



**HAL**  
open science

**Développement d'une approche numérique et  
expérimentale pour un conduit avec traitement  
acoustique: application à la validation de modèles  
d'impédance en propagation multimodale avec  
écoulement**

Ryan Baccouche

► **To cite this version:**

Ryan Baccouche. Développement d'une approche numérique et expérimentale pour un conduit avec traitement acoustique: application à la validation de modèles d'impédance en propagation multimodale avec écoulement. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2016. Français. NNT: 2016COMP2257 . tel-01343319

**HAL Id: tel-01343319**

**<https://theses.hal.science/tel-01343319>**

Submitted on 8 Jul 2016

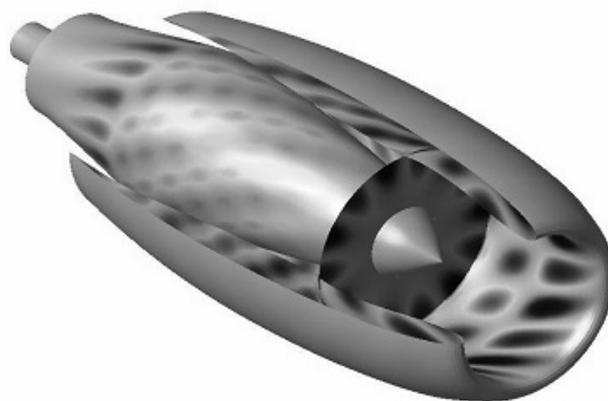
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par Ryan **BACCOUCHE**

*Développement d'une approche numérique et expérimentale pour un conduit avec traitement acoustique : application à la validation de modèles d'impédance en propagation multimodale avec écoulement*

Thèse présentée  
pour l'obtention du grade  
de Docteur de l'UTC



Soutenu le 1<sup>er</sup> février 2016  
**Spécialité** : Mécanique Avancée

D2257

**Soutenu le 1er février 2016 devant le jury composé de :**

**M. J-M. VILLE (Président)**

**M. M. BEN TAHAR (Directeur de thèse)**

**Mme S. MOREAU (Directeur de thèse)**

**M. P. HERZOG (Rapporteur)**

**M. A. LAVIE (Rapporteur)**

**M. D. MARX**

**Invité : M. M. VERSAEVEL**

**Développement d'une approche  
numérique et expérimentale pour un  
conduit avec traitement acoustique:  
application à la validation de modèles  
d'impédance en propagation  
multimodale avec écoulement**



**Ryan Baccouche**

Laboratoire Roberval

Université de Technologie de Compiègne

Mémoire pour l'obtention du grade de Docteur de l'UTC

A ma mère.

## Remerciements

J'adresse tout d'abord mes plus sincères remerciements à mes directeurs de thèse, M. Mabrouk Ben Tahar et Mme Solène Moreau pour tous les conseils et la confiance qu'ils m'ont accordés. Au cours de ces trois années à leurs côtés, j'ai pu bénéficier d'un encadrement exceptionnel sans lequel je n'aurais pu mener à bien ce travail.

J'adresse toute ma gratitude à M. Philippe Herzog, Directeur de Recherche au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, et à M. Antoine Lavie, Professeur à l'Université d'Artois, pour avoir bien voulu évaluer mon travail de thèse. Merci également à M. David Marx, Chargé de Recherche à l'Université de Poitiers, et M. Marc Versaevel, Ingénieur Acoustique chez Aircelle, pour leur participation au jury de soutenance. Je tiens enfin à remercier M. Jean-Michel Ville, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, pour en avoir assuré la présidence.

Durant cette thèse, j'ai aussi fait la connaissance de collègues dont beaucoup sont devenus des amis et qui ont contribué à rendre ces trois années inoubliables. Un grand merci à Saâd pour son soutien et son amitié, à Nicolas, Thibault et Antoine pour les moments de franche camaraderie qu'on a partagés, mais aussi à Lei, Charles, Ming Ming, Florian, Nan et Guillaume pour leur sympathie. Mes pensées vont aussi à tous les "anciens", Romain, Boureima, Julien, Yorick, Sébastien G. et Sébastien P. pour leurs conseils avisés, leur gentillesse, et leur indéfectible bonne humeur. Bien évidemment je n'oublie pas Jean-Marc, Félix et tous les professeurs du laboratoire pour l'aide qu'ils ont pu m'apporter et pour toutes les conversations qu'on a échangées.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Développement d'une PML axisymétrique en présence d'un écoulement axial et tournant</b>	<b>5</b>
<b>1 Cadre théorique de l'étude</b>	<b>7</b>
1.1 Équations générales . . . . .	7
1.2 Représentations pour la linéarisation des équations . . . . .	8
1.2.1 Représentation eulérienne . . . . .	8
1.2.2 Représentation mixte eulérienne-lagrangienne . . . . .	9
1.3 Équation de Galbrun . . . . .	10
1.3.1 Conditions aux limites . . . . .	11
1.3.2 Conservation de l'énergie . . . . .	13
1.4 Cadre spatial et temporel de l'étude . . . . .	14
1.5 Formulation variationnelle associée à l'étude . . . . .	16
1.6 Conclusion . . . . .	17

<b>2</b>	<b>PML axisymétrique pour l'équation de Galbrun</b>	<b>19</b>
2.1	Revue bibliographique de la méthode PML . . . . .	20
2.2	PML pour l'équation de Galbrun . . . . .	21
2.2.1	Principe de la PML (sans écoulement) . . . . .	21
2.2.2	Développement de la PML . . . . .	23
2.2.3	Application à la formulation variationnelle de Galbrun . . . . .	26
2.2.4	Discrétisation éléments finis . . . . .	27
2.3	Résultats et discussion . . . . .	27
2.3.1	Conduit annulaire droit infini rigide . . . . .	28
2.3.2	Conduit infini à section lentement variable . . . . .	34
2.3.3	Turboréacteur d'avion . . . . .	34
2.4	Conclusion . . . . .	38
<b>II</b>	<b>Validation de modèles d'impédance acoustique d'un SDOF en propagation mul-</b>	
	<b>timodale en présence d'écoulement</b>	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>Modèles d'impédance acoustique d'un SDOF en présence d'écoulement</b>	<b>41</b>
3.1	Notion d'impédance . . . . .	42
3.1.1	Définition de l'impédance de surface . . . . .	42
3.1.2	Réaction localisée . . . . .	43
3.1.3	Impédance des traitements SDOF . . . . .	44
3.2	Impédance d'un orifice . . . . .	46

---

3.2.1	Effets de la viscosité de l'air . . . . .	46
3.2.2	Effets du rayonnement acoustique . . . . .	47
3.2.3	Effets de l'écoulement rasant . . . . .	47
3.2.4	Effets non linéaires pour les forts niveaux acoustiques . . . . .	48
3.3	Modèles d'impédance acoustique de plaques perforées prenant en compte l'écoulement	49
3.3.1	Modèle de Guess (1974) . . . . .	49
3.3.2	Modèle d'Allam (2008) . . . . .	51
3.3.3	Modèle de Yu (2008) . . . . .	51
3.3.4	Modèle de Cobo (2010) . . . . .	53
3.3.5	Modèle d'Allam (2011) . . . . .	54
3.4	Conclusion . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Développement d'une approche expérimentale et numérique pour les conduits avec traitement acoustique</b>	<b>59</b>
4.1	Description du banc et du protocole de mesure . . . . .	59
4.1.1	Description du banc de mesure . . . . .	60
4.1.2	Propagation d'onde en conduit cylindrique . . . . .	66
4.1.3	Mesure de la pression acoustique . . . . .	67
4.1.4	Traitement du signal . . . . .	68
4.2	Corrélation essais/calculs . . . . .	69
4.2.1	Modèle FEM-PML . . . . .	69
4.2.2	Calcul numérique et comparaison essais/calculs . . . . .	73

4.3	Validation de l'approche sur un tronçon rigide non traité . . . . .	78
4.3.1	Cas sans écoulement . . . . .	78
4.3.2	Cas avec écoulement . . . . .	81
4.4	Conclusion . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Application de l'approche pour la validation de modèles d'impédance</b>	<b>89</b>
5.1	Traitement perforé . . . . .	89
5.1.1	Cas sans écoulement . . . . .	89
5.1.2	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.25$ . . . . .	93
5.1.3	Cas d'un écoulement négatif $M_0 = -0.25$ . . . . .	97
5.2	Traitement microperforé . . . . .	100
5.2.1	Cas sans écoulement . . . . .	100
5.2.2	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.25$ . . . . .	103
5.3	Conclusion . . . . .	106
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>107</b>
	<b>Annexe A Changement de repère pour l'application de la PML</b>	<b>111</b>
A.1	Bases théoriques de la propagation d'onde en conduit . . . . .	111
A.2	Représentation de l'équation de dispersion sous la forme d'une ellipse . . . . .	113
A.3	Changement de repère résolvant le problème des modes inverses . . . . .	113
	<b>Annexe B Paramètres de la couche PML</b>	<b>117</b>
B.1	Limites de la PML discrétisée . . . . .	117

B.2	Coefficient d'absorption $BC$ . . . . .	118
B.2.1	Formulation $BC$ du coefficient d'absorption . . . . .	118
B.2.2	Évolution de l'erreur en fonction de la longueur de couche et du paramètre d'absorption . . . . .	120
B.3	Coefficients d'absorption $UD$ et $UC$ . . . . .	123
B.3.1	Formulations $UD$ et $UC$ du coefficient d'absorption . . . . .	123
B.3.2	Comparaison de l'erreur obtenue avec les formulations $BC$ , $UC$ et $UD$ . . . . .	124
<b>Annexe C Confrontation essais/calculs: résultats supplémentaires</b>		<b>129</b>
C.1	Traitement perforé . . . . .	130
C.1.1	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.1$ . . . . .	130
C.1.2	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.2$ . . . . .	131
C.1.3	Cas d'un écoulement négatif $M_0 = -0.1$ . . . . .	132
C.1.4	Cas d'un écoulement négatif $M_0 = -0.2$ . . . . .	133
C.1.5	Influence de l'écoulement sur la perte par insertion (Insertion Loss) . . . . .	134
C.2	Traitement microperforé . . . . .	135
C.2.1	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.1$ . . . . .	135
C.2.2	Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.2$ . . . . .	136
C.2.3	Influence de l'écoulement sur la perte par insertion (Insertion Loss) . . . . .	137
<b>Bibliographie</b>		<b>139</b>

# Introduction

Les problèmes de nuisances sonores constituent un enjeu majeur dans de nombreux domaines de l'industrie où la qualité acoustique devient aussi bien un argument commercial qu'une exigence de plus en plus règlementée. Il est alors devenu primordial pour les industriels de consentir à des efforts afin d'améliorer les performances acoustiques de leurs produits. Le domaine des transports, qui réunit des secteurs comme l'automobile, le ferroviaire, l'aéronautique ou même l'aérospatial, est particulièrement touché par cette tendance.

Les traitements acoustiques passifs constituent la solution principale aux problèmes d'émissions sonores. Ils doivent souvent respecter plusieurs exigences, en particulier pour les turboréacteurs d'avions où les conditions d'utilisation sont extrêmes. Le traitement acoustique SDOF (pour *Single Degree Of Freedom*), composé d'un matériau mince apposé à des cavités d'air à fond rigide, est celui qui semble le mieux répondre à ces critères. Le matériau mince, ou couche résistive, est composé d'une plaque perforée sur laquelle peut être collé un tissu métallique.

Les propriétés du traitement sont caractérisées par une grandeur physique homogène: l'impédance acoustique. Il s'agit d'une quantité définie localement comme le rapport entre la pression acoustique mesurée à la surface du traitement, et la vitesse acoustique normale de la particule. L'impédance acoustique d'un SDOF dépend entre autres de la géométrie de la structure (taille des trous, épaisseur de la plaque, taux de perforation, profondeur de la cavité...) et des phénomènes physiques qui s'y développent.

Dans la littérature, les modèles semi-empiriques caractérisant l'impédance des SDOF sont très répandus. Étant donnée l'importance des applications industrielles impliquant un milieu fluide en mouvement (turboréacteurs, gaines de ventilation...), certains de ces modèles prennent en considération l'influence de l'écoulement sur l'impédance du traitement.

Dans ce travail, la validité de ces modèles est testée dans une configuration réaliste en présence d'un écoulement pouvant atteindre Mach  $M_0 = \pm 0,25$ , avec une propagation acoustique multimodale. Ce travail constitue l'un des apports de cette thèse. Cette validation est basée sur une

corrélation essais/calculs. Pour la partie expérimentale, il s'agit d'un conduit cylindrique ouvert avec un traitement SDOF (une plaque perforée et microperforée) rayonnant dans une chambre "anéchoïque" correspondant au banc expérimental du laboratoire. Pour la partie numérique, nous nous sommes basés sur l'équation de Galbrun résolue par éléments finis, que nous avons étendue pour prendre en compte le rayonnement. Pour cela, nous avons développé une condition d'absorption de type PML en coordonnées cylindriques et en présence d'un écoulement complexe (cisailé et tournant en bloc rigide) basée sur l'équation de Galbrun en formulation mixte. Ces développements constituent l'autre apport original de cette thèse.

Ce mémoire est séparé en deux parties. La première partie (chapitres 1 et 2) introduit l'équation de Galbrun et le développement de la PML axisymétrique. La seconde partie (chapitre 3, 4 et 5) présente les différents modèles d'impédance acoustique avec écoulement, le banc expérimental ainsi que le modèle numérique associé, puis se termine par la confrontation des résultats expérimentaux et numériques pour la validation des modèles d'impédance acoustique dans nos conditions expérimentales.

Le premier chapitre fixe le cadre théorique qui régit les travaux exposés ensuite. La linéarisation des équations de la mécanique des fluides repose ici sur une description mixte eulérienne-lagrangienne de la perturbation. Cette approche aboutit à l'équation de Galbrun qui est analogue aux équations d'Euler linéarisées (ou LEE pour Linearized Euler Equations). L'équation de Galbrun présente de nombreux avantages comparés aux LEE, comme une formulation et des conditions aux limites simplifiées, ou encore l'obtention d'une énergie conservative. Le domaine spatial considéré s'inscrit dans un système de coordonnées cylindriques, et le domaine temporel est harmonique.

Le deuxième chapitre porte sur le développement d'une couche parfaitement adaptée (ou PML pour *Perfectly Matched Layer*) appliquée à l'équation de Galbrun en coordonnées cylindriques, et prenant en considération un écoulement axial et tournant. La PML sert à tronquer un domaine numérique afin de simuler un milieu non borné. Elle repose sur l'introduction d'une couche dissipative permettant l'absorption des ondes sortantes du domaine acoustique grâce à un changement de variables complexes. En présence d'écoulement, des instabilités peuvent se produire et une transformation supplémentaire est nécessaire pour s'en affranchir. Ce chapitre présente toutes les étapes conduisant au développement de la PML, ainsi que des exemples de validation.

Dans le troisième chapitre, l'impédance acoustique d'un matériau est définie, puis appliquée plus spécifiquement aux traitements SDOF. Les phénomènes physiques qui se développent dans les orifices de la plaque perforée sont ensuite évoqués, comme ceux induits par la viscosité de l'air ou par l'écoulement rasant. Enfin, différents modèles d'impédance acoustique tenant compte de l'écoulement sont présentés.

Le quatrième chapitre porte sur le développement d'une approche numérique et expérimentale pour les conduits avec traitement acoustique. Dans un premier temps, le dispositif expérimental ainsi que la procédure d'acquisition des mesures sont présentés. Ensuite, le programme numérique est détaillé, avec la description du modèle géométrique et du protocole de calcul. La validation de la confrontation essais/calculs est réalisée dans le cas d'un conduit rigide non traité en présence d'écoulement.

Dans le dernier chapitre, l'approche développée précédemment est utilisée pour valider des modèles d'impédance acoustique de SDOF en propagation multimodale avec écoulement. Deux traitements SDOF sont testés, dont l'un muni d'une plaque perforée, et l'autre d'une plaque microperforée. Plusieurs vitesses d'écoulement ont été appliquées, dans le sens positif (même sens de propagation de l'onde acoustique), et négatif (sens opposé), jusqu'à  $M_0 = \pm 0.25$ .

## **Partie I**

# **Développement d'une PML axisymétrique en présence d'un écoulement axial et tournant**

# Chapitre 1

## Cadre théorique de l'étude

Ce chapitre a pour but de fixer le cadre théorique régissant les travaux présentés dans ce mémoire. Dans la première section, les équations générales de la mécanique des fluides sont rappelées. Il existe principalement deux approches de linéarisation de ces équations: l'une est basée sur une description *eulérienne* de la perturbation et l'autre sur une description *mixte eulérienne-lagrangienne*. La deuxième section présente le formalisme correspondant à ces deux représentations. Dans la troisième section, le modèle de Galbrun, issu de la représentation mixte, est introduit ainsi que les conditions aux limites et les propriétés énergétiques associées. Ensuite, le cadre spatial et temporel de l'étude est posé. Enfin, la formulation variationnelle employée pour la résolution numérique est présentée.

De nombreuses thèses ayant déjà largement abordé cette partie [1–4], la présentation faite ici est volontairement succincte et se limitera aux équations essentielles à la bonne compréhension des autres chapitres.

### 1.1 Équations générales

Cette section présente brièvement les hypothèses générales permettant d'aboutir aux équations de la mécanique des fluides utilisées dans cette étude, à savoir les équations d'Euler [5–8].

Un **fluide newtonien** est considéré, **sans sources volumiques**, et dans lequel le **phénomène de relaxation thermique est négligé**. L'hypothèse de **fluide parfait** (viscosité du fluide nulle) est posée. L'hypothèse supplémentaire de transformations thermodynamiques **adiabatiques** (sans échange de chaleur) permet de considérer des évolutions **isentropiques** (évolution de l'entropie associée à un élément de fluide constante  $ds = 0$ ). L'écriture des bilans de masse, de quantité de

mouvement et d'énergie pour un tel fluide, conduit aux équations d'Euler:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0} \\ \frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

qui mettent en jeux les inconnues  $\{\rho, \mathbf{v}, p\}$  qui correspondent respectivement à la masse volumique, à la vitesse particulaire et à la pression. La dérivée droite  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  désigne la dérivée matérielle (ou dérivée particulaire) et  $c$  la célérité du son. Dans le cas d'un gaz parfait en évolution isentropique, les relations suivantes peuvent aussi être considérées:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste}, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (1.2)$$

avec  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques.

## 1.2 Représentations pour la linéarisation des équations

Deux types d'approche permettent de linéariser les équations de la mécanique des fluides Eq.(1.1). La première est la représentation dite eulérienne, basée sur des perturbations eulériennes des équations. Dans la littérature, cette représentation est presque systématiquement adoptée. La seconde est la représentation mixte eulérienne-lagrangienne, qui met en jeux des perturbations lagrangiennes. Cette représentation, beaucoup moins répandue, a été développée par Galbrun [9] en 1931. Cette deuxième méthode est celle utilisée dans ce mémoire.

### 1.2.1 Représentation eulérienne

La perturbation eulérienne d'une grandeur physique quelconque  $\Psi$ , ici notée avec un exposant  $E$ , peut être définie comme la différence entre la grandeur dans sa configuration totale (ou perturbée)  $\Psi$  et sa configuration d'entraînement  $\Psi_0$  au point géométrique  $\mathbf{x}_0$ :

$$\epsilon \Psi^E(\mathbf{x}_0, t) = \Psi(\mathbf{x}_0, t) - \Psi_0(\mathbf{x}_0, t) \quad (1.3)$$

avec  $\epsilon$  un coefficient sans dimension qui définit l'amplitude de la perturbation. La définition (1.3) montre que la représentation eulérienne de la perturbation est associée à la même position géométrique  $\mathbf{x}_0$ . En revanche, elle n'est pas associée à la même particule. En effet, deux particules doivent être considérées: une particule  $\mathbf{a}$  dans sa configuration d'entraînement à la position  $\mathbf{x}_0$ , et une autre particule  $\mathbf{b}$  occupant la même position géométrique, mais prise dans sa configuration totale (voir Fig 1.1).

Dans le cas d'un **gaz parfait en écoulement porteur isentropique**, le système d'équations d'Euler linéarisées (LEE pour Linearized Euler Equations) prend la forme suivante, souvent adoptée dans la littérature [10–12]:

$$\begin{cases} \frac{d_0 p^E}{dt} + \mathbf{v}^E \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^E + \gamma p^E \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \\ \frac{d_0 \mathbf{v}^E}{dt} + \mathbf{v}^E \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p^E + \frac{p^E}{\rho_0 c_0^2} \frac{d_0 \mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $p^E$  la perturbation eulérienne de la pression,  $\mathbf{v}^E$  celle de la vitesse,  $\mathbf{v}_0$  la vitesse de l'écoulement d'entraînement et  $\rho_0$  la masse volumique moyenne.

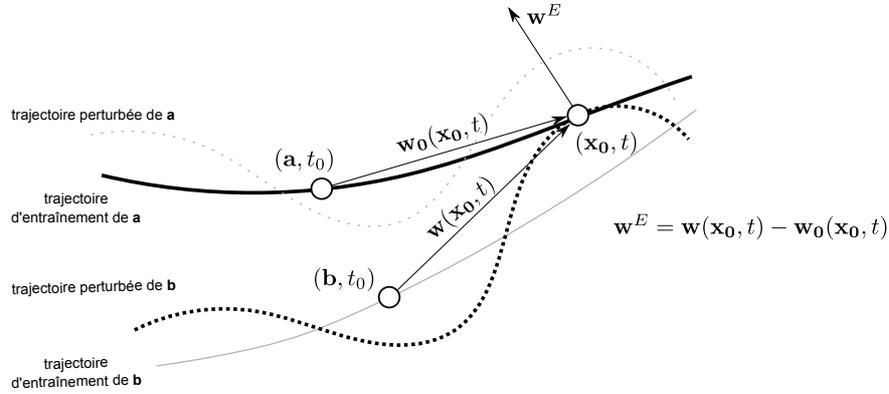


Fig. 1.1 Illustration de la représentation eulérienne du déplacement.

### 1.2.2 Représentation mixte eulérienne-lagrangienne

La perturbation lagrangienne d'une grandeur  $\Psi$ , notée avec un exposant L, est définie comme la différence entre la grandeur dans sa configuration totale et sa configuration d'entraînement pour la même particule  $\mathbf{a}$  (et non à la même position géométrique  $\mathbf{x}_0$ ):

$$e\Psi^L(\mathbf{a}, t) = \Psi(\mathbf{a}, t) - \Psi_0(\mathbf{a}, t). \quad (1.5)$$

La représentation mixte eulérienne-lagrangienne consiste à considérer des perturbations lagrangiennes écrites en termes de variables eulériennes:

$$e\Psi^L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi_0(\mathbf{x}_0, t) \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{x}_0$  la position de la particule  $\mathbf{a}$  dans sa configuration d'entraînement et  $\mathbf{x}$  la position de la même particule dans sa configuration totale (voir Fig 1.2).

En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 au point  $\mathbf{x}_0$  de l'Eq.(1.6), la relation fondamentale entre la perturbation eulérienne et lagrangienne est obtenue:

$$\Psi^L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi^E(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{w}^L \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x}_0, t) \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{w}^L$  désigne la perturbation lagrangienne du déplacement:

$$\mathbf{w}^L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t). \quad (1.8)$$

Ainsi, si la quantité  $\Psi$  est uniforme dans sa configuration d'entraînement,  $\Psi^L$  et  $\Psi^E$  sont équivalentes.

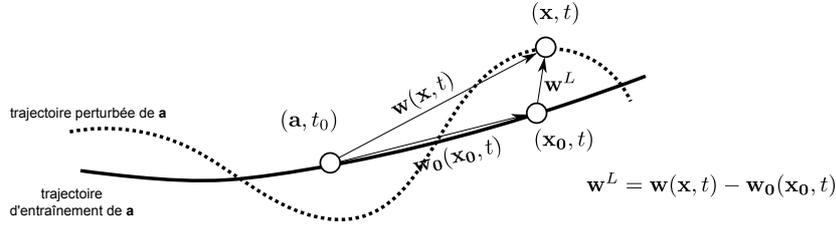


Fig. 1.2 Illustration de la représentation mixte eulérienne-lagrangienne du déplacement.

### 1.3 Équation de Galbrun

L'équation de Galbrun est issue de la perturbation mixte eulérienne-lagrangienne des équations d'Euler (par analogie, les LEE sont issues de la perturbation eulérienne de ces mêmes équations). Elle prend la forme d'une équation différentielle d'ordre deux en espace et en temps, écrite en termes de déplacement lagrangien:

$$\rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L) - (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \rho_0 \frac{d_0 \mathbf{v}_0}{dt} - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = 0 \quad (1.9)$$

où  $d_0/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)$  constitue la dérivée convective et  $\mathbf{w}^L$  la perturbation lagrangienne du vecteur déplacement de la particule. L'équation de Galbrun peut aussi être écrite sous sa forme mixte, en pression-déplacement:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L - (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \rho_0 \frac{d_0 \mathbf{v}_0}{dt} - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = 0 \\ p^L = -\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L \end{cases} \quad (1.10)$$

avec  $p^L$  la perturbation lagrangienne de la pression.

L'équation de Galbrun reste valable pour un fluide **hétérogène en écoulement porteur non homentropique** (c'est-à-dire, pour une entropie non uniforme spatialement). Ainsi, les hypothèses d'homogénéité, de gaz parfait ou d'homotropie n'apportent pas de simplifications fondamentales contrairement aux LEE. Elle constitue donc une équation de propagation acoustique générale pour un fluide et un écoulement porteur quelconque. Dans la littérature, l'hypothèse d'un **écoulement porteur satisfaisant les équations d'Euler** est souvent posée. Dans ce cas, le terme  $-\rho_0 d_0 \mathbf{v}_0 / dt$  peut être remplacé par  $\nabla p_0$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = 0 \\ p^L = -\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L. \end{cases} \quad (1.11)$$

Bien que cette hypothèse suppose un écoulement porteur non visqueux (et donc sans cisaillement), elle est aussi posée dans ce travail, car la couche limite est de taille négligeable par rapport aux dimensions du domaine considéré.

Les études concernant l'équation de Galbrun [13–16] ne sont apparues que tardivement bien qu'elle apporte de nombreux avantages comparée aux LEE parmi lesquels:

- une formulation simplifiée ne mettant en jeu qu'une seule inconnue (le déplacement lagrangien  $\mathbf{w}^L$ ) quelles que soient les hypothèses faites sur le fluide. A titre de comparaison, les LEE impliquent au minimum deux inconnues, la pression et la vitesse eulérienne ( $p^E, \mathbf{v}^E$ ), sous l'hypothèse d'un gaz parfait en écoulement porteur isentropique;
- des conditions aux limites simplifiées, en particulier en présence d'écoulement (voir la sous-section suivante);
- sous l'hypothèse d'un écoulement porteur eulérien, la possibilité de considérer des expressions générales pour l'énergie et l'intensité [15].

### 1.3.1 Conditions aux limites

Un conduit ouvert à ses deux extrémités est considéré Fig 1.3. Le domaine d'intérêt  $\Omega$  est composé d'un fluide circulant dans le conduit, délimité par trois frontières ( $L_1, L_2$  et  $L_3$ ). Chaque frontière est associée à une condition aux limites propre.

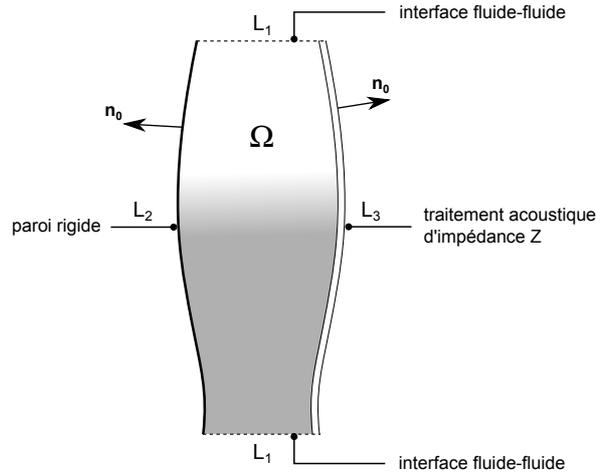


Fig. 1.3 Conditions aux limites associées à un conduit.

### Interface fluide-fluide

Sur la frontière  $L_1$  correspondant à une interface *fluide-fluide*, un déplacement total est imposé:

$$\mathbf{w}^L = \bar{\mathbf{w}}, \quad \text{sur } L_1 \quad (1.12)$$

avec  $\bar{\mathbf{w}}$  un déplacement connu. Dans le cas d'une formulation mixte en pression-déplacement, il est aussi possible d'imposer une pression totale:

$$p^L = \bar{p}, \quad \text{sur } L_1 \quad (1.13)$$

ou une pression totale et un déplacement total simultanément.

### Parois rigides

En ce qui concerne les frontières de type *parois rigides*, l'hypothèse de **continuité du déplacement normal** [17] est posée ce qui facilite l'écriture des conditions aux limites. Ainsi, pour la frontière  $L_2$  qui correspond à une *paroi rigide imperméable*, la condition aux limites s'écrit:

$$\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad \text{sur } L_2 \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{n}_0$  est la normale à la paroi, sortante du domaine fluide  $\Omega$ .

### Parois traitées

La détermination de la condition aux limites d'une paroi traitée en présence d'un écoulement rasant est encore source d'interrogations, notamment en raison de la complexité des interactions mises en jeu. Il est maintenant généralement admis dans la littérature que la continuité du déplacement normal est plus adaptée que celle de la vitesse normale. Parmi les travaux en faveur de cette hypothèse figurent ceux de Mungur et Plumbee [18]. Ils considèrent un conduit droit infini traité en présence d'un écoulement uniforme, et montrent que les solutions numériques issues de la résolution de l'équation de Pridmore-Brown sont plus adaptées pour une condition de déplacement normal continu que pour une condition de vitesse normale continue. Plus tard, Eversman et Beckemeyer [19] démontrent que dans le cas d'une couche limite tendant vers zéro, la condition aux limites se réduit à la continuité du déplacement de la particule.

En 1980, Myers [20] développe une condition de passage en représentation eulérienne. Elle repose sur la condition de continuité des vitesses totales ( $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0] = 0$ ). Dans l'hypothèse d'un **écoulement porteur stationnaire** et de **parois statiques**, la "condition de Myers" s'écrit en fonction de la vitesse acoustique eulérienne de la manière suivante[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}^E \cdot \mathbf{n}_0) = \left\{ \frac{d_0}{dt} - \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0) \right\} \frac{p^E}{Z} \quad (1.15)$$

avec  $Z$  l'impédance du traitement acoustique et  $\mathbf{n}_0$  la normale à la surface porteuse.

En 1982, Poirée [17] justifie de manière théorique la continuité du déplacement acoustique normal lagrangien. Il se base pour cela sur la théorie des distributions appliquée aux équations perturbées en représentation mixte. Treyssède [1] démontre l'équivalence entre la condition de Myers et celle de la continuité de la perturbation du déplacement lagrangien normal. En  $L_3$ , où une *traitement acoustique* d'impédance  $Z$  est imposé, la condition aux limites devient alors:

$$p^L = Z \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0) \quad \text{sur } L_3. \quad (1.16)$$

La simplicité de cette écriture constitue un argument de plus en faveur de l'utilisation de la formulation mixte.

### 1.3.2 Conservation de l'énergie

L'intensité acoustique est une quantité physique vectorielle indiquant comment se propage l'énergie et où elle est rayonnée. Elle permet notamment de déterminer le sens de propagation de la vitesse de groupe de l'onde, ou encore de localiser les sources acoustiques et les zones d'absorption. Suivant la particule, la description mixte eulérienne-lagrangienne forme un sys-

tème thermodynamiquement fermé. Ainsi, dans le cas d'un **écoulement eulérien stationnaire**, l'équation de Galbrun dérive d'une densité de lagrangien permettant d'établir une expression exacte de l'équation de conservation de l'énergie [14, 15] contrairement aux LEE:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (1.17)$$

avec  $e$  une énergie, et  $\mathbf{i}$  un flux d'énergie (ou intensité instantanée) donnés par:

$$e = \frac{\rho_0}{2} \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} \cdot \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} ((p^L)^2 - 2(\mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0) p^L) - \rho_0 \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L), \quad (1.18)$$

et

$$\mathbf{i} = (p^L - \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0) \frac{\partial \mathbf{w}^L}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{w}^L}{\partial t} \cdot \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} \right) \mathbf{v}_0. \quad (1.19)$$

Dans le cas général, pour un écoulement quelconque, des contributions hydrodynamiques peuvent s'ajouter aux phénomènes acoustiques dans le flux d'énergie. Ainsi, la formulation (1.19) ne correspond plus à une intensité acoustique proprement dite.

## 1.4 Cadre spatial et temporel de l'étude

Le domaine est considéré à géométrie de révolution dans le plan  $(r, z)$  dans un système de coordonnées cylindriques  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  avec un écoulement moyen  $\mathbf{v}_0 = (v_{0r}, v_{0\theta}, v_{0z})$  (voir Fig 1.4). Toutes les perturbations sont harmoniques avec une dépendance en temps en  $e^{-i\omega t}$ . Le champ acoustique général prend alors la forme:

$$(\mathbf{w}^L, p^L)(r, \theta, z, t) = (\mathbf{w}^L, p^L)(r, z) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (1.20)$$

où  $m$  est l'ordre azimutal du mode, et  $\omega$  la fréquence angulaire.

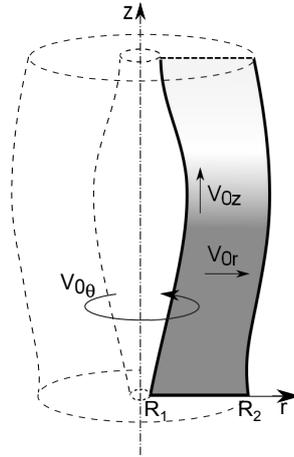


Fig. 1.4 Géométrie d'un conduit annulaire axisymétrique traversé par un écoulement.

On fait l'hypothèse que l'écoulement moyen  $(\rho_0, p_0, c_0, \mathbf{v}_0)$  est stationnaire, et vérifie les équations d'Euler en évolution isentropique [21]:

$$\begin{cases} \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 \\ \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \\ (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) p_0 - c_0^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \rho_0 = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

La vitesse de l'écoulement moyen

$$\mathbf{v}_0(r, z) = v_{0r}(r, z) \mathbf{e}_r + v_{0z}(r, z) \mathbf{e}_z + v_{0\theta}(r, z) \mathbf{e}_\theta \quad (1.22)$$

est composé d'un écoulement radial

$$v_{0r}(r, z) = M_{0r}(r, z) c_0, \quad (1.23)$$

axial

$$v_{0z}(r, z) = M_{0z}(r, z) c_0 \quad (1.24)$$

et tournant

$$v_{0\theta}(r, z) = \Omega_{0\theta}(z) r + \Gamma(z) / r \quad (1.25)$$

où  $M_{0r}$  est la vitesse de l'écoulement radial moyen en nombre de Mach,  $M_{0z}$  celui de l'écoulement axial,  $\Omega_{0\theta}$  la vitesse angulaire de l'écoulement tournant en bloc rigide et  $\Gamma$  le flux de circulation du vortex (écoulement tourbillonnaire).

## 1.5 Formulation variationnelle associée à l'étude

Dans un premier temps, Peyret et Elias [15] choisissent de développer une formulation variationnelle à partir de l'équation de Galbrun exprimée en termes de déplacement lagrangien seulement (Eq.(1.9)). Cependant, il est maintenant connu que cette forme pose des difficultés se traduisant par des instabilités de la solution (ce phénomène est appelé "blocage" ou "verrouillage" numérique dans la littérature [1, 22]). C'est ainsi qu'une autre formulation a vu le jour, développée par Treysède [1] sur la base des travaux de Wang et Bathe [22]. Cette nouvelle formulation repose sur l'utilisation de la forme mixte en pression-déplacement de l'équation de Galbrun Eq.(1.11). Associée à une interpolation des deux variables respectant le critère mathématique dit "inf-sup", cette formulation assure la stabilité de la solution. Il est à noter qu'une technique de régularisation proposée par Bonnet *et al.* [3, 23–25] permet aussi de s'affranchir de ce problème, mais s'avère difficilement généralisable à des écoulements et à des géométries quelconques.

Pour aboutir à la formulation variationnelle utilisée, on définit une fonction test  $\mathbf{w}^*$  associée au déplacement lagrangien  $\mathbf{w}^L$ , et une seconde fonction  $p^*$  associée à la pression lagrangienne  $p^L$ . La première équation du système (1.11) est ensuite multipliée par  $\mathbf{w}^*$  et la seconde par  $p^*$ . La somme de ces deux expressions est ensuite intégrée sur le domaine acoustique  $\Omega$ , et après une intégration par partie, la formulation suivante est obtenue:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p^L + \nabla p^* \cdot \mathbf{w}^L - \omega^2 \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^L \right. \\
& - i\omega \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) + i\omega \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w}^L - \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) \\
& + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p_0 (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) - \mathbf{w}^* \cdot ({}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0) \Big) r \, dr \, d\theta \, dz \\
& - \int_L p^* (\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0) - \mathbf{w}^* \cdot \{ \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_0) (-i\omega \mathbf{w}^L + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) \} \, dL \\
& = 0 \quad \forall (\mathbf{w}^*, p^*).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

La ligne 1 représente les opérateurs sans écoulement, la ligne 2 les effets de l'écoulement, la ligne 3 ceux de la variation de la pression moyenne  $p_0$ , et la ligne 4 l'intégrale de bord.

En prenant en compte les conditions aux limites, la formulation variationnelle prend la forme:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p^L + \nabla p^* \cdot \mathbf{w}^L - \omega^2 \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^L \right. \\
& - i\omega \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) + i\omega \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w}^L - \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) \\
& + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p_0 (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) - \mathbf{w}^* \cdot ({}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0) \Big) r \, dr \, d\theta \, dz \\
& - \int_{L_1} p^* (\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0) - \mathbf{w}^* \cdot \{ \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_0) (-i\omega \mathbf{w}^L + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) \} \, dL \\
& + \int_{L_3} \frac{1}{i\omega Z} p^* p^L \, dL \\
& = 0 \quad \forall (\mathbf{w}^*, p^*).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

A condition que la pression et que le déplacement soient tous deux imposés en  $L_1$ , la ligne 4 de l'équation devient nulle.

## 1.6 Conclusion

L'équation de Galbrun s'avère plus intéressante que les équations d'Euler linéarisées sur plusieurs aspects. Tout d'abord, elle ne met en jeu que la perturbation lagrangienne du déplacement (et éventuellement celle de la pression en formulation mixte), même dans le cas d'un écoulement non homentropique et d'un milieu hétérogène. De plus, il est maintenant admis dans la littérature que la condition aux limites basée sur la continuité du déplacement lagrangien normal est plus adaptée que celle de la vitesse eulérienne normale. Concernant des équations d'Euler linéarisées, la continuité du déplacement normal est équivalente à l'application de la condition de Myers qui n'est pas toujours évidente à mettre en œuvre. Au contraire, l'équation de Galbrun se trouve être particulièrement adaptée à cette condition. Enfin, sous l'hypothèse d'un écoulement porteur stationnaire eulérien, l'équation de Galbrun permet d'aboutir à une expression générale de l'intensité et de l'énergie ce qui n'est pas le cas pour les équations d'Euler linéarisées.

## Chapitre 2

# PML axisymétrique pour l'équation de Galbrun

En aéroacoustique, la propagation des ondes a lieu le plus souvent dans des domaines très grands voir infinis. Le domaine de calcul numérique étant nécessairement borné, il doit donc être tronqué artificiellement tout en s'assurant que les frontières soient transparentes pour la solution. A titre d'exemple, la Fig 2.1 illustre la troncature d'un domaine infini  $R$  par une frontière artificielle  $\Gamma$  formant ainsi un domaine acoustique borné  $\Omega$ . Afin de garantir la validité de l'approximation dans le milieu acoustique  $\Omega$ , la frontière  $\Gamma$  doit être transparente, à défaut de quoi, des réflexions peuvent compromettre la solution numérique dans  $\Omega$ .

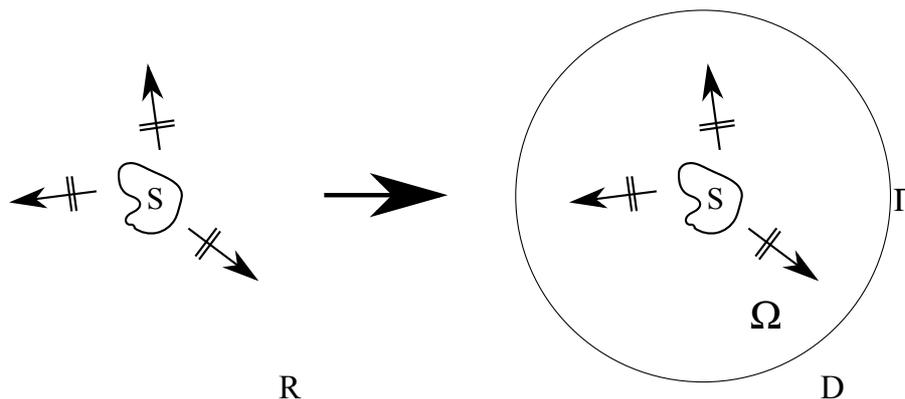


Fig. 2.1 Troncature d'un domaine infini  $R$  par une frontière artificielle  $\Gamma$  formant un domaine acoustique borné  $\Omega$ .

Dans la mesure du possible, une Condition aux Limites Absorbante (CLA) doit satisfaire plusieurs critères [26] parmi lesquels: limiter au mieux les réflexions dans le problème (au niveau continu

et discret), être stable numériquement, nécessiter une ressource de calcul pas trop importante, être facile à intégrer au niveau du code de calcul, et assurer un bon fonctionnement quelle que soit la configuration étudiée (angle d'incidence, géométrie, type de milieu...).

## 2.1 Revue bibliographique de la méthode PML

Plusieurs méthodes ont été développées dans la littérature pour traiter le problème des domaines non bornés:

- la condition limite absorbante exacte non locale [27–29], utilisant l'opérateur communément appelé Dirichlet-to-Neumann (DtN), basée sur une représentation analytique du champ externe et nécessitant une interface à géométrie particulière. Le fait qu'elle soit non locale, c'est-à-dire que tous les degrés de liberté de  $\Gamma$  soient couplés entre eux, a pour effet de briser la structure bande du système et d'alourdir le problème;
- la méthode des éléments finis de frontière (BEM pour *Boundary Element Method*) [30] est une autre condition de non-réflexion exacte et non locale dont les principaux défauts sont la singularité et la non-unicité des solutions à certaines fréquences caractéristiques;
- la méthode des éléments infinis (IEM pour *Infinite Element Method*) [31] qui modélisent le domaine externe à l'aide de fonctions de forme particulières représentant le comportement d'approximation radial des ondes sortantes.

La technique de la couche parfaitement adaptée (PML pour *Perfectly Matched Layer*) constitue une approche alternative permettant de contourner le problème des domaines non bornés. Elle est basée sur la simulation d'une couche absorbante tronquant le domaine de calcul. Cette méthode est connue comme "parfaitement adaptée" car l'interface entre le domaine physique d'intérêt et la couche absorbante ne produit pas d'ondes parasites (du moins en théorie, pour des problèmes continus). Bérenger [32] proposa la première PML afin de formuler une condition de non-réflexion pour la propagation des ondes électromagnétiques dans un domaine non borné. La méthode PML a connu de multiples applications dans de nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier en acoustique et en aéroacoustique. L'utilisation de la PML pour les équations d'ondes acoustiques est maintenant assez répandue [33].

Dans sa formulation originale, la PML peut conduire à des instabilités en présence d'écoulement en régime temporel. Ces instabilités sont dues aux modes dits *amont inverses* [34, 35] dont la vitesse de phase et celle de groupe sont de directions opposées. De nouvelles formulations PML ont vu le jour dans la littérature pour pallier ces problèmes. Ainsi, Abarbanel [36] propose une première formulation de la PML adaptée aux équations d'Euler linéarisées pour un écoulement axial uniforme. Plus tard, Hu [37] revient sur les causes de ces instabilités et suggère une expli-

cation de ses origines. Il fournit une formulation stable de la PML pour les équations d'Euler linéarisées dans laquelle une transformation spatio-temporelle est appliquée juste avant celle de la PML. Cette transformation supplémentaire assure la cohérence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Il étend ensuite son travail à un écoulement non uniforme et aux équations d'Euler non linéaires [38]. Diaz *et al.* [39] propose quant à lui un modèle PML pour les équations d'ondes acoustiques advectives en utilisant la méthode de Cagniard-de Hoop en régime temporel. Bécache *et al.* [40] propose une PML pour la formulation de Galbrun régularisée en régime harmonique dans le cas d'un écoulement axial uniforme et pour un conduit à deux dimensions. Plus récemment, Feng [41] développe une PML appliquée à l'équation de Galbrun 2D en régime temporel pour un écoulement axial cisailé, en utilisant une transformation de Laplace inverse.

Dans ce chapitre, une PML adaptée à l'équation de Galbrun en coordonnées cylindriques est étudiée en présence d'un écoulement axial et tournant. Ainsi, l'apport principal des travaux présentés dans la suite porte sur l'application de la PML à des problèmes axisymétriques soumis à des écoulements complexes, ainsi que la prise en compte de l'écoulement tournant dans la formulation de la couche. Dans la section 2 qui constitue l'une des principales contributions de ce travail, les différentes étapes conduisant au développement de la PML sont détaillées. Dans la section 3, des exemples numériques sont développés pour démontrer la validité et l'efficacité du modèle FEM-PML proposé.

