès à présent que ce programme [166] a été un succès. Zurek et ses collaborateurs sont parvenus à montrer que le phénomène était universel et robuste au prix de développements parfois difficiles et indubitablement élégants.

Néanmoins –et la profusion de nouveaux concepts comme *einselection* (pour environnement **induced superselection**) [167, 168] ou le légèrement pédant *Quantum Darwinism* [169, 170] n'y change rien– la décohérence explique *uniquement* la diagonalisation de  $\rho^{(S)}$  dans une certaine base et ne dit rien sur le *collapse*. Même si les contributeurs à la théorie de la décohérence prétendent rarement *explicitement* résoudre le problème de la mesure, ces derniers entretiennent malheureusement l'ambiguïté, notamment dans les articles grand public [171].

Rappelons brièvement pourquoi la diagonalisation de  $\rho^{(S)}$  dans une certaine base n'est pas suffisante. La partie mathématique de tout article sur la décohérence consiste à montrer que dans une certaine situation, plus ou moins générale, on a :

$$\rho^{(S)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ u^* & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{décohérence}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On sait déterminer dans quel base cette diagonalisation s'effectue et cette dernière correspond fidèlement à celle des pointeurs de la mesure réalisée. C'est un succès indubitable de la méthode, la décohérence permet d'expliquer quelle observable un appareil de mesure permet de mesurer, *si l'on admet que ce dernier collapse*. À ce stade, il y a un saut philosophique à ne pas faire mais qui est malheureusement souvent fait, qui consiste à identifier cette matrice densité diagonale, correspondant à un mélange impropre (*improper mixture*) à la même matrice densité représentant un *vrai* mélange statistique (*proper mixture*). Cette confusion est ce que l'on appelle parfois une erreur de catégorie (*category mistake*) en philosophie : deux objets fondamentalement différents sont identifiés abusivement parce que leur *représentation* est identique. C'est une erreur que l'on ne ferait pas dans une autre situation. Considérons par exemple un état EPR partagé entre Alice à gauche (A) et Bob à droite (B) :

$$|\psi\rangle_{\text{EPR}} = (|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B) / \sqrt{2}.$$

La matrice densité réduite du point de vue d' Alice s'écrit particulièrement simplement dans la base  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  :

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

En conclut-on dans ce cas que la simple existence d'une partie de l'état du côté de Bob fait «émerger» les propriétés classiques chez Alice ? Même en supposant que Bob est à jamais inaccessible, la réponse est évidemment non. L'objet  $\rho_L$  ne peut pas être assimilé à un mélange statistique sans violer l'inégalité de Bell. Dans ce cas, identifier deux situations physiques différentes parce que leur représentation mathématique est identique conduit à une erreur manifeste. C'est pourtant exactement la même substitution que l'on effectue lorsque l'on tente de déduire la macro-objectification de la décohérence<sup>2</sup>. Le tour de magie est en général effectué en fin d'article, en quelques phrases sibyllines de conclusion après de longues dérivations parfaitement raisonnables et passe de ce fait relativement inaperçu.

Notons que cette confusion entretenue autour des supposées implications «fondationnelles» de la décohérence n'a pas que des conséquences philosophiques et a donné lieu à quantité d'extrapolations problématiques en cosmologie et en gravité quantique (voir [172, 173, 174, 175] pour une discussion). La situation semble néanmoins évoluer positivement si l'on en croit l'exemple de Steven Weinberg, qui a récemment admis que la décohérence devait être doublée d'un mécanisme de collapse à définir [176], preuve qu'il n'est pas impossible de changer d'avis dans ce domaine sensible.

### A.1.2 De l'observable et des perceptions comme seule réalité

L'autre option pour refuser de considérer sérieusement le problème de la mesure est de se réclamer d'une forme extrême de positivisme dont on peut faire la caricature

---

2. D'aucuns pourraient répondre que dans le cas de la décohérence, l'environnement possède un grand nombre de degrés de liberté, ce qui rend difficile et même impossible *en pratique* la mise en évidence d'une violation de l'inégalité de Bell qui démontrerait l'absurdité de la substitution. On voit cependant difficilement comment ce que l'on appelle «objectif» pourrait raisonnablement dépendre de notre avancement technologique et de notre capacité à mettre en évidence telle ou telle violation en pratique. Le monde physique semble se soucier peu de nos limitations empiriques.



suivante. L'objectif de la science étant *in fine* de produire un ensemble de prédictions falsifiables, les théories physiques ne devraient être formulées qu'en terme de ce qui est observable, ne parler que de résultats. Disséquer le résultat lui-même, le microfonder, le réduire à un phénomène, n'aurait pas de sens puisqu'il est la seule chose qui possède une objectivité. Dès lors il n'y a pas de problème avec l'axiomatisation de la mécanique quantique qui fournit un algorithme que l'on sait, en pratique, appliquer de manière non ambiguë.

Cependant, une telle vision de la science est extrêmement restrictive et n'est en tout cas aucunement impliquée par l'épistémologie popperienne. Que les prédictions soient le produit ultime qui permet de *valider* ou *falsifier* une théorie n'empêche pas que cette dernière utilise la réalité comme intermédiaire pour les faire émerger. Les résultats n'ont pas besoin d'être des notions *primitives*. Si encore un tel saut était nécessaire, impliqué par l'expérience, une telle attitude instrumentaliste serait justifiable. On verra qu'il n'en est rien et qu'une attitude souvent décriée comme *classique* et qui consiste simplement à supposer qu'un monde réel existe de manière objective –les mesures étant des configurations particulières de ce monde– n'est absolument pas incompatible avec les prédictions de la mécanique quantique.

Une variante moderne et à la mode de l'argument précédent est de dire que la seule chose réelle est l'information<sup>3</sup>, que l'algorithmique quantique est une sorte de théorie des probabilités généralisée qui en régit les échanges, la réalité étant encore une fois dans l'information elle-même. Il faut reconnaître à ce point de vue strictement informationnel le mérite d'être un excellent guide heuristique, notamment dans le contexte des mesures répétées. Pour autant, il paraît impossible de le considérer sérieusement tant il est contre intuitif de concéder un caractère primitif à l'information. En effet, l'information seule n'existe pas, on a toujours de l'information sur *quelque chose*. Au fond c'est ce «quelque chose» qu'il convient de définir pour rendre l'approche rigoureuse ; pourquoi s'interdire de le faire ?

## A.2 Un faisceau de solutions

### A.2.1 Théories à ontologies primitives

Commençons par avertir le lecteur, cette section ne vise pas l'exhaustivité (pour laquelle il vaut mieux se référer à Laloë [163]) et de nombreuses approches sont volontairement ignorées<sup>4</sup>. L'objectif est simplement de présenter *une* manière possible de construire des théories reproduisant les résultats du formalisme standard sans souffrir ses ambiguïtés.

Il est possible que l'on trouve un jour des manières extrêmement subtiles et contre intuitives de construire des théories physiques raisonnables. En attendant *une* voie

---

3. Il s'agit notamment de l'approche défendue par Caves, Fuchs et Schack qui lui ont donné le nom de «QBism» (pour *Quantum Bayesianism*) [177].

4. C'est notamment le cas de l'interprétation des «histoires décohérentes» (*decoherent histories*) [178] dont on peut raisonnablement considérer qu'elle n'est pas crédible à son stade de développement actuel [179, 180], de l'approche *transactionnelle* [181] qui me semble a priori intéressante mais que je connais assez mal et de l'interprétation des *mondes multiples* [182] qui ne me paraît pas être définie sur des bases suffisamment claires pour être discutée de manière productive [183].

presque naïve proposée par Bell [184, 185] est –une fois reformulée dans le vocabulaire moderne– celle des *théories à ontologie primitive* [143]. Derrière ce terme inutilement prétentieux, qui fait dégainer aux physiciens leur revolver anti-philosophie, se cache une notion extrêmement simple. L'ontologie est ce qui *est*<sup>5</sup>, les physiciens diraient la «réalité» et Bell les *beables* (étrables?). Le terme «primitif» renvoie au fait que cette ontologie est la base qui donne sa réalité au reste et qu'elle ne demande pas elle-même à être expliquée en terme d'un concept «plus primitif» (comme par exemple les atomes de Démocrite). Cela ne signifie évidemment pas que ce que l'on considère comme primitif ne peut changer au cours du temps, cela signifie que ce qu'une théorie physique donnée considère comme primitif doit être défini. On ajoute en général la contrainte supplémentaire que l'ontologie primitive doit être *locale*, c'est à dire être une fonction de l'espace-temps (et pas, par exemple, de l'espace des phases). A priori, rien ne rend cette contrainte absolument nécessaire<sup>6</sup>, elle permet simplement de comprendre plus facilement comment les objets macroscopiques, qui vivent naturellement dans l'espace-temps, émergent de l'ontologie primitive. Si effectuer cette simplification est *possible*, c'est à dire permet toujours de construire des théories cohérentes, autant ne pas s'en priver. Notons qu'il existe une grande variété d'ontologies primitives a priori acceptables, c'est à dire qui permettent de modéliser le monde : les particules évidemment, mais aussi les champs, pourquoi pas les cordes et même récemment les *flashes*<sup>7</sup>.

Une fois l'ontologie primitive définie, les *postulats* d'une théorie physique doivent se limiter à en prescrire la dynamique. Tout le reste, les observations, les résultats de mesure, tel ou tel comportement macroscopique, doivent pouvoir s'en déduire logiquement et les lois effectives sur ces derniers constituer des *théorèmes*. Tout cela n'a rien de révolutionnaire ; la mécanique classique –dans laquelle l'ontologie est simplement les particules– rentre par exemple parfaitement dans cette définition et personne n'imaginerait lui contester sa scientificité. Cette approche bizarrement autrefois hétérodoxe commence à être utilisée par une large fraction des physiciens et philosophes qui s'intéressent aux fondements<sup>8</sup> car elle rend les discussions précises, mathématiques et sort le débat des habituelles querelles philosophiques. Une théorie fondée sur une ontologie primitive est non ambiguë et donc facilement contestable. Aucune question n'est a priori interdite comme dans le formalisme standard ; la théorie prend d'une certaine manière plus de risques qu'une pure théorie de la «prédiction» mais est en contrepartie immédiatement intelligible.

On peut présenter *très brièvement* (c'est à dire sans preuve de leur cohérence) trois exemples de théories à ontologie primitive compatibles (éventuellement à  $\varepsilon$  près) avec les prédictions de la mécanique quantique non relativiste.

---

5. Ou de manière équivalente une «représentation de ce qui est». On a tendance à identifier dans le langage courant le réel et sa représentation mathématique.

6. David Albert défend notamment la possibilité d'une ontologie hautement non locale, voir [186].

7. Là où un champ scalaire est une surface dans l'espace-temps, une particule une trajectoire, un flash est simplement un point. On peut consulter par exemple [187] pour voir quelques avantages de cette ontologie, notamment vis à vis de l'invariance de Lorentz.

8. Ce formalisme est utilisé par ceux qui travaillent sur la théorie de de Broglie-Bohm, ceux qui s'intéressent aux modèles de collapse objectif mais aussi, à l'autre côté de l'échiquier, par ceux qui voient la théorie quantique comme une pure théorie des probabilités sans tendre vers l'extrémisme du *Quantum Bayesianism* (avec par exemple les modèles ontologiques de Spekkens [188]).

## A.2.2 Un exemple d'ontologie primitive constituée de particules

La théorie de de Broglie-Bohm (dBB) possède une ontologie primitive extrêmement simple : un certain nombre de particules *sans propriétés* se meuvent dans l'espace<sup>9</sup>. En notant  $q_t^{(i)}$  la trajectoire de la particule  $i$  on a l'évolution purement déterministe suivante :

$$m_i \frac{dq_t^{(i)}}{dt} = \hbar \Im \left( \frac{\Psi^\dagger \cdot \nabla_i \Psi}{\Psi^\dagger \cdot \Psi} \right).$$

La fonction d'onde  $\Psi$  (qui peut être à valeur scalaire, vectorielle ou spinorielle) obéit quant à elle à l'équation usuelle (Schrödinger, Dirac,...) et possède un statut *nomologique* plus qu'*ontologique*. Autrement dit,  $\Psi$  guide les particules comme une *loi* et possède de ce fait un statut analogue à celui du hamiltonien en mécanique classique (qui prescrit la forme des trajectoires sans que ces dernières ne rétroagissent sur lui). Il a été montré, et c'est le fruit d'un long travail de physiciens et philosophes car le résultat n'est pas trivial, que cette théorie est empiriquement équivalente à l'algorithme quantique lorsque les prédictions de ce dernier sont non ambiguës (voir par exemple [193, 194]). On a donc une théorie précisément définie, dans laquelle les particules ont une position et une vitesse toujours bien définies, dans laquelle l'observateur est un système physique comme un autre, qui est entièrement déterministe<sup>10</sup> et dans laquelle toutes les bizarreries quantiques (principe d'incertitude, non localité, impact irréductible de la mesure, etc.) ont une explication purement mécanique et causale, bref non romantique.

La théorie dBB ne doit pas être vue comme une approche ultime à adopter ou à combattre, mais comme un prototype particulièrement clair et simple de ce à quoi peut ressembler une théorie à ontologie primitive<sup>11</sup>. Ce n'est néanmoins pas la seule et les théories de collapse objectif peuvent aussi être mises sous cette forme. On a dans ce cas soit une ontologie primitive de *champ*, soit une ontologie primitive de *flash* (on peut aussi calquer la construction de dBB et proposer une ontologie en terme de particules [60] mais on ne s'y intéressera pas ici).

## A.2.3 Deux ontologies pour les modèles de collapse

Il existe principalement deux choix d'ontologie pour les modèles de collapse objectif introduits en 1.3 et qui sont applicables aux modèles discrets comme aux modèles continus.

La possibilité la plus simple est de définir un champ scalaire, la densité de masse locale moyenne,  $\bar{\rho}(x) = m|\Psi(x)|^2$  pour une particule unique de masse  $m$ , et de se rendre compte que toutes les situations expérimentales (c'est à dire même les mesures

9. Contrairement à un préjugé populaire, la théorie peut facilement être généralisée pour inclure une ontologie primitive constituée de champs [189], voire de cordes [190] et peut tout aussi bien s'accommoder de la non conservation du nombre de particules en théorie quantique des champs [191, 192].

10. L'émergence de l'aléa dans dBB est une simple conséquence de l'impossibilité de connaître précisément les conditions initiales. En plus des références données en introduction, on peut consulter le court article de Oldofredi et al. [195] qui explique très clairement le statut des probabilités dans dBB.

11. Les défenseurs de dBB comme Sheldon Goldstein mettent d'ailleurs aujourd'hui plus l'accent sur l'aspect «ontologie primitive» contenue dans la théorie que sur les détails de son implémentation.

de spin par exemple) sont interprétables en terme de fluctuations de ce champ. La fonction d'onde elle-même n'est alors qu'un intermédiaire de calcul commode pour écrire la dynamique de l'ontologie primitive. Évidemment on aurait pu utiliser la moyenne quantique d'autres opérateurs mais la densité de masse est celle qui permet de comprendre le plus clairement la localisation spatiale des objets macroscopiques. Cette ontologie de champ continu en espace est utilisable pour les modèles de collapse discrets comme GRW mais aussi continus comme CSL.

Une deuxième possibilité d'ontologie est celle des flashes et elle ne s'applique dans sa version naïve qu'à GRW. L'idée est de faire résider l'ontologie dans la collection des points de l'espace-temps  $x_i$  où un événement de collapse discret se produit. Ce qui est réel dans la théorie est alors l'ensemble de ces flashes, localisés en espace mais aussi en temps. On peut se convaincre que l'émergence de chaises et de tables tangibles à l'échelle macroscopique se comprend bien comme un tableau pointilliste en espace-temps. On peut exporter cette prescription aux théories de collapse continues comme CSL mais on retrouve alors un champ, cette fois-ci stochastique, qui obéit au même type d'équations que le signal dans la théorie de la mesure continue<sup>12</sup> (voir 1.3, 3.3 et G).

La différence entre ces deux approches et la théorie de dBB présentée précédemment est l'existence d'un aléa a priori intrinsèque de la Nature : les deux ontologies des modèles de collapse objectif contiennent une composante stochastique au sens classique du terme. À cela s'ajoute la présence d'une décohérence intrinsèque qui fait que les modèles de collapse objectif ne sont pas rigoureusement équivalents à la mécanique quantique orthodoxe du point de vue des prédictions empiriques. Ces modèles sont évidemment discutables, en grande partie *ad hoc*, probablement excessivement *fine-tuned*, mais il faut leur reconnaître d'être définis de manière extrêmement précise sans référence à un observateur.

On pourrait s'inquiéter (et on s'inquiète d'ailleurs souvent) de la présence de plusieurs ontologies primitives fournissant des théories avec le même contenu empirique. N'est-ce pas une preuve que ces ontologies n'ont aucun sens ? Évidemment non, quelle que soit la théorie, une infinité de réalités possibles sont toujours admissibles pour expliquer un ensemble de résultats. L'ontologie des particules ponctuelles en mécanique classique est indistinguable d'une ontologie constituée de minuscules anges invisibles qui déplaceraient une matière continue et infiniment sécable pour reproduire miraculeusement les lois de Newton. Cela implique-t-il que l'ontologie des points matériels doit être abandonnée en mécanique classique ? Que le simple fait de parler d'atomes n'a pas de sens ? Évidemment non et le choix entre diverses ontologies primitives doit se faire à l'aide du rasoir d'Occam qui tranche ici les anges invisibles. Il ne faut pas mal interpréter l'argument de la thèse de Russell : que la présence d'une thèse en orbite autour de Saturne soit pratiquement infalsifiable n'oblige pas à abandonner toute réalité qui ne se manifeste pas immédiatement au niveau des sens.

---

12. De manière intéressante, on peut voir dans le choix du *signal* comme ontologie un moyen de donner un sens précis aux prétentions fondationnelles du bayésianisme quantique. Dans une théorie comme CSL munie de l'ontologie primitive du signal, tout ce qui est réel –la matière– est un champ scalaire stochastique dont les propriétés sont similaires à celles d'une information pure comme les résultats de mesure d'une théorie de la prédiction, bref comme la seule chose qui est réelle pour les «QBistes».

### A.3 Quelques bénéfices d'une théorie démystifiée

Même si le lecteur est convaincu que le programme précédent résout un réel problème physique, il est en droit de questionner l'utilité pratique de la solution proposée. L'approche orthodoxe n'a-t-elle pas permis de faire d'immenses progrès techniques ? Pourquoi le «*Shut up and calculate!*» de Mermin serait-il moins légitime aujourd'hui si l'on s'intéresse uniquement à la pratique ? L'objectif de cette section est de montrer que d'un point de vue purement intéressé et pragmatique, il est extrêmement profitable d'avoir des idées claires sur les fondements de la mécanique quantique.

Avoir une classe de théories précises reproduisant les prédictions du formalisme quantique orthodoxe permet d'avoir une meilleure base (ou au moins une base différente) pour généraliser la théorie, par exemple à la gravitation. On peut par exemple penser à coupler l'ontologie primitive d'un modèle de collapse à l'espace temps pour unifier gravitation et mécanique quantique avec une coexistence cohérente de secteurs classiques et quantiques, apportant ainsi une indication supplémentaire que la gravitation n'est pas forcément «quantifiée». C'est l'idée qui a motivé le programme esquissé en 3.3 et développé en G. Si l'on tient à la quantification de la gravitation, alors l'approche Bohmienne explorée notamment par Struyve montre sur quelques modèles jouets que l'on peut donner un sens précis à l'espace-temps et ses éventuelles singularités de manière non perturbative [196], là où l'approche «standard» nécessite de nombreuses couches d'interprétations pour comprendre un espace-temps qui n'est alors qu'émergeant. Cette constatation est peut-être anecdotique, mais il semble que les modèles de collapse objectifs permettent d'unifier de manière extrêmement intuitive mécanique quantique et gravitation classique sans pour autant simplifier le problème dans l'éventualité d'une gravité quantifiée. À l'inverse, la mécanique bohémienne semble impuissante à unifier secteurs classique et quantique sans incohérence mais permet assez facilement de construire des modèles jouet où la gravitation est quantifiée. Les fondements peuvent ainsi guider de manière forte l'unification future des deux secteurs actuellement séparés de la physique.

Sur des problèmes plus précis mettant en jeu à la fois la gravitation et la mécanique quantique, les théories à ontologie primitive ont permis des avancées significatives. Le problème des fluctuations en cosmologie inflationniste –c'est dire le fait que sans la substitution injustifiée [197] des corrélateurs à deux points quantiques par des fluctuations classiques, la théorie ne fournit pas les bonnes prédictions– a été éclairé avec des modèles jouets de collapse [198, 199, 200] et des théories inspirées de dBB [201].

La recherche dans les fondements a aussi des produits dérivés utiles comme la découverte de méthodes numériques plus performantes que les méthodes semi-classiques usuelles [202]; la théorie dBB est ainsi utilisée de manière routinière en chimie quantique (voir par exemple [203, 204]). Les modèles à variables cachées utilisés tout au long de cette thèse sont aussi directement inspirés de l'approche bohémienne de la théorie quantique des champs. Le résultat le plus important découvert de manière fortuite grâce aux fondements est sans conteste le théorème de Bell. En effet, John Bell s'étant rendu compte que les théorèmes d'impossibilité de Von Neumann et Gleason sur les variables cachées ne prouvaient en réalité rien (comme le démontrait l'existence la théorie de Bohm de 1952), se demanda si la non localité de cette dernière était inévitable. Citons John Bell dans son article *On the Problem of Hidden Variables in Quantum*

*Mechanics* publiée dans Rev. Mod. Phys. en 1966 [205] et qui précède la découverte de son inégalité :

«Bohm of course was very well aware of the [non locality problems] of his scheme, and has given them much attention. However, it must be stressed that, to the present writer's knowledge, there is no *proof* that *any* hidden variable account of quantum mechanics *must* have this extraordinary character. It would therefore be interesting, perhaps, to pursue some further 'impossibility proofs', replacing the arbitrary axioms objected to above by some condition of locality, or of separability of distant systems.»

dernier paragraphe qui se lit comme un programme.

Raisonné en terme d'ontologie primitive peut aussi permettre de contourner des difficultés du raisonnement en terme de fonction d'onde ou de d'algèbre d'opérateurs. Avoir une ontologie primitive claire (dans ce cas les flashes) a permis à Tumulka de construire en 2006 [77] une théorie de collapse objectif sans interaction entièrement invariante de Lorentz alors qu'un tel résultat était impossible à obtenir au niveau de la fonction d'onde. La théorie obtenue n'a aucune expression simple possible en terme d'algèbre d'opérateurs ou d'espace de Hilbert mais reproduit les prédictions de la mécanique quantique à  $\varepsilon$  près. Un contournement du vecteur d'état peut potentiellement donner des idées pour passer outre les problèmes de définition de la théorie quantique des champs avec interaction. En effet, on comprend assez bien qu'une loi (typiquement la statistique d'une fonction à deux points) puisse être obtenue par une procédure itérative, comme une limite de quelque chose, via le groupe de renormalisation. Mais c'est le fait que les objets fondamentaux de la théories eux mêmes n'aient qu'une définition en terme de limite qui pose des problèmes de rigueur mathématique. Il n'est pas unimaginable que l'on puisse un jour construire une théorie à ontologie primitive reproduisant les prédictions de la théorie quantique des champs, sans régularisation ni brisure d'aucune invariance, mais qui utilise le groupe de renormalisation pour calculer la *loi*, c'est à dire la dynamique de l'ontologie. Autrement dit, plutôt que de penser l'algèbre d'opérateur comme primitive, comme c'est souvent le cas en théorie axiomatique des champs, on pourrait espérer obtenir cette dernière de manière émergente, à partir d'une ontologie primitive, et passer ainsi outre certains théorèmes d'impossibilité. Un tel programme est évidemment très spéculatif, l'objectif est simplement de montrer que les fondements peuvent aussi avoir un intérêt en physique mathématique.

Enfin, un avantage majeur d'une clarification des fondements de la mécanique quantique allant au delà de la formalisation standard est qu'elle permet de liquider un nombre important de préjugés qui encombrant la physique, la philosophie et parfois même la sphère publique. On est parfaitement en droit de détester la théorie dBB et de lui préférer le formalisme orthodoxe (et c'est d'une certaine manière souhaitable si l'on souhaite faire des calculs). Pour autant, la simple *existence* de dBB, qui est compatible avec toutes les prédictions de la mécanique quantique, rend caduques les affirmations extrêmes sur les supposées implications épistémologiques de la mécanique quantique. La mécanique quantique n'implique pas que la Nature soit fondamentalement aléatoire, elle n'implique pas que l'observateur soit inséparable du système étudié, elle n'implique pas un quelconque rôle de la conscience, elle n'interdit pas l'utilisation de trajectoires, elle n'empêche pas de *définir* simultanément position et vitesse (elle

empêche de les observer), elle n'implique pas l'existence de monde multiples. Au fond la mécanique quantique ne demande aucune des supposées révolutions épistémologique qu'on lui attribue souvent. La seule implication démontrable du formalisme est la non-localité et c'est rarement cette caractéristique, finalement peu choquante pour le grand public, qui est mise en avant. Le mystère est pourtant entretenu par des physiciens souvent de bonne foi. Un effet positif est d'ailleurs de couvrir la discipline d'un vernis *glamour* et, sans doute, d'en améliorer le financement et l'attractivité. Pour autant, un tel comportement n'est pas sans risque et brouille la distinction entre sciences et pseudo-sciences. La prolifération de littérature New Age<sup>13</sup> prêtant des vertus absurdes à la mécanique quantique pourrait prêter à sourire. Ce serait oublier que ce qu'on y lit ne se distingue que très peu, du point de vue du grand public, de ce que des physiciens sérieux peuvent dire en conférence.

La mécanique quantique est trop importante pour que l'on puisse négliger ses fondements. Un certain nombre de résultats simples clarifient fortement le statut et les implications du formalisme standard. Les connaître peut permettre de se sentir mieux avec la théorie (ce qui n'est pas négligeable pour les étudiants) et surtout d'avoir de nouvelles idées pour l'étendre ou démontrer des résultats mathématiques non triviaux. La pluralité des points de vue possibles sur le formalisme permet aussi de dissiper les malentendus épistémologiques que les physiciens ont malencontreusement exporté en philosophie et parfois dans le grand public. Finalement, il n'y a pas de raison valable de laisser ces questions à l'exclusive attention de théoriciens retraités...

---

13. On peut penser par exemple à Deepak Choprah qui vend probablement plus de livres à lui seul que tous les physiciens français.

# Annexe B

## Construction d'un modèle de Markov caché reproduisant les résultats d'une dynamique quantique générale

It is therefore not, as is often assumed, a question of a reinterpretation of quantum mechanics — the present system of quantum mechanics would have to be objectively false, in order that another description of the elementary processes than the statistical one be possible.

---

John Von Neumann [206]

### B.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer comment on peut construire un modèle à variables cachées adapté à une certaine équation maîtresse stochastique. Plus précisément, on cherche à construire un processus de saut  $R_t$  à valeurs sur une certaine base de pointeurs tel que la diagonale de la matrice densité contienne les probabilités de ce processus :

$$\mathbb{P}[R_t = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_t] = \langle i|\rho_t|i\rangle,$$

où de manière équivalente  $\mathbb{E}[R_t|\mathcal{F}_t] = \text{diag}(\rho_t)$ . C'est un moyen de voir la mesure de manière très classique comme révélant (et modifiant) une grandeur toujours bien définie. Une telle représentation est par exemple extrêmement utile si l'on cherche à comprendre l'émergence d'un processus de saut à la limite de mesure forte (voir 2.1) comme la convergence progressive de  $\rho$  vers un processus préexistant<sup>1</sup>.

---

1. Notons que notre motivation n'est ici absolument pas fondationnelle, on s'intéresse peu au fait de savoir si  $R_t$  existe dans le monde physique, mais mathématique : on cherche une réécriture plus lisible des équations.



Une telle construction est souvent jugée irréalisable à cause des divers théorèmes sur l'impossibilité des variables cachées. Il s'agit d'une des rares situations où il ne faut pas se laisser intimider par Von Neumann. On sait que la théorie de de Broglie-Bohm (dBB) [9] (voir A) permet de passer outre les «*no-go theorems*» et on peut donc essayer de s'en inspirer. Le problème est qu'elle est évidemment définie dans le continu et qu'on s'intéresse ici plutôt à des espaces de Hilbert de dimension finie. De plus, la théorie dBB, étant donnée ses prétentions fondamentales, ne prend pas en compte les mesures répétées extérieures. Elle est enfin déterministe alors qu'on souhaite une théorie fondamentalement stochastique. On va voir qu'on peut malgré tout s'en sortir.

La construction qui suit s'inspire de divers travaux antérieurs peu connus. Dans [207], Dürr *et al.* construisent une version discrète et stochastique de dBB pour prendre en compte les événements de création et annihilation en théorie quantique des champs. Une construction analogue de la dynamique discrète a été proposée par Gambetta et Wiseman dans le contexte de ce qu'on appelle l'interprétation *modale* de la mécanique quantique [208]. Pour la partie «mesure» on s'inspire du modèle jouet construit en D [4]. On peut considérer qu'une intégration formellement similaire de la mesure a été proposée par Bedingham [58] (puis simplifiée par Tumulka [59]) mais dans un contexte –GRW– trop différent pour que l'on puisse s'en servir. Ainsi, même si la construction qui suit recycle un certain nombre d'idées d'articles injustement oubliés, elle est, semble-t-il, nouvelle et originale.

## B.2 En discret

Il est plus simple de construire le modèle dans le discret<sup>2</sup> et de prendre ensuite la limite continue. Il est aussi utile de décomposer l'évolution en une dynamique ouverte quelconque et une mesure faible sans démolition.

### B.2.1 Évolution discrète sans mesure

On se donne une évolution discrète générale sans mesure. Typiquement :

$$\rho_n = \phi^n(\rho_0)$$

où  $\phi$  est une application complètement positive dont on supposera pour le passage à la limite continue qu'elle est infiniment décomposable, *i.e.* qu'il existe  $\mathcal{L}$  tel que  $\phi = e^{\Delta t \mathcal{L}}$ . On se donne une certaine base canonique  $|i\rangle$  de  $\mathcal{H}_s$  qui sera par la suite celle des pointeurs d'une mesure mais qui est pour le moment quelconque. On veut construire  $R_n$ , processus de saut à valeurs sur les projecteurs  $|i\rangle\langle i|$ , tel que :

$$Q_n^{(i)} \equiv \mathbb{P}[R_n = |i\rangle\langle i|] = \langle i|\rho_n|i\rangle = \rho_n^{(i,i)}. \quad (\text{B.2.1})$$

On suppose que l'égalité précédente est vérifiée à l'instant initial, *i.e.* on fixe  $Q_0$  tel que  $Q_0^{(i)} = \langle i|\rho_0|i\rangle$ . On cherche à déterminer les taux de transitions  $M_{i\leftarrow j}(\rho_n)$  du processus

---

2. Au passage, posséder un modèle à variables cachées dans le discret pourrait s'avérer utile pour généraliser un certain nombre de nos résultats de mesure forte au discret, notamment ceux sur les échardes (voir 4.2).

de saut  $R_n$  tels que l'équation (B.2.1) reste vérifiée pour tout  $n$ . Par définition du processus de saut on a :

$$Q_{n+1}^{(i)} = Q_n^{(i)} + \sum_{j \neq i} M_{i \leftarrow j}(\rho_n) Q_n^{(j)} - \sum_{j \neq i} M_{j \leftarrow i}(\rho_n) Q_n^{(i)}. \quad (\text{B.2.2})$$

On a par ailleurs l'équation maîtresse pour  $\rho$  en composantes :

$$\rho_{n+1}^{(i,i)} = \sum_{k,l} \phi_{(k,l)}^{(i,i)} \rho_n^{(k,l)}.$$

On cherche un *ansatz* pour  $M_{i \leftarrow j}(\rho_n) \geq 0$  tel que :

$$\forall i, Q_n^{(i)} = \rho_n^{(i,i)} \Rightarrow \forall i, Q_{n+1}^{(i)} = \rho_{n+1}^{(i,i)}.$$

Notons que l'identification est immédiate dans le cas où  $\phi$  n'agit que sur les coefficients diagonaux, *i.e.* où seuls les coefficients qui s'écrivent  $\phi_{(j,j)}^{(i,i)}$  sont non nuls. Dans ce cas il suffit de prendre  $M_{i \leftarrow j} = \phi_{(j,j)}^{(i,i)}$  pour satisfaire la récurrence. Dans le cas général, on est a priori embêté par les phases  $\rho_n^{(k,l)}$  pour  $k \neq l$ . Notons tout d'abord que  $M_{i \leftarrow j}(\rho_n)$  apparaît multiplié par  $Q_n^{(j,j)} = \rho_n^{(j,j)}$  dans (B.2.2), par conséquent pour prendre en compte les termes dépendant des phases, il est raisonnable de chercher un *ansatz* de la forme (qui n'enlève pas de généralité) :

$$M_{i \leftarrow j}(\rho) = \frac{m_{i,j}(\rho)}{\rho^{(j,j)}} + \phi_{(j,j)}^{(i,i)}.$$

Enfin, et cette fois ci la forme de l'*ansatz* ne pourra se comprendre qu'avec la preuve qui suit, on peut poser

$$\mu_{i,j}(\rho) = |\mathcal{H}_s| m_{i,j}(\rho) - \left[ \sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho^{(k,l)} \right]^+$$

et chercher donc  $M_{i \leftarrow j}(\rho)$  avec la paramétrisation suivante :

$$M_{i \leftarrow j}(\rho) = \phi_{(j,j)}^{(i,i)} + \frac{\left[ \sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho^{(k,l)} \right]^+ + \mu_{i,j}(\rho)}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}}.$$

Notons qu'il s'agit simplement d'une réécriture sans perte de généralité. Injectons maintenant cette expression dans l'équation (B.2.2) pour voir quelle est la condition sur  $\mu$ . On a :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{(i)} &= \rho_n^{(i,i)} + \sum_{j \neq i} \frac{\left[ \sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho_n^{(k,l)} \right]^+ + \mu_{i,j}(\rho)}{|\mathcal{H}_s|} + \sum_{j \neq i} \phi_{(j,j)}^{(i,i)} \rho_n^{(j,j)} \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \frac{\left[ \sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(j,j)} - \phi_{(k,l)}^{(i,i)} \right) \rho_n^{(k,l)} \right]^+ + \mu_{j,i}(\rho)}{|\mathcal{H}_s|} - \sum_{j \neq i} \phi_{(i,i)}^{(j,j)} \rho_n^{(i,i)} \\ &= \rho_n^{(i,i)} + \sum_{j \neq i} \frac{\sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho_n^{(k,l)}}{|\mathcal{H}_s|} + \sum_{j \neq i} \frac{\mu_{i,j}(\rho) - \mu_{j,i}(\rho)}{|\mathcal{H}_s|} \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \phi_{(j,j)}^{(i,i)} \rho_n^{(j,j)} - \sum_{j \neq i} \phi_{(i,i)}^{(j,j)} \rho_n^{(i,i)}. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut utiliser quelques propriétés structurelles de  $\phi$ . Souvenons nous d'abord que  $\phi$  conserve la trace, par conséquent on a  $\sum_{j \neq i} \phi_{(k,l)}^{(j,j)} = -\phi_{(k,l)}^{(i,i)}$  ce qui fournit :

$$\sum_{j \neq i} \frac{\sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho_n^{(k,l)}}{|\mathcal{H}_s|} = \sum_{k \neq l} \phi_{(k,l)}^{(i,i)} \rho_n^{(k,l)}.$$

La conservation de la probabilité implique par ailleurs que  $\sum_{j \neq i} \phi_{(i,i)}^{(j,j)} = 1 - \phi_{(i,i)}^{(i,i)}$ , soit :

$$\rho_n^{(i,i)} + \sum_{j \neq i} \phi_{(j,j)}^{(i,i)} \rho_n^{(j,j)} - \sum_{j \neq i} \phi_{(i,i)}^{(j,j)} \rho_n^{(i,i)} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{H}_s|} \phi_{(j,j)}^{(i,i)} \rho_n^{(j,j)}.$$

On a donc finalement :

$$Q_{n+1}^{(i)} = \rho_{n+1}^{(i,i)} + \sum_{j \neq i} \frac{\mu_{i,j}(\rho) - \mu_{j,i}(\rho)}{|\mathcal{H}_s|}.$$

Ainsi  $M_{i \leftarrow j}(\rho)$  convient si et seulement si  $\mu_{i,j}(\rho)$  est symétrique et tel que les coefficients de  $M_{i \leftarrow j}(\rho)$  restent positifs. On a ainsi une indétermination du processus de Markov sous-jacent<sup>3</sup>. On peut choisir de fixer  $\mu_{i,j}(\rho) = 0$  qui semble être la solution la plus simple<sup>4</sup>. Par la suite, on omettra en général la possibilité que  $\mu$  soit non nulle.

Résumons. On a montré que le processus de saut  $R_n$  à valeurs sur les projecteurs  $|i\rangle\langle i|$  vérifiant :

$$\mathbb{P}[R_{n+1} = |i\rangle\langle i| \mid R_n = |j\rangle\langle j|] = M_{i \leftarrow j}(\rho_n),$$

avec,

$$M_{i \leftarrow j}(\rho) = \phi_{(j,j)}^{(i,i)} + \frac{\left[ \sum_{k \neq l} \left( \phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho^{(k,l)} \right]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}},$$

vérifiait  $\mathbb{P}[R_n = |i\rangle\langle i|] = \langle i | \rho_n | i \rangle$ . Autrement dit, en langage courant, on a construit  $R$  une variable cachée dont les coefficients diagonaux de  $\rho$  donnent les probabilités.

## B.2.2 Mesure sans démolition

On considère désormais une mesure faible sans démolition et cherche à savoir comment construire un modèle à variable cachée équivalent dans une telle situation. On cherche *in fine* à reproduire l'évolution stochastique élémentaire suivante  $\rho \rightarrow \mathcal{M}(\rho)$  :

$$\mathcal{M}(\rho) = \frac{\Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]}$$

avec probabilité  $\Pi[\alpha] = \text{tr} \left[ \Omega_\alpha \rho_n \Omega_\alpha^\dagger \right]$  où les  $\Omega_\alpha$  sont codiagonalisables dans une base de pointeurs  $|i\rangle$ .

