



HAL
open science

La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire

Assia Nechache

► **To cite this version:**

Assia Nechache. La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris 7 2016. Français. NNT: . tel-01345747

HAL Id: tel-01345747

<https://theses.hal.science/tel-01345747>

Submitted on 15 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7) SORBONNE PARIS CITÉ

ÉCOLE DOCTORALE

« Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences,
didactique des disciplines » (ED 400)

Laboratoire de didactique André Revuz

DOCTORAT

Spécialité : Didactique des mathématiques

Assia NECHACHE

**La validation dans l'enseignement des probabilités au
niveau secondaire**

Thèse dirigée par Monsieur Alain KUZNIAK
Soutenue le 30 juin 2016

Jury :

Viviane Durand-Guerrier, Université de Montpellier, Rapporteur
Denis Tanguay, Université UQAM (Canada), Rapporteur
Vincent Beck, Université d'Orléans, Examineur
Bernard Parzysz, Université d'Orléans, Examineur
Alain Kuzniak, Université Paris Diderot, Directeur

Remerciements

Une thèse est un projet pensé par un doctorant en accord avec son directeur de thèse.

À l'issue de la rédaction de ce manuscrit, je suis plus que jamais convaincue que la réalisation d'une thèse nécessite certes du temps mais surtout des interactions sociales. Ainsi, ma thèse a été le fruit d'un travail de plusieurs années qui a pu aboutir grâce au soutien de nombreuses personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt, manifestés à l'égard de ma recherche, m'ont permis de progresser.

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Alain Kuzniak. Merci pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de me diriger, pour ses qualités humaines, d'écoute et de compréhension, pour sa grande disponibilité, pour les propos clairs par lesquels il a su reformuler mes idées brouillonnes, pour m'avoir laissée la liberté de tester diverses pistes dont certaines n'ont abouti sans manquer de me faire avancer dans mon travail. Merci également pour les heures de discussion autour de ce manuscrit, des probabilités et des espaces de travail mathématique. Encore merci pour m'avoir accompagnée bien au-delà de la thèse, dans des colloques notamment (COPIRELEM, CERME, etc.). Tout cela restera présent pour le docteur que je suis et l'enseignante chercheuse que je serai peut-être.

Merci à Viviane Durand-Guerrier et à Denis Tanguay, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour la lecture attentive de mon manuscrit et leurs remarques qui m'ont permis d'évoluer, d'enrichir mes réflexions mais aussi d'envisager mon travail sous un autre angle. Pour tout cela, je les remercie.

Je remercie Vincent Beck, qui m'a fait l'honneur de participer à mon jury de thèse, pour son soutien tout au long de mon travail de recherche.

Je remercie Bernard Parzysz pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Merci également aux nombreux moments d'échanges autour du domaine des probabilités. Ces échanges m'ont permis de comprendre certaines facettes de ce domaine mais aussi d'évoluer dans ma réflexion.

Je remercie mes collègues de l'ESPE Centre - Val de Loire où j'enseigne actuellement. Merci pour votre soutien tout au long de ce travail de thèse.

J'ai eu et j'ai la chance de faire partie d'une équipe, aussi dynamique que sympathique, sur laquelle je peux compter. Merci à Jean Toromanoff, Hélène Gagneux, Clara Auclair, Vincent Beck, Sandrine Grellier, Pierre Bouchaud, Jean-Berky Nguala, Patrick Wieruszewski, Patrick Templereau, Eric Decreux. Merci aussi à mon directeur de l'ESPE, Olivier Combacau, qui m'a également soutenu.

Je remercie Najat Vallaud-Belkacem, Ministre de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, et son cabinet, qui ont soutenu ma demande auprès de l'Université d'Orléans afin d'obtenir une décharge d'un semestre pour rédiger ce manuscrit.

Merci à tous les enseignants pour m'avoir si chaleureusement ouvert leurs classes, pour m'avoir accordée du temps pour les entretiens, mais également pour discuter et me donner des conseils. Leurs collaborations ont grandement contribué à ce travail de thèse. Merci à Chrystel, Laura, Bernard, Julien, Pascale, Françoise, Katia, Nicolas.

Dans ma recherche, j'ai travaillé avec le modèle d'espace de travail mathématique (ETM) qui est un environnement intellectuel nécessitant des interactions avec d'autres cadres ou modèles pour pouvoir fonctionner. Pour ma part, j'ai travaillé au sein du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) de l'Université Paris-Diderot qui est un espace de travail non pas mathématique mais didactique et qui offre un environnement intellectuel et social propice à la réalisation d'un projet de thèse et à l'épanouissement d'un thésard. Je voudrais de fait remercier les membres du LDAR pour leurs accueils, leurs attentions, leurs disponibilités, leurs conseils avisés. Merci également à Cécile de Hosson qui dirige avec attention le LDAR et sa chorale « Ô huitième ».

Merci aux membres du groupe de jeunes chercheurs du LDAR. Un groupe dans lequel on se sent bien accueilli et bien entouré. Un groupe que j'ai eu le plaisir de codiriger avec Valentin. Merci à Valentin, Robin, Zoé, Soraya, Lynn, Charlotte DV, Léonard, Kata, Cécile, Nadine, Jorge, Stéphane, Alice, Sophie, Zakaria, Ratar, Inès, Dominique, Anne-Marie, Edith, Nassima, Noémie. Merci à ma demi-sœur de thèse, Charlotte, pour nos échanges sur notre travail, nos angoisses, nos inquiétudes, mais aussi pour les bons moments partagés pendant ces 3 dernières années de thèse. Merci Charlotte pour ta bonne humeur et ton sourire. À toi de jouer maintenant ! Il ne te reste que la conclusion à faire...

Merci à Séverine, Julie, Kévin, Alice, Zoé, Christophe, Charlotte d'avoir pris le temps de m'écouter et de me conseiller pendant les répétitions.

Merci aux jeunes chercheurs mathématiciens des 6^e et 7^e étages. J'ai eu la chance d'emménager en tant que didacticienne dans les bureaux des matheux. Cela m'a permis de faire de jolies rencontres humaines, de participer et d'exposer dans le groupe des Bourbakettes et de constituer une équipe de course à pieds pour des entrainements réguliers. Merci à Kévin, David, Eli, Victoria, Julie, Richard, Jesus, Marco, Aurélien, Charles, Florent, Nicolas, Jeremy. Pour finir merci à Baptiste mon grand copain du bureau 660, pour son humeur, pour les moments de plaisir partagés, pour ses réunions avec son directeur de thèse...

Merci à Stéphane, Leonard, Jorge, Ponneh, Ines, Luz, Diana pour les nombreux moments partagés autour des repas pris sur la barge du CROUS notamment.

Merci à Robin, Pablo, Valentin, Luz, Laurence, Isabelle, Cécile, Nicolas, Maha avec qui j'ai passé de très bons moments pendant les vacances d'été, dans les locaux de Condorcet. Locaux dans lesquels l'écriture de ce manuscrit a débuté.

Merci à Christophe pour tes grandes qualités humaines d'écoute, pour ta grande disponibilité. Merci de m'avoir souvent rassurée et remonté le moral. Pour ma part, je ne peux imaginer le LDAR sans Christophe.

Merci à Jérôme, LE précieux bibliothécaire de l'IREM de Paris pour sa bonne humeur, sa disponibilité et son efficacité. Merci de m'avoir souvent dépanné en m'envoyant des références, en me scannant des articles.

Merci à Evelyne, Martine, Nadine, Sandrine. Avec elles, des formalités administratives qui peuvent être parfois stressantes deviennent par magie des formalités légères. Merci pour votre écoute et votre attention.

Merci à Laetitia, la Mac Gyver de l'audiovisuel, pour les nombreuses réservations de salles, pour tes nombreux dépannages. Merci pour ton sourire quotidien.

Merci à Leonard, Ponneh, Victoria, Jesus, Jorje, Marco, Lynn d'avoir préparé des recettes culinaires de leurs pays et ainsi permis aux invités de mon pot de thèse de faire un tour du monde culinaire.

Je n'ai jamais raté les rencontres des jeunes chercheurs de l'ARDM durant ma thèse. Que ce soit pendant le séminaire national ou pendant les WEJCH, ou lorsque j'ai été coordinatrice de ce groupe, c'était toujours un plaisir de discuter avec ceux que je voyais moins souvent. Merci à Nicolas, Valérie, Laetitia, Anne, Maud, Monica, Christian.

Cette thèse est également l'aboutissement de plusieurs années d'études supérieures. Elle n'aurait probablement pas eu lieu sans l'appui de mes professeurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus profonde gratitude. En particulier, je remercie mon professeur de l'Université de La Rochelle, Nicolas Privault, qui m'a écrit il y a quelque mois pour m'avouer qu'il avait lu l'un de mes articles et qu'il s'excusait de m'avoir enseigné les probabilités de « façons assez lamentable » Selon moi, c'est plutôt grâce à lui que j'ai choisi les probabilités et que je suis devenue addictive à ce domaine. Alors, un grand Merci à vous, Mr Privault.

Le goût et la passion des mathématiques a été développé dès l'école primaire grâce à mon institutrice, ma Mère. Ma passion des mathématiques a grandi grâce à mes professeurs de collège et de Lycée, en Algérie. Je tiens à remercier tous mes professeurs de mathématiques du collège et du lycée de Draa Ben Khedda, des professeurs passionnés par l'enseignement.

Merci à Magali, une collègue devenue une grande amie de cœur. Merci de m'avoir poussée à faire une thèse, de m'avoir encouragée. Merci de ton écoute, de ta présence.

Merci à Lynn et Stéphane, deux coloc de bungalows devenus deux vrais amis. Des amis sur qui on peut vraiment compter. Merci pour les moments agréables partagés pendant les colloques ou en dehors. Cette belle amitié est née grâce à une amie Soraya qui m'a laissée sa place dans le bungalow de Stéphane et de Lynn. Un grand merci à Soraya qui est en train de finir son manuscrit. Courage, c'est bientôt fini...

Merci à François Boule, un grand ami que j'ai rencontré au colloque de la COPIRELEM, à Dijon. Merci de m'avoir encouragé. Merci pour tes nombreux conseils, pour nos discussions riches et stimulantes.

Merci à Monique, qui m'a très bien écouté et m'a beaucoup aidé lorsque je n'avais besoin.

Merci à Said, mon cousin préféré qui a suivi avec attention mon travail de thèse et qui m'a beaucoup encouragé.

Merci à mes amis d'enfance qui sont en Algérie, en France, ou à Montréal et qui ont toujours été présents malgré l'éloignement.

Merci à Vincent, mon noyau, d'avoir pris le temps de corriger avec rigueur ce manuscrit. Merci d'avoir accepté mon manque de disponibilité, d'avoir eu la patience d'entendre mes angoisses, mes grands coups de ras-le-bol, mes déprimés, mes inquiétudes. Merci de m'avoir aidé à les transformer en énergie positive et dynamique pour mettre le turbo. Merci également pour ta belle énergie, ta bonne humeur, ta présence à mes côtés et surtout ton amour. Merci d'avoir cru en moi.

Je remercie ma famille. Sans leur soutien moral, je ne serais sûrement pas arrivée au bout de ce périple. Je remercie mes parents de m'avoir toujours soutenue dans mes choix. Merci à ma mère qui m'a sans doute transmis sa passion de l'enseignement et qui m'a donné la soif d'apprendre. Merci à mon grand frère Riad, un chercheur physicien que j'admire, qui m'a toujours encouragé à aller au bout des choses et qui a toujours cru en moi. Merci à mon petit frère, Sofiane, pour sa bonne humeur et ses blagues qui détendent toujours. Merci à mes deux petites sœurs Lisa et Sycilia, qui ne sont plus si « petites », et qui ont toujours été présentes pour les moments de joies mais aussi de déprimés, pour les moments partagés ensemble en tant que colocataires, pour leur complicité, leur affection. Pour finir, je remercie ma grand-mère maternelle, une grande femme que j'admire, qui a toujours été présente dans ma vie, m'a toujours soutenue et qui a inlassablement encouragé mes choix.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	9
I La question générale de la validation dans le domaine des probabilités	13
Introduction de la première partie	15
1 L’enseignement des probabilités en France	17
1.1 Quelques définitions élémentaires liées à la notion de probabilité	17
1.1.1 Les probabilités élémentaires	17
1.1.2 Probabilités conditionnelles	20
1.1.3 Variables aléatoires	22
1.1.4 Les lois de probabilité d’une variable aléatoire	24
1.1.5 La loi des grands nombres	27
1.1.6 Lien entre la probabilité et la statistique	28
1.2 L’enseignement de la probabilité dans les programmes du secondaire	29
1.2.1 Les deux approches de la notion de probabilité	31
1.2.2 Simulation et modélisation	32
1.2.3 La statistique inférentielle et l’enseignement des probabilités	33
1.3 Conclusion	36
2 L’éclairage épistémologique et didactique sur la question de la probabilité	39
2.1 Naissance de la probabilité	39
2.2 Les courants philosophiques en probabilité	42
2.2.1 Courant objectiviste	42
2.2.2 Courant subjectiviste	43
2.3 La probabilité d’un événement	43
2.3.1 Définition « <i>a priori</i> » ou laplacienne : formule de Laplace	44
2.3.2 Définition fréquentiste : estimation par les fréquences	45
2.3.3 Définition « subjective » ou « intuitive » : formule de Bayes	45

2.3.4	Définition « formelle » : axiomatique de Kolmogorov	46
2.4	Les travaux didactiques portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la probabilité	46
2.4.1	Les conceptions erronées relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des probabilités	46
2.4.2	Recherche sur l'enseignement de la notion de probabilité	48
2.4.3	Une nouvelle forme de raisonnement dans le domaine des probabilités	49
2.5	Conclusion	51
3	L'éclairage didactique sur la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques	53
3.1	Les contextes de validation	53
3.2	Les argumentaires de validation	56
3.3	L'analyse de l'argumentaire de validation	65
3.3.1	La structure globale de l'argumentaire de validation	65
3.3.2	La structure d'un argument	67
3.3.3	Les arguments utilisés dans la validation	70
3.4	Conclusion	71
4	Les Espaces de Travail Mathématique	73
4.1	La notion d'espace de travail mathématique	73
4.2	Les différents niveaux d'ETM	74
4.2.1	ETM <i>de référence</i>	75
4.2.2	ETM <i>idoine</i>	75
4.2.3	ETM <i>personnel</i>	75
4.3	Les entrées dans le travail mathématique : articulation des trois dimensions	76
4.3.1	Plan Sémiotique-Discursif, noté [Sem-Dis]	76
4.3.2	Plan Instrumental-Discursif, noté [Ins-Dis]	76
4.3.3	Plan Sémiotique-Instrumental, noté [Sem-Ins]	76
4.3.4	La fonction des tâches dans l'ETM	77
4.4	Le travail de la validation dans l'ETM	78
4.5	Conclusion	79
	PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE GÉNÉRALE	81
II	La validation en probabilités et en géométrie dans l'enseignement secondaire. Étude comparative	87
	Introduction de la deuxième partie	91

5	Méthodologie de comparaison	93
5.1	Pourquoi comparer la validation en géométrie et en probabilité?	94
5.2	Notion de paradigme	95
5.3	Grille de comparaison de la validation dans les ETM géométrique et probabiliste	98
6	Comparaison de la validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence	101
6.1	Organisation du programme de mathématiques dans l'enseignement secondaire	101
6.2	La validation dans les ETM _G et ETM _P de référence en classe de 3 ^e	102
6.2.1	La validation dans les programmes officiels et les documents ressources au collège	103
6.2.2	La validation dans le domaine de la géométrie	106
6.2.3	La validation dans le domaine des probabilités	108
6.2.4	Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence	111
6.3	La validation dans les ETM _G et ETM _P de référence en classe de 2 ^{nde}	114
6.3.1	La validation dans le programme officiel de la classe de 2 ^{nde}	114
6.3.2	La validation dans le domaine de la géométrie	114
6.3.3	La validation dans le domaine des probabilités	115
6.3.4	Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence	123
6.4	Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence dans les deux niveaux de classe	124
7	Comparaison de la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines	127
7.1	Méthodologie particulière	127
7.1.1	L'analyse du travail de validation effectué dans une séance	128
7.1.2	L'analyse du discours de validation dans chacune des séances observées	129
7.1.3	Les groupes de comparaisons	130
7.2	Les comparaisons des ETM _G géométriques idoines	134
7.2.1	ETM _G idoines en classes de 3 ^e A et de 3 ^e B	134
7.2.2	ETM _G idoines en classes de 2 ^{nde} C et de 2 ^{nde} D	149
7.3	Les comparaisons des ETM _P probabilistes idoines	163
7.3.1	ETM _P idoine en classe de 3 ^e B	163
7.3.2	ETM _P idoines en classes de 2 ^{nde} C et de 2 ^{nde} D	173
7.4	Comparaison des ETM idoines relatifs à un domaine dans deux niveaux de classe	186
7.4.1	ETM _G idoine en classes de 3 ^e et de 2 ^{nde}	186
7.4.2	ETM _P idoine en classes de 3 ^e et de 2 ^{nde}	187

7.5	Comparaison des ETM idoines relatifs à deux domaines dans deux niveaux de classe	189
	Conclusion de la deuxième partie	191
III	Étude du travail de validation dans l'ETM_P idoine	195
	Introduction de la troisième partie	199
8	La modélisation dans l'enseignement des probabilités	201
8.1	Modélisation et modèles mathématiques	202
8.2	Analyse du cycle de modélisation	204
8.3	Modélisation avec un modèle mathématique de type numérique	208
8.4	Modélisation et travail de validation dans l'ETM _P	209
8.4.1	Modélisation avec un modèle probabiliste de type analytique	210
8.4.2	Modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique	213
8.5	Conclusion	218
9	Travail de validation et catégories de tâches mathématiques	223
9.1	La tâche mathématique : Sierpinska (2004)	224
9.2	Tâches avec ou sans adaptation : Robert (2007)	225
9.3	Rich tasks, simple et complex procedures : White et Mesa (2014)	227
9.4	Conclusion	228
10	Présentation des situations proposées aux enseignants	233
10.1	Analyse <i>a priori</i> des situations probabilistes	233
10.2	Synthèse de l'analyse <i>a priori</i> des quatre situations probabilistes	260
11	L'analyse de la validation dans les ETM_P idoines effectifs en fonction de la catégorie des tâches	263
11.1	Méthodologie de l'analyse de la validation mise en œuvre dans l'ETM _P idoine effectif	264
11.2	La validation dans le cas d'une même tâche complexe	266
11.2.1	Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 3 ^e	267
11.2.2	Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 2 ^{nde}	274
11.2.3	Conclusion	279
11.3	La validation dans le cas d'une même tâche riche en classe de 2 ^{nde} et complexe en classe de 1 ^{re} S	281
11.3.1	Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 2 ^{nde}	281
11.3.2	Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 1 ^{re} S	288
11.3.3	Conclusion	292

11.4	La validation dans le cas de deux tâches riches différentes, l'une en classe de 3 ^e et l'autre en classe de Terminale S	293
11.4.1	Conclusion	302
Conclusion de la troisième partie		305
IV La validation dans l'ETM_P personnel des professeurs		311
Introduction de la quatrième partie		315
12 Recueil des données		317
12.1	Technique de recueil de données	317
12.1.1	Échantillon de professeurs	317
12.1.2	Passation des entretiens	318
12.1.3	Entretiens d'explicitation semi-directifs avec les professeurs	319
12.1.4	Les questions de la grille d'entretien	320
12.2	Méthodologie d'analyse des données recueillies	322
13 Présentation des résultats des entretiens		323
13.1	Caractérisation du travail de validation dans l'ETM _P personnel des professeurs	323
13.1.1	L'influence du référentiel théorique dans le travail de validation	323
13.1.2	La place de la dimension sémiotique dans le travail de validation dans le domaine des probabilités	328
13.1.3	La place de la dimension instrumentale dans le travail de validation dans le domaine des probabilités	331
13.2	Caractérisation du discours de validation dans l'ETM _P personnel du professeur	333
13.2.1	Les types d'arguments utilisés	333
13.2.2	La structure globale de l'argumentaire de validation	334
14 Interprétation et discussion des résultats		343
14.1	Le rôle des dimensions sémiotique et instrumentale dans le fonctionnement de la genèse discursive	343
14.1.1	Dimension sémiotique et genèse discursive	343
14.1.2	Dimension instrumentale et genèse discursive	344
14.2	Caractérisation du discours de validation pratiqué par les professeurs	345
14.2.1	Les arguments mobilisés dans les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs	345
14.2.2	Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs	346

14.3 Caractérisation des formes de validation	347
Conclusion de la quatrième partie	349
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	351
Références	361

INTRODUCTION GENERALE

Réaliser un travail de thèse peut être une histoire pleine d'aventures et cette histoire est née du questionnement d'enseignants du secondaire ainsi que de l'IUFM (désormais nommé ESPE). À partir de la rentrée scolaire 2008, les probabilités ont été introduites dans les programmes de la classe de 3^e. L'enseignement des probabilités ne nous semblait pas avoir de frontière entre les classes de 3^e et de 2^{nde}. Il paraissait semblable. À cette époque-là déjà, l'utilisation des logiciels dans l'enseignement des mathématiques était fortement recommandée par l'Institution, mais aussi très appréciée globalement par les enseignants de mathématiques. Dans les classes de 3^e et de 2^{nde} dont nous avons la responsabilité, nous avons eu tendance à utiliser les logiciels de géométrie dynamique afin de conjecturer des résultats qui par la suite étaient démontrés à l'aide des propriétés géométriques institutionnalisées dans le cours. De même, l'introduction des probabilités du point de vue fréquentiste, ainsi que l'utilisation de la simulation informatique, sont indispensables (selon les documents institutionnels) pour l'enseignement et l'apprentissage des probabilités à ces deux niveaux de classe particuliers. Nous avons donné aux élèves de 3^e et de 2^{nde} un exercice dans lequel il fallait déterminer la probabilité d'un événement, faisant appel à la simulation informatique. Après avoir expliqué certaines fonctions du tableur (logiciel Excel), les élèves ont effectué la tâche demandée et ont obtenu la probabilité cherchée. Certains élèves ont alors posé la question : « Comment prouver que la probabilité obtenue par la simulation est bien celle attendue ? » Nous avons répondu que cela n'était pas demandé et qu'il fallait admettre le résultat obtenu par l'expérience. Ils ne disposaient pas en effet des propriétés nécessaires à leur niveau de classe et ces résultats seraient démontrés dans les classes supérieures. Certains élèves ne furent pas convaincus par la réponse et posèrent alors la question : « Pourquoi, en géométrie, demandez-vous d'écrire la démonstration en citant les propriétés alors qu'en probabilités vous ne le demandez pas ? » Cette question avait fini par provoquer un certain malaise car nous n'avions aucun argument à leur opposer. Ce malaise était d'ailleurs grandement partagé par nos collègues. Aujourd'hui, en tant que formateurs à l'ESPE, nous enseignons la didactique des statistiques et des probabilités à des étudiants stagiaires. Ce malaise est également palpable chez eux. Comment justifier, prouver ou démontrer des résultats obtenus par expérience dans l'enseignement des probabilités en classe de 3^e ou de 2^{nde} ? De manière générale, qu'est-ce que finalement « valider » dans l'enseignement des probabilités en fin

de scolarité obligatoire ?

La question de la démonstration ou de la preuve est une problématique majeure de l'enseignement des mathématiques en France au niveau du secondaire. Pour les formateurs de mathématiques dans les masters d'enseignement (à l'ESPE), ou pour les enseignants de mathématiques dans le secondaire, la démonstration, la preuve, ou la justification (des arguments) sont des modes de validation caractéristiques des mathématiques, des éléments clés dans l'enseignement et dans l'acquisition d'une culture mathématique.

L'objectif premier de cette thèse est donc de tenter de répondre aux questions suivantes : qu'est-ce que « valider » dans l'enseignement des probabilités en fin de scolarité obligatoire (autrement dit en classe de 3^e et de 2^{nde}) ? Comment la validation dans le domaine des probabilités est-elle enseignée et travaillée en fin de scolarité obligatoire ?

Organisation générale de la thèse

Cette thèse comprend quatre parties qui décrivent le cheminement opéré pour apporter des éléments de réponse à cette question de départ, sur la caractérisation de la validation dans l'enseignement des probabilités en fin de scolarité obligatoire.

- Dans **la première partie**, intitulée *La question générale de la validation en probabilités*, le travail d'investigation débute par une enquête épistémologique et didactique sur la question de la validation en probabilités. Cette enquête a abouti à une typologie de validation établie en fonction du raisonnement mobilisé, du contexte dans lequel est pratiquée la validation, et du paradigme probabiliste qui dirige le travail de la validation. Cette typologie constitue pour nous une première caractérisation de la validation en probabilités. De ce constat, nous avons décidé de mener trois autres enquêtes afin d'atteindre l'objectif fixé par ce travail de thèse.

- **La deuxième partie**, intitulée *La validation en probabilités et en géométrie dans l'enseignement. Étude comparative*, est une enquête descriptive et exploratoire sur les pratiques de la validation dans le domaine des probabilités du point de vue des documents officiels, mais aussi de celui des pratiques de la validation dans les classes de 3^e et de 2^{nde}. Cette enquête est basée sur une étude comparative du travail de la validation dans les espaces de travail mathématique de référence et idoine (Kuzniak, 2011) relatifs aux domaines de la géométrie et des probabilités en classe de 3^e et de 2^{nde}. Les conclusions de cette enquête indiquent l'existence de différences dans le travail de validation entre ces deux domaines, dues à leurs spécificités ; mais également, de différences dans le travail de validation à l'intérieur du domaine des probabilités, dues à la nature des tâches prescrites et aux pratiques des professeurs, différentes d'un professeur à l'autre. Ces conclusions nous

suggèrent quelques éléments permettant d'avancer dans notre réflexion. Mais ils s'avèrent insuffisants pour répondre à notre problématique de la caractérisation de la validation. D'où notre motivation de continuer ce travail d'investigation en étudiant une nouvelle piste dans la troisième partie.

- **La troisième partie**, intitulée *Étude du travail de validation dans l'ETM_P idoine*, a pour objectif de récolter des éléments contribuant à la caractérisation de la validation en probabilités. Pour cela, nous avons proposé à cinq professeurs de mettre en place, dans leurs classes, des tâches de différentes catégories (simple, complexe et riche), et faisant appel à différents modèles (analytiques ou numériques). Les résultats de cette enquête montrent que la validation dans le domaine des probabilités est différente selon la catégorie de la tâche (simple, complexe, riche). Cette différence porte essentiellement sur le choix du modèle pour traiter la situation probabiliste. Nous en avons déduit que, lorsque le niveau de complexité des tâches augmente (simple, complexe et riche), le niveau d'exigences en terme de travail de validation diminue, et ceci quel que soit le niveau de la classe observée. Les résultats de cette enquête sont assez satisfaisants, mais incomplets du point de vue de la caractérisation fine du discours de validation institutionnalisé dans les classes. De ce fait, nous avons exploré une dernière piste portant sur la structure globale de la validation en probabilités, institutionnalisée par les professeurs. L'exploration de cette nouvelle piste a fait l'objet de la dernière partie de ce travail.

- Dans **la quatrième partie**, intitulée *La validation dans l'ETM_P personnel des professeurs* nous avons interrogé individuellement chacun des cinq professeurs ayant participé à la troisième enquête, sur leur point de vue à propos de la validation dans le domaine des probabilités. Cela nous a conduit à mieux comprendre leur gestion du travail de validation (observée auparavant dans leurs classes), et à obtenir des déclarations sur **le style** de validation adopté. C'est donc une enquête sous forme d'entretien semi-directif de 45 minutes environ, dans lequel six questions ont été posées aux professeurs. Les conclusions de cette enquête ont révélé l'existence de plusieurs styles de validation en fonction du niveau de classe et du modèle choisi pour traiter la situation aléatoire. Ces conclusions révèlent également le rôle joué par chacune des deux dimensions (instrumentale et sémiotique) de l'ETM_P dans l'enrichissement de la genèse discursive, et dans la dynamique de la circulation du travail de validation dans l'espace de travail.

Ce long travail d'investigation s'achève en précisant les différentes caractéristiques que revêt la validation dans l'enseignement des probabilités en fin de scolarité obligatoire.

Première partie

La question générale de la validation dans le domaine des probabilités

Introduction de la première partie

La caractérisation de la validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire constitue le fil conducteur de l'histoire de cette thèse. Pour tracer ce cheminement vers cette caractérisation, nous proposons dans cette partie trois chapitres déterminants pour préciser nos questions de recherche.

Dans **le premier chapitre**, nous présentons une sorte de synthèse en ce qui concerne l'enseignement et l'apprentissage des probabilités en France. Pour cela, nous précisons dans un premier temps quelques définitions élémentaires par rapport à la notion de probabilité utilisées dans l'enseignement Français. Dans un deuxième temps, une étude succincte des programmes du secondaire permet de montrer l'évolution de l'enseignement de la notion de probabilité tout au long du secondaire, et de dégager son lien avec la statistique (descriptive et inférentielle). Pour finir, nous proposons une présentation synthétique des différentes recherches dans le champ de la didactique portant sur l'enseignement des probabilités. Ce premier chapitre contribue à situer l'enseignement des probabilités dans l'enseignement secondaire en France.

Dans **le second chapitre**, nous effectuons une étude épistémologique qui nous donne un éclairage sur la probabilité et ses fondements. En effet, les travaux de Hacking (2002) portant sur l'émergence de la probabilité montrent que la probabilité vit le jour dès 1660, avec comme spécificité sa dualité. Cette dernière revêt deux aspects : l'aspect statistique (fréquences régulières) et l'aspect épistémique (les degrés de croyance), qui fondent respectivement les courants objectiviste et subjectiviste de la probabilité. De plus, les travaux de Hacking (2002) nous ont permis de comprendre que c'est la question de la preuve en probabilité qui a retardé son émergence, quand la formation du concept de l'évidence factuelle a permis à la probabilité de voir enfin le jour. Nous avons donc une nouvelle manière de construire des connaissances à partir des faits observés. Nous avons, par ailleurs, relevé les différents raisonnements utilisés pour déterminer une probabilité selon l'approche considérée. Ce chapitre constitue pour nous une entrée dans notre réflexion concernant la caractérisation de la validation en probabilité.

Dans le **troisième chapitre**, nous menons une étude didactique à travers de nombreux travaux. Les travaux de Brousseau (1998) et ceux de Giaquinto (2005) nous ont amené à différencier deux contextes de validation : découverte et justification. Ensuite, l'analyse des travaux de Balacheff (1987), Duval (1993) et Pedemonte (2002), portant sur la validation dans l'enseignement mathématique en France, nous a conduit à distinguer trois sortes de validation en fonction de leur raisonnement et de leur discours. Enfin, une analyse plus fine du discours de la validation du point de vue de la structure d'un argument (Toulmin, 1993) a permis de constituer un outil méthodologique pour examiner la validation dans l'enseignement des probabilités.

Le quatrième chapitre permet de poursuivre notre réflexion sur la validation en probabilité dans le cadre scolaire en l'insérant dans le modèle des espaces de travail mathématique (**ETM**). La spécificité de ce modèle est de décrire les formes du travail mathématique effectué par les élèves ou les enseignants à l'intérieur d'une institution scolaire. Cela nous a encouragé à centrer notre investigation sur la forme du travail mathématique de validation. Nous avons alors constaté qu'il existait diverses formes de travail de validation, relevant soit de l'une des dimensions sémiotique, instrumentale ou discursive, soit, dans certains cas, de l'articulation de deux des trois dimensions citées.

Chapitre 1

L'enseignement des probabilités en France

Ce chapitre commence par une présentation des bases théoriques des probabilités abordées dans l'enseignement secondaire en France, plus particulièrement de tous les éléments théoriques qui interviennent dans les situations en jeu dans cette présente étude. Une analyse succincte des programmes des classes de 3^e aux classes de Terminale S est conduite dans la deuxième section de ce chapitre. L'objectif de cette analyse est à la fois de repérer à quel niveau de classe chacun des éléments (ou notions) théoriques des probabilités est abordé, et de relever les recommandations des programmes en ce qui concerne la transposition didactique (Chevallard, 1999) des probabilités.

1.1 Quelques définitions élémentaires liées à la notion de probabilité

Dans l'enseignement, les probabilités constituent un sujet délicat qui ne bénéficie pas d'un socle théorique stable et partagé, comme c'est le cas en géométrie par exemple. C'est pourquoi nous avons choisi de nous appuyer principalement sur le dictionnaire intitulé « *Les probabilités et la statistique de A à Z* » (Dress, 2007) pour fournir les bases élémentaires, clarifier les définitions et éviter les ambiguïtés.

1.1.1 Les probabilités élémentaires

La théorie des probabilités a pour objectif d'étudier (et de modéliser) des phénomènes qualifiés **d'aléatoires**, autrement dit des phénomènes dans lesquels le hasard intervient.

a) Notions de base

Les phénomènes aléatoires sont caractérisés par le fait que les résultats des observations varient d'une expérience à l'autre.

- Une expérience est dite *expérience aléatoire* ou une *épreuve* lorsque
« on ne peut pas prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents » (Saporta, 2006, p. 7).

Par exemple, on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le numéro de la face supérieure. On ne connaît pas par avance le résultat de cette expérience aléatoire, mais on sait que le résultat est un nombre entier naturel compris entre 1 et 6.

- *Les résultats* d'une expérience aléatoire susceptibles de se réaliser sont qualifiés *d'événements élémentaires* ou d'*issues* (terme utilisé dans l'enseignement secondaire français).
- Tous les événements élémentaires possibles sont regroupés dans un ensemble noté traditionnellement Ω , et appelé *espace fondamental*, mais en pratique (en particulier dans l'enseignement français) il est très souvent nommé *univers* ou *univers des possibles*.
- On appelle *événement* un sous-ensemble de l'ensemble Ω tel que :

« lorsqu'on fixe un événement A , l'épreuve effectuée donnant pour résultat un événement élémentaire $\omega \in \Omega$, ou bien l'événement A « s'est réalisé », si $\omega \in A$, ou bien l'événement A « ne s'est pas réalisé », si $\omega \notin A$ » (Dress, 2007, p. 76).

Parmi les événements, on distingue l'événement *vide* noté \emptyset qui est un événement impossible, l'événement *élémentaire* (défini précédemment), l'événement *certain* qui est l'espace fondamental Ω .

- Les événements sont des parties de l'espace fondamental Ω . Si on considère un événement A , son *contraire* (ou son complémentaire) noté \bar{A} est le sous-ensemble de Ω constitué des événements élémentaires $\omega \notin A$.

Ces différentes notions de base citées ci-dessus permettent de décrire les expériences aléatoires avant l'intervention de toute mesure de probabilité (aussi appelée probabilité).

b) La mesure de probabilité ou la probabilité

L'association d'un espace fondamental d'événements élémentaires possibles Ω et d'une famille \mathcal{A} d'événements (ou de parties) de Ω définit un espace dit **probabilisable**. Dans le cas où Ω est un ensemble fini ou dénombrable, \mathcal{A} peut être l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω . Mais dans le cas où « Ω n'est pas un ensemble fini ou dénombrable, on se

heurte à des difficultés mathématiques qui imposent de prendre une famille restreinte de parties » (Dress, 2007, p. 70). \mathcal{A} est alors une famille de parties de l'espace fondamental Ω possédant les propriétés d'une tribu (ou σ -algèbre). Les deux cas les plus employés en calcul des probabilités sont, $\mathcal{A} =$ la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes ses parties si Ω est fini ou dénombrable et, $\mathcal{A} =$ la tribu des boréliens de \mathbf{R} si $\Omega = \mathbf{R}$.

Une **mesure de probabilité** (ou une **probabilité**) P est une application définie sur l'ensemble des événements \mathcal{A} associée à un espace fondamental Ω , satisfaisant les axiomes suivantes :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments disjoints deux à deux de \mathbf{N} on a :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} P(A_n)$$
 ;
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

À partir de ces axiomes découlent les propriétés suivantes :

- probabilité de la réunion de deux événements $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- probabilité de l'événement contraire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Le concept de probabilité est important pour modéliser les notions de *fréquence* et de *proportion*. Par exemple, lorsque l'on déclare que la probabilité d'obtenir la face 3 lorsqu'on jette un dé (équilibré) est égale à $\frac{1}{6}$, on modélise le fait que, lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience du jet de dé, le quotient du nombre de fois où l'on a obtenu le 3 sur le nombre total de jets, autrement dit la fréquence d'obtenir la face 3, est proche de $\frac{1}{6}$.

Un espace probabilisable $(\Omega; \mathcal{A})$ muni d'une mesure de probabilité est un espace dit **probabilisé**.

c) Indépendance

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Deux épreuves sont dites indépendantes si :
 « dans l'« épreuve produit » qui les représentent simultanément, tout événement « qui ne dépend pas de la première épreuve » est indépendant avec tout événement « qui ne dépend pas de la deuxième épreuve » » (Dress, 2007, p. 98).

d) Cas d'équiprobabilité

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsqu'on suppose que tous les événements élémentaires d'un espace probabilisable **fini** ont la même probabilité. Cette hypothèse conduit à déterminer des probabilités *via* des calculs de dénombrements :

« Soit un espace fini équiprobabilisé dont l'espace fondamental Ω est consti-

tué de N événements élémentaires, et soit A un événement constitué par k événements élémentaires, alors : $P(A) = \frac{k}{N}$ » (Dress, 2007, p. 68)

1.1.2 Probabilités conditionnelles

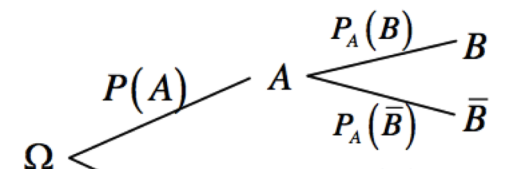
Dans le paragraphe précédent on a parlé de la mesure de la probabilité d'un événement sans tenir compte de la réalisation d'autres événements. Or en pratique, plusieurs événements peuvent être considérés et certains d'entre eux peuvent avoir une influence sur la réalisation d'autres événements. D'où la notion de **probabilité conditionnelle** définie comme suit :

« Soient deux événements A et B d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , avec $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement « B si A » (ou « B sachant A »), le quotient : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ » (Dress, 2007, p. 40).

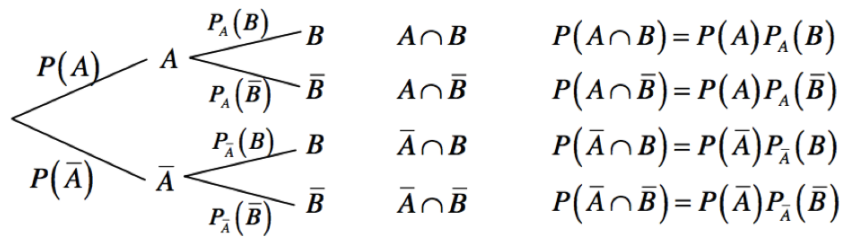
La probabilité conditionnelle P_A est donc une mesure de probabilité définie sur un nouvel espace fondamental qui n'est autre que A .

a) Les arbres de probabilités

De manière générale, l'arbre est très souvent présenté de la gauche vers la droite. Il est constitué par une *racine* (correspondant à Ω), de laquelle partent plusieurs *branches* conduisant à des *noeuds* (représentant des événements). Aux extrémités de l'arbre se trouvent les *feuilles* ou les *noeuds terminaux*. Dans le cas où l'on utilise l'arbre pour représenter un espace probabilisé alors sur chacune des branches issues d'un même noeuds on place les probabilités conditionnelles, et sur les branches issues de la racine on place les probabilités dites « absolues » aux noeuds (la racine a pour probabilité 1).



Lorsque l'on parcourt le *chemin* de la racine jusqu'à l'extrémité des branches, cela correspond à l'intersection des événements rencontrés, par exemple $A \cap B$ (sur la figure ci-dessus). Pour déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$, on calcule le produit de la probabilité « absolue » du noeud A par la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ sur la branche qui relie au noeud A , donc $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.



L'événement B est ici égal à la réunion des événements $A \cap B, \bar{A} \cap B$ qui sont disjoints (c'est à dire que $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$), et la probabilité de B est : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Dans l'enseignement secondaire, l'arbre de probabilité est très souvent appelé arbre pondéré et il est introduit officiellement en classe de Terminale.

b) Schéma de Bernoulli

Diverses situations sont présentées comme le résultat global d'une succession d'épreuves partielles répétées dans des conditions identiques. On distingue alors deux cas possibles :

- 1- soit on répète exactement à l'identique et de façon indépendante ;
- 2- soit chaque épreuve partielle modifie le contexte et par conséquent les probabilités relatives aux épreuves partielles suivantes.

Nous avons donc deux types de situations correspondants dans le premier cas à **un tirage avec remise**, et dans le second cas à **un tirage sans remise**.

Situation 1 : tirage avec remise

Cette situation est appelée *schéma de Bernoulli*. Elle recouvre à la fois les modèles de tirages avec remise et de répétition d'une épreuve dans les conditions identiques (c'est à dire que les événements antérieurs n'influencent pas le résultat de la nouvelle épreuve).

Soit A un événement et \bar{A} son événement contraire. Par usage universel, on note $P(A) = p$ et $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. On peut alors représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité, comme par exemple l'arbre de probabilité ci-dessous dans le cas de deux tirages successifs :

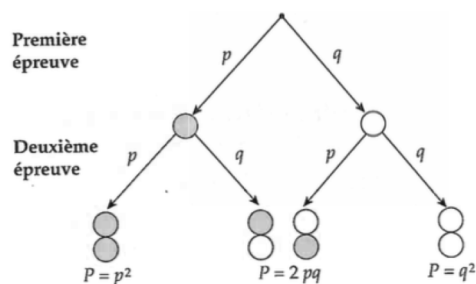


Figure 2. Schéma en arbre du tirage avec remise de 2 boules

Fig. 1.1 – Exemple de tirage avec remise (Dress, 2007, p. 19)

Dans ce type de situation, les probabilités des événements élémentaires restent inchangées.

Situation 2 : tirage sans remise

Cette situation peut être représentée à l'aide d'un arbre de probabilité. En prenant par exemple le cas d'une urne contenant N boules dont K boules de couleurs blanche « R », et $N - K$ boules de couleur rouge « B » :

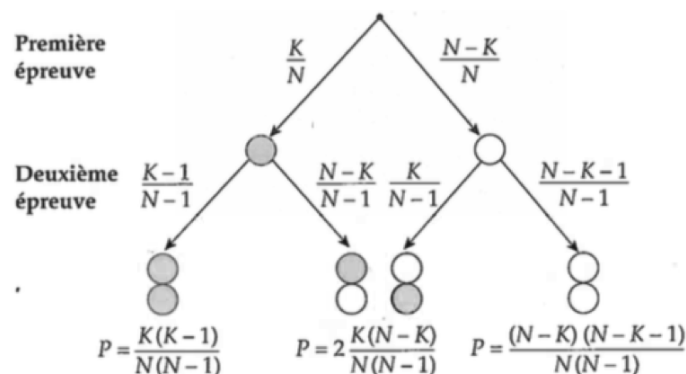


Figure 3. Schéma en arbre du tirage sans remise de 2 boules

Fig. 1.2 – Exemple de tirage sans remise (Dress, 2002, p. 22)

Les probabilités correspondant au premier tirage sont données par des expressions avec N au dénominateur, et les probabilités du second tirage (qui sont des probabilités conditionnelles) sont données par des expressions avec $N - 1$ au dénominateur. Dans ce type de situation, les probabilités des événements élémentaires varient au fur et à mesure des tirages.

1.1.3 Variables aléatoires

Dans la majorité des phénomènes aléatoires, le résultat d'une expérience aléatoire peut être traduit par une « grandeur » mathématique qui est souvent présentée sous forme d'un nombre entier ou réel, par exemple le nombre total de piles obtenues pour n lancers d'une pièce. Cette « grandeur » mathématique est appelée **variable aléatoire** (réelle) définie comme suit :

« Soient (Ω, \mathcal{A}) et $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisables. Une application de Ω dans \mathbf{E} est dite une variable aléatoire à valeurs dans E si, pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'ensemble $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, où on note $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$ l'image inverse de A par l'application X » (Ouvrard, 1998, p. 19).

Une variable aléatoire est une application qui prend ses valeurs soit dans un ensemble fini ou dénombrable, soit dans un intervalle de \mathbf{R} . Dans le premier cas, la variable aléatoire est dite discrète, et dans le second cas, elle est dite continue.

Cette notion de variable aléatoire peut induire des confusions. Ces confusions sont essentiellement dues à l'usage malencontreux du mot variable. En effet une variable aléatoire n'est pas une variable mais une application qui « *ne se note jamais f ou g , mais X ou Y* » (Dress, 2007, p. 179). Dans l'enseignement secondaire, la notion d'application n'est pas définie et elle est souvent confondue avec celle de fonction.

a) Variable aléatoire discrète

C'est une variable aléatoire (notée par exemple X) qui prend uniquement un nombre fini (ou dénombrable) de valeurs notées x_1, \dots, x_n (ou $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$). La loi de probabilité de cette variable aléatoire discrète est alors donnée par la liste des probabilités $(\{p_1, \dots, p_n\})$. Cette loi de probabilité est dite discrète et elle doit satisfaire les conditions que p_i avec $i \in \mathbf{N}$ est positif et la somme $p_1 + \dots + p_n = 1$ (ou $\sum_{n \in \mathbf{N}} p_n$).

Exemple : On lance trois pièces. Nous avons donc 8 résultats possibles constituant l'espace fondamental Ω , de probabilité chacun $\frac{1}{8}$.

On note X la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $X(\omega) =$ nombre de piles de l'événement ω .

- Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2 ou 3.

- La loi de probabilité est donnée par la liste des probabilités : $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ égales respectivement à $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

b) Variable aléatoire continue

L'image d'une variable aléatoire continue prend ses valeurs dans un intervalle (intervalle borné, ou une demi-droite, \mathbf{R} tout entier). Dans ce cas,

« la mesure de la probabilité est « étalée » sur l'intervalle de définition, avec la conséquence paradoxale que tous les points ont une probabilité nulle ; en effet, il y a « trop » de points dans un intervalle pour que chacun d'entre eux puisse avoir une probabilité non nulle » (Dress, 2002, p. 42).

Parmi les variables aléatoires continues, on recense les *variables aléatoires à densité*. Ces variables sont définies soit par leur fonction de répartition, soit par leur fonction de densité notée $f(x)$. Dans l'enseignement secondaire, seul le ce second cas est considéré, et la fonction densité est définie alors de la manière suivante :

fonction réelle positive associée à toute variable aléatoire réelle continue X qui satisfait la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On dit que X suit la loi à densité f si pour tout réels a et b (avec $a < b$) $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$.

c) Caractéristiques d'une variable aléatoire

Au niveau de l'enseignement secondaire français, on aborde trois caractéristiques d'une variable aléatoire : espérance mathématique, variance et écart-type.

Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X , notée $E(X)$, est un indicateur numérique de tendance centrale associé à X . Concrètement, l'espérance mathématique correspond à la moyenne des valeurs prises par une variable aléatoire pondérée par les probabilités. Sa définition est :

« Si la variable aléatoire réelle X est discrète, caractérisée par l'ensemble (fini ou dénombrable) de valeur x_i , où $i = 1, \dots, n$, avec les probabilités ponctuelles $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + \dots + x_nP(X = x_n) = x_1p_1 + \dots + x_np_n$$

(selon les cas, il s'agira d'une somme finie ou d'une somme infinie)

Si X est continue, caractérisée par la densité de probabilité $f(x)$, on a :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \text{ » (Dress, 2007, p. 71)}$$

Variance et écart-type

La variance est le deuxième indicateur numérique de dispersion associé à une variable aléatoire réelle X , notée $Var(X)$ (ou $V(X)$). La variance se présente comme l'espérance mathématique du carré de l'écart $X - E(X)$:

« Si la variable aléatoire réelle X est discrète, caractérisée par l'ensemble (fini ou dénombrable) de valeur x_i , où $i = 1, \dots, n$, avec les probabilités ponctuelles $p_i = P(X = x_i)$, et si son espérance mathématique est $E(X)$, on a :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

(selon les cas, il s'agira d'une somme finie ou d'une somme infinie)

Si X est continue, caractérisée par la densité de probabilité $f(x)$, et si son espérance mathématique est $E(X)$, on a :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \text{ » (Dress, 2007, p. 182)}$$

L'écart-type de la variable aléatoire X , noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance.

1.1.4 Les lois de probabilité d'une variable aléatoire

À une variable aléatoire, discrète ou continue, on associe une probabilité et on définit ainsi une **loi de probabilité** de cette variable aléatoire qui permet de connaître les « chances » d'apparition des différentes valeurs prises par cette variable aléatoire. Une loi de probabilité a pour fonction de décrire le comportement « aléatoire » d'un phénomène où le hasard intervient :

« On appelle loi (ou loi de probabilité) de la variable aléatoire X à valeurs dans l'espace probabilisable (E, ϵ) la mesure image P_X de P par X » (Ouvrard, 2000, p. 7)

On distingue deux cas de figures : lois de probabilité de variables aléatoires discrètes et lois de probabilité de variables aléatoires continues.

a) Lois de probabilité discrètes

La loi des variables aléatoires discrètes est définie par la donnée de l'ensemble x_i des valeurs prises et des probabilités ponctuelles $p_i = P(X = x_i)$.

Les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes rencontrées dans l'enseignement secondaire sont : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme discrète et loi géométrique tronquée.

1- Loi de Bernoulli

« Loi d'une variable aléatoire discrète qui prend deux valeurs 1 et 0, dont l'importance théorique et pratique est primordiale » (Dress, 2007, p. 18).

Un paramètre réel p ($0 \leq p \leq 1$) qui représente la probabilité. On note $q = 1 - p$. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p ; valeurs prises : 1 ou 0.

Loi de probabilité de X : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q$.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = p$, $Var(X) = pq$, $\sigma(X) = \sqrt{pq}$.

2- Loi binomiale

Loi d'une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs entre 0 et n avec $n \in \mathbf{N}$. Elle intervient notamment dans les expériences aléatoires répétées.

Deux paramètres réels : n (entier et $n \geq 1$) correspondant au nombre d'épreuves ou de tirages, et p ($0 \leq p \leq 1$) correspondants à une probabilité. On note $q = 1 - p$. Soit N une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$; valeurs prises : $0, \dots, n$.

Loi de probabilité de X : $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = np$, $Var(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

3- Loi uniforme discrète

« Loi d'une variable aléatoire discrète équirépartie entre un nombre fini de valeurs » (Dress, 2007, p. 178).

Un paramètre n entier représentant le nombre de valeurs prises. La variable uniforme discrète X de paramètre n ; valeurs prises : $1, \dots, n$.

Loi de probabilité : $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$.

4- Loi géométrique tronquée

Loi d'une variable aléatoire discrète correspondant au premier succès dans n (entier

naturel) épreuves répétées. Elle est définie de cette manière dans l'enseignement secondaire (au niveau de la classe de première) :

« Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p avec au maximum n répétitions et arrêt du processus au premier succès. On appelle loi géométrique tronquée de paramètre n et p la loi de la variable aléatoire X définie par :

- pour $1 \leq k \leq n$, $X = k$ si le premier succès est obtenu à l'étape k ;
- $X = 0$ si aucun succès n'a été obtenu » (RESPRE-PROB, 2012, p. 13).

Loi de probabilité de X :

- si aucun succès n'a été obtenu $X = 0$ et $P(X = 0) = (1 - p)^n$ (Ibid., p. 15) ;

- pour $1 < k < n$, le premier succès est obtenu à l'étape k :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \text{ » (Ibid., p. 15) ;}$$

$$\text{Valeur caractéristique : « } E(X) = \frac{1}{p}[1 - (1 + np)(1 - p)^n] \text{ » (Ibid., p. 16).}$$

Les deux lois uniforme discrète et géométrique tronquée ne font pas objet d'une institutionnalisation mais elles sont rencontrées dans les exercices dans un contexte particulier.

a) Lois de probabilité continues

Les trois lois de probabilités continues étudiées dans l'enseignement secondaire sont : la loi uniforme, la loi exponentielle et la loi normale.

1- Loi uniforme continue

« Loi d'une variable aléatoire continue X à densité constante sur un intervalle » (Dress, 2007, p. 177).

Deux paramètres m (un réel) et h un réel strictement positif. Valeurs centrées sur l'intervalle $I = [m - \frac{h}{2}; m + \frac{h}{2}]$.

Loi de probabilité : $f(x) = \frac{1}{h}$ si $x \in I$, $f(x) = 0$ sinon.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = m$, $Var(X) = \frac{h^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{h}{2\sqrt{3}}$.

2- Loi normale

« Loi d'une variable aléatoire continue qui tient la place centrale dans le calcul des probabilités » (Dress, 2007, p. 131).

Deux paramètres μ (un réel) et σ un réel strictement positif; valeurs sur les réels.

Loi de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.

3- Loi exponentielle

Loi d'une variable aléatoire continue définie de la manière suivante :

Un paramètre λ , réel strictement positif ; valeurs sur les réels positifs.

Loi de probabilité : $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$.

Valeurs caractéristiques : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

La fonction densité de chacune de ces trois lois continues n'est pas uniquement définie sur des intervalles bornés mais elle peut également être définie sur \mathbf{R}^+ , ou sur \mathbf{R} . Cela suppose alors un travail sur des intégrales généralisées qui ne sont pas abordées au niveau de l'enseignement secondaire (Derouet et Parzys, 2016).

1.1.5 La loi des grands nombres

Du point de vue historique, la loi des grands nombres désigne la convergence de la fréquence d'un événement vers sa probabilité lorsque le nombre d'expériences aléatoires (qui sont indépendantes) augmente indéfiniment (Dress, 2002). Dès que le calcul des probabilités est conçu comme un modèle mathématique des phénomènes aléatoires alors la loi des grands nombres est considérée comme un théorème mathématique. L'idée principale de ce théorème est que la moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes, de même loi de probabilité et de même espérance mathématique est approximativement égale à l'espérance de ces variables aléatoires. L'énoncé de cette loi est donné ci-après :

« On considère une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes, d'espérance mathématique μ . On définit les moyennes : $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a $P(|M_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini » (Dress, 2007, p. 91).

Ainsi, ce théorème (connu également sous le nom de la loi faible des grands nombres) fournit la définition de la « convergence en probabilité » (qui n'est pas une convergence habituelle des fonctions) de la suite (X_n) vers la variable aléatoire certaine égale à l'espérance mathématique μ quand n tend vers l'infini. Le premier à avoir démontré ce théorème est Bernoulli (1713), en considérant M_n des variables aléatoires de Bernoulli. On retrouve cette démonstration dans le document ressource de la classe de terminale scientifique (RESTERM-PROB, 2012, p. 45).

1.1.6 Lien entre la probabilité et la statistique

La statistique est une branche des mathématiques qui traite les données, les résultats obtenus par des observations de phénomènes aléatoires ou des expérimentations. Globalement, la statistique est constituée de deux parties : la statistique descriptive et la statistique inférentielle.

- La statistique descriptive a pour fonction de « *recueillir, décrire, présenter, résumer les données sous une forme qui rend leur exploitation commode et efficace* » (Dress, 2007, p. 165).
- La statistique inférentielle a pour fonction d'analyser les données recueillies préalablement afin « *d'en déduire les paramètres des lois de probabilité et de tester la validité du modèle probabiliste ainsi reconstitué* » (Dress, 2007, p. 100).

Au niveau secondaire, la statistique inférentielle intervient essentiellement dans les situations de prise de décision (associée à la notion d'intervalle de fluctuation d'une fréquence) et dans les situations d'estimation d'une probabilité d'un événement (associée à la notion d'intervalle de confiance).

Les intervalles de fluctuation et la prise de décision

Dans une population considérée, lorsqu'un caractère apparaît pour une proportion p dans cette population, on peut alors définir un intervalle de variation de la fréquence f de ce caractère avec une probabilité fixée. L'**intervalle de fluctuation d'une fréquence** est donc utilisé dans le cas où la probabilité p est connue ou dans le cas où l'on fait une hypothèse sur sa valeur à partir d'un échantillon. La fréquence f doit appartenir à l'intervalle de fluctuation considéré avec un risque d'erreur α . Ces intervalles de fluctuation sont utilisés dans les situations dites de prise de décision. Dans ces situations, il s'agit de concevoir une règle de décision de telle sorte qu'à partir de l'observation d'un échantillon de taille donnée n , on accepte ou non l'hypothèse notée souvent H_0 . Cette règle de décision fait référence aux intervalles de fluctuation (associés à la notion de fluctuation d'échantillonnage¹).

Les intervalles de confiance et estimation d'une probabilité d'un événement

Estimer une probabilité revient à déterminer une valeur *approchée* de celle-ci à partir d'un échantillon ou d'une suite d'échantillons. Afin de « mesurer » la qualité de cette estimation, on utilise la notion d'**intervalle de confiance**. Du point de vue théorique, et en se limitant aux schémas de Bernoulli, un intervalle de confiance d'une probabilité d'un événement A est défini comme suit pour un seuil de confiance de 95% :

1. La fluctuation d'échantillonnage désigne « *une variation autour de la valeur moyenne (ou « théorique »), lorsque son amplitude est suffisamment limitée pour qu'il soit probable qu'elle provienne de la dispersion inhérente à tout échantillonnage (et non pas au décalage de la valeur moyenne)* » (Dress, 2007, p. 83).

On considère un échantillon de taille n d'estimateur $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$. L'intervalle de confiance est : $[\bar{x} - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \bar{x} + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$, avec les conditions suivantes : $n \geq 30$, $np \geq 10$, $n(1-p) \geq 10$.

Dans l'enseignement secondaire, l'**intervalle de confiance d'une probabilité d'un événement** est utilisé dans le cas où l'on cherche à estimer une probabilité inconnue p dans une population à partir de la fréquence f observée dans un échantillon ou dans la réunion d'échantillons ayant en général la même taille.

1.2 L'enseignement de la probabilité dans les programmes du secondaire

Dans l'enseignement secondaire en France, la notion de probabilité est intégrée dans le domaine appelé « *statistiques et probabilités* ». Jusqu'en 2008, la notion de probabilité était abordée seulement à partir de la classe de 1^{re} (16-17 ans). Dès l'année 2008, l'étude de la notion de probabilité est initiée au collège en classe de 3^e (14-15 ans) et se poursuit tout au long du lycée dans les classes de 2^{nde}, 1^{re} et Terminale (dans toutes les filières : scientifique, économique, littéraire, tertiaire). Selon Henry (2010) l'introduction de la notion de probabilité en dernière année de collège « *représente une petite révolution pour les professeurs des collèges dont un grand nombre n'ont pas bénéficié de formation à l'aléatoire* » (Henry, 2010, p. 36). Henry ajoute que cette introduction est inscrite dans « *une évolution cohérente des programmes de l'enseignement secondaire français depuis une vingtaine d'années* » (Ibid., p. 36).

Dans chaque niveau de classe (3^e, 2^{nde}, 1^{re} et Terminale), on retrouve les points suivants :

Classe de 3^e.

Le programme de 3^e en vigueur depuis 2008 incite à introduire la notion de probabilité par la dualité de ses approches laplacienne et fréquentiste. Cette introduction va permettre non seulement des développements plus approfondis au lycée mais aussi d'initier le futur citoyen à développer ses capacités d'analyse et de synthèse pour exercer un regard critique sur des situations aléatoires de la vie courante. Pour ce faire, le programme demande que la notion de probabilité soit « *abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.)* » (MENCOL, 2008, p. 34). Ces situations familières fournissent un cadre pour introduire la notion de probabilité, que l'on dispose ou non d'un modèle. Ils ajoutent que l'utilisation de la notion de probabilité doit se faire « *pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernant les expériences aléatoires à une ou à deux épreuves* » (MENCOL, 2008, p. 34). Dans les documents ressources pour la classe de 3^e est indiqué le vocabulaire spécifique nécessaire pour débiter

l'apprentissage de la notion de probabilité.

Classe de 2^{nde}.

L'enseignement des probabilités en classe de 2^{nde} se poursuit dans le même esprit que celui de la classe de 3^e. Le programme recommande d'étudier uniquement des situations simples (lancers de pièces, de dés, etc.) mettant en jeu l'équiprobabilité et d'utiliser les outils informatiques afin d'effectuer des simulations. Le programme met l'accent sur l'importance d'initier aux processus de modélisation à partir de situations aléatoires simples, soit d'équiprobabilité légitimement postulées, soit sous des hypothèses issues de l'observation des fréquences. L'objectif de l'enseignement des probabilités à ce niveau de classe est :

- « *d'étudier et modéliser des expériences relevant d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes)* » (MENSEC, 2009, p. 9) ;
- « *de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples* » (Ibid., 2009, p. 9) ;
- L'interprétation ensembliste des événements tels que : $A \cup B$ et $A \cap B$;

Il est également proposé de définir la probabilité d'un événement « *comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent* » (MENSEC, 2009, p. 9), et d'introduire la formule qui lie la réunion et l'intersection de deux événements : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Les documents ressources pour la classe de 2^{nde} proposent une définition ensembliste d'un événement : « *un événement est défini comme un sous-ensemble de Ω* »². La probabilité d'un événement est soit « *estimée par observation de la stabilisation des fréquences sur des longues séries d'expériences* », soit « *par des considérations géométriques ou physiques en référence à l'équiprobabilité* » (RESSEC, 2009, p. 7).

Classe de 1^{re}.

La notion de loi est abordée de manière formelle à ce niveau de classe. Ainsi, la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est introduite afin

« *de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde* » (MENPRE, 2010, p. 5).

Le programme souligne que l'enseignement des probabilités peut être basé sur l'étude des séries statistiques obtenues par simulation :

« *à l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données* » (MENPRE, 2010, p. 5).

2. Ω est un ensemble sur lequel une distribution de probabilité est définie par la donnée des probabilités des éléments de Ω .

Les notions abordées en classe de 1^{re} sont les variables aléatoires discrètes, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes et le schéma de Bernoulli.

Classe de Terminale.

A ce niveau de classe, on étudie les probabilités conditionnelles, la notion d'indépendance, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes vues en classe de 1^{re}, les lois de probabilité de variables aléatoires continues (uniforme, exponentielle, normale).

1.2.1 Les deux approches de la notion de probabilité

Henry (2010) souligne que jusqu'aux années 80, l'étude de la notion de probabilité reposait sur l'approche classique dite de Laplace. Dans cette approche la probabilité d'un événement est définie comme le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles. Cette définition de la probabilité est utilisée uniquement sous l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires.

Les programmes des années 90 ont fait le choix d'introduire la notion de probabilité en classe de 1^{re} *via* l'approche fréquentiste. Cette approche de la notion de probabilité propose une définition fréquentiste de la probabilité d'un événement qui est « *le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré* » (Renyi, 1966, cité par Henry, 2001, p. 81). Cette approche basée sur la loi des grands nombres permet donc d'estimer une valeur de la probabilité. Ainsi, la valeur de la probabilité d'un événement A peut être déterminée :

- soit en se plaçant dans l'approche fréquentiste. On affecte comme valeur la fréquence de réalisation de l'événement A observée dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire,
- soit en se plaçant dans l'approche classique. On affecte comme valeur le rapport du nombre de cas favorables de l'événement A à celui de tous les cas possibles.

Ces deux façons de déterminer la probabilité d'un événement sont essentiellement enseignées au début de l'apprentissage de la notion de probabilité, autrement dit en classe de 3^e et de 2^{nde}. Dans l'approche fréquentiste, l'introduction de la notion de probabilité est effectuée par l'observation de la stabilisation des fréquences lorsqu'on répète une même expérience aléatoire. Cela induit alors « *un regard expérimental* » (Henry, 2013, p. 26) sur la notion de probabilité. Adopté le point de vue expérimental de cette notion nécessite de mettre en place dans les classes des expériences concrètes et des simulations informatiques (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur). Mais ce point de vue peut engendrer des confusions entre « *le domaine des observations expérimentales des fréquences* » (Henry, 2013, p. 26) et « *le domaine du modèle mathématique représentatif où la probabilité peut être définie* » (Ibid., p. 26). C'est pourquoi, les programmes des années 2000 ont dû

changer de point de vue en faisant clairement expliciter la distinction entre les données expérimentales et le cadre théorique. La simulation est alors abordée dès la classe de 2^{nde} et la notion de modèle est intégrée dans les objectifs de l'enseignement des probabilités en classe de 1^{re} :

« modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité. Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales, alors que la probabilité d'un événement est un "nombre théorique" » (RESPRE-PROB, 2001, cité par Henry, 2013).

1.2.2 Simulation et modélisation

L'objectif des programmes de 2000 est de dépasser l'approche fréquentiste introduite dans les années 90 en prenant en compte le point de vue de la modélisation. Ainsi, les termes simulation et modélisation sont clairement explicités dans les programmes de 1^{re}. A ceci s'ajoute l'introduction de la loi des grands nombres.

À l'heure actuelle, dans les programmes du secondaire, l'accent est mis sur l'introduction de la notion de probabilité *« à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.) »* (MENCOL, 2008, p. 34).

De même, le point de vue de la modélisation est également présent dans les programmes actuels :

« la notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences à une ou à deux épreuves » (MENCOL, 2008, p. 34).

Aujourd'hui, l'enseignement des probabilités au niveau secondaire est étroitement lié à deux notions : la simulation et la modélisation. Par ailleurs, Henry (2010) souligne que l'introduction de la notion de modélisation dans l'enseignement secondaire dès les années 2000 représente une étape importante dans l'enseignement du domaine « statistiques et probabilités » puisque

« relevant d'une démarche scientifique, le point de vue de la modélisation tranche le débat entre subjectivistes et objectivistes par le choix d'un modèle probabiliste le plus adéquat possible » (Henry, 2010, p. 42).

Dans les programmes des années 2000, il est souligné que *« pour déterminer et/ou valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un théorème de mathématique appelé loi des grands nombres »* (MENPRE, 2001, p. 71). Bien que l'énoncé de la loi des grands nombres est clairement explicité dans les programmes des années 2000, ce n'est plus le cas aujourd'hui puisque les programmes se limitent à une approche plutôt heuristique de la loi des grands nombres.

En ce qui concerne la simulation, dès les années 2000 on retrouve une forte incitation à l'utilisation de la simulation informatique. Cela est justifié par le fait que la simulation informatique permet d'étudier des séries statistiques de grande taille mais aussi, d'observer concrètement la loi des grands nombres. Une définition donnée par l'Encyclopédie Universalis de la simulation est :

« la simulation est l'expérimentation sur un modèle. C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (modèle) du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction lorsque l'on fait varier expérimentalement les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et à induire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues ».

1.2.3 La statistique inférentielle et l'enseignement des probabilités

À partir de 2009, les programmes de l'enseignement des mathématiques, en particulier ceux du lycée, accordent une place importante à l'initiation à la statistique inférentielle dès le début du lycée. La raison d'un tel choix réside dans la façon d'appréhender le monde de nos jours. Les notions d'échantillonnage, d'intervalles de fluctuation et de confiance sont introduites dès la classe de 2^{nde} et leur enseignement se poursuit jusqu'en classe de terminale.

Les intervalles de fluctuation et la prise de décision

Les programmes recommandent uniquement l'usage des intervalles de fluctuation au seuil de 95% définis comme suit :

« L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatifs aux échantillons de taille n , est l'intervalle centré autour de p , proportion du caractère de la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n » (MENSEC, 2009, p. 8).

En fonction du niveau de classe (2^{nde}, 1^{re} ou terminale), l'intervalle de fluctuation prend différentes formes.

- En classe de 2^{nde}.

Pour obtenir cet intervalle de fluctuation, le programme propose deux possibilités. La première possibilité est d'obtenir l'intervalle de fluctuation, de manière approchée, par la simulation. Une deuxième possibilité est que le professeur donne directement l'intervalle :

« le professeur peut indiquer aux élèves le résultat suivant, utilisable dans la pratique pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et des proportions p du caractère com-

prises entre 0,2 et 0,8 : si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité d'au moins 0,95. Le professeur peut faire percevoir expérimentalement la validité de cette propriété mais elle n'est pas exigible » (MENSEC, 2009, p. 8).

En classe de 2^{nde}, la prise de décision est effectuée avec les lois discrètes et donc sur un intervalle de fluctuation.

- **En classe de 1^{re}.**

La loi binomiale est introduite et permet alors de construire et d'utiliser un intervalle de fluctuation théorique obtenu sans recours aux approximations afin de conduire une démarche de prise de décision valable de manière générale pour une proportion p et un échantillon de taille n (quelconques). L'intervalle de fluctuation est donc plus précis que celui utilisé en classe de 2^{nde} :

« l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence F , correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , de la variable aléatoire X égale à nF et de loi binomiale de paramètres n et p , est l'intervalle $[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}]$ défini par le système de conditions suivant :

a est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leq 0,025$,

b est le plus petit entier tel que $P(X > b) \geq 0,025$. »

(RESPPRE-PROB, 2011, p. 38).

En classe de 1^{re}, la prise de décision est effectuée avec la loi binomiale.

- **En classe de Terminale.**

On dispose d'un nouvel intervalle de fluctuation centré sur p valable pour une loi normale qualifié « d'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% » (MENTERM, 2011, p. 15) :

« $[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ où p désigne la proportion dans la population » (Ibid., p. 15).

En classe de terminale, la prise de décision est effectuée avec la loi normale.

Les intervalles de confiance et l'estimation d'une proportion

Les situations où il s'agit d'estimer une proportion à l'aide des intervalles de confiance ne sont pas au programme de classe de 1^{re}. En revanche, on les retrouve en classe de 2^{nde} et de Terminale.

- **En classe de 2^{nde}**

À ce niveau de classe, il s'agit d'initier les élèves à la démarche d'estimation d'une proportion inconnue p à partir d'un échantillon. L'intervalle de confiance est présenté comme étant « équivalent » à l'intervalle de fluctuation :

« on se place dans la situation de référence suivante, d'une urne contenant plusieurs centaines de petites billes de couleur blanche ou verte dans

une proportion p inconnue de billes vertes. On cherche à estimer p [...]. On considère un échantillon de taille n (par répétition de n tirages aléatoires avec remise dans l'urne) et on calcule la fréquence des billes vertes de cet échantillon [...]. On sait que 95% des fréquences observées sont dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Or l'appartenance de f à $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ équivaut à celle de p à l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, ce qui permet de dire que parmi tous les échantillons de taille n possibles, 95% des intervalles associés $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contiennent le nombre p » (RESSECC, 2009, p. 18).

L'intervalle de confiance est alors obtenu en « inversant » les bornes de l'intervalle de fluctuation. Cette « inversion » d'intervalle risque d'être une source de confusion entre la probabilité et la fréquence.

- **En classe de Terminale**

Le programme de terminale définit l'intervalle de confiance comme suit :

« un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1 - \alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \alpha$. Cet intervalle aléatoire est déterminé à partir de la variable aléatoire fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence » (MENTERM, 2011, p. 16).

Seul le cas où $1 - \alpha = 0,95$ est abordé à ce niveau de classe. L'expression de l'intervalle de confiance est formulée comme suit :

« pour une valeur p fixée, l'intervalle $[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95. On énonce alors que p est élément de l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec un niveau de confiance de plus de 95%, où f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n . Avec les exigences usuelles de précisions, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$ » (Ibid., 2011, p. 15).

En résumé, dans les programmes du lycée, l'intervalle de fluctuation (centré autour de la proportion p) et celui de confiance (centré autour de la fréquence f) au seuil de 95% sont abordés comme suit :

	Intervalle de fluctuation	Intervalle de confiance
2 ^{nde}	$[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec $n \geq 25$, $0,2 \leq p \leq 0,8$	$[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec $n \geq 25$, $0,2 \leq p \leq 0,8$
1 ^{re}	$[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}]$ avec $P(X < a) \leq 0,025$ et $P(X > b) \geq 0,025$	hors programme
Term	$[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ avec $n \geq 30$ et si $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$	$[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec $n \geq 30$ et si $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$

1.3 Conclusion

À partir de 2008, la notion de probabilité est introduite en classe de 3^e. Cette introduction prend appui sur les notions déjà rencontrées au collège, en particulier la statistique descriptive. Ensuite à partir de la classe de 2nde, l'enseignement de la notion de probabilité prend appui sur les outils de la statistique inférentielle. Ainsi l'enseignement de la notion de probabilité au niveau secondaire est articulé avec l'enseignement de la statistique descriptive et de la statistique inférentielle. La figure ci-dessous représente ces liens sur l'ensemble de l'enseignement du secondaire en France :

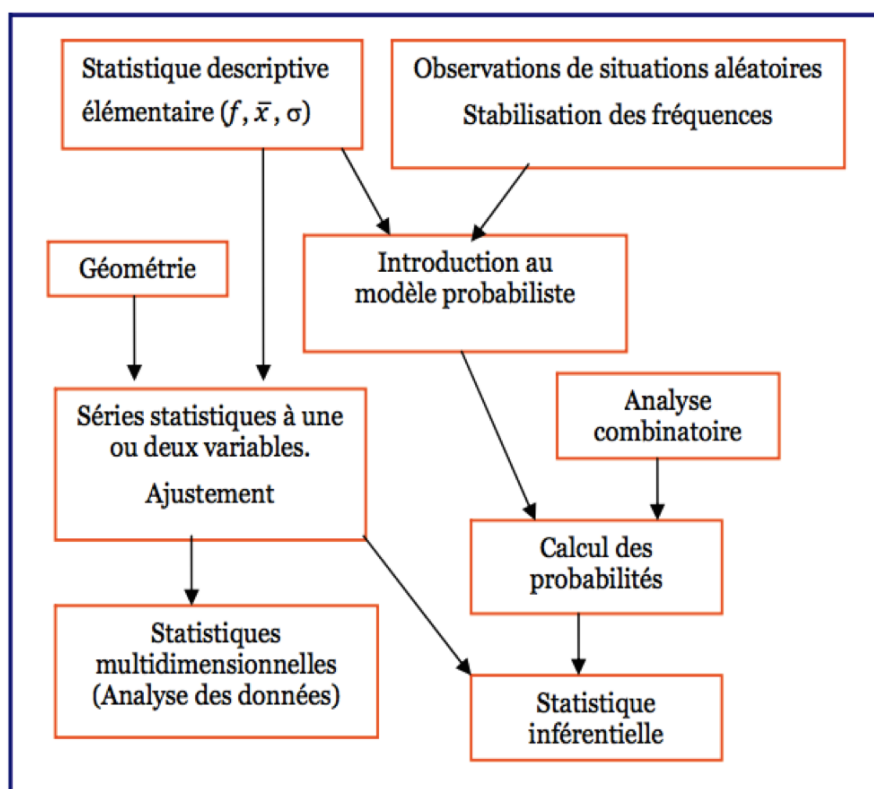


Fig. 1.3 – Liens entre la probabilité et la statistique dans l'enseignement secondaire (document statistiques et probabilités, Académie de Bordeaux)

Ces liens entre la probabilité et la statistique n'ont pas toujours existé dans l'enseignement. En effet, Wozniak (2005) et Vu Nhu (2009) ont mené dans le cadre de leur travail de thèse une étude écologique et praxéologique sur l'enseignement de la statistique au niveau secondaire avant et après la réforme de l'année 2000 (programmes, manuels, et sujets de brevet et de baccalauréat). De ces travaux de thèses, il résulte que la réforme de l'année 2000 a entraîné l'introduction de la statistique inférentielle en classe de 2nde axée sur la fluctuation d'échantillonnage. Cette introduction a permis alors de créer des liens entre les distributions et les lois de probabilités. Cette introduction a également enrichi le concept de probabilité permettant ainsi le traitement de nouveaux problèmes, en particulier des

problèmes faisant appel à la notion de modélisation. Par ailleurs, Wozniak (2005) souligne que l'introduction de la statistique inférentielle a été mal vécue par les enseignants qui étaient confrontés à l'enseignement d'un domaine sans avoir eu une formation spécifique comparativement à d'autres domaines déjà enseignés. Cette difficulté ressentie par les enseignants est également rencontrée dans l'introduction de l'enseignement des probabilités en classe de 3^e. En effet, l'enseignement de la notion de probabilité a subi une modification profonde, notamment avec la place accordée au domaine expérimental. Ainsi, l'enseignement de la notion de probabilité induit une nouvelle démarche (différente de celle de la statistique), et des raisonnements différents des autres branches des mathématiques puisqu'ils font appel à la modélisation et à l'expérience. La validation des affirmations (dans les situations de prise de décision par exemple) n'est pas de la même nature que celle qui est mise en œuvre dans les autres domaines des mathématiques enseignés. Par conséquent, les enseignants sont confrontés à l'enseignement d'un domaine où l'expérimentation a une place importante dans les raisonnements, conduisant alors à des formes spécifiques et sans doute originales de validation. C'est donc l'étude des formes de validation pratiquées (par les enseignants) dans l'enseignement des probabilités qui fera objet de notre travail de thèse.

Chapitre 2

L'éclairage épistémologique et didactique sur la question de la probabilité

Avant de nous lancer dans la quête de la caractérisation de la validation dans l'enseignement des probabilités au niveau de la scolarité obligatoire, nous avons besoin de faire un « détour épistémologique » afin de récolter quelques informations permettant de mieux cerner le concept de probabilité. L'objectif de ce chapitre est, comme son nom l'indique, d'apporter un éclairage épistémologique sur l'émergence de la probabilité et de ses fondements. Pour répondre à cet objectif, nous proposons tout d'abord de présenter la manière dont le concept de probabilité a vu le jour au fil de l'histoire. Ensuite, nous exposons les deux courants philosophiques probabilistes qui ont donné lieu aux différentes façons de définir la probabilité d'un événement. Et enfin, nous exposerons les différents raisonnements mobilisés pour déterminer la valeur numérique d'une probabilité.

2.1 Naissance de la probabilité

Entre 1650 et 1670, la dualité de la probabilité est clairement mise en évidence. L'un de ses aspects correspond au degré de croyance assuré par des éléments d'évidence, et l'autre porte sur « *la tendance de certains dispositifs aléatoires à produire des résultats réapparaissant à des fréquences relatives stables* » (Hacking, 2002, p. 25). Le concept de probabilité possède donc deux faces. L'une est subjective et porte sur le degré de croyance, l'autre est objective et porte sur une fréquence stable. Selon Hacking, cette dualité de la probabilité est le résultat des sciences du signe, des signes empiriques et des « basses sciences », comme l'alchimie et la médecine.

En effet, dans la théorie médiévale, la probabilité relevait d'une opinion. Cette dernière

était probable lorsqu'elle était attestée par une autorité, en particulier l'autorité des livres anciens dont « *l'auteur est Dieu* » (Ibid., p. 25). C'est pourquoi l'apprentissage de la lecture (déchiffrage) et l'interprétation des signes naturels semblaient nécessaires. C'est par la répétition d'un signe que celui-ci se transforme en une preuve (autrement dit une évidence). Le probable est donc à la fois un degré de croyance, une opinion attestée par une autorité et une fréquence stable.

Hacking (2002) étudie l'origine du terme « probabilité ». Selon lui, la première signification de la probabilité est l'approbation. Cette signification structure un ensemble de concepts : « *crédibilité, fréquence, possibilité* », entraînant ainsi une différence fondamentale dans la pensée médiévale entre « *connaissance* » et « *opinion* ». Ces deux dernières ne portent pas sur les mêmes objets puisque « *dans la théorie médiévale de la connaissance, la science est la connaissance* » (Ibid., p. 50). De ce fait,

« *avoir la connaissance, c'est connaître les vérités éternelles, des vérités nécessairement vraies [...]. Hormis la connaissance des vérités premières, si simples et fondamentales qu'elles en sont incontestables, la connaissance s'obtient par démonstration* » (Ibid., p. 50).

En revanche, l'opinion porte sur « *des croyances ou des doctrines qui ne sont pas obtenues par démonstration* » (Ibid., p. 51), mais qui sont le fruit d'une « *réflexion, d'un argumentaire ou d'un débat* » (Ibid., p. 51). C'est donc par l'opinion que la probabilité est véhiculée. Ainsi, « *la probabilité exige probité et approbation* » (Ibid., p. 52), à l'opposé de la démonstration dont la seule exigence est « *d'être capable de voir et de montrer ce qu'il en est pour de bon* » (Ibid., p. 52).

La probabilité s'appuyait sur l'opinion et elle était rangée dans la catégorie des « basses sciences », alors que les « hautes sciences » comme la géométrie s'appuyaient sur un savoir démontrable. L'un des concepts fondamentaux des « basses sciences » étaient le signe. C'est par l'observation des signes que l'on pouvait lire des témoignages. Les signes avaient pour fonction première de *rendre probable une opinion* (Hacking, 2002, p. 10). Ces signes pouvaient « *être évalués selon la fréquence à laquelle ils apportaient un témoignage fidèle* » (Ibid., p. 10). Dès la fin de la Renaissance, il y a eu la transformation du concept de signe en celui de l'évidence factuelle. Or, la formation du concept de l'évidence factuelle constitue l'une des conditions préalables à l'émergence de la probabilité. D'après Hacking (2002), « **l'évidence factuelle** », autrement dit « **la preuve par des choses** », est avant tout un héritage des « basses sciences », où l'on accepte un nouveau genre de témoignage, celui de la nature qui doit être interprétée. Le signe devient alors un élément de l'évidence factuelle. La transformation des signes en évidence factuelle est une évidence inductive désignant à la fois « *le processus aboutissant à une généralisation voire à une loi de la nature à la suite d'observations et d'expériences particulières* » (Ibid., p. 72) ; mais également, « *l'induction allant d'un cas particulier à un autre* » (Ibid., p. 72). C'est par

cette transformation du signe en évidence factuelle qu'enfin le concept de la probabilité a émergé.

Il existe deux modes de mise en évidence : celui qui s'appuie sur le témoignage des personnes ou des autorités, dit « *mise en évidence extérieure* », et l'autre qui s'appuie sur la contribution des choses, qualifié de « *mise en évidence intérieure* ». La mise en évidence par la contribution des choses est fondamentale, puisque les choses sont considérées comme éléments d'évidence lorsque « *leur contribution ressemblait au témoignage d'observateurs et à l'autorité des livres* » (Ibid., p. 66).

La probabilité était donc « *assignée par des régularités et des fréquences stables* » (Ibid., p. 79). Du point de vue « épistémique », la probabilité a pour objectif d'évaluer les degrés de croyance. Du point de vue de la « fréquence », la probabilité vise à mettre en évidence des lois stochastiques de processus aléatoires. On a donc une nouvelle manière de construire des connaissances à partir des faits observés, autrement dit, des évidences. C'est donc l'évidence des observations empiriques qui devient le nouvel

« *espace épistémologique dans lequel la probabilité s'installe avec sa dualité de degré de certitude d'un énoncé scientifique et d'accumulation de faits observés selon des fréquences relatives à peu près stables* » (Desrosières, 2006, p. 2).

Leibniz défend l'idée que la probabilité est « *ce qui est déterminé par l'évidence factuelle et la raison* » (Hacking, 2002, p. 57). Alors que Galilée place la probabilité du côté de l'approbation, qui selon lui peut aisément s'accorder avec « *l'évidence factuelle et non pas avec le poids des autorités* » (Ibid., p. 57). Hacking (2002) souligne que la probabilité est considérée comme

« *statistique et s'applique aux lois stochastiques des processus aléatoires ou comme épistémique et concerne l'évaluation des degrés auxquels il est raisonnable de croire en la vérité de propositions n'ayant rien de statistique* » (Hacking, 2002, p. 39).

Cette dualité de la probabilité a également été retenue par Carnap, pour qui « *il faudrait distinguer la probabilité inductive de la probabilité statistique* » (Hacking, 2002, p. 39).

Dans le versant épistémique,

« *la probabilité attribuée à une hypothèse, compte tenu de certaines données, est une relation logique entre l'hypothèse et les données. La probabilité de h compte tenu de d , est quelque chose comme le degré auquel d implique logiquement h* » (Hacking, 2002, p. 40).

Alors que dans le versant aléatoire, la probabilité est liée à la stabilisation de fréquences lorsqu'on réitère des essais.

Du point de vue de Hacking, c'est avec le livre *Ars Conjectandi* (1713) de Jacques Bernoulli que la probabilité sort de sa phase d'émergence. En effet, dans cet ouvrage, Bernoulli a clarifié le concept de probabilité et la relation entre la probabilité d'un événement et

la fréquence de sa réalisation (pour un grand nombre d'expériences) explicitée dans le théorème limite en calcul de probabilité qui peut être formulé comme suit :

« pour une épreuve dont une issue possible E a une probabilité p , la fréquence de réalisations de E sera aussi proche que l'on veut de p avec une probabilité fixée si l'on fait un nombre suffisamment grand de répétitions » (Pichard, 2001, p. 31).

Bernoulli s'intéressait à la détermination de la probabilité par la méthode expérimentale. Il suggéra ainsi une manière de déterminer la probabilité d'un évènement *a posteriori*. Par la suite, cette notion est approfondie par Laplace, et elle sera enseignée sous cette forme jusqu'à l'axiomatisation mathématique élaborée par Kolmogorov (1950). Ce dernier présente la probabilité comme une mesure.

En résumé, la probabilité possède deux aspects, l'un subjectif portant sur le degré de croyance, l'autre objectif portant sur la fréquence stable. Ces deux aspects définissent deux courants philosophiques détaillés ci-dessous.

2.2 Les courants philosophiques en probabilité

Il existe deux grands courants philosophiques dans les interprétations des fondements des probabilités définissant ainsi deux approches : objectiviste et subjectiviste.

2.2.1 Courant objectiviste

Ce courant se centre sur les situations modélisables par la théorie des probabilités : « la probabilité n'a du sens que si elle est mathématique, au sein d'un modèle décrivant les lois du hasard. Cette probabilité mathématique prend du sens si elle représente la stabilisation objective de la fréquence d'un évènement observé lors de la répétition d'une expérience aléatoire un grand nombre de fois » (Henry, 1999, pp. 39-40).

Dans ce courant, la probabilité d'un évènement est basée sur deux approches : l'approche *a priori* et l'approche *a posteriori*. Dans la première approche, la probabilité est obtenue par le rapport $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ sous l'hypothèse que la loi est équiprobable. Alors que dans la deuxième approche, la probabilité est empirique et s'obtient en répétant un certain nombre de fois une expérience et en calculant la fréquence de réalisation de l'évènement en question. Sous hypothèse d'équiprobabilité, ces deux approches sont mises en cohérence par la loi des grands nombres.

Dans le cas où les issues de l'expérience aléatoire ne sont pas équiprobables ou que l'on ne peut pas se ramener à une hypothèse d'équiprobabilité des issues, alors la probabilité d'un évènement est obtenue de façon empirique en répétant l'expérience un très grand nombre de fois. Ainsi pour n répétitions, la probabilité empirique se rapproche alors de la

probabilité cherchée. Les deux approches, classique et fréquentiste, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, ont été retenues par les programmes de l'enseignement des probabilités en France.