## 2.2 PML pour l'équation de Galbrun

Cette section aborde le développement et l'application de la PML à l'équation de Galbrun dans un système de coordonnées cylindriques en présence d'un écoulement axial et tournant. La couche PML ayant déjà fait l'objet de nombreuses études dans la littérature [42–44], son principe de base est rappelé de manière très succincte. Les différentes étapes de transformation aboutissant à une formulation stable sont en revanche plus amplement détaillées.

### 2.2.1 Principe de la PML (sans écoulement)

La méthode PML repose sur l'introduction d'une couche dissipative notée  $\Omega_2 = [ |r| \geq |r_0|, |z| \geq |z_0| ]$  ayant pour rôle l'absorption des ondes sortantes d'un domaine acoustique  $\Omega_1 = [ |r| \leq |r_0|, |z| \leq |z_0| ]$  qui constitue le domaine d'intérêt dans lequel la solution est recherchée (voir Fig 2.2). La combinaison des deux domaines, notée  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , représente le domaine de calcul. Sur l'interface entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , des conditions de continuité sont imposées pour toutes les grandeurs physiques, moyennes et acoustiques. Sur la frontière externe du domaine  $\Omega_2$ , les conditions aux limites acoustiques sont imposées nulles ( $\bar{p} = 0, \bar{w} = 0$ ).

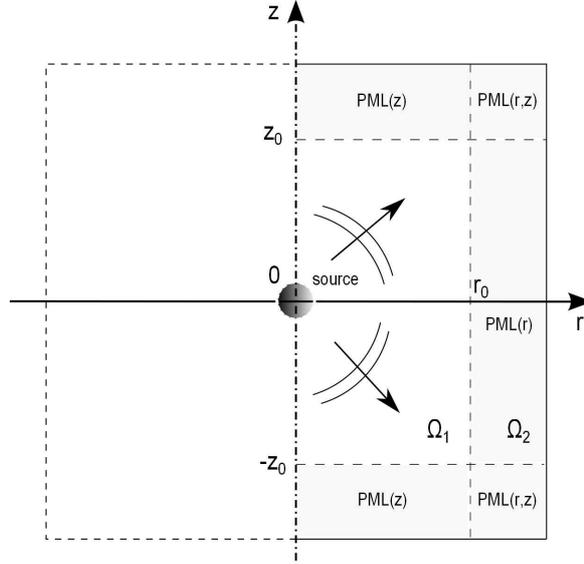


Fig. 2.2 Illustration d'une source rayonnant dans un domaine  $\Omega_1$  axisymétrique borné par une couche PML dans le domaine  $\Omega_2$ .

La méthode PML est équivalente à un changement de variables complexes de l'équation d'onde dans le domaine fréquentiel. Cette transformation assure l'atténuation de l'onde dans la couche dissipative, tout en garantissant l'adaptation (ou égalité) d'impédance entre les deux milieux (et donc un coefficient de réflexion nul à l'interface). Pour cela, l'astuce proposée par Bérenger consiste à transformer la vitesse de l'onde en une quantité complexe et dépendante de la fréquence. Bien que non physique, cette méthode assure le caractère parfaitement adapté de la couche au niveau continu, mais pas au niveau discret.

En considérant une couche verticale  $r$  et une couche horizontale  $z$  entourant le milieu propagatif, ce changement de variables peut être défini par

$$\tilde{r}(r) = r + \frac{i}{\omega} \int_{r_0}^r \sigma_r(s) ds \quad \text{et} \quad \tilde{z}(z) = z + \frac{i}{\omega} \int_{z_0}^z \sigma_z(s) ds \quad (2.1)$$

où  $\sigma_r$  et  $\sigma_z$  sont des coefficients d'absorption positifs, respectivement suivant les axes  $r$  et  $z$ , et  $(r_0, z_0)$  la position de l'interface de la PML. Dans les coins, les deux coefficients s'expriment ensemble.

Ainsi, en appliquant la transformation de l'Eq.(2.1) à une onde plane propagative suivant la direction  $z$ , par exemple

$$e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2.2)$$

avec  $k_z$  le nombre d'onde axial suivant  $z$ , la formulation de l'onde devient

$$e^{i(k_z z - \omega t)} e^{-\frac{k_z}{\omega} \int_{z_0}^z \sigma_z(z) dz} \quad (2.3)$$

Par conséquent, l'onde décroît dans le domaine PML seulement si le facteur du second terme de l'Eq.(2.3) reste purement positif

$$\frac{k_z}{\omega} \int_{z_0}^z \sigma_z(z) dz > 0. \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Développement de la PML

Comme souligné par de nombreux auteurs [34–36], les PML classiques peuvent générer des instabilités en présence d'écoulement pour les équations d'Euler linéarisées en régime temporel. Ces instabilités sont dues aux modes amont inverses dont la vitesse de phase  $\mathbf{v}_\varphi = \omega/\mathbf{k}$  et la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g = d\omega/d\mathbf{k}$  ont des directions opposées ( $\mathbf{k}$  étant le vecteur d'onde). En effet, les PML classiques produisent pour ces modes des solutions exponentiellement croissantes, et l'onde n'est pas absorbée. Par conséquent,  $\mathbf{v}_\varphi \mathbf{v}_g$  doit rester positif pour assurer l'efficacité de la PML (cette condition est toujours respectée sans écoulement). Afin de garantir la bonne cohérence entre la vitesse de phase et celle de groupe, une approche similaire à celle proposée par Abarbanel *et al.* [36] et Hu [37] est adoptée. Le principe repose sur l'utilisation d'un nouveau repère (par transformation) dans lequel l'onde n'est plus convectée, avant l'application des changements de variables de la PML.

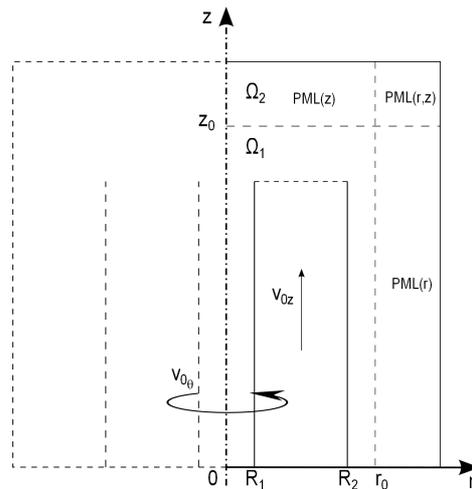


Fig. 2.3 Géométrie d'un conduit annulaire droit rigide traversé par un écoulement et borné par une PML.

Pour un souci de clarté du développement, le cas d'un conduit annulaire droit infini rigide (voir Fig 2.3) est étudié avec un écoulement porteur axial uniforme

$$v_{0_z}(r, z) = v_{0_z} = M_{0_z} c_0 \quad (2.5)$$

et un écoulement tournant en bloc rigide

$$v_{0_\theta}(r, z) = v_{0_\theta}(r) = \Omega_{0_\theta} r = k_{0_\theta} c_0 r \quad (2.6)$$

avec  $k_{0_\theta} = \frac{\Omega_{0_\theta}}{c_0}$  le nombre d'onde de l'écoulement tournant en bloc rigide. La généralisation à un écoulement oblique ( $v_{0_r} \neq 0$ ) peut être facilement réalisée.

La première étape du développement de la PML repose sur l'application des transformations géométriques suivantes pour éviter des instabilités liées aux modes inverses (voir Annexe A pour la démonstration)

$$\bar{r} = r \sqrt{1 - M_{0_z}^2}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t + \alpha z \quad (2.7)$$

avec  $\alpha = \frac{M_{0_z}}{1 - M_{0_z}^2} \left(1 - m \frac{k_{0_\theta}}{k}\right) \frac{1}{c_0}$ . Ces transformations conduisent à la matrice jacobienne

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - M_{0_z}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \bar{r} \\ \partial/\partial \bar{\theta} \\ \partial/\partial \bar{z} \\ \partial/\partial \bar{t} \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

L'étape suivante consiste à appliquer les changements de variables complexes de la PML classique, qui correspondent à la matrice jacobienne

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial \bar{r} \\ \partial/\partial \bar{\theta} \\ \partial/\partial \bar{z} \\ \partial/\partial \bar{t} \end{Bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\gamma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{\text{pml}}} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \bar{r} \\ \partial/\partial \bar{\theta} \\ \partial/\partial \bar{z} \\ \partial/\partial \bar{t} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

dans laquelle les coefficients de la PML sont donnés par

$$\gamma_r(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| < r_0 \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_r(r) & \text{si } |r| \geq r_0 \text{ (domaine PML)} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\gamma_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < z_0 \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_z(z) & \text{si } |z| \geq z_0 \text{ (domaine PML)}. \end{cases} \quad (2.11)$$

La dernière étape réécrit les équations dans le repère spatio-temporel original

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial \bar{r} \\ \partial/\partial \bar{\theta} \\ \partial/\partial \bar{z} \\ \partial/\partial \bar{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-M_{0z}^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}^{-1}} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Le produit de ces matrices

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{\text{pml}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.13)$$

conduit à la transformation totale

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial z \\ -i\omega \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\gamma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_z & \alpha(1-1/\gamma_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_t} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial z \\ -i\omega \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Le changement de variable Eq.(2.14) appliqué à  $k_r$  et  $k_z$  donne les effets de la PML sur les nombres d'onde

$$ik_r \rightarrow \frac{ik_r}{\gamma_r} \text{ et } ik_z \rightarrow \frac{ik_z}{\gamma_z} - i\omega\alpha^* \quad (2.15)$$

avec  $\alpha^* = \alpha \left(1 - \frac{1}{\gamma_z}\right)$ .

### 2.2.3 Application à la formulation variationnelle de Galbrun

L'application de la transformation totale Eq.(2.14) à la formulation variationnelle de l'équation de Galbrun Eq.(1.26) conduit directement à la formulation variationnelle de la PML

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_2} \left( \frac{\gamma_r \gamma_z}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L + \mathbf{w}^* \cdot (\gamma_r \gamma_z \tilde{\nabla} p^L) + (\gamma_r \gamma_z \tilde{\nabla} p)^* \cdot \mathbf{w}^L - \gamma_r \gamma_z \omega^2 \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^L \right. \\
& - i\omega \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\gamma_r \gamma_z \mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L) + i\omega \rho_0 (\gamma_r \gamma_z \mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w})^* \cdot \mathbf{w}^L - \rho_0 (\gamma_r \gamma_z \mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w})^* \cdot (\gamma_r \gamma_z \mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L) \\
& + \mathbf{w}^* \cdot \tilde{\nabla} p_0 (\gamma_r \gamma_z \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{w}^L) - \mathbf{w}^* \cdot (\gamma_r \gamma_z^T \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L \cdot \tilde{\nabla} p_0) \Big) r dr d\theta dz \\
& = \mathbf{0} \quad \forall (\mathbf{w}^*, p^*)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où les opérateurs principaux sont définis par

$$\tilde{\nabla}(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{i m}{r} \\ \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} - i\omega \alpha^* \end{pmatrix} (\cdot), \tag{2.17}$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{w}^L = \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{i m}{r} w_\theta + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_z}{\partial z} - i\omega \alpha^* w_z, \tag{2.18}$$

$${}^T(\mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L) = \begin{pmatrix} \left( \frac{i m}{r} w_r - \frac{w_\theta}{r} \right) v_{0_\theta} + \left( \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_r}{\partial z} - i\omega \alpha^* w_r \right) v_{0_z} \\ \left( \frac{i m}{r} w_\theta + \frac{w_r}{r} \right) v_{0_\theta} + \left( \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_\theta}{\partial z} - i\omega \alpha^* w_\theta \right) v_{0_z} \\ \left( \frac{i m}{r} w_z \right) v_{0_\theta} + \left( \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_z}{\partial z} - i\omega \alpha^* w_z \right) v_{0_z} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

et

$${}^T \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L \cdot \tilde{\nabla} p_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_r^2} \frac{\partial w_r}{\partial r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ \left( \frac{i m}{r} w_r - \frac{w_\theta}{r} \right) \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ \left( \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_r}{\partial z} - i\omega \alpha^* w_r \right) \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Si les coefficients d'absorption de la PML ( $\sigma_r$  et  $\sigma_z$ ) sont nuls, la formulation PML Eq.(2.16) est équivalente à celle de Galbrun Eq.(1.26). De plus, le cas sans écoulement peut être vu comme une dégénérescence des expressions présentées.

### 2.2.4 Discrétisation éléments finis

Des éléments finis mixtes, en pression-déplacement, sont utilisés. Afin d'assurer la stabilité de l'élément et la convergence de la méthode, les interpolations des deux variables doivent respecter le critère mathématique dit *inf-sup* [45]. L'élément triangulaire linéaire T4-3c enrichi d'une fonction bulle pour le déplacement [16] est celui choisi. Dans le domaine numérique, les deux formulations variationnelles, Eq.(1.27) et Eq.(2.16), sont appliquées dans leurs domaines respectifs et dans le même repère de coordonnées géométriques. Après assemblage et application des conditions aux limites, la formulation variationnelle globale discrétisée conduit au système algébrique suivant

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (2.21)$$

avec  $\mathbf{U}(\omega)$  un vecteur contenant tous les degrés de liberté inconnus (pression et déplacement). La matrice  $\mathbf{K}(\omega)$  est dépendante de  $\omega$ , non symétrique, complexe, et de structure bande. Un stockage de type "sparse" est choisi. Pour un  $\omega$  fixé,  $\mathbf{U}(\omega)$  est finalement obtenu en utilisant une décomposition LU.

## 2.3 Résultats et discussion

Dans cette section, quelques exemples sont présentés afin de valider l'efficacité du modèle FEM-PML proposé. Le premier est un conduit annulaire droit infini avec un écoulement axial uniforme et tournant en bloc rigide. Le modèle semi-analytique de référence est basé sur l'équation de Pridmore-Brown [46] étendue à un écoulement axial et tournant, et appliquée à l'équation de Galbrun mixte [4, 47]. Le second exemple est un conduit à section lentement variable dont la géométrie est issue de Cooper [48], avec un écoulement axial et tournant en bloc rigide. La validation est réalisée grâce à une méthode à échelles multiples [47, 48]. Le dernier exemple porte sur la géométrie d'un réacteur d'avion rayonnant dans un domaine ouvert borné par une PML.

Dans la suite, l'expérience montre qu'une longueur de couche de PML supérieure à deux ou trois fois la longueur d'onde suffit. Les coefficients d'absorption utilisés sont basés sur des profils paraboliques, continus et bornés [49]

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = \beta_r(|r| - r_0)^2 & |r| \geq r_0 \\ \sigma_z(z) = \beta_z(|z| - z_0)^2 & |z| \geq z_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

avec  $\beta_r$  et  $\beta_z$  des paramètres positifs empiriques choisis de manière à optimiser les performances de la PML (voir Annexe B).

Afin d'étudier l'effet de l'introduction de la PML, l'erreur relative de la norme  $L^2$  est calculée par rapport à une solution de référence

$$\text{Erreur} = \frac{\left( \int_{\Omega_1} |p_{PML} - p_{ref}|^2 dr dz \right)^{1/2}}{\left( \int_{\Omega_1} |p_{ref}|^2 dr dz \right)^{1/2}} \quad (2.23)$$

avec  $p_{ref}$  la pression de référence de la solution, et  $p_{PML}$  la pression obtenue avec la PML.

### 2.3.1 Conduit annulaire droit infini rigide

#### Détermination d'un modèle semi-analytique

Un conduit annulaire droit infini est considéré en coordonnées cylindriques avec un écoulement porteur axial uniforme (Eq.(2.5)) et tournant en bloc rigide (Eq.(2.6)) (voir Fig 2.4). La relation entre la masse volumique moyenne et la vitesse de l'écoulement tournant est donnée par les équations d'Euler

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \rho_0 \frac{v_{0\theta}^2}{r}. \quad (2.24)$$

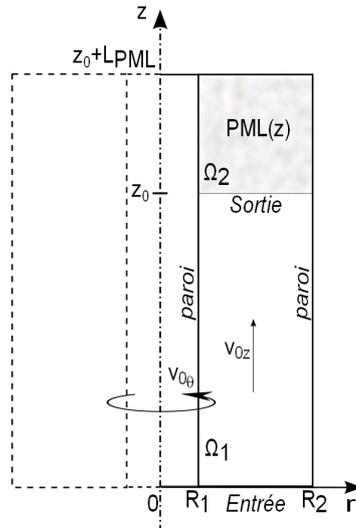


Fig. 2.4 Géométrie d'un conduit annulaire droit rigide traversé par un écoulement axial et tournant avec une terminaison PML.

La dérivée convective devient  $d_0/dt = -i(\omega - v_{0_z}k_z - m v_{0_\theta})$  et l'équation de Galbrun Eq.(1.11) peut s'écrire

$$\begin{cases} -\rho_0 \left( \Omega^2 + \left( \frac{v_{0_\theta}}{r} \right)^2 \right) w_r + 2i\rho_0\Omega \frac{v_{0_\theta}}{r} w_\theta + \frac{\partial p^L}{\partial r} + \frac{\partial p_0}{\partial r} \left( \frac{w_r}{r} + \frac{im}{r} w_\theta + ik_z w_z \right) = 0 \\ -\rho_0 \left( \Omega^2 + \left( \frac{v_{0_\theta}}{r} \right)^2 \right) w_\theta - 2i\rho_0\Omega \frac{v_{0_\theta}}{r} w_r + \frac{im}{r} p^L - \frac{\partial p_0}{\partial r} \left( \frac{im}{r} w_r - \frac{w_\theta}{r} \right) = 0 \\ -\rho_0\Omega^2 w_z + ik_z p^L - \frac{\partial p_0}{\partial r} ik_z w_r = 0 \\ p^L + \rho_0 c_0^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{im}{r} w_\theta + ik_z w_z \right) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\Omega = \omega - k_z v_{0_z}(r) - (m/r) v_{0_\theta}(r)$ . Sous une forme matricielle, ce système peut s'exprimer par

$$\mathbf{S} \begin{Bmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_z \\ p^L \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\rho_0 \left( \Omega^2 + \left( \frac{v_{0_\theta}}{r} \right)^2 \right) + \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{1}{r} & 2i\rho_0\Omega \frac{v_{0_\theta}}{r} + \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{im}{r} & \frac{\partial p_0}{\partial r} ik_z & \frac{\partial}{\partial r} \\ -2i\rho_0\Omega \frac{v_{0_\theta}}{r} - \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{im}{r} & -\rho_0 \left( \Omega^2 + \left( \frac{v_{0_\theta}}{r} \right)^2 \right) + \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{1}{r} & 0 & \frac{im}{r} \\ -\frac{\partial p_0}{\partial r} ik_z & 0 & -\rho_0\Omega^2 & ik_z \\ \rho_0 c_0^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) & \rho_0 c_0^2 \frac{im}{r} & \rho_0 c_0^2 ik_z & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

dont le déterminant est défini par  $\Omega^2 \cdot A$ ,  $\Omega$  étant la valeur propre non constante de l'opérateur de convection  $d_0/dt$ . Ainsi, en ne considérant que des modes acoustiques ( $\Omega \neq 0$ ),  $w_\theta$  et  $w_z$  peuvent s'écrire en terme de perturbation lagrangienne de la pression  $p^L$  et du déplacement radial  $w_r$

$$w_\theta = \frac{1}{\rho_0\Omega^2} \left( \frac{im}{r} \left( p^L - \rho_0 \frac{v_{0_\theta}^2}{r} w_r \right) - 2i\rho_0\Omega \frac{v_{0_\theta}}{r} w_r \right) \quad (2.28)$$

$$w_z = \frac{ik_z}{\rho_0\Omega^2} \left( p^L - \rho_0 \frac{v_{0_\theta}^2}{r} w_r \right). \quad (2.29)$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation (2.24), en multipliant la première équation du système (2.25) par  $\rho_0\Omega^2$ , et la quatrième par  $\Omega^2/c_0^2$ , et en remplaçant  $w_\theta$  et  $w_z$  dans la première et la quatrième équation, l'Eq.(2.25) peut être simplifiée en un système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} a_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{a_2}{r} w_r + \left( \frac{\Omega^2}{c_0^2} - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p^L = 0 \\ a_1 \frac{\partial p^L}{\partial r} - \frac{a_2}{r} p^L - a_3 w_r = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho_0 \Omega^2 \\ a_2 &= \rho_0 (v_{0\theta}/r) (2\Omega m + (k_z^2 r^2 + m^2) (v_{0\theta}/r)) \\ a_3 &= a_1^2 - \rho_0^2 (v_{0\theta}/r)^2 [(2\Omega + m(v_{0\theta}/r))^2 + (r k_z (v_{0\theta}/r))^2]. \end{aligned}$$

Finalement, le système (2.30) peut s'exprimer comme un problème aux valeurs propres généralisé

$$\frac{\partial U}{\partial r} = F(U) \quad (2.31)$$

où le vecteur propre est défini par  $U = \{p, w_r\}^T$ , la valeur propre par  $k_z$  et les conditions aux limites par

$$p^L = \pm i\omega Z_j w_r, \text{ en } r = R_j \text{ (} j = 1, 2\text{)}. \quad (2.32)$$

Ses solutions nécessitent une approche numérique conduisant au profil radial du mode et au nombre d'onde axial  $k_z$ . Pour résoudre ce système, nous avons choisi la méthode de Runge-Kutta du 4<sup>ème</sup> ordre avec un maximum d'itérations imposé à  $10^4$ , une tolérance à  $10^{-10}$  et une discrétisation sur 1000 points.

#### Application numérique aux courbes de dispersion ( $Re(k_z)$ vs. $k$ )

Un conduit annulaire droit infini rigide, de rayon interne  $R_1 = 0.4$  m et de rayon externe  $R_2 = 1.0$  m, est considéré en présence d'un écoulement axial uniforme  $M_{0z} = 0.4$  et tournant en bloc rigide  $k_{0\theta} = 0.4$  comme observé Fig 2.4. Les courbes de dispersion ( $Re(k_z)$  vs.  $k$ ) obtenues par le développement semi-analytique précédent sont présentées Fig 2.5 pour cinq modes radiaux ( $n = 1, 2, 3, 4$  et 5), le mode azimutal étant fixé à  $m = 2$ . Sous les hypothèses simplificatrices posées en Annexe A (variations de la pression moyenne et des termes de second ordre  $(v_{0\theta}(r)/r)^2$  négligés, hypothèse des hautes fréquences), la vitesse de groupe axiale ( $v_{gz} = c_0 \frac{dk}{dk_z}$ ) est donnée par

$$v_{gz} = c_0 \left( M_{0z} + \frac{k_z}{\sqrt{k_r^2 + k_z^2}} \right) \quad (2.33)$$

et tous les points dont la vitesse de groupe est nulle sont alignés sur la droite d'équation

$$k_z = -\frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} (k - m k_{0\theta}). \quad (2.34)$$

La droite Eq.(2.34) sépare les modes dont la vitesse de groupe est positive de ceux dont la vitesse de groupe est négative. La droite d'équation  $k_z = 0$  sépare quant à elle les modes dont la vitesse

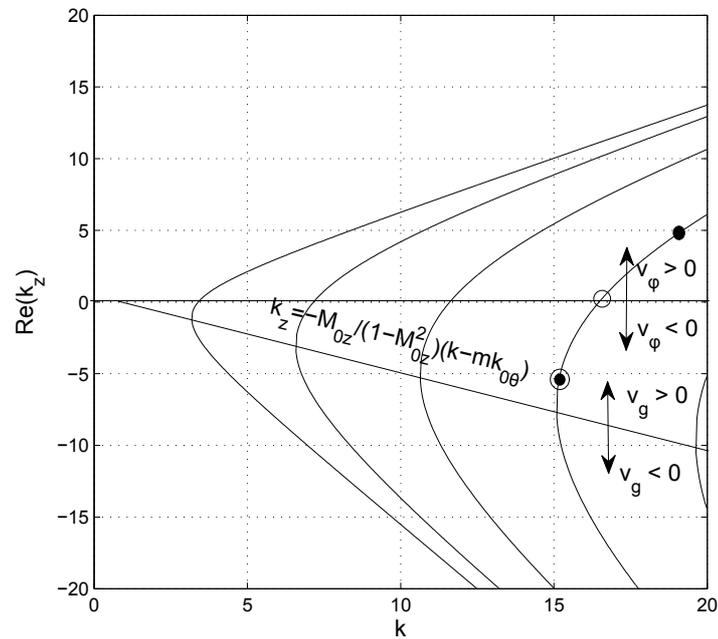


Fig. 2.5 Courbes de dispersion pour un conduit annulaire ( $R_1 = 0.4$  m et  $R_2 = 1.0$  m) avec un mode azimutal  $m = 2$ , et un écoulement moyen  $M_{0z} = 0.4$  et  $k_{0\theta} = 0.4$ .

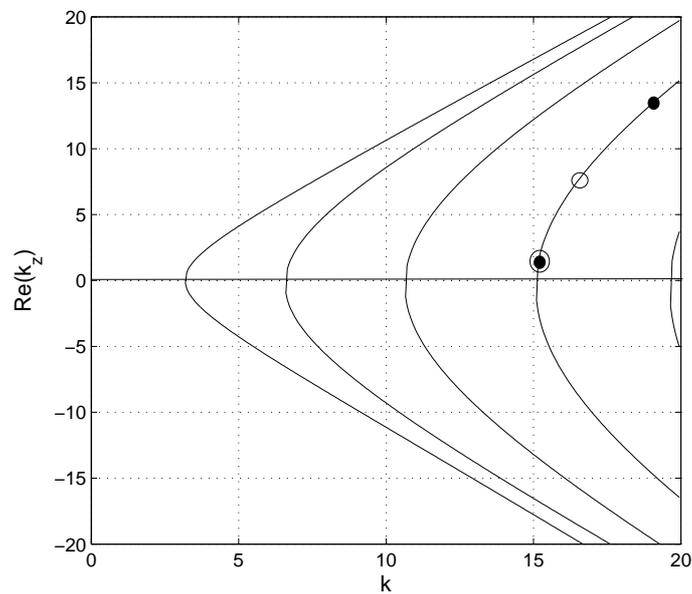


Fig. 2.6 Courbes de dispersion, après transformation spatio-temporelle, pour un conduit annulaire ( $R_1 = 0.4$  m et  $R_2 = 1.0$  m) avec un mode azimutal  $m = 2$ , et un écoulement moyen  $M_{0z} = 0.4$  et  $k_{0\theta} = 0.4$ .

de phase est positive de ceux dont la vitesse de phase est négative. Trois modes sont sélectionnés afin d'être étudiés ( $m = 2, n = 4$ ). Le premier est un mode *propagatif classique* représenté par un point ( $v_\varphi > 0$  et  $v_g > 0$ ;  $f = 1028$  Hz,  $k = 19.0$  m<sup>-1</sup>,  $k_z = 4.7$  m<sup>-1</sup>,  $v_{gz} = 228$  m s<sup>-1</sup>); le deuxième est un mode à *vitesse de phase nulle* représenté par un cercle ( $v_\varphi = 0$  et  $v_g > 0$ ;  $f = 891$  Hz,  $k = 16.5$  m<sup>-1</sup>,  $k_z = 0.0$  m<sup>-1</sup>,  $v_{gz} = 136$  m s<sup>-1</sup>) et le troisième est un mode *amont inverse* symbolisé par un cercle avec un point au centre ( $v_\varphi < 0$  et  $v_g > 0$ ;  $f = 850$  Hz,  $k = 15.7$  m<sup>-1</sup>,  $k_z = -2.3$  m<sup>-1</sup>,  $v_{gz} = 88$  m s<sup>-1</sup>).

Les effets de la transformation Eq.(2.7) qui établit la cohérence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont montrés Fig 2.6. Les modes amont inverses sont transformés en modes propagatifs classiques assurant la stabilité de la PML.

### Analyse de stabilité ( $Im(k_z)$ vs. $Re(k_z)$ )

Comme expliqué précédemment, les instabilités de la PML sont dues à la présence de modes amont inverses qui polluent la solution dans le domaine d'intérêt. Afin d'illustrer ce phénomène, la transformation de la PML est appliquée au système (2.30) et le plan complexe des nombres d'onde axiaux ( $Im(k_z)$  vs.  $Re(k_z)$ ) correspondant à chaque mode est calculé (pour une fréquence donnée). Cette représentation, fréquemment utilisée pour l'étude de la PML [50, 51], permet d'identifier l'évolution de la partie imaginaire du mode (assimilable à son niveau d'atténuation), et de comprendre comment l'onde évolue dans la couche.

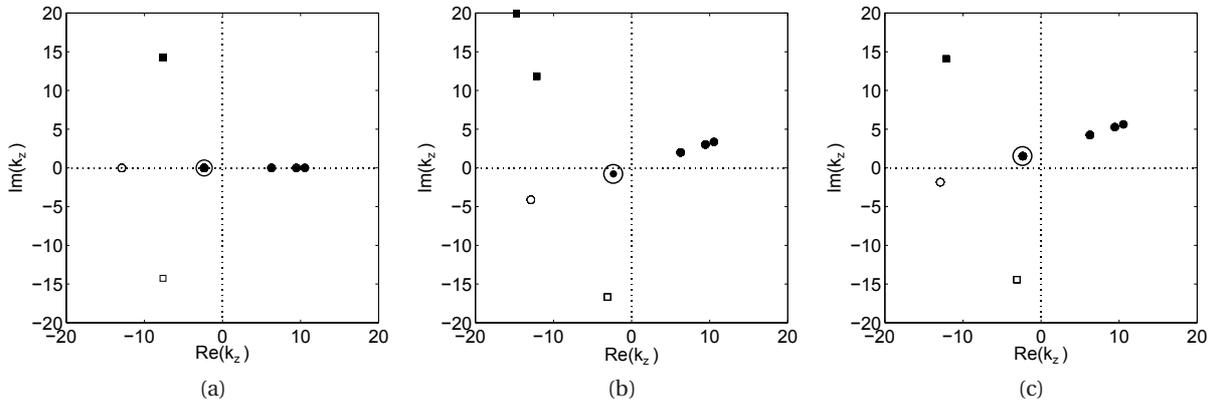


Fig. 2.7 Plan complexe des premiers nombres d'onde axiaux  $k_z$  associés aux modes acoustiques de l'équation de Galbrun convectée ( $k = 15.7$  m<sup>-1</sup>,  $m = 2$ ,  $M_{0z} = 0.4$ ,  $k_{0\theta} = 0.4$ ,  $R_1 = 0.4$  m et  $R_2 = 1.0$  m): (a) sans PML; (b) avec la formulation classique de la PML (le mode inverse a une partie imaginaire négative); (c) avec la formulation modifiée de la PML (le mode inverse a une partie imaginaire positive).

La Fig 2.7 (a) montre le plan complexe  $k_z$  sans PML, pour la configuration du mode inverse présentée précédemment à savoir  $k = 15.7$  m<sup>-1</sup>,  $m = 2$ , un écoulement axial uniforme  $M_{0z} = 0.4$

et tournant en bloc rigide  $k_{0\theta} = 0.4$ . Les cercles et les carrés sont respectivement associés aux modes propagatifs et évanescents, tandis que les couleurs noires et blanches sont associées aux modes aval et amont. Le mode amont inverse est symbolisé par un cercle avec un point central. Il a pour caractéristique d'être un mode aval qui, sous l'effet de la convection, se retrouve avec une partie réelle négative et devient donc un mode amont.

La Fig 2.7 (b) montre l'effet de la transformation de la PML classique (Eq.(2.9);  $\sigma_z = 1700$ ) sur le plan complexe. Cet effet correspond à une similitude de rotation d'angle  $\arg(\gamma_z)$  autour de l'origine et de ratio  $|\gamma_z|$  [51]. Par conséquent,  $Im(\gamma_z k_z)$  du mode inverse est négatif et l'onde est exponentiellement croissante dans la couche au lieu d'être atténuée.

Pour que la PML ne produise pas d'instabilités, les nombres d'onde axiaux des modes propagatifs aval (respectivement amont) doivent être situés sur la moitié supérieure (respectivement inférieure) du plan complexe. Pour montrer la stabilité de la formulation PML proposée (Eq.(2.14);  $\sigma_z = 1700$ ), la nouvelle transformation est appliquée sur le système (2.30) et le plan complexe est tracé Fig 2.7 (c). Le mode amont inverse possède dorénavant une partie imaginaire positive impliquant la stabilité de la PML.

### Validation du modèle FEM-PML

Pour la validation du modèle FEM-PML, les résultats obtenus sont comparés à ceux du modèle semi-analytique pour les trois modes sélectionnés précédemment. Dans un premier temps, les déplacements lagrangiens obtenus grâce au modèle de Pridmore-Brown sont imposés au niveau de la section d'*entrée* ( $z = 0$ ) et de la section de *sortie* ( $z = z_0$ ) du modèle FEM (voir Fig 2.4), puis la solution de référence est calculée. Une discrétisation suffisante du maillage (généralement une taille de maille de  $\lambda/10$ ) est appliquée afin de favoriser la convergence des résultats. Ensuite, la PML est placée dans le domaine  $\Omega_2$  pour absorber les ondes acoustiques dans la direction  $z$ , et les déplacements lagrangiens analytiques sont imposés à l'*entrée* du conduit ( $z = 0$ ) du modèle FEM. La solution est calculée et comparée à celle de référence dans le domaine  $\Omega_1$ . Cette approche permet d'attribuer les erreurs uniquement aux effets de la PML et non à la discrétisation.

La Fig 2.8 (a-c) montre les résultats du modèle FEM-PML (en module de pression) associés aux modes de la courbe de dispersion Fig 2.5 ( $m = 2$ ,  $M_{0z} = 0.4$ ,  $k_{0\theta} = 0.4$ ). On note que l'écoulement est non potentiel (du fait de la présence de l'écoulement tournant en bloc rigide) et que les modes acoustiques sont donc faiblement couplés aux modes hydrodynamiques (modes quasi-acoustiques). La Fig 2.8 (a) présente un mode *propagatif classique* (avec les paramètres de la PML  $\beta_z = 250$  et  $L_{PML} = 2$  m), la Fig 2.8 (b) un mode à *vitesse de phase nulle* ( $\beta_z = 250$  et  $L_{PML} = 2$  m) et la Fig 2.8 (c) un mode *amont inverse* ( $\beta_z = 250$  et  $L_{PML} = 2$  m). Pour ces trois exemples, les résultats sont très satisfaisants avec une erreur relative inférieure à 1.0%. Le quatrième cas Fig 2.8

(d) (non représenté sur les courbes de dispersion) montre un *mode propagatif classique* ( $f = 1028$  Hz,  $k = 19.0 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_z = 5.3 \text{ m}^{-1}$ ,  $v_{gz} = 210 \text{ m s}^{-1}$ ) en présence d'un écoulement plus complexe. L'écoulement moyen axial est cisailé avec une valeur maximale  $M_{0_z \text{ max}} = 0.4$  et une couche limite de 20% ( $\delta_e = 0.12 \text{ m}$ , le profil étant parabolique – voir Fig 2.9). L'écoulement tournant possède une composante en bloc rigide ( $k_{0_\theta} = +0.4$ ) et une autre en vortex ( $\Gamma/c_0 = 0.2$ ). Même dans cet exemple, l'erreur relative ne dépasse pas 1.0%.

### 2.3.2 Conduit infini à section lentement variable

Pour ce deuxième exemple (Fig 2.10), la géométrie étudiée est celle d'un conduit infini en légère expansion (identique au cas présenté par Treyssède [47]) défini par un rayon interne et externe

$$\begin{cases} R_1(z) = 0.5482 + 0.05 \tanh(2x - 2) \\ R_2(z) = 1.1518 - 0.05 \tanh(2x - 2) \end{cases} \quad \text{où } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } x = (2 - z). \quad (2.35)$$

L'approximation semi-analytique de la solution est donnée par une méthode à échelles multiples par Cooper [48] (pour les équations d'Euler linéarisées), et par Treyssède [47] (pour les équations de Galbrun mixtes). Ces modèles fournissent des solutions aérodynamiques dans le cas d'un milieu compressible avec l'hypothèse d'homentropie. Les paramètres appliqués, issus de l'article de Treyssède [47], sont les suivants: un mode  $(-5, 1)$  imposé en  $z = 2$  se propage dans un conduit parfaitement rigide à une fréquence  $f = 500$  Hz dans le sens négatif; l'écoulement est calculé à partir du modèle à échelles multiples aérodynamique de Cooper et Peake [48] avec, en  $z = 0$ , un écoulement axial  $M_{0_z} = -0.21$  et tournant  $k_{0_\theta} = +0.30$ .

Les résultats du modèle FEM-PML sont directement comparés à ceux semi-analytiques. Pour cela, les déplacements lagrangiens calculés à partir de la solution à échelles multiples sont imposés à l'entrée du conduit (en  $z = 2$ ) et la PML est placée en sortie. La longueur de la PML est fixée à  $L_{PML} = 1.5 \text{ m}$  et  $\beta_z = 900$ . La Fig 2.10 montre un bon accord entre la solution semi-analytique et le modèle FEM-PML, même si l'erreur est proche de 10 %. En effet, le modèle FEM inclut naturellement les réflexions et la conversion des modes ce qui n'est pas le cas de la méthode à échelles multiples qui suppose implicitement que le mode ne se propage que suivant une seule direction.

### 2.3.3 Turboréacteur d'avion

Le dernier exemple illustre le cas d'un turboréacteur d'avion inspiré du CFM56-7 rayonnant dans un domaine ouvert. Le corps central ainsi que les parois de la nacelle sont parfaitement rigides. L'écoulement porteur produit par la soufflante a été calculé via le logiciel de CFD (*Compu-*

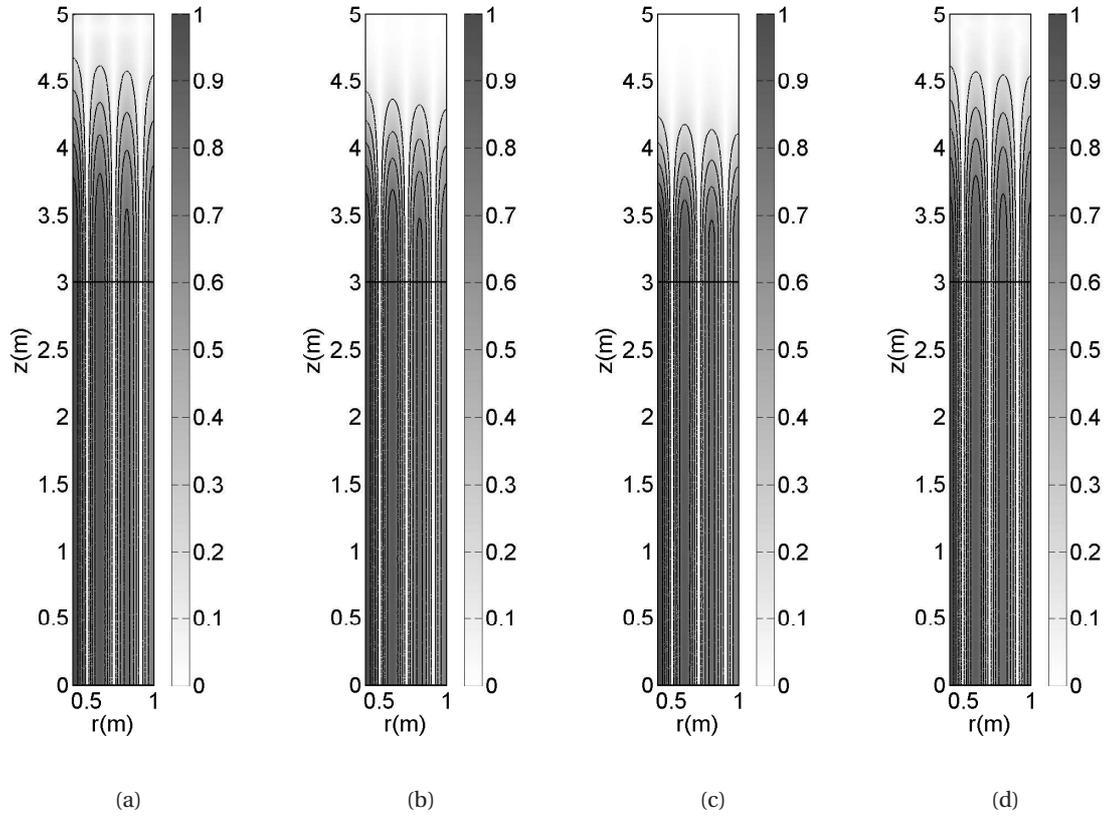


Fig. 2.8 Module de la pression (en Pa) du mode (+2,3) dans un conduit annulaire droit infini rigide et une terminaison PML ( $\beta_z = 250$  et  $L_{PML} = 2$  m):

(a) mode propagatif classique avec  $M_{0z} = 0.4$  (uniforme) et  $k_{0\theta} = +0.4$  (bloc rigide),  $f = 1028$  Hz ( $k = 19.0 \text{ m}^{-1}$ ),  $k_z = 4.7 \text{ m}^{-1}$ ;

(b) mode à vitesse de phase nulle avec  $M_{0z} = 0.4$  (uniforme) et  $k_{0\theta} = +0.4$  (bloc rigide),  $f = 891$  Hz ( $k = 16.5 \text{ m}^{-1}$ ),  $k_z = 0.0 \text{ m}^{-1}$ ;

(c) mode amont inverse avec  $M_{0z} = 0.4$  (uniforme) et  $k_{0\theta} = +0.4$  (bloc rigide),  $f = 850$  Hz ( $k = 15.7 \text{ m}^{-1}$ ),  $k_z = -2.3 \text{ m}^{-1}$ ;

(d) mode propagatif classique pour un écoulement axial cisailé et tournant en bloc rigide/vortex (voir profil de vitesse Fig 2.9),  $f = 1028$  Hz ( $k = 19.0 \text{ m}^{-1}$ ),  $k_z = 5.3 \text{ m}^{-1}$ .

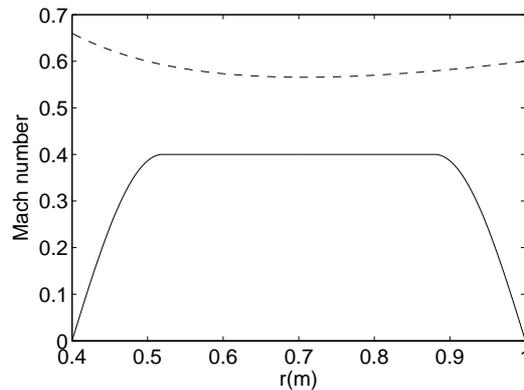


Fig. 2.9 Profil de vitesse de l'écoulement: axial cisailé pour  $M_{0z \text{ max}} = 0.4$  et  $\delta_e = 0.12$  m (trait continu); tournant en bloc rigide/vortex avec  $k_{0\theta} = +0.4$  et  $\Gamma/c_0 = 0.2$  (trait pointillé).