3. Notons que la situation est analogue dans dBB qui peut être définie d'une infinité de manière différentes [9] en conservant le même contenu empirique.

4. On peut imaginer des conditions plus complexes comme choisir  $\mu$  tel que les taux de sauts soient minimaux ce qui, dès que  $\phi_{(j,j)}^{(i,i)} \neq 0$ , donne un résultat non trivial où  $\mu \neq 0$ .

On définit pour une nouvelle évolution stochastique élémentaire  $\tilde{\mathcal{M}}$  pour  $\rho$  telle que :

$$\tilde{\mathcal{M}}(\rho) = \frac{\Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]}$$

avec probabilité  $\tilde{\Pi}[\alpha] = \text{tr} \left[ \Omega_\alpha R \Omega_\alpha^\dagger \right]$  où  $R = |i\rangle\langle i|$  pour un certain  $i$ . Autrement dit, la probabilité du résultat  $\alpha$  dépend dans cette nouvelle application *uniquement* de la valeur d'une variable cachée  $R$ . On suppose qu'on se donne la probabilité initiale de cette variable cachée à partir de la diagonale de  $\rho_0$ , *i.e.*  $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$ . On note ici  $\mathcal{F}_n$  la filtration naturelle attachée aux résultats de mesure. Observons désormais que si l'on ne connaît pas la valeur de  $R$  mais seulement sa probabilité, alors l'évolution  $\tilde{\mathcal{M}}$  est équivalente à l'évolution  $\mathcal{M}$  dans le sens que les trajectoires quantiques engendrées sont empiriquement indistinguables. En effet supposons que l'on ait  $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_n] = \langle i | \rho_n | i \rangle$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \rho_{n+1} = \frac{\Omega_\alpha \rho \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]} \mid \mathcal{F}_n \right] &= \sum_i \text{tr} \left( \Omega_\alpha |i\rangle\langle i| \Omega_\alpha^\dagger \right) \mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \text{tr} \left( \Omega_\alpha \text{diag}(\rho_n) \Omega_\alpha^\dagger \right) \\ &= \text{tr} \left( \Omega_\alpha \rho_n \Omega_\alpha^\dagger \right) \\ &= \Pi[\alpha]. \end{aligned}$$

Reste désormais à montrer l'hérédité, *i.e.*  $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_{n+1}] = \langle i | \rho_{n+1} | i \rangle$ . Notons  $\delta_{n+1} = \alpha$  le  $(n+1)$ -ième résultat de mesure. Calculons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_{n+1}] &= \mathbb{P}[\delta_{n+1} = \alpha \mid R = |i\rangle\langle i|] \frac{\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_n]}{\mathbb{P}[\delta_{n+1} = \alpha \mid \mathcal{F}_n]} \\ &= \text{tr} \left[ \Omega_\alpha |i\rangle\langle i| \Omega_\alpha^\dagger \right] \frac{\langle i | \rho_n | i \rangle}{\text{tr} \left[ \Omega_\alpha \rho_n \Omega_\alpha^\dagger \right]} \\ &= \langle i | \rho_{n+1} | i \rangle. \end{aligned}$$

Résumons. On a construit une nouvelle évolution stochastique pour  $\rho$  notée  $\tilde{\mathcal{M}}$  qui dépend explicitement d'une variable cachée  $R$  et telle que, si l'on fixe initialement  $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$  alors :

- $\forall n$ ,  $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_n] = \langle i | \rho_n | i \rangle$
- $\tilde{\mathcal{M}}$  a la même statistique que  $\mathcal{M}$ , *i.e.*

$$\mathbb{P} \left[ \tilde{\mathcal{M}}(\rho_n) = \frac{\Omega_\alpha \rho_n \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]} \mid \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{P} \left[ \mathcal{M}(\rho_n) = \frac{\Omega_\alpha \rho_n \Omega_\alpha^\dagger}{\Pi[\alpha]} \mid \mathcal{F}_n \right].$$

On peut donc désormais utiliser  $\tilde{\mathcal{M}}$  au lieu de  $\mathcal{M}$  pour représenter une mesure faible sans démolition. On ne change ainsi aucune prédiction empirique mais ajoute une variable cachée que la mesure «révèle».

### B.2.3 Recoller les morceaux

On a traité séparément évolution ouverte générique et mesures répétées. On peut sans aucun problème recoller les morceaux. On considère désormais une évolution continue entrecoupée de mesures tous les  $\Delta t$  comme en 4.2, c'est à dire qui est engendrée par l'évolution élémentaire  $\chi_{\Delta t} = \mathcal{M} \circ \phi_{\Delta t}$ . On définit la trajectoire quantique discrète :

$$\rho_n = \chi^n \rho_0 \quad (\text{B.2.7})$$

que l'on cherche à reproduire avec un modèle à variable cachées. Inspiré par les constructions précédentes, on introduit le modèle à variables cachées suivant :

- $\rho_{n+1} = \tilde{\chi}(\rho_n)$  avec  $\tilde{\chi} = \tilde{\mathcal{M}} \circ \phi_{\Delta t}$
  - $\mathbb{P}[R_{n+1} = |i\rangle\langle i| \mid R_n = |j\rangle\langle j|] = M_{i \leftarrow j}(\rho_n)$
- avec  $M_{i \leftarrow j}(\rho) = \phi_{(j,j)}^{(i,i)} + \frac{[\sum_{k \neq l} (\phi_{(k,l)}^{(i,i)} - \phi_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)}]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}}$ ,
- $\mathbb{P}[R_0 = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$ .

Les résultats des deux sous sections précédentes montrent que cette nouvelle évolution discrète pour le couple  $(\rho_n, R_n)$  fournit une trajectoire quantique  $\rho_n$  avec la même statistique que celle de l'équation (B.2.7). Les probabilités de la variable cachée sont aussi immédiatement lisibles dans les coefficients diagonaux de  $\rho : \mathbb{P}[R_n = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_n] = \langle i | \rho_n | i \rangle$ . On vient donc de construire un modèle de Markov caché général adaptable à toute évolution quantique entrecoupée de mesures sans démolition.

## B.3 Passage au continu

Il faut désormais faire passer le modèle précédent à la limite continue. On cherche un modèle de Markov caché correspondant à l'équation maîtresse stochastique (1.2.5) :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t$$

On peut une nouvelle fois s'intéresser séparément à la partie mesure et à la partie évolution ouverte.

Commençons par cette dernière qui est la plus simple. Quand  $\Delta t \rightarrow 0$  on a  $\phi_{\Delta t} \simeq \mathbb{1} + \Delta t \mathcal{L}$ . Cela permet d'écrire immédiatement les taux de saut  $M_{i \leftarrow j}(\rho)$  différentiels du processus de Markov caché au continu :

$$M(\rho)_{i \leftarrow j} = \frac{[\sum_{k \neq l} (\mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)}]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}} + \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)}.$$

Ainsi le modèle à variable cachées correspondant à l'évolution  $\partial_t \rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)$  s'écrit :

- $\partial_t \rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)$
  - $\mathbb{P}[R_{t+dt} = |i\rangle\langle i| \mid R_t = |j\rangle\langle j|] = M_{i \leftarrow j}(\rho_t) dt$
- avec  $M_{i \leftarrow j}(\rho) = \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)} + \frac{[\sum_{k \neq l} (\mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)}) \rho^{(k,l)}]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}}$ ,
- $\mathbb{P}[R_0 = |i\rangle\langle i| \mid \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$

Pour passer des mesures répétées aux mesures continues, on fait comme en (1.2.3) et on pose  $\Omega_\alpha = B_\pm$  avec :

$$B_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} + \sqrt{\varepsilon} N - \frac{\varepsilon}{2} N^\dagger N + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right)$$

$$B_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbb{1} - \sqrt{\varepsilon} N - \frac{\varepsilon}{2} N^\dagger N + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \right).$$

On utilise toutes les notations introduites à ce moment. La seule différence avec la dérivation standard de la mesure continue arrive lorsque l'on calcule la moyenne du signal. En effet on a :

$$\mathbb{E}(dY_t | R_t) \simeq \text{tr}[(N + N^\dagger)R_t] dt.$$

Par conséquent, on peut introduire un nouveau processus de Wiener<sup>5</sup>  $W^\mathcal{G}$  tel que  $dY_t = \sqrt{\gamma} \text{tr}[(N + N^\dagger)R_t] dt + dW_t^\mathcal{G}$ . Ainsi, le modèle de Markov caché pour une mesure continue pure s'écrit :

- $d\rho_t = \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t)(dW_t^\mathcal{G} + \sqrt{\gamma} \text{tr}[(N + N^\dagger)(R_t - \rho_t)] dt)$
- $R_t \equiv R$
- $\mathbb{P}[R = |i\rangle\langle i| | \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$ .

On peut finalement combiner les deux résultats pour obtenir un modèle à variables cachées complet pour l'équation (1.2.5) :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t. \quad (\text{B.3.1})$$

Ce dernier s'écrit simplement :

- $d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \mathcal{H}[N](\rho_t)(dW_t^\mathcal{G} + \sqrt{\gamma} \text{tr}[(N + N^\dagger)(R_t - \rho_t)] dt)$
- $\mathbb{P}[R_{t+dt} = |i\rangle\langle i| | R_t = |j\rangle\langle j|] = M_{i \leftarrow j}(\rho_t) dt$

$$\text{avec } M_{i \leftarrow j}(\rho) = \mathcal{L}_{(j,j)}^{(i,i)} + \frac{\left[ \sum_{k \neq l} \left( \mathcal{L}_{(k,l)}^{(i,i)} - \mathcal{L}_{(k,l)}^{(j,j)} \right) \rho^{(k,l)} \right]^+}{|\mathcal{H}_s| \rho^{(j,j)}},$$

- $\mathbb{P}[R_0 = |i\rangle\langle i| | \mathcal{F}_0] = \langle i | \rho_0 | i \rangle$ .

(B.3.2)

Rappelons que cela signifie que des trajectoires quantiques  $\rho_t$  obtenues avec les équations (B.3.1) et (B.3.2) ont exactement la même statistique. Dans le second cas on dispose cependant d'un processus de sauts caché vers lequel  $\rho_t$  converge quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . On possède donc désormais une réécriture des trajectoires quantiques dans laquelle on peut interpréter les coefficients de  $\rho_t$  comme les probabilités d'une variable cachée toujours bien définie. Il n'y a évidemment pas de miracle et la dynamique de la variable cachée dépend explicitement de la matrice densité, elle est *guidée* par l'état quantique. Notons aussi que la construction du modèle dépend de la base dans laquelle la mesure continue projette car la variable cachée est à valeur dans ses pointeurs. Malgré ses limitations, le modèle obtenu permet de comprendre les mesures continues avec une intuition essentiellement classique. D'un point de vue purement pragmatique, il permet une réécriture non triviale de l'équation maîtresse stochastique qui peut rendre plus naturelles les propriétés de la dynamique engendrée.

5. Il s'agit d'un processus de Wiener du point de vue de la filtration  $\mathcal{G}$  engendrée par les résultats de mesure  $et$  et les valeurs successives de la variable cachée :  $\mathcal{G}_t = \sigma((Y_u, R_u), u \leq t)$ .



# Annexe C

## Calcul de la fréquence des sauts induits par la mesure

L'appendice qui suit est directement tiré de l'article *Computing the rates of measurement induced quantum jumps* [5] écrit par M. Bauer, D. Bernard et l'auteur et publié dans Journal of Physics A. Seules quelques modifications de notation ainsi qu'une simplification de l'équation (C.2.1) ont été effectuées pour éviter de dérouter le lecteur et cet appendice peut être lu sans référence au reste. On y calcule la fréquence des sauts induits par une mesure continue forte, illustre la proposition sur deux exemples et justifie rigoureusement que le scaling proposé en 2.1 est bien le plus général.

**Abstract :** Small quantum systems can now be continuously monitored experimentally which allows for the reconstruction of quantum trajectories. A peculiar feature of these trajectories is the emergence of jumps between the eigenstates of the observable which is measured. Using the Stochastic Master Equation (SME) formalism for continuous quantum measurements, we show that the density matrix of a system indeed shows a jumpy behavior when it is subjected to a tight measurement (even if the noise in the SME is *Gaussian*). We are able to compute the jump rates analytically for *any* system evolution, *i.e.* any Lindbladian, and we illustrate how our general recipe can be applied to two simple examples. We then discuss the mathematical, foundational and practical applications of our results. The analysis we present is based on a study of the strong noise limit of a class of stochastic differential equations (the SME) and as such the method may be applicable to other physical situations in which a strong noise limit plays a role.

### C.1 Introduction

Recent advances in experimental techniques now allow for a tight monitoring, *i.e.* a continuous and strong measurement, of small open quantum systems. The corresponding quantum trajectories can now be recorded with increasing precision [209, 210]. A striking feature of such systems undergoing continuous measurement is the emergence of a jumpy behaviour between measurement eigenstates. This interesting and ubiqui-



tous phenomenon has already been observed in many experiments [211, 212, 213]. Even if quantum jumps were already well known to Bohr [214], to our knowledge, their emergence and statistics have never been studied thoroughly in the general case. This theoretical investigation is the main purpose of this article.

We conduct our study using the formalism of continuous measurement developed in [36, 37, 40, 215, 39, 216], that is we study a stochastic differential equation (SDE) *with Gaussian noise* describing the (continuous) evolution of the density matrix of a small open system of interest. The stochasticity comes from the conditioning of the density matrix on the (random) measurement outcomes. Such equations can be obtained as the limit of a series of weak measurements carried out on a quantum system [49, 217, 218]. In this setting, the jumpy regime arises when the rate of measurements, that we call  $\gamma$ , is large. At this point we should emphasize that these quantum jumps obtained in the large  $\gamma$  limit of *continuous* equations are *not* the same as those emerging from the intrinsically discontinuous Poissonian unravelling of a quantum master equation.

From a mathematical perspective, we study a class of non-linear SDE in the strong noise limit, and show that the solution converges, in a very weak sense, to a continuous-time finite-state Markov process on the measurement pointer states and we compute the transition rates. We show that the finite dimensional distributions converge weakly towards those of a finite-state Markov process on the measurement pointer states<sup>1</sup>. We should stress that the convergence is weak also in the sense that some interesting quantum fluctuations, which should be further studied, are preserved in the limit.

Eventually, we believe this study provides a quantitative understanding on the semi-classical behaviour of tightly monitored quantum systems and heavily generalises the specific cases treated in [61, 8, 86]. As such it could have applications to a wide class of microscopic open systems showing a jumpy behaviour ranging from quantum dots to photons in a cavity.

**Outline** This paper is structured as follows. In section C.2 we present our model and the main claim of the article without proof. We discuss the implications of the result and then study two simple examples of applications in section C.3. Section C.4 is more technical and devoted to the proofs. We first show the emergence of the jumps and compute their rate assuming a given scaling limit. We then proceed to show that this scaling is actually the most general. Eventually, we discuss in more details the physical meaning of our results in section C.5.

## C.2 Main Results

We consider a very general quantum system, but with a finite dimensional Hilbert space, whose dynamics are prescribed by a Lindbladian  $\mathcal{L}$ . We assume that an observable  $\mathcal{O}$  is also continuously measured at a rate, or strength,  $\gamma^2$  (say with a repeated interaction scheme as in [16, 17]) with efficiency  $\eta$ . As a result the density matrix of

---

1. Weak convergence is also called convergence in law : expectations of bounded continuous functions depending on the positions at fixed times  $t_1, \dots, t_k$  have a large  $\gamma$  limit which is the expectation with respect to a finite-state Markov process.

the system evolves in the following way [18] :

$$d\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) dt + \gamma \mathcal{D}[N](\rho_t) dt + \sqrt{\gamma} \sqrt{\eta} \mathcal{H}[N](\rho_t) dW_t,$$

where  $W_t$  is a standard Wiener process, and  $N$  is the so-called measurement operator with  $\mathcal{O} = N + N^\dagger$  the measured observable,  $D[N](\rho) = N\rho N^\dagger - \frac{1}{2}\{N^\dagger N, \rho\}$  is the Lindblad generator associated to  $N$  and  $H[N](\rho) = N\rho + \rho N^\dagger - \rho \text{tr}(\mathcal{O}\rho)$  the stochastic innovation term. Any given realisation of the Wiener process corresponds to a sample of a time series of measurements. Measurement outputs  $x_t$  are random according to the rules of Quantum Mechanics and given by  $dx_t = \sqrt{\gamma} \text{tr}(\mathcal{O}\rho) dt + \eta^{-1/2} dW_t$  [18]. Solutions of eq.(C.2) are called quantum trajectories. We will write everything in the basis where  $\mathcal{O}$  is diagonal, *i.e.*  $\mathcal{O} = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$  and suppose that all its eigenvalues are different. We assume that the measurement operators  $N$  are diagonal in this basis,  $N = \sum_k \nu_k |k\rangle\langle k|$  with  $\lambda_k = \nu_k + \bar{\nu}_k = 2 \Re \nu_k$ , in order to ensure for the process to be a non-demolition measurement in absence of the dynamics generated by the Lindbladian  $\mathcal{L}$ . The eigenstates  $|k\rangle$  will be called pointer states in what follows.

When  $\gamma$  is large, the system density matrix will undergo *quantum jumps* between the pointer states of the observable  $\mathcal{O}$ . Our objective is to characterise those jumps at the stochastic process level and not only at the ensemble average level, *i.e.* we want to show that the conditioned density matrix becomes itself, as far as the diagonal is concerned and in the large  $\gamma$  limit, a finite state Markov process (and not only that the diagonal of the unconditioned density matrix is the probability density associated to a finite state Markov process as in [219, 220]). Especially, the objective of this paper is to show how the jump rates between different states depend on the parameters of the Lindbladian  $\mathcal{L}$  and as a result how they also partially characterise it.

We first need to say a brief word about the scaling limit in order to state the results, and it will be more carefully explained later in Section C.4.2. It is well known that if  $\mathcal{L}$  is generated by a simple Hamiltonian, a continuous strong measurement will tend to Zeno freeze the system in one of the pointer states for an arbitrary long time, *i.e.* when  $\gamma \rightarrow \infty$  all the jump rates will go to 0. As a result and to get meaningful predictions in this limit, we need to adequately rescale the different parts of the dynamics to keep finite jump rates in the large  $\gamma$  limit. Such a rescaling is not required for all parts of the dynamics because as was argued in [86], jumps that emerge from a dissipative coupling cannot be Zeno frozen. To get the most general scaling limit, we consequently need to split the Lindbladian into different parts, actually four, that need to be rescaled separately. We write  $Q_i$  for the diagonal coefficients of  $\rho$  in the measurement eigenbasis, the *probabilities*, and  $U_{ij}$  for the non diagonal coefficients of  $\rho$ , the (not yet rescaled) *phases*,

$$Q_i := \langle i|\rho|i\rangle, \quad U_{ij} := \langle i|\rho|j\rangle, \quad i \neq j.$$

We decompose  $\mathcal{L}$  in four super-operators,  $A$  that sends the probabilities to the probabilities,  $B$  the phases to the probabilities,  $C$  the probabilities to the phases and  $D$  the phases to the phases.

$$\partial_t \rho_t = \mathcal{L}(\rho_t) \quad \stackrel{\text{notation}}{\iff} \quad \begin{cases} \partial_t Q_i = A(\mathbf{Q})_i + B(\mathbf{U})_i \\ \partial_t U_{ij} = C(\mathbf{Q})_{ij} + D(\mathbf{U})_{ij} \end{cases},$$

with  $A(\mathbf{Q})_i = A_i^k Q_k$ ,  $B(\mathbf{U})_i = B_i^{kl} U_{kl}$ ,  $C(\mathbf{Q})_{ij} = C_{ij}^k Q_k$ , and  $D(\mathbf{U}) = D_{ij}^{kl} U_{kl}$ ; summation over repeated indices is implicit. The reason why this decomposition is legitimate will be clearer later but a good rationale for it is that as the strong measurement will tend to shrink the phases, they will obviously need a differentiated treatment from the probabilities. We now claim that  $A$  needs no rescaling, that  $C$  and  $B$  need to scale like  $\gamma$  and  $D$  like  $\gamma^2$ . In what follow, we thus write :

$$A = \mathcal{A}, \quad B = \sqrt{\gamma} \mathcal{B}, \quad C = \sqrt{\gamma} \mathcal{C}, \quad D = \gamma \mathcal{D}.$$

For such a scaling to be consistent with the complete positivity of the map generated by  $\mathcal{L}$  in the large  $\gamma$  limit, we will see that  $\mathcal{D}$  needs to be diagonal :

$$\mathcal{D}_{ij}^{kl} = -d_{ij} \delta_i^k \delta_j^l$$

We should also add that equation (C.2) only gives the dominant terms in an expansion in power of  $\gamma$  and that the sub-leading corrections may in general be needed for compatibility with the complete positivity of the map associated to  $\mathcal{L}$ . We just claim that they have no impact on the large  $\gamma$  limit as expected and omit them for clarity.

Our main result, which will be proved in section C.4.1, can then be stated as follows :

**Proposition.** *With the previous notations, when  $\gamma \rightarrow \infty$  the finite dimensional distributions of the conditioned density matrix  $\rho_t$  converge to those of a finite state Markov process on the projectors associated to the measurement eigenvectors. The jump rate from site  $i$  to site  $j$  then reads in terms of the rescaled coefficients :*

$$m_j^i = \mathcal{A}_j^i + 2 \Re e \sum_{k < l} \frac{\mathcal{C}_{kl}^i \mathcal{B}_j^{kl}}{\Delta_{kl}}$$

with  $\Delta_{kl} := \frac{1}{2}(|\nu_k|^2 + |\nu_l|^2 - 2\nu_k \bar{\nu}_l) + d_{kl}$ .

In other words, in the strong measurement limit, the density matrix behaves as a jump process between the projectors  $|i\rangle\langle i|$  with jump rates given by the previous formula. Let us now make several remarks.

*Remark 1.* The result does not depend on the efficiency  $\eta$  of the measurement (provided it does not vanish).

*Remark 2.* The mean probabilities  $\bar{Q}_i := \mathbb{E}[Q_i]$  obtained by averaging over quantum trajectories, satisfy the finite state Markov process equation

$$\partial_t \bar{Q}_j = \sum_i \bar{Q}_i m_j^i.$$

As a result, our framework can also be applied to systems with strong dissipation or equivalently systems that are strongly measured with unrecorded outcomes. In such a situation, the density matrix is diagonal and its evolution is simply given by the average over trajectories of the jump process :  $\partial_t \bar{Q}_j = \sum_i \bar{Q}_i m_j^i$ . In that case, the density matrix itself is not a finite state Markov process but the probability distribution of a finite state Markov process. In this simpler setting, result (2) can admittedly be derived from the Lindblad equation (*i.e.* the SME averaged over the noise). However, remark 2 shows that it can be seen as a trivial byproduct of our more general proposition.

*Remark 3.* The reader may wonder how our result written in terms of  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  may be related to the generators of the Lindbladian. We claim and will prove in Section C.4.2 that the most general scaling that can be written is the following :

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\gamma H + \gamma^2 H^{diag}, \rho] + \sum_a D[N_a](\rho) + \gamma^2 \sum_b D[N_b^{diag}](\rho) + \text{subleading terms}$$

where  $L_N$  denotes as above the Lindblad generator associated to  $N$  and where the superscript "diag" means that the corresponding matrix has to be diagonal,  $H$  (without superscript) is any self-adjoint matrix and the  $N_a$  (without superscript) can be any matrix. The subleading terms in  $\gamma$  are irrelevant for the jump rate computation. Notice that the most general scaling is again far from trivial, possibly with terms of order 0, 1 and 2 in  $\gamma$ . Using the notation in equation (3) we get the following expression for the terms appearing in the jump rates in (C.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^i &= \sum_a \left( |(N_a)_{ji}|^2 - \delta_{ij} (N_a^\dagger N_a)_{jj} \right) \\ \mathcal{C}_{kl}^i \mathcal{B}_j^{kl} &= (H_{il} \delta_{ik} - H_{ki} \delta_{il}) (H_{jk} \delta_{jl} - H_{lj} \delta_{jk}) \left( = |H_{ij}|^2 \delta_{ik} \delta_{jl} \text{ for } i < j \text{ and } k < l \right) \\ d_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_a \left\{ |(N_a^{diag})_{ii}|^2 + |(N_a^{diag})_{jj}|^2 - 2(N_a^{diag})_{ii} \overline{(N_a^{diag})_{jj}} \right\} + i(H_{ii}^{diag} - H_{jj}^{diag}) \end{aligned} \tag{C.2.1}$$

where the second line is understood without summation on repeated indices. If we forget about the terms that need to be rescaled in  $\gamma^2$ , this means that the main contribution to the jump rates comes from the non diagonal part of the matrices appearing in the Lindblad generators. The second contribution comes from the non diagonal parts of the Hamiltonian that need to be rescaled with a factor  $\gamma$  to remain relevant in the strong measurement limit. Before going to the proof of this result, we give two simple examples of application of our formula.

## C.3 Applications

We now study two examples where the jump rates depend in a very different way on the system dynamics. In the first example, jumps will emerge from the competition between a unitary evolution and continuous quantum measurement ( $\mathcal{B} \neq 0$  and  $\mathcal{C} \neq 0$ ) : when the Hamiltonian is kept constant, the jump rates will go to zero when  $\gamma$  goes to infinity, the evolution will be progressively *Zeno-frozen*. In the second example, the jumps will emerge from the competition between a dissipative evolution and continuous quantum measurement ( $\mathcal{A} \neq 0$ ) : the jump rates will converge to a constant when  $\gamma$  goes to infinity, the evolution will not be *Zeno-frozen*. A system in which those two kinds of evolution are present at the same time has been studied in [6].

### C.3.1 Simple Hamiltonian

The simplest non trivial example that one can consider is that of a two level system, say a spin 1/2, evolving according to a Hamiltonian  $H = \omega \sigma/2_x$  and that is

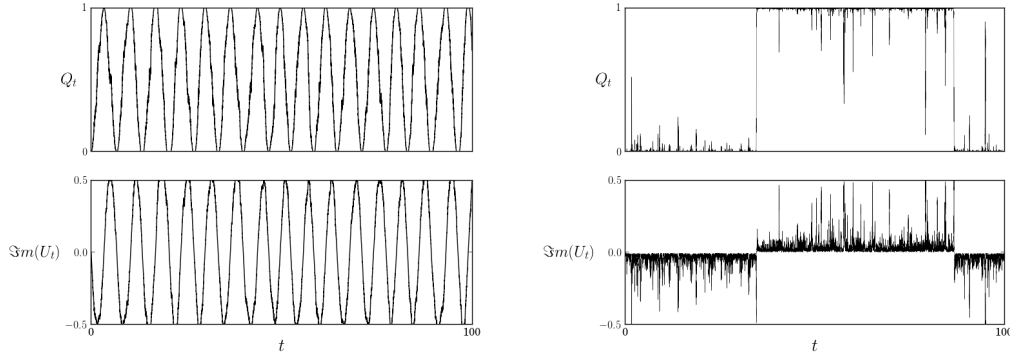


FIGURE C.1 – Sample trajectory of the density matrix coefficients  $Q_t = \langle 1|\rho_t|1\rangle$  and  $U_t = \langle 0|\rho_t|1\rangle$  for  $\omega = 1$  and  $\sqrt{\gamma} = 0.25$  on the left and  $\sqrt{\gamma} = 5.0$  on the right. Notice the change of regime from smooth Rabi oscillations to sharp quantum jumps when  $\gamma$  is increased. The remaining thin fluctuations around the limiting jump process are *not* described in our framework.

continuously measured in a basis *different* from the energy basis. Indeed if the measured observable commutes with the Hamiltonian, the system will collapse in one of the Hamiltonian eigenvectors and never jump afterwards, a situation we want to avoid. We thus chose to arbitrarily measure  $\mathcal{O} = \sigma_z/2$  at a rate  $\gamma^2$  so that the measurement basis is the canonical basis. Eventually we need to rescale the Hamiltonian (or equivalently adimensionalise time)  $\omega = \sqrt{\gamma}u$  in order to avoid a complete Zeno-freezing of the jumps. In the absence of measurement the system Lindbladian simply reads :

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\frac{\sqrt{\gamma}u}{2}[\sigma_x, \rho].$$

Expanding equation (C.3.1) gives :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 0, \\ \mathcal{B}_0^{10} &= \mathcal{B}_1^{01} = -\mathcal{B}_0^{01} = -\mathcal{B}_1^{10} = -iu/2, \\ \mathcal{C}_{01}^0 &= \mathcal{C}_{10}^1 = -\mathcal{C}_{01}^1 = \mathcal{C}_{10}^0 = iu/2, \end{aligned}$$

so that eventually we get the jump rates  $m_1^0 = m_0^1 = u^2$ . If we reintroduce the dimension in the Hamiltonian, that is we keep  $\omega$  fixed for large yet fixed  $\gamma$  we get an average time between two jumps  $\tau = \gamma/\omega^2$  which goes to  $\infty$  when  $\gamma$  goes to infinity. Thus the well known Zeno effect [221] is recovered in this framework. An analogous result had already been derived in this setting with a less general method in [61, 8, 7].

### C.3.2 Simple thermal jumps

Another application of our result is the study of thermal jumps. The jump rates and more details of the stochastic process had already been derived in [86] albeit with an *ad hoc* method. We consider a simple two level system consisting of a ground state  $|0\rangle$  and an excited state  $|1\rangle$  coupled to a thermal bath. It evolves according to an

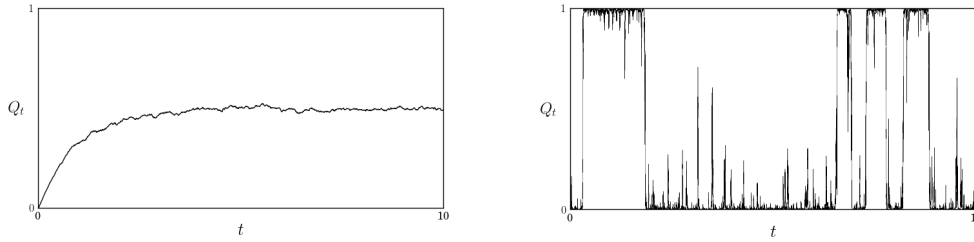


FIGURE C.2 – Sample trajectory of the density matrix coefficient  $Q_t = \langle 1|\rho_t|1\rangle$  with  $p = 0.5$  for  $\sqrt{\gamma} = 0.05$  on the left and  $\sqrt{\gamma} = 10.0$  on the right. Notice the change of regime from a smooth thermalization to sharp quantum jumps when  $\gamma$  is increased.

Hamiltonian  $H = \frac{\omega}{2}\sigma_z$  and the dissipative part of the evolution is induced by  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  in the form of two Lindblad generators :

$$L_{\sigma_{\pm}} = \sigma_{\pm}\rho\sigma_{\mp} - \frac{1}{2}\{\sigma_{\mp}\sigma_{\pm}, \rho\}.$$

Eventually the Lindbladian in the absence of measurement reads :

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \lambda p D[\sigma_-](\rho) + \lambda(1-p) D[\sigma_+](\rho),$$

where  $\lambda$  is the coupling strength with the bath and  $p := 1/(1 + e^{-\beta\omega})$  is the probability to be in the ground state at thermal equilibrium. This is a simple yet legitimate model for the evolution of a system coupled to a thermal bath [222]. We also assume that its energy is continuously measured (*i.e.*  $\mathcal{O} = \sigma_z$ ) at a rate  $\gamma$  and want to characterise the thermally activated quantum jumps that appear in the large  $\gamma$  limit. This is actually a trivial question with the help of our proposition. Expanding equation (C.3.2) gives, with the previous notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^1 &= \lambda p, \quad \mathcal{A}_1^0 = \lambda(1-p) \\ \mathcal{B} &= 0 \\ \mathcal{C} &= 0 \end{aligned}$$

So that  $\mathcal{A}$  immediately encodes the jump rates. We recover the Gibbs equilibrium distribution for the occupation ratios and see that the jump rates are directly proportional to the system-bath coupling strength.

## C.4 Proofs

### C.4.1 Proof of the proposition

Here our objective is to prove that a density matrix obeying equation (C.2) becomes a finite state Markov process on the projectors on the eigenvectors of the measured observable in the large  $\gamma$  limit and to compute the jump rates  $m_j^i$  or equivalently the Markov transition matrix  $M$ . Using the previous notations equation (C.2) can be

expanded to :

$$\begin{aligned} dQ_i &= \mathcal{A}(\mathbf{Q})_i dt + \mathcal{B}(\mathbf{Y})_i dt + \sqrt{\eta\gamma} Q_i \left( \lambda_i - \sum_k Q_k \lambda_k \right) dW_t, \\ dY_{ij} &= \gamma \left( \mathcal{C}(\mathbf{Q})_{ij} - \Delta_{ij} Y_{ij} \right) dt + \sqrt{\eta\gamma} Y_{ij} \left( \nu_i + \bar{\nu}_j - \sum_k Q_k \lambda_k \right) dW_t. \end{aligned}$$

We have used the additional notation  $Y_{ij} := \sqrt{\gamma} U_{ij}$  and  $\Delta_{ij} := \frac{1}{2}(|\nu_i|^2 + |\nu_j|^2 - 2\nu_i \bar{\nu}_j)^2 + d_{ij}$ . Recall that  $\lambda_k = \nu_k + \bar{\nu}_k$ . The process is written in terms of the rescaled variables  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{Y}$  but we shall sometimes abbreviate the notation by using  $\rho$  to collectively refer to these variables ; for instance  $f(\rho)$  is going to be a short name for  $f(\mathbf{Q}, \mathbf{Y})$ .

#### C.4.1.a Strategy :

The main object we will consider is the probability kernel  $K_t(\rho_0, d\rho)$  to go from a given density matrix  $\rho_0$  to another density matrix  $\rho$ , up to  $d\rho$ , after a time  $t$ . The kernel  $K_t$  verifies the Kolmogorov equation  $\partial_t K_t = K_t \mathfrak{D}$  where  $\mathfrak{D}$  is the second order differential operator (or Dynkin operator) associated to the SDE (C.4.1). These concepts will be defined in more details below. At this stage, we do not need to write  $\mathfrak{D}$  explicitly but simply to notice that, because of Itô's formula, the coefficients in front of the noise terms will come squared so that  $\mathfrak{D}$  will only contain terms of order 0 and 2 in  $\sqrt{\gamma}$ . As a result we write

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + \gamma \mathfrak{D}_2,$$

and will compute  $K_t = e^{t\mathfrak{D}_0 + t\gamma\mathfrak{D}_2}$  for large  $\gamma$ .

The main argument is then the following. Any second order operator associated to well defined SDE's is a non-positive operator, so that when  $\gamma$  is very large, even after a small amount of time, only the eigenvectors that are in the kernel of  $\mathfrak{D}_2$  will remain when considering  $e^{t\gamma\mathfrak{D}_2}$ . The idea is then to perform a perturbative expansion around those remaining eigenvectors and compute the jump rate between them.

#### C.4.1.b Definitions

We first start by introducing some definitions and notations (see [21, 20] for more detail). The kernel  $K_t$  codes for the probability of a solution of the flow equation started at  $\rho_0$  to be at  $\rho$  at time  $t$ . It can be used to compute the average of any regular function  $f$  :

$$\mathbb{E}[f(\rho_t)] = \int_{\rho \in \mathcal{K}} K_t(\rho_0, d\rho) f(\rho),$$

with  $\rho_t$  the solution of the SDE started at  $\rho_0$  at time 0 and the integration domain is the set<sup>2</sup> of density operators  $\mathcal{K}$ . The probability kernel  $K_t$  can also be viewed as an operator acting on functions defined on  $\mathcal{K}$  via :

$$K_t : f \rightarrow K_t f \quad \text{with} \quad (K_t f)(\rho) := \int_{\rho' \in \mathcal{K}} K_t(\rho, d\rho') f(\rho').$$

---

2. By the Lindblad construction, the flow associated to the SDE defined above preserves this set.

An equation for  $K_t$  can be obtained by computing the time derivative of  $\mathbb{E}[f(\rho_t)]$  in two different ways. One can first apply Itô calculus to  $f(\rho_t)$  :

$$df(\rho_t) = (\mathfrak{D}f)(\rho_t) dt + (\dots)dW_t,$$

with  $\mathfrak{D}$  the second order differential operator associated to the SDEs (C.4.1) (also called Dynkin operator or sometimes dual Fokker-Planck operator). A function  $f(\rho_t)$  is called a local martingale if there is no drift terms in its Itô derivative, that is if  $\mathfrak{D}f = 0$ .

Thanks to the defining property of the Ito calculus, the above equation implies

$$\partial_t \mathbb{E}[f(\rho_t)] = \mathbb{E}[(\mathfrak{D}f)(\rho_t)],$$

Writing the expectations in terms of the probability kernel  $K_t$  gives

$$\int_{\rho \in \mathcal{K}} \partial_t K_t(\rho_0, d\rho) f(\rho) = \int_{\rho \in \mathcal{K}} K_t(\rho_0, d\rho) (\mathfrak{D}f)(\rho),$$

for any function  $f$ . Hence, we get what we had claimed in the introduction of the proof,

$$\partial_t K_t = K_t \mathfrak{D},$$

as an equation on operators acting on functions over  $\mathcal{K}$ . The formal solution of this differential equation, with initial data  $K_{t=0} = Id$ , is

$$K_t = \exp(t\mathfrak{D}),$$

again viewed as an operator identity.

The same can be done in the dual picture. If  $f(\rho)$  and  $\mu(d\rho)$  respectively denote a function and a measure on  $\mathcal{K}$ , the duality is the obvious one :

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\rho \in \mathcal{K}} \mu(d\rho) f(\rho).$$

If  $\mathfrak{D}$  is an operator acting on functions, its dual  $\mathfrak{D}^T$  acts on measures via

$$\langle \mathfrak{D}^T \mu, f \rangle := \langle \mu, \mathfrak{D}f \rangle.$$

In particular, the dual  $\mathfrak{D}^T$  of the Dynkin operator  $\mathfrak{D}$  is the usual Fokker-Planck operator.

