



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude des générateurs d'ondes thermoacoustiques : contrôle actif des auto-oscillations et propagation non linéaire

Come Olivier

## ► To cite this version:

Come Olivier. Contributions à l'étude des générateurs d'ondes thermoacoustiques : contrôle actif des auto-oscillations et propagation non linéaire. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2015. Français. NNT : 2015LEMA1023 . tel-01342660

**HAL Id: tel-01342660**

**<https://theses.hal.science/tel-01342660>**

Submitted on 6 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

Côme OLIVIER

Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
**grade de Docteur de l'Université du Maine**  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

**École doctorale : SPIGA**

**Discipline : 60**

**Spécialité : Acoustique**

**Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine – UMR CNRS 6613**

**Soutenue le 13 octobre 2015**

## CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES GÉNÉRATEURS D'ONDES THERMOACOUSTIQUES

Contrôle Actif des Auto-Oscillations et Propagation Non Linéaire

### JURY

Président du jury : **BLANC-BENON PH.**, DR (LMFA, Ecole Centrale de Lyon)

Rapporteurs : **HIRSCHBERG A.**, Professeur émérite (Univ. Twente)  
**BAILLIET H.**, MCF HDR (Pprime, Univ. de Poitiers)

Examineurs : **BALTEAN D.**, MCF (LIMSI, UPMC)  
**BRUNEAU M.**, Professeur émérite (LAUM, Univ. du Maine)

Directeur de thèse : **PÉNELET G.**, MCF HDR (LAUM, Univ. du Maine)

Co-directeur de Thèse : **LOTTON P.**, DR (LAUM, Univ. du Maine)

Co-encadrante de Thèse : **POIGNAND G.**, IGR (LAUM, Univ. du Maine)



# Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'opération de recherches thermoacoustique du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM, UMR-CNRS 6613) sur un financement MESR. Je remercie M. Joël Gilbert, DR CNRS et directeur du LAUM de m'avoir offert cette opportunité et de m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Je tiens d'abord à remercier mes encadrants de thèse M. Guillaume Pénélet, Maître de Conférences HDR, M. Pierrick Lotton, Directeur de Recherche CNRS, et Mme Gaëlle Poignand, Ingénieure de Recherche au LAUM, pour avoir initié ce travail et l'avoir (m'avoir ?) accompagné tout au long de ses trois années. Nos échanges très réguliers, au quotidien ou lors des réunions quasi-hebdomadaires de l'équipe Thermoacoustique du LAUM ont rendu la progression de ce travail possible, mais ont aussi été l'occasion de m'aider à prendre le recul nécessaire. Un grand merci particulièrement à Gaëlle, qui a toujours pris le temps de répondre à mes fréquentes sollicitations, et pour toutes nos agréables conversations, concernaient-elles la thermoacoustique ou non.

Je remercie M. Avraham Hirschberg, professeur Émérite de l'Université de Twente, et Mme Hélène Bailliet, Maître de Conférences à l'Institut Pprime de Poitiers, d'avoir accepté le rôle de rapporteurs de ce mémoire de thèse, ainsi que les membres du jury MM. Philippe Blanc-Benon, Directeur de Recherche au LMFA à Lyon et Michel Bruneau, Professeur Émérite de l'Université du Maine qui ont consenti à juger ce travail.

Je remercie aussi Mr. Joël Gilbert pour son assistance éclairée dans l'extension au moteur thermoacoustique des travaux qu'il a effectués avec M. Ludovic Menguy sur la propagation faiblement non linéaire. Mes remerciements vont aussi à M. Mico Hirschberg pour la pertinence de ses critiques dans la relecture de ces mêmes travaux.

Je me dois de remercier ici Mmes Hélène Bailliet et Diana Baltéan qui, en tant que membres de mon Comité de Suivi de Thèse, ont eu l'occasion de suivre ces travaux, et dont le regard extérieur a su apporté un point de vue nécessaire à leur développement.

Je souhaite aussi remercier toutes les personnes sans la contribution de qui l'élaboration de ce mémoire n'aurait pas pu être menée à bien : merci à MM. Hervé Mézières et Éric Egon pour la conception et la réalisation du prototype de transducteur thermoacoustique, et sa modification pour l'ajout de rétro-contrôle ; merci à MM. Emmanuel Brasseur et James Blondeau pour leur assistance dans la mise en place des configurations de mesure ; merci aussi à MM. Stéphane Letourneur et Pierre-Arnaud Lecomte pour la conception et la réalisation de différents boîtiers déphaseur.

Je tiens à remercier le LAUM, l'école doctorale SPIGA et le Collège Doctoral de l'Université du Maine, qui m'ont permis, par leurs financements, de présenter les travaux de ce mémoire lors de différentes conférences (CFA 2014 à Poitiers, ISNA 2015 à Lyon) et école d'été (n3l 2013 à Munich). J'ai aussi bénéficié lors de ce doctorat d'une mission d'enseignement à

---

L'UFR sciences et Techniques de l'Université du Maine. Je remercie tous les membres des équipes enseignantes avec qui il m'a été donné de collaborer, et en particulier MM. Christophe Ayrault et Bertrand Lihoreau de m'avoir fait confiance pour assurer une partie du cours d'Instrumentation.

Merci à tous les collègues, doctorants, membres de l'équipe RAmDAM, que j'ai pu côtoyer, pour l'ambiance de travail et pour le reste.

Enfin, un grand merci de reconnaissance à ma famille sans le soutien de qui je n'aurais pu arriver jusque là, et en particulier à mes parents Catherine et Michel.

À Rose et Michèle.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>11</b>
1.1 Équations fondamentales de l'acoustique . . . . .	11
1.2 Thermoacoustique linéaire . . . . .	12
1.2.1 Résultats classiques de la thermoacoustique linéaire . . . . .	13
1.2.2 Matrices de transfert et de diffusion . . . . .	14
1.3 Effets non linéaires dans les TAE . . . . .	16
1.3.1 Flux de masse induit acoustiquement . . . . .	17
1.3.2 Effets aérodynamiques de bord . . . . .	20
1.3.3 Transferts de chaleurs non linéaires . . . . .	21
1.3.4 Cascade harmonique . . . . .	22
1.4 Applications des moteurs thermoacoustiques . . . . .	22
1.5 Motivations des travaux . . . . .	24
<b>I Performances d'un TAET – Influence d'un rétro-contrôle</b>	<b>27</b>
<b>2 Caractérisation du TAET</b>	<b>29</b>
2.1 Description . . . . .	30
2.2 Caractérisation des performances . . . . .	31
2.2.1 Seuils de déclenchement . . . . .	31
2.2.2 Conversion thermoacoustique . . . . .	32
2.2.3 Conversion acousto-électrique . . . . .	34
2.2.4 Efficacité globale . . . . .	36
2.3 Conclusion . . . . .	38
<b>3 Rétro-contrôle électroacoustique</b>	<b>39</b>
3.1 Source auxiliaire externe . . . . .	41
3.1.1 Source auxiliaire non alimentée . . . . .	41
3.1.2 Effet du déphasage pour différents gains d'amplification . . . . .	43
3.1.3 Effet du déphasage pour différentes puissances de chauffage . . . . .	43
3.1.4 Effet du gain pour le déphasage optimal . . . . .	44
3.2 Source auxiliaire interne . . . . .	46
3.2.1 Contrôle des performances . . . . .	46
3.2.2 Comportement hystérétique . . . . .	47

3.3	Conclusion . . . . .	49
<b>II Modélisation d'un TAET et rétro-contrôle</b>		<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Modèle d'ordre réduit de TAET</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	Un modèle électrique équivalent au réseau acoustique . . . . .	55
4.2.1	Équivalence électroacoustique . . . . .	55
4.2.2	Système équivalent du TAET . . . . .	56
4.2.3	Stabilité . . . . .	60
4.2.4	Expression de l'amplification thermoacoustique . . . . .	61
4.3	Transferts de chaleurs dans le TAC . . . . .	62
4.3.1	Bilan des flux de chaleurs dans le TAC . . . . .	63
4.3.2	Réduction à un seul degré de liberté . . . . .	65
4.3.3	Discretisation de la distribution de température . . . . .	65
4.3.4	Modèle électroacoustique du noyau discrétisé . . . . .	70
4.4	Transitoire de déclenchement . . . . .	72
4.5	Conclusion . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Modélisation du rétro-contrôle électroacoustique</b>	<b>75</b>
5.1	Vers le système complet . . . . .	75
5.1.1	Système acoustique étendu . . . . .	76
5.2	Distribution linéaire de température . . . . .	78
5.2.1	Conditions de déclenchement . . . . .	78
5.2.2	Régime oscillant transitoire . . . . .	79
5.2.3	Régime oscillant permanent . . . . .	80
5.2.4	Extinction de l'oscillation . . . . .	81
5.3	Diffusion thermique vers la coque . . . . .	82
5.3.1	Évaluation des paramètres d'échanges . . . . .	83
5.3.2	Déclenchement . . . . .	83
5.3.3	Régime oscillant . . . . .	85
5.3.4	État saturé . . . . .	87
5.4	Conclusion . . . . .	89
<b>III Propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques</b>		<b>91</b>
<b>6</b>	<b>Propagation non linéaire dans les TAE</b>	<b>93</b>
6.1	Introduction . . . . .	93
6.2	Propagation non linéaire en guide d'ondes . . . . .	96
6.2.1	Hypothèses de travail . . . . .	96
6.2.2	Propagation non linéaire sans perte . . . . .	97
6.2.3	Burgers généralisé : différents effets pris en compte . . . . .	98
6.2.4	Application aux moteurs thermoacoustiques . . . . .	100
6.3	Propagation dans le TAC . . . . .	101
6.3.1	La propagation linéaire dans le noyau thermoacoustique . . . . .	102

6.3.2	Pertes aérodynamiques aux interfaces . . . . .	102
6.3.3	Autres effets non linéaires . . . . .	104
6.4	Principe de résolution . . . . .	104
6.5	Conclusion . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Ondes de choc dans les TAE</b>	<b>109</b>
7.1	Les configurations de moteurs explorées . . . . .	109
7.2	Cas d'un moteur à résonateur droit . . . . .	110
7.2.1	Influence de la position du noyau . . . . .	110
7.2.2	Comportement de l'onde choc . . . . .	111
7.2.3	Distribution de l'intensité acoustique . . . . .	113
7.3	Cas d'un moteur à résonateur annulaire . . . . .	114
7.3.1	Comportement de l'onde de choc . . . . .	115
7.3.2	Distribution de l'intensité acoustique . . . . .	116
7.4	Analyse linéaire - Interprétation . . . . .	117
7.4.1	Configurations à résonateur droit . . . . .	117
7.4.2	Ondes progressives . . . . .	118
7.5	Conclusion . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Conclusions générales</b>	<b>121</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Notions d'électroacoustique</b>	<b>127</b>
A.1	Modèle de Thiele et Small d'un haut-parleur . . . . .	127
A.2	Boucle de rétro-contrôle . . . . .	130
A.3	Circuit équivalent avec rétro-contrôle . . . . .	132
<b>Annexe B</b>	<b>Systèmes thermoacoustiques étudiés</b>	<b>135</b>
B.1	Moteurs de Biwa . . . . .	135
B.2	Transducteur thermo-acousto-électrique du LAUM . . . . .	136
<b>Annexe C</b>	<b>Dépendance en température des paramètres</b>	<b>143</b>
<b>Annexe D</b>	<b>Fonctions visco-thermiques</b>	<b>145</b>
D.1	Empilement de plaques parallèles . . . . .	145
D.2	Pores cylindriques circulaires . . . . .	146
D.3	Pores cylindriques rectangulaires . . . . .	147
D.4	Réseau d'aiguilles (pin array stack) . . . . .	147
D.5	Récapitulatif . . . . .	148
<b>Annexe E</b>	<b>Propagation non linéaire : saturation et <i>detuning</i></b>	<b>149</b>
E.1	Nécessité de prendre en compte les pertes singulières . . . . .	149
E.2	Mise en évidence du <i>detuning</i> non linéaire . . . . .	150
<b>Annexe F</b>	<b>Résolution itérative des systèmes différentiels</b>	<b>151</b>
F.1	RK4 . . . . .	151
F.2	Pas adaptatif . . . . .	152
F.3	Les schémas intégrés . . . . .	154

*TABLE DES MATIÈRES*

---

**Références bibliographiques**

**157**

# Table des figures

1.1	Schéma d'un pore du régénérateur . . . . .	12
1.2	Divergence des performances prédites et réelles à fort régime . . . . .	17
1.3	Formes de streaming dans un guide d'onde . . . . .	17
1.4	Streaming de Rayleigh : cellules de recirculation . . . . .	18
1.5	Pompe à jet . . . . .	19
1.6	Jet streaming dans un pulse tube . . . . .	20
1.7	Mesures de vorticité à la sortie du stack . . . . .	20
1.8	Effets aérodynamiques aux changements abrupts de section . . . . .	21
1.9	Evolution de la distribution de température avec streaming . . . . .	21
1.10	Harmoniques de température en sortie du stack . . . . .	22
1.11	Onde de choc dans un moteur thermoacoustique annulaire . . . . .	22
2.1	Schéma du transducteur thermo-acousto-électrique . . . . .	29
2.2	Conditions de déclenchement du transducteur non chargé . . . . .	31
2.3	Performances de conversion thermoacoustique . . . . .	33
2.4	Conversion thermoacoustique en fonction de la charge de l'alternateur . . . . .	35
2.5	Puissance électrique produite en fonction de la charge de l'alternateur . . . . .	36
2.6	Efficacité de conversion globale en fonction de la charge de l'alternateur . . . . .	37
2.7	Température de fonctionnement selon la charge de l'alternateur . . . . .	37
3.1	Configurations de sources auxiliaires externe et interne . . . . .	41
3.2	Performances du TAET avec la source externe non alimentée . . . . .	42
3.3	Performances en fonction du déphasage, source externe . . . . .	43
3.4	Performances en fonction de la puissance de chauffage, source externe . . . . .	44
3.5	Saturation de l'efficacité et gain absolu, source externe . . . . .	45
3.6	Performances en fonction du déphasage, source interne . . . . .	47
3.7	Saturation de l'efficacité et de la température, source interne . . . . .	48
3.8	Comportement hystérétique du TAET, source interne . . . . .	49
4.1	Schéma électrique équivalent simplifié du TASHE . . . . .	53
4.2	Transducteur thermo-acousto-électrique - Schéma . . . . .	54
4.3	Portion élémentaire de guide d'onde thermoacoustique . . . . .	55
4.4	Circuit électrique équivalent au segment élémentaire . . . . .	56
4.5	Transducteur thermo-acousto-électrique – Schéma équivalent . . . . .	58
4.6	Stabilité linéaire par les valeurs propres . . . . .	60
4.7	Représentation schématique du noyau simplifié . . . . .	63

*TABLE DES FIGURES*

---

4.8	Distribution de température discrétisée . . . . .	66
4.9	Régénérateur et TBT discrétisés . . . . .	70
4.10	Transitoire de déclenchement de l'auto-oscillation : 1ddl . . . . .	73
4.11	Transitoire de déclenchement de l'auto-oscillation : nddl . . . . .	73
5.1	Source auxiliaire : schéma et circuit équivalent . . . . .	76
5.2	Conditions de déclenchement en fonction des paramètres de contrôle . . . . .	79
5.3	Modélisation du contrôle actif, 1 seul ddl pour la température . . . . .	81
5.4	Puissance de déclenchement et extinction . . . . .	82
5.5	Distribution expérimentale de température au seuil . . . . .	82
5.6	Distribution modélisée de température au seuil . . . . .	84
5.7	Conditions de déclenchement avec diffusion radiale . . . . .	85
5.8	Absence de comportement hystérétique des seuils . . . . .	86
5.9	Carte de saturation avec rétro-contrôle . . . . .	88
5.10	Influence du gain . . . . .	89
6.1	Architectures génériques de moteurs thermoacoustiques de laboratoire . . . . .	94
6.2	Diagramme de prédominance des effets lors de la propagation guidée . . . . .	97
6.3	Coefficients tabulés de pertes aérodynamiques de charge . . . . .	103
7.1	Configurations générales de moteurs thermoacoustiques . . . . .	109
7.2	Formation du choc selon la position du noyau dans un moteur droit . . . . .	110
7.3	Fronts d'onde expérimentaux et calculés pour un moteur droit . . . . .	111
7.4	Évolution spatio-temporelle d'un choc dans un moteur droit . . . . .	112
7.5	Distribution de l'intensité acoustique dans un moteur droit . . . . .	114
7.6	Fronts d'onde expérimentaux et calculés pour un moteur annulaire . . . . .	115
7.7	Évolution spatio-temporelle d'un choc dans un moteur annulaire . . . . .	116
7.8	Distribution de l'intensité acoustique dans un moteur annulaire . . . . .	117
7.9	Amplification linéaire en résonateur droit . . . . .	118
7.10	Amplification linéaire en résonateur annulaire . . . . .	119
A.1	Schéma électrique équivalent de haut-parleur . . . . .	127
A.2	Paramètres électro-mécaniques équivalents de Thiele et Small. . . . .	128
A.3	Haut-parleur dans le domaine acoustique . . . . .	128
A.4	Schéma électrique équivalent de haut-parleur . . . . .	128
A.5	Schéma électrique du microphone . . . . .	130
A.6	Filtre passe-tout analogique idéal . . . . .	131
A.7	Boîtier déphaseur . . . . .	131
A.8	Amplificateur inverseur analogique . . . . .	132
A.9	Source auxiliaire : schéma equivalent complet . . . . .	133
B.1	Prototype de TAET du LAUM . . . . .	136
B.2	Photographies des échangeurs de chaleur . . . . .	137
B.3	Paramètres Thiele/Small mesurés du Monacor SPH 170C . . . . .	138
B.4	Représentation du module de contrôle électroacoustique . . . . .	140
B.5	Dimensions des différents éléments du module externe de contrôle électroacoustique représenté à la figure B.4. . . . .	140

---

B.6 Paramètres de Thiele et Small mesurés du Visaton FRS5 . . . . . 141

B.7 Paramètres de Thiele et Small du Aura NSW2-326-8A (source interne) . . . . . 142

D.1 Pin array stack . . . . . 148

D.2 Fonctions viscothermiques pour différentes géométries de pores . . . . . 148

E.1 Saturation et fréquence de fonctionnement selon les pertes . . . . . 150

F.1 Tableau de Butcher de la méthode de Runge-Kutta classique RK4. . . . . 152

F.2 Logigramme du schéma RK avec adaptation du pas par step doubling. . . . . 153

F.3 Logigramme des schémas RK à contrôle adaptatif de la taille de pas. . . . . 154







# Introduction

*“Begin at the beginning,” the King said gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”*

- Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

**Un point d’histoire.** Même si leur étude n’a pris son essor que dans les cinq dernières décennies, les moteurs thermoacoustiques – résonateurs acoustiques qui, soumis à un fort gradient de température, génèrent une oscillation acoustique auto-entretenu – sont décrits depuis longtemps. Un exemple historique remarquable de ces machines thermodynamiques est la *bouilloire chantante* (吉津の釜, Kibitsu-no-kama) du temple de Kibitsu (吉津神社, Kibitsu-jinja) dans la préfecture d’Okayama au Japon,<sup>97</sup> qui consiste en un chaudron dans lequel du riz est jeté sur un tamis au-dessus d’eau bouillante. Au cours du rituel, le récipient émet une note grave et continue alors que du riz est régulièrement ajouté. Le chaudron est utilisé comme oracle ; il cessera de chanter en présence d’une personne qui doit être pleurée. Mentionnée dès 1568 dans le journal d’un moine bouddhiste,<sup>27</sup> une description de cette machine surprenante est retrouvée dans le sixième des Contes de pluie et de lune (雨月物, Ugetsu Monogatari) d’*Ueda* publiés en 1776.<sup>171</sup> Un autre exemple plus académique est celui du tube de verre chantant sous l’action d’une flamme d’hydrogène, démonstration présentée par *Byron Higgins* dès 1777,<sup>71</sup> une expérience à rapprocher de celles des tubes de *Rijke*<sup>128</sup> et de *Sondhauss*<sup>145</sup> au milieu du siècle suivant.

**La science de la thermoacoustique.** La théorie générale des interactions thermiques et acoustiques, interactions à l’origine des sons produits par ces différentes curiosités scientifiques, prend forme en 1868 quand *Kirchhoff* introduit la conduction de la chaleur dans la théorie de la propagation du son.<sup>80</sup> Une interprétation qualitative en est donnée dès 1898 par *Lord Rayleigh*<sup>150</sup> pour expliquer les effets des tubes de *Sondhauss* et de *Rijke*. Il faut cependant attendre les années 1960 pour voir la création du premier moteur thermoacoustique à proprement parler. C’est à cette époque que *Carter et coll.* mettent au point un tube de *Sondhauss* dont les performances sont améliorées par l’introduction dans le résonateur d’un empilement de plaques,<sup>28</sup> qui permet d’obtenir des oscillations acoustiques sur le mode le plus instable du résonateur de l’ordre de quelques pour-cents de la pression statique. Puis, sur le plan théorique, les travaux de *Rott*<sup>131–137</sup> des années 1970-80 pour la formalisation des équations fondamentales de la thermoacoustique permettent de prédire le déclenchement de l’instabilité thermoacoustique dans les tubes de *Sondhauss* ou de *Taconis*.<sup>165</sup> Les résultats expérimentaux sur les tubes de *Taconis* obtenus au Japon par *Yazaki et coll.*<sup>193,194</sup> confirment dès 1980 la validité de cette théorie – tout du moins qualitativement. Fort de ce savoir,

l'équipe du Los Alamos National Laboratory développe depuis les années 80 des machines thermoacoustiques à ondes quasi-stationnaires de performances croissantes.<sup>91,107,157,158,180</sup> Puis, la même équipe réussit à implémenter expérimentalement le principe d'un moteur thermoacoustique fonctionnant suivant un cycle thermodynamique *de Stirling* entretenant une onde quasi-progressive – plutôt qu'un cycle de *Brayton*, irréversible et donc fondamentalement limité dans son rendement – comme proposé par *Cerperley* dès 1979,<sup>30</sup> mais seulement mis en pratique par *Yazaki* 20 ans plus tard.<sup>191</sup> Elle inaugure alors avec le TASHE (ThermoAcoustic Stirling Heat Engine)<sup>8,9</sup> une nouvelle génération de moteurs thermoacoustiques, dits *de Stirling*, aussi appelés moteurs à ondes quasi-progressives car présentant, au moins localement, une différence de phase suffisamment faible entre pression et vitesse acoustiques (voir par exemple [92,106,154,168,169,186,199]). L'exploration des capacités de tels systèmes est toujours en cours : ils sont intéressants pour des applications industrielles et commerciales, car ils présentent, en plus d'une conception relativement simple et robuste, des performances satisfaisantes. Pour des informations générales sur le fonctionnement et le développement des machines thermoacoustiques (moteurs et réfrigérateurs), de nombreuses références sont à trouver dans la lettre de ressources de *S. Garrett*<sup>55</sup> ou dans le livre *Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators* de *G. Swift*.<sup>160</sup>

**Les problématiques actuelles.** Si de grandes avancées ont été faites pour le développement de machines thermoacoustiques performantes, les outils de dimensionnement et de développement disponibles aujourd'hui<sup>18,63,174</sup> sont toujours principalement basés sur la théorie de la thermoacoustique proposée par *Rott*.<sup>136</sup> Cependant, cette dernière est intrinsèquement linéaire – elle est fondée sur un développement limité au premier ordre des équations fondamentales de l'acoustique, approximation valide seulement sous l'hypothèse de *petites amplitudes*. Elle est donc suffisante pour décrire précisément les conditions de déclenchement de l'auto-oscillation, pour lesquelles l'amplitude des phénomènes acoustiques est supposée infinitésimale. Cependant, une fois initiées, les oscillations croissent rapidement et fortement en amplitude pour atteindre des niveaux pour lesquels la théorie linéaire ne permet pas de décrire l'ensemble des comportements observés sur de nombreuses machines. En effet, différents effets d'ordres supérieurs découlant des grandes amplitudes – et donc non pris en compte par la théorie linéaire – entrent en jeu. Tous ces effets sont des sources de pertes amenant à la saturation de la croissance de l'amplitude des oscillations acoustiques. Ce sont donc ces phénomènes et leurs interactions qui gouvernent le comportement des moteurs au-delà du seuil de déclenchement, et limitent leur efficacité. Bien qu'identifiés, ils ne sont pas entièrement compris ou parfaitement décrits. Ainsi, lors de la conception de machines thermoacoustiques, ces phénomènes sont souvent traités *a posteriori* de manière semi-empirique plus ou moins satisfaisante par l'implémentation de divers dispositifs pour limiter leurs effets – *a priori* néfastes – sur les performances des moteurs.

**Plan du mémoire** Le chapitre 1 de ce manuscrit est dédié à un rappel de quelques résultats aujourd'hui établis, mais qui seront utiles pour la suite de la lecture de ce travail. Dans un premier temps, des résultats de la théorie linéaire de la thermoacoustique sont présentés succinctement. La suite du chapitre se concentre sur la présentation des principaux phénomènes non linéaires identifiés comme limitant les capacités des moteurs thermoacoustiques et à une revue critique des solutions proposées ou implémentées sur différents systèmes

pour les contre-carrer ou limiter leurs effets. Ceci permettra alors d'exposer les motivations des travaux présentés dans la suite de ce mémoire.

La partie I présente les résultats d'une campagne expérimentale visant à la caractérisation d'un prototype de Transducteur Thermo-Acousto-Électrique (TAET) construit au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Ce prototype consiste en un moteur thermoacoustique de Stirling, couplé à un alternateur linéaire afin de générer de l'électricité. Ce transducteur est présenté dans le chapitre 2, et ses performances sont comparées à celles prédites par les outils de dimensionnement classiques. Le chapitre 3 présente une validation expérimentale d'une approche globale pour contrôler les performances de ce TAET grâce à une boucle de rétroaction électro-acoustique, mettant en évidence des phénomènes physiques complexes tel que l'augmentation du rendement du moteur pour une puissance de chauffage fournie constante, la possibilité d'éteindre l'auto-oscillation, ou encore un comportement hystérétique des seuils de déclenchement et d'extinction de l'auto-oscillation.

Fort des conclusions expérimentales présentées dans la partie précédente, la partie II s'attache à présenter une description analytique simplifiée du fonctionnement du TAET, permettant de mettre en évidence le rôle de différents phénomènes non linéaires dans les comportements observés. Le chapitre 4 présente la construction du modèle qui réduit la complexité du système au minimum, tout en conservant tant que possible l'essence des phénomènes mis en jeu. Le moteur est décrit par un système équivalent à constantes localisées faisant appel aux analogies acousto-électriques, auquel est couplée une description discrète de la distribution de température. L'influence sur la distribution de température de différents phénomènes est prise en compte, afin de pouvoir décrire les comportements complexes du prototype. Le chapitre 5 présente le développement du modèle afin d'inclure la boucle de rétro-contrôle. Les résultats de simulations sont présentés et interprétés en regard du comportement du TAET.

Finalement, la partie III est consacrée à une étude de la propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques de configurations simples. Le chapitre 6 présente la construction d'un modèle simple pour la prise en compte de la propagation linéaire dans les moteurs thermoacoustiques de toutes configurations à partir d'outils disponibles que sont la théorie linéaire de la thermoacoustique d'une part, et celle de la propagation faiblement non linéaire d'autre part, résolue par une méthode d'échelles multiples et adaptée au cas d'un système auto-oscillant. Les résultats obtenus par l'application de ce modèle à des configurations académiques sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature et interprétés au chapitre 7.

Le lecteur pourra trouver, à la suite des conclusions générales et des perspectives de ce travail données au chapitre 8, différentes annexes non essentielles à la lecture des travaux présentés, mais utiles pour un examen approfondi des développements analytiques ou pour l'implémentation des modèles.



# Notations

Les tables suivantes résument les notations utilisées au long du document. Certaines notations à usage local ne sont pas répertoriées.

L'indice "d" désigne les performances au seuil de déclenchement du moteur : fréquence de l'instabilité déclenchée  $f_d$ , gradient de température au déclenchement  $\Delta T_d$ , puissance nécessaire au déclenchement  $Q_{hd}$ , etc. L'indice "∞" indique des conditions dans lesquelles le déclenchement d'une instabilité acoustique n'est pas possible.

Dans les parties I et II, les indices "∅" et "0" désignent respectivement les performances en l'absence de source auxiliaire, et quand la source auxiliaire est présente mais non alimentée (c'est-à-dire pour  $G = 0$ ).

## Variables et propriétés thermophysiques

Symb.	Description	Définition	Unités
$\alpha$	Coeff. thermoélastique de dilatation isobare	$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$	$K^{-1}$
$\beta$	Facteur de dépendance en température <sup>136</sup>		1
$\gamma$	Rapport des capacités calorifiques	$c_P/c_V$	1
$\Delta T$	Diff. de température entre HHX et CHX	$T_h - T_c$	K
$\Delta T_0$		$\Delta T(G=0)$	K
$\Delta \dot{W}_{el}$	Surcroît produit grâce au rétro-contrôle	$\dot{W}_{el} - \dot{W}_{el0}$	W
$\delta_\nu$	Épaisseur de couche limite visqueuse	$\sqrt{2\nu/\omega}$	m
$\delta_\kappa$	Épaisseur de couche limite thermique	$\sqrt{2\kappa/\omega}$	m
$\eta$	Efficacité avec rétro-contrôle	$\dot{W}_{el}/(\dot{Q}_h + \dot{W}_{AS})$	1
$\eta_\emptyset$	Efficacité sans source auxiliaire	$\dot{W}_{el}/\dot{Q}_h$	1
$\eta_0$	Efficacité avec source aux. non alimentée	$\eta(G=0)$	1
$\eta_{reg}$	Efficacité du régénérateur	$\dot{W}_{ac}/\dot{Q}_h$	1
$\eta_{alt}$	Efficacité de l'alternateur	$\dot{W}_{el}/\dot{W}_{ac}$	1
$\eta$	Viscosité de volume		$Pa \cdot s^{-1}$
$\theta$	Temps adimensionné	$\omega\tau$	1

Symb.	Description	Définition	Unités
$\kappa$	Diffusivité thermique	$\lambda/(\rho c_P)$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique		$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\mu$	Viscosité dynamique		$\text{Pa s}^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique	$\mu/\rho_0$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\rho$	Masse volumique du fluide		$\text{kg m}^{-3}$
$\rho_0$	Masse volumique au repos		$\text{kg m}^{-3}$
$\rho'$	Variations acoustique de masse volumique	$\rho - \rho_0$	$\text{kg m}^{-3}$
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes		Pa
$\tau$	Variations acoustiques de température	$T - T_0$	K
$\tau$	Temps retardé (Partie III)	$t - x/a_0$	s
$\tau$	Temps de diffusion thermique (Partie II)		s
$v$	Valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$		$\text{s}^{-1}$
$\Phi$	Déphasage imposé des tensions		rad
$\phi$	Porosité	$1 - \frac{V_{solide}}{V_{total}}$	1
$\varphi$	Phase		rad
$\chi$	Distance normalisée (Partie III)	$\frac{(\gamma+1) M \omega x}{2 a_0}$	1
$\chi_T$	Coeff. thermoélastique de compress. isotherme	$-\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$	$\text{Pa}^{-1}$
$\psi$	Déphasage		rad
$\omega$	Pulsation acoustique	$2\pi f$	$\text{rad s}^{-1}$
$a_0$	Célérité adiabatique du son	$\sqrt{\gamma P/\rho}$	$\text{m s}^{-1}$
$Bl$	Facteur de force du moteur du HP		T m
$b$	Facteur de forme des pores		1
$C$	Capacité électrique		F
$C_a$	Compliance acoustique	$lS/(\gamma P_0)$	$\text{m}^3 \text{Pa}^{-1}$
$C_{ae}$	Equiv. de $L_e$ dans le domaine acoustique	$S_d^2/(Bl)^2 L_e$	$\text{m}^5 \text{N}^{-1}$
$C_{as}$	Equiv. de $C_{ms}$ dans le domaine acoustique	$S_d^2 C_{ms}$	$\text{m}^5 \text{N}^{-1}$
$C_{ms}$	Souplesse mécanique des suspensions du HP	$1/K_{ms}$	$\text{m N}^{-1}$
$c$	Capacité thermique (extensive)	$\rho c_P Sl$	$\text{J K}^{-1}$
$c_P$	Capacité massique à pression constante	$(\partial H/\partial T)_P$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$c_V$	Capacité massique à volume constant	$(\partial U/\partial T)_V$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$d$	Diamètre de guide d'onde		m
$f_n$	Fréquence de l'harmonique $n$		Hz
$f_\kappa$	Fonction thermique	$f(b, \delta_\kappa)$	1
$f_\nu$	Fonction visqueuse	$f(b, \delta_\nu)$	1
$f_{res}$	Fréquence de résonance du HP		Hz
$g$	Gain d'amplification du noyau thermoacoustique		1
$G$	Gain d'amplification en tension imposé		1
$H$	Enthalpie du gaz		W
$I^{(2n)}$	Intensité acoustique à la fréquence $f_n$	$\frac{1}{2} \Re [p^{(n)} v^{(n)*}]$	$\text{W m}^{-2}$
$K_{12,21}$	Coefficients de pertes de charges singulières		1
$K_{ms}$	Raideur mécanique des suspensions du HP		$\text{N m}^{-1}$
$k_0$	Nombre d'onde sans perte	$\omega/a_0$	$\text{rad m}^{-1}$
$k_w$	Nombre d'onde de guide d'onde	$k_0 \sqrt{\frac{1+(\gamma-1)f_\kappa}{1-f_\nu}}$	$\text{rad m}^{-1}$

Symb.	Description	Définition	Unités
$L, l$	Longueur		m
$L_e$	Inductance de la bobine du HP		H
$L_{res}$	Longueur d'un résonateur droit		m
$l_h$	Longueur des échangeurs de chaleur		m
$l_r$	Longueur du régénérateur		m
$l_s$	Longueur du stack		m
$l_w$	Longueur du tampon thermique (TBT)		m
$\mathcal{M}$	Matrice du système		—
$m$	Masse		kg
$m_a$	Masse acoustique	$\rho l/S$	kg m <sup>-4</sup>
$m_{as}$	Equiv. de $m_{ms}$ dans le domaine acoustique	$m_{ms}/S_d^2$	kg m <sup>-4</sup>
$m_{ms}$	Masse de l'équipage mobile du HP		kg
$P$	Pression totale		Pa
$P_0$	Pression statique		Pa
$P_{nom}$	Puissance nominale d'un HP		W
$p$	Variations acoustiques de pression	$P - P_0$	Pa
$\dot{Q}_h$	Puissance de chauffage fournie au moteur		W
$\dot{Q}_{hd}$	Puissance de chauffage au déclenchement		W
$\dot{Q}_{cond}$	Puissance calorifique transportée par conduction		W
$\dot{Q}_{lat}$	Pertes radiales de puissance thermique		W
$\dot{Q}_G$	Chaleur advectée par le streaming de Gedeon		W
$\dot{Q}_{ac}$	Chaleur transportée par effet thermoacoustique		W
$q$	Vitesse adimensionnée	$ v /v_0$	1
$R_a$	Résistance acoustique	$2b\nu L/(Sr_h^2)$	Pa m <sup>-3</sup> s
$R_{ae}$	Equiv. de $R_e$ dans le domaine acoustique	$(Bl/S_d)^2/R_e$	Pa m <sup>-3</sup> s
$R_{as}$	Equiv. de $R_{ms}$ dans le domaine acoustique	$R_{ms}/S_d^2$	Pa m <sup>-3</sup> s
$R_e$	Résistance électrique de la bobine du HP		$\Omega$
$R_L$	Résistance électrique chargeant l'alternateur		$\Omega$
$R_{ms}$	Résistance mécanique des suspensions du HP		N s m <sup>-1</sup>
$r$	Rayon		m
$r_h$	Rayon hydraulique	$\frac{\text{Surface}}{\text{Périmètre}}$	m
$S$	Entropie massique particulaire		J K <sup>-1</sup>
$S(x)$	Surface de la section transverse		m <sup>2</sup>
$S_d$	Surface de la membrane		m <sup>2</sup>
$S_0$	Entropie au repos		J K <sup>-1</sup>
$s$	Variations acoustiques d'entropie	$S - S_0$	J K <sup>-1</sup>
$T$	Température		K
$T_c$	Température de HHX ( $T$ froide de référence)		K
$T_h$	Température de l'échangeur chaud		K
$T_0$	Température au repos		K
$u$	Débit acoustique	$v/S(x)$	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>
$U$	Énergie interne du gaz		W
$\mathbf{V}$	Vitesse particulaire		m s <sup>-1</sup>
$V_G$	Vitesse d'écoulement redressé		m s <sup>-1</sup>

Symb.	Description	Définition	Unités
$\mathbf{v}$	Vitesse acoustique		$\text{m s}^{-1}$
$\mathbf{v}_0$	Vitesse d'écoulement permanent		$\text{m s}^{-1}$
$\dot{W}_{ac}$	Puissance acoustique disponible		W
$\dot{W}_{el}$	Puissance électrique générée		W
$\dot{W}_{el0}$		$\dot{W}_{el}(G=0)$	W
$\dot{W}_{AS}$	Puissance élec. fournie à la source auxiliaire		W
$x_{max}$	Excursion maximale du HP		mm
$y$	Admittance acoustique	$u/p$	$(\text{m}^3/\text{s})/\text{Pa}$
$Z_c$	Impédance acoustique caractéristique $p/u$	$\frac{(1-f\nu)\rho_0\omega}{S\phi k_w}$	$\text{Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$
$Z_{fc,rc}$	Impédance ac. resp. à l'avant et à l'arrière de la membrane		$\text{Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$

## Nombres/variables adimensionnels/réduits

Symb.	Description	Définition
$\epsilon$	Importance de la non-linéarité	$M(\gamma + 1)/2$
$\Gamma$	Nombre de Goldberg (partie III)	$\epsilon/St$
$\Gamma$	Nombre de Courant (partie II)	$(V_{ac} + V_G)\Delta t/\Delta x$
$\sigma$	Nombre de Prandtl	$(\mu c_P)/\lambda = \nu/\kappa$
$DR$	Drive ratio	$ p /P_0$
$k$	Nombre de Fourier (partie II)	$\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}$
$M$	Nombre de Mach	$ v /a_0$
$Re$	Nombre de Reynolds	$v_0/\sqrt{\nu\omega}$
$Sh$	Constante de cisaillement	$\delta_\nu/(\sqrt{2}r)$
$St$	Nombre de Stokes	$\frac{M^2}{2Re^2} \left( \frac{4}{3} + \frac{\eta}{\nu} + \frac{\gamma - 1}{\sigma} \right)$
$T$	Facteur de pertes de couches limites	$Sh [1 + (\gamma - 1)/\sqrt{\sigma}]$

## Notations

Symb.	Description	Définition
$\hat{\xi}$	Vecteur propre	
$\tilde{\xi}$	Amplitude complexe d'une fonction harmonique	$\xi \equiv \Re [\tilde{\xi} e^{-i\omega t}]$
$\bar{\xi}$	Moyenne sur la section transverse	$\bar{\xi} \equiv \frac{1}{S} \int_S \xi dS$
$\underline{\xi}$	Moyenne longitudinale sur la longueur $l$	$\underline{\xi} \equiv \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \xi dx$
$\langle \xi \rangle$	Moyenne sur la pseudo-période $t_p = 2\pi/\omega$	$\langle \xi \rangle \equiv \frac{1}{t_p} \int_t^{t+t_p} \xi dt$

---

## Sigles de notations anglaises courantes

---

<b>Sigle</b>	<b>... pour l'anglais ...</b>	<b>soit en français</b>
TAC	ThermoAcoustic Core	Noyau thermoacoustique
TAE	ThermoAcoustic Engine	Moteur thermoacoustique
TAET	ThermoAcoustoElectric Transducer	Moteur thermo-acousto-électrique
TWE	Traveling Wave Engine	Moteur à résonateur annulaire
SWE	Standing Wave Engine	Moteur à résonateur droit
CHX	Cold Heat Exchanger	Échangeur de chaleur froid
HHX	Hot Heat Exchanger	Échangeur de chaleur chaud
TBT	Thermal Buffer Tube	Tube tampon thermique
CWG	Coupling WaveGuide	Guide d'onde de couplage

---



# Chapitre 1

## État de l'art

### 1.1 Équations fondamentales de l'acoustique

Dans le cadre de l'acoustique linéaire ou faiblement non linéaire, les variables thermodynamiques décrivant le fluide sont développées sous la forme d'une approximation successive notée de manière générique

$$\Xi(x, y, z, t) = \Xi_0(x) + \xi(x, y, z, t) + O(\xi^2), \quad (1.1)$$

avec  $\Xi_0 \gg \xi$ . Les termes en majuscule  $\Xi_0$  indicés 0 correspondent aux composantes statiques des variables thermodynamiques au repos. Les termes minuscules  $\xi$  correspondent aux fluctuations acoustiques de la grandeur. Ceci donne les expressions respectivement pour la pression, la vitesse, la température, la masse volumique et l'entropie

$$P(x, y, z, t) = P_0 + p(x, y, z, t) + O(p^2) \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}(x, y, z, t) + O(\mathbf{v}^2) \quad (1.2b)$$

$$T(x, y, z, t) = T_0(x) + \tau(x, y, z, t) + O(\tau^2) \quad (1.2c)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x) + \rho'(x, y, z, t) + O(\rho'^2) \quad (1.2d)$$

$$S(x, y, z, t) = S_0(x) + s(x, y, z, t) + O(s^2) \quad (1.2e)$$

$$(1.2f)$$

La notation *tilde*  $\tilde{\xi}$  est utilisée pour exprimer l'amplitude complexe de la fonction harmonique  $\xi = \Re \left[ \tilde{\xi} e^{-i\omega t} \right]$  oscillant à la pulsation  $\omega$  en fonction du temps  $t$ . Ces grandeurs permettent d'exprimer les équations de bases nécessaires à la formalisation de la propagation acoustique linéaire en guide d'onde.

Le mouvement d'une particule de fluide visco-thermique en l'absence de source est alors décrit par un ensemble d'équations appelées les équations de Stokes-Navier. Cet ensemble comprend une première équation décrivant la conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.3)$$

S'y ajoute une équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho d_t \mathbf{v} = -\nabla P + \nabla \left[ \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}). \quad (1.4)$$

où l'opérateur  $d_t = (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)$  désigne la dérivée particulaire, et où  $\mu$  et  $\eta$  sont respectivement la viscosité de cisaillement cinématique et la viscosité de volume du fluide. Finalement la conservation de l'énergie est donnée sous la forme

$$\rho T d_t S = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \bar{\bar{\sigma}} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1.5)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique du fluide et  $\bar{\bar{\sigma}}$  représente le tenseur des contraintes. De plus, le fluide de travail est considéré bivalent, permettant d'exprimer deux équations d'état reliant les variables thermodynamiques entre elles :

$$dS = \frac{c_P}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dP, \quad (1.6a)$$

$$d\rho = -\rho \alpha dT + \rho \chi_T dP. \quad (1.6b)$$

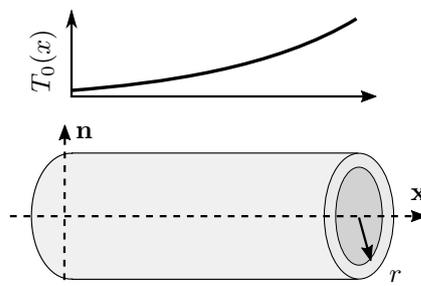
où  $c_P$  désigne la capacité thermique massique du fluide à pression constante,  $\alpha$  son coefficient thermoélastique de dilatation isobare et  $\chi_T$  son coefficient thermoélastique de compressibilité isotherme.

## 1.2 Thermoacoustique linéaire

Dans les moteurs thermoacoustiques, la conversion thermoacoustique prend place dans le régénérateur/stack. Ce dernier est un matériau poreux dont les pores possèdent un rayon hydraulique  $r_h$  (rapport de la section transversale au périmètre mouillé) de l'ordre de l'épaisseur des couches limites. Ces épaisseurs sont définies à la pulsation  $\omega$  de l'instabilité thermoacoustique, telles que l'épaisseur de couche limite visqueuse vaut  $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$  et l'épaisseur de couche limite thermique vaut  $\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega} = \sqrt{\sigma} \delta_\nu$ , avec  $\nu = \mu/\rho_0$  la viscosité de cisaillement cinématique du fluide,  $\kappa = \lambda/(\rho_0 c_P)$  sa diffusivité thermique et où le nombre de Prandtl  $\sigma = \mu c_P/\lambda = \nu/\kappa$  compare l'importance des phénomènes thermiques et visqueux. Typiquement, les pores d'un stack ont un rayon de l'ordre de ou supérieur à  $\delta_{\nu,\kappa}$ , tandis que dans un régénérateur le rayon est inférieur à  $\delta_{\nu,\kappa}$ . Dans le cadre de la thermoacoustique, la pression statique  $P_0$  est supposée constante, la distribution de température  $T_0(x)$  est inhomogène dans la direction  $x$  de propagation de l'onde, les variables  $\rho_0(x)$  et  $S_0(x)$ , dépendantes de la température, ont aussi une distribution selon  $x$ .

Aux équations fondamentales s'ajoutent un ensemble de conditions aux limites pour obtenir une description complète du problème, notamment :

- les vitesses tangentielles (condition de non glissement) et normales (condition de paroi rigide) sont nulles aux interfaces fluide-solide ;



**FIGURE 1.1** – Pore du régénérateur/stack, de direction longitudinale  $\mathbf{x}$  et transversale  $\mathbf{n}$ , de rayon  $r$ , soumis à une distribution de température longitudinale  $T_0(x)$ .

- les températures et les flux de chaleurs sont continus aux interfaces fluide-solide.
- De plus, les hypothèses suivantes sont faites pour simplifier l'expression du problème :
- le fluide est supposé initialement au repos en l'absence de perturbation acoustique, soit  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  ;
  - la longueur de la zone inhomogène en température est faible devant la longueur d'onde  $l \ll a_0/f_1$ , avec  $a_0$  la célérité du son dans le fluide et  $f_1$  la fréquence de la perturbation acoustique. L'amplitude des oscillations acoustiques est donc quasiment constante le long du gradient de température ;
  - le mouvement particulaire est laminaire<sup>90</sup> ;
  - la capacité calorifique et la conductivité des parois des pores sont grandes devant celles du fluide, se traduisant par  $\tau = 0$  à l'interface et une température du fluide homogène sur la section transverse d'un pore, et égale à celle du solide. Cette condition permet aussi de considérer l'onde de pression comme quasi-unidimensionnelle  $p(x, y, z, t) = p(x)e^{-i\omega t}$ .

### 1.2.1 Résultats classiques de la thermoacoustique linéaire

Les équations fondamentales sont projetées selon l'axe longitudinal  $0\mathbf{x}$  en ne conservant que les termes de premier ordre. L'application de l'approximation de couches limites (qui permet d'affirmer que la composante transverse de la vitesse particulaire est faible devant sa composante axiale  $|v_n| \ll |v_x|$ , mais ses variations transverses sont plus importantes que ses variations axiales  $\partial_n \mathbf{v} \gg \partial_x \mathbf{v}$ ), et l'application des conditions aux limites liées à la géométries des pores amènent à l'établissement de différentes relations entre les variables acoustiques. Ces relations sont ensuite moyennées sur la section transverse des pores pour donner les résultats classiques de la thermoacoustique linéaire. De ces équations, on retiendra celle donnant la relation entre pression et vitesse moyenne

$$\overline{v_x}(x) = \frac{(1 - f_\nu)}{i\omega\rho_0(x)} \partial_x \tilde{p} \quad (1.7)$$

où la notation  $\overline{(\dots)}$  représente la moyenne sur la section transverse, et avec  $f_\nu$  appelée fonction visqueuse qui est exprimée en fonction de l'épaisseur de la couche limite visqueuse  $\delta_\nu = \sqrt{2\nu(x)/\omega}$  (avec la viscosité dépendant de la distribution longitudinale de température) et qui dépend de la forme des pores (voir Annexe D).

Une relation de même type peut être établie pour les variations acoustiques de la température

$$\overline{\tau}(x) = \frac{(1 - f_\kappa)}{\rho_0 c_P} \tilde{p} - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \left[ 1 - \frac{\sigma f_\nu - f_\kappa}{\sigma - 1} \right] \partial_x T_0 \partial_x \tilde{p} \quad (1.8)$$

avec  $f_\kappa$  appelée fonction thermique et exprimée en fonction de l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa(x)/\omega}$  et de la forme des pores, et où  $\sigma = \nu/\kappa = \mu c_P/\lambda$  est le nombre de Prandtl du fluide.

Finalement, ces équations permettent d'obtenir l'équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients non constants de la propagation guidée pour la pression en présence d'une distribution de température<sup>136</sup> :

$$d_{xx}^2 \tilde{p} + \left[ \left( 1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(\sigma - 1)(1 - f_\nu)} \right) \frac{d_x T_0}{T_0} - \frac{d_x f_\nu}{1 - f_\nu} \right] d_x \tilde{p} + k_0^2 \left[ \frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right] \tilde{p} = 0. \quad (1.9)$$

avec  $k_0 = \omega/a_0$  le nombre d'onde sans perte à la température de référence  $T_c$  de l'échangeur froid et  $\gamma$  le rapport des capacités massiques à pression et volume constants du fluide.

### 1.2.2 Matrices de transfert et de diffusion

Dans le cadre des travaux présentés par la suite, il sera fait appel aux résultats de la thermoacoustique linéaire pour plusieurs applications. Des résultats seront basés sur l'exploitation du formalisme des matrices de transferts (ou des matrices de diffusion, établies par le biais des précédentes) pour la description de la propagation acoustique dans tout ou partie du moteur. A plusieurs reprises, le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dans les moteurs sera utilisé. Ce dernier est évalué en résolvant une équation caractéristique, permettant de décrire le moteur à partir de sa matrice de transfert globale et des ses conditions aux limites.<sup>62</sup> Le taux d'amplification linéaire, utilisé au chapitre 7, est établi de la même manière. Dans la partie III, la propagation dans le noyau thermoacoustique est décrite par sa matrice de diffusion – la propagation dans le reste du moteur étant décrite par une approche faiblement non linéaire.

Les matrices de transfert ou de diffusion d'une section de guide d'onde comportant un matériau poreux soumis à un gradient de température peuvent être exprimées à partir de la relation pression/vitesse (ou débit, les deux grandeurs étant directement proportionnelles) donnée par l'équation (1.7) et de l'équation (1.9). Une solution analytique exacte de cette dernière a été proposée par *Gusev et coll.*<sup>66,116</sup> sur la base de la forme compacte

$$d_{xx}^2 \tilde{p} + d_x \Phi_1 d_x \tilde{p} + k_0 \Phi_0 \tilde{p} = 0 \quad (1.10a)$$

où les fonctions  $\Phi_{0,1}$  sont données par

$$d_x \Phi_1 = \left( 1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(\sigma - 1)(1 - f_\nu)} \right) \frac{d_x T_0}{T_0} - \frac{d_x f_\nu}{1 - f_\nu}, \quad (1.10b)$$

$$\Phi_0 = \frac{T_c}{T_0} \left( \frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right). \quad (1.10c)$$

L'introduction de la variable spatiale  $d_x \xi = \xi_x = e^{\Phi_1(x_0) - \Phi_1(x)}$ , avec  $x_0$  une référence spatiale arbitraire, permet de définir la fonction  $G : \xi \mapsto G(\xi) = \Phi_0(x(\xi))\xi_x^{-2}$  grâce à laquelle la formulation (1.10a) est réduite à une équation de Helmholtz

$$d_{\xi\xi}^2 \tilde{p} + k_0^2 G(\xi) \tilde{p} = 0. \quad (1.11)$$

Une solution de cette dernière se donne sous forme itérative en passant par la forme d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce équivalente, notant  $\xi_0 = \xi(x=x_0)$

$$\begin{cases} \tilde{p}(\xi) = \tilde{p}(\xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} d_{\xi'} \tilde{p}(\xi') d\xi', & (1.12a) \\ d_{\xi} \tilde{p}(\xi) = d_{\xi} \tilde{p}(\xi_0) - k_0^2 \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi') \tilde{p}(\xi') d\xi'. & (1.12b) \end{cases}$$

La solution exacte du système (1.12) s'écrit alors grâce à la série infinie d'opérateurs

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(\xi) \\ d_{\xi} \tilde{p}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{\Omega_2}{ik_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \\ ik_0 \Omega_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(\xi_0) \\ d_{\xi} \tilde{p}(\xi_0) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

ceux-ci étant de la forme intégrale  $\Omega_1(f) = ik_0 \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi') f(\xi') d\xi'$ ,  $\Omega_2(f) = ik_0 \int_{\xi_0}^{\xi} f(\xi') d\xi'$ , et avec le développement donné par  $(\Omega_1 \Omega_2)^n f = \underbrace{\Omega_1(\Omega_2(\dots(\Omega_1(\Omega_2(f))))}_{n \text{ fois}}$ .

De cette solution matricielle (1.13), grâce à l'équation de la vitesse moyenne (1.7) et avec la définition de  $\xi_x$ , il vient alors aisément la matrice de transfert  $\mathcal{T}(\omega, T_0(x))$  en pression-débit de l'élément thermoacoustique

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{p}(x) \\ S\phi\tilde{\mathbf{v}}(x) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & R(x) \Omega_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \\ \frac{\xi_x(x)}{R(x)} \Omega_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{R(x_0) \xi_x(x)}{R(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(x_0) \\ S\phi\tilde{\mathbf{v}}(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{pp} & \mathcal{T}_{pv} \\ \mathcal{T}_{vp} & \mathcal{T}_{vv} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(x_0) \\ \tilde{u}(x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec  $R(x) = \rho_0(x) a_0 / [S\phi(1 - f_\nu)]$ , où  $S$  est la section transverse du guide d'onde et  $\phi$  sa porosité, rapport de la section fluide à la section transverse totale.

On notera que si la distribution de température est homogène :  $T_0(x) = T_c$ , alors  $d_x T_0 = 0$  et  $d_x f_\nu = 0$ . L'équation (1.9) se simplifie alors pour donner l'équation d'onde unidimensionnelle avec pertes

$$d_{xx}^2 \tilde{p} + k_w^2 \tilde{p} = 0, \quad (1.15)$$

avec  $k_w^2 = k_0^2 \left[ \frac{1 + (\gamma - 1) f_\kappa}{1 - f_\nu} \right]$  le nombre d'onde caractéristique du guide d'onde. Cette équation admet une solution de la forme  $\tilde{p}(x) = p(x_0)^+ e^{ik_w l} + p(x_0)^- e^{-ik_w l}$ , où  $l = x - x_0$ . Le report dans (1.7) de cette solution pour exprimer le débit acoustique  $\tilde{u}$

$$\tilde{u} = S\phi\tilde{\mathbf{v}}_x = \frac{S\phi k_w}{\rho_0 \omega} (1 - f_\nu) (p^+(x_0) e^{ik_w l} - p^-(x_0) e^{-ik_w l}) \quad (1.16)$$

où  $S\phi$  est la section transverse effective du guide d'onde de porosité  $\phi$ , permet l'expression de la matrice de transfert  $\mathcal{T}$  en pression-débit dans un matériau poreux en l'absence d'un gradient de température

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(x) \\ \tilde{u}(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_w l) & iZ_c \sin(k_w l) \\ i/Z_c \sin(k_w l) & \cos(k_w l) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(x_0) \\ \tilde{u}(x_0) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

où  $Z_c = (1 - f_\nu) \rho_0 \omega / (S\phi k_w)$  est l'impédance caractéristique complexe du guide d'onde, dépendant de la forme des pores.

Il est à remarquer que ces formulations (1.14) et (1.17) sont équivalentes pour un guide d'onde contenant un matériau poreux (resp. stack/régénérateur et échangeurs de chaleur) ou un guide d'onde vide de large section équivalent à seul un pore large (resp. TBT ou guide d'onde homogène en température). Dans ces différents cas, seules les fonctions viscothermiques  $f_{\nu, \kappa}$  diffèrent, fonctions dépendant du rayon hydraulique et de la forme des pores (voir Annexe D pour l'expression des fonctions visco-thermiques en fonction de la forme des pores).

Avec les définitions de la solution pour la pression ci-dessus et l'expression du débit (1.16),

la matrice de diffusion  $\mathcal{S}$  d'un élément, telle que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x) \\ \tilde{p}_-(x_0) \end{pmatrix} &= \mathcal{S}(\omega, T_0(x)) \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_0) \\ \tilde{p}_-(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}^+ & \mathcal{R}^- \\ \mathcal{R}^+ & \mathcal{T}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_0) \\ \tilde{p}_-(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.18a)$$

découle simplement de la matrice de transfert  $\mathcal{T}$  avec les coefficients de transmission  $\mathcal{T}^\pm$  et de réflexion  $\mathcal{R}^\pm$

$$\mathcal{T}^+ = \frac{2(\mathcal{T}_{pp}\mathcal{T}_{vv} - \mathcal{T}_{pv}\mathcal{T}_{vp})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_c + Z_c\mathcal{T}_{vp})}, \quad (1.18b)$$

$$\mathcal{R}^- = \frac{(Z_c\mathcal{T}_{vp} - \mathcal{T}_{pv}/Z_c) + (\mathcal{T}_{pp} - \mathcal{T}_{vv})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_c + Z_c\mathcal{T}_{vp})}, \quad (1.18c)$$

$$\mathcal{R}^+ = \frac{(Z_c\mathcal{T}_{vp} - \mathcal{T}_{pv}/Z_c) - (\mathcal{T}_{pp} - \mathcal{T}_{vv})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_c + Z_c\mathcal{T}_{vp})}, \quad (1.18d)$$

$$\mathcal{T}^- = \frac{2}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_c + Z_c\mathcal{T}_{vp})}. \quad (1.18e)$$

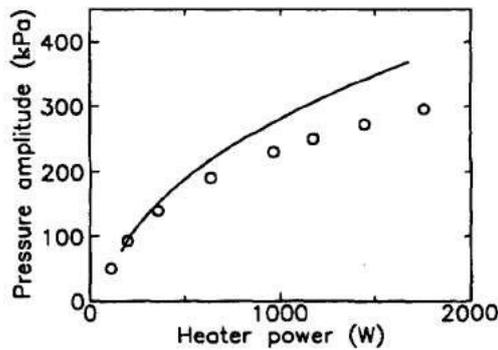
La matrice de transfert  $\mathcal{T}_{TA}$  (ou la matrice de diffusion  $\mathcal{S}_{TA}$ ) globale d'un noyau/moteur thermoacoustique complet est obtenue par combinaison linéaire des  $n$  matrices de transfert  $\mathcal{T}_i$  (resp. diffusion  $\mathcal{S}_i$ ) des différents éléments le composant

$$\mathcal{T}_{TA} = \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i. \quad (1.19)$$

Cette approche linéaire, si elle permet bien de décrire les conditions de stabilité des moteurs thermoacoustiques, s'avère cependant insuffisante au delà du seuil de déclenchement. En effet, de nombreux phénomènes non linéaires prennent place dans les machines thermoacoustiques, dont les effets augmentent avec l'amplitude des oscillations acoustiques.

### 1.3 Effets non linéaires dans les TAE

Au-delà du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, l'oscillation acoustique auto-entretenu croît rapidement en amplitude pour atteindre des niveaux élevés, (typiquement de l'ordre de 1 % à 15 % de la pression statique dans le système). Une approche linéaire de la description de la propagation acoustique et des échanges thermoacoustiques n'est plus suffisante pour décrire les dynamiques complexes observées dans les systèmes thermoacoustiques ou pour qualifier leurs performances de fonctionnement, comme le montrent les résultats de la figure 1.2. Expérimentalement, des phénomènes non linéaires (outre le pompage de chaleur thermoacoustique, inhérent au phénomène thermoacoustique) sont mis en évidence quasi-systématiquement, et leur importance augmente avec le régime de fonctionnement du moteur. De nombreux travaux dans le domaine de la thermoacoustique sont donc dédiés à la compréhension et la description de ces phénomènes, afin de les inclure dans les modélisations. Ces outils permettraient alors de dimensionner et optimiser des moteurs dont les performances théoriques et effectives concordent, non seulement pour des faibles régimes,



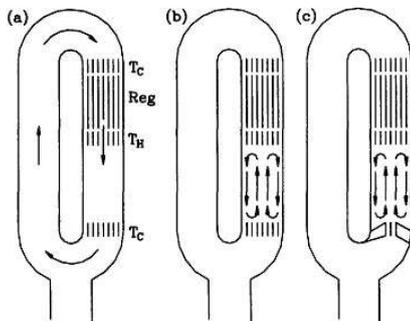
**FIGURE 1.2** – Performances de conversion d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires prédites (—) et mesurées (o o), montrant une divergence croissant avec l'amplitude de l'instabilité à cause des effets non linéaires insuffisamment pris en compte ou mal décrits dans la modélisation. (figure issue de [160], qualifiant les performances du moteur présenté dans [61]).  $P_0 = 31$  bar

mais aussi à des points de fonctionnement pour lesquels les outils actuels ne permettent pas une évaluation précise *a priori* des capacités réelles de ces machines. Les phénomènes en jeu les mieux identifiés sont discutés ci-après et mis en perspective avec les travaux présentés dans les différentes parties de ce document. Les solutions habituellement mises en place sur les prototypes pour limiter les effets engendrés par ces phénomènes sont aussi discutées. Outre le pompage thermoacoustique inhérent à l'effet thermoacoustique et plus ou moins bien pris en compte par la théorie linéaire, les principaux effets limitant l'efficacité de production de travail acoustique dans les moteurs thermoacoustiques sont identifiés en quatre catégories (non exclusives) qui sont présentées dans la suite ce chapitre :

- les flux de masse induit acoustiquement (parfois dénommés *streaming*) ;
- les effets aérodynamiques de bord ;
- les transferts de chaleur liés aux phénomènes précédents, ou dûs aux effets de bord ;
- la cascade harmonique, ou génération d'harmoniques supérieurs.

### 1.3.1 Flux de masse induit acoustiquement

Les termes génériques de *vent acoustique*, *écoulement redressé* ou *streaming* désignent tous différents types d'écoulements permanents générés par les effets dissipatifs prenant place lors de la propagation d'une onde acoustique de fort niveau. Ces écoulements peuvent être classés selon leur mécanisme de génération : la dissipation de volume (par exemple dans un faisceau ultrasonore) est à l'origine du streaming de *Eckart*, qui ne sera pas discuté ici ; les contraintes subies par le fluide à l'interface avec une paroi sont à l'origine du streaming de *Rayleigh*. La propagation d'une onde progressive s'accompagne de phénomènes de dissipation amenant à la génération du streaming dit de *Gedeon* ; finalement, la propagation avec une vitesse acoustique suffisante dans une réduction de section asymétrique peut amener à l'établissement



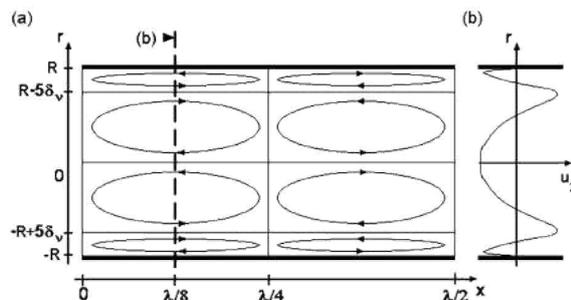
**FIGURE 1.3** – Différentes formes de *streaming* susceptibles d'apparaître dans un moteur thermoacoustique, et le plus souvent préjudiciables aux performances du système. (a) *Streaming* de *Gedeon*; (b) *Streaming* de *Rayleigh*; (c) *Jet streaming*. (figures issues de [160])

d'un écoulement permanent, dit *jet pump* et la mise en place de cellule de recirculation (*jet streaming*).