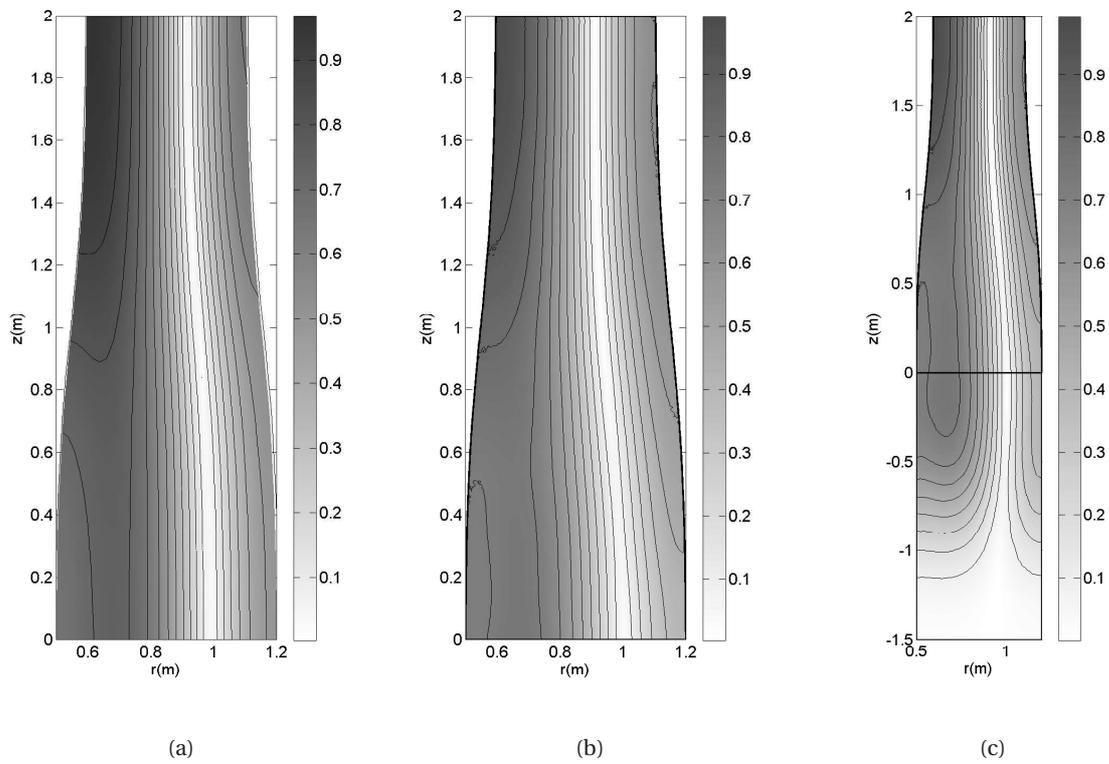


Fig. 2.10 Module de la pression (en Pa) du mode  $(-5,1)$  dans un conduit rigide en expansion à  $f = 500$  Hz, avec  $M_{0z} = -0.21$  et  $k_{0\theta} = +0.30$  en  $z = 0$ : (a) solution à échelles multiples dans le domaine  $\Omega_1$ ; (b) solution FEM-PML dans le domaine  $\Omega_1$ ; (c) solution FEM-PML dans les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

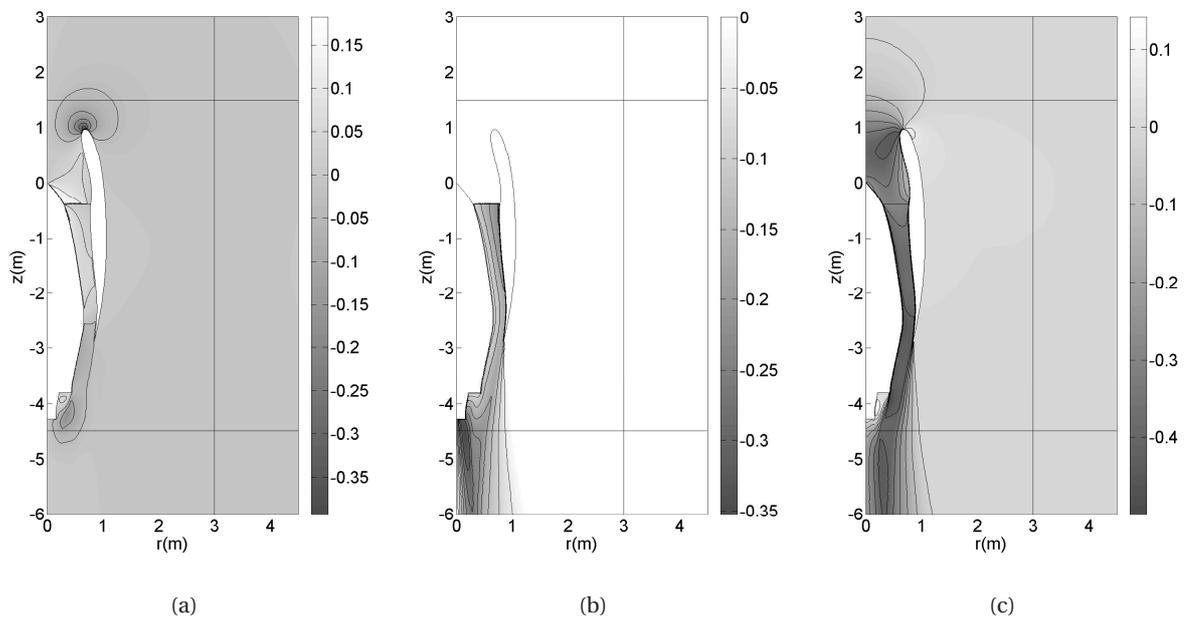


Fig. 2.11 Vitesse radiale (a), azimutale (b) et axiale (c) de l'écoulement moyen (en nombre de Mach) généré par la soufflante d'un turboréacteur inspiré du CFM56-7 (calculé à partir du logiciel de CFD *Fluent*).

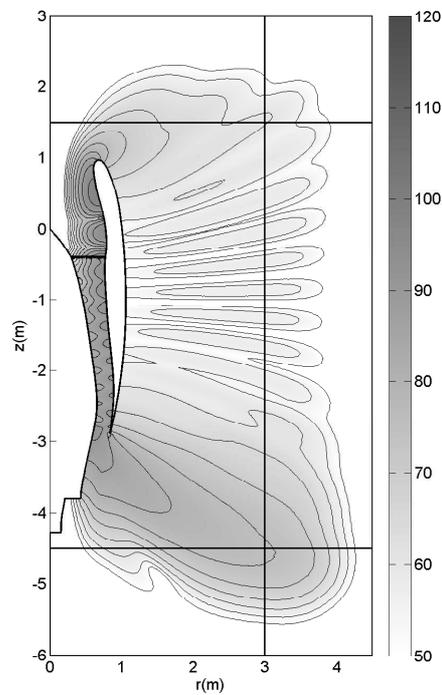


Fig. 2.12 Module de la pression (en dB) du mode  $(+7,0)$  à  $f = 700$  Hz rayonné par un turboréacteur inspiré du CFM56-7 (modèle FEM-PML).

tational Fluid Dynamics) *Fluent*, en appliquant un modèle turbulent *k-epsilon* incompressible<sup>1</sup> (même si cette hypothèse n'est pas vraiment valide pour les forts écoulements). Un écoulement axial  $M_{0_z} = -0.3$  et tournant  $k_{0_\theta} = -0.3$  est imposé à la section  $z = -0.4$  m, comme le montre la figure 2.11. Le phénomène de couche limite aérodynamique est pris en compte par le modèle, et l'écoulement ne se met à tourner qu'en aval de la soufflante après avoir été entraîné par la rotation des aubes [52]. Enfin, un mode (+7,0) est imposé sur cette même section, en choisissant une fréquence de 700 Hz pour garantir à la fois la propagation de l'onde en amont et en aval du réacteur tout en évitant la conversion de mode (voir Fig 2.12).

Concernant la PML, une couche absorbante radiale est ici nécessaire pour assurer l'atténuation de l'onde suivant la direction  $r$ . La longueur de PML est arbitrairement fixée à  $L_{PML} = 1.5$  m dans chaque direction, et  $\beta = 1200$ . Là encore, le comportement de la PML est très satisfaisant. En effet, aucune réflexion n'est observée à l'interface entre les deux domaines quelle que soit la direction de propagation de l'onde, y compris dans les coins et les zones touchées par l'écoulement.

## 2.4 Conclusion

Une PML a été développée en régime harmonique, dans un système de coordonnées cylindriques, en présence d'un écoulement axial et tournant. Elle a été appliquée à l'équation de Galbrun qui présente certains avantages par rapport aux équations d'Euler linéarisées. Une nouvelle transformation spatio-temporelle a été proposée afin de prendre en compte les effets de l'écoulement axial et tournant sur les instabilités de la PML.

La PML a été testée pour des modes se propageant dans un conduit annulaire infini rigide. Les solutions ont été comparées à un modèle semi-analytique et un bon accord a été trouvé. Une attention particulière a été portée aux modes amont inverses qui sont responsables d'instabilités. La PML a aussi été validée dans le cas d'un conduit à section lentement variable via un modèle à échelles multiples. L'intérêt réel de l'utilisation de la PML en tant que condition de non-réflexion a été montré à travers l'exemple du réacteur d'avion rayonnant dans un domaine ouvert. Le bon comportement et la précision du modèle ont à nouveau été observés.

---

<sup>1</sup>Modèle le plus communément utilisé en CFD dans l'industrie, il se compose de deux équations donnant une description générale des turbulences. Efficace dans de multiples applications, il se trouve être aussi simple d'utilisation, ne nécessitant qu'une condition initiale et une condition aux limites.

## **Partie II**

# **Validation de modèles d'impédance acoustique d'un SDOF en propagation multimodale en présence d'écoulement**

## Chapitre 3

# Modèles d'impédance acoustique d'un SDOF en présence d'écoulement

L'utilisation de traitements acoustiques passifs constitue la solution principale aux problèmes de nuisances sonores. Ces traitements doivent respecter de nombreuses exigences, en particulier dans le secteur aéronautique [53]. En plus de réduire le niveau de bruit, ils ne doivent pas entraîner de pertes de performances (par leur encombrement ou leur masse), être robustes et faciles d'entretien, supporter des conditions variables (en vol, pour les avions subsoniques, la température peut varier de  $-50^{\circ}\text{C}$  à  $+120^{\circ}\text{C}$  et la vitesse d'écoulement peut atteindre Mach 0.7 soit  $240\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), assurer certaines conditions de sécurité et être d'un coût raisonnable.

Le traitement acoustique composé d'une couche mince apposée à des cavités d'air à fond rigide (généralement disposés en nid d'abeille) est celui permettant de satisfaire le mieux ces exigences (voir Fig.3.1). La couche mince, aussi appelée couche résistive, est constituée d'une plaque perforée sur laquelle peut être collé un tissu métallique. L'ensemble du traitement est appelé SDOF pour Single Degree Of Freedom (matériau à un seul degré de liberté).

Les modèles d'impédance acoustique des SDOF dépendent de ceux des plaques perforées qui sont en général semi-empiriques dans la littérature. Les SDOF étant souvent utilisés avec écoulement (turboréacteur d'avion...), la prise en compte de la convection devient difficilement négligeable dans les modèles.

Dans un premier temps, la définition de l'impédance acoustique est donnée, puis appliquée aux traitements SDOF. Différents modèles d'impédance de plaques perforées en présence d'un écoulement rasant sont ensuite présentés.

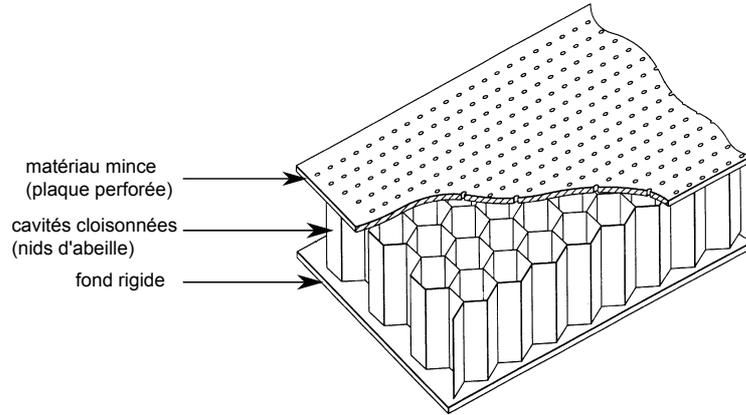


Fig. 3.1 Schéma du traitement acoustique de type SDOF.

### 3.1 Notion d'impédance

#### 3.1.1 Définition de l'impédance de surface

L'impédance acoustique  $Z$  d'un matériau caractérise sa capacité à “empêcher” (du latin *impedire*) le mouvement d'un fluide induit par une pression sur sa surface. Elle est définie par

$$Z(\omega) = \frac{p^L(\omega)}{v_n^L(\omega)} \quad (3.1)$$

avec  $p^L(\omega)$  la perturbation lagrangienne de la pression du fluide sur la paroi, et  $v_n^L(\omega)$  la perturbation lagrangienne de la vitesse normale du fluide à la surface du matériau tel que

$$v_n^L(\omega) = \mathbf{v}^L(\omega) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{w}^L(\omega) \cdot \mathbf{n}_0) \quad (3.2)$$

$\mathbf{n}_0$  étant la normale à la surface porteuse (rentrante dans le matériau),  $\mathbf{v}^L$  la perturbation lagrangienne de la vitesse de la particule et  $\mathbf{w}^L$  la perturbation lagrangienne du déplacement de la particule.

L'impédance est un nombre complexe de la forme

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) \quad (3.3)$$

avec  $R(\omega)$  la partie réelle appelée *résistance* et  $X(\omega)$  la partie imaginaire appelée *réactance*. La résistance influe sur la valeur maximale et la bande fréquentielle du spectre d'absorption. Plus la valeur de la résistance est importante, plus la valeur du maximum d'absorption diminue et la largeur de bande augmente. La réactance influe quant à elle sur la fréquence du maximum

d'absorption. La fréquence pour laquelle l'absorption du traitement est maximale s'appelle *fréquence d'accord* et a lieu lorsque la réactance s'annule.

Trois valeurs notables de l'impédance peuvent être distinguées pour une onde plane à incidence normale:

- $Z = 0$ : la pression acoustique est nulle à la surface du traitement – l'absorption est maximale
- $Z \rightarrow +\infty$ : la vitesse normale à la surface du matériau tend vers 0 – la structure est donc parfaitement rigide et l'absorption nulle
- $Z = \rho_0 c_0$ : le matériau est transparent pour l'onde incidente.

Dans la littérature, l'impédance est le plus souvent exprimée sous sa forme adimensionnelle (réduite) notée

$$z(\omega) = \frac{Z(\omega)}{\rho_0 c_0} = r(\omega) + i\chi(\omega) \quad (3.4)$$

avec  $r$  et  $\chi$  respectivement la résistance réduite et la réactance réduite.

### 3.1.2 Réaction localisée

Une surface est localement réactive si sa réponse à une excitation est locale, c'est-à-dire ponctuelle. C'est généralement le cas lorsqu'un matériau est cloisonné par des cavités dont le diamètre est très inférieur à la longueur d'onde, empêchant ainsi la propagation de l'onde acoustique latéralement dans la cavité. La réponse à l'excitation étant locale, l'impédance ne dépend plus de l'angle d'incidence de l'onde et les points de la surface du matériau répondent de manière indépendante les uns des autres (voir Fig.3.2). Même si l'impédance du traitement est indépendante de l'angle d'incidence de l'onde, l'absorption du matériau reste quant à elle toujours dépendante de cet angle.

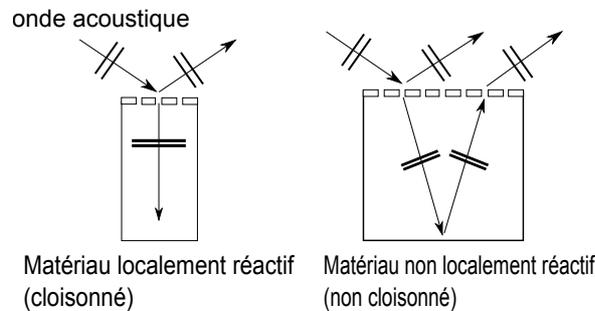


Fig. 3.2 Schéma d'un traitement acoustique avec et sans réaction localisée.

Finalement, l'impédance d'un matériau localement réactif ne dépendra que de sa géométrie, et de son environnement à savoir des propriétés du fluide (température  $T$ , viscosité cinématique du fluide  $\nu$ , vitesse d'écoulement  $M_0 = v_0/c_0$ , couche limite de l'écoulement  $\delta_e$ ) et de celles du champ sonore (fréquence de l'onde  $\omega$  et amplitude de la vitesse acoustique dans l'orifice  $M_a = v_a/c_0$ ).

### 3.1.3 Impédance des traitements SDOF

Les traitements SDOF sont composés:

- d'une couche résistive (plaque perforée dont l'épaisseur est largement inférieure à celle de la longueur d'onde)
- de cavités d'air de faibles diamètres par rapport à la longueur d'onde (voir Fig.3.1 et Fig.3.3).  
Le fond de la cavité (en  $y = 0$ ) est généralement rigide.

Dans l'hypothèse d'une réaction localisée, l'onde incidente ne peut se propager dans la cavité que suivant l'axe  $y$ . De plus, le nombre d'onde  $k$  dans la cavité est le même que celui de l'onde excitatrice, indépendamment de son angle d'incidence.

Les paramètres géométriques des traitements SDOF ont une forte influence sur leurs performances ainsi que sur la plage fréquentielle sur laquelle ils sont efficaces. Les paramètres de la **plaque perforée** sont l'épaisseur de la plaque  $t$ , le diamètre des trous  $d$ , le taux de perforation  $\sigma$  ( $\sigma = n \frac{s}{S}$  avec  $n$  le nombre d'orifices sur une surface  $S$  et  $s$  la surface d'un seul orifice). Les paramètres de la **cavité d'air** sont la profondeur de la cavité  $L_{cav}$  et sa section  $s_{cav}$ .

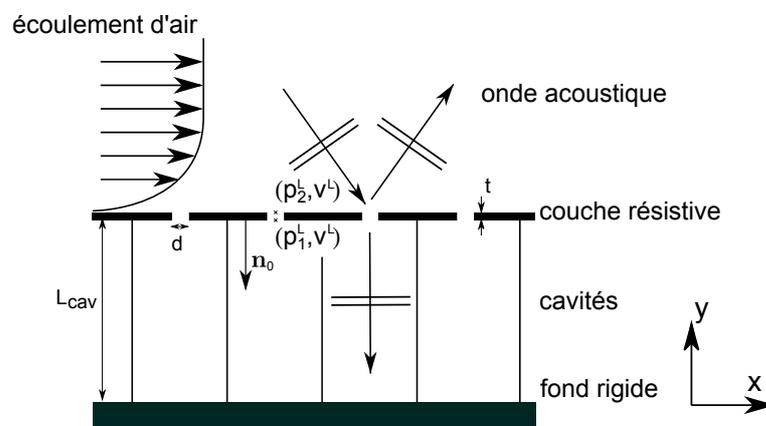


Fig. 3.3 Traitement acoustique en présence d'un écoulement rasant (vue en coupe).

L'impédance de surface du traitement complet  $z_t$  (couche résistive et cavité) est définie par le rapport

$$z_t = \frac{p_2^L}{\rho_0 c_0 v_n^L} \quad (3.5)$$

avec  $p_2^L$  la perturbation de la pression acoustique exercée en un point à la surface extérieure de la plaque et  $v_n^L$  la perturbation de la vitesse acoustique normale en ce point.

L'impédance de surface peut être aussi définie par

$$z_t = z_r + z_{cav} \quad (3.6)$$

avec  $z_r$  l'impédance de la couche résistive et  $z_{cav}$  celle de la cavité. L'impédance de la couche résistive est donnée par

$$z_r = \frac{\Delta p^L}{\rho_0 c_0 v_n^L} \quad (3.7)$$

avec  $\Delta p^L = p_2^L - p_1^L$ ,  $p_1^L$  représentant la perturbation de la pression sur la surface intérieure de la plaque, dans la cavité.

L'impédance de la cavité est donnée par

$$z_{cav} = \frac{p_1^L}{\rho_0 c_0 v_n^L}. \quad (3.8)$$

Dans l'hypothèse d'une réaction localisée, la pression acoustique se propageant dans la cavité s'écrit

$$p_{cav}^L(y) = \left( A e^{+iky} + B e^{-iky} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.9)$$

L'équation de Galbrun donne la vitesse acoustique dans la cavité

$$v_{cav}^L(y) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( A e^{+iky} - B e^{-iky} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.10)$$

Le fond de la cavité étant rigide

$$v_{cav}^L(0) = 0 \Rightarrow A = B. \quad (3.11)$$

La pression acoustique est donc

$$p_{cav}^L(y) = 2A \cos(ky) e^{-i\omega t} \quad (3.12)$$

et la vitesse acoustique

$$v_{cav}^L(y) = i \frac{2A}{\rho_0 c_0} \sin(ky) e^{-i\omega t}. \quad (3.13)$$

L'impédance de surface de la cavité s'écrit alors

$$z_{cav} = \frac{p_1^L}{-\rho_0 c_0 v_n^L} = \frac{p_{cav}^L(L_{cav})}{-\rho_0 c_0 v_{cav}^L(L_{cav})} = +i \cot(kL_{cav}). \quad (3.14)$$

Finalement, l'impédance du traitement complet est donnée par

$$z_t = z_r + i \cot(kL_{cav}). \quad (3.15)$$

Pour connaître l'impédance d'un traitement SDOF, il faut donc disposer de modèles d'impédance acoustique de plaques perforées. Dans la littérature, différents modèles, souvent semi-empiriques, sont proposés. Certains d'entre eux sont exposés dans la suite.

## 3.2 Impédance d'un orifice

Dans cette section, un orifice unique de plaque perforée est considéré (de diamètre  $d$ , et d'épaisseur  $t$ , avec  $(d, t) \ll \lambda$ ). Plusieurs phénomènes physiques influent sur son impédance parmi lesquels:

- les effets de la viscosité de l'air
- les effets du rayonnement acoustique
- les effets de l'écoulement rasant
- les effets non linéaires pour les forts niveaux acoustiques.

### 3.2.1 Effets de la viscosité de l'air

En se basant sur l'équation de Stokes compressible et celle de la conservation de la masse et de la chaleur, Crandall déduit une formule analytique de l'impédance acoustique d'un tube de longueur finie  $t$  [54]

$$z_v = ikt \left( 1 - \frac{4}{k_s d} \frac{J_1(k_s d/2)}{J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \quad (3.16)$$

avec  $J_0$  et  $J_1$  les fonctions de Bessel d'ordre 0 et d'ordre 1 de première espèce. En s'appuyant sur les valeurs limites de la viscosité de l'air (nombre de Stocks  $k_s = \sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}$  en  $m^{-1}$ , avec  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide, égale à  $1.5 \cdot 10^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$  pour l'air), Crandall propose les formules simplifiées suivantes

$$z_v \text{ } f < 100 \text{ Hz} = \frac{32\nu}{c_0 d^2} t - i \frac{4k}{3} t \quad (3.17)$$

et

$$z_v \text{ } f > 1000 \text{ Hz} = \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{c_0 d} t - i \left( k + \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{c_0 d} \right) t \quad (3.18)$$

respectivement pour les basses fréquences ( $\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} < 1 \Leftrightarrow f < 100$  Hz) et les hautes fréquences ( $\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} > 10 \Leftrightarrow f > 1000$  Hz).

Une correction de longueur supplémentaire due aux effets visqueux à l'extérieur de l'orifice doit être prise en considération. Ingard [55] montre expérimentalement que la longueur du tube doit être prolongée d'une longueur égale au diamètre de l'orifice  $d$  dans la formule  $z_v$  (Eq.(3.16)).

### 3.2.2 Effets du rayonnement acoustique

Le rayonnement acoustique qui a lieu de part et d'autre de l'orifice entraîne aussi une correction de longueur de tube. Ainsi, dans le domaine d'intérêt ( $kd/2 < \frac{1}{4}$ ), l'impédance de rayonnement acoustique calculée à partir de l'intégrale de Rayleigh donne [56]

$$z_r = \frac{1}{8}(kd)^2 - ik\delta \quad (3.19)$$

où le terme  $\delta = \frac{8d}{3\pi}$  correspond à la correction de longueur de l'orifice au niveau de la réactance.

### 3.2.3 Effets de l'écoulement rasant

Les traitements acoustiques SDOF sont souvent soumis à de forts écoulements. Les champs aérodynamiques ont alors une influence non négligeable sur le comportement du SDOF.

En 1985, Worraker et Halliwell [57] étudient expérimentalement l'interaction entre un écoulement rasant et le champ acoustique d'une cellule unique de traitement muni d'une fente tangentielle à un conduit. Ils remarquent l'influence de l'écoulement sur la fréquence de résonance de la cavité de la cellule et l'attribuent à une évolution de la réactance de l'orifice, sans tenir compte de l'évolution de la résistance. Ils en déduisent que l'écoulement entraîne la réduction de la correction de longueur de l'orifice au niveau de la réactance à mesure que la convection s'accroît.

En 1995, Hersh et Walker [58] expliquent qu'en se combinant à l'onde sonore, l'écoulement rasant a pour effet d'entraîner l'afflux et le reflux acoustique qui a lieu au niveau de l'orifice, sur le bord du col [59] (voir Fig 3.4). Ce phénomène conduit à une contraction de la surface de passage du flux acoustique, équivalente à une réduction de la taille effective de l'orifice. Ce rétrécissement a pour conséquence une augmentation de la résistance et de la réactance. Ce phénomène a depuis été modélisé par DNS 3D [60] pour un résonateur d'Helmoltz soumis à un écoulement rasant à  $M_0 = 0.1$ , confirmant ces explications.

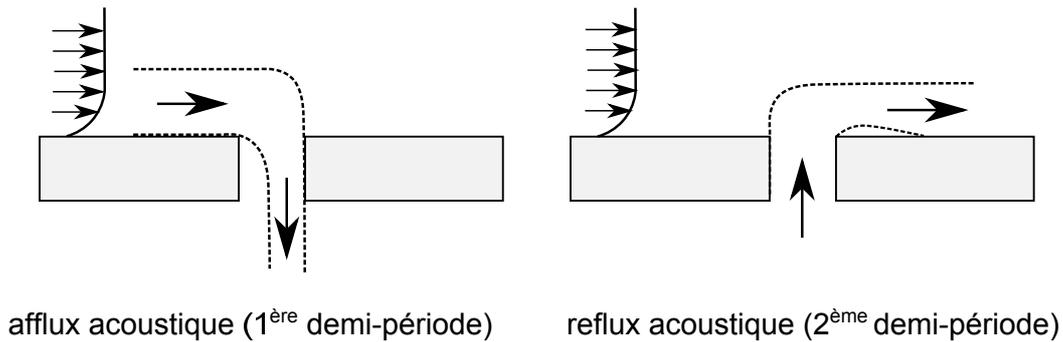


Fig. 3.4 Afflux et reflux acoustique en présence d'un écoulement rasant [59].

Pour la plupart des modèles d'impédance présentés dans ce rapport, l'écoulement d'air tangentiel à la surface du traitement a pour effet une augmentation de la résistance et une légère diminution de la réactance.

### 3.2.4 Effets non linéaires pour les forts niveaux acoustiques

Suivant le niveau d'excitation acoustique auquel il est soumis, le comportement d'un orifice de plaque perforée peut être linéaire lorsque ses propriétés ne dépendent pas de la vitesse acoustique de la particule, et non linéaire dans le cas contraire [59]. Ainsi, la plupart des modèles d'impédance acoustique de SDOF présentés dans la littérature prévoient une augmentation de la résistance acoustique de la plaque avec la hausse de la vitesse acoustique de la particule.

En régime linéaire, c'est-à-dire à faible niveau acoustique (vitesse acoustique faible), le flux acoustique près de l'orifice est potentiel. L'énergie est simplement dissipée par les effets viscothermiques qui se produisent dans le trou, ainsi que par la diffraction induite par la résistance du rayonnement acoustique à travers l'orifice [61].

En régime non linéaire, c'est-à-dire à fort niveau acoustique (vitesse acoustique élevée), un autre mécanisme vient s'ajouter à la dissipation d'énergie évoquée précédemment. Initialement observé en 1950 par Ingard et Labate [62], ce phénomène appelé *écoulement redressé* (ou *vortex shedding*) se traduit par la formation d'un jet suivi de tourbillons, alternativement en aval puis en amont du trou, à chaque demi-période de l'excitation acoustique. L'énergie acoustique se dissipe alors en énergie cinétique rotationnelle [61]. Les nouveaux moyens de calculs ont permis de visualiser ce phénomène. Par exemple, Roche [60] a réalisé une simulation numérique par DNS (*Direct Numerical Simulation*) du champ de vitesse acoustique à proximité du col circulaire d'un résonateur d'Helmoltz, pour une onde acoustique à incidence normale, et pour différents niveaux sonores (voir Fig 3.5). Il observe que les premiers effets non linéaires (tourbillons contrarotatifs)

apparaissent pour un SPL (*Sound Pressure Level*) de 135 dB, et que les premiers détachements tourbillonnaires surviennent à partir de 155 dB.

Dans la suite de ce travail, les niveaux d'excitation acoustique sont assez faibles ( $< 125$  dB). N'ayant pas accès à la valeur de la vitesse acoustique de la particule dans les orifices de la plaque, les données expérimentales issues de la littérature sont considérées [59]. Pour un niveau sonore d'environ 115 dB et dans des conditions expérimentales équivalentes, la vitesse acoustique est relativement basse et avoisine les  $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ .

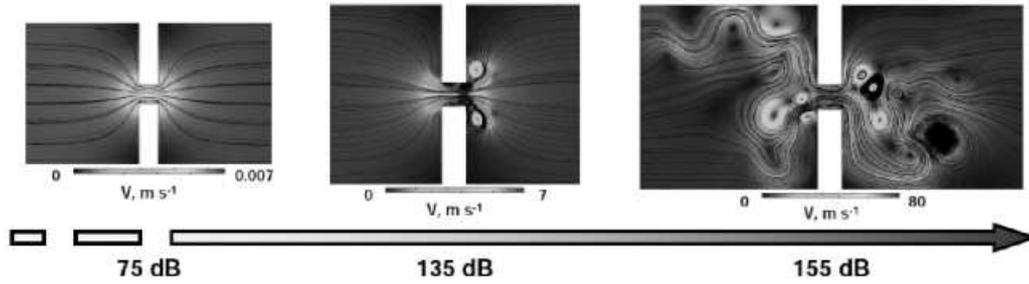


Fig. 3.5 Champ de vitesse acoustique à proximité du col d'un résonateur d'Helmholtz à 1500 Hz en fonction du SPL (simulation par DNS 2D-plan [60]).

### 3.3 Modèles d'impédance acoustique de plaques perforées prenant en compte l'écoulement

Dans cette section, quelques modèles d'impédance de plaques perforées (ou plus simplement "plaques perforées") et microperforées tenant compte des effets de l'écoulement d'air tangentiel sont présentés. Ces modèles sont beaucoup moins répandus que ceux sans écoulement, bien que la convection ait un effet non négligeable.

#### 3.3.1 Modèle de Guess (1974)

Guess [56, 63] propose un modèle d'impédance acoustique valide pour les plaques perforées ( $d \geq 1$  mm) pour les basses fréquences ( $f < 100$  Hz) et les hautes fréquences ( $f > 1000$  Hz). Le modèle de Guess s'écrit

$$z_{\text{Guess } f < 100 \text{ Hz}} = \left[ \frac{32\nu(t+d)}{\sigma c_0 d^2} + \frac{1}{8\sigma} (kd)^2 + \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_a + K \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_0 \right] - i \left[ \frac{4kt}{3\sigma} + \frac{k}{\sigma} \delta \right] \quad (3.20)$$

$$z_{\text{Guess } f > 1000 \text{ Hz}} = \left[ \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d} + \frac{1}{8\sigma} (kd)^2 + \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_a + K \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_0 \right] - i \left[ \frac{kt}{\sigma} + \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d} + \frac{k}{\sigma} \delta \right]. \quad (3.21)$$

Les effets *visqueux* de l'air dans les orifices de la plaque sont définis par les impédances

$$z_{v f < 100\text{Hz}} = \frac{32\nu(t+d)}{\sigma c_0 d^2} - i \frac{4kt}{3\sigma} \quad (3.22)$$

et

$$z_{v f > 1000\text{Hz}} = \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d} - i \left( \frac{kt}{\sigma} + \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d} \right). \quad (3.23)$$

Le modèle de Guess se base ainsi sur l'expression simplifiée de l'impédance acoustique d'un tube de longueur finie proposée par Crandall (Eq.(3.17) et Eq.(3.18), respectivement pour les basses et les hautes fréquences). L'épaisseur  $t$  du tube a été prolongée par une longueur  $d$  afin de prendre en compte les effets visqueux à l'extérieur du trou [55].

Les effets du *rayonnement acoustique* sur la résistance correspondent au terme

$$r_r = \frac{1}{8\sigma} (kd)^2. \quad (3.24)$$

Les effets de la *vitesse acoustique* sur la résistance sont représentés par

$$r_{va} = \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_a. \quad (3.25)$$

Le terme modélisant les effets de l'*écoulement rasant* sur la résistance est donné par

$$r_V = K \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_0 \quad (3.26)$$

avec  $K$  un coefficient empirique basé sur la théorie des couches limites ( $K \approx 0.3$ ).

La correction de longueur au niveau de la réactance est donnée par

$$\delta = \frac{8d}{3\pi} (1 - 0.7\sqrt{\sigma}) \frac{1}{1 + 305M_0^3} \frac{1 + 5 \cdot 10^3 M_a^2}{1 + 10^4 M_a^2} \quad (3.27)$$

avec

- $8d/3\pi$  la correction de longueur de l'orifice due au *rayonnement acoustique* de part et d'autre du trou [54, 64]
- $1 - 0.7\sqrt{\sigma}$  les effets de l'*interaction entre les orifices* sur la correction de longueur [55]
- $1/(1 + 305M_0^3)$  les effets de l'*écoulement rasant* sur la correction de longueur [65]
- $(1 + 5 \cdot 10^3 M_a^2)/(1 + 10^4 M_a^2)$  les effets de la *vitesse acoustique* pour les forts niveaux sur la correction de longueur [66].

### 3.3.2 Modèle d'Allam (2008)

Allam et Abom [67] reprennent le modèle de Bauer [68] pour les plaques microperforées en présence d'écoulement avec quelques ajustements, notamment au niveau des effets de l'écoulement et de la correction de longueur. Le modèle d'Allam 2008 s'écrit

$$z_{Allam2008} = \left[ \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d C_d} + \frac{K}{\sigma} M_0 \right] - i \left[ \frac{k}{\sigma C_d} (t+\delta) \right]. \quad (3.28)$$

L'impédance correspondant aux effets *visqueux* dans les orifices est définie par

$$z_v = \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d C_d} - i \frac{k}{\sigma C_d} t. \quad (3.29)$$

La pondération par le coefficient de perte de charge  $C_d$  est liée à la chute de pression au niveau de l'orifice provoquée par la formation du jet acoustique (suivant les auteurs,  $C_d$  est compris entre 0.6 et 0.8).

Les effets de l'*écoulement rasant* sur la résistance sont modélisés par

$$r_V = \frac{K}{\sigma} M_0 \quad (3.30)$$

avec  $K = 0.15$  un coefficient empirique.

La correction de longueur au niveau de la réactance est donnée par

$$\delta = 0.62d \left( 1 - 1.47\sqrt{\sigma} + 0.47\sqrt{\sigma^3} \right) \frac{1}{1 + 305M_0^3} \quad (3.31)$$

avec

- $0.62d$  la correction de longueur de l'orifice due au *rayonnement acoustique* de part et d'autre du trou
- $1 - 1.47\sqrt{\sigma} + 0.47\sqrt{\sigma^3}$  les effets de l'*interaction entre les orifices* sur la correction de longueur
- $1/(1 + 305M_0^3)$  les effets de l'*écoulement rasant* sur la correction de longueur.

### 3.3.3 Modèle de Yu (2008)

Yu *et al.* [69] proposent un modèle d'impédance semi-empirique spécialement développé pour l'aéronautique. Ce modèle a été validé grâce à des données expérimentales issues de la NASA

pour  $M_0 \in [0.2; 0.5]$ , et s'applique aux plaques perforées et microperforées. Le modèle de Yu s'écrit

$$z_{Yu} = \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{ik}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} (t + d\delta_r) \right) + \frac{1.336541}{2C_d^2} \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} M_a + \frac{1}{\sigma \left( 2 + 1.256 \frac{\delta^*}{d} \right)} M_0 \right] \quad (3.32)$$

$$- i \left[ \operatorname{Im} \left( \frac{ik}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} (t + d\delta_\chi) \right) + S_m M_a \right]. \quad (3.33)$$

L'impédance acoustique liée aux effets *visqueux* est donnée par

$$z_v = \operatorname{Re} \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right) - i \operatorname{Im} \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right). \quad (3.34)$$

Concernant les effets de la *vitesse acoustique* sur la résistance, Yu propose la formule suivante

$$r_{va} = \frac{1.336541}{2C_d^2} \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} M_a. \quad (3.35)$$

Les effets de l'*écoulement rasant* sur la résistance correspondent à

$$r_v = \frac{K}{\sigma} M_0 = \frac{1}{\sigma \left( 2 + 1.256 \frac{\delta^*}{d} \right)} M_0 \quad (3.36)$$

avec  $\delta^*$  l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Par la suite, n'ayant pas accès à la valeur de  $\delta^*$  et afin d'obtenir un coefficient  $K$  cohérent avec les autres modèles, on supposera que  $\delta^* = 2.5$  mm pour les plaques perforées ( $\Leftrightarrow K \approx 0.3$ ) et  $\delta^* = 1.1$  mm pour les plaques microperforées ( $\Leftrightarrow K \approx 0.15$ ).

Le modèle de Yu s'adapte aux plaques perforées et microperforées avec

**pour les plaques perforées ( $d \geq t$ )**

- $C_d = 0.80695 \sqrt{\sigma^{0.1} / e^{-0.5072(t/d)}}$  le coefficient de perte de charge
- $S_m = -0.0000207\omega/\sigma^2$  le coefficient de réactance de masse non linéaire
- $\delta_r = \delta_\chi = \frac{1 - 0.7\sqrt{\sigma}}{1 + 305M_0^3}$  la correction de longueur de l'orifice

**pour les plaques microperforées ( $t > d$ )**

- $C_d = 0.584854 \sqrt{\sigma^{0.1} / e^{-1.151(d/t)}}$
- $S_m = -0.00001242\omega / \sigma^2$
- $\delta_r = 0.2(1 - 0.7\sqrt{\sigma})$
- $\delta_\chi = 0.85(1 - 0.7\sqrt{\sigma})$ .

**3.3.4 Modèle de Cobo (2010)**

Le modèle de Cobo et *al.* [70] est applicable aux plaques microperforées. Il a été expérimenté sur un système à double plaque perforée associé à un milieu poreux, pour un écoulement rasant allant jusqu'à  $M_0 = 0.1$ . Ce modèle est similaire à celui d'Allam 2008 [67], mais avec des modifications au niveau de la correction de longueur. Le modèle de Cobo s'écrit

$$z_{Cobo} = \left[ \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{4c_0\sigma} + \frac{K}{\sigma} M_0 \right] - i \left[ \frac{kt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} + \frac{k}{\rho_0\sigma} \delta \right]. \quad (3.37)$$

Les effets *visqueux* de l'air dans les orifices sont exprimés par

$$z_v = \frac{\sqrt{8\nu\omega}}{4c_0\sigma} - i \frac{kt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

Les effets de l'*écoulement rasant* sur la résistance sont donnés par

$$r_V = \frac{K}{\sigma} M_0 \quad (3.39)$$

avec  $K = [0.15; 0.6]$  un coefficient empirique.

La correction de longueur au niveau de la réactance est modélisée par

$$\delta = 0.85d \frac{1}{(1 + \gamma M_0)} F(\epsilon) \quad (3.40)$$

avec

- $0.85d$  la correction de longueur de l'orifice due au *rayonnement acoustique* de part et d'autre du trou
- $1/(1 + \gamma M_0)$  les effets de l'*écoulement rasant* sur la correction de longueur avec  $\gamma = [300; 600]$
- $F(\epsilon) = 1 - 1.4092(\epsilon) + 0.33818(\epsilon)^3 + 0.06793(\epsilon)^5 - 0.02287(\epsilon)^6 + 0.03015(\epsilon)^7 - 0.01641(\epsilon)^8$  la Fonction de Fok qui modélise l'*interaction entre les orifices* avec  $\epsilon = \sqrt{\sigma}$ .

### 3.3.5 Modèle d'Allam (2011)

Allam et Abom [71] s'appuient sur les travaux de Maa [72–75] sur les plaques microperforées pour développer un modèle plus complet que celui proposé en 2008. Maa définit les plaques microperforées comme ayant une épaisseur de l'ordre du millimètre, un taux de perforation supérieur à 1% et un diamètre de trou inférieur au millimètre. Le modèle d'Allam 2011 ne se limite, selon les auteurs, qu'aux plaques microperforées avec un taux de perforation inférieur à 5%. Le modèle d'Allam 2011 s'écrit

$$z_{Allam2011} = \left[ Re \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right) + \frac{\alpha \sqrt{2\nu\omega}}{\sigma c_0} + \frac{1}{\sigma} M_a + \frac{K}{\sigma} M_0 \right] - i \left[ Im \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right) + \frac{k}{\sigma} \delta \right]. \quad (3.41)$$

Les effets *visqueux* de l'air sont donnés par

$$z_v = Re \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right) - i Im \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right). \quad (3.42)$$

Les effets du *rayonnement acoustique* sur la résistance sont modélisés par

$$r_r = \frac{\alpha \sqrt{2\nu\omega}}{\sigma c_0} \quad (3.43)$$

avec  $\alpha$  un facteur égal à 4 pour les trous à bords droits (ce qui sera considéré dans la suite), et à 2 pour les trous à bords arrondis.

Les effets de la *vitesse acoustique* sur la résistance sont exprimés par

$$r_{va} = \frac{1}{\sigma} M_a. \quad (3.44)$$

La contribution de l'*écoulement rasant* sur la résistance est introduite par le terme

$$r_v = \frac{K}{\sigma} M_0 \quad (3.45)$$

avec  $K = 0.15 \pm 0.0125$  un coefficient empirique.

La correction de longueur au niveau de la réactance est ici donnée par

$$\delta = \frac{8d}{3\pi} \frac{1}{1 + 123M_0^3} \frac{\sigma}{\sigma + M_a} \quad (3.46)$$

avec

- $8d/3\pi$  la correction de longueur de l'orifice due au *rayonnement acoustique* de part et d'autre du trou
- $1/(1 + 123M_0^3)$  les effets de l'*écoulement rasant* sur la correction de longueur
- $\sigma/(\sigma + M_a)$  les effets de la *vitesse acoustique* pour les forts niveaux sur la correction de longueur.

### 3.4 Conclusion

Dans cette section, l'impédance acoustique a été définie, puis appliquée aux traitements SDOF. L'impédance acoustique d'un SDOF dépend de celle de sa plaque perforée. Des modèles d'impédance acoustique de plaques perforées et microperforées ont été présentés. Dans chacun de ces modèles, certains phénomènes physiques (effets visqueux et effets de l'écoulement rasant) sont toujours pris en comptes, tandis que d'autres (effets du rayonnement acoustique, effets de la vitesse acoustique...) sont parfois négligés par leurs auteurs. Le tableau 3.1 synthétise les différents phénomènes physiques associés à chaque modèle de plaque, et le tableau 3.2 résume les plages de validation expérimentales utilisées par leurs auteurs.

Résistance $r$						
	Effets visqueux $r_v$	Effets du rayonnement acoustique $r_r$	Effets de la vitesse acoustique $r_{va}$	Effets de l'écoulement rasant $r_\gamma$		
Guess ( $f < 100$ Hz)	$\frac{32\nu(t+d)}{\sigma c_0 d^2}$	$\frac{1}{8\sigma} (kd)^2$	$\frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_a$	$K \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_0$ ; $K \approx 0.3$		
Guess ( $f > 1000$ Hz)	$\frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d}$	$\frac{1}{8\sigma} (kd)^2$	$\frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_a$	$K \frac{1-\sigma^2}{\sigma} M_0$ ; $K \approx 0.3$		
Allam 2008	$\frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d C_d}$	0	0	$\frac{K}{\sigma} M_0$ ; $K \approx 0.15$		
Yu (perforée)	$Re \left( \frac{ik(t+d\delta_r)}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	0	$\frac{1.336541}{2C_d^2} \frac{1-\sigma^2}{\sigma^2} M_a$	$\frac{1}{\sigma(2+1.256\frac{\delta^*}{d})} M_0$		
Yu (microporée)	$Re \left( \frac{ik(t+d\delta_r)}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	0	$\frac{1.336541}{2C_d^2} \frac{1-\sigma^2}{\sigma^2} M_a$	$\frac{1}{\sigma(2+1.256\frac{\delta^*}{d})} M_0$		
Cobo	$\frac{\sqrt{8\nu\omega}}{4c_0\sigma}$	0	0	$\frac{K}{\sigma} M_0$ ; $K = [0.15; 0.6]$		
Allam 2011	$Re \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	$\frac{\alpha\sqrt{2\nu\omega}}{\sigma c_0}$	$\frac{1}{\sigma} M_a$	$\frac{K}{\sigma} M_0$ ; $K \approx 0.15$		
Réactance $\chi$						
	Effets visqueux $\chi_v$	Effets de la vitesse acoustique $\chi_{va}$	Effets du rayonnement acoustique	Effets de la vitesse acoustique	Effets de l'écoulement rasant	Interactions entre les orifices
Guess ( $f < 100$ Hz)	$\frac{4kt}{3\sigma}$	0	$\frac{8d}{3\pi}$	$\frac{1+5.10^3 M_a^2}{1+10^4 M_a^2}$	$\frac{1}{1+305 M_0^3}$	$1-0.7\sqrt{\sigma}$
Guess ( $f > 1000$ Hz)	$\frac{kt}{\sigma} + \frac{\sqrt{8\nu\omega}(t+d)}{\sigma c_0 d}$	0	$\frac{8d}{3\pi}$	$\frac{1+5.10^3 M_a^2}{1+10^4 M_a^2}$	$\frac{1}{1+305 M_0^3}$	$1-0.7\sqrt{\sigma}$
Allam 2008	$\frac{k}{\sigma} \frac{t}{C_d}$	0	0.62d	0	$\frac{1}{1+305 M_0^3}$	$1-1.47\sqrt{\sigma}+0.47\sqrt{\sigma^3}$
Yu (perforée)	$Im \left( \frac{ik(t+d\delta_r)}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	$-0.0000207\omega/\sigma^2 M_a$	0	0	0	0
Yu (microporée)	$Im \left( \frac{ik(t+d\delta_r)}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	$-0.00001242\omega/\sigma^2 M_a$	0	0	0	0
Cobo	$\frac{kt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1}$	0	0.85d	0	$\frac{1}{1+\gamma M_0}$ ; $\gamma = [300; 600]$	$F(\epsilon)$
Allam 2011	$Im \left( \frac{ikt}{\sigma} \left( 1 - \frac{4J_1(k_s d/2)}{k_s d J_0(k_s d/2)} \right)^{-1} \right)$	0	$\frac{8d}{3\pi}$	$\frac{\sigma}{\sigma+M_a}$	$\frac{1}{1+123 M_0^3}$	0

Table 3.1 Synthèse des termes associés à chaque modèle d'impédance acoustique

Modèles	Épaisseur de la plaque $t$ (mm)	Diamètre des trous $d$ (mm)	Taux de perforation $\sigma$ (%)	Écoulement $M_0$ (Mach)	Diamètre du conduit (m)	fréquence de validation (Hz)	Coupure du premier mode (Hz)
Guess	1	2.5	[20;25]	[0;0.5]	?	?	?
Yu (perf)	[0.8;1.0]	[1.0;1.1]	[7.7;8.2]	[0.2;0.3;0.45;0.5]	0.05 (carré)	[500;3500]	3400
Yu (micro)	[1.2;1.3]	[1.1;1.2]	[7.9;11.8]	[0.2;0.3;0.45;0.5]	0.05 (carré)	[500;3500]	3400
Cobo	0.5	[0.3;0.5]	[23;30]	[0;0.1]	0.2 (carré)	[0;5145]	850
Allam (2011)	1	1	[0.5;2]	[0;0.15]	0.057 (cylindrique)	[0;1100]	3493

Table 3.2 Synthèse des plages de validation expérimentale de chaque modèle

## Chapitre 4

# Développement d'une approche expérimentale et numérique pour les conduits avec traitement acoustique

Ce chapitre présente le développement d'une approche originale pour les conduits avec traitement acoustique. Ce procédé repose sur la modélisation numérique d'un banc expérimental dans une chambre anéchoïque permettant de simuler la propagation de l'onde acoustique dans le conduit, ainsi que son rayonnement vers l'extérieur. L'application de cette approche servira dans le chapitre suivant à valider les modèles d'impédance acoustiques de SDOF présentés précédemment. Dans un premier temps, le dispositif expérimental est exposé avec la description des différents composants du banc, le protocole de mesure de la pression acoustique et le traitement des données. La deuxième section est consacrée à la présentation du modèle FEM-PML utilisé suivi de la méthode de comparaison essais/calculs. Enfin, la validation de la méthode est effectuée sur un tronçon rigide (non traité), sans et avec écoulement.