By duality, the flow on  $\rho$  defined by the SDE induces a flow on the measures via

$$\mu_0 \rightarrow \mu_t \quad \text{with} \quad \mu_t(d\rho) := \int_{\rho_0 \in \mathcal{K}} \mu_0(d\rho_0) K_t(\rho_0, d\rho),$$

Of course it is such that  $\langle \mu_t, f \rangle = \langle \mu_0, K_t f \rangle$ , so that we can write this flow as  $\mu_t = K_t^T \mu_0$ . By definition we then have

$$\partial_t \mu_t = \mathfrak{D}^T \mu_t,$$

or equivalently  $\partial_t K_t^T = \mathfrak{D}^T K_t^T$ . A measure is said to be *invariant* if it is constant in time, *i.e.* if it is annihilated by  $\mathfrak{D}^T$ . Invariant measures and local martingales are thus dual objects. Now that we have reminded the reader of these definitions, we can apply the announced strategy.



### C.4.1.c The large $\gamma$ limit of the transition kernel

Let us proceed. Let  $F_I$  be the basis diagonalizing the operator  $\mathfrak{D}$ , let  $E_I$  be the associated eigenvalues,  $\mathfrak{D}F_I = E_I F_I$ ,  $E_I \leq 0$ , and let  $\Lambda^I$  be the associated dual basis so that :

$$K_t(\rho_0, d\rho) = \sum_I e^{tE_I} F_I(\rho_0) \Lambda^I(d\rho).$$

All  $E_I$ ,  $F_I$  and  $\Lambda^I$  depend on  $\gamma$ . Since  $\mathfrak{D} = \gamma \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_0$ , perturbation theory tells that

$$\begin{aligned} E_I &= \gamma^2 e_I + e_I^0 + \gamma^{-1} e_I^1 + O(\gamma^{-2}), \\ F_I &= f_I + \gamma^{-1} f_I^1 + O(\gamma^{-2}), \\ \Lambda^I &= \mu^I + \gamma^{-1} \mu_1^I + O(\gamma^{-2}), \end{aligned}$$

with  $e_I$  an eigenvalue of  $\mathfrak{D}_2$  and  $f_I$  (resp.  $\mu^I$ ) the corresponding eigenvector (resp. dual eigenvector). Hence, only the terms corresponding to eigenvalues  $E_I$  whose dominating contribution  $e_I$  vanishes survive in the pointwise limit of the sum (C.4.1.c) :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} K_t(\rho_0, d\rho) = \sum_{I: e_I=0} e^{te_I^0} f_I(\rho_0) \mu^I(d\rho).$$

Restricting the sum to  $e_I = 0$  selects  $f_I$  to be in the kernel of  $\mathfrak{D}_2$  :  $\mathfrak{D}_2 f_I = 0$ .

Let now  $f_i$  be a basis of  $\text{Ker}(\mathfrak{D}_2)$  and  $\mu^i$  be the associated dual basis of  $\text{Ker}(\mathfrak{D}_2^T)$ , so that  $f_I$  (with  $\mathfrak{D}_2 f_I = 0$ ) is a linear combination of  $f_i$  :  $f_I = \sum_j f_j (\int \mu^j f_I)$ .

Degenerate perturbation theory around the zero eigenvalue tells us that  $\mathfrak{D}_2 f_I^1 + \mathfrak{D}_0 f_I = e_I^0 f_I$ . Integrating this last equation against  $\mu_j$  yields

$$\int \mu^j(d\rho) (\mathfrak{D}_0 f_I)(\rho) = e_I^0 \int \mu^j(d\rho) f_I(\rho),$$

so that  $e_I^0$  are eigenvalues of the matrix  $m_k^j := \int \mu^j \mathfrak{D}_0 f_k$  and  $f_I$  the corresponding eigenvectors.

Consequently, we may write the limiting formula for the point-wise limit of the kernel  $K_t$  in the basis  $f_i$  as

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} K_t(\rho_0, d\rho) = \sum_{ij} f_j(\rho_0) \left( e^{tM} \right)_i^j \mu^i(d\rho),$$

with

$$m_i^j := \int \mu^j(d\rho) (\mathfrak{D}_0 f_i)(\rho),$$

where  $f_i$  is a basis of  $\text{Ker}\mathfrak{D}_2$  and  $\mu^j$  is the dual basis. Recall that  $\mathfrak{D}_2$  is the second order differential operator associated to SDE's. Hence, to any element of  $\text{Ker}\mathfrak{D}_2$  corresponds a (local) martingale for the associated stochastic process. The dual basis of invariant measures  $\mu^i \in \text{Ker}\mathfrak{D}_2^T$  that we shall identify below have disjoint supports so that we can use those to index the states of a finite dimensional Markov chain (we say that the chain is in the state  $i$  if  $\rho$  is in the support of  $\mu^i$ ) and to ensure the consistency of the associated process. The large  $\gamma$  limit thus projects the original process on a finite state Markov chain whose states are indexed by the  $\mathfrak{D}_2$ -martingales and the matrix  $M$  contains the transition probabilities between the states.

#### C.4.1.d Computing the Markov transition matrix :

We now need to compute the  $f$ 's and the  $\mu$ 's to eventually get the Markov matrix  $M$ . The operator  $\mathfrak{D}_2$  is the second order operator associated to the set of SDE's :

$$\begin{aligned} dQ_i &= \sqrt{\eta} Q_i \left( \lambda_i - \sum_k Q_k \lambda_k \right) dW_t \\ dY_{ij} &= \left( \mathcal{C}(\mathbf{Q})_{ij} - \Delta_{ij} Y_{ij} \right) dt + \sqrt{\eta} Y_{ij} \left( \nu_i + \bar{\nu}_j - \sum_k Q_k \lambda_k \right) dW_t \end{aligned}$$

To compute the invariant measures associated to this SDE, we could try to solve its Fokker-Planck equation. However as the invariant measures are singular in the  $Q$ 's, it is easier to study the stochastic process directly. Let us first notice that the  $Q$ 's are bounded martingales and as a result they converge almost surely to one of the fixed points. It is easy to see that the only fixed points of the noise term are of the form  $Q_k = \delta_{ik}$  where  $i$  is random and depends on the trajectory. (Recall that we assumed that all  $\lambda_k$  were distinct). This is an expected result because eqs.(C.4.1.d), but without the  $\mathcal{C}(\mathbf{Q})_{ij}$ -terms, are those for indirect non-demolition measurements : it simply means that, because of measurement, the probabilities tend to collapse with all the mass in a (random) pointer state. These are all linearly independent martingales and

$$f_i(\rho) := Q_i \in \text{Ker} \mathfrak{D}_2.$$

form a basis of  $\text{Ker} \mathfrak{D}_2$ . Notice that  $\sum_i f_i = 1$  and this ensures that  $\sum_i m_i^j = 0$ . There are as many dual invariant forms  $d\mu$ 's as there are fixed points and we have

$$\mu^i(d\rho) := \delta^i(d\mathbf{Q}) \mu^i(d\mathbf{Y}) \in \text{Ker} \mathfrak{D}_2^T,$$

where  $\delta^i(d\mathbf{Q}) = \delta(1 - Q_i) dQ_i \prod_{j \neq i} \delta(Q_j) dQ_j$ , with  $\delta(Q) dQ$  the Dirac measure, and  $\mu^i(d\mathbf{Y})$  is the normalized  $Y$ -dependence of the invariant measure conditioned on the fact that the trajectory in the  $Q$ -subspace converge to  $Q_j = \delta_{ij}$ . Notice that in general,  $\mu^i(d\mathbf{Y})$  has no reason to be peaked and is actually rather broad with power law tails. Computing  $\mu^i(d\mathbf{Y})$  is difficult in general because  $\mathcal{C}_{ij}^k$  need not be real. A possible solution is to solve the equation for  $Y_{kl}$  to compute its moments. But it is even easier to notice that neither  $\mu^i(d\mathbf{Y})$  nor all its moments will actually ever be needed to compute the transition rates  $\int \mu^i \mathfrak{D}_0 f_j$  which only depend on the average value of  $\mathbf{Y}$ . This average can be easily computed. Let us integrate the SDE for  $Y_{kl}$  conditioned on  $Q_l \rightarrow \delta_{il}$  for all  $l$  :

$$Y_{kl} = \int_0^t \left( \mathcal{C}_{kl}^i - \Delta_{kl} Y_{kl} \right) dt + \sqrt{\eta} \int_0^t Y_{kl} \left( \nu_k + \bar{\nu}_l - \lambda_i \right) dW_t$$

We now take the average and write  $y_{kl}^i := \mathbb{E}[Y_{kl} | \mathbf{Q} = \delta_{.i}]$  which gives  $\dot{y}_{kl}^i = \mathcal{C}_{kl}^i - \Delta_{kl} y_{kl}^i$  so that  $y_{kl}^i(t) = \frac{\mathcal{C}_{kl}^i}{\Delta_{kl}} + y_{kl}^i(0) e^{-\Delta_{kl} t}$ , and, since  $\Re \Delta_{kl} > 0$ ,

$$y_{kl}^i(t) := \mathbb{E}[Y_{kl} | \mathbf{Q} = \delta_{.i}] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{\mathcal{C}_{kl}^i}{\Delta_{kl}}.$$

Recall that  $\Delta_{kl} := \frac{1}{2} (|\nu_k|^2 + |\nu_l|^2 - 2\nu_k \bar{\nu}_l)^2 + d_{kl}$ .

We can now compute the transition rates  $m_j^i = \int \mu^i \mathfrak{D}_0 f_j$ . The operator  $\mathfrak{D}_0$  can be easily computed as it is the operator associated to the (S)DE  $dQ_i = \mathcal{A}(\mathbf{Q})_i dt + \mathcal{B}(\mathbf{Y})_i dt$ , without noisy terms, so that  $\mathfrak{D}_0$  is the first order differential operator :

$$\mathfrak{D}_0 = \sum_i [\mathcal{A}(\mathbf{Q})_i + \mathcal{B}(\mathbf{Y})_i] \partial_{Q_i}$$

Recalling that  $f_j(\rho) = Q_j$  we get (with implicit summation on repeated indices) :

$$\begin{aligned} m_j^i &= \int \mu^i \mathfrak{D}_0 f_j \\ &= \int_{\mathcal{K}} \delta^i(d\mathbf{Q}) \mu^i(d\mathbf{Y}) \left( \mathcal{A}_j^k Q_k + \mathcal{B}_j^{kl} Y_{kl} \right) \\ &= \mathcal{A}_j^k \int_{\mathcal{K}} \delta^i(d\mathbf{Q}) Q_k \mu^i(d\mathbf{Y}) + \mathcal{B}_j^{kl} \int_{\mathcal{K}} \mu^i(d\mathbf{Y}) Y_{kl} \delta^i(d\mathbf{Q}) \\ &= \mathcal{A}_j^i + \sum_{kl} \frac{\mathcal{B}_j^{kl} \mathcal{C}_{kl}^i}{\Delta_{kl}}, \end{aligned}$$

which is the result that was announced previously.

### C.4.2 What is the most general jumpy scaling limit ?

We now prove that we have derived the most general scaling limit *that gives rise to quantum jumps*. For  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$  we obviously have the most general scaling as if they were scaled with a smaller power, they would become irrelevant in the scaling limit (or equivalently the Zeno effect would kill the associated transition rates), and if they were scaled with a bigger power, the jump rates would diverge in the large  $\gamma$  limit and the limit would not be jumpy anymore. To say it differently, the simple fact that we ask the limit to be jumpy and that the system parameters have an influence fixes completely the scaling. We now need to show, as we have previously announced, that the phase-phase coupling term  $D$  in the Lindbladian is always irrelevant no matter how it is rescaled *unless it is diagonal*. We will first show that that the non diagonal terms cannot grow faster than  $\sqrt{\gamma}$  and then prove that such a limiting scaling would still make them irrelevant. Eventually we prove the link between the scaling expressed in terms of  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  and the Linblad generators of remark 3.

**D cannot grow faster than  $\sqrt{\gamma}$ , unless diagonal :** Let us suppose that  $D$  can grow faster than  $\sqrt{\gamma}$ . It would then need to be rescaled independently of  $A$ ,  $B$  and  $C$  which were shown to grow no faster than  $\sqrt{\gamma}$ . As a result  $D$  needs to be itself the generator of a completely positive map  $\Phi_t$  that couples only the phases with the phases. Let us suppose that we have a completely positive application  $\Phi_t$  with generator  $\tilde{\mathcal{L}}$  that couples only the phases and write it using the usual decomposition :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_a \left( M^a \rho M^{a\dagger} - \frac{1}{2} \{M^{a\dagger} M^a, \rho\} \right),$$

for some operators  $M^a$ . We ask that  $\tilde{\mathcal{L}}$  does not act on the diagonal coefficients, *i.e.*  $\tilde{\mathcal{L}}(|i\rangle\langle i|) = 0$  for any projector on the measurement eigenvector  $|i\rangle\langle i|$ . In particular,

imposing that the diagonal elements vanish, *i.e.*  $\langle j | \tilde{\mathcal{L}}(|i\rangle\langle i|) |j\rangle = 0$  for any  $j$ , reads

$$\sum_a \left( |M_{ji}^a|^2 - \delta_{ij} (M^{a\dagger} M^a)_{jj} \right) = 0.$$

Thus, for  $j \neq i$ , we get

$$\sum_a |M_{ji}^a|^2 = 0,$$

and hence  $M_{ji}^a = 0$  for all  $a$  and  $j \neq i$ . That is, all the  $M^a$ 's are diagonal matrices. The Hamiltonian part of the flow also needs to be diagonal. Indeed, if  $H_{kl} \neq 0$  for some  $k$  and  $l$ ,  $k \neq l$ , we have  $\langle k | [H, |l\rangle\langle l|] |l\rangle = H_{kl}$  so  $H$  couples the probabilities to the phase which is forbidden. Therefore,  $H$  is also diagonal and as a result  $\tilde{\mathcal{L}}$  cannot mix the phases. Writing  $M^a = \sum_k n_k^a |k\rangle\langle k|$ , this means that at most  $D(\mathbf{Y})_{ij} = -D_{ij} Y_{ij}$ , with  $D_{ij} = \frac{1}{2} \sum_a (|n_i^a|^2 + |n_j^a|^2 - 2n_i^a \bar{n}_j^a) + i(H_{ii} - H_{jj})$ , a term that is proportional to the deterministic part of the measurement acting on the phase. The only non-trivial consistent scaling is that  $D$  scales as  $\gamma^2$  and  $D(Y)_{ij} = -\gamma^2 d_{ij} Y_{ij}$ . Notice that we have proved at the same time that in the generators picture, the terms contributing to  $D$  come from a diagonal Hamiltonian and the diagonal part of the matrices  $M^a$  appearing in the Lindblad generator.

**If  $D$  scales as  $\sqrt{\gamma}$  then it is irrelevant :** Let us suppose that  $D = \gamma \mathcal{D}$  which is the limiting scaling allowed for a non-diagonal  $D$ . In that case the Fokker-Planck operator associated to equation (C.2) needs to be written with a new term of order  $\gamma$  that is  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + \sqrt{\gamma} \mathfrak{D}_1 + \gamma \mathfrak{D}_2$  where  $\mathfrak{D}_1$  is the Fokker-Planck operator associated to the (S)DE :  $dY_{ij} = \mathcal{D}_{ij}^{kl} Y_{kl} dt$ . We thus have :

$$\mathfrak{D}_1 = \sum_{ijkl} \mathcal{D}_{ij}^{kl} Y_{kl} \partial_{Y_{ij}}$$

We now proceed with the same perturbative expansion as before except this time we assume that a term of order  $\gamma$  remains, *i.e.* that  $K_t = e^{t\gamma \mathfrak{D}_2 + t\sqrt{\gamma} \mathfrak{D}_1 + t\mathfrak{D}_0}$ . The first two terms of the eigenvalue expansion will need to be zero to give a non trivial jumpy behavior in the large  $\gamma$  limit. We use the same notation as before, that is :

$$\begin{aligned} F_I &= f_I + \gamma^{-1/2} f_I^1 + \gamma^{-1} f_I^2 + \dots \\ E_I &= 0 \times \gamma + 0 \times \sqrt{\gamma} + e_I^0 + \dots \end{aligned}$$

for the eigen-modes with leading vanishing eigenvalues. We then have, up to second order in  $\sqrt{\gamma}$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_2 f_I &= 0 \\ \mathfrak{D}_2 f_I^1 + \mathfrak{D}_1 f_I &= 0 \\ \mathfrak{D}_2 f_I^2 + \mathfrak{D}_1 f_I^1 + \mathfrak{D}_0 f_I &= e_I f_I \end{aligned}$$

Recall that the  $f$ 's only depend on  $\mathfrak{D}_2$  and are thus the same as before, that is  $f_i(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) = Q_i$  which gives in particular  $\mathfrak{D}_1 f_I = 0$ . In that case we have  $\mathfrak{D}_2 f_I^1 = 0$  so that  $f_I^1 \in \text{Ker}(\mathfrak{D}_2)$  and as a consequence,  $\mathfrak{D}_1 f_I^1$  is also zero. As a result, the terms of order  $\gamma$  no longer have any role to play in the computations and  $\mathcal{D}$  is irrelevant.

**The scaling provided in remark 3 is the most general :** Now that we have the most general scaling in terms of  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$ , we only need to relate them to the expression of the Lindblad generators. Using the generic Lindbladian of equation (C.4.2) we get :

$$A_j^i = \sum_a \left( |M_{ji}^a|^2 - \delta_{ij} (M^{a\dagger} M^a)_{jj} \right)$$

This shows that if the  $M_a$ 's have non diagonal parts, then they have to be of order zero in  $\gamma$ . As a result, the contribution of the  $M_a$ 's having non diagonal parts to  $B$  and  $C$  is also of order zero and vanishes once we consider the rescaled coefficients  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$ . If the  $M_a$ 's are purely diagonal, we have already proved that they only contribute to  $D$ . As a result, the only contributions to  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$  come from the Hamiltonian and we compute :

$$C_{kl}^i B_j^{kl} = (H_{il} \delta_{ik} - H_{ki} \delta_{il}) (H_{jk} \delta_{jl} - H_{lj} \delta_{jk})$$

This means that only the non diagonal parts contribute as  $k \neq l$  and they need to be rescaled as  $\gamma$  to be relevant. Eventually, the diagonal parts of the  $M_a$ 's and of  $H$  appear in  $D$  and consequently need to be rescaled with a factor  $\gamma^2$  to stay relevant in the large  $\gamma$  limit. To summarise, the non diagonal coefficients of the  $M_a$ 's need not be rescaled, the non diagonal coefficients of the Hamiltonian need to be rescaled with a factor  $\sqrt{\gamma}$  and the diagonal part of the Hamiltonian and the  $M_a$ 's need to be rescaled with a factor  $\gamma$ . This proves the form of equation (3).

## C.5 Discussion

After these lengthy derivations, let us step back and comment on the mathematical results and their physical implications. We have shown that an open quantum system that is continuously measured has an evolution that gets jumpy when the measurement process dominates. Our derivation shows that quantum jumps are ubiquitous in the sense that any quantum system subjected to a tight monitoring will undergo quantum jumps (or will simply be frozen, *i.e.* will have a jump rate equal to zero).

However, we should insist that for large but finite  $\gamma$ , the evolution of the system density matrix is still continuous and the jumps –though they look instantaneous in the limit– have a finite duration of order  $\gamma^{-1}$ . In this setting, quantum jumps are not strictly instantaneous and are only the effective description of a more fundamental evolution. This is in stark contrast with the quantum jumps that appear directly in stochastic master equations for Poissonian unravellings. Our derivation thus gives some insights into the debate about the reality of quantum jumps. The conclusions will however depend on the foundational attitude of the reader. If one is ready to give an ontological status to the conditioned density matrix – as it is the case for example in dynamical reduction models [46, 72]–, then the jumps we observe are really a consequence of measurement and can even be assumed to be *progressively created* by measurement. From a more epistemic or Bayesian perspective, measurements could just be progressively revealing, as well as influencing, a (yet to be specified) underlying jump process. As far as we know, a specific model for the second option has not been provided yet –though it should certainly be investigated.

From a more practical point of view, we have provided a simple analytical recipe to compute the effective evolution of systems that are either continuously monitored or subjected to strong dissipation. The jump rates are simple analytical functions of the measured operator and the Lindbladian. Our results have been derived for a single measured observable but can effortlessly be generalised to a larger set of commuting observables. Finally, we should add that we have voluntarily neglected the study of the remaining fluctuations around the jump process. This admittedly difficult but fascinating enquiry is, we believe, the next step in the thorough understanding of quantum jumps.



# Annexe D

## Échardes dans les trajectoires quantiques

L'appendice qui suit est directement tiré de l'article *Spikes in quantum trajectories* [4] écrit par M. Bauer, D. Bernard et l'auteur et publié dans Physical Review A. Seules quelques modifications de notation ont été effectuées pour éviter de dérouter le lecteur et cet appendice peut être lu sans référence au reste. On y montre que des échardes (*spikes*) viennent décorer les sauts quantiques lorsqu'un système est soumis à une mesure continue forte. On effectue une analogie avec un modèle jouet classique et on discute l'interprétation du phénomène.

**Abstract :** A quantum system subjected to a strong continuous monitoring undergoes quantum jumps. This very well known fact hides a neglected subtlety : sharp scale-invariant fluctuations invariably decorate the jump process even in the limit where the measurement rate is very large. This article is devoted to the quantitative study of these remaining fluctuations, which we call *spikes*, and propounds a physical interpretation. We start by introducing a classical model where the origin of these fluctuations is more intuitive and then jump to the quantum realm where their existence is irreducibly puzzling. We show why in some situations, and contrary to what would naively be expected, the spikes cannot be neglected. Eventually we show that this phenomenon gives some insights into the procedure of quantum smoothing and into the choice of primitive ontology in quantum foundations.

### D.1 Introduction

The quantum jumps emerging from the continuous monitoring of a quantum system have been known since the beginning of quantum mechanics [214] and have been the subject of both theoretical [223, 61, 86] and experimental [211, 212, 213, 210] investigation. It has been emphasized recently [5], though it was certainly expected, that they are a generic phenomenon in the sense that they necessarily appear anytime a quantum system is subjected to a strong continuous measurement. However, fluctuations around the dominant jump process are unavoidable. They persist in the strong



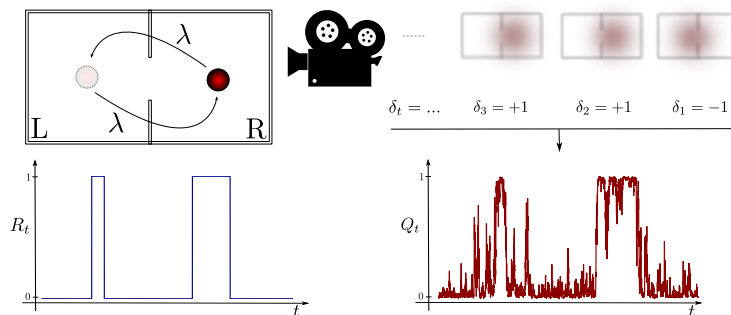


FIGURE D.1 – Schematics of the classical model considered. The particle jumps are recorded in a variable  $R_t$ , an imperfect camera yields blurry photos from which a binary variable  $\delta_i$  is extracted. An estimate  $Q_t$  of  $R_t$  is constructed from the  $\delta_u$ 's for  $u < t$ . The obtained  $Q_t$  is expected to be close to  $R_t$  when the camera takes many images per unit time.

measurement limit and are not artifacts of experimental uncertainties, a fact which seems to have been largely overlooked in the literature. Even in the limit of infinitely strong continuous measurements, the Poissonian jumps of the density matrix always appear decorated with a residual noise. When the measurement rate becomes infinite, this decorating noise becomes punctual and has a vanishing impact on the finite dimensional probability distributions. However, as we will see, this does not mean that it should be discarded all together.

The objective of this article is to prove that some sharp fluctuations, which we call *spikes*, indeed persist even in the infinitely strong measurement limit and to show that they can be precisely quantified. We start by studying a classical toy model of iterated imperfect measurement where the phenomenon of spikes appears in a very clear and non puzzling way. We then go to the quantum realm where we show that a continuously monitored qubit displays the same type of surprising fluctuations. In that case, no straightforward physical interpretation can be provided and the phenomenon remains irreducibly startling. We eventually discuss how *spikes* can give a criterion to evaluate the different proposals for a quantum smoothing procedure and very partially unriddle the debate on the choice of what can constitute the *stuff* in quantum foundations.

## D.2 A classical toy model

Let us start with a model for a classical iterated imperfect measurement. We consider a *classical* particle hopping between two compartments "left" and "right" of a box. To make things simpler we start with a discrete time and assume that the particle has a probability  $\lambda$  to change of compartment at every step. Our objective is to track the *real* position  $R_t$  of the particle ( $R_t = 1$  for "left" and  $R_t = 0$  for "right"). For that matter we take a photo of the box at each time step but we assume that the camera is bad and provides us only with very blurry pictures. Every photo yields a binary answer  $\delta_n = \pm 1$  which gives some information about the possible localization of the

particle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\delta_n = 1 | \text{particle on the left}) &= \frac{1 + \varepsilon}{2} \\ \mathbb{P}(\delta_n = 1 | \text{particle on the right}) &= \frac{1 - \varepsilon}{2}\end{aligned}$$

where  $\varepsilon \in ]0, 1[$  represents the measurement precision. What we have constructed (see Fig. D.1) is actually one of the simplest possible instance of a Hidden Markov Model [224]. As often in such a situation, we are interested in knowing the best estimate  $Q_n$  that the particle is on the left at the  $n$ -th iteration, *i.e.* :

$$\begin{aligned}Q_n &= \mathbb{P}(\text{particle on the left at time } n | \text{pictures before } n) \\ &= \mathbb{P}(R_n = 1 | \{\delta_k\}_{k \leq n})\end{aligned}$$

To compute  $Q_{n+1}$ , knowing  $Q_n$  and the result from the last picture  $\delta_{n+1}$ , we simply need to :

- Incorporate the information from the last measurement result  $\delta_{n+1}$  using *Bayes rule* :

$$\begin{aligned}Q_{n+1} &= \mathbb{P}(\text{left at } n+1 | \{\delta_k\}_{k \leq n}, \delta_{n+1}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\delta_{n+1} | R_{n+1} = 1) \mathbb{P}(R_{n+1} = 1 | \{\delta_k\}_{k \leq n})}{\mathbb{P}(\delta_{n+1} | \{\delta_k\}_{k \leq n})}\end{aligned}$$

- Take into account the fact that we know that the particle tends to jump during the time interval separating two photos :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{n+1} = 1 | R_n = 1) &= 1 - \lambda \\ \mathbb{P}(R_{n+1} = 1 | R_n = 0) &= \lambda\end{aligned}$$

Using the law of total probability and the fact that  $\mathbb{P}(R_{n+1} | R_n)$  is independent from  $\{\delta_k\}_{k \leq n}$  gives

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = 1 | \{\delta_k\}_{k \leq n}) = (1 - \lambda)Q_n + \lambda(1 - Q_n).$$

Similarly the law of total probability can be used to compute the denominator of equation (D.2). Eventually, inserting formulae (D.2) and (D.2) in equation (D.2) one can construct  $Q_{n+1}$  from  $Q_n$  and  $\delta_{n+1}$  : Elementary algebra and standard probability theory then give :

$$Q_{n+1} = \frac{(1 + \varepsilon\delta_{n+1}) [(1 - \lambda)Q_n + \lambda(1 - Q_n)]}{1 + 2\varepsilon\delta_{n+1} [(1 - \lambda)Q_n + \lambda(1 - Q_n) - 1/2]} \quad (\text{D.2.1})$$

*i.e.*  $Q_n$  can be iteratively constructed from  $\{\delta_k\}_{k \leq n}$ . To summarize we have a *real* physical quantity  $R_n$  that jumps between 0 and 1. The only information available at step  $n$  is the collection of  $\delta_k$  for  $k \leq n$  from which we can construct, the best estimation  $Q_n$  of  $R_n$  at the step  $n$ . Our objective is to show the similarities and differences between the behavior of  $R_n$ , the physical quantity, and  $Q_n$ , which represents what we *know* of  $R_n$ . We will loosely say that we have a lot of information on  $R_n$  if  $Q_n$  is close to 0 or 1.

For computational convenience, one can derive the continuous version of the previous discrete evolution in the limit of infinitely blurry pictures taken at an infinitely high frequency (so that information is extracted continuously at a finite rate). With the following rescaling and definitions :

$$t = n\delta t, \quad \varepsilon = \sqrt{\gamma}\sqrt{\delta t}/2, \quad \lambda = \tilde{\lambda}\delta t/2,$$

one can write a stochastic differential equation <sup>1</sup> (in the Itô form) for the evolution of  $Q_t$  :

$$dQ_t = \tilde{\lambda} \left( \frac{1}{2} - Q_t \right) dt + \sqrt{\gamma} Q_t (1 - Q_t) dW_t, \quad (\text{D.2.2})$$

where  $W_t$  is a Wiener process (*i.e.*  $\frac{dW_t}{dt}$  is the Gaussian white noise). The details of the derivation can be found in appendix D.6. Let us emphasize the fact that this continuous limit is only needed to get closed form results and to give a more intuitive understanding of the phenomena at play. It is by no means required for the "spikes" to emerge. Even with a fixed value of  $\varepsilon < 1$  say  $\varepsilon = 1/2$  the plots will look qualitatively the same ; the results we are going to show are not an artifact of the rescaling.

Equation (D.2.2) is now easy to interpret with the physical picture in mind. When  $\gamma$  is small, *i.e.* when the rate at which information is extracted is negligible compared to the jump rate, the evolution is dominated by the drift term which tends to drag the probability to 1/2, that is to complete ignorance. When  $\gamma$  is large, the noise term dominates and  $Q_t$  tends to be attracted to the fixed points of the diffusion, 0 and 1, *i.e.* perfect certainty. This intuition is largely confirmed by a direct numerical simulation of the evolution (see Fig. D.2). However, it misses an important aspect of the fluctuations.

The numerical simulations of Fig. D.2 show that our estimate  $Q_t$  indeed undergoes jumps mirroring those of  $R_t$  when  $\gamma$  is large. What is more surprising is the fact that the sharp fluctuations around the plateaus do not disappear for large  $\gamma$  as one would naively expect. They become sharper and sharper but their statistics do converge to a limit. These remaining net fluctuations, which become instantaneous when  $\gamma \rightarrow \infty$ , are what we call *spikes*. Spikes can be characterized by the following proposition :

**Proposition.** *In a time interval  $[0, T]$  when  $R_t = 0$ , the probability to have  $N$  spikes with maxima in the domain  $D \subset [0, T] \times [0, 1[$  is a Poisson variable, *i.e.*  $\mathbb{P}(N) = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu}$  with intensity  $\mu = \int_D d\nu$ . The measure  $d\nu$  is given by :*

$$d\nu = \frac{\tilde{\lambda}}{Q^2} dQ dt$$

The situation is completely symmetric when  $R_t = 1$ , the spikes then start from the top of the graph, *i.e.*  $Q = 1$  and go down ; in this case  $d\nu = \frac{\tilde{\lambda}}{(1-Q)^2} dQ dt$ . The proof is provided in appendix D.7.1 and extensively uses the fact that when  $\gamma$  is large,  $Q_t$  is *almost* a continuous martingale, *i.e.* a Brownian motion up to a time re-parametrization [20, 21].

---

1. Incidentally, eq. (D.2.2) can also be seen as describing the continuous energy monitoring of a qubit coupled to a thermal bath at infinite temperature (see *e.g.* [86]), in that case,  $Q_t$  is the probability to find the qubit in the ground state). This means that the features of this classical toy model can also be displayed by genuinely quantum systems.

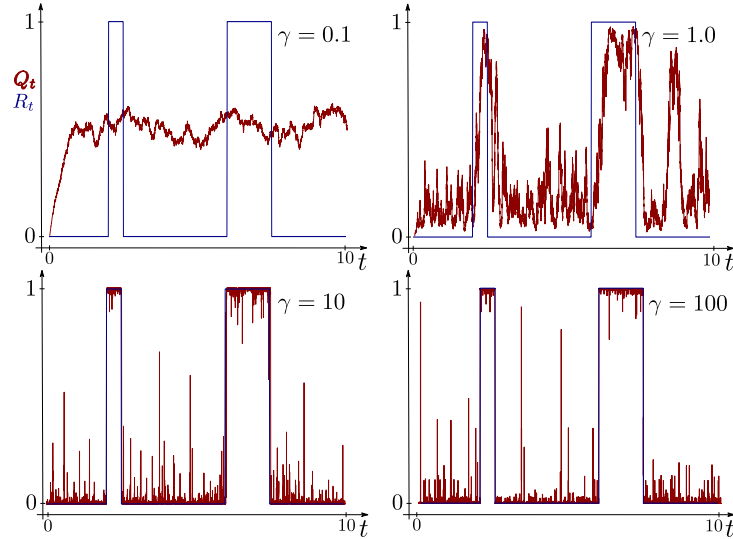


FIGURE D.2 – Emergence of the spikes :  $Q_t$  for various choices of  $\gamma$ . Top-left  $\sqrt{\gamma} = 0.1$ , the information flow is weak and  $Q_t$  fluctuates around  $1/2$ . As  $\gamma$  increases,  $Q_t$  gets closer to  $R_t$  but sharp excursions persist. No qualitative difference can be seen with the naked eye between  $\sqrt{\gamma} = 100$  and  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

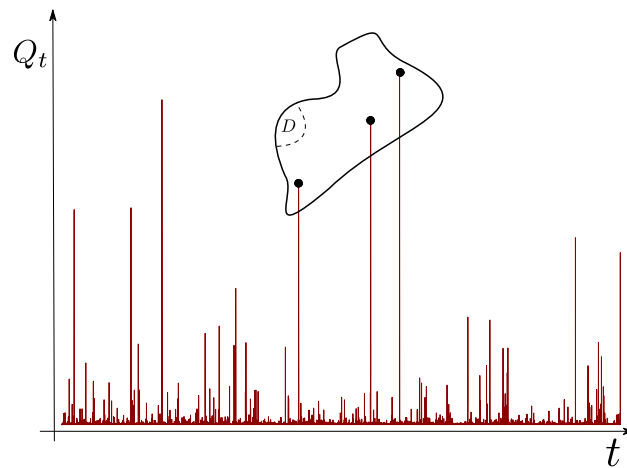


FIGURE D.3 – Details of the spikes in an interval where  $R_t = 0$ . The number of spikes (here 3) in the domain  $D$  is quantified by the proposition.

Let us remark a few straightforward consequences of the proposition. Spikes are scale invariant fluctuations. More precisely, Fig. D.3 would look exactly the same with the transformations  $t \rightarrow At$  and  $Q \rightarrow AQ$ . There are consequently infinitely many small spikes (but a finite number of spikes bigger than  $Q_0$  for  $Q_0 > 0$ ).

This phenomenon of spikes could be thought to have no interesting practical consequences, after all as there is only a countable number of punctual spikes in the  $\gamma \rightarrow +\infty$  limit, the simple jump process with the spikes removed is almost everywhere equal to the one dressed with the full fluctuations. However, if we look at quantities like arrival times, taking into account the spikes is fundamental. The probability that  $Q_t$  reaches a region of relative uncertainty, say  $0.4 < Q_t < 0.6$ , in a given time interval has a dramatically higher value once the spikes are taken into account. As a more concrete example, consider two consecutive jumps of  $R$  and the (unknown) random times  $t_1$  and  $t_2$  when they happen. Then we can see from the proposition that, in the interval  $]t_1, t_2[$ , we have 50% chance to make at least one wrong prediction of  $R_t$  using  $Q_t$ , *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\exists t, |Q_t - R_t| > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

even though strictly nothing physical happens inside this interval and the measurement rate is infinite! Had we naively taken the large  $\gamma$  limit we would have imagined this probability to be 0.

However as useful as the fine description of the spikes is in practice, it has no dramatic fundamental implications. No *physical* quantity is intrinsically "spiky", only our information on the particle position behaves in such a peculiar way. Had we considered a forward-backward (or smoothed) estimate, *i.e.* had we used all the photos to *retrodict* the position of the particle at an earlier time, the estimate  $Q_t^s = \mathbb{E}[R_t | \delta_u, u \in \mathbb{R}]$  would have been more regular and notably spikeless (see Fig. D.4). At most this means that the (filtered) Bayesian estimate of a quantity does not need to behave like the quantity itself even in the limit where the estimate is naively expected to be faithful. The emergence of a similar phenomenon in the quantum realm, where no underlying spikeless jump process can simply be invoked, should be more surprising.

### D.3 The quantum realm

A good and widely studied quantum analog of our classical toy model is the continuous monitoring of a quantum system. For simplicity we will only treat the case of a 2-level quantum system but conjecture that the phenomenon we see is ubiquitous in the sense that any continuously measured quantum system would display similar fluctuations.