2.2.2 Courant subjectiviste

Dans ce courant, la probabilité est considérée comme une mesure d'incertitude relative à chaque sujet, et aux convictions de celui-ci. Comme le souligne Maury, la probabilité s'appuie « *sur des connaissances globales non explicitement justifiées, ressenties par le sujet comme des évidences et s'exprimant dans l'action immédiate* » (Maury, cité par Gaydier 2011, p. 58). Les valeurs de cette probabilité sont issues « *d'impressions et de jugements subjectifs* » (Gaydier, 2011) et non d'un calcul (*a priori*) ou d'une estimation à partir des résultats obtenus par une expérience. Ce courant est le fondement de l'approche bayésienne, dans laquelle le calcul des probabilités est mobilisé pour réduire l'incertitude.

Ces deux courants philosophiques ne définissent pas la probabilité de la même façon. De même, nous verrons qu'au sein d'un même courant, il peut exister deux définitions distinctes de la probabilité. Nous proposons dans la section qui suit les différentes définitions de la probabilité.

2.3 La probabilité d'un événement

De manière générale, Hawkins et Kapadia (1984) ont répertorié quatre types de définition d'une probabilité.

- La probabilité où l'on suppose l'équiprobabilité des événements, qualifiée de probabilité « *a priori* ». Probabilité définie dans le courant objectiviste.
- La probabilité dite « fréquentiste », qui est déterminée par un calcul à partir des fréquences d'apparition d'événements dans la répétition de l'expérience. Probabilité définie dans le courant objectiviste.
- La probabilité dite « bayésienne », est soit « subjective » ou « intuitive » (cf. Le courant subjectif). Dans le premier cas, la probabilité porte sur des jugements dans le cas où on ne peut pas déterminer la probabilité « formelle ». Et dans le second cas, la probabilité intuitive conduit à formuler une réponse correcte à un problème probabiliste. Elle est définie dans le courant subjectiviste.

- La probabilité dite « formelle », obtenue par calcul faisant référence aux lois de probabilités. Probabilité définie dans la théorie des probabilités (axiomatique de Kolmogorov).

Ces quatre définitions sont détaillées ci-dessous.

2.3.1 Définition « *a priori* » ou laplacienne : formule de Laplace

Cette définition est explicitée dans le premier principe de *l'Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace (1825) :

« le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles » (Laplace, cité par Thienard, 2001, p. 58).

La quantification de la probabilité laplacienne de l'évènement A donné est alors obtenue par le rapport (appelé formule de Laplace) :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Cette définition de la probabilité se place dans des situations où l'on suppose l'équiprobabilité de tous les événements élémentaires quand ceux-ci sont en nombre fini. La probabilité est donc déterminée *a priori* sur un ensemble fini. Par conséquent, cette définition de la probabilité a tendance à renforcer l'idée de l'équiprobabilité des issues, ce qui peut représenter un danger dans l'apprentissage des probabilités.

Bien que la définition de Laplace mérite d'être qualifiée de simple, elle a cependant l'inconvénient de réduire le calcul des probabilités aux situations d'équiprobabilité qui sont loin d'être toutes des situations naturelles (ou réelles). Selon Gaydier (2011), cette définition de la probabilité

« risque, peut être, de renforcer le biais d'équiprobabilité des issues [...], biais qui fait facilement partie des connaissances spontanées des élèves, alors qu'il s'agit justement, au delà des connaissances spontanées, d'introduire une théorie qui prend en compte des situations [...] ne relevant pas d'une loi uniforme » (Gaydier, 2011, p. 68).

Par ailleurs, Carranza (2010) qualifie cette définition de la probabilité d'une *définition opératoire* de la probabilité qui est dépourvue de sens :

« la définition de la probabilité comme un quotient de cas favorables sur cas possibles est une définition opératoire parce qu'elle n'indique qu'un algorithme. Cette définition, dépourvue de sens et en tant que procédé de quantification, ne précise pas ce qu'on doit entendre par probabilité. Ce qu'elle nous indique sont des pas bien précis pour la quantifier » (Carranza, 2010, p. 52).

2.3.2 Définition fréquentiste : estimation par les fréquences

Dans son œuvre *Ars Conjectandi* (1713), Bernoulli propose une manière de déterminer la probabilité *a posteriori*, et ceci à partir d'observations d'un grand nombre d'expériences identiques. Ce dernier suggère dans ce cas de prendre comme probabilité d'un événement la fréquence stabilisée qui a été observée expérimentalement de cet événement. Cette probabilité se justifie à l'aide de la loi des grands nombres.

D'autre part, von Mises (1928) a tenté d'axiomatiser ce phénomène de stabilisation de la fréquence des réalisations d'un événement conduisant à une définition de la probabilité comme valeur limite de la fréquence relative. En d'autres termes, on a une définition fréquentiste des probabilités. Néanmoins, cette manière de définir une probabilité a des limites, dans la mesure où elle met à l'écart les situations non reproductibles, comme « *celle du contrôle de fiabilité d'appareils complexes dont on ne peut répéter les pannes à l'infini [...]* » (Henry, 1999, p. 19).

Cette interprétation fréquentiste de la probabilité laisse place uniquement aux expériences reproductibles, où les épreuves sont indépendantes. D'où, lorsqu'on répète une expérience n fois dans les mêmes conditions, pour chacune des épreuves on s'intéresse à la réalisation ou non d'un événement A lié à cette expérience. Cette définition

« pose la question du statut de la loi des grands nombres, plus exactement, pour ce qui concerne la transposition de la théorie des probabilités dans l'enseignement secondaire : la stabilisation des fréquences des issues, que l'on peut observer en répétant un grand nombre de fois l'expérience étudiée » (Gaydier, 2011, p. 68).

Cette définition de la probabilité paraît selon Carranza (2010) expérimentale et adaptable à toute situation qui relève du hasard. Il ajoute que cette définition est une *définition sémantique* de la probabilité, puisqu'elle rend compte du signifié du terme « probabilité ».

2.3.3 Définition « subjective » ou « intuitive » : formule de Bayes

Dans cette définition, la probabilité s'applique au domaine empirique et tient compte du point de vue de l'observateur. Elle

*« correspond au degré de crédibilité attribuable à une hypothèse ou à une proposition dont on ne peut établir fermement la vérité ou la fausseté [...] la probabilité est alors une mesure du **degré de certitude** ou de **croissance** d'un événement ou d'une proposition »* (Carranza et Kuzniak, 2006, p. 342).

Par ailleurs, « *le degré de certitude ou de croissance* » (Ibid., p. 342) découle du niveau de connaissance sur l'événement. Ce niveau de connaissance dépend de la « *quantité d'informations disponibles couramment représentée sous la forme d'une probabilité conditionnelle* » (Ibid., p. 342).

2.3.4 Définition « formelle » : axiomatique de Kolmogorov

C'est à partir du début du 20^e siècle que le calcul des probabilités devient une théorie mathématique basée sur une axiomatique. Kolmogorov définit la probabilité comme suit : « une probabilité est une mesure sur un ensemble Ω , c'est une application σ -additive d'une tribu de parties de Ω dans $[0, 1]$ » (Kolmogorov (1933), cité par Pichard 2001). La probabilité est donc une mesure abstraite, qui est définie sur un ensemble Ω , modélisant les issues d'une expérience aléatoire. Une définition de cette probabilité est proposée dans le cas des ensembles finis dans l'enseignement secondaire.

Dans la suite de notre travail de recherche, nous avons choisi de ne pas prendre en compte la définition « subjective » de la probabilité. Ce choix est justifié par le fait que notre travail de recherche se centre essentiellement au niveau de l'enseignement secondaire, dans lequel la probabilité « Bayésienne » n'est pas abordée. Dans cette étude, nous prendrons en compte la définition « laplacienne » et « fréquentiste » de la probabilité, qui fait l'objet d'étude en classe de 3^e et en classe de 2^{nde}. Nous prenons également en compte la quatrième définition de la probabilité, formelle, dans le cas des ensembles finis.

2.4 Les travaux didactiques portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la probabilité

L'objectif général de notre recherche s'inscrit dans l'étude de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau du secondaire. C'est pourquoi nous proposons dans cette section une analyse succincte de divers travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage du domaine des probabilités. Pour ce faire, nous nous référons essentiellement aux recherches internationales référencées dans « Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning » (NTCM, 2007). Nous nous référons également à des travaux de thèse comme ceux de Gaydier (2011) et Kiet (2015).

La question de l'enseignement et de l'apprentissage de la notion de probabilité au niveau secondaire a fait l'objet de nombreuses études didactiques où plusieurs difficultés ou conceptions erronées sont relevées, aussi bien du côté de l'enseignant que de celui de l'élève.

2.4.1 Les conceptions erronées relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des probabilités

De nombreux travaux ont porté sur les difficultés des élèves sur l'apprentissage de la notion de probabilité (cf. l'article de synthèse de Jones et al., 2005, p. 900). Certaines

de ces difficultés sont liées à la notion mathématique de la probabilité (Polaki, 2005), notamment et pour ne citer que celles que nous avons rencontrées dans notre recherche :

- L'explicitation de l'univers de l'expérience aléatoire : liste incomplète des issues pour les expériences aléatoires à une mais surtout à plusieurs épreuves.
- La difficulté à associer un nombre (la probabilité) à un événement aléatoire. Cette difficulté est observée très souvent au début de l'apprentissage de la probabilité.

D'autres difficultés sont liées aux conceptions erronées (misconceptions) que les élèves possèdent vis à vis de cette notion. Nous renvoyons à la thèse de Kiet (2015, pp. 7-20), pour un exposé plus détaillé des différentes conceptions erronées décrites par divers chercheurs. Nous présenterons ici seulement les conceptions erronées que nous avons rencontrées dans les parties 2 et 3 de notre thèse.

1- Misconception regarding Effect of Sample Size (taille de l'échantillon).

Cette conception est en relation avec la loi des grands nombres. En effet, lors des traitements des tâches d'estimation, les élèves ont tendance à ne pas prendre en compte la taille de l'échantillon. Steinbring (1991) souligne que « students should get a good grasp of theoretical and experimental probability in order not to hold misconceptions regarding this issue » (Kiet, 2015, p. 10).

2- Misconception regarding Representativeness (La représentativité d'un événement (Kahneman et Tavesky, 1972; Shaughnessy, 1977; Bennett, 2004).

Cela concerne les individus qui considèrent que plus un événement est jugé représentatif, plus sa probabilité est élevée. Par exemple, les individus qui possèdent cette conception erronée pensent que dans une famille de quatre enfants, la série GFGE est plus représentative (car elle représente mieux le hasard) que la série GGGG (Jendraszek, 2008).

3- Misconception regarding equiprobabilty bias (Le biais d'équiprobabilité) (Lecoutre, 1992; Lecoutre et Durand, 1988; Chiesi et Primi, 2009).

Lorsqu'il y a deux issues, les élèves ont tendance à affirmer qu'elles sont équiprobables. Ainsi, ils attribuent à chacun des deux issues une probabilité de $\frac{1}{2}$. De même, lorsqu'il y a n issues, ils attribuent une probabilité de $\frac{1}{n}$ à chacun d'entre eux. D'après Lecoutre (1992), les individus qui possèdent cette conception considèrent que les événements à caractère aléatoire sont par nature équiprobables. Cette conception a été observée chez les élèves de lycée et chez les étudiants de l'université (Batanero et al., 1996).

Ces conceptions erronées que les élèves possèdent vis à vis de la notion de la probabilité peuvent être source de difficulté et parfois même d'obstacle dans l'apprentissage de la notion de probabilité. D'autres obstacles à l'apprentissage de la notion de probabilité peuvent se présenter. Comme par exemple, ceux qui relèvent de la maîtrise du vocabulaire

ensembliste (Girard 2001, Henry 1999), de la logique mathématique et du langage mathématique (Dheib 2009, Henry 1999, Coutinho 2001). Mais également, des obstacles portant sur la difficulté à choisir ou à élaborer un modèle adéquat et à différencier le modèle de la réalité.

2.4.2 Recherche sur l'enseignement de la notion de probabilité

Geer et Riston (1994) montrent dans leur travaux que la plupart des enseignants du secondaire (en Irlande du Nord) considèrent que la probabilité n'est pas une notion importante comparée aux autres notions mathématiques. Ils ne privilégient pas l'usage des expériences dans l'enseignement des probabilités. Gattuso et Pannone (2002) ont également mis en évidence des résultats similaires à ceux de Geer et Riston chez les enseignants en Italie. À ceci s'ajoutent diverses difficultés éprouvées par les enseignants dans l'enseignement du domaine des probabilités. En effet, Coutinho (2001), Girard (2001) et Dheib (2009) soulignent que les enseignants éprouvent des difficultés d'ordre épistémologique dues à la complexité de la notion du hasard ainsi qu'à celle de la dualité (approche laplacienne et fréquentiste) de la notion de probabilité. Ils soulignent également la présence de difficultés d'ordre didactique chez les enseignants pour introduire la notion de probabilité. Maury (1992), qui s'intéresse également aux difficultés des enseignants dans l'enseignement du domaine des probabilités (en France), affirme que l'un des facteurs qui explique les difficultés ressenties par les enseignants est « *la représentation qu'ont les enseignants du savoir de référence* » (Maury, 1992, p. 77). Du point de vue conceptuel, Maury se préoccupe des « intuitions erronées » en probabilités qui se manifestent également chez les enseignants qui peuvent être un frein à l'enseignement du domaine des probabilités :

« ce décalage entre les prévisions associées au modèle mathématique et celle provenant de certaines intuitions erronées, créerait un sentiment d'angoisse, angoisse elle-même amplifiée par l'incertitude relative aux fondements. En définitive, le malaise ainsi engendré contribuerait, au niveau global, à freiner le développement de l'enseignement des probabilités » (Maury, 1992, p. 77).

Dans ses travaux, Stohl (2005) montre que la réussite des élèves dans le développement du raisonnement probabiliste dépend fortement des enseignants, notamment de leurs compréhensions au sujet de la notion de probabilité, mais également de leurs connaissances concernant les conceptions erronées des élèves sur la probabilité. Plus précisément, Steinbring (1991) affirme que les enseignants devraient avoir une compréhension à la fois conceptuelle et théorique de la notion de probabilité. Kvatinsky et Even (2002) ont précisé les trois sortes de compréhension que les enseignants devraient avoir sur la notion de probabilité :

- La première porte sur la prise de conscience des caractéristiques spécifiques du domaine des probabilités, un domaine particulier par comparaison aux autres domaines mathématiques.

- La seconde concerne la compréhension des aspects mathématiques qui permettent ou non de développer la pensée probabiliste.
- La troisième nécessite de comprendre l'importance de la notion de probabilité pour faire face à des situations de la vie courante.

Par ailleurs, les travaux de Fischbein (1975), Kvatinsky et Even (2002) soulignent la nécessité de la connaissance des intuitions des élèves relatives à la notion de probabilité par les enseignants dans l'enseignement de la notion de probabilité. Dans le cas de l'usage de la modélisation, Steinbring (1991) précise que les enseignants devraient comprendre les hypothèses sous-jacentes aux modèles utilisés. Il ajoute que l'apprentissage de la notion de probabilité résulte des situations proposées et des différentes représentations choisies (arbres, tableau, diagramme de Venn, ...).

2.4.3 Une nouvelle forme de raisonnement dans le domaine des probabilités

À partir des travaux de Lahanier-Reuter (1999), Gaydier (2010) souligne que l'enseignement du domaine des probabilités au niveau secondaire en France suppose la pratique d'une nouvelle forme de raisonnement mathématique faisant notamment intervenir la statistique inférentielle et la notion de modèle. Gaydier (2010) précise que cette nouvelle forme de raisonnement pose la question de sa validité. En s'appuyant sur l'exemple du lancer de deux dés, Gaydier affirme que :

« la validation ne porte pas particulièrement sur la probabilité égale à $\frac{1}{36}$ de sortir le double six, résultat d'un calcul mené sous l'hypothèse que les dés sont parfaitement équilibrés. Sous une autre hypothèse, ce $\frac{1}{36}$ pourra être faux » (Gaydier, 2010, p. 81).

Ici, Gaydier pose clairement la question du modèle dans lequel la probabilité a été déterminée. En effet, la valeur $\frac{1}{36}$ résulte d'un calcul au sein d'un raisonnement lorsque l'espace probabilisé (avec lequel l'expérience aléatoire a été modélisée) a été choisi. Et c'est précisément sur le choix de cet espace probabilisé que porte la validation (Gaydier, 2010). Par conséquent, nous avons une nouvelle forme de validation des résultats en mathématiques qui ne s'effectue pas seulement

« par la seule « démonstration mathématique » qui s'appuie sur la règle du modus ponens, démonstration qui est la norme visée par les programmes de mathématiques à partir de la classe quatrième » (Gaydier, 2010, p. 81).

À ceci, Gaydier (2010) ajoute que l'enseignement des probabilité (au niveau du secondaire en France) est

« le seul lieu où apparaît (ou devrait apparaître, ou pourrait apparaître) le fait que la validité du modèle dépend du choix des « axiomes » ([...] liés à l'expérience étudiée), et que se pose la question de leur validation » (Gaydier, 2010, p. 81).

Illustrons les propos de Gaydier à l'aide de l'exemple¹ ci-dessous :

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?

Le terme « au hasard » désigne de manière implicite l'équiprobabilité des issues. Tel qu'il est formulé, l'énoncé de cet exemple nous conduit à considérer : les bancs (notés A , B et C) ou bien les places (A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2) afin de répondre à la question.

Cas 1 :

Si l'on considère uniquement les bancs, sans distinguer les places, on a donc la répartition uniforme de la probabilité sur l'univers $\Omega = \{A, B, C\} \times \{A, B, C\}$. Donc les issues réalisant l'événement D : « les deux personnes sont assises côte à côte » sont les couples : (A,A) , (B,B) et (C,C) ayant la même probabilité. Dans ce cas, la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{3}{9}$ soit $\frac{1}{3}$.

Cas 2 :

On pose $U = \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$. Si on considère cette fois-ci les places des bancs, on a la répartition uniforme de la probabilité sur l'univers $\Omega = U \times U - \{(A_1, A_1), (A_2, A_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2), (C_1, C_1), (C_2, C_2)\}$. Les issues réalisant l'événement D : « les deux personnes sont assises côte à côte » sont les couples : (A_1, A_2) , (A_2, A_1) , (B_1, B_2) , (B_2, B_1) , (C_1, C_2) , (C_2, C_1) ayant la même probabilité égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$. Dans ce cas, la probabilité de l'événement D est égale à $6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$ soit $\frac{1}{5}$.

Les deux cas ci-dessus traduisent le choix de deux modèles probabilistes différents dans lesquels nous avons traité le problème posé dans l'exemple. Le traitement de ce problème donne lieu à deux raisonnements tous deux valides au sein du modèle dans lequel ils ont été élaborés. Cependant, ces deux raisonnements aboutissent à deux valeurs (de la probabilité de l'événement D) qui sont différentes. Que peut-on conclure ? Quelle est alors la probabilité de l'événement D ?

Nous avons ici une démarche de raisonnement qui n'est pas habituelle dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Les enseignants sont donc confrontés à l'enseignement d'une nouvelle manière de raisonner en mathématique.

1. L'étude détaillée de cet exemple est présentée dans la partie 3

2.5 Conclusion

De notre enquête épistémologique, nous concluons que c'est la preuve en probabilité qui est « coupable » de son émergence tardive puisque, à l'origine, la probabilité faisait partie des « basses sciences », un domaine dans lequel la preuve était basée sur l'opinion. En revanche, la probabilité était exclue du domaine des « hautes sciences », dans lequel la seule preuve admise était la démonstration par le raisonnement hypothético-déductif. Or, la formation du concept de mise en évidence factuelle a donné naissance à un nouveau mode de preuve s'appuyant, non pas sur l'opinion, mais sur des observations empiriques des faits. C'est donc ce nouveau mode de preuve qui a permis à la probabilité d'accéder au domaine des « hautes sciences » au même titre que la géométrie. De plus, cette mise en évidence factuelle est le fondement du courant objectiviste dans lequel la probabilité d'un événement est interprétée suivant deux approches : laplacienne et fréquentiste. Nous avons vu également que dans le courant subjectiviste, la probabilité bénéficiait d'une autre approche, l'approche bayésienne.

Du point de vue didactique, on constate que l'enseignement du domaine des probabilités peut susciter des difficultés chez les enseignants. Ces difficultés résultent de la spécificité de la démarche de raisonnement dans ce domaine qui fait intervenir la notion de modèle mais également la statistique. Dans ce cas, quelles peuvent-être les formes de validation pratiquées par les enseignants ? Ces formes de validation sont-elles différentes des autres formes de validation pratiquées dans les autres domaines des mathématiques enseignées ? Cerner la question de la validation dans l'enseignement du domaine des probabilités à la fin de la scolarité obligatoire nous conduit à étudier du point de vue didactique la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire.

Chapitre 3

L'éclairage didactique sur la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques

L'objectif de ce chapitre est d'apporter un éclairage sur la question de la validation dans l'enseignement. Pour ce faire, nous avons mené une investigation sur les travaux didactiques portant sur notre questionnement. Dans un premier temps, nous expliciterons les différents contextes de la validation. Ensuite, nous discuterons les différents types de validation existants dans l'enseignement afin d'établir une typologie de la validation en fonction de la nature de l'argumentaire. Pour terminer ce chapitre, nous proposerons une analyse de l'architecture d'un argumentaire de validation, appuyée sur les travaux de Toulmin (1993), pour examiner la structure d'un argument.

3.1 Les contextes de validation

Dans la théorie des situations didactiques, Brousseau (1998) a distingué trois phases dans la démarche de la résolution d'un problème dans le cadre scolaire : l'action, la formulation et la validation. Il insiste particulièrement sur le fait qu'

« un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration » (Brousseau, 1998, p. 127).

Margolinas (1993) ajoute que dans la résolution d'un problème,

« la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel [...] la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de son travail » (Margolinas, 1993, pp. 30-31).

Au-delà de la validation empirique de son action, l'élève construit des preuves de la validité et de la pertinence de son modèle d'action. Il ne s'agit donc pas de communiquer des informations mais de chercher à convaincre les autres élèves et le professeur en construisant des ensembles d'énoncés de référence et en organisant des énoncés en démonstration. L'objectif de la phase de validation est donc de « *prouver ce que l'on affirme autrement que par l'action* » (Douady, 1999, p. 5). La validation dans la démarche de la résolution de problème au niveau scolaire est une phase dans laquelle on élabore des justifications des résultats qui ont été produits dans la phase d'action.

Cette distinction entre ces trois phases rejoint, d'une certaine manière, celle qui a été faite par Giaquinto (2005) lorsqu'il décrit le travail global d'un mathématicien expert, en appelant la première *découverte*, la deuxième *explication*, et la troisième *justification*. Chacune de ces trois phases a un objectif précis :

Phases	Objectifs
Découverte	Connaissance
Explication	Compréhension
Justification	Certitude relative

Dans la phase de **découverte**, il y a trois sortes d'activités qui lui sont propres : « *making a discovery, presenting a discovery, taking in a discovery* » (Giaquinto, 2005, p. 77), que l'on peut traduire respectivement par *élaboration*, *diffusion*, et *appropriation* des découvertes. Ceux qui font les découvertes sont en général les mathématiciens experts, autrement-dits les chercheurs. La diffusion des découvertes se fait généralement par les chercheurs, mais également par les enseignants. Ces découvertes sont utilisées par la suite par les chercheurs, les enseignants mais également par les apprenants. Le rôle de la phase **d'explication** est selon Giaquinto :

« *to help make a theorem that one already knows more intuitive. Often this can be done for a theorem in analysis by means of geometric illustration* » (Ibid., 2005, p. 78).

Pour illustrer le rôle de l'explication, Giaquinto prend l'exemple du théorème de Pythagore représenté par une séquence d'images qui donnent un aperçu de ce théorème :

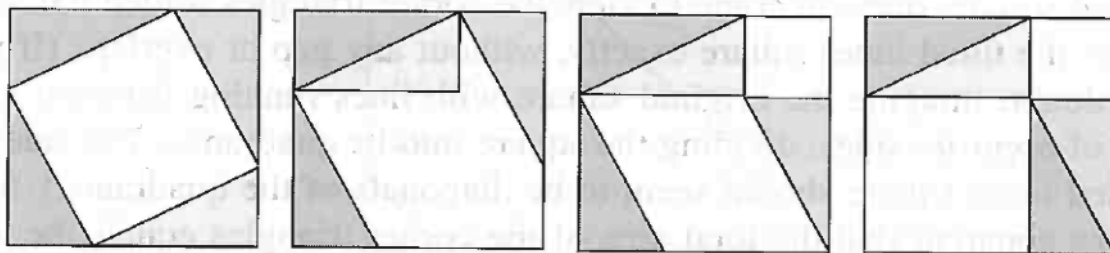


Fig. 3.1 – *figure 2* (Giaquinto, 2005, p. 77)

Par ailleurs, Giaquinto distingue l'explication de la preuve (ou la démonstration) :

« proof and explanation can come apart : there may be a proof that does not explain its conclusion and there may be an explanation that does not prove the fact explained » (Giaquinto, 2005, p. 77).

Il considère que prouver (ou démontrer) relève de la phase de **justification** :

« proving a theorem is not the only kind of justifying, as I aim to show a little later, and so it should not replace justification on the list » (Giaquinto, 2005, p. 76).

Il ajoute que le terme « justifier » est très souvent utilisé comme moyen pour établir la vérité d'une proposition : *« the locution 'justifying' as applied to a statement usually means establishing its truth, it might be better to talk of motivating axioms and definitions, as some authors already do »* (Ibid., p. 84). Par conséquent, deux objectifs sont assignés à la phase de justification. Le premier *« serait d'atteindre un certain degré de certitude relative à la vérité d'un théorème »* (Ibid., p. 84, notre traduction). Le deuxième *« serait d'atteindre un certain degré d'assurance relative à l'opportunité d'adopter cette définition »* (Ibid., p. 84, notre traduction).

En résumé, qu'elle soit pratiquée à l'échelle scolaire ou à l'échelle du travail d'un mathématicien expert, la validation est associée à la justification. Toutefois, la validation n'est pas dissociée des deux autres phases. En effet, la résolution d'un problème nécessite d'abord de se placer dans la phase de découverte afin de produire le résultat, qui sera par la suite prouvé dans la phase de justification. Nous avons donc deux contextes liés à la validation : le contexte de découverte où il est question de produire le résultat, et le contexte de justification dans lequel des moyens sont mis en œuvre pour justifier le résultat obtenu. Pour la phase d'explication, nous avons vu précédemment qu'elle n'était pas du même ordre que la preuve, mais qu'elle pouvait parfois être indispensable pour accéder à la compréhension d'un résultat avant sa justification. D'ailleurs, cette phase est très souvent observée dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. La phase d'explication est alors plus proche de la phase de découverte que celle de la justification.

Dans chacun des deux contextes de découverte et de justification, des moyens, c'est-à-dire des raisonnements, sont mis en œuvre pour découvrir ou pour justifier un résultat. Dans les deux cas, les raisonnements n'ont pas le même but. Nous proposons dans la suite d'étudier les argumentaires de validation.

3.2 Les argumentaires de validation

Pour étudier la validation dans le cadre scolaire nous nous référons à quelques chercheurs dont les contributions ont influencé le champ de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration : Balacheff, Duval et Pedemonte. Cette étude nous permettra par la suite de caractériser les argumentaires de validation pour mener notre analyse de la validation dans l'enseignement des probabilités.

Travaux de Balacheff

Dans ses premiers travaux portant sur la preuve, Balacheff (1987) s'est intéressé aux productions de preuves chez les élèves (au niveau du collège). Il appelle **démonstration** une preuve¹ qui est acceptée par la communauté mathématique et présentée sous une forme particulière :

« il s'agit d'une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précède à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini »
(Balacheff, 1987, p. 30).

Pour Balacheff, la démonstration est une validation s'appuyant sur un ensemble de connaissances théoriques (théorèmes et définitions) reconnues et institutionnalisées, utilisant un formalisme où la langue naturelle et le langage symbolique sont incorporés, et obéissant à des règles de déduction. Par ailleurs, Balacheff souligne l'importance de l'interaction sociale dans la production de la preuve, et cette interaction est selon lui est un levier dans la production d'arguments pour convaincre un autre que soi-même. Cet aspect social de la preuve constituerait alors le point de rapprochement de l'argumentation et de la démonstration chez Balacheff : *« L'argumentation est ainsi constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social »* (Balacheff, 1987, p. 574). Toutefois, Balacheff met une distance entre l'argumentation et la démonstration dans la mesure où l'argumentation

« met en scène un objet, la validité d'un énoncé. Mais les sources de la compétence argumentative sont dans la langue naturelle et dans des pratiques dont les règles sont le plus souvent d'une nature profondément différente de celles que requièrent les mathématiques, et qui portent la marque profonde des interlocuteurs et des circonstances » (Balacheff, 1999, p. 7).

L'écart entre l'argumentation et la démonstration chez Balacheff porte sur le fait que l'argumentation vise à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur, tandis que la démonstration vise à établir la vérité de l'énoncé indépendamment des interlocuteurs. C'est pourquoi Balacheff soutient :

1. Une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné (Balacheff, 1987).

« qu'il n'y a pas d'argumentation mathématique au sens suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait à certaines des contraintes qui pèsent sur la démonstration » (Balacheff, cité par Cabassut 2005, p. 45).

Balacheff reconnaît cependant l'existence de la pratique de l'argumentation dans le cadre de la résolution de problème :

« la résolution de problèmes, dans laquelle je dirais volontiers que tous les coups sont permis, est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels ailleurs (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction du discours qui seul sera acceptable au regard des règles propres aux mathématiques » (Balacheff, cité par Cabassut 2005, p. 45).

Chez Balacheff, la pratique de l'argumentation est effectuée dans le contexte de découverte, tandis que la démonstration est associée au contexte de justification.

Travaux de Duval

De son côté, Duval (1993) propose une réflexion approfondie sur la démonstration et l'argumentation. Cette analyse lui a permis de conclure que l'argumentation et la démonstration sont deux raisonnements² fondamentalement différents. Duval souligne que « pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide³ » (Duval, 1995, p. 212). Ainsi, une démonstration est désignée par Duval comme un raisonnement valide ayant pour objectif d'établir « la justesse (valeur de vérité « vraie ») d'une proposition » (Duval et Egret, 1993, p. 115). Contrairement à la démonstration, l'argumentation est un raisonnement qui obéit non pas aux contraintes de validité mais à celles de pertinence. Il en résulte que la démonstration et l'argumentation sont différentes du point de l'objectif qu'elles visent :

« cette différence est classiquement exprimée par le fait que l'une aurait pour objectif la vérité et l'autre viserait la vraisemblance et la conviction d'autrui ou de soi-même » (Duval, 1992, pp. 42-43).

Chez Duval, la démonstration est caractérisée par une suite de pas déductifs. Un pas a une structure ternaire, composée de trois propositions ayant l'un de ces **statuts opératoires** :

2. Duval définit un raisonnement comme suit : « tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur le « bien-fondé » de son affirmation, ou de son rejet, est reconnu comme « raisonnement ». Autrement dit, les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :

- être orienté vers un énoncé-cible, c'est à dire vers la proposition à justifier,
- être centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et non pas sur son contenu » (Duval, 1995, p. 217).

3. Duval précise que : « la validité d'un raisonnement dépend du respect de règles pour l'organisation des propositions entre elles, et non pas du contenu des propositions » (Duval, 1995, p. 212).

prémisse, énoncé-tiers (ou règle d'inférence), énoncé-cible (ou conclusion). L'énoncé-tiers permet le passage des prémisses à la conclusion. Les **statuts opératoires** déterminent l'organisation interne et la possibilité du fonctionnement d'un pas. La démonstration est donc un raisonnement dont « *l'organisation consiste en un enchaînement de pas de déduction, ou d'inférences* » (Tanguay, 2005, p. 2). Cet enchaînement de pas est articulé de manière à ce que la conclusion d'un pas soit recyclée en la prémisse d'un autre pas, ou dans le cas du pas terminal en la conclusion cible de la démonstration. Ce recyclage entraîne donc un changement du statut opératoire d'une proposition.

La différence entre la démonstration et l'argumentation chez Duval porte essentiellement sur les trois points suivants :

Point 1 : la valeur épistémique et la valeur de vérité d'une proposition.

Duval distingue deux sortes de valeurs d'une proposition qui sont « *composantes du sens d'une proposition* » (Duval, 1995, p. 222). La première qualifiée de *valeur épistémique* est

« *le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible, ou absurde . . . Ainsi dès qu'un énoncé est « compris », il est compris comme l'énoncé d'un fait établi, ou comme celui d'une représentation purement imaginaire, celui d'une croyance, celui d'une trivialité [...]* Naturellement, une même proposition n'a pas nécessairement la même valeur épistémique pour deux personnes différentes » (Duval, 1995, pp. 218-219).

Une même proposition peut donc avoir plusieurs valeurs épistémiques en fonction de l'interlocuteur. La seconde valeur est appelée *valeur logique de vérité* (ou *valeur de vérité*) de la proposition énoncée qui est soit vraie, soit fausse, soit indéterminée. Contrairement à la valeur épistémique,

« *la valeur logique (sous-entendu la valeur de vérité) d'une proposition ne dépend pas de la seule compréhension de son contenu mais elle résulte des procédures spécifiques de vérification ou de preuve* » (Duval, 1995, p. 219).

De ce fait, lorsque une proposition est énoncée, la valeur épistémique sémantique (associée à son contenu) peut être évidente, absurde, plausible, vraisemblable, nécessaire, etc. Sa valeur de vérité est vraie, fausse ou indéterminée. Ainsi, pour une même proposition, on peut avoir une valeur épistémique sémantique *évidente* et une valeur de vérité *fausse*. Par ailleurs, la place de la proposition énoncée dans le discours n'est pas seulement déterminée par ses valeurs, épistémique et logique, mais elle est aussi déterminée par son statut puisque c'est le statut de la proposition « *qui détermine sa place dans l'organisation discursive d'un ensemble de propositions* » (Duval, 1995, p. 223). A ceci, Duval ajoute que « *le statut théorique détermine le statut opératoire des propositions et leur valeur épistémique théorique* » (Duval, 1995, p. 227). Le **statut théorique** détermine l'organisation et la

possibilité de développement d'un pas au sein d'un cadre théorique. Une proposition peut donc avoir un statut de définition, de théorème, de règle ou bien d'axiome, etc. Dans le cas où la proposition est énoncée dans un contexte théorique, le statut de cette proposition devient prioritaire par rapport à son contenu, cela induit alors à considérer la valeur épistémique théorique qui « *supplante, ou refoule, la valeur épistémique sémantique* » (Duval, 1995, p. 225). Duval précise que l'argumentation a pour vocation de changer la valeur épistémique sémantique de l'énoncé cible alors que la démonstration, elle, a pour vocation de modifier la valeur épistémique théorique de l'énoncé cible entraînant un mode d'organisation différent :

« la différence entre argumentation et démonstration se fait dans le mode d'organisation. L'organisation d'une argumentation ne prend en compte que la valeur épistémique des propositions liée à la compréhension spontanée de leur contenu sémantique. L'organisation d'une démonstration, au contraire, « fait abstraction » de toute valeur épistémique liée à la compréhension spontanée des propositions pour se centrer exclusivement sur la valeur épistémique dérivée du statut théorique, préalablement fixé, de chaque proposition » (Duval, 1992-1993, p. 52).

Ainsi, dans une argumentation, la valeur épistémique est exclusivement liée au contenu sémantique des propositions. En revanche, dans une démonstration, la valeur épistémique dépend non pas du contenu des propositions mais plutôt du statut théorique des propositions.

Point 2 : énoncé-tiers d'un pas de déduction et énoncé-tiers d'un pas d'argumentation.

Dans l'argumentation, les inférences s'appuient sur les énoncés-tiers et dépendent du contenu des propositions énoncées

« les inférences sémantiques et les inférences discursives articulent les propositions en fonction de leurs relations de contenu et non en fonction de leur statut » (Duval, 1995, p. 248).

À l'inverse, les pas du raisonnement de la démonstration sont des pas de déduction qui dépendent exclusivement du statut opératoire des propositions énoncées.

Point 3 : enchaînements des pas de raisonnement.

D'après Duval, dans une argumentation, l'enchaînement des pas s'effectue par une connexion extrinsèque qui permet de fixer les liens entre les arguments et l'énoncé-cible. De plus,

« les arguments s'ajoutent les uns aux autres [...]. Les propositions admises ne sont pas recyclées mais réinterprétées sous des points de vue différents » (Duval, 1995, p. 241).

Bien que Duval insiste sur le fait que le fonctionnement cognitif de la démonstration est radicalement différent de celui de l'argumentation, il affirme cependant que ce n'est pas

le cas de leurs fonctionnements discursifs. Selon lui « la distance discursive » entre ces deux modes de raisonnements est très faible, voire négligeable, puisque :

« dans les deux cas, on recourt à des connecteurs communs qui sont habituellement considérés comme le label rouge du raisonnement ! » (Duval, 1993, p. 54).

Il ajoute que c'est cette proximité discursive est souvent à l'origine des confusions lors de l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques :

« pour l'élève, qui, en ramenant tout raisonnement à un raisonnement argumentatif ne comprend pas l'intérêt et l'apport des démonstrations. Et pour l'enseignant, qui, devant contrôler les productions des élèves, ne peut pas toujours déterminer s'il y a, ou s'il n'y a pas, véritablement compréhension de la démonstration » (Duval, 1993, p. 54).

L'analyse de Duval concernant l'argumentation et la démonstration révèle l'existence d'une « distance cognitive » entre ces deux types de raisonnement. Ces deux raisonnements ont donc des structures complètement différentes et du point de vue cognitif, dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend de son statut théorique, alors que dans l'argumentation elle dépend entièrement de son contenu.

Les conclusions de Duval concernant la distance cognitive entre l'argumentation et la démonstration sont partagées par d'autres chercheurs tel que Balacheff (1987), ou Cabassut (2005), mais elles sont également discutées par d'autres chercheurs, notamment Pedemonte (2002) qui est en désaccord avec les conclusions de Duval.

Travaux de Pedemonte

Pedemonte est en désaccord avec Duval en ce qui concerne la séparation radicale entre l'argumentation et la démonstration. Contrairement à Duval, Pedemonte affirme que les raisonnements en mathématiques ne se réduisent pas seulement aux démonstrations et qu'il existe des raisonnements mathématiques, comme ceux de l'argumentation, qui ont pour objectif de fournir des « raisons » (ou « arguments ») pour accepter ou refuser certaines propositions :

« les raisonnements mathématiques ne peuvent être réduits aux raisonnements démonstratifs qui permettent de déduire des conclusions à partir des prémisses données par le moyen de règles d'inférence explicites à l'avance. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation qui veulent simplement donner des « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions » (Pedemonte, 2002, p. 23).

En se basant sur les travaux de Toulmin (que l'on verra un peu plus loin), concernant la structure ternaire d'un argument (donnée, permis d'inférer, conclusion), Pedemonte ajoute

que les « raisons » d'acceptation ou de réfutation de certaines propositions sont « *tous les permis d'inférer possible qui composent l'argumentation* » (Ibid., p. 24). C'est pourquoi Pedemonte défend la thèse que « *l'argumentation en mathématiques est avant tout une justification rationnelle* » (Ibid., p. 24) et que « *l'argumentation ne se contente pas de la compréhension, elle veut convaincre* » (Ibid., p. 24). La rationalité se situe ici au niveau de l'inférence qui lie « *la suite des propositions d'un raisonnement* » (Pedemonte, 2002, p. 29). Cette rationalité, qui caractérise l'argumentation en mathématique chez Pedemonte, on la retrouve également chez le rhétoricien Reboul (2001). Selon lui, l'argumentation et la démonstration sont des moyens « *de convaincre purement rationnels* » (Reboul, 2001, p. 8), pour convaincre un interlocuteur dans le cas d'une argumentation, et un auditoire universel dans le cas de la démonstration. Pedemonte affirme que la fonction de l'argumentation en mathématique est de fournir une justification rationnelle et que l'objectif de l'argumentation en mathématique est la détermination de la vérité :

« *l'objectif principal de l'argumentation en mathématique est la recherche de la vérité. En mathématique on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de rechercher le « vrai »* » (Pedemonte, 2002, p. 30).

D'après Pedemonte, l'argumentation en mathématique « *est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel* » (Pedemonte, 2002, p. 30). En effet, la finalité de l'argumentation est de convaincre et de persuader un auditoire. La conviction vise à changer l'opinion ou les croyances en faisant appel à la rationalité. En revanche, la persuasion cherche à obtenir l'adhésion d'un auditoire sans pour cela faire nécessairement appel à la raison. Argumenter en mathématique revient donc à convaincre un auditoire, ce qui implique par la suite sa persuasion et non pas le contraire. En outre, Pedemonte affirme que

« *l'argumentation en mathématique n'est pas nécessairement liée à la logique formelle ; la plus grande partie des argumentations en mathématiques utilise la langue naturelle [...]. La logique naturelle est la logique du discours, d'un discours qui peut être argumentatif mais également rhétorique, descriptif, explicatif, etc.* » (Pedemonte, 2002, p. 34).

De ce fait, le raisonnement de l'argumentation en mathématique est un raisonnement logique ayant une structure en pas. Chacun de ces pas (appelés arguments) peut être décomposé selon le modèle de Toulmin (1993) — que l'on verra dans le paragraphe suivant — sous la forme d'un triplet (des données, un permis d'inférer, une conclusion).

Chez Pedemonte, la démonstration a un objectif spécifique qui est celui de « *valider un énoncé* ». Selon elle, cela revient « *à attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique* » (Pedemonte, 2002, p. 44). Il en résulte que la démonstration et l'argumentation ont un objectif commun, celui de « *la recherche des raisons du « vrai »* » (Pedemonte, 2002,

p. 44). Pedemonte ajoute que la démonstration est élaborée à partir d'un raisonnement formulé par un langage et par des règles particulières. De ce fait, ce raisonnement est bien de « *la même nature que le raisonnement argumentatif* » (Pedemonte, 2002, p. 44). Néanmoins, elle note une différence entre la démonstration et l'argumentation qui provient du fait que « *la démonstration apporte une justification à l'intérieur d'un domaine théorique, alors que l'argumentation n'est pas obligée* » (Pedemonte, 2002, p. 45). Ainsi, Pedemonte conclut qu'« *une démonstration n'est qu'une argumentation particulière* » (Pedemonte, 2002, p. 47). Par ailleurs, elle défend la thèse de l'existence non pas de rupture mais de continuité cognitive entre l'argumentation et la démonstration. Or selon Durand-Guerrier,

« *il faut porter une attention spécifique aux cas où les arguments développés au cours de la résolution de problème conduisent à une preuve fausse, car cette continuité peut faire obstacle à l'accès à la démonstration* » (Durrand-Guerrier, 2005, p. 20).

Pour voir un peu plus clair, nous proposons de faire une synthèse des propos des trois chercheurs dans un tableau concernant l'argumentation et la démonstration, en qualité de validation :

	Argumentation	Démonstration
Balacheff	Explication qui vise à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur	Explication présentée sous une forme particulière qui vise à établir la vérité d'un énoncé
Duval	Raisonnement de nature dialogique qui vise la vraisemblance d'un énoncé et qui obéit aux règles de pertinence	Raisonnement de nature logique qui vise à établir la vérité d'une proposition et qui obéit à des règles de déduction
Pedemonte	Justification rationnelle	Justification rationnelle à l'intérieur d'une théorie mathématique

Duval effectue une analyse cognitive du raisonnement pour mettre en exergue la distance cognitive entre l'argumentation et la démonstration. La démonstration dépend d'un fonctionnement discursif où les propositions sont substituées les unes aux autres, alors que l'argumentation dépend d'un fonctionnement spontané et global où les propositions sont accumulées. Plus radical, Duval (1992- 1993) soutient que

« *le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas une voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif* » (Ibid., p. 60).

Bien que Balacheff ne se prononce pas sur l'existence d'une distance cognitive entre la démonstration et l'argumentation, nous retenons néanmoins que les positions de Balacheff et Duval sont similaires concernant la distinction entre l'argumentation et la démonstration. En effet, cette distinction est due *grosso modo* à l'objectif visé par leur raisonnement,

mais également à la question de la mise en forme du discours de validation. Pedemonte prône plutôt la continuité cognitive entre l'argumentation et la démonstration.

Si cette distinction entre une argumentation et une démonstration paraît claire du point de vue théorique, elle devient moins évidente lorsque nous nous plaçons au niveau de la pratique de la validation dans les classes. D'après Pedemonte (2002), les raisonnements mathématiques pratiqués dans les classes sont plus souvent les raisonnements argumentatifs que les raisonnements de démonstration. Ses raisons portent sur le fait que :

« les processus qui justifient un énoncé ne proviennent pas toujours d'une démonstration. Souvent les justifications en mathématiques sont des argumentations » (Pedemonte, 2002, p. 23).

Dans notre étude, nous nous intéressons aux validations produites par les enseignants (en interaction avec les élèves) ou par les élèves et approuvées par l'enseignant pendant les séances d'enseignement. C'est pourquoi nous considérons que dans le cadre de l'enseignement (au niveau secondaire) des mathématiques, les validations pratiquées et institutionnalisées par les enseignants sont avant tout des argumentations rationnelles. Ces validations n'utilisent pas toutes le même raisonnement. D'après Pedemonte, les validations pratiquées dans les classes mathématiques (au niveau secondaire) relèvent soit des raisonnements argumentatifs, soit des raisonnements démonstratifs. Cependant, lors de la résolution d'un problème, les raisonnements argumentatifs ou démonstratifs ne sont pas les seuls qui interviennent. En effet, ces deux raisonnements cités précédemment interviennent pour justifier un résultat qui a été conjecturé. Or la recherche du résultat d'un problème induit quelque part l'usage d'un raisonnement qui n'est certes pas celui de l'argumentation (au sens de Pedemonte) ou de la démonstration, mais plutôt un raisonnement qui conduit à un résultat qui est vraisemblablement vrai, et qui relève de l'induction ou de l'abduction. Cela nous conduit alors à distinguer plusieurs sortes de raisonnements pratiqués dans le cadre scolaire : raisonnement démonstratif, raisonnement non démonstratif, et raisonnement de plausibilité. Les deux premiers raisonnements sont pratiqués dans le contexte de justification et ont pour objectif commun la justification du résultat. Le dernier est pratiqué dans le contexte de découverte et a pour objectif de déterminer la plausibilité d'un résultat. Ces trois raisonnements constituent pour nous des argumentaires de validation visant à convaincre de manière purement rationnelle. Ces argumentaires se distinguent par leur objectif, par le contexte où ils sont convoqués mais également par leur mise en forme.

Dans notre travail de recherche, nous proposons de caractériser la validation dans le cadre scolaire à travers différents types d'argumentaires définis selon les critères suivants :

- leur objectif : établir la plausibilité ou justifier un résultat ;
- la mise en forme de l'argumentaire : organisé en fonction du contenu sémantique, organisé sous forme d'une démonstration ou non ;

- le contexte de validation dans lequel l'argumentaire est mis en jeu : découverte ou justification.

Nous avons donc dégagé trois types d'argumentaires différents correspondant à des formes de validation différentes :

- 1) un argumentaire qualifié « **de plausibilité** » ayant pour objectif d'établir la vraisemblance d'un résultat et qui obéit à des règles de pertinence ;
- 2) un argumentaire de **type démonstratif**, ayant pour objectif de justifier un résultat, dont le discours est basé sur de la déduction et explicitement organisé en enchaînement d'inférences ;
- 3) un argumentaire de **type non démonstratif**, ayant pour objectif de justifier un résultat, dont le discours n'est pas organisé sous la forme d'une démonstration.

L'argumentaire de plausibilité est pratiqué dans le contexte de découverte, et les deux derniers argumentaires sont pratiqués dans le contexte de justification. Ces trois types d'argumentaires constituent pour nous des formes de validation que nous synthétisons dans le tableau ci-dessous :

	Argumentaire de plausibilité	Argumentaire de type non démonstratif	Argumentaire type démonstration
Objectif	Argumentation rationnelle qui vise à établir la vraisemblance d'un résultat	Argumentation rationnelle qui vise à justifier un résultat	Argumentation rationnelle qui vise à justifier un résultat
Mise en forme de l'argumentaire	Organisé en fonction du contenu sémantique	Non organisé sous la forme d'une démonstration	Organisé sous la forme d'une démonstration
Contexte de la validation	Découverte	Justification	Justification

TABLE 3.1 – Argumentaires et formes de validation dans l'enseignement

Nous avons donc trois types d'argumentaires qui constituent des formes de validation et que nous prenons en compte pour étudier la caractérisation de la validation dans l'enseignement des probabilités. Ces argumentaires constitueront par la suite l'un des outils méthodologiques sur lequel nous allons nous appuyer pour identifier les formes de validation. Toutefois, nous ressentons le besoin d'affiner cette typologie de validation en procédant à une analyse fine de l'argumentaire de validation en termes d'arguments utilisés et de leur structure. En effet, l'identification des argumentaires de validation nécessite de procéder à une analyse de la structure globale de l'argumentaire afin d'étudier l'enchaînement des arguments au sein de l'argumentaire. Mais l'identification nécessite également de procéder à une analyse de la structure de chacun des arguments constituant l'argumentaire.

3.3 L'analyse de l'argumentaire de validation

Etudier l'argumentaire de validation revient, tout d'abord, à faire un zoom « arrière » afin d'observer l'architecture globale d'un argumentaire. Il s'agit donc d'analyser la manière dont les arguments sont enchaînés au sein de l'argumentaire. Pour ce faire nous nous référons aux travaux de Knipping (2002-2008). Ensuite, l'étude de l'argumentaire de validation nécessite de faire un zoom « avant » pour rendre compte d'un argument. Cela revient à analyser la structure d'un argument. Nous avons choisi d'analyser la structure d'un argument en prenant appui sur les travaux de Toulmin (1993). Enfin, l'étude d'un argumentaire nécessite également de préciser les différents types d'arguments utilisés dans l'argumentaire.

3.3.1 La structure globale de l'argumentaire de validation

Reboul (2001) considère que l'argumentation est semblable à « *un fuseau d'arguments, indépendants les uns des autres et convergeant vers la même conclusion* » (Reboul, 2001, p. 104). Il schématise la structure de l'argumentation comme suit :

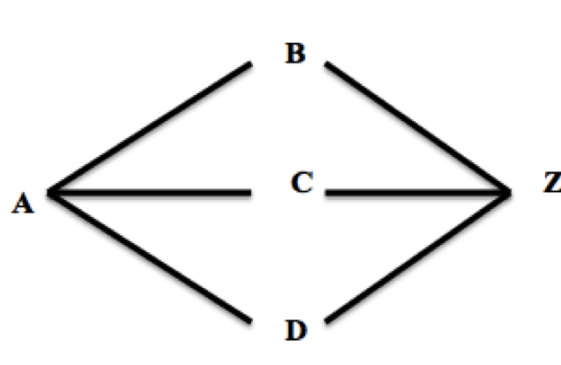


Fig. 3.2 – la structure de l'argumentation (Reboul, 2001, p. 104)

En revanche, la démonstration est pour Reboul semblable « *à une chaîne d'arguments (« ces longues chaînes de raisons » de Descartes), dont chacun est prouvé par ceux qui précèdent, et dont l'ordre est logique* » (Reboul, 2001, p. 104). La description de la structure de la démonstration par Reboul évoque une progression linéaire de l'enchaînement des arguments. Il schématise la structure de la démonstration comme suit :

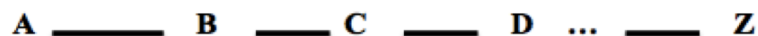


Fig. 3.3 – La structure de la démonstration (Reboul, 2001, p. 104)

Reboul distingue l'argumentation et la démonstration du point de leur structure globale. À la différence de la démonstration, l'argumentation possède une structure globale

non linéaire. Cette différence de structure globale est également soulignée dans les travaux de Knipping (2003-2008). En effet, dans ses travaux portant sur le processus de preuve conduit par six enseignants, trois en France et trois en Allemagne au niveau collège, Knipping (2002-2008) a caractérisé deux sortes de structure globale de l'argumentaire de validation pratiquées : *reservoir-structure* et *source-structure*.

- **Reservoir-structure** caractérise les argumentaires où plusieurs arguments sont développés en ligne en allant des données vers la conclusion ou inversement afin de structurer la prochaine ligne d'arguments :

« Argumentations with a reservoir structure flow towards intermediate target conclusions that structure the whole argumentation into parts that are distinct and self-contained. The parts that make up the argumentation are like reservoirs that hold and purify water before allowing it to flow on to the next stage. » (Ibid., 2008, p. 437).

La distinction entre la structure en source et la structure en bassin porte sur le fait que :

« the reservoir structure from a simple chain of deductive arguments is that the reasoning sometimes moves backwards in the logical structure and then forward again by deduction » (Ibid., 2008, p. 437).

- **Source-structure** concerne les argumentaires dans lesquels plusieurs arguments sont développés parallèlement et dont les conclusions sont recyclées en données jusqu'à obtenir la conclusion finale :

« the diversity of justifications characterizes an argumentation structure with parallel streams and meandering lines. Not only the target conclusion, but also intermediate statements are justified in various ways » (Knipping, 2008, p. 437).

Telle qu'elle est définie la source-structure est une structure non linéaire au même titre que l'argumentation chez Reboul.

Ainsi, la reservoir-structure peut être assimilée à une structure linéaire telle que celle de la démonstration chez Reboul. Mais elle n'est pas « strictement linéaire ». Dans notre typologie des argumentaires de validation, les argumentaires de type démonstratif ont une structure linéaire alors que les argumentaires de type non démonstratif ont une structure non linéaire.

Knipping insiste sur le fait que ces deux structures reviennent à deux manières d'apprendre à prouver qui différencient deux types de pratique dans les classes :

- *« in classrooms where the reservoir structure occurred, learning to prove meant focusing on the "logic" of the argument. The conclusion the argument is directed towards, the data from which it begins 'and the need for justifications are all made explicit »* (Ibid., 2008, p. 438) ;

- « *in classrooms where the source structure occurred, learning to prove meant focusing on understanding the underlying ideas and its proof.* » (Ibid., 2008, p. 438).

Knipping ajoute que la comparaison de ces deux structures globales a révélé l'importance du rôle de l'enseignant dans l'orientation du discours de la validation :

« *I observed these structures in proving processes in which the teacher took a prominent role in guiding the process. Arguments were co-produced by teachers and students, but the teacher was in control of the emerging overall structure* » (Ibid., 2008, p 438).

Ces deux structures globales (linéaire et non linéaire) constituent des éléments intéressants pour analyser les argumentaires de validation lors des séances d'enseignement. Nous aurons l'occasion de mettre en œuvre cette analyse dans la suite de ce travail.

3.3.2 La structure d'un argument

Nous adaptons la définition donnée par Toulmin (1993), où un **argument** est défini comme un **raisonnement élémentaire** caractérisé par le triplet (données, règle d'inférence, conclusion). Toulmin propose un modèle simplifié de structure ternaire d'un argument, qui peut être schématisé comme suit :

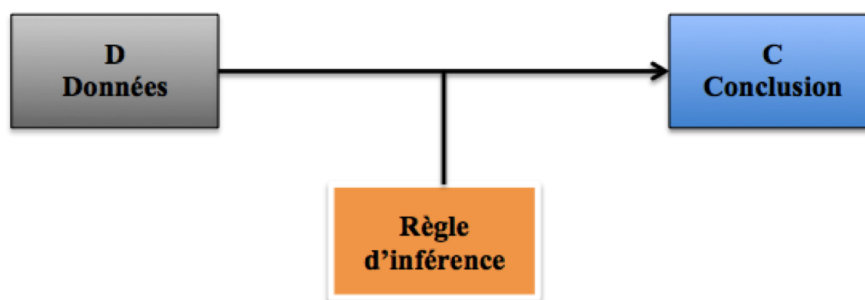


Fig. 3.4 – Modèle simplifié de la structure ternaire d'un argument selon Toulmin

Une **donnée** (D) est « *un certain nombre des données justifiant l'énoncé C* » (Pedemonte, 2002, p. 37) ;

Une **conclusion** (C) désigne « *l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur* » (Ibid., p. 37).

Le passage d'une donnée (D) à la conclusion (C) est garanti par un certain nombre de principes appelés **règles d'inférence** ou **garanties** qui sont explicitées ou non au sein de l'argument. La garantie est donc :

« la partie de l'argument qui établit la connexion logique entre les données et l'énoncé conclusion. C'est la « raison » de l'acceptation ou de la réfutation de l'argument » (Pedemonte, 2002, p. 39).

Or, le schéma de la structure ternaire d'un argument présenté ci-dessous n'est pas tout à fait complet. Celui-ci nécessite trois autres étapes. En effet, une garantie (G) assure et légitime le passage de la données (D) à la conclusion (C). Mais la garantie (G) est à son tour assurée (légitimée) par un **fondement** (F) :

« derrière nos garanties, on trouvera normalement d'autres assurances, sans lesquelles les garanties mêmes ne possèderaient ni autorité, ni crédit nous pouvons les désigner par le terme de fondement (F) d'une garantie [...] Les énoncés de garanties sont hypothétiques, semblables à des passerelles, leur fondement peut s'exprimer sous la forme d'énoncés factuels catégoriques aussi bien que les données invoquées directement à l'appui de nos conclusions » (Toulmin, 1993, pp. 127-129).

Les deux autres étapes sont :

- **Q** désigne le qualificateur de la vérité (nécessaire ou probable), qui modifie l'impact de l'argument. Autrement-dit, il désigne la force de l'argument.
- **R** désigne une réfutation possible de la conclusion.

Le schéma complet du modèle de la structure ternaire d'un argument est :

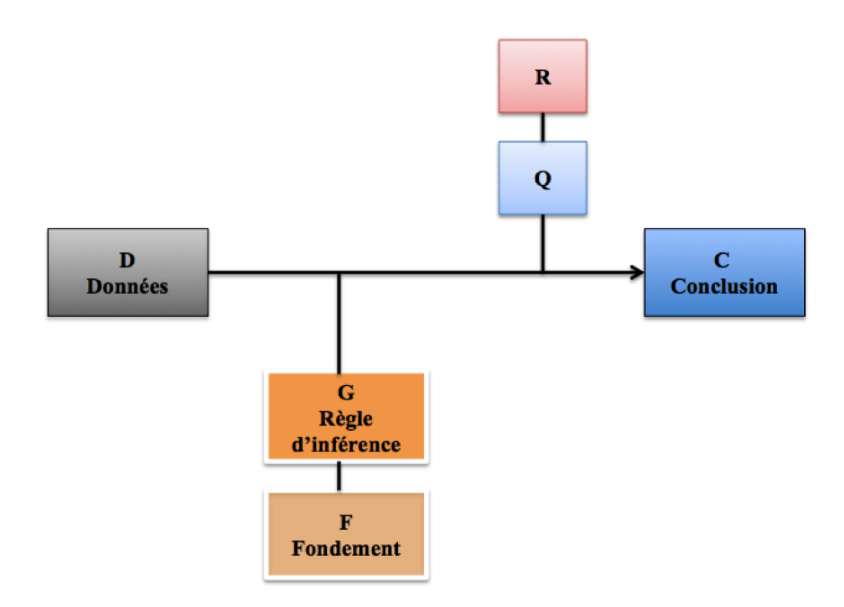


Fig. 3.5 – Modèle complet de la structure ternaire d'un argument selon Toulmin (Inglis et al, 2004, p. 4)

Illustrons le modèle de Toulmin à l'aide de l'un de ses exemples que l'on appellera « naissance aux Bermudes » : « Harry est né aux Bermudes. Donc il est vraisemblablement sujet

britannique » (Toulmin, 1993, pp. 120-125). Dans le modèle de Toulmin, cet argument est présenté de la manière suivante :

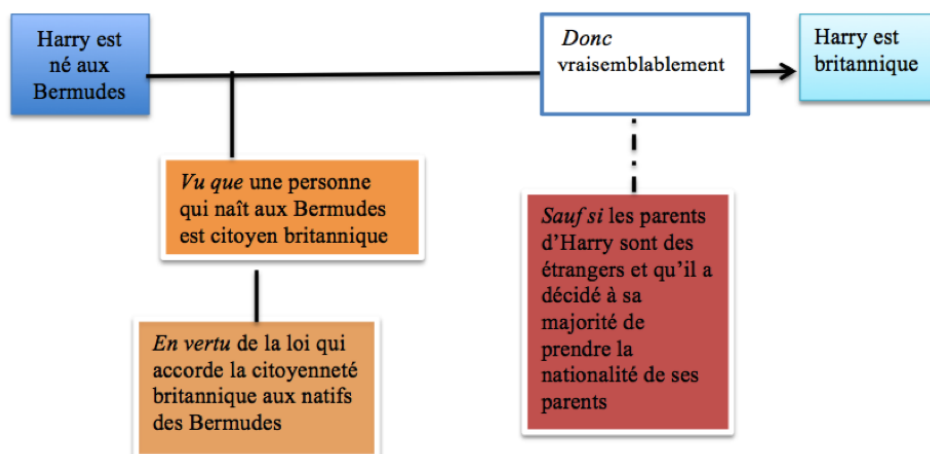


Fig. 3.6 – Un exemple de la structure ternaire d'un argument

De la donnée « Henry est né aux Bermudes » (**D**), on infère (**C**) qu'il est « sujet britannique », vu que « généralement, les personnes qui naissent sur le territoire des Bermudes sont britanniques » (**G**), au nom « d'une loi qui accorde la citoyenneté britannique aux natifs des Bermudes » (**F**), excepté si « les parents sont des étrangers et qu'à la majorité Harry a décidé de prendre la nationalité de ses parents » (**R**). La conclusion de l'argument est « donc vraisemblablement (**Q**) Harry est britannique (**C**) ».

Le triplet (D, G, C) constitue les trois propositions fondamentales caractérisant un argument dans le modèle de Toulmin. Ces trois propositions ont des statuts bien distincts. Prenons un exemple en géométrie plane et en probabilités pour illustrer cette distinction de statut des propositions :

En géométrie	En probabilités
ABC est un triangle rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (Argument d'application du théorème de Pythagore)	Un dé équilibré a six faces, donc la probabilité de l'événement A : « tiré un numéro pair » est de $\frac{1}{2}$. (Argument d'application de la formule de la Laplace)
Donnée : ABC est un triangle rectangle en B	Donnée : Un dé équilibré a six faces
La garantie : théorème de Pythagore	La garantie : Formule de Laplace. Equiprobabilité qui est régie par la loi uniforme (Fondement)
Conclusion : $AB^2 + BC^2 = AC^2$	Conclusion : la mesure de la certitude de l'apparition de l'événement A est de $\frac{3}{6}$

TABLE 3.2 – Exemple de la structure d'un argument en mathématiques

Notons toutefois que dans certains cas les garanties ne sont pas explicitées dans le raisonnement élémentaire. Par exemple dans le cas d'un calcul, ou de la résolution d'équation, les garanties sont supposées connues, et donc inutiles de les expliciter. Par ailleurs, la structure ternaire d'un argument telle qu'elle est définie par Toulmin présente des points communs avec la structure d'un pas de déduction (premisses, règles d'inférences, conclusion) dans une démonstration définie par Duval. Sauf que dans la démonstration les règles d'inférences sont des théorèmes. Ainsi, chacun des pas de la démonstration peut être analysé dans le modèle de Toulmin comme suit : la conclusion est déduite des données et de la règle d'inférence qui sont déterminées à l'avance. Cette proximité de la structure d'un argument et de la structure d'un pas de déduction nous permet par la suite d'analyser les argumentaires de validation. En nous appuyant sur cette analyse de la structure ternaire d'un argument, nous présentons dans le paragraphe suivant une typologie d'arguments convoqués dans un argumentaire de validation (dans l'enseignement).

3.3.3 Les arguments utilisés dans la validation

Dans ses travaux portant sur la validation dans l'enseignement des mathématiques (en particulier dans le domaine de la géométrie), Cabassut (2005) définit trois types d'arguments que nous allons reconsidérer dans le cadre de notre travail sur la validation dans le domaine des probabilités. Ces arguments sont définis comme suit :

- **argument formel ou syntaxique** : tout argument dont la structure (données, garantie, conclusion) est explicitée de manière claire, et dont la mise en œuvre de la garantie

« repose sur la forme des termes de la règle (la garantie) et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données » (Cabassut, 2005, p. 187).

- Dans le cas où les garanties de l'argument *« ne sont pas formulées de manière formelle mais s'appuient sur la signification ou le contenu des objets qu'elles mettent en jeu »* (Ibid., p. 187), l'argument est alors qualifié **d'argument sémantique**. C'est le cas des garanties

« qui ne sont pas complètement explicitées ou formalisées, par exemple lorsque le registre de représentation des objets n'est pas une langue formelle comme dans le cas d'un calcul automatique non explicité, ou dans la conversion d'un registre de représentation à un autre » (Ibid., p. 187).

- Tout argument ayant recours essentiellement à l'action (recours aux figures géométriques, recours aux logiciels dynamiques dans le cas de la géométrie plane, décomposition et recombinaison de figures), utilisant *« le succès d'une action comme règle de validation »* (Ibid., p. 187) est appelé **argument pragmatique**. La véri-

fication expérimentale d'une « *affirmation portant sur un objet par la réalisation matérielle de l'objet relève de ce type* » (Cabassut, 2005, p. 67) d'argument.

Cette typologie inspirée en grande partie des travaux de Balacheff (1987), mais aussi de l'approche linguistique, n'est pas totalement adéquate à notre étude de la validation dans le domaine des probabilités où la simulation et l'expérimentation ont une place prépondérante. C'est pourquoi nous allons retenir les trois arguments suivants :

Argument formel	Tout argument dont la structure (données, garantie, conclusion) est explicitée de manière claire. La garantie est explicitée clairement à l'oral ou à l'écrit dans le registre de la langue formelle ou de la langue naturelle. Ce type d'argument est basé sur l'exploitation des propriétés et des théorèmes qui sont, comme nous le verrons plus tard, organisés dans un référentiel théorique.
Argument sémiotique	Nous reconsidérons l'argument sémiotique défini précédemment avec une forte insistance sur les registres sémiotiques (Duval, 1993). Ainsi, l'argument sémiotique est fondé sur les registres sémiotiques et leur articulation (c'est à dire les conversions de registres et les traitements au sein des registres), par exemple les arbres dans le domaine des probabilités et les figures dans le domaine de la géométrie.
Argument empirico-expérimental	Il n'est pas simplement un argument de type empirique naïf (au sens de Balacheff) car il nécessite un travail de mise en place d'expérience lié à la notion de modèle et à celle de la simulation (que nous détaillerons dans la troisième partie).

TABLE 3.3 – Les arguments de validation

En résumé, dans un argumentaire de validation, les arguments empirico-expérimental, sémiotique, formel sont utilisés. Ils peuvent également être mobilisés dans un même argumentaire de validation. Dans la suite, nous allons étudier l'enchaînement des arguments à l'intérieur de l'argumentaire de validation.

3.4 Conclusion

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, nous avons eu besoin de faire un détour par les travaux de didactique des mathématiques afin de collecter des informations portant sur « la validation dans l'enseignement des probabilités ». Mais nous n'avons pas rencontré de travaux didactiques portant sur notre questionnement. C'est pourquoi, nous avons élargi notre champ d'investigation en nous intéressant aux travaux didactiques portant sur la validation dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Les différents travaux en didactique mentionnés dans ce chapitre concernent la pratique de la validation dans l'enseignement des mathématiques en fin de scolarité

obligatoire. Ces travaux portent sur la validation dans le domaine de la géométrie au collège. Leur méthodologie repose essentiellement sur les productions d'élèves (Balacheff et Pedemonte). Au travers de ces travaux, nous avons obtenu des éléments qui permettent de faire avancer notre recherche. Ces éléments portent sur le fait que, selon le contexte de validation (découverte ou justification), les formes de validation sont différentes et peuvent aussi bien évoquer un argumentaire de plausibilité, un argumentaire de type démonstratif ou non. De plus, l'analyse de l'argumentaire de validation à l'aide du modèle de Toulmin nous a permis de constituer un outil méthodologique pertinent pour examiner la validation dans l'enseignement du domaine des probabilités.

Les informations collectées dans ce chapitre vont nous aider à approfondir notre réflexion. Réflexion que nous allons alors insérer dans le cadre des espaces de travail mathématiques (Kuzniak, 2011) afin de préciser nos questions et nos hypothèses de recherche.

Chapitre 4

Les Espaces de Travail Mathématique

Nous avons choisi d'étudier la validation dans le domaine des probabilités en fin de scolarité obligatoire lors des séances d'enseignement. Il s'agit pour nous d'étudier le type de validation en jeu, mais également la manière dont le travail autour de la validation s'effectue pour élaborer l'argumentaire et la mise en forme de la validation. Le modèle de l'espace de travail mathématique (**ETM**) de Kuzniak (2011) nous apporte un cadre qui décrit la forme du travail mathématique de validation (en abrégé le travail de validation). À savoir, une forme du travail de nature sémiotique, instrumentale, ou discursive, et parfois même de nature sémiotique-discursive, ou instrumentale-discursive, ou sémiotique-instrumentale. Le couple (travail de validation, forme de validation) trouve place au cœur de notre recherche. Dans ce chapitre, nous proposerons tout d'abord une présentation de la notion d'espace de travail mathématique et de ses spécificités. Ensuite, nous exposerons les modalités d'entrée dans le travail mathématique. Pour finir, nous décrirons le travail de validation dans l'espace de travail.

4.1 La notion d'espace de travail mathématique

La question de la validation dans l'enseignement des mathématiques a été étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), notés **ETM**. Tel qu'il a été défini, le modèle des ETM a pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu par les élèves (ou plus généralement ceux qui mettent en œuvre ce travail) au sein d'une institution scolaire donnée. De plus, au sein de ce modèle, il existe une forte articulation entre les deux points de vues épistémologique et cognitif. C'est pour ces raisons que nous avons choisi ce modèle comme cadre théorique de référence pour notre étude. Évidemment, nous avons également fait appel à d'autres outils théoriques qui seront détaillés plus loin.

L'espace de travail mathématique est conçu et pensé de telle manière que l'utilisateur puisse exercer son travail dans de bonnes conditions. En s'inspirant des travaux de Lauté (1999), Kuzniak (2011) a mis en exergue trois composantes caractérisant le travail

mathématique, et structurant l'espace de travail mathématique :

« dans le modèle des ETM, on conçoit la conceptualisation comme le fruit d'une interaction entre un individu et des problèmes mathématiques (géométriques, algébriques, etc.), dans un environnement organisé pour et par le mathématicien (géomètre, algébriste, etc.) articulant deux plans » (Montoya et Vivier, 2014, p. 75).

Le premier plan est qualifié de plan **épistémologique**, composé de trois pôles : **representamen**, **artefact**, **référentiel théorique**. Il permet de structurer le contenu mathématique. Le second plan, qui est le plan **cognitif**, composé de trois processus cognitifs : **visualisation**, **construction** et **preuve**. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche. Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- une **genèse sémiotique** fondée sur les registres de représentation sémiotiques (au sens de Duval) qui donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- une **genèse instrumentale**, qui a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une **genèse discursive** de la preuve, qui permet de donner un sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique (par exemple le raisonnement déductif).

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les deux plans horizontaux en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'accès aux trois genèses s'effectue *via* la dimension (sémiotique, instrumentale, discursive) qui leur est associée. L'étude de ces dimensions rend compte du développement du travail respectivement sémiotique, instrumental et discursif effectué dans l'espace de travail mathématique. Les articulations possibles entre ces trois dimensions seront décrites plus tard dans cette section.

4.2 Les différents niveaux d'ETM

Le travail mathématique associé à l'espace de travail s'inscrit de manière générale dans le cadre des institutions scolaires. C'est pourquoi, dans le processus de la transposition didactique, on distingue un certain nombre de niveaux d'ETM qui sont en lien avec ce processus.

4.2.1 ETM *de référence*

Lorsqu'une communauté d'individus se met d'accord sur un paradigme donné afin d'énoncer des problèmes et de structurer leurs solutions en favorisant des outils ou des manières de penser, nous obtenons un espace de travail mathématique dit de référence. La connaissance de cet ETM nécessite de décrire le style du travail mathématique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETM est modelé par le paradigme qui a été choisi. La définition de cet ETM est fondée sur des critères mathématiques.

4.2.2 ETM *idoine*

L'ETM de référence est adapté et transformé afin de « *devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie* » (Kuzniak, 2010, p. 80). Lorsque le contenu mathématique à enseigner est défini par une institution, se pose alors la question de son enseignement effectif qui nécessite de concevoir un espace adéquat pour que l'enseignement de ce contenu soit réussi. Cette conception dépend bien évidemment de l'institution, mais également de l'enseignant qui est chargé de la mise en œuvre de cet espace dans la classe. La réussite de cet enseignement dépend naturellement de l'enseignant mais elle dépend aussi de l'utilisateur, autrement dit de l'élève. Un ETM idoine est donc un environnement organisé de telle manière qu'un élève s'engage dans la résolution de problème. Cet ETM idoine doit permettre à la fois un travail dans le paradigme correspondant à la problématique visée, et ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide.

4.2.3 ETM *personnel*

Les ETM idoines sont mis en œuvre dans les classes pour que les élèves se les approprient grâce au niveau de connaissances, et aux fonctions cognitives qui leur sont propres. Ces espaces de travail deviennent par la suite ce que nous appelons des espaces de travail personnels. Ils sont construits progressivement et peuvent être opérationnels ou non. Lorsque le problème est posé à un élève réel, son traitement est alors effectué dans l'ETM personnel de cet élève.

En conclusion, dans une institution scolaire donnée, les ETM de référence sont aménagés en des ETM idoines par les professeurs pour permettre la mise en place effective dans les classes où chaque élève travaille dans son ETM personnel. Par ailleurs, la conception des ETM idoines par les professeurs va dépendre de l'ETM personnel du professeur.

4.3 Les entrées dans le travail mathématique : articulation des trois dimensions

L'entrée dans le travail mathématique s'effectue au travers soit d'une des trois dimensions associée à chacune des trois genèses (sémiotique, instrumentale, discursive), soit au travers de l'articulation de deux d'entre elles (sémiotique et instrumentale, sémiotique et discursive, ou discursive et instrumentale), et éventuellement au travers de l'articulation des trois dimensions concurremment. Ces articulations donnent lieu à trois plans verticaux qui peuvent être identifiés par les genèses auxquelles les dimensions sont associées. L'analyse des modalités d'entrée dans le travail mathématique sera particulièrement importante pour décrire et organiser dans sa globalité les mathématiques enseignées. Il est donc question de savoir quelle(s) dimension(s) particulière(s) sera(-ont) privilégiée(s) pour initier le travail mathématique, et si possible d'analyser la manière dont les trois dimensions interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache, 2014).

4.3.1 Plan Sémiotique-Discursif, noté [Sem-Dis]

L'entrée dans ce plan peut se faire soit *via* la dimension sémiotique où il s'agit de décrire des transformations et des décompositions qui seront opérées perceptivement sur les diagrammes et les ensembles signes ; soit *via* la dimension discursive où il s'agit d'une interprétation du problème s'appuyant sur un discours de preuve où les diagrammes et la visualisation jouent un rôle heuristique.

4.3.2 Plan Instrumental-Discursif, noté [Ins-Dis]

L'entrée par la dimension instrumentale permet d'aboutir à un discours de validation s'appuyant sur l'expérience. Alors que l'entrée par la dimension discursive définit une démarche de validation de type discursif basé sur le référentiel théorique, justifiant ainsi les techniques de construction, permettant par la suite de déterminer l'usage des artefacts (au sens de Rabardel).

4.3.3 Plan Sémiotique-Instrumental, noté [Sem-Ins]

L'entrée dans ce plan est effectuée soit par la dimension sémiotique permettant de construire des objets et respectant certaines contraintes imposées par les signes ; soit l'entrée est effectuée à travers la dimension instrumentale faisant appel à l'exploration visuelle et sémiotique des données portées par l'artefact. Ce plan met donc en évidence la manière dont les signes et les outils interagissent.

L'analyse des modalités d'entrée dans le travail mathématique revient à déterminer quelle(s)

dimension(s) est (sont) privilégiée(s) pour initier le travail, et dans le meilleur des cas, à analyser les différentes interactions entre les trois dimensions afin de constituer un travail mathématique complet. Cet ensemble de relations (entre les trois plans verticaux et les deux plans horizontaux) peut être visualisé grâce au diagramme suivant :

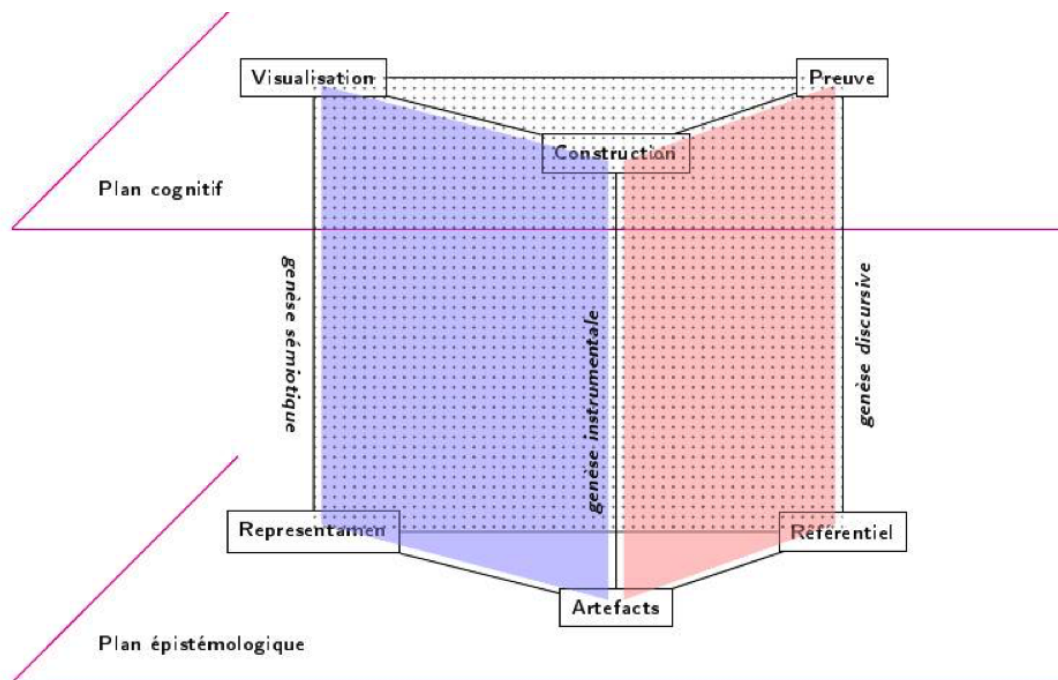


Fig. 4.1 – Diagramme général de l'Espace de Travail Mathématique

L'articulation entre les différentes dimensions est induite (ou non, si la tâche est insuffisamment riche ou mal conçue) par la résolution de tâches dans l'ETM. L'exécution des tâches contribuent à la circulation du travail mathématique dans l'ETM.

4.3.4 La fonction des tâches dans l'ETM

Par définition, l'espace de travail mathématique est un environnement (intellectuel) constitué de ses deux dimensions (épistémologique et cognitive) permettant de réaliser une tâche mathématique. La mise en fonctionnement d'un espace de travail mathématique est effectuée par le biais de la résolution de la tâche. En effet, les tâches déclenchent un processus cognitif chez les élèves, et de ce fait activent l'espace de travail dans lequel elles sont intégrées. Par conséquent, ces tâches favorisent la connaissance de l'ETM dans lequel elles sont proposées. Cependant, elles peuvent être simples, complexes ou riches (ces différentes tâches seront définies dans la partie 3) en fonction du domaine mathématique spécifique étudié. C'est donc par l'analyse du travail de validation effectué à travers la résolution des tâches (simple, complexe ou riche) que nous allons caractériser la validation dans l'enseignement.

4.4 Le travail de la validation dans l'ETM

D'après Kuzniak et Richard (2014), les trois plans verticaux [Sem-Ins],[Ins-Dis] et [Sem-Dis] définis auparavant sont respectivement mis en lien avec les différentes phases du travail mathématique lors de la réalisation d'une tâche : *découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication* (Kuzniak et Richard, 2014, p. 7). L'exécution de ces phases par un utilisateur de l'ETM

« définira, du fait, un certain nombre de compétences mathématiques cognitives fondées sur la coordination des genèses dans leurs relations avec le plan épistémologique » (Ibid., p. 7).

Or, notre réflexion menée sur les contextes de validation (dans le chapitre 3) met en évidence que dans chacun des deux contextes (de découverte et de justification), des raisonnements sont mis en oeuvre pour découvrir ou pour justifier un résultat. C'est pourquoi nous considérons que chacune des articulations entre deux dimensions déclenche un raisonnement et dans certains cas, requiert des justifications. Prenons l'exemple d'un problème géométrique où il s'agit de conjecturer une propriété à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, et par la suite de démontrer cette conjecture. Dans un premier temps, un raisonnement peut être élaboré en s'appuyant d'abord sur les artefacts pour construire les figures. Ensuite, sur l'exploration visuelle de la figure et de ses déformations à l'aide du logiciel pour découvrir un résultat, par exemple. Nous avons donc ici, la première étape du travail de validation qui s'effectue dans le plan [Sem-Ins] et qui mobilise un raisonnement conduisant à un résultat vraisemblable dans le contexte de découverte. Dans un second temps, il s'agit de justifier le résultat obtenu par l'expérience avec production d'un discours de validation. Dans ce cas, le raisonnement peut être élaboré en prenant appui sur la figure construite dans le contexte de découverte, et sur les éléments du référentiel théorique (propriétés, théorèmes, etc.) pour justifier les techniques de construction. Ici, la deuxième étape du travail de validation est tout d'abord effectué dans le plan [Sem-Dis]. Ensuite, ce travail est orienté vers la dimension discursive (Dis) afin de communiquer le discours de la validation. Toutefois, il peut y avoir des tâches dont la résolution s'effectue uniquement sur l'une des trois dimensions.

Nous avons au total trois plans qui correspondent aux connexions entre les dimensions de l'espace de travail mathématique. L'argumentaire de validation employé dans le plan [Sem-Ins] est l'argumentaire de plausibilité (dans le contexte de découverte). Par contre, l'argumentaire de validation utilisé dans le plan [Sem-Dis] est soit de type démonstratif ou de type non démonstratif (dans le contexte de justification). Lorsque la communication du discours de validation est exigée, alors le travail de validation est situé dans l'un des deux plans précédents et orienté vers la dimension discursive. Ainsi, les trois dimensions et leurs articulations caractérisent les mouvements entre les différentes composantes de l'ETM, permettant d'observer les différentes circulations du travail de la validation.

Le modèle des Espaces de Travail Mathématiques permet d'examiner la manière dont les trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive sont imbriquées dans le travail de validation de situations probabilistes faisant intervenir la simulation à l'aide d'ordinateurs ou de calculatrice.

4.5 Conclusion

Nous avons choisi d'utiliser le modèle des ETM pour analyser le travail mathématique de la validation et pour décrire les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités. En effet, l'articulation des deux points de vue épistémologique et cognitif d'une part, les interrelations entre les trois dimensions, sémiotique, instrumentale et discursive, associées aux genèses définissant les trois plans verticaux, d'autre part, mettent en exergue l'aspect dynamique de ce modèle. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de choisir ce modèle pour étudier la circulation du travail mathématique de la validation à travers les différents plans (horizontaux et verticaux), mais également pour caractériser la validation dans l'enseignement des probabilités en fonction de ces plans. Plus précisément, nous cherchons à caractériser la manière dont la validation est formulée lors de la résolution de tâches probabilistes. Du point de vue de Brousseau, la résolution de problème demande nécessairement de formuler la procédure de résolution par un discours. D'où, l'exigence que la solution du problème soit nécessairement formulée par un texte de preuve, qui s'appuie sur un référentiel théorique. Cette solution est donc validée par un discours de preuve, qui peut ou non représenter une institutionnalisation d'une nouvelle propriété insérée dans le référentiel théorique de l'espace de travail personnel (de l'élève). Ainsi, selon les tâches proposées dans l'ETM, la nature de la validation peut-elle être différente ?

Nous terminons cette première partie en proposant de synthétiser dans un tableau les informations essentielles collectées à partir des quatre chapitres, qui ont grandement contribué à la poursuite et à la précision de nos questions de recherche :

	Type 1	Type 2	Type 3
Objectif	Validation qui vise à établir la vraisemblance d'un résultat	Validation qui vise à justifier un résultat	Validation qui vise à justifier un résultat
Circulation du travail de validation dans l'ETM	[<i>Sem - Ins</i>]	[<i>Sem - Dis</i>] ou Clos sur (<i>Dis</i>)	[<i>Sem - Dis</i>] ou Clos sur (<i>Dis</i>)

TABLE 4.1 – La typologie de validation dans l'enseignement

	Type 1	Type 2	Type 3
		$[Ins - Dis] \rightarrow Dis$	$[Ins - Dis] \rightarrow Dis$
Mise en forme de l'argumentaire de validation	Organisé en fonction du contenu des propositions	Non organisé sous la forme d'une démonstration	Organisé sous la forme d'une démonstration
Contexte de validation	Découverte	Justification	Justification

TABLE 4.2 – La typologie de validation dans l'enseignement

PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE GÉNÉRALE

Dans ce paragraphe, il va s'agir de reprendre et de reformuler nos questions de recherche dont les éléments ont été dégagés au fur et à mesure du développement de la partie précédente, questions auxquelles nous tenterons de répondre. Par la suite, nous précisons la méthodologie générale que nous adapterons afin de répondre à nos questions.

Questions de recherche

Nous rappelons que l'objectif de cette recherche est d'étudier la question de la validation dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde}. La question est alors la suivante :

QR : Quel est le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} en France ?

Du point de vue épistémologique, l'émergence tardive du concept de probabilité est due essentiellement à la question de la validation qui n'est pas bâtie sur des raisonnements de type logico-déductif à la manière d'une démonstration en géométrie. En effet, traditionnellement en géométrie, le mode de validation est la démonstration, communiquée sous forme d'un discours basé sur la déduction, et ayant une forme particulière explicitement organisée en enchaînement d'inférences. Mais dans l'enseignement des mathématiques actuel en France, la démonstration est une forme de validation privilégiée, en particulier dans le domaine de la géométrie, dont l'apprentissage débute au collège. Notre question de recherche **QR** peut être déclinée sous cette première question :

Q1 : Existe-t-il des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} ?

Nous avons montré qu'il existe *a priori* plusieurs formes de validation dans l'enseignement. Elles dépendent de l'objectif visé, de la mise en forme de l'argumentaire de validation mais également du contexte dans lequel elles sont mobilisées. Notre travail de recherche vise alors à caractériser les formes de validation pratiquées dans le domaine des probabilités dans les classes de 3^e et de 2^{nde}. Dans ce cas, notre question de recherche **QR** peut également être déclinée en deux sous-questions :

Q2a : Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^e et en classe de 2^{nde} ?