### Streaming de *Rayleigh*

Le développement à l'ordre 2 des équations de l'acoustique met en évidence des termes acoustiques quadratiques à moyenne temporelle non nulle au voisinage d'une paroi, résultant en un flux net de masse d'ordre 2 superposé au flux de masse oscillant de premier ordre. Dans le cas d'une onde stationnaire, le phénomène est mis en évidence dès 1831 par *Faraday*<sup>48</sup> et caractérisé en 1884 par *Rayleigh*<sup>149,150</sup> (du moins hors de la couche limite). Le flux de masse sur la section transverse du guide d'onde reste nul : un déplacement est observé des ventres vers les nœuds de vitesse le long des parois, qui est compensé par un écoulement dans le sens opposé le long de l'axe du guide, formant des cellules toroïdales de circulation du fluide. *Westervelt* va plus loin en montrant qu'une autre cellule de recirculation existe le long des parois dans une épaisseur de quelques  $\delta_\nu$ <sup>179</sup> (streaming de *Schlichting*), mettant en évidence le schéma de recirculation classique présenté à la figure 1.4 pour des amplitudes acoustiques modérées. Ce phénomène peut être observé dans le résonateur des moteurs à ondes stationnaires, et dans le TBT de machines complexes, comme représenté à la figure 1.3b.

Les travaux subséquents de *Nyborg*<sup>102</sup> pour la généralisation aux parois de formes arbitraires, et parallèlement de *Rott*<sup>134</sup> et *Qi*<sup>124</sup> pour la prise en compte des effets thermiques dans la description du streaming contribuent à la compréhension du phénomène. Le développement de machines thermoacoustiques faisant appel à des niveaux acoustiques toujours plus importants relance l'intérêt pour le sujet, avec notamment les travaux de *Waxler*<sup>178</sup> et *Bailliet et coll.*,<sup>12</sup> qui repartent des travaux de *Rott* pour inclure un gradient de température dans des guides larges (TBT) et étroits (pores du régénérateur) ainsi que l'extension à un guide d'onde de section variable par *Hamilton et coll.*<sup>70</sup> Les travaux plus récents à très forts niveaux mettent en évidence l'apparition d'irrégularités dans la forme des cellules de circulation, aussi bien théoriquement<sup>87</sup> et numériquement<sup>39,127</sup> qu'expérimentalement.<sup>46,93,167</sup> La dynamique temporelle de ce type de streaming est complexe et, dans les machines thermoacoustiques, ne dépend pas seulement des quantités acoustiques, mais aussi des conditions thermiques.<sup>167</sup> Elle répond à une échelle temporelle propre (supérieure à l'échelle de temps acoustique<sup>166,167</sup>) et est supposée responsable de comportements complexes (double déclenchement,<sup>112</sup> régime de déclenchement-arrêt<sup>113</sup>). Le streaming de Rayleigh est connu pour être présent dans tous types de machines thermoacoustiques, réfrigérateurs comme moteurs.<sup>160</sup> *Olson et Swift* ont efficacement proposé l'utilisation de guides d'ondes légèrement coniques pour annuler cet effet,<sup>9,108</sup> sous hypothèse d'un comportement laminaire du fluide.



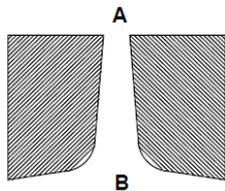
**FIGURE 1.4** – Représentation du champ de vitesse redressée en présence de streaming de Rayleigh. (a) Cellules de recirculation dans un résonateur. (b) Variations axiales de la vitesse redressée à la position  $x = \lambda/8$  avec  $\lambda = a_0/f_1$  la longueur d'onde. (figure issue de [93])

### Streaming de Gedeon

Dans le cas des machines à ondes quasi-progressives, construites autour d'un résonateur en forme de boucle (résonateur annulaire,<sup>30</sup> ou résonateur coaxial<sup>94</sup>) favorisant ce type d'onde, un flux massique moyen non nul sur la section transversale du résonateur peut alors se développer et circuler dans la machine (voir figure 1.3c). Décrit par *Gedeon*,<sup>57</sup> le streaming éponyme est mis en évidence dans les premiers moteurs thermoacoustiques à onde progressive par *Swift et coll.*<sup>9,161</sup> Une description théorique du streaming de Gedeon a été donnée par *Gusev et coll.*,<sup>67</sup> permettant de décrire aussi bien un moteur à régénérateur (moteur thermoacoustique de Stirling) qu'un moteur à stack (du type de celui de *Yazaki*<sup>191</sup>). *Swift* suggère d'annuler cet écoulement en générant un écoulement permanent de débit équivalent et de sens opposé grâce à une pompe à jet,<sup>161</sup> dont le fonctionnement est le sujet du prochain paragraphe. Alternativement, *Swift*, puis *Tijani* proposent l'utilisation d'une membrane transparente aux ondes acoustiques mais qui bloque toute composante moyenne non nulle.<sup>161,168</sup> Dans un but différent, mais avec le même effet, on peut trouver des moteurs équipés d'un alternateur coaxial<sup>199</sup> pour la génération électrique ou d'une source acoustique pour le contrôle actif du champ acoustique,<sup>122</sup> transducteurs dont la membrane aura le même effet sur le streaming. Ici aussi, le comportement dynamique du streaming est important. Il est le sujet d'une série de publications par *Amari et coll.* présentant les résultats de simulations numériques en résonateur annulaire<sup>3,4,26</sup> qui permettront de mieux comprendre ce qui se passe en présence de géométries complexes comme dans les TAE.

### Pompe à jet

Les pompes à jet utilisent la dissymétrie de l'écoulement acoustique (voir section suivante et figure 1.8) et des pertes singulières associées au passage dans un étranglement de section asymétrique du type de celui présenté à la figure 1.5, et prenant place pour une vitesse acoustique suffisamment élevée. Le Principe de Bernoulli n'étant dans ces conditions pas respecté, une différence de pression entre les deux côtés de l'étranglement se met en place, qui est compensée naturellement par l'établissement d'un écoulement permanent,<sup>144</sup> pouvant circuler autour du tore, ou localement par recirculation (voir figure 1.3c). Ce phénomène a été exploré d'un point de vue théorique, expérimental<sup>9,21,118</sup> et numérique<sup>25</sup> pour être mis à profit afin de contrer le streaming de Gedeon. Une pompe à jet permet en effet, en imposant un écoulement de même débit et de sens opposé, de rétablir un flux de masse nul dans les moteurs thermoacoustiques comportant une section toroïdale.

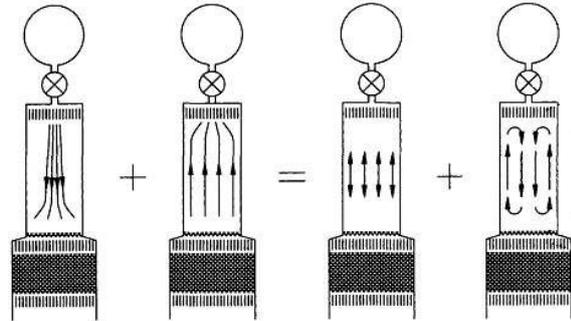


**FIGURE 1.5** – Schéma de principe d'une pompe à jet : l'écoulement acoustique subit une contraction abrupte en se déplaçant de A vers B, et une détente subite dans l'autre sens ; les deux ne sont pas réciproques, il en résulte une différence de pression entre A et B. (figure issue de [25])

### Jet streaming

La dissymétrie des écoulements entrant et sortant à des singularités géométriques conduit à l'établissement de flux de masses non réciproques sur les deux demi-périodes d'une oscillation

acoustique. Une décomposition de ces flux permet de mettre en évidence une composante oscillante à laquelle se superpose une cellule de recirculation toroïdale, comme le montre la figure 1.6. Ce phénomène peut se mettre en place si des redresseurs de flux ne sont pas introduits aux changements de section abrupts ou aux jonctions entre différentes branches du réseau acoustique.



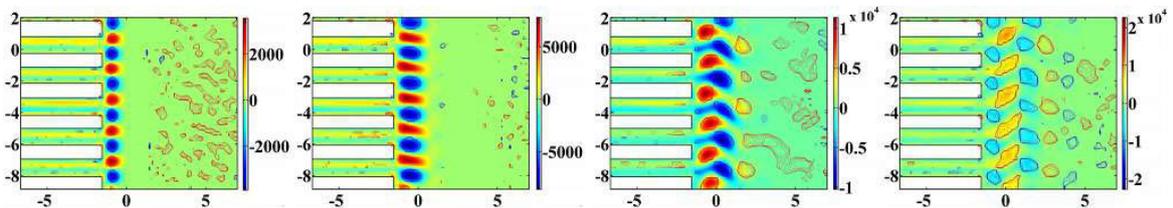
**FIGURE 1.6** – *Jet streaming dans un pulse tube. La superposition d'un flux oscillant, concentré dans une direction et réparti dans l'autre, peut être décomposée en une composante oscillante répartie et une cellule de recirculation toroïdale. (figure issue de<sup>160</sup>)*

### 1.3.2 Effets aérodynamiques de bord

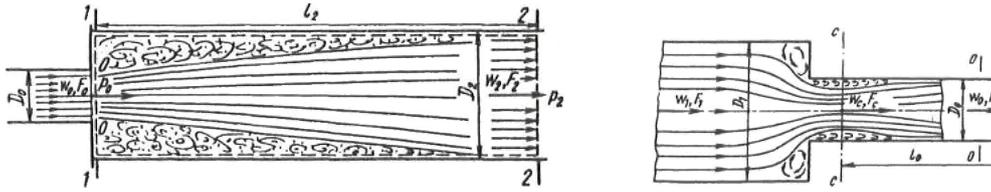
Les changements brusques de section apparente du guide d'onde aux interfaces entre matériaux poreux constituant les échangeurs de chaleur et le stack/régénérateur ou avec le guide d'onde vide, et les changements de direction brutaux des guides d'ondes (jonction en T) génèrent des effets aérodynamiques de bord sous la forme de tourbillons (voir figure 1.7) qui dissipent de l'énergie acoustique.<sup>15,160</sup>

On traduit habituellement ces effets de second ordre – car proportionnels au carré de la vitesse de l'écoulement – par une chute de pression proportionnelle à un coefficient de perte de charges,<sup>74,114</sup> extrapolés pour l'écoulement acoustique oscillant à partir du cas d'un écoulement permanent (figure 1.8), et éventuellement ajusté pour prendre en compte le profil de vitesse transverse.<sup>172,173</sup>

La formation de ces tourbillons est limitée par la réduction du nombre de singularités géométriques (peu de changements de sections, des courbures régulières, des jonction en T adoucie,<sup>168</sup> etc.). Le développement des tourbillons peut être restreint par l'utilisation de redresseurs de flux aux extrémités des éléments poreux ou aux jonctions : un empilement de quelques grilles fines uniformise l'écoulement sur la section transverse,<sup>9,168</sup> un effet aussi possiblement obtenu par l'utilisation d'une structure de type nid d'abeille.<sup>142</sup>



**FIGURE 1.7** – *Champs instantanés de vorticité au voisinage de l'extrémité froide d'un stack mesurés expérimentalement par vélocimétrie par images de particules (PIV), pour des amplitudes acoustiques croissantes  $|p| = 500$  Pa, 100 Pa, 1500 Pa et 2000 Pa. (figure issue de [16])*

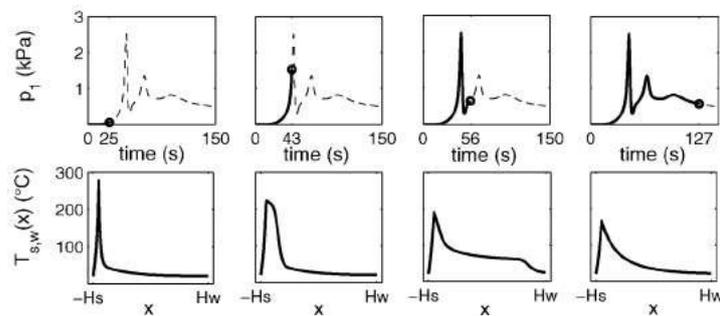


**FIGURE 1.8** – Représentation schématique des écoulements à une brusque variation de section apparente du guide d'onde, faisant apparaître des zones tourbillonnaires en marge de l'écoulement laminaire dans lesquelles de l'énergie acoustique est dissipée : (gauche) expansion et (droite) contraction. (figure issue de [74])

### 1.3.3 Transferts de chaleurs non linéaires

Liés à l'ensemble de ces phénomènes acoustiques, des transferts de chaleur complexes prennent place dans le noyau thermoacoustique. En effet, en plus de la convection acoustique, aussi appelée pompage thermoacoustique<sup>136,195</sup> inhérente au phénomène thermoacoustique, chacun des effets de transport de masse décrit précédemment s'accompagne de convection forcée de la chaleur.

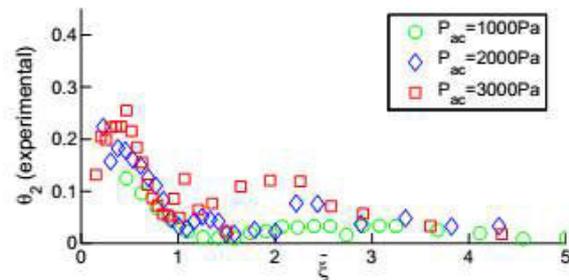
Les streamings de Rayleigh<sup>95,113</sup> et Gedeon<sup>9,115</sup> sont connus pour perturber la distribution de température dans le noyau thermoacoustique et l'éloigner de la distribution, souvent supposée linéaire, pour laquelle le moteur thermoacoustique a été conçu et optimisé. La figure 1.9 montre l'évolution suivie par la distribution de température dans le noyau thermoacoustique d'un moteur à ondes stationnaires lors du transitoire d'établissement de l'instabilité thermoacoustique, dans un modèle prenant en compte le streaming de Gedeon. La distribution change violemment de forme, particulièrement dans le TBT où elle passe d'une zone chaude concentrée à la limite de l'échangeur chaud aux instants initiaux, à une distribution très étalée après une cinquantaine de secondes avant de se stabiliser avec une distribution quasi-exponentielle. Ces phénomènes de convection forcée, agissant avec leur propre échelle temporelle, sont donc supposés être (au moins partiellement) à l'origine de certains comportements dynamiques complexes observés sur des moteurs (pourtant de configurations très simples), comme les régimes de déclenchement-arrêt successifs,<sup>115,158</sup> régime en arête de poisson (forte modulation d'amplitude),<sup>113,197</sup> déclenchement à double



**FIGURE 1.9** – Évolution modélisée du transitoire de déclenchement de l'instabilité, dans un modèle de moteur annulaire prenant en compte le streaming de Gedeon. (a) Amplitude de pression ; (b) distribution de température dans le noyau thermoacoustique aux différents instants représentés par les points (après 25 s, 43 s, 56 s et 127 s). (figure issue de [115])

seuil,<sup>112</sup> observés sur des moteurs de laboratoire de configurations académiques.

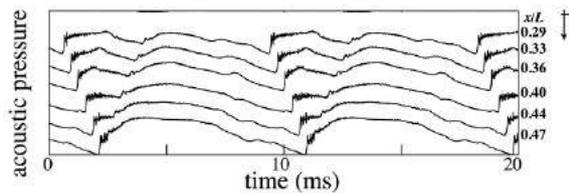
De plus, un fort couplage entre les effets aérodynamiques de bord et les transferts thermiques est, sans conteste, présent dans le noyau thermoacoustique.<sup>24,85,86</sup> Il se traduit par la perturbation du champ de température via la génération d'harmoniques supérieurs des oscillations de température,<sup>17,68</sup> observable sur la figure 1.10, et des variations locales lentes de la densité du fluide de travail.<sup>119</sup>



**FIGURE 1.10** – Amplitude des fluctuations de la température  $\theta_2$  mesurée à la sortie du stack à la fréquence  $f_2 = 2f_1$ , pour plusieurs niveaux de pression. (figure issue de [17])

### 1.3.4 Cascade harmonique

Les fortes amplitudes acoustiques atteintes dans les machines thermoacoustiques sont à l'origine d'un phénomène de cascade de l'énergie acoustique de la fréquence fondamentale  $f_1$  vers les harmoniques supérieurs  $f_n$ . Ce phénomène n'est pas prépondérant dans les moteurs thermoacoustique. Cependant, dans les configurations académiques à géométrie très simple (laser thermoacoustique,<sup>56</sup> moteur annulaire à section constante), cet effet est bien observable,<sup>9,53</sup> et peut mener jusqu'au développement d'ondes de choc, telles que celles mesurées par *Biwa et coll.*<sup>19,20</sup> et présentées à la figure 1.11 pour un moteur annulaire. Pour plus d'informations sur la propagation acoustique non linéaire, le lecteur peut se reporter à de nombreuses références de la littérature.<sup>69,96,152</sup> La propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques fera l'objet de la partie III de ces travaux.



**FIGURE 1.11** – Propagation d'une onde de choc dans un moteur thermoacoustique annulaire à noyau court. (figure adaptée de [20])

## 1.4 Applications des moteurs thermoacoustiques

La théorie linéaire de la thermoacoustique est aujourd'hui bien établie, et les outils de conception et optimisation actuels de machines thermoacoustiques basés sur ses principes sont efficaces pour le dimensionnement de moteurs dans un régime de fonctionnement de faible amplitude (proche du déclenchement de l'instabilité). En fonctionnement nominal cependant, les amplitudes acoustiques atteintes (les variations de pression acoustique peuvent atteindre plus de 10 % de la pression statique) sont suffisantes pour l'apparition d'effets non linéaires impactant les performances des machines. Ces effets, notamment ceux présentés à la

section précédente, sont activement étudiés par la communauté de la thermoacoustique, car ils sont les verrous actuels pour les applications spécifiques des machines thermoacoustiques envisagées à court ou moyen terme. En effet, couplé à des transducteurs qu'ils alimentent en travail acoustique, les moteurs thermoacoustiques permettent de valoriser des sources de chaleur sous plusieurs formes. Les défis à relever pour la mise en œuvre de ces projets ont amené le développement de configurations innovantes, comme l'utilisation de noyaux thermoacoustiques en cascade<sup>11,41</sup> permettant d'abaisser le gradient de température de fonctionnement tout en conservant les performances des moteurs, le développement de structures compactes non résonantes<sup>120</sup> ou l'exploration de nouveaux mécanismes, tels que l'influence des changements de phase d'un fluide de travail saturé de vapeur,<sup>64,65,126</sup> dont l'influence a été mise en évidence expérimentalement par une baisse notable des gradients de température requis pour le fonctionnement des moteurs.<sup>97,189</sup>

**La génération électrique.** En couplant le moteur thermoacoustique à un transducteur acousto-électrique, l'énergie acoustique est convertie en électricité, avec une efficacité variable et pour des gammes de puissances s'étendant de quelques  $\mu\text{W}$ <sup>163</sup> à quelques dizaines de kW.<sup>43</sup> Ces applications peuvent être distinguées selon les sources de chaleur qu'elles exploitent d'une part, et par le système de transduction acousto-électrique d'autre part. Un résumé des différents systèmes proposés (réalisés expérimentalement ou non) est présenté dans le tableau 1.1. Certains systèmes, méritent d'être rapidement discutés.

Transd. A/E	SOURCE DE CHALEUR				
	parabole solaire	gaz à basse température	flamme, gaz d'échapp.	micro- compos.	autre ou non précisé
HP		31,42,198,199			106,122
altern.	184,185	42,129,140	13,42	164	10,82,154,186,187
turbine		42,43			
MHD					29,73,91,155,181
piezo			11,78,203	75,163	98

**Tableau 1.1** – Résumé des références bibliographiques présentant des projets, brevets et systèmes de conversion thermo-acousto-électrique disponibles dans la littérature, classés en fonction de la source de chaleur exploitée et du mode de transduction acousto-électrique. HP désigne un haut parleur électrodynamique, altern. un alternateur linéaire, MHD une transduction magnéto-hydrodynamique et piezo une transduction piézoélectrique.

Le plus ambitieux de ces projets est probablement celui de la société Aster Thermoacoustics\*, avec son projet TAP ayant pour objectif à terme d'extraire 10 kW électriques de 100 kW thermiques.<sup>42</sup> Ce projet exploite une configuration annulaire à 4 étages de régénérateurs en cascade<sup>41</sup> permettant d'augmenter l'efficacité d'exploitation de chaleur fatale †

\*. <http://www.aster-thermoacoustics.com/>

†. L'énergie fatale représente l'énergie produite par un processus dont la finalité n'est pas la production de cette énergie, c'est une énergie souvent perdue si elle n'est pas récupérée et/ou valorisée. Par extension du concept, la chaleur fatale désigne une production de chaleur dérivée d'un site/processus, mais qui n'en constitue pas l'objet premier. La directive européenne 2012/27/UE relative à l'efficacité énergétique, dont

basse température (air de 150 °C à 160 °C). Ce projet est momentanément en l'attente de développement d'une turbine bi-directionnelle pour la conversion acousto-électrique,<sup>44</sup> les capacités de conversion des alternateurs linéaires étant limités à quelques kW.

Un défi technique a été posé par le projet SCORE\*, mobilisant plusieurs équipes de recherche pour le développement d'un poêle fermé pouvant équiper les habitations de zones défavorisées. Le poêle devait pourvoir du chauffage pour l'habitation et pour la cuisine, ainsi qu'une réserve d'eau chaude et, couplé à un générateur thermoacoustique, délivrer quelques dizaines de watts électriques dans des zones non couvertes par les réseaux électriques.<sup>129</sup> Le principal challenge du projet était de délivrer un produit pour un coût inférieur à ~30 \$.

**Pompes à chaleur** Le principe thermoacoustique étant réversible, il est possible de générer un gradient de température entre les extrémités d'un matériau poreux traversé par une onde acoustique de fort niveau. En couplant un moteur thermoacoustique à une pompe à chaleur thermoacoustique, des systèmes ne comprenant aucune pièce mobile sont obtenus,<sup>190</sup> qui offrent deux possibilités :

- la valorisation de chaleur fatale basse température en chaleur à plus haute température,<sup>146</sup> plus facilement utilisable par d'autres moyens technologiques ;
- la réfrigération à partir d'une source de chaleur,<sup>1,5,40,182</sup> pour des applications entre autres de climatisation automobile à partir de la chaleur des gaz d'échappement,<sup>54,188</sup> de réfrigération domestique,<sup>81,139</sup> de liquéfaction de gaz naturel à des températures inférieures à -163 °C<sup>159,183</sup> ou de cryogénéisation<sup>36,37,76,125</sup> permettant d'atteindre des températures inférieures à 20 K.<sup>72</sup>

**Autres applications** D'autres applications, plus exotiques, ont été envisagées pour l'utilisation des moteurs thermoacoustiques. Notamment, l'utilisation de l'effet thermoacoustique pour la séparation de mélanges de gaz a été proposée.<sup>58,147,156</sup> Un projet envisage l'utilisation des moteurs thermoacoustiques comme capteurs robustes et sans électronique embarquée, pouvant être utilisés pour surveiller le fonctionnement d'un réacteur nucléaire à distance, en reliant directement la fréquence de fonctionnement du moteur à la température du réacteur.<sup>2</sup> Sur une note plus artistique, on notera des projets de développement d'orgues thermoacoustiques<sup>†</sup>.

## 1.5 Motivations des travaux

L'intérêt des communautés scientifique et industrielle pour les moteurs thermoacoustiques, ainsi que la variété des applications proposées, montrent clairement le potentiel de ces machines. Cependant, le développement de systèmes commerciaux ne prendra son essor que lorsque des outils de dimensionnement capables d'estimer les performances réelles des machines avec une précision suffisante seront disponibles, afin de les optimiser et d'exploiter leur plein potentiel : la technologie des moteurs thermoacoustiques apparaît en effet porteuse

---

l'article 14.5 est transposé en France par le Décret n°2014-1363 du 14 novembre 2014 impose que les nouvelles installations de plus de 20 MW thermiques devront, sous réserve qu'une analyse coût-avantage démontre un gain économique, être équipées d'unités de cogénération à haut rendement permettant de valoriser la chaleur fatale issue de la production d'électricité

\*. <http://www.score.uk.com/>

†. voir par exemple <http://jacques-remus.fr>

dans les années à venir pour la valorisation d'énergie jusqu'alors considérée comme perdue (car à trop basse température), dans un contexte où la responsabilité collective nous oblige à limiter notre impact écologique et à mieux exploiter des ressources énergétiques dont la disponibilité diminue progressivement et dont le prix augmente. La compréhension et la modélisation des phénomènes non linéaires prenant place dans les machines de configuration complexe sont donc un passage obligé pour parvenir à cet objectif. Cependant, l'état actuel des connaissances ne permet pas de décrire précisément chacun de ces phénomènes, même dans des machines académiques de configuration simple, et a fortiori leurs interactions sont mal identifiées. C'est donc fort de ce constat, ainsi que de l'expérience des nombreuses études évoquées précédemment, que ce travail s'est orienté vers une approche plus globale que celles proposées habituellement et consistant à traiter chaque phénomène non linéaire indépendamment.

Ce travail commence donc par la qualification des performances d'un prototype de transducteur thermo-acousto-électrique de faible puissance (mais atteignant des amplitudes acoustiques de quelques pour-cents de la pression statique, suffisantes pour la mise en place de phénomènes non linéaires marqués) sur lequel aucune méthode de contrôle des non linéarités acoustiques n'a été implantée. En effet, l'objectif des artefacts implémentés sur les moteurs (membranes, pompes à jet, TBT coniques, etc.) est de garder la distribution de température la plus proche possible d'un idéal prédéterminé lors de la conception de la machine (et imposé par le caractère linéaire de la modélisation). L'approche proposée dans ce travail suggère plutôt de composer avec tous ces effets et d'ajuster le champ acoustique dans le moteur grâce à un rétro-contrôle électroacoustique, afin d'obtenir une distribution acoustique plus favorable à l'interaction thermoacoustique avec la distribution de température découlant des effets non linéaires en présence. De plus, la compréhension des effets induits par ce rétro-contrôle étant nécessaire, une modélisation simplifiée du fonctionnement du moteur sous l'influence de ce rétro-contrôle est proposée.

De manière complémentaire, une étude sur la propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques est présentée. Mettant à profit les outils disponibles pour la description de la propagation faiblement non linéaire dans les guides d'ondes, elle étend ces derniers au cas des auto-oscillations qui prennent place dans les moteurs thermoacoustiques pour rendre compte des effets observés expérimentalement sur des configurations particulières de moteurs mettant en évidence la formation d'ondes de chocs.



## Première partie

# Caractérisation analytique et expérimentale d'un Transducteur Thermo-Acousto-Électrique – Rétro-contrôle électroacoustique

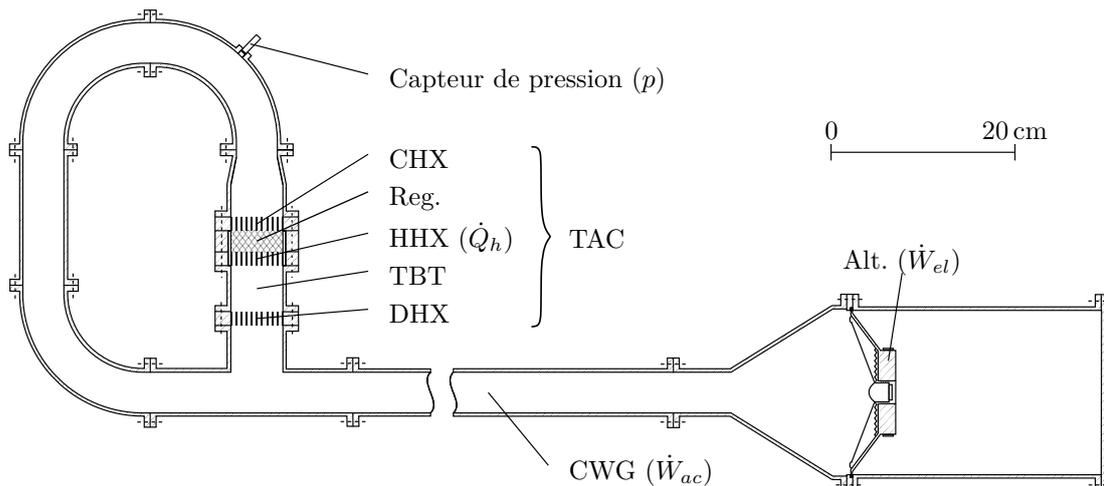


## Chapitre 2

# Caractérisation du transducteur thermo-acousto-électrique

Le transducteur thermo-acousto-électrique (TAET) étudié ici est un prototype dimensionné et mis en place au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Il est construit sur la base d'un moteur thermoacoustique de Stirling couplé à une charge mécano-acoustique. Dans le cas du TAET, la charge est constituée d'un alternateur linéaire (un haut-parleur électrodynamique fonctionnant en alternateur), couplé par un guide d'onde permettant d'adapter les impédances acoustiques des deux systèmes. Ce prototype est représenté schématiquement à la figure 2.1. L'ensemble des dimensions nécessaires à la modélisation du système est donné à l'Annexe B.2.

Après une description des éléments le constituant, et notamment de son noyau thermoacoustique à la section 2.1, les performances du TAET sont caractérisées à la section 2.2, d'abord en termes de stabilité, puis en termes de conversion énergétique au-delà du seuil de déclenchement.



**FIGURE 2.1** – Représentation schématique à l'échelle du transducteur thermo-acousto-électrique. Quand une puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  lui est fournie, le transducteur génère une puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$ , convertie en une puissance électrique  $\dot{W}_{el}$  par un alternateur.

## 2.1 Description

La partie annulaire du transducteur est constituée d'un guide d'onde dont la longueur déroulée vaut  $L = 1.1$  m et de diamètre  $d = 42.15$  mm. Le guide comprend une section de plus fort diamètre dans laquelle sont situés les éléments inhomogènes en température et les échangeurs de chaleur servant à entretenir cette distribution. Cette section est désignée comme le noyau thermoacoustique (TAC).

La pièce centrale du noyau est le régénérateur (noté Reg sur la figure 2.1), dans lequel les interactions thermoacoustiques prennent place. Il est composé d'un empilement de hauteur  $l_r = 2.3$  cm de grilles d'inox, constituées de fil de  $32\ \mu\text{m}$  de diamètre. La porosité du régénérateur est évaluée à partir de sa masse et son volume à  $\phi_r \simeq 0.69$ . Le rayon hydraulique de ses pores est de l'ordre de  $r_h \simeq 20\ \mu\text{m}$ . Au sommet du noyau est placé un premier échangeur de chaleur froid (CHX). Taillé dans un bloc de cuivre d'épaisseur  $l_{h2} = 15$  mm, il est percé de 303 trous de 2.0 mm de diamètre. Sa porosité est évaluée à  $\phi_{h2} \simeq 0.6$ . Il est refroidi par de l'eau à température ambiante circulant dans une fente périphérique avec un débit de  $0.21\text{s}^{-1}$ . Le gradient de température dans le noyau est imposé par l'échangeur chaud (HHX) placé sous le régénérateur. Il est constitué d'un ruban de nichrome de 2.0 m de long et 3.0 mm de large inséré dans un *stack* de céramique à pores carrés de 0.9 mm de côté qui forme deux zigzags afin de couvrir un maximum de la section transversale du tube. La longueur de l'échangeur chaud vaut  $l_{h1} = 15$  mm et sa porosité est estimée à  $\phi_{h1} \simeq 0.89$ . Le ruban de nichrome est alimenté par une source de puissance continue (Aim-TTi EX4210R) pouvant délivrer au système une puissance électrique limitée à  $\dot{Q}_h = 180$  W, permettant ainsi d'atteindre des températures supérieures à 900 K. L'échangeur chaud ainsi que le régénérateur sont introduits dans un cylindre de céramique qui permet de les isoler thermiquement afin de limiter les fuites thermiques vers l'extérieur. Le dernier élément du TAC est un tube droit de diamètre constant, de longueur  $l_w = 5$  cm qui a un rôle de tampon thermique entre l'échangeur chaud et le reste du système à température ambiante. Il est souvent dénommé *thermal buffer tube* (TBT) et se termine par un second échangeur de chaleur froid (DHX) en tout point semblable au premier, servant à imposer la température froide à la sortie du noyau. Des photographies des échangeurs de chaleur sont données à l'Annexe B.2.

Le guide d'onde de couplage (CWG) est un tube droit de longueur  $l_{res} = 1.55$  m et de 42.15 mm de diamètre qui aboutit à un cône de 121 mm de long pour l'adapter au diamètre de l'alternateur. Une cavité arrière de 249.5 mm de long et de 91 mm de rayon agit essentiellement comme une compliance acoustique sur l'alternateur, afin d'adapter l'impédance acoustique de ce dernier à celle du reste de la machine. L'alternateur est un haut-parleur électrodynamique (Monacor SPH 170C, choisi pour sa puissance nominale  $P_{nom}$ , son facteur de force  $Bl$  et son excursion  $x_{max}$ ) couplé à la cavité arrière. La puissance électrique produite est dissipée par effet Joule dans une résistance électrique variable  $R_L$ . Les paramètres de Thiele et Small de l'alternateur issus de sa caractérisation sont présentés à l'Annexe B.2.3.

Huit thermocouples de type K de 0.5 mm de diamètre, positionnés au centre des trois échangeurs de chaleur, du régénérateur et sur l'axe du TBT permettent un suivi qualitatif de l'évolution de la distribution de température  $T_0(x)$  au cours des régimes transitoires du moteur. La pression acoustique est mesurée en trois points grâce à des microphones piézoélectriques (PCB 112A21), positionnés respectivement juste au dessus du noyau et en deux points sur le guide d'onde de couplage (non représentés).

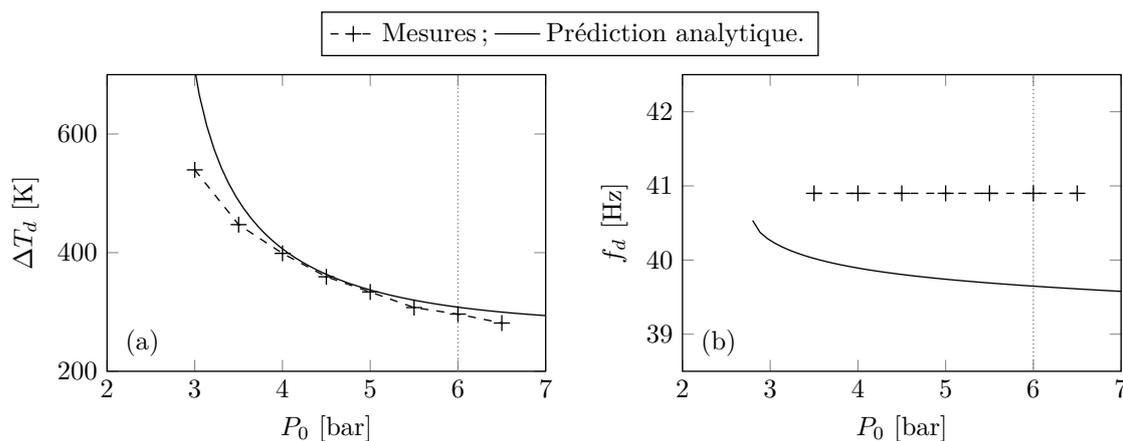
## 2.2 Caractérisation des performances

### 2.2.1 Seuils de déclenchement

Une auto-oscillation est susceptible de s'établir dans le moteur dès que la différence de température entre les extrémités du régénérateur est suffisamment importante pour que l'amplification thermoacoustique du noyau compense les pertes visco-thermiques et mécaniques dans le système.

Expérimentalement, la recherche des conditions de déclenchement (indiquées par l'indice "d", qui sont donc la limite entre les régimes stable et instable, se fait par augmentation progressive de la puissance de chauffage introduite dans l'échangeur de chaleur chaud, jusqu'à apparition d'une auto-oscillation dans le moteur. Grâce à l'approche développée par *Guedra et coll.*<sup>62</sup> et basée sur la théorie linéaire de la thermoacoustique rappelée à la section 1.2, ce seuil peut être déterminé théoriquement par le calcul du taux d'amplification : la différence de température aux extrémités du régénérateur nécessaire à l'obtention d'un taux d'amplification nul dans le système est recherchée – les pertes dans l'ensemble du système étant alors compensées par l'amplification thermoacoustique dans le régénérateur.

La comparaison de la différence de température nécessaire au déclenchement de l'instabilité dans le système, issue de la mesure et prédite par le calcul de l'amplification thermoacoustique, est présentée sur la figure 2.2a. La méthode analytique utilisée permet de déterminer conjointement la fréquence de l'instabilité lors de son déclenchement, présentée à la figure 2.2b. Les résultats expérimentaux confirment la pertinence de la modélisation utilisée. Un degré de liberté reste cependant empirique dans le modèle : la distribution de température dans le régénérateur est supposée décrite par une décroissance exponentielle, dont la constante est ajustée arbitrairement à  $80 \text{ m}^{-1}$  pour approcher au plus près les résultats expérimentaux. L'influence de la distribution de température sur les performances de conversion thermoacoustique du noyau n'est pas négligeable, ainsi qu'ont pu le montrer *Penelet et coll.*<sup>115</sup> La pressurisation du système pour la suite de l'étude sera telle que  $P_0 = 6 \text{ bar}$ .



**FIGURE 2.2** – Conditions de déclenchement de l'instabilité selon la pression statique  $P_0$ . (a) Différence de température  $\Delta T_d$ ; (b) Fréquence de l'instabilité  $f_d$ . Les verticales en pointillés soulignent les conditions retenues pour la suite de l'étude, soit  $P_0 = 6 \text{ bar}$ .

### 2.2.2 Conversion thermoacoustique

Dans un premier temps, seule la conversion thermoacoustique fait l'objet d'une caractérisation expérimentale. Cette caractérisation se fait en régime permanent du moteur, c'est-à-dire pour une amplitude de saturation constante de l'instabilité thermoacoustique et à l'équilibre thermique (correspondant à une distribution de température stabilisée en tout point du noyau). Pour cette étude, l'alternateur est en circuit ouvert – la résistance équivalente du circuit électrique est alors infinie. Le seul paramètre de contrôle du système après déclenchement est la puissance  $\dot{Q}_h$  injectée dans l'échangeur de chaleur chaud. L'évaluation de la puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$  dans le résonateur et du drive ratio  $DR$  permet de quantifier la conversion thermoacoustique. Ces grandeurs expérimentales sont comparées à celles théoriques obtenues grâce au logiciel de modélisation DeltaEC.<sup>175</sup>

Une mesure de pression  $p$  est faite sur la partie annulaire du moteur, au dessus du noyau (position représentée à la figure 2.1, où l'amplitude de pression est prédite maximale dans la modélisation DeltaEC). Cette mesure permet d'exprimer le drive ratio  $DR$  dans le moteur, rapport de l'amplitude de pression acoustique à la pression statique  $P_0$  du fluide de travail

$$DR = \frac{|p|}{P_0}. \quad (2.1)$$

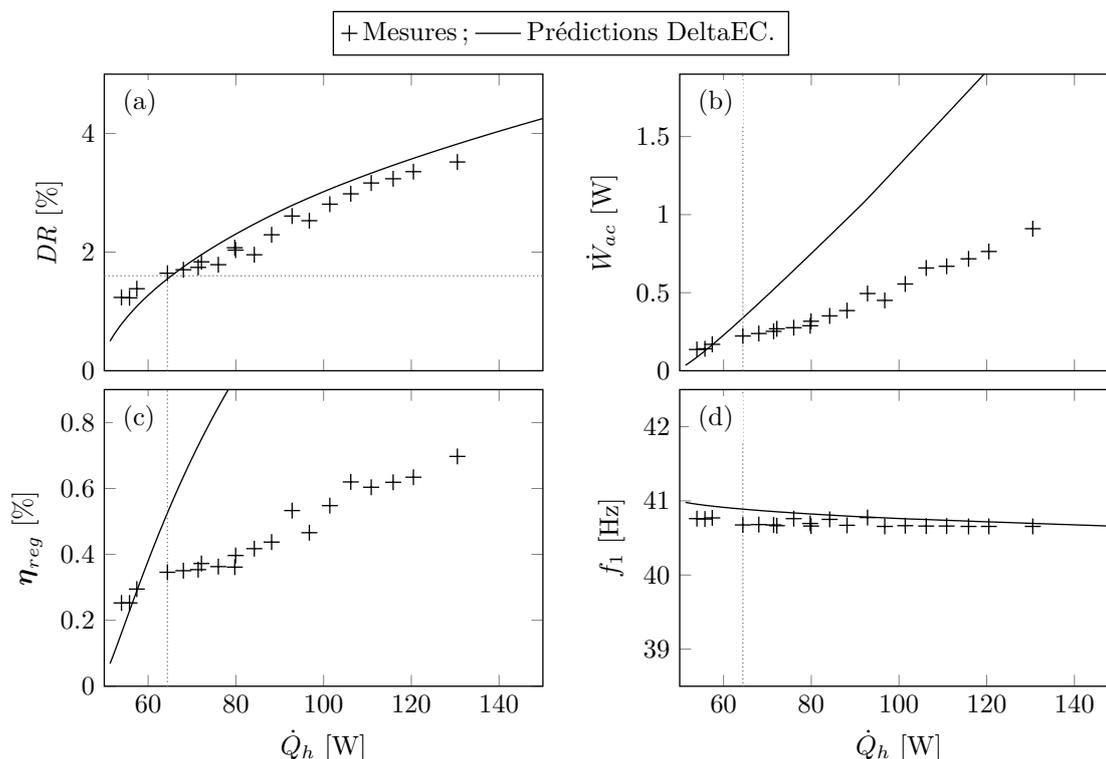
Deux autres microphones le long du guide d'onde (CWG) donnent accès aux pressions  $p_1$  et  $p_2$  en deux points (non représentés sur la figure), séparés d'une distance  $\Delta x$ . Notant  $\psi$  la différence de phase entre les oscillations des deux pressions, la puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$  moyenne sur le tronçon, si les microphones sont proches ( $k\Delta x \ll 1$ ), est donnée par<sup>51</sup>

$$\dot{W}_{ac} = \frac{\pi r_0^2}{2\omega\rho\Delta x} \left[ \left(1 - \frac{\delta_\nu}{r_0}\right) |p_1||p_2| \sin \psi + \frac{\delta_\nu}{2r_0} (|p_1|^2 - |p_2|^2) \right], \quad (2.2)$$

où  $r_0$  désigne le rayon interne du résonateur et  $\delta_\nu$  l'épaisseur de la couche limite visqueuse à la pulsation  $\omega$  des signaux de pression. Pour mieux rendre compte de la capacité de conversion du noyau thermoacoustique en soi, ce dernier résultat est présenté sous la forme de l'efficacité de conversion thermoacoustique du régénérateur, définie comme le rapport de la puissance acoustique produite à la puissance thermique fournie au système. La puissance acoustique générée dans le noyau thermoacoustique est théoriquement définie comme la différence de puissance acoustique entre les extrémités du régénérateur. Cette grandeur n'est pas accessible directement à la mesure dans le système considéré. La puissance acoustique produite par le système étant en grande partie dissipée dans le CWG ou convertie à son extrémité par l'alternateur, l'estimation de la puissance transitant dans le CWG est jugée représentative de celle produite par le noyau. C'est donc  $\dot{W}_{ac}$  qui est utilisée pour le calcul de l'efficacité de conversion thermoacoustique  $\eta_{reg}$  :

$$\eta_{reg} \simeq \frac{\dot{W}_{ac}}{\dot{Q}_h}. \quad (2.3)$$

La figure 2.3 présente l'évolution de ces trois grandeurs – (a) : drive ratio, (b) : puissance acoustique dans le CWG et (c) : efficacité de conversion thermoacoustique – en fonction de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  introduite dans le système via l'échangeur de chaleur chaud. Comme attendu, les performances de conversion thermoacoustique augmentent avec la



**FIGURE 2.3** – Conversion thermoacoustique en fonction de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$ . (a) Drive ratio  $DR$ .; (b) Puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$  disponible dans le résonateur; (c) Efficacité de conversion thermoacoustique du régénérateur  $\eta_{reg}$ ; (d) fréquence de travail  $f_1$ . La suite considérera le comportement du moteur pour  $DR = 1.6\%$ , mis en évidence par les lignes pointillées et obtenu ici pour une puissance de chauffage d'environ 65 W.

puissance thermique fournie au noyau. Les performances sont bien représentées pour un faible drive ratio par la modélisation quasi-linéaire du logiciel DeltaEC du Los Alamos National Laboratory.<sup>174,175</sup> Cependant, dès que le drive ratio du moteur augmente, la modélisation surestime les performances du prototype. En effet, la modélisation ne prend en compte qu'un seul effet non linéaire apparaissant progressivement avec l'augmentation de l'amplitude des variables acoustiques, et responsable de sa saturation : le pompage thermoacoustique.

Avec l'augmentation de la puissance thermique fournie au moteur, l'augmentation de la température dans le noyau thermoacoustique modifie la propagation acoustique. La fréquence de fonctionnement du moteur varie légèrement avec le régime de fonctionnement. Cette fréquence est mesurée sur un signal de pression de quelques secondes, échantillonné à 2 kHz. Le calcul de la densité spectrale de puissance de ce signal permet d'évaluer précisément la fréquence du mode principal. Cependant, les variations de fréquence induites sur la plage d'étude sont suffisamment faibles pour être considérées comme négligeables et affirmer que les mesures sont cohérentes avec les prédictions présentées à la figure 2.3d.

### 2.2.3 Conversion acousto-électrique

Dans un second temps, l'alternateur (préalablement caractérisé, voir Annexe B.2.3) est chargé par une résistance électrique variable  $R_L$ . Cette dernière permet d'adapter les impédances acoustiques du moteur annulaire et du système composé du résonateur et de l'alternateur, et ainsi optimiser une des caractéristiques du moteur, à savoir l'efficacité de conversion thermoacoustique, de conversion acousto-électrique, l'efficacité globale ou encore la puissance produite.

#### Caractérisation du haut-parleur

Un haut-parleur électrodynamique (Monacor SPH 170C) est utilisé ici comme alternateur. Il assure la conversion acousto-électrique. Il a été choisi pour son facteur de force  $Bl$  élevé ( $Bl \simeq 11 \text{ T m}$ ) permettant une meilleure efficacité de conversion mécano-électrique, pour sa fréquence de résonance  $f_{res}$  proche de la fréquence de travail du moteur, et pour son excursion maximale  $x_{max} = \pm 4 \text{ mm}$  supérieure au déplacement acoustique maximal du fluide de travail. Les paramètres de Thiele et Small mécaniques<sup>100</sup> et électriques<sup>101</sup> de l'alternateur sont mesurés sur un banc de mesure spécifique développé par *Novak et coll.* au cours de son travail de thèse.<sup>99</sup> Chaque paramètre est mesuré à la fréquence de travail du transducteur, soit environ 40 Hz, pour différentes positions statiques de la membrane. Par ailleurs, l'amplitude de déplacement de la membrane est évaluée en fonction du drive ratio. Chaque paramètre est par la suite moyenné sur la plage de déplacement correspondant au drive ratio étudié (voir Annexe B.2.3). Pour le calcul du seuil de déclenchement, l'amplitude des oscillations étant infinitésimale, la valeur des paramètres est estimée pour un déplacement quasiment nul. Ces valeurs sont regroupées dans le tableau B.4 en Annexe p.139. L'estimation des différents paramètres fournie par le constructeur est plutôt fiable autour de la position de repos, sauf pour l'inductance de la bobine  $L_e$ \* et la résistance mécanique des suspensions  $R_{ms}$  du HP † – ce dernier paramètre est toujours sujet à une grande incertitude. Dans le cas de déplacements d'amplitude élevée, le comportement du haut-parleur sort rapidement du domaine linéaire, et l'évaluation des paramètres, ainsi que le modèle complet de Thiele et Small, sont à utiliser avec beaucoup de précautions.

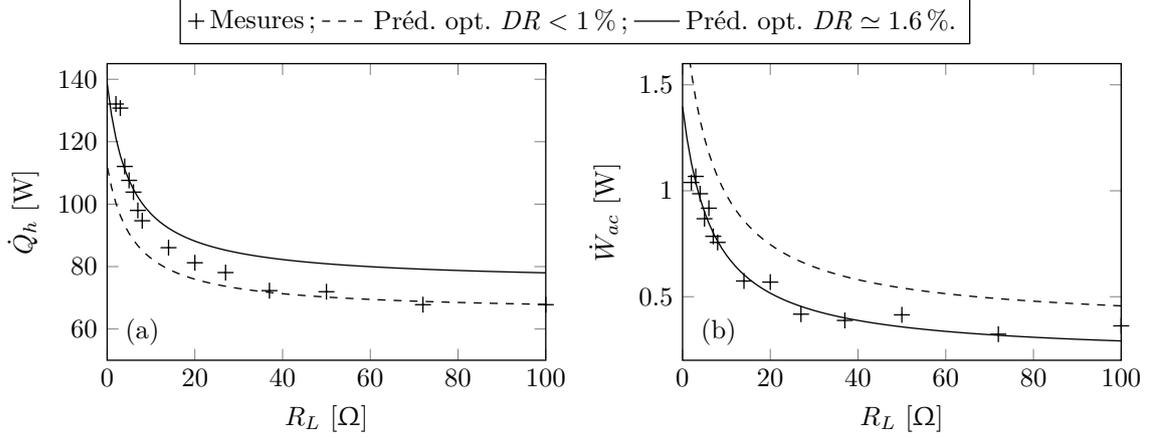
#### Influence de la résistance de charge sur la conversion thermoacoustique

Le drive ratio est maintenu constant pour la suite de l'étude, à un niveau fixé à  $DR = 1.6 \%$ . L'attention est alors portée sur la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  qu'il est nécessaire de fournir au système pour maintenir ce drive ratio en fonction de la valeur la résistance électrique  $R_L$  dans laquelle l'énergie produite par l'alternateur est dissipée. Ce résultat est présenté à la figure 2.4a. Par ailleurs, la condition d'impédance acoustique imposée sur le moteur thermoacoustique par l'alternateur dépend de la charge électrique  $R_L$  de l'alternateur. La puissance acoustique produite à drive ratio constant varie en fonction de  $R_L$ , tel que présenté

---

\*. L'impédance électrique de la bobine  $Z_L = R_e + j\omega L_e$  a une réactance proportionnelle à la fréquence. La fréquence de fonctionnement du moteur étant inférieure à la fréquence de résonance du haut-parleur, l'inductance de la bobine est alors négligée.

†. En basses fréquences, la membrane est considérée comme un piston rigide indéformable. Les pertes mécaniques proviennent alors seulement des suspensions (périphérique et spider). En plus hautes fréquences, les déformations de la membrane selon ses modes propres amèneraient à devoir prendre en compte les pertes viscoélastiques qui en découlent.



**FIGURE 2.4** – Maintenance du drive ratio à  $DR = 1.6\%$  en fonction de la charge de l'alternateur  $R_L$ . (a) Puissance de chauffage nécessaire  $\dot{Q}_h$ ; (b) Puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$  disponible dans le résonateur. Les deux lignes représentent les résultats de deux ajustements du modèle DeltaEC optimisés pour deux drive ratios.

à la figure 2.4b. La puissance requise pour maintenir le drive ratio du moteur diminue avec la charge de l'alternateur. Deux *optimisations* du modèle DeltaEC du moteur sont présentées. La modélisation donnant les résultats en traits pointillés est celle utilisée pour la modélisation des faibles drive ratios ( $DR < 1\%$ , et dont les résultats sont présentés à la section 2.2.2. Celle en traits continus est ajustée pour représenter les caractéristique du moteur en fonctionnement à un régime pour lequel le drive ratio vaut environ  $DR = 1.6\%$ , qui est le cas de référence pour la suite de l'étude.

La tension quasi-sinusoïdale  $U_L$  mesurée aux bornes de l'alternateur pour chaque valeur de la résistance de charge  $R_L$  permet d'évaluer la puissance électrique  $\dot{W}_{el}$  dissipée dans cette résistance :

$$\dot{W}_{el} = \frac{|U_L|^2}{2R_L}. \quad (2.4)$$

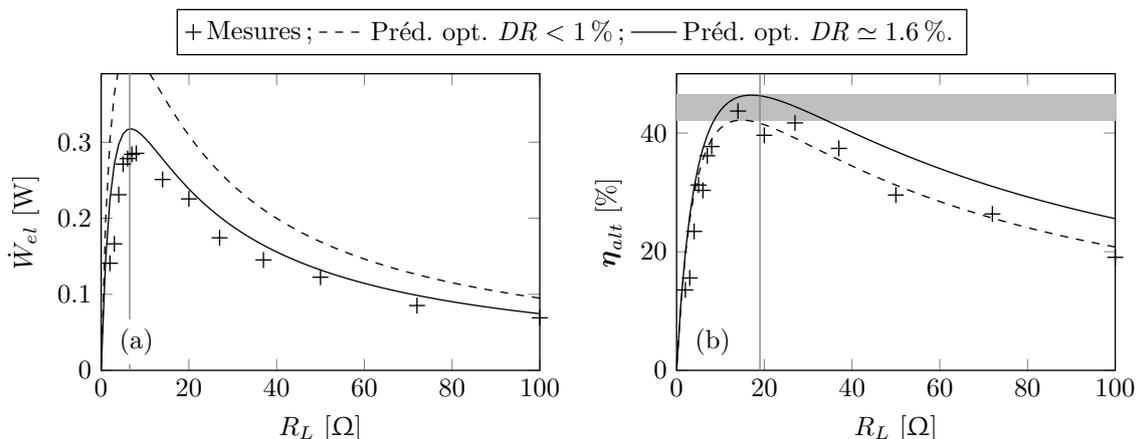
L'efficacité de conversion acousto-électrique  $\eta_{alt}$  de l'alternateur est alors déduite, à partir de l'évaluation de la puissance acoustique  $\dot{W}_{ac}$  disponible dans le CWG donnée par l'équation (2.2), sous la forme :

$$\eta_{alt} = \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{W}_{ac}}. \quad (2.5)$$

Cette efficacité peut par ailleurs être évaluée en fonction des paramètres électromécaniques de l'alternateur<sup>200</sup> à partir du modèle linéaire de Thiele et Small (développement donné à l'Annexe A.1.1) :

$$\eta_{alt,th} = \frac{(Bl)^2 R_L}{R_{ms} |Z_e|^2 + (Bl)^2 (R_e + R_L)}. \quad (2.6)$$

Il est à noter que cette évaluation est indépendante de l'amplitude de sollicitation. L'évolution de la puissance produite et de l'efficacité de l'alternateur est représentée en fonction de la charge de l'alternateur sur les Figures 2.5a et 2.5b respectivement. La concordance entre les mesures et la modélisation du comportement du haut-parleur montre que la caractérisation de ce dernier est satisfaisante.



**FIGURE 2.5** – Conversion électro-acoustique pour un drive ratio constant de  $DR = 1.6\%$  en fonction de sa charge  $R_L$ . (a) Puissance électrique  $\dot{W}_{el}$  délivrée aux bornes de l’alternateur.  $\dot{W}_{el}$  est maximale pour  $R_L = 6.5 \Omega$ ; (b) Efficacité de conversion acousto-électrique  $\eta_{alt}$  de l’alternateur. D’après l’équation (2.6),  $\eta_{alt}$  est maximale pour  $R_L = 19.6 \Omega$ .

Le comportement de l’alternateur est quasiment linéaire pour cette application : la tension qu’il produit n’est pas distordue par rapport au signal de pression mesuré dans le résonateur, et son efficacité de conversion est expérimentalement quasiment indépendante de l’amplitude de sollicitation acoustique (pour des déplacements acoustiques inférieurs à l’excursion maximale  $x_{max}$  de la membrane).  $\eta_{alt}$  varie peu pour une charge  $R_L$  de  $8 \Omega$  à  $30 \Omega$ , prenant une valeur proche de son maximum  $\eta_{alt} = 42\%$  à  $45\%$  (représenté par la bande grisée sur la figure 2.5b). L’évaluation de la puissance électrique produite, plus simple à évaluer que la puissance acoustique dans le résonateur à laquelle elle est quasiment proportionnelle, est donc jugée suffisante pour qualifier les performances de transduction du prototype.

### 2.2.4 Efficacité globale

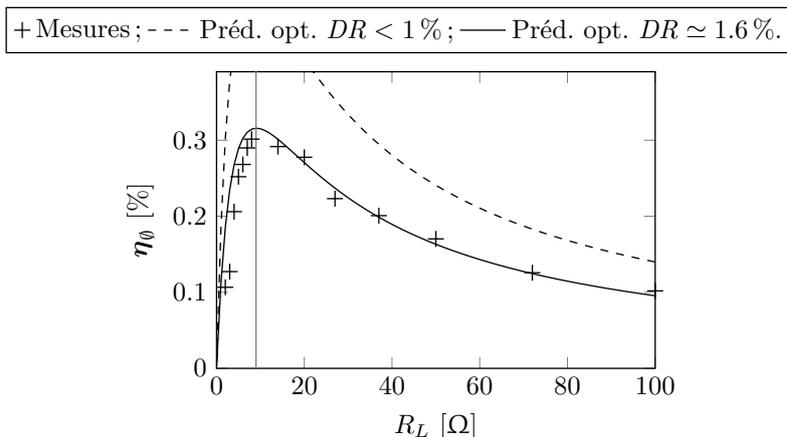
L’efficacité globale  $\eta_\theta$  du transducteur est définie comme le rapport de la puissance électrique produite sur la puissance thermique introduite dans le système :

$$\eta_\theta = \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{Q}_h}. \quad (2.7)$$

Cette efficacité, dont l’évolution est représentée en fonction de la résistance de charge à la figure 2.6, peut aussi être obtenue par combinaison des efficacités des conversions thermoacoustique et acousto-électrique  $\eta_\theta = \eta_{reg} \eta_{alt}$ . Elle passe par un maximum pour une charge d’environ  $R_L = 9 \Omega$ . Cette valeur n’est pas l’optimum pour la conversion acousto-électrique, mais reste comprise dans la bande  $8 \leq R_L \leq 30 \Omega$  définie précédemment.

### Fréquence de travail

Selon la charge imposée, la température nécessaire au maintien du drive ratio varie. La fréquence de travail du moteur est donc susceptible de varier légèrement. La mesure de cette fréquence se fait en déterminant le maximum de la densité spectrale de puissance du signal

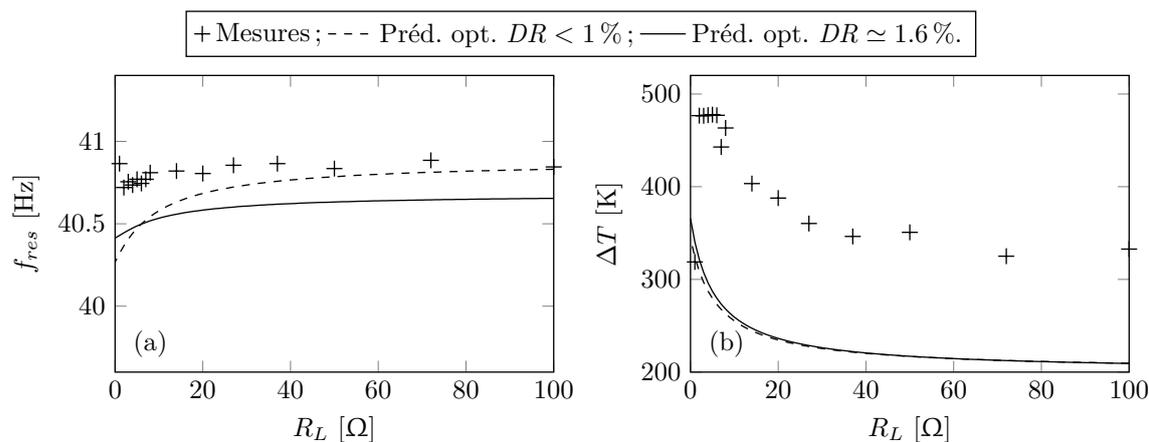


**FIGURE 2.6** – Efficacité de conversion globale  $\eta_0$  du transducteur pour un drive ratio  $DR = 1.6\%$  en fonction de la charge de l'alternateur  $R_L$ .  $\eta_0$  est maximale pour  $R_L = 9\Omega$ .

de pression (d'une durée de 5 s et échantillonné à 2 kHz) mesuré à l'entrée du résonateur. Le résultat est présenté à la figure 2.7b.

### Température de fonctionnement

La modélisation du moteur sous DeltaEC<sup>174,175</sup> permet de connaître la quantité de chaleur à introduire dans l'échangeur de chaleur chaud pour atteindre un drive ratio déterminé. Cependant, le système est modélisé sous plusieurs hypothèses fortes et ayant une influence non négligeable sur l'évaluation des transferts thermiques prenant place dans le noyau thermoacoustique. Premièrement, le système est considéré thermiquement isolé de l'extérieur dans la modélisation. Cette condition n'est, dans les faits, pas respectée. Une partie de la chaleur introduite dans le système s'échappe à travers les parois par conduction. Deuxièmement, la modélisation du système repose sur la théorie de l'acoustique linéaire. Les



**FIGURE 2.7** – Fréquence de fonctionnement et différence de température  $\Delta T$  nécessaire au maintien du moteur à un drive ratio  $DR = 1.6\%$  selon la charge de l'alternateur.

nombreux phénomènes non linéaires ne sont pas pris en compte (ou seulement partiellement). En effet, la présence de streaming de Gedeon et/ou de Rayleigh, c'est-à-dire d'un écoulement redressé dû au fort niveau acoustique mis en jeu, et générant des transports de chaleur complexes, n'est pas prise en compte. Les pertes singulières de part et d'autre du noyau ne sont pas (ou que très grossièrement) décrites. L'ensemble de ces phénomènes se traduit par une perturbation de la distribution de température dans le noyau alors que les distributions de température sont supposées linéaires entre les échangeurs de chaleur chaud et froid, dans le régénérateur ainsi que dans le TBT. En conséquence, les résultats présentés à la figure 2.7a montrent bien que l'évaluation de la différence de température nécessaire au maintien de l'amplitude de pression générée à un drive ratio donné ne concorde pas avec l'expérience, et ce d'autant plus que le régime de fonctionnement augmente (voir figure 2.3). Il est cependant clair que les signaux théoriques et expérimentaux suivent une même tendance.

### 2.3 Conclusion

Les performances du générateur thermo-acousto-électrique ont été évaluées, par sous-systèmes et globalement. Le comportement du système a été évalué en fonction de la charge qui lui est appliqué, et ses optima ont été qualifiés en termes d'efficacité et de puissance produite. Les performances globales du moteur peuvent paraître faibles. Ceci est dû à plusieurs points, qui découlent de choix technologiques. Le moteur a été conçu de manière à être modulable : les différentes sections peuvent être facilement démontées, modifiées et sont interchangeables. En conséquence, il fonctionne avec de l'air, sous une pression modérée (jusqu'à 700 kPa). De plus, l'alternateur utilisé est un haut-parleur du commerce, dont le fonctionnement n'a pas été optimisé pour la transduction acousto-électrique. Cependant, pour la configuration géométrique décrite, le noyau semble posséder les propriétés géométriques permettant les meilleures performances avec la température de fonctionnement la plus basse (et avec les hypothèses de modélisation nécessaires au programme DeltaEC). De plus, les niveaux acoustiques atteints sont suffisants pour la mise en place de phénomènes non linéaires comme le streaming.