Let us consider the continuous monitoring of a qubit (e.g. a spin 1/2 in a magnetic field). In analogy with the classical toy model, this can be seen as an iteration of weak measurements on a qubit [49, 217, 218, 7] carried out via repeated interactions with probes. In such a setting a probe interacts for some time with the system before being measured by a perfect detector (see Fig. D.5). Because of the entanglement between the probe and the system, this measurement result gives some information on the system state. The probe consequently plays exactly the same role as the blurry picture of the classical case. Using the standard rules of quantum mechanics, it is straightforward to

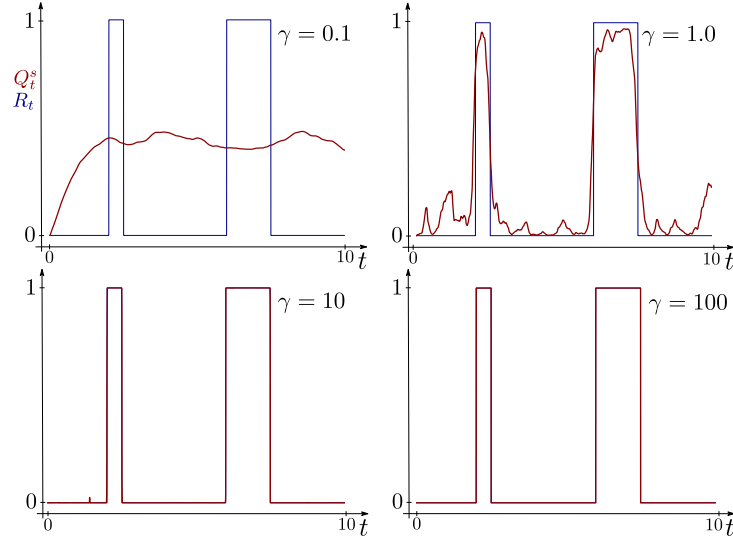


FIGURE D.4 – The smoothed estimate  $Q_t^s = \mathbb{E}[R_t | \delta_u, u \in \mathbb{R}]$  of  $R_t$  shows no spikes.

get the evolution of the system state  $\rho$  as a function of time knowing the initial state of the probes, the unitary system-probe interaction  $U_{int}$  and the measurement results. In what follows, we will go directly to the continuous limit of this scheme (*i.e.* quickly repeated weak interactions) but again, the results qualitatively hold in the discrete case.

We suppose that we continuously monitor the qubit in a basis different<sup>2</sup> from its energy basis (e.g. we continuously measure a spin in a direction orthogonal to that of the external magnetic field). Using continuous quantum measurement theory [36, 37, 40, 215, 39, 216] one can get a stochastic master equation (SME) for the evolution of the density matrix  $\rho_t$  of the qubit (with  $\hbar = 1$ ) :

$$d\rho_t = -i\frac{\Omega}{2}[\sigma_y, \rho_t]dt - \frac{\gamma}{2}[\sigma_z, [\sigma_z, \rho_t]]dt + \sqrt{\gamma}(\sigma_z\rho_t + \rho_t\sigma_z - 2\text{tr}[\sigma_z\rho_t])dW_t,$$

where we have considered for simplicity a measurement along  $Oz$  and a magnetic field along  $Oy$ . The first term corresponds to the unitary part of the system evolution and the two other terms correspond respectively to the decoherence and localization (or collapse) induced by the measurement scheme. In this setting, the analogous  $Y_t$  of the integrated information from the photos  $\sum_{k<t} \delta_k$ , often called the *signal*, verifies  $dY_t = 2\sqrt{\gamma}\text{tr}[\sigma_z\rho_t]dt + dW_t$ . To avoid a complete Zeno freezing of the evolution, which will undoubtedly happen if we increase the measurement rate carelessly, we increase the magnetic field proportionally to the measurement rate, *i.e.* we take  $\Omega = \sqrt{\gamma}\omega$  with  $\omega$  constant. As before we are interested in the quantity  $Q_t = \langle + | {}_z\rho_t | + \rangle_z$  the probability that the qubit is found in the state  $|+\rangle_z$ .

2. This is necessary to avoid a trivial evolution, for if the measurement operator and the Hamiltonian commute, the density matrix will simply be progressively projected on a measurement pointer state with no subsequent evolution.

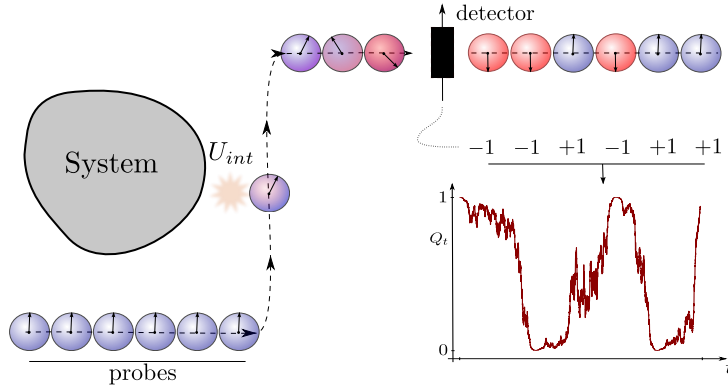


FIGURE D.5 – Repeated interaction scheme. A collection of probes, typically two level systems, successively interact unitarily with the system before being projectively measured by a perfect detector. The probability  $Q_t = \langle \psi | \rho_t | \psi \rangle$  for the system to be in some state  $|\psi\rangle$  can be computed using the measurement results and the standard rules of quantum mechanics. Notice the analogy with the classical scheme of Fig. D.1. In this setting, the randomness in the evolution does not come from experimental imperfections but is purely of quantum origin.

The direct numerical simulations of eq. (D.3) for various values of  $\gamma$  are shown on Fig. D.6. As before, we see the emergence of (quantum) *spikes* around a jumpy trajectory which –at first sight– seem to have the same characteristic than that of Fig. D.2. Actually, the analogy is not just qualitative and the spikes can be shown to be characterized by the same Poisson process as before, this time with measure :

$$d\nu = \frac{\omega^2}{Q^2} dQ dt$$

The proof uses essentially the same method as before (see appendix D.7.2).

With the help of numerical simulations, we conjecture that the phenomenon of spikes is ubiquitous in tightly monitored quantum systems. However, it is less clear to see along which direction of the density operator space the spikes should occur in a more general setting. This is a question which should be studied further and a fully rigorous proof of the generality of the spikes, completed by their precise characterization, would be gripping.

## D.4 Discussion

We have shown that the phenomenon of *spikes* could be understood as a pure artifact of Bayesian filtering in a classical toy model where nothing physical (in that case the particle classical position  $R_t$ ) is spiky. However, the interpretation of the very same phenomenon in the quantum case is more problematic as we have no good underlying spikeless jump process. Moreover, in the case we have considered, the quantum state

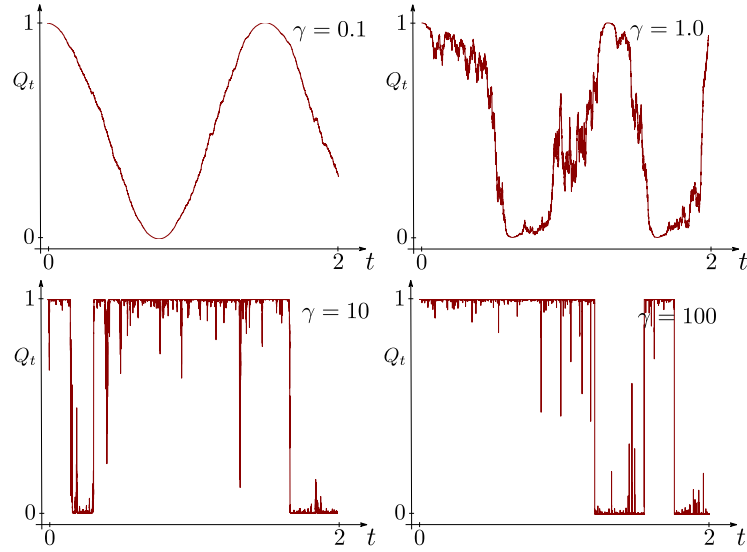


FIGURE D.6 – Emergence of the spikes :  $Q_t$  for various choices of  $\gamma$ . Again, no qualitative difference can be seen with the naked eye between  $\sqrt{\gamma} = 100$  and  $\gamma \rightarrow +\infty$ . We take  $\Omega = 2 + \sqrt{\gamma}$ , *i.e.*  $\Omega$  not linear in  $\gamma$  to keep a non trivial evolution (some Rabi oscillations) at  $\gamma \simeq 0$ . Notice that this time there is no underlying jump process  $R_t$ .

stays *pure*<sup>3</sup> during the whole evolution making the spikes difficult to dismiss as a spurious consequence of ignorance. One could still argue that nothing physical is spiky in our quantum model by resorting to a purely epistemic interpretation of the quantum state but this point of view creates other difficulties [62].

One can nevertheless learn from the classical situation. For the classical toy model, we have claimed that using smoothing instead of filtering would remove the spikes. Different quantum analogs of smoothing have been proposed in the literature [226, 150, 154]. In [150], the authors define the *past quantum state* which is a quantum equivalent of smoothing rooted in the weak value formalism. The quantities computed with the *past quantum state* are more regular than  $\rho_t$  and it can be checked numerically that they are spikeless which explains the popularity of the procedure. However because it is based on the weak value, this formalism suffers from the same difficulties of interpretation [149]. In an other proposal [154], the authors define a procedure called *quantum state smoothing* which seems more appealing at first because it keeps the usual interpretation of the quantum state. However, it is of no help in our specific situation as it keeps a pure quantum state unchanged and can only be used to recover purity. The different proposals for a quantum equivalent of smoothing have various advantages and drawbacks and their ability to trim the spikes could give a quantitative criterion to compare them.

Spikes could also shed some light on the foundations of quantum mechanics. In objective collapse theories [72], the primitive ontology [143] –*i.e.* the *stuff* in 3d space– is

3. This can be seen by computing  $d(\det \rho_t)$  using Itô formula and noticing that  $\det \rho_t$  is a supermartingale converging exponentially fast to 0 so that the evolution purifies the state. A general proof, valid in arbitrary dimension, is provided for example in [225]



often derived directly from the quantum state via a quantum average of the mass density. This is done most of the time for Continuous Spontaneous Localization (CSL) and sometimes for Ghirardi-Rimini-Weber (GRW) theory [46] (called in that case GRWm [227, 228]). In these theories, if one considers a particle in a deep double-well potential whose position is continuously and strongly monitored, the effective equation describing the system density matrix in the basis  $\{|right\ well\rangle, |left\ well\rangle\}$  will be exactly eq. (D.3). In such a setting, the spikes will correspond to actual sharp fluctuations of the mass density, *i.e.* fluctuations of matter, thus making the primitive ontology a bit puzzling. An other possibility, advocated *e.g.* in [229] consists in basing the primitive ontology on the *signal* (in this article  $Y_t$ ) as it is sometimes done for GRW with the flash ontology (GRWf). It is interesting to see that the spikes do not show up in the signal as they are hidden by the noise. Indeed, in our simplified example,  $dY_t = 2\sqrt{\gamma}\text{tr}[\sigma_z\rho_t]dt + dW_t$  so that the spiky character of  $\rho_t$  disappears<sup>4</sup> after integration even for large  $\gamma$ . Spikes consequently give another relevant criterion to compare the different propositions of primitive ontology for collapse models.

A last interesting and fundamental problem is the observation of spikes in experiments. One could look at experiments of repeated interactions as [16, 17]. Provided no averaging is applied to the measurement results, one can reconstruct the spikes without problems. In such a setting, spikes have already been observed *qualitatively* but a precise verification of the quantitative agreement with our model is still lacking<sup>5</sup>.

## D.5 Conclusion

We have shown that the filtered estimate of the position of a continuously monitored classical particle showed sharp fluctuations, *spikes*, unrelated to the real physical behavior of the system. Albeit surprising, this finding could simply be understood as an artifact of a Bayesian updating. We have then shown that a similar phenomenon could be observed in 2-level quantum systems and conjectured that it were actually ubiquitous, showing up in any quantum system of arbitrary finite dimension. In the quantum realm, spikes have no simple explanation and remain a puzzling phenomenon. Nevertheless, they can be helpful to discriminate between different proposals of quantum smoothing and to shed some light on the problem of the choice of primitive ontology in dynamical reduction models. From a mathematical point of view, there is still some work to be done to clarify the status of spikes in higher dimension. A precise experimental verification of the spike statistics is also needed. Eventually, a better intuitive understanding of the spikes in the quantum case could make it a useful concept in quantum foundations.

---

4. The numerical verification of this statement has been done in [8], admittedly in the different context of open quantum random walks.

5. Mostly because spikes have often been mistaken for experimental errors in need for a fix

## D.6 Technical complement 1 : Continuous limit of the toy model

In this appendix, we provide a physicist proof of equation (D.2.2) of the main text, which is the limit of equation (D.2.1) when  $\lambda$  and  $\varepsilon$  are small. As we know that  $\lambda$  will scale as  $dt$  and  $\varepsilon$  as  $\sqrt{dt}$ , we expand equation (D.2.1) up to order  $dt$  by keeping only terms of order  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  and  $\lambda$ . This gives :

$$Q_{n+1} - Q_n \simeq \lambda(1 - Q_n) - \lambda Q_n + 2\varepsilon Q_n(1 - Q_n)\delta_{n+1} - 2\varepsilon^2 Q_n(1 - Q_n)(2Q_n - 1)$$

We now divide time  $t$  in  $m$  intervals  $dt$  each of them divided in  $l$  even smaller intervals  $\delta t$ , *i.e.*  $t = n\delta t = ml\delta t = mdt$ . In what follow, both  $l$  and  $m$  will be large. We introduce  $dQ_t = Q_{m(l+1)} - Q_{ml}$  and  $dX_t = X_{(m+1)l} - X_{ml} = \sum_{k=ml}^{(m+1)l} \delta_k \sqrt{\delta t}$  and recall that

$$\varepsilon = \sqrt{\gamma}\sqrt{\delta t}/2, \quad \lambda = \tilde{\lambda}\delta t/2,$$

summing  $l$  times equation (D.6) gives :

$$dQ_t \simeq \tilde{\lambda}\left(\frac{1}{2} - Q_t\right)dt + \sqrt{\gamma}Q_t(1 - Q_t)\left(dX_t - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}(2Q_t - 1)dt\right)$$

When  $l$  is large with  $dt$  kept small,  $dX_t$  is an (infinitesimal) Gaussian random variable as a sum of independent increments with (almost) the same law and equation (D.6) becomes a stochastic differential equation. We only need to compute the mean and variance of the r.h.s of equation (D.6) to rewrite it in the Itô form.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(dX_t | \{\delta_u\}_{u \leq t}) &\simeq \frac{\sqrt{\gamma}}{2}(2Q_t - 1)l\delta t = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}(2Q_t - 1)dt \\ \mathbb{E}(dX_t^2 | \{\delta_u\}_{u \leq t}) &\simeq l\delta t = dt \end{aligned}$$

Which means that  $dX_t = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}(2Q_t - 1)dt + dW_t$  where  $W_t$  is a Wiener process. Eventually we get :

$$dQ_t = \tilde{\lambda}\left(\frac{1}{2} - Q_t\right)dt + \sqrt{\gamma}Q_t(1 - Q_t)dW_t,$$

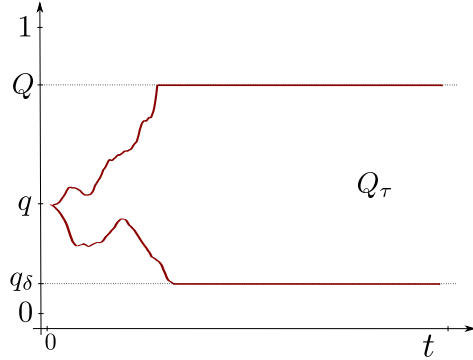
Which is what we have claimed.

## D.7 Technical complement 2 : Proof of the emergence of the spikes

In this appendix we provide an intuitive proof of the emergence of the spikes for the classical toy model and for the continuously monitored qubit.

### D.7.1 Case of the toy model

The basic ingredients are the fact that when  $\gamma$  is large,  $Q_t$  is *almost* a martingale and the fact that stopped martingale, *i.e.* a martingale conditioned on stopping at a

FIGURE D.7 – Two trajectories of  $Q_\tau$  starting from  $q$ .

predetermined event, is still a martingale. We will focus on the spikes starting from  $Q = 0$  (the situation is the same for  $Q = 1$ ). We will compute the statistics of the maximum reached by  $Q_t$ , starting from  $q$  close to 0 at  $t=0$ , before it reaches  $q_\delta \ll q$ . In what follows we will consequently have the hierarchy :

$$1 > q \gg q_\delta \gg \gamma^{-1}\tilde{\lambda}$$

We consider the stopping time  $\tau$  which is a random variable such that  $\tau = t$  as long as  $Q_t$  does not reach either  $q_\delta$  or  $Q$  and  $\tau = t_{\text{reach}}$  after  $Q_t$  reached  $q_\delta$  or  $Q$  at time  $t = t_{\text{reach}}$ . Because  $1 \gg q_\delta \gg \gamma^{-1}\tilde{\lambda}$ , we see from equation (D.2.2) that  $Q_t$  is *almost* a martingale, *i.e.* the drift term is much smaller than the noise term. Probability theory now tells us that  $Q_\tau$  (see Fig. D.7) is also a martingale which gives :

$$\mathbb{E}(Q_\tau | Q_0 = q) = q$$

But the direct computation of this expected value for  $t$  large gives :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q_\tau | Q_0 = q) &= \mathbb{P}(Q_\tau = Q | Q_0 = q)Q \\ &\quad + \mathbb{P}(Q_\tau = q_\delta | Q_0 = q)q_\delta \end{aligned}$$

which gives :  $\mathbb{P}(Q_\tau = Q | Q_0 = q) \simeq \frac{q}{Q}$ . Something which we can rewrite :

$$\mathbb{P}\left(\text{Max}_{t, \forall u < t, Q_u > q_\delta} (Q_t) > Q | Q_0 = q\right) = \frac{q}{Q}$$

Or eventually in differential form :

$$d\mathbb{P}(\text{Max}(Q_t) = Q | Q_0 = q) = q \left( \frac{dQ}{Q^2} + \delta(1 - Q)dQ \right)$$

This gives us the  $1/Q^2$  dependency in equation (8). Notice also the Dirac mass, corresponding to complete jumps, that comes from the fact that

$$\mathbb{P}\left(\text{Max}_{t, \forall u < t, Q_u > q_\delta} (Q_t) \geq 1 | Q_0 = q\right) = q \neq 0.$$

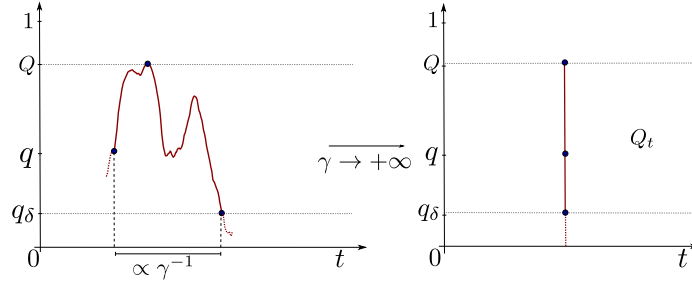


FIGURE D.8 – On the left, a trajectory starting from  $q$ , going up to  $Q$  and eventually going down below  $q_\delta$ . In the large  $\gamma$  limit, this whole trajectory is followed almost instantaneously and looks like a single vertical spike (shown on the right).

This equation is an equation for a conditioned probability and thus only gives us a ratio of probabilities, we still need to find the normalisation. This is naively given by the rate at which  $Q_t$  reaches again  $q$  after reaching  $q_\delta$ , *i.e.* to how often  $Q_t$  gets to "try" to do a large excursion.

We first have to notice that an excursion, *i.e.* starting from  $q$ , reaching a maximum  $Q$  and going below  $q_\delta$ , takes an infinitely small amount of time in the large  $\gamma$  limit. This simply comes from the fact that the dominant martingale term in equation (D.2.2) is independent from  $\gamma$  once we do the rescaling  $u = \gamma t : dX_u = Q_u(1 - Q_u)dW_u$ . This means that the typical time scale of an excursion is proportional to  $\gamma^{-1}$ , hence that excursions are instantaneous in the large  $\gamma$  limit (which is why we now call them *spikes*). What equation (D.7.1) actually does in this context is giving us the probability that a spike higher than  $q$  has a total height  $Q$ . In an interval  $dt$  we know just one thing, we know that the probability to reach  $Q \simeq 1$ , *i.e.* the probability to do a complete jump, is  $\tilde{\lambda}dt$ . The probability that a spike higher than  $q$  reaches  $Q = 1$  is simply  $q$ . This means that the probability to have a spike higher than  $q$  in an interval  $dt$  is  $q^{-1}\tilde{\lambda}dt$ , which provides the normalisation we wanted<sup>6</sup>. Eventually, if we specify that we are on an interval without jumps to remove the Dirac mass, we get :

$$d\mathbb{P}(\text{Max}(Q_t) = Q) = \tilde{\lambda}dt \frac{dQ}{Q^2}$$

That is, during an infinitesimal time interval  $dt$ , the probability that there is a spike of maximum  $Q$  up to  $dQ$  is  $\tilde{\lambda}dt dQ/Q^2$ . As the spikes are independent from one another, this gives a Poissonian probability  $\mathbb{P}(N)$  to have  $N$  spikes in any domain  $D$  :

$$\mathbb{P}(N) = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu},$$

with  $\mu = \int_D \frac{\tilde{\lambda}}{Q^2} dt dQ$ , which is what we had claimed.

6. We use the fact that as the probability to reach  $q$  is infinitesimal, the probability to reach it twice or more is negligible

### D.7.2 Case of the qubit

The case of the qubit can be solved in the same way. Indeed, expanding equation (9) gives the following equation for  $Q_t = \langle +|_z \rho_t |+\rangle_z$  and  $Y_t = \sqrt{\gamma} \langle +|_z \rho_t |-\rangle_z$  :

$$\begin{aligned} dQ_t &= -\omega Y_t dt + 4\sqrt{\gamma} Q_t(1 - Q_t) dW_t \\ dY_t &= \gamma [\omega(2Q_t - 1) - 2Y_t] dt + \gamma Y_t(1 - 2Q_t) dW_t \end{aligned}$$

We would like to use the same reasoning as before, *i.e.* say that  $Q_t$  is almost a martingale. In order to do that, we have to show first that  $Y_t$  is of order 0 in  $\gamma$ . This is indeed the case : when  $\gamma$  is large,  $Q_t$  is typically close to 0 or 1. As before we will consider the case where  $Q_t$  is close to 0. In that case, and if we rescale time by taking  $u = \gamma t$  we have :

$$dY_u \simeq [-\omega - 2Y_u] du + Y_u dW_u$$

This means that the average of  $Y$ ,  $\bar{Y}_u$ , verifies, the ordinary differential equation  $\partial_u \bar{Y}_u = [-\omega - 2\bar{Y}_u]$ . When  $\gamma$  is large,  $u$  flows infinitely fast so that we reach the stationary value of  $\bar{Y}$  instantaneously and  $\bar{Y}_u \simeq \frac{-1}{2\omega}$ . This means that the term  $\omega Y_t$  is typically of order 0 in  $\gamma$  and thus negligible compared to the noise term in equation (D.7.2). This shows that, as before,  $Q_t$  is almost a martingale in the large  $\gamma$  limit (and is the same martingale as before) which is the only thing that was used in the first part of the previous proof. What differs in this setting is the normalisation argument of the second part. It has been proved in [5], and it can be guessed by dimensional analysis, that the rate of (complete) jumps in the large  $\gamma$  limit is  $\omega^2$  in the case we now consider. This means that in the previous normalisation argument  $\tilde{\lambda} dt$  simply needs to be replaced by  $\omega^2 dt$  which provides the formula (10) we had put forward.

# Annexe E

## Zoom sur les trajectoires quantiques

L'appendice qui suit est directement tiré de l'article *Zooming in on quantum trajectories* [1] écrit par M. Bauer, D. Bernard et l'auteur et publié dans *Journal of Physics A Letters*. Seules quelques modifications de notation ont été effectuées pour éviter de dérouter le lecteur et cet appendice peut être lu sans référence au reste. On y montre qu'en reparamétrant le temps de manière dynamique, il est possible de comprendre les sauts et échardes quantiques de manière immédiate. On développe un formalisme qui permet de faire des calculs directement à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  et on l'applique sur un exemple simple.

**Abstract :** We propose to use the effect of measurements instead of their number to study the time evolution of quantum systems under monitoring. This time redefinition acts like a microscope which blows up the inner details of seemingly instantaneous transitions like quantum jumps. In the simple example of a continuously monitored qubit coupled to a heat bath, we show that this procedure provides well defined and simple evolution equations in an otherwise singular strong monitoring limit. We show that there exists anomalous observable localised on sharp transitions which can only be resolved with our new effective time. We apply our simplified description to study the competition between information extraction and dissipation in the evolution of the linear entropy. Finally, we show that the evolution of the new time as a function of the real time is closely related to a stable Lévy process of index  $1/2$ .

### E.1 Introduction

Quantum monitoring equations play a key role in modern theoretical quantum physics and are used widely in control [230, 231, 232], quantum information [89, 97, 98], and even foundations [72, 73]. They describe a system subjected to iterated or continuous measurements and can be used to treat a large variety of experimental setups e.g. in cavity QED [16, 233] and circuit QED [209, 210].

An interesting regime which has been explored recently [5] is that of “tight” monitoring, *i.e.* the limit when the measurement strength (or frequency) dominates the evolution. This regime is characterised by the emergence of quantum jumps similar to

what could be seen in early monitoring experiments [211, 212, 213] but with a richer and subtler structure in the fluctuations [4]. What makes this limit interesting is that it is expected to yield a finer description of Von Neuman measurements and quantum jumps. It is however difficult to study because the evolution equations become singular and ill-defined with infinitely sharp transitions when the monitoring tightness goes to infinity. In this article, we propose a time redefinition which allows to take the latter limit exactly at the evolution level without losing any information.

Although the rest of the article deals with an example of continuous quantum trajectory, let us introduce our idea in a discrete setting for simplicity. In the discrete case, quantum monitoring is simply a succession of (generalised) discrete measurements and evolution. After each measurement, the density matrix is updated conditionally on the result. The sequence of the system density matrices  $\{\rho_n\}$  after each measurement is a discrete quantum trajectory. If we suppose that the measurements are carried out regularly, the natural time to parametrise the evolution is simply proportional to the number of measurements  $n$ . Here, we propose a new parametrisation –different from the real physical time– proportional to the *effects* of the measurements on the system :

$$t_n := \sum_{1 \leq m \leq n} \text{Tr} [(\rho_m - \rho_{m-1})^2], \quad (\text{E.1.1})$$

which is simply the quadratic variation of the density matrix<sup>1</sup>. Because this new effective time will flow more when the system evolves abruptly, it will resolve the inner structure of sharp transitions. Notice that as  $\rho_n$  is a function of the measurement results,  $t_n$  is a quantity which can be computed from standard experimental data.

Let us be more concrete and specify the procedure in a simple example of evolution with discrete measurements. We consider a two-level system coupled to a thermal bath with a density matrix  $\rho_s$  obeying :

$$\partial_s \rho_s = \mathcal{L}(\rho_s)$$

where  $\mathcal{L}$  is a Lindblad operator of the form :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) = & \lambda p \left( \sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right) \\ & + \lambda (1-p) \left( \sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho \} \right) \end{aligned}$$

$\lambda$  is interpreted as the thermal relaxation rate and  $p$  the average population of the ground state at equilibrium. Every  $\Delta s$ , the system energy is weakly measured, *i.e.* it is subjected to the discrete random map :

$$\rho_{n\Delta s^+} = \frac{B_{\pm} \rho_{n\Delta s^-} B_{\pm}^{\dagger}}{\text{Tr} [B_{\pm} \rho_{n\Delta s^-} B_{\pm}^{\dagger}]}$$

with probability  $\text{Tr} [B_{\pm} \rho_{n\Delta s^-} B_{\pm}^{\dagger}]$  where

$$B_{\pm} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 \pm \varepsilon} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 \mp \varepsilon} \end{pmatrix}$$

---

1. Other prescriptions with the same quadratic scaling are possible, e.g.  $\Delta t_n = \text{Tr} [(D(\rho_n) - D(\rho_{n-1}))^2]$  where  $D(\cdot)$  denotes the diagonal part of a matrix in the measurement pointer basis.

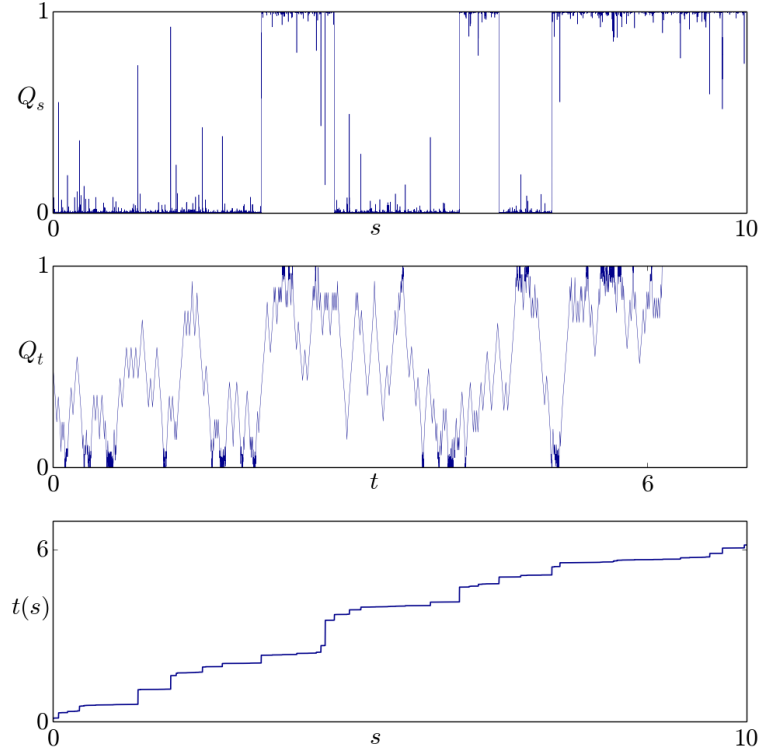


FIGURE E.1 – *Discrete quantum trajectories in real and effective time. Top : The evolution of the ground state probability  $Q$  in real time  $s$  shows sharp jumps and spikes. Center : The evolution of  $Q$  in effective time  $t$  allows to resolve what happens outside the boundaries 0 and 1, the details are unfolded. Bottom : Effective time as a function of the real time. The plots are shown for the same realisation with  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\Delta s = 10^{-5}$ ,  $p = 0.5$  and  $\lambda = 1$ .*

with  $\varepsilon \in ]0, 1[$  coding for the measurement strength and  $B_+^\dagger B_+ + B_-^\dagger B_- = 1$ . For a fixed value of  $\varepsilon \neq 1$ , when the real time  $\Delta s$  between two measurements goes to zero, the fast weak measurements should behave like a strong measurement and it is this limit we are interested in. Numerical simulations for  $Q = \langle 0|\rho|0\rangle$  are shown in Fig. E.1. They shows –at least visually– that the prescription of eq. (E.1.1) indeed allows to blow up the details of the sharp fluctuations. In the continuous setting, the reparametrisation in effective time will have the extra advantage of yielding simpler equations which can be analysed in detail.

## E.2 Model

In this article, we will focus on one of the simplest instances of continuous quantum trajectory equations [36, 39, 14, 18] which contains the quintessential subtlety of the fast measurement limit while being analytically manageable (see e.g. [86]). It describes the continuous energy monitoring of a two-level system coupled in the same way as



before to a thermal bath and reads :

$$dQ_s = \lambda(p - Q_s) ds + \sqrt{\gamma} Q_s(1 - Q_s) dW_s, \quad (\text{E.2.1})$$

where again  $Q = \langle 0|\rho|0 \rangle$  is the probability to be in the ground state,  $s$  the real physical time and  $\gamma$  codes for the measurement rate, *i.e.* the rate at which information is extracted from the system. As in the discrete case,  $\lambda$  is the thermal relaxation rate and  $p$  the average population of the ground state at equilibrium. The stochastic process  $W_s$  is a Brownian motion which echoes the intrinsic quantum randomness of continuous measurements. Notice that we do not consider the non-diagonal coefficients of the density matrix because they have no effect on the probabilities in this model and are anyway exponentially suppressed. Our objective is to see what the limit of equation (E.2.1) is when  $\gamma \rightarrow +\infty$ , *i.e.* when the measurement strength becomes infinite.

The trajectories of equation (E.2.1) become very singular when  $\gamma \rightarrow +\infty$  with sharp jumps between plateaus decorated with instantaneous excursions dubbed *spikes* (see Fig. E.2)<sup>2</sup>. Although the stochastic differential equation (SDE) (E.2.1) in real time has no well defined limit when  $\gamma \rightarrow +\infty$ , the plot of the process heuristically has one in the sense that the extrema of the spikes are a sample of a  $\gamma$  independent Cox process. This limiting process can be studied directly as was done in [4] but the analysis with the effective time provides a cleaner derivation in addition with the discovery of an even finer anomalous<sup>3</sup> structure.

### E.3 Results

The effective time we are going to use to redefine the process is :

$$t(s) := \int_0^s (dQ_u)^2 = \gamma \int_0^s Q_u^2(1 - Q_u)^2 du,$$

which is the continuous analog of the prescription (E.1.1). With this effective time  $t$ , equation (E.2.1) becomes :

$$dQ_t = \frac{\lambda(p - Q_t)}{\gamma Q_t^2(1 - Q_t)^2} dt + dB_t, \quad (\text{E.3.1})$$

where  $B_t$  is a Brownian motion (as a function of  $t$ ) related to  $W_s$  by  $dB_t := \sqrt{\gamma} Q_s(1 - Q_s) dW_s$ . The crucial feature of the new evolution equation is that, for large  $\gamma$ , the first term is negligible as long as  $Q_t$  is not very close to 0 or 1. It is positive (resp. negative) when  $Q_t$  is close to 0 (resp. close to 1). Intuitively, this term will survive only

---

2. One can give a heuristic argument for the existence of spikes. Near a boundary say  $Q = 0$ ,  $dQ_s \simeq \lambda p ds + \sqrt{\gamma} Q_s dW_s$ . One can show that for large  $\gamma$ , this means that the distribution of  $Q$  is given by  $\mathbb{P}[Q < q] = e^{-2/(\gamma \lambda p q)}$  and that  $Q_{s+1/\gamma}$  is weakly correlated with  $Q_s$ . As a result, the maximum  $M_{a,b}$  of  $Q$  in an interval  $[a, b]$  has a distribution which can be approximated by  $\mathbb{P}[M_{a,b} < m] \simeq (e^{-2/(\gamma \lambda p m)})^{\gamma(b-a)}$ . The  $\gamma$  cancel out which means that excursions with height of order 0 (but vanishing width) persist in the limit : these are the spikes.

3. We borrow this terminology from quantum or statistical field theory and from fluid turbulence. For instance, observables linked to dissipative processes in Burgers' turbulence are localised on velocity shocks [234, 235, 236]. In a way similar to Burgers' turbulence, we can consider "anomalous observables" localised on spikes and jumps.

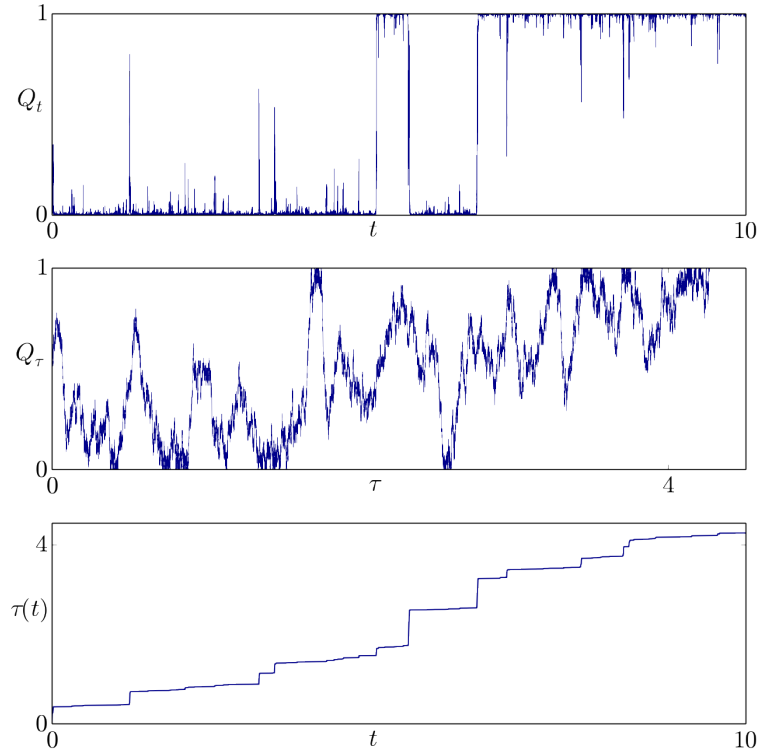


FIGURE E.2 – *Continuous quantum trajectories in real and effective time. Top : The evolution of the ground state probability  $Q$  in real time  $s$  shows sharp jumps and spikes. Center : The evolution of  $Q$  in effective time  $t$  looks like a reflected Brownian motion without sharp transitions. Bottom : Effective time as a function of the real time. The plots are shown for the same realisation with  $\gamma = 200$  (which looks like  $\gamma \rightarrow +\infty$ ),  $p = 0.5$  and  $\lambda = 1$ .*

as a boundary condition preventing  $Q$  from crossing 0 and 1 and  $Q_t$  will be a simple Brownian motion in the bulk  $]0, 1[$ .

**Proposition.** *When  $\gamma \rightarrow +\infty$  :*

- (i)  $Q_t$  is a Brownian motion reflected at 0 and 1.
- (ii) The linear time  $s$  can be expressed as a function of the effective time  $t$  :

$$s(t) = \frac{L_t}{\lambda p} + \frac{U_t}{\lambda(1-p)}$$

where  $L_t$  and  $U_t$  are the local times spent by  $Q_t$  respectively in 0 and 1.

For a Brownian like process  $X_t$ , the local time  $L_t$  at 0 is defined informally by  $L_t := \int_0^t dt' \delta(X_{t'})$ . More rigorously, it can be defined by introducing a mollifier  $\delta_\varepsilon$  of the Dirac distribution, e.g.  $\delta_\varepsilon(X) = \varepsilon^{-1} \mathbf{1}_{X \in [0, \varepsilon]}$ , and taking  $L_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t dt' \delta_\varepsilon(X_{t'})$ . Intuitively, the local time in 0 represents the rescaled time the process spends in 0.

Incidentally, this proposition gives a way to define jumps and spikes precisely in the infinite  $\gamma$  limit. A jump is simply a transition from  $Q = 0$  to  $Q = 1$  (resp. 1 to 0)

while a spike is a transition from  $Q = 0$  to  $Q = 0$  (resp. 1 to 1) through some finite value of  $Q$ . Both types of transitions are instantaneous in real time  $s$  but take a finite effective time  $t$ . This shows that a finer description is preserved by the effective time. The following proposition provides an example of such a finer quantity : the effective time itself.