Q2b : Les formes de validation observées dans les classes de 3^e et de 2^{nde} sont-elles propres à ces deux niveaux de classe où sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau secondaire ?

D'après Pedemonte (2002), « *au sein des mathématiques elles-mêmes, la démonstration peut prendre des formes multiples [...]* » (Pedemonte, 2002, p. 63), mais

« les mathématiques scolaires font apparaître des différences substantielles. Le contrat didactique joue un rôle central : c'est l'enseignant qui décide ce qui peut être considéré comme une démonstration et comment la construire. Il se peut qu'une argumentation soit acceptée comme démonstration. Ou au contraire, le manque de formalisme peut être un motif de rejet d'une démonstration » (Pedemonte, 2002, p. 63).

Par conséquent, le choix de la validation et l'orientation du discours de validation lors des séances de résolution de tâches probabilistes paraissent dépendre de l'enseignant, en particulier de ses représentations et de ses conceptions sur la forme de la validation et de sa place dans le domaine des probabilités. Notre question de recherche **QR** est alors déclinée en une troisième question formulée comme suit :

Q3 : Quels sont les points de vue de l'enseignant sur la forme de la validation dans l'enseignement des probabilités ?

Nous distinguons ainsi trois questions liées à notre question de recherche. Pour chacune d'elles, nous observerons le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classe de 3^e et de 2^{nde}.

Hypothèses

Pour répondre à la première question **Q1** nous conduit à formuler une première hypothèse :

Hypothèse (H1) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que le travail mathématique de la validation dans le domaine de la géométrie est bien différent de celui du domaine des probabilités au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}. Cette différence est probablement due à la richesse du référentiel théorique (en termes de propriétés et théorèmes) de l'ETM géométrique favorisant la validation de type démonstration. Alors que le référentiel théorique de l'ETM probabiliste à ces deux niveaux de classe est en cours de construction, ce qui empêche la mise en œuvre d'une démonstration au même titre qu'en géométrie.

Pour répondre aux deux sous-questions **Q2a** et **Q2b** nous formulons ces deux hypothèses **H2a** et **H2b** associées respectivement à chacune des deux sous questions :

Hypothèse (H2a) : Nous postulons que, dans le domaine des probabilités, la forme de la validation dépend du degré de complexité des tâches proposées. Ainsi, selon le degré de complexité des tâches, le travail de validation dans l'ETM_P est placé dans l'un des plans [Sem-Dis], [Ins-Dis], ou éventuellement clos sur la dimension discursive.

Hypothèse (H2b) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que pour des tâches identiques proposées dans des ETM idoines similaires, les formes de validation institutionnalisées par les professeurs sont différentes d'un professeur à un autre et ceci, quel que soit le niveau d'enseignement.

Enfin, la dernière hypothèse qui permet de répondre à la question **Q3** :

Hypothèse (H3) :

Nous faisons l'hypothèse de recherche que, la validation dans l'enseignement des probabilités dépend des représentations que l'enseignant se fait de la validation dans le domaine enseigné. Cela dépend donc de la manière dont la validation dans le domaine des probabilités est caractérisée dans l'ETM personnel de l'enseignant.

Les objets d'étude

Notre recherche porte sur la validation dans l'enseignement des probabilités au terme de la scolarité obligatoire. Il s'agit donc pour nous de caractériser les formes de validation pratiquées par les professeurs dans les deux niveaux de classe de 3^e et de 2^{nde}. De ce fait, nous avons décidé de limiter nos objets d'étude en prenant compte les points suivants :

1. L'analyse du travail de validation en fin de scolarité obligatoire nous a conduit à restreindre notre étude uniquement aux classes de 3^e et de 2^{nde}. Nous serons conduits (dans la partie 3) à étudier des exemples de validation dans les niveaux de 1^{re} et de terminale scientifique dans le but d'enrichir notre réflexion concernant les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités.
2. L'analyse du travail de validation revient, selon nous, à identifier le type de validation produit dans la classe. C'est pourquoi, nous avons limité notre étude à la validation produite par écrit (sur le tableau), et présentée institutionnellement comme correcte — c'est-à-dire celle qui est produite par l'élève (ou les élèves) et qui est évaluée comme correcte par l'enseignant — et celle qui est produite par l'enseignant.
3. Pour analyser le travail de validation dans la classe, nous avons décidé d'observer uniquement les interactions entre l'enseignant et les élèves mais également entre les élèves pendant les phases de correction collectives des exercices dans le but de produire un argumentaire de validation.
4. Pendant les phases de correction, l'enseignant anime et crée les interactions avec et entre les élèves pour mener à bien son projet de validation. De ce fait, nous avons limité notre étude à la gestion de la validation par l'enseignant.

Ainsi, nous avons donc décidé de ne pas considérer les objets d'étude suivants :

1. les validations produites par les élèves individuellement, non évaluées par l'enseignant et qui n'ont pas été communiquées lors de la phase de correction ;
2. le rapport des élèves à la validation, notamment à l'aide de questionnaires ou d'entretiens ;
3. les niveaux autres que 3^e, 2^{nde}, 1^{re} S et Terminale S.

Nous avons bien évidemment conscience de l'intérêt qu'auraient ces objets d'étude pour affiner notre travail de recherche. Mais le temps qui nous a été accordé pour effectuer cette recherche nous a conduit à faire certains choix.

En conclusion, nous avons fait le choix d'orienter notre recherche sur l'étude des formes de validations pratiquées et institutionnalisées par les professeurs et de mettre de côté celles produites isolément par les élèves.

Méthodologie générale

Pour répondre à notre question de recherche **QR**, déclinée en sous-questions **Q1**, **Q2a**, **Q2b** et **Q3**, et pour valider nos hypothèses de recherche, nous avons élaboré la méthodologie présentée ci-dessous.

(M1) : pour tester l'hypothèse **(H1) portant sur la différence entre le travail de validation en géométrie et en probabilité due à la richesse relative du référentiel théorique**, nous avons comparé le travail de validation et les formes de validation dans l'ETM de référence et l'ETM idoine relatifs aux deux domaines considérés. La comparaison au niveau de l'ETM de référence s'effectue au travers de l'analyse des programmes officiels et des documents ressources. En ce qui concerne la comparaison au niveau de l'ETM idoine, nous avons procédé à une série d'observations de séances d'enseignement en classe de 3^e et de 2^{nde} (soit deux classes de 3^e et deux classes de 2^{nde}). Nous avons choisi de centrer nos observations sur les phases de correction d'exercices où il est question d'exposer les validations et de les institutionnaliser. Pendant ces phases de correction, nous avons été très attentifs, d'une part à l'usage des dimensions sémiotique, instrumentale, discursive, et de leurs articulations dans le travail de validation en fonction du domaine considéré, d'autre part à la place accordée à chacune des dimensions dans le discours de la validation. Cette étude fera l'objet de la deuxième partie de la thèse.

(M2a) : pour tester l'hypothèse **(H2a) qui porte sur le fait que la validation dans le domaine des probabilités enseigné dans le secondaire dépend du degré de complexité des tâches proposées dans un niveau de classe donné**, nous avons sélectionné des situations probabilistes fournies dans les documents ressources de classe de chaque niveau étudié. Nous avons également étendu notre sélection de situations au niveau de la classe de 1^{re} S et de la classe de Terminale S de façon à mieux évaluer l'influence du niveau de classe sur les formes de validation pratiquées. Ces situations ont été choisies en fonction de leur degré de complexité à l'aide d'une grille d'analyse construite pour les besoins de cette étude. Ces situations ont été suggérées aux enseignants de deux classes de 3^e, deux classes de 2^{nde}, deux classes de 1^{re} S, et une classe de Terminale S, soit sept classes au total. La mise en place de ces situations en classe a été laissée à l'initiative de chacun des enseignants. Cependant, nous avons débattu avec eux des objectifs de ces situations, des difficultés *a priori* des élèves dans la réalisation des tâches.

(M2b) : pour tester l'hypothèse **(H2b), celle selon laquelle pour les mêmes tâches proposées dans des ETM idoines similaires, les formes de validation produites sont cependant différentes d'un enseignant à un autre**, nous avons filmé toutes les séances dans lesquelles les situations proposées ont été mises en œuvre dans les sept classes (les mêmes que celles citées dans la méthodologie M2a). Nous avons pris en compte toutes les indications suggérées par l'enseignant pour aider les élèves ou les orienter vers la forme de validation attendue par le professeur. Nous avons également pris en compte les interactions qui ont eu lieu, pendant les phases de correction, entre l'enseignant et le(s) élève(s), et entre élève(s) et élève(s). Enfin, nous avons également pris en photo le discours écrit de la validation tel qu'il apparaît au tableau et qu'il est accepté par l'enseignant.

Cette méthodologie sera détaillée dans la troisième partie de la thèse.

(M3) : pour tester l'hypothèse **(H3), relative au point de vue de l'enseignant au sujet de la forme de validation dans le domaine des probabilités**, nous avons mené un entretien (enregistré à l'aide d'un dictaphone) avec chacun des cinq enseignants ayant participé à notre expérimentation. Les questions que nous avons posées sont « semi-ouvertes » afin d'obtenir davantage d'éléments de réponse. Nous avons donc étudié la place de la validation dans l'ETM personnel des cinq enseignants. Cette méthodologie sera détaillée dans la quatrième partie de la thèse.

Deuxième partie

La validation en probabilités et en
géométrie dans l'enseignement
secondaire. Étude comparative

Table des matières

Introduction de la deuxième partie	91
5 Méthodologie de comparaison	93
5.1 Pourquoi comparer la validation en géométrie et en probabilité?	94
5.2 Notion de paradigme	95
5.3 Grille de comparaison de la validation dans les ETM géométrique et probabiliste	98
6 Comparaison de la validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence	101
6.1 Organisation du programme de mathématiques dans l'enseignement secondaire	101
6.2 La validation dans les ETM _G et ETM _P de référence en classe de 3 ^e	102
6.2.1 La validation dans les programmes officiels et les documents ressources au collège	103
6.2.2 La validation dans le domaine de la géométrie	106
6.2.3 La validation dans le domaine des probabilités	108
6.2.4 Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence	111
6.3 La validation dans les ETM _G et ETM _P de référence en classe de 2 ^{nde}	114
6.3.1 La validation dans le programme officiel de la classe de 2 ^{nde}	114
6.3.2 La validation dans le domaine de la géométrie	114
6.3.3 La validation dans le domaine des probabilités	115
6.3.4 Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence	123
6.4 Comparaison de l'ETM _G et l'ETM _P de référence dans les deux niveaux de classe	124
7 Comparaison de la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines	127
7.1 Méthodologie particulière	127
7.1.1 L'analyse du travail de validation effectué dans une séance	128
7.1.2 L'analyse du discours de validation dans chacune des séances observées	129
7.1.3 Les groupes de comparaisons	130

7.2	Les comparaisons des ETM_G géométriques idoines	134
7.2.1	ETM_G idoines en classes de 3^e A et de 3^e B	134
7.2.2	ETM_G idoines en classes de 2^{nde} C et de 2^{nde} D	149
7.3	Les comparaisons des ETM_P probabilistes idoines	163
7.3.1	ETM_P idoine en classe de 3^e B	163
7.3.2	ETM_P idoines en classes de 2^{nde} C et de 2^{nde} D	173
7.4	Comparaison des ETM idoines relatifs à un domaine dans deux niveaux de classe	186
7.4.1	ETM_G idoine en classes de 3^e et de 2^{nde}	186
7.4.2	ETM_P idoine en classes de 3^e et de 2^{nde}	187
7.5	Comparaison des ETM idoines relatifs à deux domaines dans deux niveaux de classe	189

Conclusion de la deuxième partie **191**

Introduction de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, nous effectuons une étude descriptive et exploratoire de la notion de validation dans l'enseignement des probabilités et de la géométrie en classes de 3^e et de 2^{nde} afin de répondre à la première question **Q1 : existe-t-il des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} ?** Cette étude s'appuie sur la comparaison du travail de validation dans les espaces de travail de référence et idoïne.

La comparaison des ETM_G et ETM_P de référence à ces deux niveaux de classes met en évidence l'invariance du travail de validation et du discours associé dans l'enseignement de la géométrie. Le travail de validation géométrique est très fortement orienté vers la dimension discursive donnant lieu à des argumentaires de validation de type démonstratif. Les dimensions sémiotique et instrumentale sont quant à elles peu mobilisées dans ce travail de validation géométrique. Par contre, dans l'enseignement du domaine des probabilités, le travail de validation varie *a priori* en fonction du niveau de classe. Cette variation semble être une conséquence de l'insuffisance du référentiel théorique en termes de propriétés et de théorèmes. Mais elle est également une conséquence de la place accordée aux deux dimensions instrumentale et sémiotique dans le travail de validation dans le domaine des probabilités.

Cette différence du travail de validation est également constatée au sein des ETM_G et ETM_P idoïnes. En effet, les différentes comparaisons de la validation menées (en fonction du domaine et du niveau de classe) dans deux classes de 3^e et deux classes de 2^{nde} montrent que le travail de validation géométrique et son discours sont similaires dans les quatre classes observées. Alors que dans le domaine des probabilités, ils dépendent des choix du professeur, puisque, dans certains cas, nous avons noté que les professeurs privilégient la dimension sémiotique dans le travail de validation et insèrent les outils sémiotiques dans le discours de validation. D'autres professeurs favorisent la dimension discursive.

Cette étude descriptive et exploratoire nous éclaire sur les pratiques de la validation dans les deux domaines enseignés. Elle nous donne une idée de la manière dont les dimensions de l' ETM_P interviennent dans le travail de validation et de leurs fonctions lorsque le référentiel théorique semblent insuffisant en éléments théoriques.

Le but de cette partie est de mettre en évidence l'existence de différences entre la validation géométrique et la validation probabiliste en fin de scolarité obligatoire. Cette partie est déclinée en trois chapitres :

- dans le premier chapitre, nous présentons la méthodologie construite pour mener la comparaison ;
- dans le second chapitre, nous décrivons chacune des analyses du travail de validation réalisée à partir de l'étude des documents institutionnels ;
- enfin, dans le dernière chapitre, nous décrivons le travail de la validation effectué dans les classes de 3^e et de 2^{nde}.

Chapitre 5

Méthodologie de comparaison

Nous cherchons à travers cette partie à répondre à la question **Q1** formulée comme suit : **existe-t-il des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} ?** Répondre à cette question revient, selon nous, à effectuer deux sortes de comparaisons. L'une du point de vue des recommandations institutionnelles, l'autre du point de vue de la pratique de la validation dans les classes de 3^e et de 2^{nde}. Nous supposons que **(H1) le travail mathématique de la validation dans le domaine de la géométrie est bien différent de celui du domaine des probabilités au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}. Cette différence est probablement due à la richesse du référentiel théorique (en termes de propriétés et théorèmes) de l'ETM géométrique favorisant la validation de type démonstration, alors que le référentiel théorique de l'ETM probabiliste à ces deux niveaux de classe est en cours de construction, ce qui empêche la mise en œuvre d'une démonstration au même titre qu'en géométrie.**

Pour tester cette hypothèse, nous avons conçu une méthodologie basée sur l'analyse des espaces de travail de référence et idoine articulée avec la notion de paradigmes. En effet, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 4 de la première partie, l'ETM a pour fonction de décrire le travail mathématique résultant de la réalisation d'une tâche. La description du travail de validation du point de vue institutionnel (programmes et documents ressources) s'effectue au niveau de l'ETM de référence, tandis que la description de la pratique de la validation dans les classes s'effectue au niveau de l'ETM idoine. Au niveau de l'ETM de référence, il convient d'identifier les validations et les formes de travail de validation recommandées par l'institution (3^e et 2^{nde}). Dans l'ETM idoine, il est question de décrire la mise en œuvre des validations et des formes de travail de validation institutionnelles. Dans les deux niveaux d'ETM, les validations et les formes de travail associées dépendent du paradigme qui dirige l'ETM. D'où la nécessité de prendre en compte la notion de paradigme dans notre étude comparative.

5.1 Pourquoi comparer la validation en géométrie et en probabilité ?

La comparaison de la validation dans l'enseignement de la géométrie et des probabilités est motivée par plusieurs raisons.

La première raison est liée au fait que l'enseignement et l'apprentissage de ces deux domaines mathématiques peuvent être, à première vue, comparables. Ils entretiennent tous les deux des liens étroits avec la réalité et jouissent d'un statut d'abstraction faisant appel à la modélisation. Leur enseignement et apprentissage consistent, dans un premier temps, à placer les élèves dans des situations d'expérimentation : actions sur les objets étudiés, conception et mise en œuvre d'un programme expérimental, description des phénomènes observés et précision du vocabulaire et enfin, recueil des données. L'apprentissage de ces deux domaines s'appuie sur une approche empirique de la réalité. Ainsi, l'enseignement de la géométrie est construit sur la pratique du dessin géométrique, avec des actions de construction, et sur les expérimentations dans différents environnements (papier/crayon, informatique) afin de dégager des invariants. Prenons par exemple le cas de l'étude d'une rosace placée au-dessus du porche d'une cathédrale en vue de sa reproduction (Parzysz, 2011). On commence par repérer les arcs de cercles. Ensuite, on émet des hypothèses sur les emplacements des centres des arcs de cercles, mais aussi sur les égalités et différences entre les rayons des arcs de cercles. L'enseignement des probabilités se construit sur une familiarisation avec l'aléatoire, la perception du hasard, des actions sur les jeux de hasard, puis des expérimentations et des simulations, du recueil de données statistiques, afin de dégager les stabilités :

« enquête auprès des élèves de l'établissement par sondage sur les préférences entre deux positions A et B. Chaque élève de la classe interroge 10 camarades. Effets du prélèvement au hasard des personnes interrogées. Observation des variations du nombre des réponses favorables à A par groupes de 10 réponses. Stabilisation de la fréquence des réponses A quand on regroupe les échantillons sondés » (Henry, 1999, p. 30).

La deuxième raison est que la comparaison entre ces deux domaines a fait l'objet de travaux didactiques, en particulier ceux d'Henry (1999) et de Parzysz (2011).

La troisième raison est liée au fait que l'étude de la validation dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire a été menée du point de vue de l'enseignement de la géométrie. En effet, la question de la validation dans l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire a été débattue dans de nombreux travaux didactiques, comme ceux de Balacheff (1982, 1987), Duval (1993), Cabassut (2005) ou Knipping (2002 à 2008). Ces travaux mettent en évidence les différentes caractéristiques de la validation dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie dans le secondaire. C'est pourquoi une

étude de la validation prenant appui sur le domaine de la géométrie comme domaine témoin nous semble intéressante afin de caractériser la validation dans l'enseignement des probabilités au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}.

Pour effectuer cette étude de la validation, nous allons comparer les formes du travail de validation dans les deux domaines et de manière plus précise, les formes du travail de validation dans l'ETM de référence *via* l'analyse des documents institutionnels, et dans l'ETM idoine *via* une analyse de séances d'enseignement.

5.2 Notion de paradigme

Les formes de travail de validation sont très fortement liées aux paradigmes (géométriques ou probabilistes) privilégiés par l'institution. Dans cette section, nous nous proposons de décrire ces paradigmes associés à chacun des deux domaines considérés.

Pour comparer le travail mathématique de la validation dans les deux domaines probabilités et géométrie, nous avons utilisé le modèle des espaces de travail mathématique. Nous avons cherché à caractériser le travail mathématique de la validation dans les ETM de référence et idoine relatifs aux deux domaines à comparer. Cette méthodologie inclut la notion de paradigmes probabilistes et géométriques. En effet, inspirés par les travaux de Kuhn (1962), Houdement et Kuzniak (1999) ont défini trois paradigmes géométriques. L'analyse de la pensée associée à chacun des paradigmes en géométrie utilise aussi les travaux de Gonseth (1945-1952) sur les différents modes de pensée tels que : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif. La différence entre ces trois paradigmes provient de leur rapport à la réalité. Ces différents paradigmes ne sont pas *a priori* hiérarchisés et donnent un horizon au travail mathématique. À partir des travaux de Houdement et Kuzniak (1999), Parzysz (2011) a entrepris un travail de transposition de l'idée de paradigme dans le domaine des probabilités que nous avons complété, notamment en précisant l'horizon du travail probabiliste. Dans le tableau ci-dessous nous proposons un résumé des paradigmes associés à chacun des deux domaines considérés :

	Domaine de la géométrie	Domaine des probabilités
Premier paradigme	La Géométrie I (GI) s'exerce sur des objets issus de la réalité.	Dans la Probabilité 1 (P1), il s'agit de décrire un protocole expérimental précis associé à une expérience concrète, assurant ainsi la reproductibilité de l'expérience dans les mêmes conditions « <i>donnant lieu à des observations permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues</i> » (Parzysz, 2014, p. 68).

TABLE 5.1 – Les paradigmes géométriques et probabilistes

	Domaine de la géométrie	Domaine des probabilités
Premier paradigme	<p>Elle a pour source de validation le monde sensible.</p> <p>Elle donne un horizon pratique et technologique au travail géométrique.</p>	<p>Les outils associés à ce paradigme sont des diagrammes comme les arbres, les tableaux à double entrée, et les diagrammes relevant de la statistique descriptive (diagrammes en bâtons, histogrammes, etc.).</p> <p>Elle donne un horizon d'expériences et d'émission d'hypothèses concordant avec les résultats de l'expérience.</p>
Deuxième paradigme	<p>Dans la Géométrie II (GII), la relation avec la réalité est maintenue. On a donc un travail géométrique sur un modèle qui rend compte de la réalité.</p> <p>La validation s'appuie sur les lois hypothético-déductives dans un système proto-axiomatique. Cette géométrie donne un horizon axiomatique et de modélisation.</p>	<p>Dans le paradigme 2 (P2), on définit l'expérience aléatoire générique et la notion de probabilité. L'étude des propriétés de cette probabilité fait appel à des notions et à des propriétés ensemblistes mais aussi à des modèles classiques (modèle d'urne) et les principales lois de probabilité (binomiale, exponentielle, géométrique, etc.). Les outils associés à ce paradigme sont les techniques de calcul intégrés dans les modèles ou propres aux divers registres de représentation (tableau à double entrée, arbre pondéré, etc.). À ceux-ci, s'ajoutent des outils de la statistique descriptive (SD) ou de la statistique inférentielle (SI).</p> <p>Cette probabilité donne un horizon théorique à l'expérience et à la modélisation dans un système proto-axiomatique.</p>
Troisième paradigme	<p>La Géométrie III (GIII), s'exerce sur des objets idéaux et ses axiomes ne s'appuient pas sur le monde sensible. Elle n'entretient pas de lien avec la réalité à la différence de la Géométrie II. Cette géométrie est apparue avec la naissance des géométries non euclidiennes.</p>	<p>Le troisième paradigme (P3) est fondé sur une axiomatique de type Kolmogorov avec hiérarchisation des propriétés.</p>

TABLE 5.2 – Les paradigmes géométriques et probabilistes

	Domaine de la géométrie	Domaine des probabilités
Troisième paradigme	La validation s'appuie sur le raisonnement hypothético-déductif qui est le moteur et la source des connaissances nouvelles. Cette géométrie donne un horizon logico-formel et axiomatique.	Cette probabilité donne un horizon axiomatique et formel.

TABLE 5.3 – Les paradigmes géométriques et probabilistes

Dans chacun des paradigmes géométriques présentés ci-dessus, la validation associée est clairement explicitée. Par contre, la validation associée à chacun des paradigmes probabilistes demande à être précisée. Pour cela, dans notre étude, nous interrogerons la manière dont la validation évolue dans les espaces de travail mathématique.

Dans ce travail, nous n'envisageons pas la Géométrie III et la Probabilité 3 puisqu'elles ne concernent pas l'enseignement secondaire. En effet, GIII et P3 sont des paradigmes que l'on rencontre uniquement dans l'enseignement universitaire en France. Mais, les professeurs ayant suivi une formation universitaire dans le domaine de la géométrie et des probabilités ont été formés dans GIII et P3. C'est pourquoi nous pensons que même si ces deux paradigmes ne concernent pas directement l'enseignement du niveau secondaire, ils peuvent toutefois influencer les choix des professeurs dans leurs enseignements.

Au niveau de l'enseignement secondaire, les différents paradigmes permettent de considérer l'ambivalence du travail de validation traduite par une valence GI ou P1, ou par une valence GII et P2. Cette ambivalence va fortement orienter le travail de validation et le discours de validation.

Dans le cadre scolaire, le paradigme est généralement déterminé par l'institution (en particulier les concepteurs de programmes). Prenons cet exemple pour illustrer nos propos :

ABC est un triangle rectangle en *B*, tel que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm.
Le triangle *ABC* est-il rectangle ?

- Un exemple de raisonnement attendu par les professeurs en classe de 3^e :

Dans le triangle *ABC* :

$$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ et } AC^2 = 5^2 = 25,$$

$$\text{donc } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

Ce raisonnement s'appuie sur des connaissances géométriques du paradigme GII. La garantie du passage de la donnée à la conclusion est fondée sur les propriétés du référentiel et sur la déduction.

- À l'école primaire, par exemple au niveau CM1-CM2 :

L'énoncé de l'exercice peut être adapté par les professeurs comme suit : « construire le triangle ABC . La longueur AB mesure 3 cm, la longueur BC mesure 4 cm et la longueur AC mesure 5 cm. Est-ce que le triangle ABC est rectangle? » Un raisonnement attendu par les professeurs est :

En partant par exemple de la définition d'un triangle rectangle, et à l'aide de l'équerre, on vérifie que l'angle \widehat{ABC} est droit. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B .

Ce raisonnement s'appuie sur des vérifications et des contrôles à l'aide des instruments géométriques. La validation est effectuée dans le paradigme GI. Or, cette validation n'est pas acceptée (par le professeur) en classe de 3^e, mais elle continuera à exister chez certains élèves, entraînant des malentendus sur la forme du travail de validation (Nechache, 2014).

L'identification des formes du travail de validation dans chacun des espaces de travail géométrique (noté ETM_G) et probabiliste (noté ETM_P) nécessite d'identifier le(s) paradigme(s) fixé(s) au niveau de l'ETM de référence et de l'ETM idoine du domaine considéré. De ce fait, nous considérons les paradigmes comme l'un de nos critères de comparaison.

5.3 Grille de comparaison de la validation dans les ETM géométrique et probabiliste

L'étude comparative de la validation dans l'ETM de référence et idoine passe par l'analyse du travail de validation et l'analyse de son discours. Pour cela, nous avons construit une grille de comparaison qui s'appuie sur les points suivants :

L'analyse du travail de validation est basée sur ces quatre points :

- 1- le(s) raisonnement(s) mobilisé(s) pour produire la validation ;
- 2- le paradigme qui dirige le travail de validation ;
- 3- la dimension (sémiotique, instrumentale, discursive) privilégiée dans le travail de validation ;
- 4- la circulation du travail de validation au sein des plans verticaux et des dimensions de l'ETM.

L'analyse du discours de la validation est basée sur ces deux points :

- 1- le(s) argument(s) employé(s) dans l'argumentaire de validation ;
- 2- la mise en forme de l'argumentaire de validation.

Pour caractériser le travail de validation dans l'ETM de référence, nous avons entrepris une analyse des programmes et des documents ressources des classes de 3^e et de 2nde. Ils seront exposés dans le chapitre suivant (chapitre 6). Concernant l'étude du travail mathématique de la validation dans l'ETM idoine, nous avons choisi de réaliser des observations de séances de correction d'exercices filmées ; ce sera l'objet du chapitre 7.

Chapitre 6

Comparaison de la validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence

Pour mener l'étude comparative de la validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence, nous procéderons par des analyses dans l'ordre suivant :

- une analyse du programme officiel et des documents ressources, dans chacun des deux domaines et des deux niveaux de classe (3^e et 2nde) pour déterminer les formes du travail de validation observées dans les deux ETM (ETM_G et ETM_P) de référence,
- une comparaison des formes de travail de validation dans les deux ETM (ETM_G et ETM_P) de référence.

Après avoir présenté brièvement l'organisation du programme de mathématiques en France, nous effectuerons une « analyse synchronique » des programmes de l'enseignement de la géométrie et de l'enseignement des probabilités, d'abord au niveau de la classe de 3^e, puis au niveau de la classe de 2nde.

6.1 Organisation du programme de mathématiques dans l'enseignement secondaire

Les programmes français sont composés de deux parties. La première partie est un texte décrivant les programmes de manière générale. La deuxième partie est constituée d'un texte ou d'un ensemble de textes, de commentaires nommés instructions officielles (ou documents ressources, ou circulaires).

Nous allons étudier les programmes mis en place (et qui sont encore en vigueur) en 2008 au collège (en classe de 3^e) et en 2009 (en classe de 2nde) et un ensemble de documents

ressources. Cet ensemble de documents ressources¹ est divisé en deux niveaux particuliers. D'un côté le niveau collège et de l'autre le niveau lycée.

Au niveau du collège, notre étude est basée sur les documents suivants :

- 1- Les programmes du collège, bulletin officiel de l'éducation nationale, spécial numéro 6 du 28 août 2008. Noté **[MENCOL]**
- 2- *Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège-Géométrie au collège*, juillet 2007. Noté **[RESCOL-GEOM]**
- 3- *Ressources pour les classes de collège-Probabilités*, mars 2008. Noté **[RESCOL-PROB]**
- 4- *Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège-Raisonnement et démonstration*, juillet 2009. Noté **[RESCOL-DEM]**.

Au niveau du lycée, notre étude s'appuie sur les éléments suivants :

- 1- Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique, arrêté du 23 juin 2009, BO numéro 30 du 23 juillet 2009. Noté **[MENSEC]**
- 2- *Ressources pour la classe de seconde-Probabilités et statistiques*, Juin 2009. Noté **[RESSEC-PROB]**

6.2 La validation dans les ETM_G et ETM_P de référence en classe de 3^e

Dans cette section nous nous proposons d'analyser successivement :

- Les commentaires des programmes de collège **[MENCOL]** et les documents ressources **[RESCOL-DEM]** qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration et du raisonnement tout au long du collège,
- le programme (du domaine de la géométrie) de la classe de 3^e **[MENCOL]** et le document ressource pour la classe **[RESCOL-GEOM]** qui porte sur l'enseignement de la géométrie tout au long du collège,
- le programme (du domaine des probabilités) de la classe de 3^e **[MENCOL]** et le document ressource pour la classe **[RESCOL-PROB]**.

1. Ces documents sont disponibles sur le site Éduscol : eduscol.education.fr/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html.

6.2.1 La validation dans les programmes officiels et les documents ressources au collège

Suivant les programmes, les mathématiques — en tant que discipline — sont enseignées comme un outil performant et pertinent, permettant de modéliser des phénomènes et de prédire des résultats. Le rôle des mathématiques est de favoriser l'accès à la compréhension du monde réel au travers de la résolution de problèmes. Un des enjeux de la scolarité obligatoire est d'initier l'élève à la pensée mathématique. Cette pensée

« repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et de modes de preuves (raisonnement déductif et démonstrations spécifiques) » (MENCOL, 2008, p. 2).

La validation est à ce titre un outil favorisant l'acquisition des éléments de base de la pensée mathématique.

Dans les programmes du collège, il est stipulé que, par son langage spécifique, les mathématiques permettent *« de décrire et de modéliser le monde et les phénomènes de la nature »* (Ibid., p. 2). Les mathématiques ne se limitent donc pas à décrire ou à modéliser le monde réel, elles ont également le rôle d'établir *« la vérité des faits »* (Ibid., p. 2). C'est par la conduite des raisonnements que l'on peut établir cette vérité. Ainsi, *« l'enseignement des mathématiques conduit à goûter et à découvrir le plaisir de découvrir par soi-même cette vérité établie de façon rationnelle »* (Ibid., p. 2). Il s'agit de pratiquer les raisonnements pour établir la vérité en utilisant les outils mathématiques. De manière générale, les objectifs et les finalités de l'enseignement des mathématiques dans le cadre scolaire sont : entraîner les élèves à réaliser une démarche scientifique et développer de manière progressive *« les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique »* (Ibid., p. 2). C'est par

« la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, que les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié » (Ibid., p. 9).

L'importance de l'apprentissage de l'argumentation et du raisonnement est fortement soulignée par les programmes. Cette place accordée à l'apprentissage de l'argumentation et du raisonnement est justifiée par le fait que l'argumentation et le raisonnement sont considérés comme des moyens ou des méthodes permettant d'anticiper, de prévoir et de décider dans différentes situations de la vie quotidienne ou professionnelle. La pratique de l'argumentation pour juger de la pertinence des résultats est intégrée dans l'apprentissage de la validation.

Il existe, pour chacun des domaines mathématiques enseignés, un document ressource permettant de donner quelques précisions ou conseils sur les progressions d'un contenu précis, et ceci sur l'ensemble des niveaux enseignés au collège. Parmi, ces documents, il existe un document spécifique à l'enseignement du raisonnement et de la démonstration sur l'ensemble des classes de collège (RESCOL-DEM, 2009). Dans ce document, il est rappelé que l'un des objectifs principaux de l'enseignement des mathématiques au collège est d'amener les élèves, dans le cadre de la résolution de problèmes, à acquérir des connaissances relatives aux méthodes et aux outils, et à savoir les utiliser pour élaborer une preuve. Il est spécifié que l'élaboration d'une preuve est induite par un raisonnement à deux étapes. La première étape, qui est « *la plus importante, est **la recherche et la production d'une preuve**²* » (RESCOL-DEM, 2009, p. 2), qui s'appuie sur un raisonnement inductif. La deuxième étape porte sur la mise en forme du discours de la preuve. La rédaction de ce discours s'appuie sur le raisonnement déductif à l'aide des propriétés déjà institutionnalisées. Nous avons de fait deux étapes qui caractérisent le travail de validation : celle de l'élaboration du discours de la validation et celle de la mise en forme de ce discours basé sur la déduction. Il est préconisé de ne pas faire appel de manière systématique et de manière prématurée au formalisme mathématique :

« en effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège » (RESCOL-DEM, 2009, p. 2).

Les auteurs du document ressource (RESCOL-DEM) considèrent d'une part, que l'apprentissage de la preuve en mathématique n'est pas seulement l'apprentissage du raisonnement déductif et d'autre part, que ce raisonnement est accepté (et pris en compte) comme étant une preuve même quand il n'est pas mis sous une forme canonique :

« raisonner en mathématiques, ce n'est pas seulement pratiquer un raisonnement déductif. Un raisonnement déductif peut être considéré comme complet même s'il n'a pas une mise en forme canonique » (Ibid., p. 2).

L'ambition des programmes du collège est de mettre en place l'apprentissage progressif de la démonstration avec l'utilisation des deux types de raisonnements : raisonnement inductif et raisonnement déductif. Ces deux raisonnements sont définis par les auteurs du document ressource (RESCOL-DEM) comme suit :

- Le raisonnement par induction (*et présomption*).

De l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs), on déduit, par présomption, une propriété générale. Ce type de raisonnement est consi-

2. Les caractères en gras sont de nous.

déré seulement comme une première étape aboutissant à une conjecture car « *en mathématiques, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape, conduisant à une conjecture* » (RESCOL-DEM, 2009, p. 2).

Le fonctionnement du raisonnement inductif suit soit un schéma dit *présomptif* de type :

« *constatant que dans les exemples où (A est vrai), alors (B est vrai), je présume que (A implique B) est vrai* » (Ibid., p. 2), soit un schéma dit *explicatif* : « *sachant que (A implique B) est vrai, j'explique que (B est vrai) en présumant que (A est vrai)* » (Ibid., p. 2).

Selon les auteurs du document ressource (RESCOL-DEM), le raisonnement inductif se pratique essentiellement dans la phase de recherche et de découverte

« *sous la forme du schéma explicatif dans le raisonnement par chaînage arrière – essentiel en géométrie. Dans la phase de recherche, cela conduirait à se poser la question de ce qu'il suffirait d'avoir pour emporter la conclusion* » (Ibid., p. 3).

Ces auteurs ajoutent que le raisonnement inductif est également pratiqué dans le domaine des sciences expérimentales utilisant des outils de la statistique pour vérifier (et non pas pour démontrer) des hypothèses :

« *dans le domaine des sciences expérimentales, le raisonnement par induction se suffit à lui-même si la méthode employée est suffisamment rigoureuse : la présomption qui résulte d'observations concordantes débouche sur la mise en place d'un protocole expérimental destiné à vérifier les « hypothèses » émises. L'expérience doit être reproductible et la preuve qui en résulte s'apparente à une preuve statistique (par estimateur ou intervalle de confiance)* » (Ibid., p. 3).

- Le raisonnement par déduction.

Ce raisonnement consiste à déduire une propriété « *à partir de propriétés reconnues comme vraies par enchaînement logique* » (RESCOL-DEM, 2009, p. 2). Selon les auteurs du document ressource, le fonctionnement de ce raisonnement est basé sur le schéma classique : « *sachant que (A est vrai) et que (A implique B) est vrai, je déduis que (B est vrai)* » (Ibid., p. 3).

Ce raisonnement est, comme nous le verrons par la suite, celui qui est employé dans la validation en géométrie.

Ces deux raisonnements, inductif et déductif, tels qu'ils sont définis dans le document ressource (RESCOL-DEM, 2009), sont articulés dans le travail de validation, chacun avec un objectif précis dans un contexte de validation. Le raisonnement inductif est pratiqué dans le contexte de découverte et sert à formuler une conjecture ou à chercher une preuve.

Le raisonnement déductif relève du contexte de justification et permet de construire le discours de la preuve.

Nous retenons que deux types de raisonnement sont signalés en classe de 3^e. L'un est inductif et permet de construire des conjectures dans le contexte de découverte. L'autre, déductif, est utilisé pour produire le discours de validation dans le contexte de justification. Ce discours de validation est défini comme un texte ayant une forme particulière, c'est-à-dire : conforme aux règles de déduction, écrit dans le langage naturel (sans faire systématiquement référence au langage formel des mathématiques). Ces deux raisonnements sont articulés dans le travail de validation.

6.2.2 La validation dans le domaine de la géométrie

La classe de troisième constitue la classe terminale du collège. Il s'agit « *de consolider, d'enrichir et de structurer les acquis des classes précédentes* » (MENCOL, 2008, p. 16). Le but est d'amener les élèves « *à développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration* » (Ibid., p. 37). Les programmes actuels de classe de 3^e accordent une place importante à l'enseignement de la géométrie plane, en particulier la géométrie synthétique, car c'est un « *domaine riche, varié, présentant un aspect visuel et esthétique, voire ludique, et qui donne lieu à différents types de raisonnement* » (RESCOL-DEM, 2009, p. 13). De plus, ils considèrent l'enseignement de ce domaine comme un support pour l'apprentissage du raisonnement déductif. Les définitions et les propriétés géométriques « *constituent [...] les références nécessaires sur lesquelles peut se faire l'apprentissage du raisonnement déductif* » (Ibid., p. 6). En outre,

« *le raisonnement en géométrie s'appuie aussi sur l'observation et la construction de figures, la mise en place d'expérimentations, de procédures d'essais-erreurs, l'élaboration et la critique de conjectures* » (Ibid., p. 13).

L'accent est mis sur l'utilisation des figures et de leurs propriétés pour faire développer chez l'élève le sens de l'observation, la capacité de conjecturer, mais également d'argumenter et de communiquer les résultats. Les figures sont des outils sémiotiques, utilisées de manière heuristique dans le contexte de découverte pour émettre des conjectures. Le document ressource souligne que

« **la notion de preuve est à la base du raisonnement déductif**³, puisque, la question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour

3. Les caractères gras sont de nous.

faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration » (RESCOL-GEOM, 2007, p. 11).

La validation dans l'enseignement de la géométrie est une argumentation visant à convaincre de la validité d'une proposition, et elle est communiquée sous des formes intermédiaires de démonstration qui sont approuvées. Son élaboration fait appel à deux *démarches heuristiques* :

« parmi les démarches heuristiques conduisant à l'élaboration d'une démonstration, certaines sont identifiables et donc susceptibles d'être construites et travaillées. Il s'agit principalement du repérage des figures-clés dans un contexte donné et de pratique de l'analyse remontante » (Ibid., 2007, p. 12).

La première démarche a recours

« à des figures clés et repose sur la connaissance d'un modèle déjà rencontré, qui suppose l'existence d'une base de référence constituée de configurations et de théorèmes associés » (RESCOL-GEOM, 2007, p. 12).

Cette base de figures-clés induit

« un travail sur les « mots » et ce qu'ils peuvent évoquer, car, avoir assimilé une propriété, c'est être capable d'associer une figure-clé et un énoncé » (Ibid., p. 12).

La deuxième démarche consiste à réaliser une *« analyse remontante »* (Ibid., p. 12) en partant du résultat (donc de la conclusion) que l'on cherche à valider. On repère une ou des propriétés de la configuration considérée (les prémisses) *« qui, une fois établie(s), impliquerai(en)t, en appliquant un théorème identifié, le résultat à démontrer »* (Ibid., p. 12). L'objectif de cette démarche est de

« permettre, dans la plupart des situations rencontrées en géométrie au collège, de « remonter » d'étape en étape une chaîne d'îlots déductifs (hypothèse-propriété-conclusion) jusqu'à un problème dont la résolution sera immédiate (en général, en appliquant un théorème facile à reconnaître) » (Ibid., p. 12).

Ainsi, l'*« analyse remontante »* (RESCOL-GEOM, 2007, p. 12) de la conclusion vers les hypothèses permet d'identifier le triplet (hypothèse, propriété, conclusion) qui correspond à la structure ternaire d'un argument (Donnée, Garantie, Conclusion) dans le modèle de Toulmin (cf. Chapitre 3, première partie). On écrit alors l'argumentaire en partant cette fois-ci de la donnée pour en déduire la conclusion. L'argumentaire est désormais constitué d'arguments de type formel.

Nous retenons que le travail de validation géométrique attendu en classe de 3^e est caractérisé par l'articulation de deux raisonnements. Le premier raisonnement est heuristique et s'appuie sur les outils sémiotiques (en particulier les figures planes). Ce premier raisonnement est effectué dans le contexte de découverte pour chercher la solution. En revanche,

le deuxième raisonnement est déductif, basé sur les propriétés géométriques institutionnalisées et souvent élaboré à l'aide d'« *analyse remontante* » (Ibid., p. 12) de la conclusion vers les hypothèses. Ce raisonnement est pratiqué dans le contexte de justification pour mettre en forme le discours de validation. Ce discours est un argumentaire organisé sous la forme d'une démonstration. Le travail de validation dans le domaine de la géométrie est alors situé dans le plan [Sem-Dis] orienté vers la dimension discursive.

6.2.3 La validation dans le domaine des probabilités

D'après les programmes, l'initiation à la notion de probabilité dès la classe de 3^e se fait suivant les deux approches objectivistes : laplacienne et fréquentiste. Dans l'approche laplacienne, la probabilité est définie « à partir de considérations de symétrie ou de comparaison » (RESCOL-PROB, 2008, p. 3). Autrement dit, le calcul de la probabilité s'effectue (sous l'hypothèse d'équiprobabilité) à l'aide de la formule de Laplace énoncée comme suit :

« la probabilité d'un résultat est égale au quotient du nombre d'issues favorables (issues dans lesquelles on obtient le résultat) par le nombre total d'issues possibles » (Ibid., p. 4).

Le calcul probabiliste s'exerce dans « des contextes familiers » (Ibid., p. 4) de type tirage d'urne ou lancer de dés. Du point de vue de l'approche fréquentiste, la probabilité est définie comme « fréquence limite » (Ibid., p. 4) à partir d'expérimentations et d'études de fréquences des issues dans différentes situations liées à la vie courante (pièces de monnaie, dés, urnes, etc.). Les auteurs du programme soulignent l'importance de l'approche fréquentiste « pour les applications des probabilités dans des situations de la vie courante » (Ibid., p. 6), mais également pour « donner une justification des calculs de probabilités dans des expériences à deux épreuves » (Ibid., p. 6). En fait, « la justification des calculs de probabilités » sous-entend la justification (fondée sur la simulation informatique d'une expérience aléatoire) pour calculer à l'aide d'un arbre la probabilité de l'intersection des événements⁴.

Dans le document ressource ([RESCOL-DEM]) il est signalé que « cette partie du programme⁵ mobilise des raisonnements très variés qui ne se formalisent pas souvent sous la forme d'une démonstration » (RESCOL-DEM, 2009, p. 19) puisque la priorité est « de rationaliser des décisions ou des choix, d'argumenter des affirmations ou d'exercer son esprit critique » (Ibid., p. 19) à partir de traitement calculatoire ou d'analyse des données brutes. Dès lors, « le domaine des probabilités permet d'aborder des raisonnements nouveaux au collège pour décider ou choisir en situation d'incertitude » (RESCOL-DEM, 2009, p. 19), conduisant à susciter « l'intérêt des élèves qui peuvent s'impliquer dans des

4. Dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

5. Sous-entendu, le domaine des probabilités et des statistiques.

choix et disposer d'outils pour les valider ou les réfuter (simulation ou calcul de probabilités) » (Ibid., p. 19). La décision est réalisée à l'aide de la simulation ou du calcul probabiliste (utilisant la formule de Laplace).

Nous avons donc deux types d'arguments utilisés dans la prise de décision : les arguments fondés sur du calcul probabiliste, et les arguments de type empirico-expérimental. On constate néanmoins qu'aucune précision n'est donnée sur les « nouveaux raisonnements ». Toutefois, on peut supposer qu'il s'agit des raisonnements aléatoires qui sont soit purement probabilistes (utilisant uniquement le calcul de probabilités), soit basés sur les outils de la statistique descriptive (avec la simulation et la notion de fréquence). Dans le document ressource (RESCOL-DEM, 2009), il est cependant précisé que le raisonnement par induction peut être utilisé dans le cas où il s'agit de déterminer la probabilité d'un événement de manière expérimentale⁶. Un exercice et sa correction sont fournis à titre d'exemple :

« Quand on lance successivement deux dés, en additionnant les nombres présents sur les deux faces supérieures, la probabilité d'obtenir dix est-elle la même que celle d'obtenir neuf ?

Une approche fréquentielle (éventuellement faite à la maison avec trente fois 2 lancers par élève, par exemple) n'apparaît pas vraiment significative. L'idée de la simulation peut alors être utilisée mais la première question qui se pose alors est :

- comment, avec la fonction ALEA (ou la fonction ALEA entre bornes) d'un tableur, simuler le lancer d'un dé ?

On peut amener les élèves à faire le lien avec le tirage au sort d'un point sur un segment partagé en six segments de même longueur.

- comment simuler alors la situation proposée ?

L'émission d'une conjecture est alors aisée, mais l'estimation de la probabilité est ici plus délicate car les fréquences $\frac{1}{12}$ (apparition du nombre 10) et $\frac{1}{9}$ (apparition du nombre 9) ne se devinent pas à partir de l'affichage décimal du tableur.

Dans les deux cas, la création de la simulation nécessite un véritable raisonnement (la fonction ALEA donne un nombre au hasard entre 0 et 1 donc en multipliant par 6 on obtient un nombre au hasard entre 0 et 6, du moins

6. Le raisonnement inductif est également pratiqué dans le domaine des sciences expérimentales utilisant des outils de la statistique pour vérifier (et non pas pour démontrer) des hypothèses : « dans le domaine des sciences expérimentales, le raisonnement par induction se suffit à lui-même si la méthode employée est suffisamment rigoureuse : la présomption qui résulte d'observations concordantes débouche sur la mise en place d'un protocole expérimental destiné à vérifier les « hypothèses » émises. L'expérience doit être reproductible et la preuve qui en résulte s'apparente à une preuve statistique (par estimateur ou intervalle de confiance) » (RESCOL-DEM., 2009, p. 2).

on l'admettra; la fonction ENT pourra aussi être utile) et apporte au bout du compte un apprentissage en terme d'appréhension du hasard » (RESCOL-DEM, 2009, p. 5).

La formulation de l'énoncé de cet exemple nous laisse penser que la simulation informatique (sur l'ordinateur ou sur la calculatrice) ne relève pas de l'approche fréquentiste. Or dans le chapitre 1 de la première partie, nous avons justement souligné le fait que la simulation fait partie de l'approche fréquentiste. La simulation informatique d'expérience aléatoire fournit des résultats empiriques dans le domaine de la statistique descriptive. Ces résultats sont les fréquences d'apparition du nombre 9 et celles du nombre 10. De l'observation des résultats, on induit une conjecture portant sur la probabilité d'obtenir 10 et celle d'obtenir 9. Le passage des fréquences d'apparition de chacun des nombre 10 et 9 à l'estimation de la probabilité des apparitions des deux nombres est fondé sur la loi des grands nombres, qui n'est pas signalé dans cet exemple. Le document ressource propose « *de déterminer la probabilité grâce à un arbre* » (Ibid., p. 6). Toutefois, il nous semble que l'usage de l'arbre est peu pertinent et moins économique en temps (plusieurs branches à tracer), mais que l'utilisation d'un tableau à double entrée serait plus performant et plus pertinent (nous aurons l'occasion de rencontrer ce type d'usage dans le prochain chapitre). Pour la représentation et le traitement des situations aléatoires, les auteurs du document ressource recommandent l'usage de l'arbre pondéré par les probabilités : il « *permet de représenter les différentes issues d'une expérience aléatoire, puis en le pondérant de faire apparaître les probabilités de chacune d'elles [...]* » (RESCOL-PROB, 2008, p. 9). Dans le cas d'une expérience à deux épreuves, le calcul de la probabilité d'un événement à partir de l'arbre pondéré s'appuie sur des éléments institutionnalisés dans le référentiel théorique : l'addition des probabilités (figurant sur les branches) des issues réalisant cet évènement, et la somme des probabilités de toutes les issues figurant sur l'ensemble des branches est égale à 1. La propriété « *dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin* » (Ibid., p. 9) est utilisée en plus des propriétés précédentes, dans le cadre de l'expérience à deux épreuves. Le référentiel théorique de l'ETM_P contient donc les propriétés citées précédemment, mais également les propriétés élémentaires des probabilités :

- « *Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent se produire en même temps.*
- *L'événement contraire d'un événement est celui qui se réalise lorsque l'événement n'a pas lieu.*
- *La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1. On peut l'exprimer sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).*
- *La probabilité d'un événement qui se produit nécessairement (événement certain) est égale à 1.*

- *Si deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités. Plus généralement, on peut additionner les probabilités d'événements deux à deux incompatibles.*
- *Un événement et son contraire sont incompatibles et la réalisation de l'un ou de l'autre est certaine. Donc la somme de leurs probabilités est égale à 1.*
- *En particulier, la probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0 » (Ibid., pp. 9-10).*

Ce référentiel théorique est composé d'une liste d'énoncés juxtaposés pléonastique dont on ne connaît pas réellement le statut (sont-ils des propriétés, des théorèmes, ou des définitions ?). C'est donc un référentiel non organisé dans lequel il n'y a aucune hiérarchisation des éléments le constituant. La « non organisation » du référentiel peut éventuellement induire des difficultés dans la construction du raisonnement de la validation. L'organisation de ce référentiel incombe à l'enseignant.

Nous retenons que dans la classe de 3^e, le travail de validation dans l'enseignement des probabilités est caractérisé par l'usage de l'expérimentation *via* la simulation informatique et l'usage de l'arbre pondéré. Dans les deux cas, la probabilité d'un événement est déterminée soit par estimation à partir des fréquences d'apparition de cet événement, soit par un traitement calculatoire appuyé sur un arbre pondéré. La dimension instrumentale (l'usage de la simulation) et la dimension sémiotique (l'usage d'un arbre pondéré) sont alors privilégiées dans le travail de validation. Ces dimensions utilisent les outils du référentiel théorique tels que la loi des grands nombres (pour estimer la probabilité) et les propriétés de l'arbre pondéré (pour effectuer le calcul). De ce fait, le travail de validation circule dans l'un des deux plans [Sem-Dis] et [Ins-Dis]. Le discours de validation est un argumentaire fondé sur des arguments empirico-expérimentaux ou des arguments sémiotiques appuyés sur des calculs probabilistes. En revanche, aucune suggestion n'est formulée au sujet de la mise en forme du discours de la validation.

6.2.4 Comparaison de l'ETM_G et l'ETM_P de référence

Pour terminer cette étude, nous allons comparer l'ETM_G et l'ETM_P de référence de la classe de 3^e. L'analyse des programmes et des documents ressources du collège met en évidence l'enrichissement en termes de propriétés du référentiel théorique de l'ETM_G de référence de la classe de 3^e. Cet enrichissement du référentiel s'est produit de manière progressive et structurée tout au long de la scolarité, de l'école primaire au collège, en particulier en classe de 4^e, qui offre un panel de propriétés, de théorèmes, et une variété de configurations. Les auteurs du programme de 3^e et ceux des documents ressources (RESCOL-GEOM) placent les figures géométriques dans le domaine de l'expérience. Elles sont utilisées de manière heuristique comme support privilégié pour conjecturer, identifier

des propriétés et comme aide à la construction d'une validation. Le travail mathématique de la validation dans l'ETM_G de référence est dirigé par le paradigme GII, et très fortement orienté vers la dimension discursive visant à utiliser à bon escient les outils du référentiel théorique à des fins de productions écrites du discours de la validation. Les modalités d'entrée dans le travail de validation peuvent être effectuées *via* les plans [Sem-Dis] ou [Ins-Dis] orientés vers la dimension discursive (Dis). Le discours de validation attendu dans l'ETM_G est un argumentaire basé sur un raisonnement hypothético-déductif et exposé dans le registre de la langue naturelle.

Dans le cas de l'enseignement des probabilités, et à ce niveau de classe, les auteurs des programmes et ceux des documents ressources sont peu « bavards » concernant le raisonnement de validation. La classe de 3^e constitue le début de l'apprentissage du domaine des probabilités. L'accent est mis sur la sensibilisation des élèves à l'aléatoire et « aux nouveaux types de raisonnements ». Ces « nouveaux types de raisonnements » conduisent à prendre des décisions ou à faire des choix à partir des faits constatés *via* la simulation ou le calcul. Il s'agit alors d'utiliser la simulation ou le calcul probabiliste pour argumenter la décision prise. Ces arguments sont empirico-expérimentaux ou sémiotiques (basés sur du calcul). Les énoncés de théorèmes, de propriétés et de définitions sont « déversés » dans le référentiel théorique de cet ETM de référence, de telle façon qu'il n'y ait aucune hiérarchisation et structuration entre ces énoncés. En effet, aucune distinction entre le statut de propriété, le statut de définition ou le statut d'axiomes n'est explicitée par les auteurs des programmes et des documents ressources. L'ETM_P de référence accorde une importance aux expérimentations basées sur la simulation pour traiter des situations aléatoires. Le travail de la validation est situé dans le plan [Ins-Dis] ou dans le plan [Sem-Ins]. En revanche, dans le cas où le traitement fait appel au calcul probabiliste, celui-ci peut s'appuyer sur les arbres pondérés, et ainsi le travail de validation est situé dans le plan [Sem-Dis]. Lorsque le travail de validation s'appuie uniquement sur le calcul probabiliste à l'aide de la formule de Laplace et sans usage de l'arbre pondéré, alors le travail de validation est clos sur la dimension discursive (Dis).

La lecture du programme et des documents ressources ne donne pas suffisamment d'indication concernant le discours de validation à utiliser dans l'enseignement des probabilités en classe de 3^e comparativement à l'enseignement de la géométrie, ce qui rend la caractérisation de la validation dans l'ETM_P de référence difficile. Cependant, avec les éléments que nous avons identifiés dans notre analyse, il nous semble que le discours de validation privilégié dans l'ETM_P de référence est un argumentaire basé sur un « raisonnement assisté » par la simulation ou par le calcul probabiliste. Autrement dit, le discours de validation est un argumentaire construit sur des arguments empirico-expérimentaux (fondés sur les résultats fournis par la simulation) ou sur des arguments sémiotiques. Le discours de la validation en probabilités (au niveau de la 3^e) est un argumentaire appuyé sur les artefacts (avec la simulation) ou par le calcul (élément du référentiel théorique) avec uti-

lisation ou non des outils sémiotiques. À ce stade de notre analyse, nous ne pouvons pas nous prononcer de manière certaine sur la forme de validation privilégiée dans cet ETM_P . Nous pouvons conclure que le paradigme qui dirige le travail de la validation dans l' ETM_P de référence est P1 appuyé implicitement sur les propriétés de P2 (noté $P1|_{P2}$). Nous résumons la comparaison des ETM de référence des deux domaines au niveau de la classe de 3^e dans le tableau ci-dessous en fonction des critères de comparaisons choisis :

	ETM_G de référence	ETM_P de référence
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement heuristique dans le contexte de découverte du raisonnement de validation. Raisonnement déductif dans le contexte de justification et de communication du discours de la validation	« Raisonnement assisté » par la simulation ou le calcul probabiliste
Paradigme(s)	GII essentiellement	P1 appuyé implicitement sur les propriétés de P2 ($P1 _{P2}$)
Dimension privilégiée	Discursive	Instrumentale (lorsque la simulation est utilisée) Discursive (lorsque les calculs probabilistes sont utilisés)
Circulation du travail de validation dans l'ETM	$[Sem - Dis] \rightarrow Dis$ ou $[Ins - Dis] \rightarrow Dis$ ou (Dis)	$[Ins - Dis]$ ou $[Sem - Dis]$
Argument(s) employé(s)	Formel	Empirico-expérimental et sémiotique assisté par le calcul probabiliste
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire dont la mise en forme n'est pas explicitée

TABLE 6.1 – La validation dans l' ETM_G et l' ETM_P de référence en classe de 3^e

6.3 La validation dans les ETM_G et ETM_P de référence en classe de 2^{nde}

Dans cette section, l'étude de la validation dans les ETM_G et ETM_P de référence au niveau de la classe de 2^{nde} suit le même plan que dans la section précédente. Nous effectuons cette étude en nous appuyant sur :

- Les commentaires du programme [MENSEC] de la classe de 2^{nde} portant sur la validation.
- Le programme (du domaine de la géométrie) [MENSEC] de la classe de 2^{nde} .
- Le programme (du domaine des probabilités) [MENSEC] et le document ressource [RESSEC-PROB].

Nous précisons que l'étude de la question de la validation dans l' ETM_G de référence au niveau de la classe de 2^{nde} ne sera pas aussi détaillée que pour la classe de 3^e . En effet, au niveau de la classe de 2^{nde} , nous n'avons pas de documents institutionnels traitant la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques. Nous n'avons pas non plus de document ressource propre au domaine de la géométrie. C'est pourquoi les deux parties portant sur la validation et l'enseignement du domaine de la géométrie en classe de 2^{nde} sont plus succinctes que la partie portant sur l'enseignement du domaine des probabilités en classe de 2^{nde} .

6.3.1 La validation dans le programme officiel de la classe de 2^{nde}

Dans les commentaires du programme, il est souligné que l'objectif général de l'enseignement des mathématiques à ce niveau de classe est de « *former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes* » (MENSEC, 2009, p. 1), et ceci dans le but de développer des compétences pour « *conduire un raisonnement, une démonstration* » (Ibid., 2009, p. 1), une attitude critique à l'égard des résultats obtenus et la communication de ces résultats (et/ou les démarches permettant d'obtenir ces résultats) à l'oral ou à l'écrit. L'accent est mis sur l'usage de logiciels intégrés dans les calculatrices et dans les ordinateurs dans le cas d'une simulation rendant possible l'expérimentation, mais également sur l'usage d'outils de visualisation et de représentation. Il s'agit donc d'enrichir la genèse instrumentale par l'utilisation des artefacts et la mise en place d'expériences provoquant une dialectique entre cette genèse et la genèse discursive. L'utilisation de ces outils et de ces logiciels conduit à un changement profond de la nature de l'enseignement.

6.3.2 La validation dans le domaine de la géométrie

La géométrie synthétique, voit sa place diminuée au profit des géométries vectorielle et analytique dans l'enseignement dès l'entrée au lycée. Ainsi, les géométries vectorielle

et analytique fournissent de nouveaux outils pour traiter les problèmes de la géométrie synthétique :

« les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants » (MENSEC, 2009, p. 6).

Seules « la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la démonstration de la caractérisation d'une droite par son équation » (Ibid., 2009, p. 6) sont exigées à ce niveau de classe. Le référentiel théorique de l'ETM_G de référence s'enrichit par l'insertion de nouveaux éléments théoriques relevant des deux géométries, vectorielle et analytique.

Le travail de validation dans l'enseignement de la géométrie synthétique en classe de 2nde est similaire à celui de la classe de 3^e. Le discours de validation est organisé sous forme de démonstration. Précisons néanmoins que la nature de la démonstration change au niveau de la classe 2nde lorsque le traitement d'un problème géométrique fait appel à l'utilisation des vecteurs ou des coordonnées de vecteurs. Dans ce cas, la structure déductive est prise en charge par le calcul.

6.3.3 La validation dans le domaine des probabilités

Selon le document ressource (RESSEC-PROB, 2009), le domaine des probabilités constitue un domaine où il convient d'interpréter les résultats fournis par une expérience où l'utilisation de certains modèles probabilistes — dans des cas particuliers — est privilégiée. Dès la classe de 3^e, les élèves se sont familiarisés au domaine des probabilités à travers des situations de jeux (lancers de pièces équilibrées, tirages de boules de deux couleurs différentes dans une urne). Les auteurs du document ressource précisent que le traitement des situations liées au tirage de boules permet de sensibiliser les élèves à la loi de Bernoulli⁷ :

« le tirage dans une urne composée de boules de deux couleurs différentes, dans des proportions p et $(1-p)$, fournit une première approche de la loi de Bernoulli, qui s'ouvrira sur des applications aux sondages (estimations à la sortie des urnes les soirs d'élection), au contrôle de qualité des productions industrielles (maîtrise statistique des processus de production) ou aux diverses estimations sur échantillon. Toutes ces questions relèvent de la statistique inférentielle, qui fonde ses résultats sur des considérations probabilistes et permet l'induction⁸ à partir de données observées » (Ibid., p. 4).

Le travail de l'aléatoire se poursuit en classe de 2nde avec l'introduction de quelques outils de la statistique inférentielle associés à la pratique du raisonnement inductif. De

7. Rappelons que cette loi est introduite officiellement en classe de 1^{re}.

8. Souligné par nous.

plus, en classe de 3^e, l'enseignement et l'apprentissage du domaine des probabilités est centré exclusivement sur le cas des ensembles finis. Par la suite, en classe de 2^{nde}, cet enseignement et cet apprentissage sont stabilisés et consolidés avec « *en perspective une démarche de modélisation de phénomènes réels* » (Ibid., p. 7).

Le document ressource souligne que la probabilité d'un événement peut être évaluée soit par estimation à partir de l'observation de la stabilisation des fréquences sur un grand nombre d'expériences, soit par « *des considérations géométriques ou physiques en référence à l'équiprobabilité* » (Ibid., p. 7).

Dans le cas de l'estimation à partir de l'observation de la stabilisation des fréquences, la probabilité est évaluée dans l'approche fréquentiste *via* la simulation. Comme en classe de 3^e, l'utilisation implicite de la loi des grands nombres justifie cette probabilité empirique, qui est la limite de la fréquence du phénomène observé. Mais en classe de 2^{nde}, une nouvelle manière d'estimer la probabilité est introduite. Cette nouvelle manière d'estimer la probabilité est basée sur des exemples de situations, telles que les situations de tirage dans une urne :

« on se place dans la situation de référence suivante, d'une urne contenant plusieurs centaines de petites billes de couleur blanche ou verte dans une proportion p inconnue de billes vertes. On cherche à estimer p à partir d'un échantillon de taille n [...] » (RESSEC-PROB, 2009, p. 18).

Dans ce type de situations, les auteurs du document ressource proposent d'estimer la probabilité à partir d'un échantillon de taille n obtenu par « *répétition de n tirages aléatoires avec remise dans l'urne* » (Ibid., 2009, p. 18). Ils suggèrent de calculer la fréquence d'apparition des billes vertes dans cet échantillon puis d'utiliser l'intervalle de fluctuation $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ (centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$) afin d'en déduire l'intervalle de confiance $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contenant la probabilité p :

« on dispose d'un échantillon parmi tous ceux qu'on aurait pu obtenir et, d'après le paragraphe 1.2⁹, on sait qu'environ 95% des fréquences observées sont dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Or l'appartenance de f à $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ équivaut à celle de p à l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, ce qui permet de dire que, parmi tous les échantillons de taille n possibles, 95% des intervalles associés à $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contiennent le nombre p » (Ibid., 2009, p. 18).

Dans le cas de l'estimation par « *des considérations géométriques ou physiques en référence à l'équiprobabilité* » (Ibid., p. 7), il s'agit d'évaluer la probabilité d'un événement par un calcul. Différentes façons de mener ces calculs sont suggérées dans le document ressource :

9. Ce paragraphe fait référence à l'intervalle de fluctuation (RESSEC-PROB, 2009, p. 15).

1) Utilisation de la réunion et de l'intersection de deux événements

« Les symboles d'union et intersection sont introduits en liaison avec les conjonctions « ou » et « et », en comparant leur sens mathématique avec leur usage dans la langue commune. La formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ pourra être illustrée par un diagramme de Venn » (RESSEC-PROB, 2009, p. 8) :

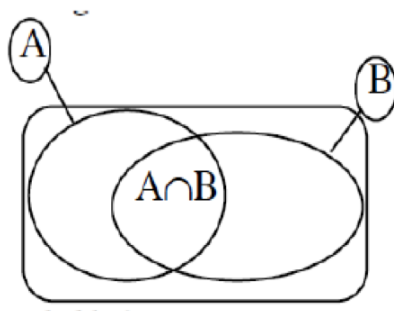


Fig. 6.1 – Diagramme de Venn (RESSEC-PROB, 2009, p. 8)

Ce diagramme est donc une représentation analogique de la propriété de la probabilité de la réunion de deux événements. La réunion (respectivement l'intersection) de deux événements est donc enseignée comme la réunion (respectivement l'intersection) de deux ensembles, ce qui correspond de fait à la définition formelle « d'événement » (cf. page 18).

2) Utilisation des « tableaux croisés » (tableaux à double entrée)

« Les tableaux croisés rencontrés dans des résumés d'enquêtes se prêtent à des calculs simples de probabilités d'intersections ou d'union » (RESSEC-PROB, 2009, p. 8). Le calcul de la probabilité de l'intersection utilise la formule de Laplace dont les données sont directement lues sur le tableau. En revanche, le calcul de la réunion s'effectue par la nouvelle formule explicitée précédemment, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

3) Utilisation des arbres des possibles

Les arbres des possibles sont considérés comme des outils intéressants pour construire le sens de la modélisation et pour réaliser des calculs de façon fiable :

« les arbres décrivant de façon exhaustive des issues d'une expérience ont pu être abordés en classe de troisième ; on peut considérer cette pratique pour aider les élèves à se construire des images mentales fiables et être plus assurés dans les modélisations et les calculs » (RESSEC-PROB, 2009, p. 9).

Les arbres des possibles « aident au dénombrement et sont des outils de raisonnement » (Ibid., p. 9). Dans certaines situations, il n'est pas toujours aisé ou même pertinent de représenter toutes les branches. Dans ce cas, il est conseillé d'utiliser

des pointillés dans la construction des arbres des possibles, ceci afin de développer les capacités d'abstraction des élèves (Ibid., p. 9). Prenons un exemple extrait du document ressource pour illustrer nos propos :

« Dans un groupe de quatre personnes prises au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même mois ? On suppose que, pour chaque personne, tous les mois d'anniversaire sont équiprobables et on les numérote de 1 à 12 » (Ibid., p. 9).

Les auteurs du document ressource proposent de reformuler cet énoncé, en remplaçant l'expérience aléatoire initiale par un tirage aléatoire dans une urne, comme suit :

« Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12, on effectue au hasard et avec remise quatre tirages successifs, et l'on note les numéros obtenus, dans l'ordre d'apparition. Chaque numéro tiré correspond au mois d'anniversaire d'une des personnes » (RESSEC-PROB, 2009, p. 10).

Pour traiter cette situation, les auteurs proposent de considérer l'événement contraire \bar{A} de l'événement A : « au moins deux personnes parmi les quatre fêtent leur anniversaire le même mois ». Ils suggèrent de représenter la situation à l'aide d'un arbre des possibles (sans pondération) de l'événement contraire \bar{A} comportant des pointillés :

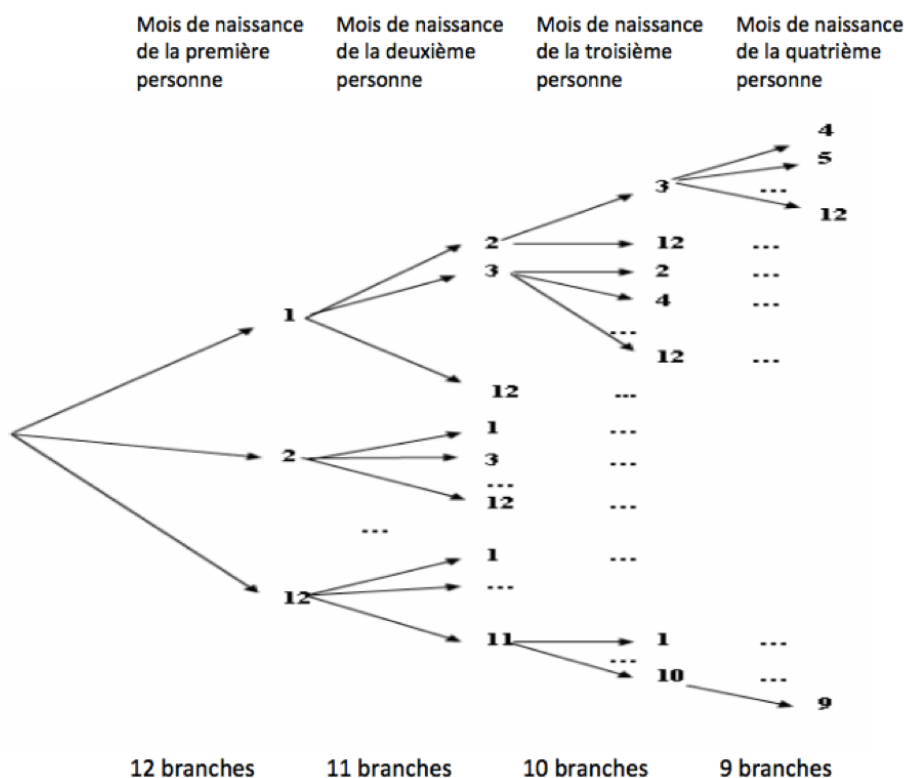


Fig. 6.2 – Arbre des possibles de l'événement \bar{A} (RESSEC-PROB, 2009, p. 10)

Afin de déterminer la probabilité de l'événement A , il est proposé de dénombrer le nombre d'issues qui réalisent l'événement \bar{A} en effectuant le calcul suivant : $12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$.

La probabilité de l'événement \bar{A} est donc : $p(\bar{A}) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4} \approx 0,43$.

La probabilité de l'événement A est alors égale à $p(A) = 1 - p(\bar{A}) \approx 0,57$.

4) Utilisation de la simulation à l'aide d'un algorithme ou d'un tableur

À l'aide de l'exemple précédent, les auteurs du document ressource proposent d'utiliser le même le raisonnement que celui effectué précédemment et de déterminer « la taille du groupe de personnes pour avoir une probabilité supérieure à 0,8 qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire à la même date » (RESSEC-PROB, 2009, p. 10). Pour cela, ils suggèrent de raisonner sur le nombre de jours plutôt que sur le nombre de mois, de construire un algorithme et de le simuler :

« Si n désigne le nombre de personnes du groupe, il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de n le nombre $q = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n-1))}{365^n}$ est inférieur à 0,2, avec $q = 1 - p$. En remarquant que q peut s'écrire comme une répétition de multiplications : $q = \frac{365-0}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \dots \times \frac{365-(n-1)}{365}$, on peut élaborer un algorithme de calcul de ce nombre selon la valeur de n (**algorithme 1**), puis par essais successifs, déterminer la première valeur de n qui répond à la question [...]. On peut aussi utiliser un algorithme avec boucle et condition d'arrêt (**algorithme 2**) pour éviter le tâtonnement et répondre rapidement à cette question ou une question du type : déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle p est supérieur à 0,99, ou à 0,999, et observer l'évolution de n » (RESSEC-PROB, 2009, p. 11).

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables n, i entiers et q réel	Variables i entier, p et q réels
Entrées Saisir n	Entrées Saisir p
Initialisations q prend la valeur 1	Initialisations q prend la valeur 1, i prend la valeur 0
Traitement Pour i variant de 1 à $n - 1$ q prend la valeur $q \times \frac{365 - i}{365}$	Traitement Tant que q est supérieur à $1 - p$ q prend la valeur $q \times \frac{365 - i}{365}$ i prend la valeur $i + 1$ Fin du Tant que
Sorties Afficher $1 - q$	Sorties Afficher i

Fig. 6.3 – Deux algorithmes permettant de résoudre l'exercice (Ibid., p. 11)

Une autre méthode utilisant le tableur est également conseillée par les auteurs mais aucun exemple d'utilisation de ce tableur n'est explicité.

5) Utilisation d'arbres pondérés

Comme nous l'avons déjà signalé, c'est à partir de la classe de 3^e que les expériences aléatoires simples à deux épreuves sont travaillées à l'aide des arbres pondérés. En classe de 2^{nde}, il est question « d'entretenir sans aucun nouveau développement ni aucune complexification ce type de présentation et son mode opératoire » (RESSEC-PROB, p. 11). Le mode opératoire de l'arbre pondéré est illustré dans l'exemple 1 ci-dessous :

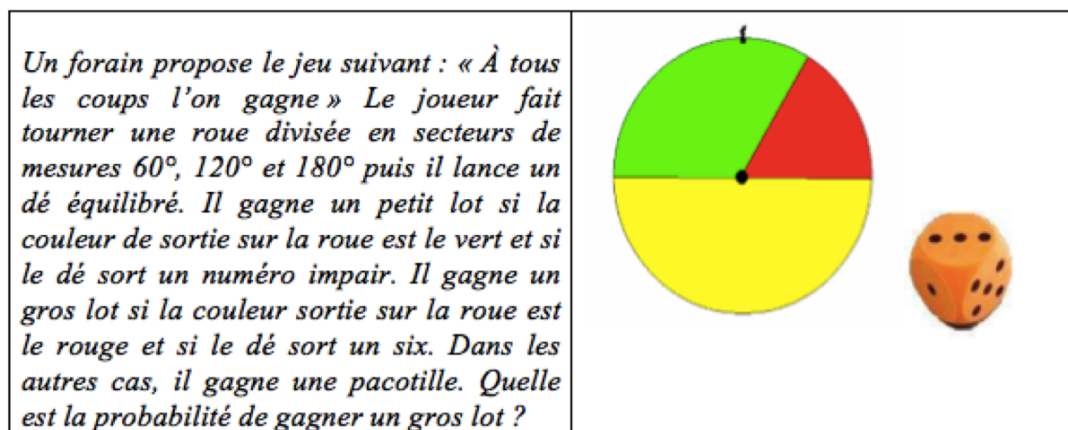


Fig. 6.4 – Enoncé de l'exemple 1 (RESSEC-PROB, 2009, p. 11)

Pour cela, il est conseillé de modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré comme suit :

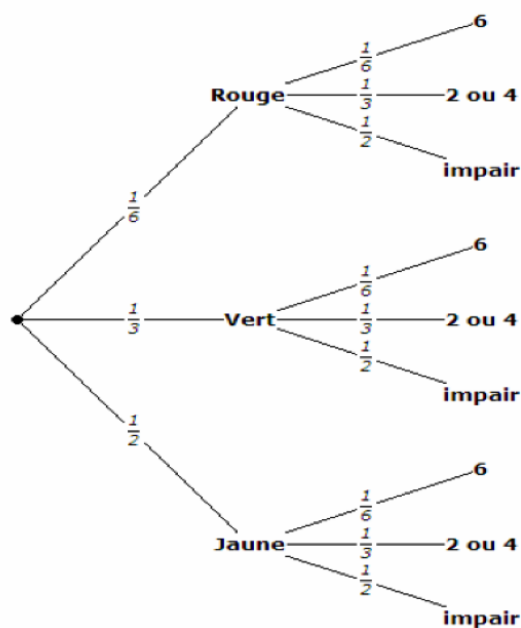


Fig. 6.5 – Arbre pondéré modélisant la situation de l'exemple 1 (Ibid., p. 11)

La construction de ces arbres pondérés n'est d'aucune façon justifiée puisque les connaissances relatives aux probabilités conditionnelles ne sont pas au programme

de ce niveau de classe. Elles sont introduites en classe de Terminale. Pour répondre à la première question — où il s’agit de déterminer la probabilité de l’événement $(R, 6)$, autrement dit de l’intersection de deux événements —, il suffit d’utiliser la propriété (déjà rencontrée en classe de 3^e) : « *dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin* » (Ibid., p. 12). Les auteurs des programmes ajoutent qu’en classe de 2^{nde} et de 3^e, la notion d’indépendance des épreuves est implicite et intuitive : « *on en reste à une perception intuitive lorsque les épreuves successives sont indépendantes (au sens où la première épreuve n’a aucune influence sur la seconde)* » (Ibid., p. 12).

Nous retenons de cette analyse du document ressource que le travail de validation dans le domaine des probabilités est dans la continuité de ce qui est effectué en classe de 3^e. Cependant, de nouveaux éléments théoriques comme le calcul de la probabilité de la réunion de deux événements ou la notion d’intervalle de confiance (et de fluctuation), explicitement admis sous la forme $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, s’ajoutent aux propriétés déjà intégrées dans le référentiel théorique de l’ETM_P de référence de la classe de 3^e. La probabilité d’un événement A est alors déterminée soit par un calcul probabiliste faisant intervenir la formule de Laplace (dans le cas d’équiprobabilité des événements élémentaires), soit par une estimation de la fréquence des issues réalisant l’événement A . Cette estimation est réalisée à l’aide de la simulation et en considérant un échantillon de taille donnée. À partir des résultats fournis par la simulation et en utilisant implicitement la loi des grands nombres, la valeur de la probabilité estimée est « *la fréquence limite* » observée de l’événement étudié. L’estimation de la probabilité peut également être effectuée à l’aide de l’intervalle de confiance. On obtient alors un intervalle de valeurs possibles de la probabilité de l’événement étudié. En classe de 2^{nde}, le calcul probabiliste basé sur les outils sémiotiques¹⁰ (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) tels que les diagrammes (arbres, tableaux, etc.) ainsi que la simulation, constituent deux sortes d’outils technologiques¹¹ (Ibid., 2016) permettant de déterminer la probabilité d’un événement. Les probabilités obtenues avec ces outils technologiques sont légitimés par les outils théoriques¹² (Ibid., 2016), tels que la formule de Laplace et l’intervalle de confiance, ou implicitement la loi des grands nombres. En référence au modèle (simplifié) de la structure d’un argument de Toulmin, ces outils théoriques représentent les garanties. La détermination de la probabilité *via* ces estimations

10. Semiotic tools are non-material tools for operating on semiotic representations of mathematical objects (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016, p. 7).

11. Technological tools are artifacts like drawing tools or routinized techniques based on algorithms or calculators with implemented calculation algorithms (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016).

12. Theoretical tools are non-material tools for mathematical reasoning based on the logical and mathematical properties of mathematical objects (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016).

provoque un changement de domaines (Probabilités vers la statistique descriptive, ou Probabilités vers la statistique inférentielle).

Nous synthétisons l'analyse précédente à l'aide du schéma ci-dessous :

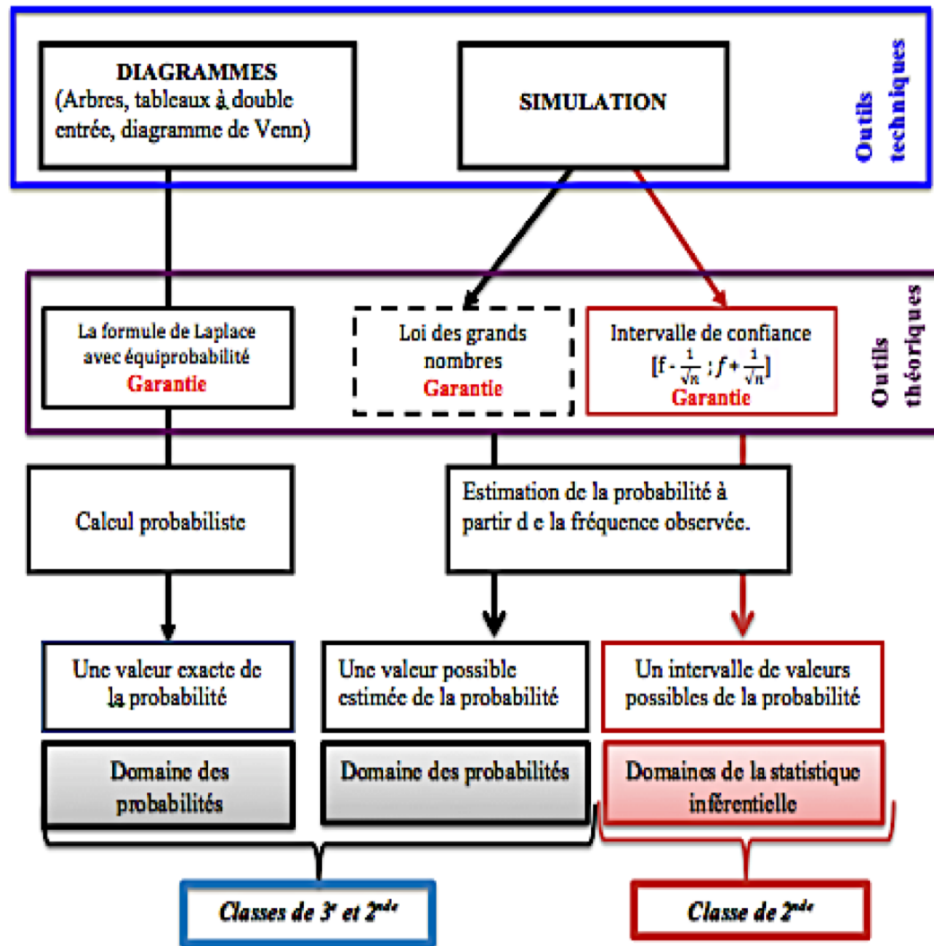


Fig. 6.6 – Les outils technologiques pour déterminer la probabilité

De cette analyse des documents institutionnels, nous retenons que l'ETM_P de référence en classe de 2^{de} est caractérisé par la présence de divers diagrammes : arbres des possibles, arbres pondérés, diagrammes de Venn et tableaux. Ces diagrammes sont des outils sémiotiques qui contribuent non seulement à l'enrichissement de la genèse sémiotique, mais également à l'enrichissement du référentiel théorique à ce niveau de classe. Dès lors, ces outils sémiotiques sont utilisés (comme modes de calcul) dans le raisonnement de validation et contribuent à l'articulation des deux genèses, sémiotique et discursive, donnant ainsi naissance à un mode de raisonnement particulier qualifiable de « diagrammatique ». Cette articulation place le travail de validation dans le plan [Sem-Dis]. De même, l'enseignement du domaine des probabilités sollicite l'expérimentation et l'utilisation à bon escient des artefacts tels que l'ordinateur, la calculatrice et les logiciels. Ces artefacts facilitent la mise en place de la simulation dans le traitement des situations aléa-

toires, induisant une genèse instrumentale plus riche et la mise en place d'une dialectique de celle-ci avec la genèse discursive. Dans ce cas, le travail de validation circule dans le plan [Ins-Dis]. Selon les outils technologiques choisis pour déterminer la probabilité d'un événement, deux sortes d'arguments peuvent être employés dans l'argumentaire de validation : argument empirico-expérimental ou argument sémiotique (avec l'usage des arbres des possibles ou pondérés, des diagrammes de Venn, des tableaux à double entrée) assisté par le calcul probabiliste.

6.3.4 Comparaison de l'ETM_G et l'ETM_P de référence

Du point de vue de l'ETM_G de référence, on constate une évolution entre la classe de 3^e et la classe de 2^{nde}. Cette évolution est marquée par l'apparition des deux sous-domaines de la géométrie plane, la géométrie analytique et la géométrie vectorielle en classe de 2^{nde}. Une des conséquences de l'introduction de ces deux sous-domaines est l'apparition de nouveaux types de calculs (avec les coordonnées et les vecteurs) donnant lieu à un « style calculatoire » propre à chacun des sous-domaines. Une autre conséquence est celle de la modification de l'argumentaire de validation puisque la structure déductive est prise en charge par ces nouveaux types de calculs. De fait, l'argumentaire de validation est constitué d'arguments formels et est organisé sous forme d'une démonstration assistée par des calculs vectoriels ou des calculs « algébriques sur les coordonnées ». Une dernière conséquence de cette introduction des deux sous-domaines est liée au fait que le travail de validation est dirigé par le paradigme *GII* articulé avec le sous domaine de la géométrie analytique ou celui de la géométrie vectorielle.

En ce qui concerne l'ETM_P de référence, la diversité d'outils sémiotiques (arbres, tableaux, diagrammes, etc.), d'outils technologiques et théoriques utilisés dans le travail de validation laissent penser que le paradigme qui oriente le travail de validation est *P2* articulé avec *P1* (noté *P2|P1*). Le discours de validation est un argumentaire fondé sur des arguments empirico-expérimentaux et/ou des arguments sémiotiques appuyés sur des calculs probabilistes. Cependant, la mise en forme de l'argumentaire de validation n'est pas clairement explicitée.