## Chapitre 3

# Performances du TAET avec une boucle de rétro-contrôle électroacoustique

Les performances de conversion thermoacoustique sont contrôlées par l'interaction entre le champ acoustique et la distribution de température dans le régénérateur et le TBT. Or, l'un et l'autre sont interdépendants. Les phénomènes non linéaires acoustiques (pompage thermoacoustique, streamings, effets aérodynamiques de bords aux singularités géométriques) sont à l'origine de transferts de chaleur. Inversement, la conversion thermoacoustique étant très sensible à la distribution de température dans le noyau thermoacoustique,<sup>115</sup> le champ acoustique produit dépend de la forme du champ de température. Les différents moyens de contrôles passifs utilisés dans les machines thermoacoustiques (pompe à jets, membranes, tubes à section conique, *flow straighteners*...) visent à limiter les phénomènes non linéaires qui modifient la distribution de température en l'écartant inexorablement de la distribution – souvent supposée linéaire par morceaux – pour laquelle le moteur a été optimisé. Cependant, certaines de ces solutions sont elles-mêmes à l'origine de pertes supplémentaires, à l'instar des pompes à jet qui peuvent dissiper jusqu'à 60 % de l'énergie acoustique disponible<sup>21</sup> pour générer un flux de masse compensant le streaming de Gedeon, ou les membranes qui ajoutent une résistance mécanique dans le système. De plus, les études actuelles étant orientées vers une meilleure compréhension de chacun des phénomènes pris à part, peu de travaux portent sur les interactions de ces différents effets (par exemple, la compétition entre les différents types de streaming). La prise en compte de l'ensemble des phénomènes non linéaires complexes et couplés prenant place dans un moteur thermoacoustique n'est pas envisageable analytiquement. Elle est par ailleurs très coûteuse numériquement dans la modélisation d'un moteur thermoacoustique de géométrie et de fonctionnement complexes. Il est ainsi impossible d'évaluer *a priori* précisément l'influence des phénomènes non linéaires sur le fonctionnement d'un moteur thermoacoustique. Les méthodes usuelles de traitement des effets non linéaires (voir chapitre 1) tentent alors de faire coïncider *a posteriori* la distribution de température expérimentale avec une distribution idéale pour laquelle les performances ont été optimisées.

Dans l'approche présentée ici, la distribution de température assujettie aux différents effets non linéaires éventuellement présents est laissée libre d'évoluer avec le régime de

fonctionnement du moteur. Alors, la méthode consiste à modifier la distribution du champ acoustique de manière à obtenir une configuration de cette dernière plus favorable dans le noyau à la conversion thermoacoustique. Ce contrôle est réalisé grâce à une source acoustique auxiliaire judicieusement placée en paroi ou à l'intérieur de la partie annulaire du moteur. Afin d'éviter les problèmes de synchronisation dus au couplage entre des oscillateurs de fréquences différentes,<sup>110,196</sup> la source est asservie par une chaîne électroacoustique permettant de déphaser et d'amplifier le signal issu d'un microphone placé en paroi du moteur. La puissance électrique alors fournie pour alimenter la source auxiliaire est notée  $\dot{W}_{AS}$ . Trois paramètres de contrôles sont alors disponibles :

- (i) la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$ , seul moyen de contrôler le moteur une fois l'auto-oscillation établie et en l'absence de la boucle de rétroaction ;
- (ii) le gain d'amplification en tension  $G$  de la boucle de rétro-contrôle, mesuré entre l'entrée et la sortie de l'amplificateur de puissance de la boucle de rétro-contrôle et permettant de contrôler la puissance électrique alimentant la source auxiliaire ;
- (iii) le déphasage  $\Phi$  entre le signal de tension fourni par le microphone de référence et la tension d'alimentation de la source auxiliaire.

Les performances du transducteur sont alors qualifiées lorsque l'alternateur est chargé par la résistance pour laquelle l'efficacité globale du système, redéfinie pour prendre en compte la puissance électrique  $\dot{W}_{AS}$  fournie à la source auxiliaire :

$$\eta(\dot{Q}_h, \Phi, G) = \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{Q}_h + \dot{W}_{AS}}. \quad (3.1)$$

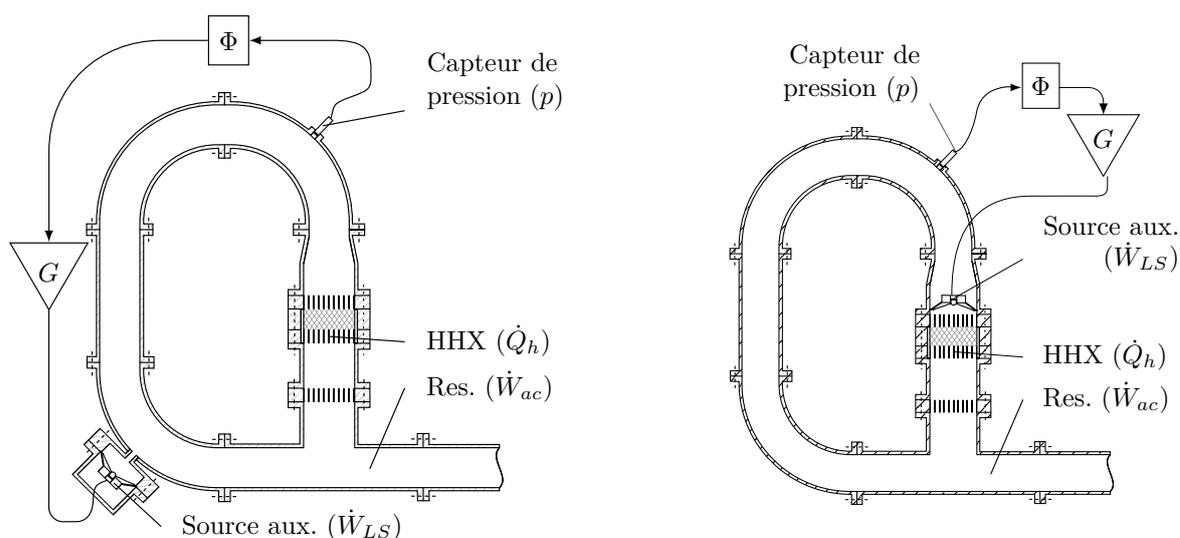
est maximale (dont la valeur sera fixée par la suite). Parallèlement, la différence de température  $\Delta T$  entre les extrémités du régénérateur sera suivie. On utilise l'indice 0 pour noter les performances quand la source auxiliaire n'est pas alimentée, c'est à dire

$$\eta_0(\dot{Q}_h) = \eta(\dot{Q}_h, \Phi, G=0) \quad \Delta T_0(\dot{Q}_h) = \Delta T(\dot{Q}_h, \Phi, G=0).$$

Deux configurations sont étudiées pour l'incorporation de la source auxiliaire, telles que présentées à la figure 3.1 :

1. source externe. La source acoustique est un haut-parleur chargé par une cavité et couplé au résonateur par un capillaire (comme représentée à la figure 3.1a) pour limiter le couplage avec le moteur et ne pas trop impacter le seuil de déclenchement de la machine. Configuration présentée à la section 3.1 ;
2. source interne. La source acoustique est introduite dans le résonateur, directement au dessus du noyau, le déplacement de la membrane du haut-parleur s'effectuant suivant l'axe du résonateur conformément à la figure 3.1b. Configuration présentée à la section 3.2.

L'ensemble des résultats présentés par la suite a fait l'objet de présentations dans différents workshops [105,121] et de deux publications [106,122].



**FIGURE 3.1** – Deux configurations de source auxiliaire pilotée par une boucle de rétro-contrôle. (a) Source externe dans une cavité, couplée par un capillaire. (b) Source interne positionnée dans le guide d'onde, au dessus du noyau.

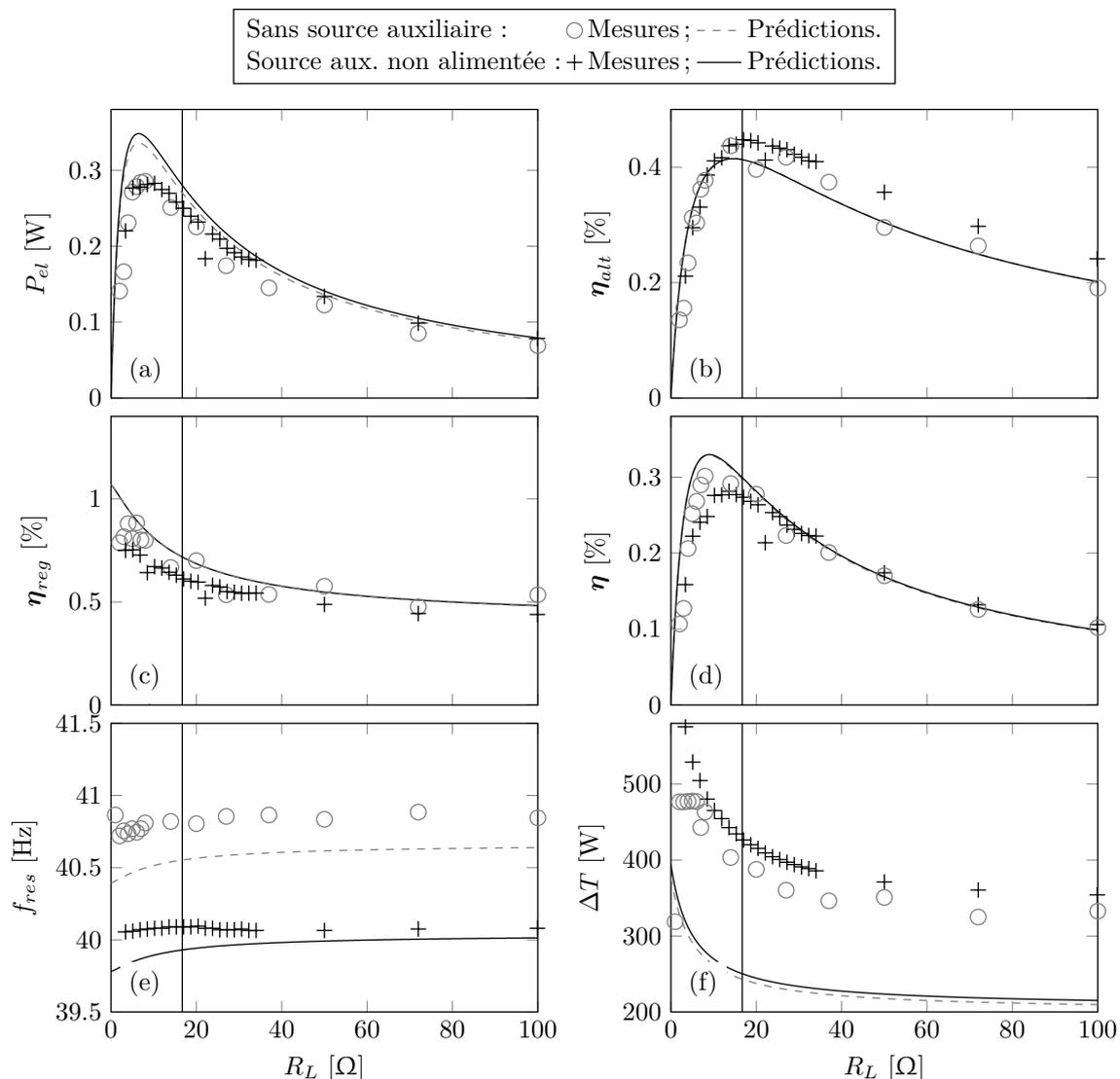
### 3.1 Source auxiliaire externe

Sur la base des travaux de *Desjoux et coll.*<sup>47</sup> sur le contrôle acoustique du champ acoustique dans un moteur thermoacoustique annulaire, une source auxiliaire est ajoutée sur le résonateur annulaire de la configuration du prototype présentée au chapitre précédent, sous la forme d'un haut-parleur dans une cavité et couplée par un capillaire, comme représenté à la figure 3.1a. Sa position sur le résonateur est déterminée pour impacter de manière minimale le seuil de déclenchement théorique (voir section 1.2).

#### 3.1.1 Source auxiliaire non alimentée

L'influence sur le moteur de l'adjonction de la source non alimentée est présentée à la figure 3.2, où les performances obtenues sont comparées aux performances du prototype quand cette source est absente (résultats du chapitre 2). La présence de la source auxiliaire, en introduisant des pertes supplémentaires dans le système, se traduit par une augmentation de la température nécessaire au maintien à un même drive ratio que précédemment, par rapport à la configuration sans source auxiliaire (voir figure 3.2f). Cela se traduit par une légère baisse de l'efficacité de conversion thermoacoustique du noyau (figure 3.2c). Ces changements s'accompagnent d'un léger glissement de la fréquence de fonctionnement (figure 3.2e). Parallèlement, les caractéristiques du moteur annulaire étant modifiées par la présence de la source auxiliaire, son couplage avec l'alternateur change et la charge optimale pour l'efficacité de conversion globale se trouve modifiée (figure 3.2d).

Dans la suite, l'influence de la boucle de rétro-contrôle électroacoustique sur les performances du transducteur est étudiée en fonction des paramètres de contrôle  $\Phi$  et  $G$ . L'efficacité globale est quasiment proportionnelle à l'efficacité de conversion thermoacoustique, comme on l'a montré au chapitre précédent. La puissance électrique étant plus directe à évaluer que la puissance acoustique produite, c'est donc l'efficacité totale du transducteur qui sera



**FIGURE 3.2** – Performances du moteur sans source auxiliaire et avec la source auxiliaire non alimentée, à drive ratio constant  $DR = 1.6\%$ . (a) Puissance acoustique; (b) Efficacité de conversion thermoacoustique; (c) Efficacité de conversion globale; (d) Différence de température entre les échangeurs de chaleur. Les barres verticales représentent valeur de la résistance de charge de l'alternateur  $R_L$  retenue pour la suite de l'étude.

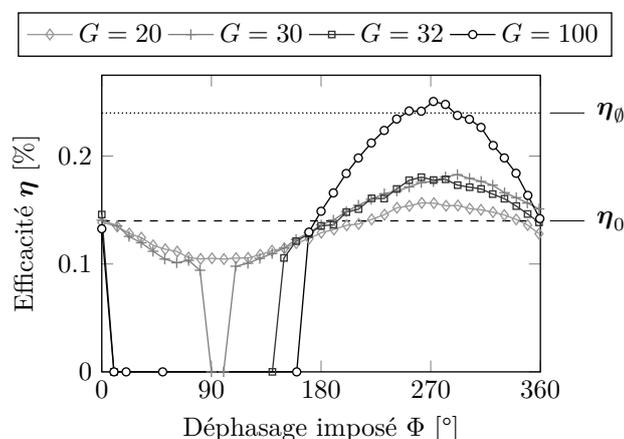
évaluée en fonction des paramètres de contrôle  $\eta(\dot{Q}_h, \Phi, G)$ . Parallèlement, l'évolution de la différence de température aux extrémités du régénérateur  $\Delta T(\dot{Q}_h, \Phi, G)$  sera étudiée dans les mêmes conditions. Finalement, l'excédent de puissance électrique produit grâce à l'action de la boucle de rétro-contrôle  $\Delta \dot{W}_{el} = \dot{W}_{el} - \dot{W}_{el0}$  sera comparé à la puissance électrique fournie à la source acoustique  $\dot{W}_{AS}$  pour effectuer ce contrôle.

Dans les résultats expérimentaux qui suivent, chacune des courbes constitue une série de mesures pour laquelle deux des paramètres de contrôle sont fixés, et le troisième est modifié pour balayer un intervalle de valeur. Chaque modification d'un paramètre est suivie d'une

période d'établissement du régime quasi-permanent de plusieurs minutes, résultant en un temps de plusieurs heures pour l'établissement de chaque courbe.

### 3.1.2 Effet du déphasage pour différents gains d'amplification

Pour commencer l'étude paramétrique, la puissance de chauffage est fixée à  $\dot{Q}_h = 71$  W (puissance 1.5 W au-dessus du seuil de déclenchement avec la source non alimentée  $\dot{Q}_{hd0} \simeq 69.5$  W), et l'effet du déphasage appliqué  $\Phi$  est observé pour différentes valeurs du gain d'amplification  $G$ . Comme le montrent les résultats sur la figure 3.3, l'augmentation progressive du déphasage  $\Phi$  entraîne une variation de l'efficacité globale  $\eta$  autour de  $\eta_0$  : pour des déphasages  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ ,  $\eta$  est inférieure à  $\eta_0$ , tandis que  $\eta \geq \eta_0$  pour  $\Phi \in [180^\circ, 360^\circ]$ , avec une valeur optimale autour de  $\Phi_{opt} \simeq 270^\circ$ . L'amplitude de ces variations augmente avec le gain d'amplification  $G$ , comme on peut s'y attendre.



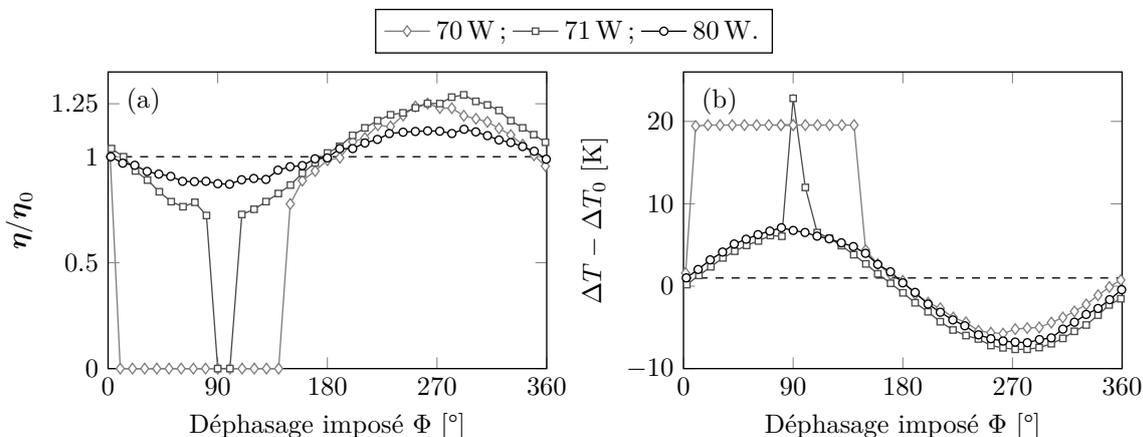
**FIGURE 3.3** – Évolution de l'efficacité  $\eta$  du transducteur en fonction du déphasage  $\Phi$  pour différents gains d'amplification  $G$  et pour une puissance de chauffage fixe  $\dot{Q}_h = 71$  W =  $\dot{Q}_{hd} + 1.5$  W. Les lignes horizontales rappellent les efficacités de référence sans la source auxiliaire ( $\eta_0$ ) et quand la source n'est pas alimentée ( $\eta_0$ ). Les points pour lesquels  $\eta = 0$  correspondent à l'extinction de l'auto-oscillation.

De plus, pour le plus grand gain d'amplification  $G = 100$  représenté par les diamants pleins, un phénomène supplémentaire apparaît. Il existe alors un domaine de déphasage  $\Phi_\infty \in [50^\circ, 60^\circ]$ , pour lequel l'influence de la boucle de rétro-contrôle est telle qu'elle mène à l'extinction de l'auto-oscillation, comme le montre les points d'efficacité nulle sur la figure 3.3. Dans ce cas, l'amplitude des oscillations décroît jusqu'à extinction complète. Le moteur reste alors dans cet état. Pour relancer l'auto-oscillation, l'alimentation de la source auxiliaire doit être éteinte ( $G = 0$ ) ou le déphasage doit être réglé hors de ce domaine défavorable  $\Phi \notin \Phi_\infty$ .

### 3.1.3 Effet du déphasage pour différentes puissances de chauffage

Maintenant, le gain d'amplification est fixé à une valeur intermédiaire  $G = 32$ , et l'effet du déphasage  $\Phi$  est observé pour différentes puissances de chauffage  $\dot{Q}_h$ , dont dépendent l'efficacité et la température de fonctionnement. Pour une meilleure lisibilité, les résultats pour l'efficacité sont présentés normalisés par l'efficacité  $\eta_0$  quand la source auxiliaire n'est

pas alimentée. De même, les variations de la différence de température sont présentées autour de la différence de température de fonctionnement  $\Delta T_0$  avec la source auxiliaire non alimentée.



**FIGURE 3.4** – (a) Évolution de l'efficacité globale  $\eta$  en fonction du déphasage  $\Phi$  pour différentes puissances de chauffage  $\dot{Q}_h$  pour un gain d'amplification fixé à  $G = 32$ , normalisée par l'efficacité quand la boucle n'est pas alimentée. (b) Évolution correspondante de la différence de température  $\Delta T$  aux extrémités du régénérateur.

Pour la plus forte puissance de chauffage  $\dot{Q}_h = 80$  W, comme le montre la figure 3.4a, l'augmentation du déphasage  $\Phi$  se traduit par des variations de l'efficacité similaires à celles décrites précédemment pour la figure 3.3. Cependant, pour les puissances de chauffage  $\dot{Q}_h = 70$  W et  $71$  W plus près du seuil de déclenchement  $\dot{Q}_{hd}$ , l'influence de  $\Phi$  sur  $\eta$  est plus marquée. D'une part, l'augmentation de l'efficacité globale atteint 25%. D'autre part, l'intervalle d'extinction des oscillations s'élargit. Pour  $\dot{Q}_h = 70$  W, ce domaine s'étend sur presque la moitié du domaine des phases  $\Phi_\infty \in [10^\circ, 140^\circ]$ . La figure 3.4b présente l'évolution de la différence de température dans le régénérateur dans les mêmes conditions. Quand l'efficacité augmente ( $\Phi > 180^\circ$ ) la différence de température  $\Delta T$  est réduite dans le régénérateur. Inversement,  $\Delta T$  augmente quand le rétro-contrôle diminue l'efficacité. Cette évolution simultanée de l'efficacité et de la différence de température met bien en évidence le couplage entre le champ acoustique et la distribution de température dans le noyau. Par ailleurs, dans le cas de l'extinction de l'auto-oscillation, la différence de température augmente pour atteindre une valeur  $\Delta T_\infty$  très supérieure à la différence de température  $\Delta T_0$  quand la source n'est pas alimentée ( $G = 0$ ). Cela provient du fait que la température est dans ce cas uniquement régulée par la conduction dans le régénérateur (et éventuellement la convection libre et les pertes vers l'extérieur) – les effets non linéaires n'ayant pas lieu en l'absence d'oscillations acoustiques.

### 3.1.4 Effet du gain pour le déphasage optimal

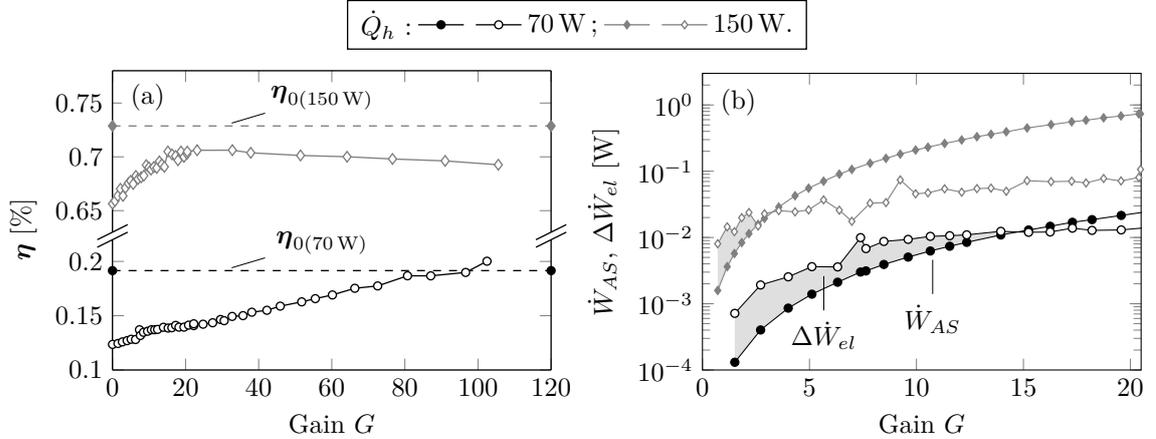
Le déphasage est à présent fixé à une valeur proche de la valeur optimale  $\Phi_{opt} \simeq 270^\circ$  pour laquelle l'efficacité est maximale\*. Afin de mettre en évidence les limites de l'utilisation

\*. Notons que cette valeur du déphasage semble dépendre du gain d'amplification et de la puissance de chauffage fournie au moteur. Cet effet peut être remarqué sur la figure 3.4 où le maximum d'efficacité et le

de la boucle de rétro-contrôle, l'effet de l'augmentation du gain  $G$  est observé pour deux valeurs extrêmes de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h = 70$  W et 150 W.

Les variations de l'efficacité  $\eta$  du système sont présentées à la figure 3.5a, et comparées à l'efficacité  $\eta_0$  du transducteur en l'absence de source auxiliaire. Dans le cas d'une faible puissance de chauffage ( $\dot{Q}_h = 70$  W), cas représenté par les cercles, la puissance maximale alimentant la source auxiliaire  $\dot{W}_{AS,max} \simeq 0.5$  W pour  $G = 100$  est faible comparée à la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$ . Le surplus de puissance généré grâce au rétro-contrôle a donc une grande influence sur l'efficacité  $\eta$ , telle que définie par l'équation (3.1). Cependant, dans le cas d'une grande puissance de chauffage  $\dot{Q}_h = 150$  W, représenté par les diamants sur la figure 3.5, l'efficacité de référence  $\eta_0|_{150\text{ W}}$  est beaucoup plus grande ( $\eta_0|_{150\text{ W}} > 7 \eta_0|_{70\text{ W}}$ ). Donc, puisque la tension d'alimentation de la source auxiliaire est proportionnelle à la pression dans le moteur,  $\dot{W}_{AS}$  prend des valeurs non négligeables (jusqu'à 8 W pour  $G = 100$ ) devant  $\dot{Q}_h$ . Finalement, même si le rétro-contrôle permet toujours de générer un surplus de puissance électrique, la puissance fournie à la source auxiliaire pour le produire est tellement importante qu'elle mène à la saturation de l'augmentation de l'efficacité pour des valeurs de gain de l'ordre de  $G_{sat} \simeq 25$ , et même une décroissance pour les valeurs supérieures  $G > G_{sat}$ .

La figure 3.5b présente l'augmentation de puissance générée grâce à la boucle de rétro-contrôle,  $\Delta\dot{W}_{el} = \dot{W}_{el} - \dot{W}_{el,0}$ , comparée à la puissance alimentant la source auxiliaire  $\dot{W}_{AS}$ . La comparaison de  $\Delta\dot{W}_{el}$  à  $\dot{W}_{AS}$  permet d'évaluer l'applicabilité de cette méthode ; en effet si  $\Delta\dot{W}_{el}$  excède  $\dot{W}_{AS}$ , alors le résultat net du contrôle est positif. Cette situation existe dans les deux cas présentés figure 3.5b, pour de faibles valeurs du gain d'amplification en tension  $G$  : pour  $\dot{Q}_h = 70$  W la balance de puissance est positive jusqu'à  $G = 15$ , et pour  $\dot{Q}_h = 150$  W,



**FIGURE 3.5** – (a) Évolution de l'efficacité globale  $\eta$  en fonction du gain d'amplification en tension  $G$  de la boucle de rétro-contrôle, pour deux puissances de chauffage  $\dot{Q}_h$ , et pour le déphasage maximisant l'efficacité  $\Phi = \Phi_{opt}$ . Les lignes pointillées sont les efficacités en l'absence de la source auxiliaire  $\eta_0$ . (b) Comparaison de l'augmentation de puissance produite  $\Delta\dot{W}_{el}$  quand la boucle de rétro-contrôle est alimentée (symboles creux  $\circ$ ,  $\diamond$ ) à la puissance alimentant la boucle  $\dot{W}_{AS}$  (symboles pleins  $\bullet$ ,  $\blacklozenge$ ) en fonction du gain d'amplification  $G$  pour deux puissances de chauffage. Les symboles creux au dessus des symboles pleins correspondants (zone grisée  $\square$ ) indiquent que le gain de puissance généré par le contrôle est supérieur à la puissance utilisée pour générer ce gain.

minimum de température changent légèrement en fonction de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$ .

la balance est positive pour  $G \leq 3$ .

Cette configuration de source auxiliaire externe, bien que permettant des résultats prometteurs en terme de contrôle des performances, se heurte à un problème. Le couplage de la cavité contenant le haut-parleur avec le moteur est une source de pertes supplémentaires. En effet, le capillaire de couplage est d'une part une source de pertes visqueuses, et d'autre part, le débit imposé à travers le capillaire génère probablement un phénomène de jet, perpendiculaire à l'écoulement acoustique. Les pertes proviennent alors majoritairement de la turbulence générée par ce jet. Ces pertes abaissent l'efficacité du moteur par sa simple présence. L'amélioration apportée par le contrôle de la source permet pour des très grands gains d'amplification de compenser ces pertes pour obtenir une efficacité au moins équivalente à celle en l'absence de la source auxiliaire ( $\eta_\emptyset$ ), si le régime de fonctionnement est suffisamment près du seuil. Mais, quand la puissance de chauffage augmente, les capacités du moteur isolé ne sont pas atteintes avant la saturation de l'amélioration de l'efficacité, comme le montre la figure 3.5. Un autre mode de couplage de la source doit être possible, limitant les pertes supplémentaires introduites dans le système.

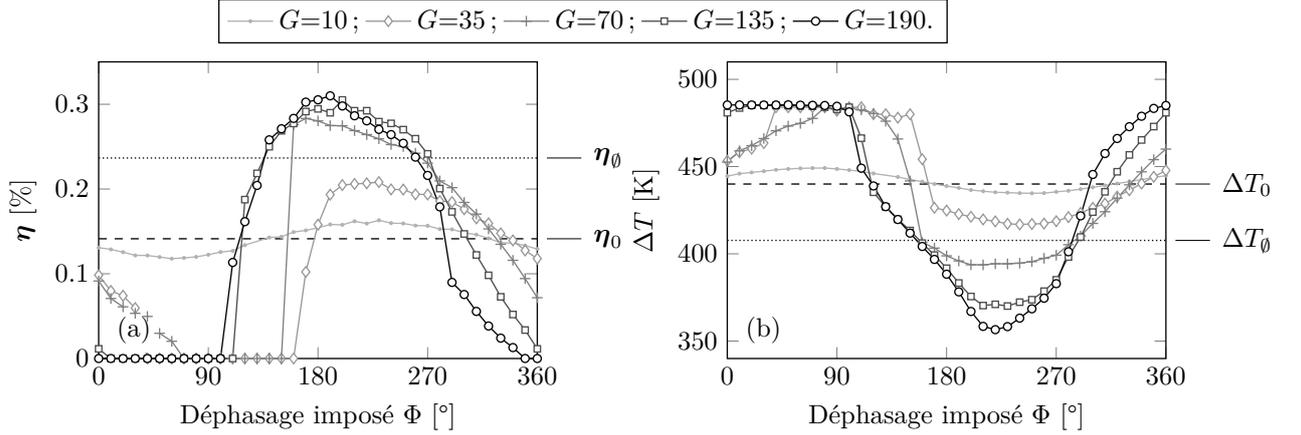
## 3.2 Source auxiliaire interne

Pour remédier au problème de baisse des performances dû à l'adjonction de la source sur le moteur, un autre positionnement de la source est proposé. La source acoustique (un haut parleur Aurasound NSW2-326-8A) est introduite directement dans le résonateur, avec un déplacement de la membrane dans le sens du déplacement acoustique, tel que représentée à la figure 3.1b. Cette configuration à l'avantage de ne pas introduire d'autres pertes dans le systèmes que celles inhérentes au haut-parleur. La position retenue se situe directement au dessus de l'échangeur de chaleur froid CHX, à un endroit dans le résonateur annulaire où l'impédance acoustique est théoriquement maximale, c'est-à-dire où l'amplitude de pression est grande pour un débit volumique réduit. Ce choix est en adéquation avec les capacités de la source utilisée (Ara NSW2-326-8A, voir Annexe B.2.5 pour sa caractérisation), dont l'excursion est limitée à  $x_{max} \simeq \pm 3$  mm. Par ailleurs, cette position est celle pour laquelle l'impact sur le seuil de déclenchement théorique est le plus faible dans cette configuration. Ce positionnement de source offre de plus l'avantage d'agir comme une membrane, acoustiquement transparente mais bloquant un éventuel flux de masse de second ordre (streaming de Gedeon).

### 3.2.1 Contrôle des performances

La même étude que pour la configuration précédente est réalisée pour cette nouvelle configuration. On retrouve, présentés à la figure 3.6, des résultats similaires à la section précédente – variations de l'efficacité globale et variations inverses de la différence de température en fonction de  $\Phi$  et  $G$ , extinction de l'auto-oscillation – avec cependant quelques différences notables. L'insertion de la source, même si elle augmente encore le seuil de déclenchement, et donc diminue l'efficacité du transducteur, est moins préjudiciable que dans le cas de la source externe. Il est donc plus facile de dépasser les performances du transducteur dans sa configuration sans source (en tirets noirs sur la figure 3.6), tant en terme d'efficacité globale que de température de fonctionnement. Par ailleurs, la valeur du déphasage pour lequel les performances sont optimales – que l'on soupçonnait d'évoluer

dans la configuration avec source auxiliaire externe – est, dans cette configuration, très dépendante du gain d’amplification  $\Phi_{opt} = f(G)$ . Elle apparait de plus différente pour les optima d’efficacité et de température. Elle passe en effet d’une valeur  $\Phi_{opt}^{\eta}(G=10) \simeq 230^{\circ}$  à  $\Phi_{opt}^{\eta}(G=190) \simeq 190^{\circ}$  pour l’efficacité alors qu’elle prend des valeurs de  $\Phi_{opt}^{\Delta T}(G=10) \simeq 250^{\circ}$  à  $\Phi_{opt}^{\Delta T}(G=190) \simeq 220^{\circ}$  pour la différence de température. Cet effet se traduit par une dérive du domaine d’extinction de l’oscillation, qui passe de  $\Phi_{\infty}(G=135) = [40^{\circ}; 150^{\circ}]$  à  $\Phi_{\infty}(G=190) = [0^{\circ}; 100^{\circ}]$ , en conservant la même taille de domaine.



**FIGURE 3.6** – (a) Efficacité  $\eta$  en fonction du déphasage de la boucle de rétro-contrôle  $\Phi$  pour différents gain d’amplification  $G$  et pour une puissance d’alimentation fixe  $\dot{Q}_h = 70$  W. (b) Évolution correspondante de la différence de température  $\Delta T$  dans le régénérateur. Les lignes tiretées correspondent aux performances  $\eta_0$  et  $\Delta T_0$  en l’absence de source auxiliaire.

De la même manière que précédemment, on observe l’augmentation de l’efficacité pour un déphasage proche du déphasage optimal au centre du domaine d’augmentation des performances, telle que présentée à la figure 3.7, jusqu’à dépasser les performances du moteur sans source auxiliaire, et ce même pour une puissance de chauffage très au-dessus du seuil ( $\dot{Q}_{hd} \simeq 61$  W dans cette configuration). L’efficacité finit cependant par saturer quand le gain d’amplification augmente, la puissance fournie à la source auxiliaire devenant importante. Dans le même temps, la différence de température dans le régénérateur diminue progressivement. La saturation de la baisse de température ne se fait cependant pas pour les mêmes conditions que pour l’efficacité. Notamment pour la configuration, de puissance plus faible, la différence de température continue à baisser sur le domaine entier de gains explorés, alors que l’efficacité sature au milieu de ce domaine.

### 3.2.2 Comportement hystérétique

Un comportement supplémentaire apparait dans cette configuration, lors de l’étude du déclenchement et de l’arrêt de l’instabilité thermoacoustique. Pour le mettre en évidence, un déphasage  $\Phi = 220^{\circ}$  dans la plage de déphasage optimale est choisi, puis, pour différents gains d’amplification de la boucle de rétro-contrôle, le protocole suivant est appliqué :

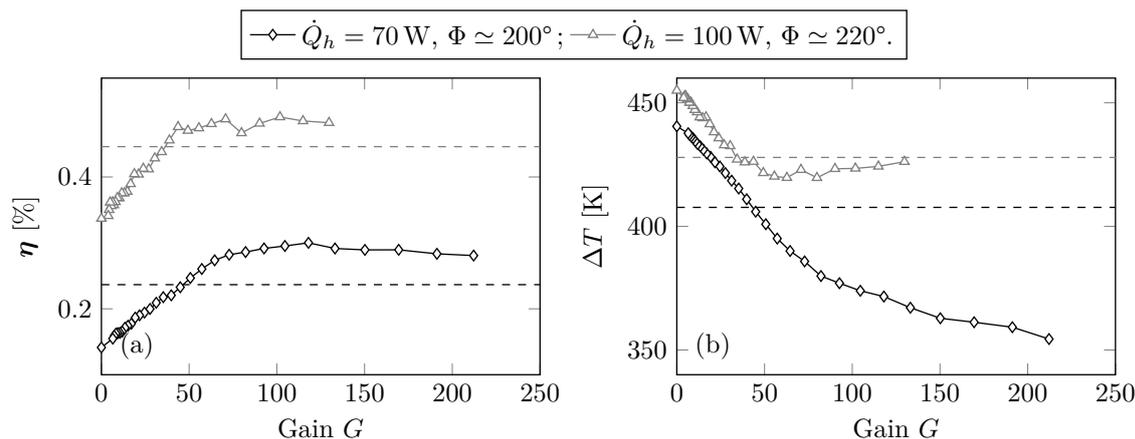
- (i) les conditions de déclenchement  $\dot{Q}_{hd}$  et  $T_{hd}$  sont déterminées en augmentant pas à pas la puissance de chauffage appliquée jusqu’à la génération d’une onde acoustique stabilisée ;

- (ii) les performances du moteurs sont qualifiées au delà du seuil, en fonction de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h > \dot{Q}_{hd}$  ;
- (iii) les conditions d'arrêt  $\dot{Q}_{hx}$  et  $T_{hx}$  sont déterminées en diminuant pas à pas la puissance de chauffage appliquée jusqu'à l'extinction de l'auto-oscillation.

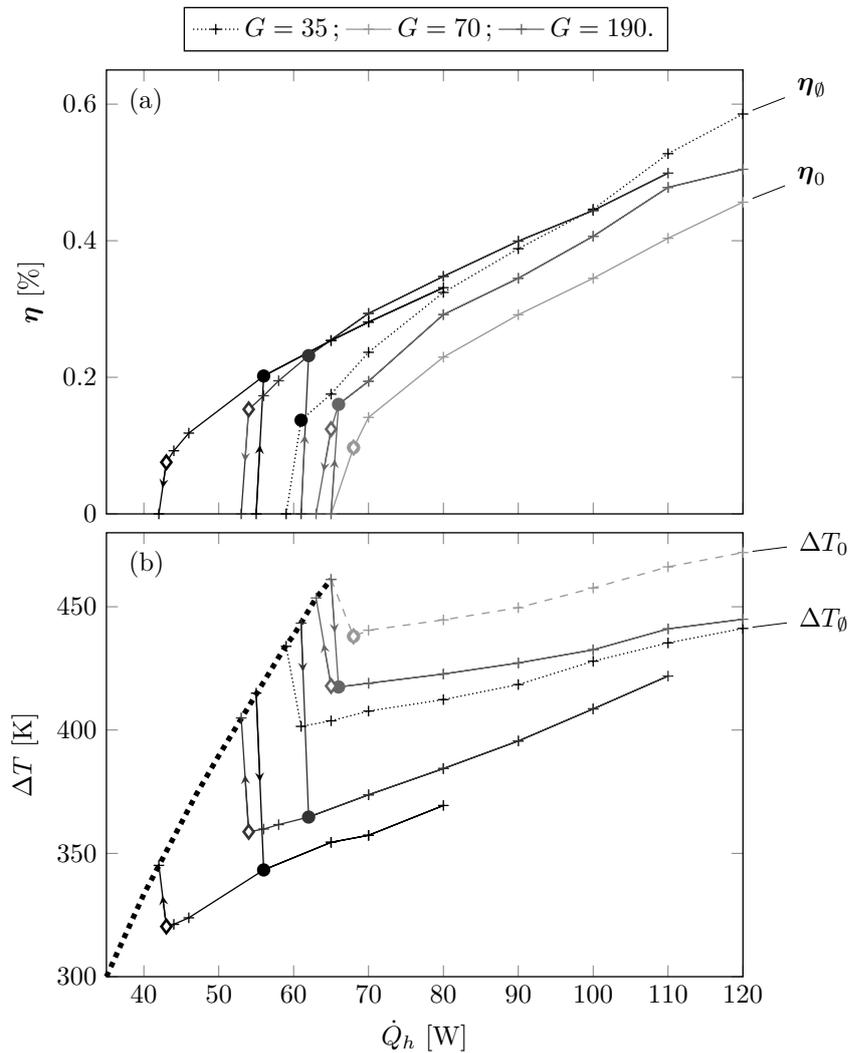
Il est important de noter qu'un délai de stabilisation de l'ordre de 3 min est requis à chaque pas afin d'atteindre un régime de fonctionnement quasi-stationnaire (il ne s'agit pas ici de qualifier le comportement dynamique du moteur).

Alors que le moteur seul ou équipé de la source externe semble posséder un comportement indépendant de  $G$  pour ses seuils de déclenchement et arrêt – c'est-à-dire  $\dot{Q}_{hd} = \dot{Q}_{hx} = \text{Cste}$ , le moteur équipé de la source auxiliaire interne fait montre d'un comportement hystérétique pour la puissance de chauffage ainsi que pour la différence de température. Ce comportement se traduit par la possibilité, une fois l'auto-oscillation établie et si la source auxiliaire est alimentée ( $G > 0$ ), de maintenir le fonctionnement pour des puissances et des différences de température plus faibles que celles requises pour le déclenchement.

De plus, l'augmentation du gain de rétro-contrôle permet d'abaisser le seuil de déclenchement, jusqu'à, pour des gains élevés, des valeurs plus faibles qu'en l'absence de la source auxiliaire. Par ailleurs, on observe que plus le gain  $G$  est élevé, plus ce comportement est marqué, c'est-à-dire que la différence entre les seuils de déclenchement et d'arrêt  $\dot{Q}_{hd} - \dot{Q}_{hx}$  augmente. La figure 3.8 montre que lorsque le gain passe de  $G = 0$  à 190, la puissance de chauffage requise pour le déclenchement passe de  $\dot{Q}_{hd} = 68$  W à 56 W et la différence de température de  $\Delta T_d = 437$  K à 343 K. Le seuil de déclenchement en l'absence de source se situe à  $\dot{Q}_{hd0} = 61$  W correspondant à une différence de température de  $\Delta T_{d0} = 401$  K. Dans le même temps, les conditions d'arrêt passent de  $\dot{Q}_{hx} = 68$  W à 43 W correspondant à une différence de température de  $\Delta T_x = 437$  K à 320 K.



**FIGURE 3.7** — Performances en fonction du gain d'amplification  $G$  pour deux puissances de chauffage  $\dot{Q}_h$  et un déphasage proche de l'optimal  $\Phi \simeq \Phi_{opt}$ . (a) Efficacité  $\eta$  ; (b) Évolution correspondante de la différence de température  $\Delta T$  dans le régénérateur. Les lignes pointillées correspondent aux performances  $\eta_0$  et  $\Delta T_0$  en l'absence de la source auxiliaire.



**FIGURE 3.8** – (a) Comportement hystérique de l'efficacité  $\eta$  en fonction de la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  pour un déphasage fixe  $\Phi = 220^\circ$  et pour différents gains d'amplification  $G$ . (b) Différence de température  $\Delta T$  correspondante. Les pointillés épais (•••••) correspondent à la différence de température entre les extrémités du régénérateur en l'absence de l'instabilité thermoacoustique. Les lignes tiretées correspondent à la configuration sans source auxiliaire, dénotée par l'indice  $\emptyset$ . Les lignes pointillées fines correspondent aux performances quand la source n'est pas alimentée, dénotée par l'indice 0. Les points  $\bullet$  correspondent aux conditions de déclenchement. Les diamants  $\diamond$  représentent les conditions d'extinction de l'auto-oscillation. Les flèches indiquent le sens de l'hystérésis.

### 3.3 Conclusion

Une étude de faisabilité expérimentale du contrôle des performances d'un transducteur thermoacoustique à l'aide d'une boucle de rétro-contrôle électroacoustique a été présentée. Les différents paramètres de contrôle ont permis de mettre en évidence les conditions d'applicabilité de ce contrôle, qui s'avère efficace particulièrement lors du fonctionnement

près du seuil de déclenchement du prototype, en permettant une augmentation de l'efficacité couplée à une baisse de la température de fonctionnement. Ce comportement ouvre des possibilités pour l'exploitation de la chaleur  *fatale*  à basse température qui est un enjeu de taille pour de nombreux processus industriels.

Cette étude a aussi permis de mettre en évidence les comportements complexes et non linéaires des systèmes couplés, tels que l'extinction des auto-oscillations par une source de forçage et l'hystérésis des seuils de déclenchement/arrêt. Au vu du nombre et de la complexité des effets prenant place dans les moteurs thermoacoustiques, il est difficile de déterminer lesquels sont responsables ou prédominants dans ces comportements. Une modélisation simplifiée, mais  *capturant la physique*  du transducteur forcé est donc nécessaire pour mieux comprendre les causes de ces comportements. Cette modélisation est l'objet de la partie suivante de ce mémoire.

## Deuxième partie

# Modèle simplifié d'un Transducteur thermoacoustique – Système à constantes localisées, Discrétisation des transferts thermiques et rétro-contrôle



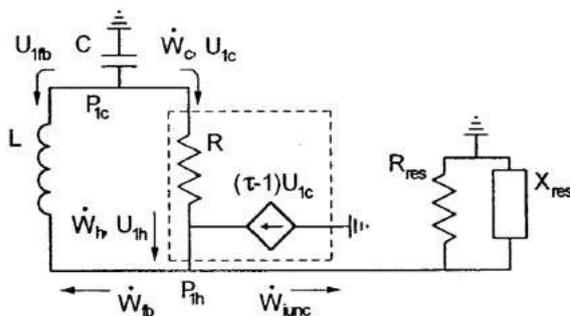
## Chapitre 4

# Modèle d'ordre réduit de transducteur thermoacoustique

### 4.1 Introduction

Des modèles d'ordre réduit sont parfois utilisés pour modéliser le réseau acoustique de moteurs thermoacoustiques, notamment ceux dits de Stirling<sup>9,45,84,199</sup> dont la description se prête plutôt bien, en première approche, à l'usage d'analogies électroacoustique. Par exemple, la figure 4.1 montre la représentation du TASHE donnée par Backhaus et Swift dans [9]. Cependant, les simplifications appliquées pour l'établissement de ces modèles visent à en faire des modélisations intuitives, très simplifiées et donc seulement qualitatives, du comportement de ces machines.

Le principe des équivalences acousto-électriques ou mécano-électriques permet d'établir un réseau électrique à constantes localisées équivalent au système acoustique d'une machine thermoacoustique, si les dimensions du système sont suffisamment petites devant la longueur d'onde.<sup>9,199</sup> Cette représentation équivalente donne accès aux principes de base du fonctionnement des moteurs avec une description ne requérant que quelques degrés de liberté, les équations électriques discrètes étant plus facile à manipuler que celles, continues, de la mécanique des fluides. Des résultats équivalents peuvent être obtenus sans l'usage d'analogies électriques pour la description de ces moteurs de Stirling, comme *de Waele* le propose avec sa modélisation du TASHE<sup>45</sup> basée sur la description simplifiée du cycle de transformation subi

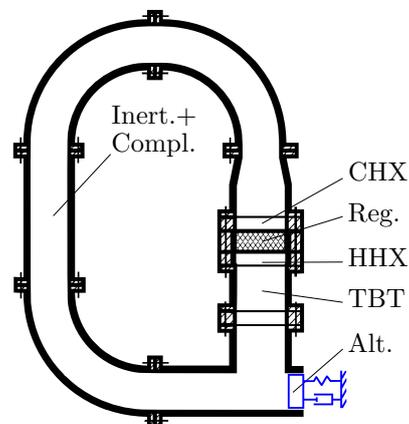


**FIGURE 4.1** – Schéma électrique équivalent simplifié du TASHE donné par Backhaus et Swift dans [9], permettant de visualiser la distribution des flux de puissance acoustique  $\dot{W}$ , et de relier les pressions  $P_i$  et les débits  $U_j$  acoustiques en différents points du résonateur acoustique. Le processus d'amplification thermoacoustique est décrit au moyen d'un générateur de courant (i.e. de débit acoustique) proportionnel au débit entrant  $U_{1c}$  et à la différence  $\tau - 1$ , avec  $\tau = T_h/T_c$  le ratio des températures chaude  $T_h$  et froide  $T_c$  aux extrémités du régénérateur.

par des volumes fluides de contrôle. Il obtient ainsi une équation différentielle ordinaire (EDO) homogène d'ordre 4 dont un seul coefficient dépend de la température. L'étude des coefficients de cette EDO lui permet notamment de déterminer la fréquence d'oscillation dans le système, ainsi que le taux d'amplification linéaire d'une perturbation acoustique. Il couple à cette EDO une équation de la chaleur décrivant l'évolution de la température de l'échangeur de chaleur chaud, comprenant un terme intégral sur la période acoustique (elle-même non définie) pour la description du transfert de chaleur inhérent au phénomène thermoacoustique. Il obtient ainsi une description minimaliste du moteur, permettant de retranscrire le comportement transitoire de l'instabilité thermoacoustique jusqu'à sa saturation en amplitude.

L'objet de ce travail est de pousser plus loin ces approches pour décrire les comportements complexes observés expérimentalement sur des prototypes réels, tels que celui représenté à la figure 4.2. Parmi ces comportements présentés dans la partie I, ceux obtenus sous l'influence d'une boucle de rétro-contrôle sont particulièrement intéressants : contrôle simultané de l'efficacité et du gradient de température, extinction des oscillations auto-entretenues<sup>106</sup> et comportement hystérétique des seuils de déclenchement et d'extinction.<sup>122</sup> La méthode utilisée décrit le moteur thermoacoustique comme un réseau de quelques biportes électriques, via l'usage d'équivalences électroacoustiques en constantes localisées. Cette description permet de formuler un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre dépendant de la température et décrivant le comportement du moteur. L'étude de ce système permet d'établir les conditions de stabilité du moteur thermoacoustique. Les effets non linéaires impactant le fonctionnement du moteur sont pris en compte par leur impact sur la distribution de température dans le noyau, qui dépend alors des variables acoustiques. Cette description est faite par une approche nodale,<sup>109,141</sup> qui permet de discrétiser spatialement l'équation de la chaleur et de la ramener à un système d'EDO du premier ordre. Ces deux systèmes différentiels couplés et à coefficients non constants donnent une description simplifiée du système thermoacoustique, qui permet de décrire le comportement transitoire du moteur, et donne accès aux conditions de saturation de l'auto-oscillation en fonction des paramètres de contrôle du système thermoacoustique. Dans un premier temps, seul le transducteur thermo-acousto-électrique est modélisé dans ce chapitre, et le formalisme des transferts thermiques y est introduit. L'ajout d'une boucle de rétro-contrôle, ainsi que les effets de la prise en compte de phénomènes additionnels dans les transferts thermiques, sont présentés au chapitre 5.

**FIGURE 4.2** – Représentation schématique d'un transducteur thermo-acousto-mécanique simplifié. Ce système diffère du prototype expérimental présenté à la partie précédente principalement par la simplification de la charge acoustique couplée, ici réduite à un oscillateur mécanique amorti et par ses échanges de chaleur, supposés parfaits : ils imposent la température mais ne perturbent pas la propagation acoustique. Les éléments du noyau sont compris dans un résonateur annulaire qui se comporte comme une inertance et une compliance en série.



## 4.2 Un modèle électrique équivalent au réseau acoustique

Dans le cadre de cette modélisation, le transducteur thermo-acousto-électrique du LAUM (présenté dans la partie I et noté TAET par la suite) est simplifié significativement de manière à ne retenir que ses propriétés essentielles. En particulier, dans la mesure où l'étude porte essentiellement sur les caractéristiques du noyau thermoacoustique, l'alternateur électrodynamique et le guide d'onde de couplage sont simplement représentés par un système équivalent d'oscillateur mécanique amorti. Le TAET simplifié est représenté schématiquement à la figure 4.2. On cherche à en établir un modèle à constantes localisées à l'aide d'équivalence électroacoustique.

### 4.2.1 Équivalence électroacoustique

Une portion élémentaire de régénérateur/stack thermoacoustique est représentée à la figure 4.3. Cet élément de longueur infinitésimale  $dx$  est soumis à un différentiel de température  $dT_0$ . L'équation (1.7) (issu de la théorie linéaire de la thermoacoustique) donnant la relation entre la vitesse acoustique moyenne sur la section transverse et la pression acoustique permet d'accéder directement à une relation entre le différentiel de pression  $d\tilde{p}$  sur la longueur élémentaire  $dx$  et le débit acoustique  $\tilde{u} = S\phi\bar{v}$  au travers de cet élément de porosité  $\phi$  et à la pulsation  $\omega$

$$d\tilde{p} = \frac{i\omega\rho_0 dx}{\phi S} \frac{1}{1 - f_\nu} \tilde{u}. \quad (4.1)$$

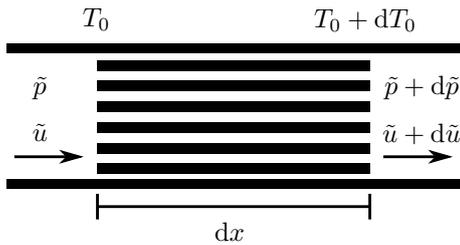
avec  $\rho_0$  la masse volumique au repos du fluide. La substitution de cette équation dans l'équation (1.8) donnant la relation entre température et pression, avec l'aide de l'équation d'état linéarisée  $p/P_0 = \tau/T_0 + \rho/\rho_0$ , permet d'arriver de manière équivalente à l'expression de la variation de débit le long du même segment élémentaire

$$d\tilde{u} = \frac{i\omega\phi S dx}{\gamma P_0} (1 + (\gamma - 1)f_\kappa) \tilde{p} + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - f_\nu)(1 - \sigma)} \frac{dT_0}{T_0} \tilde{u}, \quad (4.2)$$

où  $P_0$  est la pression du fluide au repos,  $\sigma$  son nombre de Prandtl et  $f_{\nu,\kappa}$  des fonctions visco-thermiques complexes qui caractérisent les couplages respectivement visqueux et thermique entre le fluide et la paroi des pores. Ces deux expressions (4.1) et (4.2) peuvent être réécrites pour séparer leurs parties réelles et imaginaires (y compris dans les fonctions  $f_{\nu,\kappa}$ )

$$d\tilde{p} = (i\omega m + R')\tilde{u}, \quad (4.3a)$$

$$d\tilde{u} = (i\omega C + 1/R'')\tilde{p} + g\tilde{u}, \quad (4.3b)$$

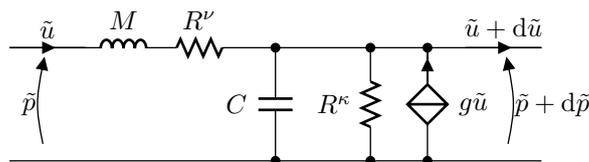


**FIGURE 4.3** – Portion élémentaire de guide d'onde thermoacoustique de longueur infinitésimale  $dx$  et soumis à un différentiel de température  $dT_0$ . Les différentiels de pression  $d\tilde{p}$  et de débit acoustique  $d\tilde{u}$  entre les extrémités du segment élémentaire sont données par la théorie linéaire de la thermoacoustique.

où les paramètres équivalents sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{\rho_0 dx}{\phi S} \frac{1 - \Re[f_\nu]}{|1 - f_\nu|^2}, & R^\nu &= \frac{\omega \rho_0 dx}{\phi S} \frac{\Im[f_\nu]}{|1 - f_\nu|^2}, \\
 C &= \frac{\phi S dx}{\gamma P_0} (1 + (\gamma - 1)\Re[f_\kappa]), & \frac{1}{R^\kappa} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\omega \phi S dx \Im[-f_\kappa]}{P_0}, \\
 g &= \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - f_\nu)(1 - \sigma)} \frac{dT_0}{T_0}.
 \end{aligned} \tag{4.3c}$$

La démarche complète pour arriver à cette description équivalente, ainsi que les simplifications qui vont suivre sont retrouvées en détails dans la référence [160]. Cette écriture met en évidence un comportement semblable à celui du circuit électrique équivalent représenté à la figure 4.4 avec les paramètres définis ci-dessus. Pour de petites longueurs face à la longueur d'onde, la propagation acoustique guidée en fluide viscothermique peut donc être décrite par un circuit électrique équivalent à constantes localisées, en prenant en compte la présence d'un matériau poreux dans le guide d'onde (via les fonctions visco-thermiques  $f_{\nu,\kappa}$ ) et la présence d'un éventuel gradient de température  $\Delta T/\Delta x$  agissant comme une source de débit acoustique proportionnelle au débit dans le segment et commandée en température.



**FIGURE 4.4** – Circuit électrique équivalent au segment élémentaire de noyau thermoacoustique représenté à la figure 4.3. Les paramètres  $R$ ,  $C$ ,  $m$  et  $g$  sont déduits des équations linéaires de la thermoacoustique. L'influence du différentiel de température est représentée comme une source de débit acoustique (c'est-à-dire une source de courant) proportionnel au courant entrant le segment.

Ce segment élémentaire est un élément générique, qui peut être simplifié pour symboliser une portion de régénérateur en considérant la limite quasi-isotherme, ou même pour représenter un guide d'onde de section large en considérant leur limite quasi-adiabatique et avec  $dT_0/dx = 0$ .

#### 4.2.2 Système équivalent du TAET

Les équivalences acousto-électriques permettent l'établissement d'un modèle équivalent pour un segment de guide d'onde générique. Ce modèle est celui qui sera utilisé pour la modélisation du transducteur thermoacoustique dont le schéma de principe est donné à la figure 4.2. Moyennant quelques hypothèses sur le fonctionnement de ce prototype, et notamment sur le régime thermodynamique observé par une particule de fluide dans les différents segments du transducteur, un schéma électrique équivalent du moteur thermoacoustique peut alors être construit.

**Hypothèse 4.1.** *Les dimensions géométriques du système décrit sont petites devant la longueur d'onde des pseudo-oscillations du système. Notamment, la longueur de la boucle*

$L \simeq 1$  m est faible devant la longueur d'onde (expérimentalement,  $\lambda \simeq 8.5$  m); les différentes sections du système peuvent alors être décrites par un modèle à constantes localisées.

**Hypothèse 4.2.** Le fonctionnement du moteur est basé sur un cycle thermodynamique quasi-isotherme dans le régénérateur. Les pores du régénérateur sont de petite taille devant l'épaisseur des couches limites  $\delta_{\nu,\kappa} \gg r_h$ , amenant à la simplification de l'expression des fonctions viscothermiques

$$f_{\nu,\kappa} \simeq 1 + \frac{i}{b} \left( \frac{r_h}{\delta_{\nu,\kappa}} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{r_h}{\delta_{\nu,\kappa}} \right)^4 \right], \quad (4.4)$$

avec  $r_h$  le rayon hydraulique des pores, défini comme le rapport de la surface transverse au périmètre mouillé, et  $b$  un facteur de forme valant 6 pour un empilement de plaques, 4 pour des cylindres, 3.56 pour des pores carrés, etc. La substitution de cette expression dans celles des cinq paramètres équation (4.3c) montre que la résistance thermique et la masse acoustique équivalente du régénérateur peuvent être négligées, et permet de simplifier l'expression du gain d'amplification du régénérateur.<sup>160</sup> On choisit de diviser le guide d'onde annulaire en deux tronçons indicés 1 et 2, ce qui s'avèrera utile ultérieurement pour l'adjonction de la source auxiliaire de rétro-contrôle.

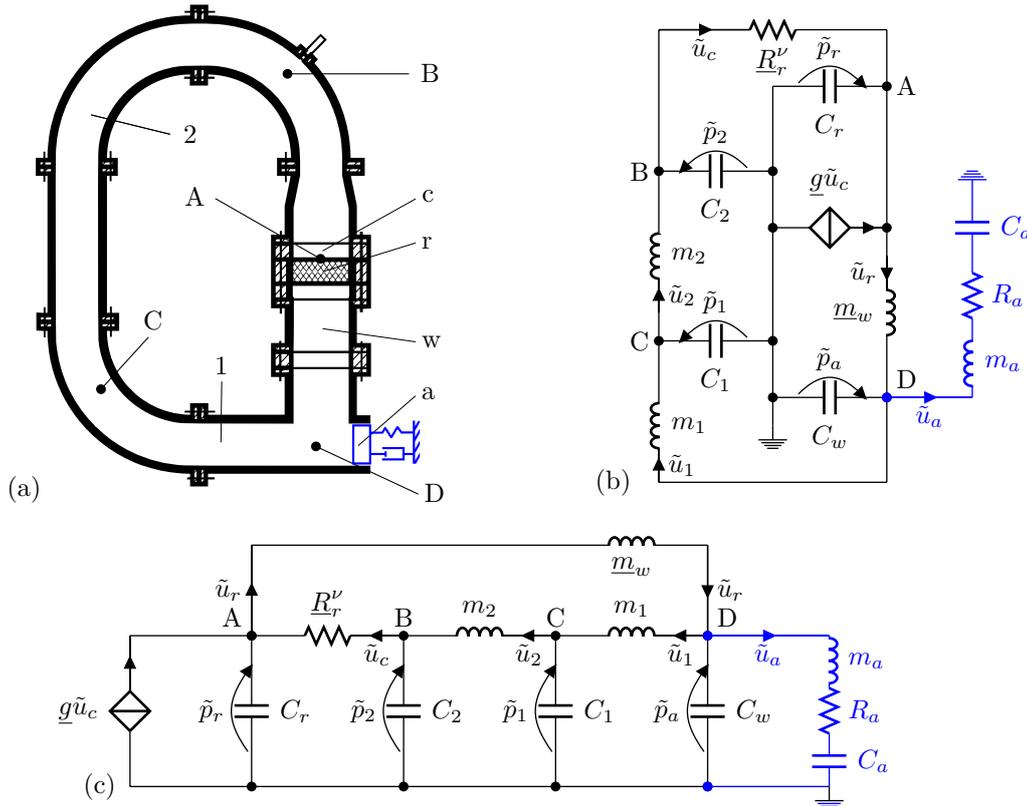
**Hypothèse 4.3.** Le développement avec l'approximation de régime quasi-adiabatique de l'expression des couches limites dans les autres éléments du transducteur,

$$\Re[f_{\nu,\kappa}] \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Im[f_{\nu,\kappa}] \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

revient à considérer que les pertes dans les diverses portions de tube sont négligeables devant les pertes viscothermiques du régénérateur et les pertes dans l'oscillateur mécanique. Ceci se traduit notamment par des échangeurs de chaleur (CHX et HHX) acoustiquement transparents. De la même manière, on montre que la compliance du TBT est négligeable.

Le circuit équivalent au transducteur thermo-acousto-mécanique représenté schématiquement à la figure 4.2 et simplifié à l'aide des hypothèses précédentes, est donné à la figure 4.5, où les paramètres du circuit finalement pris en considération (résistances, compliances, masses acoustiques et gain d'amplification) sont donnés en fonction des paramètres géométriques et thermophysiques de la machine<sup>160</sup> :

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 = \frac{\rho_0 l}{S}, & C &= C_1 + C_2 = \frac{lS}{\gamma P_0}, \\ C_r &= \frac{Sl_r}{P_0}, & R_r^\nu &= \frac{2b\nu_r(x)l_r}{Sr_h^2}, \\ \underline{m}_w &= \frac{\rho_0(x)l_w}{S}, & C_w &= \frac{l_w S}{\gamma P_0}, \\ m_a &= \frac{m_{ms}}{S_d^2}, & R_a &= \frac{R_{ms}}{S_d^2}, \\ C_a &= C_{ms} S_d^2, & \underline{g} &= \int_{l_r} \frac{d_x T_0}{T_0} dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$



**FIGURE 4.5** – (a) Représentation schématique faisant apparaître les notations utilisées par la suite, ainsi que différents points utiles (points A à D). (b) Schéma électrique équivalent du système thermoacoustique (a) avec les Hypothèses 4.1 à 4.3. Les paramètres soulignés sont les valeurs moyennes des paramètres dépendants de la distribution de température dans le noyau. La branche en bleu représente l'oscillateur mécanique amorti couplé au moteur. (c) Représentation normalisée du même schéma (source à gauche, récepteurs à droite).