### 4.1 Description du banc et du protocole de mesure

Les mesures sont réalisées sur un banc aéroacoustique situé dans la chambre semi-anéchoïque du laboratoire Roberval. Ce dispositif, développé dans le cadre du programme européen DUCAT [76], se compose des éléments essentiels à la génération de l'écoulement et du signal acoustique, à la mesure de la pression totale et au traitement des données. Cette section présente les différents éléments du dispositif, ainsi que le protocole de mesure permettant l'acquisition des don-

nées. A titre d'information, ce banc a déjà été utilisé pour d'autres études, mais dans des configurations différentes [77–79].

#### 4.1.1 Description du banc de mesure

La figure 4.1 présente une vue d'ensemble du banc acoustique, tandis que la figure 4.2 schématise le dispositif expérimental. Le banc est constitué d'un conduit cylindrique en acier, d'une épaisseur de 0.015 m et d'un diamètre interne de 0.148 m. Il se compose des éléments suivants:

- un ventilateur centrifuge situé en dehors de la chambre semi-anéchoïque permettant de générer un écoulement négatif ou positif allant jusqu'à Mach 0.25;
- un tronçon source sur lequel est fixée une chambre de compression;
- un tronçon rigide de mesure amont (1) pourvu d'une sonde acoustique;
- un tronçon test dans lequel un traitement acoustique peut être appliqué;
- un tronçon rigide de mesure aval (2) identique au premier;
- une terminaison rigide de type pavillon exponentiel.

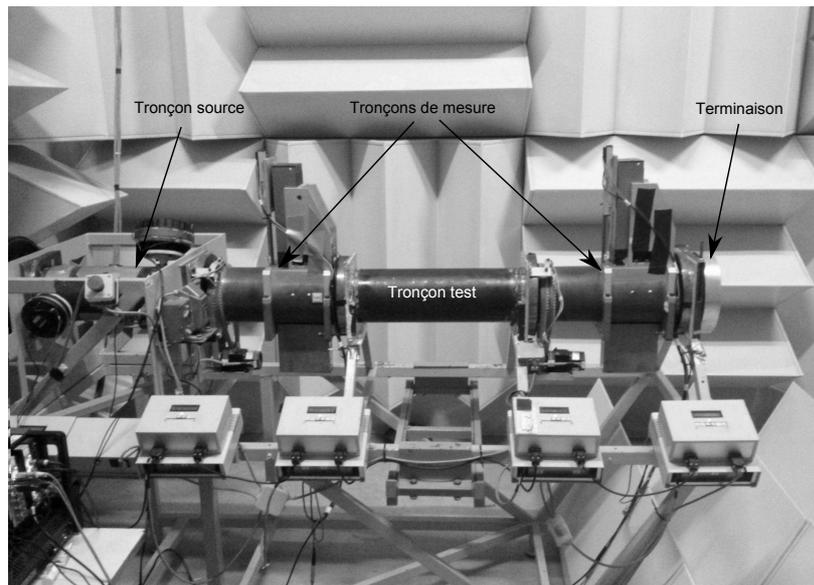


Fig. 4.1 Photo du banc acoustique.

Le système d'acquisition se compose d'une chaîne de conversion analogique-numérique connectée à un ordinateur équipé d'un programme de traitement des données PULSE. Le signal d'entrée de la acoustique est généré par l'ordinateur, mais passe également par la chaîne d'acquisition pour servir de signal de référence. Les microphones des sondes acoustiques sont reliés à la chaîne d'acquisition, tandis que le pilotage du déplacement de ces sondes est directement contrôlé par l'ordinateur.

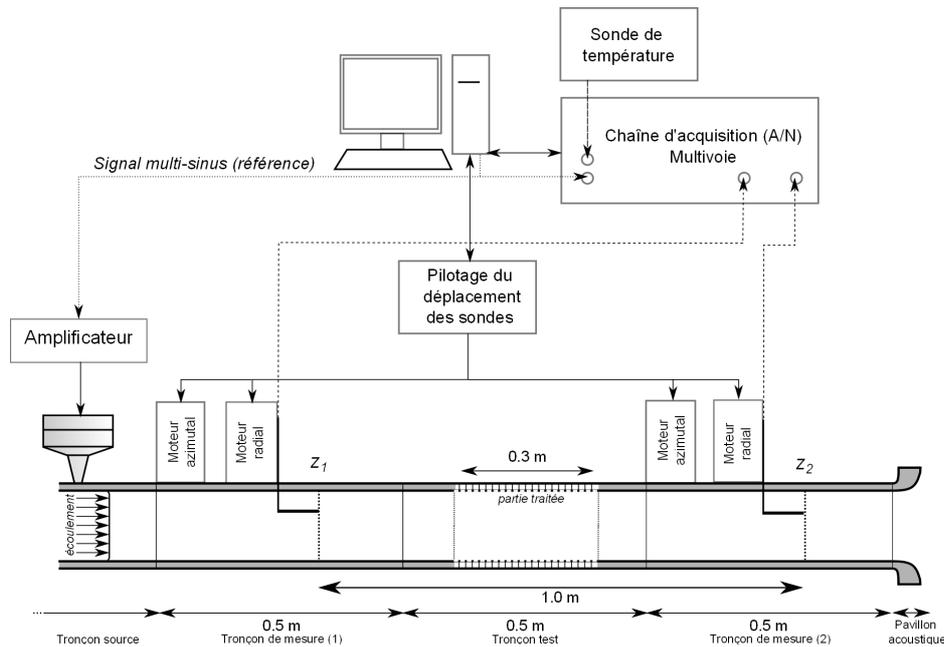


Fig. 4.2 Schéma du dispositif expérimental.

### Tronçon source

Le tronçon source est composé d'un conduit cylindrique en acier sur lequel est fixée une chambre de compression comme le montre la Fig 4.3. Les caractéristiques de la chambre de compression utilisée sont les suivantes:

- une sensibilité (pression acoustique obtenue à 1 m lorsqu'une puissance de 1W est appliquée) de 118 dB/1W/1m;
- une bande passante allant de 200 à 9000 Hz;
- un niveau maximal de pression sonore (SPL max) de 136 dB à 150 W.



Fig. 4.3 Photo du tronçon source du banc acoustique.

Durant la mesure, la source est excitée par un signal multi-sinus via un amplificateur de puissance. En effet, le niveau acoustique est obtenu en faisant le calcul de l'interspectre entre le signal du microphone et le signal du générateur de la source afin de s'affranchir du bruit de l'écoulement qui n'est pas corrélé avec le signal acoustique (voir section 4.1.4). Le nombre de sinus imposé par l'ordinateur est fixé à 100, allant de 64 à 6400 Hz avec un pas de 64 Hz. La tension efficace fournie par le générateur à la source est de 0.1 V pour chaque fréquence.

### Tronçons de mesure

Les deux tronçons de mesures (voir Fig 4.4 (a)) sont identiques, et une distance de 1.0 m sépare les deux sections de mesure  $S_1$  et  $S_2$ . Sur chacune d'entre elles, une sonde bi-captur réalise des mesures locales de pression et de vitesse (voir Fig 4.4 (b)). Chaque sonde est composée d'un microphone 1/4 de pouce muni d'une ogive et d'un fil chaud monté en parallèle. Le tout est fixé perpendiculairement à un guide métallique radial. Les mesures sont effectuées sur des positions radiales et azimutales de la section. Les déplacements radiaux et azimutaux de la sonde sont réalisés par des moteurs pas-à-pas pilotés par ordinateur. L'exploration de la sonde à travers le conduit permet d'obtenir le champ de pression et de vitesse dans la section de mesure.

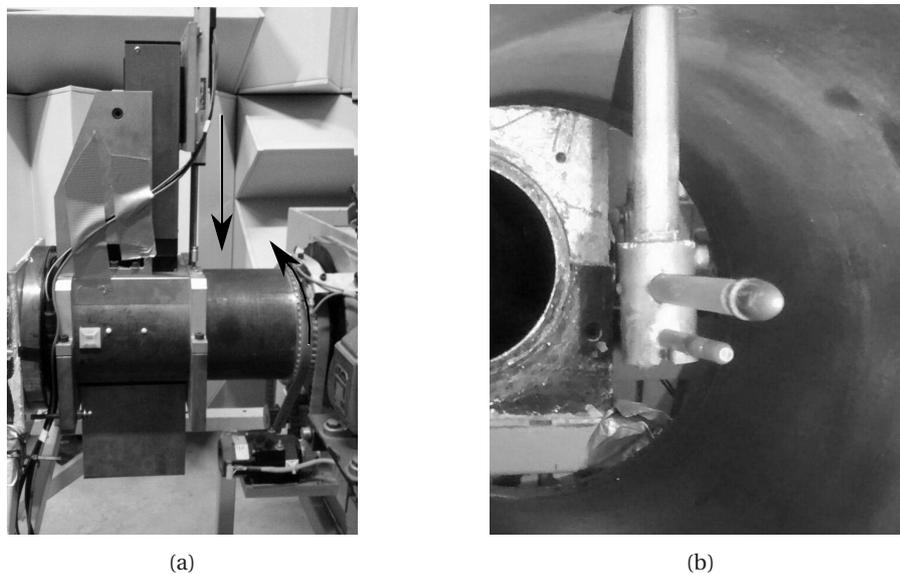


Fig. 4.4 Photo du tronçon de mesure du banc acoustique: (a) à l'extérieur du conduit; (b) à l'intérieur du conduit, avec la sonde composée d'un microphone avec son ogive (en haut) et d'un fil chaud (en bas).

L'étalonnage des microphones repose sur des fonctions de transfert déterminées en comparant les signaux des microphones munis de leur ogive à celui d'un microphone de référence [78, 80].

La plage de validité de l'étalonnage des microphones va de 1 à 5000 Hz. Cet intervalle constitue ainsi notre bande fréquentielle d'étude.

La vitesse axiale de l'écoulement porteur est mesurée dans chaque tronçon grâce au fil chaud installé sur la sonde. En raison de la fragilité du dispositif, les fils chauds ne sont utilisés que pour un écoulement inférieur à Mach 0.15. Pour les vitesses supérieures, ils sont retirés, et la vitesse de l'écoulement est directement mesurée au moyen d'une sonde pitot placée en sortie du ventilateur, au centre de la gaine.

### Tronçon test

Le tronçon test se situe entre les deux tronçons de mesure (1) et (2). Il se compose d'un conduit rigide de 0.1 m de longueur, d'un conduit traité de 0.3 m et d'un autre conduit rigide de 0.1 m (voir Fig 4.5). La partie traitée est constituée d'une plaque perforée en aluminium de 0.5 mm d'épaisseur sur laquelle sont disposées 8 x 16 cavités rectangulaires (38 mm x 29 mm) d'environ 8 mm de profondeur. Le tout est enfermé par deux demi-cylindres en aluminium faisant office de fond rigide pour les cavités. Cet empilement, supposé localement réactif (du moins, jusqu'à la fréquence de coupure de la cavité du traitement vers 4500 Hz) et axisymétrique, permet de simuler un matériau de type SDOF.

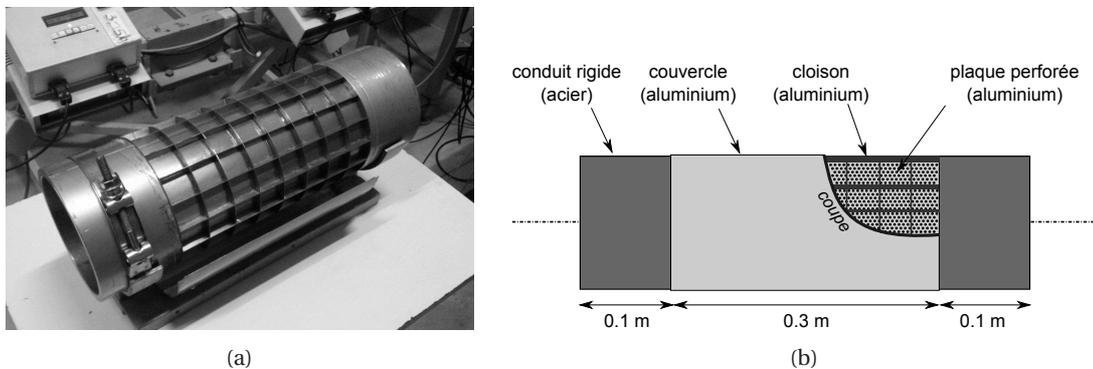


Fig. 4.5 Tronçon test: (a) photo; (b) schéma.

Deux tronçons tests sont disponibles avec des configurations de taille de trous et de taux de perforation différentes. Le premier tronçon dispose d'une plaque perforée, et le second d'une plaque microperforée (voir Fig 4.6). Afin d'assurer l'étanchéité des cavités (et donc la réaction localisée), de la graisse de silicone est rajoutée sur le pourtour de chaque cloison ce qui obstrue des orifices et entraîne une diminution du taux de perforation. L'influence du silicone sur la réduction de la porosité des plaques est prise en compte après estimation visuelle sur les plaques. En revanche, même si des orifices peuvent être partiellement bouchés par le silicone, leur diamètre

est supposé inchangé. Les caractéristiques utilisées dans le modèle numérique sont résumées dans le tableau 4.1.

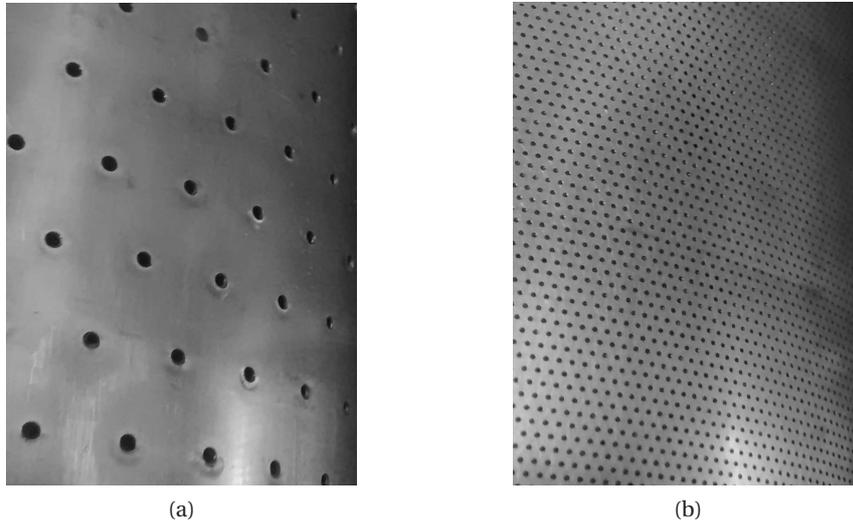


Fig. 4.6 Photo de la plaque: (a) perforée; (b) microperforée.

Caractéristiques	SDOF perforé	SDOF microperforé
diamètre des trous	1.89 mm	0.30 mm
épaisseur de la plaque	0.5 mm	0.5 mm
profondeur de la cavité	8.0 mm	8.0 mm
taux de perforation	1.76 %	1.16 %
longueur du traitement	300.0 mm	300.0 mm

Table 4.1 Paramètres des traitements SDOF considérés dans les modèles d'impédance acoustique.

### Terminaison

Le choix de la terminaison du banc s'est porté sur un pavillon exponentiel (voir Fig 4.7). Il s'agit d'une terminaison évasée (0.045 m d'épaisseur x 0.245 m de diamètre sur la plus grande section) permettant de stabiliser l'écoulement en sortie, et ainsi limiter les turbulences liées au flux d'air aspirant ou soufflant.

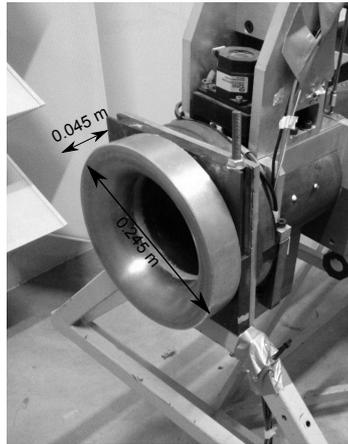
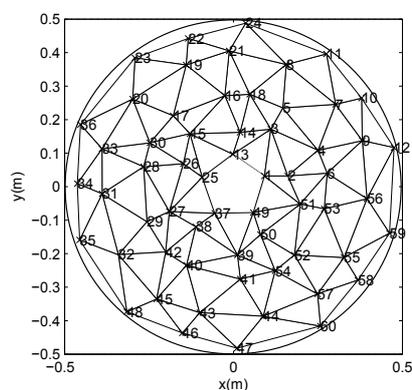


Fig. 4.7 Photo de la terminaison.

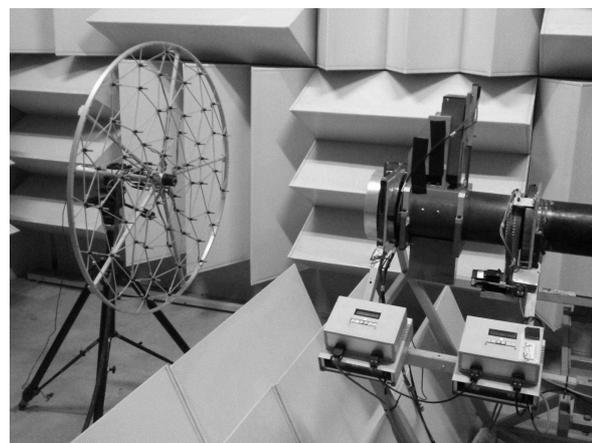
### Antenne

Afin de comparer le bruit rayonné par le banc acoustique à celui prédit par le calcul, une antenne plane (utilisée comme section de mesure) de 1.0 m de diamètre et disposant de 60 microphones a été utilisée. La répartition des microphones sur l'antenne est montrée Fig 4.8 (a). Chaque microphone a été étalonné séparément à l'aide d'un pistonphone. Le centre de l'antenne est aligné à celui du conduit et sa surface de mesure est parallèle à la sortie du pavillon. La distance séparant l'antenne de la terminaison est de  $L = 70$  cm (voir Fig 4.8 (b)).

Pour "compléter" l'anéchoïcité de la chambre, un dièdre acoustique est posé sur le sol entre l'antenne et le banc (voir Fig 4.8 (b)). Ainsi, les ondes acoustiques arrivant sur le sol et qui pourraient se réfléchir sur l'antenne sont absorbées.



(a)



(b)

Fig. 4.8 Antenne acoustique: (a) répartition des microphones; (b) photo du dispositif.

### 4.1.2 Propagation d'onde en conduit cylindrique

Les équations et les hypothèses adoptées permettant d'aboutir à la solution analytique d'une onde se propageant dans un conduit sont données dans l'Annexe A.1. Dans le cas particulier d'un conduit cylindrique, certaines simplifications peuvent toutefois être appliquées. La pression acoustique étant bornée sur l'axe du conduit, le terme  $B_{mn}$  de la solution Eq.(A.5) est nul. La pression peut alors s'écrire

$$p_{mn}^L(r) = A_{mn} J_m(k_{r_{mn}} r). \quad (4.1)$$

Sous l'hypothèse d'un conduit cylindrique rigide, les nombres d'onde radiaux  $k_{r_{mn}}$  sont directement déduits de la formule suivante

$$\frac{\partial}{\partial r} J_m(k_{r_{mn}} R_2) = 0 \quad (4.2)$$

qui découle des équations Eq.(A.2) et Eq.(4.1).

Finalement, la solution générale de l'onde se propageant dans un conduit cylindrique rigide en présence d'un écoulement axial uniforme et tournant en bloc rigide est donnée par

$$p^L(r, \theta, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn}(z) J_m(k_{r_{mn}} r) e^{im\theta} e^{-i\omega t} \quad (4.3)$$

où  $p_{mn}(z)$  est le coefficient modal associé au mode  $(m, n)$ . L'orthogonalité des modes propres transversaux  $(J_m(k_{r_{mn}} r) e^{im\theta})$  est démontrée par Auger dans sa thèse [81].

De plus, en appliquant la formule Eq.(A.8) au conduit expérimental, seuls les modes présentés Tab. 4.2 sont propagatifs sur la bande fréquentielle d'intérêt [0-5000 Hz].

(m,n)	$f_{c_{mn}}$ en Hz			
	$M_0 = 0$	$M_0 = \pm 0.1$	$M_0 = \pm 0.2$	$M_0 = \pm 0.3$
(0,0)	0	0	0	0
(±1,0)	1346	1340	1319	1284
(±2,0)	2233	2222	2188	2131
(0,1)	2802	2788	2745	2673
(±3,0)	3072	3057	3010	2931
(±4,0)	3889	3869	3810	3709
(±1,1)	3899	3879	3820	3719
(±5,0)	4691	4668	4597	4475
(±2,1)	4904	4879	4805	4678

Table 4.2 Fréquences de coupure analytiques des modes propres dans le conduit expérimental dans le cas de parois rigides.

### 4.1.3 Mesure de la pression acoustique

Au cours de la mesure, les déplacements radiaux et azimutaux de la sonde permettent d'établir une cartographie de la pression acoustique dans les deux sections de mesure en suivant l'organigramme présenté Fig 4.9.

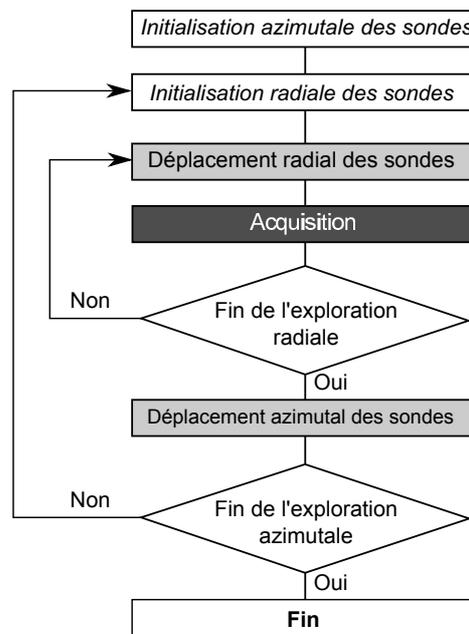


Fig. 4.9 Organigramme du déplacement des sondes.

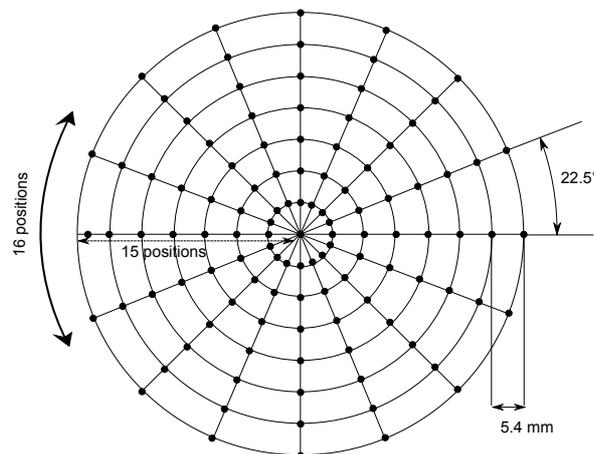


Fig. 4.10 Positions des points de mesure de la sonde sur une section.

Chaque sonde se déplace sur 240 points (16 positions azimutales x 15 positions radiales – voir Fig 4.10). Cette discrétisation permet d'effectuer une décomposition modale des modes azimutaux allant jusqu'à  $m = \pm 7$  et des modes radiaux allant jusqu'à  $n = 3$  (par transformée de Lommel [82]).

#### 4.1.4 Traitement du signal

Après acquisition, les signaux temporels des microphones  $M_1$  et  $M_2$  (notés respectivement  $S_{M_1}(t)$  et  $S_{M_2}(t)$ ) subissent le traitement décrit par l'organigramme Fig 4.11. Le signal de référence,  $S_{réf}(t)$ , correspond à celui du générateur.

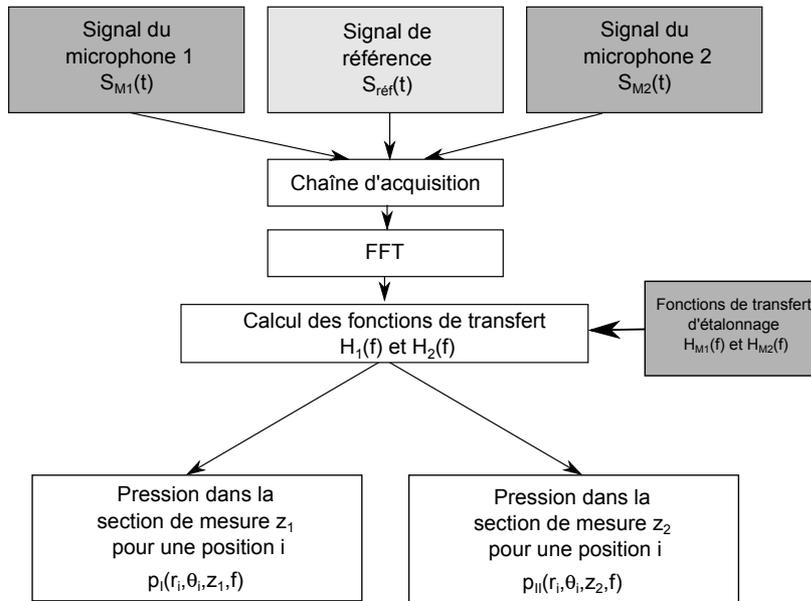


Fig. 4.11 Organigramme de l'acquisition de la pression acoustique totale.

La fonction de transfert du microphone  $j$  (pour  $j = [1;2]$ ) est donnée par

$$H_j = \frac{G_{réf,M_j}(f)}{G_{réf,réf}(f)} \cdot \frac{|S_{réf}(f)|}{H_{M_j}} \quad (4.4)$$

avec

$$G_{réf,M_j}(f) = S_{réf}^*(f) \cdot S_{M_j}(f) \quad (4.5)$$

l'inter-spectre entre le signal de référence  $S_{réf}(f)$  et celui du microphone  $S_{M_j}(f)$ , et

$$G_{réf,réf}(f) = S_{réf}^*(f) \cdot S_{réf}(f) \quad (4.6)$$

l'autospectre du signal de référence.  $H_{M_j}$  correspond à la fonction de transfert d'étalonnage du microphone  $j$  en V/Pa, et  $|S_{réf}(f)|$  au module du signal de référence en V. Dans le cas d'un multi-sinus de 100 fréquences, le module de  $S_{réf}(f)$  est identique pour chaque fréquence, et égal à 0.1414 V en crête.

En fin de traitement, l'utilisateur obtient donc la valeur de la pression acoustique (complexe) en Pa mesurée sur les 240 points de chaque section, et cela pour 79 fréquences, de 64 à 4992 Hz.

## 4.2 Corrélation essais/calculs

Dans cette section, le procédé numérique utilisé pour la validation des modèles d'impédance acoustique est présenté. La géométrie du modèle numérique sera tout d'abord introduite, suivie du protocole de calcul.

### 4.2.1 Modèle FEM-PML

La méthode numérique développée est basée sur la formulation éléments finis mixte en pression-déplacement, et sur la PML axisymétrique présentée au Chapitre 2. La géométrie du modèle reproduit le dispositif expérimental (un conduit cylindrique et une couche PML –voir Fig 4.12 (a)). Dans la suite, chaque élément constitutif du modèle est détaillé.

#### Conduit

La géométrie du conduit respecte celle du banc expérimental. Il s'agit d'un cylindre rigide de rayon interne 0.074 m et d'épaisseur 0.015 m (voir Fig 4.12 (a)). Le modèle d'impédance acoustique à tester est programmé sur la partie traitée du conduit. Cette partie s'étend sur une longueur de 0.3 m et se situe à la même distance des sections de mesures que sur le banc expérimental. Enfin, le conduit se termine par un pavillon acoustique de mêmes dimensions que celui installé sur le banc.

La *section d'entrée* du conduit, prise comme source acoustique, correspond à la section de mesure  $S_1$  du banc expérimental (voir Fig 4.2). La pression totale (incidente+réfléchie) mesurée expérimentalement en  $S_1$  est imposée sur cette section numérique, après décomposition azimutale. La *section de sortie*, correspondant à la section de mesure  $S_2$ , sert à la corrélation essais/calculs.

#### Antenne

Afin de comparer le rayonnement acoustique mesuré par l'antenne à celui calculé numériquement, une section  $S_3$  est identifiée dans le modèle éléments finis (voir Fig 4.12 (b)). Tout comme l'antenne, cette section de 0.5 m de rayon est centrée sur l'axe du conduit, à 0.7 m de la terminaison.

#### Conditions aux limites du domaine (PML)

La PML introduite permet de simuler les parois de la chambre anéchoïque. La longueur de la PML et son paramètre d'absorption ont été optimisés afin d'éliminer au mieux les réflexions sur la bande de fréquence considérée (entre 64 et 4992 Hz). Ainsi,  $L_{pml}$  est fixée à 1.0 m et le paramètre

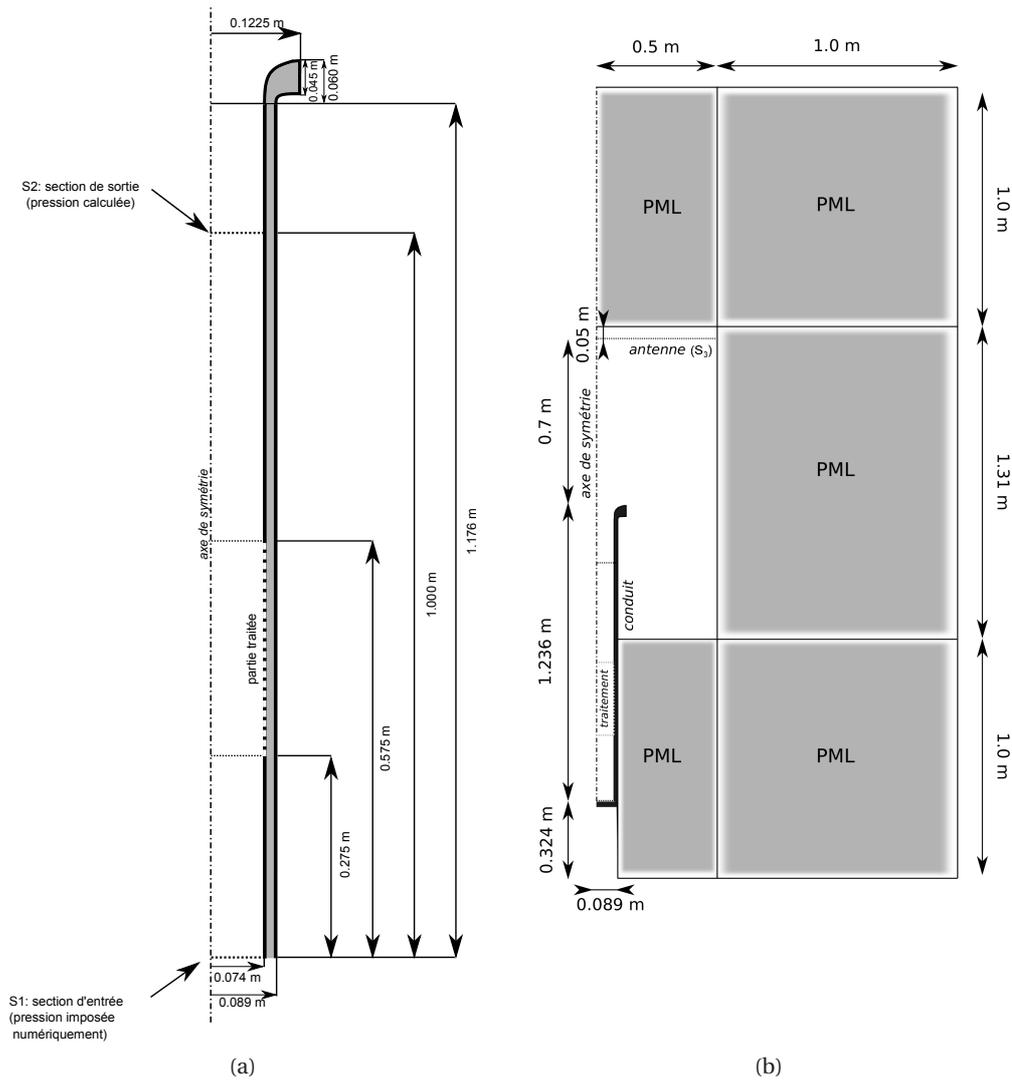


Fig. 4.12 Géométrie du modèle numérique utilisé: (a) conduit seul; (b) conduit+PML.

d'absorption  $\beta$  à 4000 dans chaque direction. Dans cette configuration, la PML offre de bonnes performances, même à basse fréquence et proche des fréquences de coupure.

### Maillage

Les éléments utilisés dans ce modèle sont de type T4/3c. Le domaine de calcul compte trois finesses de maille différentes afin de garantir la précision des résultats tout en limitant la taille du problème à résoudre (voir Fig 4.13). L'intérieur du conduit dispose d'un maillage très fin de  $\lambda_{5000 \text{ Hz}}/12$  (soit 0.0055 m), le domaine sur lequel débouche le conduit d'un maillage de  $\lambda_{5000 \text{ Hz}}/5$  (soit 0.015 m), et la PML d'une taille de maille de 0.05 m aux extrémités du domaine. Le fait d'utiliser une PML avec un maillage progressivement croissant ne détériore pas la précision des résultats, car l'onde est complètement atténuée là où le maillage est le plus grossier. L'ensemble du modèle compte 14594 nœuds et 30520 éléments.

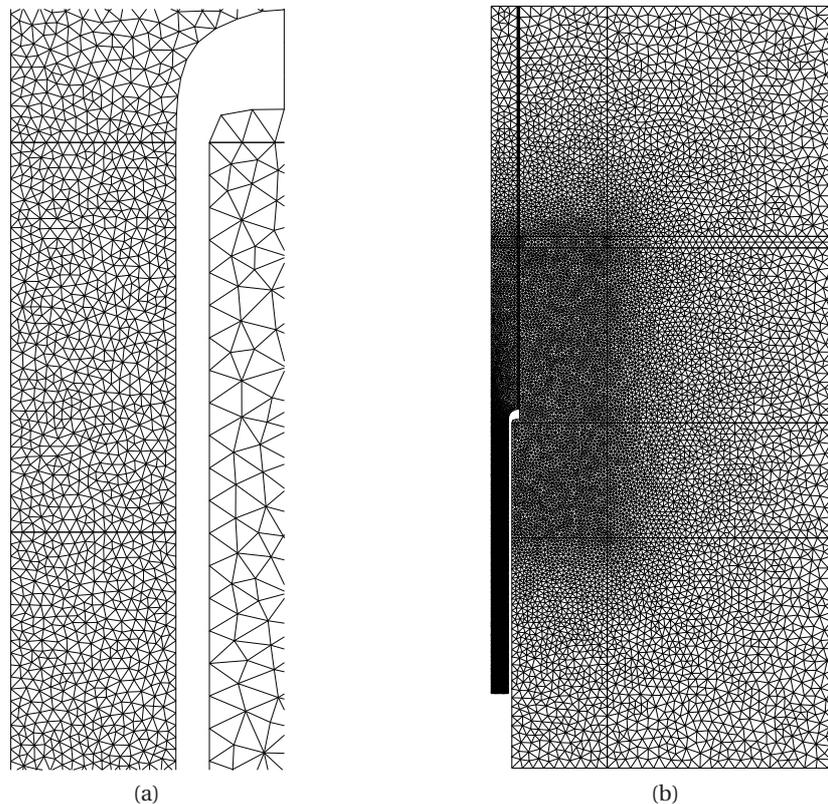


Fig. 4.13 Géométrie et maillage FEM (T4/3c) du domaine d'étude: (a) conduit seul; (b) conduit+PML.

### Modélisation de l'écoulement rasant

L'écoulement porteur est calculé numériquement en utilisant le logiciel CFD *Fluent* (voir Fig 4.14). Cette approche permet de définir un écoulement réaliste dans le tube et au niveau de la ter-

minaison, palliant ainsi l'absence de mesures du profil d'écoulement dans le conduit. Pour cela, un modèle turbulent *k-epsilon* incompressible, respectant une condition de non-glissement à la paroi, est appliqué. Cette condition impliquant une vitesse d'écoulement nulle à la paroi est souvent utilisée en représentation eulérienne [83–85] car elle simplifie grandement l'implémentation de la condition de Myers (Eq.(1.15)) en la réduisant à une simple formulation d'impédance  $Z = p^E / v_n^E$ .

Pour effectuer le calcul de l'écoulement sous *Fluent*, la valeur de la vitesse axiale moyenne du flux d'air mesuré dans le conduit expérimental est imposée sur la section d'entrée ( $S_1$ ) du conduit numérique considéré complètement rigide. Les résultats obtenus sous *Fluent* sont ensuite introduits dans le code de calcul à chaque nœud du maillage. Pour un écoulement  $M_0 = \pm 0.25$ , le profil de l'écoulement sur la section  $S_2$  est présenté Fig 4.15.

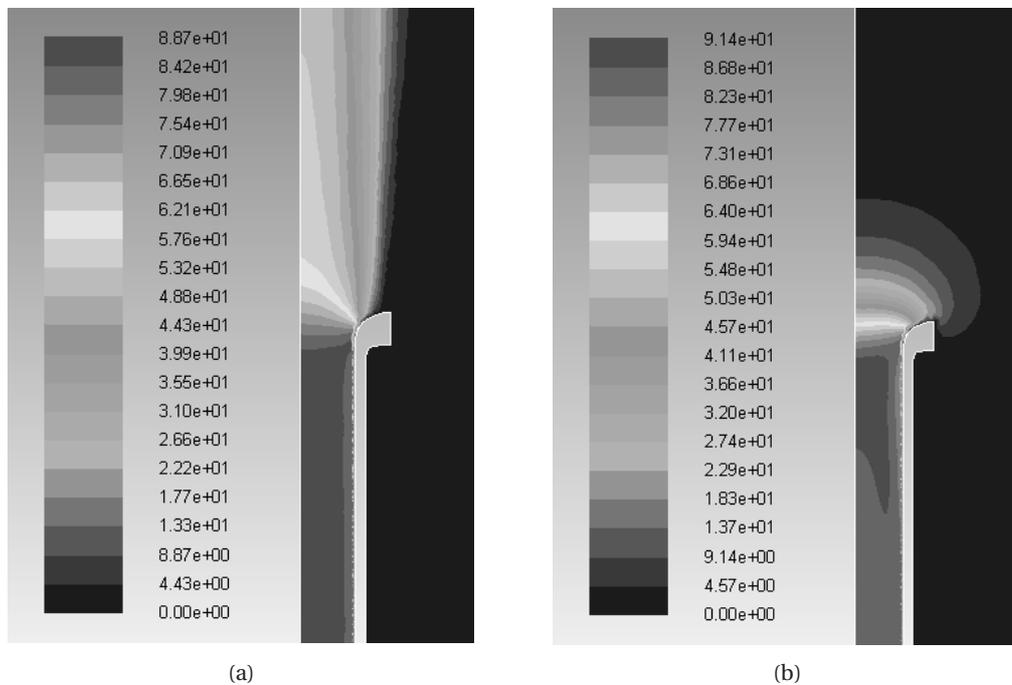


Fig. 4.14 Module de la vitesse d'écoulement (en  $m.s^{-1}$ ) calculée par *Fluent* dans le conduit: (a) écoulement positif pour  $M_0 = +0.25$ ; (b) écoulement négatif pour  $M_0 = -0.25$ .

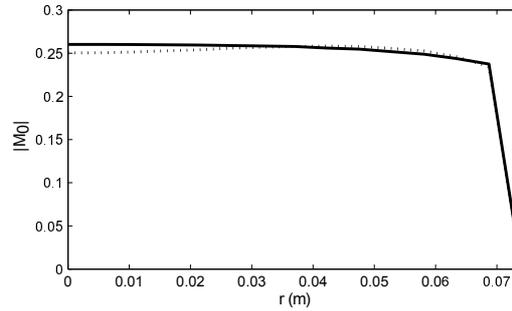


Fig. 4.15 Profil calculé par *Fluent* de la vitesse d'écoulement (module en nombre de Mach) au niveau de la section de mesure  $S_2$  pour  $M_0 = +0.25$  (trait continu) et  $M_0 = -0.25$  (trait discontinu).

#### 4.2.2 Calcul numérique et comparaison essais/calculs

Le protocole du calcul numérique et de la confrontation essais/calculs est synthétisé par l'organigramme Fig 4.16 et détaillé par la suite.

##### Implémentation de la pression acoustique expérimentale sur la section d'entrée

La procédure de calcul consiste dans un premier temps à prendre le champ de pression acoustique expérimental mesuré sur la section d'entrée  $S_1$  à une fréquence  $f$  donnée. La variation de la pression moyenne calculée sous *Fluent* étant négligeable, ce champ de pression acoustique (eulérien) est assimilable à un champ lagrangien et ne nécessite aucune transformation. La figure 4.17 donne un exemple de champ de pression acoustique (partie réelle en Pa) mesuré sur la section  $S_1$  dans le cas d'un tronçon test rigide sans écoulement à une fréquence de 1920 Hz. A cette fréquence, seuls les modes (0,0), (-1,0) et (+1,0) sont propagatifs (voir Tab. 4.2).

##### Décomposition modale azimutale

Une décomposition modale azimutale est réalisée sur ce champ de pression par transformée de Fourier spatiale. En effet, sachant que le champ de pression à l'intérieur du conduit peut s'écrire

$$p(r, \theta, z, f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_m(r, z, f) e^{im\theta}, \quad (4.7)$$

la pression modale azimutale peut s'exprimer par

$$p_m(r, z, f) = \frac{1}{2\pi} \langle p(r, \theta, z, f) | e^{im\theta} \rangle \quad (4.8)$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  désigne un produit scalaire. En pratique, cette décomposition est faite pour  $-7 \leq m \leq +7$ . La figure 4.18 présente les profils de pression issus de la décomposition de l'exemple précédent.

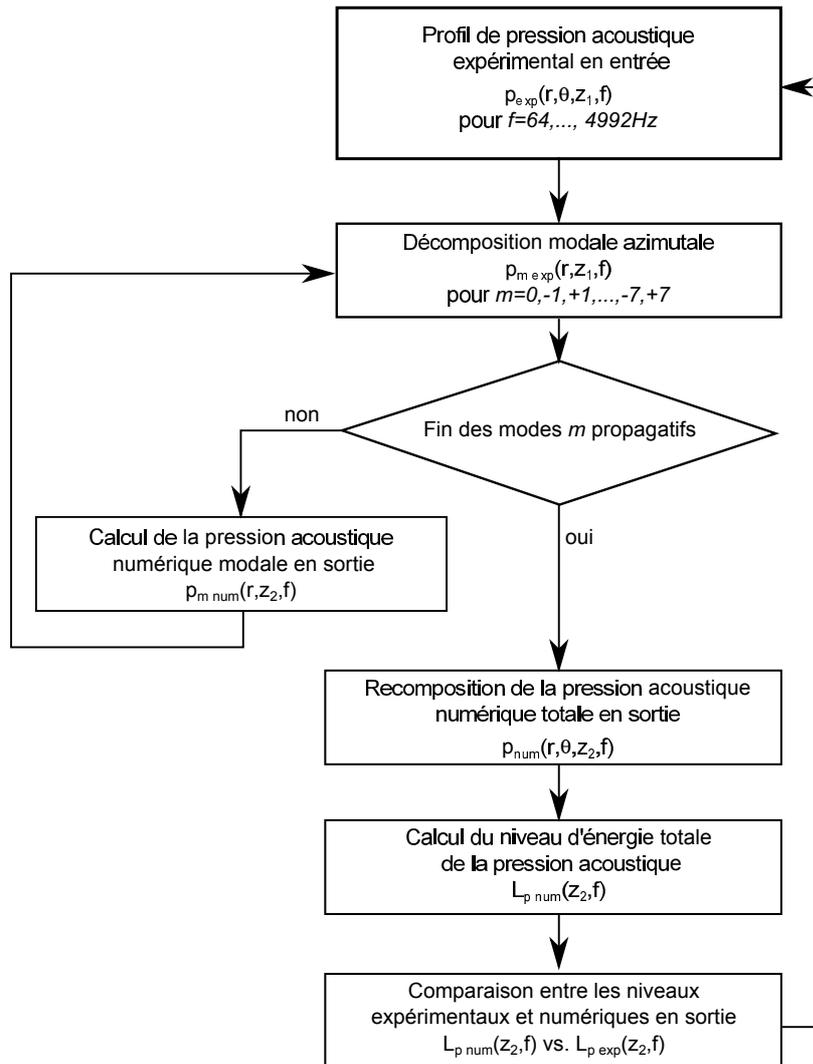


Fig. 4.16 Organigramme du protocole de calcul.