**Corollary.** *The effective time description is strictly finer than the real time description.*

There exists anomalous quantities, *i.e.* quantities which can be computed in effective time but are hidden in the standard physical time description. For example, the effective times to go up or to go down a spike of height  $m$  are distributed with the same probability density  $\mathcal{P}_m(t)$  of Laplace transform :

$$\tilde{\mathcal{P}}_m(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} \mathcal{P}_m(t) dt = \frac{m\sqrt{2\sigma}}{\sinh m\sqrt{2\sigma}}$$

This means that the effective time is an *anomalous* observable in the sense that it is not determined entirely by the naive large  $\gamma$  limit in real time  $s$  which contains only discrete spikes and jumps. It has intrinsic fluctuations even when the sample of spikes of given height is fixed.

## E.4 Proofs

Let us start by looking precisely at what happens near the boundary  $Q = 0$  when  $\gamma \rightarrow +\infty$  (the boundary  $Q = 1$  can be treated in the same way). When  $Q$  is close to 0, equation (E.3.1) becomes :

$$dQ_t = \frac{\lambda p}{\gamma Q_t^2} dt + dB_t,$$

which reads in integral form :

$$Q_t = Q_0 + \int_0^t \frac{\lambda p}{\gamma Q_u^2} du + B_t. \quad (\text{E.4.1})$$

The integral is an increasing function of  $t$  which remains nearly constant on time intervals for which  $Q_u \gg \gamma^{-1/2}$ . Hence, when  $\gamma \rightarrow +\infty$ , this function only increases when  $Q_u = 0$ . The Skorokhod lemma [237, 238] is the key to understand precisely the large  $\gamma$  limit.

**Lemma** (Skorokhod). *Let  $b(t)$ ,  $t \in [0, +\infty[$  be a continuous function with  $b(0) = 0$ , and let  $x_0 \geq 0$ . There is a unique pair of continuous functions  $x(t)$ ,  $l(t)$ , for  $t \in [0, +\infty[$ , such that :*

- (i)  $x(0) = x_0$ , and  $x(t) \geq 0$  for  $t \in [0, +\infty[$ ,
- (ii)  $l(t)$  is non-decreasing,
- (iii)  $l(t)$  increases only at  $x(t) = 0$ , *i.e.*  $l(t)$  is constant on each interval where  $x(t) > 0$ ,
- (iv)  $x(t) = x_0 + l(t) + b(t)$  for  $t \in [0, +\infty[$ .

The solution is given by

$$l(t) := \max[0, -m(t) - x_0] \text{ and } x(t) := x_0 + b(t) + \max[0, -m(t) - x_0]$$

where  $m(t) := \min_{t' \leq t} b(t')$ .

Equation (E.4.1) is nearly a Skorokhod decomposition of the Brownian motion, *i.e.* with  $b(t) = B_t$  and  $x(t) = Q_t$ . We get a true Skorokhod decomposition when  $\gamma \rightarrow +\infty$  and the lemma guaranties the unicity of the solution. The fundamental trick is that the Skorokhod decomposition of the Brownian motion on  $[0, +\infty[$  is known independently and can be found through Tanaka's formula [88, 20] for the Ito derivative of the absolute value of a Brownian motion :

$$|\tilde{B}_t| = \int_0^t \text{sgn}(\tilde{B}_u) d\tilde{B}_u + L_t,$$

where  $\tilde{B}_u$  is a Brownian motion and  $L_t$  is the local time in 0 of this Brownian. But  $B_t = \int_0^t \text{sgn}(\tilde{B}_u) d\tilde{B}_u$  is also a Brownian motion so we can write :

$$|\tilde{B}_t| = B_t + L_t,$$

which, by unicity, is the infinite  $\gamma$  limit of equation (E.4.1) (up to the initial condition). We thus see that near  $Q = 0$ ,  $Q$  behaves like the absolute value of a Brownian motion and that :

$$\int_0^t \frac{\lambda p}{\gamma Q_u^2} du \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} L_t \quad (\text{E.4.2})$$

We can now get the connection between physical time and effective time. Near the boundary  $Q = 0$ ,  $dt = \gamma Q_s^2 ds$ . Inserting this change of variable in the l.h.s of (E.4.2) removes the  $\gamma$  and yields :

$$s(t) = \frac{L_t}{\lambda p} \quad (\text{E.4.3})$$

We can apply the same reasoning near the boundary  $Q = 1$  to get that  $Q_t$  is reflected by this boundary and that :

$$\int_0^t \frac{\lambda(1-p)}{\gamma(1-Q_u)^2} du \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} U_t$$

where  $U_t$  is the local time spent by  $Q_t$  in 1. Near this boundary the relation between physical and effective time can be found in the same way :

$$s(t) = \frac{U_t}{\lambda(1-p)}$$

Out of the two boundaries,  $L_t = U_t = 0$ , eq. (E.3.1) shows that  $Q_t$  is simply a Brownian motion and the physical time does not flow. Finally, we can put all the pieces together and we get that in the infinite  $\gamma$  limit,  $Q_t$  is a Brownian motion reflected in 0 and 1 or equivalently that  $Q_t$  verifies<sup>4</sup> :

$$Q_t = Q_0 + B_t + L_t - U_t$$

---

4. Such a decomposition could have also been obtained directly from a straightforward generalisation of Skorokhod's lemma in the strip  $[0, 1]$  instead of the open interval  $[0, +\infty[$ .

and the physical time is related to the effective time by :

$$s(t) = \frac{L_t}{\lambda p} + \frac{U_t}{\lambda(1-p)}$$

which is what we had claimed in the first proposition.

We may now prove the corollary using a standard result [20, 21] for Brownian excursions. The time  $t_1$  it takes for a Brownian motion starting from 0 to reach a maximum  $m$  and the time  $t_2$  it then needs to go back to zero are independent random variables distributed with the same law of Laplace transform :

$$\tilde{\mathcal{P}}_m(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} \mathcal{P}_m(t) dt = \frac{m\sqrt{2\sigma}}{\sinh m\sqrt{2\sigma}}$$

Restricted to  $m < 1$ , this is thus the probability distribution for the time it takes  $Q_t$  to reach a maximum  $m$  before eventually going back to 0. Because the real time does not flow in the bulk, this excursion looks instantaneous when parametrised with  $s$  – it is reduced to a spike – and its finer structure, in this example the quadratic variation, is lost.

## E.5 Applications

The formalism previously introduced can be applied to describe the evolution of physical quantities when  $\gamma \rightarrow +\infty$ . A simple example one can consider is the linear entropy<sup>5</sup>  $S^L = 1 - \text{tr}[\rho^2] = 2Q(1-Q)$ . In real time and for finite  $\gamma$ , Itô's formula gives :

$$\begin{aligned} dS_s^L &= 2\lambda(1-2Q_s)(p-Q_s) ds \\ &+ Q_s(1-Q_s) [2\sqrt{\gamma}(1-2Q_s)dW_s - 2\gamma Q_s(1-Q_s)ds] \end{aligned}$$

The first term codes for the effect of the thermal bath and the second for the effect of the information extraction, the latter always decreasing the linear entropy on average. When  $\gamma$  goes to infinity, the previous equation has no limit. Intuitively, in real time,  $Q$  is almost surely equal to 0 or 1 and the linear entropy is thus almost always equal to zero, all the interesting fluctuations being lost. The latter can be recovered in effective time. Indeed, in effective time, when  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $dQ_t = dB_t + dL_t - dU_t$ . Applying the Itô formula to  $S^L$  and noting that  $dL$  (resp.  $dU$ ) is only non zero when  $Q = 0$  (resp.  $Q = 1$ ) gives :

$$dS_t^L = 2(1-2Q_t) dB_t - 2dt + 2(dL_t + dU_t)$$

The effect of measurements appears clearly in the first two terms with a noise term and a deterministic negative drift. The effect of the bath is localised on the boundaries, *i.e.* on pure states, where it thus always increases the linear entropy. The details of this competition are simply lost when taking naively the  $\gamma \rightarrow +\infty$  limit in real time.

The proposition also shows an interesting link with Lévy processes. Near a boundary, say near 0, the real time is given as a function of the effective time by eq. (E.4.3).

---

5. Similar computations could be carried out with the Von Neumann entropy but the analysis would be mathematically much subtler because of the divergence of the logarithm in zero.

It is a standard result (see e.g. [238]) that  $t(s)$ , obtained by inverting the latter relation, is exactly the stable Lévy process with index  $1/2$  and scale  $\sqrt{2\lambda p}$ . This means that, for  $0 < s_1 < \dots < s_n$ ,

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\sigma_1 t(s_1) - \sigma_2 t((s_2) - t(s_1)) - \dots - \sigma_n (t(s_n) - t(s_{n-1}))} \right] = e^{-s_1 \lambda p \sqrt{2\sigma_1} - (s_2 - s_1) \lambda p \sqrt{2\sigma_2} - \dots - (s_n - s_{n-1}) \lambda p \sqrt{2\sigma_n}}.$$

In particular  $\mathbb{E}[e^{-\sigma t(s)}] = e^{-s \lambda p \sqrt{2\sigma}}$  whose Laplace transform can be inverted to get that the probability density of  $t(s)$  is

$$dP_s(t) = \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda p s}{t^{3/2}} e^{-\frac{(\lambda p s)^2}{2t}}.$$

Because of the presence of the second boundary, the description in terms of Lévy processes is correct only near a boundary, *i.e.* for small jumps of  $t$ . In general the process  $t$  is still infinitely divisible but not stable and its probability distribution has no simple closed form to our knowledge.

## E.6 Conclusion

We have argued that using a time proportional to the effect of measurements on the system provided a better parametrisation of the evolution in the limit of infinitely strong continuous measurements (infinite  $\gamma$  limit). We have illustrated the benefits of this approach on the example of a continuously monitored qubit coupled to a thermal reservoir. Actually, our result is general in two dimensions and the dissipative coupling via a bath could have been replaced by an appropriately rescaled<sup>6</sup> unitary evolution to yield the same process in the limit. In the infinite  $\gamma$  limit, we have obtained a very simple description in terms of a reflected Brownian motion, unravelling a much finer structure than one would have gotten taking naively the limit in real time. In the limit, most quantities of interest can be computed using standard results on Brownian excursions.

Although our prescription for the time redefinition is very general, we have only treated in detail an example in two dimensions and with continuous measurements. We believe the same ideas could be used in the discrete case of iterated weak measurement and in higher dimensions but specific examples of interest are still to be worked out. Eventually, the method we propose is general enough that it could have applications to the analysis of other SDE's in the strong noise limit, e.g. in population dynamics and turbulence.

---

6. If the dissipative coupling is replaced by a unitary evolution, the latter needs to be rescaled by  $\sqrt{\gamma}$  to counter the Zeno effect and get meaningful results in the limit.



# Annexe F

## Extraction optimale d'information d'un registre

L'appendice qui suit est directement tiré de l'article *Efficient readout of a register of qubits* [2] écrit par l'auteur et publié dans Physical Review A. Seules quelques modifications de notation ont été effectuées pour éviter de dérouter le lecteur et cet appendice peut être lu sans référence au reste. On y montre qu'il est possible de construire un schéma de contrôle permettant de mesurer un registre de  $n$  qubit aussi vite que les schémas optimaux précédemment mis en avant mais à un coût en ressources réduit. On obtient en effet un gain en vitesse d'ordre  $n$  par rapport à la mesure sans contrôle au prix d'un coût en mémoire linéaire en  $n$  alors que les schémas précédents avaient un coût  $\propto 2^n$ .

**Abstract** Recently, a series of articles by Combes *et al.* has shown that it was possible to greatly improve the measurement rate of a register of qubits for given detector resources by means of a clever feedback control scheme. However, this speed-up came at an exponential cost in terms of complexity and memory use. In this article, I propose a simple efficient algorithm –exponentially more frugal in memory and less complex to implement– which is asymptotically as fast. I use extensively the implicit classicality of the situation to provide a slightly more straightforward interpretation of the results. I compute the speed-up rates exactly in the case of the proposed model and in the case of the open-loop scheme of Combes *et al.* and prove that they indeed provide the same asymptotic speed-up.

### F.1 Introduction

Measuring a quantum system usually takes a non negligible amount of time. In some cases, this time turns out to be much larger than the typical timescales of the system dynamics, making *e.g.* system characterization and measurement-based control difficult. In the future, finite measurement times may also put constraints on the performance of quantum computers by limiting the speed at which large qubit register can be read out. Procedures that can reduce this measurement time while using the same



detector resources are thus interesting both from a theoretical and practical point of view.

In a recent series of articles [97, 96, 94, 98], Combes *et al.* have proposed control schemes which increase the measurement speed of qubit registers. The methods they proposed provide a speedup rate proportional to the register size. However, in contrast to the simple no control procedure, they require a prohibitive exponential amount of memory. In addition to their relative complexity, this latter limitation makes these new procedures implementable only for small qubit registers. It may have seemed that the use of an exponential complexity was the price to pay for this linear speed-up : “*You cannot have your cake and eat it*”. Fortunately, it turns out that this is not the case here. In this article we introduce a *quasi* open-loop scheme that gives a similar gain (with the same speed-up for large registers) while requiring much fewer control operations on the system ( $\simeq 2$  on average for typical parameter values, instead of theoretically infinitely many) and using only a linear amount of memory.

This article is structured as follows. We shall first introduce briefly in section F.2 the quantum trajectory formalism for the continuous measurement of a qubit and show that, at least in the case we consider, it is formally equivalent to a fully classical probabilistic model. We shall then review in section F.3 the previous approaches to rapid measurement before presenting our own model and deriving its properties in section F.4. We will then briefly review additional numerical results in F.5 and conclude by discussing possible improvements and extensions. The proof that the schemes provide the claimed speed-up rates are rather cumbersome and relegated to appendices.

## F.2 Continuous measurement of a register of (qu)bits

The standard way to describe the progressive measurement of a quantum system is by means of repeated interaction schemes. A quantum system is coupled briefly with a ancilla which is subsequently measured. As the interaction has entangled the two quantum systems, measuring the ancilla gives some information on the system of interest. The measured ancilla is then discarded and a new one is sent to interact with the system before being measured again. Iterating this procedure many times then gives a progressive measurement of the system in a basis which is fixed by the system-ancilla unitary interaction. In the limit where this procedure is repeated infinitely frequently with an infinitely small interaction time, one gets a continuous stochastic evolution for the system which is called a quantum trajectory [13, 14]. In what follows we will first give, without proof, the equations one gets for a continuously monitored qubit. Then we will show that, in the specific case we consider, the same equations can be derived from a much simpler classical model. This classical picture provides valuable insights and the reader unfamiliar with quantum trajectories is encouraged to take it as the starting point.

Using standard continuous quantum measurement theory [36, 37, 38, 40, 215, 39, 18], one can show that a qubit of density matrix  $\rho \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  subjected to the continuous measurement of the operator  $\sigma_z$  obeys the Stochastic Master Equation (SME) :

$$d\rho_t = 2\gamma\mathcal{D}[\sigma_z](\rho_t) dt + \sqrt{2\gamma}\mathcal{H}[\sigma_z](\rho_t) dW_t \quad (\text{F.2.1})$$

where  $\gamma$  denotes for the measurement strength,  $W_t$  is a Wiener process and we have used the standard notation from [18] :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[A](\rho) &= A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}(A^\dagger A\rho + \rho A^\dagger A) \\ \mathcal{H}[A](\rho) &= A\rho + \rho A^\dagger - \text{tr}[(A + A^\dagger)\rho]\rho\end{aligned}$$

The associated measurement signal, which is the continuous and weak equivalent of the (random) result from a Von Neumann measurement in an infinitesimal time interval  $[t, t + dt[$ , reads :

$$dY_t = 2\sqrt{2\gamma} \text{tr}(\sigma_z \rho_t) dt + dW_t \quad (\text{F.2.2})$$

In the absence of proper Hamiltonian for the qubit, it is easy to notice that the phases of the density matrix in the eigenbasis of  $\sigma_z$  are exponentially suppressed and have no back-action on the diagonal coefficients. Consequently, if we are only interested in the probabilities in the measurement basis, we can consider without lack of generality that we start from a diagonal density matrix. In that case, eq. (F.2.1) takes the simple form :

$$dp_t = 2\sqrt{2\gamma} p_t(1 - p_t) dW_t, \quad (\text{F.2.3})$$

where  $p_t$  is simply the probability to be in the state  $|0\rangle = |+\rangle_z$  at time  $t$  :  $p_t = \langle 0|\rho_t|0\rangle$ . This can be seen by writing  $\rho_t = p_t|0\rangle\langle 0| + (1 - p_t)|1\rangle\langle 1| + (u_t|0\rangle\langle 1| + h.c.)$ , injecting this expression in eq. (F.2.1), and noticing that  $p_t$  evolves independently of  $u_t$ . An interesting feature of eq. (F.2.3) is that it is completely classical. In the absence of phases, eq. (F.2.1) a quantum rewriting of an inherently classical model where a classical bit has a well defined value which is progressively revealed. Let us make this claim more precise by explicitly constructing the equivalent classical model.

Consider a classical bit that can take two values  $R = 0$  and  $R = 1$  (or equivalently  $+$  and  $-$ ). The bit state is fixed but unknown. An observer progressively extracts information about the bit state by doing a succession of imperfect classical measurements with results  $\delta_k = \pm 1$ . A measurement gives some, but not all, the information on the system state, more precisely we take :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\delta_k = 1|R = 0) &= \frac{1 + \varepsilon}{2} \\ \mathbb{P}(\delta_k = 1|R = 1) &= \frac{1 - \varepsilon}{2}\end{aligned}$$

which fully specifies how the information is extracted. The parameter  $\varepsilon \in ]0, 1[$  codes for the quality of the measurement and we will be interested in the very bad measurement limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We write  $\mathcal{F}_k = \sigma(\{\delta_i\}, i \leq k)$  the natural filtration associated to the stochastic process of the measurement results. In other words,  $\mathcal{F}_k$  corresponds to the intuitive notion of the information contained in the measurement records up to step  $k$  in exact analogy with what is done in quantum trajectory theory. The quantity of interest is the probability  $p_k = \mathbb{P}(R = 0|\mathcal{F}_k)$ , *i.e.* the probability for the bit state to be zero knowing the first  $k$  measurement results. A simple application of Bayes' rule gives the following update rule for  $p_k$  :

$$p_{k+1} = \frac{(1 + \varepsilon \delta_{k+1}) p_k}{(1 + 2\varepsilon \delta_{k+1})(p_k - 1/2)}. \quad (\text{F.2.4})$$

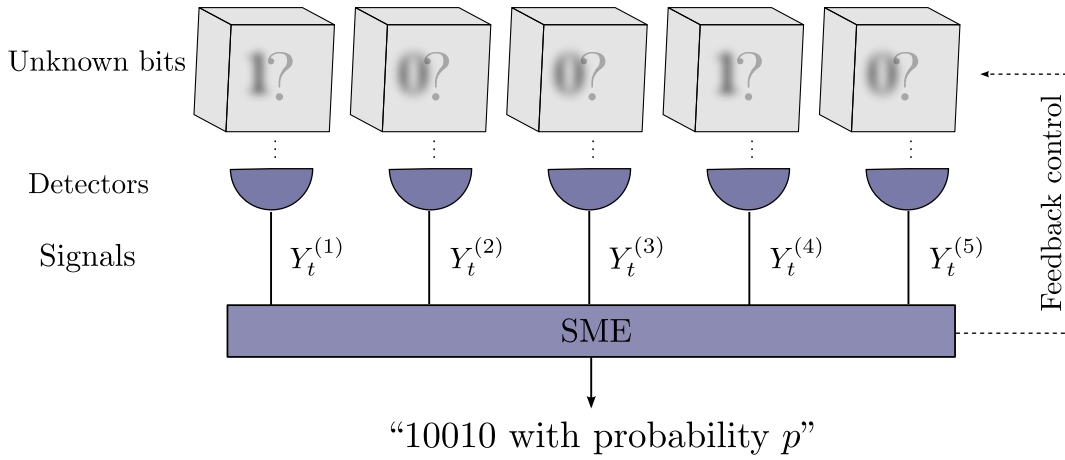


FIGURE F.1 – Schematics of the continuous measurement of a register of bits with feedback control. Each bit is measured by a dedicated detector and the corresponding signals allow for the reconstruction of the register probability through the use of the stochastic master equation (SME). The result can then be used to back-react on the register state in order to increase the convergence speed.

This discrete update rule becomes a set of stochastic differential equations in the appropriate weak measurement limit  $t = kdt$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\gamma dt}$  and  $Y_t = \sqrt{dt} \sum_{i=1}^k \delta_i$  (see *e.g.* [4]) :

$$\begin{aligned} dp_t &= 2\sqrt{2\gamma} p_t(1 - p_t) dW_t \\ dY_t &= 2\sqrt{2\gamma} (2p_t - 1) dt + dW_t \end{aligned}$$

Which is exactly the same set of equations as in the quantum case. From now on we will thus use the classical picture when it makes the proofs mathematically simpler or just more intuitive. The reader unfamiliar with continuous quantum measurement can also simply keep the previous classical picture in mind and stop being bothered with quantum mechanics, at least regarding the rest of this article.

Building upon the previous construction, it is easy to describe the continuous measurement of a register of  $n$  qubits (which, with the same argument as before, is equivalent to the continuous measurement of a register of classical bits). We assume that all the (qu)bits are measured independently by  $n$  detectors, the density matrix  $\rho \in (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^{\otimes n}$  verifies the SME :

$$d\rho_t = 2\gamma \sum_{i=1}^n \mathcal{D}[\sigma_z^{(i)}](\rho_t) dt + \sqrt{2\gamma} \sum_{i=1}^n \mathcal{H}[\sigma_z^{(i)}](\rho_t) dW_t^{(i)}$$

where :

$$\sigma_z^{(i)} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \sigma_z \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$$

with  $\sigma_z$  in  $i$ -th position. The Wiener processes are uncorrelated, *i.e.*  $dW_t^{(i)} dW_t^{(j)} =$

$\delta_{ij}dt$ . The signals  $Y^{(i)}$  associated to the detectors verify the same equation as before :

$$dY_t^{(i)} = 2\sqrt{2\gamma} \operatorname{tr}(\sigma_z^{(i)} \rho_t) dt + dW_t^{(i)}.$$

Everything can be rewritten with the help of a classical vocabulary in the same way as before. Assuming one has no prior information on the *true* state  $R \equiv (R^{(1)}, \dots, R^{(n)})$  of the classical register, all the bits can be considered independently in the sense that the total probability factorizes :

$$\mathbb{P} [R | \sigma(\mathcal{F}_t^{(1)}, \dots, \mathcal{F}_t^{(n)})] = \mathbb{P} [R^{(1)} | \mathcal{F}_t^{(1)}] \dots \mathbb{P} [R^{(n)} | \mathcal{F}_t^{(n)}].$$

It is only necessary to compute the evolution of the probabilities of the  $n$  single bit states, or say of the  $n$  marginals, to know the probability of a register configuration. Storing the  $2^n$  probabilities of all the register configurations is not needed in this simple measurement setup. This helpful property will unfortunately be lost for more elaborate measurement schemes.

To quantify the rate at which information is extracted as a function of time with the continuous measurement scheme, the (now standard) approach is to consider the log-infidelity  $\ln \Delta$  where  $\Delta = 1 - \lambda_0$  with  $\lambda_0$  the largest eigenvalue of  $\rho$  (or equivalently here, the probability of the most probable register configuration). In addition to its simplicity, this measure has conceptual advantages which are detailed in [97]. We shall not elaborate on this fact here and simply assume that the log-infidelity is a relevant measure of information extraction.

Writing the density matrix in a basis where the most probable state is noted  $\bar{0} = |00\dots 0\rangle$  and using Itô rule, one gets after a straightforward computation :

$$\mathbb{E} [d \ln \Delta_t] = -4\gamma \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} [(\sigma_z^{(i)} - \mathbb{1}) \rho_t]^2 \frac{(1 - \Delta_t)^2}{\Delta_t^2} dt \quad (\text{F.2.5})$$

In the simple case I consider here, it can be shown (see *e.g.* [98]) that for large time, *i.e.*  $t \gg \gamma^{-1}$  the previous expression simplifies to :

$$\mathbb{E} [d \ln \Delta_t] = -16\gamma dt$$

The objective of rapid measurement schemes is to improve this convergence rate while still using the same detector resources.

### F.3 Standard rapid measurement schemes

Before going into the details of the rapid measurement schemes, we should give an intuition of why some asymptotic speed-up is expected. Consider that the previous measurement scheme has been run for a while and look at the two most probable configurations. Being able to discriminate rapidly between these two configurations is what makes a measurement scheme fast, at least in a first approximation. However, because the probability of a configuration can be written as a product of single bit probabilities, the two most probable configurations differ only by one bit. Consequently, only one detector actually provides relevant information while the  $n - 1$  other ones are

essentially useless. Intuitively, one can expect that a good measurement scheme will find a way to harness the information extraction ability of the  $n$  detectors at the same time. Doing so should naively provide a speed up of order  $n$  (and we will see that this is what all the algorithms get).

Let us now recall what is allowed for a rapid quantum measurement scheme. In contrast with rapid purification schemes [89, 92, 19, 93], the control applied on the system should commute with the measured observables, *i.e.* the control should not amount to a change of the measurement basis. The only operations that are consequently allowed are permutations of vectors in the measurement basis [97]. Incidentally, this means that the evolution of the density matrix with the control is still equivalent to that of a classical system as long as one is only interested in the probabilities in the measurement basis (as noted by Combes *et al.* [97]) because the control itself is a purely classical operation; rapid quantum measurement is inherently a classical problem. This classicality is very helpful to understand what the measurement result means after such a procedure. If we stick to the quantum, we have to say that the measurement result allows us to retrodict what the system state would have been in the absence of control. Classically, the system state is fixed, it is then subjected to a measurement procedure with operations that can easily be reversed at the end, once the result is known. Using the mathematical equivalence of the situation, we can thus say that everything happens *as if* the system state were fixed but unknown at the beginning and that the optimal measurement procedure simply revealed it.

Let us now review briefly the first proposal of Combes *et al.* [97] for a locally optimal measurement scheme. A brief look at eq. (F.2.5) shows that the locally optimal case is obtained for a permutation of the initial basis that maximises the quantity :

$$\sum_{i=1}^n \text{tr} \left[ (\sigma_z^{(i)} - \mathbb{1}) \rho_t^{\text{LO}} \right]^2$$

where  $\rho_t^{\text{LO}}$  is the optimally permuted density matrix.

The asymptotic speed-up is then defined as :

$$S_{\text{LO}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \frac{(1 - \Delta_t)^2}{4\Delta_t^2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[ (\sigma_z^{(i)} - \mathbb{1}) \rho_t^{\text{LO}} \right]^2 \right].$$

which is the asymptotic ratio of the convergence rates for the locally optimal case and the no feedback case. Following [97], the key concept is the Hamming distance [99]. The Hamming distance between two states counts the number of bit differences between them. The idea is to do a permutation of the pointer basis which puts the next-to-most probable states as far as possible (with respect to the Hamming distance) from the most probable one. This will maximise  $\sum_{i=1}^n \text{tr} \left[ (\sigma_z^{(i)} - \mathbb{1}) \rho_t^{\text{LO}} \right]^2$ . More precisely, one first needs to order all the states but the most probable one by decreasing order of probability in a first list, then to order the states in decreasing order of Hamming distance with respect to the most probable one in a second list. The control then consists in mapping the states of the first list to the states of the second list while keeping the most probable state unchanged. Intuitively, one expects this scheme to provide a speed up of order  $n$  because the probable states can be discriminated from

the most probable one with approximately  $n$  detectors at the same time. And indeed, in [97] the authors manage to prove that for large  $n$  :

$$\frac{n}{4} \leq S_{\text{LO}} \leq n$$

The previous locally optimal scheme requires a real time feedback loop which may be difficult to implement in practice. It would be more convenient to have a predefined strategy implementable in open-loop. In [98] the authors provide such a scheme. The idea is simply to do rapid random permutations of the pointer basis. One expects that, on average, the states will be at a Hamming distance of order  $n/2$  from each other yielding the same kind of speed-up as before but for a different pre-factor. And indeed, in [98] the authors prove that the speed-up  $S_{\text{RP}}$  for the open-loop random permutation scheme verifies for large  $n$  :

$$\frac{n}{4} \leq S_{\text{RP}} \leq \frac{n}{2}$$

Actually, it is possible to prove that the upper bound is reached exactly, *i.e.* that :

$$S_{\text{RP}} = \frac{n}{2} \frac{2^n}{2^n - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2},$$

see technical complement F.7.1. This result will allow us to compare this scheme with our new measurement procedure more precisely.

These two schemes are certainly appealing but they suffer from an important limitation which makes them essentially impossible to implement on future large registers. Setting aside the astonishingly high number of permutations  $N_P = (2^n)!$  that are needed in the open-loop case (because a smaller number, say only exponential, might give similar speed-ups), the main obstacle is that the two schemes require an exponential amount of memory to store the  $2^n$  diagonal coefficients of the full density matrix, *i.e.* the probabilities of all the register configurations. Indeed because of the successive permutations of the pointer basis, it is no longer true that the probability of a configuration can be reconstructed from a product of the  $n$  marginals, a lot of information is stored in the bit correlations. Additionally, the two schemes require that the operator do a huge number of permutations on the system, something which may be difficult to implement in practice.

## F.4 “Guess and Check” Algorithm

### F.4.1 Description

Naively, a good way to build a procedure more frugal in memory would be to reduce the number of different basis used in the open-loop scheme hoping that the states still stay far away from one another on average with respect to the Hamming distance. It turns out that requiring that every state is far away from every other one on average is a very demanding requirement which is only needed for a *truly* open-loop control scheme. Slightly relaxing the open-loop condition, it is possible to construct a quasi open-loop, or as we will call it “*guess and check*” (GC) algorithm which is fast and memory efficient.

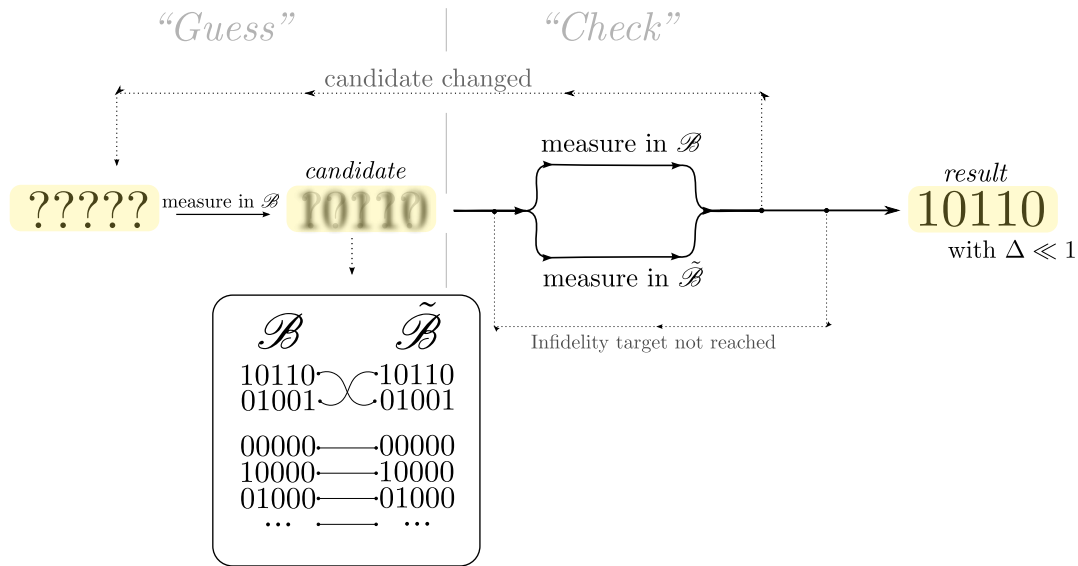


FIGURE F.2 – Guess and Check algorithm. At first, the state in the logical basis is unknown. A standard continuous measurement in the basis  $\mathcal{B}$  yields a first candidate (here 10110), this is the *guess* phase. From this candidate one can build a new basis  $\tilde{\mathcal{B}}$  where the candidate and its bit-wise opposite are flipped. The *check* phase then consists in the simultaneous (or successive) measurement in  $\mathcal{B}$  and  $\tilde{\mathcal{B}}$  until the target infidelity is reached, in which case the algorithm stops, or the candidate changes, in which case one goes back to the *guess* phase.

The idea goes as follows (see Fig. F.2). Imagine one knows a good candidate for the register state after running the standard measurement scheme for a while. Then two ordered pointer basis are enough to keep the candidate at an average Hamming distance of  $n/2$  from every other state. The solution is simply to take an ordered basis  $\mathcal{B}$  and then exchange the candidate and its bitwise opposite to get a new basis  $\tilde{\mathcal{B}}$ . If a given state is close to the candidate  $c$  in  $\mathcal{B}$  then it will be far from  $c$  in  $\tilde{\mathcal{B}}$  and *vice versa*. Measuring successively in  $\mathcal{B}$  and  $\tilde{\mathcal{B}}$  should yield a convergence speed-up of  $n/2$  provided the candidate initially chosen was correct. If this is not the case and the most probable state changes during the measurement process, then a crude yet practical solution is simply to start the whole process again and discard all the information acquired before. The key thing to notice is that the time spent in the guessing process and in eliminating wrong guesses is finite and even finite on average and has accordingly no impact on the asymptotic speed-up. This will be discussed in more detail later, but let us start by presenting the algorithm precisely this time :

### **Guess and Check measurement protocol**

1. Run the standard measurement protocol until a register configuration, later called the *candidate*, reaches a probability superior to a predefined threshold  $p_0$  (e.g.  $p_0 = 1/2$ ). Notice that this threshold is always reached because the standard measurement procedure yields an exponentially fast convergence towards perfect certainty.

2. Implement the permutation mapping the initial ordered pointer basis  $\mathcal{B}$  to the new ordered pointer basis  $\tilde{\mathcal{B}}$  where the candidate and its bitwise opposite are exchanged.
3. Measure in the two basis by applying the permutation and its inverse successively until the target infidelity is reached or until the probability of the candidate becomes negligibly small (say inferior to  $p'_0 \ll p_0$ ).
4. In the latter case, start the whole protocol again from the first step and discard all the information previously acquired.

At this point, a few comments are in order. The value of the thresholds, though important for the short term behavior of the protocol, has no impact on the asymptotic behavior of the infidelity. The frequency at which one should switch of measurement basis is voluntarily left open for the simple reason that it does not matter<sup>1</sup>! Indeed, as it is clear from the classical picture, the measurements can be done in any order without changing the statistics (equivalently, one can assume that all the measurement have already been done in the two basis, that the system state is fixed, and that one only progressively reveals the measurement results). The only thing that is needed is that the same amount of time is spent in every basis and that the most probable state is computed from time to time to check if it has changed. Step 4 of the protocol is obviously highly suboptimal and could be improved greatly in the future. However, as it is, it has the great advantage of making the whole algorithm very easy to analyse rigorously.

The protocol is *quasi* open loop in the sense that only a small number of actions (finite on average) has to be done by the controller which makes it much easier to implement than a real-time feedback loop. Moreover, the feedback part consists in a simple unitary operation on a 2-level system consisting of the candidate and its bitwise opposite. The protocol is thus simple and robust, the only thing that remains is to show that it indeed provides a speedup of order  $n$  and that it only requires a memory of size  $\mathcal{O}(n)$ .

In what follows and for notational simplicity, we will assume that the candidate is labelled in the same way in  $\mathcal{B}$  and  $\tilde{\mathcal{B}}$  *i.e.* we will use a *notation* where all the bits are flipped in  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Alternatively, one can consider that  $\tilde{\mathcal{B}}$  is obtained from  $\mathcal{B}$  via a full bit flip of all the states but the candidate and its bitwise opposite which is strictly equivalent.

#### F.4.2 Speedup of order $n$

Provided the candidate turns out to stay the most probable state during the whole process, it can be shown (see technical complement F.7.2) that the infidelity decreases at a rate  $n/2$  times larger than with the standard measurement scheme. More precisely, it can be shown that for large time :

$$\mathbb{E}[-d \ln \Delta_t] \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \times 16\gamma t.$$

---

1. Actually the same answer can be given to the program outlined by Combes *et al.* in the conclusion of [98] : “*Finally and perhaps most importantly [...] future work should include imperfections [...] such as a finite number of permutations in a fixed time interval.*”. As long as all the permutations are sampled in the end, the frequency simply does not matter!



However, this does not straightforwardly give the speedup rate as the candidate might just turn out not to stay the most probable state forever if the initial guess was wrong. Two additional contributions need to be taken into account. First, some time  $\tau_0$  (finite on average) is needed to find a first candidate with probability superior to the predefined threshold. Second, some time  $\tilde{\tau}_1$  may be needed to realize that this was not the good candidate. In such a situation, which happens with probability  $(1 - p_0)/(1 - p'_0) \simeq (1 - p_0)$ , we then have to start over and wait for a time  $\tau_1$  before finding a new good candidate, which may turn out to be wrong after a time  $\tilde{\tau}_2$ , and so on. As a result the average time  $T$  spent out of the fast converging phase of the algorithm is :

$$T \simeq \mathbb{E}[\tau_0] + \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - p_0)^i (\mathbb{E}[\tilde{\tau}_i + \tau_i])$$

Because we start over every time the candidate turns out to be incorrect,  $\tau_i$  and  $\tilde{\tau}_i$  are random variables with a law independent on  $i$ . Consequently, the latter equation reduces to :

$$T \simeq \mathbb{E}[\tau] + \frac{1 - p_0}{p_0} (\mathbb{E}[\tau] + \mathbb{E}[\tilde{\tau}])$$

which is finite. As a result, the amount of time wasted trying to find the candidate and eliminating incorrect ones does not matter for the asymptotic properties of the log-infidelity. Finally we have, for the *guess and check* algorithm and  $n \geq 2$  :

$$S_{\text{GC}} = \frac{n}{2}$$

This means that the *guess and check* procedure offers an asymptotic speedup equal to that of the true open-loop scheme for large  $n$ .