On résume la comparaison de la validation dans les deux espaces de travail ETM_G et l'ETM_P de référence en classe de 2^{nde} dans le tableau ci-dessous :

	ETM_G de référence	ETM_P de référence
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement heuristique dans le contexte de découverte. Raisonnement déductif qui peut être ou non assisté par des calculs vectoriels ou « algébriques sur les coordonnées » dans le contexte de justification.	« Raisonnement assisté » par la simulation et le calcul probabiliste. Raisonnement diagrammatique assisté par les arbres, les tableaux, etc.
Paradigme(s)	<i>GII</i> qui est articulé ou non avec la géométrie vectorielle ou analytique	$P1 P2$
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Discursive (lorsque les calculs probabilistes sont utilisés). Instrumentale (lorsque la simulation est utilisée).
Circulation du travail de validation dans l'ETM	$[Sem - Dis] \rightarrow Dis$ ou $[Ins - Dis] \rightarrow Dis$ ou Dis	$[Ins - Dis]$ ou $[Sem - Dis]$
Argument(s) employé(s)	Formel	Empirico-expérimental et/ou sémiotique assisté par le calcul probabiliste
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration et assisté ou non par des calculs	Non explicitée

TABLE 6.2 – La validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence en classe de 2^{nde}

6.4 Comparaison de l'ETM_G et l'ETM_P de référence dans les deux niveaux de classe

À partir des deux comparaisons effectuées précédemment, nous en déduisons que, aux deux niveaux de 3^e et 2^{nde}, le travail de validation attendu dans l'ETM_G de référence est globalement le même en ce qui concerne la géométrie synthétique. La richesse du référentiel théorique de l'ETM_G de référence et le paradigme *GII* qui dirige le travail de validation géométrique conduisent à la construction d'un argumentaire de validation constitué d'arguments formels organisé sous forme d'une démonstration. Cet argumentaire de validation évolue particulièrement en classe de 2^{nde} avec l'introduction des nouveaux types de calculs (analytiques et vectoriels). Cet argumentaire est alors constitué d'arguments formels et d'arguments appuyés par des calculs formulés avec un « style calculatoire » particulier. Dans l'ETM_P de référence, aux deux niveaux de classe, le travail de validation est orienté soit par le paradigme *P1* appuyé implicitement sur les propriétés de *P2* ($P1|P2$) (en classe

de 3^e), soit dirigé par $P1$ articulé avec $P2$ ($P1|P2$) (en classe de 2^{nde}). L'analyse des différents documents institutionnels des classes de 3^e et de 2^{nde} met en exergue l'évolution du contenu du référentiel théorique de l'ETM_P, qui semble moins riche (en termes de propriétés et théorèmes) par rapport à celui de l'ETM_G. Le recours à la dimension sémiotique ou à la dimension instrumentale est favorisé dans l'ETM_P pour effectuer le travail de validation lorsque les éléments du référentiel théorique de l'ETM_P sont insuffisants. Ce recours aux dimensions instrumentale et sémiotique suscite une variété de raisonnements (diagrammatique, assisté par la simulation ou les calculs probabilistes). Par ailleurs, cette analyse des documents institutionnels à ces deux niveaux de classe laisse penser que le discours de validation retenu dans l'ETM_P de référence est un argumentaire composé d'arguments empirico-expérimentaux, ou d'arguments sémiotiques assistés par les calculs probabilistes. En revanche, la mise en forme de ce discours n'est pas soulignée. Cette comparaison de l'ETM_G et de l'ETM_P de référence relatifs aux classes de 3^e et de 2^{nde} est synthétisée dans le tableau suivant :

	ETM_G de référence en classe de 3^e et de 2^{nde}	ETM_P de référence en classe de 3^e et de 2^{nde}
Raisonnement(s) mobilisé(s)	<p>Raisonnement heuristique dans le contexte de découverte.</p> <p>Raisonnement déductif dans le contexte de justification qui peut être assisté par les calculs vectoriels ou analytiques (en 2^{nde}).</p>	<p>« Raisonnement assisté » par la simulation et le calcul probabiliste.</p> <p>Raisonnement diagrammatique (en 2^{nde}).</p>
Paradigme(s)	GII en 3 ^e GII articulé avec les sous-domaines géométrie analytique et vectorielle en 2 ^{nde}	$P1 P2$ en 3 ^e $P1 P2$ en 2 ^{nde}
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Instrumentale Sémiotique
Argument(s) employé(s)	Formel Formel assisté par les calculs vectoriels ou analytiques	Empirico-expérimental Sémiotique assisté par le calcul probabiliste
Circulation du travail de validation dans l'ETM	$[Sem - Dis] \rightarrow Dis$ ou $[Ins - Dis] \rightarrow Dis$ ou Dis	$[Ins - Dis]$ ou $[Sem - Dis]$

TABLE 6.3 – La validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence relatifs aux classes de 3^e et de 2^{nde}

	ETM_G de référence en classe de 3^e et de 2^{nde}	ETM_G de référence en classe de 3^e et de 2^{nde}
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration. La structure déductive peut être prise en charge par les calculs vectoriels ou analytiques.	La mise en forme n'est pas explicitée.

TABLE 6.4 – La validation dans l'ETM_G et l'ETM_P de référence relatifs aux classes de 3^e et de 2^{nde}

En conclusion, notre analyse des documents institutionnels des classes de 3^e et de 2^{nde} révèle l'évolution des deux ETM_G et l'ETM_P de référence entre ces deux niveaux de classe. Cette évolution est marquée d'une part, par l'introduction de nouveaux sous-domaines de la géométrie plane où le calcul va prendre plus d'importance. D'autre part, cette évolution est marquée par l'enrichissement des genèses sémiotique et discursive de l'ETM_P de référence. L'évolution de ces deux ETM de référence induit des modifications. Des modifications constatées au niveau de la nature de l'argumentaire de validation dans le cas du domaine de la géométrie plane lorsqu'on fait intervenir l'un des sous domaines géométrie vectorielle ou analytique. Par conséquent, dans les deux niveaux scolaires 3^e et 2^{nde}, le travail de validation dans l'ETM_G de référence ne varie pas. Dans le domaine des probabilités, les modifications sont constatées au niveau du travail de validation où les registres de représentation sémiotiques sont davantage sollicités dans le travail de validation par rapport à la classe de 3^e. Rappelons tout de même que le domaine des probabilités est initié en classe de 3^e, ce qui laisse penser que l'ETM_P de référence va nécessairement évoluer et donc varier. Qu'en est-il du travail de validation dans les deux ETM idoines mis en œuvre dans la classe ? La comparaison des ETM_G et l'ETM_P idoines permet-elle d'obtenir les mêmes résultats que ceux obtenus dans le cas des ETM de référence ?

Cette première étude comparative du point de vue des ETM de référence nous donne des informations sur les caractéristiques du travail de validation probabiliste. En revanche, elle ne donne pas suffisamment d'informations sur la mise en forme du discours de validation dans l'enseignement des probabilités contrairement à l'enseignement de la géométrie. C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, nous poursuivons cette étude comparative du point de vue des ETM idoines pour rendre compte des caractéristiques des argumentaires construits dans les classes de 3^e et de 2^{nde}.

Chapitre 7

Comparaison de la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines

Nous avons souligné dans le chapitre précédent les différences du travail de validation dans les espaces de travail de référence des deux domaines considérés. Nous nous interrogeons ici sur l'existence de ces différences du travail de validation au niveau des espaces de travail idoines. Nos questions portent en particulier sur les différences du discours de validation et de sa mise en forme dans l'enseignement des probabilités et de la géométrie. Comme dans le chapitre précédent, la comparaison de la validation entre les ETM_G et ETM_P idoines est réalisée à travers l'analyse du travail de validation et l'analyse du discours de validation. Nous complétons cette analyse par une étude approfondie du discours de validation — autrement dit de l'étude de la structure des arguments mobilisés dans l'argumentaire selon le modèle de Toulmin —, mais également par l'identification de la structure globale de l'argumentaire de validation.

7.1 Méthodologie particulière

Pour effectuer la comparaison de la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines relatifs aux classes de 3^e et de 2^{nde}, nous avons choisi d'utiliser d'une part, une méthodologie par sondage. Cette méthodologie consiste à sélectionner un échantillon de professeurs enseignant en classe de 3^e ou de 2^{nde}. D'autre part, nous avons utilisé une méthodologie basée sur des observations de plusieurs séances de classes pour chaque professeur. Notre échantillon est composé de quatre professeurs et de quatre classes (deux classes de 3^e et deux classes de 2^{nde}). Dans cette étude, les quatre professeurs sont appelés : professeur A, professeur B, professeur C et professeur D. Ils enseignent respectivement dans la classe que l'on note respectivement : 3^e A, 3^e B, 2^{nde} C, 2^{nde} D. Les quatre classes sont situées dans quatre établissements différents.

Échantillon de professeurs et de classes

Cet échantillon de professeurs a été sélectionné en fonction du niveau de classe dans lequel ils enseignent (3^e ou 2^{nde}). Le choix d'observer deux classes par niveau nous permet d'effectuer une comparaison de la gestion du travail de validation dans deux ETM idoines de même niveau mais également dans deux ETM idoines de niveaux différents. Cet échantillon de professeurs a également été sélectionné en fonction du niveau d'expérience des professeurs. Nous avons décidé de retenir uniquement les professeurs ayant un niveau d'expérience supérieur à 5 ans. En effet, selon Robert et al. (2012), c'est 5 ans que l'on considère qu'un professeur n'est plus un débutant.

Les séances observées

Nous avons mené plusieurs observations de séances de classe. Les séances observées portent sur le domaine de la géométrie plane ou sur le domaine des probabilités. Nous avons donc observé au total 21 séances. Les 21 séances ont été filmées et retranscrites. Précisons que l'analyse de cet ensemble de séances fait apparaître une régularité dans la gestion du travail de validation par les professeurs dans chacun des deux domaines considérés. Cette régularité est due au choix des tâches géométriques et probabilistes. En effet, quelque soit le domaine et la séance observée, on constate que les professeurs ont tendance à proposer des tâches similaires induisant ainsi un travail de validation similaire. C'est pourquoi, dans notre étude comparative de la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines, nous avons choisi d'étudier une seule séance par domaine et par professeur. Les ETM_G et ETM_P idoines seront décrits à partir d'une tâche (exposée dans l'une des séances sélectionnées) représentative et caractéristique du travail de validation produit dans chacun des deux domaines.

7.1.1 L'analyse du travail de validation effectué dans une séance

Pour chacune des séances retenues, nous avons effectué une analyse « *a priori* » du travail de validation suivi d'une analyse du déroulement du travail de validation dans la classe.

Analyse « *a priori* » du travail de validation

Nous avons analysé, en termes de l'ETM (les genèses et les plans) et des paradigmes (géométriques et probabilistes) en jeu, les exercices extraits des manuels scolaires ou de sujets d'examen proposés dans chacune des séances observées. Ces exercices sont proposés dans l'ETM idoine qualifié de **potentiel**, celui construit par les auteurs des manuels ou des sujets d'examen. Cette première analyse permet de caractériser le travail de la validation attendue dans l'ETM idoine potentiel.

Analyse du déroulement du travail de validation

Cette analyse porte sur la mise en oeuvre de l'ETM idoine par le professeur dans la classe (**ETM idoine effectif**) à partir de l'ETM idoine potentiel. L'analyse du déroulement du travail de validation s'effectue en termes des genèses sémiotique, instrumentale et discursive utilisées dans l'ETM idoine effectif, mais également en termes des paradigmes mis en jeu. Afin d'obtenir des éléments caractéristiques du travail de validation dans l'ETM idoine effectif, nous nous sommes focalisés sur ce qui se dit et ce qui s'écrit, à savoir ce qui est institutionnalisé, comme validation pendant les phases de correction.

7.1.2 L'analyse du discours de validation dans chacune des séances observées

L'analyse du discours de validation vise à comprendre le fonctionnement des argumentaires de validation utilisés dans les ETM idoines. Plus précisément, il s'agit d'identifier les caractéristiques des argumentaires de validation utilisés et institutionnalisés par les professeurs. Cette analyse de discours prend appui sur ces différents éléments¹ :

- le type d'arguments intervenant dans l'argumentaire : formel, empirico-expérimental, sémiotique ;
- la structure de chacun des arguments en utilisant le modèle simplifié de Toulmin : donnée, garantie et conclusion ;
- la structure globale de l'argumentaire : l'enchaînement des arguments au sein de l'argumentaire et si possible la nature de la structure globale de l'argumentaire : structure linéaire ou non linéaire.

Pour rendre plus claire la lecture, nous avons décidé de représenter les éléments du modèle simplifié de la structure d'un argument de Toulmin (Donnée, Garantie, Conclusion) en fonction de la nature de la formulation de la garantie : explicitée ou non, écrite ou orale.

- 1) Lorsque donnée(s), garantie et conclusion sont clairement explicitées à l'écrit, l'argument est représenté comme suit :

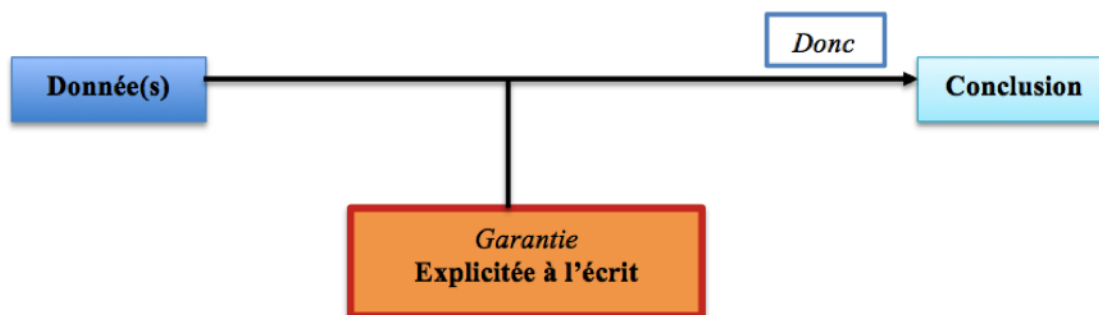


Fig. 7.1 – Argument avec la garantie explicitée à l'écrit

1. Ces éléments ont été traités dans le chapitre 3 de la partie 1 .

- 2) Lorsque donnée(s) et conclusion sont clairement explicitées à l'écrit et la garantie est clairement explicitée à l'oral, l'argument est représenté comme suit :

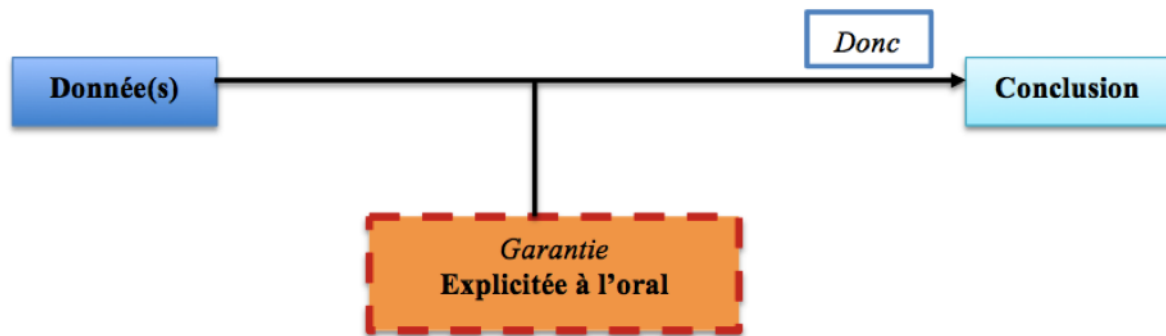


Fig. 7.2 – Argument avec la garantie explicitée à l'oral

- 3) Lorsque donnée(s) et conclusion sont clairement explicitées à l'écrit et la garantie n'est pas explicitée (ni à l'oral et ni à l'écrit), l'argument est représenté comme suit :

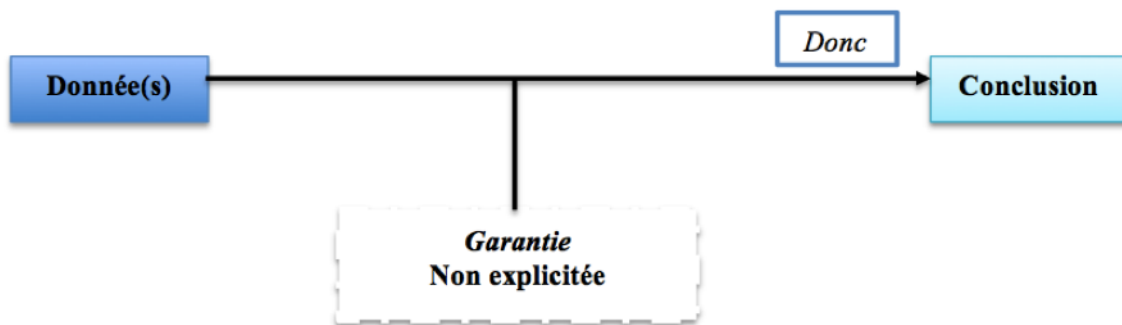


Fig. 7.3 – Argument sans l'explicitation de la garantie

7.1.3 Les groupes de comparaisons

Pour comparer la validation dans les ETM_G et ETM_P idoines, nous avons choisi :

- 1- de comparer la validation dans les ETM idoines relatifs à un domaine dans le même niveau de classe ;
- 2- de comparer la validation dans les ETM idoines relatifs à un domaine dans deux niveaux de classe ;
- 3- de comparer la validation dans les ETM idoines relatifs à deux domaines différents dans deux niveaux de classe ;

Par conséquent, trois groupes de comparaison d'ETM idoines sont pris en compte.

Groupe 1 : comparaison de deux ETM idoines relatifs à un domaine dans un même niveau de classe

Les comparaisons 1 et 2 (respectivement les comparaisons 3 et 4) permettent de caractériser le travail de la validation dans l'ETM_G idoine (respectivement l'ETM_P idoine) en classe de 3^e et de 2^{nde}.

	Géométrie				Probabilités			
Niveaux	3 ^e		2 ^{nde}		3 ^e		2 ^{nde}	
Classes	A	B	C	D	A	B	C	D
Comparaison 1								
Comparaison 2								
Comparaison 3								
Comparaison 4								

Groupe 2 : comparaison de deux ETM idoines relatifs à un domaine dans deux niveaux de classe différents

La cinquième et la sixième comparaison ont pour objectif d'observer des éventuelles similitudes ou différences dans le travail de validation dans l'ETM_G d'une part, et dans l'ETM_P idoine d'autre part, au sein d'un même niveau.

	Géométrie				Probabilités			
Niveaux	3 ^e		2 ^{nde}		3 ^e		2 ^{nde}	
Classes	A	B	C	D	A	B	C	D
Comparaison 5								
Comparaison 6								

Groupe 3 : comparaison de deux ETM idoines relatifs à deux domaines distincts dans deux niveaux de classe différents

Cette dernière comparaison est en quelque sorte une synthèse du travail de validation dans chacun des ETM_G et ETM_P idoines en fonction du niveau de classe considéré. Elle permet ainsi de mettre en exergue les différences et les similitudes entre les travaux de validation géométrique et probabiliste en fin de scolarité obligatoire.

	Géométrie				Probabilités			
Niveaux	3^e		2^{nde}		3^e		2^{nde}	
Classes	A	B	C	D	A	B	C	D
Comparaison 7								

Les obstacles et contraintes du terrain

Pour réaliser les observations de classe, nous devons respecter les progressions annuelles ainsi que leurs contraintes institutionnelles, pour chacun des quatre professeurs (A, B, C et D) participants. Ainsi, en fonction du niveau de classe et du professeur, les deux domaines ne sont pas toujours abordés au même temps. Voici un tableau qui synthétise les périodes d'observations réalisées en fonction de la classe considérée et du domaine observé :

	Classe 3^e A	Classe 3^e B	Classe 2^{nde} A	Classe 2^{nde} B
Domaine de la géométrie	1 ^{er} trimestre	1 ^{er} trimestre	3 ^e trimestre	3 ^e trimestre
Domaine des probabilités	Fin du 3 ^e trimestre	Fin du 3 ^e trimestre	Fin du 3 ^e trimestre	Fin du 3 ^e trimestre

TABLE 7.1 – Les périodes d'observation des séances en fonction des domaines

Au cours de notre expérimentation, nous avons été confrontés à des obstacles de terrain liés aux professeurs participants. En effet, le professeur A (classe de 3^e A) avait donné son accord pour que soient effectuées les observations de séances dans les deux domaines (géométrie et probabilités). Or, au cours de l'expérimentation, celui-ci a décidé de mettre fin à ces observations. Nous avons donc seulement observé les séances relatives au domaine de la géométrie plane dans la classe de 3^e A. Nous avons de fait dû diminuer le nombre d'observations de séances prévues. Nous présentons dans le tableau ci-dessous la répartition du nombre de séances observées en fonction de la classe (et du professeur) considérée :

	Classe 3^e A	Classe 3^e B	Classe 2^{nde} C	Classe 2^{nde} D
Domaine de la géométrie plane	2 séances	4 séances	1 séance	2 séances
Domaine des probabilités	0 séance	4 séances	4 séances	4 séances

TABLE 7.2 – Le nombre de séances observées en fonction du domaine

Par ailleurs, les obstacles et les contraintes rencontrés sur le terrain nous ont obligé à réduire le nombre de comparaison. Nous avons modifié le groupe 1 de comparaison en supprimant la comparaison 3, mais aussi les comparaisons 6 (du groupe 2) et 7 (du groupe 3) en prenant en compte uniquement une seule classe de 3^e dans le cas du domaine des probabilités. Nous synthétisons l'ensemble des comparaisons comme suit :

		Géométrie				Probabilités			
Niveaux		3 ^e		2 ^{nde}		3 ^e		2 ^{nde}	
Classes		A	B	C	D	A	B	C	D
Groupe 1	Comparaison 1								
	Comparaison 2								
	Comparaison 3								
Groupe 2	Comparaison 4								
	Comparaison 5								
Groupe 3	Comparaison 6								

7.2 Les comparaisons des ETM_G géométriques idoines

7.2.1 ETM_G idoines en classes de 3^e A et de 3^e B

1) ETM_G idoine en classe de 3^e A (Professeur A)

Cette séance porte sur le théorème de Thalès. Le professeur A propose aux élèves un exercice extrait du manuel Phare 3^e (p. 231), à résoudre pendant cette séance.

Analyse de l' ETM_G idoine potentiel

L'exercice proposé est un QCM (questions à choix multiples) à neuf questions (notées 45 à 54). Les élèves sont invités à répondre en choisissant une ou plusieurs des trois réponses proposées sans justifier. Le texte de l'énoncé tel qu'il est formulé comporte deux figures correspondant à chacune des configurations de Thalès. Les informations nécessaires pour la résolution de l'exercice sont fournies sous forme numérique correspondant aux mesures des longueurs des segments, et sous forme de langage mathématique (symbolique ou non). Par conséquent, les registres utilisés sont : registre numérique, registre du langage et le registre figural.

Attention : Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

A	B	C	Si échec, revoir :
---	---	---	--------------------

● Pour les exercices 45 à 54, on utilise les figures suivantes :

Figure 1
Les points A, O, I et J sont alignés.
Les points M, O, E et F sont alignés.

Figure 2
Les points G, R, U et L sont alignés.
Les points H, T, U et S sont alignés.

Fig. 7.4 – Énoncé de l'exercice

Les cinq premières questions (de 45 à 50) portent sur l'utilisation du théorème dans le sens direct. La tâche est donc de reconnaître la configuration de Thalès (figure 1 de l'énoncé) et d'appliquer le théorème de Thalès afin de déterminer le coefficient de réduction, de vérifier l'égalité des rapports et de calculer les longueurs des côtés des triangles. Les quatre dernières questions (de 50 à 54) portent sur l'application de la réciproque ou de la contraposée du théorème de Thalès en se référant cette fois-ci à la figure 2 de l'énoncé, afin d'identifier le parallélisme des droites. La résolution de cet exercice nécessite comme connaissances préalables la reconnaissance des configurations de Thalès, l'utilisation de la réciproque ou

de la contraposée selon les cas étudiés. Cette résolution fait intervenir deux domaines : géométrique et numérique.

Tel qu'il est conçu par les auteurs du manuel, l'objectif de cet exercice est de faire appliquer le théorème de Thalès pour s'entraîner aux mécanismes de son utilisation. Les auteurs privilégient ainsi le travail de la reconnaissance des figures clés de Thalès et de son application immédiate. Ce travail « de la technique » (au sens de Chevallard (1985)) s'appuie essentiellement sur l'exploitation visuelle et sémiotique des données fournies par la figure. Cependant, le discours écrit de la validation du problème n'est pas attendue.

L'ETM_G idoine potentiel place le travail mathématique de la validation sur la dimension sémiotique visant l'utilisation de Thalès en tant qu'outil sémiotique. Le travail de validation est donc clos sur la dimension sémiotique, ce qui rend difficile l'identification du paradigme en jeu dans cet espace de travail. De plus, cette complexité d'identification du paradigme semble être accentuée par le statut ambigu des nombres fournis par l'exercice. Faut-il les considérer comme des données exactes, autrement dit des données de GII, ou comme des mesures, et donc des données de GI?

Dans la suite, nous traiterons uniquement les questions 45 et 51 qui, ont été travaillées et corrigées pendant la séance observée. Ces deux questions sont formulées comme suit :

45 Sur la <i>figure 1</i> , le triangle <i>AOM</i> est une réduction du triangle <i>IOE</i> de rapport :	$\frac{3}{9}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{2}{3}$	p. 206
---	---------------	---------------	---------------	---------------

Fig. 7.5 – Énoncé de la question 45

51 Sur la <i>figure 2</i> , les droites (<i>GH</i>) et (<i>SL</i>)	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	p. 207 p. 210
---	-----------------	------------------------	---------------------------	--------------------------------

Fig. 7.6 – Énoncé de la question 51

Analyse de l'ETM_G idoine effectif

Le professeur A a réalisé (sans instrument) la première figure au tableau. Quelques minutes ont été laissées aux élèves afin de chercher la réponse à l'exercice. Puis il a fait un rappel sur les différentes méthodes d'application du théorème de Thalès vues dans la leçon. Il invite un élève à lire la question puis à répondre à celle-ci. Ce dernier donne une réponse correcte. Le professeur A demande alors à l'élève de justifier sa réponse, ce qui lui a été impossible ainsi que pour les autres élèves de la classe.

Le professeur A reprend alors l'énoncé de la question en s'adressant à l'ensemble de la classe :

Professeur A	Quand on vous dit qu'un triangle est une réduction d'un autre, cela ne vous rappelle aucune propriété? Aucun théorème? Et ça c'est dommage, on vient d'en parler il y a 5 minutes. Alors quel théorème doit s'appliquer lorsque l'on a une configuration comme celle-ci?
--------------	--

Face au silence des élèves, il reprend la figure tracée au tableau en la commentant, puis il procède à la vérification de chacune des conditions de l'application du théorème de Thalès. Ces conditions permettent d'élaborer l'argumentaire de validation.

La condition 1 : l'alignement des points et les droites sécantes (Donnée 1)

Professeur A	Vous êtes sûrs? Vous avez ce qu'il faut? Il nous faut des points comment?
Élève 1	Alignés.
Professeur A	Donc, il nous faut des droites sé...
Élèves	Sécantes.
Professeur A	Comment s'appellent-elles?
Élèves	(ME) et (AI).
Professeur A	(ME) et (AI) sont sécantes en O (Donnée 1) . On a les 5 points qui interviennent.

La condition 2 : le parallélisme de droites (Donnée 2)

Professeur A	De plus, que nous faut-il d'autre?
Élèves	Des droites parallèles (Donnée 2) .
Professeur A	Il me faut des droites parallèles qui s'appellent (AM) et ...
Élève 2	(EI) et (FJ).
Professeur A	Est-ce que tu en as besoin? Regarde l'exercice.
Élèves	Euh..., non.
Professeur A	(AM) et (IE) (Donnée 2)

Théorème de Thalès (Garantie explicitée à l'oral et à l'écrit)

Professeur A	Et dans ce cas, vous pouvez appliquer le théorème de..
Élèves	Thalès (<i>Garantie</i>).

Egalité des rapports (Conclusion)

Professeur A	Et cela vous permet d'écrire quoi ?
Élèves	Des quotients.
Professeur A	Et lesquels ?
Élèves	OE sur ...
Professeur A	Commencez plutôt par OM.
Élèves	OM sur OE est égal à OA sur OI.
Professeur A	OM sur OE est égal à OA sur OI, vous êtes d'accord ?
Élèves	Oui.
Professeur A	Bon d'accord, on va retenir ce quotient-là (en indiquant OM/OE), qui est le coefficient de réduction. C'est ce que vous avez appris en 4 ^e . La longueur OM mesure 6 cm et la longueur OE mesure 9 cm. Est-ce que cette réponse est proposée ?
Élèves	Non.
Professeur A	Non mais, 6 et 9 sont tous les deux des multiples de 3, et on obtient la réponse qui a été donnée, qui est 2 sur 3 (<i>Conclusion</i>).
Professeur A	Le truc, c'est qu'il faut que l'on soit capable d'expliquer.

La validation produite par le professeur A pour répondre à la question 45 est constituée d'un argument dont la structure est comme suit :

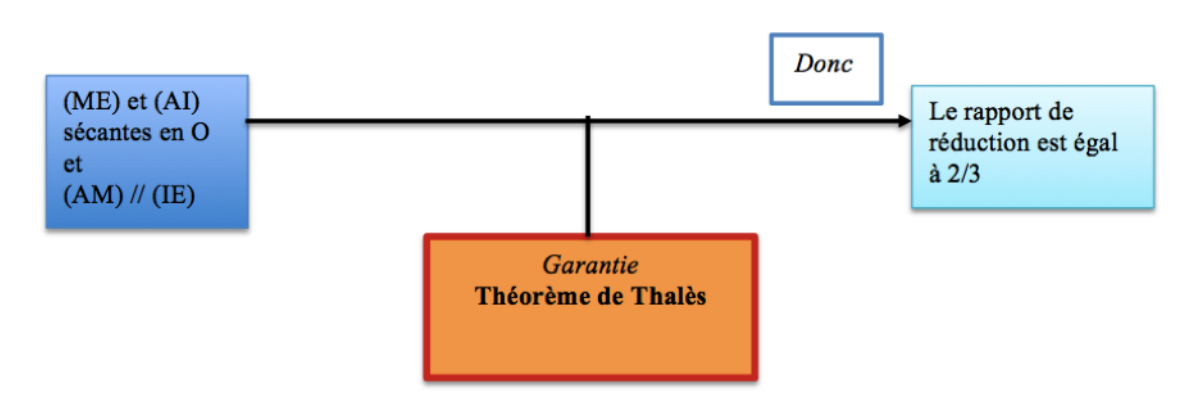


Fig. 7.7 – La structure de l'argument utilisé par le professeur A pour la question 45

La structure (donnée, garantie, conclusion) de cet argument est clairement explicitée à l'écrit (et à l'oral) de telle façon que la conclusion est déduite des prémisses. C'est un argument d'application du théorème de Thalès de type formel.

En ce qui concerne la question 51, le professeur A a décidé de la corriger directement sans laisser le temps aux élèves de chercher la réponse. Ce choix est justifié par le manque de temps dont il dispose pour traiter l'ensemble des questions de l'exercice. Pour ce faire le professeur A a désigné un élève et a entamé un dialogue (basé sur un contrat de type maïeutique) avec celui-ci afin d'explicitier le choix de la propriété et de son application pour obtenir la réponse adéquate.

Le choix de la propriété à appliquer

Professeur A	Dans ce cas, tu as deux droites sécantes et deux droites parallèles, ce sont tes hypothèses? C'est ton point de départ? La question est : est-ce que les droites sont parallèles? Elles le sont ou elles ne le sont pas? Toi, tu me dis qu'elles le sont ou qu'elles ne le sont pas? C'est une conclusion, pas un point de départ, c'est l'arrivée. Bon une chose est certaine. On n'applique pas le théorème de Thalès. Et les autres [<i>sous-entendu les élèves</i>]? Qu'est-ce que l'on doit appliquer? Et dans ce cas, vous pouvez appliquer le théorème de...
Élève 1	La réciproque, la contraposée.

L'application de la propriété de la contraposée du théorème de Thalès

Professeur A	Pour appliquer ces deux propriétés, que faites-vous?
Élève 1	Des quotients?
Professeur A	Lesquels?
Élève 2	UG sur UL et UH sur US.
Professeur A	Revenons à nos quotients. Alors, ils sont comment?
Élève 2	Presque pareils.
Professeur A	Presque pareils, alors ce presque-là, il m'embête. Ils sont différents. Alors comment ils sont mes quotients?
Élève 2	Ils ne sont pas égaux.
Professeur A	Et pourtant, j'avais bien des droites sécantes en U, j'avais tout ce qu'il fallait au départ, donc quel est le raisonnement? Quelle est la conclusion?

Formulation de la conclusion

Professeur A	Élève 2 tu m'aides? Si les droites (GH) et (SL) étaient parallèles alors j'appliquerais le théorème de Thalès pour conclure que j'ai des quotients égaux (Argument 1) , mais vu qu'ils (<i>les deux quotients UG sur UL et UH sur US</i>) ne le sont pas (Donnée de l'argument 2) , alors les droites ne peuvent pas être parallèles (La conclusion de l'argument 2) . C'est la réponse b. On a donc appliqué un raisonnement par l'absurde, c'est la contraposée du théorème de Thalès (Garantie de l'argument 2) .
--------------	--

La validation institutionnalisée par le professeur A pour répondre à la question 51 est constituée de deux arguments dont la structure est la suivante :

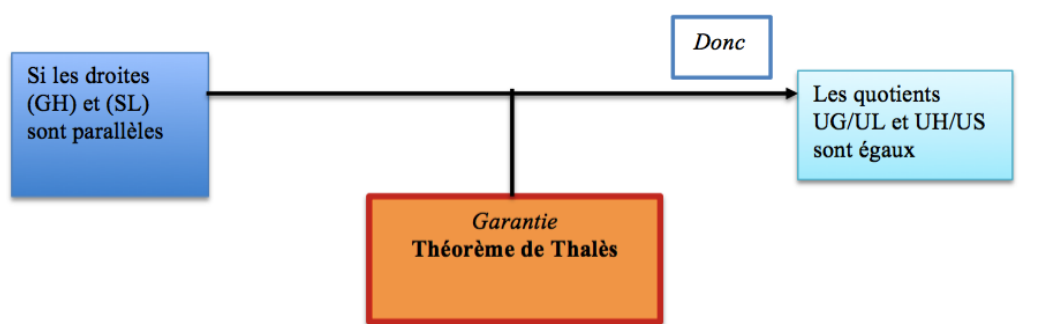


Fig. 7.8 – La structure de l'argument 1 utilisé par le professeur A pour la question 51

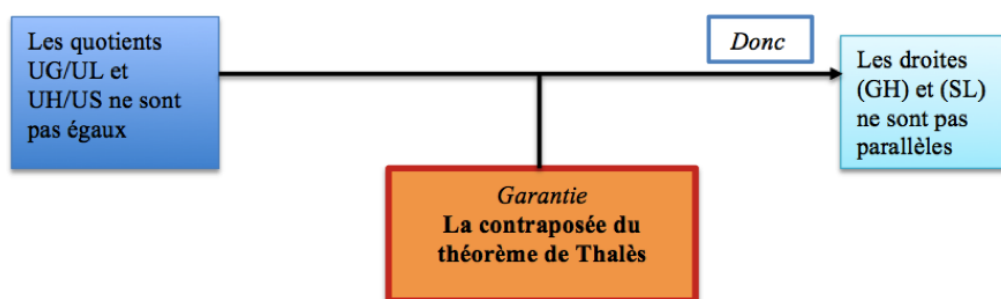


Fig. 7.9 – La structure de l'argument 2 utilisé par le professeur A pour la question 51

La structure (donnée, garantie, conclusion) de chacun des deux arguments utilisés dans la validation de la question 51 est clairement explicitée (à l'oral et à l'écrit). L'argument 1 (cf. Fig 7.8) est utilisé de façon heuristique par le professeur A pour trouver l'argument 2 (cf. Fig 7.9). Donc l'argument 1 n'intervient pas directement dans le discours de validation. De ce fait, l'argumentaire de validation élaboré par le professeur A pour répondre à la question 51 contient un seul argument. Pour chacune des deux questions 45 et 51, le professeur A a utilisé des argumentaires composés d'un ou plusieurs arguments de types formels. Les validations institutionnalisées par le professeur A sont des argumentaires de type démonstratif.

Le professeur A a fait le choix d'adapter l'ETM_G idoine potentiel en modifiant le travail de validation. Cette modification concerne la justification du résultat obtenu qui s'appuie sur le référentiel théorique, mais concerne aussi le statut de la figure dans le travail de validation, qui joue un rôle heuristique. Afin d'installer l'espace de travail idoine, le professeur A prend en charge le travail de validation et mène un dialogue sous forme de questions fermées guidant les réponses des élèves. Il a recours à des effets Topaze (Brousseau, 1998) pour faire avancer la situation.

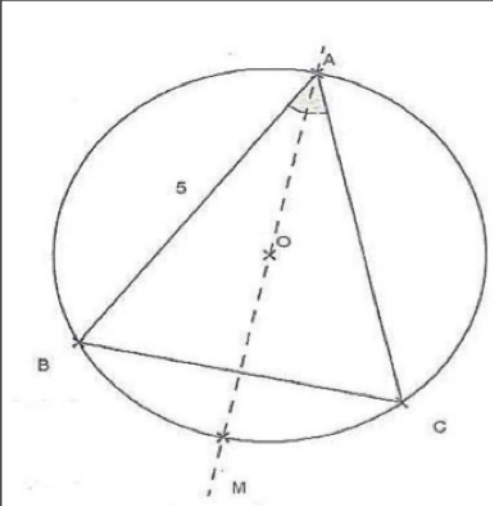
Dans cet ETM_G idoine effectif, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] orienté vers la dimension discursive, privilégiant l'usage du théorème de Thalès en tant qu'outil discursif. Ce qui suppose que cet espace est dirigé par le paradigme GII. L'observation de cette séance de géométrie permet de constater que les élèves travaillent exclusivement sur la dimension sémiotique, qui est privilégiée par l'ETM idoine potentiel et non pas par l'ETM idoine adapté par le professeur. Dans ce dernier, on assiste à une sorte de glissement au sens de Carranza (2004) : partant du travail géométrique vers un travail de logique (contraposée, raisonnement par l'absurde) et faisant perdre de vue l'objectif de l'exercice. D'où un malentendu qui porte sur le travail et le discours de la validation : la validation produite par les élèves n'est pas celle attendue par le professeur. D'ailleurs, les nombreux « actes de silence » dont les élèves ont fait preuve témoignent de ce malentendu. Ce malentendu met clairement en évidence l'existence d'un hiatus entre le travail de validation dans l'ETM $_G$ idoine potentiel et celui de l'ETM $_G$ idoine effectif, qui est probablement la source du malentendu constaté. L'adaptation de l'ETM idoine potentiel par le professeur entraîne alors la modification de la nature du travail de validation, en particulier au niveau du discours de la validation. De plus dans cet ETM adapté, la dimension sémiotique est utilisée de manière heuristique pour produire la validation. Dans l'ETM $_G$ idoine potentiel, ce discours est un argumentaire fondé exclusivement sur les figures, alors que dans l'ETM idoine adapté par le professeur A, le discours de la validation est un argumentaire constitué (selon les questions) d'un ou deux arguments formels organisé sous forme d'une démonstration.

2) ETM_G idoine en classe de 3^e B (Professeur B)

Cette séance porte sur la correction d'un exercice extrait du sujet de l'examen du brevet² (juin 2013). Cet exercice a été donné à chercher en dehors de la classe.

Analyse de l'ETM_G idoine potentiel

Cet exercice porte sur la notion d'angle inscrit et sur la trigonométrie, son énoncé est :



On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle \widehat{BAC} mesure 50° et AB est égal à 5 cm. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (OA) coupe ce cercle, noté (C), en un autre point M.

1. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BAM} ? *Aucune justification n'est demandée.*
2. Quelle est la nature du triangle BAM ? *Justifier.*
3. Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième de centimètre près.
4. La droite (BO) coupe le cercle C en un autre point K. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BKC} ?

L'énoncé de cet exercice est illustré par une figure, qui n'est pas à l'échelle, traduisant (sans ajouter d'autres données) le texte. L'exercice est proposé dans trois registres différents : le numérique, le langage naturel et le figural.

Les trois premières questions portent sur le calcul d'angle ou de longueur, et sur la nature d'une figure avec utilisation de propriétés institutionnalisées en classe de 4^e : la bissectrice d'un angle, les droites remarquables d'un triangle (ici isocèle), la trigonométrie appliquée (ici le cosinus) dans un triangle rectangle et la propriété d'un triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est un diamètre.

La dernière question, quant à elle, porte sur un calcul d'angle utilisant la propriété des angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle, vue en classe de 3^e. Pour répondre à la question, il suffit de placer le point K et de construire le segment [KC] (ou la demi droite [KC)) afin d'obtenir l'angle \widehat{BKC} . Puis, de visualiser que les deux angles \widehat{BAC} et \widehat{BKC} interceptent le même arc. Enfin, en utilisant la propriété qui lie un angle inscrit dans un cercle interceptant le même arc que l'angle, on conclut que la mesure de

2. Examen en fin de collège.

l'angle \widehat{BKC} est égale à la moitié de l'angle \widehat{BOC} . La réponse à cette question exige d'abord un raisonnement sur la figure pour extraire la propriété qui sert à fournir la réponse attendue. Précisons qu'aucune justification n'est exigée. Selon nous, cette question peut poser une difficulté non négligeable concernant la reconnaissance de la propriété à utiliser, qui relève du traitement sémiotique (au sens de Duval). En effet, même si l'énoncé de l'exercice décrit où placer le point K (l'un des deux points d'intersection de la droite (BO) avec le cercle), la tâche qui consiste à tracer la demi-droite $[KC)$ ainsi que celle qui consiste à visualiser sur la figure que les deux angles considérés interceptent le même arc ne vont pas de soi pour les élèves, du moins pour une grande partie des élèves de 3^e.

Les informations nécessaires pour résoudre l'exercice sont fournies directement dans l'énoncé ou dans les questions posées. Ces informations sont proposées dans divers registres : numérique, figural, langage naturel ou langage formel. D'autre part, l'exercice est posé dans le domaine géométrique et sa résolution fait appel à des changements de domaines : grandeurs mesures (pour le calcul de longueur), numériques (pour le calcul de quotient de longueurs), et géométrique (pour les propriétés). C'est un exercice d'examen de fin de collège, il a donc pour objectif d'évaluer les capacités des élèves à identifier et à utiliser des propriétés usuelles vues tout au long du collège, en particulier en classes de 4^e et de 3^e. Tel qu'il est conçu, cet exercice a pour but de faire appliquer la propriété des angles inscrits et celle du triangle rectangle et du cercle circonscrit à un triangle. Il s'agit donc de mobiliser les éléments disponibles dans le référentiel théorique afin d'élaborer le discours de la validation. Le paradigme en jeu dans cet espace de travail n'est pas explicité de manière claire puisque les traitements peuvent être réalisés à la fois dans GII ou GI. Mais le fait que cet exercice soit extrait d'un sujet d'examen laisse penser que c'est plutôt le paradigme GII qui est en jeu dans cet ETM idoine potentiel. Cependant, on peut répondre à la première question en restant en GI et la réponse à la deuxième question est une application directe d'une propriété des angles inscrits dont la prémisse (l'angle \widehat{ABM} est droit) est une évidence perceptive. C'est donc le paradigme GII très édulcorée qui dirige cet l'ETM_G idoine potentiel.

L'ETM idoine potentiel, tel qu'il est conçu par les auteurs de cet exercice, place le travail de validation dans le plan [Sem-Dis], orienté vers la dimension discursive. La présence de la figure qui n'est pas à l'échelle laisse penser que les auteurs veulent conduire les élèves à raisonner sur la figure afin d'extraire les propriétés nécessaires pour produire l'argumentaire de validation.

Analyse de l'ETM_G idoine effectif

On rappelle que l'exercice a été donné à chercher en dehors de la classe. Le professeur B a d'abord interrogé les élèves sur les éventuelles difficultés qu'ils auraient pu rencontrer pour résoudre l'exercice. Il a ensuite entamé la correction.

Nous proposons de traiter le travail de validation élaboré dans la première question puis

dans la seconde question. L'énoncé de ces questions est rappelé ci-après :

- 1) *Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BAM} ? Aucune justification n'est demandée.*
 2) *Quelle est la nature du triangle BAM ? Justifier.*

Le professeur B a reformulé la première question comme suit : « *quelle est la mesure de l'angle \widehat{BAM} ? Justifier soigneusement la réponse* ». Il a conduit les élèves à justifier la réponse, ce qui n'était pas l'intention des auteurs de l'exercice. Pour aider les élèves, le professeur B a fourni lors de la séance précédente le résultat numérique attendu (soit 25°) et a laissé la justification de ce résultat à la charge des élèves.

La figure de l'énoncé a été soigneusement construite au tableau et sert de support pour mener le travail de validation de l'ensemble des questions de l'exercice. Par la suite, les élèves sont sollicités pour donner la nature du triangle ABC :

Professeur B	\widehat{BAC} vaut 50° et ce côté-là [ie $[AB]$] vaut 5 cm. Qu'est qu'on sait d'autre de très très important pour ce triangle ?
<i>Silence complet</i>	
Professeur B	Il suffit juste de lire l'énoncé. Qu'est-ce qu'on sait d'autre sur le triangle [<i>sous-entendu le triangle ABC</i>] ?
Elève 1	C'est un triangle isocèle en A
<i>Silence complet</i>	
Professeur B	Cela veut dire quoi un triangle isocèle en A ?
<i>Silence complet</i>	

Face aux actes de silence (de l'élève 1 et de toute la classe), le professeur conseille aux élèves de consulter une des méthodes institutionnalisées dans leur cours. Un élève propose alors la réponse attendue « *ABC est un triangle isocèle en A donc les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur* ». Ensuite, le professeur revient sur la question initiale, à savoir justifier soigneusement la mesure de \widehat{BAM} , et tente d'écrire le raisonnement en faisant identifier aux élèves chacune de ses étapes. Il procède par une « analyse remontante »³, en partant du résultat qu'il cherche à démontrer (conclusion) jusqu'aux hypothèses (données).

Etape 1 : partir de la conclusion

Professeur B	On a dit que \widehat{BAM} vaut 25° (Conclusion). C'est quoi ça, c'est le début du raisonnement ou la fin du raisonnement ?
Elèves	C'est la fin ...
Professeur B	Oui la fin. On est d'accord. On écrit \widehat{BAM} est égal 25° « car .. ». Mais on va plutôt faire tout un raisonnement et finir par « donc \widehat{BAM} est égal 25° ».

3. Une des deux démarches vues dans l'analyse des documents institutionnels (cf. p. 68).

Etape 2 : Construction des arguments avec explicitation ou non des garanties

Construction de l'argument 1

Professeur B	On va remonter. Pourquoi \widehat{BAC} est égal à 25° ? Donnez-moi des arguments.
Elève 4	Parce que [AM) est une bissectrice.
Professeur B	Parce que [AM) est une bissectrice (Donnée), et alors ?
Elève 4	Elle coupe l'angle A en deux parties (Garantie).
Professeur B	Bissectrice de quoi ?
Elève 4	De \widehat{BAC}
Professeur B	Donc ça coupe \widehat{BAC} en deux parties égales, donc en fait \widehat{BAC} est égal à \widehat{BAC} divisé par 2, ça fait 50 divisé par 2 et ça fait 25° (Conclusion)

La structure de l'argument 1 présenté par le professeur B est :

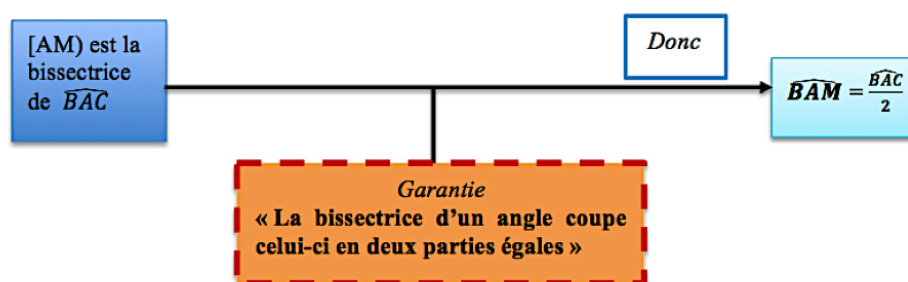


Fig. 7.10 – Structure de l'argument 1 utilisé par le professeur B

La construction de l'argument 2 et l'argument 3

Professeur B	Qu'est-ce que on sait au juste de AM, elle passe par ...
Elèves	Le centre
Professeur B	Et par quel point ?
Elèves	Par O
Professeur B	O est le centre on le sait, elle passe par A, le sommet principal d'un triangle isocèle , et par O, il est quoi ?
Elèves	Le centre du cercle circonscrit
Professeur B	Le centre du cercle circonscrit c'est le point d'intersection de quelles droites ?
<i>Silence complet ...</i>	

Face au silence surprenant des élèves qui à ce niveau de scolarité devraient connaître les droites remarquables du triangle, le professeur B demande une nouvelle fois aux élèves de consulter leur cahier de cours. Mais ces derniers ne savent pas utiliser la propriété qu'ils avaient repérée, ce qui a provoqué un certain blocage chez les élèves. Ce blocage a été

bien identifié par le professeur. Pour le contourner, il a effectué un dialogue sous forme de questions/réponses fermées, aboutissant, ainsi à la justification attendue :

Professeur B	Voilà, on utilise la propriété « dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi médiane, médiatrice et bissectrice » (Garantie de l'argument 3). Donc en fait, il faut dire que AM c'est la médiatrice de BC car elle passe par le sommet principal et par O (Argument 2), donc AM est la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} (Conclusion de l'argument 3). Est ce que vous êtes d'accord qu'il y a du boulot pour justifier ça soigneusement ?
Elèves	Oui

La structure de l'argument 2 formulé par le professeur B est comme suit :

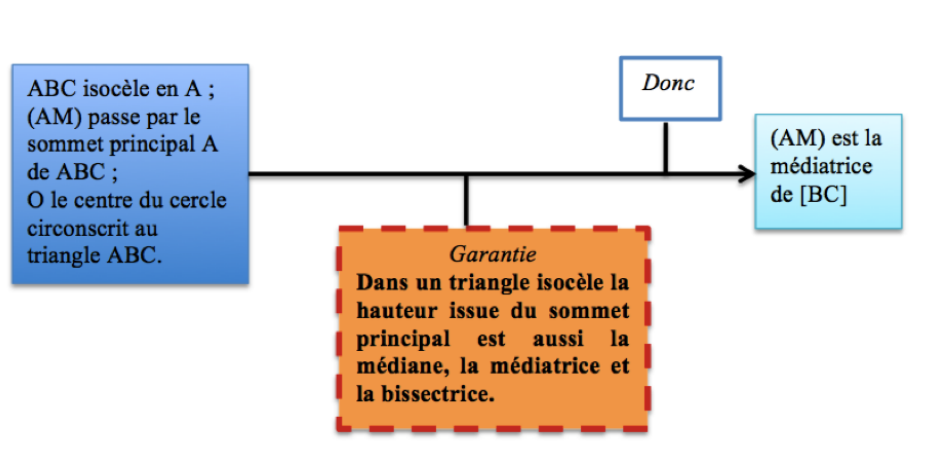


Fig. 7.11 – Structure de l'argument 2 utilisé par le professeur B

Or la garantie de l'argument 2 donnée par le professeur B n'est pas celle qui permet le passage de la prémisse à la conclusion. La garantie que le professeur B aurait dû formuler est : O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point de rencontre des médiatrices du triangle ABC .

La structure de l'argument 3 formulé par le professeur B est comme suit :

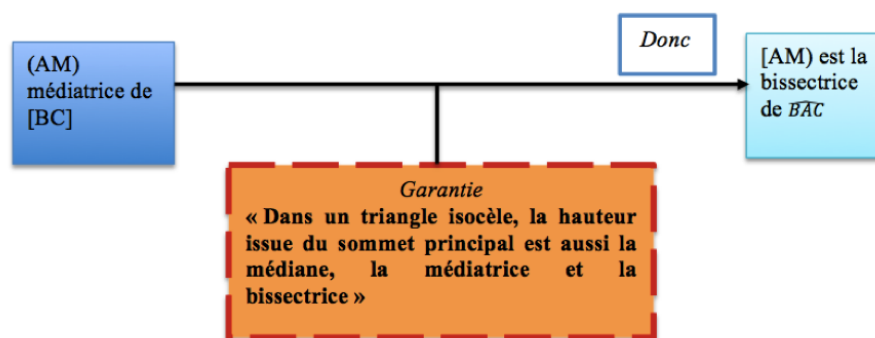


Fig. 7.12 – Structure de l'argument 3 utilisé par le professeur B

Dans l'argument 3 construit par le professeur B, il manque une prémisse qui porte sur le fait le triangle ABC est isocèle en A . Le professeur B écrit au tableau l'argument 3 suivi de l'argument 1 de telle manière que la conclusion de l'argument 3 devient la donnée de l'argument 1. Cependant, les garanties de ces deux arguments ne sont pas écrites au tableau. Bien que l'argument 2 soit explicité à l'oral, le professeur B a fait le choix de ne pas l'écrire dans le discours de validation. Une rédaction succincte du discours de validation de cette première question est exposé comme suit :

	<p>1) $[AM]$ médiatrice de $[BC]$ Donc $[AM)$ bissectrice de \widehat{BAC}</p> <p>$[AM)$ bissectrice l'angle \widehat{BAC} Donc $\widehat{BAM} = \widehat{BAC} : 2 = 50 : 2 = 25$</p> <p>Donc $\widehat{BAM} = 25$</p>
--	--

Fig. 7.13 – Discours de validation écrit au tableau par le professeur B

L'argumentaire de validation est donc constitué de trois arguments dont les garanties sont explicitées uniquement à l'oral. Ces arguments sont de type formel. En revanche, l'argumentaire rédigé au tableau est constitué seulement des arguments 1 et 3. Au sein de l'argumentaire rédigé, ces arguments sont organisés de manière linéaire. Ainsi, l'argumentaire de validation a une structure globale linéaire. Notant cependant que l'argumentaire de validation produit par le professeur B au tableau présente des lacunes tant au niveau

des garanties que des arguments qu'il aurait fallu expliciter à l'oral ou à l'écrit.

Il en résulte que la validation institutionnalisée est un argumentaire de type démonstratif. Dans la suite de la correction de l'exercice, nous avons relevé un autre type d'argument mobilisé lorsqu'il s'agit de déterminer une mesure de longueur à l'aide de formules trigonométriques. C'est un argument basé sur des calculs.

Par ailleurs, Le travail de validation observé dans cette séance requiert des aides du professeur B pour être mené à bien. Ces aides sont de type « **méta-procédural** », c'est-à-dire des aides portant sur la manière de raisonner en géométrie, la manière d'utiliser les propriétés pour extraire des arguments, et la rédaction du discours de la validation qui d'ailleurs prend une grande ampleur à tel point que le professeur B ne prend pas conscience de l'absence de certains arguments et des garanties manquantes. Ce travail de validation n'est pas dissocié du traitement sémiotique puisque le professeur B a systématiquement recours à la figure afin de faire « deviner » aux élèves la propriété sous-jacente. Il a même incité les élèves à compléter la figure au fur et à mesure que les nouvelles informations apparaissaient. Selon lui, cela constitue une tâche facile à réaliser et qui a un grand intérêt pour raisonner :

« Mais comment on fait pour raisonner sans compléter la figure ? C'est quand même plus facile de tracer. C'est quand même plus facile de raisonner sur une figure complète ».

Le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] avec l'usage du raisonnement heuristique sur la figure pour élaborer la validation, et du raisonnement déductif pour mettre en forme le discours de validation. Le professeur incite souvent les élèves à utiliser les propriétés institutionnalisées dans le cahier de cours pour élaborer les justifications et construire les arguments. De ce fait, le professeur donne de l'importance à l'usage des outils du référentiel théorique pour élaborer le discours de la validation. Cela peut être expliqué par le fait que la classe de 3^e constitue une classe d'examen de fin d'année, d'où la forte insistance sur le travail de la genèse discursive. C'est pourquoi le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] et est fortement orienté vers la dimension discursive. Lorsque les élèves rencontrent des difficultés, des blocages ou font « acte de silence », le professeur suggère aux élèves de se référer aux propriétés et aux théorèmes institutionnalisés dans le cahier de cours (le référentiel théorique). D'un autre côté, ce professeur ne laisse pas beaucoup d'initiative aux élèves. Ceci est probablement en relation avec les difficultés importantes que présentent la plupart des élèves de cette classe de 3^e.

3) Comparaison de la validation dans les deux ETM_G idoines en classe de 3^e

Les deux séances observées portent sur le travail de validation utilisant deux théorèmes emblématiques à ce niveau de classe, Thalès et l'angle inscrit, traditionnellement enseignés

à ce niveau de classe. Cette comparaison peut être synthétisée comme suit :

	ETM_G idoine de la classe A	ETM_G idoine de la classe B
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement déductif pour élaborer le discours de la validation.	Raisonnement heuristique dans le contexte de découverte du raisonnement de validation. Raisonnement déductif pour élaborer le discours de la validation.
Paradigme(s)	GII	GII avec référence GI (compléter la figure afin de raisonner)
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Sémiotique (liée au raisonnement heuristique) et Discursive
Circulation du travail de validation dans l'ETM	Clos sur la dimension (<i>Dis</i>)	$[Sem - Dis] \rightarrow Dis$
Argument(s) employé(s)	Formel	Formel
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration.	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration.

TABLE 7.3 – La validation dans deux l'ETM_G idoines en classe de 3^e

Les deux professeurs ont tendance à faire référence aux propriétés ou à des méthodes institutionnalisées dans le cahier de cours. Ils exercent les élèves à faire le va-et-vient entre le référentiel théorique (cahier de cours) et le travail de validation. Ce va-et-vient traduit la volonté des deux professeurs d'établir l'articulation entre les deux pôles : le référentiel théorique et la preuve dans l'ETM_G idoine, assurée par la genèse discursive.

À ce niveau de classe, l'objectif des deux professeurs est d'entraîner les élèves à la fois à la reconnaissance des propriétés et/ou des théorèmes du référentiel à travers la visualisation des signes (ici la figure et les données numériques ou codages inscrits sur celle-ci), et à les utiliser correctement à travers l'élaboration du discours de preuve. Comme nous l'avons déjà souligné, la classe de 3^e constitue la classe terminale du collège, une classe d'examen ; d'où l'existence de cette forme de travail de validation.

Dans les deux ETM_G idoines étudiés, le raisonnement déductif est utilisé pour mettre en forme l'argumentaire de validation. Les argumentaires de validation institutionnalisés par les deux professeurs ont une structure globale linéaire. Les deux professeurs ont fait le choix de modifier la nature du travail de validation proposée dans l'ETM_G idoine potentiel, et ceci dans le but d'accroître l'usage des éléments du référentiel théorique de l'ETM_G idoine (et même en principe de l'ETM_G personnel des élèves). Il en résulte que la dimension discursive est privilégiée dans le travail de validation mis en oeuvre dans les deux ETM_G idoines. Ils n'hésitent pas à se référer à la figure pour aider ou orienter les élèves vers la validation attendue. Toutefois, le choix des deux professeurs de modifier la

nature du travail de validation entraîne des blocages et des malentendus liés à la forme du discours de validation attendue. Ces blocages et malentendus sont observables dans les nombreux « actes de silence » des élèves, mais aussi dans les divers recours aux effets Topazes des professeurs afin de formuler la validation.

En conclusion, nous pouvons affirmer que le travail de validation en géométrie dans les deux classes de 3^e et le type de validation institutionnalisée sont similaires.

7.2.2 ETM_G idoines en classes de 2^{nde} C et de 2^{nde} D

Avant de procéder à l'analyse des deux ETM_G idoines en classe de 2^{nde} C et de 2^{nde} D, nous précisons que les exercices étudiés dans les deux classes de seconde ont été distribués sur une feuille. Ces exercices ne sont pas extraits d'un manuel ou d'une ressource connue. Donc, à la différence de l'analyse effectuée dans les deux ETM_G idoines en classe de 3^e, nous n'allons pas ici effectuer l'analyse de l'ETM_G idoine potentiel, mais davantage procéder à une analyse de ETM_G idoine construit par le professeur C ainsi que la mise en place de cet ETM_G idoine, autrement dit l'ETM_G idoine effectif.

1) ETM_G idoine en classe de 2^{nde} C (Professeur C)

L'exercice traité dans cette séance est un exercice de la géométrie dans l'espace dont la résolution fait appel au théorème de Pythagore. Par ailleurs, l'énoncé de l'exercice a été distribué sur une feuille aux élèves.

Analyse de l'ETM_G idoine construit par le professeur

L'exercice proposé porte une seule question. L'objectif est de déterminer la nature d'un triangle. L'énoncé est projeté au tableau. Il est formulé comme suit :

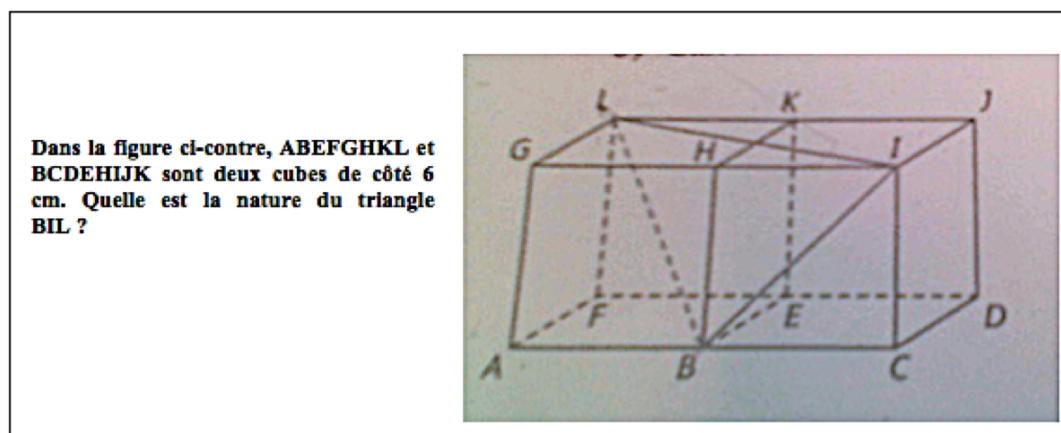


Fig. 7.14 – Énoncé de l'exercice proposé par le professeur C

L'énoncé de l'exercice est proposé dans le domaine de la géométrie dans l'espace. La résolution de cet exercice nécessite des outils de la géométrie plane (le théorème de Pythagore et sa réciproque). Le travail de validation est articulé entre la géométrie 3D et la géométrie 2D. Les informations nécessaires à la résolution de cet exercice sont formulées dans l'énoncé, soit sous forme numérique (les longueurs des côtés des deux cubes), soit sous forme de langage mathématique (cube, côté, la nature d'un triangle), soit sous forme figurale (la position des deux cubes l'un par rapport à l'autre). Par conséquent, les registres utilisés sont : numérique, langage naturel et registre figural.

La tâche d'identification de la nature du triangle BIL revient donc à déterminer si le triangle est isocèle, équilatéral, rectangle ou isocèle et rectangle. L'exécution de cette tâche nécessite certaines connaissances : le théorème de Pythagore (pour déterminer des longueurs) et sa réciproque (pour démontrer qu'un triangle est rectangle), savoir comparer des longueurs (pour démontrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral). L'ETM $_G$ idoine potentiel est essentiellement piloté par le paradigme GII. L'exécution de la tâche nécessite des connaissances d'ordre méthodologique : à partir de la figure de l'énoncé, identifier les triangles rectangles pertinents pour calculer la longueur des côtés du triangle BIL à l'aide du théorème de Pythagore. Organiser de manière cohérente les étapes du raisonnement (par exemple, commencer par calculer toutes les longueurs du triangle BIL puis comparer chacune d'entre elles). L'ETM $_G$ idoine construit par le professeur place donc le travail de validation dans le plan [Sem-Dis]. La validation attendue dans cet espace idoine est un argumentaire de type démonstratif. De plus, la résolution de l'exercice fait intervenir plusieurs domaines : la géométrie dans l'espace, la géométrie plane, les nombres, les grandeurs et mesures.

Analyse de l'ETM $_G$ idoine effectif

La figure de l'énoncé est projetée au tableau. Le professeur C laisse quelques minutes aux élèves pour chercher la réponse de l'exercice. Par la suite, le professeur sollicite un élève (noté élève 5) pour formuler le raisonnement qu'il a élaboré pour déterminer la longueur BI .

Argument 1 : calcul de la longueur BI

Professeur C	Élève 5, vous avez dit qu'il fallait calculer BI et BL grâce Bon on pourrait [<i>en s'adressant à l'ensemble de la classe</i>] se mettre d'accord sur les calculs à faire. Donc vous avez vu que c'est deux cubes de côté 6 cm.
--------------	--

On retrouve ci-dessous la réponse de l'élève 5 validée par le professeur C :

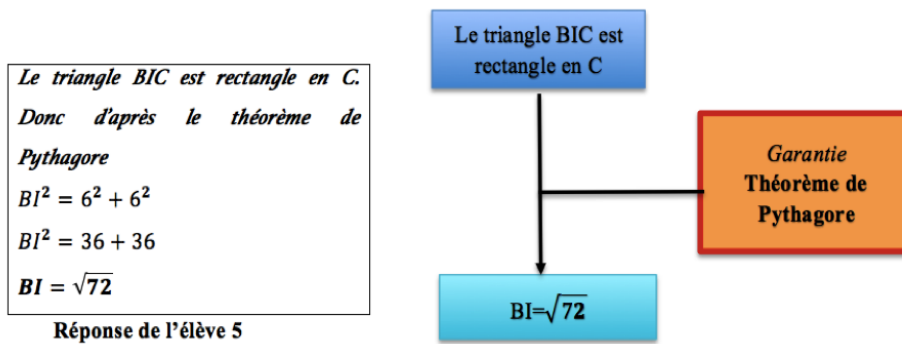


Fig. 7.15 – Structure de l'argument 1 exposé par l'élève 5

Argument 2 et 3 : calcul des longueurs BL et IL

Le professeur repasse en rouge le triangle BFL afin d'aider les élèves à identifier la nature de ce triangle. Il ajoute un commentaire à l'oral justifiant l'égalité des longueurs FB et BI : « $FB = BI$ car ce sont deux diagonales de carrés de même dimension ». Cette justification n'est pas comprise par les élèves. Le professeur C tente alors de l'expliquer :

Professeur C	En fait BF est la diagonale du carré $ABEF$ de côté 6 cm, et BI est la diagonale du carré $BHIC$ de côté 6 cm. Donc ces deux carrés sont superposables, on peut les découper et les mettre l'un sur l'autre de sorte que la diagonale BF et BI aient la même longueur. Donc la longueur FB est égale à la longueur BI et est égale à racine carré de $\sqrt{72}$. Maintenant il faut calculer la longueur BL . Allez-y.
--------------	--

Après quelques minutes de recherche, deux élèves (notés respectivement élève 10 et élève 11) sont sollicités pour aller écrire leurs réponses au tableau :

<p><i>Le triangle LFB est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore</i> $BL^2 = BF^2 + FL^2$ $BL^2 = \sqrt{72}^2 + 6^2$ $BL^2 = 72 + 36$ $BL^2 = 108$ $BL = \sqrt{108}$</p>	<p><i>Dans IGL</i> $IL^2 = 12^2 + 6^2$ $IL^2 = 144 + 36$ $IL^2 = 180$ $IL = \sqrt{180}$</p>
Élève 10 (Calcul de BL)	Élève 11 (Calcul de IL)

Fig. 7.16 – Réponses des élèves 10 (argument 2) et 11 (argument 3)

La structure de chacun des arguments utilisée par l'élève 10 et l'élève 11 est la même que celle qui a été utilisée par l'élève 5. Néanmoins dans l'argument de l'élève 11, la garantie n'est pas explicitée. La donnée est incomplète puisqu'il manque le fait que le triangle

IGL est rectangle en G . Précisons toutefois que le professeur C n'a pas relevé ce manque d'information. En outre, la détermination des longueurs BL et LI utilisent deux triangles rectangles LFB et ILG . Or, le fait que ces deux triangles soient rectangles n'est pas justifié, puisque dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace (en France), ce type de justification n'est pas exigé à ce niveau de classe. Pour IGL cela va de soi, $\widehat{IGL} = \widehat{HGL}$ est l'angle au sommet d'un carré. Cela explique que l'élève 2 n'ait rien écrit. Par contre pour LFB cela ne va pas de soi.

Afin de conclure au sujet de la nature du triangle (isocèle ou équilatéral), le professeur C procède à la comparaison des deux longueurs BL et IL pour montrer que le triangle n'est ni isocèle, ni équilatéral :

Professeur C	Là on a calculé les trois longueurs, qu'est ce qu'on va faire maintenant pour donner la nature de ce triangle ?
Élève 2	En les comparant ?
Professeur C	Et donc ...
Élève 2	On voit que 72 n'est pas égal à 108 et 72 n'est pas égal à 180 (Données) donc c'est un triangle quelconque (Conclusion).

La réponse de l'élève 2 est que le triangle BIL est quelconque, implicitement cela veut dire que le triangle BIL n'est ni isocèle, ni équilatéral. La structure de l'argument 4 exposé au tableau par le professeur C est représentée ci-dessous :

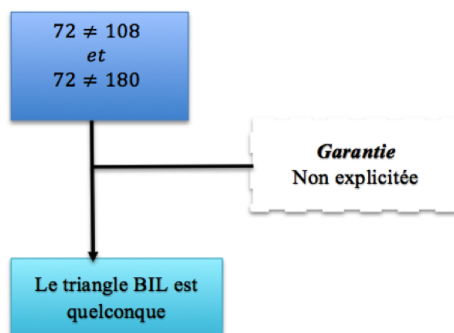


Fig. 7.17 – Structure de l'argument 4 exposé au tableau

Le professeur C interroge les autres élèves au sujet de la conclusion de l'élève 2 dans le but de les conduire à vérifier si le triangle BIL est rectangle en B .

Argument 5 : le triangle BIL est rectangle en B

Elève 4	BI^2 plus BL^2 est égal à LI^2 . Donc le triangle est rectangle.
Professeur C	LI^2 (Donnée 1) vaut combien ?
Elève 4	180 (Donnée 1).
Professeur C	Oui et après ?
Elève 4	BL^2 plus BI^2 est égal à 180.
Professeur C	BL^2 plus BI^2 est égal à 72 plus 108 est égal à 180 (Donnée 2). Donc ...
Elèves	Le triangle est rectangle en B .
Professeur C	Oui, donc d'après le théorème de Pythagore (Garantie), le triangle BIL est rectangle en B (Conclusion).

Une rédaction succincte de l'argument 5 est présentée au tableau par le professeur C. La structure de cet argument est présentée comme suit :

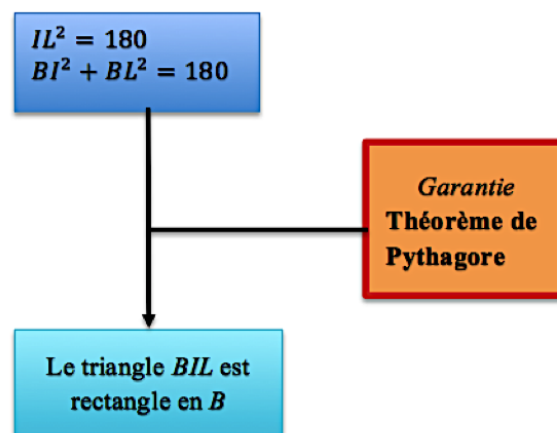


Fig. 7.18 – Structure de l'argument 5 exposé par le professeur C

Comme nous le constatons ci-dessous, la garantie écrite n'est pas correcte, puisque c'est par la réciproque du théorème de Pythagore que le passage de l'égalité $BL^2 + BI^2 = LI^2$ vers la conclusion (*le triangle BIL est rectangle en B*) est assuré. Cette erreur portant sur la garantie n'est pas relevée par le professeur C.

L'argumentaire construit dans cet ETM_G idoine est constitué de plusieurs arguments dont les garanties sont explicitées ou non. Lorsque celles-ci sont explicitées, elles sont écrites dans l'argumentaire de validation. Les arguments 1, 2 et 5 sont des arguments formels. Les arguments 3 et 4 sont soit incomplets, soit la garantie explicitée est fautive. Par conséquent, l'argumentaire de validation produit et institutionnalisé dans l' ETM_G idoine est incomplet. Notre analyse du travail de validation mis en oeuvre par le professeur laisse penser que la validation attendue par le professeur est un argumentaire de type démonstratif. Nous constatons que tout au long de la correction de l'exercice, le professeur C utilise souvent la figure comme un outil de traitement sémiotique (repérage de propriétés par exemple). Le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] orienté vers la dimension discursive. La prémisse « le triangle LFB est rectangle en F » est ici admise

comme une évidence perceptive, de ce fait le paradigme qui piloté le travail de validation est GII articulé avec GI (comme souvent en géométrie 3D). Le discours de validation institutionnalisé dans cet ETM_G idoine est un argumentaire basé sur des arguments dont l'enchaînement semble plutôt suivre une structure d'arbre et non linéaire. La validation ainsi produite est un argumentaire de type démonstratif. Le travail de validation ainsi que la validation produite dans cet ETM_G idoine est en accord avec ce qui est attendu dans l'ETM_G de référence à ce niveau de classe.

2) ETM_G idoine en classe de 2^{nde} D (Professeur D)

La recherche de la solution de l'exercice proposé aux élèves a été effectuée en deux temps. Le premier temps a été réalisé dans la séance précédant celle-ci en salle d'informatique, avec usage du logiciel GeoGebra. Voici l'énoncé de l'exercice :

Construire l'orthocentre H , le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O au triangle ABC . Faire une conjecture sur les points O , H et G . Confirmer la conjecture en déplaçant les points A , B et C . Que se passe-t-il si ABC est un triangle équilatéral ?

Il s'agit d'élaborer une conjecture concernant trois points spécifiques d'une configuration. Celle-ci est formulée dans la séance précédente comme suit : « *les points O , G et H sont alignés sur la droite, appelée la droite d'Euler* », alors que sa démonstration a été réalisée dans la séance observée.

Au vu de la complexité de la démonstration de cette conjecture pour des élèves de la classe de 2^{nde}, le professeur D a choisi de la découper en plusieurs questions. Nous proposons donc d'analyser l'ETM_G idoine construit par le professeur D pour élaborer la démonstration de la conjecture.

Analyse de l'ETM_G idoine construit par le professeur D

L'exercice étudié dans cette séance observée est constitué de trois questions. Il a pour objectif de démontrer la conjecture formulée dans la séance précédente à l'aide du logiciel GeoGebra. L'énoncé de l'exercice est formulé soit dans le sous-domaine de la géométrie synthétique avec l'utilisation du registre figural traduisant l'énoncé sous forme d'une figure, soit dans le sous-domaine de la géométrie vectorielle (voir les questions 2 et 3) :

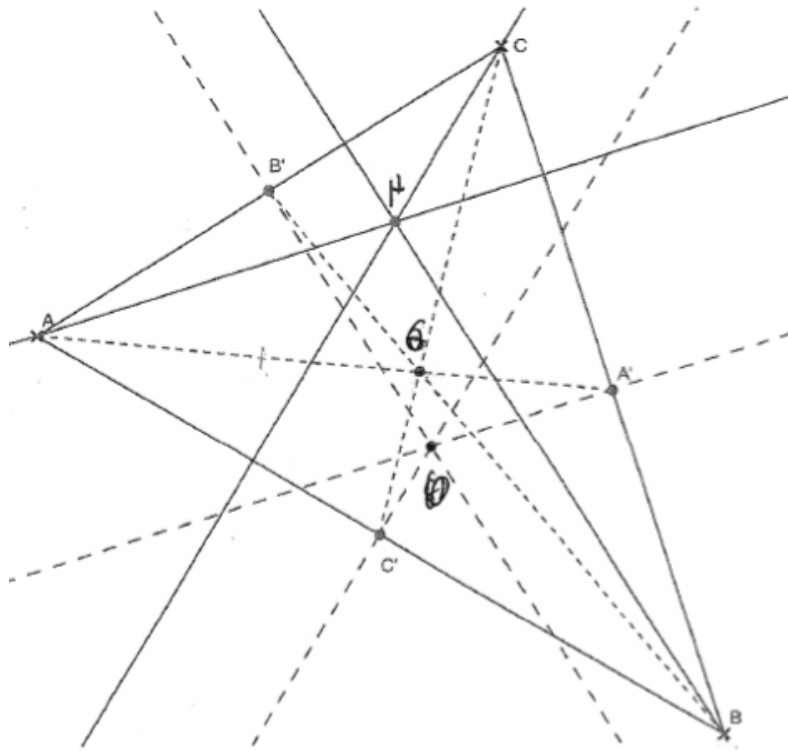


Fig. 7.19 – La figure de l'énoncé d'exercice

- Première question : *Rappel*

Cette question a pour objectif de faire un rappel des définitions de trois droites remarquables (hauteur, médiane et médiatrice) et de leur point de rencontre (respectivement orthocentre, centre de gravité et centre du cercle circonscrit) vus au collège. Il s'agit de convoquer et de mobiliser des éléments du référentiel théorique de l'ETM idoine.

- Deuxième question : *Démontrer que si $[MN]$ a pour milieu I , pour tout point O du plan $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$. Aide : en utilisant la relation de Chasles, décomposer \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON}*

On cherche à démontrer une relation vectorielle dans le cas général. Cette question nécessite de mobiliser la relation de Chasles afin de décomposer les deux vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} , puis de réduire la somme obtenue.

- Troisième question. Elle est constituée de cinq sous questions :

Question 3.1	Soit un triangle ABC , A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G est son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Soit H défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, démontrer que $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$. Aide : se servir du résultat de la 2e question. En déduire 2 autres relations similaires.
Question 3.2	En déduire que H appartient aux 3 hauteurs du triangle ABC
Question 3.3	Démontrer que $2\vec{GA}' + \vec{GA} = \vec{0}$. Aide : se servir du résultat de la 2e question. En déduire que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
Question 3.4	A partir de la relation $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ et du résultat $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, démontrer que les vecteurs \vec{OH} et \vec{OG} sont colinéaires
Question 3.5	Que peut-on en déduire pour les points O , H et G ?

Dans cette troisième question, il s'agit de démontrer des relations vectorielles liant les points O , H et G avec les sommets du triangle ABC . Pour répondre aux sous-questions (**3.1**, **3.2**, **3.3**, **3.4**), il est nécessaire d'utiliser la décomposition de vecteurs à l'aide de la relation de Chasles et de réduire la somme obtenue. Pour répondre à la sous-question **3.5**, il suffit de traduire la colinéarité de vecteurs en termes de parallélisme de droite.

De manière générale, les questions sont formulées soit dans le sous-domaine de la géométrie synthétique, soit dans celui de la géométrie vectorielle. Ainsi, cet exercice mélange deux sous-domaines de la géométrie : géométrie synthétique et géométrie vectorielle. La résolution de cet exercice nécessite de mobiliser les outils du référentiel théorique qui relèvent en partie de la géométrie vectorielle (relation de Chasles, colinéarité, relation vectorielle d'un milieu d'un segment et ses extrémités, décomposition vectorielle) introduits en classe de 2^{nde}, mais également des outils de la géométrie synthétique (les droites remarquables d'un triangle et leur point de rencontre respectif) vus au collège. D'où des changements de sous-domaines nécessaires pour la résolution de l'exercice.

L'ETM_G idoine ainsi construit par le professeur D place le travail de validation exclusivement dans la dimension discursive visant l'usage des outils du référentiel théorique pour produire le discours de la validation. Le paradigme en jeu dans cet espace de travail est **GII** (dans le cas de la géométrie synthétique) articulé avec le sous-domaine de la géométrie vectorielle.

En raison de la longueur de cet exercice de démonstration, nous avons choisi de ne traiter que les deux questions **3.1** et **3.2**.

Analyse de l'ETM_G idoine effectif

À partir de la figure affichée au tableau à l'aide d'un vidéo projecteur, le professeur entame la séance par un bref rappel de la conjecture émise à la fin de la séance informatique. Ensuite, à travers de traitement de la première question, le professeur rappelle quelques éléments théoriques nécessaires pour la résolution de l'exercice.

Traitement de la question 3.1 : Soit un triangle ABC , A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G est son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Soit H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA}'$. Aide : se servir du résultat de la 2e question. En déduire 2 autres relations similaires.

Le professeur D a proposé aux élèves de résoudre la question. Or la résolution de celle-ci présente des difficultés aux élèves. De ce fait, le professeur D construit une figure à main levée illustrant la relation démontrée dans la deuxième question et remplace les points M , N , I et O par respectivement B , C , A' et O . Cette construction est supposée aider les élèves à identifier le lien avec la relation démontrée précédemment. Ce qui n'est pas le cas, puisque ils ont formulé des réponses presque au hasard (comme si c'était une « devinette ») lorsque le professeur les interroge sur la relation entre $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{A'C}$:

Elève 9	Il est égal à zéro .
Elève 10	Il est égal à CB .
Professeur D	Attendez, il faut vous servir de ce que l'on vient de démontrer.
Elève 11	Oui mais c'est quoi alors B et C dans la question 2?
Professeur D	Bon alors, j'ai pris un peu de la figure initiale, et on a donc A' milieu de BC et O un point quelconque n'appartenant pas à BC (Donnée 2). Alors ?
Elève 12	$A'B$ plus $A'C$ est égal à $2OA$ (Donnée 2).
Professeur D	Très bien, c'est $2OA'$ (Donnée 2) et non $2OA$. Ce que l'on a démontré tout à l'heure. Maintenant vous allez remplacer ce résultat dans l'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (Donnée 1).

La relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ constitue l'une des données de l'argument construit par le professeur D pour répondre à la question 3.1. Une autre donnée est celle de A' milieu de $[BC]$. Cette deuxième donnée nécessite d'être traduite en relation vectorielle (dédite de la première question) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}'$ (avec O un point quelconque n'appartenant pas au segment $[BC]$). Ci-dessous, la rédaction de l'argument construit par le professeur :

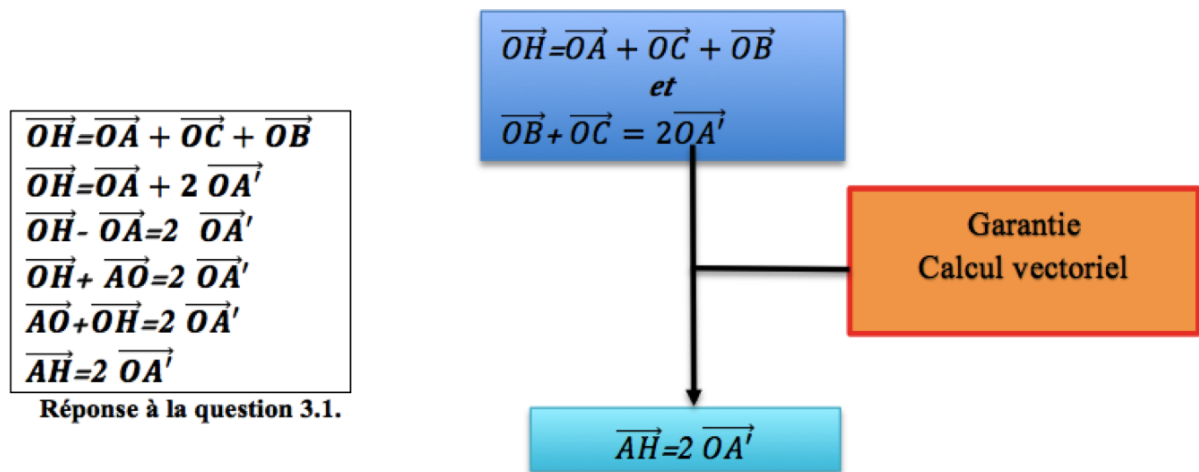


Fig. 7.20 – Structure de l’argument utilisé par le professeur D dans la question 3.1

Les élèves semblent avoir des difficultés à suivre la démarche du professeur D. Celui-ci reprend alors le résultat démontré dans la deuxième question ($\vec{OM} + \vec{ON} = 2\vec{OI}$) et propose aux élèves de l’appliquer pour chacun des côtés du triangle ABC . Mais cela ne suffit pas pour certains élèves, qui n’ont toujours pas compris. Le professeur D finit par écrire le résultat au tableau. Ensuite, il poursuit le raisonnement en reprenant le résultat que l’on cherche à démontrer.

Pour la suite de la question 3.1, les élèves sont invités à procéder de la même manière en remplaçant les lettres A et A' respectivement par B et B' , et C et C' . Ces derniers ont réussi à réaliser la tâche demandée.

Traitement de la question 3.2 : *en déduire que H appartient aux 3 hauteurs du triangle ABC .*

Le professeur D conseille aux élèves d’utiliser les relations établies précédemment et de se référer à la figure de l’exercice, mais également de consulter le cahier de cours. Il ne laisse pas de temps pour faire la recherche de la réponse de l’exercice. Le professeur D propose aux élèves de commencer par démontrer que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A .

Pour ce faire, le professeur D guide les élèves afin qu'ils démontrent que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) :

Professeur D	La figure vous sera utile et vous allez aussi utiliser les trois relations que l'on vient d'écrire pour démontrer cette égalité. Qu'est-ce que l'on peut dire des vecteurs AH et OA' ? Ils sont comment ?
Professeur D	Je parle du vecteur AH et du vecteur OA' et non pas du vecteur AH et deux fois OA' .
Élèves	Ils sont colinéaires.
Professeur D	Oui. AH et OA' sont colinéaires. Rappelez-vous de ce que veut dire colinéaire ? Vous devez penser à quoi ? On l'a même écrit dans le cours. Et ce n'est pas interdit de le sortir, c'est même conseillé. Si je regarde le cours, que peut-on dire ?
Élèves	Ils sont parallèles ?

À partir de la relation $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ (démontrée dans la question 3.1) les élèves déduisent la colinéarité des deux vecteurs \overrightarrow{AH} et $\overrightarrow{OA'}$ puis le parallélisme des deux droites (AH) et (OA') . Par conséquent, on a un argument (noté argument 1) qui permet le passage des propriétés vectorielles à celles des figures planes. Les deux données « les droites (AH) et (OA') » ainsi que « (OA') est la médiatrice du segment $[BC]$ » permettent de déduire que la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) :

Professeur D	Maintenant, vous allez regarder OA' par rapport au segment $[BC]$.
Élève 14	OA' est perpendiculaire à BC [<i>L'affirmation est déduite implicitement de la donnée (OA') est la médiatrice du $[BC]$</i>].
Professeur D	D'accord. Alors, vous avez à la fois OA' perpendiculaire à BC (Donnée 1), et AH parallèle à OA' (Donnée 2), vous en déduisez quoi ?
Silence complet	
Élève 15	Que AH est aussi perpendiculaire à BC (Conclusion).
Professeur D	Très bien. C'est quoi la propriété que tu utilises ?
Elève 15	Quand deux droites sont parallèles, si une droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre (Garantie).
Professeur D	Là on va donc écrire « les droites (AH) et (OA') sont parallèles. La droite (OA') est perpendiculaire à $[BC]$ donc (AH) est perpendiculaire à $[BC]$ ». Donc vous allez écrire la même chose avec BH et CH par rapport à (AC) et (BC) .