La notation *soulignée*  $\tilde{\cdot}$  est retenue pour désigner la valeur moyenne d'un paramètre sur la longueur d'un élément. Ce moyennage sert à rendre compte de la dépendance en température de la masse volumique et de la viscosité du fluide\*.  $\phi_r$  est la porosité du régénérateur, qui est considéré comme un fluide équivalent dont les propriétés sont données par une loi de mélange<sup>†</sup>. Les dimensions  $l_r$ ,  $l_w$  et  $l$  désignent respectivement les longueurs du régénérateur, du TBT et du reste de la boucle composée des parties de guides d'onde homogène en température, de

\*. La dépendance en température des paramètres thermo-physiques est traitée dans l'Annexe C.

†. La loi de mélange en volume donne simplement les propriétés thermophysiques équivalentes du milieu homogénéisé

$$\begin{aligned}\lambda_r &= (\phi_r \lambda_0 + k_s (1 - \phi_r) \lambda_s), \\ \rho_r c_r &= \phi_r \rho_0 c_P + (1 - \phi_r) \rho_s c_s,\end{aligned}$$

avec les indices 0 et  $s$  désignant les propriétés respectivement de l'air et de l'acier inoxydable composant les grilles du régénérateur, et avec  $k_s$  un facteur d'ajustement de la conductivité pour tenir compte des contacts imparfaits entre les grilles.<sup>176</sup> Dans un premier temps, pour la description utilisée dans ce chapitre, la valeur de ce coefficient est fixée à  $k_s = 0.3$ , permettant d'utiliser plus tard des puissances de chauffage ayant dans le modèle des valeurs similaires aux valeurs expérimentales.

telle manière que la longueur totale de la partie annulaire vaut  $L = l + l_r + l_w$ .  $S$  désigne la section transverse du guide d'onde, et  $S_d$  la surface de transduction de l'oscillateur mécanique. Les propriétés mécaniques de ce dernier sont indicées  $ms$ .

L'expression des relations entre les pressions et débits acoustiques en différents points du circuit est donnée dans le domaine temporel sous la forme d'un système de dix équations différentielles ordinaires pour les neuf variables acoustiques, plus une accélération  $a_a$  dont l'introduction est nécessaire pour réduire au premier ordre la description de l'oscillateur mécanique, en utilisant les indices des variables de pression et débit définis conformément au schéma électrique équivalent de la figure 4.5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_a = a_a, \\ d_t p_a = \frac{1}{C_w} (u_r - u_1 - u_a), \\ d_t u_r = \frac{1}{m_w} (p_r - p_a), \\ d_t u_c = \frac{1}{R_r^\nu} \left( \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c) - \frac{g+1}{C_r} u_c + \frac{1}{C_r} u_r \right), \\ d_t u_1 = \frac{1}{m_1} (p_a - p_1), \\ d_t p_r = \frac{1}{C_r} \left( (g+1) u_c - u_r \right), \\ d_t a_a = \frac{1}{m_a} \left[ \frac{1}{C_w} (u_r - u_1) - \left( \frac{1}{C_w} + \frac{1}{C_a} \right) u_a - R_a a_a \right], \\ d_t u_2 = \frac{1}{m_2} (p_1 - p_2), \\ d_t p_1 = \frac{1}{C_1} (u_1 - u_2), \\ d_t p_2 = \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.7a) \\ (4.7b) \\ (4.7c) \\ (4.7d) \\ (4.7e) \\ (4.7f) \\ (4.7g) \\ (4.7h) \\ (4.7i) \\ (4.7j) \\ (4.7k) \end{array}$$

Le système est présenté sous forme matricielle

$$\boxed{d_t \mathbf{x}(t) = \mathcal{M}[t, T_0(x)] \mathbf{x}(t)}, \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{x} = \{u_a, p_a, u_r, u_c, u_1, p_r, a_a, u_2, p_1, p_2\}^T$  est alors le vecteur d'état du système acoustique (l'exposant  $T$  désignant la transposée), et  $\mathcal{M}$  sa matrice.

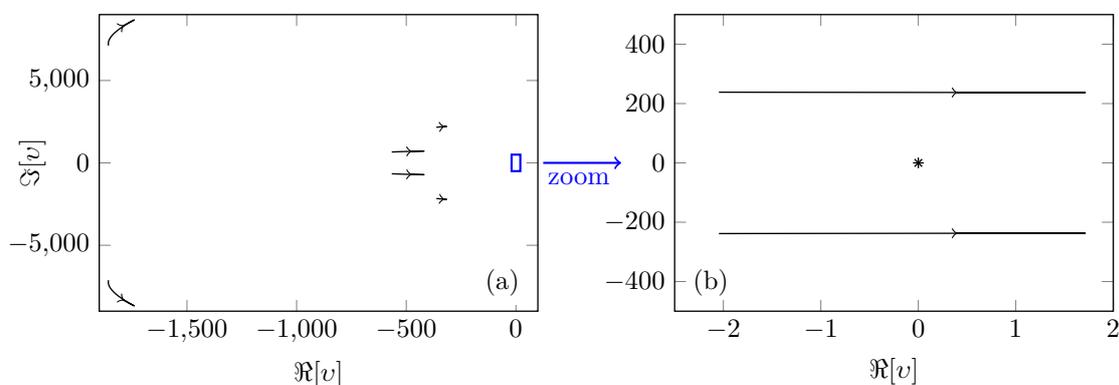
De manière générale, si la matrice  $\mathcal{M}$  est de dimension  $n$ , le problème admet alors une solution de la forme

$$\mathbf{x}(t) = A_1 e^{v_1 t} \hat{\mathbf{x}}_1 + A_2 e^{v_2 t} \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + A_n e^{v_n t} \hat{\mathbf{x}}_n \quad (4.9)$$

où les  $v_i$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{M}$  (dépendant de la distribution de température, et donc susceptibles d'évoluer dans le temps),  $\hat{\mathbf{x}}_i$  ses vecteurs propres et  $A_i$  des constantes satisfaisant les conditions initiales et/ou aux limites du problème.

### 4.2.3 Stabilité

L'étude des valeurs propres  $v_i$  donne accès aux conditions de stabilité du système.<sup>143</sup> En effet, si les  $v_i$  complexes possèdent toutes une partie réelle négative, toute excitation du système sera atténuée jusqu'à l'extinction : le système est dit asymptotiquement stable. Si au moins un couple de valeurs propres conjuguées  $v_{i,\nu}$  possède une partie réelle positive, alors le système sera considéré instable. Une excitation quelconque du système dans ces conditions mène à la croissance en amplitude du mode correspondant, défini par le vecteur propre  $\mathbf{x}_i$  avec un taux  $\epsilon = \Re[v_{i,\nu}]$ , en oscillant à la pseudo-pulsation  $\omega = \Im[v_i]$ . Les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M}$  du système (4.7) sont représentées dans le plan complexe à la figure 4.6 en utilisant des valeurs numériques représentant le prototype étudié dans la partie I. Cette représentation met en évidence deux valeurs propres nulles (représentées par + et ×), et quatre paires de valeurs propres complexes. Parmi celles-ci, une paire a une partie imaginaire devenant positive quand le gradient de température imposé au noyau thermoacoustique augmente, représentant le passage d'un état stable à un état instable.



**FIGURE 4.6** – Évolution des valeurs propres de la  $\mathcal{M}$  décrivant le système (4.7) dans le plan complexe quand la température  $T_h$  est fixée à une valeur variant de 450 K à 800 K (dans le sens indiqué par les flèches). Cette représentation fait apparaître quatre paires de valeurs propres complexes conjuguées et deux valeurs propres nulles. Une paire voit sa partie imaginaire passer par zéro, point de perte de stabilité du mode correspondant. La figure (b) est un zoom autour de l'origine de la figure (a) montrant le changement de signe de la partie réelle d'un couple de valeurs propres conjuguées. Il est à noter que, dans le cas des trois paires de valeurs propres représentées à gauche, les fréquences en jeu sont suffisamment élevées pour sortir du domaine où le comportement du moteur peut être représenté par une approche en constantes localisées. Ces valeurs propres ne sont donc pas représentatives du comportement du système.

La condition marginale de stabilité est définie comme la température  $T_{hd}$  de l'échangeur chaud pour laquelle une excitation infinitésimale n'est ni amplifiée ni atténuée, c'est-à-dire la température pour laquelle un couple de valeurs propres est purement imaginaire

$$\epsilon(T_h = T_{hd}) = 0. \quad (4.10)$$

La température de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique est donc recherchée numériquement par une méthode itérative de recherche de zéro (méthode de Newton-Raphson). Cette définition du seuil de déclenchement fait cependant appel à une hypothèse implicite sur la distribution de température dans le noyau. La distribution de température est pour le

moment supposée linéaire par morceaux. Ici, la distribution de température est donc linéaire dans le régénérateur et dans le TBT, variant de  $T_c$  aux extrémités du noyau à  $T_h$  à l'interface entre les deux éléments.

#### 4.2.4 Expression de l'amplification thermoacoustique

En notant  $v_{l,l'} = \epsilon \pm i\omega$  le couple de valeurs propres conjuguées associées au mode le plus instable (avec  $\epsilon \ll \omega$ ), on choisit d'écrire la réponse avec des conditions initiales telles que seul le couple de vecteurs propres décrivant les amplitudes relatives des variables acoustiques du mode le plus instable est sollicité. Ceci revient à utiliser des conditions initiales sur les variables acoustiques aux différents points du système telles que leurs valeurs relatives correspondent au mode propre considéré, c'est-à-dire  $A_i = \begin{cases} A_0 \neq 0 & \text{si } i \in \{l, l'\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$  donnant

$$\mathbf{x}(t) = A_0 \hat{\mathbf{x}}_l e^{v_l t} + A_0 \hat{\mathbf{x}}_{l'} e^{v_{l'} t}. \quad (4.11)$$

Cette hypothèse est justifiable car les autres valeurs propres sont telles que  $\epsilon_{i \neq \{l, l'\}} \ll 0$ . Les excitations selon les autres vecteurs propres  $\hat{\mathbf{x}}_{i \notin \{l, l'\}}$  sont donc finalement rapidement atténuées jusqu'à l'extinction.

Comme les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres complexes conjuguées sont eux aussi complexes conjugués, la réponse est réécrite

$$\mathbf{x}(t) = A_0 \hat{\mathbf{x}}_l e^{\epsilon t} e^{i\omega t} + A_0 \hat{\mathbf{x}}_l^* e^{\epsilon t} e^{-i\omega t}, \quad (4.12)$$

de sorte que, avec  $\hat{\mathbf{x}}_l = \{\hat{x}_{l,1}, \dots, \hat{x}_{l,n}\}^T = \{|\hat{x}_{l,1}|e^{j\varphi_1}, \dots, |\hat{x}_{l,n}|e^{j\varphi_n}\}^T$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 |\hat{x}_{l,1}| e^{\epsilon t} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \vdots \\ A_0 |\hat{x}_{l,n}| e^{\epsilon t} \cos(\omega t + \varphi_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(t) \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \vdots \\ X_n(t) \cos(\omega t + \varphi_n) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

où  $X_i$  est l'amplitude des oscillations de  $x_i$ , donnant en notation vectorielle

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cos(\omega t + \boldsymbol{\varphi}). \quad (4.14)$$

Par convention, on choisit de normer les vecteurs propres de telle manière que l'excitation initiale  $\mathbf{X}_0 = A_0 |\hat{\mathbf{x}}_l|$  soit unitaire pour la pression dans la branche de l'alternateur, soit  $X_2(t=0) = |\hat{x}_{l,2}| = 1$ . De cette manière, une excitation initiale d'amplitude  $A_0 = 1$  correspond à une surpression de 1 Pa au point D, les autres variables acoustiques ayant des amplitudes relatives correspondant au mode propre de fonctionnement du moteur.

La description de l'évolution des variables acoustiques du système se résume donc au suivi de leurs amplitudes  $X_i$  (sachant qu'elles oscillent à la pulsation  $\omega$ ) :

$$\boxed{d_t \mathbf{X} = \epsilon \mathbf{X}}, \quad (4.15)$$

donnant une croissance exponentielle des auto-oscillations caractérisée par le taux de croissance  $\epsilon$  au delà du seuil de déclenchement. Si on considère un régime de fonctionnement du moteur pour lequel la distribution de température est imposée, alors les valeurs propres et

vecteurs propres du système sont constants, c'est-à-dire  $\epsilon = cste$ . Cette condition se traduit par une croissance exponentielle ininterrompue de taux  $\epsilon$ , physiquement irréaliste.

Cependant, deux facteurs doivent être pris en compte qui permettent la description de la saturation de l'amplitude des oscillations acoustiques dans le système au delà du seuil de déclenchement. Premièrement, dans le cadre du système décrit, la quantité imposée n'est pas la température mais le flux de chaleur fourni au côté chaud du régénérateur. Ceci implique que la génération de l'onde acoustique s'accompagne d'un flux de chaleur thermoacoustique qui augmente avec l'amplitude des oscillations acoustiques et s'additionne au flux de conduction. En réduisant la différence de température entre les extrémités du noyau, ce pompage de chaleur thermoacoustique constitue un premier mécanisme de saturation. D'autre part, la présence d'un champ acoustique de fort niveau autorise l'établissement de phénomènes acoustiques non linéaires, parmi lesquels le vent acoustique. Ce dernier impacte lui aussi la distribution de température et tend à réduire la différence de température entre les extrémités du régénérateur. Or, les grandeurs  $\hat{x}_l$ ,  $\omega$  et  $\epsilon$  dépendent de la distribution de température  $T_0(x)$  dans le noyau thermoacoustique et donc varient au cours du temps, ce qui permet alors de décrire la saturation en incluant dans l'équation du transport de la chaleur les termes non linéaires rendant compte du transport de chaleur acoustiquement induit.

### 4.3 Transferts de chaleurs dans le TAC

La description des comportements complexes observés expérimentalement sur le prototype de moteur thermoacoustique de Stirling nécessite de prendre en compte certains des phénomènes non linéaires en jeu dans le noyau thermoacoustique. Premièrement, le pompage thermoacoustique inhérent au processus thermoacoustique ne peut être ignoré. Il consiste en un transport de chaleur advectif qui prend place à proximité des parois du régénérateur et accompagne nécessairement le processus d'amplification thermoacoustique, conformément au second principe de la thermodynamique selon lequel toute production de travail se fait au prix d'un transfert de chaleur d'une source chaude vers une source froide. Deuxièmement, le streaming de Gedeon, flux de masse induit par les auto-oscillations, circule dans la boucle et tend à déformer la distribution de température par un mécanisme de convection forcée. Les autres phénomènes non linéaires, tels que le streaming de Rayleigh, le jet streaming ou les effets aérodynamiques de bord sont plus difficiles à prendre en compte, d'une part car ils sont multidimensionnels, et d'autre part car ils sont toujours mal compris ou décrits. Leur prise en compte peut aussi s'avérer d'intérêt limité, comme dans le cas des pertes singulières qui ne perturbent par forcément la distribution de température, mais participe à la saturation de l'amplitude acoustique en dissipant de l'énergie acoustique. Une équation décrivant l'évolution de la température est obtenue par un bilan des flux de chaleur dans le noyau thermoacoustique. Cette équation est ensuite discrétisée par une approche nodale (ou de façon équivalente par un schéma aux différences finies), ce qui permet de réduire la distribution de température à un jeu de quelques points. Une version simpliste de cette équation est aussi donnée, qui se réduit à la considération de l'évolution de la seule température à l'extrémité chaude du régénérateur.

### 4.3.1 Bilan des flux de chaleurs dans le TAC

En présence d'une oscillation acoustique de fort niveau, différents phénomènes de transfert de chaleur se mettent en place dans le TAC, représenté schématiquement à la figure 4.7. Un bilan global des flux de chaleur dans le noyau donne la relation générale suivante pour la distribution de température dans le noyau (régénérateur ou TBT)  $T_0(x \in [-l_r, l_w])$  :

$$\rho_0 c_P S l \partial_t T_0(x, t) = \dot{Q}_h + \dot{Q}_{cond} + \dot{Q}_{lat} + \dot{Q}_{ac} + \dot{Q}_G. \quad (4.16)$$

où on notera plus tard  $c = \rho_0 c_P S l$  la capacité thermique du milieu.

$\dot{Q}_h$  représente la puissance de chauffage introduite par l'échangeur chaud.

$\dot{Q}_{cond}$  désigne la puissance calorifique qui transite par conduction le long du TAC, qui est donné sous la forme

$$\dot{Q}_{cond} = \lambda S \partial_{xx}^2 T_0. \quad (4.17)$$

Le contact avec la paroi de température  $T_*$  entourant le noyau est responsable d'un transfert radial de puissance thermique  $\dot{Q}_{lat}$

$$\dot{Q}_{lat} = -\frac{1}{\tau} c (T_0 - T_*), \quad (4.18)$$

où  $\tau$  est un temps caractéristique de diffusion thermique semi-empirique entre le noyau et la paroi, que l'on considérera dans un premier temps à température constante  $T_* = T_c$

La puissance calorifique  $\dot{Q}_G$  liée à l'advection par un éventuel streaming de Gedeon est proportionnelle à la vitesse moyenne  $\overline{V}_G(x)$  du flux de matière sur la section transverse

$$\dot{Q}_G = -c \overline{V}_G \partial_x T_0. \quad (4.19)$$

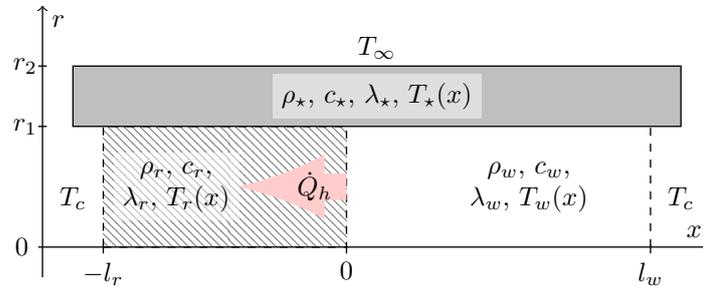
L'évaluation de ce flux sera traitée ultérieurement.

$\dot{Q}_{ac}$  désigne la puissance calorifique moyenne transportée par effet thermoacoustique dans le régénérateur dont l'expression est donnée dans ce qui suit.

#### Puissance transportée par effet thermoacoustique

La puissance transportée par effet thermoacoustique en régime permanent peut être développée sous la forme suivante<sup>116,170</sup>

$$\dot{Q}_{ac} = \dot{Q}_{SW} + \dot{Q}_{TW} + \lambda_{ac} d_x T_0, \quad (4.20)$$



**FIGURE 4.7** – Représentation schématique du noyau simplifié, composé de deux milieux de propriétés différentes régénérateur (en gris hachuré) et TBT (en blanc) délimités par les tirets, entourés par une paroi (en gris foncé) dont la température évolue indépendamment.

qui fait apparaître les contributions dues aux composantes stationnaire  $\dot{Q}_{SW}$  et progressive  $\dot{Q}_{TW}$  du champ acoustique, ainsi que la participation (indépendante de la relation de phase entre pression et débit acoustique) de l'augmentation acoustique de la conductivité du régénérateur  $\lambda_{ac}$  qui sont données respectivement par les expressions

$$\dot{Q}_{SW} = -\phi_r \Im [d] \frac{1}{2} \Im [\tilde{p}\tilde{u}^*], \quad (4.21a)$$

$$\dot{Q}_{TW} = \phi_r \Re [d] \frac{1}{2} \Re [\tilde{p}\tilde{u}^*], \quad (4.21b)$$

$$\lambda_{ac} d_x T_0 = \frac{\rho_0 c_P}{2\omega (1 - \sigma^2)} \frac{\Im [\sigma f_\nu^* - f_\kappa]}{|1 - f_\nu|^2} |\tilde{u}^*|^2, \quad (4.21c)$$

où l'exposant \* indique le complexe conjugué, et avec la fonction  $d$  donnée par

$$d = \frac{f_\nu^* - f_\kappa}{(1 - \sigma)(1 - f_\nu^*)}. \quad (4.21d)$$

Or, comme l'expression des fonctions viscothermiques donnée par l'Hypothèse 4.2 en régime quasi-isotherme permet les approximations

$$\Im [\sigma f_\nu^* - f_\kappa] \rightarrow 0, \quad \Im [d] \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Re [d] \rightarrow -1, \quad (4.21e)$$

la contribution de la composante stationnaire et l'augmentation acoustique de la conductivité sont négligeables ( $\dot{Q}_{SW} \rightarrow 0$  et  $\lambda_{ac} d_x T_0 \rightarrow 0$ ) et l'expression du pompage thermoacoustique se réduit alors à

$$\dot{Q}_{ac} = -\frac{\phi_r}{2} \Re [\tilde{p}\tilde{u}^*], \quad (4.22)$$

qui n'est autre que l'opposée de la puissance acoustique active dans le régénérateur. La pression et le débit suivent une évolution sinusoïdale dans le moteur, et peuvent être écrits respectivement  $p = P \cos(\omega t + \varphi_p)$  et  $u = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ , où les amplitudes  $P$  et  $U$  sont constantes en régime permanent. La puissance active en régime sinusoïdal s'écrit aussi en fonction du produit des amplitudes de la pression et du débit et du déphasage entre ces deux variables  $\psi = \varphi_p - \varphi_u$ , soit

$$\dot{Q}_{ac} = -\frac{\phi_r}{2} P U \cos(\psi). \quad (4.23)$$

Cependant, si l'amplitude de la pression  $P = P_r$  est supposée constante sur la longueur du régénérateur (Hypothèse 4.1), l'amplitude de la vitesse acoustique  $U = g(x)U_r$  est dépendante spatialement du gain distribué

$$g(x) = \int_{-l_r}^x \frac{d_x T_0}{T_0} dx. \quad (4.24)$$

En notant  $\dot{W}_r = \frac{\phi_r}{2} P_r U_r \cos(\psi)$  la puissance acoustique entrant dans le régénérateur, la puissance calorifique transportée par effet thermoacoustique en tout point du régénérateur est donc écrite comme l'opposé du produit de cette puissance et du gain d'amplification thermoacoustique

$$\dot{Q}_{ac}(x) = -\dot{W}_r \int_{-l_r}^x \frac{d_x T_0}{T_0} dx. \quad (4.25)$$

Cette puissance est exprimée ici en régime permanent, c'est-à-dire pour des amplitudes constantes des variables acoustiques. Cependant, en régime transitoire, les amplitudes acoustiques varient lentement (relativement à la période acoustique) au cours du temps selon le petit paramètre  $|\epsilon| \ll 1$  suivant l'équation (4.15). Les variations de la puissance transportée par effet thermoacoustique sur un intervalle de temps de l'ordre de la période acoustique sont donc proportionnelles à  $\epsilon^2$ . Elles seront donc négligées dans l'évaluation de  $\dot{Q}_{ac}$ . L'équation (4.25) est donc considérée comme valide pour la description du régime transitoire comme du régime permanent.

### Équation de la chaleur

Finalement, l'équation (4.16) décrivant la distribution de température dans le noyau, soumise aux effets précédents s'écrit  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [-l_r; l_w]$

$$\partial_t T_0(t, x) = \underbrace{\kappa \partial_{xx}^2 T_0(t, x)}_{\text{conduction longitudinale}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} [T_0(t, x) - T_*(t, x)]}_{\text{diffusion radiale}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_r}{c_r} \int_{-l_r}^x \frac{\partial_x T_0(t, x)}{T_0(t, x)} dx}_{\text{pompage thermoacoustique}} - \underbrace{\overline{V_G} \partial_x T_0(t, x)}_{\text{advection (streaming)}}, \quad (4.26)$$

où  $\kappa = \lambda/(\rho_0 c_P)$  est la diffusivité thermique du milieu, et où la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  introduite dans le système sera prise en compte dans l'expression de la condition à la limite entre le régénérateur et le TBT.

#### 4.3.2 Réduction à un seul degré de liberté

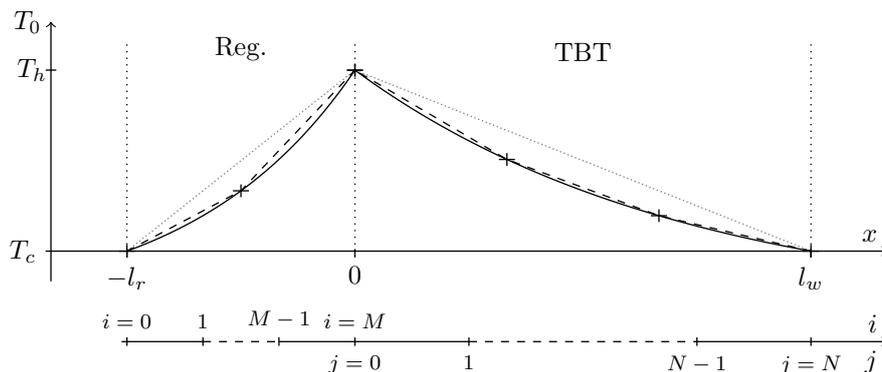
En première approximation, la distribution de température est supposée linéaire dans le régénérateur, les échanges de chaleur vers le TBT sont négligés (car  $\kappa_w \ll \kappa_r$  et  $\rho_w c_w \ll \rho_r c_r$ ) et on choisit d'ignorer la diffusion radiale ( $1/\tau = 0$ ). L'équation de la chaleur (4.26) est simplifiée afin d'exprimer directement les variations de la température chaude

$$\boxed{d_t T_h = \frac{\dot{Q}_h}{c_r} + \kappa_r \frac{T_h - T_c}{l_r^2} - \frac{\dot{W}_r}{c_r} \frac{T_h}{T_c} - \overline{V_{Gr}} \frac{T_h - T_c}{l_r}}. \quad (4.27)$$

Cette équation est l'approximation à l'ordre le plus bas possible que l'on puisse donner de la description du système considéré, et correspond à celle donnée par de Waele.<sup>45</sup> En réduisant le nombre de nœud de température à un seul (la température chaude  $T_h$ ), cette description simplifiée à l'extrême permet des temps de calcul relativement court. Néanmoins, une telle simplification ne permet pas de caractériser finement l'évolution spatio-temporelle de la distribution de température (et par suite son impact sur l'amplification thermoacoustique). Une discrétisation plus fine du problème doit alors être adoptée, comme le montre la suite.

#### 4.3.3 Discrétisation de la distribution de température

Pour rendre compte des effets d'une distribution de température (autre que la distribution linéaire supposée au paragraphe précédent, et dont la forme serait contrôlée tant par les



**FIGURE 4.8** – Discretisation de la distribution de température dans le noyau thermoacoustique (simplifié aux seuls régénérateur et TBT). ( $\cdots$ ) distribution linéaire assumée pour la description simplifiée (4.27); (—) distribution décrite par l'équation non linéaire de la chaleur (4.26); (-+-) distribution discrétisée avec ( $M = 2, N = 3$ ).

processus de diffusion thermique axiale et radiale que par les processus de transports de chaleurs induits par les auto-oscillations), la description des variations de la seule température chaude ne suffit pas. Il faut alors considérer la distribution de température dans le noyau thermoacoustique. Cette dernière est discrétisée spatialement sur  $x$  comme le montre la figure 4.8 :

- le régénérateur est divisé en  $M$  segments réguliers de longueur  $\Delta x_r = l_r/M$ , c'est-à-dire  $M+1$  degrés de liberté pour décrire la distribution de température  $T_0(-l_r \leq x \leq 0)$ , donnant les points  $\{x(i) \mid \forall i \in \llbracket 0; M \rrbracket \mid x(0) = -l_r \mid x(M) = 0\}$  ;
- le TBT est divisé en  $N$  segments réguliers de longueur  $\Delta x_w = l_w/N$ , c'est-à-dire  $N+1$  degrés de liberté pour décrire la distribution de température  $T_0(0 \leq x \leq l_w)$ , donnant les points  $\{x(j) \mid \forall j \in \llbracket 0; N \rrbracket \mid x(0) = 0 \mid x(N) = l_r\}$ .

Pour décrire cette distribution de température discrète, (notée par la suite  $\mathbf{T}_0$  pour la différentier de la distribution continue notée  $T_0$ ), l'équation de la chaleur (4.26) est discrétisée spatialement et temporellement par un schéma de Crank-Nicolson afin d'être résolue numériquement. Cette méthode aux différences finies implicite consiste en un schéma centré au milieu du pas temporel à  $t(n + \frac{1}{2}) = t + \frac{\Delta t}{2}$ , ce qui lui confère l'avantage d'être inconditionnellement stable (sans restriction du pas temporel) et de précision d'ordre 2 en temps et en espace, c'est-à-dire  $O[(\Delta x)^2, (\Delta t)^2]$ .<sup>109</sup>

A chaque instant  $t(n) \mid \forall n \in \mathbb{N}$  et pour chacun des points  $x(i) \mid \forall i \in \llbracket 0; M+N+1 \rrbracket$ , la température au temps  $t(n + \frac{1}{2})$  est définie par la moyenne algébrique

$$\mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_i^n \right), \quad (4.28a)$$

et sa dérivée temporelle au même instant est approchée par la différence centrée

$$\partial_t \mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{T}_i^{n+1} - \mathbf{T}_i^n}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]. \quad (4.28b)$$

Les dérivées spatiales première et seconde de la température à ce même instant sont approchées aux points  $x(i)|\forall i \in ]0; M + N[$  en fonction des états de ce même point et des points environnants  $x(i \pm 1) = x(i) \pm \Delta x$ , par moyenne des schémas implicites et explicites

$$\partial_x \mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{T}_{i+1}^n - \mathbf{T}_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\mathbf{T}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{T}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (4.28c)$$

$$\partial_{xx}^2 \mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{T}_{i-1}^n - 2\mathbf{T}_i^n + \mathbf{T}_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathbf{T}_{i-1}^{n+1} - 2\mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (4.28d)$$

et le terme intégral du pompage thermoacoustique est approximé par la méthode du point médian (qui n'est que d'ordre 1)

$$\int_{\Delta x} \frac{\partial_x \mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}}}{\mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}}} \Delta x = \frac{\Delta x}{\mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}}} \partial_x \mathbf{T}_i^{n+\frac{1}{2}} + O[(\Delta x)]. \quad (4.28e)$$

Par souci de lisibilité, on pose les notations équivalentes suivantes :

- $V_{ac}$  un terme de pompage thermoacoustique tel que  $V_{ac}|_i^n = \frac{\Delta x}{c_r} \frac{\dot{W}_r}{\mathbf{T}_0|_i^n}$ ,
- $k$  le nombre de Fourier tel que  $k = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}$ ,
- $\Gamma$  le nombre de Courant tel que  $\Gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{ac} + V_G)$ .

### Équation de la chaleur discrétisée

Après développement avec les schémas (4.28), puis par séparation des températures aux deux instants  $t(n+1)$  et  $t(n)$ , l'équation (4.26) est réécrite sous la forme générique valable aussi bien dans le régénérateur que dans le TBT,,  $\forall i \in ]0; M + N[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} & \overbrace{(-k - \Gamma^{n+1})}^{A_{i,i-1}} \mathbf{T}_{i-1}^{n+1} + \overbrace{(2 + 2k + \frac{\Delta t}{\tau})}^{A_{i,i}} \mathbf{T}_i^{n+1} + \overbrace{(-k + \Gamma^{n+1})}^{A_{i,i+1}} \mathbf{T}_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{\Delta t}{\tau}\right) \mathbf{T}_\star|_i^{n+1} \\ & = \underbrace{(k + \Gamma^n)}_{B_{i,i-1}} \mathbf{T}_{i-1}^n + \underbrace{(2 - 2k - \frac{\Delta t}{\tau})}_{B_{i,i}} \mathbf{T}_i^n + \underbrace{(k - \Gamma^n)}_{B_{i,i+1}} \mathbf{T}_{i+1}^n + \left(\frac{\Delta t}{\tau}\right) \mathbf{T}_\star|_i^n \\ & \qquad \qquad \qquad + O[(\Delta x)^2, (\Delta t)^2], \quad (4.29) \end{aligned}$$

avec les coefficients  $k$ ,  $\Gamma$  et  $\tau$  dépendants du milieu de propagation et du milieu environnant.

Si la paroi entourant le noyau est considérée comme un puits de chaleur à température ambiante  $\mathbf{T}_\star(x, t) = T_\infty$ , le terme de diffusion radiale de l'équation (4.29) se simplifie comme une constante. Le système est alors écrit directement sous la forme matricielle,

$$\boxed{\mathcal{A} \mathbf{T}_0|^{n+1} \simeq \mathcal{B} \mathbf{T}_0|^n + \mathcal{I}(\mathcal{Q} + \mathcal{H})}, \quad (4.30)$$

avec  $\mathcal{H}_i = 2\frac{1}{\tau}\Delta t T_\infty$  le terme d'échange avec la paroi et  $\mathcal{Q}$  un vecteur exprimant la discrétisation de la distribution de chauffage (ici appliquée ponctuellement au point  $x = 0$ ).

Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des matrices tridiagonales dont les termes intérieurs sont mis en évidence dans l'équation (4.29). Évidemment, les termes génériques  $k$ ,  $\tau$  et  $\Gamma$ , dépendant des propriétés thermophysiques et de la distribution de température, prennent des valeurs différentes en chaque nœud de la discrétisation. Les valeurs aux coins et au centre (c'est-à-dire aux positions autour de  $M$  caractérisant l'interface entre le régénérateur et le TBT) des matrices sont données par les conditions aux limites imposées sur le noyau.

### Conditions aux limites

On suppose que les conditions imposées par les échangeurs froids de part et d'autre du noyau fixent la température à une valeur constante  $T_c$  en  $x = -l_r$  et  $x = l_w$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbf{T}_0(t, -l_r) = T_c, \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{T}_0(t, l_w) = T_c. \quad (4.31b)$$

Ces expressions permettent de déduire les valeurs des coins des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{A}_{(0,0)} = 1 = \mathcal{B}_{(0,0)}, \quad \mathcal{A}_{(0,1)} = 0 = \mathcal{B}_{(0,1)}, \quad (4.31c)$$

$$\mathcal{A}_{(M+N,M+N)} = 1 = \mathcal{B}_{(M+N,M+N)}, \quad \mathcal{A}_{(M+N,M+N-1)} = 0 = \mathcal{B}_{(M+N,M+N-1)}, \quad (4.31d)$$

Par ailleurs, le contact est considéré parfait entre le fluide du TBT et le régénérateur, la température est donc continue à cette interface

$$\mathbf{T}_0(t, 0^-) = \mathbf{T}_0(t, 0^+) = T_h. \quad (4.32a)$$

La condition à la limite entre le régénérateur et le TBT se traduit par une continuité des flux de chaleur, à laquelle s'ajoute la puissance de chauffage introduite sur la surface de l'interface, soit  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lambda_r \partial_x \mathbf{T}_0(t, 0^-) + \frac{\dot{W}_r}{S} \int \frac{\partial_x \mathbf{T}_0(t, 0^-)}{\mathbf{T}_0(t, 0^-)} dx = \lambda_w \partial_x \mathbf{T}_0(t, 0^+) + \frac{\dot{Q}_h(t)}{S}. \quad (4.32b)$$

Cette expression est simplifiée en considérant que la conductivité de l'air dans le TBT  $\lambda_w \sim 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  est négligeable devant celle du régénérateur homogénéisé  $\lambda_r \sim 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . L'intégralité de la puissance de chauffage fournie  $\dot{Q}_h$  transite alors vers le régénérateur. Discrétisée par une différence finie centrée, cette condition donne la relation

$$\frac{\lambda_r}{2\Delta x} (\mathbf{T}_0|_{M+1}^n - \mathbf{T}_0|_{M-1}^n) + \frac{\dot{W}_r}{S} \frac{\mathbf{T}_0|_M^n - \mathbf{T}_0|_{M-1}^n}{\mathbf{T}_0|_M^n} = \frac{\dot{Q}_h}{S} \quad (4.32c)$$

qui fait apparaître un point fictif hors du régénérateur en  $x(i = M + 1)$ . La température en ce point est exprimée en fonction du reste, puis substituée dans l'équation générale (4.29)

exprimée en  $x(i = M)$

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{(-2k + (-k + \Gamma) \frac{2\Delta x \dot{W}_r}{\lambda_r S T|_M^{n+1}})}^{\mathcal{A}_{M,M-1}} \mathbf{T}|_{M-1}^{n+1} + \overbrace{(2 + 2k + \frac{\Delta t}{\tau})}^{\mathcal{A}_{M,M}} \mathbf{T}|_M^{n+1} \\
 &= \underbrace{(2k + (k - \Gamma) \frac{2\Delta x \dot{W}_r}{\lambda_r S T|_M^n})}_{\mathcal{B}_{M,M-1}} \mathbf{T}|_{M-1}^n + \underbrace{(2 - 2k - \frac{\Delta t}{\tau})}_{\mathcal{B}_{M,M}} \mathbf{T}|_M^n \\
 &+ \underbrace{2 \frac{\Delta t}{\tau} \mathbf{T}_\infty}_{\mathcal{H}_M} + \underbrace{\frac{4\Delta x}{\lambda_r S} (-k + \Gamma) (\dot{Q}_h + \dot{W}_r)}_{\mathcal{Q}_M} + O[(\Delta x)^2, (\Delta t)^2], \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer la condition d'interface et de chauffage dans l'équation (4.30). La puissance de chauffage étant injectée seulement à l'interface entre le régénérateur et le TBT, les autres membres du vecteurs  $\mathcal{Q}$  sont nuls.

Finalement, les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & & & & \\
 X & X & X & & & \\
 & X & X & X & & \\
 & & X & X & X & \\
 & & & Y & Y & 0 \\
 & & & & X & X & X \\
 & & & & & X & X & X \\
 & & & & & & 0 & 1
 \end{array}
 \end{bmatrix}$$

avec les coefficients notés  $X$  donnés par l'équation (4.29), les autres (lignes 0,  $M$  et  $M + N$ ) étant donnés par les expressions des conditions aux limites (respectivement équation (4.31a), équation (4.33) pour les coefficients notés  $Y$  et équation (4.31b)). La sous-matrice encadrée par les tirets décrit la distribution de température dans le régénérateur, celle dans le TBT est donnée par la sous-matrice encadrée en gris.

### Formulation de la dérivée temporelle

La dérivée temporelle de la température à l'instant  $t(n)$  est donnée par une différence en avant d'ordre 1 en temps

$$\partial_t \mathbf{T}|_i^n = \frac{\mathbf{T}|_i^{n+1} - \mathbf{T}|_i^n}{\Delta t} + O[(\Delta t)], \quad (4.34)$$

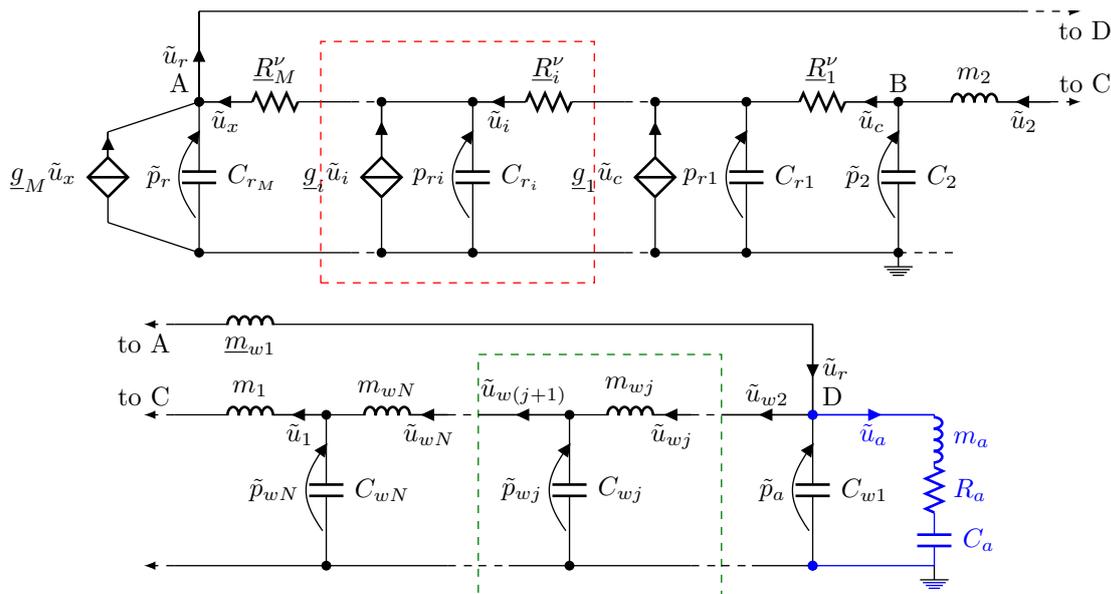
expression implicite puisque faisant appel à la température à l'instant prochain. Or cette valeur peut être obtenue par l'expression (4.30) donnant par substitution dans l'expression précédente,  $\forall t(n) | n \leq 0$

$$\partial_t \mathbf{T}_0|_i^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \left[ (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} - \mathcal{I}) \mathbf{T}_0|_i^n + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{I} (\mathcal{Q} + \mathcal{H}) \right]. \quad (4.35)$$

## 4.3.4 Modèle électroacoustique du noyau discrétisé

## Circuit équivalent

L'augmentation du nombre de nœuds pour la description de la distribution de température suppose de revenir sur la description des éléments du noyau donnée à la section 4.2.2. La discrétisation de la distribution de température en  $M$  segments se traduit par une segmentation du régénérateur en autant de répétitions d'un même bloc, comme le montre la figure 4.9.a.



**FIGURE 4.9** – Modifications à apporter au schéma électrique de la figure 4.5 pour prendre en compte : (en haut), la discrétisation en  $M$  segments de la distribution de température dans le régénérateur. La répétition du motif encadré se traduit par l'ajout de  $M - 1$  degrés de liberté au système 4.7. Les débits  $\tilde{u}_i$  et  $\tilde{u}_x$  ne sont indiqués que pour simplifier la lecture du schéma, mais sont dans la mise en équation exprimés en fonction des pressions environnantes ; (en bas), la discrétisation en  $N$  segments de la distribution de température dans le TBT. La répétition du motif encadré se traduit par l'ajout de  $2N - 2$  degrés de liberté pour la description du système.

La température est alors supposée suivre une distribution linéaire sur chacun de ces segments, amenant à l'expression des trois éléments qui les composent, avec  $T_m = (\mathbf{T}|_{i+1} + \mathbf{T}|_i)/2$  :

$$g_i = \frac{\mathbf{T}|_{i+1}}{\mathbf{T}|_i} - 1, \quad C_{ri} = \frac{Sl_r}{MP_0}, \quad R_i^\nu = \frac{2b\nu_r(T_m)l_r}{MSr_h^2}, \quad (4.36)$$

De la même manière, la discrétisation de la distribution de température en  $N$  segments dans le TBT se traduit par une segmentation de ce dernier en autant de répétitions d'un même bloc, comme le montre la figure 4.9.b. La température est alors supposée suivre une distribution linéaire sur chacun de ces segments, amenant à l'expression des deux éléments qui les composent

$$C_{wj} = \frac{Sl_w}{N\gamma P_0}, \quad m_{wj} = \frac{\rho_0(T_m)l_w}{NS}. \quad (4.37)$$

**Système différentiel avec noyau discretisé**

Le système différentiel 4.7 est actualisé pour prendre en compte cette discrétisation du régénérateur et du TBT et étendu de  $M + 2N - 3$  degrés de libertés (modification en rouge pour le régénérateur et en vert pour le TBT) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_a = a_a, \end{array} \right. \quad (4.38a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_a = \frac{1}{C_{w1}} (u_r - u_{w2} - u_a), \end{array} \right. \quad (4.38b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_r = \frac{1}{m_{w1}} (p_r - p_a), \end{array} \right. \quad (4.38c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_c = \frac{1}{R_1^\nu} \left( \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c) - \frac{1}{C_{r1}} \left[ (g_1 + 1) u_c - \frac{1}{R_2^\nu} (p_{r1} - p_{r2}) \right] \right), \end{array} \right. \quad (4.38d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_1 = \frac{1}{m_1} (p_{wN} - p_1), \end{array} \right. \quad (4.38e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_r = \frac{1}{C_{rM}} \left[ \frac{1}{R_M^\nu} (g_M + 1) (p_{r(M-1)} - p_r) - u_r \right], \end{array} \right. \quad (4.38f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t a_a = \frac{1}{m_a} \left[ \frac{1}{C_{w1}} (u_r - u_{w2}) - \left( \frac{1}{C_{w1}} + \frac{1}{C_a} \right) u_a - R_a a_a \right], \end{array} \right. \quad (4.38g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_2 = \frac{1}{m_2} (p_1 - p_2), \end{array} \right. \quad (4.38h)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_1 = \frac{1}{C_1} (u_1 - u_2), \end{array} \right. \quad (4.38i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_2 = \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c), \end{array} \right. \quad (4.38j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_{r1} = \frac{1}{C_{r1}} \left[ (g_1 + 1) u_c - \frac{1}{R_2^\nu} (p_{r1} - p_{r2}) \right], \end{array} \right. \quad (4.38k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_{ri} = \frac{1}{C_{ri}} \left[ \frac{1}{R_i^\nu} (g_i + 1) (p_{r(i-1)} - p_{ri}) - \frac{1}{R_{i+1}^\nu} (p_{ri} - p_{r(i+1)}) \right], \end{array} \right. \quad (4.38l)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_{w2} = \frac{1}{m_{w2}} (p_a - p_{w2}), \end{array} \right. \quad (4.38m)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_{wj} = \frac{1}{m_{wj}} (p_{w(j-1)} - p_{wj}), \end{array} \right. \quad (4.38n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_{wj} = \frac{1}{C_{wj}} (u_{wj} - u_{w(j+1)}), \end{array} \right. \quad (4.38o)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t p_{wN} = \frac{1}{C_{wN}} (u_{wN} - u_1). \end{array} \right. \quad (4.38p)$$

## 4.4 Transitoire de déclenchement

La résolution du problème thermoacoustique, résultant du couplage des deux systèmes donnés par les équations (4.15) et (4.35) (ou (4.27)) pour un ensemble de conditions initiales permet de décrire le comportement dynamique du système thermoacoustique en réponse à une variation des paramètres de contrôle (le seul disponible pour le moment est la puissance de chauffage introduite dans le système, à laquelle s'ajouteront le déphasage et le gain d'amplification en tension de la boucle de rétro-contrôle quand celle-ci sera jointe au moteur). Ce système est rappelé ici

$$\begin{cases} d_t \mathbf{X} = \epsilon(\mathbf{T}_0) \mathbf{X}, & (4.39a) \\ \partial_t |\mathbf{T}_0|^n \simeq \frac{1}{\Delta t} [(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} - \mathcal{I}) \mathbf{T}_0|^n + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{I}(\mathcal{Q} + \mathcal{H})] . & (4.39b) \end{cases}$$

Les conditions initiales sont données par la perturbation initiale  $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_i$ , et une distribution de température initiale  $\mathbf{T}_0(t=0) = \mathbf{T}_i$ . Cette dernière est définie soit comme une température froide homogène à  $T_c$ , soit une distribution linéaire variant de  $T_c$  aux extrémités froides à une température chaude imposée par la puissance de chauffage introduite dans le système (en supposant que cette puissance transfère intégralement vers le régénérateur), telle que

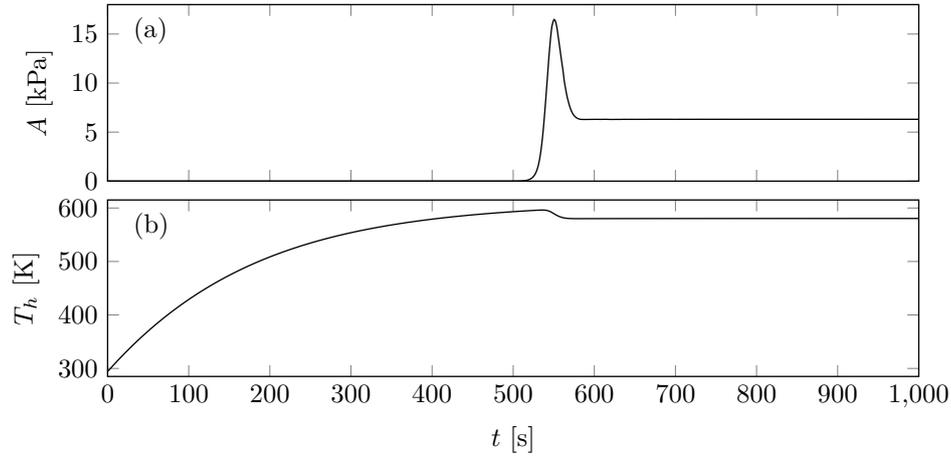
$$T_h = T_c + \frac{\dot{Q}_h l_r}{\lambda_r S}. \quad (4.40)$$

La perturbation initiale consiste en une perturbation d'amplitudes et phases relatives de chaque variable acoustique telles que celles-ci décrivent le mode propre selon lequel le moteur fonctionne (valeurs relatives données par le vecteur propre correspondant), et telle que l'amplitude de la perturbation de pression introduite au point D vaut  $P_{alt}(t=0) = A_0$ .

Un exemple de résultats issus de la résolution du système est présenté à la figure 4.10, pour une puissance de chauffage de 1 W au dessus du seuil, soit environ 50 W, et pour une excitation de 10 Pa au niveau du point B. Le streaming et la diffusion radiale sont ignorés, de sorte que  $V_G = 0$  et  $1/\tau = 0$ . Le système acoustique est dans un premier temps couplé à l'équation simplifiée (4.27). La même configuration est simulée avec les équation (4.35). Un seul segment est utilisé pour représenter le régénérateur, et les échanges avec le TBT et la paroi sont ignorés. La figure présente l'amplitude des oscillations acoustiques au point B, ainsi que la température à l'extrémité chaude du régénérateur.

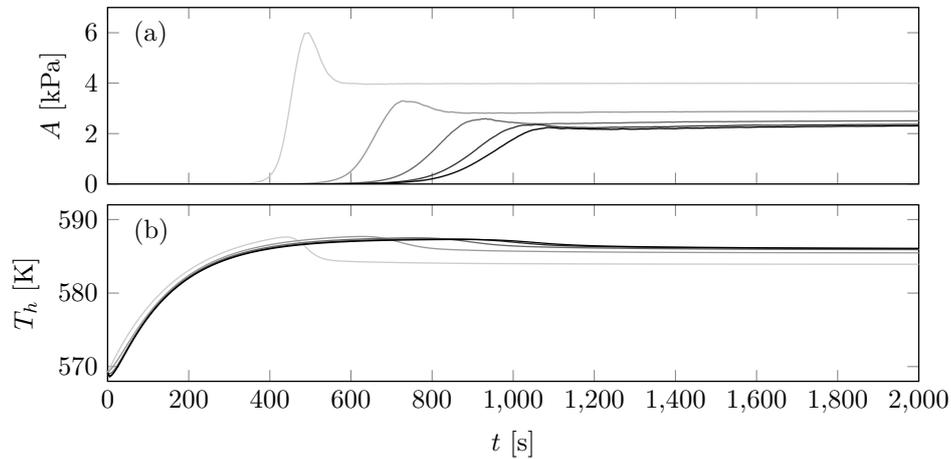
La réponse du système est semblable dans les deux cas. Le régime stabilisé est atteint après un overshoot de pression d'amplitude équivalente, et la température stabilisée est identique pour les deux modélisations. La légère différence d'amplitude acoustique est imputable à la description de la source de chaleur dans les deux cas. Cependant, aucune des deux distributions n'est plus appropriée, les deux correspondant à des cas "idéalisés" dans lesquelles seule la diffusion thermique axiale et un pompage thermoacoustique très sommairement décrit sont pris en compte.

L'augmentation progressive du nombre de segments pour décrire la distribution de température dans le régénérateur (les échanges avec le TBT étant toujours ignorés) est illustrée par les résultats présentés à la figure 4.11. Dans les mêmes conditions que précédemment, le nombre de segments dans le régénérateur passe de 1 à 2, 4, 8 puis 16 de la trace la plus claire (identique à celle de la figure 4.10) à la plus sombre. Le régime transitoire est plus long



**FIGURE 4.10** – *Transitoire de déclenchement de l'auto-oscillation avec pour conditions initiales une distribution de température imposée par une puissance de chauffage supérieure à la puissance de déclenchement  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_{hd} + 1$  W, et pour une perturbation initiale  $\mathbf{X}_i = 10\hat{\mathbf{x}}_1$ . (—) avec l'équation (4.27); (---) avec l'équation (4.35),  $M = 1$ ,  $N = 0$ . (a) Amplitude de pression au point B. (b) Température chaude  $T_h = T_0(x = 0)$ .*

dans ces configurations, la distribution de température passant d'abord d'une distribution totalement linéaire à une distribution régie par l'équation de la chaleur. Quand la forme du champ de température est affinée avec l'augmentation du nombre de segments, les conditions de saturation en pression et en température semblent converger vers une valeur commune (la solution pour la distribution continue de température).



**FIGURE 4.11** – *Transitoire de déclenchement de l'auto-oscillation selon la discrétisation du régénérateur avec pour conditions initiales une distribution de température linéaire imposée telle que  $T_h(t=0) = 570$  K, avec une puissance de chauffage supérieure à la puissance de déclenchement  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_{hd} + 5$  W, et une perturbation initiale d'amplitude  $A_0 = 10$ . Le nombre de segments du régénérateur augmente de  $M = 1, 2, 4, 8$  et 16 du plus clair au plus foncé. (a) Amplitude de pression au point B. (b) Température chaude  $T_h = T_0(x = 0)$ .*

## 4.5 Conclusion

Une description simplifiée de moteur thermoacoustique de Stirling est donnée, dans l'optique de décrire les comportements observés expérimentalement sous l'influence d'une boucle de rétro-contrôle électroacoustique. Grâce à sa fréquence de fonctionnement très basse et au cycle thermodynamique quasi-isotherme prenant place dans le régénérateur, un schéma équivalent à constantes localisées a été construit. Cette description du réseau acoustique est couplée à une discrétisation par une différences finies des transferts de chaleur complexes prenant place dans le noyau thermoacoustique. La prise en compte de phénomènes acoustiques non linéaires se limite à la description de l'influence du pompage thermoacoustique et du streaming de Gedeon par leur impact sur la distribution de température dans le noyau. Les autres phénomènes non linéaire (effets aérodynamiques de bord, streaming de Rayleigh, etc.) ne sont pas pris en compte, soit car leur effet n'est pas estimé comme prépondérants dans les comportements observés (les pertes singulières par exemple dissipent l'énergie acoustique sans forcément perturber la distribution de température), soit que les mécanismes ne sont pas suffisamment compris pour en donner une description simplifiée pertinente dans le cadre de cette modélisation. De cette manière, le comportement d'une machine existante est reproduit qualitativement de manière satisfaisante, tant en terme de stabilité que d'un point de vue dynamique. D'une part, les différents transports de chaleurs considérés peuvent être indépendamment écartés pour en mesurer l'effet sur le comportement du moteur. D'autre part, le modèle peut aisément être adapté et complexifié pour prendre en compte une boucle de rétroaction.

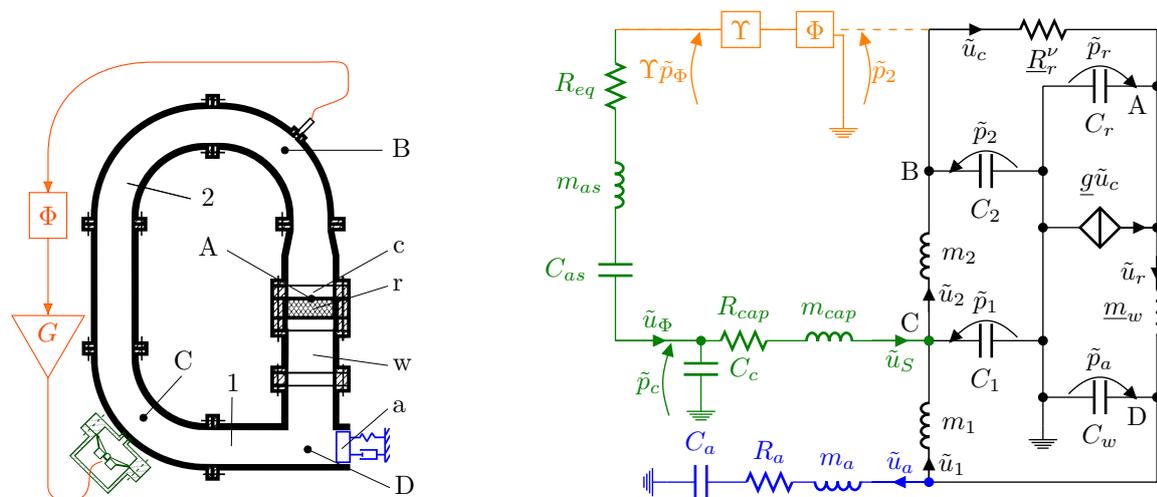
## Chapitre 5

# Contrôle des performances par une boucle de rétro-contrôle

Le modèle présenté au chapitre 4 est étendu pour prendre en compte une source de forçage acoustique pilotée par un signal amplifié et déphasé provenant du moteur lui-même. L'influence de cette boucle de rétro-contrôle électroacoustique est étudiée en fonction des paramètres de contrôle du système (puissance de chauffage, déphasage et gain d'amplification en tension), pour différents niveaux de complexité des effets pris en compte (discrétisation de la distribution de température, prise en compte du streaming de Gedeon et/ou de la diffusion radiale dans la description des transferts de chaleur dans le TAC). L'objectif de cette modélisation est de déterminer l'implication des différents phénomènes dans les comportements observés expérimentalement lors de l'application du rétro-contrôle.

### 5.1 Vers le système complet

La même démarche est appliquée pour contrôler les performances de conversion du moteurs que dans la Partie expérimentale précédente. Différents effets non linéaires sont pris en compte dans la modélisation, qui impactent la forme de la distribution de température. On cherche alors à modifier la distribution acoustique pour optimiser les performances de conversion thermoacoustique avec cette distribution de température contrôlée par différents effets. Afin de contrôler la distribution spatiale du champ acoustique dans le résonateur annulaire, une source acoustique est couplée au transducteur. Telle qu'elle est présentée au chapitre 3, cette source est dans un premier temps constituée d'un haut-parleur dans une cavité, couplée au moteur par un capillaire. Le haut-parleur est alimenté par un signal électrique fourni par un capteur de pression sur la boucle, plus ou moins déphasé avant d'être amplifié. Un schéma de principe de ce montage est donné à la figure 5.1 avec, dans le cadre de cette modélisation, la branche de l'alternateur toujours assimilée à un simple oscillateur mécanique amorti. Un schéma électrique équivalent complet de cette configuration est donné à l'Annexe A. Ce même schéma équivalent est donné à la figure 5.1 dans une version simplifiée et rapportée dans le domaine acoustique. A partir de ce schéma, un système d'EDO est établi décrivant le comportement de la machine.



**FIGURE 5.1** – Schéma de principe et schéma électrique équivalent dans le domaine acoustique du moteur thermoacoustique à onde localement progressive (en noir), couplé à un résonateur mécanique amorti (en bleu), avec une source de forçage constituée d’une source électroacoustique (en vert) alimentée par une boucle de rétroaction amplifiant et déphasant le signal d’un microphone (en orange).  $\Upsilon$  est un amplificateur équivalent rendant compte de la transduction microphonique, de la conversion électroacoustique et du gain d’amplification en tension appliqué au signal, tel que son gain  $\Upsilon = \frac{Bl}{S_d} \frac{|s|}{R_e} G$ . L’éventuelle phase de la sensibilité  $\angle(s)$  du microphone est prise en compte dans le déphaseur  $\Phi$ . Les 3 points A, B et S représentent des nœuds à des positions équivalentes sur les deux schémas.

### 5.1.1 Système acoustique étendu

Le comportement temporel du circuit de la figure 5.1 est décrit par un système d’équations différentielles ordinaires du premier ordre couplées. Les équations du système sans forçage (4.7) sont reprises inchangées, à l’exception de la neuvième, exprimant la variation de pression au nœud S, qui tient dorénavant compte du débit  $\tilde{u}_S$  de la source de forçage. Les caractéristiques du déphaseur, de l’amplificateur et de la transduction électroacoustique dans la boucle de rétro-contrôle sont définies dans l’Annexe A. On notera que le déphaseur est constitué de trois filtres passe-tout en série, permettant un déphasage de 0 à  $2\pi$  et donnant les relations entre le signal d’entrée  $\tilde{p}_2$  et de sortie  $\tilde{p}_\Phi$  du déphaseur avec deux pressions intermédiaires  $\tilde{p}_i$  et  $\tilde{p}_j$  telles que

$$\tilde{p}_i (1 + j\omega R_\Phi C) = \tilde{p}_2 (1 - j\omega R_\Phi C), \quad (5.1a)$$

$$\tilde{p}_j (1 + j\omega R_\Phi C) = \tilde{p}_i (1 - j\omega R_\Phi C), \quad (5.1b)$$

$$\tilde{p}_\Phi (1 + j\omega R_\Phi C) = \tilde{p}_j (1 - j\omega R_\Phi C). \quad (5.1c)$$

Le haut-parleur électrodynamique est compris entre les cavités arrière (indiquée “rc”) et avant (“fc”). La source est couplée au moteur par un capillaire (indiqué “cap”) de sorte que, dans le domaine fréquentiel, avec  $a_\Phi$  l’accélération permettant de conserver un système différentiel de premier ordre, le comportement de la source auxiliaire est décrit par :

$$\tilde{p}_c = \Upsilon \tilde{p}_\Phi - \tilde{u}_\Phi (R_{eq} + j\omega m_{as} + 1/j\omega C_{as}), \quad (5.2a)$$

$$\tilde{u}_S = \tilde{u}_\Phi - j\omega C_c \tilde{p}_c, \quad (5.2b)$$

$$\tilde{a}_\Phi = j\omega\tilde{u}_\Phi, \quad (5.2c)$$

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_c - \tilde{u}_S (R_{cap} + j\omega m_{cap}). \quad (5.2d)$$

Les expressions des variations temporelles des sept variables acoustiques exprimées à partir des équations (5.1) et (5.2) sont jointes au système du chapitre précédent (équations 4.7) pour obtenir la description du système forcée complet :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t u_a = a_a, \quad (5.3a) \\ d_t p_a = \frac{1}{C_w} (u_r - u_1 - u_a), \quad (5.3b) \\ d_t u_r = \frac{1}{m_w} (p_r - p_a), \quad (5.3c) \\ d_t u_c = \frac{1}{R_r^\nu} \left( \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c) - \frac{g+1}{C_r} u_c + \frac{1}{C_r} u_r \right), \quad (5.3d) \\ d_t u_1 = \frac{1}{m_1} (p_a - p_1), \quad (5.3e) \\ d_t p_r = \frac{1}{C_r} ((g+1)u_c - u_r), \quad (5.3f) \\ d_t a_a = \frac{1}{m_a} \left[ \frac{1}{C_w} (u_r - u_1) - \left( \frac{1}{C_w} + \frac{1}{C_a} \right) u_a - R_a a_a \right], \quad (5.3g) \\ d_t u_2 = \frac{1}{m_2} (p_1 - p_2), \quad (5.3h) \\ d_t p_1 = \frac{1}{C_1} (u_1 - u_2 + u_S), \quad (5.3i) \\ d_t p_2 = \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c), \quad (5.3j) \\ d_t p_\Phi = \frac{1}{R_\Phi C} [2(p_j - p_i) + p_2 - p_\Phi] + \frac{1}{C_2} (u_c - u_2), \quad (5.3k) \\ d_t p_i = \frac{1}{R_\Phi C} (p_2 - p_i) + \frac{1}{C_2} (u_c - u_2), \quad (5.3l) \\ d_t p_j = \frac{1}{R_\Phi C} (2p_i - p_j - p_2) + \frac{1}{C_2} (u_2 - u_c), \quad (5.3m) \\ d_t u_\Phi = a_\Phi, \quad (5.3n) \\ d_t p_c = \frac{1}{C_c} (u_\Phi - u_S), \quad (5.3o) \\ d_t a_\Phi = \frac{1}{m_{as}} \left[ \frac{\Upsilon(u_c - u_2)}{C_2} + \frac{u_S}{C_c} - \frac{u_\Phi}{C^V} + \frac{\Upsilon(2(p_j - p_i) + p_2 - p_\Phi)}{R_\Phi C} - R_{eq} a_\Phi \right], \quad (5.3p) \\ d_t u_S = \frac{1}{m_{cap}} (p_c - p_1 - u_S R_{cap}), \quad (5.3q) \end{array} \right.$$

avec les notations équivalentes  $C_I^{-1} = (C_w^{-1} + C_a^{-1})$ ,  $C_c = C_{fc} + C_{rc}$ ,  $\frac{1}{C^V} = \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_{as}}$  et  $R_{eq} = R_{ae} + R_{as}$ .