### F.4.3 Computation with $\mathcal{O}(n)$ memory

To prove that we do not need to store the full density matrix, it is easier to use the mathematically equivalent classical picture. In what follows, we will decompose the information coming from the  $2n$  measurement records ( $n$  measurement apparatus in two distinct basis). For that matter, it is convenient to introduce the notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^k &= \sigma \left( \left\{ Y_u^{(k)} \right\}, u \leq t \right) \\ \tilde{\mathcal{F}}_t^k &= \sigma \left( \left\{ \tilde{Y}_u^{(k)} \right\}, u \leq t \right) \\ \mathcal{G}_t &= \sigma \left( \left\{ Y_u^{(k)}, \tilde{Y}_u^{(k)} \right\}, u \leq t, k = 1..n \right) \end{aligned}$$

where  $Y^{(k)}$  is the signal from detector  $k$  in  $\mathcal{B}$ , where  $\tilde{Y}^{(k)}$  is the signal from detector  $k$  in  $\tilde{\mathcal{B}}$  and where  $\mathcal{G}_t$  thus contains all the information available up to time  $t$ . Marginals with respect to the filtrations  $\mathcal{F}_t^k$  and  $\tilde{\mathcal{F}}_t^k$  can be computed in real time using only one signal and independently of the rest via eq. (F.2.3). The objective is now to express probabilities with respect to the full filtration as a function of these easily computable marginals. Elementary applications of Bayes' rule allow to express the probability to have a given register configuration knowing all the measurement results up to time  $t$  as a function of the probabilities conditioned independently on each detector results :

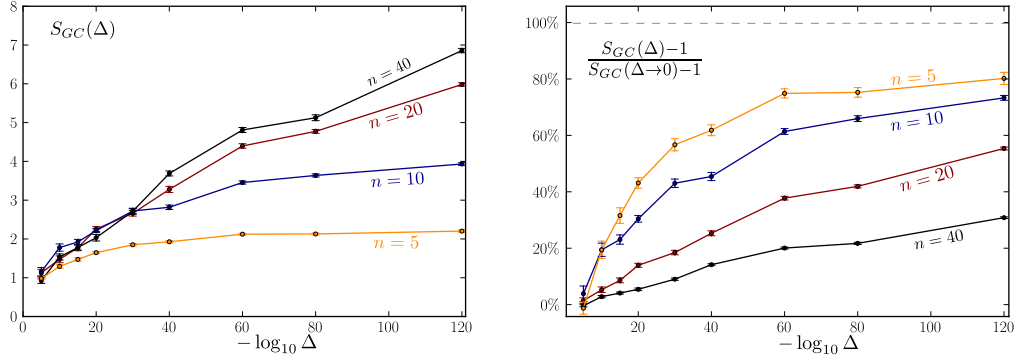


FIGURE F.3 – On the left, speed-up provided by the GC algorithm for finite infidelity target  $\Delta$  for various values of the number of qubits  $n$ . On the right, percentage of the asymptotic speed-up reached for finite infidelity target. For large values of  $n$ , the asymptotic speed-up is only approached for extremely small values of  $\Delta$ . The computations are done with thresholds  $p_0 = 0.5$  and  $p'_0 = 0.001$ , using the discrete equation (F.2.4) with  $\epsilon = 0.025$  as an approximation for the continuum which provides a better accuracy than the Euler integration of equation (F.2.3).

$$\mathbb{P}[R = s|\mathcal{G}_t] = \frac{1}{Z_t} \prod_{k=1}^n \frac{\mathbb{P}[R = s|\mathcal{F}_t^{(k)}]\mathbb{P}[R = s|\tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)}]}{\mathbb{P}[R|\mathcal{G}_0]^2}$$

where  $Z_t$  is the normalization. Assuming equal probability at initial time for simplicity we get :

$$\mathbb{P}[s|\mathcal{G}_t] = \frac{1}{Z_t} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}[R^{(k)} = s^{(k)}|\mathcal{F}_t^{(k)}] \mathbb{P}[\tilde{R}^{(k)} = \tilde{s}^{(k)}|\tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)}]$$

where, again,  $R^{(k)}$  (resp.  $\tilde{R}^{(k)}$ ) is the value of the  $k$ -th bit of  $R$  in  $\mathcal{B}$  (resp. in  $\tilde{\mathcal{B}}$ ). The difficulty is now that the normalisation factor  $Z_t$  contains an exponential number of terms so that it would seem that we still need an exponential number of operations. However, because of the simple permutation between the two basis, the normalization

factor  $\mathcal{Z}_t$  can be computed exactly :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_t &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = s^{(k)} | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = \tilde{s}^{(k)} | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right] \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}} \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = s^{(k)} | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = 1 - s^{(k)} | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right] \\
&\quad + \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = 0 | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = 0 | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right] \\
&\quad + \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = 1 | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = 1 | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right] \\
&\quad - \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = 0 | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = 1 | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right] \\
&\quad - \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left[ R^{(k)} = 1 | \mathcal{F}_t^{(k)} \right] \mathbb{P} \left[ \tilde{R}^{(k)} = 0 | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)} \right],
\end{aligned} \tag{F.4.1}$$

where we have used the fact that for all the states  $s$  but two (the candidate  $\bar{0}$  and its bitwise opposite  $\bar{1} = |11\dots 1\rangle$ ),  $\tilde{s}^{(k)} = 1 - s^{(k)}$ . To simplify the expressions we introduce the compact notations for the marginals in the two basis knowing only the information from one series of measurements :  $p_t^{(k)} = \mathbb{P}[R^{(k)} = 0 | \mathcal{F}_t^{(k)}]$  and  $\tilde{p}_t^{(k)} = \mathbb{P}[\tilde{R}^{(k)} = 0 | \tilde{\mathcal{F}}_t^{(k)}]$  (which, it should be emphasized, are not the *true* marginals, *i.e.* the marginals conditioned on all the available information). These marginals can be computed independently and easily in real time from the measurement records  $Y_t^{(k)}$  and  $\tilde{Y}_t^{(k)}$  using eq. (F.2.2) and (F.2.3) (or in the discrete case eq. (F.2.4)) . The sum in eq. (F.4.1) can be done separately on each term of the product which gives :

$$\mathcal{Z}_t = \prod_{k=1}^n \left[ p_t^{(k)}(1 - \tilde{p}_t^{(k)}) + (1 - p_t^{(k)})\tilde{p}_t^{(k)} \right] + \prod_{k=1}^n (2p_t^{(k)} - 1)(2\tilde{p}_t^{(k)} - 1)$$

where the first term comes from the sum over all states and the second comes from the 4 correction terms of eq. (F.4.1). This means that the normalization factor can be computed knowing only the  $2n$  marginals in the two basis and doing *only* a number  $\mathcal{O}(n)$  of elementary operations (additions and multiplications) on them. Eventually, the probability of any state can be computed from a linear number of operations on the marginals. For example, we can compute the probability of the candidate  $\lambda_0$  :

$$\lambda_0 = \frac{p_t^{(k)} \tilde{p}_t^{(k)}}{\mathcal{Z}_t(\{p_t, \tilde{p}_t\})}$$

which allows for an on-demand exact and rapid computation of the log-infidelity knowing only the  $2n$  independently computable bit probabilities.

## F.5 Numerics

Computing the speed-up rate numerically is useful for two reasons. First, the results previously derived are asymptotic and the speed-up could very well be much smaller

for a reasonable non-zero infidelity target. Second and most importantly, computing the speed-up rate numerically for large values of  $n$  is the best way to make sure that the protocol does not require an exponential amount of memory and is indeed easily implementable.

The numerical computations can be easily carried out with the help of the discrete equation (F.2.4) for  $\varepsilon \ll 1$ . Starting from a fully unknown register state, the time to reach a given infidelity target is computed for the standard no control scheme and for the GC procedure from which the non-asymptotic speed-up rate is computed. The results for various register sizes are shown in Fig. F.3. Unsurprisingly, for large registers, the asymptotic speed-up is only reached for absurdly small infidelity targets. This is because most of the time is spent in the “guess” phase trying to find a candidate. Optimizing over the thresholds  $p_0$  and  $p'_0$  would probably slightly tame this noxious waste of time. Further, the suboptimal step 4 of the procedure does lead to a substantial slow down for reasonable infidelity targets and a less naive procedure might be able to make the non-asymptotic part of the algorithm less costly.

Alternatively, one could imagine a multi-stage algorithm where a global candidate is found by applying the GC procedure on a series of subregisters, *i.e.* where the “guess” phase itself is sped up using the GC algorithm. In any case, these numerical simulations show that the asymptotic speed-up should not be the only metric used to assess the efficiency of rapid measurement schemes in the future as the asymptotic regime may be irrelevant in realistic setups. Note that the previous schemes of Combes *et al.* [97, 98] which could only be probed numerically for small registers, also showed lower performances for finite infidelity targets. All these reserves being made, the GC algorithm does provide a large speed-up in absolute value for all register sizes and reasonably small infidelity targets. As a result, and even without the previously mentioned potential improvements, the GC algorithm can be applied profitably to the rapid measurement of qubit registers.

## F.6 Discussion

We have proposed a new and simple protocol (GC) aimed at increasing the measurement rate of qubit registers and derived the exact asymptotic speed-up it provides. Its asymptotic speed-up rate, compared to that of the earlier schemes of [97] and [98], is displayed in Fig. F.4. The main comparative advantage of the procedure does not reside in its performance increase but in its practical and computational simplicity. Indeed, in terms of control, the GC algorithm only requires a finite number (on average 2 for thresholds  $p_0 = 1/2$  and  $p'_0 \ll 1$ ) of simple permutations on a subspace of dimension 2. Even if the scheme is not, strictly speaking, open-loop, the fact that the control operations can be done with a delay without performance loss makes it much less demanding than a true real-time feedback control scheme. Eventually and most importantly, the GC algorithm allows to encode the probabilities of all the register configurations in  $2n$  real numbers in contrast with the prohibitive exponential number required by other protocols. This last feature makes the GC algorithm, or other algorithms built upon similar ideas, particularly suitable for the rapid measurement of future quantum computer registers where an exponential memory scaling will simply

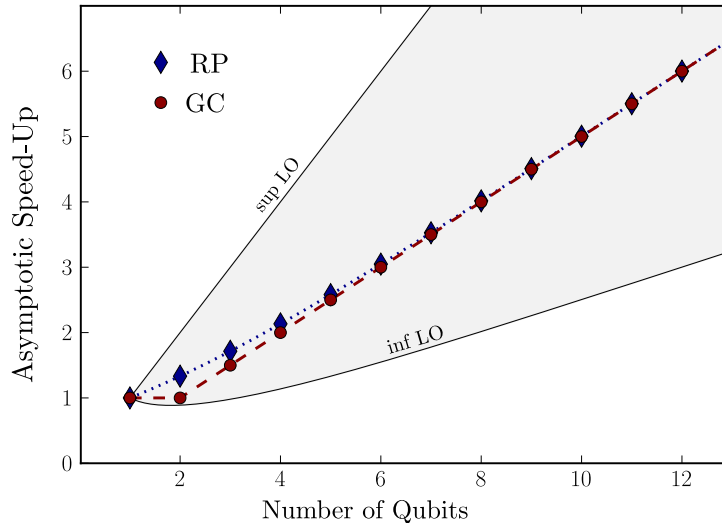


FIGURE F.4 – Exact asymptotic speed-up for the Random Permutation scheme (RP) and the Guess and Check (GC) scheme computed in this article. The two lines “sup LO” and “inf LO” show the analytic upper and lower bounds known for the Locally Optimal measurement scheme of [98] and delimit the shaded area where the true speed-up could be.

be prohibitive.

Although this was not strictly necessary for our derivation, we have used a classical probabilistic picture throughout the paper. As the rapid measurement problem is essentially a classical problem, recasting everything in an equivalent classical language provides a simpler and hopefully more pedagogical introduction to the subject. Additionally, it helps give intuitive and straightforward answers to questions otherwise non trivial like the sensitivity to control imperfections or the meaning of the result obtained at the end of the protocol.

In the future, ideas similar to the one developed in this article could be applied to the rapid measurement of more general quantum systems. Even in the restricted context of qubit registers, the numerical simulations have shown that improving the short time behavior of the algorithm could greatly improve its performance in practice. For that matter, analytic studies of the finite time behavior of the log infidelity could certainly be illuminating.

## F.7 Technical complements

### F.7.1 Exact speed-up for open-loop control

The exact speed-up can actually be computed using an exact solution of the stochastic differential equation and a bit of combinatorics. The method is very similar to the one used by Combes *et al.* in [98] to compute the convergence rate of the infidelity in the no feedback case.

We start by assuming that the random permutations are carried out very quickly so that the whole permutation group is sampled in any infinitesimal time interval. Notice again that this is just needed for simplicity, the order in which the measurements are done does not matter so we can reorganise them a posteriori to fulfill the previous condition. In this setting the register density matrix verifies :

$$d\rho_t = \left[ \frac{2\gamma}{(2^n)!} \right]^{1/2} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(2^n)} \sum_{k=1}^{2^n} \mathcal{H}[\sigma_z^{k,\tau}](\rho_t) dW_t^{(k,\tau)} \quad (\text{F.7.1})$$

where  $\mathfrak{S}(2^n)$  is the permutation group on the set  $\mathcal{S}$  of the  $2^n$  configurations,  $\sigma_z^{k,\tau} = U_\tau^{-1} \sigma_z^k U_\tau$  where  $U_\tau$  is the unitary operator implementing the permutation  $\tau$  and the  $W_t^{(k,\tau)}$  are independent Wiener processes *i.e.*  $dW_t^{(k,\tau)} dW_t^{(k',\tau')} = \delta_{k,k'} \delta_{\tau,\tau'} dt$ . Equation (F.7.1) is invariant under the change  $\sigma_z^{k,\tau} \rightarrow \sigma_z^{k,\tau} + \mathbb{1}$  which allows to work with projectors on spaces of dimension  $2^{n-1}$ . There are *only*  $\binom{2^n}{2^{n-1}}$  such projectors which allows the following factorisation.

$$d\rho_t = 2\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \sum_{\mathcal{P} \subset \mathcal{S}, |\mathcal{P}|=2^{n-1}} \mathcal{H}[P^\mathcal{P}](\rho_t) dW_t^\mathcal{P}$$

with

$$\mathcal{N} = \frac{n}{\binom{2^n}{2^{n-1}}}$$

and  $P^\mathcal{P}$  denotes the projector on the subset  $\mathcal{P}$  of the set of possible register configuration  $\mathcal{S}$ . The new Wiener processes are obtained as a normalized sum of the previous independent Wiener processes and are thus also independent Wiener processes. For pure mathematical convenience we can associate a corresponding set of signals which will allow us to work with what is often called linear quantum trajectories [18] (the knowledge of which is not needed here) :

$$dY_t^\mathcal{P} = 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \text{tr} [P^\mathcal{P} \rho_t] dt + dW_t^\mathcal{P}. \quad (\text{F.7.2})$$

We introduce an auxiliary density matrix  $\tilde{\rho}$  verifying the linear SDE :

$$d\tilde{\rho}_t = 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \sum_{\mathcal{P}} P^\mathcal{P} \tilde{\rho}_t dY_t^\mathcal{P}.$$

One can verify, using the Itô formula, that the *true* density matrix  $\rho$  can be recovered from  $\tilde{\rho}$  through a simple normalisation. The previous equation can easily be expanded and gives in components :

$$d\tilde{\lambda}_s = 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \tilde{\lambda}_s \sum_{\mathcal{P}, s \in \mathcal{P}} dY_t^\mathcal{P},$$

where  $\tilde{\lambda}_s$  is the eigenvalue of  $\tilde{\rho}$  associated to the state (or configuration)  $s$  and which, once normalized, will give its probability. This equation can be solved exactly as a function of the  $Y_t^\mathcal{P}$ 's :

$$\tilde{\lambda}_s = \exp \left( 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \sum_{\mathcal{P}, s \in \mathcal{P}} Y_t^\mathcal{P} - 8\gamma\mathcal{N} \binom{2^n}{2^{n-1}} t \right),$$

Finally we can express the normalized probability for the state  $s$  of maximum probability :

$$\lambda_0 = \frac{\exp\left(4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \sum_{\mathcal{P}, 0 \in \mathcal{P}} Y_t^{\mathcal{P}}\right)}{\sum_s \exp\left(4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} \sum_{\mathcal{P}, s \in \mathcal{P}} Y_t^{\mathcal{P}}\right)}$$

Up to now, everything is exact and some approximations are now needed to work out the large time limit. In this limit  $\lambda_0$  is close to one and all the other probabilities are much smaller and decrease exponentially (on average) as a function of time. Using eq. (F.7.2) we thus get :

$$Y_t^{\mathcal{P}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} t \text{ if } 0 \in \mathcal{P}$$

$$Y_t^{\mathcal{Q}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} o(t) \text{ if } 0 \notin \mathcal{Q}$$

Now, one only needs to notice that for the sum over subsets containing 0 there are  $\binom{2^n-1}{2^{n-1}-1} = \binom{2^n}{2^{n-1}}/2$  non negligible terms whereas for the sum over subsets containing  $s \neq 0$ , there are only  $\binom{2^n-2}{2^{n-1}-2} = \frac{1}{4} \frac{2^n-2}{2^{n-1}-1} \binom{2^n}{2^{n-1}}$  non negligible terms :

$$\sum_{\mathcal{P}, 0 \in \mathcal{P}} Y_t^{\mathcal{P}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \binom{2^n}{2^{n-1}} \times 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} t$$

$$\sum_{\mathcal{P}, s \neq 0 \in \mathcal{P}} Y_t^{\mathcal{P}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4} \frac{2^n-2}{2^{n-1}-1} \binom{2^n}{2^{n-1}} \times 4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}} t$$

Which gives :

$$\ln(1 - \lambda_0) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{4} \frac{2^n}{2^n-1} \binom{2^n}{2^{n-1}} \left(4\sqrt{2\gamma\mathcal{N}}\right)^2 t$$

$$\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \frac{2^n}{2^n-1} \times -16\gamma t$$

So that the exact speed-up rate reads :

$$S_{RP} = \frac{n}{2} \frac{2^n}{2^n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

which is what we had claimed. This exact result coincides with the upper bound proposed in [98] and seems consistent with its numerical results.

### F.7.2 Speed-up rate for *Guess and Check* control

In this section, we compute the speed-up rate for the ‘‘Check’’ part of the algorithm, assuming the candidate picked at the beginning turns out to be correct, *i.e.* that it stays the most probable state during the whole process. Without lack of generality, we write then  $\bar{0}$  the candidate (a notation valid in the two basis). We also assume for convenience that the measurements are made in the two basis simultaneously, which as we argued before, does not change anything in the statistics as long as the same

amount of time is spent in each basis. The system density matrix verifies the following SDE :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \sqrt{\gamma} \sum_{k=1}^n \mathcal{H}[\sigma_z^{(k)}](\rho_t) dW_t^{(k)} \\ &+ \sqrt{\gamma} \sum_{k'=1}^n \mathcal{H}[\sigma_z^{(k')}](\tilde{\rho}_t) d\tilde{W}_t^{(k')} \end{aligned} \quad (\text{F.7.3})$$

where  $\tilde{\rho}_t$  is the matrix of  $\rho_t$  in  $\tilde{\mathcal{B}}$  and  $W_t^{(k)}$ ,  $\tilde{W}_t^{(k)}$  are independent Wiener processes. As in the previous case, we make the transformation  $\sigma_z^{(k)} \rightarrow \sigma_z^{(k)} + \mathbf{1} \equiv 2P^{(k)}$  which leaves the previous SDE invariant. The associated signals  $Y^{(i)}$  and  $\tilde{Y}^{(i)}$  verify :

$$\begin{aligned} dY_t^{(i)} &= 4\sqrt{\gamma} \operatorname{tr} [P^{(i)} \rho_t] dt + dW_t^{(i)} \\ d\tilde{Y}_t^{(i)} &= 4\sqrt{\gamma} \operatorname{tr} [P^{(i)} \tilde{\rho}_t] dt + d\tilde{W}_t^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{F.7.4})$$

As in the previous appendix, we can solve eq. (F.7.3) explicitly (as a function of the signal) using a linearised version of the SDE :

$$d\bar{\rho}_t = 4\sqrt{\gamma} \sum_{k=1}^n \left[ P^{(k)} \bar{\rho}_t dY_t^{(k)} + \tilde{P}^{(k)} \bar{\rho}_t d\tilde{Y}_t^{(k)} \right]$$

which is solved in components :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_s &= \exp \left( 4\sqrt{\gamma} \sum_{k=1}^n \left[ (1 - s^{(k)}) Y^{(k)} + (1 - \tilde{s}^{(k)}) \tilde{Y}^{(k)} \right] \right) \\ &\times \exp \left( -8\gamma \sum_{k=0}^n \left[ (1 - s^{(k)}) + (1 - \tilde{s}^{(k)}) \right] t \right). \end{aligned} \quad (\text{F.7.5})$$

At large time, when most of the probability is concentrated on the state  $s = \bar{0}$ , eq. (F.7.4) gives :

$$\begin{aligned} Y_t^{(k)} &\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 4\sqrt{\gamma} t \\ \tilde{Y}_t^{(k)} &\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 4\sqrt{\gamma} t \end{aligned}$$

From eq. (F.7.5) it is then easy to see that the non-normalised eigenvalues have three possible behaviors :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\bar{0}} &= \exp [16n\gamma t + o(t)] \\ \bar{\lambda}_{\bar{1}} &= \exp [o(t)] \\ \bar{\lambda}_s &= \exp [8n\gamma t + o(t)] \quad \text{for } s \neq \bar{0}, \bar{1} \end{aligned}$$

Recalling that

$$\lambda_{\bar{0}} = \frac{\bar{\lambda}_{\bar{0}}}{\sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{\lambda}_s},$$

we finally get, for  $n \neq 1$  :

$$\ln(\Delta_t) = \ln(1 - \lambda_{\bar{0}}) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -16\gamma t \times \frac{n}{2}$$





# Annexe G

## Gravité semi-classique et modèles de collapse objectifs

L'appendice qui suit est directement tiré de l'article *Sourcing semiclassical gravity from spontaneously localized quantum matter* [3] écrit par L. Diósi et l'auteur et publié dans Physical Review D. Seules quelques modifications de notation ont été effectuées pour éviter de dérouter le lecteur et cet appendice peut être lu sans référence au reste. On y propose une classe de modèles cohérents de gravité semi-classique à la limite Newtonienne inspirés du programme de réduction dynamique et notamment de CSL.

**Abstract** The possibility that a classical space-time and quantum matter cohabit at the deepest level, *i.e.* the possibility of having a fundamental and not phenomenological semiclassical gravity, is often disregarded for lack of a good candidate theory. The standard semiclassical theory suffers from fundamental inconsistencies (e.g. : Schrödinger cat sources, faster-than-light communication and violation of the Born rule) which can only be ignored in simple typical situations. We harness the power of spontaneous localization models, historically constructed to solve the measurement problem in quantum mechanics, to build a consistent theory of (stochastic) semiclassical gravity in the Newtonian limit. Our model makes quantitative and potentially testable predictions : we recover the Newtonian pair potential up to a short distance cut-off (hence we predict no 1 particle self-interaction) and uncover an additional gravitational decoherence term which depends on the specifics of the underlying spontaneous localization model considered. We hint at a possible program to go past the Newtonian limit, towards a consistent general relativistic semiclassical gravity.

### G.1 Introduction

Marrying quantum mechanics and gravity in the same physical theory is an extremely difficult endeavour, yet one that is desperately needed to understand the extreme scenarios where space-time becomes so singular that quantum effects should arise, e.g., in the early universe and in black holes. Insuring the consistency and unity of physics is another no less important motivation. Many routes to quantum gravity, which aims at

describing space-time as emerging from quantum dynamical degrees of freedom, have been explored [130]. These efforts have yielded interesting results but, after nearly half a century of hard work, none of them gave birth to an unanimously accepted quantum theory of gravity.

But do we really need to quantize gravity? Could we not imagine a dynamical classical curved space-time (in the sense of relativistic but not quantized) with some quantum matter in it? To build a complete semiclassical theory of gravity, one needs to say how quantum matter, described by state vectors  $|\Psi\rangle$  in a Hilbert space, can source the curvature of a classical space-time. The standard approach to semiclassical gravity, due to Møller [132] and Rosenfeld [133], is to use the quantum mechanical average to get a classical quantity out of the energy-momentum operator  $\hat{T}_{ab}$  of quantized matter :

$$G_{ab} = 8\pi G \langle \Psi | \hat{T}_{ab} | \Psi \rangle \quad (\text{G.1.1})$$

where  $G_{ab}$  is the Einstein tensor. So far, this is the only available model of back-action of quantized matter on a classical space-time, indispensable to the description of our cosmology, stars and black holes. When it is seen as an approximate theory, and as it ignores quantum fluctuations of  $\hat{T}_{ab}$ , it becomes incorrect if the quantum state  $|\Psi\rangle$  codes for large matter density fluctuations [135]. The semiclassical theory possesses deep fundamental anomalies as well, the most spectacular one being faster-than-light communication [134]. The standard semiclassical equation (G.1.1) is consequently untenable as the building block of a fundamental theory. One faces Mielnik's deep-rooted alternative [239] : *either the gravitation is not classical or quantum mechanics is not orthodox*. We are going to explore the latter option.

Interestingly, these anomalies already appear in the Newtonian regime as they are of quantum and not of relativistic nature. The defective prediction of the semiclassical theory in the case of large quantum uncertainties of  $\hat{T}_{ab}$  can be best understood in this simpler limit. Consider the superposition  $|\Psi\rangle = |A\rangle + |B\rangle$  of a massive macroscopic object at two macroscopically different locations  $A$  and  $B$ . Such Schrödinger cat states yield an intuitively and empirically incorrect source term in Eq. (G.1.1) [135]. The other anomaly [134], too, turns out to be basically quantum, *i.e.* essentially unrelated to relativity and even to gravity. Having a quantum average  $\langle \hat{A} \rangle$  in any deterministic dynamics spoils the linearity of quantum mechanics which allows faster-than-light communication [41] and induces a break down of the statistical interpretation (Born rule) [239, 54].

The objective of this article is to provide another way to source gravity from quantum matter in the non-relativistic limit, free of the inconsistencies of the standard approach. It turns out that all the previous anomalies can be dealt with through the use of spontaneous collapse models, a class of models initially aimed at solving the measurement problem in quantum mechanics. Most spontaneous wave function collapse models, see Sec. G.3, propose the addition of a small non-linear stochastic term in the Schrödinger equation. This small term is responsible for the dynamical collapse of macroscopic superpositions, *i.e.* the mechanism

$$|\Psi\rangle = |A\rangle + |B\rangle \Rightarrow |A\rangle \text{ or } |B\rangle$$

for macroscopic Schrödinger cat states, only at the price of a negligible stochastic modification of the microscopic dynamics. These non-relativistic models are formally

equivalent to the standard time-continuous quantum measurement (or monitoring) of the mass density operator  $\hat{\rho} = \hat{T}_{00}$  at each point in space by hidden unsharp detectors. A crucial interest of this interpretation is that it naturally suggests to introduce the measured classical signal  $T_{00}$  (time-continuous equivalent of von Neumann measurement outcomes), a now classical field which will be fluctuating around the quantum average value :

$$T_{00} = \langle \hat{T}_{00} \rangle + \delta T_{00},$$

where  $\delta T_{00}$  is the signal noise.

The following speculation, outlined already in [240, 138, 241], is now tempting. Suppose we were able to construct a relativistic model of spontaneous collapse, *i.e.*, formally monitoring the full energy-momentum tensor  $\hat{T}_{ab}$ . This would be useful in two ways. First, the quantum monitoring of  $\hat{T}_{ab}$  would suppress large quantum fluctuations of  $\hat{T}_{ab}$ , removing in particular the large Schrödinger cat ambiguities. Second, the random signal  $T_{ab} = \langle \hat{T}_{ab} \rangle + \delta T_{ab}$ , when used to source the Einstein-tensor

$$G_{ab} = 8\pi G \left( \langle \hat{T}_{ab} \rangle + \delta T_{ab} \right), \quad (\text{G.1.2})$$

would by construction respect the linear structure of quantum mechanics. It would yield a back-action of quantized matter on space-time free of the anomalies of the deterministic semiclassical coupling (G.1.1). In terms of quantum control, back-action would be realized by a dynamical feedback conditioned on the signal.

Our objective with this theory of spontaneous-collapse-based stochastic semiclassical gravity is not to construct another approximate theory, more precise than the standard semiclassical one, to an exact yet unknown theory of quantum gravity. Rather, it is to propose a conceptually healthier semiclassical theory which is not plagued by foundational anomalies so it might in principle be the ultimate theory of gravity plus quantized matter. In this article, we will make this proposal precise and quantitative only in the non-relativistic sector. This is unfortunately needed for lack of a good relativistic spontaneous localization model. However, as the anomalies of the standard approach already show up in the Newtonian limit, showing that they can be cured represents a first promising step.

*Outline*– The article is structured as follows. We first recall the standard possible approaches to semiclassical gravity in the Newtonian limit in Sec. G.2. We then give a short introduction to the spirit of spontaneous localization models and explain how they can be harnessed in semiclassical gravity in Sec. G.3. The core of our theory is then developed in mathematical details in Sec. G.4, first for a general spontaneous localization model, then in more details for the most studied ones, mainly Continuous Spontaneous Localization (CSL) and Diósi-Penrose (DP) models. Eventually we discuss some related works in Sec. G.5, the main findings and their interpretation in the last section.

## G.2 Classical gravity vs quantized matter

Throughout all this article, we will consider  $N$  particles of mass  $m_1, \dots, m_N$  evolving in 3 spatial dimensions. We write  $\hat{H}$  the many-body Hamiltonian (in the absence of

gravity),  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  the many-body pure state density matrix,  $\hat{\mathbf{x}}_n$  the position operator of the  $n$ -th particle and we use  $\hbar = 1$  through all sections.

In the non-relativistic realm, where everything is technically easy, one can add gravity by a Newtonian pair-potential  $\hat{V}_G$  in the Schrödinger-von Neumann equation :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H} + \hat{V}_G, \hat{\rho}], \quad (\text{G.2.1})$$

with the gravitational pair-potential :

$$\hat{V}_G = -\frac{G}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{r})\hat{\rho}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \quad (\text{G.2.2})$$

where the spatial mass density of point-like constituents of masses  $m_n$  and locations  $\hat{\mathbf{x}}_n$  is defined as<sup>1</sup> :

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_n m_n \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{x}}_n).$$

Equations (G.2.1-G.2) represent the standard non-relativistic many-body quantum theory of gravitating constituents and do not use the concept of gravitational field. This theory is free of any serious inconsistency (the infinite self-interaction energy has no dynamical consequence and is easily renormalized out) but it is not a very good candidate for a more general theory where the gravitational field is expected to be an autonomous entity. Admittedly, one can formally introduce the Newton field as a field operator slaved to the matter density :

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}) = -G \int d\mathbf{s} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (\text{G.2.3})$$

but relating a classical gravitational field to this operator is a delicate issue and a central task of the present work.

Alternatively, and keeping an eye on general relativity where the gravitational field is a separate dynamical entity interacting with matter, one studies matter-field interaction instead of the pair-potential  $\hat{V}_G$ . The non-relativistic limit of the standard semiclassical approach (G.1.1) amounts to take a classical (*i.e.* not quantized) Newtonian potential  $\Phi(\mathbf{r})$  satisfying the Poisson equation with the quantum average of the mass density operator as a source :

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (\text{G.2.4})$$

yielding

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int d\mathbf{s} \frac{\langle \hat{\rho}(\mathbf{s}) \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

which is a semiclassical counterpart of (G.2.3). In this setting, the semiclassical Newton interaction can be introduced in the following way :

$$\hat{V}_{\text{Gscl}} = \int d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) \hat{\rho}(\mathbf{r}), \quad (\text{G.2.5})$$

---

1. The results of our work are also valid for indistinguishable particles provided one takes  $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_k m_k \hat{a}_k^\dagger(\mathbf{r}) \hat{a}_k(\mathbf{r})$  where  $\hat{a}_k(\mathbf{r})$  and  $\hat{a}_k^\dagger(\mathbf{r})$  are the local annihilation and creation operators of species of particle of mass  $m_k$ .

and then be used in the von Neumann equation (G.2.1) in place of the pair-potential  $\hat{V}_G$  :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H} + \hat{V}_{\text{GscI}}, \hat{\rho}].$$

This equation, understood for pure states  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , is equivalent to the Schrödinger-Newton equation which has been proposed earlier for the natural localization of quantum massive objects [242, 69] :

$$\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = -i(\hat{H} + \hat{V}_{\text{GscI}})|\Psi\rangle. \quad (\text{G.2.6})$$

This equation is the subject of intensive studies currently, cf., e.g. : [243, 244, 245, 246, 247]. The most salient feature of the Schrödinger-Newton equation is self-interaction : even the single-body dynamics contains a gravitational self-interaction term. Such a term would presumably not show up in a (so far elusive) theory of quantum gravity [248] but this does not discredit it a priori in the eventuality that space-time is fundamentally classical.

However, and as natural as it may seem, the latter standard semiclassical approach is plagued by foundational problems. The most obvious one is that such a semiclassical coupling means non-linear deterministic quantum mechanics and, as we mentioned earlier, this in itself leads to fatal anomalies. The problem does not come from the way the gravitational potential is introduced in the Schrödinger von-Neumann equation, which is completely standard, but from the very way it is sourced from quantum matter. The failure of this specific version of semiclassical gravity, at least when it is seen as a fundamental theory, is often taken as a strong argument in favour of the quantization of gravity. However, this only means that one of the most naive couplings between classical gravity and quantum matter does not do the trick. In the next section we discuss a way to get a stochastic classical mass density  $\varrho(\mathbf{r})$  from continuous localization models. This will give us a consistent source of the classical Newton field  $\Phi(\mathbf{r})$  that we will use in Sec. G.4. As we shall see, the proposed theory will solve the problems previously encountered and induce the Newtonian pair-potential from a classical gravitational field without the inconsistencies arising from non-linearity.

### G.3 Spontaneous localization models

We now step back from gravity and review briefly a class of models originally aimed at solving the measurement problem in quantum mechanics. A particular class of models, called spontaneous (or sometimes dynamical, objective) collapse (or sometimes localization, reduction) of the quantum state, describe the emergence of classical macroscopic phenomena dynamically and without reference to the presence of observers. The standard unitary evolution of the quantum state is modified by a universal weak collapse mechanism irrelevant for microscopic degrees of freedom but which suppresses macroscopically large quantum uncertainties of the local mass densities. Spontaneous collapse theories, spearheaded by Ghirardi, Rimini, Weber (GRW) [46] and Pearle [42], are reviewed in [73]. The emphasis on mass density was proposed by one of the present authors [44, 45].

We will focus on the continuous versions of these models. They come in two main flavors, DP (for Diósi-Penrose) [44, 45, 240, 249, 250, 229, 69, 70, 71] and CSL (for Continuous Spontaneous Localization) [64, 251]. Although they have some differences we will discuss later, these models share an important characteristic : their formalism can be interpreted as describing a quantum system subjected to a continuous monitoring of its (smeared) mass density, *i.e.* of the operators :

$$\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N m_n g_\sigma(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{x}}_n).$$

The function  $g_\sigma$  is a normalized Gaussian of width  $\sigma$  and the smearing is necessary to keep the theory finite [252]. In what comes next we will generically define the *smeared* version  $f_\sigma$  of a field  $f$  in the following way :  $f_\sigma \equiv g_\sigma * f$ . The analogy with continuous monitoring theory is only formal, the equations are the same but the interpretation is obviously different : in CSL and DP there is no detector and the spontaneous localization is taken as a fundamental fact of nature. The parallel is nevertheless extremely useful because it insures the consistency of the formalism : as they can be obtained from plain quantum theory, the equations of spontaneous localization models are guaranteed to preserve the statistical interpretation of the state vector. In what follows, we will sometimes use a vocabulary from continuous measurement theory (detectors, signal, etc.) but the reader should keep in mind that we only use it as a way to derive a consistent formalism, and not as if there were some real observer continuously doing measurements in nature.

We can illustrate this dual point of view on the example of the *signal*. In continuous measurement theory, the signal is the time-continuous version of a measurement outcome and in the case we consider it reads :

$$\varrho_t(\mathbf{r}) = \langle \hat{\rho}_\sigma \rangle_t + \delta\varrho_t(\mathbf{r}),$$

where  $\delta\varrho_t(\mathbf{r})$  is a white-noise in time with a potentially non trivial space correlator which we will specify later. In CSL or DP, the same quantity  $\varrho_t(\mathbf{r})$  is formally a fundamental stochastic (classical) field of the theory which can be taken as physical<sup>2</sup>. In the following section, we will use this field to source gravity. Why is this a better idea than simply using the average  $\langle \hat{\rho}_\sigma \rangle_t$  as one would do in standard semiclassical gravity ? The answer is that the signal is simply a measurement result, and modifying the subsequent evolution of a quantum system based on a measurement result is allowed in orthodox quantum theory ! Therefore, if we use the stochastic field  $\varrho_t(\mathbf{r})$  to source gravity, formally as in a feedback scheme, we will get a theory which, by construction, will be free of the anomalies of standard semiclassical gravity.

In the next section we will apply this program and marry spontaneous collapse with (Newtonian) semiclassical gravity, first for a generic spontaneous collapse model and then in more details in the specific cases of CSL and DP. Technically, we rely on the density matrix formalism and stochastic master equations. Nevertheless everything can

---

2. More precisely, the signal can be taken as the primitive ontology [184, 227, 143] of CSL and DP, *i.e.* as the only local physical stuff living in space, a point of view which was advocated in [229]. We shall not develop this idea in details here but this is another way to see why one would naturally want to use the signal to source gravity.

be recast in the state vector formalism, with the corresponding stochastic Schrödinger equations.