L'argument (noté argument 2) construit (par le professeur D) pour prouver que la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) est structuré comme suit :

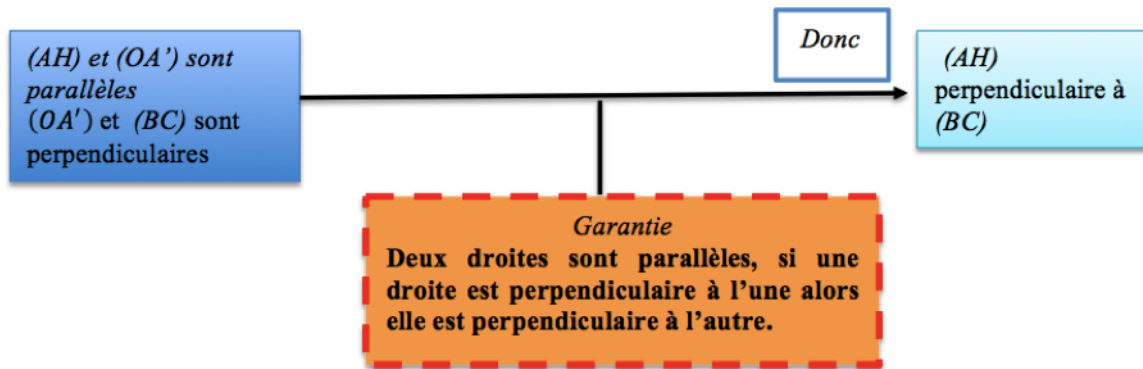


Fig. 7.21 – Structure de l’argument 2 construit par le professeur D

Les arguments présentés ci-dessus constituent l’argumentaire permettant de démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) . Or, il manque un autre argument dont la garantie serait que par définition de la notation (AH) , cette droite passe par les points A (un des sommets du triangle ABC) et H . Cet argument permettrait de conclure que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue du sommet A . De plus, nous remarquons que la garantie de l’argument 1 est clairement explicitée à l’oral. Cet argument possède alors une structure (donnée, garantie, conclusion) clairement explicitée. Il est donc un argument de type formel.

Le professeur D procède de la même manière pour démontrer que les droites (BH) et (CH) sont des hauteurs du triangle ABC . Il conclut alors sur l’appartenance du point H aux trois hauteurs du triangle ABC . L’argumentaire de validation élaboré par le professeur D pour répondre à la question 3.2 est formulé au tableau :

$\overline{AH} = 2 \overline{OA'} \Rightarrow (AH) \text{ et } (OA') \text{ sont parallèles. } (OA') \text{ perpendiculaire à } [BC] \text{ donc } [AH] \text{ perpendiculaire à } [BC] \text{ (Argument 1)}$
$\overline{BH} = 2 \overline{OB'} \Rightarrow (BH) \text{ et } (OB') \text{ sont parallèles. } (OB') \text{ perpendiculaire à } [AC] \text{ donc } [BH] \text{ perpendiculaire à } [AC] \text{ (Argument 2)}$
$\overline{CH} = 2 \overline{OC'} \Rightarrow (CH) \text{ et } (OC') \text{ sont parallèles. } (OC') \text{ perpendiculaire à } [AB] \text{ donc } [CH] \text{ perpendiculaire à } [AB] \text{ (Argument 3)}$
$H \in 3 \text{ hauteurs du triangle, c'est donc l'orthocentre (Argument 4)}$

Fig. 7.22 – Argumentaire exposé au tableau pour répondre à la question 3.2

Nous relevons que dans cette question 3.2, l’argumentaire de validation exposé au tableau est composé de plusieurs arguments. Les garanties des trois premiers arguments sont soigneusement explicitées à l’oral et relèvent de la géométrie synthétique. Les arguments 1, 2 et 3 sont donc de type formel et chacun est organisé de façon linéaire. Ils sont développés parallèlement et leur conclusion devient l’une des données de l’argument 4.

Cet argumentaire de validation possède une structure globale non linéaire. Néanmoins, l'ensemble des arguments nécessaires pour répondre à la question 3.2 ne sont pas tous présentés dans l'argumentaire écrit ci-dessus. Nous pensons que le professeur D ne tient pas à tout rédiger dans l'argumentaire et à tout expliciter à l'oral. Cela s'explique sans doute par le fait que le travail de validation est trop compliqué et trop long pour des élèves de la classe de 2^{nde}, qui ont d'ailleurs formulé à plusieurs reprises dans la séance leurs difficultés à comprendre l'objectif visé dans ce travail de validation (pour l'ensemble des questions de l'exercice). Par la suite, le professeur clôt cette séance de travail de validation en insistant sur la différence entre conjecturer une propriété à partir de l'observation de figures et démontrer cette propriété. Il fait remarquer aux élèves que, dans cet exercice, la figure n'a pas été souvent utilisée pour démontrer. Il conclut que malgré leur complexité, les outils de la géométrie vectorielle (en particulier la décomposition de vecteurs à l'aide de la relation de Chasles) sont importants pour élaborer une démonstration sans utiliser la figure :

Professeur D	Je suis bien d'accord, vous n'êtes pas habitués, les démonstrations avec les vecteurs sont bien compliquées, c'est une méthode à acquérir, mais l'intérêt ici est que l'on a travaillé sans se servir de la figure. Donc on vient de démontrer que les points O , G et H sont alignés sur la droite d'Euler.
--------------	--

L'argumentaire de validation élaboré dans chacune des deux questions étudiées précédemment est constitué de deux types d'arguments. L'un est formel avec une garantie issue de la géométrie synthétique. L'autre type d'argument est basé sur des calculs vectoriels, dont les garanties ne sont pas énoncées. Ces calculs sont rédigés dans l'argumentaire de validation avec un « style calculatoire » particulier.

Pour l'ensemble des trois questions de l'exercice étudié dans l'ETM_P idoine, le travail de validation mis en place par le professeur D est similaire. En effet, au travers de l'analyse de cet espace de travail, nous constatons que les validations approuvées par le professeur D sont constituées principalement d'arguments soit de type formel, soit basés sur des calculs vectoriels formulés avec un « style calculatoire » propre au sous-domaine de la géométrie vectorielle.

Malgré le découpage en questions, la démonstration de la conjecture est une tâche complexe pour les élèves de la classe de 2^{nde}. Celle-ci nécessite un savoir-faire « technique » (au sens de Chevallard) qui relève du calcul vectoriel (initié à ce niveau de classe). C'est une tâche non routinière en classe de 2^{nde}. Elle engendre chez les élèves des difficultés portant sur les écritures vectorielles. Pour contourner ces difficultés, le professeur D a recours aux traitements sémiotiques sur les figures. À ces difficultés, s'ajoutent de nombreux « actes de silence » (des élèves), incitant le professeur D à réduire les temps de recherche (jusqu'à les supprimer), et à prendre entièrement la responsabilité de la production de la validation. Cette gestion de travail de validation du professeur D peut être expliquée par

le niveau de complexité du problème traité dans l'ETM_G idoine.

Le travail de validation dans cet ETM_G idoine est orienté par le paradigme GII articulé avec le sous-domaine de la géométrie vectorielle. Ce travail de validation est également placé dans le plan [Sem-Dis] fortement orienté vers la dimension discursive (Dis). La validation produite dans cet ETM_G idoine a la forme d'un argumentaire de type démonstratif assisté par des calculs vectoriels. Notons que le travail de validation ainsi que la validation produite dans cet ETM_G idoine est en accord avec ce qui est attendu dans l'ETM_G de référence à ce niveau de classe.

3) La Comparaison de la validation dans les deux ETM_G idoines en classe de 2^{nde}

Le travail de validation mis en place par les professeurs C et D est à première vue similaire. Cette similarité réside dans l'usage de la dimension sémiotique dans le contexte de découverte de la validation et dans le discours de validation. Les deux professeurs utilisent davantage la formulation orale des arguments langagiers. Ils exposent à l'écrit uniquement les arguments basés sur des calculs. Cette forme de gestion du travail est une caractéristique du travail de la validation en géométrie dans l'espace (exercice donné dans la classe de 2^{nde} C) et dans la géométrie vectorielle (exercice donné dans la classe de 2^{nde} D). Certains arguments — qui garantissent (ou légitiment) l'argumentaire — ne sont pas toujours évoqués à l'écrit (et parfois pas même à l'oral). La raison de cette gestion est expliquée par la lourdeur de l'écriture, en particulier pour les élèves de la classe de 2^{nde}. Dans les deux cas étudiés, les tâches sont complexes mais également non routinière. En effet, dans l'une il est demandé de repérer des propriétés de la géométrie 2D sur la figure de la géométrie 3D (dont la représentation est en 2D). Dans l'autre cas, la tâche requiert un savoir-faire « technique » du calcul vectoriel. On résume cette comparaison des ETM_G idoines en classe de 2^{nde} dans le tableau suivant :

	ETM _G idoine en classe de 2 ^{nde} C	ETM _G idoine en classe de 2 ^{nde} D
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement heuristique pour découvrir le raisonnement de la validation. Raisonnement déductif.	Raisonnement heuristique pour découvrir le raisonnement de la validation. Raisonnement déductif assisté par des calculs vectoriels.
Paradigme(s)	GII	GII articulé avec le sous-domaine de la géométrie vectorielle.
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Discursive

TABLE 7.4 – La validation dans deux ETM_G idoines dans deux classes de 2^{nde}

	ETM _G idoine en classe de 2 ^{nde} C	ETM _G idoine en classe de 2 ^{nde} D
Circulation du travail de validation dans l'ETM	Clos sur (<i>Dis</i>)	[<i>Sem</i> – <i>Dis</i>] → <i>Dis</i>
Argument(s) employé(s)	Formel	Formel et assisté par des calculs vectoriels.
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration.	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration dont la structure déductive est prise en charge par le calcul vectoriel.

TABLE 7.5 – La validation dans deux ETM_G idoines dans deux classes de 2^{nde}

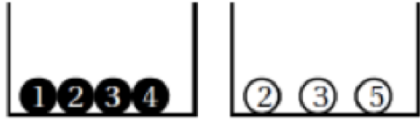
7.3 Les comparaisons des ETM_P probabilistes idoines

Dans cette section, il s'agit de mener la comparaison de la validation pratiquée par les professeurs dans l'enseignement des probabilités en classe de 3^e et de 2^{nde}. Nous rappelons que le professeur de la classe de 3^e A s'est désengagé au cours de l'expérimentation. Par conséquent, la comparaison de deux ETM_P probabilistes idoines au niveau de la 3^e n'a pas pu être réalisée. Dans cette section, nous analysons d'abord le travail de validation dans l'ETM_P idoine en classe de 3^e B puis nous analysons le travail de validation dans les deux ETM_P de la classe de 2^{nde}. Enfin, nous procédons à la comparaison entre les deux niveaux de classe 3^e et 2^{nde}. Ces analyses sont effectuées de la même manière que dans la section précédente (Les comparaisons des ETM_G idoines), à savoir l'analyse du point de vue de l'ETM_P idoine potentiel et du point de vue de l'ETM_P idoine effectif.

7.3.1 ETM_P idoine en classe de 3^e B

Dans cette séance observée, il s'agit de résoudre un exercice extrait d'un sujet de l'examen de fin d'année (Brevet des collèges, Polynésie, 2013). Plus précisément, le professeur B a décidé de conserver uniquement l'énoncé de l'exercice tel qu'il est fourni dans le sujet et de modifier l'ensemble des questions. L'énoncé de l'exercice proposé par le professeur B est alors formulé de la manière suivante :

Soit l'expérience aléatoire suivante :



- tirer au hasard une boule noire, noter son numéro ;
 - tirer au hasard une boule blanche, noter son numéro ;
 - puis calculer la somme des 2 numéros tirés.

1. Donner les issues possibles de l'expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité de chacune des issues.

Fig. 7.23 – Enoncé de l'exercice

Analyse de l'ETM_P idoine potentiel

L'expérience aléatoire, telle qu'elle est décrite ici, consiste à effectuer un premier tirage de boules dans une urne (notée U_1) contenant quatre boules noires numérotées 1, 2, 3, 4. Puis d'effectuer un deuxième tirage de boules dans une autre urne (notée U_2) contenant trois boules blanches numérotées 2, 3 et 5. On a donc une expérience aléatoire à deux épreuves. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 5\}$. Les issues de cette expérience aléatoire sont les résultats des deux tirages. Ces résultats sont les couples suivants : (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5).

Dans la première question, il s'agit de décrire « *les issues possibles de l'expérience aléatoire* ». Or, la formulation de cette question n'est pas correcte. En fait, il s'agit de décrire non pas les issues de l'expérience aléatoire (autrement dit les 12 couples de tirage) mais plutôt les sommes possibles des deux numéros tirés, qui sont $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Nous avons donc une ambiguïté concernant le mot « issue ». Cette ambiguïté peut être source de difficulté dans le traitement de l'exercice.

Par ailleurs, on relève plusieurs implicites dans l'énoncé de l'exercice. Le premier implicite porte sur le terme « *au hasard* ». Ce terme traduit implicitement que les boules noires de U_1 ont la même probabilité égale à $\frac{1}{4}$, et les boules blanches de U_2 ont la même probabilité égale à $\frac{1}{3}$. Le deuxième implicite porte sur le fait que les deux tirages (deux épreuves) sont indépendants. Selon Parzysz (2014), le traitement des situations aléatoires du type tirage de boules (mais également lancer de dés ou de pièces), s'effectue implicitement dans un modèle canonique, en général celui de l'équiprobabilité. Il en résulte un dernier implicite concernant l'équiprobabilité des résultats de tirages. Les couples de tirages ont tous la même probabilité égale à $\frac{1}{12}$.

La résolution de cet exercice par des élèves de la classe de 3^e peut donc présenter des difficultés. Ainsi, si on se place dans un niveau scolaire plus avancé (par exemple en classe de 1^{re}), le traitement de cet exercice peut être effectué à l'aide des variables aléatoires (discrètes) :

- Sur l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 5\}$ on définit une variable aléatoire X qui prend comme valeurs les sommes des numéros tirés :
 $X : \Omega \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est déterminée sur $X(\Omega)$ et est donnée par la liste des probabilités : $P(X = 3)$, $P(X = 4)$, $P(X = 5)$, $P(X = 6)$, $P(X = 7)$, $P(X = 8)$, $P(X = 9)$.

Pour déterminer ces probabilités on peut par exemple utiliser le tableau ci-dessous où la première colonne représente les numéros des trois boules blanches de U_2 et la première ligne représente les numéros des quatre boules noires de U_1 :

+	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
5	6	7	8	9

TABLE 7.6 – Les sommes des deux numéros tirés déterminées à l'aide d'un tableau

Chacune des 12 cases du tableau a la même probabilité égale à $\frac{1}{12}$. En repérant les occurrences $X = k$ avec $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et en utilisant la formule de Laplace, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous et vérifie $\sum_{k=3}^9 P(X = k) = 1$:

k	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On peut également utiliser un arbre pondéré en représentant sur les marges les sommes des numéros tirés :

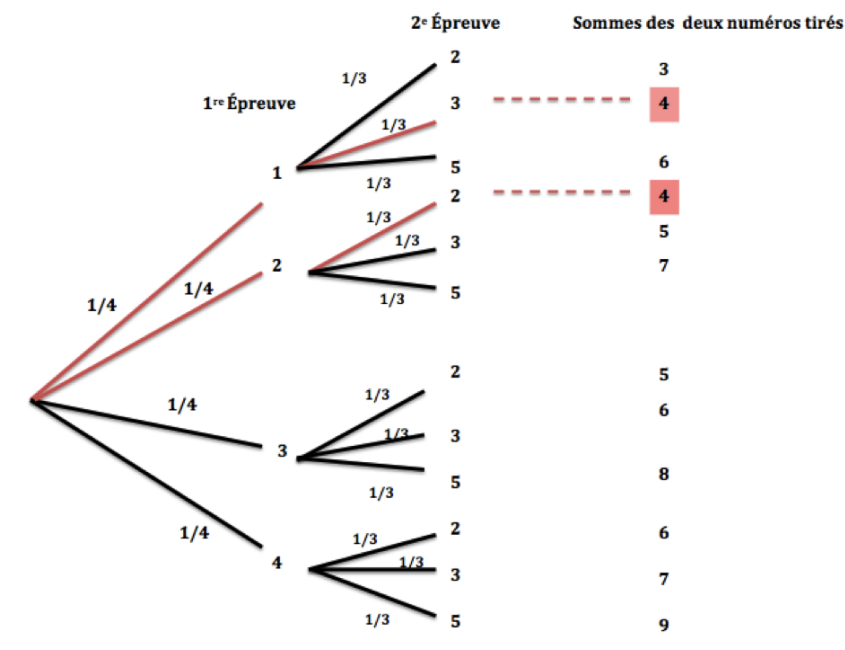


Fig. 7.24 – Les sommes des deux numéros tirés

L'arbre ainsi construit illustre le premier et le second tirage, et respecte l'ordre de lecture de l'énoncé (de gauche vers la droite : l'urne des quatre boules noires, puis l'urne des trois boules blanches). Or l'ordre du tirage n'a ici pas d'importance. On aurait pu construire l'arbre en commençant par l'urne des trois boules blanches vers celle des quatre boules noires. Pour calculer la probabilité de chacune des sommes, il suffit de repérer les chemins conduisant à la somme considérée. Si on cherche par exemple la probabilité de la somme 4, deux chemins conduisent (cf. l'arbre ci-dessus) à cette somme, la probabilité est alors égale à : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$, soit $\frac{1}{6}$. Nous pouvons aussi utiliser directement un arbre des possibles puisque la probabilité de chacun des chemins est égale à $\frac{1}{12}$. Il suffit de dénombrer les chemins qui conduisent à la somme considérée et d'utiliser la formule de Laplace pour calculer les probabilités de chacune des sommes.

Si on se place au niveau de la classe de 3^e, on a « le phénomène de la variable aléatoire cachée » puisque la variable aléatoire X , définie précédemment, n'est pas disponible à ce niveau de classe. Il en résulte que la détermination de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est réduite à la détermination de la probabilité d'obtenir chacune des sommes 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Il convient donc de calculer des probabilités sur l'ensemble $X(\Omega)$. Or, comme nous l'avons souligné, la formulation de la première question peut induire des confusions. Il serait plus judicieux de la reformuler en demandant, par exemple de déterminer toutes les sommes possibles de deux numéros tirés au lieu de « donner les issues possibles de l'expérience aléatoire ».

Une façon de traiter cet exercice en classe de 3^e est d'utiliser un arbre pondéré identique à celui construit précédemment (ou un arbre des possibles). Bien que l'arbre pondéré ne figure pas officiellement dans le programme de la classe de 3^e ou de la classe de 2^{nde}, son introduction (suggérée par les documents ressources) à ces deux niveaux de classe reste à l'appréciation du professeur. Dans le cas où l'arbre pondéré est utilisé, il est important de bien dissocier l'ensemble des sommes possibles de celui des résultats de l'expérience aléatoire. Or, comme nous allons l'observer plus loin chez le professeur B, la non distinction de ces deux ensembles peut entraîner des confusions portant sur les sommes possibles des deux numéros tirés et les résultats de tirages. Ainsi, l'usage d'un arbre pondéré (ou même d'un arbre des possibles) ne semble dans ce cas pas pertinent.

Une autre façon de traiter cet exercice est d'utiliser un tableau à double entrée. Il s'agit de construire un tableau identique à celui construit précédemment. Ce tableau permet alors d'obtenir toutes les sommes possibles 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Pour déterminer la probabilité de chacune de ces sommes, on repère (en les entourant par exemple) le nombre de fois que chacune d'elles apparaît dans le tableau. En supposons que toutes les cases du tableau ont la même probabilité égale à $\frac{1}{12}$ et en utilisant la formule de Laplace, on en déduit que la probabilité de chacune des sommes 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 est respectivement $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{12}$. Nous pensons que l'usage du tableau à double entrée serait plus adéquat puisque son usage suscite, selon nous, moins d'ambiguïté concernant le terme « issue » comme nous allons le voir dans l'analyse de l'ETM_P de la classe de 2^{nde} D.

L'ETM_P idoine potentiel est constitué des objets matériels « évoqués virtuellement » (les urnes U_1 et U_2 , les trois boules blanches, les quatre boules noires) et des actions sur ces objets (tirages de boules, la grandeur à laquelle on s'intéresse (la probabilité des issues de l'événement considéré)). Le travail de validation fait intervenir différents registres : le langage naturel, numérique (l'ensemble des rationnels), le registre tableau (ou le registre graphique si l'arbre est choisi). Le travail de validation est orienté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2).

Analyse de l'ETM_P idoine effectif

Le professeur B reproduit les deux urnes données dans l'exercice au tableau. Il prend soin de bien décrire l'expérience aléatoire dont il est question, en insistant sur le fait que la boule tirée n'est pas remise dans l'urne. Les élèves sont répartis en groupe de trois et il leur est laissé 10 minutes pour réaliser la tâche demandée.

1) Traitement de la première question.

L'ensemble des élèves ont utilisé la même méthode pour déterminer les sommes possibles des deux numéros tirés. Cette méthode consiste à écrire « à la main » toutes les sommes possibles. Bien que cette méthode soit correcte et qu'elle permette d'obtenir l'ensemble des issues, le professeur B a néanmoins incité les élèves à formuler une autre méthode plus

rapide. Celle-ci porte sur l'usage du tableau à double entrée :

Professeur B	Est-ce que vous pensez que c'est possible de présenter ces résultats de façon à les voir le plus vite possible ? De manière différente ? Un peu mieux présentés ?
<i>Silence complet</i>	

Pour surmonter cet « acte de silence », le professeur prétend que dans une autre classe de troisième, une méthode utilisant un tableau à double entrée lui a été suggérée. Il propose alors aux élèves de construire ce tableau⁴ et de le remplir :

Blanche			
Noir	2	3	5
1	3	4	6
2	4	5	7
3	5	6	8
4	6	7	9

Fig. 7.25 – Le tableau des sommes possibles présenté par le professeur B

À l'aide de ce tableau à double entrée, le professeur B fait calculer aux élèves les sommes des deux numéros tirés et leur fait constater l'ensemble des sommes possibles. Ainsi, tel qu'il est utilisé par le professeur B, le tableau à double entrée a deux statuts. Le premier statut est celui d'outil technologique car il permet de calculer toutes les sommes de deux numéros tirés. Le deuxième statut est celui d'outil sémiotique qui permet de visualiser toutes les sommes possibles.

4. Pour des soucis de lisibilité nous avons dû reconstruire le tableau

Dans le modèle simplifié de Toulmin, l'argument (noté argument 1) construit par le professeur B pour répondre à la première question peut être éventuellement représenté comme suit :

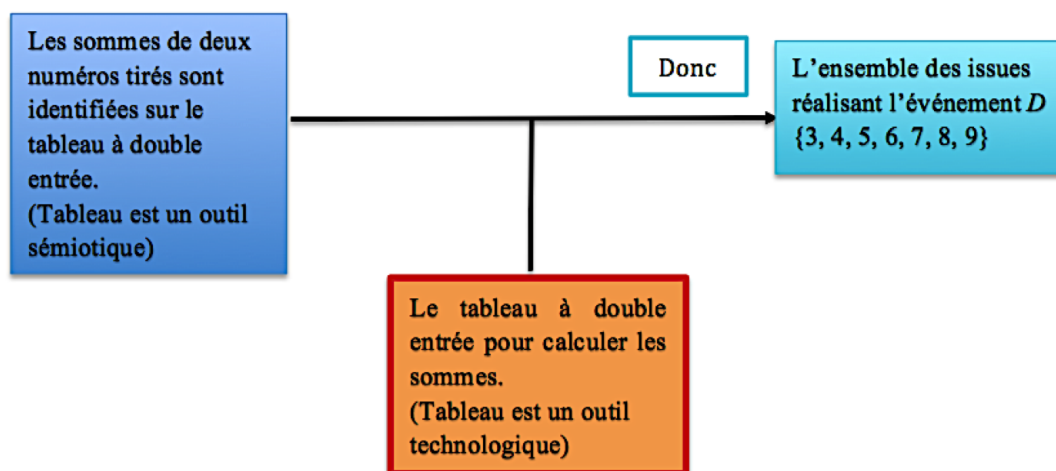


Fig. 7.26 – La structure de l'argument 1 construit par le professeur B

Dans cet argument, le tableau à double entrée constitue à la fois la donnée et la garantie qui permet le passage de la donnée à la conclusion.

2) *Traitement de la deuxième question.*

Le professeur B sollicite certains élèves pour donner la probabilité de chacune des sommes 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Alors qu'il aurait pu utiliser le tableau à double entrée pour traiter cette question, il a décidé d'utiliser un arbre pondéré. Les réponses des élèves ne satisfont pas le professeur B car elles s'appuient sur le tableau produit dans la première question. Bien que ces réponses soient valables au niveau de l'ETM_P idoine potentiel, le professeur B décide de les rejeter comme mode de validation et privilégie les réponses qui s'appuient sur les arbres pondérés. Mais, à sa grande surprise, il constate qu'aucun élève n'a fait appel à l'arbre pondéré. Précisons que dans cette classe, l'arbre pondéré est très souvent utilisé par le professeur B. C'est pourquoi le professeur B profite de cette occasion pour rappeler aux élèves l'intérêt et la pertinence d'utiliser un arbre pondéré pour répondre aux deux questions de cet exercice :

Professeur B	Imaginez l'exercice où je vous dis : l'exercice est le suivant, on ajoute une troisième urne qui contient des boules rouges numérotées 1, 4, 3, 5 . On tire une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge, et on fait la somme des trois numéros des boules tirées. Trouver toutes les issues possibles. Et Déterminer la probabilité de chacune des issues. On fait donc le même exercice, sauf que je rajoute une urne. Est- ce que vous allez pouvoir me faire votre méthode de la somme que vous avez fait auparavant ?
Elèves	Oui.
Professeur B	Mais ça risque de prendre un peu de temps ?
Elève 7	Avec un tableau ?
Professeur B	Cela va être difficile car il y a trois urnes. Imaginez une représentation qui nous permettrait de voir tout ça d'un coup. Vous ne voyez pas un moyen de dessiner ce qui se passe. Non ?
<i>Silence complet</i>	

Les élèves n'ont pas identifié la représentation à laquelle le professeur fait référence, ce qui se traduit à nouveau par un « acte silence ». Le professeur décide alors de donner directement cette « représentation ». Il construit un arbre pondéré et écrit dans les marges toutes les sommes des deux numéros tirés (déjà déterminées dans la première question). L'arbre ainsi construit illustre uniquement les tirages dans les deux premières urnes. La probabilité de chacune des issues recherchées est obtenue en utilisant les propriétés de l'arbre pondéré :

Professeur B	La probabilité d'avoir 3 par exemple ?
Elève 12	$\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{3}$.
Professeur B	$\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{3}$, la probabilité d'avoir 3 c'est $\frac{1}{12}$. Comment on trouve le $\frac{1}{12}$ avec le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{3}$?
Elève 12	On les multiplie.
Professeur B	Oui on les multiplie. Donc, quand on a un arbre de probabilités on multiplie les probabilités le long des branches (Garantie) . On voit que sur chacune des branches on a les mêmes probabilités, mais ce n'est pas forcément le cas. On verra dans d'autres cas que sur les branches on n'a pas forcément les mêmes probabilités, et on verra comment on multiplie sur chacune des branches.

La trace écrite de la correction de la deuxième question exposée par le professeur B se présente comme suit :

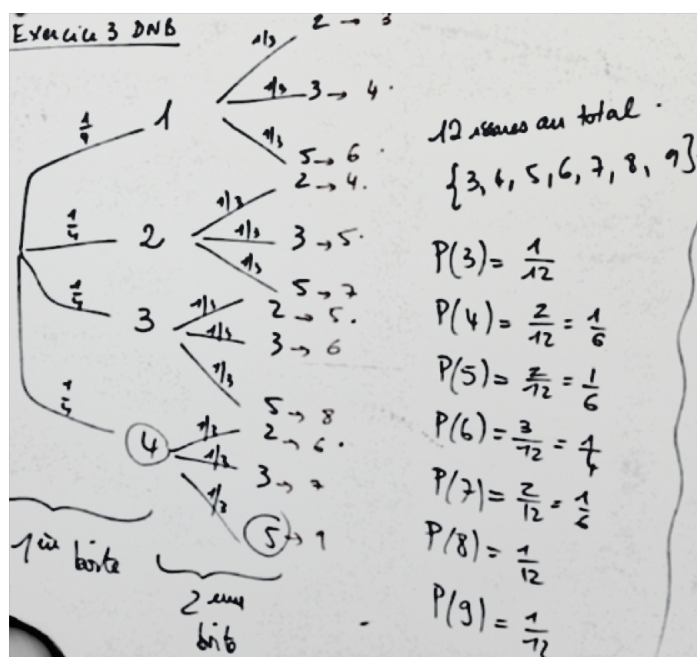


Fig. 7.27 – La trace écrite de la correction de la deuxième question

On constate que dans la trace écrite de la correction de la deuxième question exposée par le professeur B, il est écrit qu'il y a « 12 issues au total, $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ». Cela traduit une confusion (comme nous l'avons signalé lors de l'analyse de l'ETM_P potentiel) chez le professeur B entre les résultats de l'expérience aléatoire (ensemble Ω) et les sommes des deux numéros tirés (ensemble $X(\Omega)$). Cette confusion peut être due au fait que ce professeur prend appui sur l'arbre pondéré pour effectuer les calculs. Les élèves n'ont pas montré cette confusion puisqu'ils ont utilisé le tableau.

En s'appuyant sur l'arbre pondéré, le professeur B extrait les données nécessaires pour calculer les probabilités de chacune des sommes possibles de la manière suivante : il écrit toutes les sommes sur les marges de l'arbre puis, pour chacune des issues, identifie les chemins conduisant à chacune des issues. Enfin, il calcule les produits des probabilités rencontrées sur les chemins. De la même manière que le tableau à double entrée, l'arbre pondéré — tel qu'il est utilisé dans le traitement de cette deuxième question — possède deux statuts. Le premier est celui d'outil technologique qui permet de calculer les sommes et la probabilité de chacune des sommes. Le deuxième statut est celui d'outil sémiotique qui permet de visualiser les sommes sur les marges (mais aussi les probabilités de chacune des boules). Dans le modèle simplifié de Toulmin, l'argument (noté argument 2) construit par le professeur B pour répondre à la deuxième question peut être éventuellement représenté comme suit :

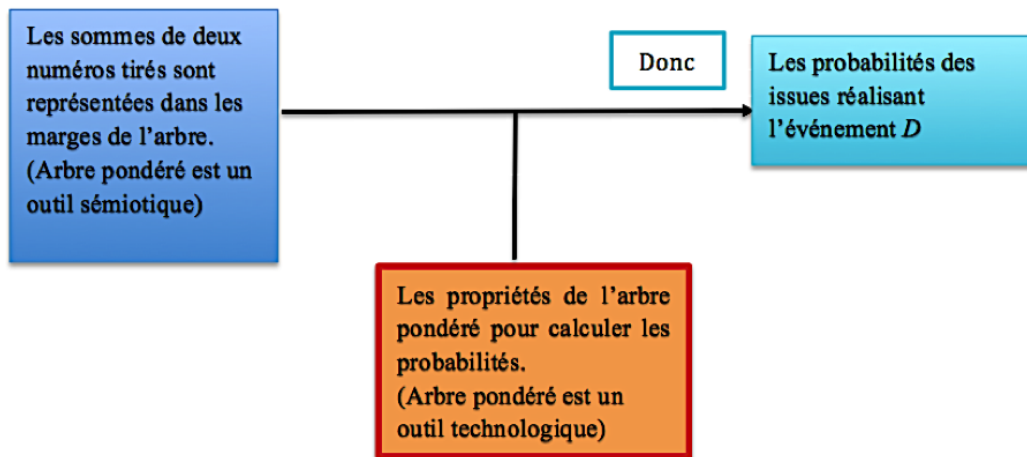


Fig. 7.28 – La structure de l’argument 2 construit par le professeur B

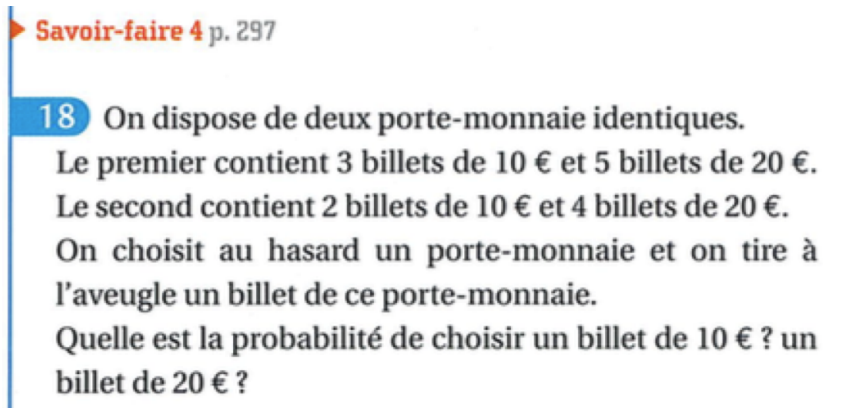
Le professeur B utilise l’arbre pondéré pour représenter l’expérience aléatoire ainsi que les sommes de deux numéros tirés (dans les marges). L’arbre pondéré est également utilisé pour calculer la probabilité de chacune des sommes. Tel qu’il est utilisé par le professeur B, l’arbre pondéré apparaît à la fois comme un outil sémiotique sur lequel les données (de l’argument 2) sont extraites et comme un outil technologique de calcul des probabilités, avec les règles de calcul justifiées implicitement par les propriétés sous-jacentes à l’arbre pondéré. L’arbre apparaît comme un outil théorique. Ainsi, l’usage de l’arbre pondéré déclenche, par les interactions des trois genèses, la circulation du travail de validation à travers les plans de l’ETM_P idoine, produisant un travail mathématique (de validation) complet (Kuzniak, Nechache, Drouhard, 2016).

L’argumentaire de validation construit et institutionnalisé par le professeur B pour répondre à l’exercice est fondé sur un raisonnement de type « diagrammatique », et est constitué des arguments 1 et 2 présentés ci-dessus. Ces arguments peuvent être qualifiés d’arguments sémiotiques par l’usage des registres de représentation (tableau à double entrée et arbre pondéré). Ils peuvent également être qualifiés d’arguments formels car les garanties sont par définition intégrées dans ces registres. Ils peuvent être finalement qualifiés d’arguments technologiquement assistés par des calculs formulés avec « un style calculatoire » propre au registre utilisé et au domaine des probabilités. D’où la complexité de l’argumentaire de validation construit par le professeur B. Le raisonnement utilisé est assisté par les registres de représentation sémiotique ainsi que par les calculs. La complexité de l’argumentaire ne permet pas d’identifier clairement sa structure globale (structure linéaire ou non). Cependant, nous pouvons affirmer que la validation institutionnalisée est un argumentaire de type non démonstratif. Le travail de validation circule dans les différents plans verticaux de l’ETM_P idoine et est orienté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2).

7.3.2 ETM_P idoines en classes de 2^{nde} C et de 2^{nde} D

1) ETM_P idoine en classe de 2^{nde} C

Cette séance porte sur la correction d'un exercice qui a été travaillé à la maison, extrait du manuel Odyssée 2^{nde} (numéro 18, p. 308). L'énoncé de cet exercice est formulé comme suit :



Savoir-faire 4 p. 297

18 On dispose de deux porte-monnaie identiques.
Le premier contient 3 billets de 10 € et 5 billets de 20 €.
Le second contient 2 billets de 10 € et 4 billets de 20 €.
On choisit au hasard un porte-monnaie et on tire à l'aveugle un billet de ce porte-monnaie.
Quelle est la probabilité de choisir un billet de 10 € ? un billet de 20 € ?

Fig. 7.29 – Énoncé de l'exercice

Analyse de l' ETM_P idoine potentiel

L'expérience aléatoire décrite dans l'exercice consiste à choisir (au hasard) un des deux porte-monnaie (que l'on note \mathbf{PM}_1 et \mathbf{PM}_2) contenant respectivement trois billets de 10 euros et cinq billets de 20 euros, puis deux billets de 10 euros et 4 billets de 20 euros. On tire ensuite un billet du porte-monnaie choisi. On a donc une expérience aléatoire à deux épreuves qui ne sont pas indépendantes.

L'objectif de l'exercice est de déterminer la probabilité des deux événements A et B que l'on définit de la façon suivante :

A : « Obtenir un billet de 10 euros » et B : « Obtenir un billet de 20 euros ».

Si on note $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ et $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5$ respectivement les billets de 10 euros et de 20 euros du porte-monnaie \mathbf{PM}_1 , et si l'on note $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, respectivement les billets de 10 euros et de 20 euros du porte-monnaie \mathbf{PM}_2 , alors l'univers associé à cette expérience aléatoire est constitué des 14 couples suivants :

$(\mathbf{PM}_1, \mathbf{D}_1), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{D}_2), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{D}_3), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{V}_1), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{V}_2), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{V}_3), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{V}_4), (\mathbf{PM}_1, \mathbf{V}_5), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{d}_1), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{d}_2), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{v}_1), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{v}_2), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{v}_3), (\mathbf{PM}_2, \mathbf{v}_4)$.

À la lecture de l'énoncé, on relève un implicite portant sur les deux termes « *au hasard* » et « *à l'aveugle* ». Ces deux termes traduisent implicitement que les porte-monnaie ont la même probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être choisis, et que dans chacun des porte-monnaie, les billets ont la même probabilité d'être tirés. Ainsi, dans le porte-monnaie \mathbf{PM}_1 (respectivement \mathbf{PM}_2), les huit (respectivement les six) billets ont la même probabilité égale à $\frac{1}{8}$ (respectivement $\frac{1}{6}$).

Étant donnée que l'expérience aléatoire mise en jeu est constituée de deux épreuves successives qui ne sont pas indépendantes, une façon de traiter l'exercice est d'utiliser un arbre pondéré (voir la figure ci-dessous) pour modéliser l'expérience aléatoire et effectuer les calculs.

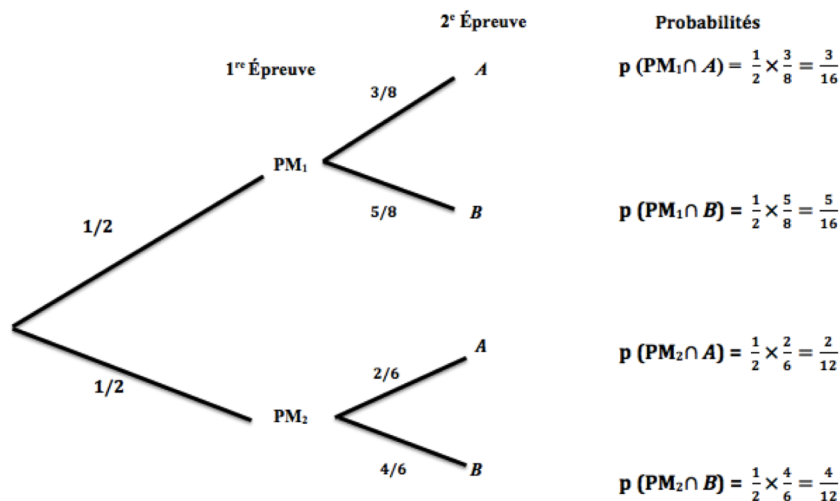


Fig. 7.30 – L'arbre pondéré modélisant l'expérience aléatoire

La probabilité de l'événement A est : $p(A) = p(PM_1 \cap A) + p(PM_2 \cap A) = \frac{3}{16} + \frac{2}{12} = \frac{17}{48}$.
 La probabilité de l'événement B est : $p(B) = p(PM_1 \cap B) + p(PM_2 \cap B) = \frac{5}{16} + \frac{4}{12} = \frac{31}{48}$.
 L'usage de l'arbre pondéré pour résoudre un tel exercice est également suggéré par les auteurs du manuel dont il est extrait. Les auteurs ont fait le choix d'introduire l'arbre pondéré et de développer un savoir faire lié aux calculs des probabilités à l'aide de l'arbre. Ce savoir implique alors l'usage de raisonnement de type « diagrammatique ». C'est pourquoi, les auteurs considèrent que cet exercice est un exercice d'application de ce savoir faire. La manière de construire un arbre pondéré et de l'utiliser pour effectuer les calculs est présentée par ces auteurs (cf. Fig. 7.31)

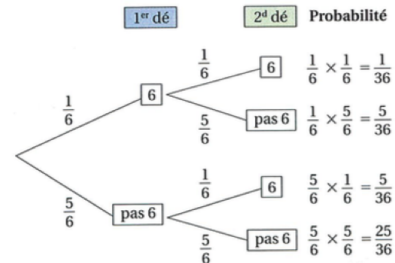
Savoir-faire 4

Modéliser avec un arbre pondéré pour calculer une probabilité

ÉNONCÉ On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un et un seul 6 ?

SOLUTION

L'expérience peut être modélisée par l'arbre de probabilités suivant :



L'événement A : « un et un seul des deux dés vaut 6 » est composé des deux événements disjoints (6 ; pas 6) et (pas 6 ; 6).

Sa probabilité est donc la somme de ces deux probabilités : $p(A) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

MÉTHODE

On peut considérer que chaque lancer de dé a deux issues qui ne sont pas équiprobables : obtenir 6 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et ne pas obtenir 6 avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

On représente alors la situation par un arbre pondéré.

On peut ainsi calculer les probabilités de chacune des issues de l'arbre en effectuant le produit des probabilités pondérant les branches.

Fig. 7.31 – L'arbre pondéré proposé par les auteurs du manuel *Odyssée* (p. 297)

De la même manière que dans l'analyse de l'ETM_P idoine effectif de la classe de 3^e, l'usage de l'arbre pondéré va induire *a priori* une circulation du travail de validation au sein des trois plans verticaux de l'ETM_P idoine potentiel.

Comme nous l'avons souligné, l'introduction de l'arbre pondéré au niveau de la classe de 2^{nde} n'est pas exigée par l'institution. Son introduction dépend donc des choix des professeurs. Dans le cas où l'arbre pondéré n'est pas abordé, on peut utiliser un arbre des possibles pour dénombrer toutes les issues ; ce qui à notre sens est trop long. L'usage d'un arbre des possibles peut également encourager les élèves à considérer que tous les chemins ont la même probabilité. En effet, comme nous allons le constater plus loin (dans l'analyse de l'ETM_P idoine effectif), certains élèves considèrent que les 14 couples d'issues possibles sont équiprobables. Ce constat traduit la mauvaise conception de l'équiprobabilité (biais d'équiprobabilité⁵) chez ces élèves.

L'ETM_P idoine potentiel est constitué des objets matériels « évoqués virtuellement » (les billets et les porte-monnaie) et des actions sur les objets (choix des porte-monnaie et tirage des billets). Le travail de validation fait intervenir différents registres : le langage naturel, numérique (l'ensemble des rationnels) et le registre graphique, qui est celui de l'arbre. Le travail de validation est orienté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2). Dans le cas où la méthode envisagée est celle utilisant un arbre pondéré, le travail de validation va circuler *a priori* à travers les trois plans de l'ETM_P. Dans le cas où l'on fait appel à la simulation, le travail de validation va circuler *a priori* dans le plan [Ins-Dis].

5. cf. le chapitre 2 de la partie 1.

Analyse de l'ETM_P idoine effectif

Un élève (élève 1) est invité à écrire sa réponse au tableau. Il construit un arbre non pondéré qui permet d'illustrer la situation puis donne la réponse sous forme de fraction.

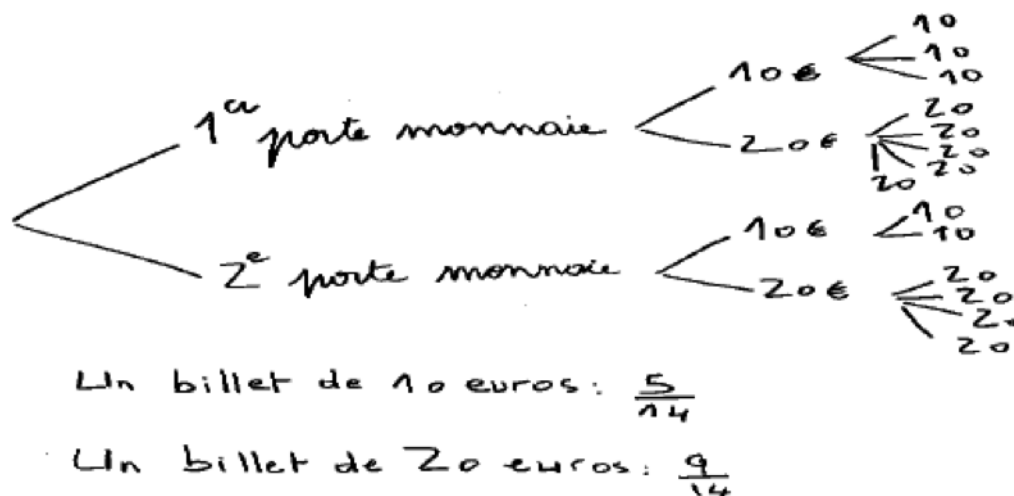


Fig. 7.32 – Réponse de l'élève 1 écrite au tableau

L'élève 1 donne des résultats numériques ($\frac{5}{14}$ et $\frac{9}{14}$) sans justification, qui supposent l'utilisation de l'arbre comme outil non seulement de traitement de la situation mais également comme outil technologique pour dénombrer les occurrences. L'analyse de la réponse de cet élève laisse penser que le travail de validation s'est effectué dans le plan [Sem-Ins]. L'entrée dans la tâche de résolution se fait alors par la dimension sémiotique permettant de traduire le problème sous forme d'un arbre. Il est utilisé comme outil pour construire la solution du problème donné. Le professeur C demande ensuite à l'élève 1 d'expliquer sa démarche pour répondre à l'exercice. En particulier, d'expliquer les deux résultats écrits au tableau. Pour répondre, l'élève 1 se contente de lire l'arbre sans donner la moindre justification.

Élève 1	Eh ! J'ai pris les deux porte-monnaie comme ça. Puis dans le premier porte-monnaie il y a 3 billets de 10 et 4 billets de 20 euros...
---------	---

La question du professeur C porte sur la justification des réponses écrites au tableau, à savoir : $\frac{5}{14}$ et $\frac{9}{14}$, alors que l'élève 1 explique la manière dont il a construit l'arbre. N'ayant pas obtenu satisfaction, le professeur C instaure un dialogue sous forme de questions/réponses avec l'élève.

Professeur C	Alors pourquoi 5 sur 14 ? Pourquoi 14 ?
Élève 1	Car il y a 8 billets dans le premier porte-monnaie et 6 billets dans le deuxième, donc 14 billets au total.

Dans le reste du dialogue, le professeur C cherche à expliciter l'hypothèse de l'équiprobabilité des 14 billets que l'élève 1 a considérés et à décrire l'univers de l'expérience aléatoire :

L'équiprobabilité des 14 billets

Professeur C	D'accord. Et est-ce qu'il y a des chances supérieures d'attraper un billet de 20 ou un billet de 10 ?
Élève 1	Il y a plus de billets de 20 que de billets de 10.
Professeur C	Oui effectivement. Mais lorsqu'on fait un tirage ici, on dit que le tirage est comment ?
Élève 1	Aléatoire.
Professeur C	Oui. Et les issues entre elles, elles sont comment ?
Élève 1	Elles sont aléatoires aussi.
Professeur C	Oui, quand une issue n'a pas plus de chance d'apparaître qu'une autre comment dit-on ? Vous vous rappelez du mot ?
Professeur C	Comment on dit quand les issues ont la même chance de sortir ?
Élèves	On dit qu'elles sont équiprobables.

Explicitation de l'univers de l'expérience aléatoire

Professeur C	Cet exercice, qui est un de nos premiers exercices, on va lui donner un cadre, d'où vient le 14, ce 5... Alors, le mot univers il faudrait qu'il apparaisse. Pourriez- vous me dire ce que c'est l'univers ?
Élèves	L'ensemble des issues.
Professeur C	Oui, en l'occurrence ici c'est quoi l'univers ?
Élève 1	C'est l'ensemble des billets.
Professeur C	D'accord, vous prenez la correction.

Le professeur C se centre tout au long de la correction de l'exercice sur la justification des deux résultats ($\frac{5}{14}$ et $\frac{9}{14}$) et en particulier, sur l'explicitation de l'univers de l'expérience ainsi que l'hypothèse de l'équiprobabilité, au point de ne pas constater la non-validité des résultats fournis par l'élève 1. Pour chacun des événements A : « Obtenir un billet de 10 euros » et B : « Obtenir un billet de 20 euros », la probabilité obtenue est égale respectivement à $\frac{5}{14}$ et $\frac{9}{14}$ alors qu'elle devrait être $\frac{17}{48}$ et $\frac{31}{48}$. La solution proposée par l'élève 1 consiste à produire un arbre des possibles et non un arbre pondéré, à dénombrer les occurrences en « vidant » les deux porte-monnaie, à regrouper l'ensemble des billets qu'ils contiennent. L'élève 1 attribue à chacun des 14 billets une probabilité de $\frac{1}{14}$ et il calcule les probabilités des événements A et B en utilisant la formule de Laplace. Cet élève semble avoir une conception erronée en ce qui concerne le biais d'équiprobabilité, d'où l'erreur constatée dans son raisonnement. Le professeur C aurait dû focaliser le travail de validation sur cette erreur au lieu de porter toute son attention sur la définition de l'espace probabiliste. L'erreur de l'élève 1 est due à une mauvaise identification du modèle

puisque celui qui a été choisi est celui du dénombrement (avec l'usage d'un arbre des possibles) et non celui d'équiprobabilité. Précisons qu'à ce niveau scolaire, les situations de dénombrement sont habituellement modélisées par l'équiprobabilité. Ici, l'équiprobabilité porte d'abord sur le choix du porte-monnaie, ensuite sur le choix du billet dans chacun des porte-monnaie. Cette erreur est également due à une mauvaise identification de l'expérience aléatoire, puisque l'élève remplace l'expérience décrite par une autre, en rassemblant tous les billets des deux porte-monnaie puis en tirant un billet au hasard. La différence entre les deux expériences serait plus visible si par exemple, l'un des porte monnaie contenait deux billets et l'autre 20 billets. Conformément à l'ETM_P de référence, une simulation pourrait être envisagée pour aider l'élève à comprendre son erreur. Mais la simulation risque de ne pas être concluante vis à vis de l'erreur de l'élève puisque les valeurs obtenues par celui-ci, à savoir $\frac{5}{14}$ (environ 0,357) et $\frac{9}{14}$ (environ 0,642), sont assez proches respectivement de $\frac{17}{48}$ (0,354) et $\frac{31}{48}$ (environ 0,645), les valeurs que donnerait approximativement la simulation. Cela renvoie donc au choix des variables didactiques dans l'exercice proposé. En reprenant l'arbre des possibles construit par l'élève 1, on peut attirer l'attention des élèves sur le fait que les issues de l'expérience aléatoire ne sont pas équiprobables. On peut par exemple demander aux élèves si la probabilité qu'un billet de 10 euros tiré provienne du porte-monnaie PM_1 est la même que la probabilité qu'un billet de 10 euros tiré provienne du porte monnaie PM_2 .

Le raisonnement de l'élève 1 s'appuie exclusivement sur le traitement de l'arbre. Il l'utilise à la fois comme un ensemble de signes modélisant le problème posé, autrement dit comme un outil sémiotique et comme un outil technologique pour dénombrer les occurrences. Le raisonnement du professeur C s'appuie, lui, sur le référentiel théorique pour justifier les résultats obtenus par le calcul numérique. En effet, le professeur C insiste sur les justifications à fournir sur les probabilités obtenues par calcul et sur la rédaction du discours de validation d'un exercice de probabilité. C'est pourquoi, il présente aux élèves un style de discours écrit qu'ils doivent appliquer car selon lui, ce style de discours est valable pour la plupart des exercices relevant du domaine des probabilités.

Professeur C	Je pense qu'un exercice de probabilité n'est pas un exercice où il n'y a que des chiffres, et peut-être que l'idée est de justifier ce que vous faites. Alors ici on commence par bien repérer l'expérience aléatoire , et dire quel est l'univers . Un des critères pour arriver à savoir si son exercice de probabilité est correctement rédigé c'est de voir si on a bien répertorié l'univers, si on fait un arbre pour comprendre ce qu'est l'univers, et puis voir si les issues sont équiprobables, et enfin on rédige comme ça.
--------------	---

Le discours de la validation est alors rédigé (en noir et en italique) comme suit au tableau par le professeur C⁶ :

- *L'univers est constitué de 14 billets* (Donnée).
- *Chacune des issues ont [sic] la même chance d'apparaître, on est dans le cas d'équiprobabilité* (Garantie).
- *Il y a 5 possibilités d'obtenir un billet de 10 euros donc la probabilité est de $\frac{5}{14}$ et 9 possibilités d'obtenir un billet de 20 euros donc $\frac{9}{14}$* (Conclusion).

Ce professeur utilise un raisonnement partant de l'ensemble des 14 billets pour en déduire les deux probabilités d'événements cherchées. En supposant l'équiprobabilité des 14 billets, il utilise la formule de Laplace pour déduire les deux probabilités.

On peut représenter à l'aide du modèle simplifié de Toulmin l'argument construit par le professeur C de cette manière :

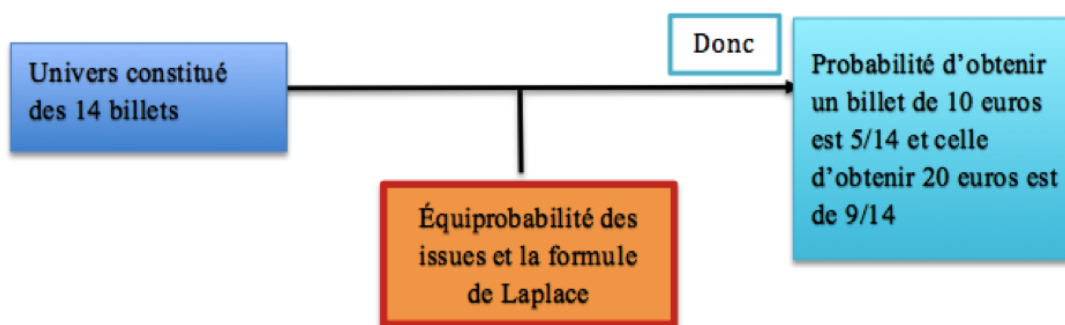


Fig. 7.33 – Structure de l'argument utilisé par le professeur C

L'argumentaire de validation construit par le professeur C est composé d'un argument de type formel formulé dans le langage naturel. La rédaction de cet argumentaire de validation au tableau par le professeur C suit vraisemblablement la structure du raisonnement déductif. Ainsi, la validation exposée par le professeur C est un argumentaire de type démonstratif. Le travail de validation mis en oeuvre dans l'ETM idoine par le professeur C consiste à déterminer l'univers associé à l'expérience aléatoire, à choisir le modèle puis à calculer, dans ce modèle (avec la formule de Laplace), la probabilité de l'événement considéré. Le professeur C privilégie la dimension discursive pour effectuer le travail de validation et élude complètement les autres dimensions. Ainsi, il place le travail de validation sur la dimension discursive alors que l'analyse de la réponse de l'élève 1 permet d'avancer que cet élève utilise l'arbre des possibles à la fois comme outil sémiotique pour représenter l'expérience aléatoire et pour visualiser les issues de cette expérience et comme outil technologique pour dénombrer les occurrences. Il en résulte que le travail de validation mis en oeuvre par l'élève 1 met en jeu l'interaction entre les deux dimensions :

6. Pour des soucis de lisibilité nous avons dû réécrire le discours.

sémiotique et instrumentale. En conséquence, le travail de validation tel qu'il est effectué par l'élève 1 se situe dans le plan [Sem-Ins]. De plus, l'argumentaire de validation élaboré par l'élève 1 comporte un argument sémiotique (usage de l'arbre des possibles) assisté par du dénombrement. Le travail de validation effectué et la validation produite par l'élève 1 ne sont pas en adéquation avec à ce qui est attendu par le professeur C dans l'ETM idoine effectif. Il en résulte des malentendus au sujet de la place du travail de validation, puisque pour l'élève le travail est situé uniquement dans le plan [Sem-Ins] alors que pour le professeur C le travail de validation est clos sur la dimension discursive. Ces malentendus sont liés à la nature du discours de la validation. Nous avons une différence entre le travail de validation et le discours de validation produits par l'élève 1 et ceux mis en oeuvre et institutionnalisés par le professeur C.

Cette différence est également constatée au regard de l'ETM_P idoine potentiel. Effectivement, le travail de validation envisagé dans l'ETM_P idoine potentiel fait appel à l'usage de l'arbre pondéré. Or par rapport aux auteurs du manuel duquel est extrait l'exercice étudié, le professeur C a fait le choix de ne pas aborder l'arbre pondéré à ce niveau de classe puisque selon lui l'usage de cet outil nécessite d'aborder la notion de probabilités conditionnelles, introduite en classe de terminale. Il en résulte une différence entre le travail de validation attendu dans l'ETM_P idoine potentiel et celui mis en oeuvre par le professeur C. Nous comprenons tout à fait le choix du professeur C. Une autre différence également relevée est celle du paradigme qui dirige le travail de validation. Dans l'ETM_P idoine potentiel ou dans le travail de validation de l'élève 1, c'est le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 qui dirige le travail de validation, alors que le professeur C semble exclure la possibilité d'un travail de validation dans P1, pour favoriser un travail de validation dans P2. Ces différences témoignent d'un hiatus entre l'ETM_P de référence et l'ETM_P idoine (et peut être même l'ETM_P personnel) du professeur C.

2) ETM_P idoine en classe de 2^{nde} D

L'exercice proposé dans la séance observée est distribué sur une feuille. L'énoncé de cet exercice est formulé comme suit :

On lance deux dés non truqués à six faces. Si on fait la somme des résultats des faces supérieures on a alors la probabilité de la somme 7 supérieure à celle d'obtenir la somme 11. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Analyse de l'ETM_P idoine potentiel

L'expérience aléatoire mise en jeu dans l'exercice proposé consiste à lancer deux dés à six faces. On a donc une expérience aléatoire à deux épreuves. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et le cardinal de Ω est

égal à 36. Les issues de cette expérience aléatoire sont les résultats (les nombres affichés sur les faces supérieures) des deux lancers de dés. Ces résultats sont les couples $(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quelques implicites sont présents dans la formulation de l'énoncé de l'exercice. Le premier implicite porte sur le terme « *non truqué* » qui traduit implicitement que les deux dés sont équilibrés, et de fait que la probabilité des six faces de chacun des deux dés est égale à $\frac{1}{6}$. Un autre implicite porte sur le fait que les deux lancers de dés sont indépendants, donc l'expérience aléatoire en jeu est une expérience à deux épreuves indépendantes. Considérer des lancers simultanés ou successifs ne change strictement rien à l'expérience aléatoire. Un dernier implicite concerne l'équiprobabilité des résultats des deux lancers induite implicitement par l'équiprobabilité de chacun des deux dés. Chacun des 36 couples d'issues a une probabilité égale à $\frac{1}{36}$. L'objectif de l'exercice est de vérifier si la probabilité de l'événement A : « Obtenir la somme 7 » est bien supérieure à la probabilité de l'événement B : « Obtenir la somme 11 ».

On peut traiter cet exercice à l'aide des variables aléatoires (comme dans l'exercice traité dans l'ETM_P idoine de la classe de 3^e « tirage de boules dans deux urnes ») :

- Sur l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on définit une variable aléatoire X qui prend comme valeurs les sommes des nombres affichés sur les faces supérieures des deux dés : $\Omega \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est déterminée sur $X(\Omega)$ et est donnée par la liste des probabilités : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$, $P(X = 5)$, $P(X = 6)$, $P(X = 7)$, $P(X = 8)$, $P(X = 9)$, $P(X = 10)$, $P(X = 11)$, $P(X = 12)$. En utilisant par exemple un tableau à double entrée où la première colonne représente les nombres affichés sur les faces du premier dé et la première ligne représente les nombres affichés sur les faces du deuxième dé, on obtient :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chacune des 36 cases du tableau a la même probabilité, égale à $\frac{1}{36}$. En repérant les occurrences $X = k$ avec $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ dans les cases, et en utilisant la formule de Laplace, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous et vérifie $\sum_{k=2}^{12} P(X = k) = 1$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

À partir du tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X , on déduit que les probabilités des événements A et B sont égales respectivement à $p(A) = \frac{6}{36}$ et $p(B) = \frac{2}{36}$. On conclut alors que la probabilité d'obtenir la somme 7 est supérieure à la probabilité d'obtenir 11. L'affirmation de l'énoncé de l'exercice est donc vraie.

Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , on peut également imaginer utiliser un arbre des possibles ou un arbre pondéré. Ce qui est à notre sens inutile. En effet, la construction d'un arbre (à 36 chemins) est trop longue. Les 36 chemins de l'arbre étant équiprobables et le fait que les arbres donnent les issues possibles de l'expérience aléatoire (l'univers Ω) et non pas les valeurs prises par la variable aléatoire X (l'ensemble $X(\Omega)$), font que l'usage de l'arbre peut engendrer (comme nous l'avons déjà observé dans l'exercice de tirage de boules en classe de 3^e) des confusions.

Si l'on se place au niveau de la classe de 2^{nde}, on ne peut pas utiliser la variable aléatoire X pour traiter l'exercice car cette notion n'est abordée qu'à partir de la classe de 1^{re}. On retrouve une nouvelle fois le « le phénomène de la variable aléatoire cachée » déjà observé au niveau de la classe de 3^e. Il en résulte que le travail sur la loi de probabilité de la variable X est transformée en détermination des issues réalisant les événements A et B . Il s'agit donc de déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ et de mener le calcul des probabilités sur cet ensemble. Pour ce faire, on construit un tableau à double entrée (identique à celui construit précédemment) permettant d'inscrire dans chacune de ses cases (soit 36 cases) les sommes des faces des deux dés. Ensuite, on repère sur le tableau les « sommes 7 » (respectivement « sommes 11 ») qui apparaissent. La probabilité de l'événement A (respectivement B) est alors obtenue à l'aide de la formule de Laplace avec l'hypothèse d'équiprobabilité des cases du tableau. On conclut que la probabilité de l'événement A (soit $\frac{6}{36}$) est supérieure à celle de l'événement B (soit $\frac{2}{36}$). L'affirmation est donc vraie.

Une autre manière recommandée par les auteurs du document ressource est de réaliser une expérience réelle (comme nous l'avons rencontré dans la partie 2 lors de l'analyse de l'ETM_P idoine en classe de 3^e B), puis de simuler cette expérience à l'aide d'un ordinateur. Il serait intéressant d'ajouter par exemple la comparaison de la probabilité des deux sommes 6 et 7 dans le traitement de l'exercice.

L'ETM_P idoine potentiel est composé des objets matériels (les dés) « évoqués virtuellement », des actions sur ces objets (le lancer des deux dés) et de la grandeur à laquelle on s'intéresse (la probabilité des issues réalisant les deux événements A et B). Le travail de validation met en jeu les registres suivants : langage naturel, numérique (l'ensemble des rationnels) et le registre tableau. Par ailleurs, le travail de validation est *a priori* dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2).

Analyse de l'ETM_P idoine effectif

Après dix minutes de recherche, le professeur D invite un élève (noté élève 1) à aller écrire son raisonnement au tableau. Ce dernier écrit au tableau le cardinal de l'univers de

l'expérience aléatoire et quelques couples d'issues de l'expérience aléatoire pour justifier la manière dont il a obtenu le cardinal de l'univers :

Élève 1	J'ai trouvé 36 issues .
Professeur D	Comment as-tu trouvé 36 ?
Élève 1	J'ai fait (1,1), (1,2), jusqu'à (1,6) .

Constatant que les autres élèves de la classe ne comprenaient pas le raisonnement de l'élève 1, le professeur D tente d'expliquer la démarche de l'élève 1, mais cela n'a pas aidé certains élèves. Le professeur D suggère alors une autre démarche pour expliquer le cardinal de l'univers :

Professeur D	Il y a une autre manière d'avoir les 36 issues est de construire un tableau [sic]. On met le 1 ^{er} dé en ligne et le 2 ^e dé en colonne. Alors à votre avis on a combien de cases ?
Elèves	36 cases
Professeur D	Oui. Attention on va utiliser souvent cette méthode-là. Comment peut-on trouver toutes les possibilités avec cette méthode-là ? Vous ne l'avez jamais vue en 3 ^e ? Allez, je vous laisse une minute pour réfléchir à cet exercice à l'aide de ce tableau.

Le professeur D construit un tableau à double entrée et inscrit sur la première ligne les nombres affichés sur les faces du premier dé et sur la première colonne les nombres affichés sur les faces du deuxième dé. Pour remplir ce tableau, il sollicite un élève (noté élève 2). Ce tableau⁷ rend compte de toutes les sommes possibles des nombres affichés sur les faces des deux dés :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fig. 7.34 – Le tableau à double entrée proposé par le professeur D

À l'aide de ce tableau, le professeur D guide (en posant des questions) l'élève 2 pour déterminer la probabilité de l'événement A . Pour ce faire, l'élève 2 commence par repérer les « sommes 7 » inscrites dans les cases en les entourant, puis il compte le nombre de

7. Pour des soucis de lisibilité, nous avons dû reproduire le tableau construit par le professeur D.

fois où ces sommes apparaissent. Enfin, il utilise la formule de Laplace pour obtenir les probabilités cherchées :

Professeur D	Où est ce qu'on voit les résultats 7 ?
Elève 2	Je vais les entourer. <i>Il entoure tous les 7 se trouvant dans la diagonale du tableau.</i>
Professeur D	D'accord, on a combien de fois 7 ?
Elèves	6.
Professeur D	Sur combien de possibilités ?
Elèves	36.

De la même manière, l'élève 2 (guidé par les questions du professeur D) obtient la probabilité de l'événement B . La comparaison des deux nombres rationnels $\frac{6}{36}$ et $\frac{2}{36}$ conduit alors à prendre une décision concernant l'affirmation, et à conclure qu'elle est vraie.

La trace écrite de la correction de cet exercice proposée par le professeur D est composée du tableau à double entrée ainsi que des valeurs des deux probabilités des événements A et B .

À l'aide du tableau à double entrée, le professeur D conduit les élèves à représenter dans les cases les sommes des nombres affichés sur les faces des deux dés, à identifier les sommes (7 ou 11) réalisant les événements A et B , et enfin à déterminer la probabilité des événements A et B . Le travail de validation mis en oeuvre par le professeur B s'appuie essentiellement sur le tableau à double entrée. D'ailleurs, le tableau est utilisé ici comme un outil sémiotique pour représenter et visualiser les sommes, mais aussi comme outil technologique pour calculer les sommes et pour dénombrer celles qui réalisent les événements A et B . Ainsi, l'argument construit par le professeur D pour justifier la réponse peut être représenté dans le modèle simplifié de Toulmin de la manière suivante :

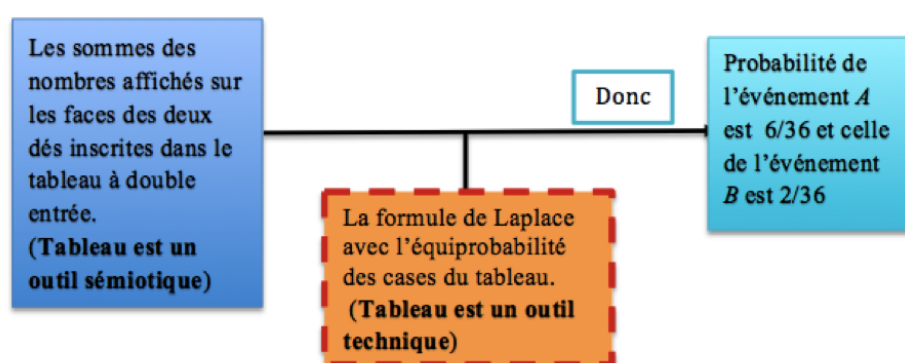


Fig. 7.35 – Structure de l'argument construit par le professeur D

Le tableau à double entrée a un double statut, celui d'outil sémiotique et d'outil technologique. Ce double statut entraîne des interactions entre les deux genèses, sémiotique et instrumentale et de fait une circulation du travail de validation dans le plan [Sem-Ins]. Or, le calcul des probabilités nécessite l'usage de la formule de Laplace, un outil théorique

appartenant au référentiel théorique de l'ETM_P idoine. Donc le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] orienté vers la dimension discursive (Dis). Ce travail de validation est orienté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2). On constate également que le travail de validation produit par le professeur D est en adéquation avec celui de l'ETM_P idoine potentiel.

L'argumentaire de validation construit par le professeur D est composé d'un argument de type sémiotique (avec l'usage du registre tableau) assisté par des calculs. La validation institutionnalisée par le professeur D est un argumentaire qui n'est pas organisé sous forme d'une démonstration.

3) Comparaison de la validation dans les deux ETM_P idoines en classe de 2^{nde}

L'analyse des deux espaces de travail idoines mis en oeuvre dans les deux classes de 2^{nde} montre que la gestion du travail de validation mis en place par les professeurs C et D est différente. Cette différence est constatée du point de vue de la place accordée par les professeurs C et D aux registres de représentation sémiotique pour effectuer le travail de validation et pour construire le discours de la validation. Le professeur D accorde une place importante à l'usage du registre tableau permettant d'élaborer un raisonnement « diagrammatique ». Ce registre acquiert alors un double statut, celui d'outil sémiotique utilisé comme moyen pour extraire et produire les données, et celui d'outil technologique pour calculer les probabilités d'événements. Le professeur C élude complètement le recours aux registres sémiotiques et se centre essentiellement sur les éléments du référentiel théorique, à tel point qu'il ne remarque pas l'erreur produite dans la réponse de l'élève au tableau.

Cette différence du travail de validation peut, à première vue, résulter de la différence des deux tâches proposées dans chacun des deux ETM_P. La tâche proposée par le professeur C contient une difficulté assez subtile que même lui semble ne pas avoir identifiée. Toutefois, nous pensons que cette différence peut également être une conséquence du choix de la gestion du travail de validation lié au choix de recourir ou non aux registres de représentation sémiotique. Le professeur C témoigne d'une réticence à l'égard de l'usage de l'arbre pondéré (et ne prend pas non plus en compte l'arbre des possibles proposé par l'élève). Cette réticence également constatée par les chercheurs Even et Kvatinsky (2010) chez des professeurs (israéliens) du second degré est justifiée par le professeur C par le fait que les propriétés sous-jacentes à l'arbre pondéré ne sont pas justifiées théoriquement en classe de 2^{nde}. Cette réticence produit des malentendus (entre le professeur C et les élèves) portant sur le travail de validation. Nous proposons une synthèse de cette comparaison dans le tableau suivant :

	ETM _P idoine en classe de 2 ^{nde} C	ETM _P idoine en classe de 2 ^{nde} D
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement déductif	Raisonnement « diagrammatique »
Paradigme(s)	P1 P2	P1 P2
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Sémiotique Instrumentale
Circulation du travail de validation dans l'ETM	Clos sur (<i>Dis</i>)	$[Sem-Ins] \rightarrow Dis$
Argument(s) employé(s)	Formel appuyé sur le référentiel théorique	Sémiotique assisté par des calculs
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire non organisé sous forme d'une démonstration

TABLE 7.7 – La validation dans deux ETM_P idoines dans deux classes de 2^{nde}

7.4 Comparaison des ETM idoines relatifs à un domaine dans deux niveaux de classe

7.4.1 ETM_G idoine en classes de 3^e et de 2^{nde}

En reprenant les résultats des comparaisons 1 et 2 du groupe 1 (cf. paragraphe 3.2), nous faisons le constat que la gestion du travail de validation dans le domaine de la géométrie est similaire chez les quatre professeurs observés. D'un point de vue global, ce travail de validation est fortement orienté vers la dimension discursive (et parfois même clos sur cette dimension). Le travail de validation est dirigé soit par le paradigme GII, soit par le paradigme GII articulé avec le sous-domaine de la géométrie vectorielle. La validation construite dans chacun des ETM_G idoine est un argumentaire de type démonstratif, assisté dans certains cas par des calculs vectoriels. Ainsi, quel que soit le niveau de classe (3^e ou 2^{nde}) et quel que soit le professeur (A, B, C et D) observé, le travail de validation mis en oeuvre dans l'ETM_G idoine ne varie pas. En revanche, le discours de validation institutionnalisé évolue entre la classe de 3^e et de 2^{nde} avec l'introduction de nouveaux sous-domaines de la géométrie plane. Dans le tableau ci-dessous, on résume la comparaison de la validation des ETM_G idoines relatifs aux deux niveaux de classe considérés dans cette étude :

	ETM _G idoine en classe de 3 ^e		ETM _G idoine en classe de 2 ^{nde}	
	Classe de 3 ^e A	Classe de 3 ^e B	Classe de 2 ^{nde} C	Classe de 2 ^{nde} D
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement déductif	Raisonnement déductif	Raisonnement déductif	Raisonnement déductif
Paradigme(s)	GII	GII avec référence à GI	GII	GII articulé avec le sous-domaine de la géométrie vectorielle
	Classe de 3 ^e A	Classe de 3 ^e B	Classe de 2 ^{nde} C	Classe de 2 ^{nde} D
Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Discursive Sémiotique	Discursive	Discursive
Circulation du travail de validation dans l'ETM	Clos sur (<i>Dis</i>)	[<i>Sem - Dis</i>] → <i>Dis</i>	Clos sur (<i>Dis</i>)	[<i>Sem - Dis</i>] → <i>Dis</i>
Argument(s) employé(s)	Formel	Formel	Formel	Formel
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration dont la structure déductive est prise en charge par le calcul vectoriel

TABLE 7.8 – La validation dans deux ETM_G idoines relatifs à deux niveaux de classe

7.4.2 ETM_P idoine en classes de 3^e et de 2^{nde}

Nos analyses — de la « comparaison 3 » et de la « comparaison 4 » du groupe 1 — des ETM_P idoines en classe de 3^e B, 2^{nde} C et 2^{nde} D montrent que le travail de validation mis en oeuvre par les professeurs B (classe de 3^e B) et D (classe de 2^{nde} D) est similaire. Effectivement, ces professeurs favorisent l'usage des registres de représentation sémiotique pour le traitement des situations aléatoires. Ces registres sont utilisés à la fois comme des outils sémiotiques pour représenter les expériences aléatoires, et comme des outils technologiques pour dénombrer ou calculer. Tel qu'il est mis en oeuvre par ces professeurs, le travail de validation est en accord avec celui qui est attendu par l'ETM_P de référence. Ces registres sont également utilisés en tant qu'arguments sémiotiques au sein des argumentaires de validation institutionnalisés. Les validations pratiquées par ces deux professeurs sont donc des argumentaires qui ne sont pas organisés sous forme d'une démonstration. En revanche, le professeur C occulte du travail de validation et du discours de la validation les registres de représentation sémiotique et met l'accent sur l'usage

des éléments du référentiel théorique. Comme nous l'avons souligné, l'usage des registres de représentation sémiotique est certes conseillé par les auteurs du document ressource mais il n'est pas exigé par l'institution. Ainsi, le choix de l'usage de ces registres est à l'appréciation des professeurs. Or, dans le cas du professeur C, nous avons vu qu'il était réticent à l'égard de l'usage de ces registres dans le traitement des situations aléatoires au niveau de la classe de 2^{nde}. Les réticences de ce professeur engendrent des malentendus qui témoignent de la contradiction du travail de validation et de la nature de la validation produits par le professeur C par rapport à ce qui est produit par l'élève. Il y a donc un hiatus entre l'ETM_P idoine et l'ETM_P personnel de l'élève mais surtout avec l'ETM_P de référence. Nous avons d'ailleurs vu qu'en classe de 3^e et de 2^{nde}, les registres de représentation sémiotique peuvent faciliter le travail de validation, mais ils peuvent être source de confusions. Ces confusions (observées chez le professeur B) sont dues au choix inadéquat du registre pour traiter la situation aléatoire considérée dans l'ETM_P idoine et produisant des blocages chez les élèves (blocages constatés par les nombreux « actes de silence »). Nos analyses mettent une évidence une autre différence portant sur le paradigme dans lequel est inscrit le travail de validation. En effet, le professeur C exclut le travail de validation dans P1 alors que les professeurs B et D envisagent le travail de validation dans P1 et dans P2.

À partir de l'analyse des trois ETM_P idoines, nous pouvons conclure que le travail de validation semble varier d'un professeur à un autre, et ceci quel que soit le niveau de classe. Nous proposons ci-dessous un tableau qui synthétise la comparaison de la validation dans les ETM_P idoines relatifs à deux niveaux de classe :

	ETM_P idoine en classe de 3^e	ETM_P idoine en classe de 2^{nde}	
	Classe de 3 ^e B	Classe de 2 ^{nde} C	Classe de 2 ^{nde} D
Raisonnement(s) mobilisé(s)	Raisonnement « diagrammatique »	Raisonnement déductif	Raisonnement « diagrammatique »
Paradigme(s)	P1 P2	P2	P1 P2
Dimension(s) privilégiée(s)	Sémiotique et instrumentale	Discursive	Sémiotique et instrumentale
Argument(s) employé(s)	Sémiotique assisté par des calculs propres au registre sémiotique	Formel appuyé sur le référentiel théorique	Sémiotique assisté par des calculs propres au registre sémiotique
Circulation du travail de validation dans l'ETM	Dans les trois plans verticaux	Clos sur (<i>Dis</i>)	[<i>Sem</i> – <i>Ins</i>] → <i>Dis</i>

TABLE 7.9 – La validation dans deux ETM_P idoines relatifs à deux niveaux

	ETM_P idoine en classe de 3^e	ETM_P idoine en classe de 2^{nde}	
	Classe de 3 ^e B	Classe de 2 ^{nde} C	Classe de 2 ^{nde} D
Mise en forme du discours de validation	Argumentaire non organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire organisé sous forme d'une démonstration	Argumentaire non organisé sous forme d'une démonstration

TABLE 7.10 – La validation dans deux ETM_P idoines relatifs à deux niveaux

7.5 Comparaison des ETM idoines relatifs à deux domaines dans deux niveaux de classe

Dans notre échantillon de classes et de professeurs, la comparaison de la validation dans l'ETM_G et l'ETM_P idoine dans les deux niveaux de classe met en lumière une différence du travail de validation. Cette différence porte essentiellement sur le fait que le travail de validation dans l'ETM_G idoine ne varie pas pour les deux niveaux de classe et pour les quatre professeurs. De plus, le travail de validation dans l'ETM_G est très fortement orienté vers un travail discursif basé sur les éléments du référentiel théorique. La dimension discursive est plus favorisée que les autres dimensions. Ces dernières sont utilisées de façon heuristique dans le contexte de découverte de la validation. La manière dont le travail de validation est mis en oeuvre par ces professeurs est en accord avec ce qui est attendu dans l'ETM_G de référence. Nous avons une continuité entre l'ETM_G de référence et l'ETM_G idoine. Alors que, dans l'ETM_P idoine, le travail de validation dépend des choix faits par les professeurs. Des choix qui portent, d'une part, sur l'usage ou non des registres de représentation (arbres et tableaux) comme outil sémiotique et outil technologique dans l'élaboration du travail, et sur l'argumentaire de validation basé sur un raisonnement de type « diagrammatique », ces choix pouvant entraîner des malentendus. D'autre part, sur les choix (du professeur) inappropriés de registres qui peuvent provoquer des confusions et par suite, des blocages chez les élèves. En conséquence, le travail de validation mis en oeuvre dans l'ETM_P idoine n'est pas toujours en adéquation avec ce qui est attendu dans l'ETM_P de référence. Nous avons donc un hiatus entre l'ETM_P de référence et l'ETM_P idoine. Toutefois, dans certaines séances observées, nous avons pu constater une adéquation sur l'usage et la place de l'expérimentation et de la simulation dans le travail de validation entre les deux ETM_P, de référence et idoine.

Conclusion de la deuxième partie

Nous observons que pour les deux niveaux de classe considérés, il existe une continuité entre le travail de validation mis en oeuvre dans les ETM_G idoines et ce qui est visé par l' ETM_G de référence pour un même niveau. Ce travail est très souvent placé dans le plan [Sem-Dis] et très fortement orienté vers la dimension discursive. La validation institutionnalisée est un argumentaire organisé sous forme d'une démonstration dont la structure déductive est parfois prise en charge par le calcul vectoriel. Ces argumentaires de validation ont une structure globale qui varie en fonction de la tâche proposée par les professeurs. Nous constatons que dans le cas où les tâches sont des exercices d'application directe de théorèmes ou des propriétés relevant du sous-domaine de la géométrie synthétique, la structure globale des argumentaires de validation produits est de type linéaire. Alors que dans le cas où les tâches font intervenir des outils issus d'autres sous-domaines de la géométrie plane, la structure globale est non linéaire. Par contre, dans le domaine des probabilités, nous constatons le travail de validation mis en oeuvre dans les l' ETM_P idoines n'est pas toujours en continuité avec le travail de validation visé par l' ETM_P de référence. La non-continuité du travail de validation est parfois observée au niveau de l'usage des registres, mais dans l'ensemble, elle est observée au niveau de la place accordée à l'expérimentation dans le travail de validation mis en place par les professeurs. En effet, dans l' ETM_P de référence est fortement recommandé l'usage de la simulation dans le traitement de situations aléatoires. Nous constatons que le travail de validation dépend fortement des choix des professeurs (et peut-être même de l' ETM_P personnel du professeur), entre autres parcequ'aucun des professeurs observés n'a fait appel à la simulation. En conclusion, nous relevons des différences entre le travail de validation dans l' ETM_G et l' ETM_P . Ces différences portent sur :

- **la place des registres sémiotiques dans le travail de validation.** Dans le domaine de la géométrie, ce travail s'appuie sur des représentations figurales comme aide à la recherche de propriétés ou de conjectures — qui sont ensuite validées par l'élaboration d'un argumentaire — fondées uniquement sur des propriétés et des théorèmes. Alors que dans le domaine des probabilités, le travail de validation s'appuie également sur divers registres de représentation. À la différence de la géométrie, ces registres peuvent être intégrés ou non dans le discours de validation. Dans ce cas, ils sont considérés en tant qu'arguments sémiotiques. Plus précisément, dans

le domaine des probabilités, les arbres et les tableaux sont utilisés au début comme outils sémiotiques (au même titre que les figures en géométrie), véritables systèmes de représentation pour illustrer ou décrire les situations aléatoires. Puis, ils sont utilisés comme outils technologiques pour traiter les situations aléatoires. Les arbres et les tableaux sont alors utilisés comme authentiques registres de représentation sémiotiques posant les bases d'un raisonnement « diagrammatique ».

- **le discours de validation exposé.** En géométrie, les documents institutionnels ainsi que les quatre professeurs privilégient particulièrement les argumentaires de validation de types démonstratifs. Ces argumentaires caractérisent le discours de validation pratiqué dans le domaine de la géométrie. En revanche, dans le domaine des probabilités, les documents institutionnels ne donnent aucune indication en ce qui concerne le discours de la validation. En ce qui concerne les professeurs, les argumentaires mais aussi le discours de la validation utilisés ne sont pas les mêmes. D'une part, il y a des professeurs qui fondent les argumentaires de validation sur les registres sémiotiques, et d'autres qui les fondent sur les outils théoriques disponibles dans le référentiel théorique.

Le travail de validation dans le domaine des probabilités est bien différent de celui de la géométrie au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}, une différence due à l'enrichissement du référentiel théorique de l'ETM_G (de référence et idoine) favorisant l'élaboration d'argumentaire de type démonstratif. Dans le domaine des probabilités, à ces deux niveaux de classe, le référentiel théorique de l'ETM n'est pas suffisamment complet en propriétés et en théorèmes pour permettre l'élaboration d'argumentaire de type démonstratif. C'est pourquoi, le recours aux registres de représentation avec un raisonnement de type « diagrammatique » devient une alternative pour combler ce manque de propriétés dans le référentiel théorique. Ainsi, par notre analyse des ETM de référence et idoine, nous constatons, à la fin de la scolarité obligatoire, **l'existence d'une différence entre le travail de validation dans l'enseignement de la géométrie et des probabilités.** Il en résulte que notre hypothèse (H1) est vérifiée.

Cependant, nous devons être vigilants concernant nos conclusions. Notre conclusion en ce qui concerne la place accordée par les professeurs de l'expérimentation dans le travail de validation doit être nuancée. En effet, notre échantillon est constitué de professeurs ayant un niveau d'expérience de plus de 5 ans. Or, dans le cadre de notre travail de formateurs à l'ESPE, nous avons remarqué que les professeurs stagiaires (en formation initiale) ont aisément recours à la simulation dans les traitements des situations aléatoires. La place de l'expérimentation dans le travail de validation tend-elle à diminuer au fur et à mesure de l'avancement de l'ancienneté des professeurs ? Est-elle uniquement propre à notre échantillon ?

Nous rappelons que pour débiter notre investigation, nous avons commencé par aller observer dans les classes des séances de correction d'exercices dans le domaine des proba-

bilités et celui de la géométrie. Nous avons donc effectué une étude exploratoire. L'inconvénient de cette étude est que les observations portent globalement sur les critères suivants : différentes tâches, différents niveaux, différents professeurs. Ces contraintes sont devenues par la suite difficile à gérer. Le désistement d'un professeur participant aux observations a ajouté des difficultés à notre étude. Néanmoins, à travers cette étude exploratoire, nous avons pu obtenir quelques éléments caractérisant le travail de validation dans l'enseignement des probabilités. Ces éléments ne suffisent certes pas pour répondre à notre question de recherche mais ils constituent un début de réflexion. Pour poursuivre cette étude de la caractérisation de la validation dans l'enseignement des probabilités, nous avons pensé qu'il serait judicieux de réduire les contraintes soulignées auparavant, notamment en éliminant la contrainte liée aux différentes tâches proposées par les enseignants. Dans ce cas, nous proposons la même tâche à exécuter dans des ETM_P idoines de même niveau. Ce choix de proposer la même tâche se justifie par le fait que l'ensemble des tâches qui ont été proposées dans les ETM_P analysés ne mettent pas toutes en jeu l'expérimentation comme le préconise les documents institutionnels. Ces tâches ne nécessitent pas non plus un travail avec les modèles probabilistes autres que celui d'équiprobabilité. Nous avons de plus constaté, à travers cette étude exploratoire, une variabilité de la place des registres de représentation et de leurs usages dans la validation en probabilités. Cette variabilité (en fonction du professeur) constitue pour nous un élément intéressant pour étudier la validation dans l'enseignement des probabilités. Ainsi, peut-on observer cette variabilité d'usage des registres dans le cas où l'on propose les mêmes tâches ? Ces registres sont-ils considérés comme des outils sémiotiques, technologiques ou théoriques pour traiter les situations aléatoires ? Peuvent-ils être intégrés dans le discours de la validation en probabilités en fin de scolarité obligatoire ?