Ce système d'EDO du premier ordre est écrit, comme au chapitre précédent, sous forme matricielle

$$d_t \mathbf{x} = \mathcal{M}(T_0, G, \Phi) \mathbf{x}, \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{x} = \{u_a, p_a, u_r, u_c, u_1, p_r, a_a, u_2, p_1, p_2, p_\Phi, p_i, p_j, u_\Phi, p_c, a_\Phi, u_S\}^T$  est le vecteur d'état du système acoustique avec boucle de rétroaction, et  $\mathcal{M}$  la matrice du système correspondant. Comme précédemment (voir section 4.2.4), l'expression du gain d'amplification  $\epsilon = \Re[\lambda_l]$  (avec  $\lambda_l$  une valeur propre complexe dont la partie réelle devient positive) permet d'exprimer cette équation en terme des seules variations des amplitudes  $\mathbf{X}$  des variables acoustiques

$$d_t \mathbf{X} = \epsilon(T_0, G, \Phi) \mathbf{X}. \quad (5.5)$$

Dans la section suivante, le comportement du moteur forcé est étudié. Le seuil de déclenchement est caractérisé et ses performances sont évaluées en régime permanent. Comme précédemment, cette étude est réalisée dans un premier temps en considérant une distribution de température linéaire, puis en prenant en compte la diffusion latérale vers les parois du noyau thermoacoustique.

## 5.2 Distribution linéaire de température

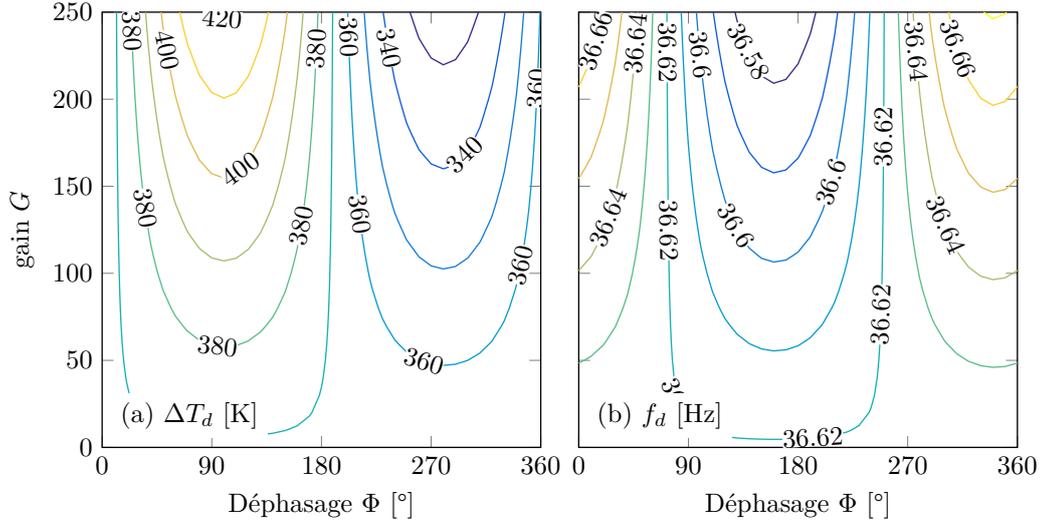
La description des transferts thermiques par l'évolution de la seule température chaude à l'interface entre le régénérateur et le TBT, bien que très simplifiée, peut suffire à représenter le comportement basique du moteur. Les conditions de déclenchement et de saturation peuvent être étudiées pour une distribution de température considérée linéaire, régie uniquement par la diffusion longitudinale et une évaluation de la puissance thermique transportée par effet thermoacoustique.

### 5.2.1 Conditions de déclenchement

La présence de la boucle de rétroaction modifie les conditions de déclenchement de l'oscillation thermoacoustique en introduisant des pertes supplémentaires dans le système. Ces conditions sont donc recherchées en fonction des paramètres de contrôle (déphasage imposé  $\Phi$  et gain d'amplification en tension  $G$  de l'alimentation de la source auxiliaire). Comme précédemment la limite de déclenchement de l'oscillation est recherchée comme étant la température  $T_{hd}$  à l'extrémité chaude du régénérateur pour laquelle le gain d'amplification est nul, la distribution de température imposée étant supposée linéaire, soit

$$\epsilon(T_h=T_{hd}, G, \Phi) = 0. \quad (5.6)$$

La méthode numérique de recherche de  $T_{hd}$  (méthode de Newton-Raphson) donne dans le même temps accès à la fréquence de l'auto-oscillation au déclenchement. Ces conditions sont représentées pour le système décrit à la figure 5.2. On observe que le déphasage de la boucle de rétro-contrôle influence le gradient de température nécessaire à l'établissement de l'auto-oscillation dans le moteur : pour  $\Phi \in [10^\circ; 190^\circ]$ , la température nécessaire est augmentée, alors qu'elle est réduite pour  $\Phi \in [190^\circ; 370^\circ]$ . Cet effet est plus marqué avec l'augmentation du gain  $G$  dans la boucle. La fréquence de l'oscillation est aussi légèrement perturbée par la boucle de rétro-contrôle, mais les variations sont suffisamment faibles pour être négligées. Toujours en supposant une distribution de température linéaire régie seulement par la diffusion longitudinale (et en prenant en compte les variations de la conductivité en fonction de la température par sa valeur moyenne sur la longueur du régénérateur), une



**FIGURE 5.2** – Conditions de déclenchement dans le plan des paramètres de contrôle de la boucle de rétroaction (déphasage  $\Phi$  et gain d'amplification en tension  $G$ ), supposant la distribution de température linéaire. (a) Gradient de température au déclenchement  $\Delta T_d = T_{hd} - T_c$ ; (b) Fréquence  $f_d$  de l'oscillation.

évaluation de la puissance de déclenchement peut être établie

$$\dot{Q}_{hd} = \frac{\lambda_r S}{l_r} \Delta T_d. \quad (5.7)$$

Cette expression permet de dresser une carte équivalente à celle de la figure 5.2a en terme de puissance nécessaire pour établir le gradient de température requis pour le déclenchement de l'oscillation. Cette évaluation des seuils en température ou en puissance est cependant limitée par l'hypothèse de distribution de température (quasi-)linéaire. Cette hypothèse est acceptable si on considère que les transferts thermiques en régime stationnaire (sans perturbation acoustique) ne sont régis que par la diffusion longitudinale. Cependant, les données expérimentales montrent que la distribution effective, dans le régénérateur comme dans le TBT, s'éloigne beaucoup du cas linéaire, y compris sous le seuil. Il est donc nécessaire de prendre en compte une autre forme de transfert thermique, indépendant des phénomènes acoustiques pouvant prendre place dans le moteur. Il s'agit de la diffusion thermique radiale avec la coque entourant le noyau, comme on le verra à la section 5.3.

### 5.2.2 Régime oscillant transitoire

Au delà du seuil de déclenchement, l'évolution du système est décrite en couplant la description simplifiée du système acoustique (5.5) et la description des transferts de chaleurs donnée par l'équation (4.27) que l'on rappelle ici,

$$\begin{cases} d_t \mathbf{X} = \epsilon(T_h, G, \Phi) \mathbf{X}, & (5.8a) \\ d_t T_h = \frac{\dot{Q}_h}{c_r} - \frac{\kappa_r}{l_r^2} \frac{T_h - T_c}{c_r} - \frac{\dot{W}_r}{c_r} \frac{T_h}{T_c}. & (5.8b) \end{cases}$$

L'étude expérimentale présentée dans la partie I portant plus particulièrement sur les performances du transducteur en régime établi, c'est donc à cette caractéristique qu'on s'intéresse par la suite.

### 5.2.3 Régime oscillant permanent

L'influence sur le système des paramètres de contrôle est étudiée, en terme des répercussions sur le régime établi du moteur. On cherche donc une solution au système couplé (5.8) pour laquelle l'amplitude des oscillations acoustiques est saturée, et la distribution de température est stabilisée

$$\begin{cases} d_t \mathbf{X}(T_h, G, \Phi) = 0, & (5.9a) \\ d_t T_h(\dot{Q}_h, \mathbf{X}) = 0. & (5.9b) \end{cases}$$

La solution est recherchée numériquement, comme pour le seuil de déclenchement à la section précédente, par un algorithme de recherche de zéros à régions de confiance. Les deux degrés de liberté du problème (l'amplification  $\epsilon$  et la dérivée de la température chaude  $d_t T_h$ ) sont minimisés en fonction des deux paramètres à déterminer (l'amplitude  $A$  et la température  $T_h$ ).

L'influence de la boucle de rétro-contrôle est alors étudiée en recherchant le régime stabilisé du moteur en fonction des paramètres de contrôle, de la même manière que l'étude expérimentale présentée au chapitre 3. Pour ce faire, la puissance de chauffage introduite est fixée à une valeur relative à la puissance  $\dot{Q}_0$ , que l'on définit comme la puissance de chauffage nécessaire au déclenchement de l'oscillation quand le gain d'amplification de la boucle est nul\*  $\dot{Q}_0 = \dot{Q}_{hd}(G=0)$ . Une carte des conditions de saturation de l'oscillation acoustique peut alors être établie en fonction des paramètres de la boucle de rétro-contrôle (déphasage  $\Phi$  du signal et gain d'amplification en tension  $G$ ), et pour différents paramètres du système : par exemple la différence de température entre les extrémités du régénérateur  $\Delta T$ , l'amplitude  $A$  des variables acoustiques telle que  $\mathbf{X} = A|\hat{\mathbf{x}}_l|$  où  $\hat{\mathbf{x}}_l$  est le vecteur propre décrivant le mode de fonctionnement du moteur, la puissance acoustique introduite par la source auxiliaire  $\dot{W}_S = P_1 U_S \cos(\varphi_1 - \varphi_S)$  ou encore l'efficacité de conversion globale définie par

$$\eta = \frac{\dot{W}_a}{\dot{Q}_h + \dot{W}_S}, \quad (5.10)$$

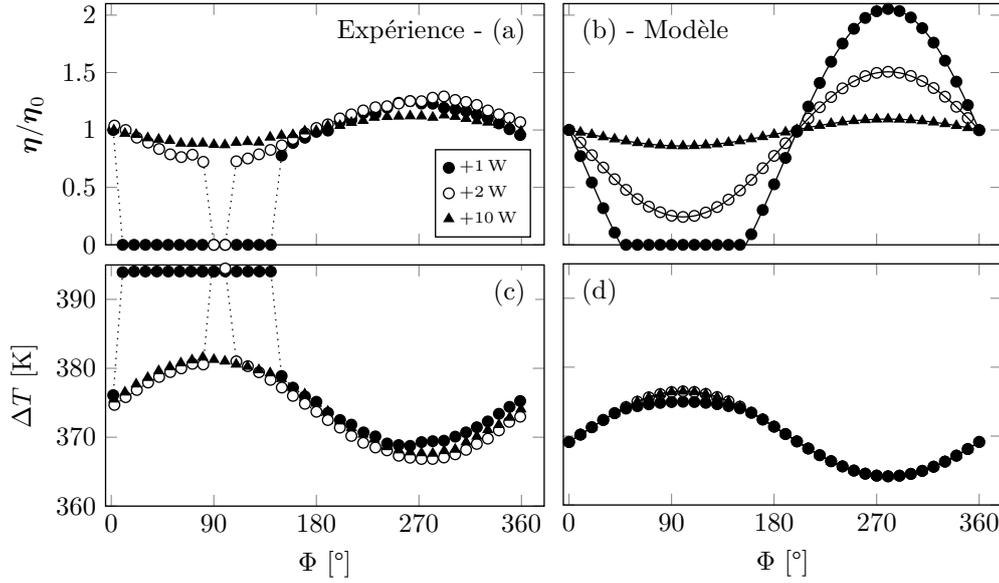
où  $\dot{W}_a = P_a U_a \cos(\psi_a)$  est la puissance dissipée dans la branche du circuit représentant l'oscillateur mécanique amorti couplé.

Par exemple, la résolution du système (5.9) est faite en fonction du déphasage du signal de la boucle de rétro-contrôle, pour un paramètre de gain d'amplification en tension fixé à  $G = 32$ , et pour différentes puissances de chauffage au dessus du seuil  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_0 + 1 \text{ W}, +2 \text{ W}$  et  $+10 \text{ W}$  ( $\dot{Q}_0$  est donné par l'équation (5.7) en fonction des résultats de la figure 5.2a). Ces conditions, semblables aux conditions expérimentales de la section 3.1.3 donnent les résultats présentés à la figure 5.3. Les résultats expérimentaux sont rappelés pour comparaison.

Cette description très sommaire des transferts thermiques dans le noyau thermoacoustique, ne tenant compte que de la diffusion longitudinale et du pompage thermoacoustique, suffit à

---

\*. La puissance nécessaire au déclenchement de l'oscillation dépend en effet des paramètres de la boucle de contrôle, comme on l'a vu à la section 5.2.1.



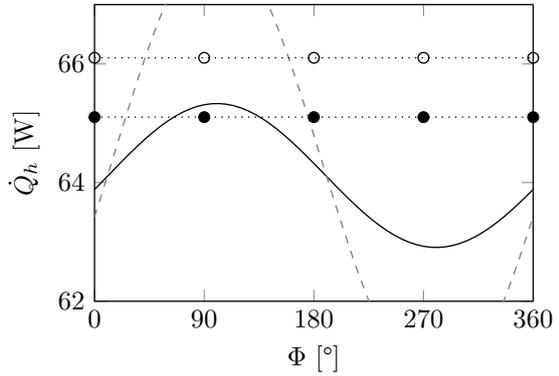
**FIGURE 5.3** – Effet du déphasage de la boucle de rétro-contrôle sur les performances du TAET pour un gain d’amplification en tension fixe  $G = 32$  et pour différentes puissances de chauffage au dessus du seuil de déclenchement  $\dot{Q}_h > \dot{Q}_0$ . (a) et (d) : Expérience. (a) et (d) : Modèle.

capturer en partie le comportement du moteur sous l’influence de la boucle de rétro-contrôle. Les variations de l’efficacité et les variations du gradient de température observées expérimentalement sont retrouvées, tout du moins qualitativement. Les plages d’augmentation et de diminution des performances du moteur sont identiques dans la modélisation et l’expérience. De plus, le phénomène d’extinction de l’auto-oscillation est aussi reproduit par cette modélisation simpliste. Certains phénomènes expérimentaux sont cependant absents des résultats obtenus par ce modèle. Les performances expérimentales font clairement montre d’un “saut” entre les régimes oscillants et stationnaire. Le modèle considère que les phénomènes de pertes qui causent la saturation en amplitude (ici le pompage thermoacoustique seul) sont strictement proportionnel au carré de l’amplitude acoustique. Il se mettent donc en place dès le déclenchement, et augmentent progressivement avec l’amplitude. Ceci se traduit dans la modélisation par une transition progressive entre les régimes stationnaire et oscillant à la place du saut.

#### 5.2.4 Extinction de l’oscillation

Les puissances introduites dans le système pour l’obtention des résultats de la figure 5.3, ainsi que la puissance nécessaire pour le déclenchement de l’auto-oscillation sont montrées à la figure 5.4. Leur comparaison permet d’expliquer le phénomène d’extinction de l’oscillation. En effet, les cas où la modélisation montre l’extinction de l’auto-oscillation correspondent aux situation pour lesquelles la puissance de chauffage introduite dans le système est inférieure à celle nécessaire au déclenchement de l’auto-oscillation. Ce comportement explique les observations des sections 3.1.2 et 3.1.3. En effet, les variations du seuil de déclenchement augmentent avec le gain d’amplification. Pour cette raison, pour une puissance de chauffage fixe, la largeur du domaine de gain pour lequel l’oscillation s’éteint augmente (voir figure 3.3).

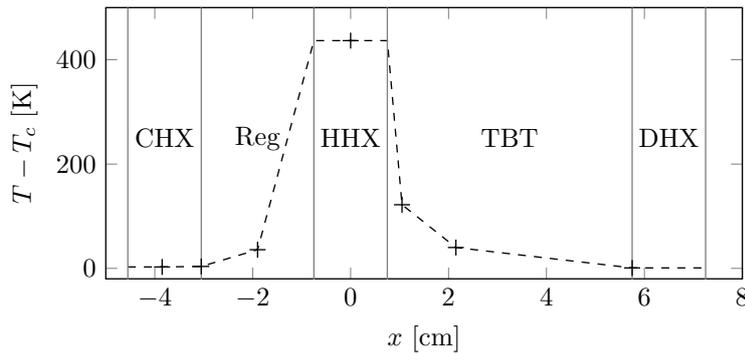
**FIGURE 5.4** – Puissance  $\dot{Q}_{hd}$  nécessaire au déclenchement de l'auto-oscillation pour  $G = 32$  (—) et  $G = 100$  (- -) ; puissances de chauffage  $\dot{Q}_h$  fournies au moteur, respectivement 1 W (•••) et 2 W (o-o) de plus que la puissance de déclenchement quand la source n'est pas alimentée.



De la même manière, pour un gain fixe, la largeur de la bande d'extinction augmente quand la puissance de chauffage se rapproche de  $\dot{Q}_{hd}(G=0)$  (voir figure 5.4). Théoriquement, à cette puissance de chauffage et pour un gain non nul le moteur doit pouvoir fonctionner sur seulement la moitié du domaine de déphasage.

### 5.3 Diffusion thermique vers la coque

La figure 5.5 présente la température expérimentale en huit points du noyau thermoacoustique pour une puissance de chauffage au niveau du seuil expérimental de déclenchement de l'auto-oscillation  $\dot{Q}_h \simeq \dot{Q}_{hd} = 59$  W. La distribution de température ne peut pas être considérée comme linéaire ni dans le régénérateur, ni dans le TBT. Le taux d'amplification thermoacoustique étant dépendant de la forme de la distribution de température,<sup>116</sup> il est donc nécessaire de prendre en compte la diffusion radiale dans la description de cette distribution. Ce phénomène de transfert thermique est indépendant de la présence d'une perturbation acoustique. Cet effet se traduit autant par une modification du seuil de déclenchement de l'auto-oscillation que du régime de fonctionnement du moteur au-delà du seuil.



**FIGURE 5.5** – Distribution expérimentale de température au seuil  $\dot{Q}_h = 59$  W. Les points de mesures sont marqués par des croix (+). Les lignes verticales représentent les interfaces entre les éléments du noyau. La ligne pointillée est un guide visuel, en estimant la température homogène dans les échangeurs de chaleur.

### 5.3.1 Évaluation des paramètres d'échanges

La prise en compte de la diffusion vers la coque requiert l'évaluation préalable des temps caractéristiques de diffusion radiale entre le noyau et la coque l'entourant. Le régénérateur et le TBT sont deux milieux différents soumis à des conditions différentes. En effet, le régénérateur est un fluide équivalent à un empilement de tissu métallique, inséré dans un tube en céramique afin de l'isoler thermiquement de la coque métallique. Le TBT est plus simplement de l'air entouré d'une coque métallique. L'évaluation analytique des temps caractéristiques est complexe. En effet, les propriétés thermiques transverse du régénérateur ne sont pas définies, de même que le contact entre le régénérateur et la coque. L'approche la plus simple pour l'évaluation de ces coefficients est de faire appel aux résultats expérimentaux. En dessous du seuil de déclenchement, si on considère que les transferts prenant place dans le noyau sont régis uniquement par la diffusion thermique longitudinale et transverse, les coefficients d'échanges peuvent être évalués grossièrement afin de reproduire la distribution de température expérimentale.

Ces temps caractéristiques de diffusion thermique ne sont a priori pas constants sur la longueur du régénérateur (resp. TBT); en effet, ils sont issus d'une simplification d'une équation de diffusion thermique de la forme  $\partial_t T = \kappa \partial_{xx}^2 T$ . On suppose donc que le temps caractéristique est proportionnel au rapport du carré d'une longueur caractéristique à la diffusivité du milieu. Afin de rendre la distribution de température indépendante de la discrétisation du noyau, cette longueur caractéristique est choisie comme la longueur de chaque segment discrétisé de sorte que les temps caractéristiques de diffusion radiale dans le régénérateur  $\tau_r$  et dans le TBT  $\tau_w$  sont de la forme

$$\tau \propto \tau_{ref} \left( \frac{\Delta x}{l} \right)^2 \frac{\kappa_{ref}}{\kappa(x)}. \quad (5.11)$$

Un ajustement des paramètres en regard de la distribution de température expérimentale permet de donner des estimations des paramètres régissant la diffusion dans le noyau \*

$$\tau_{r,ref} = 100 \text{ s}, \quad \tau_{w,ref} = 200 \text{ s} \quad \text{et} \quad k_s = 0.1. \quad (5.12)$$

La forme de la distribution de température évaluée avec ces paramètres † pour une puissance de chauffage au seuil de déclenchement de l'auto-oscillation est représentée à la figure figure 5.6.

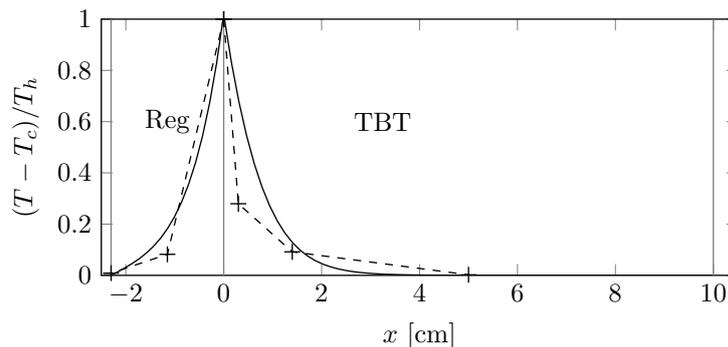
### 5.3.2 Déclenchement

Le champ de température, y compris sous le seuil, ne suit donc pas une distribution linéaire. Ainsi, pour l'évaluation des seuils de déclenchement, il est nécessaire de considérer

---

\*.  $k_s$  est un coefficient de proportionnalité réduisant artificiellement la conductivité du régénérateur, afin de tenir compte des contacts thermiques imparfaits entre les couches de tissu métallique composant le régénérateur. Sa valeur est choisie de manière à ajuster la puissance  $\dot{Q}_h$  entre les données expérimentales et les valeurs produites par le modèle. L'introduction de la diffusion radiale dans le modèle amène à modifier notablement la valeur de ce coefficient.

†. La forme de la distribution modélisée ne correspond pas exactement à la distribution mesurée. Cependant, il existe une incertitude non négligeable sur la position des thermocouples, en particulier dans le TBT où leur position au centre de la section transverse n'est pas garantie. La distribution de température, que l'on suppose uniforme sur la section transverse, n'a en pratique pas lieu de l'être.



**FIGURE 5.6** – Distribution de température normalisée par la température chaude au seuil  $\dot{Q}_h = 59 \text{ W}$  pour  $G = 0$  et  $\Phi = 0$ . Les lignes verticales représentent les interfaces entre les élément du noyau. (—) Modélisation avec les paramètres (5.12); (-+-) Températures expérimentales.

les systèmes acoustiques et thermiques couplés. Avec les estimations des paramètres données ci-dessus, le seuil de déclenchement est alors évalué comme la puissance de chauffage  $\dot{Q}_{hd}$  introduite dans le système pour laquelle le taux d'amplification est nul pour une distribution de température stabilisée, et une amplitude acoustique nulle. Ceci revient à chercher la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon(\dot{Q}_h = \dot{Q}_{hd}, G, \Phi) = 0, \end{array} \right. \quad (5.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t T_0(t, x) = \kappa \partial_{xx}^2 T_0(t, x) - \frac{1}{\tau_r} [T_0(t, x) - T_\infty] = 0, \end{array} \right. \quad (5.13b)$$

où la coque est considérée à température ambiante, soit  $T_\infty = T_c$ . De plus, les conditions aux limites imposent les températures froides aux extrémités, la continuité de la température à l'interface et l'introduction de la puissance de chauffage en  $x = 0$  (toujours en estimant que cette puissance transite intégralement vers le régénérateur)

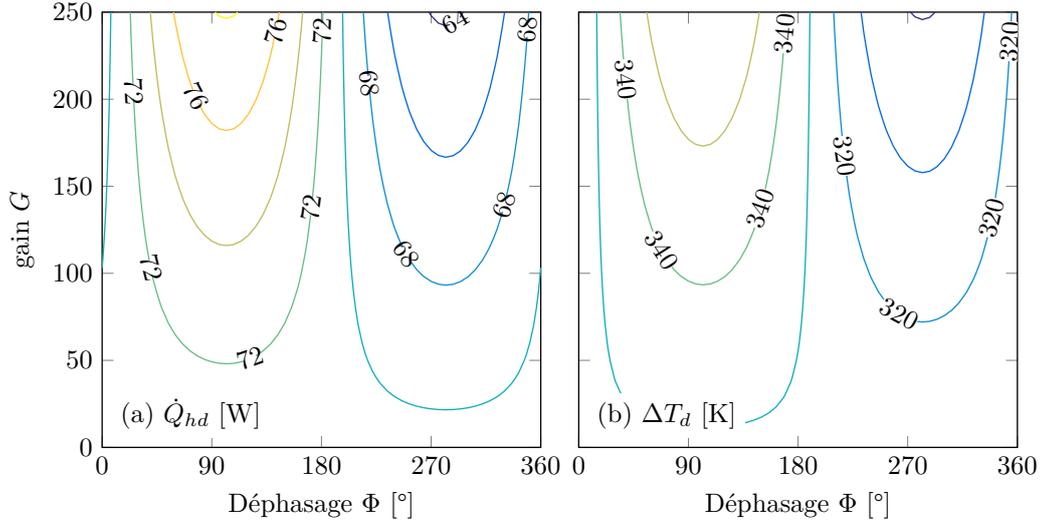
$$T_0(-lr) = T_0(l_w) = T_c, \quad (5.13c)$$

$$T_0(0^-) = T_0(0^+) = T_h, \quad (5.13d)$$

$$\lambda_r \partial_x T_0(t, 0^-) = \frac{\dot{Q}_{hd}}{S}. \quad (5.13e)$$

La solution du problème (5.13) est recherchée numériquement par un algorithme de recherche de zéros à régions de confiance, appliqué à la distribution de température discrétisée. Cet algorithme cherche les valeurs à attribuer à l'ensemble des  $M + N$  paramètres (la puissance de chauffage  $\dot{Q}_h$  introduite dans système et  $M + N - 1$  températures, les températures aux échangeurs étant fixes) de sorte à minimiser, au sens des moindres carrés, les valeurs des solutions du problème (l'amplification  $\epsilon$  et les dérivées de  $M + N - 1$  températures  $d_t T_0$ ). La puissance de chauffage calculée nécessaire pour le déclenchement de l'oscillation est présentée à la figure 5.7, avec la température chaude  $T_h = T_0(\dot{Q}_{hd}, x=0)$  correspondante, la distribution de température étant régie par les phénomènes de diffusion longitudinale et radiale, résultant en un champ de la forme de celui présenté à la figure 5.6.

Bien que les valeurs de puissance et de température de la figure 5.7 obtenues par cette description sont proches de celles obtenues précédemment (figure 5.2a), l'ensemble des



**FIGURE 5.7** – Conditions de déclenchement dans le plan des paramètres de contrôle de la boucle de rétroaction, en tenant compte de la diffusion radiale.  $M = N = 16$ . (a) Puissance  $\dot{Q}_{hd}$  nécessaire au déclenchement de l'auto-oscillation. (b) Température correspondante à l'extrémité chaude du régénérateur, la distribution de température ayant une forme similaire à celle donnée à la figure 5.6.

résultats numériques présentés reste des résultats qualitatifs. Aucune comparaison quantitative ne saurait être faite de ces résultats, car ils reposent sur de trop nombreuses approximations et l'évaluation grossière des valeurs de nombreux paramètres. La concordance des valeurs numérique est recherchée lors de l'estimation des paramètres afin de travailler avec des ordres de grandeurs cohérents entre les différents phénomènes acoustiques et thermiques. On remarque cependant que les variations de la différence de température semblent plus réduites quand on tient compte de la diffusion radiale dans les échanges thermiques ( $\pm 25$  K, comme le montre la figure 5.7b contre  $\pm 50$  K quand la distribution de température est considérée linéaire, comme à la figure 5.2a).

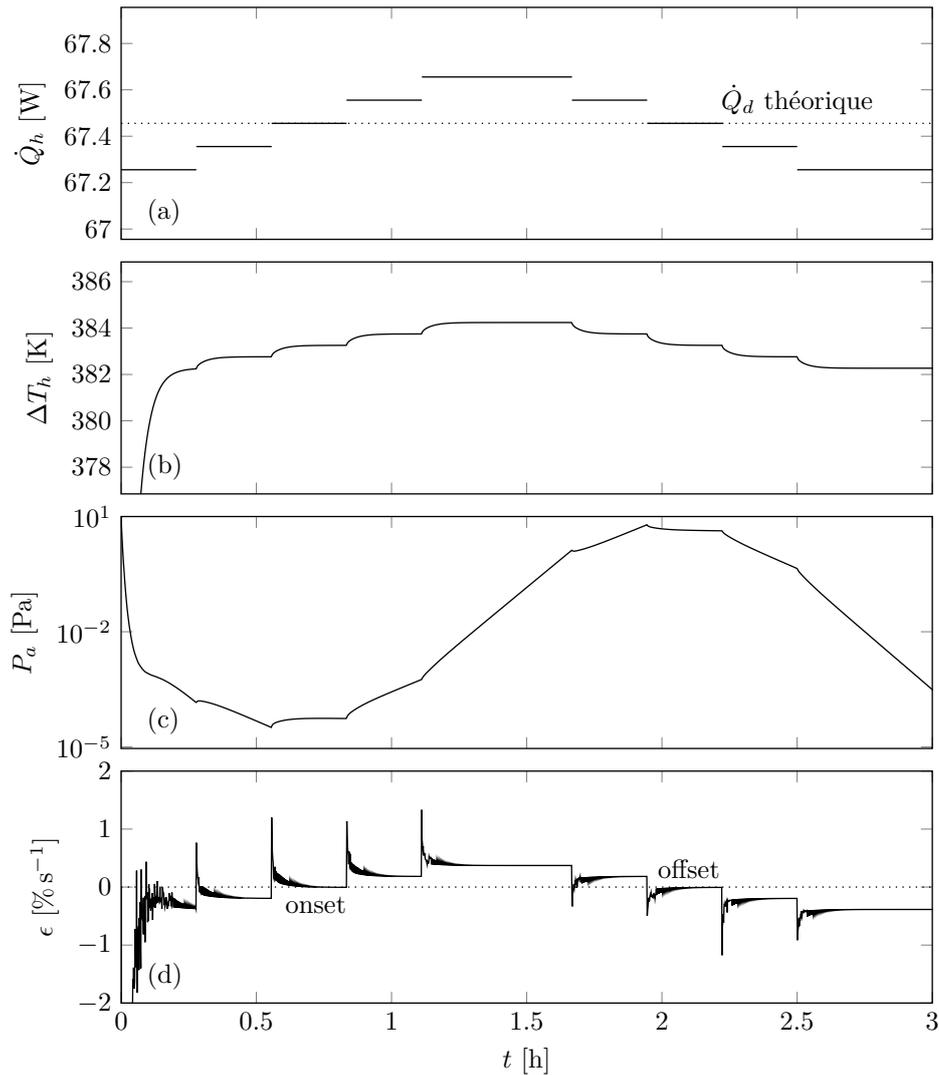
### 5.3.3 Régime oscillant

Au delà du seuil de déclenchement, l'évolution du système est décrite en couplant la description du système acoustique (5.5) et la description de la distribution discrétisée de température donnée par le système (4.35) que l'on rappelle ici,

$$\begin{cases} d_t \mathbf{X} = \epsilon(\mathbf{T}_0, G, \Phi) \mathbf{X}, & (5.14a) \\ d_t \mathbf{T}_0 = \frac{1}{\Delta t} [(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} - \mathcal{I}) \mathbf{T}_0 + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{I} (\mathcal{Q} + \mathcal{H})], & (5.14b) \end{cases}$$

dans laquelle, pour le moment, le streaming de Gedeon est toujours ignoré, c'est-à-dire  $V_G = 0$ . Cette description permet de modéliser le régime transitoire du moteur en réponse à la modification d'un de ses trois paramètres de contrôle. Cependant, l'étude expérimentale présentée dans la partie I portant plus particulièrement sur les performances du transducteur en régime établi, c'est donc au régime permanent qu'on s'intéresse dans la section suivante.

Le calcul de régimes transitoires permet cependant d'explorer simplement deux aspects du système. Premièrement, pour un ensemble de paramètres de contrôle déterminé ( $\dot{Q}_h$ ,  $G$  et  $\Phi$ ), le calcul du transitoire pour différentes conditions initiales jusqu'au régime (quasi-)permanent permet de mettre en évidence l'unicité de la solution stable. Deuxièmement, en reproduisant numériquement la démarche de la section 3.2.2, consistant à incrémenter progressivement la puissance de chauffage pour déterminer le seuil de déclenchement, puis par décrétement successif le seuil d'extinction, la présence (ou l'absence) d'hystérésis peut aussi être mise en



**FIGURE 5.8** – Transitoire de déclenchement et d'extinction de l'auto-oscillation pour des incréments/décréments de 0.1W de la puissance de chauffage autour de la puissance de déclenchement. Discrétisation de la distribution de température :  $M = N = 16$ .  $G = 0$ ,  $\Phi = 0$ . Les seuils de déclenchement et d'extinction correspondent à la même puissance de chauffage. (a) Puissance thermique  $\dot{Q}_h$  fournie au moteur. (b) Température  $T_h$  de l'échangeur chaud. (c) Amplitude  $P_a$  de la pression dans la branche de l'alternateur. (d) Amplification  $\epsilon$  des amplitudes acoustiques

avant. La figure 5.8, qui montre un exemple de cette démarche, présente la puissance  $\dot{Q}_h$  fournie au moteur, la température de l'échangeur chaud et le taux d'amplification. Le seuil de déclenchement est le premier incrément de chauffage  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_{hdd}$  pour lequel l'amplification reste positive  $\epsilon \geq 0$ . Inversement, le seuil d'extinction est le dernier décrétement de chauffage  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_{hxx}$  pour lequel l'amplification remonte jusqu'à zéro : c'est la puissance minimale pour laquelle une onde acoustique peut être entretenue dans le moteur. La figure montre que ces seuils de déclenchement et d'extinction de l'auto-oscillation correspondent à la même puissance de chauffage. Des résultats équivalents sont obtenus pour différentes combinaisons des paramètres de contrôle de la boucle de rétroaction.

### 5.3.4 État saturé

L'influence sur le système des paramètres de contrôle est étudiée, en terme de leurs répercussions sur le régime permanent du moteur. On cherche donc une solution au système couplé (5.14) pour laquelle l'amplitude des oscillations acoustiques est saturée, et la distribution de température est stabilisée

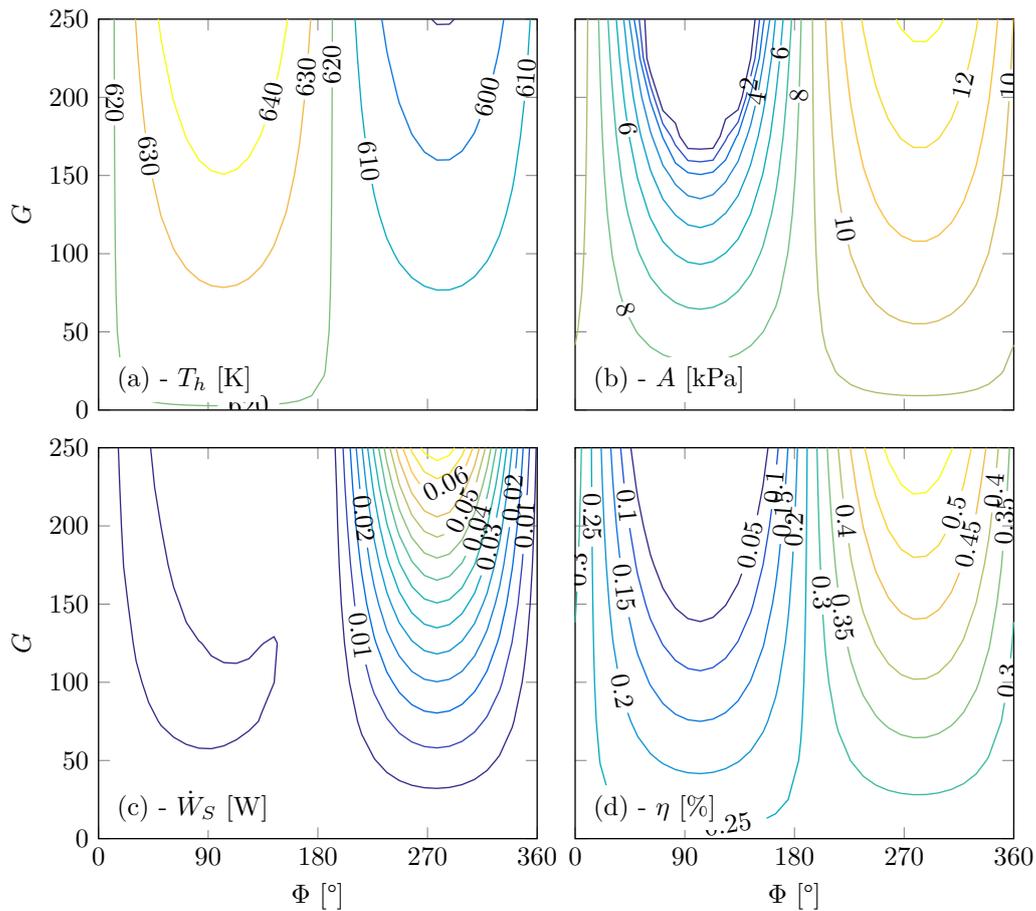
$$\begin{cases} d_t \mathbf{X}(\mathbf{T}_0, G, \Phi) = 0, & (5.15a) \\ d_t \mathbf{T}_0(\dot{Q}_h, \mathbf{X}) = 0. & (5.15b) \end{cases}$$

La solution est recherchée numériquement, comme pour le seuil de déclenchement à la section précédente, par un algorithme de recherche de zéros à régions de confiance. Les  $M + N$  degrés de liberté du problème (l'amplification  $\epsilon$  et les dérivées des  $M + N - 1$  températures  $d_t T_0$ ) sont minimisés en fonction des  $M + N$  paramètres à déterminer (l'amplitude  $A$  et les  $M + N - 1$  températures – les températures aux échangeurs sont fixes).

Comme précédemment, l'influence de la boucle de rétro-contrôle est alors étudiée en recherchant le régime stabilisé du moteur en fonction des paramètres de contrôle, de la même manière que l'étude expérimentale présentée au chapitre 3. La figure 5.9 présente une carte des conditions de saturation de l'oscillation acoustique en fonction des paramètres de la boucle de rétro-contrôle.

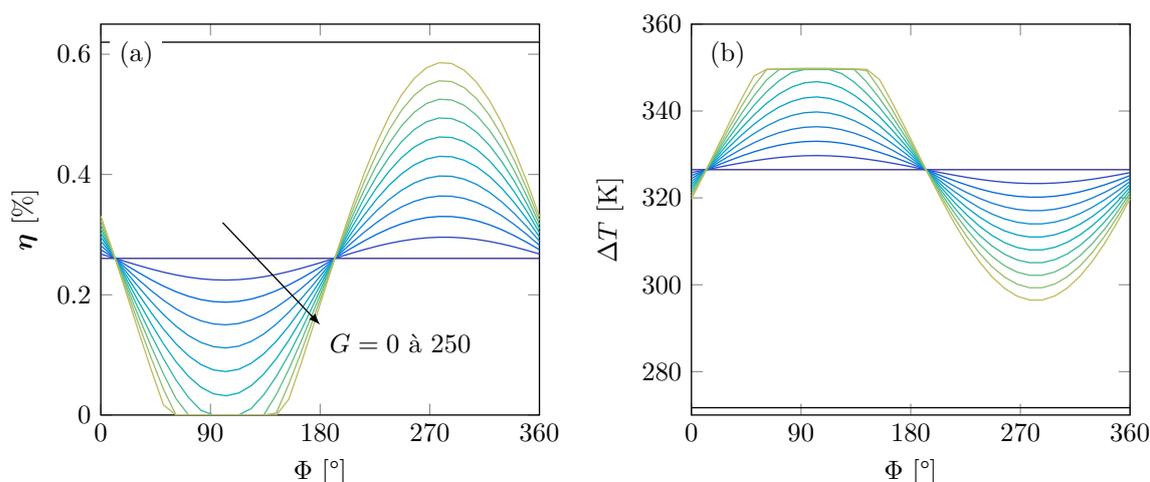
Les résultats issus de cette modélisation font clairement apparaître les mêmes caractéristiques que les résultats expérimentaux : la boucle permet de faire varier l'efficacité de conversion thermoacoustique, ainsi que la différence de température dans le régénérateur de manière inverse. La puissance fournie par la source auxiliaire suit une évolution particulière : pour des déphasages d'environ  $\Phi = 10^\circ$  et  $190^\circ$ , tension et courant sont en phase ou opposition de phase, et la puissance fournie est nulle. Pour d'autres déphasages la puissance est non nulle et passe par un maximum quand courant et tension sont en quadrature ; ce schéma est perturbé par l'évolution de l'amplitude  $A$ , au carré de laquelle  $\dot{W}_S$  est proportionnelle. Ces résultats sont présentés sous une autre forme à la figure 5.10. Cette représentation fait mieux apparaître les conditions dans lesquelles l'extinction de l'oscillation est obtenue. En particulier, on voit que lors de l'extinction de l'oscillation, la température maximale atteinte par l'échangeur est constante.

La figure 5.10 montre aussi les performances du moteur sans la source de contrôle auxiliaire. Les performances modélisées du moteur avec la source auxiliaire externe confirment les résultats expérimentaux : le couplage du moteur avec cette source introduit beaucoup de pertes, que les améliorations de performances apportées par la boucle ne suffisent pas



**FIGURE 5.9** – Carte des conditions de saturation du transducteur thermoacoustique en fonction des paramètres de la boucle de rétro-contrôle : déphasage  $\Phi$  et gain d'amplification en tension  $G$ . La distribution de température dans le noyau est de la forme de celle donnée par la courbe en trait continu à la figure 5.6.  $M = N = 16$ .

à compenser. La même comparaison serait intéressante pour une configuration de source auxiliaire interne, pour laquelle les pertes dues au couplage de la source avec le moteur sont moindres.



**FIGURE 5.10** – Carte des conditions de saturation du transducteur thermoacoustique en fonction du déphasage  $\Phi$  pour des gains d’amplification en tension  $G = 0$  à 250 par pas de 25. La puissance de chauffage vaut  $\dot{Q}_h = \dot{Q}_0 + 5$  W, et la discrétisation du TAC est telle que  $M = N = 16$ . (a) Efficacité du moteur. (b) Différence de température le long du régénérateur. Les lignes noires horizontales sont les performances du moteur sans source auxiliaire.

## 5.4 Conclusion

Un modèle simplifié de moteur thermoacoustique de Stirling est présenté. Une boucle de rétro-contrôle est incluse dans le modèle par extension du réseau électrique équivalent. L’influence de la boucle de rétroaction du moteur est étudiée, sur le seuil de déclenchement du moteur et sur la saturation de son régime oscillant. La modélisation la plus simple des transferts thermiques dans le noyau permet de mettre en évidence que les variations du seuil de déclenchement en fonction des paramètres de la boucle de rétro-contrôle sont responsables de l’extinction des oscillations observée expérimentalement. Une description plus fine de la distribution de température, prenant en compte la diffusion vers la coque, permet d’affiner la description de ce comportement, notamment en montrant une température constante en l’absence d’oscillations. Faute de temps, différents aspects du modèle n’ont pas été explorés. Notamment, la stabilité des solutions en régime oscillant permanent mérite d’être exprimée de manière analytique, ce qui permettrait d’expliciter l’unicité de la solution stable. Par ailleurs, la configuration de source auxiliaire interne est celle qui présentait un comportement hystérétique. Un circuit équivalent permettrait de la même manière d’en explorer la stabilité et les caractéristiques.



## Troisième partie

# Propagation faiblement non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques en régime permanent



## Chapitre 6

# Description de la propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques

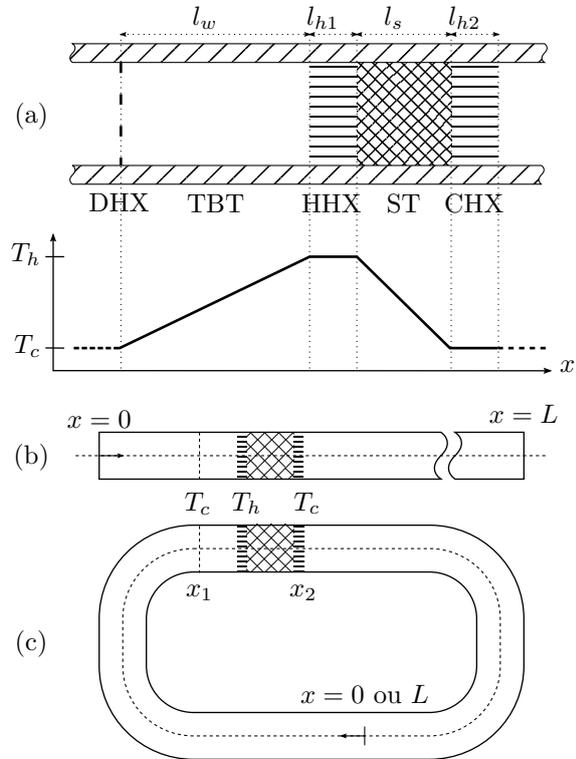
### 6.1 Introduction

Le développement récent des moteurs thermoacoustiques, notamment avec les moteurs à ondes localement progressives dits de Stirling depuis le début des années 2000, offre de nouvelles perspectives en termes de performances. Cependant, cette augmentation de performances s'accompagne d'une augmentation importante des niveaux acoustiques atteints par les oscillations auto-entretenues dans ces moteurs : le drive ratio (rapport de l'amplitude de la pression acoustique à la pression moyenne  $DR = |\tilde{p}|/P_0$ ) peut atteindre des valeurs jusqu'à 10 % (voir par exemple [9,168,169]). Or, à de tels niveaux acoustiques, les phénomènes non linéaires, et plus particulièrement la génération d'harmoniques supérieurs, deviennent non négligeables. Celle-ci se traduit par une cascade de l'énergie acoustique générée vers les fréquences supérieures, multiples entiers de la fréquence de fonctionnement. Cependant, les moteurs thermoacoustiques sont habituellement conçus et optimisés pour fonctionner à une fréquence particulière (la fréquence fondamentale  $f_1$  de l'auto-oscillation). Les harmoniques supérieurs de cette fréquence sont alors à l'origine de pertes pour différentes raisons. D'une part, les pertes augmentent avec la fréquence, que ces pertes soient acoustiques (pertes viscothermiques de volume  $\propto f_1^2$  ou pariétales  $\propto \sqrt{f_1}$ ), aérodynamiques (effets de bord aux interfaces poreuses ou aux jonctions) ou mécaniques (si un système mécanique est couplé au moteur thermoacoustique). D'autre part, l'énergie portée par les harmoniques supérieurs ne peut être exploitée de manière optimale car les systèmes auxquels les moteurs thermoacoustiques sont couplés (par exemple un alternateur linéaire ou un réfrigérateur thermoacoustique) sont aussi optimisés pour une fréquence de fonctionnement optimale.

La propagation acoustique non linéaire a été observée dans des moteurs thermoacoustiques de configurations différentes, et même pour des drive ratios relativement peu élevés (voir par exemple pour des moteurs à ondes quasi-stationnaires [7,19,20,53,158] et des moteurs à ondes quasi-progressives [20,191]). Cependant, sa prise en compte dans la modélisation des moteurs thermoacoustiques est relativement rare. Ce fait s'explique par la facilité de minimisation du phénomène lors de la conception des machines en utilisant des résonateurs inharmoniques,

dans lesquels les harmoniques de la fréquence de fonctionnement ne correspondent pas aux modes supérieurs du résonateur. La prépondérance des autres effets non linéaires sur les pertes induites par la propagation linéaire autorise alors à négliger cette dernière lors de modélisation. Cependant, les machines plus *académiques* (par exemple le *Laser acoustique* quart d'onde,<sup>56</sup> le moteur à ondes quasi-stationnaires demi-longueur d'onde<sup>19</sup> et le moteur annulaire<sup>191</sup>) sont de configurations géométriques très simples (voir figure 6.1) mettant en œuvre des résonateurs harmoniques. Dans ces conditions, la propagation non linéaire ne peut plus être négligée devant les autres effets non linéaires.<sup>53</sup>

Quelques études ont tenté de décrire et prendre en compte les pertes dues à la propagation non linéaire dans les machines thermoacoustiques. Dès 1974, *Rott* exprime le transport d'énergie associé à la formation d'ondes de choc<sup>133</sup> dans le régime non linéaire décrit par *Chester*,<sup>32</sup> qu'il compare aux résultats expérimentaux de *Merkli et Thomann*<sup>89,90</sup> (résultats tous obtenus pour des oscillations forcées). Une étude analytique par *Gusev et coll.*<sup>66</sup> propose, pour une géométrie très idéalisée, d'exprimer la propagation dans la partie passive d'un moteur à ondes quasi-stationnaires en réduisant l'expression de la propagation dans le noyau sous la forme d'un coefficient de réflexion complexe à l'extrémité du résonateur, coefficient dépendant de la température et de la fréquence. Dans une série de papiers, *Prosperetti et coll.* établissent un modèle numérique complet de moteur thermoacoustique à ondes quasi-stationnaires,<sup>77,123,177,201</sup> modèle à résolution numérique directe mais relativement lourd. Finalement, *Penelet et coll.*<sup>114</sup> proposent une prise en compte du transfert énergétique vers le second harmonique, exprimé comme un temps caractéristique d'atténuation, avec l'hypothèse d'un système purement progressif et en tabulant les amplitudes de pression obtenues



**FIGURE 6.1** – Architectures génériques simplifiées de moteurs thermoacoustiques : (a) Noyau thermoacoustique (TAC) composé d'un échangeur de chaleur ambiant (AHX) de longueur  $l_{h2}$ , un échangeur de chaleur chaud (HHX) de longueur  $l_{h1}$  et d'un stack (ST) de longueur  $l_s$ . Un échangeur de chaleur secondaire (DHX), pas nécessairement présent, impose la température froide à l'extrémité du guide d'onde de longueur  $l_w$  assurant le rôle de tampon thermique (TBT). Une distribution théorique de température est représentée, supposée ici linéaire par morceaux ; (b) Moteur à ondes quasi-stationnaires (SWE) constitué d'un TAC dans un résonateur acoustique droit ; (c) Moteur à ondes quasi-progressives (TWE) constitué d'un TAC dans un résonateur toroïdal.

expérimentalement. Cependant, aucun de ces outils ne propose de solution sans a priori et simple à mettre en œuvre pour une configuration quelconque de moteur thermoacoustique. Cependant, considérant les outils développés pour d'autres applications, une approche du type de celle envisagée par *Gusev* peut être proposée.

La question de la propagation non linéaire en guide d'onde a fait l'objet de nombreuses études. *Chester*<sup>32</sup> a posé dans les années 1960 les bases nécessaires à la description de la propagation guidée non linéaire, spécifiquement en mettant en évidence la nécessité de prendre en compte l'influence des couches limites visqueuses. Des solutions ont par la suite été proposées pour résoudre des cas particuliers : cas d'une onde purement progressive prenant en compte les pertes volumiques,<sup>117,153</sup> cas d'un tube fermé par une extrémité rigide<sup>32</sup> ou rayonnant en espace libre.<sup>33</sup> Les solutions obtenues ont été confirmées par les résultats expérimentaux de nombreuses équipes dans le cas d'une source d'excitation harmonique.<sup>35,52,83,151,202</sup> Cependant, aucune solution générale n'a été proposée. En effet, la résolution par une méthode classique de perturbations ne donne pas de résultats satisfaisants : cette approche ne discriminant pas les effets cumulatifs des perturbations locales, elle produit des solutions comportant des termes séculaires non bornés, n'ayant aucun sens physique. On préfère alors aborder le problème de la propagation non linéaire par une approche multi-échelles, qui sépare les effets locaux des effets cumulatifs. C'est sur cette base que *Menguy et Gilbert*<sup>88</sup> ont développé les équations de propagation faiblement non linéaire unidimensionnelle. Grâce à cette méthode qui permet d'exprimer une onde quelconque comme la superposition de deux ondes progressives contrapropagatives dont les interactions sont négligeables au regard des termes cumulatifs respectifs, toute configuration peut être décrite sans la limitation aux cas particuliers des ondes purement stationnaires ou progressives. La propagation de chacune des composantes progressives d'une onde est décrite par une équation de Burgers généralisée, faisant appel au formalisme de la dérivée fractionnaire pour décrire les pertes pariétales.<sup>23,153</sup> Ce formalisme permet, lors d'une résolution numérique dans le domaine fréquentiel, de prendre en compte facilement n'importe quelle condition limite d'impédance, ainsi qu'une source périodique quelconque.

Par ailleurs, dans de nombreuses configurations, le noyau thermoacoustique (partie du moteur comprenant les sections inhomogènes en température) est court par rapport à la longueur totale du moteur. Or, les phénomènes non linéaires prenant place lors de la propagation à forte amplitude sont cumulatifs et non locaux. La description de la propagation dans le noyau par une approximation linéaire, simplifiant la formulation du problème, n'introduit alors qu'une erreur limitée. La propagation linéaire à travers les noyaux thermoacoustiques est en effet aisément décrite grâce au formalisme des matrices de transfert/diffusion présenté précédemment à la section 1.2.

La démarche proposée ici pour décrire la propagation faiblement non linéaire dans les systèmes thermoacoustiques en régime stationnaire consiste donc en l'utilisation des outils suivants, dont la description fait l'objet de ce chapitre. Premièrement, une description non linéaire de la propagation dans le guide d'onde (parties passives homogènes ou non en température) est donnée section 6.2, prenant en compte les pertes pariétales et volumiques, ainsi que les éventuels changements de section transverse. Cette description dans le domaine fréquentiel fera appel au formalisme des équations de Burgers généralisées. Deuxièmement, la propagation linéaire dans le noyau thermoacoustique est décrite (section 6.3) par sa matrice de transfert/diffusion. Une source de pertes (non linéaires) est prise en compte afin d'assurer la saturation des amplitudes vers des niveaux réalistes, ou tout du moins

raisonnables, amenant à l'expression d'une matrice de diffusion non linéaire du noyau thermoacoustique. Finalement, une méthode de résolution itérative du système d'équations résultant est proposée à la section 6.4 pour l'obtention du régime saturé de propagation de l'oscillation acoustique auto-entretenu. Cette méthode est dérivée de la résolution d'un problème équivalent en régime oscillant forcé, étendue au cas d'une auto-oscillation de fréquence non déterminée et susceptible d'évoluer. Une mise en application est proposée au chapitre 7 pour des configurations pour lesquelles des résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature.

Cette modélisation et les résultats qui en sont issus (présentés au chapitre 7) ont fait l'objet d'une présentation au 12ème Congrès Français d'Acoustique [103], ainsi que d'une publication [104].

## 6.2 Propagation non linéaire en guide d'ondes

La description de la propagation non linéaire dans les guides d'ondes choisie dans le cadre de ce travail utilise le formalisme des équations de Burgers généralisées. L'approche dimensionnelle utilisée pour leur établissement est celle proposée par *Menguy et Gilbert*,<sup>88</sup> permettant de déterminer l'importance relative des différents phénomènes pouvant prendre place lors de la propagation. L'établissement des conditions d'application de cette approche permet rétrospectivement de vérifier la validité des approximations faites.

### 6.2.1 Hypothèses de travail

L'analyse dimensionnelle repose ici sur trois nombres adimensionnels, qui qualifient le régime de propagation des oscillations acoustiques :

- le nombre de Mach acoustique :  $M = v_0/a_0$ , rapport d'une valeur typique de la vitesse acoustique à la célérité du son ;
- un nombre de Reynolds acoustique :  $Re = v_0/\sqrt{\nu\omega}$ , avec  $\mu$  la viscosité cinématique du fluide, qualifiant l'écoulement dans les couches limites ;
- le nombre de cisaillement :  $Sh = \delta_\nu/(\sqrt{2}r) = \sqrt{\nu/\omega}/r$ , rapport de l'épaisseur de couche limite visqueuse au rayon du tube qui qualifie l'importance de l'effet de la couche limite visqueuse sur l'écoulement global.

Dans le cadre de cette étude, les fréquences de travail sont de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de Hertz, les rayons des tubes de quelques centimètres, et le niveau sonore est élevé ( $> 150$  dB). Une analyse des ordres de grandeur de ces trois nombres permet alors d'affirmer que  $1/Re$ ,  $M$  et  $Sh$  sont tous trois très petits devant 1. De plus, les ordres de grandeurs entre ces trois nombres sont alors tels que

$$\frac{M^2}{Sh^2 Re^2} = \frac{\sqrt{\omega\nu}}{a_0^2} \omega r \ll 1, \quad \frac{Sh^2 Re^2}{M^2} = \left(\frac{a_0}{r\omega}\right)^2 \gg 1. \quad (6.1)$$

Ces conditions reflètent respectivement les faits que les effets thermo-visqueux prennent majoritairement place dans les couches limites (et ne sont donc pas des effets de volume) et que la longueur d'onde est très grande devant le rayon du tube, condition pour laquelle l'hypothèse d'onde quasi-plane est alors vérifiée.

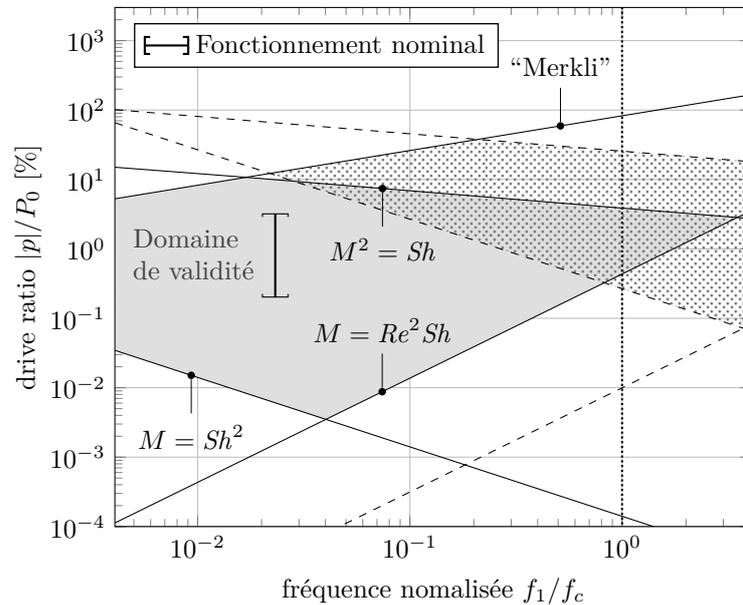
Ces nombres, ou leurs rapports, permettent de comparer l'importance relative des phénomènes influençant la propagation. L'établissement d'un diagramme de prédominance, donné

à la figure 6.2, permet de vérifier la validité des différentes hypothèses, dans le cadre d'une géométrie de moteur. Sur ce diagramme, les lignes  $M = Re^2 Sh$  et  $M = Sh^2$  indiquent les limites en dessous desquelles une théorie non linéaire n'est pas nécessaire, les effets non linéaires étant négligeables devant les autres effets en jeu (notamment les pertes volumiques ou la courbure du guide d'onde). La ligne  $M^2 = Sh$  indique le régime au delà duquel une théorie au premier ordre sur  $M$  n'est pas adaptée à la résolution du problème. La condition de Merkli  $Re < 400$  borne le domaine pour lequel l'écoulement dans les couches limites est laminaire. Enfin, la ligne verticale  $f_c$  indique la fréquence de coupure du tube, au-delà de laquelle la propagation peut être décrite par un régime d'ondes quasi-planes uniquement si la source d'excitation est elle-même plane. Le domaine de validité de cette méthode est donc le domaine délimité par ces cinq lignes dans le plan drive ratio/fréquence fondamentale et représenté par la zone grisée  $\square$ . Dans ces conditions, la description de la propagation non linéaire dans le guide d'onde par la méthode des échelles multiples peut être appliquée.

L'établissement des équations décrivant la propagation guidée faiblement non linéaire sans perte permet de comprendre la mise en place des équations de Burgers, les résultats pour les différents cas avec pertes étant donnés directement par la suite.

### 6.2.2 Propagation non linéaire sans perte

Les équations de conservation de la masse 1.3 et de la quantité de mouvement 1.4 projetées selon  $\mathbf{e}_x$  sont développées à l'ordre 2 des termes acoustiques en négligeant les termes visqueux.



**FIGURE 6.2** – *Domaine de validité des équations de Burgers généralisées pour la description de la propagation faiblement non linéaire en fonction du drive ratio (rapport de la composante acoustique à la composante statique de la pression), dans la configuration des moteurs pour lesquels la propagation non linéaire est résolue au chapitre suivant.  $\square$  : domaine de validité pour la propagation acoustique dans un résonateur de 2.05 cm de rayon.  $\text{hachuré}$  : domaine de validité pour la propagation acoustique dans des pores de rayon hydraulique  $r_h \leq 0.5$  mm. (figure adaptée des travaux de Menguy et Gilbert [88])*

Avec le changement de variable  $t \rightarrow \tau = t - x/a_0$ , l'équation de propagation non linéaire sans perte pour la vitesse acoustique peut alors être déterminée sous la forme

$$\partial_x v_a - \frac{(\gamma + 1)}{2a_0^2} v_a \partial_\tau v_a = 0, \quad (6.2)$$

où  $\gamma = c_P/c_V$  désigne le rapport des capacités calorifiques du fluide. Notant  $q = \frac{v_a}{v_0}$  la vitesse adimensionnée où  $v_0$  est l'amplitude d'une vitesse caractéristique, par exemple celle au point de référence  $x = 0$ ,  $\chi = \frac{(\gamma+1)}{2} \frac{M\omega x}{a_0}$  la distance normalisée par la distance de formation du choc et  $\theta = \omega\tau$  un temps adimensionné, l'équation est obtenue sous sa forme adimensionnée pour l'onde plane progressive sans perte :

$$\partial_\chi q - q \partial_\theta q = 0. \quad (6.3)$$

Cette équation admet une solution exacte pour une source placée en  $\chi = 0$  :  $q(\chi = 0, \theta) = f(\theta)$ , laquelle est donnée, en notant  $\theta = \xi - \chi f(\xi)$ ,

$$q(\chi, \theta) = f(\theta + \chi q) = f(\xi). \quad (6.4)$$

Dans le cas où la source est harmonique,  $f(\theta) = \sin(\theta)$ , la décomposition en série de Fourier permet d'obtenir un résultat simple donné par *Blackstock*<sup>22</sup> par composition des solutions de *Fubini*<sup>50</sup> avant la formation du choc et de la solution en dents de scie de *Fay*<sup>49</sup> après formation du choc, et tenant compte du fait que le choc apparaît à  $\chi = 1$ ,

$$q(\chi, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{J_n(n\chi)}{n\chi} - \frac{\sin(\xi_m)}{n\pi} \right) \sin n\theta \right], \quad (6.5)$$

avec  $\xi_m$  la plus petite solution strictement positive de l'équation  $\xi_m - \chi \sin(\xi_m) = 0$ , où  $\sin(\xi_m)$  représente alors la demi-amplitude de la discontinuité de vitesse en  $\theta = 0$ .