## G.4 Spontaneous monitoring of mass density and back-action

### G.4.1 General case

We now consider a general many-particle spontaneous localization model which includes CSL and DP as specific cases. Formally it is equivalent to the continuous monitoring of the mass density by (hidden) detectors of spatial resolution  $\sigma$ . The detectors are also possibly entangled, which correlates their measurement outcomes. As we have claimed in the previous section, the continuous equivalent of a von-Neumann measurement result, called the signal, reads in this context :

$$\varrho_t(\mathbf{r}) = \langle \hat{\varrho}_\sigma \rangle_t + \delta\varrho_t(\mathbf{r}), \quad (\text{G.4.1})$$

where  $\delta\varrho_t(\mathbf{r})$  is a spatially correlated white-noise (understood with the Itô convention) :

$$\mathbb{E}[\delta\varrho_t(\mathbf{r})\delta\varrho_\tau(\mathbf{s})] = \gamma_{\mathbf{rs}}^{-1}\delta(t - \tau), \quad (\text{G.4.2})$$

and  $\gamma_{\mathbf{rs}}$  is a non-negative kernel which intuitively encodes the correlation between the detectors at positions  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{s}$  (see Fig. G.1). The stochastic master equation (SME) prescribing the dynamics of the system density matrix reads :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i[\hat{H}, \hat{\rho}] - \int d\mathbf{r}d\mathbf{s} \frac{\gamma_{\mathbf{rs}}}{8} [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{s}), \hat{\rho}]] \\ & + \int d\mathbf{r}d\mathbf{s} \frac{\gamma_{\mathbf{rs}}}{2} \mathcal{H}[\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r})] \hat{\rho} \delta\varrho(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

where

$$\mathcal{H}[\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r})](\hat{\rho}) = \{\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}) - \langle \hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle_t, \hat{\rho}_t\}.$$

The Eqs. (G.4.1-G.4.1) complete the specification of our many-particle spontaneous localization model without gravity. We give more mathematical details on the derivation of these equations from continuous measurement theory in the 1.2. In what follows, we will take them as given but we can nevertheless give the reader a quick heuristic understanding of the different terms. The deterministic term with the double commutator in (G.4.3) implements the decoherence induced by the coupling with the detectors and tends to reduce the state purity and to make the density matrix diagonal in the position basis of bulky objects. The stochastic term implements the localization coming from the conditioning on the measurement results : it drives the density matrix towards localized states and exactly compensate the purity loss induced by the decoherence term. For a typical spontaneous localization model like CSL or DP, these two terms are small in the sense that they have a negligible impact on the dynamics of microscopic systems but dominate for macroscopic systems which become well localized in position.

We are now in the position to construct the back-action of the quantized matter on the classical gravitational field. Technically, we make the “monitored” value  $\varrho_t(\mathbf{r})$



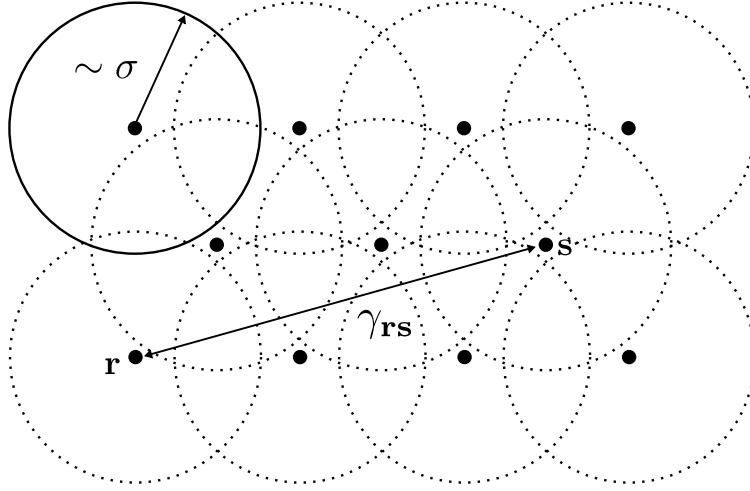


FIGURE G.1 – Intuitive representation of the detectors (here in 2D). The locations of the detectors are represented by black dots on a lattice for simplicity but the reader should imagine that they fill space continuously (or that the lattice spacing is much smaller than all the other length scales). The radius  $\sigma$  represents the spatial resolution of a single detector and  $\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}$  codes for the correlation of the outputs of a detector in  $\mathbf{r}$  and one in  $\mathbf{s}$ . Notice that  $\sigma$  and  $\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}$  represent completely different physical quantities and as such, they can be chosen independently.

(G.4.1) of the matter density the source of the classical Newton potential in the Poisson eq. (G.2.4), instead of  $\langle \hat{\varrho}(\mathbf{r}) \rangle$  :

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \varrho(\mathbf{r}).$$

We should mention that this equation was already present in [253] but the objective of the authors was very different : their aim was to find a possible gravitational origin for the white noise in spontaneous localization models, our objective is essentially opposite. The modified semiclassical Newton potential then becomes stochastic and takes the form :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int d\mathbf{s} \frac{\varrho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

Inserting this field, we obtain the stochastic semiclassical interaction  $\hat{V}_{\text{GscI}}$  of the same form (G.2.5) as before only with the small technical difference that we leave an option of  $\sigma$ -smearing open :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{GscI}} &= \int d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) \hat{\varrho}_{(\sigma)}(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

where  $(\sigma)$  denotes an optional convolution with  $g_\sigma$ . As we will see, this optional smearing will be necessary for DP to avoid divergences but superfluous for CSL.

To introduce this potential into the evolution, we have to be careful because of the multiplicative white-noise (again in the Itô convention). Technically, we introduce it as if it were a feedback, *i.e.* have the potential act an infinitesimal amount of time after the “free” evolution given by Eq. (G.4.3) :

$$\hat{\rho} + d\hat{\rho} = e^{-i\hat{V}_{Gsc1}dt}(\hat{\rho} + d\hat{\rho}^{\text{free}})e^{i\hat{V}_{Gsc1}dt}.$$

More details on how to implement a generic feedback scheme in continuous measurement theory are provided in section 1.2. Expanding the exponential up to second order then gives the SME for the complete evolution :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i \left[ \hat{H} + \hat{V}_{G,\sigma} + \int d\mathbf{r} \delta\varrho(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_{(\sigma)}, \hat{\rho} \right] \\ & - \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} \left( \frac{\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}}{8} [\hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{s}), \hat{\rho}]] + \frac{\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}^{-1}}{2} [\hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{r}), [\hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{s}), \hat{\rho}]] \right) \\ & + \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} \frac{\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}}{2} \mathcal{H}[\hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{r})] \hat{\rho} \delta\varrho(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

where the deterministic part of the back-action Hamiltonian yields

$$\hat{V}_{G,\sigma} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_{(\sigma)}(\mathbf{r}). \quad (\text{G.4.6})$$

This is a remarkable result, it is independent of the strength  $\gamma_{\mathbf{r}\mathbf{s}}$  we assume for monitoring the mass density  $\hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{r})$ . We can write it in the equivalent form :

$$\hat{V}_{G,\sigma} = -\frac{G}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} \frac{\hat{\varrho}_{\sigma}(\mathbf{r}) \hat{\varrho}_{(\sigma)}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

This is the Newton pair-potential of the standard gravitational interaction (G.2.2) — up to smearing of the mass density around the point-like constituents. Note that the semiclassical self-interaction of individual constituents, one of the characteristic features of deterministic standard semiclassical gravity, has been cancelled in our signal-based stochastic semiclassical gravity. More precisely, self interaction only shifts all the energies by a finite quantity (diverging when  $\sigma \rightarrow 0$ ) and thus has no dynamical consequence.

Let us summarize our model of stochastic semiclassical gravity. The mass density  $\hat{\varrho}_{\sigma}$  is spontaneously monitored yielding the signal  $\varrho$  (G.4.1) containing the white noise  $\delta\varrho$  (G.4.2), which is used to create the back-action *on* gravity. The quantum state  $\hat{\rho}$  is evolved by the SME (G.4.5) which implements the back-action *of* gravity. Monitoring leads to local decoherence in  $\hat{\varrho}_{\sigma}$ . Gravitational back-action leads to an additional local decoherence in  $\hat{\Phi}_{(\sigma)}$ . Back-action generates the standard Newton pair-potential up to a microscopic smearing. The stochastic Hamiltonian term directly corresponds to the back-action of the signal noise  $\delta\varrho$ . Eventually, the non-Hamiltonian stochastic term is responsible for the time-continuous collapse, *i.e.*, localization in  $\hat{\varrho}_{\sigma}$ , preventing large quantum fluctuations of mass density and Schrödinger cat sources in particular.

### G.4.2 CSL : Continuous spontaneous localization

This is the simplest spontaneous localization model one can think of. It is a bit *ad hoc* in the sense that it is historically motivated only by the resolution of the measurement problem and has two free parameters, unrelated to gravity. It is on the other hand very simple. It is formally equivalent to the continuous monitoring of the mass density by independent (hidden) detectors, *i.e.* it uses a trivial correlator :

$$\gamma_{\mathbf{rs}} = \gamma\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}). \quad (\text{G.4.7})$$

The standard choice of GRW, which is compatible with experiments carried out up to now, is to take a space cutoff  $\sigma \sim 10^{-5}\text{cm}$  and a strength parameter  $\gamma \sim \hbar^2 \times 10^{16}\text{cm}^3\text{g}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Other choices are possible, see for example Adler [254], but combinations of significantly larger  $\gamma$  and significantly smaller  $\sigma$ , yielding fast spontaneous collapse, are excluded by experiments [78].

Let us recall, for completeness, the measured (monitored) value (G.4.1) of  $\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r})$  :

$$\varrho_t(\mathbf{r}) = \langle \hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle_t + \delta\varrho_t(\mathbf{r}),$$

where, according to (G.4.2) and (G.4.7) :

$$\mathbb{E}[\delta\varrho_t(\mathbf{r})\delta\varrho_\tau(\mathbf{s})] = \frac{1}{\gamma}\delta(t - \tau)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}).$$

In CSL it is possible to define the gravitational potential (G.4.4) via the sharp density without getting infinities so we do it for simplicity :

$$\hat{V}_{\text{Gsel}} = \int d\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r})\hat{\varrho}(\mathbf{r}).$$

This yields the SME (G.4.5) :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= -i \left[ \hat{H} + \hat{V}_{G,\sigma} + \int d\mathbf{r}\delta\varrho(\mathbf{r})\hat{\Phi}, \hat{\rho} \right] \\ &\quad - \int d\mathbf{r} \left( \frac{\gamma}{8} [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] + \frac{1}{2\gamma} [\hat{\Phi}(\mathbf{r}), [\hat{\Phi}(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] \right) \\ &\quad + \int d\mathbf{r} \frac{\gamma}{2} \mathcal{H}[\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r})] \hat{\rho} \delta\varrho(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

where the back-action Hamiltonian (G.4.6) takes the following symmetric form :

$$\hat{V}_{G,\sigma} = -\frac{G}{2} \int d\mathbf{r}d\mathbf{s} \frac{\hat{\varrho}_{\sigma/\sqrt{2}}(\mathbf{r})\hat{\varrho}_{\sigma/\sqrt{2}}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

The first decoherence term  $-\int d\mathbf{r} \frac{\gamma}{8} [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]]$  is already present in CSL so we will only discuss the second one,  $\hat{D}_G[\hat{\rho}] = -\int d\mathbf{r} \frac{1}{2\gamma} [\hat{\Phi}(\mathbf{r}), [\hat{\Phi}(\mathbf{r}), \hat{\rho}]]$ , introduced by the back-action noise of the coupling with gravity. We consider the case of a single particle of mass  $m$  and density matrix  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . In this case, the contribution of the back-action decoherence to the dynamics of  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  can luckily be computed explicitly :

$$\begin{aligned} D_G[\hat{\rho}](\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{G^2 m^2}{8\gamma} \int d\mathbf{r} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|} \right)^2 \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\pi G^2 m^2}{2\gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

So the back-action decoherence term simply damps the phases of the density matrix proportionally with the distance  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  separating the positions (in real space) considered. This is to be contrasted with decoherence coming from CSL's  $\hat{\rho}_\sigma$ -decoherence itself which increases quadratically for short ( $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll \sigma$ ) and saturates for long ( $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg \sigma$ ) distances. This means that depending on the value of  $\gamma$ , either back-action decoherence dominates at every scale or it dominates at very short and very long distances. Back-action decoherence also globally increases when the strength of collapse  $\gamma$  decreases and could give a stringent lower bound on the collapse rate. This is fundamental because the only lower bounds currently available for the collapse rate are of metaphysical origin [78], *i.e.* one requires that the collapse model gives a philosophically satisfactory description of the macroscopic world. The coupling with gravity thus provides empirical constraints on the lower bound although the details deserve additional investigations.

### G.4.3 DP — Gravity related spontaneous collapse

This model was historically constructed in order to reduce macroscopic quantum fluctuations of mass density [44, 44] and to solve the measurement problem with the help of heuristic considerations involving gravity which we will not develop here. It is equivalent with spontaneous monitoring of  $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$  by spatially correlated (hidden) detectors. DP thus uses the slightly less trivial correlator :

$$\gamma_{\mathbf{rs}} = \kappa G \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (\text{G.4.9})$$

where  $G$  is the gravitational constant. The obvious interest of this form is that the constant  $\kappa$  is now a dimensionless parameter which will be fixed to 2 soon by an additional physical consideration. In DP, the localization strength is thus tightly related to gravity right from the start and there is one less free parameter than in CSL.<sup>3</sup> The more complicated form of (G.4.9) will also help us get a more symmetric SME in the end.

The inverse kernel is quasi-local :

$$\gamma_{\mathbf{rs}}^{-1} = -\frac{1}{4\pi\kappa G} \delta(t - \tau) \nabla^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}). \quad (\text{G.4.10})$$

Recall the measured (monitored) value (G.4.1) of  $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$ , for completeness :

$$\varrho_{\sigma,t}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle_t + \delta\varrho_t(\mathbf{r}),$$

where, according to (G.4.2) and (G.4.10) :

$$\mathbb{E}[\delta\varrho_t(\mathbf{r})\delta\varrho_\tau(\mathbf{s})] = -\frac{1}{4\pi\kappa G} \delta(t - \tau) \nabla^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}).$$

---

3. There is however a difficulty to fix the spacial cut-off  $\sigma$  in a way which is consistent with experiments [255]. In [250], one of the present authors nevertheless supported the natural cutoff  $\sigma \sim 10^{-12}$  cm and worked out an SME to lift earlier conflicts with experiments.

In DP we have to use the smeared density in (G.4.4) to avoid divergences :

$$\hat{V}_{\text{GscI}} = \int d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) \hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}).$$

This yields the SME (G.4.5) :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i \left[ \hat{H} + \hat{V}_{G,\sigma} + \int d\mathbf{r} \delta\varrho(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_\sigma, \hat{\rho} \right] - \frac{\kappa G}{8} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] \\ & - \frac{1}{8\pi\kappa G} \int d\mathbf{r} [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] + \frac{\kappa G}{2} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \mathcal{H}[\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r})] \hat{\rho} \delta\varrho(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

where the back-action Hamiltonian (G.4.6) takes the following symmetric form :

$$\hat{V}_{G,\sigma} = -\frac{G}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{s} \frac{\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}) \hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

Observe that, due to the quasi-locality of (G.4.10), the back-action decoherence has become local in the Newton acceleration field  $\nabla \hat{\Phi}_\sigma$ . Interestingly, this structure coincides with the typical non-local  $\hat{\varrho}_\sigma$ -decoherence term caused by DP spontaneous collapses. The two decoherence terms can be united into the following local form :

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa G}{8} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), [\hat{\varrho}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] - \frac{1}{8\pi\kappa G} \int d\mathbf{r} [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] \\ = & -\left(\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{\kappa}\right) \frac{1}{8\pi G} \int d\mathbf{r} [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]]. \end{aligned}$$

If we now require that decoherence be minimal in the full model of DP-based stochastic semiclassical gravity, which seems to be a reasonable physical assumption, we get  $\kappa = 2$ . The ultimate local form of the SME (G.4.11) then reads :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i \left[ \hat{H} + \hat{V}_{G,\sigma} + \int d\mathbf{r} \delta\varrho(\mathbf{r}) \hat{\Phi}_\sigma, \hat{\rho} \right] - \frac{1}{8\pi G} \int d\mathbf{r} [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), [\nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\rho}]] \\ & - \int d\mathbf{r} \mathcal{H}[\hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r})] \hat{\rho} \delta\varrho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

where back-action has just doubled the decoherence term of the initial DP model. Historically, this doubling had been derived in [240] while [241] had cancelled it by an *ad hoc* mean-field ansatz.

## G.5 Related approaches

This work can be contrasted with earlier non-standard approaches to semiclassical gravity. A stochastic semiclassical theory of gravity [256] (see also [145]) was proposed a long time ago. The objective of the authors was to phenomenologically relax the ignorance of the standard source term  $\langle \Psi | \hat{T}_{ab} | \Psi \rangle$  with respect to quantum fluctuations. In their model, the Einstein equation takes a stochastic form similar to ours (G.1.2) but the stochastic noise  $\delta T_{ab}$  is constructed to mimic the quantum fluctuations of  $\hat{T}_{ab}$  and is not related to spontaneous monitoring. The dynamics of the quantum state  $|\Psi\rangle$  remains non-linear on each sample of the classical background space-time and does

not include any collapse mechanism. As a result, it still suffers from the anomalies of the standard semiclassical theory which are caused by the coupling to  $\langle \Psi | \hat{T}_{ab} | \Psi \rangle$ . Similarly, even if the recent approach [146] includes the GRW discrete spontaneous collapse mechanism which suppresses macroscopic Schrödinger-cat states, the author uses the average mass density to source the gravitational field which pushes him to propose a statistical interpretation different from the standard Born rule.

Recently, the Newtonian sector of semiclassical gravity has been investigated with approaches bearing some similarities with the present work. In [257], the authors attack a slightly more specific problem and attempt to cure the faster-than-light communication anomaly of the Schrödinger-Newton equation (G.2.6). They supplement it with an *ad hoc* nonlinear stochastic term. The modified dynamics leads, like ours does, to the unconditional DP master equation which is free of the usual anomalies of semiclassical gravity. Yet, interestingly, the semiclassical coupling cancels out, without leaving the Newton pair-potential behind. This *ad hoc* stochastic semiclassical gravity thus lacks a gravitational interaction. On the contrary, in our approach, the analogue of the Schrödinger-Newton equation (G.2.6) reads :

$$\begin{aligned} \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = & -i \left( \hat{H} + \hat{V}_{G,\sigma} \right) |\Psi\rangle \\ & - \frac{1}{8\pi G} \int d\mathbf{r} \left( \nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}) - \langle \nabla \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle \right)^2 |\Psi\rangle \\ & - (1+i) \int d\mathbf{r} \left( \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}) - \langle \hat{\Phi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle \right) \delta \varrho(\mathbf{r}) |\Psi\rangle \end{aligned}$$

which can be obtained from (G.4.12) writing  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Note that the semiclassical potential of (G.2.6) becomes a pair-potential in our version.

We should eventually mention the pioneering work of Kafri *et al.* [258]. The authors formulate a theory conceptually similar to ours in a quantum communication context. Classical (non-quantum) gravity between two objects is interpreted as a classical measurement channel. In this context, the word “classical” means the channel cannot entangle the two separated objects. The two-body toy model of [258] turns out to be a specific case of the stochastic semiclassical gravity with the DP signal (Sec. G.4.3) and anticipates its remarkable quantum informational features. The toy model operates at the noise threshold where the Newton interaction cannot entangle the two objects any more. How our theory satisfies this informational condition of classicality in the general case is an interesting subject for future work.

## G.6 Summary, outlook

In this article, we have shown how to source a classical gravitational field from spontaneously localized quantum particles. Using the fact that localization models are formally equivalent to continuous quantum measurement models, we have introduced a new quantity, the signal, and promoted it to the status of physical source of the gravitational field. In terms of quantum control, back-action has been formally realized as a dynamical feedback based on the signal. One of us argued earlier that signal, *i.e.* : quantum measurement outcome, is the only variable tangible for control like feedback [259]. This fact gives a justification for spontaneous collapse models as they seem to

be the *only* way to couple a quantum theory of matter with a classical theory of space-time. Spontaneous localization models are seen by many as an *ad hoc* method to solve the measurement problem. However, the fact that they seem unavoidable for a classical-quantum coupling is one of their less known yet remarkable feature.

Our model is mathematically tractable and makes some precise and testable predictions. We have shown that it gives rise to the expected Newtonian pair potential up to a small correction at short distances coming from the spatial cut-off of the underlying localization model. This pair potential does not give rise to 1 particle self-interaction which means that such a self interaction is not a necessary consequence of semiclassical gravity as it is often believed. Failing to see self-interaction in experiments [246, 247] would prove the failure of the Schrödinger-Newton equation, but it would not imply the quantization of gravity. Additionally, gravitational back-action introduces a new decoherence term which depends strongly on the underlying localization model chosen. In CSL, gravitational back-action adds a decoherence term which increases linearly with distance, has consequently no characteristic scale and is independent on the microscopic details of the theory. This decoherence term also globally increases when the collapse strength decreases which makes low values of  $\gamma$  experimentally falsifiable (and not only metaphysically unsatisfying). In DP, the additional decoherence term takes the same form as the original intrinsic decoherence which makes the final equations very symmetric. In this case, the fact that gravitational decoherence increases when the collapse strength decreases allows us to find a global minimum for decoherence which singles out the gravitational constant  $G$  as the collapse strength.

Eventually, as it solves the inconsistencies of standard semiclassical gravity in the Newtonian regime, our model –or class of models– is a sound first step in the construction of a full relativistic semiclassical theory of gravity. In the relativistic realm, the covariant equation of back-action should be given by the stochastic Einstein equation (G.1.2) with noise  $\delta T_{ab}$ . However even the basic principles governing a theory of covariant continuous monitoring are still problematic. Working with white-noises (the Markovian case), the only Lorentz covariant possibility is the one with both temporally and spatially uncorrelated noise, which leads to fatal divergences [43] once it is coupled to local quantum fields. The divergences can be eliminated through a covariant smearing depending on  $\langle T_{ab} \rangle$  [31], but such a non-linear addition would be in conflict with the aims of the present article. Another possibility is to use colored noises right from start. Such a non-Markovian field-theoretic formalism of monitoring and feedback was laid down a long time ago [240]. In the Markovian limit, it yielded –albeit in a different formalism– exactly the theory presented in the 1.2 and used throughout the present article. However a serious difficulty of this approach comes from the non-instantaneous availability of the non-Markovian signal [30, 28, 29]. Making our model relativistic is thus not just a purely technical task and many additional unexpected obstacles might be encountered in the way. In the worst case, if these hurdles cannot be overcome, our model may still provide a consistent phenomenology of the Newtonian setting. Hoping that some of its features survive the generalisation, applications of this model to specific problems of physical interest could be explored even if a fully consistent theory is still lacking. In this spirit, applications to black-holes and cosmological models of the early universe might be tractable and should definitely be considered in the future.

# Liste de publications

- 1)→ [1] *Zooming in on quantum trajectories*, M. Bauer, D. Bernard, AT, *J. Phys. A Letters* (2016) **49** 10LT01 “IOPSelect”,  
reproduit en appendice **E**
- 2)→ [2] *Efficient readout of a register of (qu)bits*, AT, accepté à *Phys. Rev. A*  
reproduit en appendice **F**
- 3)→ [3] *Sourcing semiclassical gravity from spontaneously localized quantum matter*, AT, L. Diósi, *Phys. Rev. D* (2016) **93** 024026  
reproduit en appendice **G**
- 4)→ [4] *Spikes in quantum trajectories*, AT, M. Bauer, D. Bernard, *Phys. Rev. A* (2015) **92** 052111  
reproduit en appendice **D**
- 5)→ [5] *Computing the rates of measurement induced quantum jumps*, M. Bauer, D. Bernard, AT, *J. Phys. A : Math. Theor.* (2015) **48** 25FT02 “IOPSelect”,  
reproduit en appendice **C**
- 6)→ [6] *Controlling quantum flux through measurement : An idealised example*, AT, M. Bauer, D. Bernard, *EPL* (2014) **107** 20010  
non reproduit
- 7)→ [7] *The open quantum Brownian motions*, M. Bauer, D. Bernard, AT, *J. Stat. Mech.* (2014) P09001  
non reproduit
- 8)→ [8] *Open quantum random walks : bistability on pure states and ballistically induced diffusion*, M. Bauer, D. Bernard, AT, *Phys. Rev. A* (2013) **88** (6), 062340  
non reproduit





# Bibliographie

- [1] M. Bauer, D. Bernard, et A. Tilloy, “Zooming in on quantum trajectories,” *J. Phys. A : Math. Theor.* **49**, 10LT01 (2016). [i](#), [39](#), [161](#), [203](#)
- [2] A. Tilloy, “Efficient readout of a register of qubits,” accepté à *Phys. Rev. A* (2016). [i](#), [171](#), [203](#)
- [3] A. Tilloy et L. Diósi, “Sourcing semiclassical gravity from spontaneously localized quantum matter,” *Phys. Rev. D* **93**, 024026 (2016). [i](#), [189](#), [203](#)
- [4] A. Tilloy, M. Bauer, et D. Bernard, “Spikes in quantum trajectories,” *Physical Review A* **92**, 052111 (2015). [i](#), [8](#), [39](#), [124](#), [147](#), [162](#), [164](#), [174](#), [203](#)
- [5] M. Bauer, D. Bernard, et A. Tilloy, “Computing the rates of measurement-induced quantum jumps,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **48**, 25FT02 (2015). [i](#), [131](#), [147](#), [160](#), [161](#), [203](#)
- [6] A. Tilloy, M. Bauer, et D. Bernard, “Controlling quantum flux through measurement : An idealised example,” *EPL (Europhysics Letters)* **107**, 20010 (2014). [i](#), [64](#), [71](#), [135](#), [203](#)
- [7] M. Bauer, D. Bernard, et A. Tilloy, “The open quantum brownian motions,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2014**, P09001 (2014). [i](#), [7](#), [13](#), [17](#), [74](#), [75](#), [136](#), [152](#), [203](#)
- [8] M. Bauer, D. Bernard, et A. Tilloy, “Open quantum random walks : Bistability on pure states and ballistically induced diffusion,” *Phys. Rev. A* **88**, 062340 (2013). [i](#), [75](#), [76](#), [77](#), [132](#), [136](#), [156](#), [203](#)
- [9] J. Bricmont, *Making Sense of Quantum Mechanics* (Springer, 2016). [i](#), [4](#), [112](#), [113](#), [124](#), [126](#)
- [10] J. Bell, “Against ‘measurement’,” *Physics world* **3**, 33 (1990). [2](#)
- [11] A. Bassi et G. Ghirardi, “A general argument against the universal validity of the superposition principle,” *Physics Letters A* **275**, 373–381 (2000). [2](#)
- [12] M. Esfeld, “Essay review wigner’s view of physical reality,” *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **30**, 145–154 (1999). [4](#)
- [13] T. A. Brun, “A simple model of quantum trajectories,” *American Journal of Physics* **70**, 719–737 (2002). [4](#), [172](#)
- [14] K. Jacobs et D. A. Steck, “A straightforward introduction to continuous quantum measurement,” *Contemporary Physics* **47**, 279–303 (2006). [4](#), [163](#), [172](#)
- [15] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups,” *Comm. Math. Phys.* **48**, 119–130 (1976). [6](#)

- [16] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche, “Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting,” *Nature* **448**, 889–893 (2007). [6](#), [132](#), [156](#), [161](#)
- [17] D. Hume, T. Rosenband, et D. Wineland, “High-fidelity adaptive qubit detection through repetitive quantum nondemolition measurements,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 120502 (2007). [6](#), [132](#), [156](#)
- [18] H. M. Wiseman et G. J. Milburn, *Quantum measurement and control* (Cambridge University Press, 2009). [8](#), [9](#), [133](#), [163](#), [172](#), [173](#), [185](#)
- [19] H. M. Wiseman et J. Ralph, “Reconsidering rapid qubit purification by feedback,” *New Journal of Physics* **8**, 90 (2006). [9](#), [55](#), [176](#)
- [20] B. Oksendal, *Stochastic differential equations : an introduction with applications*, vol. 5 (Springer New York, 1992). [10](#), [12](#), [20](#), [138](#), [150](#), [167](#), [168](#)
- [21] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2 (John Wiley & Sons, 2008). [10](#), [138](#), [150](#), [168](#)
- [22] T. Huillet, “Diffusion versus jump processes arising as scaling limits in population genetics,” *Journal of Statistics : Advances in Theory and Applications*. p. 85–154 (2012). [12](#)
- [23] T. Huillet, “On the karlin ? kimura approaches to the wright ? fisher diffusion with fluctuating selection,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2011**, P02016 (2011). [12](#)
- [24] L. Diósi et W. T. Strunz, “The non-markovian stochastic schrödinger equation for open systems,” *Physics Letters A* **235**, 569–573 (1997). [15](#)
- [25] L. Diósi, N. Gisin, et W. T. Strunz, “Non-markovian quantum state diffusion,” *Phys. Rev. A* **58**, 1699–1712 (1998). [15](#)
- [26] L. Diósi et L. Ferialdi, “General non-markovian structure of gaussian master and stochastic schrödinger equations,” *Phys. Rev. Lett.* **113**, 200403 (2014). [15](#)
- [27] L. Ferialdi et A. Bassi, “Exact solution for a non-markovian dissipative quantum dynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 170404 (2012). [15](#)
- [28] L. Diósi, “Non-markovian continuous quantum measurement of retarded observables,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080401 (2008). [15](#), [202](#)
- [29] L. Diósi, “Erratum : Non-markovian continuous quantum measurement of retarded observables [phys. rev. lett. **100** , 080401 (2008)],” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 149902 (2008). [15](#), [202](#)
- [30] H. M. Wiseman et J. M. Gambetta, “Pure-state quantum trajectories for general non-markovian systems do not exist,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140401 (2008). [15](#), [202](#)
- [31] D. J. Bedingham, “Relativistic state reduction dynamics,” *Foundations of Physics* **41**, 686–704 (2011). [16](#), [27](#), [89](#), [202](#)
- [32] P. Pearle, “Relativistic dynamical collapse model,” *Physical Review D* **91**, 105012 (2015). [16](#), [27](#), [108](#)
- [33] V. Belavkin, “Quantum filtering of markov signals with white quantum noise,” arXiv preprint quant-ph/0512091 (2005). [16](#)

- [34] A. Barchielli, L. Lanz, et G. Prosperi, “A model for the macroscopic description and continual observations in quantum mechanics,” *Il Nuovo Cimento B* (1971-1996) **72**, 79–121 (1982). [16](#)
- [35] M. Mensky, “Quantum restrictions for continuous observation of an oscillator,” *Phys. Rev. D* **20**, 384 (1979). [16](#)
- [36] A. Barchielli, “Measurement theory and stochastic differential equations in quantum mechanics,” *Phys. Rev. A* **34**, 1642–1649 (1986). [16](#), [132](#), [153](#), [163](#), [172](#)
- [37] C. M. Caves et G. Milburn, “Quantum-mechanical model for continuous position measurements,” *Phys. Rev. A* **36**, 5543 (1987). [16](#), [132](#), [153](#), [172](#)
- [38] L. Diosi, “Continuous quantum measurement and ito formalism,” *Physics Letters A* **129**, 419–423 (1988). [16](#), [172](#)
- [39] V.-P. Belavkin, “Quantum continual measurements and a posteriori collapse on ccr,” *Comm. Math. Phys.* **146**, 611–635 (1992). [16](#), [132](#), [153](#), [163](#), [172](#)
- [40] A. Barchielli et V.-P. Belavkin, “Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics,” *J. Phys. A* **24**, 1495 (1991). [16](#), [132](#), [153](#), [172](#)
- [41] N. Gisin, “Weinberg’s non-linear quantum mechanics and supraluminal communications,” *Physics Letters A* **143**, 1 – 2 (1990). [16](#), [82](#), [83](#), [190](#)
- [42] P. Pearle, “Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization,” *Physical Review A* **39**, 2277 (1989). [16](#), [193](#)
- [43] P. Pearle, “Toward a relativistic theory of statevector reduction,” dans “Sixty-two years of uncertainty,” (Springer, 1990), p. 193–214. [16](#), [202](#)
- [44] L. Diosi, “A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics,” *Physics letters A* **120**, 377–381 (1987). [16](#), [23](#), [193](#), [194](#), [199](#)
- [45] L. Diosi, “Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations,” *Physical Review A* **40**, 1165 (1989). [16](#), [24](#), [193](#), [194](#)
- [46] G. C. Ghirardi, A. Rimini, et T. Weber, “Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems,” *Phys. Rev. D* **34**, 470 (1986). [16](#), [23](#), [27](#), [144](#), [156](#), [193](#)
- [47] F. Simon, “Application des équations stochastiques quantiques à l’étude des mesures continues de systèmes ouverts,” (2015). Contacter l’auteur pour une version électronique. [16](#)
- [48] R. L. Hudson et K. R. Parthasarathy, “Quantum ito’s formula and stochastic evolutions,” *Communications in Mathematical Physics* **93**, 301–323 (1984). [17](#)
- [49] S. Attal et Y. Pautrat, “From repeated to continuous quantum interactions,” dans “*Annales Henri Poincaré*,” , vol. 7 (Springer, 2006), vol. 7, p. 59–104. [17](#), [132](#), [152](#)
- [50] L. Accardi, A. Frigerio, et Y. Lu, “The weak coupling limit as a quantum functional central limit,” *Communications in mathematical physics* **131**, 537–570 (1990). [17](#)
- [51] L. Accardi, A. Frigerio, et Y. G. Lu, “The quantum weak coupling limit (ii) : Langevin equation and finite temperature case,” *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **31**, 545–576 (1995). [17](#)

- [52] S. Attal et A. Joye, “The langevin equation for a quantum heat bath,” *Journal of Functional Analysis* **247**, 253–288 (2007). [17](#)
- [53] S. Attal, *Quantum noises* (Springer, 2006). [17](#)
- [54] L. Diósi, “Stochastic pure state representation for open quantum systems,” *Physics Letters A* **114**, 451 – 454 (1986). [18](#), [190](#)
- [55] J. Dalibard, Y. Castin, et K. Mølmer, “Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics,” *Physical review letters* **68**, 580 (1992). [18](#)
- [56] C. Gardiner, A. Parkins, et P. Zoller, “Wave-function quantum stochastic differential equations and quantum-jump simulation methods,” *Physical Review A* **46**, 4363 (1992). [18](#)
- [57] K. Mølmer, Y. Castin, et J. Dalibard, “Monte carlo wave-function method in quantum optics,” *JOSA B* **10**, 524–538 (1993). [18](#)
- [58] D. J. Bedingham, “Hidden variable interpretation of spontaneous localization theory,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **44**, 275303 (2011). [19](#), [124](#)
- [59] R. Tumulka, “Comment on ‘hidden variable interpretation of spontaneous localization theory’,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **44**, 478001 (2011). [19](#), [124](#)
- [60] F. Laloë, “Modified schrödinger dynamics with attractive densities,” *The European Physical Journal D* **69**, 1–8 (2015). [19](#), [118](#)
- [61] A. Chantasri, J. Dressel, et A. Jordan, “Action principle for continuous quantum measurement,” *Phys. Rev. A* **88**, 042110 (2013). [21](#), [30](#), [132](#), [136](#), [147](#)
- [62] M. F. Pusey, J. Barrett, et T. Rudolph, “On the reality of the quantum state,” *Nature Physics* **8**, 475–478 (2012). [22](#), [155](#)
- [63] M. Ballesteros, M. Fraas, J. Fröhlich, et B. Schubnel, “Indirect acquisition of information in quantum mechanics,” *Journal of Statistical Physics* p. 1–35 (2015). [23](#)
- [64] G. Ghirardi, P. Pearle, et A. Rimini, “Markov processes in hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles,” *Physical Review A* **42**, 78 (1990). [23](#), [194](#)
- [65] A. Bassi, D. Dürr, et G. Hinrichs, “Uniqueness of the equation for quantum state vector collapse,” *Phys. Rev. Lett.* **111**, 210401 (2013). [23](#)
- [66] L. Diósi, “Comment on “uniqueness of the equation for quantum state vector collapse”,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 108901 (2014). [23](#)
- [67] A. Bassi et D. Duerr, “On the long-time behavior of hilbert space diffusion,” *EPL (Europhysics Letters)* **84**, 10005 (2008). [24](#), [38](#)
- [68] A. Bassi, D. Duerr, et M. Kolb, “On the long time behavior of free stochastic schrödinger evolutions,” *Reviews in Mathematical Physics* **22**, 55–89 (2010). [24](#), [38](#)
- [69] R. Penrose, “On gravity’s role in quantum state reduction,” *General relativity and gravitation* **28**, 581–600 (1996). [26](#), [193](#), [194](#)