Troisième partie

Étude du travail de validation dans l'ETM_P idoine

Table des matières

Introduction de la troisième partie	199
8 La modélisation dans l'enseignement des probabilités	201
8.1 Modélisation et modèles mathématiques	202
8.2 Analyse du cycle de modélisation	204
8.3 Modélisation avec un modèle mathématique de type numérique	208
8.4 Modélisation et travail de validation dans l'ETM _P	209
8.4.1 Modélisation avec un modèle probabiliste de type analytique	210
8.4.2 Modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique	213
8.5 Conclusion	218
9 Travail de validation et catégories de tâches mathématiques	223
9.1 La tâche mathématique : Sierpinska (2004)	224
9.2 Tâches avec ou sans adaptation : Robert (2007)	225
9.3 Rich tasks, simple et complex procedures : White et Mesa (2014)	227
9.4 Conclusion	228
10 Présentation des situations proposées aux enseignants	233
10.1 Analyse <i>a priori</i> des situations probabilistes	233
10.2 Synthèse de l'analyse <i>a priori</i> des quatre situations probabilistes	260
11 L'analyse de la validation dans les ETM_P idoines effectifs en fonction de la catégorie des tâches	263
11.1 Méthodologie de l'analyse de la validation mise en œuvre dans l'ETM _P idoine effectif	264
11.2 La validation dans le cas d'une même tâche complexe	266
11.2.1 Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 3 ^e	267
11.2.2 Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 2 ^{nde}	274
11.2.3 Conclusion	279

11.3 La validation dans le cas d'une même tâche riche en classe de 2 ^{nde} et complexe en classe de 1 ^{re} S	281
11.3.1 Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 2 ^{nde}	281
11.3.2 Validation dans deux ETM _P idoines de la classe de 1 ^{re} S	288
11.3.3 Conclusion	292
11.4 La validation dans le cas de deux tâches riches différentes, l'une en classe de 3 ^e et l'autre en classe de Terminale S	293
11.4.1 Conclusion	302
Conclusion de la troisième partie	305

Introduction de la troisième partie

L'étude comparative menée dans la deuxième partie nous a conduit à repérer quelques éléments caractéristiques de la validation dans le domaine des probabilités. Ces éléments portent essentiellement sur la validation élaborée dans la résolution de tâches mettant en jeu la notion d'équiprobabilité associée à l'usage de la formule de Laplace. Les résultats de l'analyse de l'ETM_P de référence en classes de 3^e et de 2^{nde} montrent l'importance du traitement des tâches sollicitant l'usage de la simulation et de la modélisation. C'est d'ailleurs cette question de modélisation qui rend le raisonnement probabiliste « unique en son genre ». Ainsi, dans cette partie, nous allons tout d'abord étudier la notion de modélisation dans l'enseignement des mathématiques, en particulier dans le domaine des probabilités. Cette étude fait apparaître deux sortes de « validations » présentes dans le cycle de modélisation : une validation interne et une validation externe au modèle probabiliste. Ensuite, nous avons été conduits à définir une catégorisation des tâches en tenant compte de la notion de modélisation. À l'aide de cette catégorisation des tâches (simple, complexe, riche), nous allons examiner le travail de validation de quatre situations probabilistes mises en œuvre dans différents ETM idoines et dans différents niveaux de classes. Ces situations sont choisies en fonction de la catégorie des tâches (complexe ou riche) et du niveau de la classe. Nous avons identifié différentes gestions du travail de validation et mis en évidence des caractéristiques de la validation probabiliste en fonction de la catégorie de la tâche et du niveau de classe.

L'objectif de cette partie est de repérer l'influence de la catégorie de la tâche dans le travail de validation, mais également d'identifier les formes de validation privilégiées par les enseignants dans la réalisation de ces tâches. Cette partie vise donc à répondre aux deux sous-questions :

(Q2a) : Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^e et en classe de 2^{nde} ?

(Q2b) : Ces formes de validation sont-elles propres à ces deux niveaux de classe où sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau du secondaire ?

Pour étudier ces sous-questions, nous avons formulé deux hypothèses **(H2a)** et **(H2b)** associées respectivement à chacune des sous-questions :

(H2a) : Nous postulons que, dans le domaine des probabilités, la forme de la validation dépend du degré de complexité des tâches proposées. Ainsi, selon le degré de complexité des tâches, le travail de validation dans l'ETM_P est placé dans l'un des plans [Sem-Dis], [Ins-Dis], ou éventuellement clos sur la dimension discursive.

(H2b) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que, pour des tâches identiques proposées dans des ETM idoines similaires, les formes de validation institutionnalisées par les professeurs sont différentes d'un professeur à un autre et ceci, quel que soit le niveau de classe.

Nous allons dans cette partie tester ces deux hypothèses de façon à obtenir des réponses aux sous-questions **(Q2a)** et **(Q2b)**. La troisième partie se subdivise en quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre nous présentons notre analyse de la modélisation dans l'enseignement ;
- dans le second chapitre, nous exposons la catégorisation des tâches et le lien avec le travail de validation ;
- dans le troisième chapitre, nous présentons les quatre situations proposées aux enseignants ainsi que l'analyse a priori de chacune d'elles ;
- dans le dernier chapitre, nous décrivons la mise en œuvre de chacune des situations dans les ETM_P afin de rendre compte du travail de validation et de la forme de validation institutionnalisé dans chacun des ETM_P.

Chapitre 8

La modélisation dans l'enseignement des probabilités

Nous avons conclu dans la partie précédente que les tâches proposées dans les ETM_P idoines faisaient intervenir l'usage de la formule de la Laplace dans le cas d'équiprobabilité. Nous faisons le même constat dans les autres séances observées (non analysées dans cette thèse) chez les professeurs B, C et D. Ainsi, le travail de validation des tâches proposées (y compris celles que nous n'avons pas analysées ici) par ces trois professeurs dans les ETM_P idoines ne met pas suffisamment en jeu l'expérimentation *via* la simulation comme le préconisent les documents institutionnels. Or, le recours à la simulation suppose nécessairement l'intervention d'un modèle probabiliste. Autant — si ce n'est plus — que dans les autres domaines mathématiques, dans le domaine des probabilités, la prise en compte de la modélisation est essentielle. La mise en lien d'une expérience aléatoire réelle avec la théorie des probabilités conduit à interroger la modélisation en terme de processus. Une des spécificités de l'enseignement des probabilités porte sur le fait que c'est, avec la géométrie, le seul domaine où l'on part – en principe tout au moins –, de la réalité matérielle. De ceci résulte une difficulté d'apprentissage liée à la confusion entre la réalité et le modèle ; par exemple, lorsque l'on cherche à faire comprendre aux élèves le modèle qui est lié à l'expérience correspondant au lancer de deux dés et où l'on observe la somme des points apparus. Certains élèves distinguent les résultats 6+5 et 5+6 en supposant que les dés sont de couleurs différentes, d'autres considèrent qu'ils sont identiques. Ce type de réponse d'élèves est justifié par le fait que, très souvent, on pense travailler sur la réalité alors que ce n'est pas le cas puisque on est déjà dans le modèle. Il n'y a qu'une seule réalité mais plusieurs modèles possibles. Dans l'enseignement des probabilités, on ignore ou on occulte souvent les difficultés relevant de la modélisation. Habituellement, les énoncés des exercices comportent beaucoup d'implicites. C'est pourquoi, les professeurs tendent à penser que TOUS les exercices de probabilités se ressemblent car ils sont tous bâtis sur un même modèle probabiliste. Alors que les élèves eux, pensent qu'ils sont SOUVENT différents, car l'habillage du modèle probabiliste n'est pas le même dans les énoncés, ce

qui transforme de fait le problème puisque les contextes sont différents. En outre, l'introduction de nouveaux outils performants — tels que l'ordinateur ou la calculatrice — dans l'enseignement des mathématiques, permet d'aborder la question de la modélisation du réel *via* la simulation numérique d'expériences aléatoires. Nous examinerons dans le prochain paragraphe l'importance de cette modélisation.

8.1 Modélisation et modèles mathématiques

Dans les années quarante, von Neumann a défini ce qu'est un modèle :

« les sciences n'essayent pas d'expliquer, c'est tout juste si elles tentent d'interpréter, elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner » (Von Neumann cité par Henry, 2009, p. 83).

À ceci s'ajoute l'idée qu'en considérant un morceau de la réalité, un modèle consiste alors à coller une théorie à ce morceau (Ruelle, 1991). De fait, un modèle peut être défini comme étant une simplification et même une idéalisation de la réalité. Celui-ci peut se faire par *« une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité »* (Henry, 1999, p. 26). Autrement dit, dans un vocabulaire courant, *« les objets du modèle sont doués de propriétés caractéristiques idéales, bien définies. Nous parlerons alors de modèles 'pseudo-concrets' »* (Henry, 2009, p. 83). De plus,

« parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématique permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. Nous les appellerons « modèle mathématiques » » (Henry, 1999, p. 26).

Henry distingue le monde réel (avec le modèle pseudo-concret) et le monde mathématique (avec le modèle mathématique). Cette distinction est également soulignée par plusieurs auteurs de la didactique des mathématiques, tels que Kuzniak et Vivier (2011), Lesh, Galbraith, Haines et Hurford (2010), Blum, Galbraith, Henn et Niss (2007), Borremeo-Ferri(2006), Lesh et Doerr (2003). Ces chercheurs mettent l'accent sur l'importance de distinguer le monde réel et le monde mathématique dans le processus de modélisation. Cette distinction des deux mondes conduit à définir des cycles de modélisation.

Nous exposons ci-dessous l'un des premiers cycles de modélisation présenté par Kaiser et Blum dans les années quatre-vingt-dix :

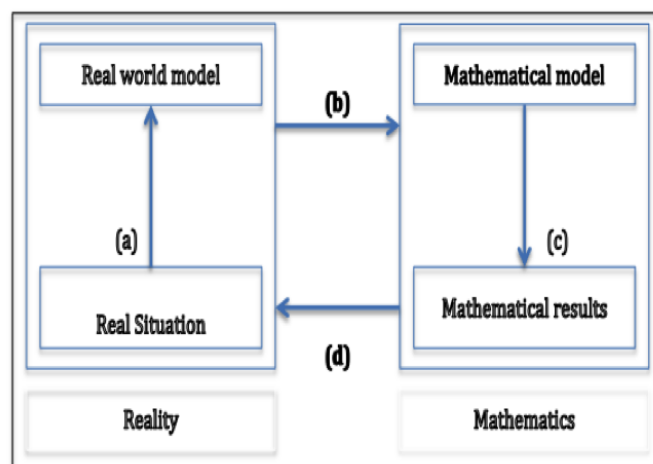


Fig. 8.1 – Cycle de modélisation de Kaiser (1996) et Blum (1996) (cité par Kuzniak, 2011, p. 14)

Un cycle de modélisation fonctionne comme suit :

- le cycle est initié par une situation du monde réel (real situation). Cette dernière est simplifiée (a) afin d'obtenir une situation dans le modèle réel (real world model),
- cette situation simplifiée et réelle est traduite (b) dans le monde mathématique afin d'obtenir un modèle mathématique de la situation initiale ne faisant pas intervenir la réalité,
- la résolution de la situation dans le modèle mathématique permet d'aboutir à des résultats mathématiques (c), qui seront réinterprétés par la suite (d) dans la situation réelle. La pertinence des résultats doit être vérifiée, autrement dit validée. Dans le cas contraire, on recommence le processus de modélisation. D'où la nécessité d'avoir plusieurs cycle.

Dans ce cycle de modélisation, la distinction entre le monde réel et le monde mathématique peut se révéler « *trop simple lorsque le propos n'est plus simplement de traiter les problèmes calibrés et déjà épurés que proposent les manuels mathématiques, mais de traiter des situations réelles* » (Kuzniak, 2011, p. 15). C'est pourquoi, les auteurs comme Blum et Leiss ont introduit une autre distinction entre *real situation* et *situation model*.

Le premier cycle de modélisation devient alors :

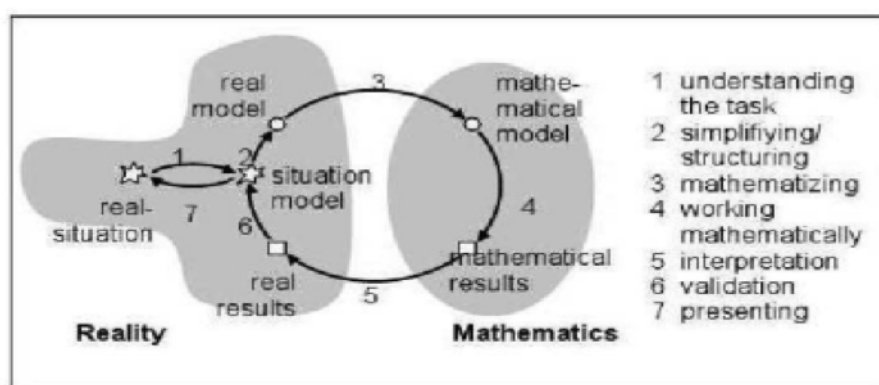


Fig. 8.2 – Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005) (cité par Kuzniak, 2011, p. 15)

Dans ce cycle de modélisation, Blum et Leiss ont non seulement distingué la *real situation* de la *situation model*, mais ils ont aussi affiné le cycle de modélisation initial en ajoutant des étapes associées à des compétences (understanding, simplifying, etc.) nécessaires à la mise en oeuvre du cycle de modélisation.

8.2 Analyse du cycle de modélisation

Selon Henry (1999), le cycle de modélisation comporte trois étapes fondamentales :

- étape 1 « Description de la réalité ».

Il s'agit de décrire la situation réelle dans le langage courant et de la traduire « *en système simplifié et structuré : c'est le niveau du modèle probabiliste, donné en termes pseudo-concrets* » (Henry, 1999, p. 29) ;

- étape 2 « Mathématisation ».

Il est question de « *la mathématisation ou le formalisme du modèle* » (Ibid., p. 29). Autrement dit, on représente le modèle réel dans la symbolique propre aux mathématiques (mise en équations et leurs résolutions, en utilisant des outils adaptés, par exemple) ;

- étape 3 « Validation ».

Cette étape porte sur la validation du modèle choisi. Il s'agit d'interpréter les résultats obtenus dans le modèle mathématique afin de fournir une réponse au problème posé dans la situation réelle.

En lien avec le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005), ces trois étapes du processus de modélisation peuvent être séquencées plus finement comme ceci :

Première étape : Description de la réalité en termes courants	
Phase 1 <i>Simplification</i>	<p>De « <i>real situation</i> » à « <i>situation model</i> »</p> <p>Il s'agit d'étudier le problème posé dans la situation réelle afin de choisir les éléments jugés pertinents permettant de répondre à ce problème. Cela revient donc à observer et à décrire ces éléments pertinents dans le vocabulaire courant. Cette observation suppose de poser un regard appuyé sur des connaissances (pratiques ou théoriques) permettant de reconnaître et de donner du sens à des phénomènes observés. Ces connaissances permettant de simplifier et de structurer la réalité, on a donc une première interprétation de la réalité. On obtient une description de la réalité, qui est <i>« une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. Cette description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un « regard théorique », c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux pré-construits, pour apprécier justement ce qui se révélera pertinent »</i> (Henry, 1999, p. 28).</p> <p>La situation réelle est simplifiée et épurée pour devenir une situation modèle qui sera par la suite modélisée.</p>
Phase 2 <i>Construction du modèle réel</i>	<p>De « <i>situation model</i> » au modèle réel</p> <p>La « <i>situation model</i> » est traduite « <i>en système simplifié et structuré</i> » (Henry, 1999, p. 29) : elle est formulée « <i>en termes pseudo-concrets</i> » (Ibid., p. 29). Il s'agit de construire un modèle adéquat de la « <i>situation model</i> » qui s'appuie sur des connaissances mathématiques et explicité dans le langage courant, autrement dit un modèle réel de la « <i>situation model</i> ».</p>
Deuxième étape : Mathématisation	
Phase 3 <i>Formalisation du modèle</i>	<p>Du modèle réel au modèle mathématique</p> <p>Il s'agit de traduire le modèle réel dans le langage mathématique. Autrement dit, on représente le modèle réel dans la symbolique propre aux mathématiques (mise en équations, par exemple). On a donc une formalisation du modèle réel.</p>
Phase 4 <i>Traitements</i>	<p>Du modèle mathématique aux résultats mathématiques</p> <p>Il s'agit de faire des traitements mathématiques au sein même du modèle mathématique en utilisant des outils adaptés afin de formuler une réponse mathématique (ou dans le langage mathématique) au problème posé.</p>

Troisième étape : Validation	
Phase 5 <i>Confrontation</i>	Des résultats mathématiques aux résultats réels Il s'agit de traduire les résultats mathématiques dans les termes du modèle réel. Dans le cas où les résultats mathématiques sont corrects, il s'agit de confronter les deux modèles, mathématique et réel, afin de formuler des réponses et de « <i>relativiser ces réponses par rapport aux hypothèses de modèle</i> (sous-entendu ceux du modèle réel) » (Henry, 1999, p. 29). Dans le cas où les résultats mathématiques sont erronés, on ne peut pas conclure.
Phase 6 <i>Interprétation</i>	Des résultats réels à « <i>situation model</i> » Les réponses obtenues dans la phase 5, sont interprétées « <i>pour apprécier leur validité et leur étendue dans la situation concrète</i> » (Ibid., p. 29). Soit les résultats mathématiques (corrects) sont en adéquation avec la réalité, auquel cas on accepte le modèle, puis on formule des réponses au problème posé dans la situation réelle. Soit les résultats ne sont pas conformes et l'on recommence le cycle de modélisation.
Phase 7 <i>Réponse</i>	De « <i>situation model</i> » à « <i>real situation</i> » Formulation de la réponse au problème posé à l'origine.

TABLE 8.1 – Les étapes du cycle de modélisation

Ces trois étapes et les différentes phases associées interviennent dans le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005) de la manière suivante :

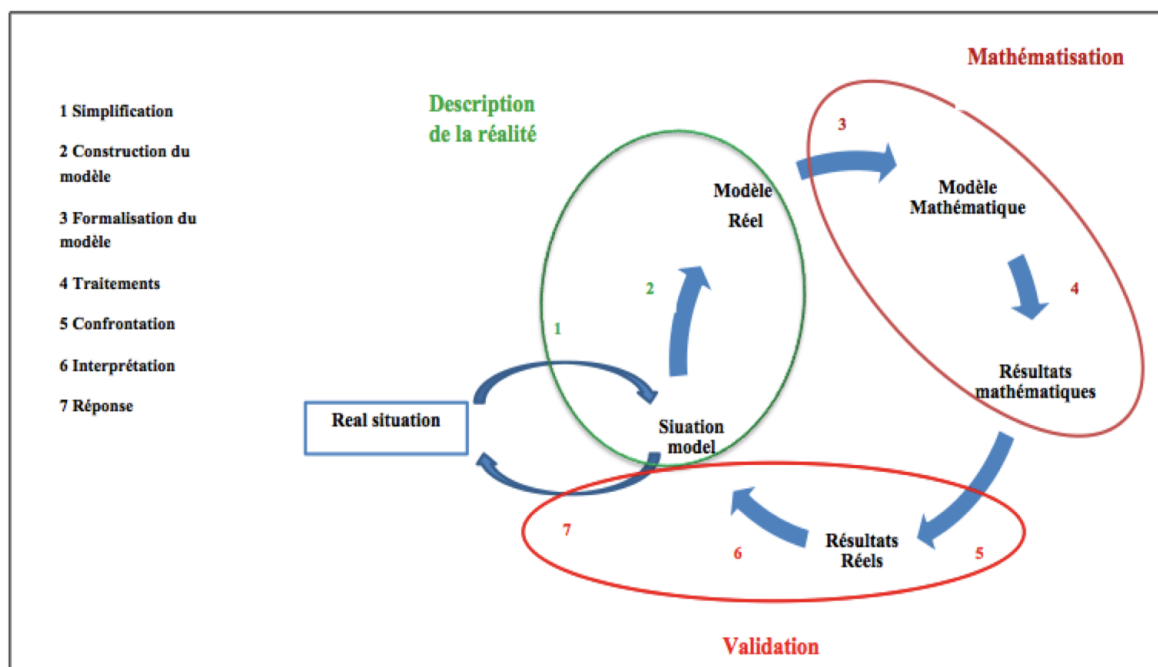


Fig. 8.3 – Les trois grandes étapes du cycle de modélisation avec un modèle mathématique

Globalement, dans la modélisation, nous avons deux passages. Le premier, qui correspond aux étapes 1 et 2¹, est celui de *l'identification* du modèle réel et de « *la détermination ex-*

1. Les étapes 1, 2 sont représentées en ellipse sur la figure 8.3

périodique des paramètres qui interviennent alors comme hypothèses de modèle » (Henry, 1999, p. 30). Le second, qui correspond à l'étape 3², est celui de *la validation*, à savoir

« *l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs expérimentales correspondantes et la décision que le modèle est bien (ou pas) adapté à la situation étudiée* » (Ibid., p. 30).

Nous en déduisons que dans le cycle de modélisation, il y a deux sortes de validation. Une **validation interne** au modèle mathématique choisi qui s'effectue au sein même du modèle lors de l'étape de mathématisation. Il s'agit alors de valider les résultats obtenus *via* un traitement mathématique. Une autre sorte de validation est celle qui apparaît à l'étape 3 du cycle de modélisation et qui renvoie à la confrontation des résultats mathématiques obtenus par un traitement mathématique avec les résultats réels. La validation porte donc exclusivement sur le choix du modèle mathématique (dans le cas où les résultats mathématiques sont corrects) pour répondre au problème posé dans la situation réelle. Nous avons donc une validation qui est externe au modèle mathématique choisi. Ainsi, l'étape 3 du cycle de modélisation est qualifiée de **validation externe**. Le cycle de modélisation de la figure 8.3 devient :

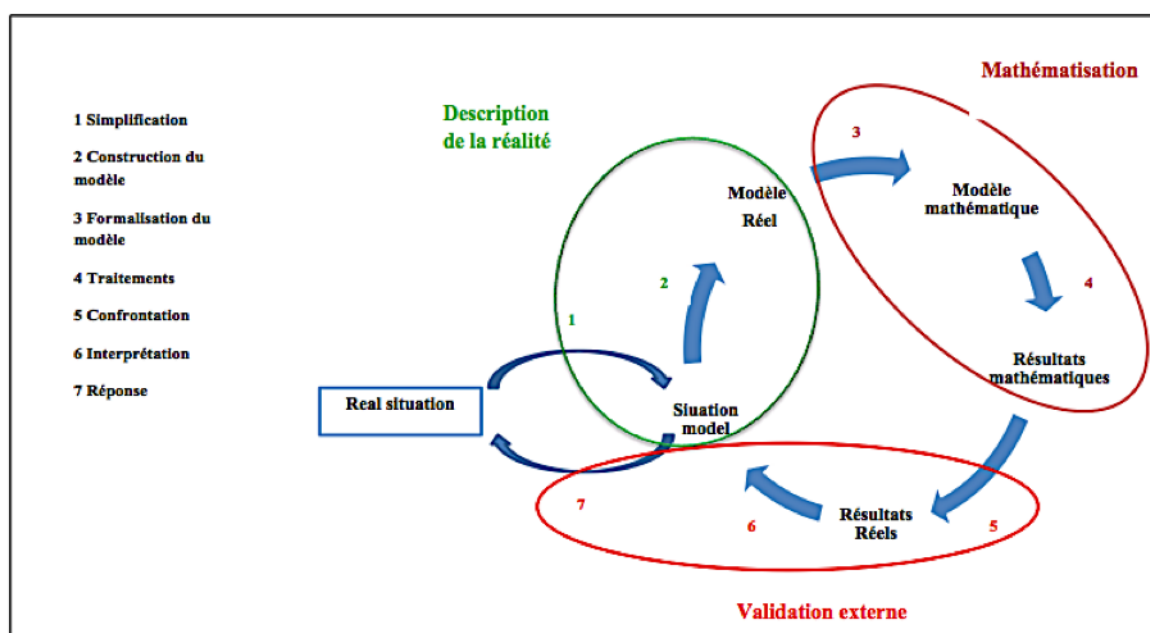


Fig. 8.4 – Les trois grandes étapes du cycle de modélisation avec un modèle mathématique

D'après Henry, les deux passages *identification* (étapes 1 et 2) et *validation* (étape 3) sont délicats, car ils « *relèvent d'une connaissance spécialisée des phénomènes étudiés* » (Henry, 1999, p. 30). C'est pourquoi, dans l'enseignement secondaire, on se limite à l'enseignement des situations « *simples faisant appel aux modèles les plus élémentaires* » (Ibid., p. 30). Il est toutefois possible de rencontrer des situations aléatoires dont le traitement fait appel

2. Ibid.

à des modèles mathématiques qualifiés de numériques dont les traitements nécessitent l'usage de simulation informatique.

8.3 Modélisation avec un modèle mathématique de type numérique

Barclay (2005) distingue deux sortes de modèles mathématiques. Les modèles mathématiques dits *analytiques* qui comportent uniquement les outils mathématiques « traditionnels » (tels que les équations, les lois de probabilités, etc.). Les modèles mathématiques dits *numériques*, qui sont « des modèles informatiques (modèles souvent appelés numériques³ [...]) » (Barclay, 2005, p. 148) et dans lesquels les outils mathématiques sont généralement implicites. Ces modèles sont « obtenus par des méthodes numériques d'approximation par discrétisation » (Kuzniak, Cours de Master 2). Ils permettent de réaliser des simulations informatiques. Ces modèles mathématiques de type numérique sont très souvent utilisés dans le domaine des probabilités avec la simulation d'expériences aléatoires. Dans ce cas, nous présentons le cycle de modélisation comme suit :

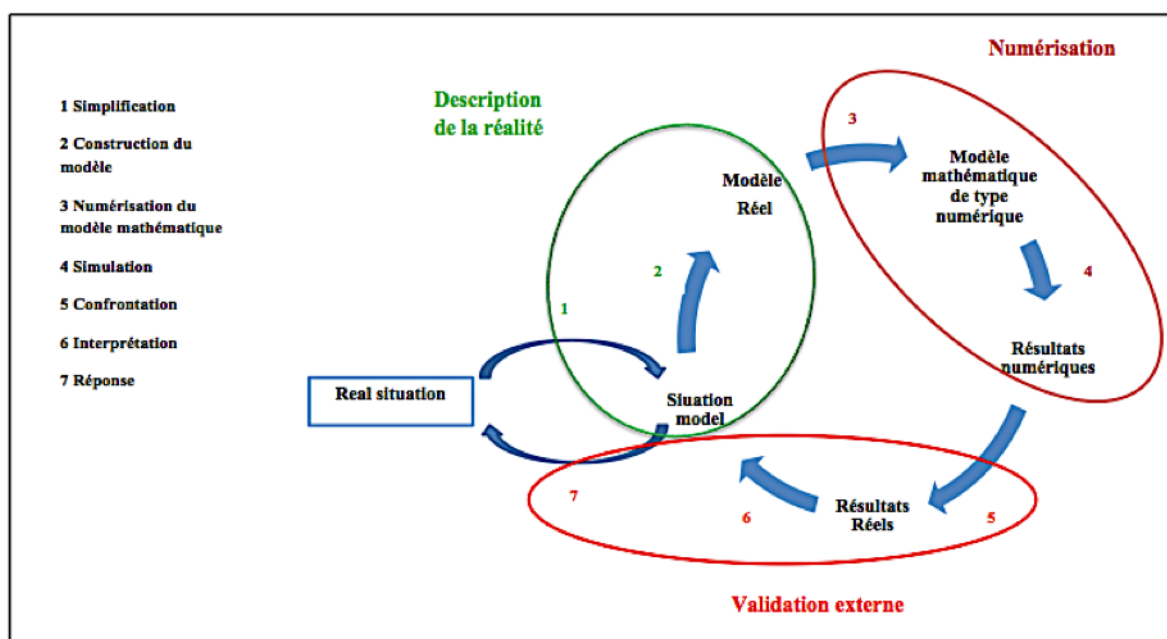


Fig. 8.5 – Cycle de modélisation avec un modèle mathématique de type numérique

De manière générale, le cycle de modélisation avec un modèle mathématique de type numérique fonctionne comme celui avec un modèle mathématique de type analytique à l'exception de l'étape de la validation qui est différente. En effet, avec un modèle mathématique de type numérique, la validation va obligatoirement changer puisqu'elle dépend

3. Notre traduction.

de ce modèle. Dans le cadre de la résolution de problèmes faisant appel à la modélisation, le travail de validation dépend du modèle mathématique choisi pour répondre au problème. Or, comme nous l'avons signalé précédemment, une des spécificités de l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire est l'étude des situations aléatoires faisant appel à la modélisation. Comment le travail de validation s'effectue-t-il dans l'étude de ces situations aléatoires ?

8.4 Modélisation et travail de validation dans l'ETM_P

Dans l'enseignement des probabilités, le cycle de modélisation consiste à partir d'une expérience réelle que l'on épure en lui associant une liste d'issues et un protocole expérimental précis. Cela permet d'assurer la répétition de cette expérience dans les mêmes conditions créant ainsi une expérience aléatoire. Cette expérience aléatoire est par la suite modélisée. La modélisation d'une expérience aléatoire est effectuée *via* la description de l'expérience. Cette description utilise le langage courant (le domaine réel) et aboutit à une représentation théorique utilisant un langage probabiliste appartenant au domaine d'interprétation du modèle probabiliste. Nous aboutissons donc au cycle de modélisation suivant, dans l'enseignement des probabilités :

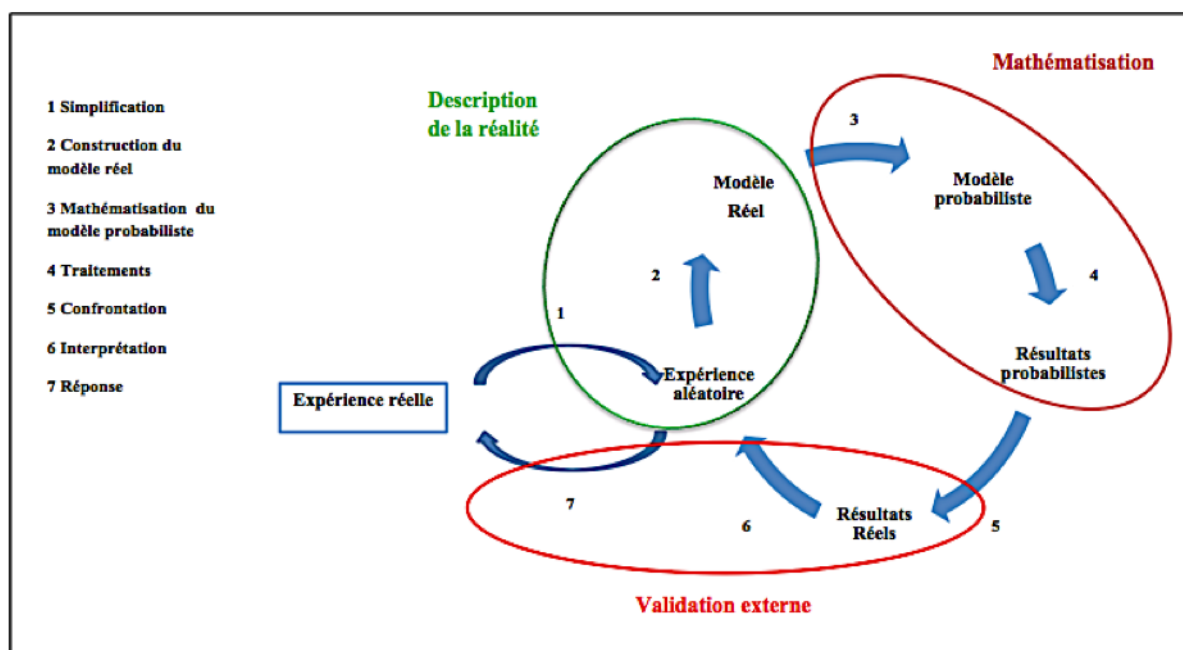


Fig. 8.6 – Cycle de modélisation dans l'enseignement des probabilités

8.4.1 Modélisation avec un modèle probabiliste de type analytique

Nous avons identifié, à partir de l'étude de l'ETM_P de référence dans l'enseignement secondaire, trois sortes de modèles probabilistes de type analytique proposés dans l'enseignement des probabilités :

- **Espace probabilisé** $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec Ω l'ensemble fini des issues de l'expérience aléatoire (cf. paragraphe 1.1.1 du chapitre 1 de la première partie).
- **Espace probabilisé avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité**. Ces lois de probabilité sont explicitées dans les programmes du secondaire (cf. paragraphe 1.1.3 du chapitre 1 de la première partie).
- **Espace probabilisé avec les arbres pondérés**, qui figure officiellement dans les programmes de la classe de Terminale, mais qui est largement utilisé par les enseignants dès la classe de 3^e.

Dans les deux premiers cas de modèles probabilistes, le traitement mathématique s'effectue à l'intérieur du registre du calcul symbolique (calculs utilisant des formules mathématiques), alors que dans le troisième cas, il s'agit d'un traitement à l'intérieur d'un registre sémiotique. Pour illustrer cette différence de traitement, nous proposons d'étudier l'exemple du « lancer de pièce de monnaie » étudié par Parzysz (2009) :

Exemple 1 : « le lancer de pièce de monnaie »

On considère l'expérience réelle du lancer d'une pièce de monnaie. On observe qu'au premier contact de la pièce au sol on a trois résultats qui apparaissent : pile, face ou tranche. On se pose alors la question de la probabilité d'apparition de deux piles à l'issue de 4 lancers. Cette question va piloter le choix des éléments de la situation jugés pertinents pour pouvoir y répondre.

1) Le modèle d'espace probabilisé avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité

Dans le cycle de modélisation avec un modèle probabiliste, l'exemple 1 peut être traité de cette manière :

Phase 1 : passage de l'expérience réelle à l'expérience aléatoire

On décrit l'expérience réelle en ne conservant que certaines caractéristiques jugées pertinentes au regard de la question posée. Dans notre exemple, il s'agit de retenir le terme « pièce de monnaie » pour désigner un objet parfait (objet mathématique) et les termes « face » et « pile » pour désigner les deux faces de l'objet idéalisé. L'expérience réelle est représentée par une expérience aléatoire décrite comme suit : « on lance quatre fois de suite une pièce de monnaie et on note le nombre de pile apparu ».

Phase 2 : passage de l'expérience aléatoire à la construction du modèle réel

On définit un protocole expérimental de l'expérience considérée en dégagant les hypothèses du modèle réel. Dans le cas de l'expérience aléatoire de lancers de pièce de monnaie, Parzysz (2009, p. 94) propose les hypothèses suivantes pour construire un modèle réel :

(H1) : Un résultat sera « pile » ou « face » selon le côté de la pièce visible à l'issue du lancer.

(H2) : Si la pièce tombe sur la tranche, le lancer sera annulé.

(H3) : La pièce est « équilibrée », c'est-à-dire que « pile » et « face » ont autant de chances d'être obtenus.

(H4) : Les lancers sont indépendants.

Phase 3 : passage du modèle réel au modèle probabiliste

Dans la situation du lancer de pièce de monnaie, au vu des hypothèses, on considère la loi binomiale de paramètres n et p , où n est le nombre de lancers et p la probabilité d'obtenir pile, soit $\frac{1}{2}$.

Phase 4 : du modèle probabiliste aux résultats probabilistes (traitements)

Considérons un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$ et le succès S : « obtenir pile ». La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$ d'où :

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{1}{16} \binom{4}{k} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

La probabilité d'obtenir deux « pile » à l'issue de 4 lancers est de $\frac{6}{16}$, soit environ 0,37.

2) Le modèle d'espace probabilisé et les arbres pondérés

Plusieurs travaux en didactique, en particulier ceux de Parzysz (1995), Pluinage (2005), Dupuis et Rousset-Bert (1996), ont mis en évidence que l'arbre pondéré possède les propriétés d'un registre de représentation, « pourvu qu'on le nantisse de règles de traitement et de conversion précises, il possède les caractéristiques d'un registre de représentation » (Parzysz, 2011, p. 143).

En reprenant la situation du lancer de la pièce de monnaie avec les hypothèses du modèle réel, alors les phases 3 et 4 du cycle de modélisation deviennent :

Phase 3 : passage du modèle réel au modèle arbre pondéré

La traduction d'une expérience aléatoire en arbre pondéré entraîne à réaliser une conversion en deux étapes :

- 1- Étape 1 : convertir le registre langagier (dans lequel l'expérience est proposée) en un arbre des possibles (ou d'occurrences).
- 2- Étape 2 : transformation de l'arbre des possibles en arbre pondéré.

Parzysz souligne que la première étape n'est pas nécessaire, mais elle a un intérêt didactique car elle permet d'explicitier les divers cadres et registres qui interviennent et de montrer comment ils s'articulent. Or, dans l'enseignement, cette première étape est très souvent mise de côté. La conversion dans le registre arbre se fait suivant ces trois règles :

- 1- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même noeud est 1.
- 2- La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- 3- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements associés aux chemins qui mènent à E .

Ces règles sont des traductions (conversions au sens de Duval) de propriétés de la probabilité. À partir des hypothèses formulées précédemment, l'expérience aléatoire est modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous :

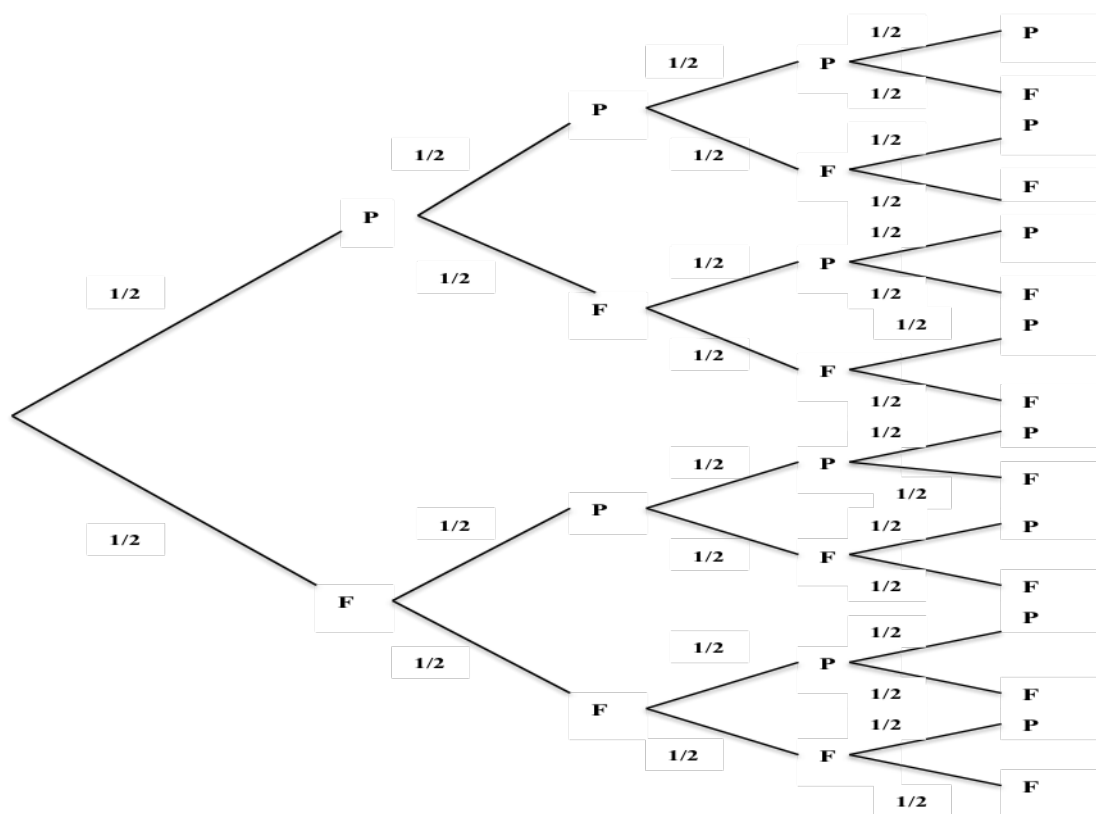


Fig. 8.7 – Modélisation d'une expérience aléatoire avec un arbre pondéré

Phase 4 : du modèle mathématique aux résultats mathématiques (traitements)

On cherche la probabilité d'obtenir deux « pile » à l'issue des quatre lancers. Cela revient à calculer la somme des probabilités des chemins contenant exactement deux « lettres » P , soit les chemins : $PPFF$, $PFPF$, $PFFP$, $FPPF$, $FFPP$, $FPPF$. D'où la probabilité $p = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = \frac{6}{16}$.

La probabilité d'obtenir deux « pile » à l'issue de quatre lancers est de $\frac{6}{16}$, soit environ 0,37.

Le résultat probabiliste (égal à $\frac{6}{16}$) obtenu à l'aide du modèle d'espace probabilisé avec la loi de probabilité ou avec un arbre pondéré doit être confronté au résultat fourni par une expérience réelle (autrement dit les résultats réels). Mais cela ne peut se faire avec l'exemple que nous avons choisi ici puisqu'il manque des données fournies par une expérience réelle (du lancer de pièce de monnaie).

8.4.2 Modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique

Du point de vue de l'enseignement des probabilités au niveau secondaire, les auteurs des documents institutionnels (programmes et documents ressources) encouragent fortement les traitements des situations aléatoires faisant appel aux modèles numériques et l'usage des simulations ; en particulier à la fin de la scolarité obligatoire, lorsque les modèles probabilistes de type analytique ne sont pas disponibles pour les élèves. Les auteurs des documents institutionnels insistent sur un travail avec les modèles probabilistes de type numérique faisant référence à des simulations informatiques d'expériences aléatoires pour traiter des situations aléatoires. Les simulations informatiques sont envisagées par ces auteurs car le développement des outils de calcul informatique a grandement modifié les pratiques mathématiques. L'utilisation d'un ordinateur ou d'une calculatrice permet d'expérimenter une expérience aléatoire par simulation, en la répétant un grand nombre de fois. La simulation est donc un outil intéressant pour établir des conjectures, résoudre des problèmes trop difficiles ou impossibles à traiter directement dans un modèle probabiliste de type analytique. Comment justifier cette simulation ? Quel est le nombre de répétitions de l'expérience nécessaires ? La réponse à ces questions est fondée sur la loi des grands nombres qui permet de déclarer qu'en réalisant une expérience aléatoire un grand nombre de fois, de manières indépendantes, les fréquences observées se rapprochent des probabilités à évaluer.

1) Simulation d'une expérience aléatoire

La simulation est une manière de représenter une situation de façon analogique utilisant des outils mathématiques. En fait,

« simuler une expérience aléatoire consiste à reproduire « virtuellement » des résultats analogues à ceux que l'on aurait obtenus en réalisant « physiquement » l'expérience aléatoire » (Dutarte, 2002, p. 95).

Une définition plus précise de la simulation serait alors :

« la simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude » (Dodge, 1993, cité par Parzysz (2007, p. 32)).

Cette définition de la simulation souligne la nécessité d'élaborer, avant de simuler, un modèle théorique de l'expérience aléatoire étudiée. C'est donc le modèle lié à l'expérience aléatoire qui sera simulé et non l'expérience elle-même. En s'inspirant de cette citation, Parzysz (2009) définit la simulation comme un processus qui consiste à remplacer l'expérience aléatoire initiale par une autre expérience qui lui est équivalente. En d'autres termes, *« l'adéquation entre les deux est en quelque sorte assurée par la qualité du modèle probabiliste déterminant la simulation »* (Parzysz, 2009, p. 93). Ces deux expériences ayant le même modèle, cela garantit leur équivalence. La simulation nécessite donc de modéliser dans un premier temps la situation afin de travailler avec des *générateurs aléatoires* (des modélisateurs du hasard) ayant pour propriété l'équirépartition des nombres. Mais cela ne sous-entend pas que l'on connaisse une loi mathématique qui explique le phénomène étudié. Ainsi, pour simuler une expérience aléatoire, on peut soit constituer des échantillons d'une certaine taille et cumuler les résultats, soit programmer et laisser tourner l'ordinateur puis observer une sorte de stabilisation de la fréquence.

Dans le cas où le modèle probabiliste de type analytique n'est pas disponible, Parzysz (2009) propose de construire un modèle en suivant cette démarche :

« vu le protocole expérimental et en fonction des outils que j'ai à ma disposition, je propose un modèle pour cette expérience. Les données expérimentales, confrontées aux simulations de ce modèle, me permettent ensuite ou non d'accepter ce modèle comme adéquat ou de le rejeter » (Parzysz, 2009, p. 93).

Cette démarche caractérise donc la construction d'un modèle réel. Ce modèle réel permet de faire le lien entre l'expérience initiale (expérience 1) et l'expérimentation (expérience 2). Cette mise en lien entre ces deux expériences est traduite dans le schéma ternaire ci-dessous :

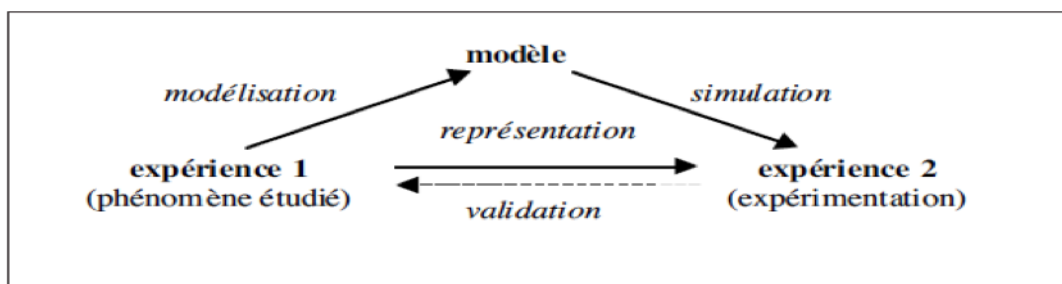


Fig. 8.8 – Schéma ternaire (Parzysz, 2009, p. 95)

Dans ce schéma ternaire, le terme « modèle » renvoie au modèle réel et non pas au modèle mathématique tel qu’il est défini dans le cycle de modélisation. Le terme « validation » employé renvoie à la confrontation des résultats obtenus par l’expérience 1 à ceux obtenus par l’expérience 2.

Nous considérons que ce schéma ternaire, tel qu’il est défini par Parzysz, est une partie du cycle de modélisation. En effet, l’expérience 1 correspond à l’expérience aléatoire initiale et l’expérience 2 à l’expérience aléatoire implémentée dans la machine (ordinateur ou calculatrice). Parzysz (2009) souligne que :

« le passage de l’expérience aléatoire à sa simulation ne va pas de soi [...]. C’est pourquoi je pense qu’il faut, dans les premiers temps, consacrer suffisamment de temps à sa mise en place, en mettant en évidence les hypothèses qui le sous-tendent et qui justifient la procédure de simulation, et en s’efforçant de faire « coller » celle-ci, autant que faire se peut, à celle de l’expérience qu’on étudie, sans vouloir imposer aux élèves des procédures, certes plus simples ou plus efficaces, mais qui ne feront pas sens pour eux » (Parzysz, 2009, p. 102).

Il insiste sur le choix des hypothèses et la construction d’un modèle réel aussi proche que possible de l’expérience initiale. Concernant la non disponibilité (vis-à-vis des élèves) du modèle mathématique de l’expérience aléatoire, il ajoute que :

« l’accès à la notion de modèle qui est une finalité visée à terme par le cycle terminal, peut être préparé par l’étude et la simulation d’expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doivent permettre aux élèves de se convaincre de l’analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d’expérience, constituant en quelque sorte une classe d’équivalence d’expériences aléatoires » (Parzysz, 2009, p. 102).

Ainsi, l’idée de Parzysz — pour pallier à la difficulté de l’absence du modèle probabiliste de type analytique — est de construire (ou d’utiliser) un modèle probabiliste de type numérique faisant appel à la simulation. Par rapport au cycle de modélisation avec le modèle

probabiliste, c'est la deuxième étape concernant la mathématisation et la formalisation du modèle probabiliste qui change. Ainsi, la phase 3 (la numérisation du modèle réel) consiste à écrire le modèle réel dans le langage de la machine (pseudo-code), puis la phase 4 (traitements numériques) à réaliser la simulation. Dans ce cas nous obtenons le cycle de modélisation suivant :

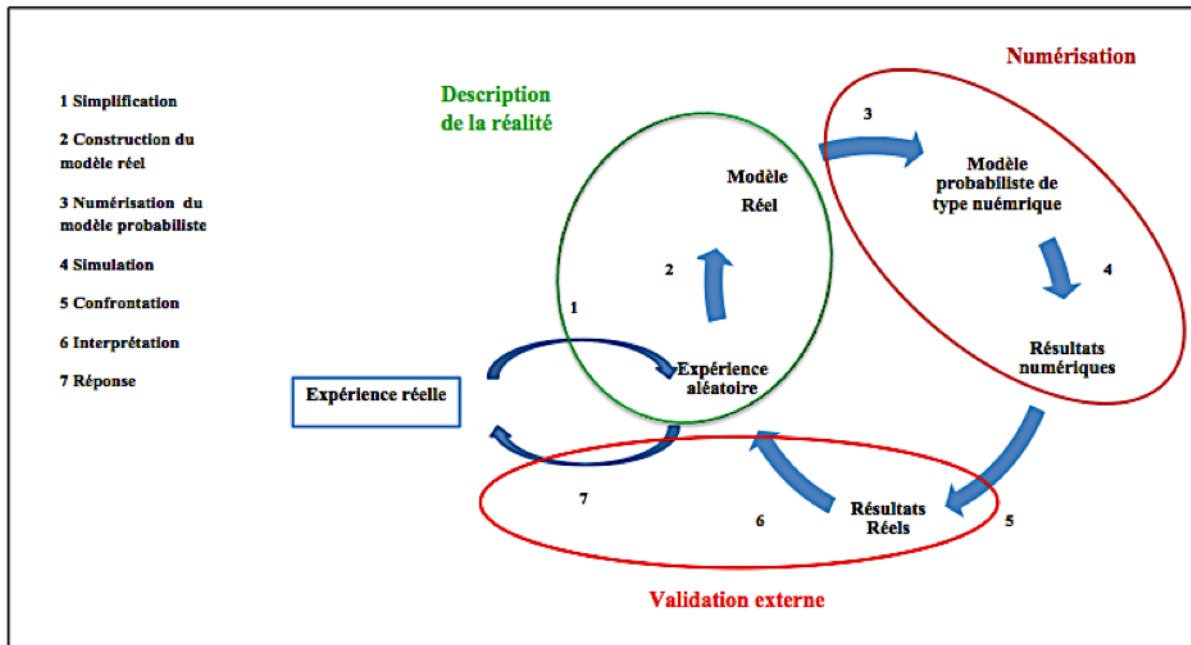


Fig. 8.9 – Cycle de modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique

Dans ce cycle de modélisation, l'expérience aléatoire est remplacée par une simulation. Cela permet d'estimer la probabilité d'un événement par la fréquence d'apparition de celui-ci lorsque l'on répète un grand nombre de fois cette simulation.

2) Traitements avec un modèle probabiliste de type numérique

Nous reprenons l'exemple très simple de l'expérience aléatoire du lancer de pièces de monnaie vu précédemment pour illustrer le traitement numérique dans un modèle probabiliste de type numérique et à l'aide de la simulation. Nous verrons plus tard les traitements numériques dans la résolution de situations aléatoires plus complexes. Les deux premières phases du cycle de modélisation restent identiques à celles du cycle de modélisation avec le modèle probabiliste.

Phase 3 : Numérisation du modèle réel

Il s'agit de transposer les hypothèses en instructions informatiques. Cela revient à traduire les hypothèses du modèle réel en termes de producteurs du générateur aléatoire, par l'application « consistant à associer à chaque nombre x fourni par la machine l'une des

deux issues possibles pour la pièce » (Parzysz, 2009, p. 94). Cette traduction d'hypothèses⁴ est résumée dans ce tableau :

Hypothèses	Traduction des hypothèses dans le modèle probabiliste de type numérique
H1 : <i>un résultat sera « pile » ou « face » selon le côté de la pièce visible à l'issue du lancer.</i>	à $x < 0,5$ on associe « face ». à $x \geq 0,5$ on associe « Pile ».
H3 : <i>si la pièce est « équilibrée », c'est-à-dire que « pile » et « face » ont autant de chances d'être obtenus.</i>	« est ipso facto vérifiée puisque on suppose l'équirépartition des nombres (« acte de foi ») » (Ibid., p. 94).
H4 : <i>l'indépendance des lancers.</i>	correspond au caractère « aléatoire » du générateur.

TABLE 8.2 – La traduction des hypothèses du modèle réel dans le modèle probabiliste de type numérique

Phase 4 : Traitements *via* la simulation informatique

Il s'agit de l'implémentation dans la machine. Par exemple, l'utilisation d'un tableur (avec feuille de calcul) pour réaliser une simulation informatique à l'aide de la fonction *ALEA()* (donnant un nombre aléatoire compris entre 0 et 1) :

Traduction des hypothèses dans le modèle numérique	Traduction dans une feuille de calcul du tableur
(H1) à $x < 0,5$ on associe « face ».	On dénombre toutes les valeurs inférieures à 0,5 qui apparaissent dans la colonne associée à « face » (dans une feuille de calcul, il s'agit d'entrer cette formule : = NB.Si(A1 : A4 ; "< 0,5)").
(H2) à $x \geq 0,5$ on associe « pile ».	On dénombre toutes les valeurs supérieures à 0,5 qui apparaissent dans la colonne associée à « pile » (dans une feuille de calcul, il s'agit d'entrer cette formule : = NB.Si(A1 : A4 ; ">= 0,5)").
(H3) <i>est ipso facto vérifiée puisque on suppose l'équipartition des nombres (« acte de foi ») (Ibid., p. 94).</i>	(H3) fait déjà partie du générateur aléatoire <i>ALEA()</i> .
(H4) <i>correspond au caractère « aléatoire » du générateur.</i>	(H4) fait déjà partie du générateur aléatoire <i>ALEA()</i> .

Phase 5 : confrontation des résultats numériques et réels

La simulation fournit des résultats numériques, qui sont des résultats empiriques. Ils

4. L'hypothèse H2 n'est pas traduite dans le modèle probabiliste de type numérique.

seront confrontés aux résultats réels afin d'adopter ou de rejeter le modèle réel choisi. D'après Gaydier (2011), les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont accessibles à des élèves qui sont au début de l'apprentissage des probabilités (niveaux 3^e et 2^{nde}). Par contre, elle affirme que l'hypothèse (H4) fait appel à la notion d'indépendance des événements qui peut poser des difficultés aux élèves à ce niveau de classe. Cette notion n'est en effet abordée qu'à partir de la classe de première. Ainsi, cette confrontation des résultats peut s'appuyer :

- soit sur la répétition de l'expérience avec l'utilisation de la loi des grands nombres ;
- soit sur le fait que plusieurs expériences aléatoires ont le même modèle mathématique. Il convient alors de centrer le travail sur la mise en évidence des similitudes de ces expériences aléatoires. Plus précisément, d'associer une simulation à l'aide d'un tableur pour chacune des expériences aléatoires et de faire observer les similitudes de chacune des feuilles de calcul liées à chacune des expériences aléatoires.

Ceci afin que l'élève puisse les considérer comme équivalentes (Parzys, 2009).

Les résultats de la simulation sont obtenus dans le domaine de la statistique descriptive (SD). Ils sont par la suite interprétés dans le domaine des probabilités à l'aide de la loi des grands nombres (notion issue du domaine des probabilités) ou des intervalles de confiance (notion issue du domaine de la statistique inférentielle (SI)).

8.5 Conclusion

Dans la première étape du cycle de modélisation, on associe à l'expérience réelle une liste d'issues et un protocole expérimental garantissant la répétition de cette expérience dans les mêmes conditions. Celle-ci devient alors une expérience aléatoire que l'on modélisera par la suite. La construction du modèle réel de l'expérience aléatoire conduit à émettre des hypothèses qui permettent de justifier cette construction. Or, ces hypothèses sont fondées sur des propriétés probabilistes. Celles-ci sont donc construites à partir des éléments du référentiel théorique de l'ETM_P. Ainsi le travail de validation est initié dans la dimension discursive et est dirigé par le paradigme P1.

Dans la deuxième étape, plusieurs cas possibles concernent le travail de validation :

- 1^{er} cas : on utilise un modèle probabiliste de type espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ ou de type espace probabilisé avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité (cf. exemple du lancer de pièce de monnaie). Dans ce cas, le travail de validation est clos sur la dimension discursive. Les traitements probabilistes sont réalisés *via* des outils théoriques (formules, calculs, etc.) du référentiel théorique.
- 2^e cas : on utilise un modèle probabiliste avec les arbres pondérés. Les arbres pondérés sont des outils à la fois sémiotiques puisqu'ils permettent d'illustrer les situations aléatoires, et des outils technologiques pour effectuer les traitements

calculatoires (cf. exemple du lancer de pièce de monnaie). Le travail de validation est alors placé dans le plan [Sem-Ins] ou dans le plan [Ins-Dis] et est dirigé respectivement par le paradigme P1 ou P1 articulé avec P2 (P1|P2). Les arbres pondérés peuvent également être des outils théoriques de preuve (Kuzniak, Nechache, et Drouhard, 2016). Dans ce cas, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] et est dirigé par le paradigme P2.

- 3^e cas : on utilise un modèle probabiliste de type numérique avec la simulation et les outils de la statistique descriptive. Le travail de validation est basé sur la dimension discursive pour construire le modèle probabiliste de type numérique. Il est aussi basé sur la dimension instrumentale afin d'effectuer les traitements numériques (par la simulation) et de produire des résultats numériques. Dans ce cas, le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis] et est dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (P1|P2).

Dans les deux premiers cas, les résultats obtenus sont des résultats théoriques (les valeurs sont exactes). Dans le troisième cas, les résultats obtenus sont empiriques. On peut alors estimer des valeurs et faire un choix arbitraire. Le choix de ces valeurs est assuré par la loi des grands nombres ou par les intervalles de confiance.

Dans la troisième étape, nous obtenons des résultats qui sont soit théoriques soit empiriques. Ces résultats vont être confrontés aux résultats réels afin d'accepter ou de rejeter le modèle probabiliste (de type analytique ou numérique) choisi. Il s'agit d'interpréter les résultats théoriques ou empiriques en les relativisant avec les hypothèses du modèle réel choisi. On conclut donc à partir des hypothèses du modèle réel. Ainsi, la confrontation des résultats revient à bâtir un argumentaire appuyé sur les hypothèses du modèle réel pour prendre une décision. Par conséquent, selon que l'on se place dans un modèle probabiliste de type analytique ou de type numérique, les arguments avancés sont différents.

Dans le cadre de la résolution de problèmes probabilistes faisant appel à la modélisation, le travail mathématique de validation dépend du modèle probabiliste utilisé pour faire les traitements. Comme nous l'avons souligné auparavant, selon le choix que l'on fait du modèle probabiliste, le travail de validation est différent. Cette différence se situe précisément au niveau de la deuxième étape du cycle de modélisation. Dans cette étape, si l'on utilise un modèle probabiliste de type analytique, les traitements sont basés sur des calculs probabilistes (à l'aide de formules ou d'arbres pondérés) donnant lieu à des résultats théoriques relevant du domaine des probabilités. Alors que dans le cas où l'on utilise un modèle probabiliste de type numérique, le traitement numérique s'effectue à l'aide de la simulation donnant lieu à des résultats empiriques relevant du domaine de la statistique qui sont par la suite interprétés dans le domaine des probabilités. Ces traitements internes dans les deux types de modèles probabilistes relèvent de la validation

interne à ces modèles. C'est donc la validation interne qui va orienter la validation externe en la plaçant dans le paradigme P2 ou dans le paradigme P2 articulé avec le domaine de la statistique (descriptive ou inférentielle).

En conclusion, le travail de validation dans le cas des situations probabilistes faisant appel à la modélisation est différent selon le modèle probabiliste choisi. Il nécessite des changements de domaines et des jeux de paradigmes. Ce travail de validation sera représenté comme suit :

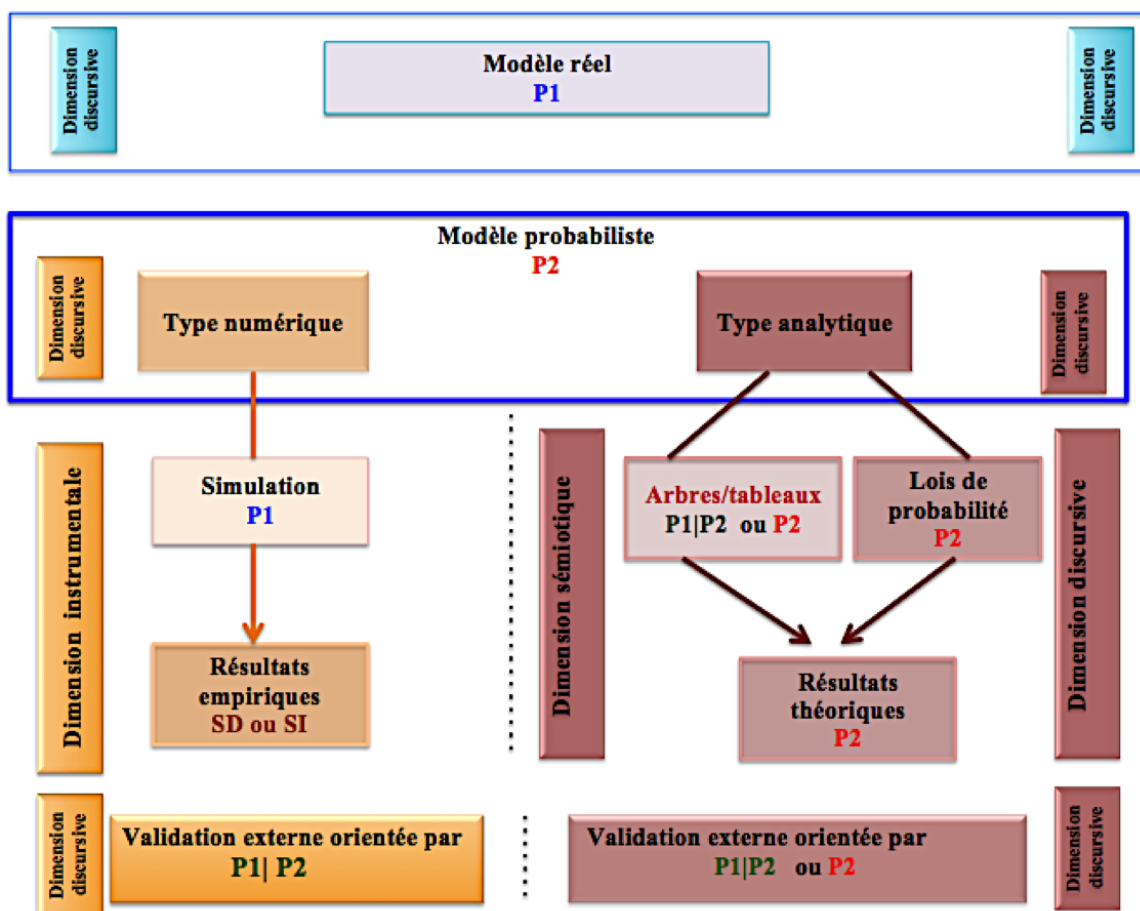


Fig. 8.10 – Le travail de validation dans la modélisation probabiliste

Dans l'enseignement secondaire, la construction du modèle probabiliste de type numérique est basé sur des connaissances qui ne sont pas disponibles dans l'espace de travail personnel des élèves. C'est pourquoi, la construction de ce modèle est habituellement prise en charge par le professeur qui laisse aux élèves l'exécution de la simulation. La pratique du cycle de modélisation probabiliste peut s'avérer difficile pour les élèves, en particulier pour ceux des classes de 3^e et de 2^{nde}. En effet, le cycle de modélisation probabiliste consiste à faire des allers-retours entre la réalité et le modèle en partant de l'observation et de la description de la réalité. Puis, à travers les différentes phases du cycle, on est amené à s'extraire de la réalité afin de construire progressivement le modèle. Enfin, on revient à la réalité pour formuler une réponse. Ces différentes phases, en par-

ticulier celles qui relèvent de l'étape de la mathématisation ou de la numérisation, sont très délicates à pratiquer à ces deux niveaux de classes. Le cycle de modélisation met en jeu deux sortes de validation, l'une interne au modèle probabiliste et l'autre externe au modèle probabiliste. Cela implique un nouveau *système de validité*, propre au domaine des probabilités, proposé aux élèves, entraînant une rupture épistémologique du statut de la validation (Lahanier-Reuter, 1999). C'est sans doute pour cela que la plupart des situations proposées (dans les manuels scolaires ou par les enseignants) aux élèves sont des situations déjà modélisées par un modèle probabiliste (Henry, 2005). Leur traitement est clos dans le modèle donnant lieu à des validations internes au modèle.

En conclusion, la résolution des problèmes probabilistes faisant intervenir la modélisation requiert la construction d'un modèle pour y répondre. Cette construction passe par la mise en œuvre des différentes étapes du cycle de modélisation, entraînant des changements de domaines et des changements de paradigmes. Nous avons donc là une caractéristique de l'une des catégories de tâches (tâches riches) qui nécessite un travail de validation plus élaboré. Ainsi, selon la catégorie des tâches proposées dans l'ETM_P, le travail de validation va être plus ou moins complexe à effectuer. Nous proposerons dans le chapitre suivant une définition plus précise de cette catégorie de tâche.

Chapitre 9

Travail de validation et catégories de tâches mathématiques

Rappelons que dans la conclusion de la partie 2, nous avons souligné que les tâches proposées dans les $ETM_{\mathcal{P}}$ idoines observés relevaient toutes de l'approche laplacienne. Leurs traitements étaient internes au modèle d'équiprobabilité. Les validations ainsi pratiquées dans ces $ETM_{\mathcal{P}}$ sont des validations internes au modèle. Mais, dans le chapitre précédent, nous avons pointé le rôle de la modélisation dans le domaine des probabilités. Nous avons discuté amplement du travail de validation lié aux tâches qui font appel au cycle de modélisation. Cela nous a permis de mettre en évidence que le travail de validation dépendait du modèle probabiliste (analytique ou numérique) choisi, mais également de l'existence de deux sortes de validation (interne et externe) qui caractérisent le travail de validation dans l'exécution des tâches probabilistes mettant en jeu la modélisation. Cette différence du travail de validation est donc liée à la tâche proposée dans l'ETM. L'étude du travail de validation nécessite donc l'examen de la tâche qui déclenche ce travail.

Nous avons fait le choix de mener notre quête de la caractérisation de la validation sous l'angle des espaces de travail mathématique. Cette analyse du travail de validation est également articulée avec l'analyse de la tâche qui induit ce travail de validation au sein de l'ETM. Dans un premier temps, l'étude des tâches dans un espace de travail peut être envisagée à travers deux approches complémentaires : praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999) et la double approche (Robert, 2007). La première approche permet d'effectuer une étude fine des types de tâches avec leurs techniques et les savoirs théoriques. La deuxième approche s'intéresse à l'écart entre ce qui est attendu de l'élève et ce qui a été réellement réalisé. La tâche mathématique dans l'ETM est donc définie suivant deux approches, l'une épistémologique, l'autre cognitive. Nous pensons que cette manière de définir la tâche mathématique ne rend pas suffisamment compte de la complexité de la tâche dans l'ETM. Pour poursuivre notre étude, nous aurons alors besoin d'enrichir notre définition de la tâche mathématique dans l'ETM afin de rendre compte de manière plus précise de la complexité de la tâche et de sa réalisation *in situ*.

Notre objectif est de caractériser le travail de validation dans l'ETM idoine où se réalisent les interactions entre l'enseignant et les élèves autour des tâches. D'où la nécessité de catégoriser ces dernières en fonction de leur complexité ou des difficultés qu'elles peuvent engendrer chez les élèves. Cette catégorisation des tâches dans l'ETM deviendra par la suite notre outil méthodologique pour effectuer des analyses *a priori* des situations probabilistes. Nous considérerons quelques travaux portant sur la question de la tâche mathématique, en particulier ceux de Sierpinska pour la définition de la tâche mathématique et les travaux de Robert et de White et Mesa pour la complexité de la tâche.

9.1 La tâche mathématique : Sierpinska (2004)

Dans ses travaux de recherches sur les tâches problématisées, Sierpinska (2004) utilise l'expression tâche mathématique

*« dans un sens large, pour se référer à n'importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l'on peut prévoir »*¹(Sierpinska, 2004, p 10).

Sierpinska insiste sur le fait que la notion de « tâche » ne peut être identifiée à celle d'un problème. Cette distinction est justifiée par le fait que lorsqu'un élève s'engage dans la réalisation de la tâche mathématique, il agit comme un élève appartenant à une institution éducative. Il ne fera pas plus d'effort que le strict nécessaire pour « terminer la tâche » qui lui est proposée. Ce qui sous-entend que l'élève va chercher à terminer la tâche qui lui est donnée et non pas à résoudre un problème. Dans le cas où l'élève s'engage dans la résolution de problème, il n'agit plus comme un élève appartenant à une institution éducative mais comme un « intellectuel indépendant ». L'analyse d'une tâche mathématique s'appuie alors sur l'identification des connaissances et des savoirs mathématiques strictement nécessaires et suffisants pour terminer la tâche. Sierpinska ajoute que les réponses des élèves peuvent être sensibles au moindre changement de formulation d'une tâche ou aux différents contextes : mathématique, social, psychologique, didactique et logique. Quels sont alors ces éléments qui influencent les réponses des élèves dans l'exécution de tâches mathématiques ? Une réponse à cette question se trouve dans les travaux de Robert (2008) et de White et Mesa (2014). Ces travaux portent sur les analyses *a priori* de ces éléments qui influencent l'activité des élèves dans la résolution de tâches mathématiques.

1. Notre traduction.

9.2 Tâches avec ou sans adaptation : Robert (2007)

La double approche didactique et ergonomique se propose d'étudier l'écart entre ce qui est attendu de l'élève par le professeur et ce qui a été réellement réalisé par l'élève. La double approche nécessite donc une observation des pratiques mathématiques proposées dans le cadre scolaire. Dans cette approche, on étudie les effets de la tâche mathématique caractérisée par les différentes mises en fonctionnement des connaissances anciennes et nouvelles des élèves, déterminées à partir de ce qui est à leur disposition dans leur cours. Par *connaissances*, on sous-entend tout ce que l'enseignant introduit dans son cours comme objet ou comme outil ; ces derniers peuvent être des définitions, des théorèmes, des propriétés, des formules, mais aussi des méthodes, des algorithmes. Cela correspond à la fois à ce dont l'élève peut disposer pour résoudre les exercices et à ce que l'enseignant essaie de lui faire acquérir. Il s'agit donc d'analyser le travail mathématique produit par la donnée d'une tâche mathématique où l'élève a besoin de mobiliser des connaissances. L'analyse de tâche s'effectue *a priori* à partir de chaque énoncé. Il s'agit alors de détecter les adaptations de ces connaissances que les élèves auront à effectuer :

« reconnaissance des modalités d'application des propriétés, introduction des intermédiaires, mélanges et mises en relation de différentes connaissances ou domaine de travail, introduction d'étapes et ou de raisonnements, possibilité de choix de méthodes, lien avec ce qui précède (Robert, 2007, p. 276).

Ces mises en fonctionnement des connaissances sont classées en six catégories, mettant en jeu les différentes adaptations énumérées dans la citation ci-dessus. Ce classement est relatif à un niveau scolaire donné. Deux sortes de tâches sont distinguées en fonction de la nature du travail demandé : les tâches avec adaptation et celles sans adaptation, qui sont définies de la manière suivante :

- ***Tâches simples et isolées (sans adaptation).***

Ces tâches mènent à des applications immédiates de connaissances simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où une seule connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mise à part la contextualisation nécessaire (notamment le remplacement des données générales par des données particulières).

Il s'agit d'appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières). « *On parle alors d'application simple et isolée ou immédiate* » (Robert, 2007, p. 308). Selon Robert, l'exécution de ces tâches nécessite d'utiliser « *une seule fois une application immédiate d'une propriété du cours* » (Ibid., p. 308).

Ce sont des applications immédiates d'une propriété (sans adaptation) : l'activité des élèves consiste à remplacer des données générales par les données du contexte de l'exercice traité.

- **Tâches avec adaptation :**

Ces tâches nécessitent des adaptations de connaissances (appelées des connaissances mobilisables) qui peuvent être indiquées dans l'énoncé du problème. Et si c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, on parle alors de connaissances disponibles. Sept types d'adaptations se dégagent et peuvent intervenir simultanément :

A1 : « *les reconnaissances (plus ou moins partielles) des connaissances à utiliser et de leurs modalités d'application* » (Robert, 2007, p. 308). Par exemple en géométrie : reconnaître la ou les configurations où utiliser le théorème de Thalès.

A2 : « *l'introduction des intermédiaires : notations, points, expressions, calcul, tracé, etc.* » (Ibid., p. 308). Par exemple, en géométrie, ajouter un point ou prolonger un segment pour utiliser le théorème de Thalès. On peut aussi introduire des dynamiques expérimentales, des suites de calculs, des mouvements de figures, en faisant notamment intervenir un logiciel, que ce soit préconisé ou non.

A3 : « *les mélanges de plusieurs cadres ou notations* » (Ibid., p. 308), la modélisation, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres ou de registres (modes d'écriture) indiqués, les mises en relation, traductions ou interprétations. Par exemple, en géométrie, la résolution d'un exercice peut amener à la résolution d'une équation et à choisir les solutions positives. Ainsi, les énoncés qui jouent sur la dualité graphique/expression algébrique de fonctions contiennent automatiquement ce type d'adaptations. Des modifications de la formulation de la connaissance à adapter, l'utilisation d'un langage mixte (formule/langue courante), l'introduction de liaisons à expliciter, de précisions ou de compléments, l'introduction d'un ordre, voire de simplifications, peuvent faire partie des adaptations de ce type. Les jeux de cadres sont des changements de cadres non indiqués et donc à la charge de l'élève.

A4 : « *l'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va de l'utilisation répétée d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer* » (Robert, 2007, p. 309).

A5 : « *l'utilisation des questions précédentes dans un problème* » (Ibid., p. 308), la critique de résultats ou des méthodes mis en relief les uns avec les autres. Il s'agit d'une adaptation intervenant dans des problèmes qui conduisent à des mises en relation plus ou moins indiquées et nécessitent

souvent de ne garder qu'une partie des informations, voire de les modifier avant de les utiliser.

A6 : « *l'existence de choix forcés (un seul convient finalement) ou non* » (Ibid., p 309). La mise en œuvre d'une méthode à plusieurs pas correspond au choix forcé (étude d'une fonction par exemple).

A7 : « *la détection par les élèves d'un manque de connaissances adaptées au problème qu'ils se posent* ».

Les énoncés donnés aux élèves

« *portent sur des connaissances qui peuvent être **anciennes** ou en cours d'acquisition : c'est une première distinction à prendre en compte vis-à-vis des activités et des apprentissages qu'ils peuvent induire [...]* » (Robert, 2007, p. 308).

Ces connaissances peuvent être (directement ou indirectement) indiquées ou non, « *on parle alors de connaissances de type **mobilisables** (lorsqu'elles sont indiquées) ou **disponibles** (lorsqu'elles ne sont pas indiquées)* » (Ibid., p. 308). Le travail (sous-entendue l'activité) des élèves va être différent selon ce type de connaissances. En conclusion, il existe différentes tâches, différents mises en fonctionnement, différentes activités des élèves.

9.3 Rich tasks, simple et complex procedures : White et Mesa (2014)

Dans le cadre de l'étude de problèmes relevant du domaine de l'analyse, White et Mesa (2014) ont repris les catégories de tâches de Tallman et Carlson (2012) intervenants dans ces problèmes, qu'elles ont regroupées en trois catégories qui dépendent des *orientations cognitives* des tâches prescrites :

« *we choose the expression cognitive orientation over cognitive demand (the term commonly used in the literature) to honor that we attend to the goals of the task (or our perception of the instructor's goals of the task) and we cannot observe students' actual interaction with the task. This construct is, nevertheless, useful for characterizing the range of tasks instructors choose for students to engage with* » (White et Mesa, 2014, p. 6).

White et Mesa présentent une étude faite à grande échelle. C'est une étude quantitative avec un assez grand nombre de tâches (ce qui est intéressant), les critères qu'elles ont mis en place sont stables et permettent de faire une analyse des tâches. Ces catégories sont définies comme suit :

- ***Simple Procedures (Remember/Recall and Apply Procedure)***

Ces tâches font appel aux connaissances déjà mémorisées. Il s'agit donc de rappeler les algorithmes d'application de certaines procédures et de les réaliser. En général,

ces connaissances ou ces procédures sont indiquées dans l'énoncé de la tâche.

- **Complex Procedures (Recognize and Apply procedure)**

Dans ces tâches, il est question de reconnaître les connaissances ou les procédures sans qu'elles soient directement indiquées. On peut avoir besoin d'enchaîner plusieurs procédures.

- ***Rich Tasks (Understand, Apply Understanding, Analyze, Evaluate, Create)***

- Faire des interprétations, fournir des explications, faire des comparaisons ou des déductions qui nécessitent une compréhension d'un concept mathématique.

- Appliquer un concept pour répondre à une question ou à un problème. Ainsi, reconnaître la nécessité d'appliquer, d'exécuter ou de mettre en œuvre un concept dans le contexte d'un problème nécessitant une compréhension de ce concept.

- Analyser les éléments constitutifs du contexte et déterminer la manière dont ces différents éléments se rapportent les uns aux autres et à une structure globale. La différenciation et l'organisation sont des processus cognitifs caractérisant ce niveau de tâches.

- Evaluer et juger en s'appuyant sur des critères et des standards. La vérification et la critique sont des processus cognitifs caractérisant ce niveau de tâches.

- Mettre des éléments extraits du contexte ensemble afin de créer un tout cohérent ou fonctionnel ; reconnaître ces éléments dans un nouveau modèle ou une nouvelle structure. Ainsi, la production et la planification sont des processus cognitifs caractérisant ce niveau de tâches.

La catégorie *Rich Tasks* présente un ensemble d'actions nécessaires dans la réalisation de tâches liées à la modélisation. En effet, évaluer, juger en s'appuyant sur des critères, interpréter et créer font référence aux éléments caractérisant la modélisation tel que nous l'avons décrite dans le chapitre précédent.

9.4 Conclusion

Nous allons à présent réaliser une synthèse des différents travaux discutés ci-dessus concernant les tâches mathématiques et leur caractérisation, afin de proposer la définition de la tâche mathématique dans un ETM qui sera retenue pour notre étude, et de proposer une catégorisation de ces tâches.

Tâche mathématique dans l'ETM.

En nous référant au dictionnaire *Trésor de la langue Française*, nous trouvons une définition de la tâche comme un « *travail défini et limité, imposé par autrui ou par soi-même, à exécuter dans certaines conditions* ». Celle-ci rejoint la définition de la tâche mathématique de Sierpiska, à savoir qu'une tâche mathématique est un travail mathématique dont l'exécution s'effectue dans un contexte donné en un temps limité. De là, une tâche mathématique dans un espace de travail mathématique est pour nous tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de ce travail mathématique sont définies par l'espace de travail mathématique dans lequel la tâche est proposée. La tâche telle que nous la considérons dans un ETM est prise au sens de Sierpiska.

Catégorisation des tâches.

L'analyse d'une tâche mathématique dans l'ETM peut être effectuée selon le point de vue épistémologique, à travers les divers outils de praxéologie (Bosch et Chevillard, 1999). Cette analyse permet alors de déterminer les différentes techniques utilisées et les technologies de références justifiant ces techniques. L'objectif de cette analyse est donc d'identifier « *les savoirs et les connaissances strictement nécessaires* » (Sierpiska, 2004, p. 11) pour exécuter la tâche. Cette analyse rend compte de la complexité épistémologique de celle-ci. D'un autre côté, l'analyse de la tâche peut s'effectuer du point de vue cognitif. Dans ce cas, l'objectif de l'analyse est de rendre compte de sa complexité cognitive ; autrement dit, de la façon dont le sujet fait appel et utilise ses connaissances mathématiques pour répondre à la tâche. Cette analyse porte alors sur l'identification de l'orientation cognitive de la tâche prescrite dans l'ETM et des différentes adaptations des connaissances que le sujet doit réaliser pour y répondre. Les exercices ou les problèmes proposés aux élèves peuvent être formulés de différentes manières et placés dans divers contextes. Or, leurs résolutions nécessitent « *des connaissances qui peuvent être anciennes ou en cours d'acquisition* » (Robert, 2007, p. 309). Ces connaissances sont soit *mobilisables*, dans le cas où elles sont indiquées, soit *disponibles*, dans le cas contraire. Dans notre étude, nous considérons qu'une tâche peut être un exercice classique, dans le sens où il a été souvent traité dans la classe, et pour lequel le sujet identifie facilement les techniques de résolution ou les connaissances à mobiliser. Ces techniques sont incluses dans l'ETM idoine, mais également dans l'ETM personnel du sujet. Ainsi, une tâche mathématique dans un ETM est dite **simple** lorsque les techniques de résolution sont **connues** et déjà travaillées par le sujet et qu'elles sont éléments du référentiel théorique de l'ETM idoine et personnel du sujet. Exemple : un paysan a assez de foin pour nourrir 9 vaches pendant 36 jours, et il a 3 vaches de plus. Combien de jours va-t-il pouvoir nourrir ses vaches ? Ce type de problème, dans les années cinquante, pouvait être considéré comme une **tâche simple**,

alors qu'aujourd'hui, il devient un problème complexe et compliqué à résoudre. En effet, la notion de « l'inverse proportionnalité », qui permet de répondre au problème, n'existe plus dans les programmes français aujourd'hui. Cette notion (qui induit une technique) n'est pas disponible dans le référentiel (et même dans le plan épistémologique) de l'ETM de référence, idoine et personnel (du sujet).

Par conséquent, la nature de la tâche mathématique dans un ETM dépend de la disponibilité ou non des éléments du référentiel théorique et des pratiques antérieures. En prenant appui sur les travaux cités précédemment, nous avons développé dans le cadre des espaces de travail mathématique une catégorisation des tâches mathématiques. Cette catégorisation prend en compte les outils sémiotique, technologique et théorique disponibles, ou non, dans l'espace de travail mathématique. Nous obtenons ainsi trois catégories de tâches mathématiques dans l'ETM : **simple**, **complexe** et **riche** que l'on définit de cette manière :

- **Tâches simples**

Pour résoudre les tâches simples, il faut utiliser des procédures « simples » qui font appel aux connaissances déjà mémorisées et aux techniques de résolution connues. Ces connaissances et ces techniques associées à des outils (sémiotiques, technologiques, théoriques) font parties de l'ETM idoine et de l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches revient à appliquer directement des connaissances (dites *mobilisables*) ou des propriétés qui sont en général soit indiquées, soit déjà travaillées (connues) et qui appartiennent au référentiel personnel du sujet.

Il ne s'agit donc pas de reconnaître des connaissances ou des propriétés mais de les appliquer immédiatement.

Ce sont des problèmes ou exercices ayant pour but de réinvestir et de mettre en œuvre les connaissances et les techniques déjà étudiées et assimilées.

- **Tâches complexes**

Ces sont les tâches qui nécessitent de reconnaître les connaissances ou les techniques utiles pour résoudre la tâche. Ces techniques et connaissances ne sont pas indiquées dans l'énoncé de la tâche. On peut avoir besoin d'enchaîner plusieurs procédures.

Bien que ces connaissances et techniques soient disponibles dans le référentiel théorique de l'ETM idoine, et personnel du sujet, leur utilisation requiert la reconnaissance des connaissances et des techniques à utiliser et leurs modalités d'application. Cela peut concerner des conjectures mettant en jeu

« *des expériences préalables, des reconnaissances de propriétés ou de variables, et de notations, y compris suite à une modélisation, ou encore à des reconnaissances de formules ou à retrouver les conditions d'applications de théorèmes* » (Robert, 2007, p. 309).

La difficulté de résolution de ces tâches ne doit pas résider dans la compréhension du contexte de la tâche, mais plutôt dans les moyens de répondre.

Ces tâches sont des problèmes ou des exercices de synthèses ou d'approfondissement ayant éventuellement besoin d'enchaîner plusieurs techniques.

- **Tâches riches**

Ces tâches font appels à des connaissances et à des techniques de résolution qui n'ont pas été nécessairement apprises et qui n'appartiennent pas au plan épistémologique de l'ETM idoine et à l'ETM personnel du sujet, en tant qu'outil sémiotique, technologique ou théorique.

Ces tâches peuvent recourir au changement de domaines mathématiques, à la modélisation, à différents registres de représentation sémiotique. Ces changements sont à la charge du sujet. Cela renvoie à des tâches de modélisation destinées :

- soit à reconnaître la nécessité d'appliquer, d'exécuter ou de mettre en œuvre un concept dans le contexte d'un problème nécessitant une compréhension de ce concept ;
- soit à analyser la manière dont les éléments constitutifs du contexte d'un problème sont mis en liens. Puis à interpréter et fournir des explications et des déductions qui requièrent une compréhension du concept mathématique ;
- soit de critiquer des résultats obtenus (par des expériences par exemple) ou des méthodes utilisées. Et d'évaluer la validité des résultats mais également la pertinence d'utilisation d'un modèle ;
- soit de construire un modèle afin de répondre au problème posé.

Ces tâches sont alors des problèmes ou des exercices de recherche dont le but est de développer l'esprit critique, le raisonnement, la méthodologie et qui nécessitent d'avoir un comportement de chercheur : gérer des essais, formuler des hypothèses, prouver la validité des résultats, critiquer et évaluer la pertinence du choix d'un modèle, créer un modèle.

Cette catégorisation des tâches mathématiques de l'ETM nous induit à catégoriser les travailleurs qui exécutent ces tâches. En effet, un travailleur qui effectue une tâche simple ne fournit pas les mêmes efforts que celui qui effectue une tâche complexe ; et de même pour le travailleur qui réalise une tâche complexe et celui qui réalise une tâche riche. Un sujet qui est confiné constamment dans l'une des trois catégories de tâches mathématiques acquiert une identité de travailleur mathématicien. Le travail mathématique de ces catégories de tâches au sein de l'ETM entraîne différentes formes du travail du sujet. Ces formes dépendent fortement de la catégorie des tâches. Ainsi à chacune des trois catégories

de tâches, nous associons une **catégorie de travailleur-sujet** définie comme suit :

- dans le cas d'exécution de tâches simples, où il s'agit d'appliquer des techniques connues, le travailleur endosse le rôle du travailleur « **tâcheron** » ;
- dans le cas d'exécution de tâches complexes, où il s'agit de reconnaître la technique disponible dans l'espace de travail mathématique adéquat pour effectuer la tâche, le travailleur endosse le rôle du travailleur « **technicien** » ;
- dans le cas d'exécution de tâches riches, où il ne suffit pas de reconnaître une technique mais plutôt plusieurs techniques disponibles ou non dans l'espace de travail. Lorsqu'elles ne sont pas disponibles, le travail du sujet est de créer la technique pour pouvoir effectuer la tâche. Dans ce cas, le travailleur endosse le rôle du travailleur « **ingénieur** ».

Notre réflexion autour du travail de validation dans l'ETM idoine nous a conduit à catégoriser non seulement des tâches mathématiques mais également à catégoriser la forme attendue du travail du sujet. Ces catégorisations permettent d'accéder aux représentations des enseignants qui prescrivent ces tâches et qui attendent une forme de travail mathématique de leurs élèves. En effet, c'est le professeur *via* son choix de la catégorie des tâches qui donne le rôle de travailleur tâcheron, technicien ou ingénieur à ses élèves. Les catégories de tâches et de travailleur-sujet constituent des éléments importants dans l'analyse du travail de validation au sein de l'ETM_P idoine.