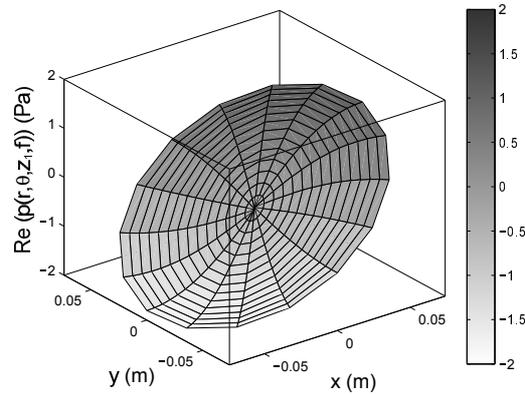


Fig. 4.17 Partie réelle de la pression acoustique expérimentale (en Pa) mesurée sur la section  $S_1$  dans le cas d'un tronçon test rigide sans écoulement à 1920 Hz.

Seuls les modules de trois modes sont présentés, à savoir  $m = -1$ ,  $m = 0$  et  $m = +1$ , les autres modes étant non propagatifs.

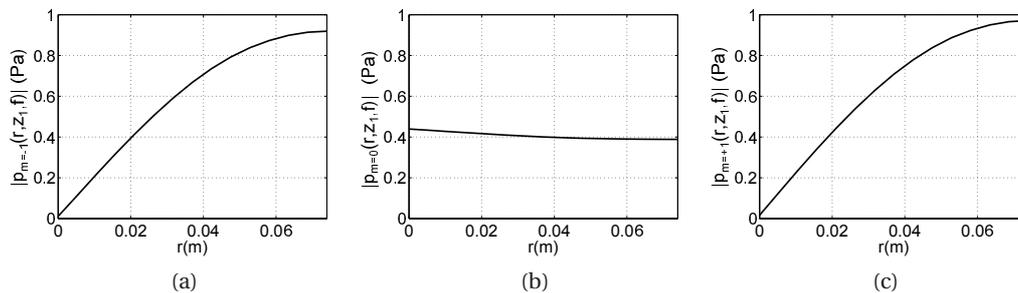


Fig. 4.18 Module de la pression acoustique expérimentale (en Pa) mesurée sur la section  $S_1$  après décomposition azimutale dans le cas d'un tronçon test rigide sans écoulement à 1920 Hz pour: (a)  $m = -1$ ; (b)  $m = 0$ ; (c)  $m = +1$ .

### Calcul de la pression acoustique numérique modale

Ces profils sont ensuite imposés sur les nœuds de la section d'entrée du conduit numérique, et un calcul est effectué pour chaque mode  $m$  propagatif (voir Fig 4.19). Le modèle numérique met en évidence l'importance des réflexions acoustiques qui ont lieu dans le tube. Ces réflexions, qui se traduisent par des ondes stationnaires, sont générées à la fois par la rupture d'impédance avec le domaine extérieur et avec le traitement acoustique. Leur présence impose donc une certaine précision au niveau de la géométrie du modèle et du positionnement des sections de mesures au risque d'obtenir des écarts importants avec les résultats expérimentaux. La résolution du problème permet entre autres d'obtenir un profil de pression radial sur la section  $S_2$  du conduit (voir

Fig 4.20). Les imprécisions géométriques du modèle numérique et les imperfections du conduit expérimental peuvent être responsables de certains écarts de résultats (Fig 4.20 (b)).

Concernant le rayonnement, la démarche est identique à la précédente, à la différence près que la section de mesure correspond à la section  $S_3$  située en dehors du conduit acoustique (voir Fig 4.12 (b)). Concernant le rayonnement, la démarche est identique à la précédente, à la différence près que la section de mesure correspond à la section  $S_3$  située en dehors du conduit acoustique (voir Fig 4.12 (b)).

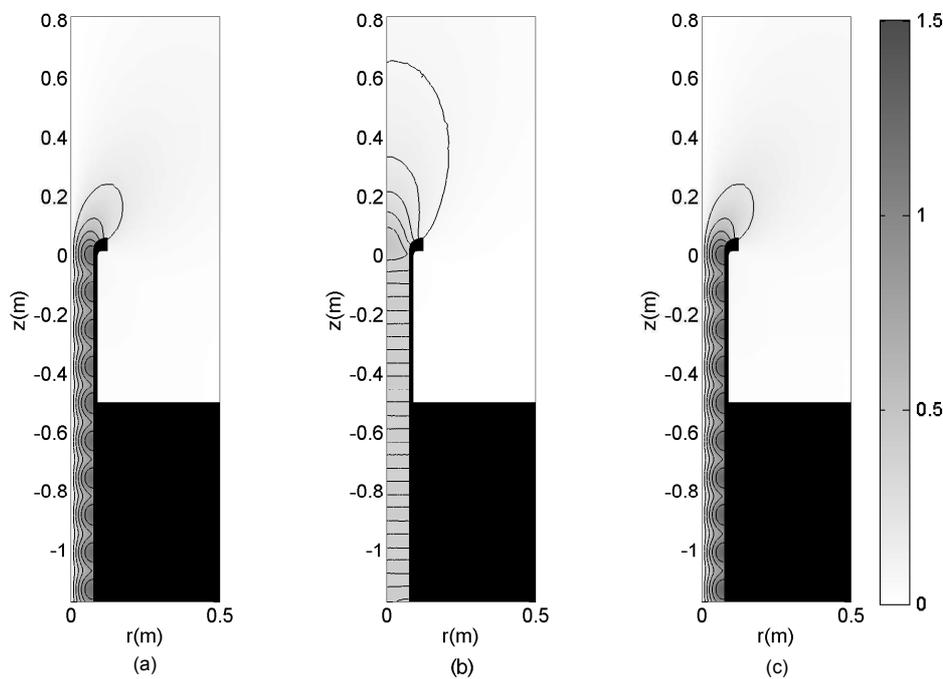


Fig. 4.19 Module de la pression acoustique numérique (en Pa) par calcul FEM dans le cas d'un tronçon test rigide sans écoulement à 1920 Hz avec: (a)  $m = -1$ ; (b)  $m = 0$ ; (c)  $m = +1$ .

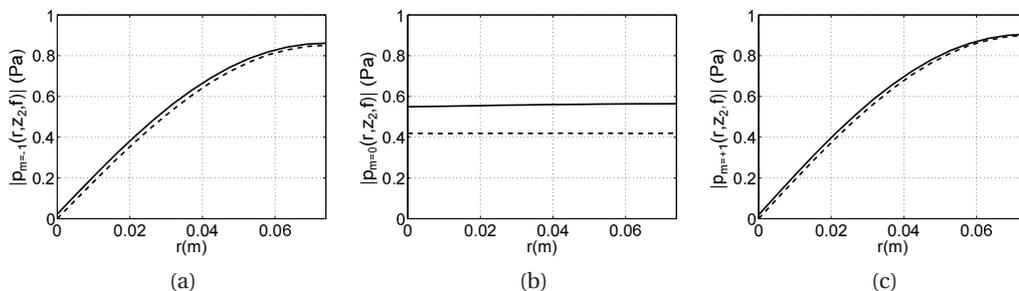


Fig. 4.20 Module de la pression acoustique (en Pa) sur la section  $S_2$ , expérimentale (traits continus) et numérique (traits discontinus) après décomposition azimutale dans le cas d'un tronçon test rigide sans écoulement à 1920 Hz pour: (a)  $m = -1$ ; (b)  $m = 0$ ; (c)  $m = +1$ .

### Recomposition de la pression acoustique numérique totale

Le champ de pression total est ensuite recomposé sur la section  $S_2$  à partir de ces profils radiaux en utilisant la formule

$$p(r, \theta, z_2, f) = \sum_{m=-1}^{+1} p_m(r, z_2, f) e^{im\theta}. \quad (4.9)$$

La figure 4.21 montre la partie réelle du champ de pression numérique et expérimental obtenue sur la section  $S_2$ . La recombinaison du champ de pression total est aussi pratiquée au niveau de la section de l'antenne ( $S_3$ ).

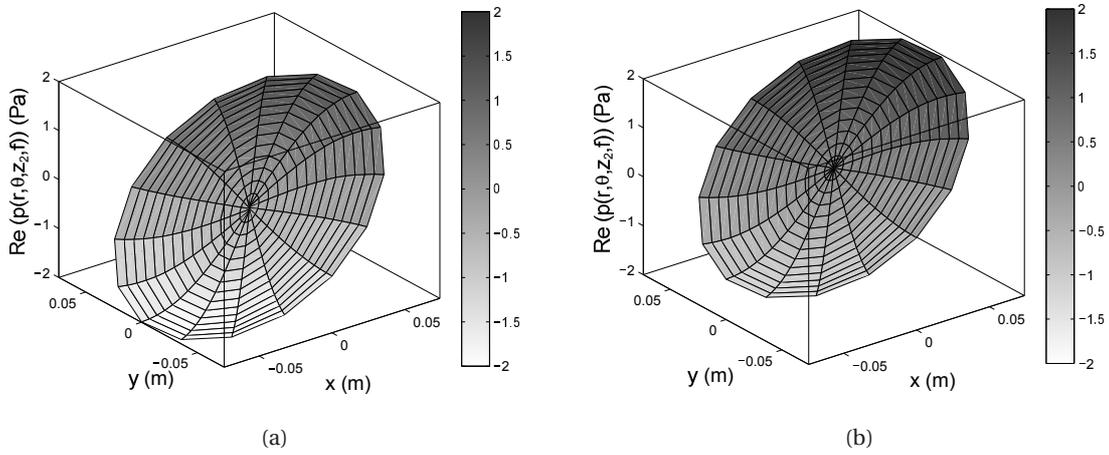


Fig. 4.21 Partie réelle de la pression acoustique (en Pa) sur la section  $S_2$  dans le cas d'un tronçon rigide sans écoulement à 1920 Hz avec: (a) la mesure; (b) le calcul numérique.

### Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

**Conduit** La confrontation des résultats expérimentaux et numériques dans le conduit est réalisée par comparaison du niveau d' "énergie totale" de la pression acoustique [79] qui est donné par

$$L_p(z_2, f) = 10 \log \left( \frac{E_T^p(z_2, f)}{S \cdot (2 \cdot 10^{-5})^2} \right) \text{ en dB} \quad (4.10)$$

avec

$$E_T^p(z_2, f) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} |p(r, \theta, z_2, f)|^2 r dr d\theta \quad (4.11)$$

et  $S$  l'aire de la section interne du conduit.

**Antenne** La confrontation essais/calculs du rayonnement acoustique est réalisée en comparant directement le module du champ de pression mesuré sur toute la surface de l'antenne (en dB) à

celui du champ de pression numérique recomposé sur la section  $S_3$ . Pour cela, les 60 points de mesures expérimentaux sont interpolés sur le maillage du modèle numérique.

### 4.3 Validation de l'approche sur un tronçon rigide non traité

Dans cette section, le protocole de corrélation essais/calculs développé est validé dans la configuration d'un tronçon rigide (non traité) sans écoulement, puis avec un écoulement positif<sup>1</sup> et négatif<sup>2</sup> ( $M_0 = \pm 0.25$ ). L'étude du rayonnement acoustique n'a pu être effectuée que dans le cas sans écoulement et avec un écoulement négatif, le cas positif générant trop de turbulences sur les micros de l'antenne.

#### 4.3.1 Cas sans écoulement

La figure 4.22 montre les champs de pression acoustique numériques et expérimentaux sur la section  $S_2$  du conduit (niveau de pression en dB) pour trois fréquences (832 Hz, 1856 Hz et 2496 Hz). A 832 Hz, seul le mode plan est propagatif. Dans ce cas, les amplitudes de niveau sont très proches entre elles (écarts inférieurs à 2 dB). A 1856 Hz, les modes (0,0) et ( $\pm 1,0$ ) sont propagatifs. Là encore, le modèle numérique prédit correctement le comportement de l'onde, aussi bien concernant la géométrie des isocontours qu'au niveau de l'amplitude mesurée. A 2496 Hz, le grand nombre de modes propagatifs ((0,0), ( $\pm 1,0$ ) et ( $\pm 2,0$ )) rend le champ plus complexe, et plus difficilement comparable. Les amplitudes de niveau de la simulation numérique restent tout de même proches des mesures.

La figure 4.23 présente les courbes de comparaison (en dB) entre:

- le niveau d'énergie totale de la pression acoustique **numérique/ expérimentale** sur la section d'**entrée**;
- le niveau d'énergie **expérimental** sur la section de **sortie**;
- le niveau d'énergie **numérique** sur la section de **sortie**.

Les lignes verticales signalent les fréquences de coupure des modes acoustiques (voir Tab 4.2). Elles sont déterminées analytiquement en prenant en compte l'influence de la température sur la célérité du son (grâce à une sonde de température située à l'extérieur du conduit) et la vitesse de l'écoulement le cas échéant.

---

<sup>1</sup>L'écoulement est dit positif lorsque son sens de propagation est le même que celui de l'onde acoustique.

<sup>2</sup>L'écoulement est dit négatif lorsque son sens de propagation et celui de l'onde acoustique sont inversés.

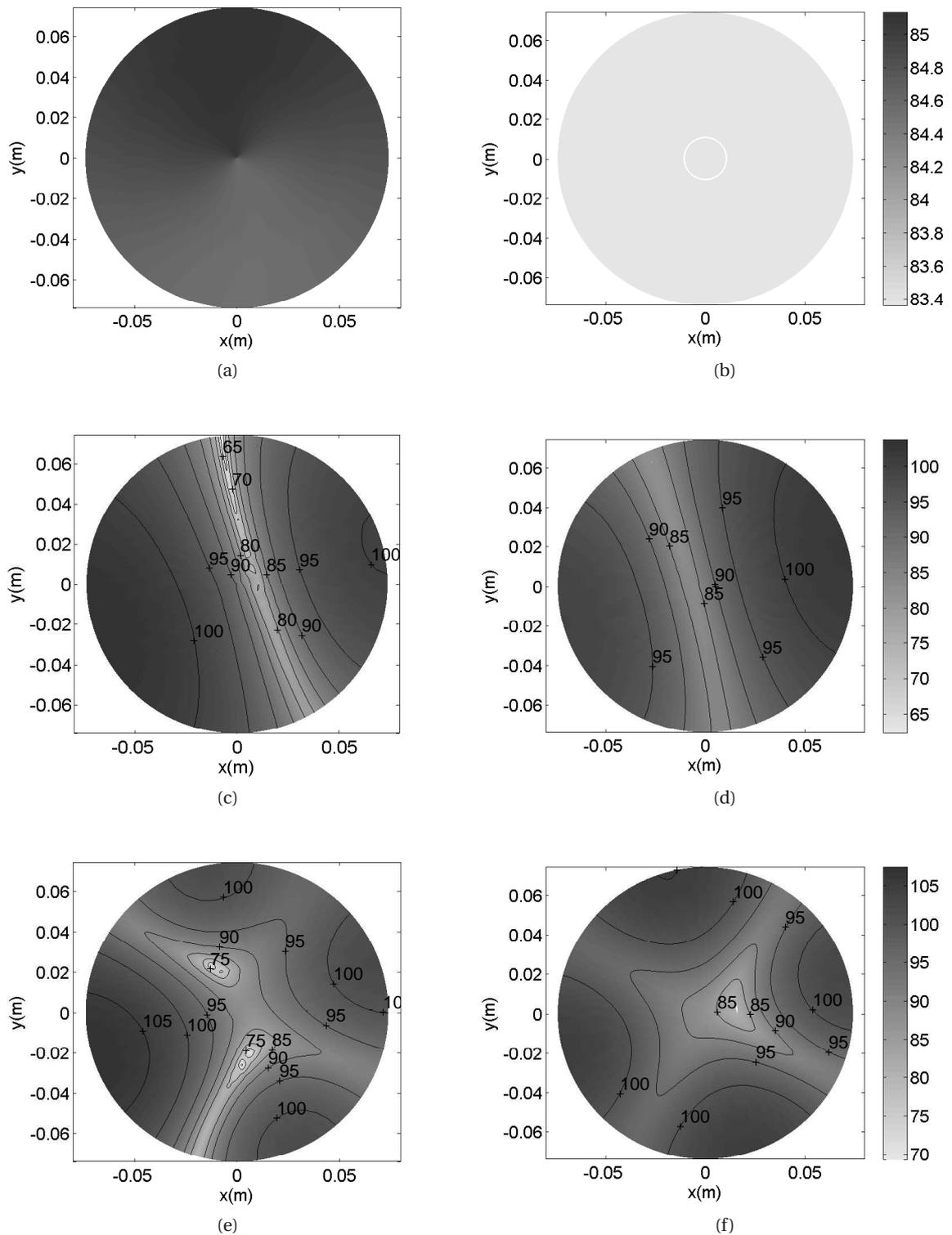


Fig. 4.22 Niveau de pression acoustique (module en dB) sur la section  $S_2$  du conduit sans écoulement avec:

à 832 Hz: (a) mesure, (b) simulation numérique;

à 1856 Hz: (c) mesure, (d) simulation numérique;

à 2496 Hz: (e) mesure, (f) simulation numérique.

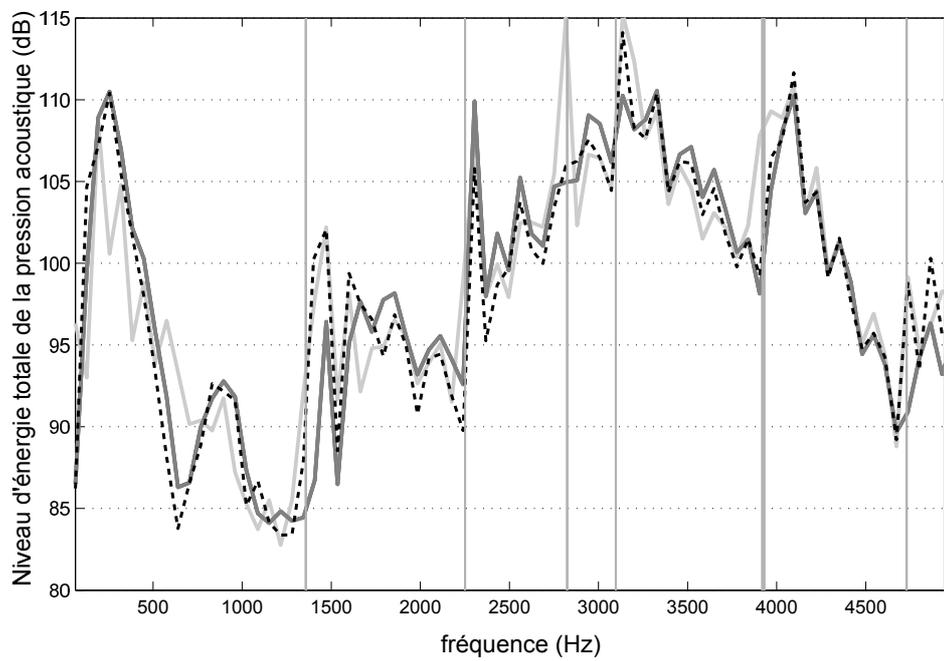


Fig. 4.23 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test rigide sans écoulement:

- mesure sur la section  $S_1$  (en gris —); sur la section  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  (en noir --).

Sur l'ensemble de la bande d'étude (de 64 à 4992 Hz), les calculs réalisés montrent un très bon accord entre les niveaux d'énergie expérimentaux et numériques sur la section de sortie, même en dehors de la bande passante de la source, c'est-à-dire en dessous 200 Hz. En revanche, proche des fréquences de coupure, des écarts importants peuvent apparaître car la mesure et la simulation ne sont pas représentatives en raison des différents phénomènes physiques qui surviennent (formation du mode, longueur d'onde infinie... ). De plus, les imprécisions géométriques au niveau du modèle numérique, les imperfections dans le conduit expérimental, ainsi que les phénomènes de vibration des parois et de fuite acoustique (non pris en compte par le modèle numérique) peuvent expliquer certains écarts de résultats.

La figure 4.24 montre les résultats numériques et expérimentaux du rayonnement acoustique sur l'antenne (niveau de pression en dB) pour trois fréquences (832 Hz, 1856 Hz et 2496 Hz). A 832 Hz, bien que les isocontours expérimentaux ne soient pas très circulaires (notamment en raison des réflexions acoustiques sur le sol), une similarité entre les deux champs est observée, en particulier concernant les amplitudes des niveaux. A 1856 Hz, le modèle numérique simule correctement le comportement de l'onde en dehors du conduit, aussi bien pour la répartition que pour l'amplitude du niveau acoustique. En revanche à 2496 Hz, il est difficile d'obtenir un champ expérimental assez net pouvant être comparé au modèle numérique. Cela s'explique notamment par le grand nombre de modes propagatifs qui rendent le champ plus complexe, et par le nombre assez limité de microphones dont dispose l'antenne. Les amplitudes des niveaux acoustiques du modèle numérique restent malgré tout cohérentes avec les mesures.

### 4.3.2 Cas avec écoulement

La figure 4.25 présente les mesures du niveau acoustique du bruit généré par l'écoulement (autospectre) réalisées dans le tube sur les sections  $S_1$  et  $S_2$ . Le bruit produit est relativement important en particulier à basse fréquence et aux fréquences de coupure du conduit (apparition de pics). Le passage de l'écoulement sur les sondes de mesures génère du bruit supplémentaire, surtout dans le cas d'un écoulement positif pour lequel le sens de propagation n'est pas adapté à l'orientation des micros et de leurs coiffes (voir Fig 4.4 (b)). Le fait que le niveau mesuré sur la section  $S_1$  soit plus élevé que sur la section  $S_2$  s'explique par la formation de turbulences à proximité de la section  $S_1$ , provoquées par un léger décentrage entre deux tronçons. L'interspectre entre le signal du microphone et celui de référence réalisé au cours du traitement du signal (section 4.1.4) permet de débruiter suffisamment le champ de pression acoustique pour assurer des résultats convenables.

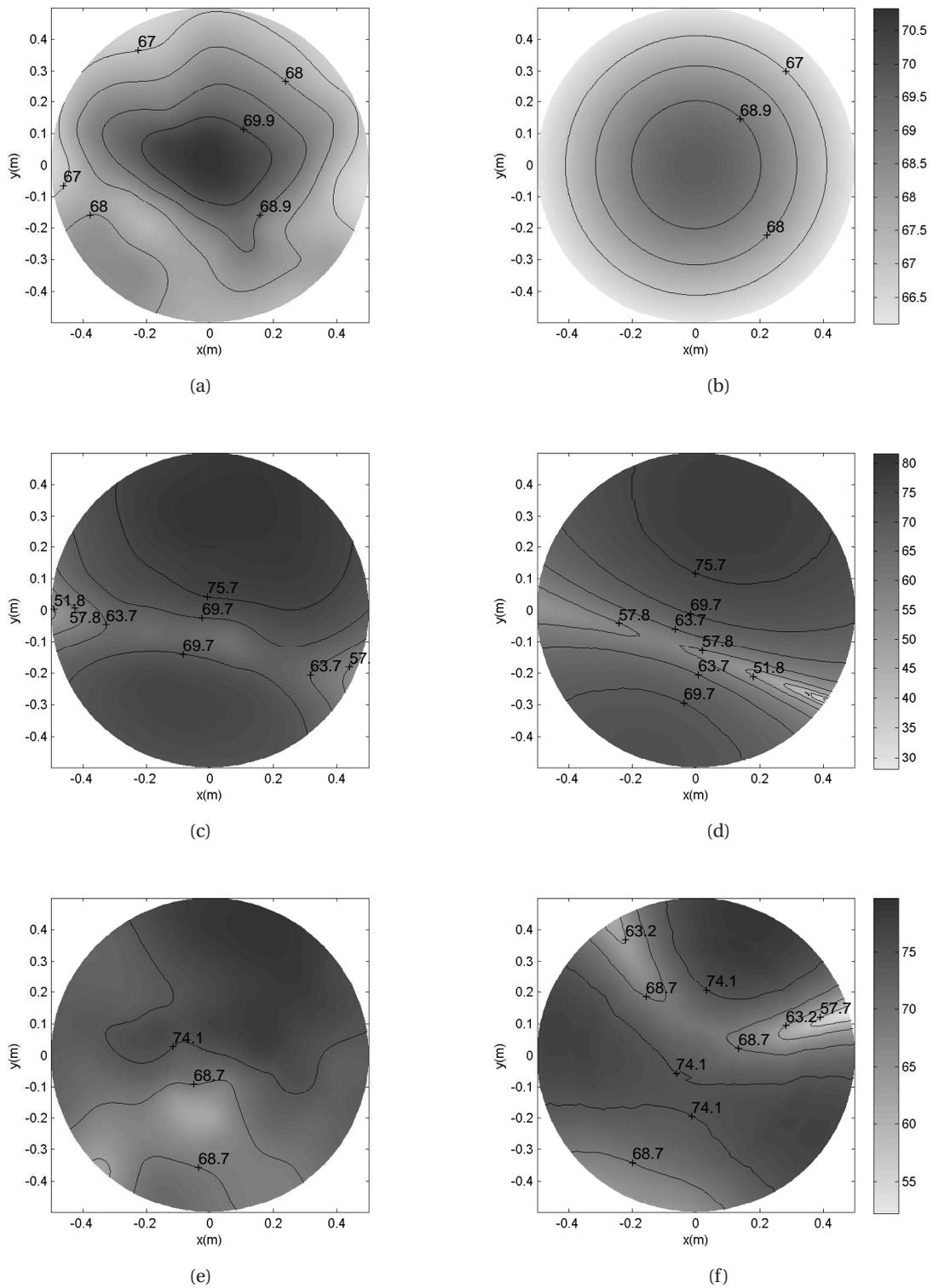


Fig. 4.24 Niveau de pression acoustique (en dB) rayonné sur l'antenne sans écoulement avec:  
 à 832 Hz: (a) mesure, (b) simulation numérique;  
 à 1856 Hz: (c) mesure, (d) simulation numérique;  
 à 2496 Hz: (e) mesure, (f) simulation numérique.

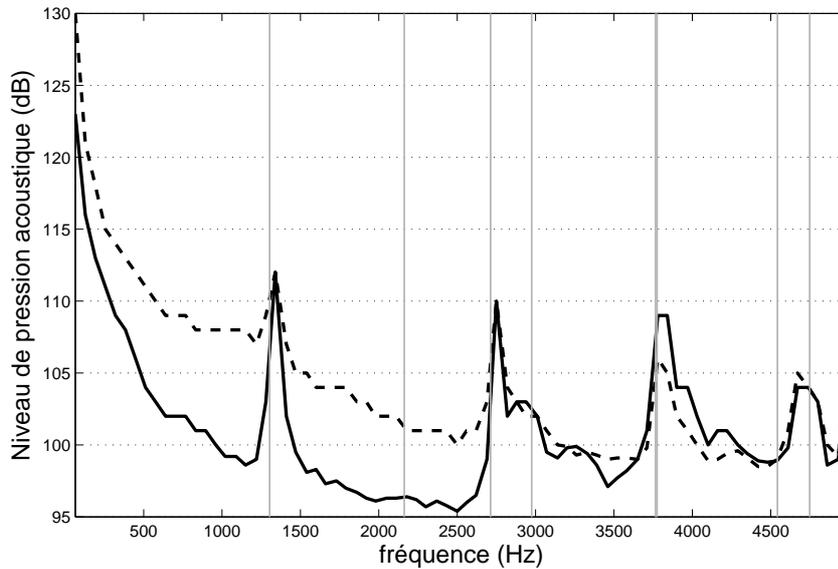


Fig. 4.25 Niveau du bruit de l'écoulement (en dB) mesuré au centre du conduit pour  $M_0 = +0.25$  dans la section:  $S_1$  (trait discontinu);  $S_2$  (trait continu).

La figure 4.26 montre les champs de pression acoustique, numériques et expérimentaux, sur la section  $S_2$  du conduit (niveau de pression en dB) pour trois fréquences (832 Hz, 1856 Hz et 2496 Hz) pour un écoulement négatif  $M_0 = -0.25$ . Malgré l'écoulement, les résultats restent satisfaisants concernant les isocontours et les niveaux, même à haute fréquence.

La figure 4.27 présente les résultats numériques et expérimentaux dans la configuration d'un conduit rigide en présence d'un écoulement axial positif  $M_0 = +0.25$  (a) et négatif  $M_0 = -0.25$  (b). Dans les deux cas, les résultats sont satisfaisants avec des écarts inférieurs à 3 dB sur une large bande de fréquence. Concernant le cas de l'écoulement positif, la mauvaise orientation des sondes dans cette configuration d'écoulement peut expliquer les écarts de résultats entre la simulation et l'expérience à basse fréquence.

La confrontation essais/calculs du rayonnement acoustique sur l'antenne est présentée figure 4.28 pour un écoulement négatif  $M_0 = -0.25$ . L'antenne est assez éloignée du conduit pour ne pas subir les effets d'aspiration. Par conséquent, les turbulences engendrées par l'écoulement négatif sur l'antenne sont faibles. Finalement, malgré une vitesse d'écoulement importante dans le conduit, les résultats numériques et expérimentaux restent comparables avec des répartitions et des amplitudes de niveaux de pression cohérents.

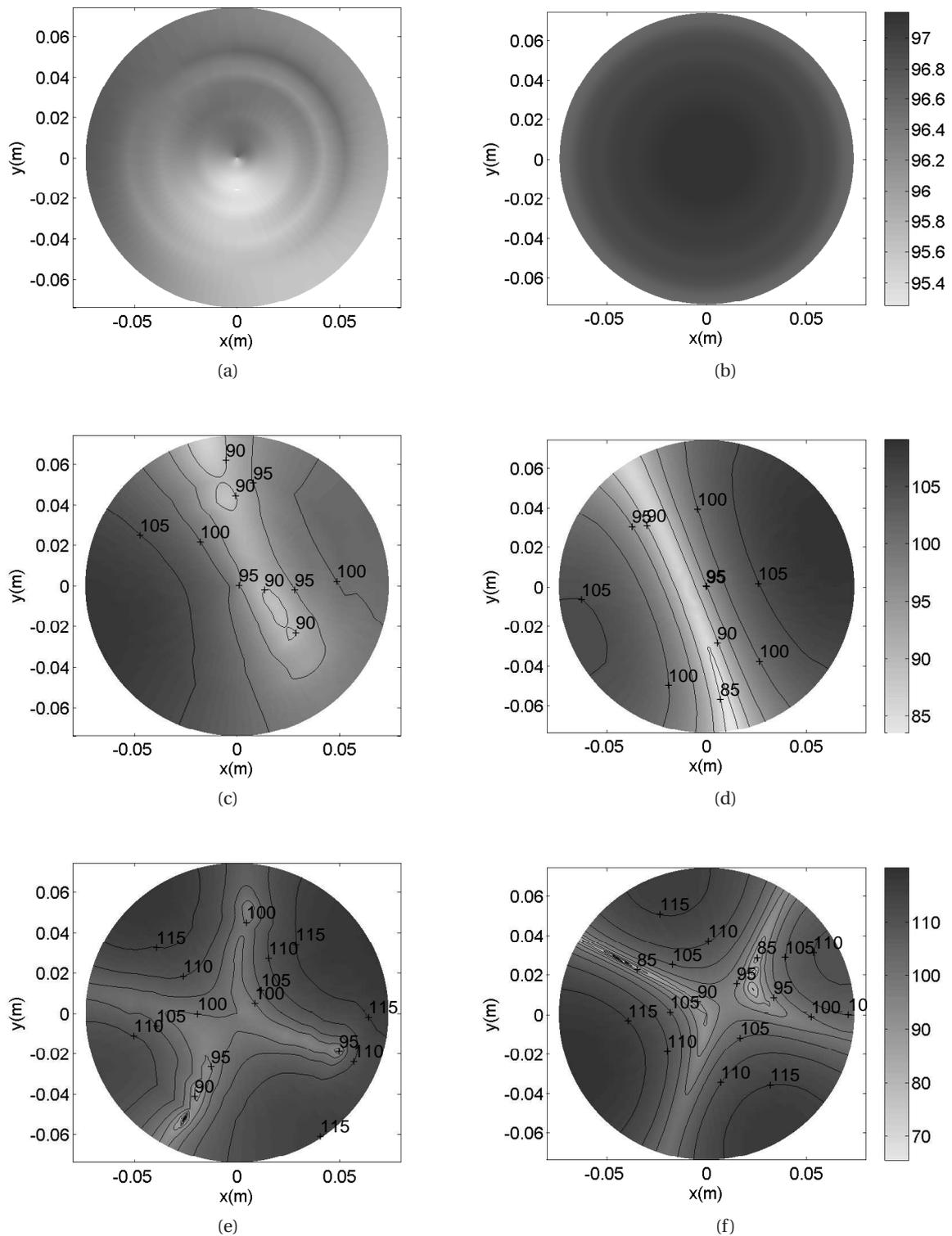
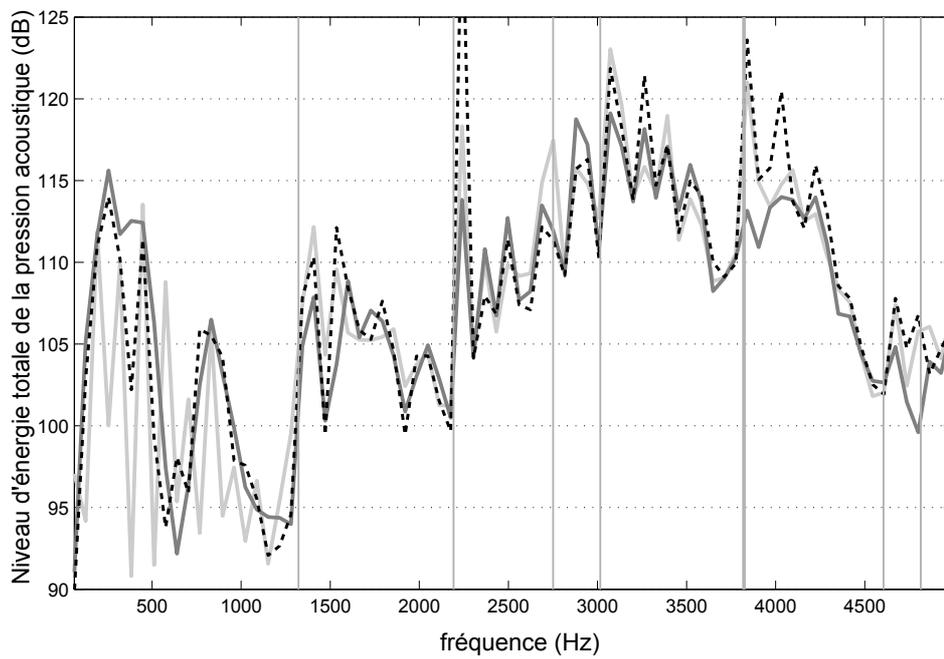
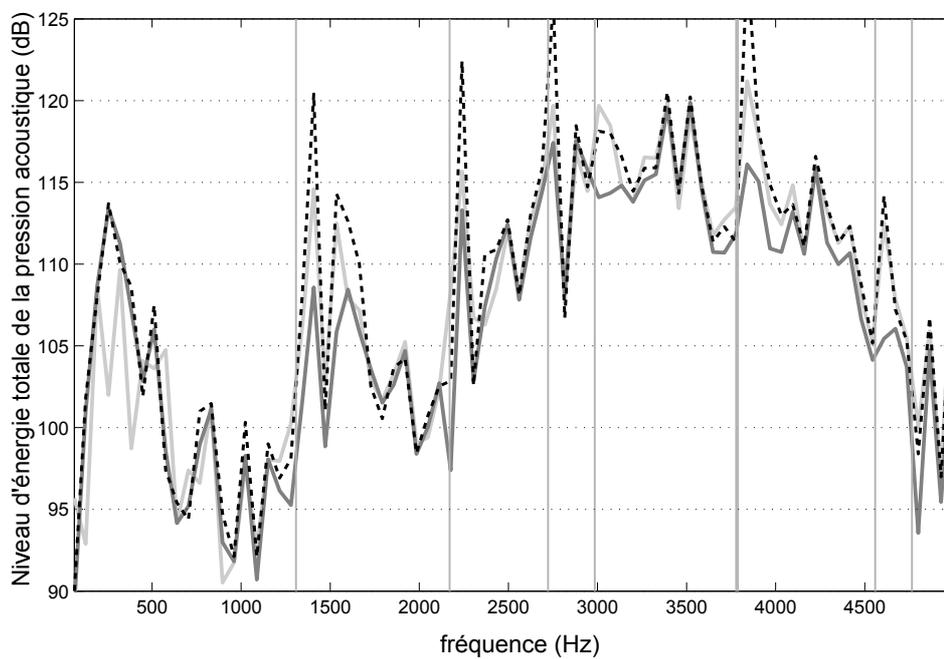


Fig. 4.26 Niveau de pression acoustique (module en dB) sur la section  $S_2$  du conduit pour un écoulement  $M_0 = -0.25$  avec:  
 à 832 Hz: (a) mesure, (b) simulation numérique;  
 à 1856 Hz: (c) mesure, (d) simulation numérique;  
 à 2496 Hz: (e) mesure, (f) simulation numérique.



(a)



(b)

Fig. 4.27 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test rigide et un écoulement: (a) positif  $M_0 = +0.25$ ; (b) négatif  $M_0 = -0.25$ :

- mesure sur la section  $S_1$  (en gris -); sur la section  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  (en noir --).

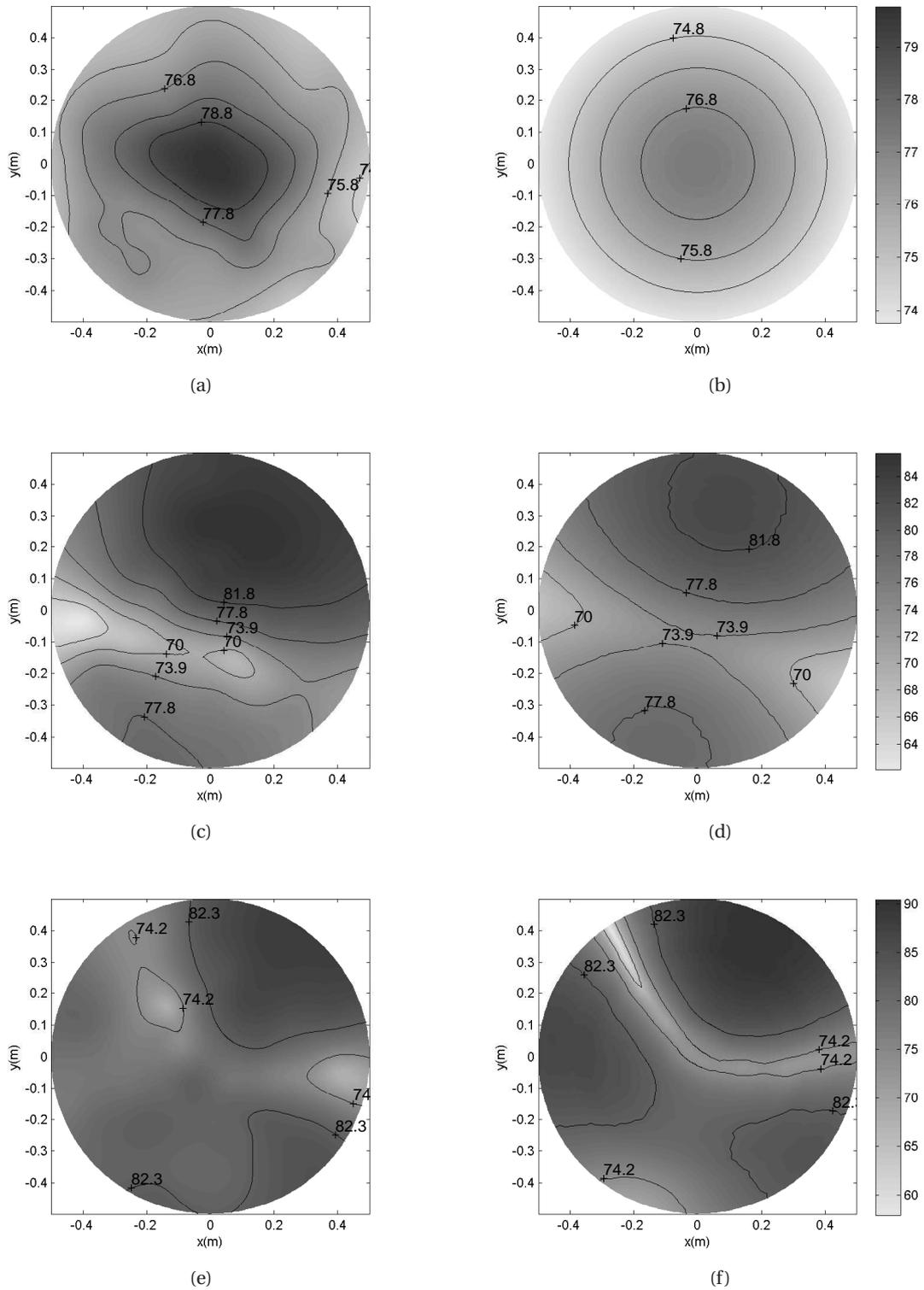


Fig. 4.28 Niveau de pression acoustique (en dB) rayonné sur l'antenne pour un écoulement  $M_0 = -0.25$  avec:  
à 832 Hz: (a) mesure, (b) simulation numérique;  
à 1856 Hz: (c) mesure, (d) simulation numérique;  
à 2496 Hz: (e) mesure, (f) simulation numérique.

## 4.4 Conclusion

Les résultats exposés témoignent de la validation de la méthode développée avec des écarts inférieurs à 3 dB entre les résultats numériques et expérimentaux à l'intérieur du conduit (section  $S_2$ ). En outre, la corrélation des résultats numériques et expérimentaux sur le rayonnement acoustique du conduit constitue une validation supplémentaire de l'ensemble de la méthode. Finalement, la qualité des résultats obtenus dans le cas d'un tronçon test rigide fait de cette méthode un moyen relativement robuste, simple et efficace de validation de modèles d'impédance de traitements acoustiques.

## Chapitre 5

# Application de l'approche pour la validation de modèles d'impédance

Ce chapitre présente les principaux résultats de validation de modèles d'impédance acoustique appliqués aux traitements introduits précédemment, à savoir un SDOF muni d'une plaque perforée, et un autre muni d'une plaque microperforée. Les cas sans écoulement, avec écoulement positif et négatif ( $M_0 = \pm 0.25$ ) sont exposés. Les autres résultats ( $M_0 = \pm 0.1; \pm 0.2$ ) sont mis en Annexe C.

### 5.1 Traitement perforé

Parmi tous les modèles d'impédance acoustique présentés, seuls ceux de Yu et de Guess sont adaptés à l'étude de plaques perforées ( $d > t$ ). Les caractéristiques du traitement perforé testé sont données Tab 4.1 p. 64. Le taux de perforation  $\sigma_{macro}$  du liner testé est beaucoup plus faible que ceux des traitements utilisés par les auteurs pour valider leur modèle (voir Tab 3.2 p. 57). En effet,  $\sigma_{macro} = 1.76\%$  tandis que  $\sigma_{Guess} \in [20\%; 25\%]$  et  $\sigma_{Yu} \in [7.7\%; 8.2\%]$ .

#### 5.1.1 Cas sans écoulement

Les figures 5.1 (a) et 5.1 (b) montrent respectivement les courbes de résistance réduite  $r$  et de réactance réduite  $\chi$  fournies par les modèles de Yu et de Guess appliqués au SDOF perforé sans écoulement. Pour cette configuration, le modèle de Guess prédit une résistance légèrement plus élevée que celui de Yu à haute fréquence, avec une fréquence d'accord (à laquelle la réactance s'annule) un peu plus élevée.