### 6.2.3 Burgers généralisé : différents effets pris en compte

L'équation 6.3 décrit la propagation non linéaire sans perte. Sans la prise en compte d'aucune forme de perte, toute onde – même d'amplitude infinitésimale – finirait donc par former un choc après une distance de propagation suffisante pour que l'énergie soit transférée vers les harmoniques supérieures. Il est donc nécessaire de prendre en compte les propriétés viscothermiques du fluide pour obtenir une description réaliste de la propagation. Des problématiques liées à la géométrie des moteurs thermoacoustiques peuvent aussi être prises en compte, telles que des variations de la section transverse du guide d'onde, des sections comportant des gradients de température (par exemple un TBT – la section de guide d'onde entre l'échangeur chaud et le second échangeur froid – suffisamment long).

#### Pertes volumiques

En fluide réel, les pertes dues aux effets de la viscosité et de la diffusion de la chaleur ne peuvent être négligées — *a fortiori* à fort niveau car elles sont antagoniques avec les non-linéarités responsables de la déformation du front d'onde. Les hautes fréquences sont plus fortement atténuées par les pertes volumiques que les basses fréquences, tendant à ramener

l'onde à une forme sinusoïdale. Ces pertes sont prises en compte en ajoutant un terme source à l'équation de Riemann (6.3),<sup>34,138</sup> qui devient alors l'équation de la propagation acoustique faiblement non linéaire, dite équation de Burgers :

$$\partial_\chi q - q\partial_\theta q = \frac{St}{\epsilon} \partial_{\theta\theta}^2 q, \quad (6.6)$$

où le nombre de Stokes s'écrit  $St = \frac{M^2}{2Re^2} \left( \frac{4}{3} + \frac{\eta}{\nu} + \frac{\gamma-1}{\sigma} \right)$  et le terme  $\epsilon = M^{\frac{\gamma+1}{2}}$  qualifie l'importance des effets non linéaires s'écrit, avec le nombre de Prandtl  $\sigma = \mu c_P / \lambda$ . Le terme  $\epsilon/St$ , comparant l'importance des effets non linéaires à celle des pertes volumiques, est noté  $\Gamma$  et appelé nombre de Goldberg. La dérivée seconde traduit l'augmentation des pertes proportionnellement au carré de la fréquence pour une onde harmonique. Par analogie, l'équation de Riemann peut donc être appelée équation de Burgers sans perte. Il existe une solution exacte à l'équation 6.6 pour une source quelconque placée en  $\chi = 0$  :  $q(\chi = 0, \theta) = f(\theta)$ . Pour l'obtenir, la transformation de *Hopf-Cole*, telle que  $\xi(\chi, \theta) = \exp\left(\Gamma/2 \int^\theta q(\chi, \theta') d\theta'\right)$  permet d'exprimer cette équation comme l'équation de diffusion :

$$\partial_\chi \xi - \frac{1}{\Gamma} \partial_{\theta\theta}^2 \xi = 0, \quad (6.7)$$

dont la solution est de la forme

$$q(\chi, \theta) = \frac{2}{\Gamma} \partial_\theta \ln \xi = -\frac{1}{\chi} \frac{\int \left( (\theta - \omega) \exp\left(\frac{\Gamma}{2} G(\omega, \theta, \chi)\right) d\omega \right)}{\int \exp\left(\frac{\Gamma}{2} G(\omega, \theta, \chi)\right) d\omega}, \quad (6.8)$$

où  $G$  est donné en fonction de la source  $G(\omega, \theta, \chi) = \int^\omega f(\eta) d\eta - (\theta - \omega)^2 / 2\chi$ . Cette forme de la solution n'étant pas aisément manipulée, il existe des solutions approchées plus simples, notamment dans le cas d'une source d'excitation harmonique et pour des non-linéarités de grande amplitude devant les pertes volumiques ( $\Gamma \gg 1$ ), correspondant à différents domaines de validité pour des distances à la source augmentant, solutions dites de *Fubini*,<sup>50</sup> *Blackstock*, *Kholkhov & Soluyan*,<sup>79</sup> ou encore solution de *Fay-Blackstock*,<sup>22</sup> pouvant se substituer aux deux précédentes.

### Pertes de couches limites

En propagation guidée, les pertes de couches limites doivent être considérées dans l'équation de Burgers car elles sont la première source de saturation de l'amplitude des oscillations acoustiques. Leur prise en compte se fait par l'ajout d'un terme de source non linéaire à l'équation de Burgers sans perte :

$$\partial_\chi q - q\partial_\theta q = -\frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}}, \quad (6.9)$$

avec  $T = Sh(1 + (\gamma - 1)/\sqrt{\sigma})$ . La présence de la dérivée fractionnaire traduit l'augmentation des pertes de couche limite proportionnellement à la racine carrée de la fréquence. Cette dérivée fractionnaire est définie par le produit de convolution

$$\frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}} = \partial_\theta q * \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta'}} \partial_{\theta'} q(\theta', \chi) d\theta'. \quad (6.10)$$

Cette équation ne connaît pas de solution analytique exacte, mais il existe des solutions approchées historiques (solution de *Fay-Fubini* avec pertes<sup>49,50</sup>), ou des solutions plus précises, telles que celles proposées par Bednarik et Konicek.<sup>14</sup>

### Variations de section transverse

Des variations de la section transverse du guide d'onde sont susceptibles de modifier la propagation de l'onde acoustique. Ces variations, à condition de pouvoir être considérées comme lentes ( $d_x r \ll k_0 r$  avec  $r$  le rayon du guide d'onde) afin de conserver un régime d'onde quasi-plane, peuvent être prises en compte dans l'équation de propagation sans perte par l'ajout d'un terme source linéaire sous la forme suivante :

$$\partial_\chi q - q \partial_\theta \bar{q} = -q \partial_\theta \ln(r). \quad (6.11)$$

Une transformation de *Hopf-Cole* permet de ramener cette équation à une équation de diffusion qui possède une solution analytique. Le cas avec pertes ne possède pas de solution analytique, mais sa résolution numérique est possible, avec pour application possible la mise en évidence et l'étude de la cuivrabilité en fonction du profil de perce de certains instruments à vents<sup>59,60</sup> notamment.

### Gradient de température

Des variations lentes (c'est-à-dire sur une distance au moins de l'ordre de la longueur d'onde) de la température peuvent être prises en compte dans l'équation de Burgers. Celle-ci pourra alors être écrite<sup>111</sup> dans le cas sans perte sous la forme :

$$\partial_\chi q - f_1(\chi) q \partial_\theta \bar{q} = f_2(\chi) \partial_\chi q, \quad (6.12)$$

où les fonctions  $f_i$  sont les termes pondérant l'importance de l'évolution spatiale du gradient de température par rapport à celle des autres effets :

$$f_1(\chi) = \frac{T_0}{\epsilon T_c} \frac{\left[ \gamma \frac{T_c}{T_0} + \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} \left( 2 - \frac{T_c}{T_0} \right) \right]}{1 + \sqrt{\frac{T_c}{T_0}}} \left( 1 - \frac{\chi}{T_0} \partial_\chi T_0 \right), \quad (6.13)$$

$$f_2(\chi) = \frac{T_0 a_{ref}}{\epsilon T_c U} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} \right) \left( 1 - \frac{\chi}{T_0} \partial_\chi T_0 \right), \quad (6.14)$$

avec  $T_0(x)$  la distribution de température,  $T_c = T_0(\chi = 0)$  la température de référence et  $a_{ref} = a_0(\chi = 0)$  la vitesse adiabatique du son à cette température.

#### 6.2.4 Application aux moteurs thermoacoustiques

Dans un moteur thermoacoustique dont la conception est éloignée des configurations académiques idéalisées des machines de laboratoire, la géométrie complexe exploitée amène à devoir considérer des combinaisons des différents effets énumérés précédemment. En particulier, les TBT (si leur longueur ne peut être négligée devant celle du résonateur auquel cas ils doivent être intégré au domaine de propagation non linéaire) sont souvent des guides d'onde à section légèrement conique et présentant par définition un gradient de température,

requérant la prise en compte des quatre effets décrits aux paragraphes précédents. L'équation de Burgers généralisée correspondante, prenant en compte pertes pariétales et volumiques, variations de section transverse et gradient de température, s'écrit alors sous la forme suivante<sup>111</sup> :

$$\partial_\chi q - f_1(\chi)q\partial_\theta q = f_2(\chi)\partial_\theta q + f_3(\chi)q + f_4(\chi)\partial_{\theta\theta}^2 q + f_5(\chi)\frac{\partial^{1/2}q}{\partial\theta^{1/2}}, \quad (6.15a)$$

où les fonctions  $f_i$  sont des termes composés des facteurs pondérant chaque effet, ainsi qu'une partie exprimant l'importance de l'évolution spatiale du gradient de température :

$$f_1(\chi) = \frac{T_0}{\epsilon T_c} \left[ \gamma \frac{T_c}{T_0} + \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} \left( 2 - \frac{T_c}{T_0} \right) \right] \left( 1 - \frac{\chi \partial_\chi T_0}{T_0} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} \right)^{-1}, \quad (6.15b)$$

$$f_2(\chi) = \frac{T_0 a_{ref}}{\epsilon T_c U} \left( 1 - \frac{\chi \partial_\chi T_0}{T_0} \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} \right), \quad (6.15c)$$

$$f_3(\chi) = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_c}{T_0}}}{1 + \sqrt{\frac{T_c}{T_0}}} \frac{1}{T_0} \partial_\chi T_0 - \frac{1}{D} \partial_\chi D, \quad (6.15d)$$

$$f_4(\chi) = \frac{a_{ref}}{\Gamma U} \left( 1 - \frac{\chi \partial_\chi T_0}{T_0} \right) \sqrt{\frac{T_0}{T_c}}, \quad (6.15e)$$

$$f_5(\chi) = \frac{T a_0}{\epsilon U} \left( 1 - \frac{\chi \partial_\chi T_0}{T_0} \right) \sqrt{\frac{T_0}{T_c}}. \quad (6.15f)$$

Dans le cadre d'une étude académique se focalisant sur des configurations géométriques plus simples telles que celles présentées à la figure 6.1 (moteurs de section transverse constante à noyau thermoacoustique d'épaisseur négligeable), une simplification à la propagation faiblement non linéaire en fluide viscothermique est suffisante. Cette propagation faiblement non linéaire est donc dans un premier temps décrite par le couple d'équations de Burgers généralisées avec pertes pariétales et volumiques – pour les deux composantes contra-propagatives :

$$\partial_\chi q_+ - q_+ \partial_\theta q_+ = \frac{1}{\Gamma} \partial_{\theta_+ \theta_+}^2 q_+ - \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q_+}{\partial \theta^{1/2}}, \quad (6.16a)$$

$$\partial_\chi q_- - q_- \partial_\theta q_- = -\frac{1}{\Gamma} \partial_{\theta_- \theta_-}^2 q_- + \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q_-}{\partial \theta^{1/2}}. \quad (6.16b)$$

C'est ce couple d'équation qui est choisi pour décrire la propagation acoustique dans les parties homogènes en température des moteurs de configurations simples qui seront étudiés au chapitre suivant.

### 6.3 La propagation dans les noyaux thermoacoustiques

La propagation dans les pores des éléments du noyau thermoacoustique ne peut être décrite par le formalisme des équations de Burgers. En effet, la présence du fort gradient de température dans le noyau interdit la décomposition de l'onde en composantes contra-propagatives. Par ailleurs, la propagation dans le noyau ne satisfait pas aux hypothèses

de base nécessaires à l'utilisation de cette approche dans les pores. La zone d'applicabilité du formalisme multi-échelle est donnée à la figure 6.2 par la zone pointillée  pour des guides d'onde de la taille des pores du stack. Les conditions de fonctionnement des moteurs sont clairement hors de cette zone, et particulièrement sous la limite  $M = Sh^2$ , frontière sous laquelle une description linéaire de la propagation est suffisante. Cependant, on peut considérer que, le noyau étant court devant la longueur totale du moteur ( $(l)/L \leq 5\%$ ), une approche linéaire localement pour la description de la propagation dans le noyau n'a qu'un faible impact sur les effets cumulatifs de la propagation faiblement non linéaire dans le reste du moteur.

### 6.3.1 La propagation linéaire dans le noyau thermoacoustique

Il a déjà été montré à la section 1.2 que, dans le domaine fréquentiel, chaque élément du noyau thermoacoustique peut être décrit comme un biporte acoustique, de part et d'autre duquel les pressions "sortantes" peuvent être exprimées en fonction des pressions "entrantes" (cf. figure 6.1), à l'aide des coefficients de transmission et réflexion  $\mathcal{R}^\pm$  et  $\mathcal{T}^\pm$  (dépendant de la distribution de température  $T_0(x)$  le long du noyau considérée unidimensionnelle, ainsi que de la pulsation  $\omega$  de l'onde) de la matrice de diffusion  $\mathcal{S}$  du noyau thermoacoustique

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_2) \\ \tilde{p}_-(x_1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}^+ & \mathcal{R}^- \\ \mathcal{R}^+ & \mathcal{T}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_1) \\ \tilde{p}_-(x_2) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{S}(\omega, T_0(x)) \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_1) \\ \tilde{p}_-(x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

La matrice de diffusion  $\mathcal{S}$  du noyau complet est obtenue par composition des matrices de diffusion respectives des différents éléments composant le noyau,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{DHX}} \times \mathcal{S}_{\text{TBT}} \times \mathcal{S}_{\text{HHX}} \times \mathcal{S}_{\text{ST}} \times \mathcal{S}_{\text{AHX}}. \quad (6.18)$$

La description de la propagation acoustique dans le noyau thermoacoustique donnée par cette matrice de diffusion est, par essence, une description linéaire des phénomènes qui prennent place dans le noyau thermoacoustique. Si cette description est valide en régime de faible amplitude – donc proche du seuil de déclenchement qu'elle décrit bien –, elle n'est pas suffisante au delà de ce seuil pour décrire quantitativement la propagation dans un noyau thermoacoustique. La complexité des matériaux qui composent ce dernier (poreux de différentes géométries, interfaces entre ces poreux équivalentes à des changements abrupts de section apparente) et la présence d'un fort gradient de température concourent à la mise en place de phénomènes de transferts de chaleur et de masse intriqués, dont la description n'est pas simple, et dont les effets sur les performances du moteur sont non négligeables. Ils est donc nécessaire d'inclure dans cette description, en plus des pertes linéaires, au moins une source de pertes non linéaires parmi celles présentées à la section 1.3.

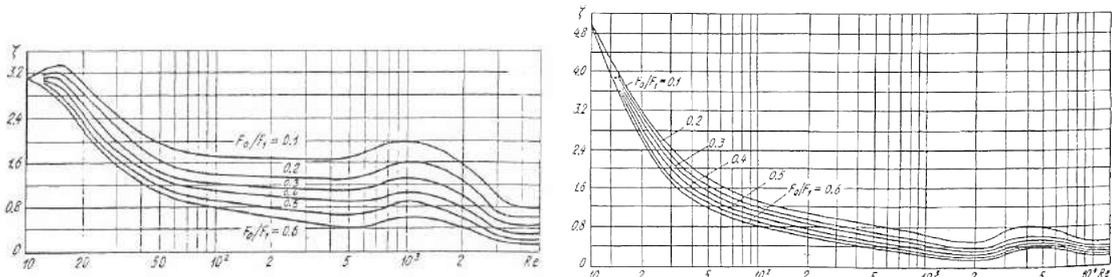
### 6.3.2 Pertes aérodynamiques aux interfaces

Les différents éléments composant le noyau thermoacoustique étant de porosités différentes, ils présentent des changements abrupts de section apparente, qui sont sources de tourbillons. L'effet de ces derniers est couramment représenté dans le cas d'un écoulement permanent

comme une perte de charge singulière (c'est-à-dire localisée) qui se traduit par une baisse de la pression hydrodynamique à l'interface, proportionnelle au carré de la vitesse de l'écoulement. Ces pertes ne sont pas symétriques, le comportement du fluide étant différent lors d'un rétrécissement ou d'un élargissement de section transverse (voir section 1.3.2). L'extension de ce comportement à un écoulement oscillant est fait en moyennant les pertes sur chaque demi-période des écoulements "sortant" et "entrant". Ce moyennage conduit à une expression de la perte de charge moyenne sur la période acoustique à l'interface en fonction de la vitesse acoustique

$$\Delta p \simeq -\frac{4}{3\pi} \frac{\rho_0}{2} (K_{12}\phi_1 + K_{21}\phi_2)|v|^2, \quad (6.19)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide à la température de l'interface,  $A$  la surface transversale du guide d'onde,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les porosités des éléments de part et d'autre de l'interface ( $\phi_2 > \phi_1$ ), et  $K_{12}$  et  $K_{21}$  les coefficients de pertes respectivement pour un rétrécissement et un élargissement. Une expression approchée de la vitesse acoustique  $v$  est donnée par l'équation d'Euler :  $v(x, t) \simeq (p_+ - p_-)/(\rho_0 a_0)$ . Les coefficients de pertes sont habituellement évalués par les formules de Bordat-Carnot, donnant  $K_{12} = (1 - \phi_1/\phi_2)^2$  pour une expansion de section transverse et  $K_{21} = 0.5 \cdot (1 - \phi_1/\phi_2)^{0.75}$  pour une contraction abrupte. Ces approximations font cependant appel à deux hypothèses : (i) la distribution de l'écoulement doit être homogène sur la section transverse ; (ii) le nombre de Reynolds de l'écoulement instantané doit être élevé  $4|v|r_h/(S\nu) > 10^4$ . Ces deux conditions ne sont pas respectées dans le cas d'écoulement à travers les matériaux poreux constituant les stacks et échangeurs de chaleur : en effet, d'une part, la taille des pores étant de l'ordre ou inférieur à quelques épaisseurs de couches limites, une distribution transverse de vitesse est présente dans chaque pore et, d'autre part, les nombres de Reynolds instantanés n'atteignent jamais de telles valeurs. Les coefficients de pertes de charges sont alors sous-estimés.<sup>172</sup> Les coefficients de pertes tabulés pour des nombres de Reynolds plus faibles,<sup>74</sup> tels que ceux reproduits à la figure 6.3, sont donc une meilleure approximation, qui peut être améliorée par l'utilisation de coefficient effectif comme le propose Wakeland et Keolian.<sup>172</sup> Dans le cadre de cette étude, une évaluation de l'ordre de grandeur des pertes singulières étant suffisante, on se contentera d'utiliser les coefficients tabulés donnés à la figure 6.3. Une matrice de diffusion  $\mathcal{S}_{ml}$  des



**FIGURE 6.3** – Coefficients de pertes de charges  $\zeta = \Delta p/(\rho v^2/2)$  tabulés pour une variation abrupte de section transverse, pour différents rapports de surface transverse  $F_0/F_1$  ( $F_0 < F_1$ ) pour (gauche) une brusque expansion, et (droite) une brusque contraction. Figures issues de 74

pertes de charges à chaque interface peut alors être établie,

$$\mathcal{S}_{ml}(\omega, p, |v^2|) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta p}{2p} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\Delta p}{2p} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Les pertes de charge singulières sont intégrées entre les matrices de diffusion des éléments de porosités différentes pour obtenir une matrice de diffusion non linéaire du noyau, dépendante en fréquence, et en température (en utilisant la distribution effective si elle est accessible) et qui varie avec les amplitudes de la pression et de la vitesse acoustique au carré

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_2) \\ \tilde{p}_-(x_1) \end{pmatrix} = \mathcal{S}_{nl}(\omega, T_0(x), |\tilde{p}|, |\tilde{v}|^2) \begin{pmatrix} \tilde{p}_+(x_1) \\ \tilde{p}_-(x_2) \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

La nécessité d'intégrer ces pertes pour obtenir des niveaux de saturation réalistes est mise en évidence *a posteriori* en montrant leur prépondérance dans la saturation de l'amplitude devant les pertes dues à la propagation non linéaire (voir Annexe E.1 et figure E.1).

### 6.3.3 Autres effets non linéaires

De nombreux effets non linéaires, autres que les pertes singulières, prennent place dans les moteurs thermoacoustiques. Tous ces effets – pompage thermoacoustique, streamings, effets de bord thermiques, etc. – tendent à perturber la distribution de température présente dans le noyau, éloignant cette distribution du cas linéaire supposé à l'équilibre.

Ignorer la distribution non linéaire de température dans le noyau en tenant seulement compte de la différence de température  $\Delta T$  entre les échangeurs de chaleur est une simplification acceptable dans le cas des moteurs à ondes quasi-stationnaires, dans lesquels l'amplification dépend peu de la forme de la distribution. On considérera alors que la différence de température imposée entre les extrémités du régénérateur est celle correspondant à l'état stationnaire résultant de l'ensemble des effets non linéaires s'appliquant sur le noyau. Dans les moteurs à ondes quasi-progressives, l'influence de la distribution de température sur l'amplification est non négligeable.<sup>115</sup> Pour cette raison, une expression des transferts thermiques prenant place dans le noyau serait nécessaire pour décrire plus précisément la distribution de température résultant des différentes contributions de la conduction naturelle, la convection naturelle et les phénomènes de convection thermoacoustique ou due au streaming (de *Rayleigh* et/ou de *Gedeon*). Cependant, les paramètres permettant d'exprimer ces transferts thermiques ne sont pas disponibles dans les exemples de la littérature traités par la suite. En conséquence, une distribution linéaire de température est considérée par la suite, distribution qui prend implicitement en compte l'influence de chacun des phénomènes de transfert de chaleur. Cette distribution permet d'obtenir une évaluation, au moins qualitative, du comportement de l'onde acoustique.

## 6.4 Principe de résolution

La propagation non linéaire dans les guides d'onde à température constante, soit pour  $x \in [0; x_1] \cup [x_2; L]$  est donc décrite par le couple d'équations 6.16 de Burgers généralisées\*.

---

\*. Les équation sont présentées pour la vitesse acoustique à la section 6.2, mais la pression acoustique répond à la même équation

Ces deux domaines sont couplés par une matrice de diffusion non linéaire décrivant le noyau thermoacoustique comprenant le TBT donnée par les équations 6.21. Une solution périodique du problème est recherchée pour chacune des deux composantes, sous la forme

$$q = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(\chi) \sin n\theta + b_n(\chi) \cos n\theta). \quad (6.22)$$

Le terme de propagation non linéaire de l'équation de Burgers se décompose alors en série de Fourier sous la forme :

$$\begin{aligned} q\partial_\theta q &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(\chi) \sin n\theta + b_n(\chi) \cos n\theta] \right) \times \left( \sum_{p=1}^{+\infty} [-pb_p(\chi) \sin p\theta + pa_p(\chi) \cos p\theta] \right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ m \sin m\theta \times \left[ \sum_{p=1}^{m-1} \left( \frac{a_p a_{m-p}}{2} - \frac{b_p b_{m-p}}{2} \right) - \sum_{p=m+1}^{+\infty} (a_{p-m} a_p + b_{p-m} b_p) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ m \cos m\theta \left[ \sum_{p=1}^{m-1} \left( \frac{a_p a_{m-p}}{2} + \frac{b_p b_{m-p}}{2} \right) + \sum_{p=m+1}^{+\infty} (b_{p-m} a_p - a_{p-m} b_p) \right] \right\} \right\}. \quad (6.23a) \end{aligned}$$

De la même manière, la dérivée fractionnaire pour les pertes pariétales et la dérivée seconde du terme de pertes volumiques s'écrivent :

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}} q}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2}} [(a_m - b_m) \sin m\theta + (a_m + b_m) \cos m\theta] \quad (6.23b)$$

$$\partial_{\theta\theta}^2 q = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 [a_n(\chi) \sin n\theta + b_n(\chi) \cos n\theta]. \quad (6.23c)$$

L'égalisation terme à terme des différentes séries de Fourier pour les équations 6.16 mène donc au système d'équations suivant, portant sur les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_\chi a_n &= n \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p a_{n-p}}{2} - \frac{b_p b_{n-p}}{2} \right) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{p-n} a_p + b_{p-n} b_p) - n \frac{a_n}{\Gamma} \right] \\ &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n - b_n), \end{aligned} \right. \quad (6.24a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_\chi b_n &= n \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p b_{n-p}}{2} + \frac{b_p a_{n-p}}{2} \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (b_{p-n} a_p - a_{p-n} b_p) - n \frac{b_n}{\Gamma} \right] \\ &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n + b_n). \end{aligned} \right. \quad (6.24b)$$

Ce système est résolu numériquement et de manière itérative dans le domaine fréquentiel par une méthode des différences finies (Euler explicite) sur les différentes sections du guide d'onde  $[0; x_1]$  et  $[x_2; L]$ , couplées par la matrice de diffusion non linéaire (6.21), avec des conditions en  $x = 0$  et  $x = L$  qui dépendent de la géométrie du moteur. Les étapes du schéma de résolution sont assez semblables à celles proposées par *Menguy et Gilbert* pour la résolution de la propagation non linéaire d'oscillations forcées dans les instruments à

vent,<sup>88</sup> dont il constitue une extension pour les oscillations auto-entretenues. En effet, dans le premier cas, les conditions aux frontières sur le guide d'onde sont telles que : (i) la condition de rayonnement du pavillon impose une condition d'impédance à l'extrémité de l'instrument ; (ii) une condition de source est imposée à l'embouchure, typiquement sous la forme d'une pression acoustique périodique. Ici, s'agissant d'un oscillateur auto-entretenu, quelques différences apparaissent : (i) des conditions d'impédances sont imposées à chaque extrémité (paroi rigide si extrémité fermée, condition de rayonnement si extrémité ouverte, condition de continuité si résonateur annulaire ou jonction en T, etc.) ; (ii) la fréquence des auto-oscillations n'est pas définie et dépend de plusieurs paramètres (notamment du gradient de température dans le noyau et de l'amplitude des oscillations). Le processus de résolution du problème est constitué des étapes génériques suivantes.

1. Un spectre harmonique initial est défini arbitrairement avec une fréquence fondamentale  $f_1$  proche de la fréquence de fonctionnement du moteur. Cette fréquence n'a pas besoin d'être exactement celle de fonctionnement du moteur, et peut être choisie comme, par exemple, la fréquence de résonance du mode sur lequel le moteur déclenche, calculée pour un résonateur vide de longueur équivalente à celle du moteur. Pour les amplitudes du spectre initial, il est important de noter que, si le calcul doit a priori converger vers une solution quelles que soient les conditions initiales, l'obtention d'une solution est d'autant plus rapide que les conditions d'initialisation sont proches de la solution finale. Un choix d'une amplitude de quelques kPa pour le fondamental et nulle pour les harmoniques semble un point de départ satisfaisant et permet la plupart du temps une convergence rapide vers la solution.
2. Chaque harmonique est propagé sur un aller-retour dans le moteur en appliquant le schéma aux différences finies sur les équations couplées portant sur les coefficients de Fourier (6.24) dans les résonateurs, et en utilisant les matrices de diffusion (6.21) dans le noyau, de façon à revenir à la position initiale. Cette étape peut être légèrement différente selon la configuration de moteur :

**Moteur à résonateur droit.** On prend pour exemple la configuration donnée à la figure 6.1b. La pression initiale correspond à la composante  $p_{+,i}(0)$  à la position initiale (en  $x = 0$ ). La pression  $p_+$  est tout d'abord propagée jusqu'au noyau (sur  $[0, x_1]$ ). A ce stade, l'application de la matrice de diffusion à  $p_+(x_1)$  afin d'obtenir la composante  $p_+(x_2)$  se heurte à un obstacle : la composante  $p_-(x_2)$  n'a pas encore été calculée ; la valeur utilisée est donc celle de l'itération précédente (ou 0 pour la première itération). La pression  $p_+$  est alors propagée jusqu'au bout du résonateur (sur  $[x_2, L]$ ). La pression à l'extrémité  $p_+(L)$  se réfléchit sur le fond rigide du résonateur. La pression réfléchie, notée  $p_-(L)$  se propage vers le noyau (sur  $[L, x_2]$ ), à travers le noyau grâce à la matrice de diffusion (faisant cette fois appel aux valeurs calculées lors de cette même itération). On obtient la pression  $p_-(x_1)$ , qui est propagée jusqu'au point de départ (sur  $[x_1, 0]$ ), avant de se réfléchir sur le second fond rigide, donnant la composante finale après une itération complète  $p_{+,f}(0)$ .

**Moteur à résonateur annulaire.** La pression initiale correspond à la composante  $p_{+,i}(0)$  à la position initiale (en  $x = 0 = L$ ). La composante contrapropagative  $p_{-,i}(L)$  est initialisée arbitrairement à 0 pour la première itération. Les pressions  $p_+$  et  $p_-$  sont propagées simultanément jusqu'au noyau (respectivement sur  $[0, x_1]$

et  $[L, x_2]$ ). La transmission à travers le noyau peut facilement s'exprimer, donnant en fonction de  $p_+(x_1)$  et  $p_-(x_2)$  les valeurs de  $p_-(x_1)$  et  $p_+(x_2)$ . La propagation de ces derniers sur les segments restants (respectivement  $[x_2, l]$  et  $[x_1, 0]$ ) est alors faite, donnant les valeurs finales  $p_{+,f}(0)$  et  $p_{-,f}(L)$ , qui serviront à initialiser l'itération suivante.

3. Après une itération complète, les spectres initiaux et finaux sont comparés en amplitude pour chaque harmonique  $n$ . De la même manière, la phase de la composante fondamentale de la pression est comparée entre le début  $\varphi_i = \angle p_{+,i}^{(1)}$  et la fin de l'itération  $\varphi_f = \angle p_{+,f}^{(1)}$ .
4. Si la différence de phase entre les états initial et final du fondamental est non nulle (c'est-à-dire si  $\varphi_f - \varphi_i \neq 0 \pmod{[2m\pi]}$  avec  $m$  le numéro du mode du résonateur correspondant au mode fonctionnement du moteur), alors la fréquence du fondamental est ajustée. En effet, la fréquence des auto-oscillations d'amplitude finie évolue avec l'amplitude acoustique (phénomène de *nonlinear detuning*<sup>66</sup>) (voir l'Annexe E). Cette correction prend place à chaque itération puisque l'amplitude des oscillations évolue constamment, et diffère en cela du cas des oscillations forcées pour lequel la fréquence d'oscillation est imposée par la source.
5. Si la différence des amplitudes entre les états initial et final (au sens de la déviation absolue  $e = \sum_{n=1}^N |p_{+,f}^{(n)} - p_{+,i}^{(n)}|$ ) est inférieure à un seuil prédéfini  $e < \varepsilon$ , la solution obtenue pour l'état final est considérée comme étant l'état stationnaire recherché pour lequel la saturation de l'amplitude des auto-oscillations est atteinte. La recherche de solution s'arrête alors. Dans le cas contraire ( $e > \varepsilon$ ), l'état stationnaire n'est pas encore atteint. L'état final  $p_{+,f}$  est alors utilisé pour initialiser l'itération suivante, et les étapes 2 à 5 sont répétées jusqu'à l'obtention d'une solution satisfaisante.

La définition du système à résoudre est telle qu'il tend automatiquement vers le point où les phénomènes d'amplification (amplification le cas échéant par le noyau thermoacoustique ou apport d'énergie par la cascade harmonique) compensent les différentes pertes prises en compte (atténuation le cas échéant par le noyau, fuite énergétique due à la cascade harmonique, pertes singulières, pertes de volumes et de couches limites) après un nombre suffisant d'itérations, et ce pour chaque harmonique. Pour cette résolution numérique, le nombre d'harmoniques doit nécessairement être limité. Incidemment, l'énergie portée par chaque harmonique diminue rapidement avec son rang au-delà de quelques dizaines d'harmoniques, notamment à cause de la dépendance des pertes volumiques en  $\omega^2$ . Il est donc raisonnable de tronquer la série harmonique, en ne conservant que 50 à 200 termes et ce sans introduire une erreur de troncature significative.

## 6.5 Conclusion

La description de la propagation faiblement non linéaire dans des moteurs thermoacoustiques de géométries et de régime de fonctionnement différents (résonateur droit ou annulaire) est faite par la réunion d'outils simples. L'outil principal est la description de la propagation faiblement non linéaire dans les résonateurs par une méthode multi-échelles qui décrit le comportement de l'onde acoustique par des équations de Burgers généralisées. La description linéaire de la propagation dans le noyau thermoacoustique permet de compléter la

représentation du moteur. L'obtention de niveaux de saturation raisonnables requiert la prise en compte d'une forme de pertes non linéaires (ici, des pertes singulières dues aux changements de section apparente entre les éléments poreux du noyau). La résolution du problème est faite par une méthode itérative, étendant aux auto-oscillations de fréquence indéterminée une solution existante pour les oscillations forcées. Ces outils sont mis en œuvre au chapitre 7 sur des configurations pour lesquelles des résultats sont présentés dans la littérature. Une comparaison des résultats de cette modélisation à ceux obtenus expérimentalement est alors possible.

Présentés dans le cadre de ce travail pour des configurations académiques, les mêmes outils peuvent facilement permettre de prendre en compte des géométries plus complexes, et ainsi de s'éloigner des configurations de laboratoire discutées pour explorer des configurations réalistes (par exemple les moteurs de Stirling présentant une section torique couplée à une section droite) – même si la complexité des géométries s'avère être un facteur limitant pour le phénomène de cascade harmonique.

## Chapitre 7

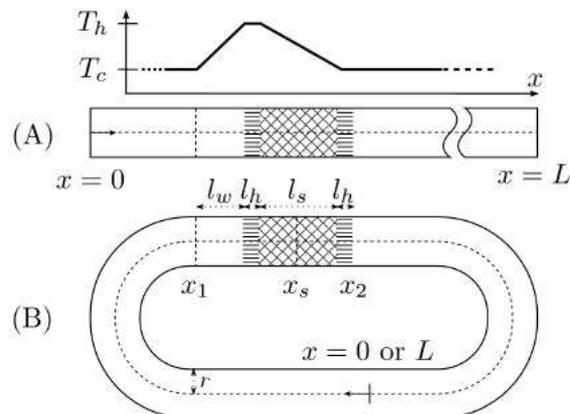
# La formation de choc dans les moteurs thermoacoustiques

Différentes configurations pour lesquelles des résultats expérimentaux sont donnés dans la littérature sont présentées. Des simulations de champ acoustique à l'état stationnaire en présence de propagation non linéaire sont réalisées pour ces mêmes configurations et comparées aux résultats disponibles. Une analyse qualitative est présentée. Une piste d'interprétation est donnée sur la base d'une analyse linéaire de l'amplification des différents systèmes thermoacoustiques, corroborée par l'évaluation de l'intensité acoustique portée par les premiers harmoniques.

### 7.1 Les configurations de moteurs explorées

Lors de deux études expérimentales récentes, *Biwa et coll.* ont concentré leur attention sur la possibilité de formation d'ondes de choc dans des configurations simples de moteurs à résonateur droit<sup>19,20</sup> ou annulaire<sup>20</sup> et fonctionnant avec de l'air à pression atmosphérique ( $P_0 = 1$  bar). Ces configurations sont présentées schématiquement à la figure 7.1.

Afin de faciliter la comparaison, les différentes configurations sont construites autour de noyaux semblables, dans des résonateurs composés de tubes de même diamètre. Les dimensions



**FIGURE 7.1** – Configurations générales de moteurs thermoacoustiques. (A) Moteur droit. (B) Moteur annulaire. Les deux configurations sont construites autour d'un noyau semblable, avec des résonateurs de même rayon. Une distribution de température idéalisée est donnée, avec des gradients de température linéaires.

des différents composants de ces moteurs sont données en annexe dans la tableau B.1. Dans toutes les configurations, l'hypothèse de noyau court est respectée : le noyau ne fait que quelques centimètres d'épaisseur, pour des longueurs de résonateur de 0.8 m à 3.0 m.

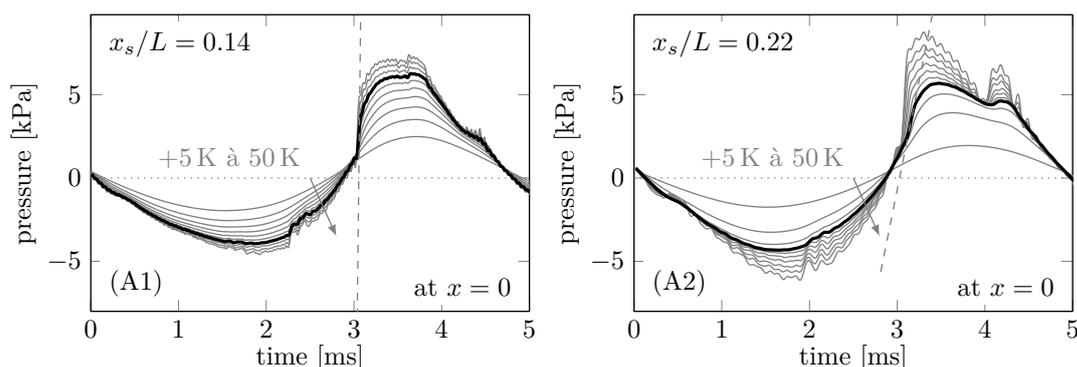
## 7.2 Cas d'un moteur à résonateur droit

Dans un premier temps, l'étude porte sur une configuration de moteur à résonateur droit fermé à ses deux extrémités, tel que celui représenté par la configuration (A) de la figure 7.1.

### 7.2.1 Influence de la position du noyau

Dans un moteur à résonateur droit, la distribution du champ acoustique résonant est déterminée par les conditions d'impédance à chaque extrémité du résonateur, que celle-ci soit fermée ou ouverte (impédance respectivement "infinie" ou de rayonnement)<sup>38</sup> ou couplée à un alternateur (dont l'impédance peut être déterminée analytiquement<sup>130</sup> ou expérimentalement). Il est cependant établi que l'amplification d'un mode n'est possible que si le gradient de température et la variation de l'amplitude de pression sont de même signe le long du stack.<sup>160</sup> Dans le cas simple d'un résonateur droit à section transverse constante, les conditions de déclenchement et de fonctionnement d'un moteur sont donc fortement dépendantes de la position du noyau dans le résonateur. Ce phénomène est bien connu et permet de sélectionner le mode de fonctionnement du moteur – par exemple le premier mode<sup>19</sup> ou le deuxième<sup>20</sup> – mais aussi de mettre en évidence, pour des conditions de chauffage suffisantes, des comportements complexes tels que doublement de fréquence, quasi-périodicité, etc. liés au déclenchement de plusieurs modes de fréquences incommensurables.<sup>192</sup>

La simulation de la forme d'onde obtenue en fonction de la différence de température imposée est calculée pour deux positions (noyau centré autour de positions  $x_s/L = 0.14$  et 0.22) du noyau thermoacoustique dans un moteur à ondes quasi-stationnaires de géométrie



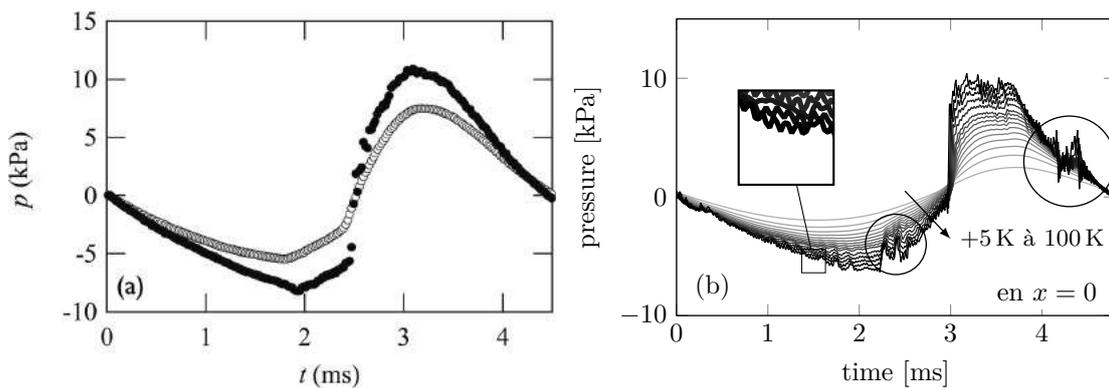
**FIGURE 7.2** – Déformation du front d'onde pour deux positions  $x_s/L$  du noyau dans un moteur à résonateur droit (configuration (A) de la figure 7.1, semblable à celle utilisée par Biwa dans [19]) pour des différences de température entre les extrémités du régénérateur de 5 K à 50 K au-delà du seuil avec un pas de 5 K. (A1) :  $x_s/L = 0.14$ , (A2) :  $x_s/L = 0.22$ . Le cas  $DR = 5\%$  est représenté en gras. La pente maximale pour le cas  $DR = 5\%$  est représentée en pointillés, montrant que le choc est formé à gauche (pente infinie) et non à droite (pente finie).

simple (configuration A) de la figure 7.1. Les résultats sont représentés à la figure 7.2. Dans les deux cas, pour une différence de température légèrement supérieure à celle permettant le déclenchement, la forme d'onde est quasiment sinusoïdale : l'amplitude acoustique n'est pas suffisante pour permettre une cascade de l'énergie acoustique vers les modes supérieurs et seule la fréquence fondamentale est excitée. Pour des différences de température très supérieures à celles nécessaires au déclenchement de l'instabilité, les deux configurations permettent d'atteindre une déformation du front d'onde montrant la formation d'une onde de choc : en effet, la pente maximale du front d'onde est quasi-infinie. Cependant, pour un drive ratio de 5% (courbes plus épaisses en noir de la figure 7.2) si le front de choc est clairement formé dans le premier cas (la pente mise en évidence par la ligne pointillée est quasi-infinie), ce n'est pas le cas dans la seconde configuration. La position du noyau dans le résonateur apparaît donc comme un critère déterminant pour la formation d'ondes de choc dans un moteur à ondes quasi-stationnaires.

### 7.2.2 Comportement de l'onde choc

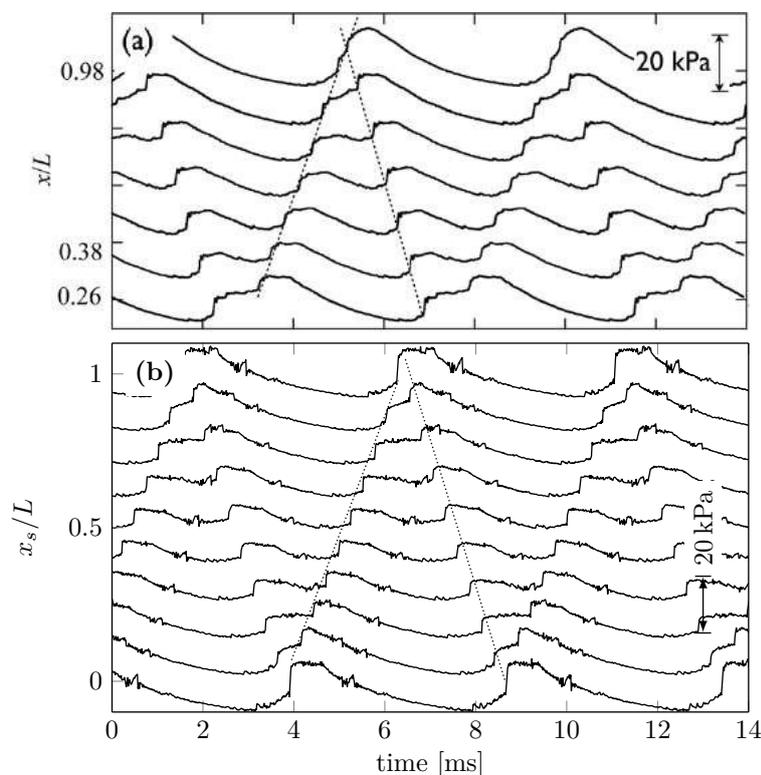
Afin de pouvoir comparer les résultats issus de la simulation à ceux obtenus expérimentalement, la configuration choisie est celle pour laquelle *Biwa et coll.* obtiennent expérimentalement des chocs, c'est-à-dire une position relative du noyau à  $x_s/L = 0.14$ . L'évolution de la forme du front d'onde calculée pour cette configuration est présentée à la figure 7.3, et comparée à celle mesurée pour différentes puissances de chauffage (issue de 19). Cependant, le modèle traité ici ne considère pas les transferts thermiques, et les résultats de modélisation sont donc en fonction de la température de l'échangeur chaud (température et puissance de chauffage sont reliées par une équation de la chaleur). La comparaison se limite alors à une comparaison quantitative.

Il est à noter que les perturbations observées sur le front d'onde pour les fortes amplitudes ne sont pas des artefacts numériques. Certes, les faibles oscillations à (relativement) haute fréquence, mises en évidence par le zoom de la figure 7.3-b, sont l'effet de la troncature harmonique : l'énergie des harmoniques d'ordre supérieur à l'ordre de troncature est rejetée



**FIGURE 7.3** – Évolution de la forme du front d'onde de pression dans la configuration (A1) ( $x_s/L = 0.14$ ), à la position  $x = 0$ . (a) Expérimentalement pour deux puissances de chauffage, une modérée (o), et une forte (●) (issue de 19); (b) Calculée pour une différence de température au-delà du seuil de 5 K à 100 K avec un pas de 5 K jusqu'à 50 K, puis 10 K.

sur le dernier harmonique  $N$  calculé (ici de rang 150), générant des oscillations de fréquence  $Nf_1$  sur la forme d'onde calculée. Mais les accidents de plus grande amplitude, soulignés par les cercles sur la figure 7.3-b, ne résultent pas de considérations numériques : ils sont notamment indépendants de la discrétisation spatiale du problème, ainsi que de la troncature harmonique. Ils sont vraisemblablement causés par les réflexions complexes prenant place aux différentes interfaces dans le noyau, mais aussi sur les gradients de température du stack et du TBT. En effet, en fixant artificiellement la porosité des différents éléments à 100 %, les réflexions sur les interfaces sont supprimées mais les accidents – bien que moins abrupts – restent présents. Ces accidents sont peu observables sur les courbes expérimentales. Cependant, le sous-échantillonnage des données expérimentales disponibles empêche de conclure sur leur absence.



**FIGURE 7.4** – Évolution spatio-temporelle d'une onde de choc quasi-stationnaire dans la configuration (A1). Les lignes pointillées mettent en évidence la propagation aller-retour du choc. (a) Expérimentalement mesurée par Biwa et coll. pour une puissance de chauffage de 550 W (issue de [19]); (b) Calculée pour  $\Delta T = \Delta T_d + 100$  K

La figure 7.4 présente l'évolution temporelle du front d'onde dans ce même moteur, obtenue expérimentalement pour une puissance élevée (résultats issus de [19]), et numériquement pour une différence de 100 K au-delà du seuil pour lequel l'amplitude calculée correspond à l'amplitude expérimentale. Chaque signal de pression subit un décalage proportionnel à la position relative  $x/L$  à laquelle il a été mesuré. L'onde est le résultat de la superposition de deux ondes contrapropagatives d'amplitude équivalente se réfléchissant alternativement à chaque extrémité du moteur et mise en évidence par les lignes pointillées sur les deux figures.

Une période acoustique correspond au temps d'un aller-retour dans le résonateur, montrant que le moteur fonctionne sur son premier mode (le mode " $\lambda/2$ "). La période calculée est d'environ 4.78 ms, donnant une vitesse de propagation du choc équivalente à la vitesse du son  $a_{shock} \approx 352 \text{ m s}^{-1}$ .

### 7.2.3 Distribution de l'intensité acoustique

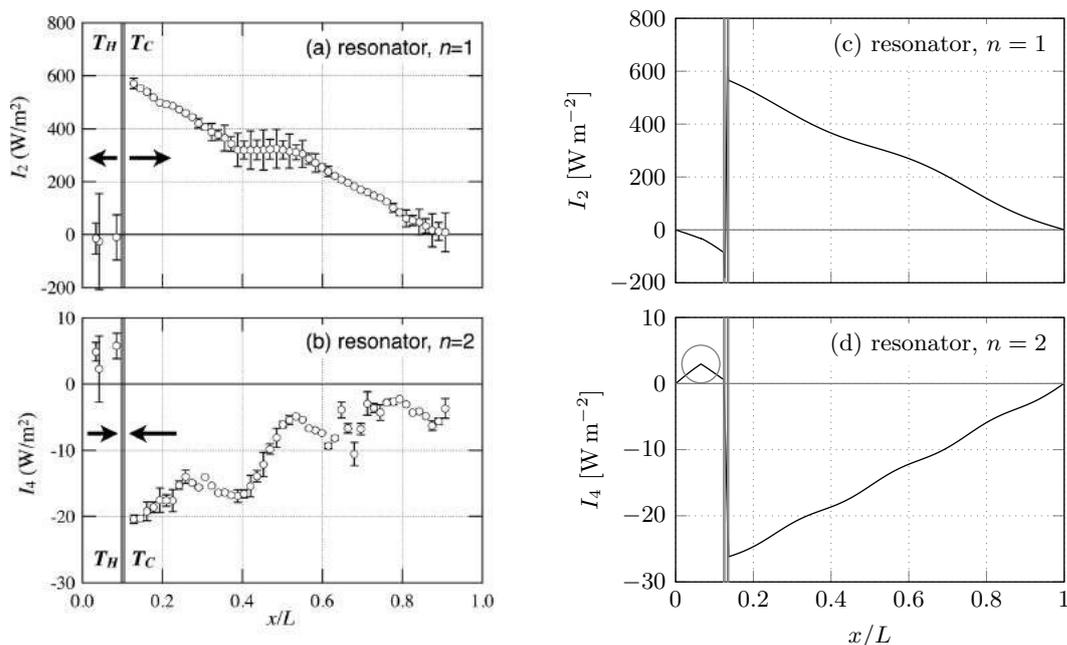
Accompagnant les mesures de pressions, *Biwa et coll.*<sup>19,20</sup> proposent une évaluation de la distribution de l'intensité acoustique dans les configurations de moteurs explorées pour fournir des indices quant au comportement du noyau thermoacoustique. Une mesure simultanée de la pression et de la vitesse acoustiques dans les différentes configurations (par exemple par anémométrie Laser Doppler ou grâce à un doublet microphonique) donne accès à une estimation de cette grandeur, définie comme le flux moyen de puissance acoustique sur la section transverse par unité de surface, et pour chaque harmonique  $n$  :

$$I^{(2n)} = \langle p^{(n)} v^{(n)} \rangle = \frac{1}{2} \Re[p^{(n)} v^{(n)*}]. \quad (7.1)$$

Le signe de l'intensité acoustique  $I$  représente la direction du flux de puissance : positif vers la droite et négatif vers la gauche. Cette information est pertinente dans le sens où elle permet de comprendre le rôle du noyau thermoacoustique dans l'amplification ou l'atténuation de la déformation du front d'onde. En effet, un flux de puissance dont la direction s'éloigne du noyau traduit une production de puissance acoustique dans le noyau (le noyau agit comme une source acoustique), et à l'inverse, un flux de puissance se dirigeant vers le noyau traduit une absorption de puissance par le noyau (le noyau se comporte alors en puits d'énergie acoustique).

La distribution axiale de l'intensité acoustique obtenue expérimentalement dans la configuration (A0) pour les deux premiers harmoniques  $I_2$  et  $I_4$  est représentée à la figure 7.5, telle que mesurée par *Biwa*<sup>20</sup> dans une configuration ne permettant pas expérimentalement la formation d'une onde de choc. La distribution obtenue par simulation est présentée pour un gradient de température tel que le niveau acoustique calculé est équivalent à celui mesuré par *Biwa*.

On observe aussi bien sur les résultats expérimentaux que sur les résultats théoriques que l'intensité acoustique est nulle sur les parois rigides aux extrémités du guide d'ondes, comme attendu pour une configuration d'ondes quasi-stationnaires. Dans cette configuration de moteur à résonateur droit (A0), le noyau thermoacoustique agit comme une source de puissance pour le fondamental (qui correspond au deuxième mode dans ce cas, soit le mode  $\lambda$ ). Cependant, pour le second harmonique (proche du mode 4 du résonateur, mode en  $2\lambda$ ) il agit en puits acoustique. La cascade harmonique est donc contrecarrée par le comportement du noyau qui bloque le transfert de l'énergie acoustique vers les harmoniques supérieurs et empêche une déformation importante du front d'onde. Le changement abrupt de pente observable entre l'extrémité gauche du guide d'onde et le noyau sur les deux courbes théoriques (soit en  $x/L = 0.06$ ), et plus particulièrement sur celle du second harmonique (mis en évidence par le cercle gris), montre le changement de description de la propagation acoustique. Dans le résonateur sur le domaine  $x/L \in [0, 0.06]$ , la propagation est décrite par la théorie faiblement non linéaire (l'énergie cascade du fondamental vers le second harmonique est supérieure aux pertes, donc l'intensité acoustique augmente). Dans le TBT,



**FIGURE 7.5** – Distribution axiale de l'intensité acoustique dans la configuration (A0) pour les deux premiers harmoniques. Les lignes verticales délimitent le stack. (a)-(b) Expérimentalement par Biwa et coll. pour  $\Delta T \simeq \Delta T_d + 85$  K (issue de 20); (c)-(d) Calculée pour un gradient de température  $\Delta T \simeq \Delta T_d + 65$  K donnant la même intensité pour le fondamental.

sur le domaine  $x/L \in [0.06, 0.15]$ , la propagation est décrite par la théorie linéaire (le second harmonique subit seulement des pertes lors de la propagation donc l'intensité acoustique diminue). La concordance quantitative des rapports entre les harmoniques montre que la description (même grossière) des pertes singulières est satisfaisante. En conclusion, la distribution calculée reflète fidèlement celle mesurée et corrobore l'hypothèse de *Biwa*, selon laquelle la cascade harmonique prenant place dans les parties passives du moteur peut être renforcée ou contrecarrée par le noyau, selon qu'il agit en source ou puits acoustique pour les harmoniques supérieurs (et en particulier le second).

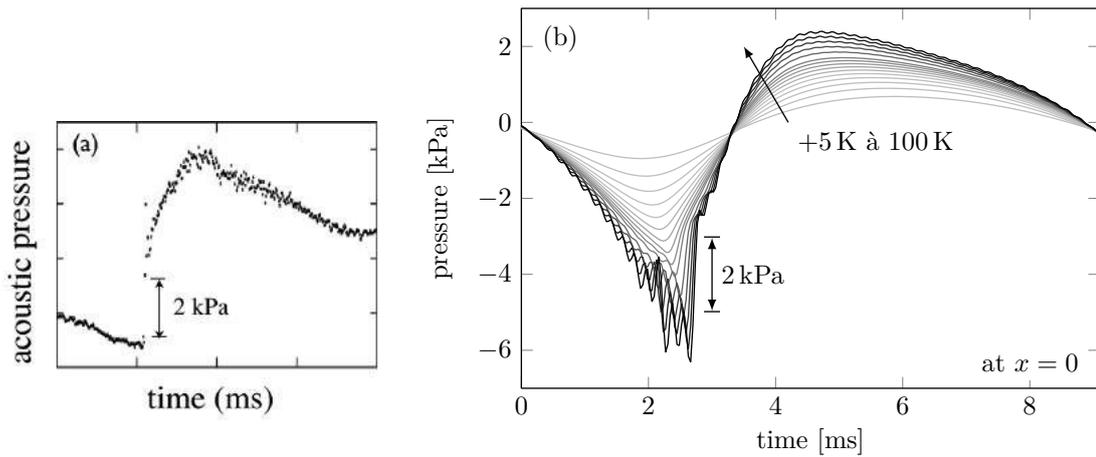
### 7.3 Cas d'un moteur à résonateur annulaire

Dans le cas d'un résonateur annulaire de section transversale uniforme\* et dans lequel la courbure peut être ignorée (cas traité dans cette section), le moteur déclenche sur son premier mode<sup>20</sup> ( $\lambda = L$ ). Les conditions d'impédance imposées sur le noyau sont déterminantes dans le comportement amplificateur ou atténuateur par le noyau pour chacun des modes du moteur, dont la fréquence est proche de celle des harmoniques supérieurs.

\*. Une perturbation, même minime, de la géométrie du résonateur génère des variations de l'impédance acoustique du résonateur qui peuvent se traduire par un phénomène de sélection de mode. Le moteur annulaire de *Yazaki et coll.*,<sup>191</sup> dont le résonateur voit son rayon légèrement réduit sur une section comprenant le noyau, et déclenchant sur le second mode, en est un exemple frappant.<sup>62</sup>

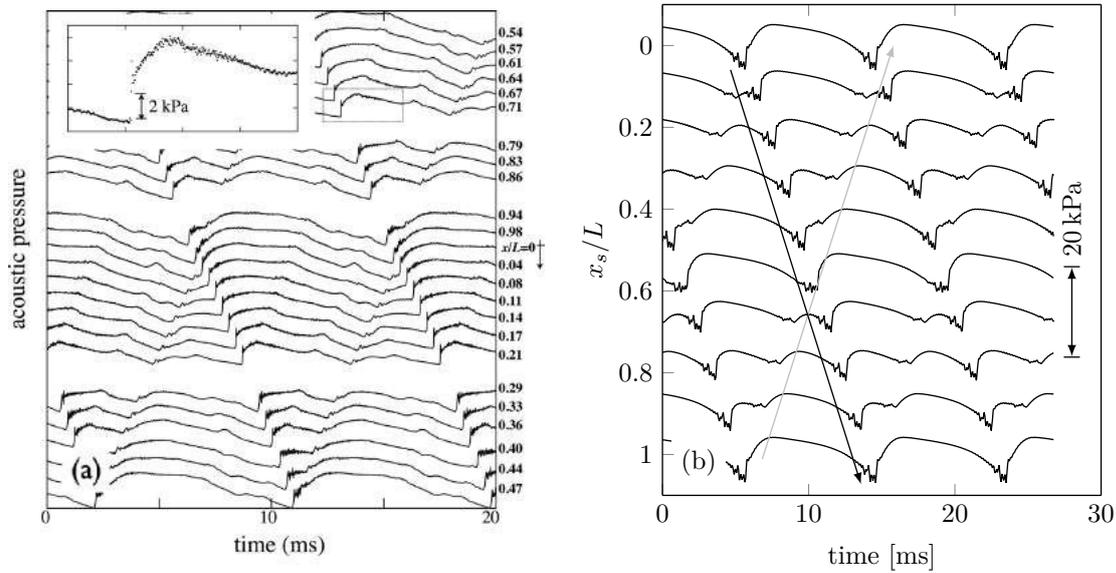
### 7.3.1 Comportement de l'onde de choc

La simulation de l'évolution de la forme du front d'onde calculée pour la configuration annulaire (configuration (B) de la figure 7.1) est présentée à la figure 7.6. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus par *Biwa et coll.*<sup>20</sup> sur un prototype de configuration similaire. Les données expérimentales sont ici fournies pour une différence de température de  $\sim 100$  K au dessus du seuil. Aucune indication n'est fournie sur la forme de la distribution de température, pourtant déterminante dans le processus d'amplification thermoacoustique dans les systèmes annulaires.<sup>115</sup> En conséquence, une distribution linéaire est utilisée pour la modélisation, n'autorisant qu'une comparaison qualitative entre résultats expérimentaux et issus de la modélisation. La forme du front d'onde est cependant bien retrouvée. Lorsque le choc est formé, le modèle permet de décrire un saut de pression du même ordre de grandeur ( $\sim 2$  kPa). Comme dans le cas du moteur à ondes quasi-stationnaires, on observe sur les résultats de simulation des oscillations haute fréquence dues à la troncature de la série harmonique. Les accidents dus à la réflexion sur le noyau sont par contre beaucoup moins marqués. D'autre part, la dissymétrie de la forme d'onde est beaucoup plus marquée dans cette configuration que pour le cas d'ondes stationnaires, même en l'absence de choc. La détente est courte et de grande amplitude, tandis que la surpression est plus modérée en amplitude et dure presque les deux tiers de la période acoustique.



**FIGURE 7.6** – Évolution de la forme du front d'onde de pression calculé dans la configuration (B) ( $x_s/L = 0.14$ ), à la position  $x = 0$ . (a) Expérimentalement pour  $\Delta T = \Delta T_d + 100$  K, zoom partiel (issue de [20]); (b) Calculée pour une différence de température au-delà du seuil de 5 à 100 K avec un pas de 5 K jusqu'à 50 K, puis 10 K.

L'évolution temporelle expérimentale (à gauche) et théorique (à droite) de la pression en différents points du résonateur est donnée à la figure 7.7. Le résonateur étant annulaire, la première et dernière courbe de chaque figure sont consécutives. Le gradient de température imposé est suffisant pour l'obtention d'un choc, qui se propage dans le sens des  $x$  croissants, correspondant au sens horaire sur la figure 7.1. Le champ acoustique dans le moteur n'est pas purement progressif. Il résulte de la superposition des deux composantes contrapropagatives, l'une étant plus amplifiée que l'autre par le noyau (la composante horaire a une amplitude de l'ordre du double de celle de la composante anti-horaire).



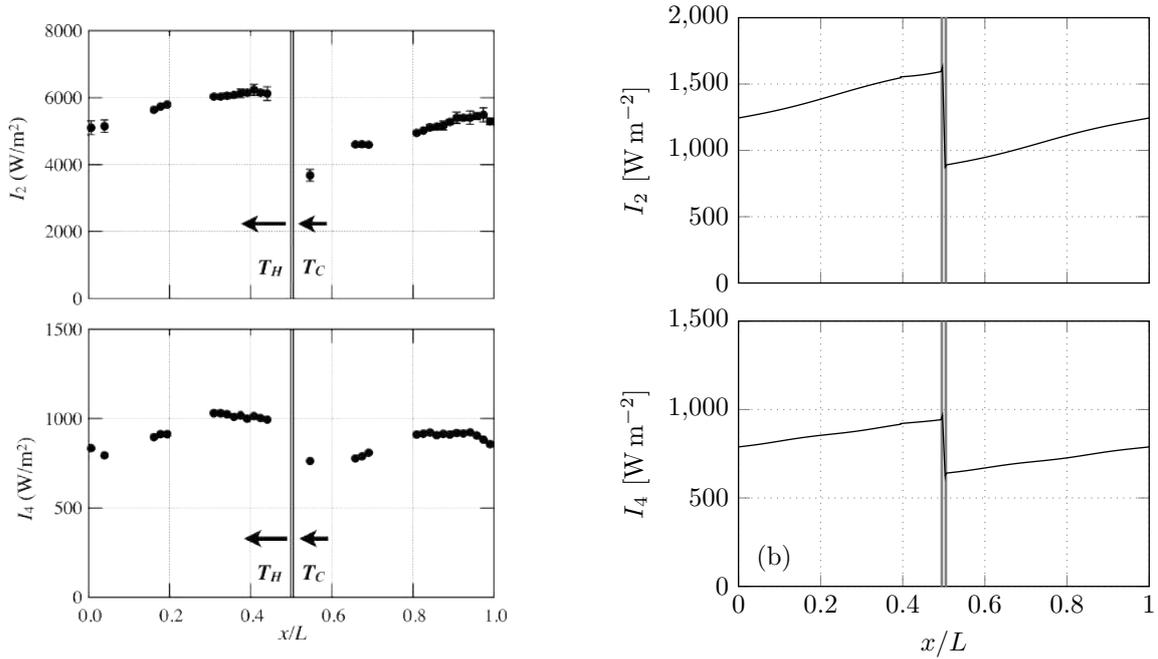
**FIGURE 7.7** – Évolution spatio-temporelle d'une onde de choc quasi-progressive dans la configuration (B). (a) Évolution expérimentale (issue de 19); (b) Évolution calculée pour  $\Delta T = \Delta T_d + 100 \text{ K}$  en neuf points régulièrement espacés (les premières et dernières positions sont équivalentes). La flèche noire met en évidence la propagation d'une onde de choc progressive dans le moteur, dans le sens horaire. La flèche grise souligne la composante contrapropagative d'amplitude inférieure, se propageant dans le sens anti-horaire.