Chapitre 10

Présentation des situations proposées aux enseignants

Ce chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des quatre situations que nous avons proposées aux enseignants pour qu'ils les mettent en œuvre dans leur classe. Celles-ci sont extraites des documents ressources des différents niveaux de classes considérés (de la classe de 3^e à celle de Terminale S). Pour sélectionner ces situations, nous avons établi un certain nombre de critères qui résultent de notre étude de la modélisation dans l'enseignement des probabilités et des catégories des tâches. Les situations choisies mettent en jeu la modélisation avec les modèles probabilistes de type analytique ou de type numérique. Elles relèvent des catégories des tâches complexes ou riches. Nous avons décidé de ne pas prendre en compte les situations relevant de la catégorie des tâches simples, celles-ci ayant déjà été observées dans l'analyse des ETM_P idoines dans la deuxième partie. Ce sont les tâches dans lesquelles les validations produites étaient internes au modèle d'équiprobabilité.

Pour chacune des situations sélectionnée, une analyse *a priori* est effectuée du point de vue de l'ETM_P de référence. L'objectif de cette analyse est d'obtenir des éléments caractéristiques du travail de la modélisation ainsi que du travail de validation potentiel mis en œuvre dans le traitement de chacune des situations choisies. L'analyse de la mise en œuvre de ces situations dans les classes sera réalisée dans le prochain chapitre. Il permettra d'examiner le travail de validation dans les ETM_P idoines effectifs.

10.1 Analyse *a priori* des situations probabilistes

Les quatre tâches sélectionnées font toutes appel à la modélisation. Ces tâches sont nommées : les trois bancs (RESSEC-PROB, 2009, p. 8), le segment et son milieu (RESCOL-PROB, 2008, p. 7), la politique nataliste (RESPRE-PROB, 2012, p. 17), la rencontre (RESTERM-PROB, 2012, p. 43). Pour mener une analyse *a priori* des tâches probabilistes, nous avons construit une grille d'analyse à deux niveaux. L'un vise l'étude de la

modélisation mise en jeu dans les tâches. L'autre niveau vise à décrire le travail de validation mis en oeuvre dans l'espace de travail.

Niveau 1. Analyse du travail de la modélisation avec l'étude :

- de l'expérience aléatoire ;
- du modèle réel et de ses hypothèses ;
- des différents modèles probabilistes (analytique, numérique) possibles pour traiter la tâche ;
- des traitements au sein de ces modèles.

Niveau 2. Analyse du travail de validation avec l'étude de :

- la circulation du travail de validation au sein des plans verticaux [Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis] de l'ETM_P ;
- la dimension (sémiotique, instrumentale, discursive) privilégiée ;
- le paradigme (P1 ou P2) qui oriente le travail de validation ;
- le rôle de l'élève (tâcheron, technicien, ingénieur) dans le travail de validation.

Nous précisons que le travail mathématique décrit dans chacune des quatre situations s'inspire de ce qui est proposé dans les documents ressources, mais que nous l'avons détaillé davantage pour les besoins de notre analyse.

Situation 1 : Les trois bancs (pour les classes de 3^e et de 2^{nde})

Énoncé :

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?

Niveau 1 : analyse du travail de la modélisation

● Expérience aléatoire

L'expérience aléatoire décrite dans cette tâche est celle de deux personnes qui arrivent successivement dans un square ayant trois bancs à deux places et qui s'installent au hasard. À la lecture de l'énoncé de l'expérience aléatoire, des précisions s'imposent. La première concerne l'information « deux personnes s'installent au hasard ». Cette information traduit implicitement que chacune des issues envisagées est affectée de la même probabilité, autrement dit, c'est le modèle d'équiprobabilité qui se cache derrière cette expérience aléatoire. Une deuxième précision porte sur les issues de l'expérience aléatoire. La formulation de l'énoncé de cette expérience aléatoire ne permet pas de décrire clairement l'univers de l'expérience aléatoire puisque aucune indication n'est fournie sur l'emplacement des deux personnes. Doit-on considérer les trois bancs ou les six places disponibles sur les trois

bancs? Cela nous conduit à considérer deux expériences aléatoires distinctes formulées comme suit :

Expérience aléatoire 1

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard sur l'un des bancs.

Expérience aléatoire 2

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard sur l'une des places libres des bancs.

On s'intéresse à l'événement D : « les deux personnes sont assises côte à côte ».

• **Le modèle réel et ses hypothèses**

Deux sortes de modèles réels (notés 1 et 2) sont associés à chacune des deux expériences aléatoires explicitées précédemment.

Modèle réel 1 (associé à l'expérience aléatoire 1).

On note A , B et C les trois bancs du square. Les hypothèses du modèle réel 1 sont alors :

Hypothèse 1 : on suppose qu'il y a équiprobabilité des issues.

Hypothèse 2 : on suppose que la première personne est assise sur l'un des trois bancs. On suppose que la deuxième personne choisit au hasard un banc parmi les trois bancs A , B et C et va s'asseoir.

Modèle réel 2 (associé à l'expérience aléatoire 2).

On note A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 les six places sur les trois bancs A , B et C du square. Les hypothèses du modèle réel 1 sont alors :

Hypothèse 1 : on suppose qu'il y a équiprobabilité des issues.

Hypothèse 2 : on suppose que la première personne est assise sur l'une des six places, par exemple en A_1 . On suppose que la deuxième personne choisit au hasard une place parmi les cinq places non occupées et va s'asseoir.

La différence entre les modèles réels 1 et 2 relève de l'hypothèse 2 formulée dans chacun des deux modèles, à savoir la prise en compte des trois bancs ou la prise en compte de chacune des deux places sur les trois bancs.

• **Modèles probabilistes possibles pour traiter la tâche et les traitements au sein de ces modèles**

Au regard des hypothèses formulées dans le modèle réel 1 (respectivement le modèle réel 2), deux modèles probabilistes de type analytique peuvent être choisis pour traiter la tâche notés modèle probabiliste 11 (respectivement modèle probabiliste 21) et modèle

probabiliste 12 (respectivement modèle probabiliste 22).

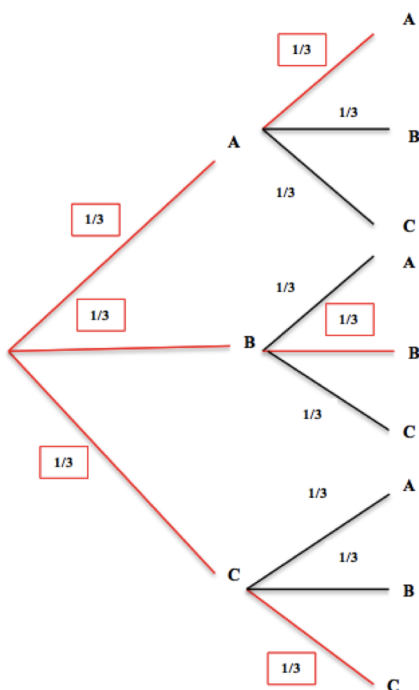
Avec les hypothèses du modèle réel 1.

Modèle probabiliste 11 : modèle d'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec Ω l'ensemble fini des issues de l'expérience aléatoire

- On considère que A , B et C représentent le choix d'un banc par une personne. On a donc la répartition uniforme de la probabilité sur l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{A, B, C\} \times \{A, B, C\}$.
- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{9}$ (le cardinal de $\Omega = 9$).
- D l'événement : « les deux personnes sont assises côte à côte », avec D une partie de Ω . Les issues qui réalisent l'événement D sont les couples (A, A) , (B, B) et (C, C) ayant la même probabilité, d'où $p(D) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Modèle probabiliste 12 : modèle d'espace probabilisé avec un arbre pondéré.

Il s'agit de construire l'arbre pondéré ci-dessous :



L'événement D est réalisé si les deux personnes sont assises sur le banc A ou sur le banc B ou sur le banc C , d'où :

$$p(D) = p((A, A)) + p((B, B)) + p((C, C)) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Avec les hypothèses du modèle réel 2.

Modèle probabiliste 21 : modèle d'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec Ω l'ensemble fini des issues de l'expérience aléatoire.

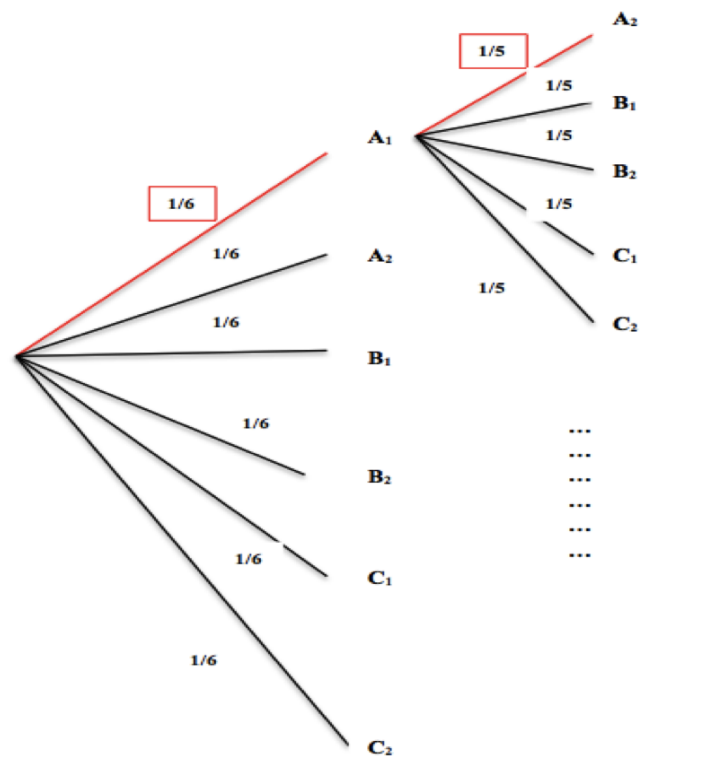
- On pose $U = \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$;
- $\Omega = \{\text{suites de deux éléments distincts de } U\}$

Dans ce cas, on peut considérer qu'il s'agit de la répartition uniforme sur l'espace $\Omega = U \times U - \{(A_1, A_1), (A_2, A_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2), (C_1, C_1), (C_2, C_2)\}$.

- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{30}$ (le cardinal de $\Omega = 30$).
- D l'événement : « les deux personnes sont assises côte à côte » avec D une partie de Ω ; Les issues qui réalisent l'événement D sont les couples : $(A_1, A_2), (A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_2, B_1), (C_1, C_2), (C_2, C_1)$. Donc $p(D) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Modèle probabiliste 22 : modèle d'espace probabilisé avec un arbre pondéré.

Il s'agit de construire l'arbre pondéré ci-dessous :



De même qu'avec le modèle probabiliste 21, les issues qui réalisent l'événement D sont les couples : $(A_1, A_2), (A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_2, B_1), (C_1, C_2), (C_2, C_1)$.

$$p(D) = p((A_1, A_2)) + p((A_2, A_1)) + p((B_1, B_2)) + p((B_2, B_1)) + p((C_1, C_2)) + p((C_2, C_1)).$$

$$\text{Donc } p(D) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Selon l'expérience aléatoire et le modèle réel choisis, le traitement de la tâche probabiliste au sein de l'un des deux modèles probabilistes considérés conduit à deux valeurs distinctes, l'une est égale à $\frac{1}{3}$, l'autre est égale à $\frac{1}{5}$. Ces deux valeurs sont valides à l'intérieur du modèle probabiliste choisi et sous les hypothèses du modèle réel considérées. En conséquence, avec deux modèles réels pertinents et distincts, on obtient deux probabilités différentes. On conclut alors que le choix de l'une des deux valeurs pour la probabilité de l'événement D ne peut pas se faire puisque l'énoncé de la tâche ne donne pas de manière précise quelle expérience aléatoire (entre l'expérience 1 et l'expérience 2) doit être considérée.

Nous avons deux validations. L'une, interne, s'effectue à l'intérieur de l'un des deux modèles probabilistes choisis (modèle 11, 12, 21, 22). L'autre, externe, consiste à vérifier l'adéquation de la valeur de la probabilité $\frac{1}{3}$ (respectivement $\frac{1}{5}$) aux hypothèses du modèle réel pris en compte. Or, la validation externe ne peut s'effectuer car elle nécessite de réaliser une expérience réelle (pour chacune des expériences aléatoires 1 et 2 décrivent précédemment) pour pouvoir confronter la probabilité obtenue dans chacun des deux modèles probabilistes aux résultats obtenus par l'expérience réelle. Une telle expérience peut être difficile à mettre en place avec des élèves. De fait, on peut par exemple assimiler chacune des deux expériences aléatoires 1 et 2 à une expérience qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré à six faces. Le premier lancer correspond au choix de la première personne et le deuxième au choix de la deuxième personne. Dans le cas de l'expérience aléatoire 1, on peut choisir un dé ayant trois faces de couleur rouge, verte et bleue et trois autres faces de couleur blanche. Chacune des trois couleurs correspond à l'un des trois bancs. Dans le cas, de l'expérience aléatoire 2, on peut choisir un dé dont les faces portent les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Chacune des six faces correspond aux six places sur les trois bancs. On peut envisager de simuler ces lancers de dé.

Dans cette tâche, il s'agit d'identifier l'hypothèse manquante. Cette hypothèse porte sur le choix entre la prise en compte des bancs ou la prise en compte des places sur les bancs, afin de décrire précisément les issues de l'expérience aléatoire et de pouvoir répondre au problème posé. L'enjeu de la tâche est de mettre en évidence que le choix de l'un des deux modèles réels conduit à deux réponses (deux probabilités) différentes mais tout à fait acceptables. En outre, le traitement probabiliste interne aux deux modèles probabilistes (espace probabilisé avec ou sans l'arbre pondéré) ne présente pas de réelles difficultés puisque ces deux modèles relèvent du référentiel théoriques de ETM_P idoine et personnel (des élèves) au niveau du secondaire. Dans le cas où l'arbre pondéré n'est pas abordé, en particulier dans les classes de 3^e et de 2^{nde}, on peut envisager l'usage d'un arbre des possibles. En effet, dans les deux modèles réels étudiés, les chemins de l'arbre des possibles ont tous la même probabilité égale à $\frac{1}{9}$ dans le cas l'on considère uniquement les trois bancs et égale à $\frac{1}{30}$ dans le cas où l'on considère les six places sur les trois bancs. On utilise alors la formule de Laplace pour obtenir la probabilité de l'événement D . On

peut aussi envisager l'usage d'un tableau à double entrée (cf. la figure ci-dessous) dont chacune des cases a une probabilité égale à $\frac{1}{9}$ (avec le modèle réel 1) ou $\frac{1}{30}$ (avec le modèle réel 2). En dénombrant les issues qui réalisent l'événement D et en utilisant la formule de Laplace, on obtient la probabilité de l'événement D .

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%; text-align: center; vertical-align: middle;">2^e personne</td> <td style="width: 20%;"></td> <td style="width: 20%;"></td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">1^{re} personne</td> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> <td style="text-align: center;">C</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">(A, A)</td> <td style="text-align: center;">(A, B)</td> <td style="text-align: center;">(A, C)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">B</td> <td style="text-align: center;">(B, A)</td> <td style="text-align: center;">(B, B)</td> <td style="text-align: center;">(B, C)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">C</td> <td style="text-align: center;">(C, A)</td> <td style="text-align: center;">(C, B)</td> <td style="text-align: center;">(C, C)</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">Avec le modèle réel 1</p>	2 ^e personne				1 ^{re} personne	A	B	C	A	(A, A)	(A, B)	(A, C)	B	(B, A)	(B, B)	(B, C)	C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center; vertical-align: middle;">2^e personne</td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">1^{re} personne</td> <td style="text-align: center;">A₁</td> <td style="text-align: center;">A₂</td> <td style="text-align: center;">B₁</td> <td style="text-align: center;">B₂</td> <td style="text-align: center;">C₁</td> <td style="text-align: center;">C₂</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A₁</td> <td style="text-align: center;">(A₁, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₁, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(A₁, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₁, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(A₁, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₁, C₂)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A₂</td> <td style="text-align: center;">(A₂, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₂, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(A₂, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₂, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(A₂, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(A₂, C₂)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">B₁</td> <td style="text-align: center;">(B₁, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₁, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(B₁, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₁, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(B₁, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₁, C₂)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">B₂</td> <td style="text-align: center;">(B₂, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₂, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(B₂, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₂, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(B₂, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(B₂, C₂)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">C₁</td> <td style="text-align: center;">(C₁, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₁, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(C₁, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₁, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(C₁, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₁, C₂)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">C₂</td> <td style="text-align: center;">(C₂, A₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₂, A₂)</td> <td style="text-align: center;">(C₂, B₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₂, B₂)</td> <td style="text-align: center;">(C₂, C₁)</td> <td style="text-align: center;">(C₂, C₂)</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">Avec le modèle réel 2</p>	2 ^e personne							1 ^{re} personne	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	A ₁	(A₁, A₁)	(A ₁ , A ₂)	(A ₁ , B ₁)	(A ₁ , B ₂)	(A ₁ , C ₁)	(A ₁ , C ₂)	A ₂	(A ₂ , A ₁)	(A₂, A₂)	(A ₂ , B ₁)	(A ₂ , B ₂)	(A ₂ , C ₁)	(A ₂ , C ₂)	B ₁	(B ₁ , A ₁)	(B ₁ , A ₂)	(B₁, B₁)	(B ₁ , B ₂)	(B ₁ , C ₁)	(B ₁ , C ₂)	B ₂	(B ₂ , A ₁)	(B ₂ , A ₂)	(B ₂ , B ₁)	(B₂, B₂)	(B ₂ , C ₁)	(B ₂ , C ₂)	C ₁	(C ₁ , A ₁)	(C ₁ , A ₂)	(C ₁ , B ₁)	(C ₁ , B ₂)	(C₁, C₁)	(C ₁ , C ₂)	C ₂	(C ₂ , A ₁)	(C ₂ , A ₂)	(C ₂ , B ₁)	(C ₂ , B ₂)	(C ₂ , C ₁)	(C₂, C₂)
2 ^e personne																																																																													
1 ^{re} personne	A	B	C																																																																										
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)																																																																										
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)																																																																										
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)																																																																										
2 ^e personne																																																																													
1 ^{re} personne	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂																																																																							
A ₁	(A₁, A₁)	(A ₁ , A ₂)	(A ₁ , B ₁)	(A ₁ , B ₂)	(A ₁ , C ₁)	(A ₁ , C ₂)																																																																							
A ₂	(A ₂ , A ₁)	(A₂, A₂)	(A ₂ , B ₁)	(A ₂ , B ₂)	(A ₂ , C ₁)	(A ₂ , C ₂)																																																																							
B ₁	(B ₁ , A ₁)	(B ₁ , A ₂)	(B₁, B₁)	(B ₁ , B ₂)	(B ₁ , C ₁)	(B ₁ , C ₂)																																																																							
B ₂	(B ₂ , A ₁)	(B ₂ , A ₂)	(B ₂ , B ₁)	(B₂, B₂)	(B ₂ , C ₁)	(B ₂ , C ₂)																																																																							
C ₁	(C ₁ , A ₁)	(C ₁ , A ₂)	(C ₁ , B ₁)	(C ₁ , B ₂)	(C₁, C₁)	(C ₁ , C ₂)																																																																							
C ₂	(C ₂ , A ₁)	(C ₂ , A ₂)	(C ₂ , B ₁)	(C ₂ , B ₂)	(C ₂ , C ₁)	(C₂, C₂)																																																																							

Fig. 10.1 – Le traitement de la situation 1 à l'aide d'un tableau à double entrée

Nous n'avons pas envisagé l'usage d'un modèle probabiliste de type numérique à l'aide de la simulation pour traiter la situation 1. La raison d'un tel choix est que la situation « des trois bancs » est une tâche conçue pour étudier l'enjeu des modèles probabilistes dans le traitement des situations aléatoires au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}.

Cette analyse du travail de modélisation nous permet de conclure que cette situation 1 relève de la **catégorie des tâches complexes** pour les élèves des classes de 3^e et de 2^{nde}.

Niveau 2 : analyse du travail de validation

Si le modèle probabiliste d'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ est choisi pour déterminer la probabilité de l'événement D , alors le travail de validation est placé exclusivement sur la dimension discursive et est orienté par le paradigme P2. Par contre, si c'est le modèle d'espace probabilisé avec l'arbre pondéré qui est choisi, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] orienté vers la dimension discursive pour modéliser l'expérience aléatoire et calculer la probabilité de l'événement D . Dans ce cas, le paradigme qui dirige ce travail de validation est celui de P2. Cependant, si on remplace l'usage de l'arbre pondéré par l'arbre des possibles ou un tableau à double entrée, le travail de validation est orienté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2). Le choix du modèle d'espace probabilisé avec l'arbre pondéré suppose l'usage de l'arbre comme outil sémiotique mais aussi comme outil technologique, de fait les dimensions sémiotique et

instrumentale sont privilégiées dans la mise en œuvre du travail de validation.

Notre analyse *a priori* de la situation 1 a mis en évidence que le traitement de celle-ci conduit à deux réponses distinctes dues à un manque de précision dans l'énoncé de la situation 1. Or, si l'on souhaite trancher entre les deux réponses obtenues, il est nécessaire d'ajouter à l'énoncé initial de la situation l'hypothèse 2 de l'un des deux modèles réels 1 et 2. La situation 1 devient alors une tâche simple à l'image des tâches que nous avons déjà rencontrées dans la deuxième partie de notre étude. Ainsi, nous avons choisi de proposer la situation 1 sans modifier l'énoncé initial. L'étude de la mise en œuvre de cette situation dans les ETM_P idoines au niveau des classes de 3^e et de 2nde vise à examiner la manière dont les professeurs prennent en compte les deux modèles réels dans le travail de validation. Les professeurs explicitent-ils les deux modèles réels ou privilégient-ils l'un des deux? Quels sont les formes de validation qui résultent du travail de validation mis en œuvre dans les ETM_P idoines?

Situation 2 : le segment et son milieu (pour la classe de 3^e)

Énoncé :

Sur un segment S , on prend au hasard deux points A et B . On considère l'événement « La longueur du segment $[AB]$ est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

Niveau 1 : analyse du travail de la modélisation

● Expérience aléatoire

L'expérience aléatoire décrite dans cette situation consiste à choisir *au hasard* deux points notés A et B sur un segment noté S de longueur donnée. Dans l'énoncé, aucune précision n'est donnée sur ce que l'on entend par « on prend au hasard deux points ». La formulation de cet énoncé n'est pas suffisamment précise pour décrire l'expérience aléatoire. D'où, la nécessité de considérer des hypothèses supplémentaires afin de décrire l'expérience aléatoire.

● Le modèle réel et ses hypothèses

Pour traiter la situation 2, nous avons précisé les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : Le choix d'un point sur un segment suit une loi uniforme sur S

Hypothèse 2 : le choix du premier point, par exemple le point A , sur le segment S ne doit avoir aucune influence sur le choix du deuxième point B (l'abscisse du point B peut être plus petite ou plus grande que celle du point A). Cela signifie qu'il y a indépendance entre les deux événements respectivement « choisir le premier point » et « choisir le second point ».

Nous considérons alors :

- L'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = S \times S$.
- D l'événement : « la longueur du segment $[AB]$ est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S » ;

● **Modèles probabilistes possibles pour traiter la tâche et les traitements au sein de ces modèles**

Deux sortes de modèles peuvent être choisis pour déterminer la probabilité de l'événement D .

Modèle probabiliste 1 : modèle de type numérique à l'aide de la simulation

Le travail de validation s'effectue en trois étapes. La première étape est celle de la construction d'un modèle numérique. La deuxième étape est celle de la mise en œuvre de la simulation par un ordinateur afin de calculer la fréquence d'événement D . Enfin, la dernière, concerne l'estimation à partir de la fréquence de l'événement D de la valeur de la probabilité de D à l'aide de la loi des grands nombres.

Étape 1 : construction d'un modèle de type numérique

On considère par exemple que la longueur du segment S est égale à 1. L'affirmation « on prend deux points sont pris au hasard sur le segment S » est interprétée comme le choix de deux nombres réels appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. En fait, ces deux nombres réels correspondent aux abscisses (notées X et Y) respectifs des points A et B . L'univers de l'expérience aléatoire devient alors $\Omega = [0;1] \times [0;1]$.

Les hypothèses du modèle réel sont traduites dans le modèle de type numérique comme suit :

Hypothèses	Traduction dans le modèle de type numérique
Hypothèse 1 : Le choix d'un point sur un segment suit une loi uniforme sur S .	Choix au hasard par la machine d'un couple $(X; Y) \in [0; 1]^2$
Hypothèse 2 : indépendance entre les deux événements respectivement « choisir le premier point » et « choisir le second point ».	Correspond au caractère « aléatoire » du générateur.

Le modèle probabiliste de type numérique fait à appel à l'usage de la simulation informatique *via* un ordinateur ou une calculatrice. Conformément aux exigences du programme et aux recommandations du document ressource de la classe de 3^e, seule la simulation à l'aide d'un ordinateur et d'un tableur (du logiciel Excel) est envisagée à ce niveau de classe. Nous avons donc choisi une simulation *via* un ordinateur où l'on utilise le tableur. Dans ce cas, la simulation nécessite la construction d'une feuille de calcul (un tableau) et l'usage de certaines des fonctions du tableur telles que :

- $ALEA()$: fournit un nombre réel compris entre 0 et 1.
- ABS : fournit la valeur absolue d'un nombre réel.
- SI : l'une des fonctions logiques du logiciel. Elle renvoie une valeur si une condition est vraie et une autre valeur si elle est fausse.
- $NB.SI$: l'une des fonctions statistiques. Elle compte le nombre de cellules du tableau qui répondent à un critère.

Dans une feuille de calcul et à l'aide de la fonction $ALEA()$, les nombres réels X et Y sont écrits de la manière suivante : $X = ALEA()$ et $Y = ALEA()$. De même, la longueur AB qui est égale à la distance entre X et Y (égale à $|X - Y|$) est écrite dans la feuille de calcul sous la forme suivante : $AB = ABS(X - Y)$. La longueur AB est par la suite comparée au nombre $\frac{1}{2}$ (autrement dit $\frac{S}{2}$) :

	A	B	C	D
1	Abscisse du point A X=ALEA()	Abscisse du point A Y=ALEA()	La longueur AB X-Y =ABS(X-Y)	Comparaison de AB et de S/2
2	0,89	0,11	0,77	1
3	0,80	0,23	0,57	1
4	0,61	0,56	0,05	0

Fig. 10.2 – La comparaison de la longueur AB et de $\frac{S}{2}$

Étape 2 : simulation et calcul de la fréquence de l'événement D

Pour estimer la probabilité de l'événement D , on calcule la fréquence d'apparition de cet événement. On décide alors de simuler 500 (choix arbitraire) fois l'expérience, les fréquences de l'apparition de l'événement D sont données par la feuille de calcul (cf. figure ci-après).

	A	B	C	D	E
1	Abscisse du point A X=ALEA()	Abscisse du point A Y=ALEA()	La longueur AB X-Y =ABS(X-Y)	Comparaison de AB et de S/2	Fréquence d'apparition de D
2	0,89	0,11	0,77	1	0,258
3	0,80	0,23	0,57	1	
4	0,61	0,56	0,05	0	
5	0,34	0,76	0,42	0	
6	0,15	0,92	0,78	1	
7	0,61	0,98	0,38	0	

Fig. 10.3 – La fréquence d'apparition de D

On constate alors qu'à partir d'un certain rang, les fréquences de l'événement D ont tendance à se stabiliser autour du nombre 0,25. Ces fréquences sont également visualisées dans un graphique confirmant que celles-ci tendent plus ou moins vers la valeur 0,25.

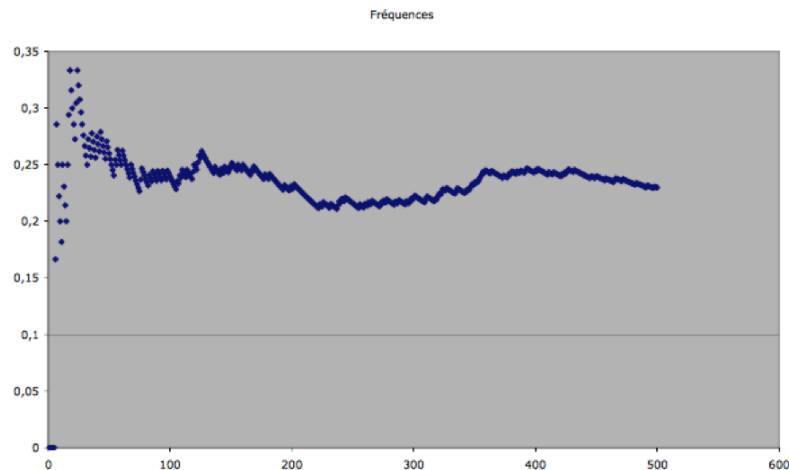


Fig. 10.4 – La stabilisation des fréquences de D (RESCOL-PROB, 2008, p. 7)

Étape 3 : estimation de la probabilité de l'événement D

À l'aide de la loi des grands nombres, la valeur de la fréquence de l'événement D se rapproche de la probabilité de l'événement D . Donc 0,25 est une valeur possible estimée de la probabilité de l'événement D . D'autres valeurs peuvent être choisies pour estimer la probabilité de l'événement D .

Commentaire : avec cette méthode, le choix de l'emplacement des points est pris en charge par le générateur aléatoire. L'utilisation de la simulation informatique permet de répéter l'expérience aléatoire un grand nombre de fois. La valeur de la probabilité est estimée à partir de la fréquence observée sur la feuille de calcul ou à partir de la stabilisation des fréquences observée graphiquement. Bien que l'estimation de la probabilité soit guidée par la loi des grands nombres, la valeur choisie pour la probabilité reste arbitraire.

Modèle probabiliste de type analytique : espace probabilisé avec les variables aléatoires et la loi uniforme sur $S \times S$

De la même manière que dans le modèle de type numérique, on considère que la longueur du segment S est égale à 1. En référence au document ressource de la classe de 3^e (RESCOL-PROB, 2008), le travail de validation utilisant le modèle 2 est basé sur l'étude de la distance $|X - Y|$ entre deux variables aléatoires continues X et Y qui suivent la loi uniforme sur $[0;1]$.

La longueur S étant prise comme unité, on choisit au hasard un point de coordonnées $(X;Y)$ dans le carré de côté 1.

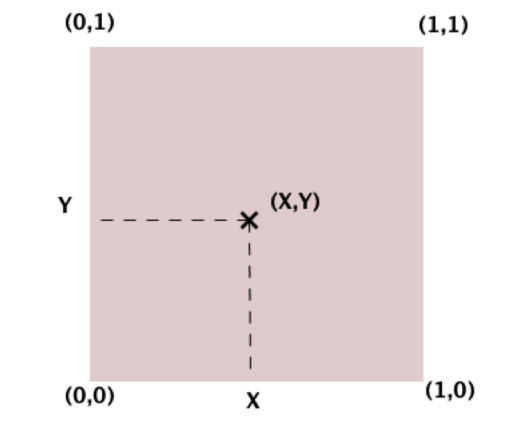


Fig. 10.5 – $(X;Y)$ un point pris au hasard dans le carré de côté 1

Le carré $[0; 1] \times [0; 1]$ devient alors le support géométrique de la validation. De ce fait, la détermination de la probabilité de l'événement D revient à trouver tous les couples $(X;Y)$ tel que $|X - Y| > \frac{1}{2}$ (où X et Y sont respectivement les abscisses des points A et B). Pour ce faire, on résout l'inéquation $|X - Y| > \frac{1}{2}$ considérant deux cas :

- Si $X > Y$, alors $Y < X - \frac{1}{2}$.
- Si $X < Y$, alors $Y > X + \frac{1}{2}$.

Ces deux inéquations sont résolues graphiquement, en traçant les deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $Y = X - \frac{1}{2}$ et $Y = X + \frac{1}{2}$. L'ensemble des points (X, Y) solutions est composé des deux triangles rectangles bleus de la figure ci-après.

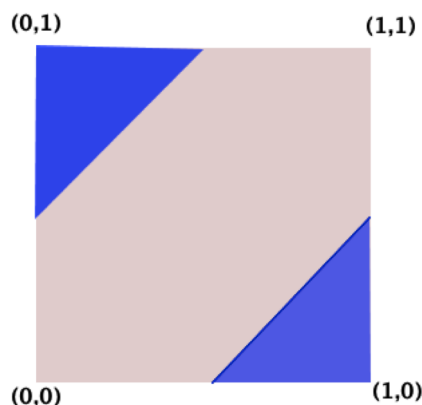


Fig. 10.6 – L'ensemble des solutions vérifiant l'inéquation $|X - Y| > \frac{1}{2}$

La probabilité de l'événement D est obtenue par un calcul simple de la somme des aires des deux triangles bleus divisée par l'aire du carré : $p(D) = \frac{2 \times \text{Aire}(\text{triangle bleu})}{\text{Aire}(\text{carré})} = \frac{1}{4}$.

Commentaire : l'utilisation de ce modèle permet d'obtenir une valeur exacte de la probabilité de l'événement D .

Niveau 2 : analyse du travail de validation

Dans le modèle probabiliste de type numérique, le travail de validation mis en oeuvre pour répondre à la tâche s'effectue en trois étapes. La première étape requiert l'usage de la dimension discursive, en particulier les éléments du référentiel théorique, afin de construire le modèle numérique. Le travail de validation est placé dans la dimension discursive et est orienté par le paradigme P2. Dans la deuxième étape, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté par le paradigme P1 afin d'effectuer la simulation, de calculer et de visualiser la fréquence de l'événement D . Ce travail fait intervenir des outils technologiques complexes (feuille de calcul, les fonctions du tableur). La plupart de ces outils technologiques ne sont pas maîtrisés par les élèves de la classe de 3^e. Dans la troisième étape, le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis] et dirigé par le paradigme P2 afin de conclure sur la valeur de la probabilité en utilisant l'outil théorique la loi des grands nombres. Le traitement de la tâche *via* un modèle probabiliste de type numérique place donc le travail de validation dans le plan [Sem-Ins] orienté vers le plan [Ins-Dis] et est dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2.

Dans le modèle probabiliste de type analytique, le travail de validation est basé sur le carré de côté 1. Il nécessite l'usage d'outils sémiotiques tels que la figure du carré de dimension 1, le plan cartésien et les graphiques. Ce travail fait intervenir des expressions algébriques et des techniques algébriques non-conventionnelles en classe de 3^e. Le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] et est orienté par le paradigme P2 articulé avec le domaine de l'algèbre ainsi que celui de la géométrie analytique.

En résumé, dans le modèle probabiliste de type numérique, le travail de validation est basé sur des outils technologiques complexes tels que la feuille de calcul et les fonctions du tableur. La dimension instrumentale est alors privilégiée dans le travail de validation. C'est dans le plan [Sem-Ins] que le travail de validation débute pour s'achever dans le plan [Ins-Dis]. Dans le modèle de type numérique, le référentiel théorique est utilisé pour justifier par la loi des grands nombres la valeur de la probabilité de l'événement considéré. Par contre, dans le modèle probabiliste de type analytique, le travail de validation est basé sur le carré de côté 1 en tant qu'outil sémiotique, mais aussi sur des techniques algébriques. Ce travail de validation est placé principalement dans le plan [Sem-Dis].

Le manque de précision dans l'énoncé de cette situation conduit à formuler deux autres hypothèses afin de décrire précisément l'expérience aléatoire. À partir du modèle réel, deux modèles probabilistes possibles peuvent être utilisés. Dans le premier modèle, le traitement requiert un « savoir-faire » du point de vue de la manipulation du tableur avec la traduction des hypothèses du modèle réel en langage propre au tableur. Il requiert également des connaissances pour interpréter et évaluer les résultats numériques en termes probabilistes en vue de répondre au problème posé. Dans le deuxième modèle de la loi uniforme (sur $[0; 1] \times [0; 1]$), le traitement fait appel à des connaissances et à des outils théoriques (tels que la résolution d'inéquations graphiquement et le calcul de la probabilité dans le cas continu).

Bien que cette situation 2 soit proposée dans le document ressource de la classe de 3^e [RESCOL-PROB], elle requiert des connaissances qui ne sont pas toutes des éléments du référentiel théorique de l'espace de travail. La détermination de la probabilité sur des ensembles continus n'est pas au programme de cette classe. C'est pourquoi cette situation représente un problème de recherche dont la résolution nécessite de construire ou de choisir un modèle probabiliste qui n'est pas disponible, de formuler des hypothèses, de critiquer et d'évaluer la pertinence du choix du modèle probabiliste. Or, il n'est pas aisé pour un élève de la classe de 3^e débutant l'apprentissage des probabilités de résoudre seul ce problème. La situation 2 est de fait considérée comme une tâche riche. L'intérêt de proposer cette tâche dans un ETM_P idoine de la classe de 3^e est d'observer la manière dont le professeur adapte cette tâche riche et les éventuelles transformations de cette tâche lors de sa mise en œuvre dans l'ETM_P idoine. Nous allons également relever le(s) modèle(s) utilisé(s) et les dimension(s) privilégiée(s) par le professeur pour évaluer la probabilité. L'étude de la mise en place de cette tâche nous permet d'obtenir des éléments caractéristiques de la validation (institutionnalisée par le professeur) qui découle du travail de validation d'une tâche riche.

Situation 3 : la politique nataliste (pour les classes de 2^{nde} et de 1^{re}S)

Énoncé :

Pour limiter le nombre de filles dans un pays imaginaire, on décide que :

- a) chaque famille aura au maximum 4 enfants ;*
- b) chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.*

On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents. Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?

Niveau 1 : analyse du travail de la modélisation

● **Expérience aléatoire**

L'expérience aléatoire décrite dans cette situation consiste à observer une succession de naissances dans une famille au sein d'une population donnée. Si à la première naissance, un garçon naît, la famille arrête « de procréer », sinon elle continue « à procréer » jusqu'à la naissance d'un garçon ou jusqu'à quatre enfants maximum. On a donc une expérience aléatoire de une à quatre épreuves maximum.

Nous relevons une ambiguïté dans l'énoncé de la question. En effet, telle qu'elle est formulée, la question nous conduit à raisonner sur le nombre total de filles dans la population totale. Or, dans le document ressource [RESPRE] dont la situation 3 est extraite, on constate que pour traiter cette situation, le raisonnement établi porte sur la proportion de filles par rapport à celle de garçons et non pas sur le nombre total de filles dans la population totale. Pour lever cette ambiguïté, nous pouvons reformuler la question dans l'énoncé en précisant qu'il s'agit d'étudier l'influence de la politique nataliste sur la proportion de filles par rapport à celle de garçons dans la population considérée.

● **Le modèle réel et ses hypothèses**

L'énoncé de la situation décrit une expérience aléatoire avec deux informations traduisant les hypothèses du modèle réel :

- 1- « *Chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille* » traduit l'hypothèse d'équiprobabilité d'un garçon et d'une fille.
- 2- « *Le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents* » traduit l'hypothèse de l'indépendance des naissances.

• **Modèles possibles pour traiter la tâche et les traitements au sein de ces modèles**

Deux sortes de modèles, probabiliste de type analytique et probabiliste de type numérique, peuvent être choisis pour prendre une décision concernant l'efficacité de la politique nataliste.

Modèle probabiliste 1 : espace probabilisé avec les variables aléatoires et la loi géométrique tronquée

L'expérience aléatoire, telle qu'elle est décrite dans cette tâche, consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p (la probabilité d'avoir un garçon) avec au maximum quatre répétitions ($n = 4$) et arrêt du processus au premier succès. On définit Y la variable aléatoire qui représente le rang du 1^{er} succès. Y suit la loi géométrique tronquée de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$, avec :

- $Y = 0$ si il n'y aucun succès
- $Y = k$ avec $1 \leq k \leq 4$ si le premier succès est obtenu à l'étape k .

La loi de probabilité de Y est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 s'il y a eu un garçon et 1 s'il n'y a pas eu de garçon. Alors :

- $P(X = 0) = P(Y = 0) = (1 - \frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
- $P(X = 1) = P(Y = 1) + p(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = \frac{15}{16}$
- L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{15}{16}$.

On considère N la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre d'enfants nés dans une famille, alors l'espérance de N est $E(N) = \frac{15}{8}$. D'où $\frac{E(X)}{E(N)} = \frac{1}{2}$.

On en déduit que cette politique nataliste n'a aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

L'usage de ce modèle probabiliste nécessite la connaissance des notions telles que la variable aléatoire, la loi de la géométrie tronquée et l'espérance. Ces notions ne sont introduites qu'à partir de la classe de 1^{re}. Le traitement de la tâche dans ce modèle probabiliste ne peut être envisagé en classe de 2^{nde}.

Modèle probabiliste 2 : espace probabilisé avec l'usage d'arbre pondéré

On note G l'événement « l'enfant né est un garçon » et l'événement F : « l'enfant né est une fille ».

Les probabilités des événements G et F sont égales à $\frac{1}{2}$. On a alors l'arbre pondéré « asymétrique » ci-dessous :

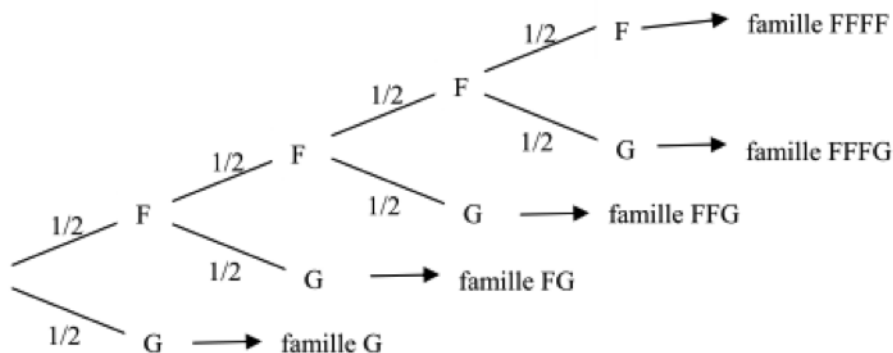


Fig. 10.7 – Arbre pondéré modélisant l’expérience aléatoire de la situation 3 (RESPRE, 2011, p. 17)

On a cinq sortes de familles (qui représentent les issues possibles) ayant un à quatre enfants. La probabilité de chacune de ces cinq familles est donnée dans le tableau ci-dessous :

Type de famille	<i>G</i>	<i>FG</i>	<i>FFG</i>	<i>FFFG</i>	<i>FFFF</i>
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

On peut évaluer le résultat cherché, en présentant les calculs sous la forme d’un tableau en considérant (par exemple) 16 familles.

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d’enfants	Nombre de garçons	
G	8	8	8	
FG	4	8	4	
FFG	2	6	2	
FFFG	1	4	1	
FFFF	1	4	0	
	16	30	15	Total

Fig. 10.8 – Le nombre de garçons pour 16 familles

Sur 30 enfants, on a autant de garçons que de filles dans cette population de 16 familles. La politique nataliste n’a donc aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée. Toutefois, les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus laisse penser que la politique nataliste a une influence sur le nombre total de la population. En effet, pour 16 familles, soit pour 32 personnes (si on considère un couple par famille) de la population initiale, on obtient 30 enfants. De fait la population diminue. Cette diminution est également constatée lorsque nous avons calculé l’espérance du nombre d’enfants (cf. modèle probabiliste 1) qui est strictement inférieure à 2.

Le traitement de la tâche dans le modèle probabiliste 2 est basé sur l'usage d'un arbre pondéré associé à l'usage d'un tableau de dénombrement. Mis à part le fait que l'arbre pondéré « asymétrique » construit dans ce modèle n'est enseigné qu'à partir de la classe de 1^{re}, le traitement de la tâche dans le modèle probabiliste 2 peut être envisagé en classe de 2^{nde}.

Modèle 3 : modèle probabiliste de type numérique

Le travail de validation dans ce modèle de type numérique s'effectue en trois étapes : construction d'un modèle numérique, mise en œuvre de la simulation pour calculer la fréquence d'apparition de l'événement G , puis estimation de la valeur de la probabilité de l'événement G .

Étape 1 : construction d'un modèle de type numérique

L'expérience aléatoire décrite peut être assimilée par exemple à l'expérience du lancer d'une pièce de monnaie (pile pour garçon et face pour fille), ou à l'expérience du lancer d'un dé (faces paires pour garçon et faces impaires pour fille). La simulation informatique de l'expérience aléatoire peut s'effectuer à l'aide du générateur aléatoire $ALEA()$ du tableur (logiciel Excel) ou avec celui de la calculatrice (fonction Random). Nous choisissons une simulation informatique à l'aide de la fonction $ALEA()$. On traduit alors chacune des données et des hypothèses du modèle réel dans le modèle numérique.

Données	Traduction dans le modèle numérique
Chaque famille aura au maximum 4 enfants.	Les colonnes A, B, C et D de la feuille de calcul représente une naissance. On affecte la valeur « 1 » pour un garçon et « 0 » pour une fille.
Chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.	Si dans la colonne A (respectivement B et C) on a la valeur « 1 » alors on arrête, sinon on continue.

Dans une feuille de calcul et à l'aide de la fonction $ALEA()$, les naissances d'une famille se simule sur une ligne. Les valeurs inscrites dans chacune des colonnes A, B, C et D sont déterminer en utilisant la fonction ENT (partie entière d'un nombre réel). Ainsi, dans la cellule A2 on entre la formule $ENT(ALEA() + 0,5)$ qui fournit deux valeurs 1 ou 0.

Dans les cellules B2, C2 et D2, on entre la formule =SI(OU(B2 = 1; B2 = ""));""; B2 + ENT(ALEA() + 0,5)) qui permet de respecter la contrainte de l'arrêt de la procréation dès qu'un garçon est né :

	A	B	C	D
1	Les naissances			
2	0	1		
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
7	1			
8	0	1		
9	0	1		
10	1			
11	0	1		
12	1			
13	1			
14	1			
15	0	0	0	0

Fig. 10.9 – Simulation des naissances d'une famille dans une feuille de calcul

Dans les colonnes E et F, on comptabilise respectivement le nombre d'enfants par famille (en entrant dans la cellule E2, la formule NB(A2 : D2)), ainsi que le nombre de garçons par famille (en entrant dans la cellule F2, la formule NB(A2 : D2; 1)).

	A	B	C	D	E	F
1	Les naissances				Nombre d'enfants	Nombre de garçons
2	0	0	0	0	4	0
3	1				1	1
4	1				1	1
5	0	1			2	1
6	0	1			2	1
7	0	1			2	1
8	0	1			2	1
9	0	1			2	1
10	0	1			2	1
11	0	0	1		3	1
12	0	1			2	1
13	1				1	1
14	0	1			2	1
15	1				1	1
16	1				1	1
17	0	0	0	0	4	0

Fig. 10.10 – Le nombre d'enfants et de garçons par famille

Étape 2 : simulation et calcul de la fréquence de l'événement G

On décide de simuler 1000 fois l'expérience. Autrement dit, on considère un échantillon

de 1000 familles. Chaque ligne du tableur (lignes 2 à 1001) représente les naissances d'une famille. On recopie chacune des formules entrées dans chacune des cellules A2, B2, C2 et D2 vers le bas jusqu'à la ligne 1001. Ensuite, on procède au calcul de la fréquence d'apparition de l'événement G de l'échantillon considéré en calculant le nombre total d'enfants et le nombre total de garçons.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Les naissances				Nombre d'enfants	Nombre de garçons			
2	0	1			2	1		Nombre de garçons	944
3	0	1			2	1		Nombre total d'enfants	1893
4	1				1	1		Fréquence de l'événement G	0,4987
5	0	0	0	0	4	0			

Fig. 10.11 – Le calcul de la fréquence d'apparition de l'événement G

Étape 3 : estimation de la probabilité de l'événement G

À partir des résultats fournis par la simulation et à l'aide de la loi des grands nombres, la valeur de la fréquence de l'événement G se rapproche de la probabilité de l'événement G . Donc 0,5 est une valeur estimée de la probabilité de l'événement G . On peut également utiliser l'intervalle de confiance pour déterminer un intervalle de valeurs possibles de la probabilité de l'événement G .

Nous précisons que les deux hypothèses de l'indépendance des naissances et de l'équiprobabilité sont intégrées dans le générateur aléatoire $ALEA()$ du tableur. Conformément au document ressource [RESPRE], l'utilisation d'un algorithme (avec une calculatrice ou un logiciel Algotbox) peut être également envisagée pour estimer la probabilité de l'événement D . Il s'agit alors d'écrire un programme pour simuler la constitution d'une famille, puis de n familles. À titre d'exemple, nous proposons un programme écrit en langage naturel et algorithmique (cf. la figure ci-après) traité par Laval dans son travail de thèse (en cours de finalisation).

Langage naturel		Langage algorithmique	
Entrée	nombre_familles de la population simulée initialiser nombre_garçons avec la valeur 0 initialiser nombre_enfants avec la valeur 0 f fréquence des garçons dans la population simulée		
Traitement	Pour k allant de 1 à nombre_familles Affecter à enfants_famille la valeur 1 Tant que enfants_famille < 5 Affecter à nombre_enfants la valeur nombre_enfants + 1 Si un nombre aléatoire entre 0 et 1 est inférieur à 0,5 Alors Affecter à nombre_garçons la valeur nombre_garçons + 1 Affecter à enfants_famille la valeur 5 Sinon Affecter à enfants_famille la valeur enfants_famille + 1 Fin Si Fin Tant que Fin Pour Donner une valeur approchée de $f = \text{nombre_garçons} / \text{nombre_enfants}$		<pre> 1 VARIABLES 2 nombre_enfants EST_DU_TYPE NOMBRE 3 p EST_DU_TYPE NOMBRE 4 DEBUT_ALGORITHME 5 nombre_enfants PREND_LA_VALEUR 1 6 TANT_QUE (nombre_enfants < 5) FAIRE 7 DEBUT_TANT_QUE 8 p PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1) 9 SI (p=1) ALORS 10 DEBUT_SI 11 AFFICHER "Garçon" 12 nombre_enfants PREND_LA_VALEUR 5 13 FIN_SI 14 SINON 15 DEBUT_SINON 16 AFFICHER "Fille" 17 nombre_enfants PREND_LA_VALEUR nombre_enfants+1 18 FIN_SINON 19 FIN_TANT_QUE 20 FIN_ALGORITHME </pre>
Sortie	Afficher f		

Fig. 10.12 – Le calcul de la fréquence d’apparition de l’événement G

Niveau 2 : analyse du travail de validation

La prise de décision concernant l’influence de la politique nataliste peut être effectuée en considérant trois modèles probabilistes différents.

Dans le premier modèle (espace probabilisé avec les variables aléatoires et la loi géométrique tronquée), le travail de validation fait appel à la dimension discursive. En particulier, aux éléments du référentiel théorique tels que les variables aléatoires et la loi géométrique tronquée. Ces éléments sont utilisés comme des outils théoriques. Ainsi, le travail de validation est placé sur la dimension discursive et est orienté par le paradigme P2. Dans le deuxième modèle (espace probabilisé avec l’arbre pondéré), le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins]. En effet, à l’aide d’un arbre pondéré « asymétrique », on représente l’expérience aléatoire décrite dans la situation. Ainsi, l’arbre pondéré est utilisé comme un outil sémiotique pour décrire les issues possibles. L’arbre pondéré peut également être considéré comme un outil technologique pour calculer la probabilité de chacune des issues. Ensuite, l’usage du tableau à double entrée pour comptabiliser le nombre d’enfants et le nombre de garçons dans une population donnée (16 familles) entraîne le basculement du travail mathématique de cette tâche dans le plan [Ins-Dis] afin de fournir une justification de la solution. Le paradigme qui dirige ce travail mathématique est celui de P1 articulé avec le paradigme P2 (noté P1|P2).

Dans le troisième modèle (de type numérique), le travail de validation s’effectue suivant trois étapes. La première requiert l’usage des éléments du référentiel théorique afin de construire le modèle numérique. Le travail de validation est alors placé dans la dimension

discursive et orienté par le paradigme P2. L'étape 2 fait basculer le travail de validation sur la dimension instrumentale pour effectuer la simulation et calculer la fréquence de l'événement considéré. Ce travail de validation est alors orienté par le paradigme P1. Enfin, l'étape 3 nécessite de faire basculer le travail de validation dans le plan [Ins-Dis] afin de conclure sur la valeur de la probabilité en utilisant la loi des grands nombres (ou l'intervalle de confiance s'il est utilisé). Le travail de validation est alors dirigé par le paradigme P2. L'usage de ce modèle fait intervenir des outils technologiques complexes (feuille de calcul, fonctions du tableurs). Ces outils technologiques ne sont pas toujours maîtrisés par les élèves de la classe de 2^{nde} et parfois même par les élèves des classes supérieures.

Le traitement de la tâche *via* le modèle probabiliste 1 ne peut être envisagé en classe de 2^{nde} puisque les notions sous-jacentes ne font pas partie du référentiel théorique de l'ETM_P de référence de ce niveau de classe. En revanche, le traitement de la tâche *via* les deux autres modèles sont envisageables à ce niveau de classe. On peut néanmoins souligner certaines difficultés liées à l'usage des deux modèles probabilistes 2 et 3. Dans l'un, la difficulté est liée à l'arbre pondéré « asymétrique », méconnue des élèves de la classe de 2^{nde}. Dans l'autre, la difficulté pour des élèves de la classe de 2^{nde} est liée principalement à la première étape, celle de la construction du modèle numérique qui nécessite un « savoir faire technique ». Cette situation 3 est ainsi considérée comme une tâche riche si elle est proposée à des élèves de la classe de 2^{nde}. En revanche, l'usage des trois modèles probabilistes dans la classe de 1^{re} S est envisageable puisque les trois modèles décrits font partie du référentiel théorique de l'ETM_P de référence, idoine et personnel (de l'élève). Cette situation relève alors de la catégorie des tâches complexes dans le cas où elle est proposée aux élèves de la classe de 1^{re} S.

L'intérêt de proposer cette situation 3 dans un ETM_P idoine dans les classes de 2^{nde} et de 1^{re} S est d'observer la manière dont le professeur adapte et transforme une tâche riche et une tâche complexe dans chacun des niveaux de classe cités précédemment. Il s'agit également pour nous de relever le (ou les) modèle(s) probabiliste(s) utilisé(s) par le professeur pour réaliser le travail de validation. En particulier, d'analyser les caractéristiques de la validation (institutionnalisée par le professeur) produite à l'issue du travail de validation d'une tâche riche ou complexe.

Situation 4 : la rencontre (pour la classe de Terminale S)

Énoncé :

Olivier et Karine décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Les instants d'arrivée d'Olivier et Karine sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0; 1]$. Chacun attend un quart d'heure mais jamais au-delà de 8h. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Niveau 1 : analyse du travail de la modélisation

● Expérience aléatoire

L'expérience aléatoire décrite dans la situation 4 est celle de deux personnes qui se retrouvent dans un café entre 7h et 8h. Ces deux personnes ont convenu de s'attendre un quart d'heure maximum et pas au-delà de 8h.

● Le modèle réel et ses hypothèses

La phrase « les instants d'arrivée d'Olivier et Karine sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0; 1]$ » traduit l'indépendance des instants d'arrivée des deux personnes.

Il est suggéré dans l'énoncé d'assimiler les instants d'arrivée d'Olivier et de Karine à des variables aléatoires qui suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$. On prend alors 7h comme origine et l'heure comme unité de temps. En classe de Terminale S, on dit qu'une « variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$, si sa densité est la fonction f définie sur $[a; b]$ par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ » (RESTERM, 2011, p. 42).

On considère :

- O la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée d'Olivier et K celle qui représente l'heure d'arrivée de Karine. O et K sont donc deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$.
- R est l'événement : « Olivier et Karine se rencontrent ».
- L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$.

Les hypothèses du modèle réel est :

Hypothèse 1 : on suppose les variables aléatoires O et K indépendantes.

Hypothèse 2 : on suppose que les variables aléatoires O et K suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$;

● Modèles probabilistes possibles pour traiter la tâche et les traitements au sein de ces modèles

Plusieurs modèles probabilistes peuvent être utilisés pour déterminer la probabilité de l'événement R .

Modèle probabiliste 1 : espace probabilisé avec les variables aléatoires et la loi uniforme sur $[0; 1] \times [0; 1]$

Tel qu'il est présenté dans le document ressource, le travail de validation utilisant ce modèle est basé sur l'étude de la distance $|O - K|$ entre deux variables aléatoires continues O et K qui suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$. Le traitement de cette situation à l'aide de ce modèle est similaire à celui qui a été réalisé dans la situation 2 (le segment et son milieu). L'heure étant prise comme unité de temps, on choisit au hasard un point de coordonnées (O, K) dans le carré de côté 1. Le carré $[0; 1] \times [0; 1]$ est alors utilisé comme support pour réaliser le travail de validation. En conséquence, l'évaluation de la probabilité de l'événement R revient à trouver tous les couples (O, K) tel que $|O - K| \leq \frac{1}{4}$. Pour cela, on résout l'inéquation $|O - K| \leq \frac{1}{4}$ en considérant deux cas :

- Si $O > K$, alors $K \geq O - \frac{1}{4}$.
- Si $O < K$, alors $K \leq O + \frac{1}{4}$.

Ces deux inéquations sont résolues graphiquement, en traçant les deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $K = O - \frac{1}{4}$ et $K = O + \frac{1}{4}$. L'ensemble des points (O, K) tel que $|O - K| \leq \frac{1}{4}$ est représenté graphiquement par la zone grise ci-dessous :

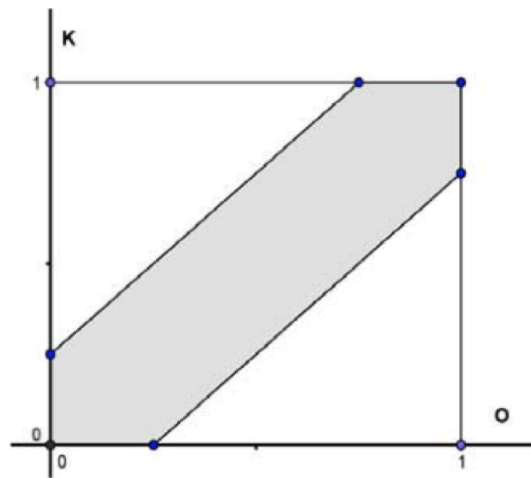


Fig. 10.13 – L'ensemble des solutions vérifiant $|O - K| \leq \frac{1}{4}$ (RESTERM, 2011, p. 42)

La probabilité de l'événement R est égale à l'aire de la zone grise :

$$\text{Aire}(\text{La partie grisée}) = \text{Aire}(\text{carré unité}) - 2 \times \text{Aire}(\text{triangle blanc}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Il en résulte que la probabilité de l'événement R est égale à $\frac{7}{16}$.

Déterminer la probabilité de l'événement R revient à calculer l'aire de la zone grise et de fait, à calculer une intégrale double sur le domaine D définie par :

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, |x - y| \leq \frac{1}{4}\} \text{ et } p(R) = \iint_D dx dy$$

Le domaine D étant symétrique par rapport à la droite $(d) : y = x$, support de l'une des diagonales du carré unité, on peut calculer :

$$1 - p(R) = 2 \times \int_0^{\frac{3}{4}} dx \int_{x+\frac{1}{4}}^1 dy = 2 \times \int_0^{\frac{3}{4}} [\frac{3}{4} - x] dx = (\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{2} \times (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$$

$$p(R) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Ce raisonnement n'est pas accessible pour les élèves de la classe de Terminale. Il est introduit dans les classes supérieures. Cela explique le choix des auteurs du document ressource de Terminale « d'adapter » ce raisonnement basé sur le carré unité pour le rendre plus accessible pour les élèves de la classe de Terminale S.

Modèle probabiliste 2 : modèle de type numérique avec la simulation informatique

Le traitement de la tâche de « la rencontre » à l'aide d'un modèle probabiliste de type numérique présente des similarités avec le traitement effectué dans la situation 2 (segment et son milieu). Le travail de validation est réalisé en trois étapes. La première étape est celle de la construction d'un modèle de type numérique. La deuxième étape est celle de la mise en œuvre de la simulation par un ordinateur et à l'aide d'un tableur afin de calculer la fréquence de l'événement R . Dans la dernière étape, il s'agit d'estimer à partir de la fréquence de l'événement R observée et à l'aide de la loi des grands nombres (ou de l'intervalle de confiance) la probabilité de R .

Étape 1 : construction d'un modèle de type numérique

Les hypothèses du modèle réel sont traduites dans le modèle numérique comme suit :

Hypothèses	Traduction dans le modèle numérique
Hypothèse 1 : les deux variables aléatoires O et K suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$.	Choix au hasard par la machine d'un couple $(X; Y) \in [0; 1]^2$
Hypothèse 2 : les deux variables aléatoires O et K sont indépendantes	Correspond au caractère « aléatoire » du générateur.

Nous choisissons de réaliser la simulation à l'aide d'un tableur (logiciel Excel). Dans ce cas, la simulation nécessite la construction d'une feuille de calcul et l'usage de certaines des fonctions du tableur (cf. la situation du « segment et son milieu ») :

Dans une feuille de calcul et à l'aide de la fonction $ALEA()$, les nombres réels X et Y sont écrits de la manière suivante : $X = ALEA()$ et $Y = ALEA()$. De même, la distance $O - K$ qui est égale à la distance $|X - Y|$ est écrite dans la feuille de calcul sous la forme suivante : $= ABS(X - Y)$. La distance $|O - K|$ est par la suite comparée au nombre $\frac{1}{4}$ (autrement dit 0,25) :

	A	B	C	D
	Variable aléatoire O X=ALEA()	Variable aléatoire K Y=ALEA()	Distance O-K ABS(X-Y)	Comparaison de O-K et 1/4
1				
2	0,88	0,80	0,09	1
3	0,43	0,88	0,45	0
4	0,75	0,31	0,43	0

Fig. 10.14 – La distance $|O - K|$ en fonction de X et de Y

Étape 2 : simulation et calcul de la fréquence de l'événement R

Pour estimer la probabilité de l'événement R , on calcule la fréquence d'apparition de cet événement. Pour cela, on simule par exemple 1000 fois l'expérience, les fréquences de l'apparition de l'événement R sont données par la feuille de calcul.

	A	B	C	D	E
	Variable aléatoire O X=ALEA()	Variable aléatoire K Y=ALEA()	Distance O-K ABS(X-Y)	Comparaison de O-K et 1/4	Fréquence d'apparition de R
1					
2	0,28	0,78	0,50	0	0,432
3	1,00	0,05	0,95	0	0
4	0,87	0,64	0,23	1	

Fig. 10.15 – La fréquence de l'apparition de l'événement R

On constate qu'à partir d'un certain rang, les fréquences de l'événement R ont tendance à se stabiliser autour du nombre 0,432 qui est proche de la valeur $\frac{7}{16}$ obtenue dans le premier modèle probabiliste.

Étape 3 : estimation de la probabilité de l'événement R

À l'aide de la loi des grands nombres, la valeur de la fréquence de l'événement R se rapproche de la probabilité de l'événement R , 0,432 est donc une valeur estimée de la probabilité de l'événement R . On peut également utiliser un intervalle de confiance (au seuil de 95 %) en calculant ses bornes à l'aide de la fréquence observée : $[0,432 - \frac{1}{\sqrt{1000}}; 0,432 + \frac{1}{\sqrt{1000}}]$. La probabilité de l'événement R appartient à l'intervalle $[0,400; 0,467]$ (les bornes sont arrondies à 10^{-3} près).

En référence aux documents institutionnels, une simulation à l'aide d'un algorithme (avec une calculatrice ou le logiciel Algotbox) peut être envisagée.

Une autre façon de résoudre cette situation est d'envisager un traitement proche du modèle réel. Le traitement consiste à étudier les instants d'arrivée d'Olivier et de Karine sur chacun des intervalles $[7h; 7h15]$, $[7h15; 7h45]$, $[7h45; 8h]$ et à calculer la probabilité de l'événement R dans chacun des trois intervalles. L'ordre d'arrivée des deux personnes n'a pas d'importance.

Cas 1 : la rencontre sur $[7h15; 7h45]$

Olivier a une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'arriver entre 7h15 et 7h45. Karine peut arriver 15 min avant Olivier ou 15 min après Olivier. Karine a donc une probabilité de $\frac{30}{60}$ soit $\frac{1}{2}$ de rencontrer Olivier sur l'intervalle $[7h15; 7h45]$ quand celui-ci est arrivé entre 7h15 et 7h45. Donc, $p(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ sur $[7h15; 7h45]$.

Cas 2 : la rencontre sur $[7h; 7h15]$

Olivier a une probabilité de $\frac{1}{4}$ d'arriver entre $[7h; 7h15]$. S'il arrive à 7h, Karine a 15 min pour arriver. Au-delà, il n'y aura pas de rencontre avec Olivier.

Si Olivier arrive à 7h15, Karine peut arriver entre 7h et 7h30. Karine a donc en moyenne $\frac{30+15}{2} = 22,5min$ pour rencontrer Olivier. Karine a une probabilité de $\frac{3}{8}$ de rencontrer Olivier sur l'intervalle $[7h; 7h15]$ quand celui-ci est arrivé entre 7h et 7h15. La probabilité de la rencontre est $p(R) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$.

De la même façon, la probabilité de la rencontre sur l'intervalle $[7h45; 8h]$ est $p(R) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$.

La probabilité de la rencontre d'Olivier et de Karine entre $[7h; 8h]$ est ainsi :

$$p(R) = \frac{1}{4} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

Ce mode de raisonnement peut être présenté aux élèves de Terminale S dans le cas où l'un des deux modèles probabilistes (1 et 2) ne sont pas envisagés. Nous précisons que ce type de raisonnement a été rencontré dans une séance de classe indépendante de celles que nous avons observées dans ce travail de recherche.

Niveau 2 : analyse du travail de validation

Dans le modèle probabiliste de type analytique, le travail de validation mis en œuvre pour déterminer la probabilité de l'événement R est basé sur l'usage d'outils sémiotiques comme la figure du carré de côté 1 et le plan cartésien. Il requiert l'usage d'outils théoriques telles que la loi uniforme sur un intervalle, les variables aléatoires continues, les expressions et techniques algébriques conventionnelles en classe de Terminale S. Dans ce cas, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] et orienté par le paradigme P2 articulé avec le domaine de l'algèbre ainsi que celui de la géométrie.

Dans le modèle probabiliste de type numérique, le travail de validation mis en place pour

résoudre la tâche proposée s'effectue en trois étapes. La première étape s'appuie sur les outils théoriques de la dimension discursive pour construire le modèle de type numérique. Le travail de validation est alors placé dans la dimension discursive et est orienté par le paradigme P2. Dans la deuxième étape, la dimension instrumentale est au centre du travail de validation. Le travail de validation s'appuie sur les outils technologiques (feuille de calcul, fonctions du tableur) pour mettre en oeuvre la simulation et calculer la fréquence de l'événement R . Ainsi, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté par le paradigme P1. Dans la troisième étape, la probabilité de l'événement R est estimée à partir de la fréquence de l'événement R observée dans la deuxième étape. Cette estimation s'effectue *via* les outils théoriques de la dimension discursive tels que la loi des grands nombres ou l'intervalle de confiance. Dans cette étape, le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis] et est dirigé par le paradigme P2. En conclusion, le traitement de la tâche *via* un modèle probabiliste de type numérique place le travail de validation dans le plan [Sem-Ins] orienté vers le plan [Ins-Dis] et est dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2.

Dans le cas où le traitement de la tâche s'effectue par l'étude des instants d'arrivée de chacune des deux personnes, le travail de validation est placé dans la dimension discursive faisant intervenir un changement de domaine (probabilités, grandeurs et mesures). Il est dirigé par le paradigme P2 articulé avec le domaine des grandeurs et mesures.

La loi uniforme est introduite en classe de Terminale S. Cette loi est donc *a priori* un élément du référentiel théorique de l'ETM_P (de référence, idoine et personnel (de l'élève)). Cependant, l'usage de cette loi - tel que nous l'avons décrit pour répondre au problème posé - n'est pas nécessairement à la portée des élèves de la classe de Terminale S. Le fait de baser le travail de validation sur le carré unité ne va pas de soi et ne découle pas directement de l'énoncé de la situation 4. De plus, à ce niveau de classe, les élèves n'ont pas l'habitude d'effectuer un tel travail de validation. Dans un traitement proche du modèle réel comme celui que nous avons présenté ci-dessus, l'étude des instants d'arrivée peut présenter des difficultés aux élèves de la classe de Terminale S. Nous considérons donc que pour, ce niveau de classe, cette situation relève de la catégorie des tâches riches.

10.2 Synthèse de l'analyse *a priori* des quatre situations probabilistes

Nous résumons dans le tableau ci-dessous le travail de validation de chacune des quatre situations sélectionnées pour être proposées à des professeurs en fonction de sa catégorie,

du niveau de classe où elle est proposée, de la circulation du travail de validation et du paradigme en jeu :

	Niveau de classe		Catégorie des tâches	Circulation du travail de validation	Paradigme
Situation 1 Les trois bancs	3 ^e	2 nd e	Complexe	$[Sem - Ins] \rightarrow Dis$ Clos sur (Dis)	P1 P2 P2
Situation 2 Le segment et son milieu	3 ^e		Riche	$[Sem - Ins] \rightarrow [Ins - Dis]$ $[Sem - Dis]$	P1 P2 P2 articulé avec le domaine de l'algèbre et de la géométrie
Situation 3 La politique nataliste	2 nd e	1 ^{re} S	Riche Complexe	(Dis) $[Sem - Ins] \rightarrow [Ins - Dis]$	P2 P1 P2
Situation 4 La rencontre	Term S		Riche	$[Sem - Dis]$ $[Sem - Ins] \rightarrow [Ins - Dis]$ Clos sur (Dis)	P2 articulé avec le domaine de l'algèbre et de la géométrie P1 P2 P1 P2 P2 articulé avec le domaine des grandeurs et mesures

TABLE 10.1 – Les situations proposées en fonction de la catégorie des tâches et du niveau de classe

Nous avons effectué une analyse *a priori* de quatre situations extraites des documents ressources de différents niveaux de classe. Cette analyse, nous l'avons menée du point de vue de l'ETM_P de référence afin de déterminer la catégorie des tâches à laquelle chacune des quatre situations appartient, mais aussi pour obtenir des renseignements sur le travail de validation potentiel pour traiter ces situations. Dans le chapitre qui suit, nous allons analyser la mise en œuvre de ces situations par les professeurs dans leurs classes. Il s'agit en particulier d'examiner les adaptations et les transformations de tâches effectuées par les professeurs pour mener le travail de validation dans l'ETM_P idoine. Nous chercherons à observer si le travail de validation tel que nous l'avons identifié dans notre analyse *a priori* est similaire à celui réellement réalisé dans les ETM_P par les professeurs.

Chapitre 11

L'analyse de la validation dans les ETM_P idoines effectifs en fonction de la catégorie des tâches

Comme son titre l'indique, ce chapitre sera consacré à l'analyse de la validation mise en œuvre dans des ETM_P idoines en fonction de la catégorie de la tâche proposée. Nous chercherons à vérifier si la catégorie de la tâche influe sur la circulation du travail de validation au sein de l'ETM_P idoine et sur la forme de validation engendrée par son exécution. Mais il s'agit également de repérer, pour une même tâche, les formes de validation institutionnalisées par chacun des enseignants observés. Ce chapitre vise à étudier spécifiquement les hypothèses (H2a) et (H2b) que nous rappelons ci-dessous :

(H2a) : Nous postulons que, dans le domaine des probabilités, la forme de la validation dépend du degré de complexité des tâches proposées. Ainsi, selon le degré de complexité des tâches, le travail de validation dans l'ETM_P est placé dans l'un des plans [Sem-Dis], [Ins-Dis], ou éventuellement clos sur la dimension discursive.

(H2b) : Nous faisons l'hypothèse que, pour des tâches identiques proposées dans des ETM idoines similaires, les formes de validation institutionnalisées par les professeurs sont différentes d'un professeur à un autre et ceci, quel que soit le niveau d'enseignement.

Nous nous proposons de commencer ce chapitre en explicitant la méthodologie adoptée pour effectuer l'analyse de la mise en œuvre de la validation dans les ETM_P idoines. Ensuite, nous décrirons cette mise en œuvre de la validation dans les classes d'enseignement allant de la 3^e à la Terminale S.

11.1 Méthodologie de l'analyse de la validation mise en œuvre dans l'ETM_P idoine effectif

L'analyse de la mise en œuvre des tâches

Pour tester les deux hypothèses (H2a) et (H2b), notre méthodologie d'analyse de la mise en place des quatre situations décrites précédemment repose sur les trois cas suivants :

1) une même tâche complexe :

Il s'agit d'analyser le travail de validation de la tâche complexe « les trois bancs » dans deux classes de 3^e et deux classes de 2^{nde}. Ensuite, de comparer le travail de validation effectué lors de cette tâche complexe dans un même niveau et entre deux niveaux distincts. Cela nous permet d'observer l'existence ou non des différences de travail de validation et des formes de validation, d'une part entre deux ETM_P de même niveau et d'autre part entre des ETM_P de niveaux différents.

2) une même tâche, riche pour la classe de 2^{nde} et complexe pour la classe de 1^{re} S :

Il est question d'examiner le travail de validation pour la tâche « la politique nataliste » dans deux ETM_P idoines de niveau 2^{nde} et dans deux ETM_P idoines de niveau 1^{re} S. À travers cette analyse, nous souhaitons étudier la gestion du travail de validation d'une même tâche mais de catégorie différente entre deux niveaux. En nous appuyant sur cette analyse, nous cherchons à savoir si les formes de validation pratiquées en classe de 2^{nde} et en classe de 1^{re} S présentent ou non les mêmes caractéristiques ; caractéristiques que nous chercherons à déterminer.

3) deux tâches riches différentes, l'une en classe de 3^e et l'autre en classe de Terminale S :

Nous proposons ici de rendre compte du travail de validation d'une tâche riche au début et à la fin de l'apprentissage des probabilités de niveau du secondaire. Il s'agit de proposer la situation « le segment et son milieu » et la situation « la rencontre », dans une classe de 3^e et dans une classe de Terminale S. À travers cette étude, nous cherchons à observer l'existence d'une différence du travail de validation d'une tâche de même catégorie.

Dans chacun des trois cas, nous examinerons :

- la circulation du travail de validation dans les plans de l'ETM_P idoine ([Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis]) ;
- les arguments (formel, sémiotique, empirico-expérimental) mobilisés dans la production de l'argumentaire de validation ;

- le paradigme en jeu (P1 ou P2) ;
- la catégorie du travailleur-élève : tâcheron, technicien ou ingénieur.

Échantillon de professeurs et de classes

Afin d'analyser le travail de validation lié à la mise en œuvre de chacune des quatre situations décrites dans le chapitre précédent, nous avons demandé à cinq professeurs de participer à notre recherche. Nous les avons nommés A, B, C, D et E. Nous précisons que ce ne sont pas les mêmes professeurs qui ont participé à l'étude comparative menée dans la deuxième partie. Ces professeurs enseignent dans des établissements différents. Cet échantillon a été sélectionné en fonction du niveau d'expérience des professeurs. De la même manière que dans la deuxième partie, nous avons fait le choix de ne retenir que les professeurs ayant un niveau d'expérience supérieur à 5 ans. Les professeurs ont également été sélectionnés en fonction du niveau de classe dans lequel ils enseignent, à savoir 3^e, 2^{nde}, 1^{re} S ou Terminale S. Dans le tableau ci-dessous est indiqué, pour chacun des cinq professeurs les niveaux de classe dans lesquels ils ont été observés.

	3 ^e	2 ^{nde}	1 ^{re} S	Term S
Professeur A	X			
Professeur B	X	X		X
Professeur C		X		
Professeur D			X	
Professeur E			X	

TABLE 11.1 – Niveaux de classe dans lesquels les professeurs ont été observés

Nous avons observé au total neuf séances de classe. Nous proposons dans le tableau ci-dessous les tâches qui ont été mises en œuvre par chacun des professeurs dans leur classe :

	Le segment et son milieu	Les trois bancs	La politique nataliste	La rencontre
Professeur A	En classe de 3 ^e	En classe de 3 ^e		
Professeur B		En classe de 3 ^e	En classe de 2 ^{nde}	En classe de Term S
Professeur C		En classe de 2 ^{nde}	En classe de 2 ^{nde}	
Professeur D			En classe de 1 ^{re} S	
Professeur E			En classe de 1 ^{re} S	

TABLE 11.2 – Les tâches mises en œuvre par les professeurs en fonction du niveau de classe

Avec l'accord de l'ensemble des professeurs, la mise en œuvre de chacune des situations dans les classes s'est effectuée à partir du milieu du 3^e trimestre (mai-juin 2015). Nous avons pu observer deux ou trois séances par niveau et par professeur. Les observations ont été intégralement filmées. Ces professeurs ont été rencontrés individuellement en dehors du temps de classe. Cela nous a permis de présenter chacune des situations et d'échanger. Nous précisons que les énoncés de situations ont été envoyés deux semaines avant la rencontre avec les professeurs. Cet envoi nous semblait nécessaire afin de leur laisser le temps de prendre connaissance et de s'imprégner des situations, pour pouvoir discuter des objectifs de celles-ci.

Nous avons choisi de ne pas proposer de scénario de mise en œuvre des situations et d'analyser directement la mise en œuvre des situations dans les ETM_P idoines effectifs. La raison de notre choix relève de l'objectif que nous nous sommes fixés dans cette troisième partie : analyser le travail de validation associé à une tâche dans un ETM_P idoine construit et mis en œuvre par un professeur d'un niveau donné. Notre intérêt porte sur la gestion du travail de validation d'une même tâche au sein de l'ETM_P d'un même niveau ou de différents niveaux de classe. Nous avons été particulièrement attentifs à l'écart entre le travail de validation envisagé *a priori* et celui réalisé dans un ETM_P idoine effectif. Nous allons à la fois analyser la mise en place d'une tâche complexe ou riche et identifier les éventuelles transformations de la nature de celle-ci lors de son exécution dans l'ETM_P idoine. Il est également question de comparer le travail de validation afin de mettre en évidence d'éventuelles formes de validation privilégiées dans les ETM_P idoines considérés. Précisons que notre but n'est pas de décrire les ETM_P idoines des classes allant de la classe de 3^e à la classe de Terminale S, mais de mieux comprendre les différentes formes de validation institutionnalisées et le travail de validation mis en place par les professeurs dans l'enseignement des probabilités.

11.2 La validation dans le cas d'une même tâche complexe

Nous avons proposé à deux classes de 3^e et à deux classes de 2^{nde} la situation « les trois bancs ». Nous proposons d'analyser le travail de validation dans chacune des quatre classes, notées respectivement 3^e A, 3^e B, 2^{nde} B et 2^{nde} C. Nous rappelons l'énoncé de la situation des trois bancs :

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?

On note E l'événement « les personnes sont assises côte à côte ».

11.2.1 Validation dans deux ETM_P idoines de la classe de 3^e

1) Dans l'ETM_P de la classe de 3^e A (Professeur A)

La tâche « les trois bancs » a été donnée à chercher en dehors de la classe. La séance observée débute par la correction de la tâche. Le professeur A demande aux élèves de proposer leur réponses. Sur les 25 élèves de cette classe, seulement deux ont suggéré une valeur de la probabilité cherchée. L'un des deux élèves a proposé une probabilité de $\frac{2}{6}$ (soit $\frac{1}{3}$), l'autre élève a proposé une probabilité de $\frac{3}{6}$ (soit $\frac{1}{2}$). La première valeur, bien qu'elle soit correcte, a été obtenue par un raisonnement faux qui consiste à diviser le nombre de personnes par le nombre de places disponibles. La deuxième valeur est fautive, et a également été obtenue par un raisonnement faux qui consiste à diviser le nombre de bancs par le nombre de places. Ces deux valeurs obtenues traduisent le fait que les élèves n'ont pas identifié les hypothèses de l'un des modèles réels permettant de décrire précisément l'expérience aléatoire. Face à la difficulté éprouvée par l'ensemble des élèves, le professeur A reprend l'énoncé de la tâche. Il précise tout d'abord la signification du mot « successivement » qui lui a permis de formuler les deux hypothèses du premier modèle réel (H1 et H2)

H1 : on suppose que la première personne est assise sur l'un des trois bancs. On suppose que la deuxième personne s'assoit sur l'un des trois bancs.

Professeur A	Voilà comment je vais faire. D'abord, la première personne arrive et elle a trois choix possibles pour les bancs. Soit elle choisit le premier banc, soit le deuxième soit le troisième [...] Oui. Maintenant imaginons que la première personne s'installe sur le premier banc , la deuxième arrive, elle a combien de choix ?
Élèves	Trois choix
Professeur A	Oui, soit elle s'assoit sur le banc 1, 2 ou 3. Est-ce que vous pouvez finir le schéma tout seul ou pas ? [...] Si la première personne s'installe sur le banc 2, la deuxième personne qui arrive a combien de possibilités ?
Élèves	C'est pareil . . .

H2 : on suppose qu'il y a équiprobabilité (dans le choix des bancs).

Professeur A	[...] Je voudrais que vous me disiez avec quelle probabilité elle (<i>la première personne</i>) choisit chacun des bancs, il y a une indication dans l'énoncé. Comment elle choisit son banc ?
Élèves 4	Elle s'installe au hasard .
Professeur A	Il y a trois bancs en tout, quelle est la probabilité ?
Élèves	Un sur trois.
Professeur	La deuxième personne elle arrive. Qu'est ce qui se passe ? Elle s'installe comment ?
Élèves	Au hasard .

Le terme « hasard » permet au professeur A de justifier l'équiprobabilité du choix d'un

banc parmi trois pour la première personne, mais également pour le choix de la seconde personne. La probabilité de choisir l'un des trois bancs pour chacune des deux personnes est donc de $\frac{1}{3}$. Par la suite, le professeur choisit de modéliser la situation aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré, nommant chacun des bancs B1, B2 et B3.

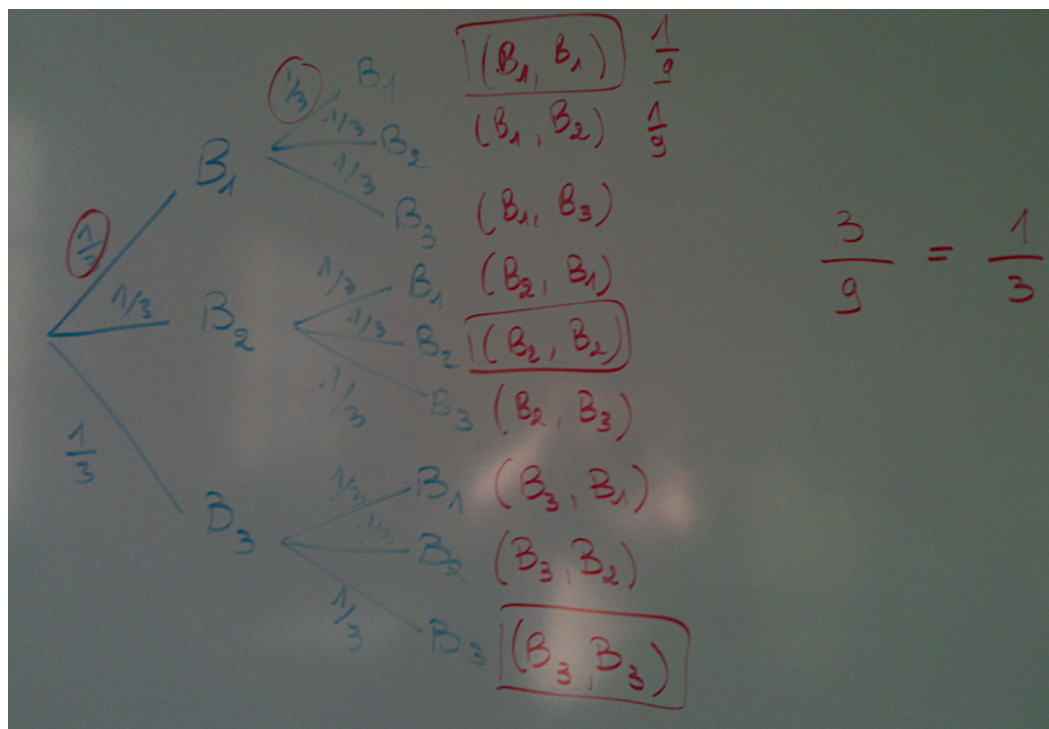


Fig. 11.1 – Arbre pondéré construit par le professeur A

À l'aide de cet arbre, il écrit chacun des couples d'issues de l'expérience aléatoire dans les marges de l'arbre pondéré. Il procède alors au dénombrement des issues qui réalisent l'événement E . La probabilité de l'événement E est obtenue en utilisant non pas les propriétés de l'arbre pondéré mais plutôt la formule de Laplace, en dénombrant sur l'arbre les cas favorables et les cas possibles. La probabilité est alors égale à $\frac{3}{9}$ soit $\frac{1}{3}$. Il semble que le professeur A utilise l'arbre pondéré uniquement pour déterminer les issues de l'expérience aléatoire et non pas pour effectuer les traitements calculatoires. En fait, tous les chemins de l'arbre pondéré ont la même probabilité égale à $\frac{1}{9}$. De fait, l'usage d'un arbre des possibles (pour dénombrer) combiné à l'usage de la formule de Laplace aurait suffi pour déterminer la probabilité de l'événement E . Le fait que le professeur A utilise un arbre pondéré résulte sans doute du fait qu'il l'utilise plus souvent que l'arbre des possibles. Par la suite, le professeur A reprend l'arbre pondéré et insiste sur le fait que la probabilité de l'événement E aurait pu être obtenue en utilisant les propriétés de l'arbre. Mais il semble que les élèves ne comprennent pas la remarque du professeur A. Cette incompréhension est traduite par certains « **actes de silence** » :

Professeur A	Oui. D'après vous quelle est la probabilité de chacune des issues ? Si tout le monde s'installe au hasard, quelle est la probabilité de chacune des issues ?
<i>Silence complet</i>	
Professeur A	Pas très compliqué. Vous m'avez dit qu'il y avait combien en tout ? Il y a combien d'issues totales ?
Élèves	Neuf
Professeur A	Donc une chance sur neuf pour l'issue (B1, B1) . Et pour toutes les autres ?
Élèves	Une chance sur neuf aussi
Professeur A	Oui. Donc regardez ce que vous avez fait pour obtenir une chance sur neuf. En fait on a un tiers pour que la première personne choisisse B3 et un tiers pour que la deuxième personne choisisse B3, alors comment on a obtenu un neuvième ? [<i>Le professeur A effectue le produit des probabilités rencontrées sur le chemin menant à l'issue (B3, B3)</i>].
<i>Silence complet</i>	

Le discours de validation rédigé au tableau est constitué d'un arbre pondéré, des couples des issues écrits dans les marges de cet arbre, et de l'égalité $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (cf. figure précédente). Dans ce travail de validation, nous devons signaler que le discours écrit est accompagné d'un discours oral puisque les hypothèses du modèle réel 1 sont mentionnés à l'oral. Seul l'arbre pondéré et le calcul de la probabilité de l'événement E sont mentionnées à l'écrit. Ce professeur a fait le choix d'institutionnaliser un argumentaire de validation constitué d'un argument sémiotique. Cet argumentaire de validation est fondé sur un raisonnement de type « diagrammatique » assisté par les calculs à l'aide de la formule de Laplace pour évaluer la probabilité de l'événement considéré. Le professeur A place le travail de validation dans le plan [Sem-Ins] orienté vers la dimension discursive pour modéliser l'expérience aléatoire et calculer la probabilité. Le paradigme qui dirige ce travail de validation est P1 articulé avec le paradigme P2 (P1|P2) alors que dans notre analyse *a priori*, nous avons envisagé le paradigme P2. Cela est justifié par le fait que le professeur A utilise l'arbre pondéré davantage comme un outil sémiotique plutôt que comme un outil théorique. Nous constatons en outre que seules les hypothèses du modèle réel 1 sont identifiées. Cela est probablement dû aux difficultés éprouvées par les élèves de cette classe de 3^e. Précisons que, selon le professeur A, les élèves de cette classe ont des difficultés non négligeables en mathématiques. Cependant, le professeur A n'a pas non plus suggéré l'usage d'un autre modèle réel. Les difficultés ressenties par les élèves pour résoudre la tâche ont entraîné le professeur A à prendre en charge le travail de validation et à transformer la tâche *a priori* complexe en une tâche simple. Le professeur a donc fait le choix de **guider** les élèves vers le résultat souhaité et de leur attribuer la fonction de tâcheron au lieu de technicien puisqu'ils ne font que terminer la tâche mise en œuvre par le professeur.