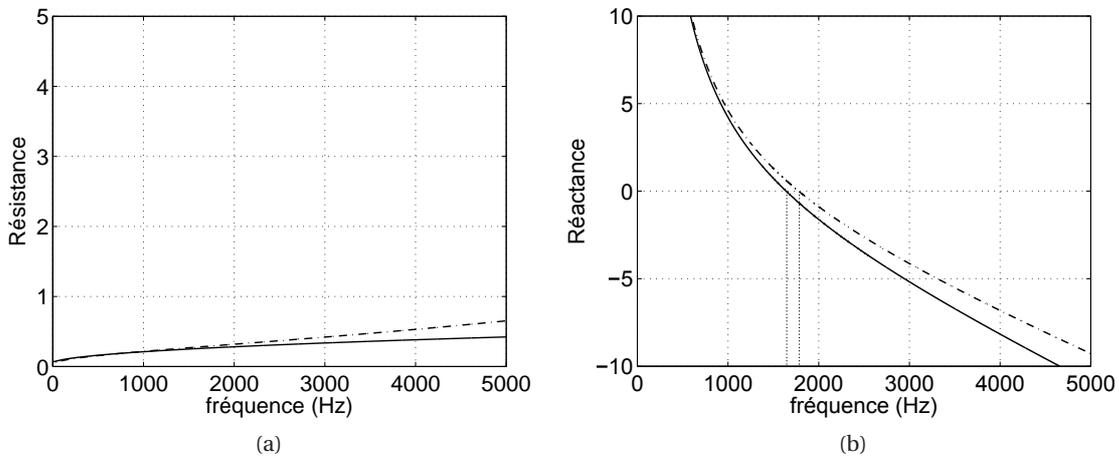


Fig. 5.1 Valeurs théoriques de la résistance réduite (a) et de la réactance réduite (b) du SDOF perforé sans écoulement pour le modèle de : Yu (—); Guess (---).

Dans la suite, ces modèles d'impédance sont introduits dans le code de calcul modélisant le banc expérimental, et les résultats numériques sont confrontés aux mesures. La figure 5.2 présente les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour le tronçon test perforé sans écoulement. En comparant les résultats expérimentaux en amont (section  $S_1$ ) et en aval (section  $S_2$ ), on note que la plage d'efficacité du liner se situe sur l'intervalle  $1200 \text{ Hz} < f < 3600 \text{ Hz}$ . Au-delà de 4600 Hz (qui correspond approximativement à la fréquence de coupure de la cavité du SDOF) la réaction localisée n'est plus assurée, d'où l'écart de niveau entre les deux sections de mesure.

Hors de la plage d'efficacité du traitement, les niveaux simulés numériquement sur la section  $S_2$  sont très similaires à ceux mesurés, quel que soit le modèle d'impédance. Sur la plage d'efficacité, les résultats des mesures et les simulations numériques s'accordent correctement. La différence d'amplitude au niveau du pic d'absorption (vers 1600 Hz) s'explique par des pressions très faibles dont le moindre écart de valeur est amplifié par la représentation en décibel. La qualité des résultats atteste de la validité des modèles d'impédance sans écoulement, malgré les différences de porosité entre le traitement employé et ceux utilisés par les auteurs. Le modèle de Yu s'accorde mieux à la mesure que celui de Guess pour cette configuration, avec un écart de l'ordre de 2 dB.

Il est intéressant de noter que bien que la plupart des modèles d'impédance acoustique ne soient validés qu'en onde plane par leurs auteurs, ils conviennent aussi en condition multimodale avec l'hypothèse d'une réaction localisée [86]. En effet, la figure 5.3 montre bien que le modèle d'impédance utilisé (ici celui de Yu) permet d'obtenir des résultats numériques en bon accord

avec l'expérimental pour le mode plan ( $m = 0$  pour  $f < 2800\text{Hz}$ ), mais aussi pour les autres modes se propageant dans le conduit.

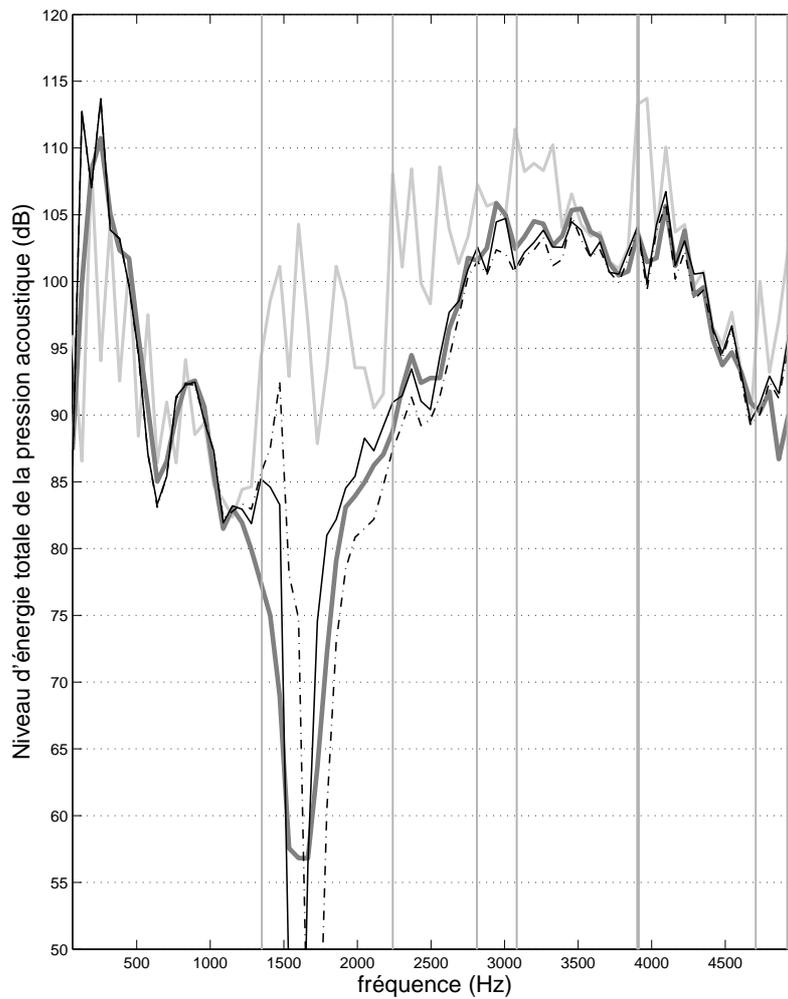
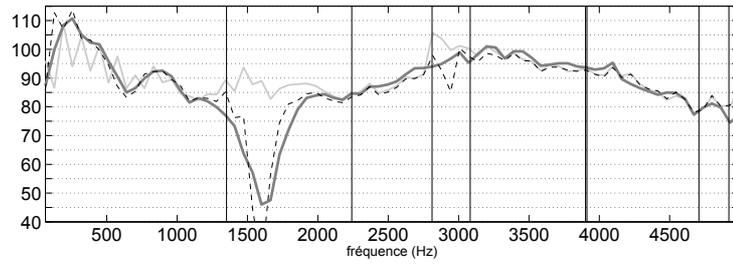
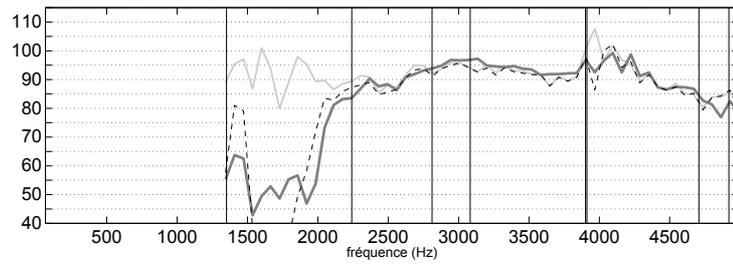


Fig. 5.2 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé sans écoulement:

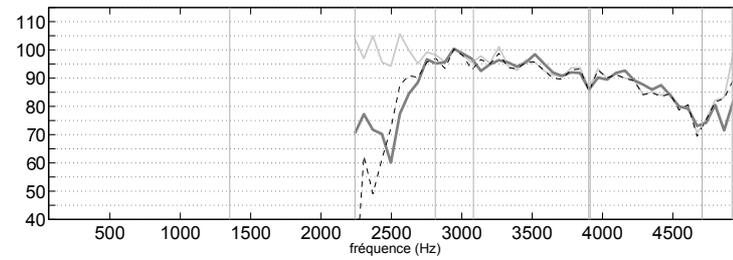
- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir -); Guess (en noir - -).



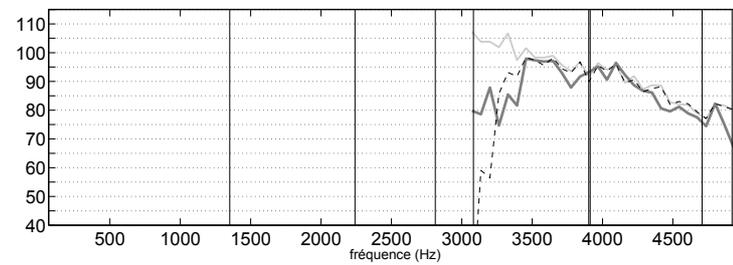
(a)  $m=0$



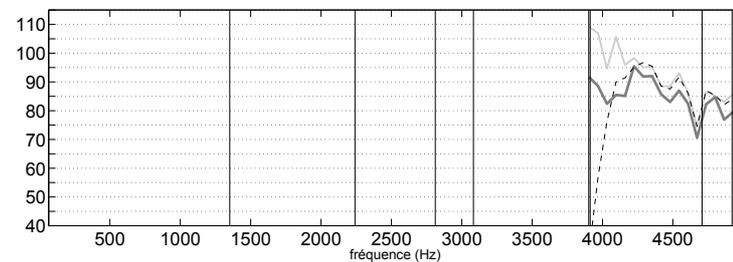
(b)  $m=1$



(c)  $m=2$



(d)  $m=3$



(e)  $m=4$

Fig. 5.3 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) par mode azimutal pour un tronçon test perforé sans écoulement:

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir - -).

### 5.1.2 Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.25$

L'influence de l'écoulement sur les modèles d'impédance acoustique est présentée Fig 5.4 pour  $M_0 = +0.25$ . Comparativement au cas sans écoulement, elle se traduit par une augmentation de la résistance et de la réactance. Ainsi, l'effet de l'écoulement sur l'absorption du liner n'est pas négligeable, avec une modification de l'amplitude, de la plage d'efficacité du traitement et de sa fréquence d'accord. Le modèle de Guess prédit une résistance plus élevée que celui de Yu et d'une réactance presque identique.

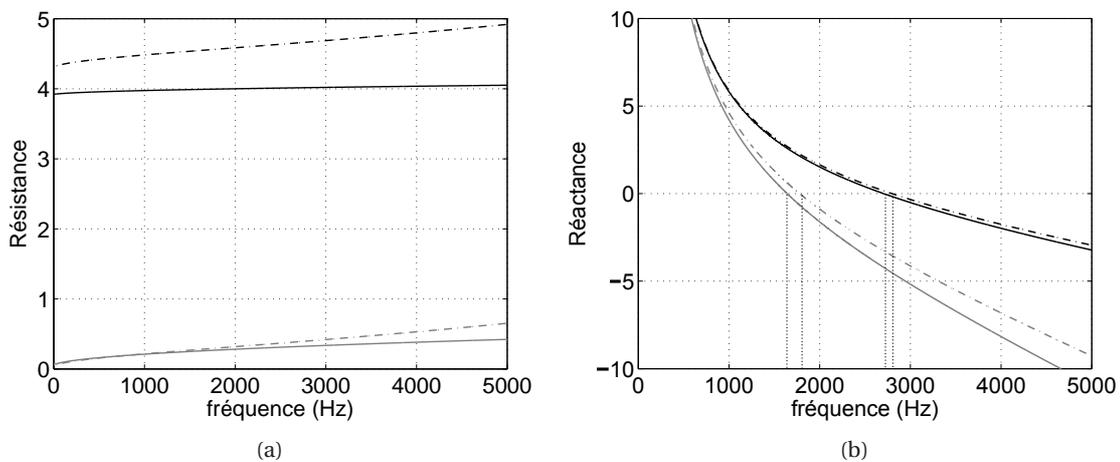


Fig. 5.4 Valeurs théoriques de la résistance réduite (a) et de la réactance réduite (b) du SDOF perforé avec un écoulement  $M_0 = +0.25$  pour le modèle de : Yu (en noir —); Guess (en noir - -). Sans écoulement (à titre de comparaison) pour le modèle de : Yu (en gris —); Guess (en gris - -).

L'application de ces modèles d'impédance au code de calcul pour le tronçon test perforé avec un écoulement  $M_0 = +0.25$  donne les résultats de la figure 5.5. L'efficacité du traitement commence à 1000 Hz et s'étend sur toute la plage d'étude. En dessous de 3800 Hz, les niveaux calculés s'accordent bien aux mesures. Au-delà, la simulation sous-estime la mesure d'environ 5 dB, ce qui révèle une certaine erreur entre l'impédance réelle du liner et celle prédite par les modèles. D'après les résultats montrés en Annexe C pour  $M_0 = +0.1$  et  $M_0 = +0.2$ , les modèles d'impédance convergent vers l'impédance réelle du traitement lorsque la vitesse d'écoulement augmente. Ainsi, les différences observées pourraient être dues au fait que la vitesse d'écoulement appliquée ne soit pas suffisamment élevée comparativement à la plage de validation utilisée par les auteurs de ces modèles ( $M_{0\text{ Guess}} = +0.5$  et  $M_{0\text{ Yu}} = +0.2, +0.3, +0.45, +0.5$ ).

Comme le montre la figure Fig 5.7, lorsque la fréquence augmente, le nombre de modes propagatifs augmente également. Ainsi, les écarts associés à chaque calcul modal s'accumulent et participent à l'écart du résultat global. De plus, la différence entre l'impédance du modèle et celle

du traitement a des effets d'autant plus défavorables sur les résultats que le mode est élevé: une différence d'environ 3 dB associée au mode  $m = 0$  à haute fréquence monte à 8 dB pour  $m = 4$ .

Les simulations numériques ont été réalisées en présence d'un écoulement porteur cisailé (issu d'un calcul *Fluent*) disposant d'une couche limite  $\delta_e = 5$  mm, soit environ 7% le rayon du conduit (voir profil Fig 4.15 p. 73). Afin de déterminer l'influence de la couche limite de cisaillement aérodynamique associée à une condition de non glissement (vitesse nulle à la paroi), les mêmes calculs sont effectués avec un écoulement porteur issu de la résolution de l'équation Laplace. Il s'agit d'un écoulement potentiel assurant un profil non cisailé dans le conduit. Les résultats sont présentés figure 5.6 uniquement pour le modèle de Guess. La présence d'une couche limite amplifie très légèrement l'absorption du traitement. En effet, lorsque l'écoulement cisailé se propage dans le sens de l'onde acoustique, il réfracte l'onde sur la paroi traitée ce qui augmente son atténuation. L'effet du cisaillement et de la condition de non glissement est néanmoins négligeable dans le cas d'un écoulement positif ( $\approx 1$  dB d'écart entre les deux calculs).

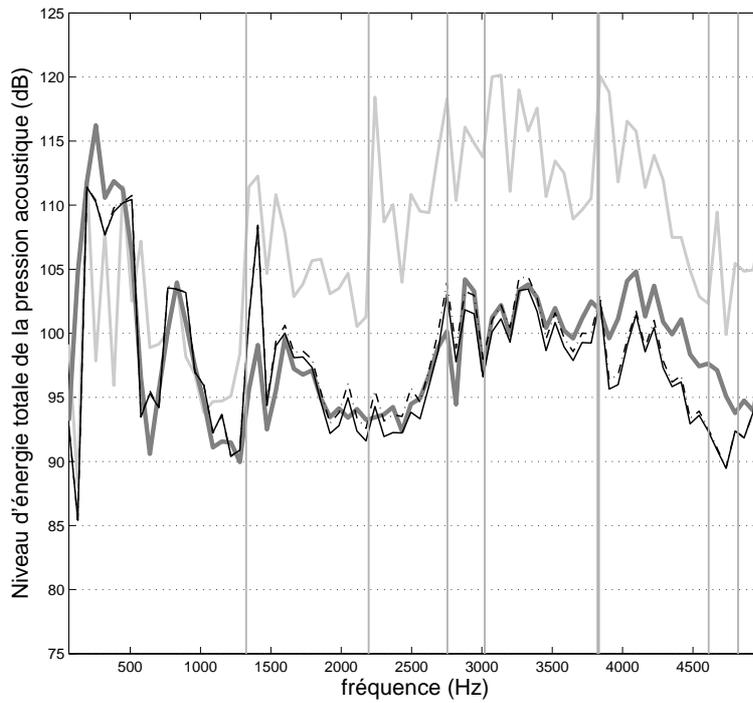


Fig. 5.5 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = +0.25$ :

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Guess (en noir - -).

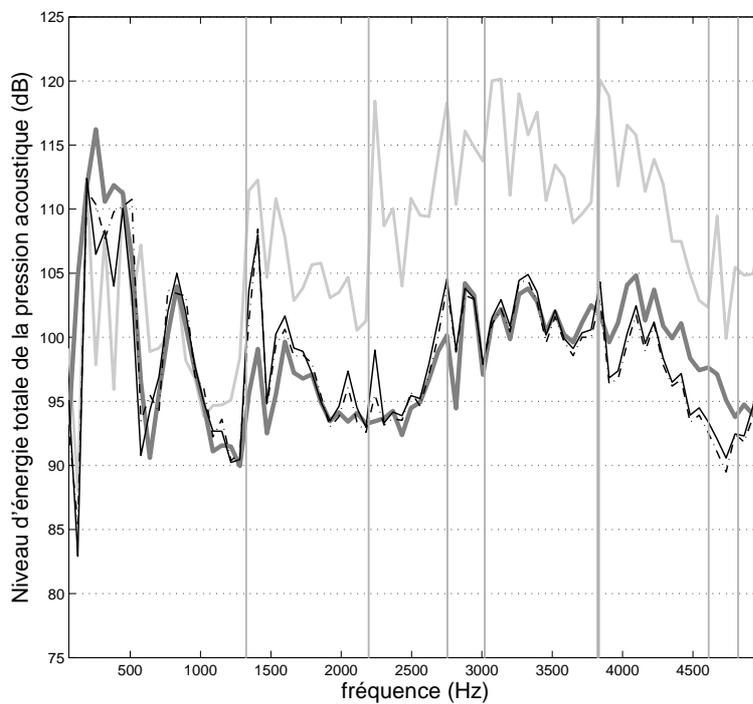
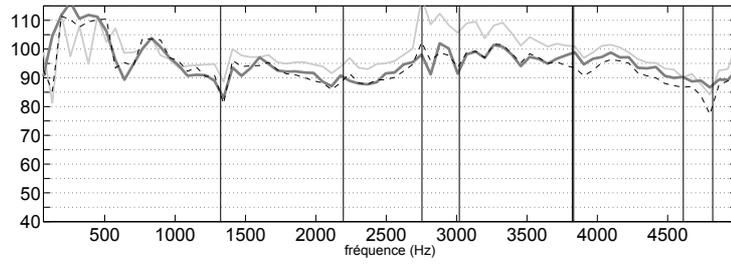
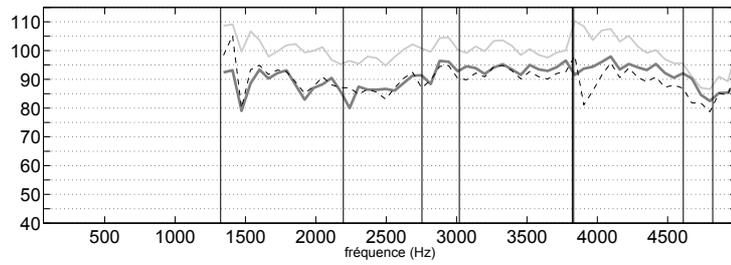


Fig. 5.6 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = +0.25$ :

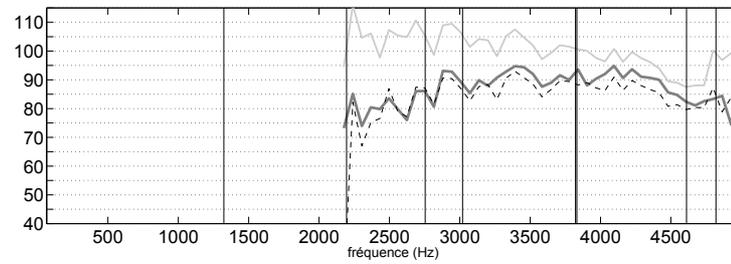
- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  pour le modèle de Guess avec: un écoulement cisailé (en noir - -); un écoulement potentiel (en noir -).



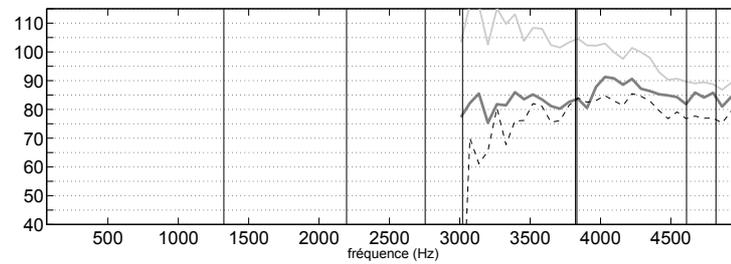
(a)  $m=0$



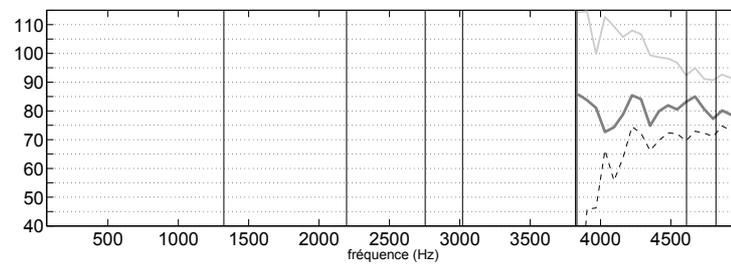
(b)  $m=1$



(c)  $m=2$



(d)  $m=3$



(e)  $m=4$

Fig. 5.7 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) par mode azimutal pour un tronçon test perforé avec un écoulement  $M_0 = +0.25$  :

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir - -).

### 5.1.3 Cas d'un écoulement négatif $M_0 = -0.25$

L'ensemble des modèles d'impédance acoustique étudiés ne précise pas le sens de l'écoulement par rapport à celui de l'onde acoustique dans leur formulation ( $M_0$  est considéré positif). Le sens relatif de l'écoulement ne devrait pas influencer sur l'impédance du liner comme le montrent Renou [87] et Watson [88]. Ainsi, les courbes de résistance et de réactance pour  $M_0 = +0.25$  (voir Fig 5.4) restent aussi valables pour  $M_0 = -0.25$ .

L'application de ces modèles d'impédance au code de calcul pour le tronçon test perforé avec un écoulement  $M_0 = -0.25$  donne les résultats de la figure 5.8. L'efficacité du traitement commence à 1000 Hz et s'étend sur toute la plage d'étude. Les simulations s'accordent bien à la mesure en dessous de 3100 Hz. En revanche, pour les fréquences supérieures, des écarts importants apparaissent ce qui met à nouveau en évidence la divergence entre l'impédance du traitement et celle donnée par les modèles. La figure 5.10 montre que tous les modes sont marqués par des différences importantes entre le calcul et la mesure à partir de 2800 Hz. Ces écarts sont beaucoup plus prononcés qu'en présence d'un écoulement positif.

L'écoulement porteur cisailé considéré dispose d'une couche limite  $\delta_e = 5$  mm. La figure 5.9 compare le résultat précédent pour le modèle de Guess à celui calculé avec un écoulement potentiel. La couche limite réduit visiblement l'absorption du liner. En effet, lorsqu'un écoulement cisailé se propage à contre-sens de l'onde acoustique, il réfracte l'onde à l'intérieur du conduit ce qui limite son atténuation. Contrairement au cas d'un écoulement positif, ces effets ne sont pas négligeables avec des différences pouvant atteindre 4 dB entre les deux calculs. Finalement, pour le cas d'un écoulement négatif, la qualité de la simulation est beaucoup plus sensible au réalisme de l'écoulement dans le tube que dans le cas positif. Ainsi, une couche limite plus grande, et peut-être plus représentative de la couche limite réelle, pourrait améliorer les résultats de simulation numérique.

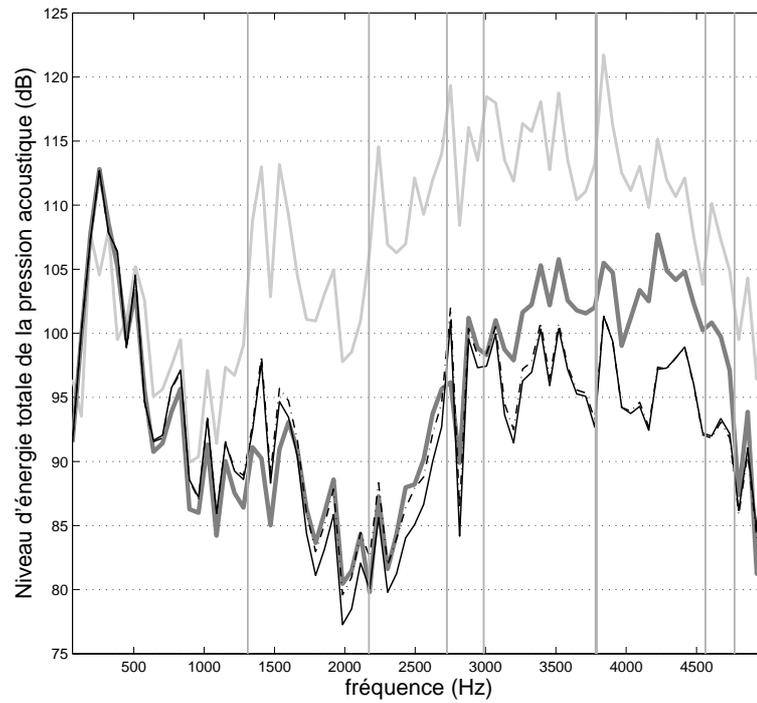


Fig. 5.8 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = -0.25$ :

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris –);  $S_2$  (en gris –);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir –); Guess (en noir – –).

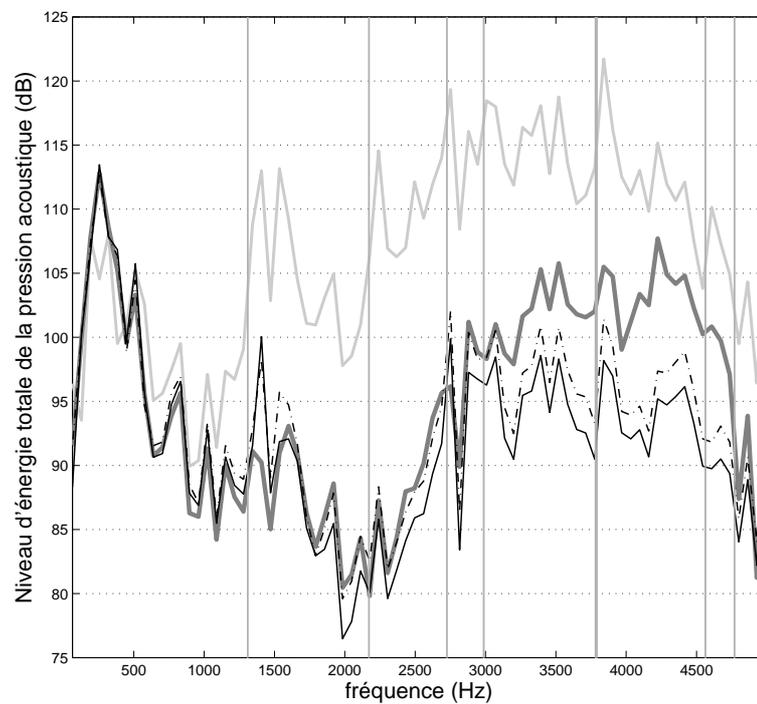
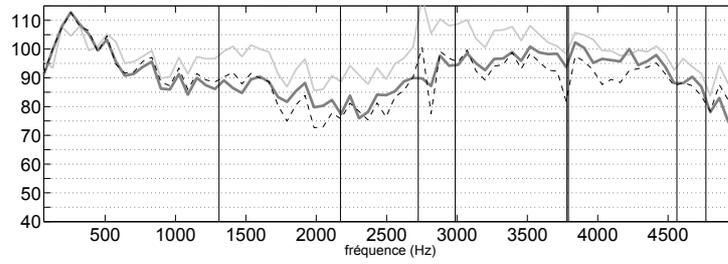
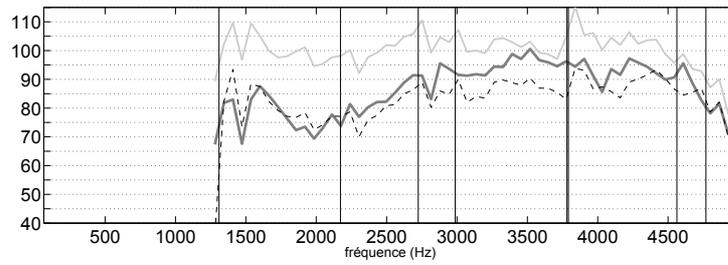


Fig. 5.9 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = -0.25$ :

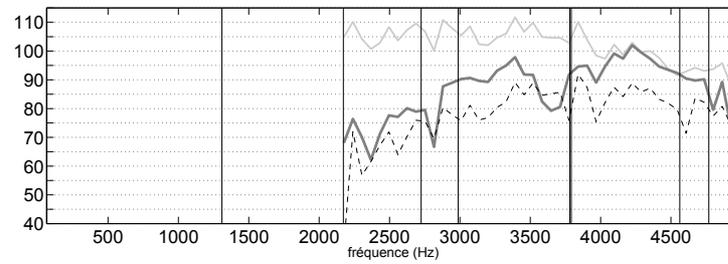
- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris –);  $S_2$  (en gris –);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  pour le modèle de Guess avec: un écoulement cisailé (en noir –); un écoulement potentiel (en noir – –).



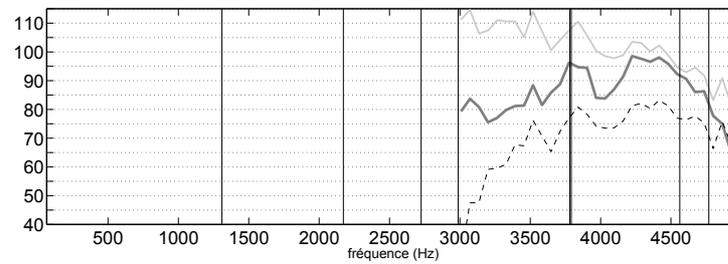
(a)  $m=0$



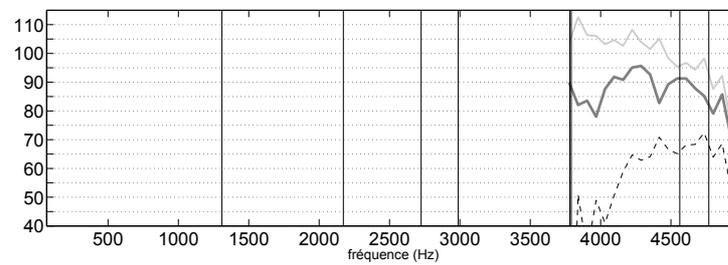
(b)  $m=1$



(c)  $m=2$



(d)  $m=3$



(e)  $m=4$

Fig. 5.10 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) par mode azimutal pour un tronçon test perforé avec un écoulement  $M_0 = -0.25$  :

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir - -).

## 5.2 Traitement microperforé

Dans cette section, les modèles d'impédance acoustique adaptés aux plaques microperforées ( $d < t$ ), à savoir ceux de Yu, de Cobo et d'Allam (2008 et 2011), sont testés. Les caractéristiques du traitement SDOF microperforé utilisé sont données Tab 4.1 p. 64. Seules les configurations sans écoulement, et avec écoulement positif sont exposées dans la suite.

### 5.2.1 Cas sans écoulement

La figure 5.11 montre les courbes de résistance et de réactance réduites résultantes des quatre modèles d'impédance. Comparativement à la plaque perforée, la réduction de la taille des orifices et de la porosité a pour effet l'augmentation de la résistance du traitement. Les résistances des modèles de Yu et de Cobo sont comparables, tandis que celle d'Allam 2011, et dans une moindre mesure celle d'Allam 2008, se distinguent par un niveau plus élevé à haute fréquence. Les réactances des modèles sont relativement similaires avec une fréquence d'accord située vers 2200 Hz.

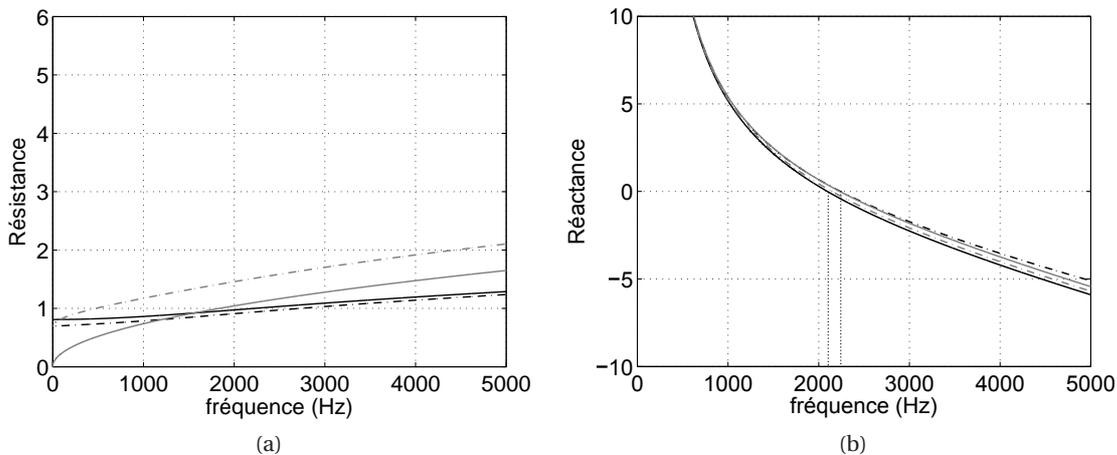


Fig. 5.11 Valeurs théoriques de la résistance réduite (a) et de la réactance réduite (b) du SDOF microperforé sans écoulement pour le modèle de : Yu (en *noir* –); Cobo (en *noir* – –); Allam 2011 (en *gris* – ·); Allam 2008 (en *gris* – –).

L'application de ces modèles d'impédance au code de calcul pour le tronçon test microperforé sans écoulement donne les résultats de la figure 5.12. La plage d'efficacité du liner commence à 1000 Hz. Sur cette plage, la simulation numérique et les résultats expérimentaux sont assez concordants, sauf au niveau du pic d'absorption du traitement (vers 2200 Hz) où de forts écarts d'amplitude apparaissent. Comme pour le cas du liner perforé, ils peuvent s'expliquer en partie par des pressions très basses dont la moindre erreur est amplifiée en représentation en dB. Ces écarts sont aussi visibles sur la décomposition modale azimutale figure 5.13, pour les modes  $m =$

0 et  $m = 1$ . Même si tous les modèles sont convenables, le modèle de Yu permet d'obtenir les meilleurs résultats, avec un écart de l'ordre de 2 dB à haute fréquence, contre 4 dB pour les autres modèles.

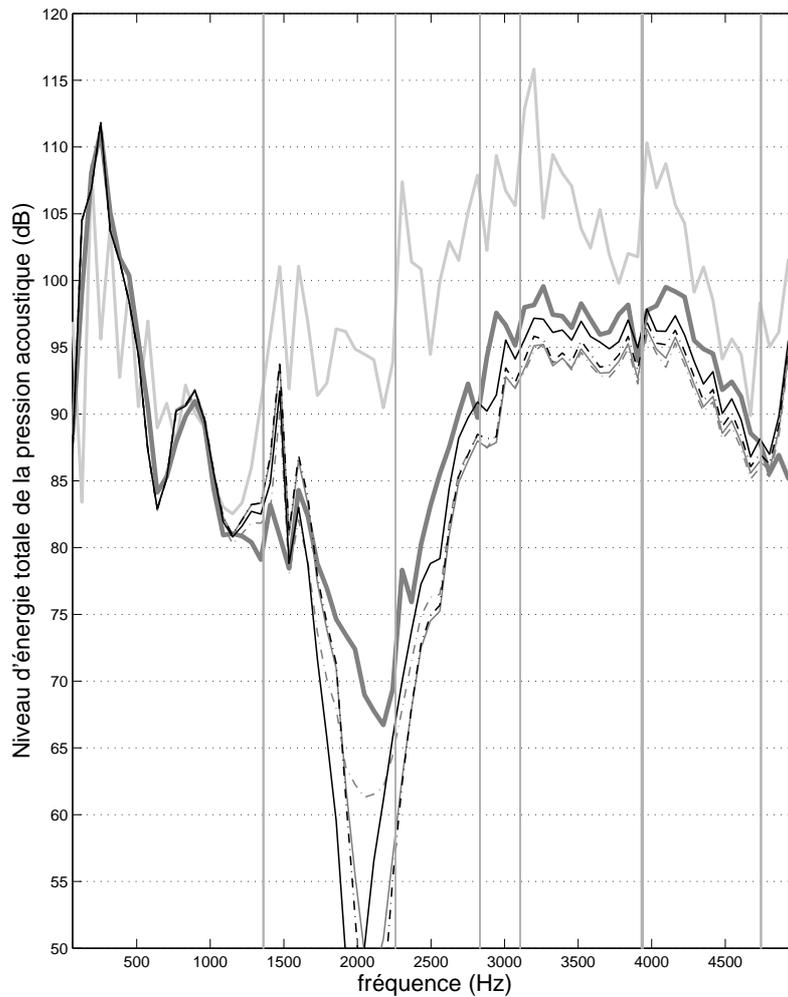
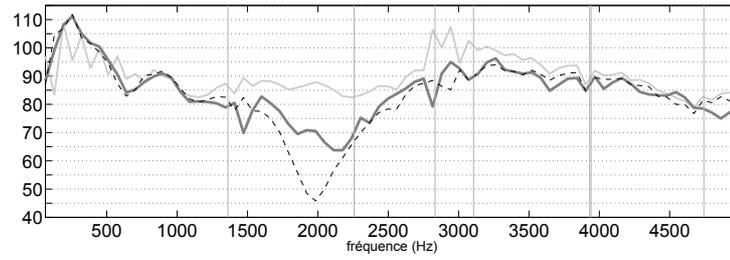
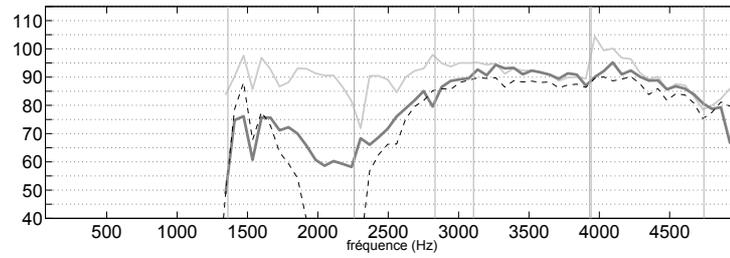


Fig. 5.12 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test microperforé sans écoulement:

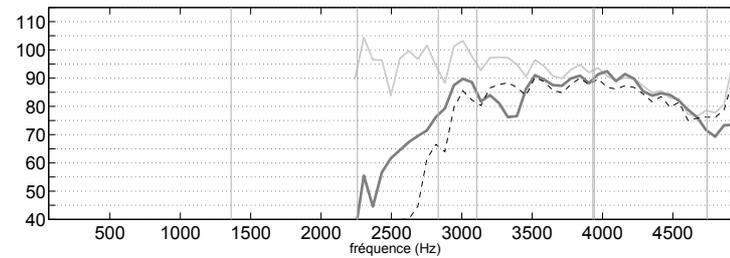
- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Cobo (en noir - -); Allam 2011 (en gris - -); Allam 2008 (en gris -).



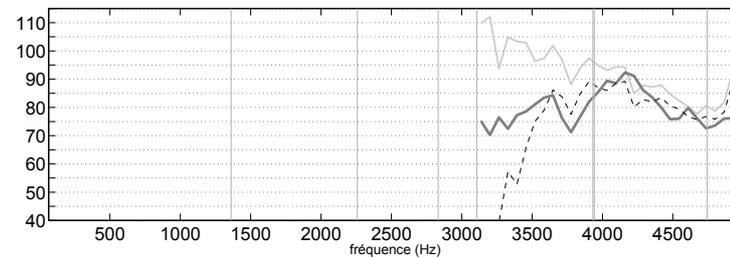
(a)  $m=0$



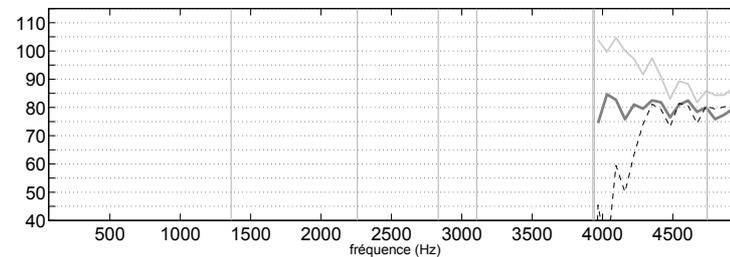
(b)  $m=1$



(c)  $m=2$



(d)  $m=3$



(e)  $m=4$

Fig. 5.13 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) par mode azimutal pour un tronçon test microperforé sans écoulement:

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris —);  $S_2$  (en gris - -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir - -).

### 5.2.2 Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.25$

En présence d'un écoulement rasant  $M_0 = +0.25$ , les résistances des quatre modèles augmentent fortement par rapport au cas sans écoulement (voir Fig 5.14). De plus, elles sont relativement similaires, sauf pour le modèle d'Allam 2011 qui présente une résistance plus élevée sur toute la plage de fréquence. Concernant la réactance, seul le modèle de Yu se démarque des autres par un niveau plus faible, et donc une fréquence d'accord plus basse (vers 2100 Hz contre 2400 Hz pour les autres modèles).

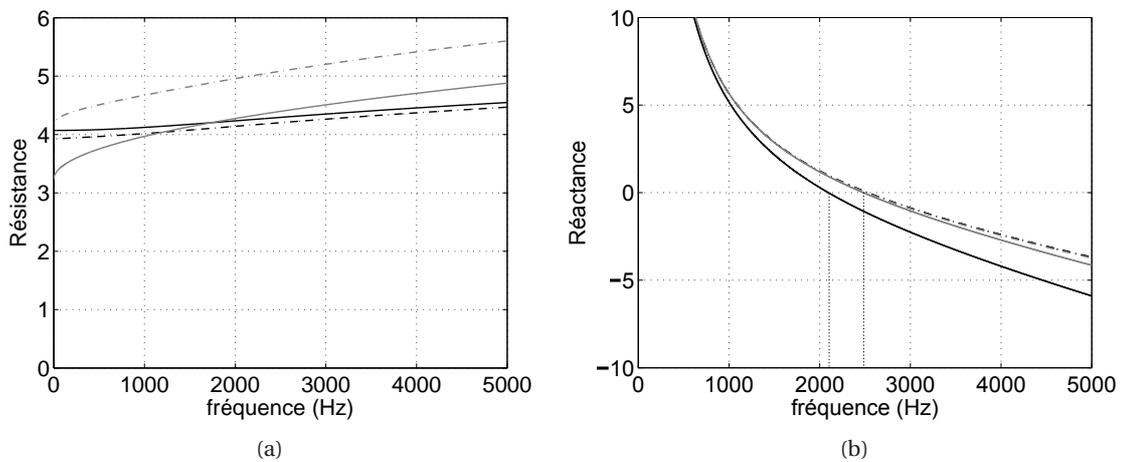


Fig. 5.14 Valeurs théoriques de la résistance réduite (a) et de la réactance réduite (b) du SDOF microperforé avec un écoulement  $M_0 = +0.25$  pour le modèle de : Yu (en *noir -*); Cobo (en *noir - -*); Allam 2011 (en *gris - -*); Allam 2008 (en *gris -*).

L'application de ces modèles d'impédance au code de calcul pour le tronçon test microperforé avec un écoulement  $M_0 = +0.25$  donne les résultats de la figure 5.15. Là encore, l'efficacité du liner commence à partir de 1000 Hz. La simulation montre de bons résultats quel que soit le modèle utilisé avec des écarts inférieurs à 3 dB. Comme pour le traitement perforé, le modèle de Yu s'accorde mieux aux résultats expérimentaux à haute fréquence ( $f > 4000$  Hz). La décomposition modale azimutale (Fig 5.16) confirme cette tendance, y compris pour les modes élevés. D'après les résultats montrés en Annexe C pour  $M_0 = +0.1$  et  $M_0 = +0.2$ , les modèles d'impédance convergent vers l'impédance réelle du traitement lorsque la vitesse d'écoulement augmente (comme pour la configuration perforée).