### 7.3.2 Distribution de l'intensité acoustique

La distribution axiale de l'intensité acoustique dans la configuration (B) pour les deux premiers harmoniques  $I_2$  et  $I_4$  est représentée à la figure 7.8, telle que mesurée par *Biwa*<sup>20</sup> dans une configuration où une onde de choc est formée. La distribution calculée dans la même configuration est présentée pour un gradient de température conduisant à une même intensité du second harmonique, la même intensité du fondamental n'étant pas atteignable dans la modélisation proposée, probablement à cause de la limitation d'une distribution de température linéaire.

La distribution de pression calculée reflète fidèlement celle mesurée et corrobore ici aussi l'hypothèse de *Biwa*. On retrouve les résultats attendus pour une configuration d'ondes quasi-progressives : l'intensité acoustique est toujours de même signe (car portée par une onde quasi-progressive se déplaçant toujours dans le même sens). Dans cette configuration le noyau thermoacoustique du moteur à résonateur annulaire (B) agit comme une source de puissance pour la composante du fondamental et du second harmonique se propageant vers la gauche (sens horaire sur la figure 7.1) et comme un puits acoustique pour la composante anti-horaire.

D'un point de vue quantitatif cependant, la modélisation proposée (et plus particulièrement l'utilisation d'une distribution de température linéaire) montre ses limites. Les rapports d'amplitudes entre les différents harmoniques calculés ( $I_2/I_4 < 2$ ) ne sont pas comparables avec ceux mesurés ( $I_2/I_4 > 5$ ). En effet, la différence de température imposée au stack semble suffire pour décrire l'amplification dans un régime d'ondes stationnaires. Dans un régime intermédiaire, comme ici avec un résonateur annulaire, la nécessité de prendre en compte



**FIGURE 7.8** – Distribution axiale de l'intensité acoustique dans la configuration (B) pour les deux premiers harmoniques. Les lignes verticales délimitent le stack. A gauche, distribution mesurée par Biwa et coll. pour un  $\Delta T \simeq \Delta T_d + 100$  K,<sup>20</sup> à droite distribution calculée pour un gradient de température donnant la même intensité pour le second harmonique  $\Delta T \simeq \Delta T_d + 85$  K.

plus finement la distribution de température dans les moteur à ondes quasi-progressives<sup>115</sup> est confirmée.

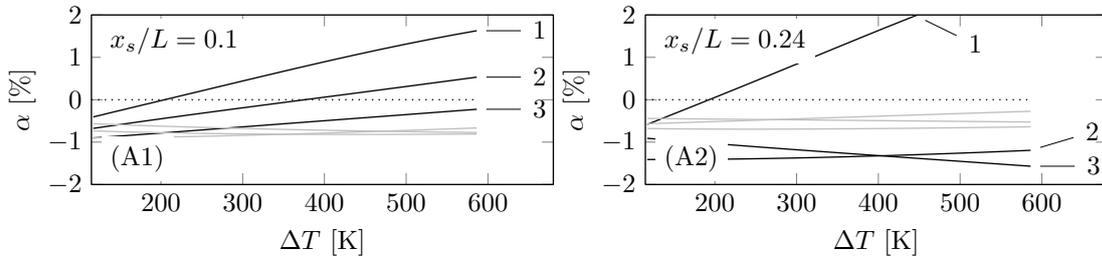
## 7.4 Analyse linéaire - Interprétation

Les conditions d'impédance imposées sur le noyau déterminent l'amplification de chacun des modes du moteur dont la fréquence est proche de celle des harmoniques supérieurs. Dans le cadre de cette étude, on considère qu'un seul mode déclenche, et que la propagation non linéaire excite les harmoniques de ce mode. Ces harmoniques ne correspondent pas exactement aux modes supérieurs du résonateur à cause de la présence du noyau thermoacoustique, et notamment du fort gradient de température le long de celui-ci, rendant le résonateur inharmonique. Cependant la différence de fréquence entre un harmonique et le mode de même ordre reste minimale, permettant d'appliquer le raisonnement fait pour une onde à la fréquence d'un mode à l'harmonique correspondant.

### 7.4.1 Configurations à résonateur droit

Pour un moteur à ondes quasi-stationnaires utilisant un résonateur droit fermé à ses deux extrémités, un calcul du taux d'amplification linéaire<sup>62</sup> des premiers modes est fait (grâce à la matrice de transfert globale du moteur, telle que présentée à la section 1.2) en fonction du gradient de température imposé, et pour deux positions du noyau. Cette analyse

est présentée à la figure 7.9. Une première position du noyau est choisie près de l'extrémité du résonateur, configuration notée (A1). La seconde position se situe à environ un quart de la longueur du résonateur, et elle est notée (A2). Un résultat classique pour les moteurs à ondes quasi-stationnaires<sup>160</sup> permet d'affirmer que l'amplification d'un mode n'est possible que si le gradient de température et le gradient de pression sont de même signe.



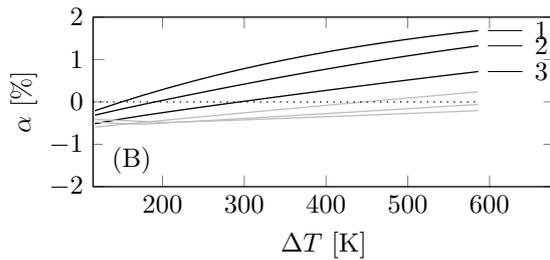
**FIGURE 7.9** – Taux d'amplification linéaire  $\alpha$  des trois premiers modes des moteurs en fonction du gradient de température imposé, dans deux configurations (A1) et (A2) d'un même moteur à ondes stationnaires, où seule la position relative du noyau change de 0.1 à 0.24. L'amplification des trois modes suivants est montrée en gris.

Dans les trois cas considérés, le gradient de température dans le stack est négatif suivant la convention de signe de la figure 7.1. Le calcul de l'amplification linéaire dans les moteurs permet de retrouver les résultats attendus : dans le cas (A1), le gradient de pression est négatif pour les 3 premiers modes, et donc de même signe que le gradient de température. L'amplification de chacun des modes augmente donc avec le gradient de température, comme le montre la figure 7.9-(A1). Dans le cas (A2), le gradient moyen est quasiment nul pour le second mode (puisqu'il est centré sur le nœud de pression) et positif pour le troisième. En accord avec ce qui précède, l'atténuation du troisième mode augmente avec le gradient de température, et l'atténuation du second mode est quasiment constante avec les variations de gradient de température.

#### 7.4.2 Ondes progressives

La même analyse peut être conduite sur le moteur à ondes quasi-progressives – à la différence que le champ acoustique dans le résonateur est régi par le noyau lui-même. De plus, cette géométrie de moteur est invariante par translation : selon les hypothèses faites précédemment, permettant notamment d'ignorer la courbure du guide d'onde devant les effets non linéaires, la position du noyau n'a pas d'incidence sur le fonctionnement du moteur. Le taux d'amplification des premiers modes en fonction de la différence de température au dessus du seuil dans un moteur annulaire à section transversale constante est donné à la figure 7.10. Elle montre que, la différence de température augmentant, le taux d'amplification augmente progressivement pour tous les harmoniques.

Cependant, ce type de configuration annulaire montre une forte sensibilité aux variations du réseau acoustique auquel le noyau thermoacoustique est couplé, et le comportement présenté ne peut être extrapolé à d'autres configurations.



**FIGURE 7.10** – Taux d'amplification linéaire  $\alpha$  des six premiers modes des moteurs en fonction du gradient de température imposé, pour un moteur à résonateur annulaire (configuration B).

## 7.5 Conclusion

Ce chapitre présente l'implémentation de la modélisation de la propagation faiblement non linéaire proposée au chapitre précédent, basée sur une méthode multi-échelles pour décrire les phénomènes cumulatifs prenant place dans les résonateurs et menant à une description de la déformation du front d'onde. Cette description est couplée à celle, linéaire mais incluant des pertes singulières, du noyau thermoacoustique. Les résultats obtenus à l'aide de ces outils théoriques sont confrontés aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature pour des configurations de moteurs à résonateurs droits ou annulaires. Dans tous les cas, cette description de la propagation non linéaire permet de décrire, au moins de manière qualitative, les comportements observés expérimentalement. Dans le cas des moteurs à résonateur droit, ceux-ci étant peu sensibles à la distribution de température dans leur noyau, le modèle est suffisant pour obtenir un bon accord quantitatif, malgré la description sommaire des pertes singulières. Concernant les moteurs à ondes quasi-progressives, la grande sensibilité de l'amplification par le noyau à la distribution de température révèle que l'hypothèse (forte) de distribution linéaire de la température est un point faible de la description choisie. Une modélisation des transferts thermiques prenant place dans le noyau, à condition de pouvoir les identifier et les quantifier, s'avère alors nécessaire. Dans le cas où une caractérisation expérimentale de la distribution de température est disponible, cette dernière devrait pouvoir aider à améliorer les performances du modèle.



## Chapitre 8

# Conclusions générales

Les travaux présentés au cours de ce mémoire s'inscrivent dans la lignée de ceux initiés il y a vingtaine d'année au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Ces derniers visent à la compréhension des différents phénomènes non linéaires prenant place dans les machines thermoacoustiques dans des conditions de fonctionnement variées. Devant la multiplicité, la complexité et l'intrication des phénomènes en jeu, cette compréhension passe par le développement d'outils simples pour la description des phénomènes, permettant une meilleure appréhension des comportements dynamiques complexes dont font preuve les prototypes étudiés.

Certains résultats de la théorie linéaire de la thermoacoustique ont été rappelés, suivis d'une présentation des phénomènes non linéaires prenant place dans les moteurs thermoacoustiques – tout du moins si aucune précaution n'est prise pour limiter leur développement. Ces phénomènes bien identifiés (outre le pompage thermoacoustique inhérent au phénomène, les différents phénomènes de streaming, les effets aérodynamiques aux singularités géométriques, et leur répercussion sur la distribution de température le long du noyau) sont cependant plus ou moins bien décrits et pris en compte dans la prédiction des performances des machines thermoacoustiques. Ces résultats classiques, qui font l'objet du chapitre 1, sont rappelés pour mieux mettre en perspective les travaux présentés avec les connaissances actuelles.

La partie I est consacrée à l'étude expérimentale d'un prototype de transducteur thermoacoustique couplé à un alternateur linéaire, par la suite équipé d'un système de contrôle des performances. Une qualification des performances du transducteur thermo-acousto-électrique est présentée au chapitre 2. Ce prototype, basé sur la configuration d'un moteur thermoacoustique de Stirling, est formé d'une section toroïdale comportant le noyau thermoacoustique dans lequel la conversion thermoacoustique prend place quand la quantité de chaleur introduite est suffisante pour compenser les pertes du système, section couplée à un alternateur linéaire par un guide d'onde. L'alternateur permet de convertir l'énergie acoustique en électricité. Les performances du système, qualifiées expérimentalement, peuvent paraître faibles avec une efficacité de conversion thermo-électrique maximale de l'ordre du pourcent, et une puissance maximale en sortie de 1 W. Ces données sont cependant celles à attendre d'une configuration telle que celle présentée, fonctionnant avec de l'air faiblement pressurisé et un haut-parleur pour alternateur. La modélisation du système sous DeltaEC montre

que le dimensionnement retenu est proche de l'optimal pour la géométrie choisie. Cette modélisation, si elle s'avère relativement pertinente pour de faibles régimes de fonctionnement, tend cependant à surestimer les performances du système quand le niveau acoustique généré est plus important. Cela s'explique par les amplitudes atteintes dans ce prototype, suffisantes pour que les phénomènes non linéaires évoqués précédemment jouent un rôle significatif dans la saturation de l'onde, et l'absence de solution implémentée pour les contrer. Au chapitre 3, afin d'optimiser les performances du moteur en présence des différents phénomènes non linéaires, une approche proposée par *Desjoux et coll.*<sup>47</sup> pour un moteur annulaire a été étendue ici au prototype. Plutôt que de contrecarrer les perturbations de la distribution de température par les effets non linéaire, afin que celle-ci reste proche de la distribution idéale pour laquelle le fonctionnement du moteur a été optimisé, la solution présentée ici propose une approche plus globale. Grâce à une source acoustique auxiliaire, un contrôle de la distribution du champ acoustique permet d'exploiter la distribution de température résultant des différents phénomènes non linéaires (et donc non contrôlée) de manière optimale. La source est alimentée par un signal provenant d'un capteur de pression placé sur le moteur lui-même, amplifié et déphasé. En fonction des paramètres de contrôle, le transducteur manifeste alors des comportements complexes, tels que l'augmentation de son efficacité de conversion associée à une baisse de la différence de température entre les extrémités du régénérateur, une extinction de l'auto-oscillation ou un phénomène d'hystérésis (différence entre les seuils de déclenchement et d'arrêt de l'auto-oscillation). Les phénomènes à l'origine de ces différents comportements n'apparaissent cependant pas clairement.

La partie II est consacrée à l'établissement d'un modèle très simplifié du prototype, permettant de prendre en compte de façon relativement grossière le processus d'amplification thermoacoustique et quelques-uns des processus de saturation (pompage thermoacoustique, vent acoustique...). Au cours du chapitre 4, un modèle d'ordre réduit du transducteur présenté au chapitre 2 est formulé, basé sur une approche électro-acoustique à constantes localisées pour la description du réseau acoustique, couplée à une discrétisation par différences finies de la distribution de température dans le noyau, soumise aux effets du pompage thermoacoustique et d'un éventuel streaming de Gedeon. Le chapitre 5 présente l'intégration de la boucle de rétroaction à ce modèle, et explore les différents degrés de complexité possible avec pour objectif les rôles des différents phénomènes non linéaires dans la dynamique parfois complexes des signaux observés expérimentalement au chapitre 3. On montre notamment qu'une description très sommaire de l'évolution de la température dans le noyau suffit à capter le comportement global, et en particulier l'extinction des oscillations. Ce phénomène est dû à une modification manifeste de la puissance minimale de chauffage nécessaire à l'établissement du régime oscillant dans le moteur en fonction des paramètres de la boucle. Pour certains sets de ces paramètres, le moteur est alors amené en-dessous de son seuil de déclenchement, et l'auto-oscillation s'éteint. La suite de l'étude s'intéresse à l'influence de la forme de la distribution de température dans ces comportements.

Indépendamment du travail décrit précédemment, la partie III présente une étude sur la propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques. Même si la cascade harmonique n'est pas un phénomène prépondérant dans la plupart des moteurs, les configurations académiques présentent souvent des géométries quasi-harmoniques favorables à la déformation

---

des fronts d'ondes, pouvant mener jusqu'à la formation d'ondes de choc, comme l'ont montré expérimentalement *Biwa et coll.*<sup>19,20</sup> La description de la propagation acoustique est traitée de deux manières distinctes : dans le noyau thermoacoustique, par la théorie linéaire de la thermoacoustique introduite au chapitre 1, et dans les guides d'ondes homogènes en température, par une approche multi-échelle de la propagation faiblement non linéaire, permettant l'utilisation des équations de Burgers généralisées, comme l'ont mise en œuvre *Menguy et Gilbert.*<sup>88</sup> Leur formulation et résolution sont étendues, dans le cadre de ce travail, aux oscillations auto-entretenues, dont la fréquence n'est pas définie. L'application de cette modélisation à différentes configurations de moteurs à résonateurs droit et annulaire permet de mettre en évidence les propriétés favorisant ou enrayant le processus de cascade harmonique – la position du noyau dans le moteur et sa longueur dans le cas d'un résonateur droit, la longueur du noyau et les variations du réseau acoustique pour un résonateur annulaire.

L'ensemble de ces travaux constitue une étape supplémentaire dans la compréhension et la description du fonctionnement des moteurs thermoacoustique. Cependant, ces travaux ont soulevés de nouvelles questions, et des pistes restent à explorer. En premier lieu, le contrôle du champ acoustique par une boucle de rétroaction a certes fait ses preuves sur un prototype de faible puissance. Il reste à mettre en œuvre sur une machine de plus forte puissance. Un nouveau prototype de transducteur thermo-acousto-électrique est en cours de développement au LAUM, sur lequel une boucle de rétro-contrôle électroacoustique sera implémentée. Par ailleurs, une configuration de contrôle à deux sources acoustiques sur la boucle reste envisageable, pour se rapprocher des travaux présentés précédemment par *Desjoux et coll.*<sup>47</sup>

Par ailleurs, la modélisation simplifiée du prototype est un travail toujours en cours, qui mérite d'être approfondi. Certains outils mis en place n'ont pas pu être exploités à cette date. La prise en compte du streaming, phénomène perturbant la distribution de température avec une échelle de temps propre, peut permettre d'apporter un éclairage important sur certains phénomènes non expliqués, tels que la discontinuité de température observée expérimentalement entre les états stationnaire et oscillants. La configuration de source auxiliaire interne n'a pas été explorée dans le cadre de cette modélisation. Bénéficiant d'un couplage moins néfaste sur les performances du moteur, elle a fait apparaître des comportements expérimentaux absents dans la configuration de source interne, tels que le comportement hystérétique des seuils, et la dérive du déphasage optimal de la boucle de rétro-contrôle avec l'augmentation du gain d'amplification, qui restent non expliqués. Par ailleurs, une analyse de stabilité des solutions en régime stationnaire, effectuée de manière analytique, pourrait permettre de conclure de manière formelle sur la possibilité d'un comportement hystérétique du moteur sous l'influence de la boucle de rétro-contrôle dans le cadre de la description proposée. Dans le cas où ce comportement ne pourrait être mis en évidence dans la configuration de source interne, il apparaîtrait qu'un élément important est absent du modèle pour rendre compte du comportement du prototype.

La description de la propagation non linéaire pourrait profiter d'une prise en compte moins grossière des pertes non linéaires dans le noyau, c'est-à-dire une description plus fine des pertes aérodynamiques aux interfaces du noyau. De plus, les configurations décrites dans le cadre de ce travail sont construites autour de noyau courts, pour lesquels les amplitudes de déplacement particulière sont de l'ordre de la longueur du stack. Dans ces conditions, les particules de fluide n'effectue qu'une partie du cycle acoustique dans le stack et une

description de la saturation de l'amplification thermoacoustique qui en découle pourrait profiter au modèle. Par ailleurs, pour la description des systèmes à onde (au moins partiellement) progressive, une distribution de température résultant des transferts de chaleur est nécessaire pour reproduire fidèlement, même qualitativement le comportement du moteur. Par ailleurs, la prise en compte d'une distribution de température ainsi que de variations de sections est possible dans cette description. Il est donc tout à fait envisageable d'inclure le TBT dans la partie du moteur dans laquelle la propagation est décrite par les équations de Burgers généralisées. Une application de la modélisation proposée devient alors envisageable pour des configurations plus complexes, telles que le prototype de transducteur étudié dans les parties I et II. Cette démarche n'est cependant pas forcément nécessaire, les configurations complexes étant fondamentalement anharmoniques et limitant la possibilité pour les harmoniques supérieurs de se maintenir.

# Annexes



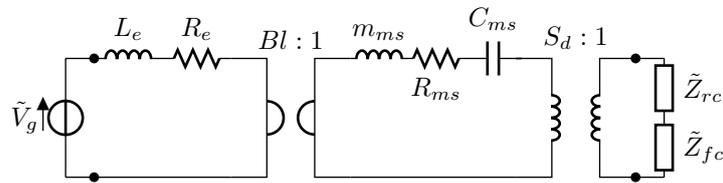
## Annexe A

# Équivalences électroacoustiques et boucle de rétrocontrôle

Les différentes modélisations (modélisation par matrice de transfert linéaires pour la détermination du seuil de stabilité, modélisation d'ordre réduit de la partie II) du prototype de transducteur thermo-acousto-électrique du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine font appel à la modélisation équivalente électroacoustique. Différents composants, tels que des haut-parleurs électrodynamiques, et la boucle de rétro-contrôle électroacoustique, composés de plusieurs éléments, sont décrits par cette approche. Cette annexe donne les modélisations équivalentes de ces éléments.

### A.1 Modèle de Thiele et Small d'un haut-parleur électrodynamique

Une représentation classique de haut-parleur en équivalence électroacoustique est donnée à la figure A.1, avec les sept paramètres acoustiques/mécaniques/électriques de Thiele et Small, paramètres explicités dans le figure A.2. Des valeurs de ces paramètres sont données pour différents haut-parleurs dans l'Annexe B.2.



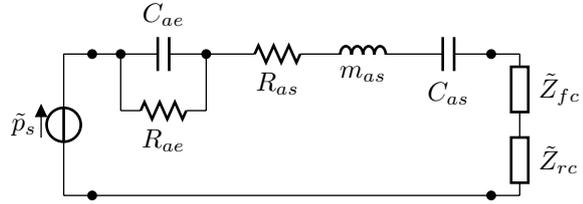
**FIGURE A.1** – Schéma électrique équivalent de haut-parleur faisant apparaître les sept paramètres de Thiele et Small dans les trois domaines : à gauche le domaine électrique ; au centre, le domaine mécanique ; à droite le domaine acoustique, avec les charges avant et arrière appliquées sur la membrane. La transduction électro-mécanique est modélisée par le gyrateur de facteur ( $Bl : 1$ ) et les paramètres mécaniques représentent les propriétés des suspensions et la masse en mouvement. La transduction mécano-acoustique est représentée par le transformateur de facteur ( $S_d : 1$ ).  $Z_{rc}$  et  $Z_{fc}$  sont les charges acoustiques resp. à l'arrière et à l'avant de la membrane.

Paramètre	Symbole	Unités
Aire de la membrane	$S_d$	$\text{m}^2$
Masse mobile	$m_{ms}$	kg
Souplesse des suspensions	$C_{ms}$	$\text{m N}^{-1}$
Résistance des suspensions	$R_{ms}$	$\text{N s m}^{-1}$
Induction de la bobine	$L_e$	H
Résistance en CC de la bobine	$R_e$	$\Omega$
Facteur de force de la bobine	$Bl$	T m

**FIGURE A.2** – Paramètres électromécaniques équivalents de Thiele et Small.

L'ensemble des paramètres peut être exprimé comme des paramètres équivalents dans le domaine acoustique, permettant de donner un schéma équivalent du haut-parleur entièrement dans le domaine acoustique tel que représenté à la figure A.3.

**FIGURE A.3** – Représentation équivalente du haut-parleur de la figure A.1 ramenée dans le domaine acoustique.



Le schéma équivalent fait apparaître une source de pression  $\tilde{p}_s$  équivalente à la source de tension  $\tilde{U}_g$ , ainsi que des paramètres équivalents dans le domaine acoustique de chacune des grandeurs, donnés par les expressions :

$$\tilde{p}_s = \frac{Bl}{S_d} \frac{U_g}{(R_e + j\omega L_e)}, \quad C_{ae} = \frac{S_d^2}{(Bl)^2} L_e, \quad R_{ae} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2} \frac{1}{R_e},$$

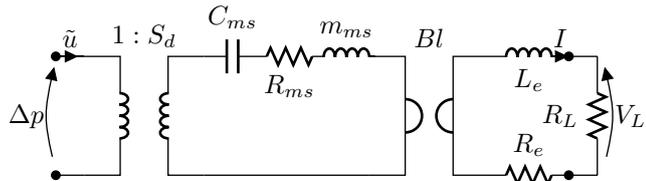
$$R_{as} = \frac{R_{ms}}{S_d^2}, \quad m_{as} = \frac{m_{ms}}{S_d^2}, \quad C_{as} = S_d^2 C_{ms}.$$

Dans le cadre de cette étude, la fréquence de fonctionnement du prototype est suffisamment basse pour pouvoir négliger le terme  $j\omega L_e$ . On considérera simplement que l'inductance de la bobine est nulle  $L_e = 0$ .

### A.1.1 Performances théoriques d'un alternateur électrodynamique

Les travaux de Yu et coll.<sup>200</sup> permettent de donner quelques paramètres fonctionnels en plus des paramètres de Thiele et Small. Ces paramètres sont réécrits ici en ne négligeant plus l'inductance de la bobine, contrairement à ce qui est fait donné dans cette référence.

**FIGURE A.4** – Schéma électrique équivalent de haut-parleur fonctionnant en alternateur, excité par un différentiel de pression  $\Delta p$  de part et d'autre de la membrane et délivrant un courant  $I$ .



### Puissance acoustique absorbée

Considérant le modèle de Thiele et Small linéaire, la puissance acoustique absorbée par l'alternateur  $\dot{W}_{ac}$  est donnée en fonction du différentiel de pression  $\Delta p$  de part et d'autre de la membrane et du débit acoustique  $\tilde{u}$  :

$$\dot{W}_{ac} = \frac{1}{2} \Re[\Delta p \tilde{u}]. \quad (\text{A.1})$$

Le différentiel de pression et le débit acoustique sont exprimés en fonction l'un de l'autre et de l'intensité  $I$  du courant produit :

$$\Delta p = \frac{BlI}{S_d} + \frac{R_{ms} + i \left( \omega m_{ms} - \frac{K_{ms}}{\omega} \right)}{S_d^2} \tilde{u}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{Bl\tilde{u}}{S_d} = (R_e + R_L + i\omega L_e)I. \quad (\text{A.3})$$

La puissance acoustique absorbée par le système se donne alors sous la forme :

$$\dot{W}_{ac} = \frac{1}{2} \frac{|\tilde{u}|^2}{S_d^2} \Re \left[ \frac{(Bl)^2}{Z_e} + Z_m \right] \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|\tilde{u}|^2}{S_d^2} \left[ R_{ms} + \frac{(Bl)^2 R_e}{(R_e + R_L)^2 + \omega^2 L_e^2} + \frac{(Bl)^2 R_L}{(R_e + R_L)^2 + \omega^2 L_e^2} \right]. \quad (\text{A.5})$$

### Puissance électrique produite

La puissance électrique potentiellement extraite par l'alternateur et donnée par la loi d'Ohm dans le rhéostat chargeant l'alternateur :

$$\dot{W}_{el} = \frac{1}{2} R_L |I|^2, \quad (\text{A.6})$$

qui est développée

$$\dot{W}_{el} = \frac{1}{2} \frac{|\tilde{u}|^2}{S_d^2} \frac{(Bl)^2 R_L}{(R_L + R_e)^2 + \omega^2 L_e^2}. \quad (\text{A.7})$$

Cette puissance sera maximale pour  $R_L = R_e$ , et vaudra alors

$$\dot{W}_{el,max} = \frac{1}{8} \frac{|\tilde{u}|^2}{S_d^2} \frac{(Bl)^2}{R_e}. \quad (\text{A.8})$$

### Efficacité de l'alternateur

L'efficacité étant le rapport des puissances en sortie et en entrée du système, on a :

$$\eta_{alt} = \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{W}_{ac}}. \quad (\text{A.9})$$

Grâce aux expressions des puissances données par les équations A.4 et A.7, l'efficacité de conversion acousto-électrique, indépendante de l'amplitude de sollicitation, est alors donnée sous la forme

$$\eta_{alt} = \frac{(Bl)^2 R_L}{R_{ms} |Z_e|^2 + (Bl)^2 (R_e + R_L)}. \quad (\text{A.10})$$

Cette expression se maximise pour une charge de l'alternateur valant

$$R_L(\eta_{alt,max}) = R_e \sqrt{1 + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}R_e} + \frac{\omega^2 L_e^2}{R_e^2}}. \quad (\text{A.11})$$

Si l'inductance de la bobine est faible et à suffisamment basse fréquence, elle peut être négligée. La charge optimale est alors approximée par

$$R_L(\eta_{alt,max}) \simeq R_e \sqrt{1 + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}R_e}}, \quad (\text{A.12})$$

donnant une efficacité théorique maximale de l'alternateur :

$$\eta_{alt,max} \simeq \frac{(Bl)^2 \sqrt{1 + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}R_e}}}{R_{ms}R_e \left(1 + \sqrt{1 + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}R_e}}\right)^2 + (Bl)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}R_e}}\right)} \quad (\text{A.13})$$

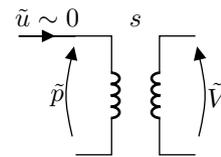
## A.2 Boucle de rétro-contrôle

La boucle de rétro-contrôle est composé de plusieurs éléments qui doivent être modélisés d'un point de vue électrique : microphone, conditionneur, déphaseur et amplificateur.

### A.2.1 La transduction microphonique

L'ensemble composé du microphone (ici un PCB 112A21) et de la chaîne de conditionnement du signal (PCB 441A42) est modélisée en basse fréquence comme un simple transformateur acousto-électrique de rapport de transformation valant la sensibilité  $s$  de la chaîne de mesure, tel que représenté à la figure A.5.

**FIGURE A.5** – Schéma électrique équivalent du système microphone + préampli avec  $s$  [V/Pa] (éventuellement complexe) la sensibilité de la chaîne de mesure.

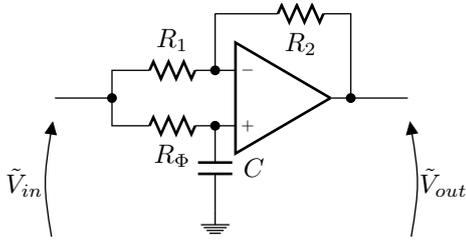


### A.2.2 Le déphaseur

Un montage déphaseur est obtenu en réalisant un filtre passe-tout avec un amplificateur opérationnel idéal (AOP), tel que présenté à la figure A.6. Les tensions aux entrées de l'amplificateur opérationnel valent

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{V}_+ &= \frac{1}{1 + j\omega R_\Phi C} \tilde{V}_{in}, \end{aligned} \right. \quad (\text{A.14a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{V}_- &= \tilde{V}_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \tilde{V}_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \equiv \frac{\tilde{V}_{in} + \tilde{V}_{out}}{2} \text{ si } R_1 = R_2 = R. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.14b})$$



**FIGURE A.6** – *Filtre passe-tout analogique idéal. Le gain du filtre est nul si les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont identiques. Le déphasage est fonction du produit  $R_\Phi C$ .*

En appliquant la caractéristique de l'amplificateur opérationnel idéal en régime de fonctionnement linéaire  $\tilde{V}_+ = \tilde{V}_-$ , la fonction de transfert du filtre vaut

$$H_\Phi = \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}} = \frac{1 - j\omega R_\Phi C}{1 + j\omega R_\Phi C} \quad (\text{A.15a})$$

dont le gain vaut

$$G[H_\Phi] = 20 \log |H_\Phi| = 0 \quad (\text{A.15b})$$

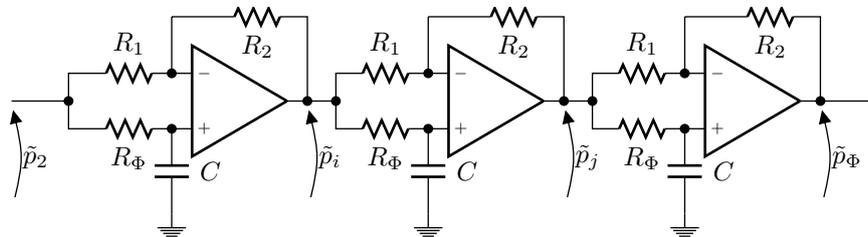
et le déphasage

$$\begin{aligned} \arg[H_\Phi] &= 2 \arg(1 - j\omega R_\Phi C) \\ &= 2 \arctan\left(\frac{-\omega R_\Phi C}{1}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.15c})$$

Théoriquement, un seul AOP est nécessaire pour obtenir des déphasages entre  $+\pi$  et  $-\pi$  pour  $-\infty < R_\Phi < +\infty$ . En pratique, on utilise une capacité de valeur fixée et une résistance variable. Cette dernière étant toujours positive et de valeur limitée, le déphaseur utilisé expérimentalement est un montage de trois ampli-op en cascade, permettant de varier le déphasage  $-\pi < \Phi < \pi$ , comme représenté à la figure A.7.

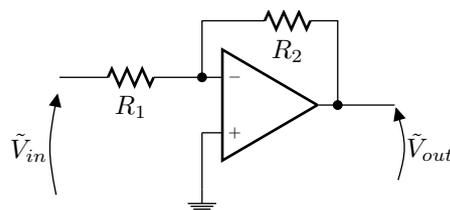
### A.2.3 L'amplificateur

Un montage amplificateur inverseur est obtenu en réalisant le montage avec un amplificateur opérationnel idéal présenté à la figure A.8. Les tensions aux entrées de l'AOP valent



**FIGURE A.7** – *Boîtier déphaseur composé de trois filtres passe-tout en cascade, représenté par le boîtier  $\Phi$ . Le signal en sortie est déphasé d'un angle  $\Phi$  par rapport au signal d'entrée, soit  $\tilde{p}_\Phi = \tilde{p}_2 e^{-i\Phi}$ .*

**FIGURE A.8** – Amplificateur inverseur représenté par le boîtier  $\boxed{G}$ . Le gain du filtre est fonction du rapport  $R_2/R_1$ .



$$\tilde{V}_+ = 0, \quad (\text{A.16a})$$

$$\tilde{V}_- = \tilde{V}_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \tilde{V}_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (\text{A.16b})$$

En appliquant la caractéristique de l'amplificateur opérationnel idéal en régime de fonctionnement linéaire  $\tilde{V}_+ = \tilde{V}_-$ , la fonction de transfert du filtre vaut

$$H_G = \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{A.17a})$$

dont le gain vaut

$$G [H_G] = 20 \log |H_G| = 20 \log \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (\text{A.17b})$$

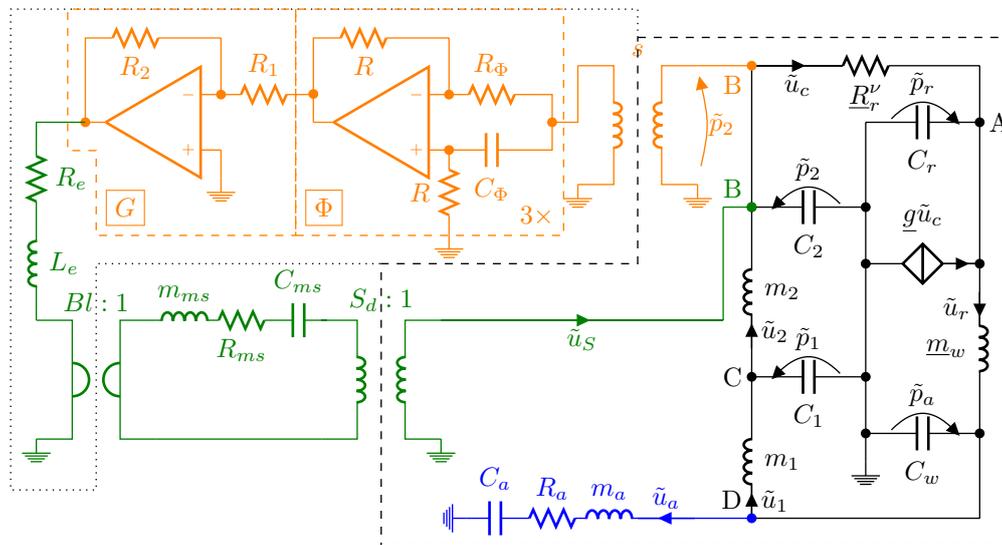
et le déphasage

$$\arg [H_G] = \begin{cases} \pi & \text{si } \text{sgn}(R_1) = \text{sgn}(R_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.17c})$$

Analytiquement, en utilisant une résistance négative, on obtient simplement un amplificateur non-inverseur idéal.

### A.3 Circuit équivalent avec rétro-contrôle

A l'aide des éléments précédents, une représentation du transducteur thermoacoustique équipé de la boucle de rétro-contrôle peut-être donnée sous la forme présentée à la figure A.9.



**FIGURE A.9** – Moteur thermoacoustique de Stirling à onde localement progressive (en noir) couplé à un résonateur acoustique (en bleu, avec une boucle de forçage électroacoustique constituée d'une source électroacoustique (en vert) alimentée par une boucle de rétroaction amplifiant et déphasant le signal d'un microphone (en orange)). Les tirets limitent le domaine acoustique. Les pointillés entourent le domaine électrique. Entre les deux se trouve le domaine mécanique. Configuration de source auxiliaire externe dans une cavité couplée par un capillaire.



## Annexe B

# Systèmes thermoacoustiques étudiés

### B.1 Moteurs de Biwa

Les dimensions des différentes configurations utilisées par *Biwa et coll.* pour la mise en évidence expérimentale de formation d'ondes de choc dans des moteurs de géométries simples<sup>19,20</sup> sont résumées dans le tableau B.1. Ces dimensions sont celles utilisées pour les simulations présentées au chapitre 7. La notation A désigne des moteurs à résonateurs droits<sup>19,20</sup> ; B est un moteur à résonateur annulaire.<sup>20</sup>

Résonateurs			Stack		
$L$	A0	3.08 m	$l_s$		2.0 cm
	A1,A2	0.84 m	$y_{0s}$	A0,B	0.47 mm
	B	3.04 m		A1,A2	0.75 mm
$x_s/L$	A1	0.14	$\phi_s$	A0,B	0.88
	A2	0.22		A1,A2	0.74
$r$		2.05 mm	pores		carrés
Échangeurs de chaleur			TBT		
$l_{h1,2}$		1.0 cm	$l_w$	A	10 cm
$y_{0h}$		0.5 mm		B	30 cm
$\phi_h$		0.66	Fluide		
pores		fentes	$P_0$	air	100 hPa

**Tableau B.1** – Paramètres géométriques des différents moteurs pour la résolution numérique de la propagation non linéaire.

Les longueurs  $l_w$  des TBT des différents moteurs ne sont pas définies dans les différentes références. En effet, les moteurs utilisés ne disposent pas d'échangeur de chaleur secondaire, imposant la température froide à une distance déterminée de l'échangeur chaud. Ces longueurs ont donc été déterminées analytiquement,<sup>62</sup> supposant une distribution linéaire de température, en faisant concorder températures de déclenchement expérimentale et analytique.

## B.2 Transducteur thermo-acousto-électrique du LAUM



**FIGURE B.1** – Photographie du prototype de transducteur thermo-acousto-électrique du Laboratoire d’Acoustique de l’Université du Maine, montrant à gauche moteur thermoacoustique annulaire, et à droite le volume couplé à l’alternateur.

### B.2.1 Dimensions géométriques du système

Les dimensions du prototype de transducteur thermo-acousto-électrique du Laboratoire de l’Université du Maine, dont une photographie est donnée à la figure B.1, sont résumées dans le tableau B.2. Une description précise du noyau est donnée au chapitre 2. Les dimensions des différents tubes constituant le transducteur sont données dans le tableau B.2.

Élément	Longueur	Diamètre	Élément	Longueur	Diamètre
Inertance	915 mm	42.15 mm	CWG	1.25 m	42.15 mm
Cône	30 mm	56.3 mm	Convergent	110 mm	364 mm
Compliance	35 mm	56.3 mm	Adaptateur	15 mm	364 mm
TBT	50 mm	56.3 mm	Bague	20 mm	364 mm
Jonction	51 mm	56.3 mm	Cavité	255 mm	358 mm

**Tableau B.2** – Dimensions des différents éléments du transducteur thermo-acousto-électrique.

### B.2.2 Éléments poreux du noyau

Les caractéristiques des éléments poreux sont données dans le tableau B.3 :

- le régénérateur formé d’un empilement de tissu métallique ;
- l’échangeur de chaleur chaud constitué d’un ruban de Nichrome inséré dans une céramique à pores carrés, et alimenté en courant continu par un générateur de puissance délivrant jusqu’à 180 W ;
- les échangeurs de chaleur froids, formés d’un bloc de cuivre percé de nombreux trous cylindriques parallèles, autour duquel de l’eau à température ambiante circule dans une fente périphérique.

Les échangeurs de chaleur sont montrés en photographie à la figure B.2. Le rayon de tous les éléments du noyau est le même que celui du TBT : 28.15 mm.

Élément	Longueur $l$	Rayon des pores	Porosité $\phi$	Forme
CHX	15 mm	1 mm	0.6	cylindrique
Régénérateur	23 mm	0.05 mm	0.85	complexe
HHX	15 mm	0.3 mm	0.89	carré

Tableau B.3 – Caractéristiques des éléments poreux du TAET.

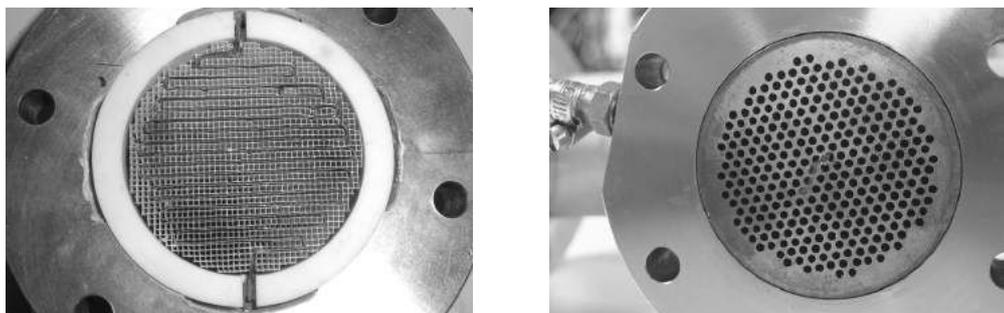
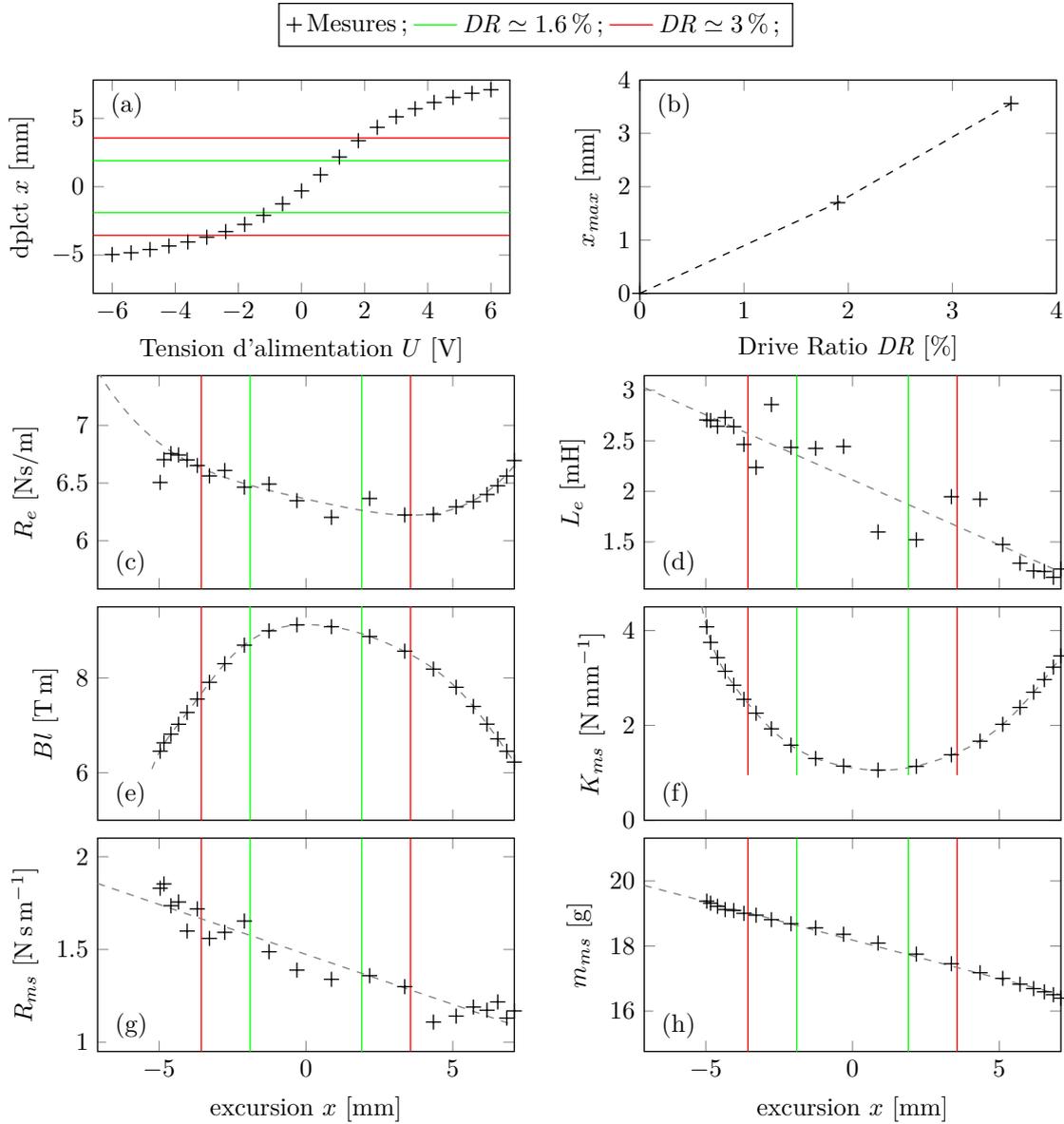


FIGURE B.2 – Gauche : échangeur de chaleur chaud constitué d'un ruban de nichrome inséré dans une céramique à pores carrés, entourée d'une bague en céramique l'isolant thermiquement de la coque . Droite : échangeurs de chaleur froids constitués de blocs de cuivre percés refroidis par de l'eau à température ambiante.

### B.2.3 Alternateur

L'alternateur du TAET est un haut-parleur, le Monacor SPH-170C, sélectionné pour son facteur de force  $Bl$  et son excursion  $x_{max}$ . Afin de pouvoir utiliser le modèle (linéaire) de Thiele et Small dans les différentes modélisations du TAET (modèles sous DeltaEC, modélisation par matrices de transfert ou modèle d'ordre réduit de la partie II, tous considèrent une représentation linéaire de l'alternateur), ses paramètres électro-mécaniques de Thiele et Small (cf Annexe A) ont été évalués pour différents régimes de déplacements (voir les méthodes proposées par *Novak et coll.* pour les paramètres acoustiques et mécaniques,<sup>100</sup> et pour les paramètres électriques<sup>101</sup>). Les paramètres sont mesurés en appliquant une faible perturbation sinusoïdale à la fréquence de fonctionnement du TAET ( $\simeq 40$  Hz) autour d'une position statique imposée par une tension d'alimentation constante. Les paramètres mesurés sont présentés à la figure B.3.

Les paramètres utilisés pour la modélisation et présentés dans le tableau B.4 sont obtenus par moyennage des paramètres sur la plage de déplacement délimitée par le débattement maximal obtenu pour un drive ratio donné : paramètres à déplacement nul pour la qualification du seuil de déclenchement ;  $\pm 1.9$  mm pour un drive ratio autour de  $DR \simeq 1.6\%$  ;  $\pm 3.5$  mm pour un drive ration plus élevé.



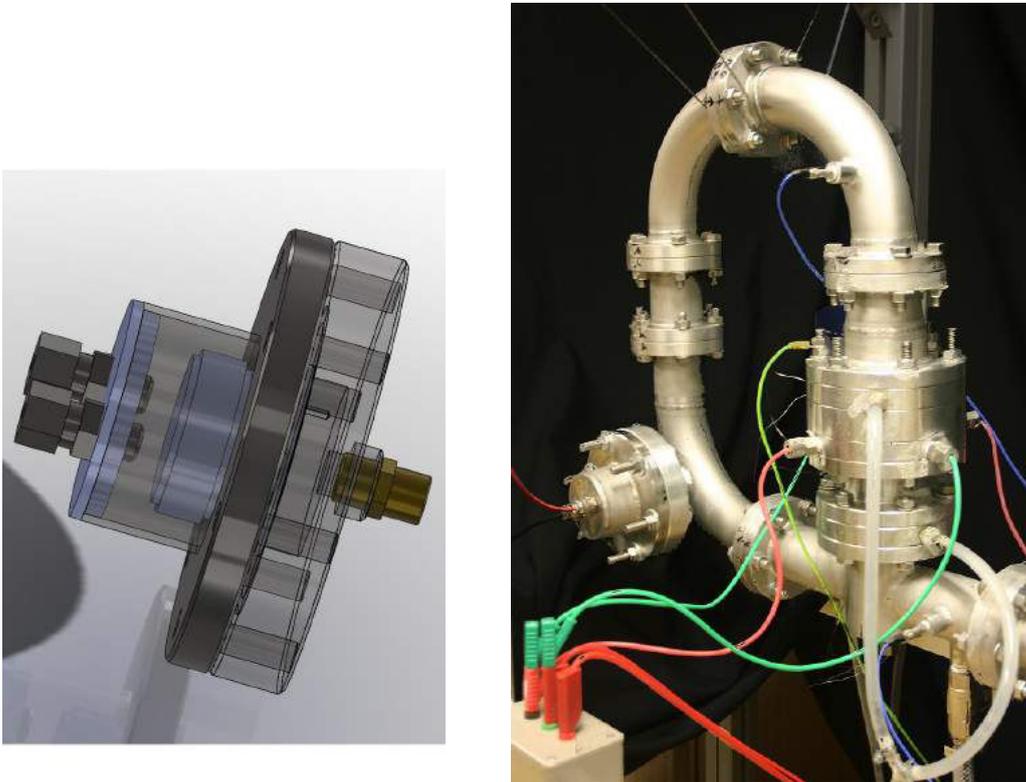
**FIGURE B.3** — (a) Excursion du haut-parleur en fonction de la tension d'alimentation. (b) Déplacement (calculé) de la membrane en fonction du drive ratio (calculé) (c)-(h) Paramètres électromécaniques équivalents mesurés de Thiele et Small du Monacor SPH 170C utilisé comme alternateur, en fonction de l'excursion. Les domaines délimités verticalement correspondent aux plages de déplacement de la membrane pour deux drive ratios, domaines sur lesquels les paramètres sont moyennés pour la modélisation du comportement du haut parleur.

Param.	Unité	Constr.	$DR = 0$	$DR = 1.6\%$	$DR = 3\%$
$X_{max}$	mm	$\pm 4$	0	$\pm 1.9$	$\pm 3.56$
$P_{nom}$	W	60	—	—	—
$Z_{nom}$	$\Omega$	8	—	—	—
$Sd$	cm <sup>2</sup>	127	—	—	—
$R_e$	$\Omega$	6	6.28	6.37	6.37
$L_e$	mH	0.8	2.0	2.1	2.1
$Bl$	T m	9.44	9.10	9.04	8.79
$K_{ms}$	N m <sup>-1</sup>	1530	1100	1170	1370
$R_{ms}$	N s m <sup>-1</sup>	1.94	1.36	1.47	1.47
$m_{ms}$	g	16.43	18.23	18.18	18.18
$f_{res}$	Hz	36/38.1	39.1	41.5	46.7
$R_{load}(\eta_{max})$	$\Omega$	16.6	19.56	18.76	17.8
$\eta_{max}$		0.58	0.61	0.60	0.58

**Tableau B.4** – Paramètres électro-mécaniques équivalents de Thiele et Small du Monacor SPH 170C utilisé en alternateur. (en gris, paramètres déduits des facteurs de qualité)

### B.2.4 Source auxiliaire externe

La source auxiliaire externe est constituée d'un haut-parleur électrodynamique inclus dans une cavité reliée au TAET par un capillaire. Une représentation de la source est donnée à la figure B.4, ainsi qu'une photographie de la source installée sur le moteur. Les dimensions

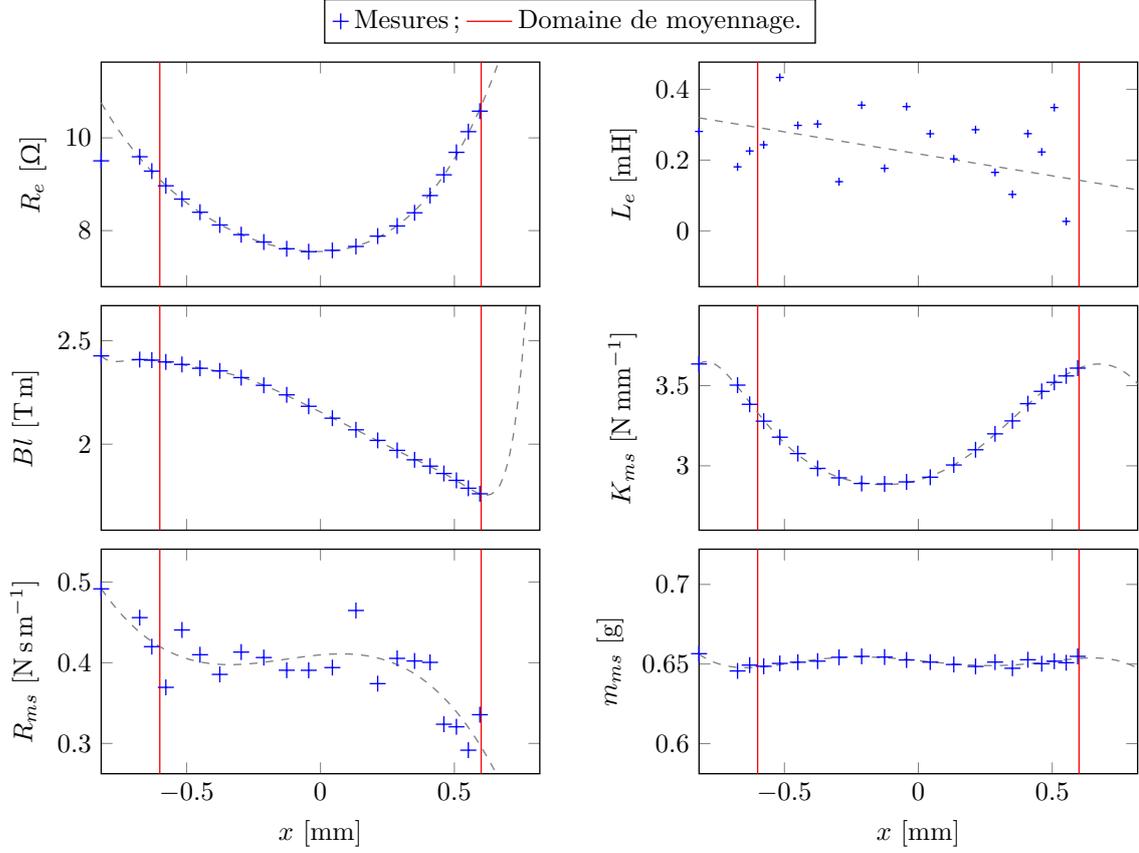


**FIGURE B.4** – *Modèle CAD du module de contrôle électroacoustique : au centre le haut-parleur, entre deux cavités et à droite le capillaire de couplage au TAET. La photographie montre la source auxiliaire installée sur le TAET.*

des différentes sections constituant le module de contrôle électroacoustique sont données dans la figure B.5. Les paramètres mesurés du Visaton FRS-5 servant de source acoustique auxiliaire externe sont présentés à la figure B.6, en fonction du déplacement de la membrane. Les variations des paramètres étant relativement faibles, et le haut-parleur étant utilisé jusqu'à son excursion maximale, les paramètres utilisés sont ceux issus du moyennage sur la plage de déplacement entière, délimitée par les lignes verticales rouges. Il sont résumés dans le tableau B.5.

**FIGURE B.5** – *Dimensions des différents éléments du module externe de contrôle électroacoustique représenté à la figure B.4.*

Élément	Longueur	Rayon
Capillaire	27 mm	3.5 mm
Cavité avant	10 mm	28.15 mm
Cavité arrière	40 mm	28.15 mm



**FIGURE B.6** – Paramètres électromécaniques équivalents de Thiele et Small mesurés du Visaton FRS5.

Param.	Unité	Constr.	$DR = 0$	$DR \simeq 1.6\%$
$P_{nom}$	W	5	—	—
$Z_{nom}$	$\Omega$	8	—	—
$Sd$	$\text{cm}^2$	12	—	—
$R_e$	$\Omega$	7.2	7.56	8.63
$L_e$	mH	0.2	0.31	0.21
$Bl$	T m	1.6	2.15	2.14
$K_{ms}$	$\text{N m}^{-1}$	1050	2914	3224
$R_{ms}$	$\text{N s m}^{-1}$	0.23	0.39	0.39
$m_{ms}$	g	0.5	0.65	0.65
$f_{res}$	Hz	270/230	337	360

**Tableau B.5** – Paramètres électro-mécaniques équivalents de Thiele et Small du Visaton FRS-5. (en gris, paramètres obtenus par inversion des facteurs de qualité).

### B.2.5 Source auxiliaire interne

La source auxiliaire interne est introduite directement dans le guide d'onde. Elle a été choisi pour son diamètre correspondant au diamètre interne du guide d'onde dans lequel le noyau thermoacoustique est introduit, et pour son excursion suffisante en regard du déplacement particulaire dans le moteur. Ses caractéristiques sont résumées dans le figure B.7

Param.	Unité	Constr.
$P_{nom}$	W	15
$Z_{nom}$	$\Omega$	8
$Sd$	cm <sup>2</sup>	13.2
$R_e$	$\Omega$	6.4
$L_e$	mH	0.0
$Bl$	T m	3.5
$K_{ms}$	N m <sup>-1</sup>	2560
$R_{ms}$	N s m <sup>-1</sup>	0.23
$m_{ms}$	g	1.04
$f_{res}$	Hz	250/230

**FIGURE B.7** – Paramètres électro-mécaniques équivalents de Thiele et Small du Aura NSW2-326-8A. (en gris, paramètres obtenus par inversion des facteurs de qualité).

## Annexe C

# Dépendance en température des paramètres thermophysiques

Certains paramètres thermophysiques des matériaux sont dépendants de la température. On choisit de décrire cette dépendance par une loi de puissance, en fonction d'un état de référence indicé  $ref$  donné pour une température de référence  $T_{ref}$ . Alors, les propriétés de l'air sont telles que :

- sa masse volumique  $\rho_0(T) = \rho_{ref} \frac{T_{ref}}{T}$ ,
- sa conductivité thermique et sa viscosité de cisaillement dynamique, respectivement  $\lambda_0(T) = \lambda_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^\beta$ , et  $\mu_0(T) = \mu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^\beta$ ,
- et sa viscosité de cisaillement cinématique  $\nu_0(T) = \nu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\beta+1}$ ,

avec  $\beta \simeq 0.70$ .<sup>131</sup>

Le régénérateur, qui est considéré comme un fluide homogénéisé, est caractérisé par :

- sa conductivité thermique vaut  $\lambda_r(T) = (\lambda_r)_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\beta_1}$  avec  $\beta_1 = 0.4$ ;
- le produit  $\rho_r c_r = (\rho_r c_r)_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\beta_2}$ , avec  $\beta_2 = -0.025$ .

Les valeurs de  $\beta_{1,2}$  sont obtenues de l'approximation par une loi de puissance des propriétés obtenues par une loi de mélange avec les lois de comportement polynomiales de l'air et de l'inox de DeltaEC<sup>174</sup>), approximation faite sur le domaine de température utilisé pour cette étude, soit environ  $T \in [300 \text{ K}, 900 \text{ K}]$ . La loi de mélange en volume donne simplement les propriétés thermophysiques équivalentes du milieu homogénéisé

$$\lambda_r = (\phi \lambda_0 + k_s (1 - \phi) \lambda_s), \quad (\text{C.1})$$

$$\rho_r c_r = \phi \rho_0 c_P + (1 - \phi) \rho_s c_s, \quad (\text{C.2})$$

avec les indices 0 et  $s$  désignant les propriétés respectivement de l'air et de l'acier inoxydable composant les grilles du régénérateur et avec  $k_s$  un facteur d'ajustement de la conductivité pour tenir compte des contacts imparfaits entre les grilles.<sup>176</sup>

La valeur moyenne  $\underline{\xi}$  sur le segment  $[x_1, x_2]$  d'un paramètre  $\xi(T) = \xi_0 \left( \frac{T(x)}{T_{ref}} \right)^\alpha$ , avec une distribution linéaire de la température sur ce segment  $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}x + T_1$  où  $T_1 = T(x_1)$  et  $T_2 = T(x_2)$ , est donnée  $\forall \alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{\xi_0}{T_{ref}^\alpha} \int_{x_1}^{x_2} (T(x))^\alpha dx \\ &= \frac{\xi_0}{T_{ref}^\alpha} \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{1}{\alpha + 1} [T_2^{\alpha+1} - T_1^{\alpha+1}] \end{aligned} \quad (C.3)$$

et pour  $\alpha = -1$  (cas de la masse volumique du fluide de travail)

$$\underline{\xi} = \frac{\xi_0 T_{ref}}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (C.4)$$

## Annexe D

# Fonctions visco-thermiques

Les fonctions viscothermiques permettent de décrire les interactions acoustiques dans les couches limites visqueuses et thermiques. Elles sont dépendantes de la géométrie des pores considérés et peuvent être déterminées analytiquement pour les plus simples d'entre elles (à tortuosité nulle), notamment :

- les empilements de plaques parallèles (c'est-à-dire des pores en forme de fente),
- les pores cylindriques parallèles,
- les pores rectangulaires parallèles,
- les réseaux d'aiguilles,
- les pores triangulaires isocèles parallèles.

En définissant comme critère de normalisation le rayon hydraulique  $r_h$ , rapport de l'aire de la section transversale d'un pore à son périmètre, on pourra comparer l'influence de ces différentes géométries de pores sur la propagation. De plus, on donnera aussi une expression analytique du terme  $T_0 \frac{\partial f_\nu}{\partial T_0} = T_0 \frac{\partial \epsilon_r}{\partial T_0} \frac{\partial f_\nu}{\epsilon_r}$  qui est nécessaire à l'expression de la propagation en présence d'une distribution de température.