- [70] R. Penrose, “Quantum computation, entanglement and state reduction,” *Philosophical transactions- Royal Society of London, Series A Mathematical Physical and Engineering Sciences* p. 1927–1937 (1998). [26](#), [194](#)
- [71] R. Penrose, “On the gravitization of quantum mechanics 1 : Quantum state reduction,” *Foundations of Physics* **44**, 557–575 (2014). [26](#), [194](#)
- [72] A. Bassi et G. Ghirardi, “Dynamical reduction models,” *Physics Reports* **379**, 257–426 (2003). [26](#), [144](#), [155](#), [161](#)
- [73] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh, et H. Ulbricht, “Models of wavefunction collapse, underlying theories, and experimental tests,” *Reviews of Modern Physics* **85**, 471 (2013). [26](#), [161](#), [193](#)
- [74] R. Tumulka, “Paradoxes and Primitive Ontology in Collapse Theories of Quantum Mechanics,” *ArXiv e-prints* (2011). [26](#)
- [75] A. Bassi, E. Ippoliti, et B. Vacchini, “On the energy increase in space-collapse models,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38**, 8017 (2005). [27](#)
- [76] A. Bassi, D.-A. Deckert, et L. Ferialdi, “Breaking quantum linearity : Constraints from human perception and cosmological implications,” *EPL (Europhysics Letters)* **92**, 50006 (2010). [27](#)
- [77] R. Tumulka, “A relativistic version of the ghirardi–rimini–weber model,” *Journal of Statistical Physics* **125**, 821–840 (2006). [27](#), [121](#)
- [78] W. Feldmann et R. Tumulka, “Parameter diagrams of the grw and csl theories of wavefunction collapse,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **45**, 065304 (2012). [28](#), [88](#), [198](#), [199](#)
- [79] W. Pauli et L. Curtiss, “Niels bohr and the development of physics,” *American Journal of Physics* **24**, 292–292 (1956). [29](#)
- [80] R. Azouit, A. Sarlette, et P. Rouchon, “Adiabatic elimination for open quantum systems with effective Lindblad master equations,” *ArXiv e-prints* (2016). [30](#)
- [81] G. Mazzucchi, W. Kozłowski, S. F. Caballero-Benitez, T. J. Elliott, et I. B. Mekhov, “Quantum measurement-induced dynamics of many-body ultracold bosonic and fermionic systems in optical lattices,” *Phys. Rev. A* **93**, 023632 (2016). [30](#)
- [82] W. Kozłowski, S. F. Caballero-Benitez, et I. B. Mekhov, “Non-hermitian dynamics in the quantum zeno limit,” *arXiv preprint arXiv :1510.04857* (2015). [30](#)
- [83] T. J. Elliott et V. Vedral, “Quantum quasi-zeno dynamics : Transitions mediated by frequent projective measurements near the zeno regime,” *arXiv preprint arXiv :1601.06624* (2016). [30](#)
- [84] L. Bretheau, P. Campagne-Ibarcq, E. Flurin, F. Mallet, et B. Huard, “Quantum dynamics of an electromagnetic mode that cannot contain n photons,” *Science* **348**, 776–779 (2015). [30](#)
- [85] D. Slichter, C. Müller, R. Vijay, S. Weber, A. Blais, et I. Siddiqi, “Quantum zeno effect in the strong measurement regime of circuit quantum electrodynamics,” *arXiv preprint arXiv :1512.04006* (2015). [30](#)

- [86] M. Bauer et D. Bernard, “Real time imaging of quantum and thermal fluctuations : the case of a two-level system,” *Letters in Mathematical Physics* **104**, 707–729 (2014). [31](#), [132](#), [133](#), [136](#), [147](#), [150](#), [163](#)
- [87] M. Bauer, “The music of quantum spikes,” (2015). Communication personnelle. [45](#)
- [88] H. Tanaka *et al.*, “Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions,” *Hiroshima Math. J* **9**, 163–177 (1979). [49](#), [167](#)
- [89] K. Jacobs, “How to project qubits faster using quantum feedback,” *Physical Review A* **67**, 030301 (2003). [54](#), [55](#), [161](#), [176](#)
- [90] H. M. Wiseman et L. Bouten, “Optimality of feedback control strategies for qubit purification,” *Quantum Information Processing* **7**, 71–83 (2008). [55](#)
- [91] C. Teo, J. Combes, et H. M. Wiseman, “Global versus local optimality in feedback-controlled qubit purification : new insights from minimizing rényi entropies,” *New Journal of Physics* **16**, 105010 (2014). [55](#)
- [92] J. Combes et K. Jacobs, “Rapid state reduction of quantum systems using feedback control,” *Physical review letters* **96**, 010504 (2006). [55](#), [176](#)
- [93] J. Combes, H. M. Wiseman, K. Jacobs, et A. J. O’Connor, “Rapid purification of quantum systems by measuring in a feedback-controlled unbiased basis,” *Physical Review A* **82**, 022307 (2010). [55](#), [176](#)
- [94] J. Combes et H. M. Wiseman, “Maximum information gain in weak or continuous measurements of qudits : complementarity is not enough,” *Physical Review X* **1**, 011012 (2011). [55](#), [172](#)
- [95] R. Ruskov, J. Combes, K. Mølmer, et H. M. Wiseman, “Qubit purification speed-up for three complementary continuous measurements,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **370**, 5291–5307 (2012). [55](#)
- [96] J. Combes, H. M. Wiseman, et A. J. Scott, “Replacing quantum feedback with open-loop control and quantum filtering,” *Physical Review A* **81**, 020301 (2010). [55](#), [56](#), [172](#)
- [97] J. Combes, H. M. Wiseman, et K. Jacobs, “Rapid measurement of quantum systems using feedback control,” *Physical review letters* **100**, 160503 (2008). [56](#), [58](#), [161](#), [172](#), [175](#), [176](#), [177](#), [183](#)
- [98] J. Combes, A. Denney, et H. M. Wiseman, “Rapid readout of a register of qubits using open-loop quantum control,” *Physical Review A* **91**, 022305 (2015). [57](#), [58](#), [161](#), [172](#), [175](#), [177](#), [179](#), [183](#), [184](#), [186](#)
- [99] R. W. Hamming, “Error detecting and error correcting codes,” *Bell System technical journal* **29**, 147–160 (1950). [57](#), [176](#)
- [100] S. Ling et C. Xing, *Coding theory : a first course* (Cambridge University Press, 2004). [59](#)
- [101] M. Plotkin, “Binary codes with specified minimum distance,” *Information Theory, IRE Transactions on* **6**, 445–450 (1960). [59](#)

- [102] R. C. Singleton, “Maximum distance q-nary codes,” *Information Theory, IEEE Transactions on* **10**, 116–118 (1964). 59
- [103] F. Verstraete, V. Murg, et J. I. Cirac, “Matrix product states, projected entangled pair states, and variational renormalization group methods for quantum spin systems,” *Advances in Physics* **57**, 143–224 (2008). 61
- [104] F. Verstraete et J. I. Cirac, “Matrix product states represent ground states faithfully,” *Physical Review B* **73**, 094423 (2006). 61
- [105] R. Van Handel, J. K. Stockton, et H. Mabuchi, “Feedback control of quantum state reduction,” *Automatic Control, IEEE Transactions on* **50**, 768–780 (2005). 63
- [106] M. Mirrahimi et R. Van Handel, “Stabilizing feedback controls for quantum systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization* **46**, 445–467 (2007). 63
- [107] A. Balouchi et K. Jacobs, “Optimal measurement-based feedback control for a single qubit : a candidate protocol,” *New Journal of Physics* **16**, 093059 (2014). 63
- [108] K. Jacobs, “Feedback control using only quantum back-action,” *New Journal of Physics* **12**, 043005 (2010). 63
- [109] S. Ashhab et F. Nori, “Control-free control : Manipulating a quantum system using only a limited set of measurements,” *Phys. Rev. A* **82**, 062103 (2010). 63
- [110] S. Fu, G. Shi, A. Proutiere, et M. R. James, “Feedback policies for measurement-based quantum state manipulation,” *Phys. Rev. A* **90**, 062328 (2014). 63
- [111] G. P. Harmer et D. Abbott, “A review of parrondo’s paradox,” *Fluctuation and Noise Letters* **2**, R71–R107 (2002). 71
- [112] E. M. Craig, N. J. Kuwada, B. J. Lopez, et H. Linke, “Feedback control in flashing ratchets,” *Annalen der Physik* **17**, 115–129 (2008). 71
- [113] B. J. Lopez, N. J. Kuwada, E. M. Craig, B. R. Long, et H. Linke, “Realization of a feedback controlled flashing ratchet,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 220601 (2008). 71
- [114] Y. A. Makhnovskii, V. Rozenbaum, D.-Y. Yang, S. Lin, et T. Tsong, “Flashing ratchet model with high efficiency,” *Phys. Rev. E* **69**, 021102 (2004). 71
- [115] C. Brif, R. Chakrabarti, et H. Rabitz, “Control of quantum phenomena : past, present and future,” *New Journal of Physics* **12**, 075008 (2010). 72
- [116] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, et I. Sinayskiy, “Open quantum random walks,” *Journal of Statistical Physics* **147**, 832–852 (2012). 72, 76
- [117] S. Attal, F. Petruccione, et I. Sinayskiy, “Open quantum walks on graphs,” *Physics Letters A* **376**, 1545–1548 (2012). 72
- [118] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Open quantum walks : a short introduction,” dans “*Journal of Physics : Conference Series*,” , vol. 442 (IOP Publishing, 2013), vol. 442, p. 012003. 72
- [119] J. Kempe, “Quantum random walks : an introductory overview,” *Contemporary Physics* **44**, 307–327 (2003). 72



- [120] L. K. Grover, “A fast quantum mechanical algorithm for database search,” dans “Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing,” (ACM, 1996), p. 212–219. [72](#)
- [121] F. Petruccione et I. Sinayskiy, “Open quantum walks as a tool for dissipative quantum computing,” dans “Quantum Information and Measurement,” (Optical Society of America, 2012), p. QW4A–1. [72](#)
- [122] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Efficiency of open quantum walk implementation of dissipative quantum computing algorithms,” *Quantum Information Processing* **11**, 1301–1309 (2012). [72](#)
- [123] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Microscopic derivation of open quantum walk on two-node graph,” *Open Systems & Information Dynamics* **20**, 1340007 (2013). [72](#)
- [124] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Quantum optical implementation of open quantum walks,” *International Journal of Quantum Information* **12**, 1461010 (2014). [72](#)
- [125] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Microscopic derivation of open quantum walks,” *Physical Review A* **92**, 032105 (2015). [72](#)
- [126] I. Sinayskiy et F. Petruccione, “Microscopic derivation of open quantum brownian motion : a particular example,” *Physica Scripta* **2015**, 014017 (2015). [72](#)
- [127] R. Carbone et Y. Pautrat, “Homogeneous open quantum random walks on a lattice,” *Journal of Statistical Physics* **160**, 1125–1153 (2015). [75](#)
- [128] S. Attal, N. Guillotin-Plantard, et C. Sabot, “Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records,” dans “Annales Henri Poincaré,” , vol. 16 (Springer, 2015), vol. 16, p. 15–43. [76](#)
- [129] D. Bernard et B. Doyon, “Energy flow in non-equilibrium conformal field theory,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **45**, 362001 (2012). [77](#)
- [130] C. Kiefer, *Quantum gravity 2nd ed.* (Oxford University Press, 2007). [78](#), [190](#)
- [131] C. Wüthrich, “To quantize or not to quantize : fact and folklore in quantum gravity,” *Philosophy of Science* **72**, 777–788 (2005). [79](#)
- [132] C. Møller, “Les theories relativistes de la gravitation (paris : Cnrs) ; rosenfeld 1 1963,” *Nucl. Phys* **40**, 353 (1962). [79](#), [190](#)
- [133] L. Rosenfeld, “On quantization of fields,” *Nuclear Physics* **40**, 353–356 (1963). [79](#), [190](#)
- [134] K. Eppley et E. Hannah, “The necessity of quantizing the gravitational field,” *Foundations of Physics* **7**, 51–68 (1977). [79](#), [190](#)
- [135] D. N. Page et C. Geilker, “Indirect evidence for quantum gravity,” *Physical Review Letters* **47**, 979 (1981). [80](#), [82](#), [190](#)
- [136] M. Derakhshani, C. Anastopoulos, et B. L. Hu, “Probing a Gravitational Cat State : Experimental Possibilities,” *ArXiv e-prints* (2016). [80](#), [88](#)
- [137] D. Schlippert, J. Hartwig, H. Albers, L. L. Richardson, C. Schubert, A. Roura, W. P. Schleich, W. Ertmer, et E. M. Rasel, “Quantum test of the universality of free fall,” *Physical Review Letters* **112**, 203002 (2014). [80](#)

- [138] L. Diósi et J. J. Halliwell, “Coupling classical and quantum variables using continuous quantum measurement theory,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2846–2849 (1998). [86](#), [191](#)
- [139] L. Diósi, N. Gisin, et W. T. Strunz, “Quantum approach to coupling classical and quantum dynamics,” *Phys. Rev. A* **61**, 022108 (2000). [86](#)
- [140] L. Diósi, T. Konrad, A. Scherer, et J. Audretsch, “Coupled ito equations of continuous quantum state measurement and estimation,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **39**, L575 (2006). [86](#)
- [141] M. Bahrami, A. Bassi, M. McMillen, S. and Paternostro, et H. Ulbricht, “Is gravity quantum ?” arXiv preprint arXiv :1507.05733 (2015). [88](#)
- [142] T. Josset, A. Perez, et D. Sudarsky, “Dark energy from non-unitarity in quantum theory,” *ArXiv e-prints* (2016). [89](#)
- [143] V. Allori, S. Goldstein, R. Tumulka, et N. Zanghì, “Predictions and primitive ontology in quantum foundations : a study of examples,” *The British Journal for the Philosophy of Science* **65**, 323–352 (2014). [90](#), [117](#), [155](#), [194](#)
- [144] B. L. Hu et E. Verdaguer, “" stochastic gravity : Theory and applications,” *Living Rev. Rel* **11**, 27 (2008). [90](#)
- [145] R. Martin et E. Verdaguer, “Stochastic semiclassical gravity,” *Physical Review D* **60**, 084008 (1999). [90](#), [200](#)
- [146] M. Derakhshani, “Newtonian semiclassical gravity in the ghirardi–rimini–weber theory with matter density ontology,” *Physics Letters A* **378**, 990–998 (2014). [90](#), [201](#)
- [147] L. Susskind, “Copenhagen vs Everett, Teleportation, and ER=EPR,” *ArXiv e-prints* (2016). [91](#)
- [148] Y. Aharonov et L. Vaidman, “Complete description of a quantum system at a given time,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **24**, 2315 (1991). [93](#)
- [149] Y. Aharonov, D. Z. Albert, et L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100,” *Physical review letters* **60**, 1351 (1988). [93](#), [155](#)
- [150] S. Gammelmark, B. Julsgaard, et K. Mølmer, “Past quantum states of a monitored system,” *Phys. Rev. Lett.* **111**, 160401 (2013). [94](#), [96](#), [155](#)
- [151] P. Campagne-Ibarcq, L. Bretheau, E. Flurin, A. Auffèves, F. Mallet, et B. Huard, “Observing interferences between past and future quantum states in resonance fluorescence,” *Physical review letters* **112**, 180402 (2014). [94](#)
- [152] T. Rybarczyk, S. Gerlich, B. Peaudecerf, M. Penasa, B. Julsgaard, K. Moelmer, S. Gleyzes, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche *et al.*, “Past quantum state analysis of the photon number evolution in a cavity,” arXiv preprint arXiv :1409.0958 (2014). [94](#)
- [153] D. Tan, S. Weber, I. Siddiqi, K. Mølmer, et K. Murch, “Prediction and retrodiction for a continuously monitored superconducting qubit,” *Physical review letters* **114**, 090403 (2015). [94](#)

- [154] I. Guevara et H. Wiseman, “Quantum state smoothing,” *Physical review letters* **115**, 180407 (2015). 97, 155
- [155] A. Viterbi, “Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm,” *IEEE Transactions on Information Theory* **13**, 260–269 (1967). 100
- [156] P. C. Martin, E. Siggia, et H. Rose, “Statistical dynamics of classical systems,” *Physical Review A* **8**, 423 (1973). 100
- [157] DE DOMINICIS, C., “Techniques de renormalisation de la thÉorie des champs et dynamique des phÉnomÈnes critiques,” *J. Phys. Colloques* **37**, C1–247–C1–253 (1976). 100
- [158] H.-K. Janssen, “On a lagrangean for classical field dynamics and renormalization group calculations of dynamical critical properties,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **23**, 377–380 (1976). 100
- [159] A. Chantasri et A. N. Jordan, “Stochastic path-integral formalism for continuous quantum measurement,” *Phys. Rev. A* **92**, 032125 (2015). 102
- [160] M. Bauer et D. Bernard, “Convergence of repeated quantum nondemolition measurements and wave-function collapse,” *Phys. Rev. A* **84**, 044103 (2011). 104
- [161] E. Okon et D. Sudarsky, “The black hole information paradox and the collapse of the wave function,” *Foundations of Physics* **45**, 461–470 (2015). 108
- [162] R. Kaltenbaek, M. Arndt, M. Aspelmeyer, P. F. Barker, A. Bassi, J. Bateman, K. Bongs, S. Bose, C. Braxmaier, Č. Brukner, B. Christophe, M. Chwalla, P.-F. Cohadon, A. M. Cruise, C. Curceanu, K. Dholakia, K. Döringshoff, W. Ertmer, J. Gieseler, N. GÜrlebeck, G. Hechenblaikner, A. Heidmann, S. Herrmann, S. Hossenfelder, U. Johann, N. Kiesel, M. Kim, C. Lämmerzahl, A. Lambrecht, M. Mazilu, G. J. Milburn, H. Müller, L. Novotny, M. Paternostro, A. Peters, I. Pikovski, A. Pilan-Zanoni, E. M. Rasel, S. Reynaud, C. Jess Riedel, M. Rodrigues, L. Rondin, A. Roura, W. P. Schleich, J. Schmiedmayer, T. Schuldt, K. C. Schwab, M. Tajmar, G. M. Tino, H. Ulbricht, R. Ursin, et V. Vedral, “Macroscopic quantum resonators (MAQRO) : 2015 Update,” *ArXiv e-prints* (2015). 108
- [163] F. Laloë, *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ?* (EDP sciences, 2013). 113, 116
- [164] S. Goldstein, “Quantum theory without observers,” *Physics Today* **51**, 42–47 (1998). 113
- [165] C. A. Fuchs et A. Peres, “Quantum theory needs no ‘interpretation’,” *Physics Today* **53**, 70–71 (2000). 113
- [166] W. H. Zurek, “Pointer basis of quantum apparatus : Into what mixture does the wave packet collapse?” *Physical Review D* **24**, 1516 (1981). 114
- [167] W. H. Zurek, “Einselection and decoherence from an information theory perspective,” dans “Quantum Communication, Computing, and Measurement 3,” (Springer, 2002), p. 115–125. 114
- [168] W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical,” *Reviews of Modern Physics* **75**, 715 (2003). 114

- [169] R. Blume-Kohout et W. H. Zurek, “Quantum darwinism : Entanglement, branches, and the emergent classicality of redundantly stored quantum information,” *Physical Review A* **73**, 062310 (2006). 114
- [170] W. H. Zurek, “Quantum darwinism,” *Nature Physics* **5**, 181–188 (2009). 114
- [171] W. H. Zurek, “Quantum darwinism, classical reality, and the randomness of quantum jumps,” *Physics Today* **67** (2014). 114
- [172] D. Sudarsky, “The unsolved problem of the emergence of cosmic structure during inflation,” dans “*International Journal of Modern Physics : Conference Series*,” , vol. 23 (World Scientific, 2013), vol. 23, p. 400–409. 115
- [173] E. Okon et D. Sudarsky, “Benefits of objective collapse models for cosmology and quantum gravity,” *Foundations of Physics* **44**, 114–143 (2014). 115
- [174] M. Castagnino, S. Fortin, R. Laura, et D. Sudarsky, “Interpretations of quantum theory in the light of modern cosmology,” arXiv preprint arXiv :1412.7576 (2014). 115
- [175] E. Okon et D. Sudarsky, “Less decoherence and more coherence in quantum gravity, inflationary cosmology and elsewhere,” arXiv preprint arXiv :1512.05298 (2015). 115
- [176] S. Weinberg, “What happens in a measurement?” *Phys. Rev. A* **93**, 032124 (2016). 115
- [177] C. M. Caves, C. A. Fuchs, et R. Schack, “Quantum probabilities as bayesian probabilities,” *Physical review A* **65**, 022305 (2002). 116
- [178] M. Gell-Mann et J. B. Hartle, “Decoherent histories quantum mechanics with one real fine-grained history,” *Physical Review A* **85**, 062120 (2012). 116
- [179] A. Bassi et G. Ghirardi, “Decoherent histories and realism,” *Journal of statistical physics* **98**, 457–494 (2000). 116
- [180] E. Okon et D. Sudarsky, “On the consistency of the consistent histories approach to quantum mechanics,” *Foundations of Physics* **44**, 19–33 (2014). 116
- [181] J. G. Cramer, “The transactional interpretation of quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.* **58**, 647–687 (1986). 116
- [182] B. S. DeWitt et N. Graham, *The many worlds interpretation of quantum mechanics* (Princeton University Press, 2015). 116
- [183] A. Kent, “Against many-worlds interpretations,” *International Journal of Modern Physics A* **5**, 1745–1762 (1990). 116
- [184] J. S. Bell, “The theory of local beables,” *Epistemological Letters* **9** (1976). 117, 194
- [185] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics : Collected papers on quantum philosophy* (Cambridge university press, 2004). 117
- [186] D. Z. Albert, “Wave function realism,” *The Wave Function : Essays on the Metaphysics of Quantum Mechanics* p. 52–57 (2013). 117
- [187] M. Esfeld et N. Gisin, “The grw flash theory : a relativistic quantum ontology of matter in space-time?” *Philosophy of Science* **81**, 248–264 (2014). 117

- [188] N. Harrigan et R. W. Spekkens, “Einstein, incompleteness, and the epistemic view of quantum states,” *Foundations of Physics* **40**, 125–157 (2010). 117
- [189] W. Struyve, “Pilot-wave theory and quantum fields,” *Reports on Progress in Physics* **73**, 106001 (2010). 118
- [190] H. Nikolić, “Bohmian mechanics in relativistic quantum mechanics, quantum field theory and string theory,” dans “*Journal of Physics : Conference Series*,” , vol. 67 (IOP Publishing, 2007), vol. 67, p. 012035. 118
- [191] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka, et N. Zanghi, “Bohmian mechanics and quantum field theory,” *Physical Review Letters* **93**, 090402 (2004). 118
- [192] S. Colin et W. Struyve, “A dirac sea pilot-wave model for quantum field theory,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **40**, 7309 (2007). 118
- [193] K. Berndl, M. Daumer, D. Dürr, S. Goldstein, et N. Zanghi, “A survey of bohmian mechanics,” *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* **110**, 737–750 (1995). 118
- [194] D. Dürr et S. Teufel, *Bohmian mechanics* (Springer, 2009). 118
- [195] A. Oldofredi, D. Lazarovici, D.-A. Deckert, et M. Esfeld, “From the universe to subsystems : Why quantum mechanics appears more stochastic than classical mechanics,” *ArXiv e-prints* (2016). 118
- [196] N. Pinto-Neto, G. Santos, et W. Struyve, “Quantum-to-classical transition of primordial cosmological perturbations in de broglie-bohm quantum theory : The bouncing scenario,” *Phys. Rev. D* **89**, 023517 (2014). 120
- [197] D. Sudarsky, “Shortcomings in the understanding of why cosmological perturbations look classical,” *International Journal of Modern Physics D* **20**, 509–552 (2011). 120
- [198] A. Perez, H. Sahlmann, et D. Sudarsky, “On the quantum origin of the seeds of cosmic structure,” *Classical and Quantum Gravity* **23**, 2317 (2006). 120
- [199] A. De Unánue et D. Sudarsky, “Phenomenological analysis of quantum collapse as source of the seeds of cosmic structure,” *Physical Review D* **78**, 043510 (2008). 120
- [200] G. León, A. De Unánue, et D. Sudarsky, “Multiple quantum collapse of the inflaton field and its implications on the birth of cosmic structure,” *Classical and Quantum Gravity* **28**, 155010 (2011). 120
- [201] S. Goldstein, W. Struyve, et R. Tumulka, “The bohmian approach to the problems of cosmological quantum fluctuations,” *arXiv preprint arXiv :1508.01017* (2015). 120
- [202] W. Struyve, “Semi-classical approximations based on bohmian mechanics,” *arXiv preprint arXiv :1507.04771* (2015). 120
- [203] E. Gindensperger, C. Meier, et J. Beswick, “Mixing quantum and classical dynamics using bohmian trajectories,” *The Journal of Chemical Physics* **113**, 9369–9372 (2000). 120
- [204] E. Gindensperger, C. Meier, et J. Beswick, “Hybrid quantum/classical dynamics using bohmian trajectories,” *Advances in Quantum Chemistry* **47**, 331–346 (2004). 120

- [205] J. S. Bell, “On the problem of hidden variables in quantum mechanics,” *Reviews of Modern Physics* **38**, 447 (1966). [121](#)
- [206] J. Von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, 2 (Princeton university press, 1955). [123](#)
- [207] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka, et N. Zanghi, “Bell-type quantum field theories,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38**, R1 (2005). [124](#)
- [208] J. Gambetta et H. M. Wiseman, “Modal dynamics for positive operator measures,” *Foundations of Physics* **34**, 419–448 (2004). [124](#)
- [209] K. Murch, S. Weber, C. Macklin, et I. Siddiqi, “Observing single quantum trajectories of a superconducting quantum bit,” *Nature* **502**, 211–214 (2013). [131](#), [161](#)
- [210] S. Weber, A. Chantasri, J. Dressel, A. Jordan, K. Murch, et I. Siddiqi, “Mapping the optimal route between two quantum states,” *Nature* **511**, 570–573 (2014). [131](#), [147](#), [161](#)
- [211] W. Nagourney, J. Sandberg, et H. Dehmelt, “Shelved optical electron amplifier : Observation of quantum jumps,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797–2799 (1986). [132](#), [147](#), [162](#)
- [212] J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, et D. J. Wineland, “Observation of quantum jumps in a single atom,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699–1702 (1986). [132](#), [147](#), [162](#)
- [213] T. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, et P. Toschek, “Observation of quantum jumps,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1696–1698 (1986). [132](#), [147](#), [162](#)
- [214] N. Bohr, “On the constitution of atoms and molecules,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **26**, 1–25 (1913). [132](#), [147](#)
- [215] H. Wiseman, “Quantum trajectories and quantum measurement theory,” *Quantum and Semiclassical Optics : Journal of the European Optical Society Part B* **8**, 205 (1996). [132](#), [153](#), [172](#)
- [216] A. Barchielli et M. Gregoratti, *Quantum trajectories and measurements in continuous time : the diffusive case*, vol. 782 (Springer, 2009). [132](#), [153](#)
- [217] C. Pellegrini, “Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the diffusive case,” *The Annals of Probability* p. 2332–2353 (2008). [132](#), [152](#)
- [218] C. Pellegrini et F. Petruccione, “Non-markovian quantum repeated interactions and measurements,” *J. Phys A* **42**, 425304 (2009). [132](#), [152](#)
- [219] I. Lesanovsky et J. P. Garrahan, “Kinetic constraints, hierarchical relaxation, and onset of glassiness in strongly interacting and dissipative rydberg gases,” *Phys. Rev. Lett.* **111**, 215305 (2013). [133](#)
- [220] B. Everest, M. R. Hush, et I. Lesanovsky, “Many-body out-of-equilibrium dynamics of hard-core lattice bosons with nonlocal loss,” *Phys. Rev. B* **90**, 134306 (2014). [133](#)

- [221] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. Bollinger, et D. Wineland, “Quantum zeno effect,” *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990). 136
- [222] H.-P. Breuer et F. Petruccione, *The theory of open quantum systems* (Oxford Univ. Press, 2002). 137
- [223] H. M. Wiseman et J. M. Gambetta, “Are dynamical quantum jumps detector dependent?” *Physical review letters* **108**, 220402 (2012). 147
- [224] J. Bechhoefer, “Hidden markov models for stochastic thermodynamics,” *New Journal of Physics* **17**, 075003 (2015). 149
- [225] H. Maassen et B. Kümmerer, “Purification of quantum trajectories,” *Lecture Notes-Monograph Series* p. 252–261 (2006). 155
- [226] M. Tsang, “Time-symmetric quantum theory of smoothing,” *Phys. Rev. Lett.* **102**, 250403 (2009). 155
- [227] V. Allori, S. Goldstein, R. Tumulka, et N. Zanghì, “On the common structure of bohmian mechanics and the ghirardi–rimini–weber theory dedicated to giancarlo ghirardi on the occasion of his 70th birthday,” *The British Journal for the Philosophy of Science* **59**, 353–389 (2008). 156, 194
- [228] R. Tumulka, “The ‘unromantic pictures’ of quantum theory,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **40**, 3245 (2007). 156
- [229] L. Diósi, “Is spontaneous wave function collapse testable at all?” *arXiv preprint arXiv :1503.04681* (2015). 156, 194
- [230] H. M. Wiseman et G. J. Milburn, “Quantum theory of optical feedback via homodyne detection,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 548–551 (1993). 161
- [231] H. M. Wiseman, “Quantum theory of continuous feedback,” *Phys. Rev. A* **49**, 2133–2150 (1994). 161
- [232] A. C. Doherty et K. Jacobs, “Feedback control of quantum systems using continuous state estimation,” *Phys. Rev. A* **60**, 2700 (1999). 161
- [233] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, et S. Haroche, “Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity,” *Nature* **446**, 297–300 (2007). 161
- [234] A. M. Polyakov, “The theory of turbulence in two dimensions,” *Nuclear Physics B* **396**, 367–385 (1993). 164
- [235] A. M. Polyakov, “Turbulence without pressure,” *Physical Review E* **52**, 6183 (1995). 164
- [236] D. Bernard et K. Gawedzki, “Scaling and exotic regimes in decaying burgers turbulence,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **31**, 8735 (1998). 164
- [237] A. V. Skorokhod, “Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region,” *Theory of Probability & Its Applications* **6**, 264–274 (1961). 166
- [238] J.-Y. Yen et M. Yor, “Brownian excursion theory : A first approach,” dans “Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion,” , vol. 2088 de *Lecture Notes in Mathematics* (Springer International Publishing, 2013). 166, 169

- [239] B. Mielnik, “Generalized quantum mechanics,” *Communications in Mathematical Physics* **37**, 221–256 (1974). 190
- [240] L. Diosi, “Relativistic theory for continuous measurement of quantum fields,” *Physical Review A* **42**, 5086 (1990). 191, 194, 200, 202
- [241] L. Diósi, “The gravity-related decoherence master equation from hybrid dynamics,” *Journal of Physics : Conference Series* **306**, 012006 (2011). 191, 200
- [242] L. Diósi, “Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects,” *Physics Letters A* **105**, 199 – 202 (1984). 193
- [243] M. Bahrani, A. Großardt, S. Donadi, et A. Bassi, “The schrödinger–newton equation and its foundations,” *New Journal of Physics* **16**, 115007 (2014). 193
- [244] D. Giulini et A. Großardt, “Centre-of-mass motion in multi-particle schrödinger–newton dynamics,” *New Journal of Physics* **16**, 075005 (2014). 193
- [245] R. Bekenstein, R. Schley, M. Mutzafi, C. Rotschild, et M. Segev, “Optical simulations of gravitational effects in the newton-schrodinger system,” *Nature Physics* (2015). 193
- [246] A. Großardt, J. Bateman, H. Ulbricht, et A. Bassi, “Optomechanical test of the schrödinger-newton equation,” *arXiv preprint arXiv :1510.01696* (2015). 193, 202
- [247] A. Großardt, J. Bateman, H. Ulbricht, et A. Bassi, “Effects of newtonian gravitational self-interaction in harmonically trapped quantum systems,” *arXiv preprint arXiv :1510.01262* (2015). 193, 202
- [248] C. Anastopoulos et B. Hu, “Problems with the newton–schrödinger equations,” *New Journal of Physics* **16**, 085007 (2014). 193
- [249] L. Diósi, “Gravity-related wave function collapse : mass density resolution,” dans “*Journal of Physics : Conference Series*,” , vol. 442 (IOP Publishing, 2013), vol. 442, p. 012001. 194
- [250] L. Diósi, “Gravity-related spontaneous wave function collapse in bulk matter,” *New Journal of Physics* **16**, 105006 (2014). 194, 199
- [251] G. Ghirardi, R. Grassi, et F. Benatti, “Describing the macroscopic world : closing the circle within the dynamical reduction program,” *Foundations of Physics* **25**, 5–38 (1995). 194
- [252] G. Ghirardi, R. Grassi, et A. Rimini, “Continuous-spontaneous-reduction model involving gravity,” *Physical Review A* **42**, 1057 (1990). 194
- [253] P. Pearle et E. Squires, “Gravity, energy conservation, and parameter values in collapse models,” *Foundations of Physics* **26**, 291–305 (1996). 196
- [254] S. L. Adler, “Lower and upper bounds on csl parameters from latent image formation and igm heating,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **40**, 2935 (2007). 198
- [255] M. Bahrani, A. Smirne, et A. Bassi, “Role of gravity in the collapse of a wave function : A probe into the diósi-penrose model,” *Physical Review A* **90**, 062105 (2014). 199



- [256] E. Calzetta et B. L. Hu, “Noise and fluctuations in semiclassical gravity,” *Phys. Rev. D* **49**, 6636–6655 (1994). 200
- [257] S. Nimmrichter et K. Hornberger, “Stochastic extensions of the regularized schrödinger-newton equation,” *Phys. Rev. D* **91**, 024016 (2015). 201
- [258] D. Kafri, J. Taylor, et G. Milburn, “A classical channel model for gravitational decoherence,” *New Journal of Physics* **16**, 065020 (2014). 201
- [259] L. Diósi, “Classical-quantum coexistence : a’free will’test,” dans “*Journal of Physics : Conference Series*,” , vol. 361 (IOP Publishing, 2012), vol. 361, p. 012028. 201



---

## Sujet : Mesures continues en mécanique quantique : quelques résultats et applications

---

**Résumé** : Cette thèse est consacrée à l'étude des trajectoires quantiques issues de la théorie des mesures continues en mécanique quantique non relativiste. On y présente de nouveaux résultats théoriques ainsi que des exemples d'applications. Sur le front théorique, on étudie principalement la limite de mesure «forte» dans laquelle on met en évidence l'émergence de sauts quantiques et d'échardes quantiques, deux phénomènes dont on précise la statistique. Hors de la limite forte, on propose une méthode d'extraction optimale d'information pour un registre de qubits. Sur le front des applications, on introduit une méthode originale de contrôle utilisant l'intensité de la mesure comme unique variable et on explique la transition balistique-diffusif dans les marches aléatoires quantiques ouvertes; deux sous produits de l'étude théorique préalable des situations de mesure forte. On s'intéresse aussi au problème de la gravité semi-classique et montre que la théorie des mesures continues peut permettre d'en construire un modèle cohérent à la limite newtonienne. On suggère enfin quelques extensions possibles de la théorie à l'estimation a posteriori et d'éventuelles généralisations des résultats théoriques à des situations de mesures répétées discrètes. Dans la présentation des résultats, l'accent est mis davantage sur l'explicitation des liens entre les multiples points de vue possibles sur les trajectoires quantiques (parallèles avec la théorie classique du filtrage et les modèles de collapse objectif utilisés dans les fondements) que sur la rigueur mathématique.

**Mots clés** : trajectoires quantiques, systèmes quantiques ouverts, problème de la mesure, contrôle quantique, gravité, marches aléatoires quantiques

---

## Subject : Continuous measurement in quantum mechanics : a few results and applications

---

**Abstract** : This thesis is devoted to the study of the quantum trajectories obtained from the theory of continuous measurement in non relativistic quantum mechanics. New theoretical results as well as examples of applications are presented. On the theoretical front, we study mostly the limit of «strong» measurement where we put forward the emergence of quantum jumps and quantum spikes, two phenomena we characterize in detail. Out of the strong measurement limit, we investigate a method to extract information from a register of qubits optimally. On the application front, we introduce an original method to control quantum systems exploiting only the freedom of changing the measurement intensity and we explain the transition between a ballistic and a diffusive behavior in open quantum random walks; two byproduct of the theoretical study of the strong measurement regime. We further study the problem of semi-classical gravity and show that continuous measurement theory allows to construct a consistent model in the Newtonian regime. We eventually suggest possible extensions of the formalism to a posteriori estimation and hint at generalizations of the results for the strong measurement limit in the wider context of discrete repeated measurements. In the course of our presentation, we emphasize the link with other approaches to the theory of continuous measurement (parallels with stochastic filtering and collapse models in foundations) rather than aim for mathematical rigor.

---

**Keywords** : quantum trajectories, open quantum systems, measurement problem, quantum control, gravity, quantum random walks



## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des trajectoires quantiques issues de la théorie des mesures continues en mécanique quantique non relativiste. On y présente de nouveaux résultats théoriques ainsi que des exemples d'applications. Sur le front théorique, on étudie principalement la limite de mesure « forte » dans laquelle on met en évidence l'émergence de sauts quantiques et d'échardes quantiques, deux phénomènes dont on précise la statistique. Hors de la limite forte, on propose une méthode d'extraction optimale d'information pour un registre de qubits. Sur le front des applications, on introduit une méthode originale de contrôle utilisant l'intensité de la mesure comme unique variable et on explique la transition balistique-diffusif dans les marches aléatoires quantiques ouvertes; deux sous-produits de l'étude théorique préalable des situations de mesure forte. On s'intéresse aussi au problème de la gravité semi-classique et montre que la théorie des mesures continues peut permettre d'en construire un modèle cohérent à la limite newtonienne. On suggère enfin quelques extensions possibles de la théorie à l'estimation a posteriori et d'éventuelles généralisations des résultats théoriques à des situations de mesures répétées discrètes. Dans la présentation des résultats, l'accent est mis davantage sur l'explicitation des liens entre les multiples points de vue possibles sur les trajectoires quantiques (parallèles avec la théorie classique du filtrage et les modèles de collapse objectif utilisés dans les fondements) que sur la rigueur mathématique.

## Mots Clés

Trajectoires quantiques, systèmes quantiques ouverts, problème de la mesure, contrôle quantique, gravité, marches aléatoires quantiques

## Abstract

This thesis is devoted to the study of the quantum trajectories obtained from the theory of continuous measurement in non-relativistic quantum mechanics. New theoretical results as well as examples of applications are presented. On the theoretical front, we study mostly the limit of « strong » measurement where we put forward the emergence of quantum jumps and quantum spikes, two phenomena we characterize in detail. Out of the strong measurement limit, we investigate a method to extract information from a register of qubits optimally. On the application front, we introduce an original method to control quantum systems exploiting only the freedom of changing the measurement intensity and we explain the transition between a ballistic and a diffusive behavior in open quantum random walks; two byproduct of the theoretical study of the strong measurement regime. We further study the problem of semi-classical gravity and show that continuous measurement theory allows to construct a consistent model in the Newtonian regime. We eventually suggest possible extensions of the formalism to a posteriori estimation and hint at generalizations of the results for the strong measurement limit in the wider context of discrete repeated measurements. In the course of our presentation, we emphasize the link with other approaches to the theory of continuous measurement (parallels with stochastic filtering and collapse models in foundations) rather than aim for mathematical rigor.

## Keywords

Quantum trajectories, open quantum systems, measurement problem, quantum control, gravity, quantum random walks