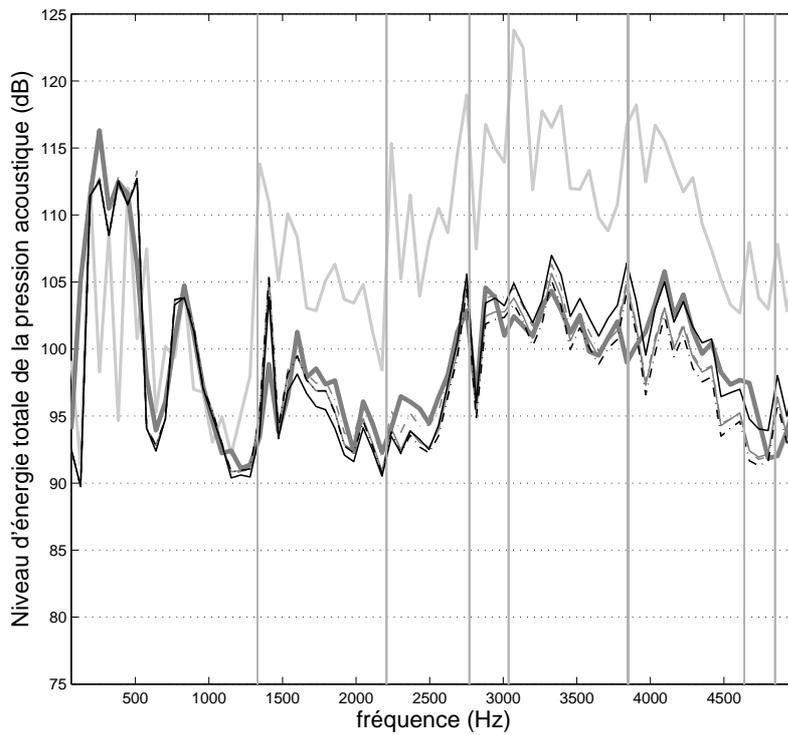
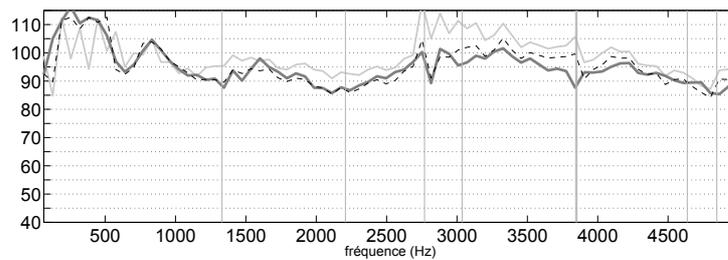
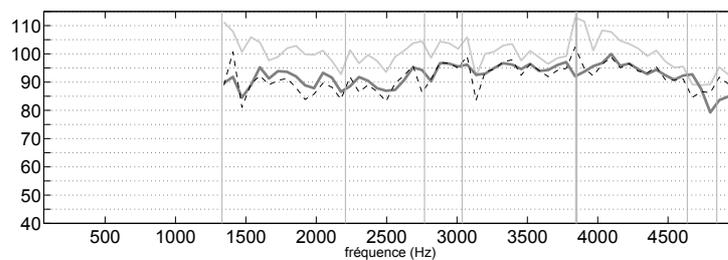


Fig. 5.15 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test microperforé et un écoulement  $M_0 = +0.25$ :

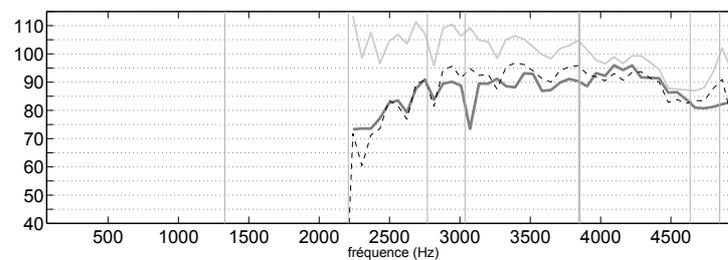
- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Cobo (en noir -); Allam 2011 (en gris -); Allam 2008 (en gris -).



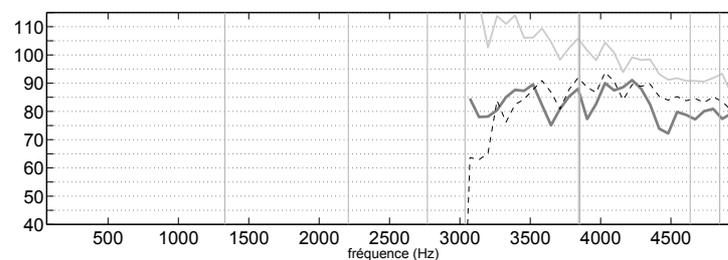
(a)  $m=0$



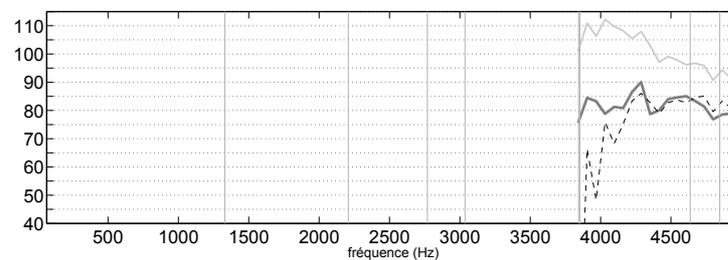
(b)  $m=1$



(c)  $m=2$



(d)  $m=3$



(e)  $m=4$

Fig. 5.16 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) par mode azimutal pour un tronçon test microperforé sans écoulement:

- mesure sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir - -).

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs modèles d'impédance acoustique tenant compte de l'écoulement ont été testés en condition multimodale sur deux types de traitement SDOF: un perforé et un microperforé. Concernant le tronçon perforé sans écoulement, les résultats obtenus avec les modèles de Yu et de Guess sont en bon accord avec les mesures pour chaque mode propagatif et avec l'hypothèse d'une réaction localisée. En présence d'un écoulement positif ( $M_0 = +0.25$ ), des écarts apparaissent à haute fréquence et diminuent lorsque la vitesse d'écoulement augmente. Cet écart est attribué au fait que la vitesse d'écoulement soit inférieure à celle utilisée par les auteurs des modèles pour leur validation. Pour un écoulement négatif ( $M_0 = -0.25$ ), les résultats sont en plus très dépendants de la nature de l'écoulement (taille de la couche limite de cisaillement, condition de glissement à la paroi...). En outre, les deux modèles sont très comparables. Pour le tronçon microperforé sans écoulement, les calculs issus des modèles de Yu, de Cobo et d'Allam (2008 et 2011), donnent des résultats proches des mesures, et plus particulièrement pour celui de Yu. De même, en présence d'un écoulement positif ( $M_0 = +0.25$ ), les simulations s'accordent très bien avec l'expérience pour tous les modèles. Enfin, il a été montré que les effets de la couche limite de cisaillement aérodynamique sont relativement négligeables dans le cas d'un écoulement positif, mais pas dans le cas d'un écoulement négatif.

# Conclusion et perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse ont été consacrés à la mise en place d'une approche numérique et expérimentale pour un conduit avec traitement acoustique. Son application a permis de valider des modèles d'impédance acoustique de traitements SDOF en propagation multimodale avec écoulement complexe (cisailé et tournant en bloc rigide) qui peut atteindre un Mach de  $M_0 = \pm 0.25$ . Cette approche permet de comparer des résultats expérimentaux issus d'un banc aéroacoustique et des résultats numériques.

Dans la première partie de ce travail, le modèle numérique FEM-PML utilisé a été présenté puis validé. Pour ce modèle numérique, la formulation de Galbrun est utilisée, se révélant plus intéressante que celle d'Euler linéarisée à plusieurs égards. Tout d'abord, l'équation de Galbrun ne met en jeu que la perturbation lagrangienne du déplacement (et éventuellement celle de la pression en formulation mixte), même dans le cas d'un écoulement porteur non homentropique et d'un fluide hétérogène. De plus, il est maintenant admis que la condition de continuité à imposer sur une paroi doit être basée sur la continuité du déplacement lagrangien normal. Pour l'équation de Galbrun, les conditions aux limites s'avèrent particulièrement simples contrairement aux LEE où il est nécessaire de passer par la condition de Myers qui n'est pas toujours évidente à mettre en œuvre. Enfin, sous l'hypothèse d'un écoulement porteur stationnaire eulérien, l'équation de Galbrun permet d'aboutir à des expressions générales de l'intensité et de l'énergie. Pour prendre en compte le rayonnement en milieu infini, une couche parfaitement adaptée (ou PML) a été développée pour les équations de Galbrun en régime harmonique, dans un système de coordonnées cylindriques, et en présence d'un écoulement axial et tournant. Une nouvelle transformation spatio-temporelle a alors été proposée afin de s'affranchir des instabilités causées par les modes amont inverses. Le développement de la PML a dans un premier temps été validée pour différents modes acoustiques se propageant dans un conduit droit annulaire rigide en présence d'écoulement grâce à un modèle semi-analytique. La PML a ensuite été validée pour un conduit à section variable grâce à un modèle à échelles multiples. Enfin, elle a été testée dans la configuration d'un réacteur d'avion rayonnant dans un domaine ouvert. Une première ébauche sur l'étude des paramètres de la PML montre que la formulation discontinue non bornée du coeffi-

cient d'absorption proposé par Bermudez ( $\sigma_{UD}$ ) n'est pas forcément plus avantageuse que la formulation parabolique classique. Ce modèle FEM-PML est utilisé pour la simulation numérique du banc expérimental.

Dans la seconde partie, des modèles d'impédance acoustique de SDOF ont été exposés. Une étude bibliographique sur les modèles d'impédance acoustique de traitements SDOF perforés et microperforés en présence d'écoulement a été réalisée. Chacun de ces modèles traduit les phénomènes physiques qui se produisent au niveau des orifices de la plaque à savoir: les effets de la viscosité, ceux du rayonnement acoustique, ceux de la vitesse acoustique et ceux de l'écoulement rasant. Ces modèles d'impédance sont souvent empiriques et présentent des plages de validation expérimentale propres à chacun d'entre eux. Une synthèse du domaine d'applications des différents modèles a été faite. Un chapitre a été consacré à la présentation du banc expérimental et à la mise en place de la méthode permettant une corrélation essais/calculs que nous avons développée. La validation de cette méthode a été effectuée dans la configuration d'un conduit rigide non traité, sans puis avec écoulement. Dans le dernier chapitre, nous avons mis en application cette méthode pour valider plusieurs modèles d'impédance acoustique tenant compte de l'écoulement pour deux traitements SDOF: un perforé et un microperforé pour différents cas d'écoulements. Dans le cas du traitement perforé sans écoulement, les simulations obtenues avec les modèles de Yu et de Guess sont en bon accord avec les mesures expérimentales pour chaque mode propagatif. En présence d'un écoulement positif ( $M_0 = +0.25$ ), des écarts apparaissent à haute fréquence et diminuent lorsque la vitesse d'écoulement augmente. Cet écart est attribué au fait que la vitesse d'écoulement soit inférieure à celle utilisée par les auteurs des modèles pour leur validation. Pour un écoulement négatif ( $M_0 = -0.25$ ), les résultats sont en plus très dépendants de la nature de l'écoulement. Par ailleurs, les deux modèles sont très similaires. Pour le traitement microperforé sans écoulement, les calculs issus des modèles de Yu, de Cobo et d'Allam (2008 et 2011), donnent des résultats proches des mesures expérimentales, et plus particulièrement pour celui de Yu. De même, en présence d'un écoulement positif ( $M_0 = +0.25$ ), les simulations s'accordent très bien avec l'expérience.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et portent aussi bien sur la PML que sur la validation des modèles d'impédance. Concernant la PML, il serait intéressant de réaliser une étude, plus poussée, de paramètres dans le cas d'une onde convectée, afin par exemple de déterminer l'influence de l'écoulement sur l'évolution de la longueur de couche optimale. Concernant les travaux menés sur la validation des modèles d'impédance, la détermination de la nature exacte de l'écoulement à l'intérieur du conduit (profil et amplitude), en utilisant par exemple un système non intrusif VLD (Vélocimétrie Laser Doppler), permettrait d'améliorer le réalisme de la simulation numérique. De plus, il serait tout à fait envisageable que l'approche de corrélation essais/calculs soit adaptée à une méthode inverse permettant d'estimer l'impédance réelle du traitement. Pour cela, il suffirait de rechercher l'impédance théorique du matériau minimisant

---

l'erreur entre la pression expérimentale mesurée en sortie, et la pression calculée dans le conduit numérique. Enfin, le modèle FEM-PML pourrait être utilisé pour valider certaines caractéristiques des modèles d'impédance, notamment leur comportement plus ou moins localisé, l'interaction entre les cellules adjacentes, ou l'interaction avec l'écoulement.

## Annexe A

# Changement de repère pour l'application de la PML

### A.1 Bases théoriques de la propagation d'onde en conduit

Une approximation analytique de la solution du problème aux valeurs propres associé à l'équation de Pridmore-Brown [46] peut être trouvée en présence d'un écoulement axial uniforme et tournant en bloc rigide. Pour cela, le système Eq.(2.25) est écrit comme une équation différentielle ne portant que sur la pression lagrangienne  $p^L$

$$\frac{\partial^2 p^L}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial r} - \frac{1}{a_3} \frac{\partial a_3}{\partial r} \right) \frac{\partial p^L}{\partial r} + \left( \frac{a_3}{a_1 \rho_0 \Omega^2} \left( \frac{\Omega^2}{c_0^2} - k_z^2 \right) - \frac{a_3}{a_1^2} \frac{m^2}{r^2} - \frac{a_2}{a_1 r} \left( \frac{a_2}{a_1 r} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial r} - \frac{1}{a_3} \frac{\partial a_3}{\partial r} \right) \right) p^L = 0 \quad (\text{A.1})$$

où

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega - k_z v_{0z}(r) - (m/r) v_{0\theta}(r) \\ a_1 &= \rho_0 \Omega^2 \\ a_2 &= \rho_0 (v_{0\theta}/r) (2\Omega m + (k_z^2 r^2 + m^2) (v_{0\theta}/r)) \\ a_3 &= a_1^2 - \rho_0^2 (v_{0\theta}/r)^2 [(2\Omega + m(v_{0\theta}/r))^2 + (r k_z (v_{0\theta}/r))^2]. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites Eq.(2.32) sont aussi exprimées en termes de pression lagrangienne ce qui conduit à la relation suivante

$$\frac{\partial p^L}{\partial r} = \mp \frac{i}{\omega Z_j a_1} \left( a_3 \pm i \omega Z_j \frac{a_2}{r} \right) p^L \text{ en } r = R_j \text{ avec } j = (1, 2). \quad (\text{A.2})$$

Des simplifications peuvent être réalisées. Tout d'abord, la variation de la pression moyenne  $\partial p_0 / \partial r = r \rho_0 (v_{0\theta}(r)/r)^2$  est négligée, tout comme les termes du second ordre  $(v_{0\theta}(r)/r)^2$ . Par ailleurs, l'hypothèse des hautes fréquences est également posée ce qui implique que  $m v_{0\theta}(r)/r \ll \Omega$ . L'application de ces approximations sur l'Eq.(A.1) conduit à l'expression utilisée par Treyssède [47]

$$\frac{\partial^2 p^L}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \frac{\partial p^L}{\partial r} + \left( \frac{\Omega^2}{c_0^2} - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p^L = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas spécifique d'un écoulement axial uniforme associé à un écoulement tournant en bloc rigide,  $\Omega$  est constant et l'Eq.(A.3) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 p^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^L}{\partial r} + \left( \frac{\Omega^2}{c_0^2} - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p^L = 0. \quad (\text{A.4})$$

Les solutions analytiques de l'Eq.(A.4) sont définies par les fonctions de Bessel de la première ( $J_m$ ) et de la seconde espèce ( $Y_m$ )

$$p_{mn}^L(r) = A_{mn} J_m(k_{r_{mn}} r) + B_{mn} Y_m(k_{r_{mn}} r). \quad (\text{A.5})$$

La relation de dispersion étant donnée par

$$k_{r_{mn}}^2 = \frac{\Omega^2 m n}{c_0^2} - k_{z_{mn}}^2, \quad (\text{A.6})$$

la formulation du nombre d'onde axial  $k_{z_{mn}}$  peut être déduite

$$k_{z_{mn}}^\pm = \frac{-M_{0z}(k - m k_{0\theta}) \pm \sqrt{(k - m k_{0\theta})^2 - (1 - M_{0z}^2) k_{r_{mn}}^2}}{1 - M_{0z}^2}. \quad (\text{A.7})$$

La fréquence de coupure du mode  $(m, n)$  correspond à la valeur de  $k$  qui annule le terme sous la racine de l'Eq. (A.7)

$$f_{c_{mn}} = \sqrt{1 - M_{0z}^2} f_{0_{mn}} + \frac{m \Omega_{0\theta}}{2\pi} \quad (\text{A.8})$$

avec  $f_{0_{mn}} = k_{r_{mn}} c_0 / 2\pi$ , la fréquence de coupure du mode sans écoulement. Cette expression montre que, quel que soit le sens de l'écoulement axial, les fréquences de coupures diminuent par rapport au cas sans écoulement. En présence d'écoulement tournant, la fréquence de coupure des modes corotatifs augmente, tandis que celle des modes contrarotatifs diminue. Ces tendances sont d'autant plus importantes que l'ordre azimutal  $m$  et que la vitesse de rotation de l'écoulement  $\Omega_{0\theta}$  sont élevés.

## A.2 Représentation de l'équation de dispersion sous la forme d'une ellipse

L'équation d'une ellipse peut être déduite de la relation de dispersion Eq.(A.6)

$$\left[ \frac{k_z}{\omega} + \overbrace{\left( \frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} \left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right) \frac{1}{c_0} \right)}^{\text{centre de l'ellipse}} \right]^2 + \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - M_{0z}^2}} \frac{k_r}{\omega} \right]^2 = G \quad (\text{A.9})$$

avec

$$G = \frac{1}{c_0^2} \frac{\left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right)^2}{1 - M_{0z}^2} + \left( \frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} \left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right) \right)^2. \quad (\text{A.10})$$

L'équation (A.9) correspond à la courbe de lenteur qui définit le vecteur lenteur  $\mathbf{s} = [k_z/\omega, k_r/\omega]$  (voir Fig A.1).  $\mathbf{s}$  a la même direction que le vecteur de vitesse de phase  $\mathbf{v}_\phi$ . Le vecteur de vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{dk}$  est quant à lui orthogonal à la courbe de lenteur. L'excentricité de l'ellipse montre une zone dans laquelle la première composante du vecteur  $\mathbf{s}$  et du vecteur  $\mathbf{v}_g$  sont de signes opposés (partie pointillée de l'ellipse). Cette zone d'instabilité se trouve dans l'intervalle

$$-\frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} \left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right) \frac{1}{c_0} < k_z/\omega < 0. \quad (\text{A.11})$$

## A.3 Changement de repère résolvant le problème des modes inverses

Pour résoudre le problème des modes inverses, les effets de la convection sur la PML doivent être annulés afin d'assurer la cohérence entre le vecteur de vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  et celui de vitesse de phase  $\mathbf{v}_\phi$ . Par conséquent, l'ellipse doit être transformée en un cercle d'équation

$$\left[ \left( \frac{\overline{k_z}}{\overline{\omega}} \right)^2 + \left( \frac{\overline{k_r}}{\overline{\omega}} \right)^2 \right] = G \quad (\text{A.12})$$

(voir Fig A.1) en appliquant les transformations

$$\begin{cases} \frac{\overline{k_z}}{\overline{\omega}} = \frac{k_z}{\omega} + \frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} \left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right) \frac{1}{c_0} \\ \frac{\overline{k_r}}{\overline{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_{0z}^2}} \frac{k_r}{\omega}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

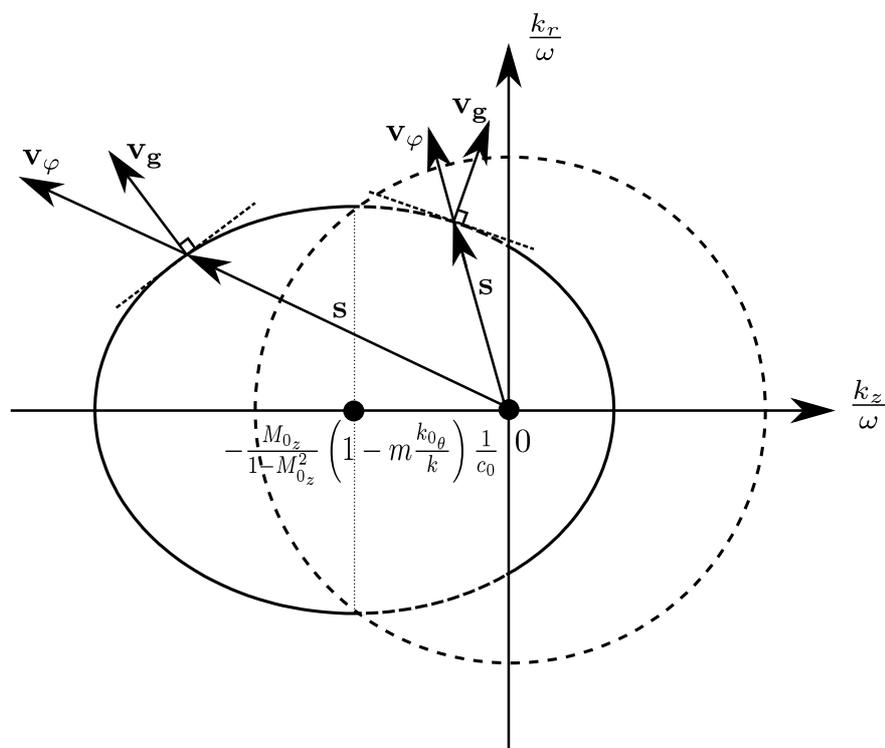


Fig. A.1 Courbe de lenteur avant (trait continu) et après (trait pointillé) la transformation spatio-temporelle.

En posant  $\bar{\omega} = \omega$ , ces changements de variables correspondent à la transformation spatio-temporelle

$$\bar{r} = r\sqrt{1 - M_{0z}^2}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t + \alpha z \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_{0z}^2}} \frac{\partial}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{M_{0z}}{1 - M_{0z}^2} \left( 1 - m \frac{k_{0\theta}}{k} \right) \frac{1}{c_0}.$$

## Annexe B

# Paramètres de la couche PML

L'une des difficultés majeures liées à l'utilisation de la PML réside dans la recherche des paramètres d'absorption optimaux. En général, elle s'effectue de manière empirique, au fur et à mesure de la convergence de la solution. Ainsi, la compréhension des facteurs favorisant l'atténuation de l'onde permet de faciliter la détermination de ces paramètres.

Dans un premier temps, les limites de la PML discrétisée sont brièvement introduites, puis une étude portant sur l'évolution de l'erreur engendrée par la PML en fonction de la longueur de couche et du paramètre d'absorption est effectuée en considérant un profil parabolique. Enfin, une comparaison avec les coefficients d'absorption proposés par Bermudez est réalisée.

### B.1 Limites de la PML discrétisée

En pratique, la réduction de la taille de la PML permet de limiter le coût numérique. Or, d'après la formulation analytique de l'onde Eq.(2.3), un coefficient d'absorption constant et suffisamment grand suffirait à ce que la longueur de la couche absorbante nécessaire tende vers 0. Néanmoins, du fait de l'approximation numérique réalisée, cela n'est pas le cas. En effet, il est connu que la PML n'est pas parfaitement adaptée au niveau discret. Une onde incidente peut donner naissance à une onde réfléchie à la limite de la PML (en  $x = x_f$ ) appelée *onde PML*, mais aussi à une onde réfléchie à l'interface entre les deux domaines (en  $x = 0$ ) appelée *onde numérique* (voir Fig B.1). Ces phénomènes ayant fait l'objet de nombreuses analyses, la plupart menées dans le cadre des différences finies [32, 89, 90], on se limite ici à donner les principaux résultats.

L'onde PML n'est pas le fait de la discrétisation de la couche absorbante, mais de sa formulation continue. Elle apparaît lorsque le coefficient d'absorption est borné ( $\int_{x_0}^x \sigma_x(x) dx \neq +\infty$ ), laissant

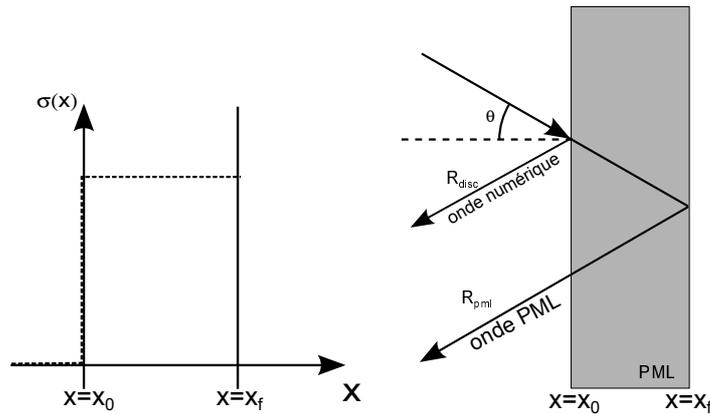


Fig. B.1 Réflexions de l'onde dans la PML dans le cas d'un coefficient d'absorption constant.

une partie de l'onde se réfléchit sur la limite extérieure de la couche PML. Elle est donc le fruit d'un trajet aller-retour de l'onde dans la couche ( $0 < x < x_f$ ). L'onde PML a une amplitude  $R_{pml}$  donnée par

$$R_{pml} = e^{-2 \frac{\sigma L_{PML}}{c_0} \cos \theta} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\theta$  l'angle d'incidence de l'onde par rapport à la normale sortante de la couche PML.

L'onde numérique tend vers 0 avec le pas de discrétisation  $\Delta x$ , mais augmente avec  $\sigma$  et  $\theta$  [89]. En d'autres termes, plus le maillage est grossier, le coefficient d'absorption grand et l'angle d'incidence élevé, moins la couche est adaptée au niveau discret. La technique pour contourner ce problème consiste à choisir un  $\sigma(x)$  convexe qui augmente progressivement avec  $x$  à partir de  $\sigma(0) = 0$ . La discrétisation va alors créer une succession de couches PML d'absorption  $\sigma_j$ . A la réflexion de l'onde PML, va s'ajouter une superposition de petites réflexions d'ondes numériques qui ne vont être proportionnelles qu'aux sauts  $\sigma_{j+1} - \sigma_j$  (voir Fig B.2). En outre, l'amplitude des réflexions numériques sur les interfaces qui sont de plus en plus profondes va être de plus en plus atténuée par le phénomène de décroissance exponentielle [43].

## B.2 Coefficient d'absorption BC

### B.2.1 Formulation BC du coefficient d'absorption

Dans la littérature, plusieurs formulations du coefficient d'absorption  $\sigma(x)$  sont proposées. La plus communément utilisée [32] correspond à celle appelée BC pour «Bounded Continuous», qui

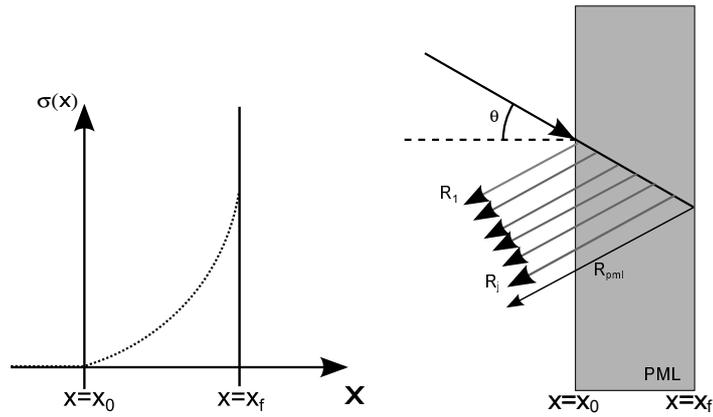


Fig. B.2 Réflexions de l'onde dans la PML dans le cas d'un coefficient d'absorption parabolique.

est définie par

$$\begin{cases} \sigma_{BC}(r) = \beta_r (|r| - r_0)^n & |r| \geq r_0 \\ \sigma_{BC}(z) = \beta_z (|z| - z_0)^n & |z| \geq z_0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où  $(r_0, z_0)$  délimitent les frontières entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir Fig 2.2 p. 22).  $\beta_r$  et  $\beta_z$  sont des paramètres d'absorption positifs permettant de gérer la croissance du profil de  $\sigma$ . Pour assurer une atténuation progressive de l'onde dans la PML,  $n$  est choisi égal à 2 dans la suite de l'étude, le cas  $n = 1$  n'étant pas parabolique et le cas  $n = 3$  ayant un profil similaire (voir Fig B.3). Comme  $\sigma_{BC}$  est borné, il n'assure pas une absorption complète de l'onde ce qui implique l'apparition d'une onde PML.

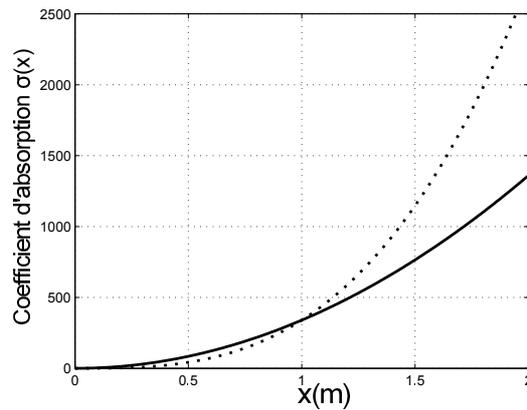


Fig. B.3 Coefficient d'absorption  $\sigma_{BC}(x)$  pour  $n = 2$  (trait continu) et  $n = 3$  (trait pointillé) ( $\beta = 340$ ).

### B.2.2 Évolution de l'erreur en fonction de la longueur de couche et du paramètre d'absorption

Dans la suite, un conduit annulaire rigide muni d'une terminaison PML permettant l'absorption des ondes acoustiques suivant l'axe  $z$  est considéré (voir Fig B.4). Le conduit possède un rayon interne  $R_1 = 0.2$  m, un rayon externe  $R_2 = 1.0$  m, et une longueur (hors PML) de 1.0 m. La longueur de la PML est quant à elle variable.

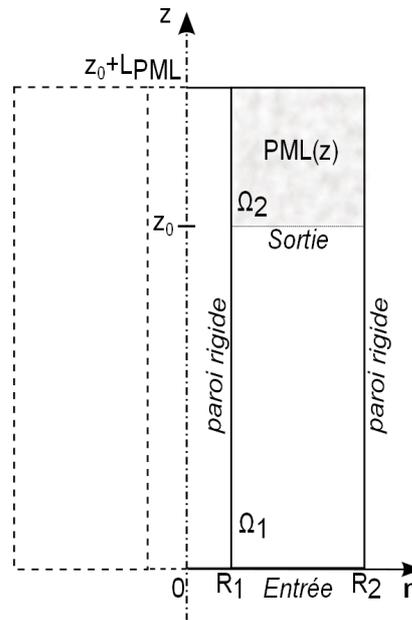


Fig. B.4 Géométrie d'un conduit annulaire muni de parois internes et externes rigides, avec une terminaison PML.

Les résultats du modèle FEM-PML sont comparés à ceux du modèle semi-analytique de Pridmore-Brown. Pour cela, les déplacements lagrangiens obtenus à partir du modèle de Pridmore-Brown sont imposés à l'entrée du conduit ( $z = 0$ ) du modèle FEM-PML. Puis, la solution numérique calculée est directement comparée à celle analytique dans le domaine  $\Omega_1$ . La précision de la solution est déterminée en utilisant l'erreur relative de la norme  $L^2$  donnée par

$$\text{Erreur relative} = \frac{\left( \int_{\Omega_1} |p_{\text{pml}} - p_{\text{ana}}|^2 dr dz \right)^{1/2}}{\left( \int_{\Omega_1} |p_{\text{ana}}|^2 dr dz \right)^{1/2}} \quad (\text{B.3})$$

où  $p_{\text{ana}}$  correspond à la solution analytique de référence dans le domaine  $\Omega_1$ , et  $p_{\text{pml}}$  à la solution numérique avec PML.

La longueur de la couche  $L_{PML}$ , ainsi que le paramètre d'absorption  $\beta_z$  sont adimensionnés par rapport à la longueur d'onde axiale  $\lambda_z$  du mode, tel que

$$L_{PML}^* = L_{PML}/L_{ref} \text{ avec } L_{ref} = \lambda_z \quad (\text{B.4})$$

et

$$\beta_z^* = \beta_z/\beta_{ref} \text{ avec } \beta_{ref} = c_0\lambda_z^{-3}. \quad (\text{B.5})$$

La taille de maille est fixée à  $\lambda_z/30$  dans les deux domaines,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , afin de garantir la convergence de la solution dans le domaine d'intérêt.

Un mode (0,3) se propageant dans le conduit annulaire à  $f = 800$  Hz ( $k = 14.8$ ,  $k_z = 14.2$ ) est étudié. La Fig B.5 représente les isocontours de l'erreur relative de la solution dans le domaine  $\Omega_1$  en fonction de  $\beta_z^*$  et de  $L_{PML}^*$ . Deux zones (séparées par une ligne en pointillé) peuvent être distinguées. Dans la première, l'onde PML est la principale source d'erreurs. Les isocontours dépendent donc aussi bien de  $\beta_z^*$  que de  $L_{PML}^*$ . Dans la seconde, l'onde est suffisamment atténuée pour ne pas se réfléchir sur la limite externe du domaine, et l'erreur de la solution est surtout provoquée par les ondes numériques. Cela explique l'aspect vertical rectiligne des isocontours indiquant une indépendance de l'erreur vis-à-vis de la longueur de couche. Dans la suite, chaque repère a, b, c, d, e et f de la Fig B.5 est illustré par sa solution éléments finis sur la Fig B.6.

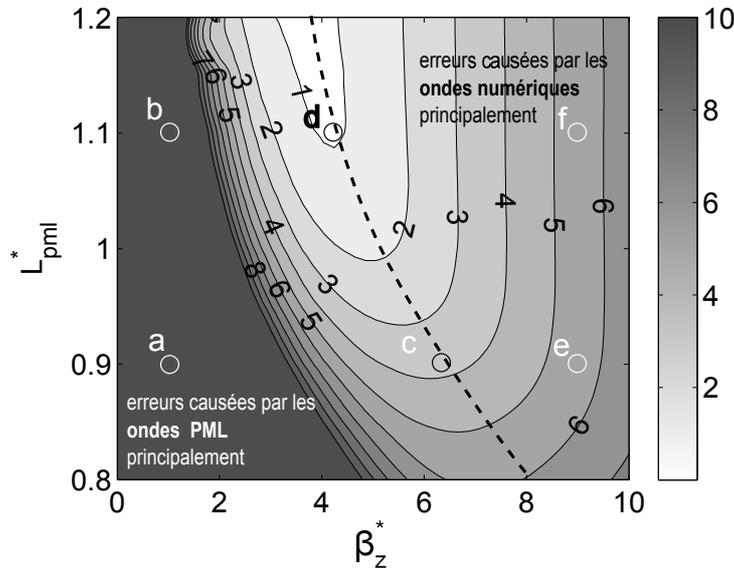


Fig. B.5 Isocontours de l'erreur relative en % associée à la pression FEM-PML d'un mode (0,3) à 800 Hz en fonction de  $\beta_z^*$  et de  $L_{PML}^*$  pour la formulation BC du coefficient d'absorption.

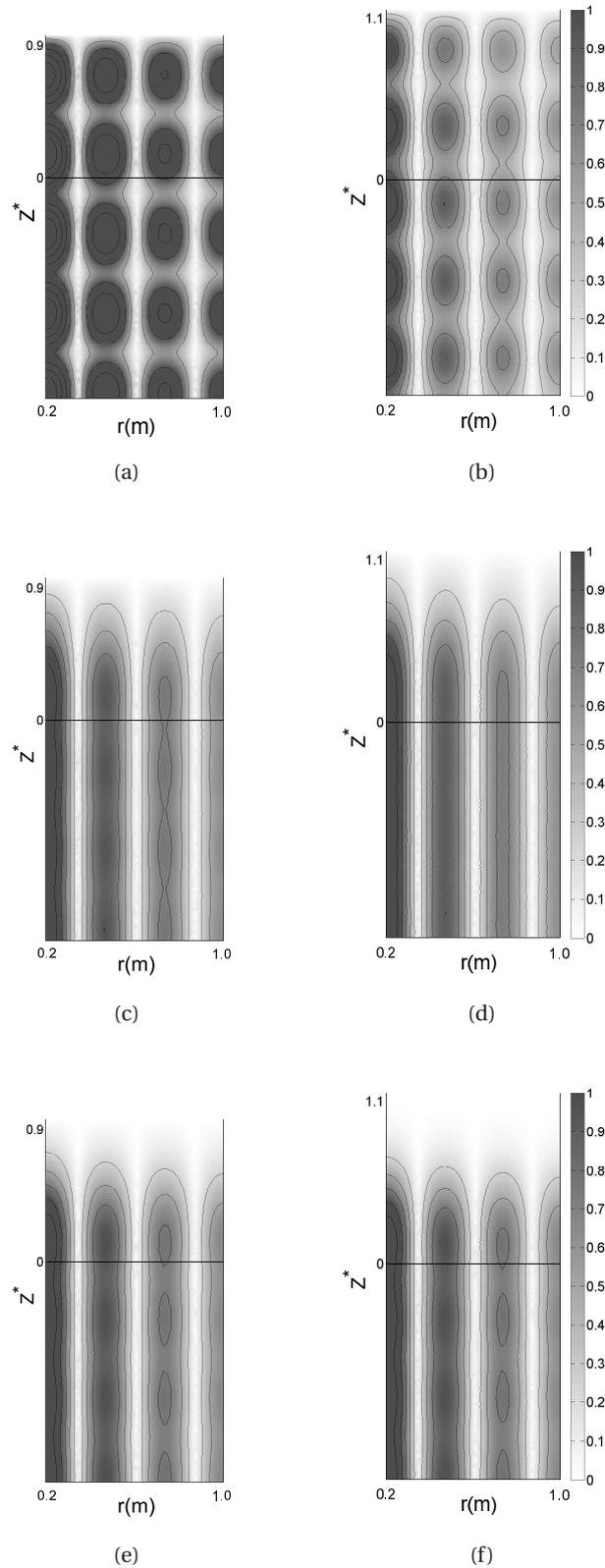


Fig. B.6 Module de la pression du mode (0,3) dans un conduit annulaire droit infini rigide et une terminaison PML (BC) à  $f = 800$  Hz pour:

- (a)  $L_{PML}^* = 0.9$ ,  $\beta_z^* = 1$ , Err>10%; (b)  $L_{PML}^* = 1.1$ ,  $\beta_z^* = 1$ , Err>10%.  
(c)  $L_{PML}^* = 0.9$ ,  $\beta_{opt}^* = 6$ , Err=4%; (d)  $L_{PML}^* = 1.1$ ,  $\beta_{opt}^* = 4$ , Err=1%.  
(e)  $L_{PML}^* = 0.9$ ,  $\beta_z^* = 9$ , Err=5%; (f)  $L_{PML}^* = 1.1$ ,  $\beta_z^* = 9$ , Err=5%.

Repères **a** et **b** : lorsque le paramètre d'absorption est trop faible, l'onde n'est pratiquement pas dissipée et se réfléchit sur la limite extérieure de la couche PML. La contribution des ondes numériques à l'erreur est négligeable comparativement à celle de l'onde PML.

Repères **c** et **d** : à mesure que  $\beta_z^*$  augmente, l'erreur générée par l'onde PML diminue alors que celle provoquée par les ondes numériques s'accroît. Ainsi, à chaque longueur de couche correspond un paramètre d'absorption optimal (noté  $\beta_{opt}$ ) pour lequel l'erreur minimale est atteinte (courbe en pointillé sur la Fig B.5). Par exemple, pour  $L_{PML}^* = 0.9$ ,  $\beta_{opt}^* = 6$ , et pour  $L_{PML}^* = 1.1$ ,  $\beta_{opt}^* = 4$ . On remarque que la valeur de l'erreur minimale diminue avec l'allongement de la couche. En effet, une couche plus grande permet de réduire le paramètre d'absorption (et donc de limiter l'amplitude des ondes numériques) sans former d'onde PML. L'enjeu d'un bon paramétrage consiste à déterminer le  $L_{PML}$  minimal et le  $\beta$  optimal permettant d'obtenir l'erreur désirée.

Repères **e** et **f** : quand  $\beta_z^*$  dépasse  $\beta_{opt}^*$ , l'onde PML est absorbée avant d'atteindre la limite extérieure de la couche PML, et l'erreur est essentiellement dû aux ondes numériques. Les Fig B.6 (e) et (f) montrent des erreurs identiques malgré des longueurs de couche différentes, l'amplitude des ondes numériques étant indépendante de  $L_{PML}$ .

Une étude similaire (non présentée ici) a été menée sur plusieurs modes acoustiques, pour des fréquences et des angles d'incidence différents. Il en ressort qu'un  $\beta_z$  proche de  $5c_0\lambda_z^{-3}$ , et qu'un  $L_{PML}$  proche d'un  $\lambda_z$  assurent de bons résultats quel que soit le mode étudié. De plus, en considérant un profil d'absorption et un pas de discrétisation identique, il apparait que pour des ondes acoustiques de même longueur d'onde axiale, l'erreur liée aux ondes numériques devient plus importante à mesure que  $\theta$  est croissant.

## B.3 Coefficients d'absorption UD et UC

### B.3.1 Formulations UD et UC du coefficient d'absorption

Bermudez [49] propose deux formulations hyperboliques du coefficient d'absorption  $\sigma$  comme alternative à celle quadratique. La première, notée  $\sigma_{UD}$  pour «Unbounded Discontinuous», est donnée par

$$\begin{cases} \sigma_{UD}(r) = \frac{\beta_r}{(|r_f| - r)^n} & |r| \geq r_0 \\ \sigma_{UD}(z) = \frac{\beta_z}{(|z_f| - z)^n} & |z| \geq z_0. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Cette formulation a la particularité de tendre vers l'infini à la limite extérieure de la PML (en  $r_f, z_f$ ), ce qui permet d'empêcher la formation d'onde PML sur la paroi. Néanmoins, ce coeffi-

cient présente une discontinuité à l'interface entre le milieu acoustique et la couche absorbante (en  $r_0, z_0$ ).

Cette discontinuité est corrigée par la seconde formulation, notée  $\sigma_{UC}$  pour «Unbounded Continuous», qui est donnée par

$$\begin{cases} \sigma_{UC}(r) = \frac{\beta_r}{(|r_f| - r)^n} - \frac{\beta_r}{(|r_f| - r_0)^n} & |r| \geq r_0 \\ \sigma_{UC}(z) = \frac{\beta_z}{(|z_f| - z)^n} - \frac{\beta_z}{(|z_f| - z_0)^n} & |z| \geq z_0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Selon Bermudez, les erreurs obtenues sont plus faibles pour  $n = 1$  que pour  $n = 2$ . Il s'agit donc du facteur utilisé dans la suite. Les courbes se rapportant à ces formulations sont présentées Fig B.7.

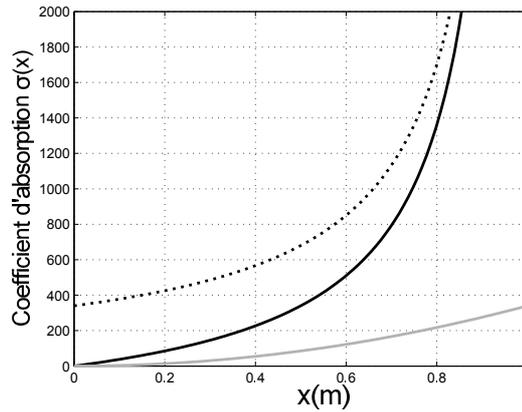


Fig. B.7 Coefficients d'absorptions  $\sigma_{BC}(x)$  (trait continu gris),  $\sigma_{UD}(x)$  (trait pointillé noir) et  $\sigma_{UC}(x)$  (trait continu noir) (pour  $\beta = 340$ ).

### B.3.2 Comparaison de l'erreur obtenue avec les formulations BC, UC et UD

Selon Bermudez [49], dans la configuration particulière d'une PML carrée absorbant les ondes rayonnées d'une source cylindrique centrale,  $\sigma_{UD}$  donne de meilleurs résultats que les autres coefficients malgré la discontinuité qu'elle présente à l'interface. Bermudez montre même que  $\sigma_{UD}$  utilisé avec un paramètre d'absorption fixe égal à  $c_0$  conduit à des erreurs plus faibles que  $\sigma_{BC}$  avec un  $\beta$  optimal. Plus tard, Modave [90] remet en question la stabilité de la formulation  $\sigma_{UD}$ , et affirme que  $\sigma_{UC}$  lui est préférable.

Afin de déterminer quel coefficient d'absorption donne les meilleurs résultats dans notre configuration d'étude, la méthode de calcul de l'erreur précédente est utilisée et appliquée à un con-

duit cylindrique de rayon  $R = 1.0$  m, et d'une longueur  $z_0 = 1.0$  m (voir Fig B.8). La longueur de la couche dissipative reste ici fixée à une longueur d'onde  $L_{PML} = \lambda$ . De même, les paramètres de la PML sont adimensionnés par rapport à  $\lambda$ , tel que

$$L_{PML}^* = L_{PML}/L_{ref} \text{ avec } L_{ref} = \lambda, \quad (\text{B.8})$$

et

$$\beta_z^* = \beta_z/\beta_{ref} \quad (\text{B.9})$$

avec  $\beta_{ref} = c_0\lambda^{-3}$  pour le coefficient  $\sigma_{BC}$ , et  $\beta_{ref} = c_0$  pour les coefficients  $\sigma_{UD}$  et  $\sigma_{UC}$ . Une taille de maille de  $\lambda/30$  est appliquée dans les deux domaines.

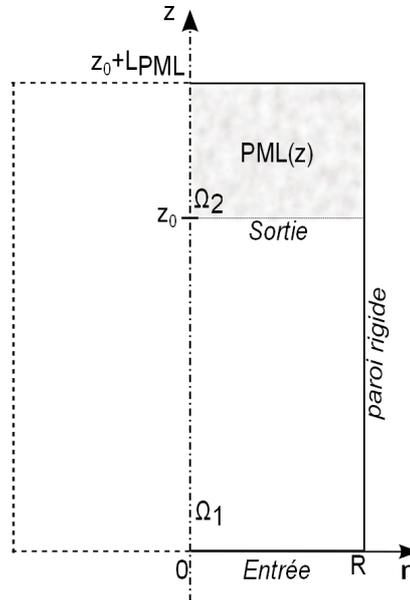


Fig. B.8 Géométrie d'un conduit droit cylindrique rigide avec une terminaison PML.