### D.1 Empilement de plaques parallèles

Pour un matériau poreux constitué de plaques parallèles infinies dont l'espacement vaut  $2R$ , on donne les fonctions viscothermiques sous la forme :

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{(1+i)\delta_{\nu,\kappa}}{2R} \tanh \left[ \frac{2R}{(1+i)\delta_{\nu,\kappa}} \right]. \quad (\text{D.1a})$$

Si on note  $\epsilon_s = \frac{2R}{(1+i)\delta_\nu}$ , la dérivée de la fonction visqueuse

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\nu}{\partial \epsilon_s} &= -\frac{1}{\epsilon_s^2} \tanh(\epsilon_s) + \frac{1}{\epsilon_s} \frac{\partial \tanh(\epsilon_s)}{\partial \epsilon_s} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_s} \left[ \frac{\tanh(\epsilon_s)}{\epsilon_s} - \frac{1}{\cosh^2(\epsilon_s)} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.1b})$$

et la dépendance en température de l'épaisseur de la couche limite

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon_s}{\partial T_0} &= -\frac{2R}{(1+i)\delta_\nu^2} \frac{\partial \delta_\nu}{\partial T_0} \\ &= -\frac{2R}{(1+i)\delta_\nu^2} \frac{\beta+1}{2} \frac{\delta_\nu}{T_0} \\ &= -\frac{\beta+1}{2} \frac{\epsilon_s}{T_0},\end{aligned}\tag{D.1c}$$

on obtient l'expression du terme recherché :

$$T_0 \frac{\partial f_\nu}{\partial T_0} = \frac{\beta+1}{2} \left[ f_\nu - \frac{1}{\cosh^2(\epsilon_s)} \right].\tag{D.1d}$$

## D.2 Pores cylindriques circulaires

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2\delta_{\nu,\kappa}}{(1+i)r} \frac{J_1[(1+i)r/\delta_{\nu,\kappa}]}{J_0[(1+i)r/\delta_{\nu,\kappa}]}\tag{D.2a}$$

avec  $r$  le rayon d'un pore et  $J_n$  les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ . Si on pose  $\epsilon_c = (1+i)r/\delta_\nu$ , avec l'expression des dérivés de fonctions de Bessel,

$$\frac{\partial J_0(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} = -J_1(\epsilon_c),\tag{D.2b}$$

$$\frac{\partial J_1(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} = J_0(\epsilon_c) - \frac{J_1(\epsilon_c)}{\epsilon_c},\tag{D.2c}$$

on obtient

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial \epsilon_c} = -\frac{2}{\epsilon_c} \left[ \frac{2}{\epsilon_c} \frac{J_1(\epsilon_c)}{J_0(\epsilon_c)} - 1 - \left( \frac{J_1(\epsilon_c)}{J_0(\epsilon_c)} \right)^2 \right].\tag{D.2d}$$

Or l'épaisseur de couche limite dépend de la température  $\delta_\nu \propto T_0^{(\beta+1)/2}$ , d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon_c}{\partial T_0} &= -(1+i) \frac{r}{\delta_\nu^2} \frac{\partial \delta_\nu}{\partial T_0} \\ &= -(1+i) \frac{r}{\delta_\nu^2} \frac{\beta+1}{2} \frac{\delta_\nu}{T_0} \\ &= -\frac{\beta+1}{2} \frac{\epsilon_c}{T_0},\end{aligned}\tag{D.2e}$$

donnant le terme recherché :

$$T_0 \frac{\partial f_\nu}{\partial T_0} = (\beta+1) \left[ f_\nu - 1 - \left( \frac{J_1(\epsilon_c)}{J_0(\epsilon_c)} \right)^2 \right].\tag{D.2f}$$

### D.3 Pores cylindriques rectangulaires

Pour un matériau poreux constitué de pores rectangulaires de dimensions  $2r_1 \times 2r_2$ , on donne<sup>6</sup> les fonctions viscothermiques sous la forme d'un développement infini :

$$f_{\nu,\kappa} = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_m \sum_n F_{mn}^{\nu,\kappa}, \text{ avec } (m, n = \{2k + 1; k \in \mathbb{N}\}), \quad (\text{D.3a})$$

$$\frac{1}{F_{mn}^{\nu,\kappa}} = m^2 n^2 \left\{ 1 + i \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{r}\right)^2 \left[ \frac{r_2^2 m^2 + r_1^2 n^2}{(a+b)^2} \right] \right\}, \quad (\text{D.3b})$$

$$r = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (\text{D.3c})$$

On note

$$\epsilon_1^{\nu,\kappa} = i(\pi^2/8)(\delta_{\nu,\kappa}/r_1)^2 \quad (\text{D.3d})$$

$$\epsilon_2^{\nu,\kappa} = i(\pi^2/8)(\delta_{\nu,\kappa}/r_2)^2 \quad (\text{D.3e})$$

pour procéder à la simplification

$$(F_{mn}^{\nu,\kappa})^{-1} = m^2 n^2 \left[ 1 + (m^2 \epsilon_1^{\nu,\kappa} + n^2 \epsilon_2^{\nu,\kappa}) \right]. \quad (\text{D.3f})$$

On assimile le pore rectangulaire à un pore carré de dimension caractéristique  $r$  et on note  $\epsilon_r = i(\pi^2/8)(\delta_{\nu,\kappa}/r)^2$ . La dérivée de la fonction  $F_{mn}^{\nu}$  s'exprime alors

$$\frac{\partial F_{mn}^{\nu}}{\partial \epsilon_r} = - \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 [1 + (m^2 + n^2) \epsilon_r]^2}, \quad (\text{D.3g})$$

et la dépendance en température de l'épaisseur de la couche limite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial T_0} &= \frac{i\pi^2}{8} \frac{2\delta_\nu}{r^2} \frac{\partial \delta_\nu}{\partial T_0} \\ &= \frac{\beta + 1}{T_0} \frac{i\pi^2}{8} \left(\frac{\delta_\nu}{r}\right) \\ &= (\beta + 1) \frac{\epsilon_r}{T_0}, \end{aligned} \quad (\text{D.3h})$$

on obtient l'expression du terme recherché :

$$T_0 \frac{\partial f_\nu}{\partial T_0} = (\beta + 1) \epsilon_r \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \times \sum_m \sum_n \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 [1 + (m^2 + n^2) \epsilon_r]^2}, \quad (\text{D.3i})$$

avec  $m, n = \{2k + 1; k \in \mathbb{N}\}$ .

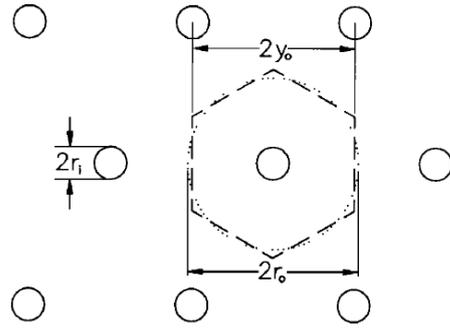
### D.4 Réseau d'aiguilles (pin array stack)

Pour un matériau poreux constitué d'aiguilles parallèles ordonnées en réseau hexagonal. En approximant la cellule unitaire hexagonale par une cellule circulaire, on donne<sup>162</sup> les fonctions viscothermiques sous la forme

$$f_{\nu,\kappa} = - \frac{\delta_{\nu,\kappa}}{(1+i)} \frac{2r_i}{r_0^2 - r_i^2} \frac{Y_1(z_0)J_1(z_i) - J_1(z_0)Y_1(z_i)}{Y_1(z_0)J_0(z_i) - J_1(z_0)Y_0(z_i)}, \quad (\text{D.4a})$$

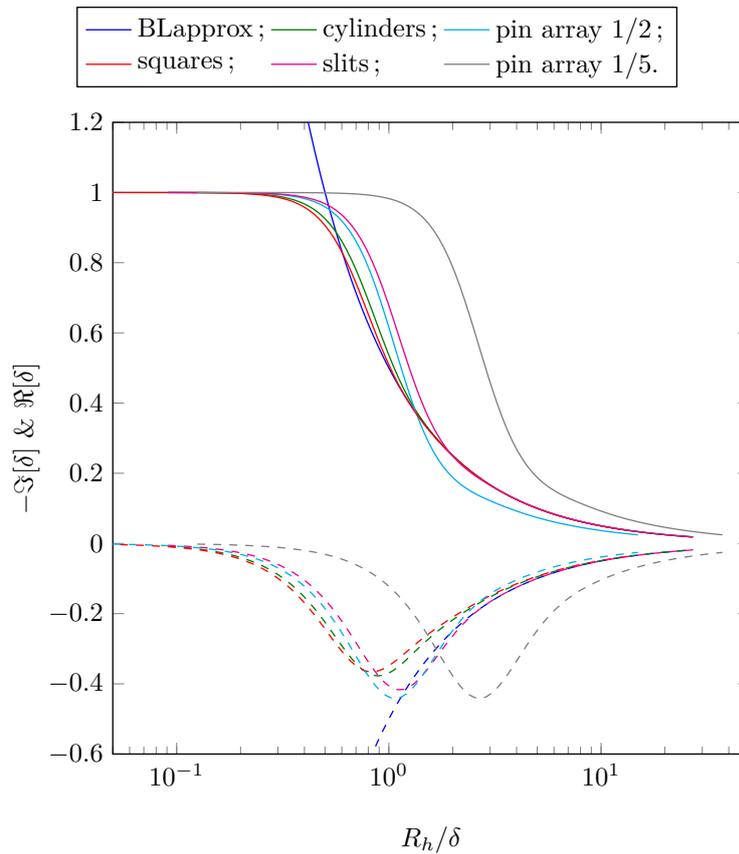
avec  $Y_n$  les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre  $n$ , et  $z = (1+i) \frac{r}{\delta_{\nu,\kappa}}$ .

**FIGURE D.1** – Réseau hexagonal d'aiguilles. La cellule hexagonale (en tirets) de dimensions  $2y_0$  est approchée par un cellule circulaire (en pointillés) de rayon  $r_0 = y_0\sqrt{2\sqrt{3}/\pi}$ . Les aiguilles ont un rayon valant  $r_i$ . (figure issue de [148])



## D.5 Récapitulatif

Pour récapituler ces résultats sur les fonctions viscothermiques, la figure D.2 présente les parties réelles et imaginaires des fonctions viscothermiques pour les différentes formes de pores énoncées ci-dessus, ainsi que l'approximation de couche limite (BL approx.)  $f_{\nu,\kappa} = (1 + i)\delta_{\nu,\kappa}/R$ .



**FIGURE D.2** – Partie réelle (traits pleins) et opposé de la partie imaginaire (tirets) de  $f_\nu$  (resp.  $f_\kappa$ ) en fonction du rapport de la taille caractéristique du pore à l'épaisseur de couche limite, pour différentes géométries, dont deux de pin arrays avec différents rapports  $r_i/y_0$ .

## Annexe E

# Propagation non linéaire : saturation et *detuning*

Cette annexe vise à mettre en évidence deux phénomènes évoqués lors de l'établissement du modèle de propagation non linéaire (partie III) : d'une part la nécessité de prendre en compte un phénomène de pertes non linéaires pour obtenir des niveaux de saturation raisonnables, et d'autre part la présence d'une dérive de la fréquence de fonctionnement du moteur avec l'augmentation de l'amplitude acoustique en présence de propagation non linéaire.

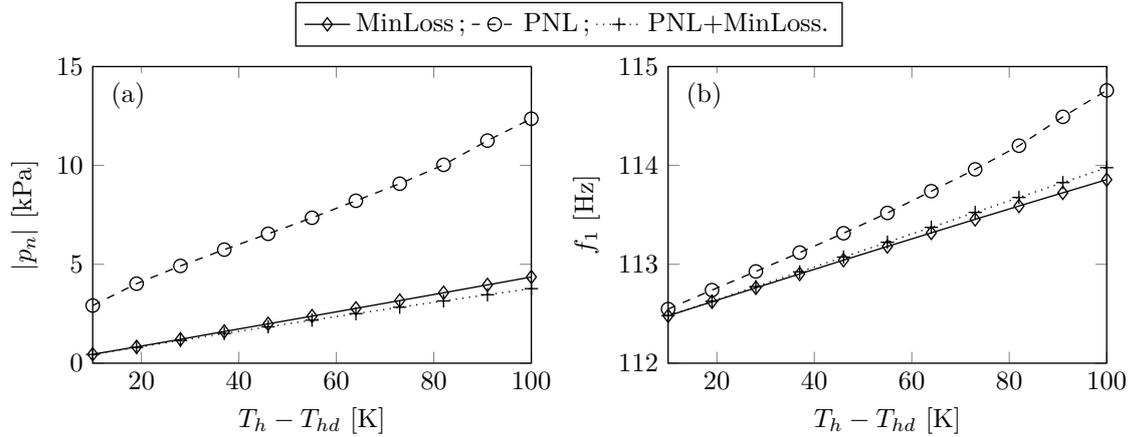
### E.1 Nécessité de prendre en compte les pertes singulières

Pour une configuration donnée de moteur (ici le moteur à ondes quasi-stationnaires de *Biwa*<sup>20</sup>), le niveau de saturation des oscillations de pression acoustique est calculé en fonction du gradient de température imposé au dessus du seuil de déclenchement, et pour différents phénomènes de pertes pris en compte. Les amplitudes présentées à la figure E.1.a sont celles du fondamental à l'extrémité du moteur.

Dans le cas de référence ( $\dashv$ ) de propagation linéaire avec pertes singulières<sup>†</sup>, l'amplitude de saturation varie avec le gradient de température pour atteindre 5 kPa pour une différence de température entre les extrémités du stack de 100 K au-delà du seuil. Dans le cas d'un propagation non linéaire ignorant les pertes singulières ( $\ominus$ ), la saturation est uniquement due à la cascade de l'énergie du fondamental vers les harmoniques. Les niveaux de saturation atteints sont très supérieurs au cas de référence, jusqu'à 12 kPa pour une différence de température de 100 K au-delà du seuil. Dans le cas où les deux phénomènes sont pris en compte ( $\dashv\oplus$ ), le niveau de saturation est (logiquement) plus faible que dans le cas de référence, mais en reste relativement proche. Cette comparaison permet de conclure sur la nécessité de prendre en compte la présence de pertes singulières aux interfaces pour qualifier la saturation avec des niveaux réalistes, ces pertes étant prépondérantes devant celles dues à la propagation non linéaire.

---

<sup>†</sup>. En effet, au seuil de déclenchement, l'amplification du noyau thermoacoustique compense exactement l'ensemble des pertes linéaires du système. Au-delà du seuil, ces pertes ne compensent plus la croissance exponentielle de l'amplitude. Il est alors nécessaire de prendre en compte au moins un phénomène de pertes non linéaire pour obtenir la saturation



**FIGURE E.1** – Régime de fonctionnement du moteur à ondes quasi-stationnaires (A0) en fonction de la différence de température imposée (distribution linéaire de température) pour trois régimes de pertes différents : propagation linéaire et pertes singulières aux interfaces dans le noyau (MinLoss) ; propagation non linéaire avec noyau linéaire (PNL) ; propagation non linéaire et pertes singulières (PNL+MinLoss). (a) Amplitude du fondamental. (b) Fréquence de travail.

## E.2 Mise en évidence de la dérive non linéaire de la fréquence de fonctionnement

Pour la même configuration de moteur, la fréquence de fonctionnement à saturation est aussi calculée. Ce cas est représenté par les losanges sur la figure E.1.b. Dans le cas de référence, les variations du gradient de température engendrent une variation locale de la célérité du son et donc de la fréquence de fonctionnement du moteur. Dans le cas de la propagation non linéaire, si la variation de fréquence était due seulement à la modification de la célérité du son comme précédemment, la fréquence de fonctionnement devrait être la même que dans le cas de référence. Hors la fréquence varie plus que dans le cas de référence. Ce phénomène, connu sous le nom de *nonlinear detuning*, est un phénomène non linéaire de variation de la fréquence, lié à l'amplitude des oscillations : plus l'amplitude des oscillations acoustiques est grande, plus la fréquence de résonance augmente et s'éloigne de la *résonance linéaire* du résonateur.<sup>66</sup> Dans le cas où les deux phénomènes saturants sont pris en compte, l'effet de detuning est moins prépondérant car l'amplitude des oscillations est fortement limitée par les pertes singulières dans le noyau, mais reste présent : la fréquence de fonctionnement s'éloigne progressivement de celle du cas de référence avec l'augmentation de la différence de température – et donc de l'amplitude.

## Annexe F

# Résolution itérative des systèmes différentiels

Les méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles reposent sur un principe itératif de calcul d'une solution approchée pas à pas. Les méthodes de la famille Runge-Kutta utilisent l'évaluation de pente en des points intermédiaires du pas temporel pour augmenter la précision de la solution approchée. A l'ordre 1, elle correspond au schéma d'Euler. La plus courante est la méthode Runge-Kutta d'ordre 4.

### F.1 RK4

Dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, la valeur au pas suivant ( $y_{n+1}$ ) de la solution est approchée par la somme de la valeur actuelle ( $y_n$ ) et du produit de la taille de l'intervalle ( $h$ ) par la pente estimée. La pente estimée est la moyenne pondérée de trois pentes :

- $k_1 = f(t_n, y_n)$ , la pente au début de l'intervalle ;
- $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$ , la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $k_1$  pour calculer la valeur de  $y$  au point  $t_n + h/2$  par la méthode d'Euler ;
- $k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$ , la pente au milieu de l'intervalle mais obtenue en utilisant  $k_2$  pour calculer  $y$  ;
- $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$ , la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $y$  calculée en utilisant  $k_3$  ;

un poids double étant attribué aux pentes du milieu. La valeur suivante est alors donnée sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{F.1})$$

Cette méthode est résumée sous la forme d'un tableau de Butcher donnant les coefficients des nœuds dans la colonne de gauche, les pondérations dans la dernière ligne, le reste du tableau étant la matrice de Runge-Kutta. Cette méthode peut être aisément étendue pour la détermination automatique de la taille du pas temporel pour maîtriser l'erreur sur la solution.

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

**FIGURE F.1** – Tableau de Butcher de la méthode de Runge-Kutta classique RK4.

## F.2 Pas adaptatif

Afin d'évaluer l'erreur de troncature  $\varepsilon$ , la solution exacte au temps  $t_{n+1} = t_n + h$ , notée  $\tilde{x}_{n+1}$  et non connue, est évaluée de deux manières différentes pour le pas temporel  $h$ , donnant les solutions approchées  $x_1$  et  $x_2$ . La différence entre ces solutions approchées, dont l'une est supposée plus précise que l'autre, donne accès à une estimation de l'erreur commise, en fonction de laquelle le pas de résolution est adapté pour rester dans un domaine de tolérance pré-établi afin d'optimiser la précision et le temps de calcul de la solution approchée.

### F.2.1 "Step doubling"

Une première méthode consiste à utiliser le même schéma sur le pas puis sur une subdivision du pas original. Dans un premier temps, la solution est approchée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre  $p$  et de pas  $h$  donnant  $x_1 = x(t + h, h)$ . Dans un second temps, la résolution est faite deux fois avec le même schéma, avec un demi-pas  $h/2$ , donnant  $x_2 = x(t + h, h/2)$ . La solution exacte est reliée aux deux solutions approchées par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = x_1 + Ch^{p+1} + O(h^{p+2}), & \text{(F.2a)} \\ \tilde{x}_{n+1} = x_2 + 2C \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + O(h^{p+2}). & \text{(F.2b)} \end{cases}$$

où  $C$  est constant et dépend de la taille du pas. La différence entre les solutions approchées vaut

$$|x_1 - x_2| = Ch^{p+1} \left(1 + \frac{1}{2^p}\right) \text{ donnant } C = \frac{|x_1 - x_2|}{(1 - 2^{-p})h^{p+1}}. \quad \text{(F.3)}$$

La substitution de  $C$  dans la deuxième estimation de la solution donne

$$\tilde{x}_{n+1} = x_2 + \varepsilon + O(h^{p+2}), \text{ où } \varepsilon = \frac{|x_1 - x_2|}{2^p - 1} \quad \text{(F.4)}$$

$\varepsilon$  est un indicateur de l'erreur de troncature qui peut être utilisé pour compenser grossièrement cette erreur, pour obtenir une solution d'ordre  $p + 1$ , soit un ordre supérieur à l'évaluation originale. On peut aussi comparer cette estimation de l'erreur à un seuil prédéterminé  $\varepsilon_0$  pour adapter le pas  $h$ . Si l'erreur est supérieure à  $\varepsilon_0$ , le pas est divisé par deux et les solutions sont réévaluées. Si l'erreur est très inférieure à la tolérance le pas est multiplié par deux pour l'itération suivante (cf. logigramme à la figure F.2). Cependant, ces deux méthodes ne sont pas très efficaces. La première parce que  $\varepsilon$  n'est qu'une estimation de l'erreur de troncature, et l'utiliser pour compenser l'erreur n'augmente pas forcément la précision. La seconde car le schéma requiert de calculer trois solutions à chaque pas de temps, pour n'en utiliser qu'une.

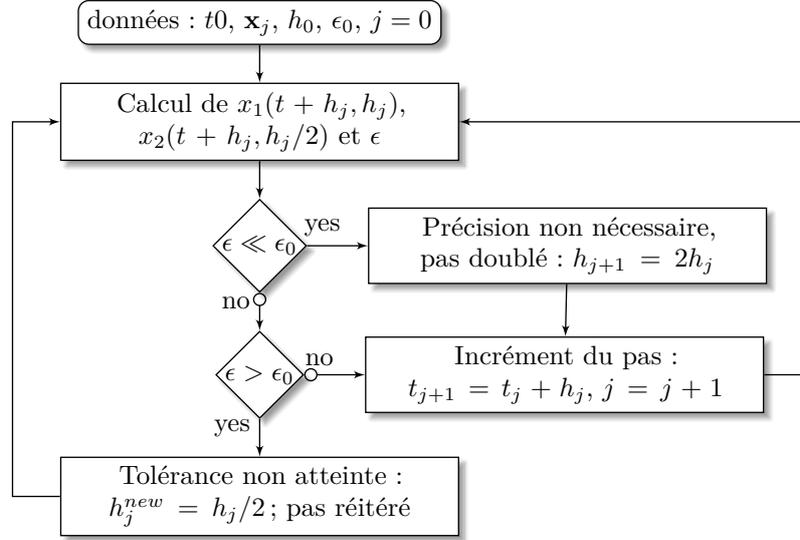


FIGURE F.2 – Logigramme du schéma RK avec adaptation du pas par step doubling.

### F.2.2 Contrôle adaptatif de la taille du pas

L'estimation de l'erreur de troncature  $\varepsilon$  peut être utilisée pour déterminer la valeur maximale de la taille du pas  $h$  afin que l'erreur de troncature reste inférieure au seuil prédéfini  $\varepsilon_0$ , c'est-à-dire

$$C(h^{new})^{p+1} \leq \varepsilon_0 \Leftrightarrow \left(\frac{h^{new}}{h_j}\right)^{p+1} \frac{|x_1 - x_2|}{1 - 2^p} \leq \varepsilon_0, \quad (\text{F.5})$$

ce qui donne

$$h^{new} = h \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/(p+1)}. \quad (\text{F.6})$$

Pour éviter les problèmes de précision lors de la réduction des pas trop grands, il est souvent utile d'altérer à l'ordre inférieur le calcul de la nouvelle valeur du pas (ordre  $p$  au lieu de  $p + 1$ ). De plus, l'erreur de troncature  $\varepsilon$  n'étant qu'une approximation, un facteur de sécurité  $\beta \in [0.8; 1[$  est introduit pour éviter qu'une sous-estimation de l'erreur n'amène à sur-estimer le pas optimal, amenant

$$\begin{cases} h_j^{new} = \beta h_j \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/(p+1)} & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_0, \\ h_{j+1} = \beta h_j \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/p} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

Le schéma de résolution est donné par le logigramme de la figure F.3.

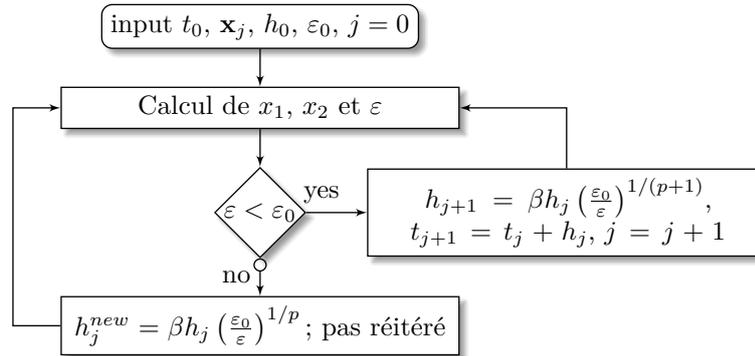


FIGURE F.3 – Logigramme des schémas RK à contrôle adaptatif de la taille de pas.

### F.3 Les schémas intégrés

Afin de réduire le nombre de solutions à évaluer, les schémas intégrés utilisent des coefficients de pondération communs permettant l'expression de la solution à deux ordres  $p$  et  $p + 1$  sur le même pas temporel  $h$ , la différence entre ces solutions étant utilisée pour le choix du nouveau pas.

#### F.3.1 RKF45

La méthode de Runge-Kutta-Fehlberg fut la première méthode intégrée développée. Elle optimise la solution à l'ordre 4. Les pentes utilisées sont définies telle que :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, y_n), \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\
 k_4 &= hf\left(t_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\
 k_5 &= hf\left(t_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 + \frac{3680}{513}k_4 - \frac{845}{4104}k_5\right), \\
 k_6 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right),
 \end{aligned}$$

permettant une solution d'ordre 4

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5. \quad (\text{F.8})$$

et une solution d'ordre 5

$$y_{n+1}^{[5]} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \quad (\text{F.9})$$

Les expressions d'ordre 4 et 5 utilisent les mêmes valeurs de  $k_i$ , ne ralentissant pas le calcul. Ces coefficients sont résumés dans le tableau F.1, la première ligne de pondération donne la méthode d'ordre 5, la seconde la méthode d'ordre 4.

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
[5]	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55
[4]	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0

**Tableau F.1** – *Tableau de Butcher du schéma intégré de Runge-Kutta-Fehlberg utilisant les mêmes coefficients de pondération et pivots pour évaluer les solutions à l'ordre 4 et 5, dont la différence donne une approximation de l'erreur.*

### F.3.2 Cash-Karp RKCK

Le schéma de Cash-Karp est une amélioration du schéma explicite intégré de Runge-Kutta-Fehlberg, par la modification des pivots et des coefficients de pondération. Ces coefficients sont donnés le tableau F.2. Cette méthode est plus rapide à précision équivalente que le schéma RKF45.

### F.3.3 Dormand-Prince RKDP

La schéma de Dormand-Prince est lui aussi basé sur le schéma explicite intégré de Runge-Kutta-Fehlberg, cependant les pondérations de cette méthode ont été choisies afin de réduire l'erreur sur la solution d'ordre 5, alors que les méthodes RKF et RKCK minimisent l'erreur sur la solution d'ordre 4. Ces coefficients sont donnés le tableau F.2. Elle comporte un calcul de plus que la méthode de Cash-Karp, mais celui-ci est réutilisé à l'itération suivante, maintenant un coût équivalent à la méthode précédente en réduisant l'ordre de l'erreur commise. Cette solution est celle utilisée pour la résolution des systèmes de la partie II.

0								
1/5	1/5							
3/10	3/40	9/40						
3/5	3/10	-9/10	6/5					
1	-11/54	5/2	-70/27	35/27				
7/8	1631/55296	175/512	575/13824	44275/110592	253/4096			
[5]	37/378	0	250/621	125/594	0	512/1771		
[4]	2825/27648	0	18575/48384	13525/55296	277/14336	1/4		

Tableau F.2 – Tableau de Butcher du schéma explicite intégré de RK-Cash-Karp.

0								
1/5	1/5							
3/10	3/40	9/40						
4/5	44/45	-56/15	32/9					
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729				
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656			
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84		
[5]	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0	
[4]	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40	

Tableau F.3 – Tableau de Butcher du schéma explicite intégré de RK-Dormand-Prince.

# Bibliography

- [1] J. A. Adeff and T. J. Hofer. Design and construction of a solar-powdered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6):L37–L42, 2000.
- [2] R. A. Ali, S. L. Garrett, J. Smith, and D. K. Kotter. Thermoacoustic thermometry for nuclear reactor monitoring. *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, 16(3):18–25, 2013.
- [3] M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron. *Acta Acust. united Ac.*, 89(6):1008–1024, 2003.
- [4] M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Transient unidirectional acoustic streaming in annular resonators. *Ultrasonics*, 42(1):573–578, 2004.
- [5] B. Arman, J. Wollan, V. Kotsubo, S. Backhaus, and G. Swift. Operation of thermoacoustic stirling heat engine driven large multiple pulse tube refrigerators. In *Cryocoolers 13*, pages 181–188. Springer, 2005.
- [6] W. P. Arnott, H. E. Bass, and R. Raspet. General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6):3228–3237, 1991.
- [7] A. A. Atchley, H. E. Bass, and T. J. Hofer. Development of nonlinear waves in a thermoacoustic prime mover. In M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, editors, *Frontiers in Nonlinear Acoustics, Proceedings of 12th International Symposium on Nonlinear Acoustics (ISNA)*, pages 603–608, New York, 1990, 1990. Elsevier.
- [8] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic Stirling heat engine. *Nature*, 399(6734):335–338, 1999.
- [9] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic-Stirling heat engine: Detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6):3148–3166, 2000.
- [10] S. Backhaus, E. Tward, and M. Petach. Traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Phys. Lett.*, 85(6):1085–1087, 2004.
- [11] S. N. Backhaus and R. M. Keolian. In-line Stirling energy system, Mar. 22 2011. US Patent 7,908,856.
- [12] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, and R. A. Hiller. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4):1808–1821, 2001.
- [13] M. Ban and A. Matsuzaki. Exhaust heat energy recovery system for internal combustion engine, June 3 2003. US Patent 6,571,552.
- [14] M. Bednarik and P. Konicek. Propagation of quasiplane nonlinear waves in tubes and the approximate solutions of the generalized Burgers equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(1):91–98, 2002.

- [15] A. Berson and Ph. Blanc-Benon. Nonperiodicity of the flow within the gap of a thermoacoustic couple at high amplitudes (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(4):EL122–EL127, 2007.
- [16] A. Berson, M. Michard, and Ph. Blanc-Benon. Measurement of acoustic velocity in the stack of a thermoacoustic refrigerator using particle image velocimetry. *Heat Mass Transfer*, 44(8):1015–1023, 2008.
- [17] A. Berson, G. Poignand, Ph. Blanc-Benon, and G. Comte-Bellot. Nonlinear temperature field near the stack ends of a standing-wave thermoacoustic refrigerator. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 54(21):4730–4735, 2011.
- [18] A. Bétrancourt. *Simulations numériques et validations expérimentales de machines de réfrigération thermoacoustiques*. PhD thesis, Paris 6, 2008.
- [19] T. Biwa, K. Sobata, S. Otake, and T. Yazaki. Observation of thermoacoustic shock waves in a resonance tube (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 136(3):965–968, 2014.
- [20] T. Biwa, T. Takahashi, and T. Yazaki. Observation of traveling thermoacoustic shock waves (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(6):3558–3561, 2011.
- [21] T. Biwa, Y. Tashiro, M. Ishigaki, Y. Ueda, and T. Yazaki. Measurements of acoustic streaming in a looped-tube thermoacoustic engine with a jet pump. *J. Appl. Phys.*, 101(6):064914–064914, 2007.
- [22] D. T. Blackstock. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(6):1019–1026, 1966.
- [23] D. T. Blackstock. Generalized Burgers equation for plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(6):2050–2053, June 1985.
- [24] Ph. Blanc-Benon, E. Besnoin, and O. Knio. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *CR Mécanique*, 331(1):17–24, 2003.
- [25] S. Boluriaan and P. J. Morris. Suppression of traveling wave streaming using a jet pump. In *Proceedings of 41st Aerospace Science Meeting and Exhibit*, 2003.
- [26] A. Boufermel, N. Joly, P. Lotton, M. Amari, and V. Gusev. Velocity of mass transport to model acoustic streaming: numerical application to annular resonators. *Acta Acust. united Ac.*, 97(2):219–227, 2011.
- [27] Buddhist Monk. Tamoinnikki. Diary, 1478–1618, re-edited in 1935.
- [28] R. L. Carter, M. White, and A. Steele. Private communications. Technical report, Atomics International Division of North American Aviation, Inc., Sept. 1962.
- [29] A. A. Castrejón-Pita and G. Huelsz. Heat-to-electricity thermoacoustic-magnetohydrodynamic conversion. *Appl. Phys. Lett.*, 90(17):174110, 2007.
- [30] P. H. Ceperley. A pistonless Stirling engine—The traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(5):1508–1513, Nov. 1979.
- [31] B. Chen, A. A. Yousif, P. H. Riley, and D. B. Hann. Development and assessment of thermoacoustic generators operating by waste heat from cooking stove. *Engineering*, 4:894–902, 2012.
- [32] W. Chester. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(01):44–64, 1964.

- 
- [33] W. Chester. Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube. *Proc. R. Soc. A*, 377(1771):449–467, 1981.
- [34] D. G. Crighton. *Modern Methods in Analytical Acoustics: Lecture Notes*, chapter Nonlinear Acoustics, pages 648–670. Springer, 1992.
- [35] D. B. Cruikshank, Jr. Experimental investigation of finite-amplitude acoustic oscillations in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 52(3B):1024–1036, 1972.
- [36] W. Dai, E. Luo, J. Hu, and H. Ling. A heat-driven thermoacoustic cooler capable of reaching liquid nitrogen temperature. *Appl. Phys. Lett.*, 86(22):224103, 2005.
- [37] W. Dai, E. Luo, Y. Zhang, and H. Ling. Detailed study of a traveling wave thermoacoustic refrigerator driven by a traveling wave thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(5):2686–2692, 2006.
- [38] J.-P. Dalmont, C. J. Nederveen, and N. Joly. Radiation impedance of tubes with different flanges: numerical and experimental investigations. *J. Sound. Vib.*, 244(3):505–534, 2001.
- [39] V. Daru, D. Baltean-Carlès, C. Weisman, P. Debesse, and G. Gandikota. Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves. *Wave Motion*, 50(5):955–963, 2013.
- [40] K. de Blok. Low operating temperature integral thermo acoustic devices for solar cooling and waste heat recovery. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5):3541–3541, 2008.
- [41] K. de Blok. Multistage traveling wave thermoacoustic engine with phase distributed power extraction, Sept. 23 2010. WO Patent App. PCT/NL2010/050,057.
- [42] K. de Blok. Novel 4-stage traveling wave thermoacoustic power generator. In *Proceedings of 3rd Joint US-European FEDSM and 8th ICNMM*, volume 3, pages 2–4, Montreal, CA, Aug. 2010. American Society of Mechanical Engineers.
- [43] K. de Blok. Multi-stage traveling wave thermoacoustics in practice. In *Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration. (ICSV)*, pages 1–8, Vilnius, Lithuania, 2012. International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV) and Vilnius University.
- [44] K. de Blok, P. Owczarek, and M.-X. François. Bi-directional turbines for converting acoustic wave power into electricity. In *Proceedings of 9th PAMIR International Conference on Fundamental and Applied MHD*, Riga, Latvia, June 2014.
- [45] A. T. A. M. de Waele. Basic treatment of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines. *J. Sound Vib.*, 325(4):974–988, 2009.
- [46] P. Debesse, D. B. Carlès, F. Lusseyran, and M. François. Oscillating and streaming flow identification in a thermoacoustic resonator, from undersampled piv measurements. *Meas. Sci. Technol.*, 25(2):025005, 2014.
- [47] C. Desjoux, G. Penelet, and P. Lotton. Active control of thermoacoustic amplification in an annular engine. *J. Appl. Phys.*, 108(11):114904, 2010.
- [48] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 121:299–340, 1831.
-

- [49] R. Fay. Plane sound waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 3(2A):222–241, 1931.
- [50] E. Fubini. Anomalies in the propagation of acoustic waves of great amplitude. *Alta Frequenza*, 4:530–581, 1935.
- [51] A. M. Fusco, W. C. Ward, and G. W. Swift. Two-sensor power measurements in lossy ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(4 Pt.1):2229, Apr. 1992.
- [52] L. Gaete-Garretón and J. A. Gallego-Juárez. Propagation of finite-amplitude ultrasonic waves in air—ii. plane waves in a tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(3):768–773, 1983.
- [53] D. F. Gaitan and A. A. Atchley. Finite amplitude standing waves in harmonic and anharmonic tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(5):2489–2495, 1993.
- [54] D. L. Gardner and C. Q. Howard. Waste-heat-driven thermoacoustic engine and refrigerator. In *Proceedings of Acoustics*, Adelaide (Australia), 2009.
- [55] S. L. Garrett. Resource letter: Ta-1: thermoacoustic engines and refrigerators. *Am. J. Phys.*, 72(1):11 – 17, 2004.
- [56] S. L. Garrett and S. Backhaus. The power of sound. *Am. Sci.*, 88(6):516–525, 2000.
- [57] D. Gedeon. DC gas flows in Stirling and pulse-tube cryocoolers. In R. G. Ross, editor, *Cryocoolers*, volume 9, pages 385–392. Springer, 1997.
- [58] D. Geller and G. Swift. Thermoacoustic mixture separation with an axial temperature gradient. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(5):2937–2945, 2009.
- [59] J. Gilbert. Differences between cylindrical and conical brass instruments; the nonlinear propagation point of view from experiments and simulations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(5):3332–3332, 2006.
- [60] J. Gilbert, L. Menguy, and M. Campbell. A simulation tool for brassiness studies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(4):1854–1857, 2008.
- [61] K. Godshalk, C. Jin, Y. Kwong, E. Hershberg, G. Swift, and R. Radebaugh. Characterization of 350 Hz thermoacoustic driven orifice pulse tube refrigerator with measurements of the phase of the mass flow and pressure. In *Advances in cryogenic engineering*, pages 1411–1418. Springer, 1996.
- [62] M. Guedra and G. Penelet. On the use of a complex frequency for the description of thermoacoustic engines. *Acta Acust. united Ac.*, 98(2):232–241, 2012.
- [63] M. Guedra, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(1):145–152, July 2011.
- [64] C. Guianvarc’h and M. Bruneau. Acoustic fields in binary gas mixtures: Mutual diffusion effects throughout and beyond the boundary layers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(6):4252–4262, 2012.
- [65] C. Guianvarc’h, M. Bruneau, and R. M. Gavioso. Acoustics and precondensation phenomena in gas-vapor saturated mixtures. *Phys. Rev. E*, 89(2):023208, 2014.
- [66] V. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Asymptotic theory of nonlinear acoustic waves in a thermoacoustic prime-mover. *Acta Acust. united Ac.*, 86(1):25–38, 2000.

- [67] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(3 pt.1):934–945, 2000.
- [68] V. Gusev, P. Lotton, H. Bailliet, S. Job, and M. Bruneau. Thermal wave harmonics generation in the hydrodynamical heat transport in thermoacoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(1):84–90, 2001.
- [69] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock, et al. *Nonlinear acoustics*, volume 237. Academic press San Diego, 1998.
- [70] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(1):153–160, 2003.
- [71] B. Higgins. cited by W. Nicholson, On the sound produced by a current of hydrogen gas passing through a tube. with a letter from Dr. Higgins, respecting the time of its discovery. *J. Nat. Phil. Chem. Arts*, 1:129–131, Feb. 1802.
- [72] J. Hu, E. Luo, S. Li, B. Yu, and W. Dai. Heat-driven thermoacoustic cryocooler operating at liquid hydrogen temperature with a unique coupler. *J. Appl. Phys.*, 103(10):104906, 2008.
- [73] G. Ibáñez, S. Cuevas, and M. L. de Haro. Optimization analysis of an alternate magnetohydrodynamic generator. *Energy Convers. Manage.*, 43(14):1757–1771, 2002.
- [74] I. Idel’chik. *Handbook of Hydraulic Resistance*, chapter Chap IV: Resistance to flow with Sudden Changes in Velocity and Flow Area, pages 189–237. Begell House Publishers, 2001.
- [75] C. Jensen and R. Raspet. Thermoacoustic power conversion using a piezoelectric transducer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(1):98–103, 2010.
- [76] T. Jin, G. Chen, and Y. Shen. A thermoacoustically driven pulse tube refrigerator capable of working below 120 K. *Cryogenics*, 41(8):595–601, 2001.
- [77] S. Karpov and A. Prosperetti. A nonlinear model of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4):1431–1444, 2002.
- [78] R. M. Keolian, J. Wuthrich, and K. Bastyr. Thermoacoustic piezoelectric generator, Aug. 10 2010. US Patent 7,772,746.
- [79] R. Khokhlov and S. Soluyan. Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media. *Acta Acust. united Ac.*, 14(5):241–247, 1964.
- [80] G. Kirchhoff. Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. *Annalen der Physik*, 210(6):177–193, 1868.
- [81] E. Luo, W. Dai, Y. Zhang, and H. Ling. Thermoacoustically driven refrigerator with double thermoacoustic-Stirling cycles. *Appl. Phys. Lett.*, 88(7):074102, 2006.
- [82] E. Luo, Z. Wu, W. Dai, S. Li, and Y. Zhou. A 100 W-class traveling-wave thermoacoustic electricity generator. *Chinese Sci. Bull.*, 53(9):1453–1456, 2008.
- [83] D.-Y. Maa and K. Liu. Nonlinear standing waves: Theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(5):2753–2763, 1995.
- [84] C. N. Markides and T. C. Smith. A dynamic model for the efficiency optimization of an oscillatory low grade heat engine. *Energy*, 36(12):6967–6980, 2011.

- [85] D. Marx and Ph. Blanc-Benon. Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator. *AIAA J.*, 42(7):1338–1347, 2004.
- [86] D. Marx and Ph. Blanc-Benon. Computation of the temperature distortion in the stack of a standing-wave thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(5):2993–2999, 2005.
- [87] L. Menguy and J. Gilbert. Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide. *Acta Acust. united Ac.*, 86(2):249–259, 2000.
- [88] L. Menguy and J. Gilbert. Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes; solutions and experiments. *Acta Acust. united Ac.*, 86(5):798–810, 2000.
- [89] P. Merkli. *Theoretische und experimentelle thermoakustische Untersuchungen am kolbengetriebenen Resonanzrohr*. PhD thesis, ETH Zürich, 1973.
- [90] P. Merkli and H. Thomann. Transition to turbulence in oscillating pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 68(03):567–576, 1975.
- [91] A. Migliori and G. W. Swift. Liquid-sodium thermoacoustic engine. *Appl. Phys. Lett.*, 53(5):355–357, 1988.
- [92] M. Miwa, T. Sumi, T. Biwa, Y. Ueda, and T. Yazaki. Measurement of acoustic output power in a traveling wave engine. *Ultrasonics*, 44, Supplement(0):e1527–e1529, 2006. Proceedings of Ultrasonics International (UI'05) and World Congress on Ultrasonics (WCU).
- [93] S. Moreau, H. Bailliet, and J.-C. Valière. Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser Doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(2):640–647, 2008.
- [94] J. Morii, T. Biwa, and T. Yazaki. Measurements of acoustic particle velocity in a coaxial duct and its application to a traveling-wave thermoacoustic heat engine. *Rev. Sci. Instrum.*, 85(9):094902, 2014.
- [95] G. Mozurkewich. Heat transport by acoustic streaming within a cylindrical resonator. *Appl. Acoust.*, 63(7):713–735, 2002.
- [96] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley, 1979.
- [97] D. Noda and Y. Ueda. A thermoacoustic oscillator powered by vaporized water and ethanol. *Am. J. Phys.*, 81(2):124–126, 2013.
- [98] M. Nouh, O. Aldraihem, and A. Baz. Transient characteristics and stability analysis of standing wave thermoacoustic-piezoelectric harvesters. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(2):669–678, 2014.
- [99] A. Novak. *Identification of Nonlinear Systems in Acoustics*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France and Czech Technical University, Prague, Czech Republic, Le Mans (France), 2009.
- [100] A. Novak, P. Lotton, and L. Simon. Dynamic measurement of loudspeaker suspension parameters using an active harmonic control technique. In *Proceedings of Audio Engineering Society Convention 136*, Apr. 2014.
- [101] A. Novak, B. Maillou, P. Lotton, and L. Simon. Nonparametric identification of nonlinear systems in series. In *Proceedings of Instrumentation and measurement, IEEE Transactions*. IEEE, 2014.

- [102] W. L. M. Nyborg. Acoustic streaming. In W. P. Mason, editor, *Physical Acoustics*, volume 2: Principles and Methods - Part B: Properties of Polymers and Nonlinear Acoustics, chapter 11, pages 265–331. Academic Press, New York, 1965.
- [103] C. Olivier, G. Penelet, J. Gilbert, G. Poignand, and P. Lotton. Propagation faiblement non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques. In *Proceedings of 12ème Congrès Français d'Acoustique (CFA)*, Poitiers (France), Apr. 2014.
- [104] C. Olivier, G. Penelet, G. Poignand, J. Gilbert, and P. Lotton. Weakly nonlinear propagation in thermoacoustic engines: a numerical study of higher harmonics generation up to the appearance of shock waves. *Acta Acust. united Ac.*, 101(5):941 – 949, Sept. 2015.
- [105] C. Olivier, G. Penelet, G. Poignand, and P. Lotton. Active control of thermoacoustic amplification in a thermo-acousto-electric transducer : experimental proof of concept for active control with a feedback loop. In *Proceedings of Non-Normal and Nonlinear Effects in Aero- and Thermoacoustics (n3l)*, Munich (Germany), June 2013.
- [106] C. Olivier, G. Penelet, G. Poignand, and P. Lotton. Active control of thermoacoustic amplification in a thermo-acousto-electric engine. *J. Appl. Phys.*, 115(17):174905, May 2014.
- [107] J. Olson and G. W. Swift. A loaded thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(5):2690–2693, 1995.
- [108] J. Olson and G. W. Swift. Acoustic streaming in pulse tube refrigerators: Tapered pulse tubes. *Cryogenics*, 37(12):769–776, 1997.
- [109] M. N. Özışık. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press, 1994.
- [110] G. Penelet and T. Biwa. Synchronization of a thermoacoustic oscillator by an external sound source. *Am. J. Phys.*, 81(4):290, 2013.
- [111] G. Penelet, T. Chareyre, and J. Gilbert. Weakly nonlinear acoustic oscillations in gas columns in the presence of temperature gradients. In *Proceedings of 11ème Congrès Français d'Acoustique (CFA)*, Nantes (France), Apr. 2012.
- [112] G. Penelet, E. Gaviot, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover: observation of a double-threshold effect. *Cryogenics*, 42(9):527–532, 2002.
- [113] G. Penelet, M. Guedra, V. Gusev, and T. Devaux. Simplified account of Rayleigh streaming for the description of nonlinear processes leading to steady state sound in thermoacoustic engines. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 55(21–22):6042 – 6053, 2012.
- [114] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental and theoretical study of processes leading to steady-state sound in annular thermoacoustic engines. *Phys. Rev. E*, 72(1):016625, 2005.
- [115] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Nontrivial influence of acoustic streaming on the efficiency of annular thermoacoustic prime movers. *Phys. Lett. A*, 351(4):268–273, 2006.
- [116] G. Penelet, S. Job, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Dependence of sound amplification on temperature distribution in annular thermoacoustic engines. *Acta Acust. united Ac.*, 91(3):567–577, 2005.

- [117] D. Pernet and R. Payne. Non-linear propagation of signals in airs. *J. Sound. Vib.*, 17(3):383–396, 1971.
- [118] A. Petculescu and L. A. Wilen. Oscillatory flow in jet pumps: Nonlinear effects and minor losses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3):1282–1292, 2003.
- [119] P. Picart, M. Leclercq, T. Wassereau, and G. Penelet. Multi-scale digital holographic interferometry for studying a thermoacoustic resonator. In *Proceedings of Digital Holography and Three-Dimensional Imaging*, pages DTh1B–6. Optical Society of America, 2014.
- [120] G. Poignand, P. Lotton, G. Penelet, and M. Bruneau. Thermoacoustic, small cavity excitation to achieve optimal performance. *Acta Acust. united Ac.*, 97(6):926–932, 2011.
- [121] G. Poignand, C. Olivier, G. Penelet, and P. Lotton. Active tuning of acoustic oscillations in a thermoacoustic power generator. In *Proceedings of 2d International Workshop on Thermoacoustics*, Sendai (Japan), May 2014.
- [122] G. Poignand, C. Olivier, G. Penelet, and P. Lotton. Hysteretic behaviour induced by an electroacoustic feedback loop in a thermo-acousto-electric generator. *Appl. Acoust.*, 105:110–115, 2016.
- [123] A. Prosperetti and M. Watanabe. Simplified model for the study of nonlinear processes in thermoacoustic engines. In *Proceedings of 127th Meeting: Acoustical Society of America*, volume 96, pages 3220–3220. Acoustical Society of America, 1994.
- [124] Q. Qi. The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2):1090–1098, 1993.
- [125] L. Qiu, D. Sun, W. Yan, P. Chen, Z. Gan, X. Zhang, and G. Chen. Investigation on a thermoacoustically driven pulse tube cooler working at 80K. *Cryogenics*, 45(5):380–385, 2005.
- [126] R. Raspet, W. V. Slaton, C. J. Hickey, and R. A. Hiller. Theory of inert gas-condensing vapor thermoacoustics: Propagation equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4):1414–1422, 2002.
- [127] I. Reynt, V. Daru, H. Bailliet, S. Moreau, J.-C. Valière, D. Baltean-Carlès, and C. Weisman. Fast acoustic streaming in standing waves: Generation of an additional outer streaming cell. *J. Acoust. Soc. Am.*, 134(3):1791–1801, 2013.
- [128] P. Rijke. Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen. *Ann. Phys. Berlin*, 183(6):339–343, 1859.
- [129] P. H. Riley, C. Saha, and C. Johnson. Designing a low-cost, electricity-generating cooking stove. *IEEE Technol. Soc. Mag.*, 29(2):47–53, 2010.
- [130] M. Rossi. *Electroacoustique*, volume XXI of *Traité d’Electricité de l’École Polytechnique Fédérale de Lausanne*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1986.
- [131] N. Rott. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.*, 20(2):230–243, 1969.
- [132] N. Rott. Thermally driven acoustic oscillations. part II: Stability limit for helium. *Z. Angew. Math. Phys.*, 24(1):54–72, 1973.

- 
- [133] N. Rott. The heating effect connected with non-linear oscillations in a resonance tube. *Z. Angew. Math. Phys.*, 25(5):619–634, 1974.
- [134] N. Rott. The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Z. Angew. Math. Phys.*, 25(3):417–421, 1974.
- [135] N. Rott. Thermally driven acoustic oscillations, part III: Second-order heat flux. *Z. Angew. Math. Phys.*, 26(1):43–49, 1975.
- [136] N. Rott. Thermoacoustics. In C.-S. Yih, editor, *Adv. Appl. Mech.*, volume 20 of *Advances In Applied Mechanics*, pages 135–175. Elsevier, academic press edition, 1980.
- [137] N. Rott and G. Zouzoulas. Thermally driven acoustic oscillations, part IV: Tubes with variable cross-section. *Z. Angew. Math. Phys.*, 27(2):197–224, 1976.
- [138] O. Rudenko and S. I. Soluian. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics* Consultants Bureau New York/London, 1977.
- [139] P. Saechan, H. Kang, X. Mao, and A. J. Jaworski. Thermoacoustic refrigerator driven by a combustion-powered thermoacoustic engine-demonstrator of device for rural areas of developing countries. *Lect. Notes Eng. Comp.*, 3:2097–2102, 2013.
- [140] C. Saha, P. H. Riley, J. Paul, Z. Yu, A. Jaworski, and C. Johnson. Halbach array linear alternator for thermo-acoustic engine. *Sensor Actut. A-Phys.*, 178:179–187, 2012.
- [141] J.-B. Saulnier and A. Alexandre. La modélisation thermique par la méthode nodale: ses principes, ses succès et doses limites. *Rev. Gen. Therm.*, 24(280):363–372, 1985.
- [142] J. Scheiman and J. Brooks. Comparison of experimental and theoretical turbulence reduction from screens, honeycomb, and honeycomb-screen combinations. *J. Aircraft*, 18(8):638–643, 1981.
- [143] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis: from equilibrium to chaos*, volume 5 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.
- [144] B. Smith and A. Glezer. The formation and evolution of synthetic jets. *Phys. Fluids*, 10:2281–2297, 1998.
- [145] C. Sondhauss. Über die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite. *Ann. Phys. Berlin*, 155(1):1–34, 1850.
- [146] S. Spoelstra and M. Tijani. Thermoacoustic heat pumps for energy savings. In *seminar" Boundary crossing acoustics" of the Acoustical Society of the Netherland*, 2005.
- [147] P. Spoor and G. W. Swift. Thermoacoustic separation of a he-ar mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 85(8):1646, 2000.
- [148] M. R. Stinson and Y. Champoux. Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(2):685–695, Feb. 1992.
- [149] J. W. Strutt (Lord Rayleigh). On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Proc. R. Soc. A*, 36(228-231):10–11, 1883.
- [150] J. W. Strutt (Lord Rayleigh). *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [151] B. Sturtevant. Nonlinear gas oscillations in pipes. part 2. experiment. *J. Fluid Mech.*, 63(01):97–120, 1974.
- [152] N. Sugimoto. Generalized Burgers equations and fractional calculus. In A. Jeffrey, editor, *Nonlinear Waves Motion*, pages 162–179. Longman Scientific & Technical, 1989.
-

- [153] N. Sugimoto. Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves. *J. Fluid Mech.*, 225:631–653, 1991.
- [154] D. Sun, K. Wang, X. Zhang, Y. Guo, Y. Xu, and L. Qiu. A traveling-wave thermoacoustic electric generator with a variable electric RC load. *Appl. Energy.*, 106:377–382, 2013.
- [155] G. Swift. A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(1):350–361, 1988.
- [156] G. Swift and D. Geller. Continuous thermoacoustic mixture separation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(5):2648–2657, 2006.
- [157] G. W. Swift. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4):1145–1180, Oct. 1988.
- [158] G. W. Swift. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(3):1551–1563, 1992.
- [159] G. W. Swift. Thermoacoustic natural gas liquefier. In *Proceedings of the DOE Natural Gas Conference*, 1997.
- [160] G. W. Swift. *Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators*. Acoustical Society of America, 2002.
- [161] G. W. Swift, D. Gardner, and S. Backhaus. Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(2):711–724, 1999.
- [162] G. W. Swift and R. M. Keolian. Thermoacoustics in pin-array stacks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2 Pt.1):941–943, Aug. 1993.
- [163] O. G. Symko and Y. S. Kwon. Compact thermoacoustic array energy converter, Aug. 23 2011. US Patent 8,004,156.
- [164] O. G. Symko, I. A. Rodriguez, R. Behunin, and M. Urry. Annular thermoacoustic energy converter, Jan. 14 2014. US Patent 8,629,600.
- [165] K. Taconis, J. Beenakker, A. Nier, and L. Aldrich. Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of  $\text{He}^3$  in  $\text{He}^4$  below 2.19 K. *Physica*, 15(8):733–739, 1949.
- [166] M. W. Thompson and A. A. Atchley. Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities in a standing wave using laser Doppler anemometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(4 Pt.1):1828–1838, Apr. 2005.
- [167] M. W. Thompson, A. A. Atchley, and M. J. Maccarone. Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(4 Pt.1):1839–1849, Apr. 2005.
- [168] M. E. H. Tijani and S. Spoelstra. A high performance thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.*, 110(9):093519, 2011.
- [169] M. E. H. Tijani and S. Spoelstra. A hot air driven thermoacoustic-Stirling engine. *Appl. Therm. Eng.*, 61(2):866–870, 2013.
- [170] A. Tominaga. Thermodynamic aspects of thermoacoustic theory. *Cryogenics*, 35(7):427–440, 1995.

- [171] A. Ueda and R. t. Sieffert. *Ugetsu Monogatari (Contes de pluie et de Lune)*, chapter Kibitsu no Kama (Le chaudron de Kibitsu). Collection L’Imaginaire. (Gallimard trad.), 1776 (2009 trad.).
- [172] R. S. Wakeland and R. M. Keolian. Influence of velocity profile nonuniformity on minor losses for flow exiting thermoacoustic heat exchangers (1). *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4):1249–1252, 2002.
- [173] R. S. Wakeland and R. M. Keolian. Measurements of the resistance of parallel-plate heat exchangers to oscillating flow at high amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(5 Pt.1):2071–2074, May 2004.
- [174] W. C. Ward, J. Clark, and G. W. Swift. *Design Environment for Low-amplitude Thermoacoustic Energy Conversion (DeltaEC Version 6.2) Users Guide*, 2008.
- [175] W. C. Ward and G. W. Swift. Design Environment for Low-Amplitude Thermoacoustic Engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6):3671–3672, 1994.
- [176] W. C. Ward, G. W. Swift, and J. P. Clark. Interactive analysis, design, and teaching for thermoacoustics using DeltaEC. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5):3546–3546, 2008.
- [177] M. Watanabe, A. Prosperetti, and H. Yuan. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. part I. model and linear theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6):3484–3496, Dec. 1997.
- [178] R. Waxler. Stationary velocity and pressure gradients in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(6):2739–2750, 2001.
- [179] P. Westervelt. The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(1):60–67, 1953.
- [180] J. C. Wheatley, T. J. Hoffer, G. W. Swift, and A. Migliori. An intrinsically irreversible thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(5):153–170, 1983.
- [181] J. C. Wheatley, G. W. Swift, and A. Migliori. Thermoacoustic magnetohydrodynamic electrical generator, July 8 1986. US Patent 4,599,551.
- [182] J. C. Wheatley, G. W. Swift, A. Migliori, and T. J. Hoffer. Heat-driven acoustic cooling engine having no moving parts, Aug. 22 1989. US Patent 4,858,441.
- [183] J. J. Wollan, G. W. Swift, S. N. Backhaus, and D. L. Gardner. Development of a thermoacoustic natural gas liquefier. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 2002.
- [184] Z. Wu, W. Dai, M. Man, and E. Luo. A solar-powered traveling-wave thermoacoustic electricity generator. *Sol. Energy*, 86(9):2376–2382, 2012.
- [185] Z. Wu, M. Man, E. Luo, W. Dai, and Y. Zhou. Experimental investigation of a 500 W traveling-wave thermoacoustic electricity generator. *Chinese Sci. Bull.*, 56(19):1975–1977, 2011.
- [186] Z. Wu, G. Yu, L. Zhang, W. Dai, and E. Luo. Development of a 3 kW double-acting thermoacoustic Stirling electric generator. *Appl. Energ.*, 136:866 – 872, 2014.
- [187] Z. Wu, L. Zhang, W. Dai, and E. Luo. Investigation on a 1kW traveling-wave thermoacoustic electrical generator. *Appl. Energ.*, 124:140–147, 2014.
- [188] Z. Yang, Y. Zhuo, E. Luo, and Z. Yuan. Travelling-wave thermoacoustic high-temperature heat pump for industrial waste heat recovery. *Energy*, 77:397–402, 2014.

- [189] S. Yatsuzuka, Y. Niiyama, K. Fukuda, K. Muramatsu, and N. Shikazono. Experimental and numerical evaluation of liquid-piston steam engine. *Energy*, 87:1–9, 2015.
- [190] T. Yazaki, T. Biwa, and A. Tominaga. A pistonless Stirling cooler. *Appl. Phys. Lett.*, 80(1):157–159, 2002.
- [191] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15):3128–3131, 1998.
- [192] T. Yazaki, S. Takashima, and F. Mizutani. Complex quasiperiodic and chaotic states observed in thermally induced oscillations of gas columns. *Phys. Rev. Lett.*, 58(11):1108, 1987.
- [193] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium. *J. Low Temp. Phys.*, 41(1-2):45–60, 1980.
- [194] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Thermally driven acoustic oscillations: second-harmonic. *Phys. Lett. A*, 79(5):407–409, 1980.
- [195] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Large heat transport due to spontaneous gas oscillation induced in a tube with steep temperature gradients. *J. Heat Transfer*, 105(4):889–894, 1983.
- [196] T. Yoshida, T. Yazaki, Y. Ueda, and T. Biwa. Forced synchronization of periodic oscillations in a gas column: Where is the power source? *J. Phys. Soc. Jpn.*, 82(10):103001, 2013.
- [197] Z. Yu, A. J. Jaworski, and A. S. Abduljalil. Fishbone-like instability in a looped-tube thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(4):EL188–EL194, 2010.
- [198] Z. Yu, A. J. Jaworski, and S. Backhaus. A low-cost electricity generator for rural areas using a travelling-wave looped-tube thermoacoustic engine. *P. I. Mech. Eng. A-J. Pow.*, 224(6):787–795, 2010.
- [199] Z. Yu, A. J. Jaworski, and S. Backhaus. Travelling-wave thermoacoustic electricity generator using an ultra-compliant alternator for utilization of low-grade thermal energy. *Appl. Energy*, 99:135–145, 2012.
- [200] Z. Yu, P. Saechan, and A. J. Jaworski. A method of characterising performance of audio loudspeakers for linear alternator applications in low-cost thermoacoustic electricity generators. *Appl. Acoust.*, 72(5):260–267, 2011.
- [201] H. Yuan, S. Karpov, and A. Prosperetti. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. part II. nonlinear oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6):3497–3506, Dec. 1997.
- [202] R. Zaripov and M. Ilhamov. Non-linear gas oscillations in a pipe. *J. Sound Vib.*, 46(2):245–257, 1976.
- [203] D. Zhao and Y. Chew. Energy harvesting from a convection-driven Rijke-Zhao thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.*, 112(11):114507, 2012.



# THÈSE DE DOCTORAT

Côme OLIVIER

**Contributions à l'Étude des Générateurs d'Ondes Thermoacoustiques –  
Contrôle Actif des Auto-Oscillations et Propagation Non Linéaire**

**Contributions to the Study of Thermoacoustic Prime-Movers –  
Feedback Control and Nonlinear Propagation**

## Résumé

Les moteurs thermoacoustiques sont des machines thermodynamiques cycliques, qui font usage d'un gradient de température dans un matériau poreux pour générer du travail acoustique. Les modèles historiques décrivant ces moteurs sont basés sur la théorie linéaire de la thermoacoustique, qui faillit à qualifier leurs conditions de fonctionnement et de saturation car différents effets non linéaires dissipent une partie non négligeable de l'énergie acoustique produite et perturbent la distribution de température dans le noyau et l'éloignent de la distribution pour laquelle le moteur a été optimisé.

Les travaux présentent les résultats expérimentaux issus d'une approche globale pour limiter l'impact de ces effets non linéaires, en ajustant le champ acoustique par un rétro-contrôle acoustique dans le moteur afin d'exploiter au mieux la distribution de température présente dans la machine.

Un modèle simplifié est établi afin de comprendre les phénomènes en jeu dans les comportements dynamiques complexes observés expérimentalement, tels que l'augmentation de l'efficacité de conversion thermoacoustique couplée à une baisse de la différence de température dans le régénérateur, l'extinction de l'auto-oscillation, ou un comportement hystérétique des seuils d'instabilité. Ce modèle est basé sur une approche à constante localisée et une description discrète des transferts thermiques pour réduire l'ordre de complexité du problème.

Une étude complémentaire est présentée sur la propagation non linéaire dans les moteurs thermoacoustiques, pouvant amener à la formation d'ondes de choc. Des outils de description de cette propagation sont adaptés au cas des auto-oscillations thermoacoustiques afin de mettre en évidence les paramètres déterminant dans l'amplification du phénomène de cascade harmonique dans des configurations académiques de moteurs thermoacoustiques.

**Mots clés :** Thermoacoustique, modèle d'ordre réduit, onde de choc

## Abstract

Thermoacoustic engines are heat engines in which a fluid in a porous media submitted to temperature gradient undergoes a thermodynamic cycle performing acoustic work. The design and optimization of such engine usually makes use of the linear theory of thermoacoustics. Though it is sufficient to describe the onset conditions of the instability, this theory fails to predict accurately the operating conditions of engines. Indeed, nonlinear effects develop due to high acoustic levels, which tend to perturb the temperature distribution in the thermoacoustic core and take it away from the ideal distribution for which the engine has been optimized.

The work presented in this manuscript is devoted to a technique of control of the acoustic field distribution in the engine, in order to optimize the thermoacoustic interaction though nonlinear effects distort the temperature distribution. An auxiliary acoustic source added to the engine, powered by a feedback loop allows to control the efficiency of thermoacoustic conversion. Experimental results are presented, showing complex behavior such as oscillation death or hysteretic behavior of thresholds.

A low order model of the engine under the influence of the feedback loop is presented, giving an insight of the physical phenomena at stake in this control. It is based on a lumped element electro-acoustic analogy, coupled with a discretization of the heat transfer description.

A complementary study of the nonlinear propagation is presented for simple configurations of thermoacoustic prime movers. The condition leading to shock-wave formation are sought thanks to a numerical model, adapted to self-sustained oscillations from a previous model of weakly nonlinear guided propagation.

**Key Words:** Thermoacoustics, low order model, shock waves