Ainsi, dans cet exemple, deux modes sont testés à la fréquence  $f = 800$  Hz. Le premier correspond au mode (0,0) ( $k = 14.8 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_z = 14.8 \text{ m}^{-1}$ ) caractérisé par un angle d'incidence normal dans la couche ( $\theta = 0^\circ$ ), ce qui implique une faible sensibilité aux ondes numériques et donc une meilleure atténuation. Le second est un mode (0,3) ( $k = 14.8 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_z = 10.7 \text{ m}^{-1}$ ) caractérisé par un angle d'incidence élevé ( $\theta = 43.5^\circ$ ) synonyme d'une forte sensibilité aux réflexions numériques. Les figures B.9 et B.10 montrent l'erreur relative calculée dans le domaine  $\Omega_1$  en fonction de  $\beta_z^*$  pour chaque coefficient d'absorption, respectivement pour les modes (0,0) et (0,3).

Concernant le mode (0,0) (Fig B.9),  $\sigma_{UD}$  et  $\sigma_{UC}$  assurent une erreur plus faible que  $\sigma_{BC}$  pour une même longueur de PML. Comme l'indique Bermudez, le paramètre d'absorption optimal se trouve bien à proximité de  $\beta_z^* = 1$  ( $\beta_z = 340$ ).  $\sigma_{UD}$  semble toutefois montrer une grande sensibilité aux ondes numériques avec une forte croissance de l'erreur. Pour le mode (0,3) (Fig B.10),  $\sigma_{UD}$

génère trop de réflexions numériques pour atteindre une erreur satisfaisante. Ainsi, dans cette configuration,  $\sigma_{UC}$  et  $\sigma_{BC}$  sont plus performants.  $\sigma_{UC}$  permet d'obtenir l'erreur la plus faible, là encore autour de  $\beta_z = 340$ .

Dans le cas test de Bermudez, les ondes rayonnées sont proches de la configuration en onde plane. Or, il est vrai que  $\sigma_{UD}$  donne de bons résultats pour ce cas. Mais en présence d'ondes sensibles aux réflexions numériques, la discontinuité de  $\sigma_{UD}$  conduit à des erreurs importantes. Finalement, le choix du meilleur coefficient d'absorption dépend de la géométrie du cas traité. Pour une géométrie où les ondes à faible angle d'incidence sont dominantes, l'utilisation de  $\sigma_{UD}$  ne pose pas de problème particulier. Par contre, en présence d'ondes à incidence élevée,  $\sigma_{BC}$  et  $\sigma_{UD}$  donnent de meilleurs résultats.

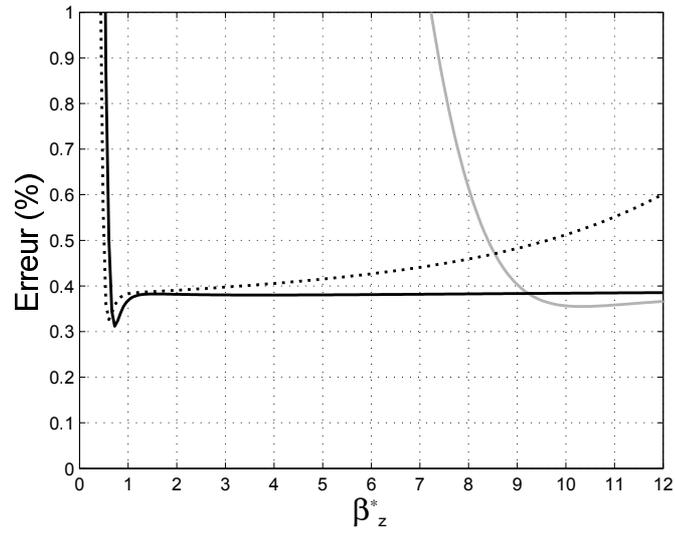


Fig. B.9 Erreur relative (en %) associée à la pression FEM-PML du mode (0,0) à 800 Hz avec:  $\sigma_{BC}$  (trait continu gris);  $\sigma_{UD}$  (trait pointillé noir);  $\sigma_{UC}$  (trait continu noir)

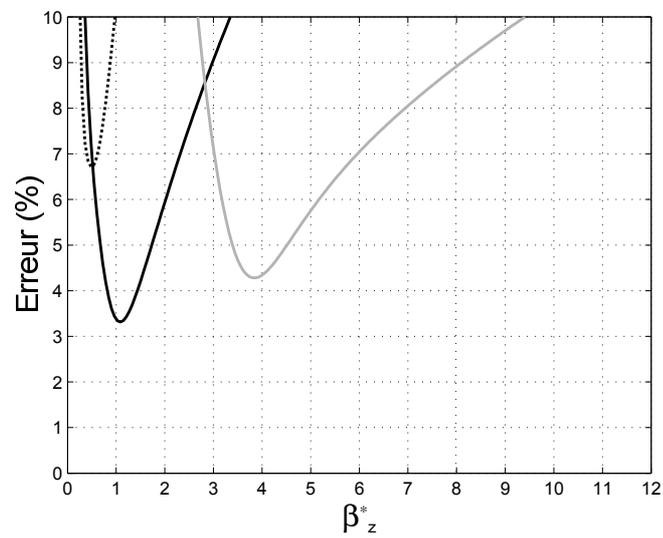


Fig. B.10 Erreur relative (en %) associée à la pression FEM-PML du mode (0,3) à 800 Hz avec:  $\sigma_{BC}$  (trait continu gris);  $\sigma_{UD}$  (trait pointillé noir);  $\sigma_{UC}$  (trait continu noir)

## **Annexe C**

# **Confrontation essais/calculs: résultats supplémentaires**

## C.1 Traitement perforé

### C.1.1 Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.1$

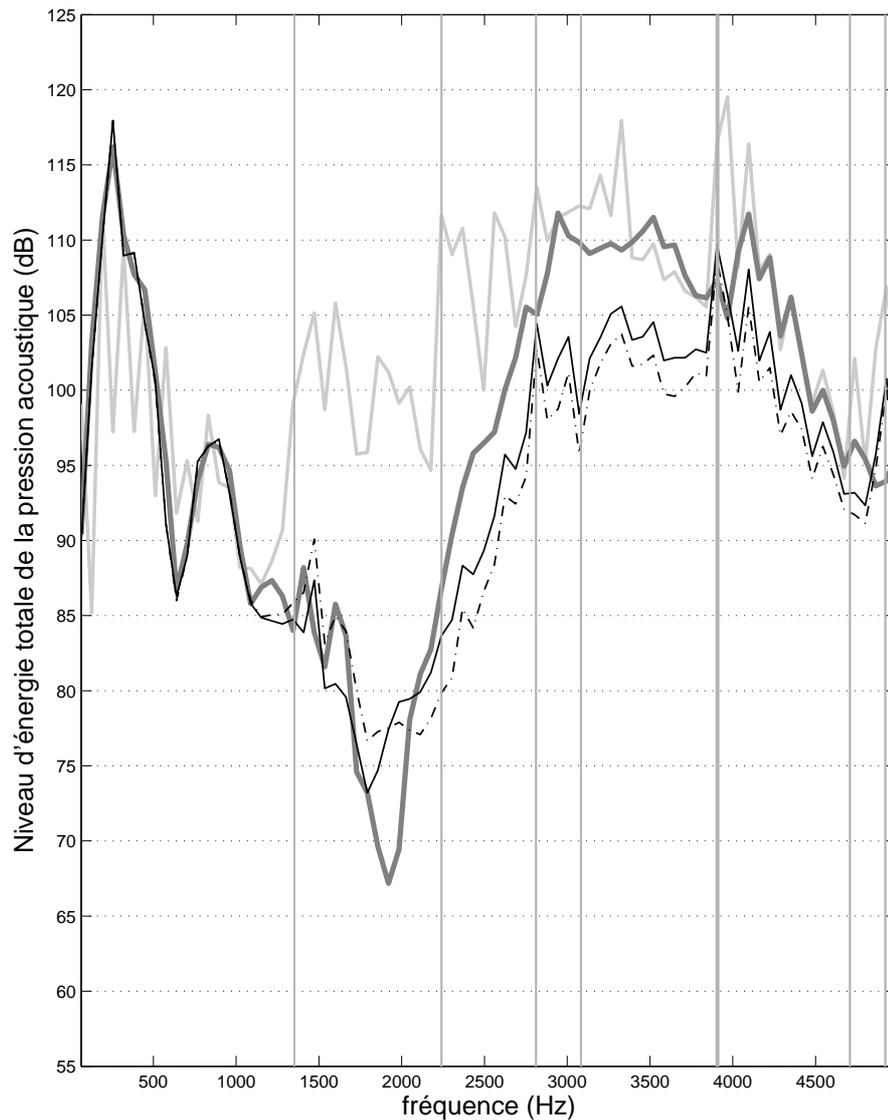


Fig. C.1 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = +0.1$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Guess (en noir - -).

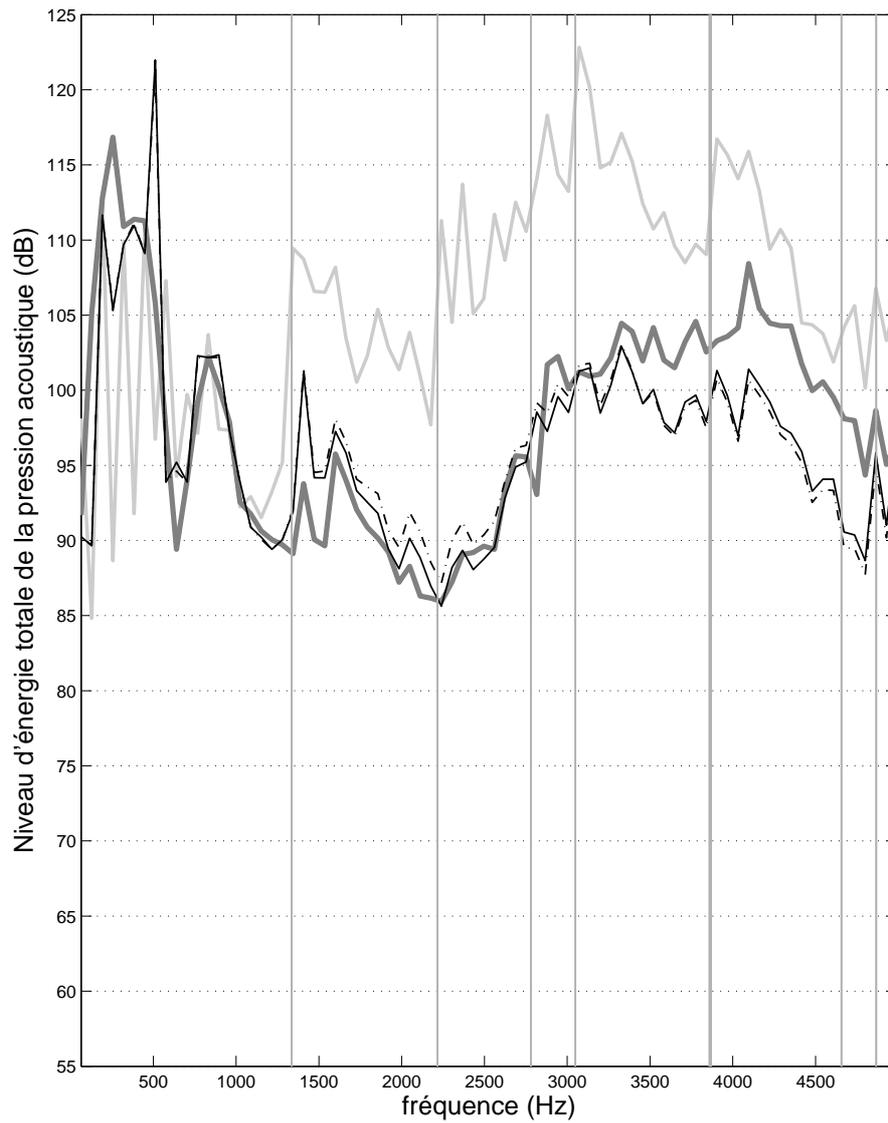
**C.1.2 Cas d'un écoulement positif  $M_0 = +0.2$** 

Fig. C.2 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = +0.2$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir -); Guess (en noir - -).

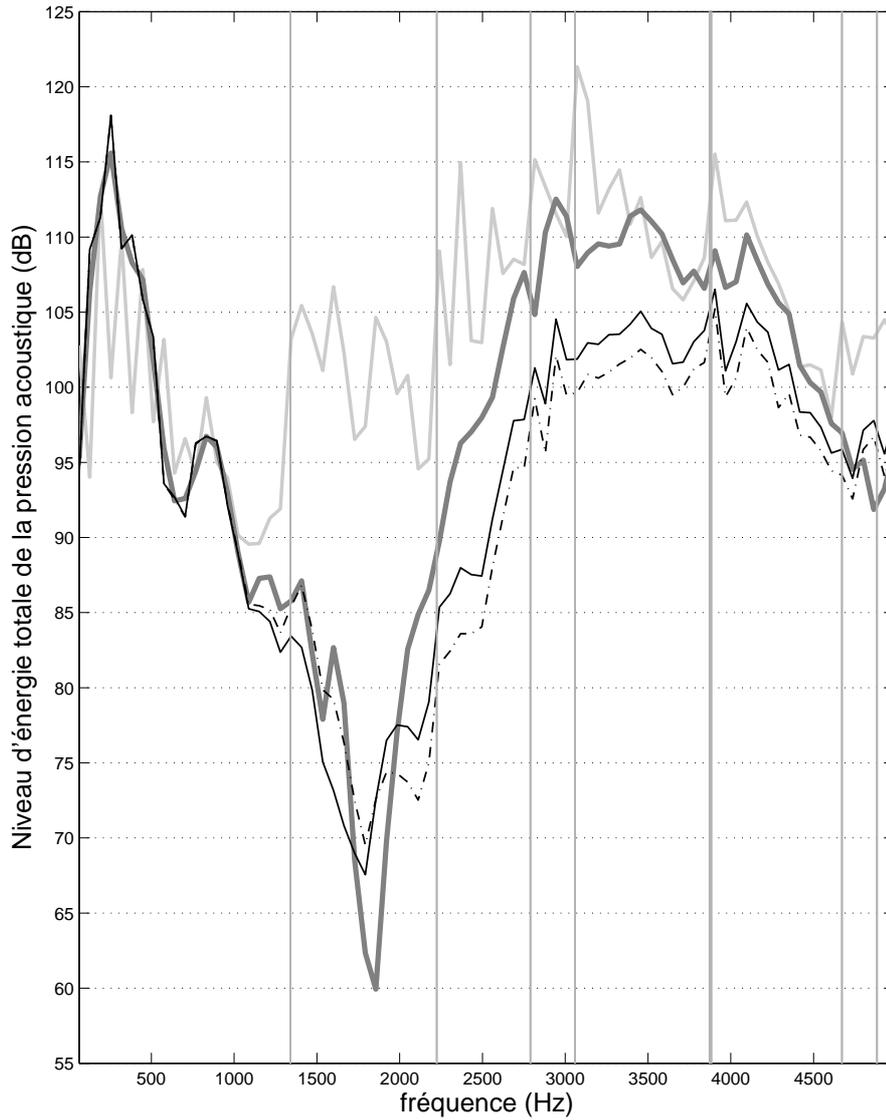
**C.1.3 Cas d'un écoulement négatif  $M_0 = -0.1$** 

Fig. C.3 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = -0.1$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris –);  $S_2$  (en gris –);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir –); Guess (en noir – –).

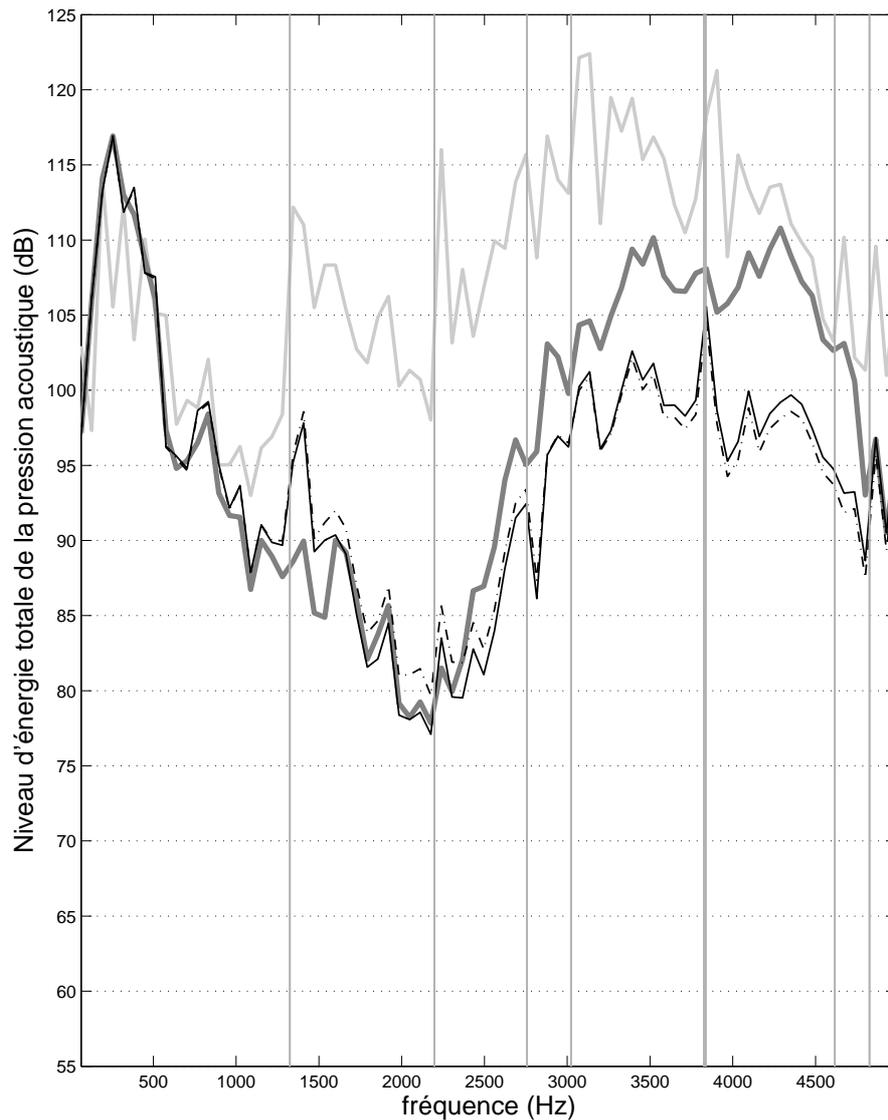
**C.1.4 Cas d'un écoulement négatif  $M_0 = -0.2$** 

Fig. C.4 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test perforé et un écoulement  $M_0 = -0.2$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de Yu (en noir -); Guess (en noir - -).

### C.1.5 Influence de l'écoulement sur la perte par insertion (Insertion Loss)

La figure C.5 présente la perte par insertion (ou IL pour *Insertion Loss*) concernant le tronçon perforé, pour différents écoulements. l'*Insertion Loss* est donné par

$$IL = L_p(z_2, f)_{rigide} - L_p(z_2, f)_{traité} \text{ en dB} \quad (C.1)$$

avec  $L_p(z_2, f)_{rigide}$  le niveau acoustique expérimental sur la section  $S_2$  en présence d'un tronçon rigide non traité, et  $L_p(z_2, f)_{traité}$  le niveau acoustique expérimental sur la section  $S_2$  en présence du traitement.

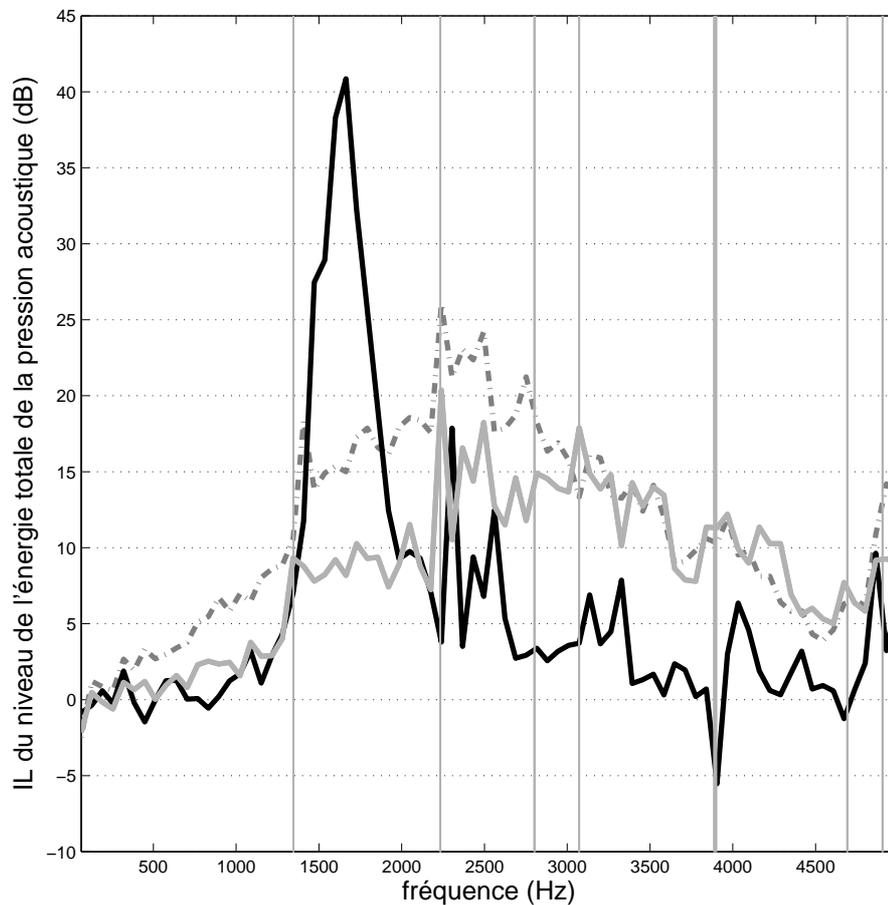


Fig. C.5 IL du niveau de l'énergie totale de la pression acoustique expérimentale (en dB) pour un tronçon test perforé:

- pour un écoulement  $M_0 = -0.25$  (en gris - -)
- sans écoulement (en noir -)
- pour un écoulement  $M_0 = +0.25$  (en gris -).

## C.2 Traitement microperforé

### C.2.1 Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.1$

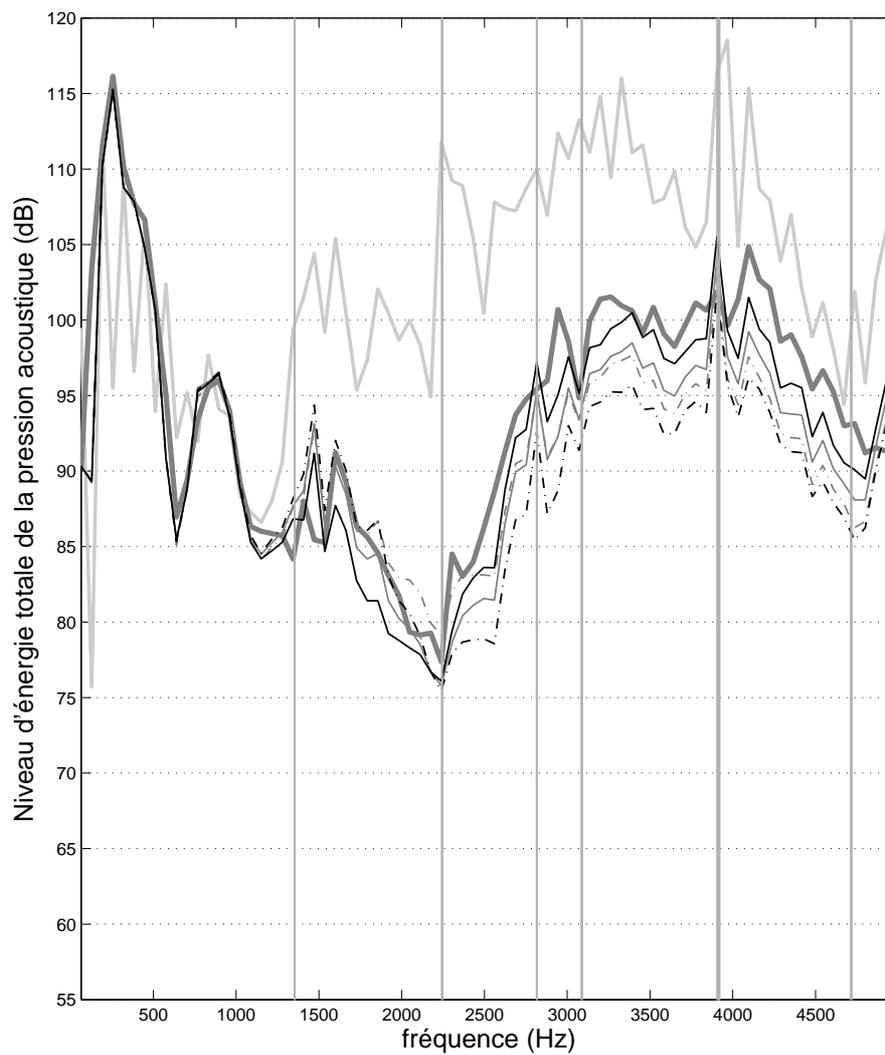


Fig. C.6 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test microperforé et un écoulement  $M_0 = +0.1$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Cobo (en noir - -); Allam 2011 (en gris - -); Allam 2008 (en gris -).

### C.2.2 Cas d'un écoulement positif $M_0 = +0.2$

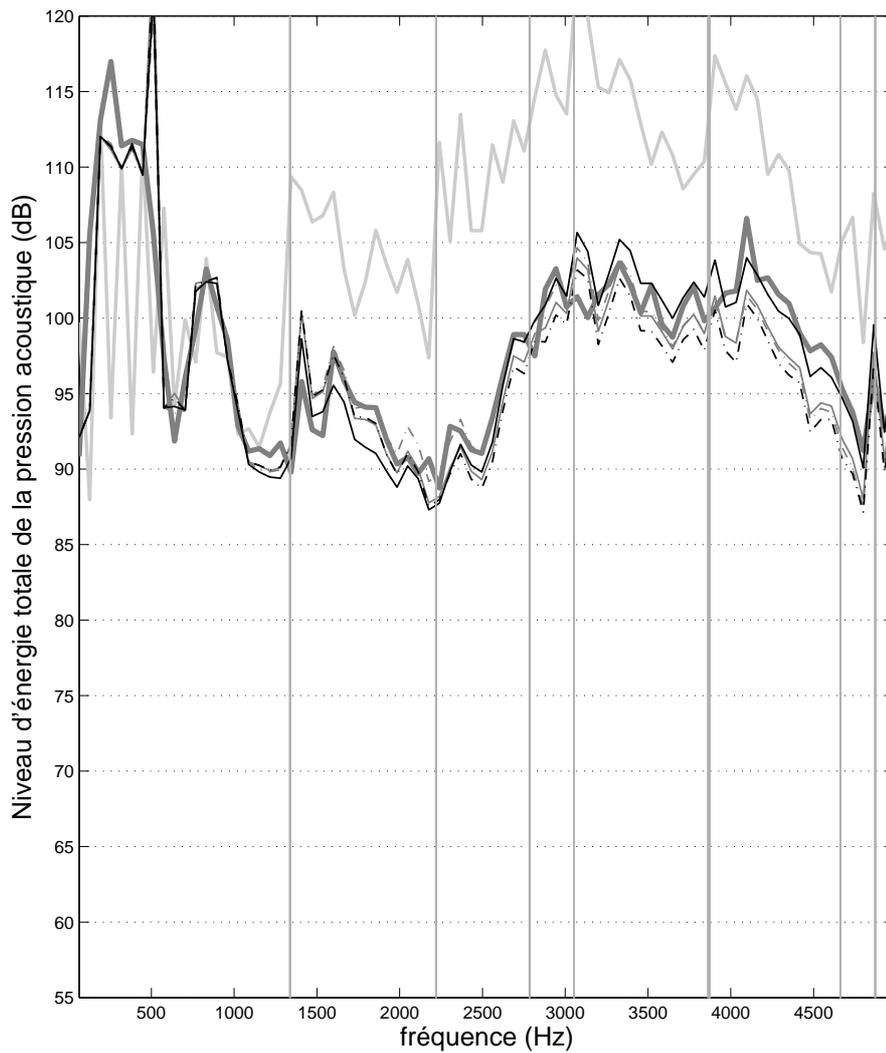


Fig. C.7 Niveau d'énergie totale de la pression acoustique (en dB) pour un tronçon test microperforé et un écoulement  $M_0 = +0.2$ :

- mesure expérimentale sur la section:  $S_1$  (en gris -);  $S_2$  (en gris -);
- calcul numérique sur la section  $S_2$  avec le modèle de : Yu (en noir -); Cobo (en noir -); Allam 2011 (en gris -); Allam 2008 (en gris -).

### C.2.3 Influence de l'écoulement sur la perte par insertion (Insertion Loss)

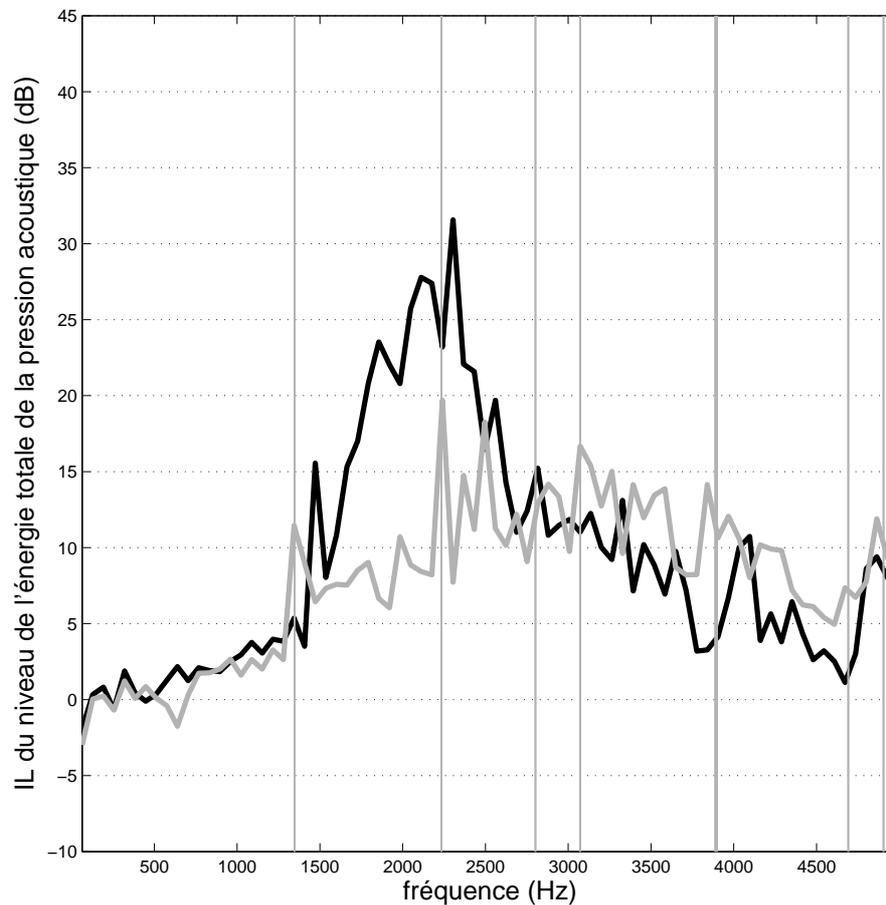


Fig. C.8 IL du niveau de l'énergie totale de la pression acoustique expérimentale (en dB) pour un tronçon test microperforé:

- sans écoulement (en **noir** –)
- pour un écoulement  $M_0 = +0.25$  (en **gris** –).

# Bibliographie

- [1] F. Treyssède, *Etude de la propagation acoustique en présence d'écoulement non uniforme par une méthode éléments finis mixtes basée sur l'équation de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2002.
- [2] G. Gabard, *Méthodes numériques et modèles de sources aéroacoustiques fondés sur l'équation de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [3] G. Legendre, *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [4] H. Beriot, *Eléments finis d'ordre élevé pour l'opérateur de Galbrun en régime harmonique*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2008.
- [5] A. D. Pierce and R. T. Beyer, "Acoustics: An introduction to its physical principles and applications," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87(4), pp. 1826–1827, 1990.
- [6] J. P. Lefévre, *Acoustique Générale - Chapitre 1: Bases Physiques de l'Acoustique*. Les Editions de Physique, Les Ulis, France, 1994.
- [7] E. Redon, *Etude de la propagation acoustique en espace confiné en présence d'écoulement non isotherme par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1996.
- [8] C. Karra, *Formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution des problèmes de couplage vibro-acoustique dans un fluide thermovisqueux*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [9] H. Galbrun, *Propagation d'Une Onde Sonore Dans l'Athmosphère et Théorie des Zones de Silence*. Gauthier Villars, Paris, 1931.
- [10] C. Bailly, *Modélisation du rayonnement acoustique des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1994.
- [11] E. Longatte and P. Lafon, "Computation of acoustic propagation in two-dimensional sheared ducted flow," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 38, pp. 389–394, 2000.
- [12] R. J. Astley and W. Eversman, "Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow, part ii: the finite element method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 103–121, 1981.

- [13] B. Poirée, “Les équations de l’acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait (equations of linear and non linear acoustics in a perfect fluid flow),” *Acustica*, vol. 57, pp. 5–25, 1985.
- [14] O. A. Godin, “Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid,” *Wave motion*, vol. 25, pp. 143–167, 1996.
- [15] C. Peyret and G. Elias, “Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110(2), pp. 661–668, 2001.
- [16] F. Treyssède, G. Gabard, and M. B. Tahar, “A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an eulerian-lagrangian description,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, pp. 705–716, 2003.
- [17] B. Poirée, *Les équations de l’acoustique linéaire et non linéaire dans les fluides en mouvement*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1982.
- [18] P. Mungur and H. E. Plumbee, “Propagation and attenuation of sound in a soft-walled annular duct containing a sheared flow,” *NASA SP-207*, pp. 305–327, 1969.
- [19] W. Eversman and R. J. Beckemeyer, “Transmission of sound in ducts with thin shear layers—convergence to the uniform flow case,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 52(1B), pp. 216–220, 1972.
- [20] M. K. Myers, “On the acoustic boundary condition in the presence of flow,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 71, pp. 429–434, 1980.
- [21] E. Brambley, “Waves in vortical flow (part iii essay),” 2004.
- [22] X. Wang and K. J. Bathe, “Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 2001–2017, 1997.
- [23] A. S. B.-B. Dhia, E. M. Duclairoir, and J. F. Mercier, *Numerical simulation of acoustic propagation in a shear flow in the frequency domain*. 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES, 2005.
- [24] A. S. B.-B. Dhia, E. M. Duclairoir, and J. F. Mercier, “Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 204, pp. 428–439, 2007.
- [25] K. Berriri, *Approche analytique et numérique pour l’aéroacoustique en régime transitoire par le modèle de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, 2006.
- [26] D. Givoli, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids*. Springer, 2008.
- [27] D. Givoli, “High-order local non-reflecting boundary conditions: a review,” *Wave Motion*, vol. 39, pp. 319–326, 2004.
- [28] O. V. Atassi and J. M. Galan, “Implementation of nonreflecting boundary conditions for the nonlinear euler equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp. 1643–1662, 2008.
- [29] T. Hagstrom, E. Bécache, D. Givoli, and K. Stein, “Complete radiation boundary conditions for convective waves,” *Communications in Computational Physics*, vol. 11, pp. 610–628, 2012.

- [30] D. Soares, "Acoustic modelling by bem-fem coupling procedures taking into account explicit and implicit multidomain decomposition techniques," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, pp. 1076–1093, 2009.
- [31] R. J. Astley, "Numerical methods for noise propagation in moving flows, with application to turbofan engines," *Acoustical Science & Technology*, vol. 30, p. 4, 2009.
- [32] J. P. Bérenger, "A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185–200, 1994.
- [33] I. Harari, M. Slavutin, and E. Turkel, "Analytical and numerical studies of a finite element pml for the helmholtz equation," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 8, pp. 121–137, 2000.
- [34] J. S. Hesthaven, "On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized euler equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 142, pp. 129–147, 1998.
- [35] C. K. W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli, "Perfectly matched layers as an absorbing boundary condition for the linearized euler equations in open and ducted domains," *Journal of Computational Physics*, vol. 144, pp. 213–243, 1998.
- [36] S. Abarbanel, D. Gottlieb, and J. S. Hesthaven, "Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics," *Journal of Computational Physics*, vol. 145(2), pp. 266–283, 1999.
- [37] F. Q. Hu, "A stable perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables," *Journal of Computational Physics*, vol. 173, pp. 455–480, 2001.
- [38] F. Q. Hu, "Development of pml absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics: a progress review," *Computers & Fluids*, vol. 37, pp. 336–348, 2008.
- [39] J. Diaz and P. Joly, "A time domain analysis of pml models in acoustics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195(29-32), pp. 3820–3853, 2006.
- [40] E. Bécache, A. S. B.-B. Dhia, and G. Legendre, "Perfectly matched layers for the time-harmonic acoustics in the presence of uniform flow," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 44(3), pp. 1191–1217, 2006.
- [41] X. Feng, *Modélisation numérique par éléments finis d'un problème aéroacoustique en régime transitoire : application à l'équation de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2013.
- [42] A. Bermudez, L. M. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodriguez, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids*. Springer, 2008.
- [43] P. Joly, "Une introduction aux méthodes pml pour la propagation d'ondes en régime transitoire," *INRIA*, 2003.
- [44] J. Diaz, *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2005.
- [45] G. Gabard, R. J. Astley, and M. B. Tahar, "Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics. ii: Two-dimensional effects," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, pp. 947–973, 2005.
- [46] Pridmore-Brown, "Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 4, pp. 393–406, 1958.

- [47] F. Treyssède and M. B. Tahar, "Comparison of a finite element model with a multiple-scales solution for sound propagation in varying ducts with swirling flows," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, pp. 2716–2730, 2004.
- [48] J. Cooper and N. Peake, "Propagation of unsteady disturbances in a slowly varying duct with mean swirling flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 445, pp. 207–234, 2001.
- [49] A. Bermudez, L. M. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodriguez, "An optimal perfectly matched layer with unbounded function for time-harmonic acoustic scattering problems," *Journal of Computational Physics*, vol. 223, pp. 469–488, 2007.
- [50] E. Bécache, A. S. B.-B. Dhia, and G. Legendre, "Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, pp. 409–433, 2004.
- [51] E. Duclairoir, *Rayonnement acoustique dans un écoulement cisailé : une méthode d'éléments finis par la simulation du régime harmonique*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2007.
- [52] J. L. Kerrebrock, "Small disturbances in turbomachine annuli with swirl," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 15, pp. 794–803, 1977.
- [53] A. H. Marsh, "Study of acoustical treatments for jet-engine nacelles," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 43(5), pp. 1137–1156, 1968.
- [54] I. B. Crandall, "Theory of vibrating systems and sound," *Van Nostrand*, p. 229, 1926.
- [55] U. Ingard, "On the theory and design of acoustic resonators," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 25, pp. 1037–1062, 1953.
- [56] A. W. Guess, "Calculation of perforated plate liner parameters from specified acoustic resistance and reactance," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 40(1), pp. 119–137, 1974.
- [57] W. J. Worraker and N. A. Halliwell, "Jet engine liner impedance: An experimental investigation of cavity neck flow/acoustics in the presence of a mach 0.5 tangential shear flow," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 103(4), pp. 573–592, 1985.
- [58] A. S. Hersh and B. E. Walker, "Acoustic behavior of helmholtz resonators: part ii. effects of grazing flow," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 079, 1995.
- [59] C. Malmary, *Etude théorique et expérimentale de l'impédance acoustique de matériaux en présence d'un écoulement d'air tangential*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 2000.
- [60] J. M. Roche, *Simulation numérique de l'absorption acoustique de matériaux résonnants en présence d'écoulement*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 2011.
- [61] J. Primus, *Détermination de l'impédance acoustique de matériaux absorbants en écoulement par méthode inverse et mesures LDV*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, 2012.
- [62] U. Ingard and S. Labate, "Acoustic circulation effects and the nonlinear impedance of orifices," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 22(2), pp. 211–218, 1950.
- [63] S. Lidoine, I. Terrasse, T. Abboud, and A. Bennani, "Numerical prediction of sdof-perforated plate acoustic treatment impedance. part 1: Linear domain," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2007.
- [64] L. J. Sivian, "Acoustic impedance of small orifices," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 7, pp. 94–101, 1935.

- [65] E. J. Rice, C. E. Feiler, and L. W. Acker, "Acoustic and aerodynamic performance of a 6-foot-diameter fan for turbofan engines, iii-performance with noise suppressors," *NASA*, vol. 25, 1971.
- [66] J. F. Groeneweg, "Current understanding of helmoltz resonator arrays as duct boundary conditions," *Basic Aerodynamic Noise Research, NASA*, pp. 357–368, 1969.
- [67] S. Allam and M. Abom, "Experimental characterization of acoustic liners with extended reaction," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 96, p. 3074, 2008.
- [68] A. B. Bauer, "Impedance theory and measurements on porous acoustic liners," *Journal of Aircraft*, vol. 14(8), pp. 720–728, 1977.
- [69] J. Yu, M. Ruiz, and H. W. Kwan, "Validation of goodrich perforate liner impedance model using nasa langley test data," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, p. 2930, 2008.
- [70] P. Cobo, H. Ruiz, and J. Alvarez, "Double-layer microperforated panel/porous absorber as liner for anechoic closing of the test section in wind tunnels," *Acta Acustica United with Acustica*, vol. 96, pp. 914–922, 2010.
- [71] S. Allam and M. Abom, "A new type of muffler based on microperforated tubes," *Journal of Sound and Acoustics*, vol. 133, 2011.
- [72] D. Y. Maa, "Theory and design of micro perforated-panel sound absorbing construction," *SCIENCE CHINA Mathematics*, vol. XVIII, pp. 55–71, 1975.
- [73] D. Y. Maa, "Noise control engineering journal," *Micro-perforated-panel wide-band absorbers*, vol. 29(3), pp. 77–84, 1987.
- [74] D. Y. Maa, "Microperforated panel at high sound intensity," *Proceedings of internoise 94, Yokohama, Japan*, 1994.
- [75] D. Y. Maa, "Potential of microperforated panel absorber," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104(5), pp. 2861–2866, 1998.
- [76] R. Rademaker, "Publishable synthesis report ducat," *NL-01-T5-9, NLR-TR-2001-170*, 2001.
- [77] A. Sitel, *Méthodes de mesure des matrices acoustiques des discontinuités à un ou deux ports en présence des modes élevés*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2005.
- [78] M. Taktak, *Mesure de la matrice de diffusion d'un tronçon traité cylindrique recouvert par un matériau: Applications à la mesure de son efficacité et à la détermination de son impédance homogénéisée*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2008.
- [79] J. M. Ville and F. Foucart, "Experimental setup for measurement of acoustic power dissipation in lined ducts for higher order modes propagation with air mean-flow conditions," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114(4), pp. 1742–1748, 2003.
- [80] Z. Lazreq and J. M. Ville, "Acoustic calibration of a pressure-velocity probe," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 100(1), pp. 364–371, 1996.
- [81] J. M. Auger, *Méthode de mesure de la structure modale du champ acoustique dans un conduit cylindrique par double transformée de Fourier-Lommel avec ou sans écoulement*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1987.

- [82] J. P. Pasqualini, J. M. Ville, and J. F. de Belleval, "Development of a method of determining the transverse wave structure in a rigid wall axisymmetric duct," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 77(5), pp. 1921–1926, 1985.
- [83] Y. Reymen, M. Baelmans, and W. Desmet, "Time-domain impedance formulation suited for broadband simulations," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 3519, 2007.
- [84] S. Zheng and M. Zhuang, "Verification and validation of time domain impedance boundary condition in lined ducts," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 43, no. 2, pp. 306–313, 2005.
- [85] Y. Ozyuruk and L. N. Long, "Time-domain calculation of sound propagation in lined ducts with sheared flows," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 38, no. 5, pp. 768–773, 2000.
- [86] M. Taktak, J. M. Ville, M. Haddar, G. Gabardl, and F. Foucart, "An indirect method for the characterization of locally reacting liners," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 127(6), pp. 3548–3559, 2010.
- [87] Y. Renou and Y. Aurégan, "Failure of the ingard-myers boundary condition for a lined duct: An experimental investigation," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 130, no. 1, pp. 52–60, 2011.
- [88] W. R. Watson and M. G. Jones, "Evaluation of wall boundary conditions for impedance education using a dual-source method," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 2199, 2012.
- [89] F. Collino and P. B. Monk, "Optimizing the perfectly matched layer," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 164, pp. 157–171, 1998.
- [90] A. Modave, E. Delhez, and C. Geuzaine, "Optimizing perfectly matched layers in discrete contexts," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 99(6), pp. 410–437, 2014.