2) Dans l'ETM_P de la classe de 3^e B (professeur B)

Le professeur B a laissé 20 minutes aux élèves pour résoudre la tâche. Dans cette classe, les hypothèses des deux modèles réels identifiées dans notre analyse *a priori* ont été identifiées par les élèves. Pour la correction, deux élèves (notés élève 1 et élève 2) sont désignés pour exposer leurs raisonnements au tableau. L'élève 1 expose le raisonnement basé sur les hypothèses du modèle réel 1, et l'élève 2 expose le raisonnement basé sur les hypothèses du modèle réel 2.

Le travail de validation avec le modèle réel 1

L'élève 1 propose une schématisation des trois bancs nommés respectivement *A*, *B* et *C* sous forme de trois rectangles. Ces rectangles sont partagés en deux rectangles correspondant aux places numérotés respectivement 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (cf. figure ci-dessous). Cette représentation schématisée lui a permis par la suite de construire un arbre des possibles pour illustrer l'expérience aléatoire. Il suppose que la première personne est assise sur l'un des six places, par exemple *A1* et la deuxième personne choisit au hasard une place parmi les cinq places non occupées. Il calcule la probabilité de l'événement *A1* : « *la première personne s'assoit sur le banc A et sur la place 1* » soit $\frac{1}{6}$, et la probabilité de l'événement *A2* « *la deuxième personne s'assoit sur le banc A et sur la place 2, sachant que la première personne est assise sur la place A1* » soit $\frac{1}{5}$. Il évalue la probabilité de l'issue (*A1*, *A2*) en multipliant les deux probabilités obtenues précédemment soit $\frac{1}{30}$. Il procède de la même manière pour déterminer la probabilité de chacune des six issues qui réalisent l'événement *E*. La probabilité de l'événement *E* est alors obtenue en multipliant par 6 la probabilité de l'issue (*A1*, *A2*), soit $\frac{1}{30} \times 6 = \frac{1}{5}$. La validation produite par l'élève — et par d'autres élèves de cette classe — et approuvée par le professeur B est exposée au tableau (cf. la figure ci-après).

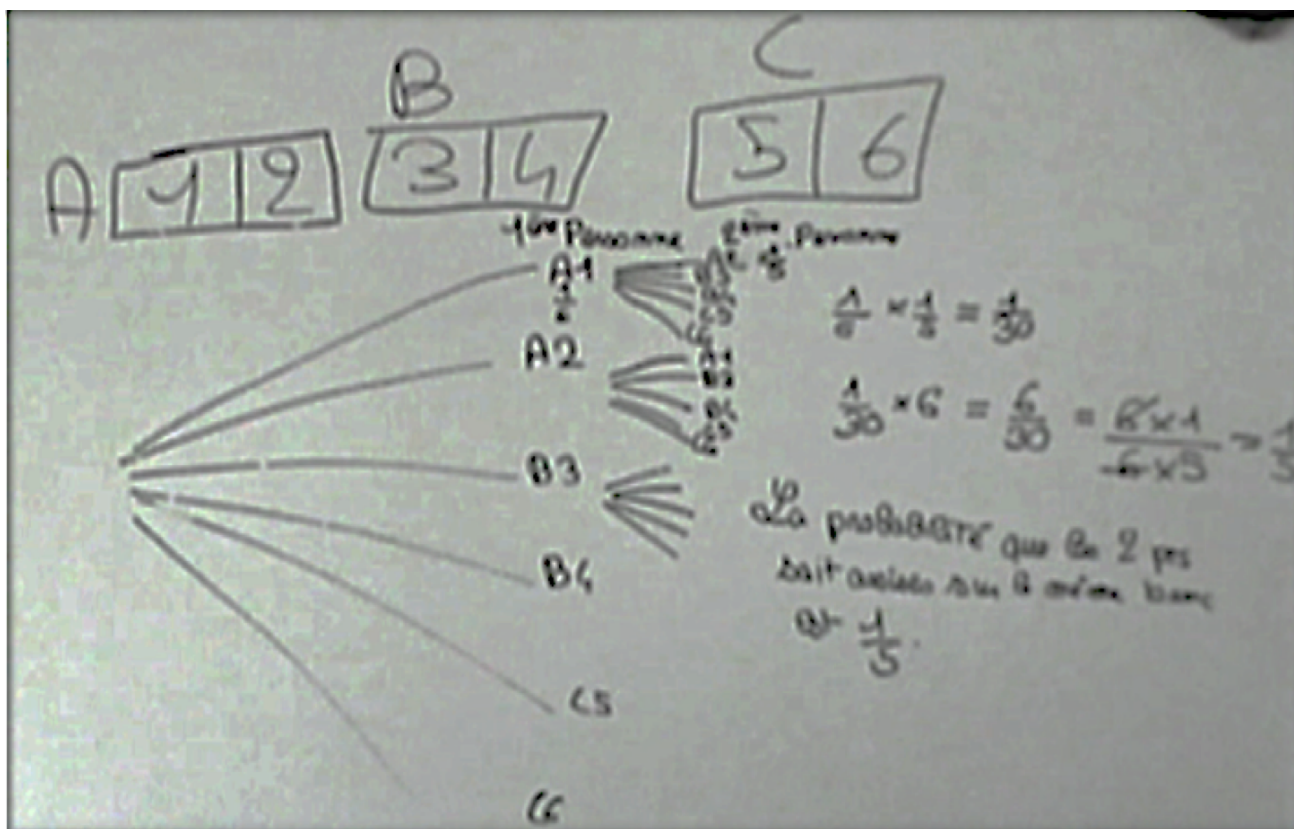


Fig. 11.2 – La validation approuvée par le professeur B

Le travail de validation avec le modèle réel 2

L'élève 2 présente le raisonnement qui lui a permis d'aboutir à la solution $\frac{1}{3}$. Bien que la valeur de la probabilité soit correcte, son raisonnement est faux. En effet, cet élève a déterminé la probabilité de l'événement : « l'une des deux personnes est assise sur l'un des trois bancs », qui ne correspond pas à l'événement E défini dans l'énoncé de la situation. Le professeur B explique à l'élève 2 son erreur puis invite un autre élève (noté élève 3) à exposer son raisonnement au tableau. L'élève 3 reconnaît clairement l'une des deux hypothèses du deuxième modèle réel. Il s'agit de l'hypothèse 2 : « on suppose que la première personne est assise sur l'un des trois bancs. On suppose que la deuxième personne choisit au hasard un banc parmi les trois bancs A, B et C ». Il modélise l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré. Il détermine la probabilité de l'événement E en utilisant (de manière implicite) la propriété de la probabilité de l'union d'événements dans le cas où ces événements sont incompatibles. La probabilité de l'événement E est égale à $\frac{1}{3}$. La validation rédigée par cet élève, également produite par d'autres élèves et approuvée par le professeur B, est présentée au tableau (cf. la figure ci-après).

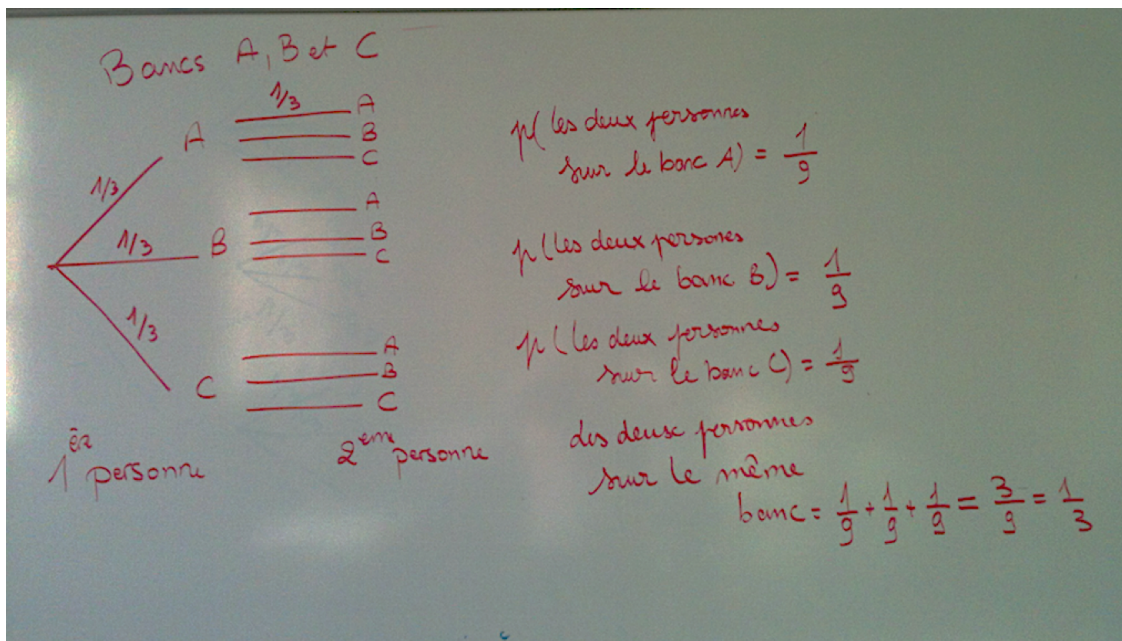


Fig. 11.3 – La validation approuvée par le professeur B

Le professeur B interroge les élèves sur les deux valeurs de la probabilité de l'événement E obtenues. Certains élèves déclarent que l'obtention de ces valeurs est justifiée par le fait que deux raisonnements distincts ont été utilisés par leurs camarades. Ils ajoutent que l'un des deux raisonnements s'intéresse aux trois bancs, alors que l'autre s'intéresse aux six places sur les trois bancs. Le professeur B conclut alors que la raison de l'obtention de ces deux valeurs est liée au choix du modèle réel et des hypothèses de ce modèle.

Élève 7	Parce qu'il y en a un qui raisonne sur les places et l'autre sur les bancs .
Professeur B	Donc si on raisonne sur les bancs, il y a moins de cas que si l'on raisonne sur les places. Donc on prend deux cadres différents , on raisonne dans deux modèles différents . On raisonne à partir d'hypothèses différentes.
Élève 7	Et les deux [<i>sous-entendu les deux modèles</i>] ils sont vrais ?
Professeur B	Oui les deux sont possibles et c'est ça qui est intéressant.

Dans les deux modèles réels identifiés, l'hypothèse liée à la disposition d'une personne - sur l'un des trois bancs ou sur l'une des six places sur les trois bancs - est clairement explicitée à l'oral. En revanche l'hypothèse de l'équiprobabilité des choix de bancs ou des places sur les bancs n'a pas été évoquée. Un élève fait très justement remarqué cette absence d'hypothèse d'équiprobabilité :

Élève 8	Est ce qu'on était dans une situation d'équiprobabilité ?
Professeur B	<i>A priori</i> . Qu'est-ce que vous pensez ?
Élèves	Oui
Professeur B	La personne 1 choisit au hasard un des trois bancs, donc une chance sur 3 pour chacun des trois bancs, c'est équiprobable . De même pour la personne 2 elle a une chance sur 3 de s'asseoir sur l'un des trois bancs. Donc on peut avoir $AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC, AA$, donc combien d'issues au total ?
Elèves	9 issues

Le professeur B approuve la remarque de l'élève et justifie que l'équiprobabilité des issues est explicitée dans l'énoncé par l'expression « *au hasard* ». Le discours de validation institutionnalisé dans cette classe prend en compte les deux modèles réels ainsi que les traitements effectués au sein des modèles probabilistes tels que nous l'avons envisagé dans l'analyse *a priori*. Notons que dans les deux modèles probabilistes, les traitements calculatoires sont effectués à l'aide d'un arbre des possibles (dans le modèle réel 1) et à l'aide d'un arbre pondéré (dans le modèle réel 2). Ces deux arbres sont utilisés comme outils sémiotiques pour représenter la situation aléatoire, mais aussi comme outils technologiques pour dénombrer les cas favorables ou pour calculer la probabilité de l'événement E . Le traitement à l'aide de ces outils sémiotiques permet de bâtir un argumentaire basé sur un raisonnement de type « diagrammatique ». Le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] orienté vers la dimension discursive et le paradigme qui le dirige est P1 articulé avec P2 (dans le cas où l'arbre des possibles est utilisé) ou le paradigme P2 (dans le cas où le traitement calculatoire est effectué à l'aide d'un arbre pondéré). La validation produite à l'issue du travail de validation mis en œuvre dans cet ETM_P idoine est constituée d'arguments sémiotiques combinés avec l'usage d'outils théoriques tels que la formule de Laplace ou la probabilité de la réunion d'événements.

Nous constatons que le travail de validation est pris en charge par les élèves et que le professeur B n'a pas eu besoin de les guider vers les résultats. Selon le professeur B, hormis un élève, les élèves de cette classe n'ont pas de difficultés en mathématiques. Ce constat nous renseigne sur le rôle attribué aux élèves dans l'exécution de cette tâche complexe, celui de technicien.

11.2.2 Validation dans deux ETM_P idoines de la classe de 2^{nde}

1) Dans l'ETM_P de la classe de 2^{nde} B (professeur B)

Nous rappelons que le professeur B de la classe de 3^B est le même que celui de la classe de 2^{nde} B. Le professeur B laisse un temps de 20 minutes aux élèves afin de résoudre la tâche « les trois bancs ». Lors de la correction, le professeur sollicite deux élèves (élève 1 et élève 2) pour présenter leurs raisonnements au tableau. Ces élèves ont été choisis par le professeur car ils ont traité la tâche avec deux modèles réels distincts.

Le travail de validation avec le modèle réel 1

L'élève 1 commence par formuler à l'oral les deux hypothèses de ce modèle réel 1 (celle de l'équiprobabilité et celle de la disposition des personnes sur les trois bancs). Cependant, le professeur B intervient pour ajouter une précision à l'hypothèse portant sur la disposition des personnes sur les deux places du banc, selon lui nécessaire pour le raisonnement formulé par l'élève 1 :

Professeur B	Est-ce que tu considères la place des personnes sur le banc à droite et à gauche ?
Élève 1	Non
Professeur B	Alors tu écris « on ne considère pas la disposition des personnes sur le banc » , c'est-à-dire que la personne 1 soit à gauche ou à droite de la personne 2 on dit que ce n'est pas important. Attention ça c'est important de le dire. Regardez [<i>en s'adressant à l'ensemble de la classe</i>] ! L'élève 1 repasse en bleu les chemins qui correspondent à deux personnes assises sur le même banc.

La remarque faite par le professeur B à l'élève 1 apporte une précision qui permet de distinguer les deux modèles réels. Dans le premier modèle réel, les issues (A1, A2) (la première personne est assise sur la place A1 et la deuxième personne est assise sur la place A2) et (A2, A1) (la première personne est assise sur la place A2 et la deuxième personne est assise sur la place A1) sont considérées identiques, alors que dans le deuxième modèle réel, ces deux issues sont considérées comme distinctes.

L'élève 1 construit alors un arbre des possibles pour représenter l'expérience aléatoire. Il dénombre les issues possibles de cette expérience et les issues réalisant l'événement E . Il achève son raisonnement par le calcul de la probabilité de l'événement E en utilisant la formule de Laplace et obtient une probabilité de $\frac{1}{3}$. Précisons que le raisonnement élaboré par l'élève 1 est également observé chez d'autres élèves de cette classe. Ainsi, la validation produite (dans le cas du modèle réel 1) par l'élève 1 et approuvée par le professeur B est exposée au tableau comme suit :

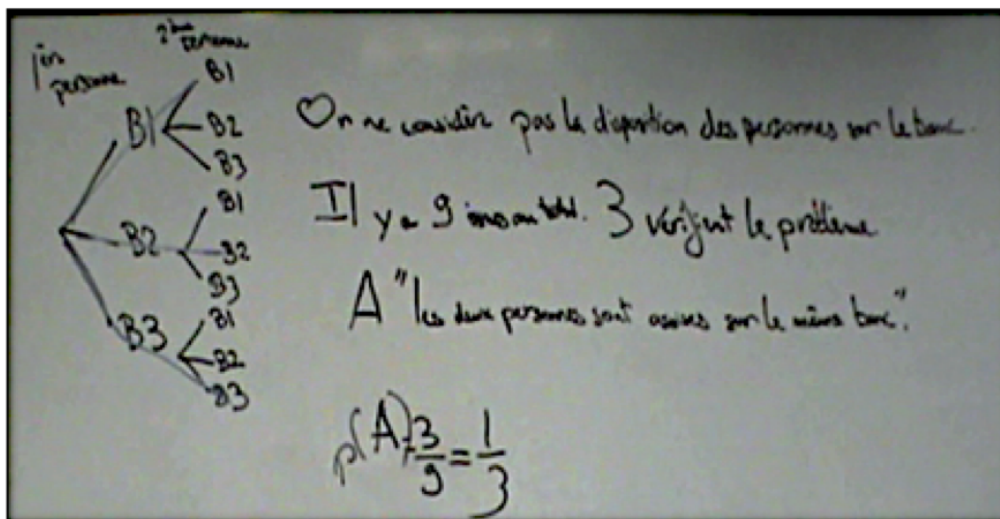


Fig. 11.4 – La validation produite par l'élève 1 et approuvée par le professeur B

Le travail de validation avec le modèle réel 2

L'élève 2 commence par expliciter à l'oral les deux hypothèses du modèle réel 2 (l'équiprobabilité et la disposition d'une personne sur les six places des trois bancs) :

Professeur B	Toi [<i>En s'adressant à l'élève 2</i>], tu considères la disposition des deux personnes . Alors écris au tableau que l'on considère la disposition de deux personnes sur le banc. C'est-à-dire que la personne 1 soit à gauche ou à droite de la personne 2, ça sera deux cas différents . En fait, on écrit dans quel cadre [<i>Sous-entendu modèle</i>] on se place.
Élève 2	On regarde d'abord sur quel banc la première personne va s'asseoir. Soit le banc 1, soit le banc 2, soit le banc 3 [<i>Notés respectivement B1, B2 et B3</i>]. Après on regarde sur quelle place elle se met, la place 1 ou la place 2 [<i>Notées respectivement pl1 et pl2</i>].

Dans le raisonnement de l'élève 2, les issues (A1, A2) (la première personne est assise sur la place A1 et la deuxième personne est assise sur la place A2) et (A2, A1) (la première personne est assise sur la place A2 et la deuxième personne est assise sur la place A1) sont considérées distinctes. Cela traduit l'une des hypothèses du modèle réel 2. Le professeur B demande à l'élève 2 d'écrire cette hypothèse au tableau.

Pour évaluer la probabilité de l'événement E , l'élève 2 construit un arbre des possibles sur lequel il dénombre les issues réalisant l'événement E . Ensuite, il applique la formule de Laplace pour en déduire la probabilité de l'événement E qui est égale à $\frac{1}{5}$. Le raisonnement utilisé par l'élève 2 est également observé chez d'autres élèves de cette classe.

La validation produite (dans le modèle réel 2) par l'élève 2 et approuvée par le professeur B est présentée sous la forme suivante :

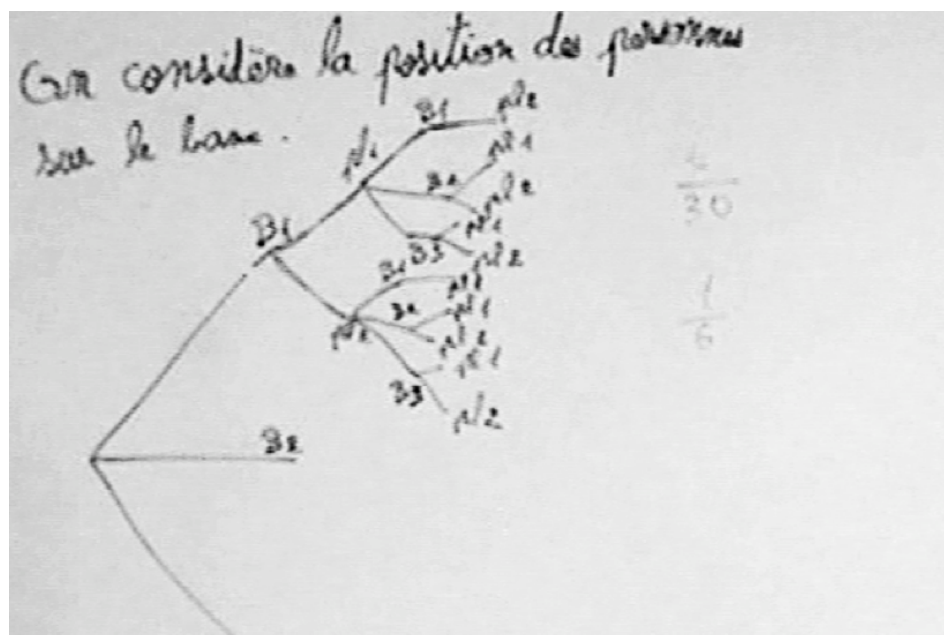


Fig. 11.5 – La validation produite par l'élève 2 et approuvée par le professeur B

Pour terminer la résolution de la tâche, le professeur B fait remarquer aux élèves que deux valeurs distinctes ont été obtenues pour la probabilité de l'événement E . Il les invite à fournir une explication :

Professeur B	On a deux probabilités différentes. Parce qu'on a trouvé un tiers et un cinquième. Pourquoi on n'a pas trouvé la même chose ? Est-ce que c'est faux ?
Élève 4	Parce qu'on ne considère pas la même chose (explication 1).
Professeur B	Oui, que peut-on dire de plus ?
Élève 5	On n'interprète pas pareil l'énoncé (explication 2).
Professeur B	Oui. Pourquoi on trouve un tiers dans un cas et un cinquième dans l'autre ?
Élève 6	Parce qu'on n'a pas la même perception (explication 3).
Professeur B	Oui. Et les autres ?
Élève 7	On ne prend pas en compte la même chose (explication 4)
Professeur B	Qu'est-ce que cela veut dire ?
Élève 7	On prend plus de possibilités dans un cas où l'on considère les places (explication 5).
Professeur B	Oui.

Les explications proposées par les quatre élèves permettent d'aboutir au fait que l'énoncé de la tâche n'est pas suffisamment précis pour pouvoir choisir entre les deux valeurs.

Le travail de validation mis en œuvre dans l'ETM_P de cette classe de seconde est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté vers la dimension discursive et le paradigme qui le dirige

est P1 articulé avec le paradigme P2. La validation produite à l'issue de ce travail de validation est composée des deux argumentaires de validation produits par les deux élèves (élève 1 et élève 2) au tableau. Rappelons que ces deux argumentaires sont constitués principalement d'arguments sémiotiques prenant appui sur les outils sémiotiques, tels que les arbres des possibles, pour décrire les issues de l'expérience aléatoire et pour dénombrer les issues réalisant l'événement E . Ces arguments sémiotiques permettent de mettre en œuvre un raisonnement de type « diagrammatique » assisté par les calculs à l'aide de la formule de Laplace, un outil du référentiel théorique. Nous constatons que le travail de validation élaboré est pris en charge par les élèves. Ils ont de fait eu le rôle de technicien dans l'exécution de cette tâche complexe.

2) Dans l'ETM_P de la classe de 2^{nde} C (professeur C)

Pour traiter la tâche, le professeur C laisse environ 20 minutes aux élèves. Ensuite, il interroge certains élèves afin de présenter à l'oral leur raisonnement. On constate que seules les hypothèses du modèle réel 2 sont identifiées par les élèves et le professeur dans cette classe de seconde.

Le professeur C interroge un élève pour donner sa réponse. Ce dernier obtient $\frac{4}{10}$ comme probabilité de l'événement E . Ce résultat est obtenu en schématisant les bancs à deux places par des rectangles partagés en deux et en dénombrant tous les cas possibles de la disposition des deux personnes. Or, dans son raisonnement, il ne considère que deux bancs au lieu de trois. Il a donc omis quelques cas possibles. Le professeur C sollicite les autres élèves pour proposer une autre méthode plus efficace.

Professeur C	Comment on peut être sûr de ne pas oublier des cas ?
Elève 2	On peut faire un arbre .
Professeur C	Qu'est-ce que vous proposez comme arbre ?
Elève 2	Un arbre représentant les deux personnes.

Le professeur C procède par la suite (sous les indications des élèves) à la construction d'un arbre des possibles. Cette construction est expliquée par l'énonciation à l'oral de l'hypothèse de la disposition des deux personnes sur l'une des six places :

Professeur C	Pour la première personne combien de branches ?
Elève 2	Six branches.
Professeur C	Donc la première personne à six places possibles . Que se passe-t-il pour la deuxième personne ? Si la première personne s'assoit sur la première place, est-ce que elle peut s'asseoir sur la place 1 ?
Elèves	Non.

Professeur C	Combien de choix alors ?
Elèves	Cinq.
Professeur C	Donc je dessine 5 branches ,[...]. Ensuite si la première personne s'assoit sur la deuxième place alors la deuxième personne ?
Elèves	S'assoit sur la place 1, 3, 4, 5, 6.
<i>Silence complet</i>	

Au regard des échanges produits entre le professeur C et les élèves, il est clair que c'est la deuxième hypothèse du modèle réel 2 qui est identifiée. Les issues (A1, A2) (la première personne est assise sur la place A1 et la deuxième personne est assise sur la place A2) et (A2, A1) (la première personne est assise sur la place A2 et la deuxième personne est assise sur la place A1) sont considérées distinctes.

À l'aide de l'arbre des possibles, le professeur C fait remarquer aux élèves que les issues de l'expérience aléatoire sont équiprobables. La deuxième hypothèse du modèle réel 2 est ainsi explicitée :

Professeur C	[...] On a six choix pour la première personne , puis en partant de chaque choix de la première personne, on a alors cinq choix possibles pour la deuxième personne . Donc on a 5 choix possibles que l'on retrouve six fois, soit 30 choix possibles . On a donc 30 combinaisons possibles. Et toutes les combinaisons sont équiprobables .
--------------	--

Les deux hypothèses relatives au modèle réel 2 sont clairement explicitées à l'oral. Le travail de validation s'achève alors par le calcul de la probabilité de l'événement E en dénombrant les issues réalisant l'événement E et les issues totales. L'utilisation de la formule de Laplace permet d'aboutir à la probabilité de l'événement E , qui est égale à $\frac{1}{5}$. La validation produite par le professeur C à l'aide des élèves est rédigée au tableau (cf. La figure ci-après).

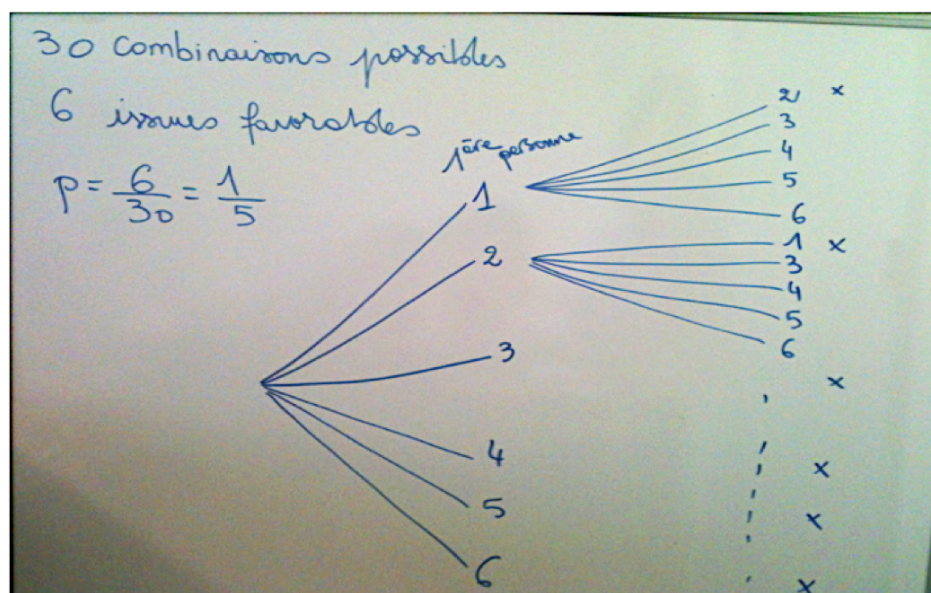


Fig. 11.6 – La validation produite par le professeur C

Le travail de validation mis en œuvre dans l'ETM_P de cette classe de seconde est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté vers la dimension discursive. En outre, ce travail de validation est piloté par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2. La validation produite à la suite de ce travail de validation est un argumentaire de validation constitué d'un argument sémiotique et fondé sur un raisonnement de type « diagrammatique ». Cet argument fait appel à l'usage de l'arbre des possibles en tant qu'outil sémiotique pour dénombrer les issues réalisant l'événement E . Il est combiné avec l'usage de la formule de Laplace pour évaluer la probabilité de l'événement considéré. Dans la mesure où le professeur C a rédigé l'argumentaire de validation au tableau tel qu'il lui a été suggéré par les élèves, le travail de validation semble effectué de manière « équitable » entre le professeur C et les élèves. Ce partage de responsabilité du travail de validation suppose que les élèves ont joué le rôle de technicien dans l'exécution de la tâche complexe.

11.2.3 Conclusion

Pour une même tâche complexe proposée dans deux classes de 3^e, le travail de validation en classe de 3^e B est pris en charge par les élèves alors qu'en classe de 3^e A, il est davantage de la responsabilité du professeur. De plus, dans la classe de 3^e A, seul un modèle réel a été identifié. Les hypothèses ont été clairement soulignées par le professeur A. Dans la classe de 3^e B, les deux modèles réels ont été identifiés. Une autre différence peut être soulignée. Celle-ci porte sur le rôle donné aux élèves pour exécuter la tâche complexe. Dans la classe de 3^e B, les élèves ont eu un rôle de technicien alors que dans la classe de 3^e A, ils ont eu un rôle de tâcheron. Cependant, on constate que dans les deux classes de 3^e, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté vers

la dimension discursive. Ce travail de validation est dirigé par le paradigme P1 articulé avec P2 (P1|P2) ou le paradigme P2. Les validations produites à l'écrit par les professeurs A et B sont similaires du point de vue des arguments utilisés. En effet, ces validations sont des argumentaires constitués d'arguments sémiotiques faisant appel à l'usage d'outils sémiotiques tels que les arbres pondérés ou les arbres des possibles. Plus précisément, ces outils sémiotiques sont formulés au sein des validations écrites au tableau. Une autre similarité porte sur le fait que les validations produites par les professeurs A et B sont accompagnées d'un discours oral permettant d'explicitier les hypothèses du modèle réel. Dans les deux classes de 2^{nde} observées, on constate que les hypothèses des deux modèles réels sont clairement identifiées et formulées dans la classe de 2^{nde} B. Par contre, dans la classe de 2^{nde} C, seules les hypothèses du modèle réel 2 sont formulées. Ainsi, le travail de validation établi par le professeur B prend en compte les deux modèles réels, ce qui n'est pas le cas du travail de validation élaboré par le professeur C. On peut néanmoins noter plusieurs points communs dans l'élaboration du travail de validation dans ces deux classes de 2^{nde}. Le premier porte sur les validations produites à l'écrit par les professeurs B et C. Ce sont des argumentaires de validation basés sur des raisonnements de type « diagrammatique » et constitués d'arguments sémiotiques. L'outil sémiotique arbre des possibles est formulé au sein des validations écrites au tableau par les professeurs B et C. Un autre point commun est que le discours écrit des validations est articulé avec un discours oral qui permet d'explicitier les hypothèses du modèle réel. Un dernier point commun est relatif au rôle des élèves dans la résolution de la tâche complexe. Ainsi, dans les deux classes, les élèves ont eu un rôle de technicien.

Une différence plus significative entre le travail de validation du professeur B et celui des professeurs A et C est relevée. En effet, seul le professeur B a traité la tâche complexe en prenant en compte les deux modèles réels. C'est aussi le seul à avoir conduit les élèves (en instaurant un débat) à suggérer pourquoi il y aurait deux modèles réels (pertinents) pour répondre à la tâche. De ce fait, le travail de validation mis en place par le professeur B dans l'ETM_P idoine de la classe de 3^e B et dans celui de la classe de 2^{nde} B est conforme à notre analyse *a priori*.

Nous synthétisons dans le tableau ci-après les différences (surlignés en gras et en rouge) entre notre analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif concernant la catégorie de tâche et le rôle attribué aux élèves dans l'exécution de la tâche « les trois bancs ».

Classes	Catégorie de la tâche <i>a priori</i>	Catégorie de la tâche dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves <i>a priori</i>	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif
3 ^e A	Complexe	Simple	Technicien	Tâcheron
3 ^e B	Complexe	Complexe	Technicien	Technicien
2 nd e B	Complexe	Complexe	Technicien	Technicien
2 nd e C	Complexe	Complexe	Technicien	Technicien

TABLE 11.3 – Catégories de tâche et rôle des élèves dans l'analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif

11.3 La validation dans le cas d'une même tâche riche en classe de 2nde et complexe en classe de 1^{re} S

Pour effectuer l'analyse de la validation dans les deux niveaux de classe, nous étudierons dans un premier temps, la validation dans les ETM_P idoines de la classe de 2nde B et de la classe de 2nde C. Dans un second temps, nous étudierons la validation dans les ETM_P idoines de la classe de 1^{re} D et de la classe de 1^{re} E.

11.3.1 Validation dans deux ETM_P idoines de la classe de 2nde

Il s'agit d'examiner le travail de validation lié à la situation de « la politique nataliste ». L'énoncé de la situation est :

Pour limiter le nombre de filles dans un pays imaginaire, on décide que :

a) chaque famille aura au maximum 4 enfants.

b) chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.

On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents. Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?

1) Dans l'ETM_P de la classe de 2nde B (professeur B)

Les élèves ont eu environ 40 minutes pour résoudre la tâche. Un élève (noté élève 1) est désigné par le professeur B pour décrire les différents types de familles. Pour cela, l'élève construit l'arbre des possibles « asymétrique » ci-après :

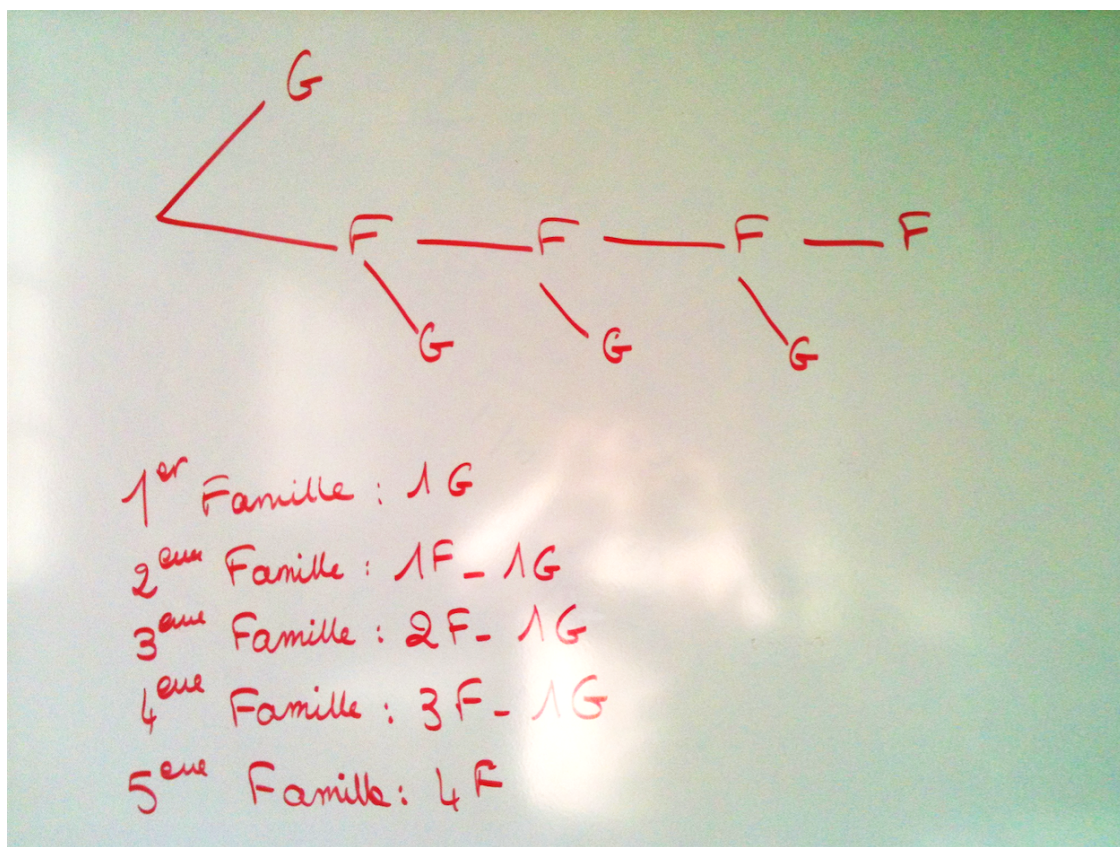


Fig. 11.7 – Les différents types de familles proposés par l'élève 1

Le professeur B précise à l'ensemble de la classe que les types de familles ainsi obtenues ne sont pas équiprobables. L'une des hypothèses du modèle réel est explicitée :

Professeur C	[...] Est-ce que tous ces types de familles ont la même chance d'arriver? Donc ce n'est pas équiprobable. Je n'ai pas autant de chance d'avoir une famille avec deux filles et un garçon, et une famille avec un seul garçon. On a donc cinq types de familles, est ce que tout le monde est d'accord ?
--------------	--

Un autre élève (noté élève 2) est invité à exposer au tableau le raisonnement qu'il a construit pour répondre à la tâche. Il propose de compléter l'arbre des possibles précédemment construit en considérant 100 familles. Il obtient alors 50 familles de 1^{er} type (soit un garçon), 25 familles de 2^e type (un garçon et une fille), « 12,5 » familles de 3^e type (un garçon et deux filles), « 6,25 » familles de 4^e type (un garçon et trois filles), « 6,25 » familles de 5^e type (quatre filles).

Professeur B	Regardez bien, l'élève 2 considère qu'il y a 100 familles, 50 familles vont avoir un garçon. Tu écris, 50 familles vont avoir un garçon unique. C'est donc une chance sur deux. C'est pas mal. Ensuite, deuxième type de famille avec un garçon et une fille. Il y a combien de famille qui ont une fille et un garçon ?
Elève 2	25 familles.
Professeur B	D'accord, donc 25 familles qui ont une fille et un garçon. Après c'était deux filles et un garçon.
Elève 2	12,5.
Professeur B	Oui. Après combien de famille ont trois filles et un garçon ?
Elève 2	6,25 [<i>famille ayant trois filles et un garçon</i>].
Professeur B	Très bien. Et quatre filles ?
Elève 2	Pareil.
Professeur B	6,25, d'accord [...].

Le raisonnement de l'élève 2 n'a pu aboutir au résultat cherché. De plus, le manque de temps à entraîné le professeur B à écourter la correction et à conclure que la politique nataliste n'est pas efficace.

Professeur B	Il [<i>sous-entendu l'élève 2</i>] considère 100 familles, et il dit qu'il a une chance sur deux d'avoir un garçon en premier, donc la moitié des familles ont un enfant unique garçon. Après on a une chance sur deux d'avoir une fille en premier et une chance sur deux d'avoir un garçon en second. Comment on va trouver le nombre de filles ?
Elève 2	25 fois 1 plus 12,5 fois 2 plus 6,25 fois 3 plus 6,25 fois 4.
Professeur B	Enfin bon, la politique de natalité n'est pas efficace , à revoir...

Le raisonnement de l'élève 2 est similaire à celui que nous avons décrit dans notre analyse *a priori* dans le modèle d'espace probabilisé avec l'usage d'un arbre pondéré. Si on reprend le raisonnement de cet élève 2 avec l'échantillon de 100 familles, on a alors le tableau suivant :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons	
G	50	50	50	
FG	25	50	25	
FFG	12,5	37,5	12,5	
FFFG	6,25	25	6,25	
FFFF	6,25	25	0	
	100	187,5	93,75	Total

Fig. 11.8 – Le nombre de garçons pour 100 familles

Sur 187,5 enfants, on a donc autant de garçons que de filles dans cette population de 100 familles. La politique nataliste n'a de fait aucune influence sur la proportion de filles

dans la population considérée. Comme nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori*, la politique nataliste a une influence sur la population totale puisque pour 100 familles soit 200 personnes (si on considère un couple de deux personnes par familles) donne naissance à 187,5 enfants. Ainsi, le raisonnement de l'élève 2 aurait pu aboutir à la solution attendue. Cependant, la taille de l'échantillon considérée n'est pas judicieuse puisque le nombre de familles est un nombre entier naturel, alors qu'avec un échantillon de taille 100, on obtient 6,25 familles, ce qui n'est pas possible dans la réalité. Un raisonnement utilisant un modèle numérique avec la simulation (à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme), comme celui que nous avons décrit dans l'analyse *a priori*, peut être envisagé pour traiter la tâche.

Bien que le professeur B ait rapidement conclu sur l'influence de la politique nataliste, il a néanmoins laissé les élèves chercher la réponse de la tâche pendant 40 minutes. Les élèves ont proposé un raisonnement à l'aide d'un arbre des possibles « asymétrique ». L'arbre des possibles est alors utilisé comme un outil sémiotique pour représenter l'expérience aléatoire (décrire les différents types de familles) et pour dénombrer. Comme nous l'avons constaté, le raisonnement n'a pas pu aboutir au résultat attendu. Il en résulte que le travail de validation mis en œuvre a débuté dans le plan [Sem-Ins]. Il est orienté par le paradigme P1, mais demeure inachevé. Dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure sur la validation produite par le professeur B. Nous pouvons toutefois souligner que bien que la tâche soit riche, le professeur B a souhaité attribuer à ses élèves le rôle, tel que nous l'avons prévu, d'ingénieur. Un rôle qu'ils ont conservé tout au long de la séance.

2) Dans l'ETM_P de la classe de 2^{nde} C (professeur C)

Après la lecture de l'énoncé de la situation de la politique nataliste, le professeur C laisse 10 minutes aux élèves pour chercher une réponse. La correction débute par l'explicitation à l'oral des deux hypothèses du modèle réel.

Hypothèse 1 : « *chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille* »

Elève 1	On a une chance sur deux que cela soit un garçon ou une fille.
Professeur C	Très intéressant, ici on va prendre comme modèle [sous-entendu l'hypothèse] que la probabilité d'avoir un garçon est de un demi [...] .

Hypothèse 2 : « le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents »

Professeur C	[...] Est-ce que tout le monde a compris ce que veut dire « indépendant » ?
Elève 2	C'est soit un garçon soit une fille.
Professeur C	En fait indépendant , c'est si on a eu une fille la première fois, le deuxième accouchement la probabilité d'avoir une fille est toujours un demi et la probabilité d'avoir un garçon est toujours un demi. C'est valable pour le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième accouchement. Est-ce que tout le monde a compris la question.
Elèves	Oui.

Des élèves sont sollicités pour proposer leurs raisonnements. Aucun de leurs raisonnements ne semble correct. Cela traduit les difficultés des élèves à effectuer le travail demandé dans cette tâche. Selon le professeur C, leurs difficultés sont dues à la non disponibilité d'un modèle probabiliste pour traiter la situation aléatoire. Cependant, il leur rappelle que dans ce cas, il est possible de modéliser autrement.

Professeur C	D'accord, vous avez du mal à modéliser la situation , ce n'est pas très grave [...]. Je vous ai dit dans le cours que lorsqu'on ne sait pas trop bien modéliser, on peut faire des ...
Elèves	Des arbres.
Professeur C	Alors les arbres c'est quand on n'arrive pas à trouver un modèle . Mais quand on ne sait pas bien faire on fait des expériences . Donc je vous propose que, comme on n'arrive pas à dégager un modèle mathématique, on fasse des expériences.

L'usage de l'arbre tel qu'il est proposé par les élèves a été très vite écarté par le professeur C. La raison avancée de cette mise à l'écart de l'arbre n'a pas réellement convaincue les élèves. Or, un arbre des possibles comme celui que nous avons rencontré dans la classe de 2^{nde} B est tout à fait envisageable pour effectuer le travail de validation de la tâche proposée.

Pour avancer dans ce projet d'enseignement, le professeur propose directement de réaliser une simulation de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé en utilisant la fonction *Random* (fonction qui fournit un nombre au hasard compris entre 0 et 1) de la calculatrice. Pour cela, il dicte toutes les étapes nécessaires pour réaliser la simulation, autrement dit il fournit le modèle numérique :

Etape 1 : Faire afficher un nombre compris entre 0 et 1 sur l'écran de la calculatrice

Professeur C	La calculatrice affiche un nombre au hasard.
--------------	--

Etape 2 : Considérer uniquement le premier chiffre de la partie décimale du nombre affiché

Professeur C	On va essayer de travailler à partir de ça. On ne va pas s'occuper de la partie entière car cela fait toujours 0, et donc on va s'occuper que de la partie décimale.
--------------	---

Etape 3 : Considérer qu'un chiffre pair est associé à la naissance d'un garçon, et qu'un chiffre impair est associé à la naissance d'une fille.

Professeur C	Ce que je vous propose, si on a un chiffre pair on dit que c'est un garçon, sinon c'est une fille.
--------------	--

Etape 4 : De s'arrêter dès qu'il y a une naissance d'un garçon

Professeur C	Pour le premier enfant, (dans le nombre 0,2342398...) 2 est un chiffre pair donc c'est un...
Elèves	C'est un garçon.
Professeur	Donc est-ce que on arrête ou on continue ?
Elèves	On s'arrête.
Professeur	On a donc une famille [...]. Je vous laisse continuer par groupe de deux.

Par groupe de deux, les élèves réalisent la simulation. Les résultats numériques (nombre de filles et nombre de garçons) obtenus par chacun des groupes d'élèves sont notés au tableau par le professeur C. Le regroupement de ces résultats permet d'obtenir un échantillon de taille 179. Le nombre de filles (soit 93) et de garçons (soit 86) dans cet échantillon a conduit les élèves à conclure qu'il y a plus de filles que de garçons. Les élèves ont donc raisonné sur le nombre total de filles et de garçons dans la population totale et non pas sur la proportion de filles par rapport à celle de garçons dans la population. Cela met en évidence l'ambiguïté liée à la formulation de l'énoncé de la question que nous avons relevé lors de l'analyse *a priori*. D'ailleurs, le professeur C n'a vraisemblablement pas identifié cette ambiguïté, à notre sens pas si évidente à identifier. Pour répondre aux élèves, le professeur C précise que les résultats (93 filles et 86 garçons) sont liés à l'échantillon d'une taille donnée et qu'« *en théorie, le nombre de fille et celui de garçon est identique* » :

Professeur C	Je vous rappelle que ce n'est qu'un échantillon et que cela peut évoluer , mais est-ce que la différence entre le nombre de filles et le nombre de garçons cela peut évoluer ?
Elèves	Non.
Professeur C	Je vous donne le résultat de la théorie mathématique. Alors en théorie mathématique, il y aurait autant de filles que de garçons, une chance sur deux.

L'argument avancé par le professeur C concernant l'égalité du nombre de filles et de garçons est un « argument d'autorité » qui s'appuie sur la théorie mathématique pour tenter

de convaincre les élèves et ce n'était pas le cas. Le professeur C aurait pu éventuellement proposer d'effectuer une simulation avec un échantillon de taille supérieure à 100 à l'aide d'un ordinateur (si la capacité de mémoire de la calculatrice ne le permet pas). Par exemple, une taille supérieure à 1000 (en référence à la simulation que nous avons décrit dans notre analyse *a priori*).

Le professeur C a privilégié l'usage du modèle numérique avec une simulation informatique *via* la calculatrice pour effectuer le travail de validation de la tâche. Comme nous l'avons explicité dans notre analyse *a priori*, le travail de validation de la tâche de la politique nataliste s'est effectué en trois étapes : la construction d'un modèle numérique, la simulation et le calcul de fréquence, l'estimation de la probabilité. La première étape est entièrement prise en charge par le professeur C puisqu'il a proposé directement le modèle numérique aux élèves. La difficulté liée à la construction du modèle numérique qui nécessite un « savoir faire technique » n'est donc pas apparue dans cette classe comme nous l'avons envisagé. Dans la deuxième étape, seule la simulation est prise en charge par les élèves. En revanche, aucun calcul de fréquences (correspondant à la proportion de filles et/ou de garçons) n'est élaboré. Ni par le professeur C, ni par les élèves. En ce qui concerne la dernière étape, elle s'est déroulée de manière collective. Le professeur C a rassemblé les résultats obtenus par la simulation et a discuté ces résultats avec les élèves. Le travail de validation constaté dans cet ETM_P idoine est clos sur la dimension instrumentale et est basé essentiellement sur les outils technologiques (la simulation avec la calculatrice) de la dimension instrumentale. Ce travail est alors dirigé par le paradigme P1. En outre, la validation est produite essentiellement à l'oral. Seul un tableau résumant les résultats de la simulation des élèves est écrit au tableau. Les hypothèses du modèle réel et les différentes étapes liées à l'exécution de la simulation sont clairement formulées à l'oral (par le professeur C) et non pas à l'écrit. Nous avons donc un argumentaire de validation qui est constitué uniquement d'arguments empirico-expérimentaux.

Nous constatons que pour terminer le travail de validation, le professeur C guide les élèves en leur donnant des instructions qu'ils doivent suivre afin d'obtenir les résultats numériques. Les élèves ont alors le rôle de tâcheron alors que le professeur C a celui d'ingénieur. Ce qui n'est pas surprenant vue la nature de la tâche proposée. Ce rôle de travailleur-tâcheron donné à l'élève a également été souligné par Parzysz (2014) dans le cas de l'usage de la simulation *via* un ordinateur :

« une différence saute aux yeux par rapport à la géométrie : la guidance de l'élève est très forte et il reste cantonné au rôle d'exécutant. Cette hypertrophie des instructions a pour fonction principale d'éviter à l'élève non familier du tableur d'être bloqué » (Parzysz, 2014, p. 72).

11.3.2 Validation dans deux ETM_P idoines de la classe de 1^{re} S

1) Dans l' ETM_P de la classe de 1^{re} D (professeur D)

Les élèves ont eu 15 minutes pour répondre à la tâche de « la politique nataliste ». Lors de la correction, les élèves proposent d'utiliser le modèle d'arbre pondéré. Pour cela, ils considèrent l'évènement F : « avoir une fille à la naissance » et son événement contraire G : « avoir un garçon » :

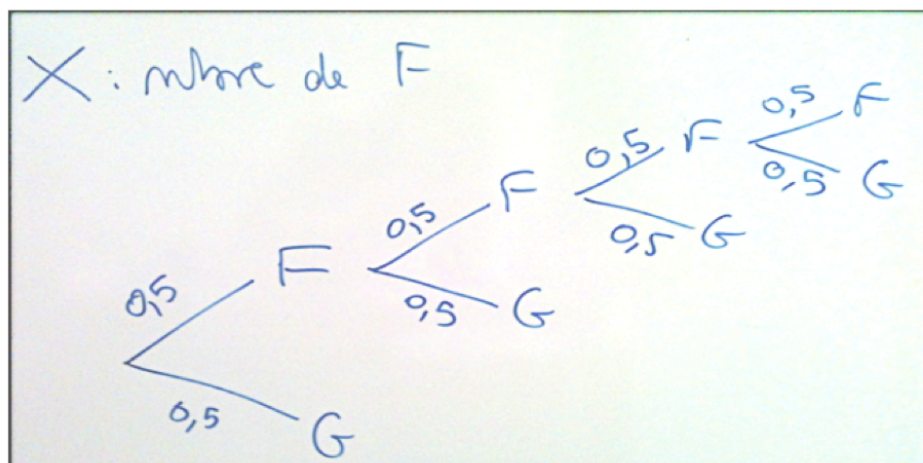


Fig. 11.9 – L'arbre pondéré proposé par des élèves

Le professeur D interroge un élève pour formuler sa réponse. L'élève suggère au professeur D de considérer X , la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de filles dans une famille donnée, et de calculer la probabilité de l'évènement « obtenir k filles » avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Professeur D	[...] Et toi Élève 3 qu'est-ce que tu as fait ?
Élève 3	J'ai pris k le nombre de filles, j'ai trouvé la probabilité d'avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 filles .
Professeur D	D'accord. La variable aléatoire X est le nombre de filles pour toi.
Professeur D	Et alors ensuite ? Si j'appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles [...]. Donc, il peut y avoir combien de filles ?
Élèves	0, 1, 2, 3 ou 4.
Professeur D	Oui. Avec quelle probabilité ?
Élèves	0,5.
Professeur D	$\frac{1}{2}$ d'avoir une fille [...].

Pour achever ce traitement, les élèves proposent au professeur D de calculer l'espérance du nombre de filles par famille ainsi que celle du nombre de garçons par famille (en considérant Y la variable aléatoire comptabilisant le nombre de garçons) et de les comparer pour répondre au problème posé :

Professeur D	Alors quelle est l'espérance de cette variable aléatoire qui compte le nombre de filles ?
Elèves	15 sur 16.
Professeur D	Qu'est-ce que cela veut dire ?
Elèves	Il y a un peu moins d'une fille par famille.
Professeur D	Oui. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de garçons par famille. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
Elève	0 et 1.
Professeur D	Oui, soit il y a 0 garçon, donc il y a ... ?
Elèves	Quatre filles.
Professeur D	Et la probabilité est de... ?
Elève	15/16.

L'égalité des deux espérances permet de conclure sur le fait que la politique nataliste n'a aucune influence sur la proportion de filles dans la population. La validation produite (avec les élèves) est rédigée par le professeur D au tableau sous la forme suivante :

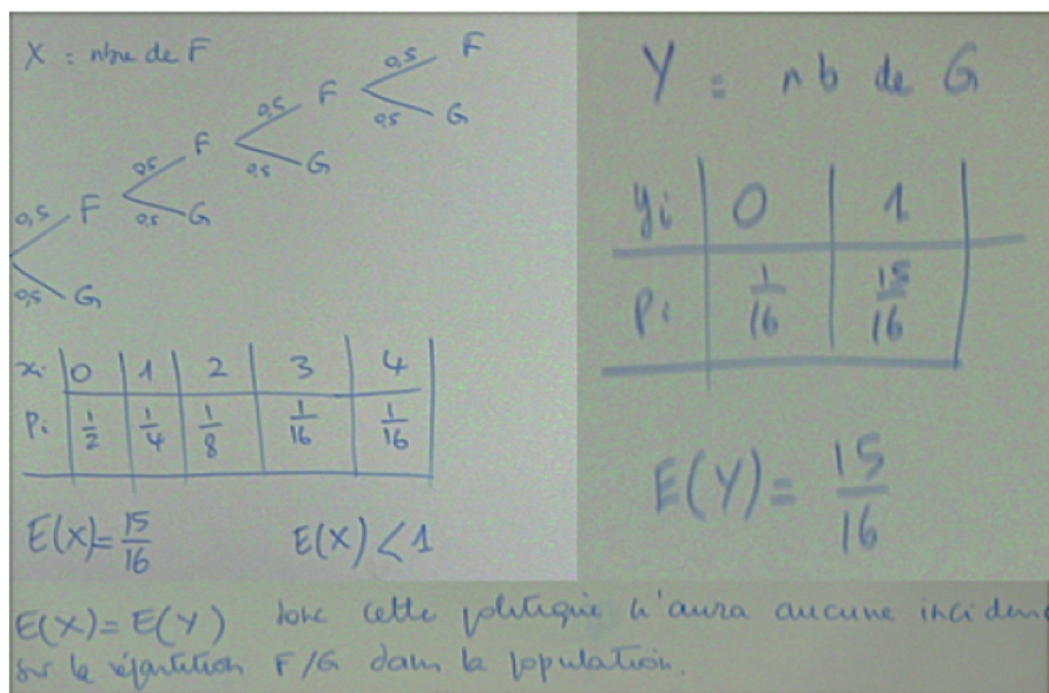


Fig. 11.10 – La validation exposée au tableau par le professeur D

L'exécution de la tâche par les élèves de cette classe n'a pas posé de réelles difficultés. Les élèves ont construit un arbre pondéré « asymétrique » pour représenter l'expérience aléatoire. Cet arbre pondéré a été utilisé pour calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (le nombre de filles) et la loi de probabilité de la variable aléatoire Y (nombre de garçons). En calculant l'espérance des deux variables aléatoires X et Y et en les comparant, les élèves déduisent la réponse attendue. Le travail de validation élaboré dans l'ETM_P idoine de cette classe de 1^{re} S est effectué dans le plan [Sem-Ins] orienté vers la dimension discursive. L'arbre pondéré est utilisé comme outil sémiotique mais aussi

comme outils technologique et théorique, ce qui implique que le travail de validation est complet (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) dans cet espace de travail. Le travail de validation est en outre basé sur des outils théoriques du référentiel théorique telles que les notions de variables aléatoires et d'espérance mathématique. Le paradigme qui dirige ce travail de validation est le paradigme P2 . La validation produite dans cet espace de travail est un argumentaire constitué d'arguments sémiotiques dont les garanties sont les outils théoriques (variables aléatoires, espérance mathématique, etc.).

Comme nous l'avons souligné au début de ce paragraphe, ce sont les élèves qui ont effectué en grande partie le travail de validation de la tâche. Cela nous conduit à affirmer que ces élèves ont eu le rôle de technicien car ils ont mis en œuvre un ensemble d'outils et de techniques déjà connus et d'éléments de l'ETM_P personnel des élèves.

2) Dans l'ETM_P de la classe de 1^{re} S E (professeur E)

Le professeur D laisse 15 minutes aux élèves pour exécuter la tâche de « la politique nataliste ». À partir des réponses des élèves, le professeur D débute le travail de validation. Ce travail de validation s'effectue en trois phases. La première phase permet d'explicitier les hypothèses du modèle probabiliste choisi :

Professeur E	Concevoir un enfant est une épreuve de Bernoulli en considérant comme succès S : « obtenir un garçon » . Concevoir quatre enfants de suite est la répétition de quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, c'est donc un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 4$ et $p = p(S) = \frac{1}{2}$ [...] .
--------------	--

On relève que le professeur B mentionne le schéma de Bernoulli — qui normalement aboutit à une loi binomiale — et ne prend pas en compte la condition d'arrêt de la procréation dans une famille quand naît un garçon.

La deuxième phase consiste à considérer X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de filles par famille, et de calculer la probabilité de l'évènement « $X = x_i$ » avec $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Il est question de déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Chacun des calculs a été soigneusement rédigé et justifié (cf. la figure ci-après) par l'hypothèse de l'indépendance des naissances (une des hypothèses du modèle réel).

$$P(X=4) = P(\{S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}\})$$

$$= P(S) \times P(\bar{S}) \times P(\bar{S}) \times P(\bar{S})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$P(X=3) = P(\{\bar{S}, \bar{S}, \bar{S}, S\})$$

$$= P(\bar{S}) \times P(\bar{S}) \times P(\bar{S}) \times P(S)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$P(X=2) = P(\{\bar{S}, \bar{S}, S, S\})$$

$$= P(\bar{S}) \times P(\bar{S}) \times P(S) \times P(S)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\{\bar{S}, S, S, S\})$$

$$= P(\bar{S}) \times P(S) \times P(S) \times P(S)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$P(X=0) = P(\{S, S, S, S\}) = \frac{1}{16}$$

Car le sexe d'un enfant est indépendant des précédents.

Fig. 11.11 – Le calcul de la probabilité de l'événement « $X = x_i$, avec $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ »

Dans la troisième phase, l'espérance de la variable aléatoire X , autrement dit celle du nombre de filles, est évaluée. En introduisant la variable aléatoire Y , Y étant le nombre de garçons, le professeur E demande aux élèves de déterminer la loi de probabilité de Y et de calculer l'espérance de cette variable aléatoire. La comparaison des deux espérances des variables aléatoires X et Y obtenues a permis de conclure que la politique nataliste appliquée dans le pays imaginaire n'était pas efficace.

Par rapport à la classe de 1^{re} S D, c'est le modèle probabiliste d'espace probabilisé avec les variables aléatoires et le schéma de Bernoulli qui sont utilisés. Aucune référence à l'arbre pondéré n'est soulignée dans le travail de validation mis en place dans cet ETM_P idoine. Le travail de validation est basé sur les outils théoriques tels que les notions de variables aléatoires et le schéma de Bernoulli. Le travail de validation est alors clos sur la dimension discursive et orienté par le paradigme P2. La validation produite et institutionnalisée par le professeur E à la suite de ce travail de validation a la forme d'un argumentaire de validation bâti principalement sur des arguments formels dont les garanties sont explicitées à l'écrit. Leur enchaînement au sein de cet argumentaire laisse penser que cet argumentaire est organisé sous forme d'une démonstration.

Nous constatons que les élèves ont participé (dans la phase de recherche) à l'élaboration du travail de validation. En revanche, la rédaction du discours de validation est pris en charge par le professeur E. Les élèves se contentaient de l'écrire sur leur cahier d'exercice. Nous constatons également que si le professeur E relève bien les réponses des élèves (au début de la correction), leurs raisonnements n'ont cependant pas été pris en compte dans l'exposé de l'argumentaire de validation. En effet, le professeur E fournit directement les éléments de la technique à utiliser (explicitation du schéma de Bernoulli, variables

aléatoires à considérer, etc.). Il transforme la tâche que nous avons qualifiée de complexe en une tâche simple. Cela nous conduit à affirmer que les élèves ont d'abord eu un rôle de technicien (pendant la phase de recherche de l'exercice) puis ils ont endossé le rôle de tâcheron.

11.3.3 Conclusion

La résolution d'une même tâche riche (politique nataliste) dans les deux classes de 2^{nde} présente des différences. Une des différences se situe au niveau du travail de validation élaboré dans les deux ETM_P idoines des classes de 2^{nde} B et de 2^{nde} C. Dans la classe de 2^{nde} B, le travail de validation est basé principalement sur des outils sémiotiques (arbres des possibles) pour décrire les issues de l'expérience aléatoire et pour dénombrer. Le travail de validation est inachevé et aucun discours de validation n'a été institutionnalisé par le professeur B. Le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] et est dirigé par le paradigme P1. Dans la classe de 2^{nde} D, le travail de validation est basé essentiellement sur les outils technologiques (la simulation avec la calculatrice) de la dimension instrumentale. Le travail de validation est clos sur la dimension instrumentale et est dirigé par le paradigme P1. La validation produite à l'issue de ce travail est exposée à l'oral. Elle a la forme d'un argumentaire basé sur des arguments empirico-expérimentaux. Une autre différence se situe au niveau de la transformation de la tâche et du rôle des élèves dans l'élaboration du travail de validation. En effet, le professeur B a donné du temps aux élèves pour résoudre la tâche. Il a également délégué le travail de validation (pendant la correction de l'exercice) aux élèves. Ces derniers ont donc eu le rôle d'ingénieur dans la résolution de la tâche riche. Par rapport au professeur B, le professeur C a choisi d'accorder aux élèves un temps court pour chercher une réponse. Mise à part l'exécution de la simulation (dont le modèle numérique est fourni par le professeur C) réalisée sur la calculatrice par les élèves, le professeur C a pris en charge le travail de validation. La tâche qui, selon notre analyse *a priori* est riche, est transformée en tâche simple dans l'ETM_P idoine de la classe de 2^{nde} C. Les élèves ont eu le rôle de tâcheron au lieu de celui d'ingénieur comme nous l'avions envisagé.

Pour les classes de 1^{re} S D et E, la résolution de la tâche n'a pas suscité de réelles difficultés pour les élèves. Toutefois, nous avons relevé des différences. Une première différence porte sur la circulation du travail de validation au sein de l'ETM_P et le paradigme qui le dirige. Dans la classe de 1^{re} S D, le travail de validation est dirigé par le paradigme P2 et est mis en œuvre dans le plan [Sem-Dis] orienté vers la dimension discursive. Dans la classe de 1^{re} S E, le travail de validation est clos sur la dimension discursive et est dirigé par le paradigme P2. Une deuxième différence porte sur les formes de validation exposées par les professeurs D et E. Pour le professeur D, la forme de validation institutionnalisée est un argumentaire constitué d'arguments sémiotiques dont les garanties sont

les outils théoriques (variables aléatoires, espérance mathématique, etc.). Le professeur E, lui, a institutionnalisé un argumentaire de validation de type démonstratif basé sur des arguments formels. Une dernière différence constatée est celle de la transformation de la tâche et le rôle des élèves dans le travail de validation. Les élèves de la classe de 1^{re} S D ont participé activement à l'élaboration du travail et du discours de validation. Comme nous l'avions prévu, les élèves ont eu le rôle de technicien dans la résolution de la tâche complexe proposée. Les élèves de la classe de 1^{re} S E n'ont, eux, pas eu le même rôle puisque le professeur E a orchestré davantage le travail et le discours de validation en donnant les éléments de la technique à utiliser et la manière de rédiger le discours de validation. En conséquence, le professeur E a transformé la tâche *a priori* complexe, en une tâche simple. Il en résulte que les élèves ont eu un rôle de tâcheron au lieu de technicien comme nous l'avions envisagé. Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous les différences (surlignées en gras et en rouge) entre notre analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif concernant la catégorie de tâche et le rôle attribué aux élèves dans l'exécution de la tâche de « la politique nataliste » :

Classes	Catégorie de la tâche <i>a priori</i>	Catégorie de la tâche dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves <i>a priori</i>	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif
2 ^{nde} B	Riche	Riche	Ingénieur	Ingénieur
2 ^{nde} C	Riche	Simple	Ingénieur	Tâcheron
1 ^{re} S D	Complexe	Complexe	Technicien	Technicien
2 ^{re} S E	Complexe	Simple	Technicien	Tâcheron

TABLE 11.4 – Catégories de tâche et rôle des élèves dans l'analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif

En conclusion, pour une même tâche riche ou complexe, la gestion du travail de validation est différente entre les deux professeurs du même niveau de classe, mais similaire entre deux professeurs d'un niveau différent.

11.4 La validation dans le cas de deux tâches riches différentes, l'une en classe de 3^e et l'autre en classe de Terminale S

Dans cette section, nous allons étudier la validation produite dans les ETM_P idoines pour résoudre l'une des deux tâches, « segment et son milieu » (en classe de 3^e A) et « la rencontre » (en classe de Terminale S B), relevant de la catégorie riche.

1) Dans l'ETM_P de la classe de 3^e A (professeur A)

Nous rappelons l'énoncé de la situation « le segment et son milieu », qui relève de la catégorie des tâches riches :

Sur un segment S , on prend au hasard deux points A et B . On considère l'événement « la longueur du segment $[AB]$ est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

On note D l'événement : « la longueur du segment $[AB]$ est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ».

Le professeur A laisse aux élèves 5 minutes pour s'imprégner de l'énoncé de la tâche. Ensuite, l'ensemble du travail de validation est orchestré par le professeur A. Le travail de validation est élaboré en trois phases : exploration de l'expérience aléatoire, simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité, et justification de la probabilité estimée.

Phase 1. Exploration de l'expérience aléatoire.

Dans cette première phase, les vingt élèves de la classe ont construit un segment S (à l'aide d'instruments géométriques) d'une longueur choisie arbitrairement (ici la longueur est de 6 cm). Puis, ils ont choisi au hasard deux points A et B sur le segment S (autrement dit selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 6]$). Ils ont alors mesuré à l'aide d'une règle graduée la longueur AB . Enfin, ils ont comparé la mesure AB obtenue à la moitié de celle de S , soit 3 cm. Le professeur A relève au tableau chacun des vingt résultats obtenus par les élèves afin de les discuter. À travers les questions du professeur A, les élèves ont conclu que la procédure qu'ils utilisaient ne leur permettait pas d'estimer convenablement la probabilité de l'événement D en raison de l'insuffisance de la taille de l'échantillon (soit des tracés de 20 segments). Le professeur A ajoute que le choix au hasard de deux points sur le segment S avec « les yeux fermés » n'est pas évident. Un élève intervient en proposant d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire, ce que le professeur A approuve.

Phase 2. Simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité.

Dans cette phase, il s'est agi d'effectuer la simulation de l'expérience aléatoire initiale. Le professeur A propose aux élèves d'assimiler le choix au hasard de deux points sur un segment d'une longueur donnée à un lancer de deux dés. Il ajoute que la simulation du lancer des dés doit se faire réellement à l'aide d'un dé.

Professeur A	[...] Je vous ai déjà dit que lorsqu'on ne peut pas faire des choses en vrai, on peut faire une simulation . Rappelez-vous avec le lancer de deux dés . Comment on avait fait la dernière fois ?
Élève 9	On prend un nombre aléatoirement entre 1 et 6.
Professeur A	Voilà. Nous avons généré sur le tableur des nombres aléatoires compris entre 1 et 6 . On fera ça tout à l'heure. Mais là j'aimerais bien que l'on fasse une vraie expérience matérielle qui simule cela, mais en vrai et pour l'instant sans l'ordinateur . Vous n'avez pas beaucoup d'expériences à votre actif, on vient juste de commencer le chapitre des probabilités. Qu'est-ce que l'on a fait comme expérience aléatoire ?
Élèves	Les dés [<i>sous-entendu le lancer de dés</i>].

Le passage de l'expérience initiale vers l'expérience aléatoire à simuler induit un changement de domaine en passant du domaine de la géométrie plane (synthétique) vers celui des probabilités. Ce passage induit également un changement de l'univers de l'expérience en passant de $\Omega = S \times S$ à $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Précisons que ce changement de domaine et d'univers est pris intégralement en charge par le professeur A. Nous résumons dans le tableau ci-dessous le passage de l'expérience initiale à l'expérience simulée effectué par le professeur A :

Expérience initiale (expérience « géométrique »)	Expérience simulée (réellement) (expérience « probabiliste »)
S un segment d'une longueur donnée L .	S un segment de longueur 5 cm et gradué de 1 à 6.
On prend au hasard deux points A et B sur le segment S .	On lance deux dés et on s'intéresse au résultat affiché sur chacune des faces supérieures. Le premier dé donne l'abscisse du point A (notée x_A) et le deuxième dé donne l'abscisse du point B (notée x_B).
On mesure la longueur AB .	On calcule la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B .
La longueur AB est strictement supérieure à la moitié de S soit $\frac{L}{2}$.	On compare la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B avec 2,5.
Les issues réalisant l'événement D sont dans l'intervalle $]\frac{L}{2}; L]$.	Les issues réalisant l'événement D appartiennent à l'ensemble $\{3; 4; 5\}$. Ces valeurs correspondent aux différentes longueurs possibles de AB lorsque la longueur du segment S vaut 5 cm.

L'expérience « probabiliste » est simulée réellement « à la main » 50 fois par chacun des dix groupes (constitués de deux élèves) de la classe. Ces derniers ont eu pour consigne de noter les résultats de chacun des 50 lancers, mais aussi le résultat de la différence (et de la somme) des résultats des faces supérieures dans un tableau. Les élèves ont dénombré toutes les issues réalisant l'événement D sur les 50 lancers et ont calculé « à la main » la

fréquence d'apparition de l'événement D . L'observation des dix résultats permet d'affirmer que les fréquences fluctuent autour de 30 %. Pour vérifier cette valeur de la fréquence, le professeur propose de regrouper les résultats obtenus dans un tableur et de calculer la fréquence de l'événement D sur un échantillon de taille 500. Cela a permis de constater la stabilisation des fréquences et d'estimer la valeur de la probabilité de D , égale à environ 30%.

Phase 3. Justification de la probabilité estimée.

Le professeur A insiste sur le fait que les résultats, obtenus par la simulation, permettent seulement de conjecturer la valeur de la probabilité et de ce fait, qu'il est nécessaire de démontrer ce résultat estimé. Pour ce faire, il leur suggère de construire (et de remplir) un tableau à double entrée tel que :

- la première ligne correspond au lancer du premier dé,
- la première colonne correspond au lancer du deuxième dé,
- chacune des 36 cases du tableau correspond à la différence en valeur absolue des valeurs affichées sur les faces supérieures des deux dés.

1^{er} dé 2^e dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Fig. 11.12 – Le tableau proposé par le professeur A

En entourant le nombre de cas favorables (tous les nombres supérieurs à 2,5) et en utilisant la formule de Laplace, les élèves déduisent que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{1}{3}$. Cette valeur est approuvée par le professeur car elle est relativement proche de la valeur estimée.

Professeur A	Donc on est autour de 30% de tout à l'heure . Dans votre simulation où l'on a mis tous vos 50 lancers ensemble, on a eu 0,29, ce n'était pas terrible. On aurait pu faire une simulation informatique pour s'approcher en augmentant le nombre de cas. Mais la probabilité est de un tiers .
--------------	--

La probabilité attendue est de 25% alors que la probabilité obtenue ici est proche de 30%. Cela s'explique par le fait que le professeur A a changé l'univers de l'expérience aléatoire en considérant l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ au lieu de $\Omega = S \times S$. Cela implique un calcul de probabilité sur un ensemble fini et discret au lieu d'un ensemble infini et continu. Les deux expériences aléatoires (initiale et simulée) n'ont donc pas le même univers. Cette différence a été observée implicitement par un élève (élève 5). Ce dernier n'était pas réellement convaincu par la valeur de la probabilité obtenue (dans le cas discret). Selon lui, la longueur du segment S (5 cm) n'est qu'arbitraire. Les valeurs des abscisses des points A et B sont uniquement des nombres entiers naturels et cela lui pose problème.

Élève 5	Il y a plein de possibilités .
Professeur A	Vous vous rappelez du problème de départ ? On a un segment de longueur donnée, on prend deux points au hasard sur ce segment. Quelle est la probabilité que la longueur du segment formé par ces deux points soit supérieure ou égale à la moitié du segment de départ. Et nous on a fait une modélisation avec un segment de 5 cm gradué de 1 à 6, on lance des dés et on place des points. Et Élève 5 dit qu'il y a plein d'autres possibilités. Pourquoi Élève 5 dit ça ?
Élève 5	Le segment S n'est pas forcément égal à 5 cm.
Professeur A	Oui, ensuite, on a pris que...
Élève 5	Des chiffres ronds.
Professeur A	En fait on a pris que des nombres entiers. Vous comprenez ce qu'il dit Élève 5, nous on s'est intéressé uniquement à des segments qui tombent pile sur le petit trait. Mais si on prend au hasard les points, on peut tomber entre les deux traits de graduation. Donc le modèle que l'on a choisi ici Élève 5 le trouve limité, c'est ça que tu voulais dire Élève 5 ?
Élève 5	Oui.

En dépit de la remarque de l'élève 5 sur le modèle probabiliste choisi, le professeur A ne se rend pas compte que le modèle probabiliste utilisé n'est pas adéquat pour répondre à la tâche.

Professeur A	Si l'on devait continuer, alors on devrait faire une simulation informatique où le segment est entre 0 et 1, ça ne change rien . On demande à l'ordinateur de générer un nombre aléatoire entre 0 et 1. Et on choisit pour le point A l'abscisse 0.0126789 par exemple et puis l'abscisse du point B est 0.1467542, il calcule la différence, pareille que l'autre simulation. Cette simulation permet de choisir de manière plus fine un point. Si on fait cette simulation je pense que l'on trouvera un tiers aussi.
--------------	---

Cependant, si on effectue la même expérience que celle proposée par le professeur A mais en choisissant d'autres types de dés à N faces (supposés équilibrés), par exemple pour 18 faces, alors l'événement D est réalisé lorsque la distance AB est strictement supérieure à

8,5 (ici S a pour longueur 17 cm). On construit un tableau à double entrée de dimension 18×18 dont les cases (en rouge) représentent les issues (soit 90 issues) qui réalisent l'événement D :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Dé 1																			
Dé 2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Fig. 11.13 – Les issues réalisant l'événement D

En utilisant la formule de Laplace, la probabilité¹ est égale à $\frac{90}{324}$.

Le travail de validation mis en oeuvre par le professeur A pour résoudre la tâche riche est réalisé en trois phases, relevant de différents contextes de validation. Dans la première phase, le professeur A conduit les élèves à mener une exploration de l'expérience aléatoire en utilisant des outils technologiques pour construire le segment et mesurer une longueur. Le travail de validation est dans ce cas placé dans le plan [Sem-Ins] pour aider les élèves à comprendre l'expérience aléatoire en jeu et est dirigé par le paradigme P1. Dans la deuxième phase, les élèves ont simulé « à la main » l'expérience aléatoire proposée par le professeur A. L'ensemble des résultats obtenus par les élèves sont relevés dans une feuille de calcul (du tableur) afin de calculer la fréquence d'apparition de l'événement D sur un échantillon de taille plus grande. Cette phase permet à l'aide de la loi des grands nombres, d'estimer la valeur de la probabilité de l'événement D à partir de la fréquence observée. Dans ce cas, le travail de validation est dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2 et est placé dans le plan [Ins-Dis]. Dans la troisième phase, le professeur A propose une justification de la valeur de la probabilité estimée. Cette justification est basée sur les outils sémiotiques tel que le tableau à double entrée pour dénombrer les cas favorables et sur l'outil théorique telle que la formule de Laplace pour calculer la probabilité. Dans cette phase, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis] et est dirigé par le paradigme P2. Dans l'ensemble, le travail de validation mis en oeuvre par le professeur A favorise l'articulation entre les différentes genèses de l'ETM_P idoine impliquant une circulation du travail de validation dans les différents plans verticaux de

1. Or $\frac{90}{324} = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$. Si on choisit un dé a 17 faces, alors l'événement D est réalisé lorsque la distance AB est strictement supérieure à 8 (ici S a pour longueur 16 cm), la probabilité est égale à $\frac{72}{289}$. De manière générale, si N est pair ($N = 2n$) alors la probabilité de D est : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$. Si N est impair ($N = 2n + 1$) alors la probabilité de D est comprise entre : $(\frac{1}{4} - \frac{1}{16n^2})$ et $\frac{1}{4}$.

l'ETM_P idoine. Il en résulte que le travail de validation produit est complet (Kuzniak et Nechache, 2014). Cependant le modèle utilisé par le professeur n'est pas adapté à l'expérience aléatoire étudiée ici. La validation institutionnalisée à l'issue du travail de validation est un argumentaire constitué d'un argument sémiotique (le tableau à double entrée).

Tel qu'il est produit, le travail de validation semble être pris en charge par le professeur A. La construction du modèle numérique et la justification de la probabilité sont suggérées directement par le professeur A. Les élèves ont, eux, eu à leur charge la simulation réelle de l'expérience et le calcul de la probabilité (avec la formule de Laplace). Le professeur A a non seulement changé la tâche qui est *a priori* riche en une tâche quasi simple, mais il a également modifié le rôle des élèves en les assignant à la fonction de tâcheron au lieu d'ingénieur comme nous l'avions prévu.

2) Dans l'ETM_P de la classe de Terminale S B (professeur B)

Nous rappelons que le professeur B de cette classe de Terminale S est le même que celui de la classe de 3^e B et de 2nde B. Nous rappelons également de l'énoncé de la tâche de « la rencontre », qui relève de la catégorie des tâches riches :

Olivier et Karine décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Les instants d'arrivée d'Olivier et Karine sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur [0 ; 1]. Chacun attend un quart d'heure mais jamais au-delà de 8h. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Un temps de recherche d'environ 30 minutes a été alloué aux élèves pour réaliser le travail de validation. La correction a été effectuée par un élève (noté élève 3 dans la transcription de la séance) invité au tableau. Pour mieux comprendre le raisonnement de l'élève, nous utiliserons des éléments de formalisme qui ne figurent pas dans la séance. La méthode proposée par l'élève 3 consiste :

- à utiliser (comme il a été suggéré dans l'énoncé) la loi uniforme sur l'intervalle [7h ; 8h], autrement dit sur [0 min ; 60 min] ;
- à supposer qu'Olivier arrive le premier au rendez-vous. On note H l'événement : « Olivier arrive le premier au rendez-vous » ;
- à considérer R l'événement : « les deux personnes se rencontrent », T l'événement : « Olivier arrive entre 7h45 et 8h » et \bar{T} l'évènement : « Olivier arrive entre 7h et 7h45 » ;
- à calculer la probabilité de la rencontre sur chacun des deux intervalles [7h ; 7h45] (soit [0 ; 45]) et [7h45 ; 8h] (soit [45 ; 60]).

Cas 1. La probabilité de la rencontre quand Olivier arrive le premier entre 7h et 7h45 (soit [0 ; 45])

Dans ce premier cas, l'élève 3 suppose que Olivier arrive le premier entre 7h et 7h45. La probabilité que Olivier arrive entre 7h et 7h45 est obtenue en appliquant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 45]$. Elle est égale à : $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

L'élève 3 pose K l'instant d'arrivée de Karine après celui d'Olivier. En appliquant la loi uniforme sur l'intervalle $[\lambda; \lambda + 15]$ avec λ appartenant $[0; 45]$, l'élève 3 calcule alors la probabilité $P(\lambda \leq K \leq \lambda + 15) = \frac{\lambda+15-\lambda}{60} = \frac{15}{60}$.

Elève 3	On note K le moment où Karine arrive. Donc la probabilité entre le moment où Olivier et les 15 minutes qu'il va attendre [<i>Qu'il note</i> $P(\lambda \leq K \leq \lambda + 15)$] est égale au temps d'attente qui est de 15 minutes divisé par 60 minutes, qui est en fait le temps écoulé entre 7h et 8h.
Professeur B	Oui, bon, finalement il n'a pas pris une loi uniforme sur $[0; 60]$ j'imagine...
Elève 3	Oui c'est ça [...] Oui. S'il arrive entre 7h et 7h45, ça nous donne $\frac{1}{60}$ fois $\frac{15}{60}$ [<i>l'élève écrit alors</i> $\int_0^{45} \frac{1}{60} \times \frac{15}{60} d\lambda$].
Professeur B	Bon. Je ne suis pas sûr que tout le monde ait bien compris ça. La probabilité pour que Karine arrive entre l'heure d'arrivée d'Olivier et un quart d'heure après est de $\frac{15}{60}$. En fait, on a juste appliqué la loi uniforme sur $[0; 60]$, ou bien on s'est dit sur $\frac{\lambda+15-\lambda}{60} = \frac{15}{60}$ [<i>qui est égale à</i> $P(\lambda \leq K \leq \lambda + 15)$] .

L'élève 3 en déduit que la probabilité qu'Olivier et Karine se rencontrent quand Olivier arrive le premier entre 7h et 7h45 est égale à : $\int_0^{45} \frac{1}{60} \times \frac{15}{60} dt = \frac{3}{16}$. On peut donc écrire que $P_H(R \cap T) = \frac{3}{16}$.

Cas 2. La probabilité de la rencontre quand Olivier arrive le premier entre 7h45 et 8h (soit $[45; 60]$)

Dans ce deuxième cas, l'élève 3 suppose que Olivier arrive le premier entre 7h45 et 8h. La probabilité que Olivier arrive entre 7h45 et 8h est obtenue en appliquant la loi uniforme sur l'intervalle $[45; 60]$ et est égale à : $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$. L'élève 3 affirme que si Karine arrive après Olivier alors Olivier et Karine vont certainement se rencontrer.

Elève 3	Si Olivier arrive à 7h45 ou après, étant donné que l'on a supposé qu'il arrivait en premier la probabilité qu'il rencontre Karine est certaine , car Karine est forcément obligée d'arrivée dans cet intervalle-là [<i>sous-entendu l'intervalle</i> $[7h45; 8h]$].
Professeur B	Oui. Vous écoutez bien parce qu'il faut suivre son raisonnement. Il arrive donc à partir de 7h45, la probabilité pour qu'il rencontre Karine est égale à 1.
Elève 3	La probabilité de R sachant T est de 1 [...].

L'élève 3 en déduit que la probabilité qu'Olivier et Karine se rencontrent quand Olivier arrive le premier entre 7h45 et 8h est égale à $\frac{1}{4}$. On peut donc écrire que $P_H(R \cap \bar{T}) = \frac{1}{4}$. L'élève 3

conclut que la probabilité de la rencontre d'Olivier et de Karine est : $P(R) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$, autrement dit $P(R) = P_H(R \cap T) + P_H(R \cap \bar{T})$. Or tel qu'il a raisonné (en utilisant les probabilités conditionnelles) l'élève 3, la probabilité $\frac{7}{16}$ correspond à la probabilité de la rencontre d'Olivier et de Karine quand Olivier arrive le premier au rendez-vous. Autrement dit, il a calculé $P_H(R) = P_H(R \cap T) + P_H(R \cap \bar{T})$. L'élève 3 semble considérer que $P(R) = P_H(R)$. Dans le cas général, l'égalité $P(R) = P_H(R)$ est fautive mais ici elle est vérifiée. En effet,

$$P_H(R) = \frac{P(R \cap H)}{P(H)} \text{ donc } P(R \cap H) = P(H) \times P_H(R) = \frac{1}{2} \times P_H(R).$$

$$\text{De même, } P(R \cap \bar{H}) = P(\bar{H}) \times P_{\bar{H}}(R) = \frac{1}{2} \times P_{\bar{H}}(R).$$

Or la probabilité de la rencontre quand Olivier arrive le premier est la même quand Karine arrive la première au rendez-vous, donc $P_H(R) = P_{\bar{H}}(R)$.

Comme $P(R) = P(R \cap H) + P(R \cap \bar{H})$ (les événements H et \bar{H} sont complémentaires), alors $P(R) = \frac{1}{2} \times P_H(R) + \frac{1}{2} \times P_{\bar{H}}(R)$, donc $P(R) = P_H(R)$. D'où $P(R) = P_H(R) = \frac{7}{16}$.

La complexité du raisonnement de l'élève 3 a poussé le professeur B à lui suggérer de construire un arbre pondéré (cf. la figure ci-après).

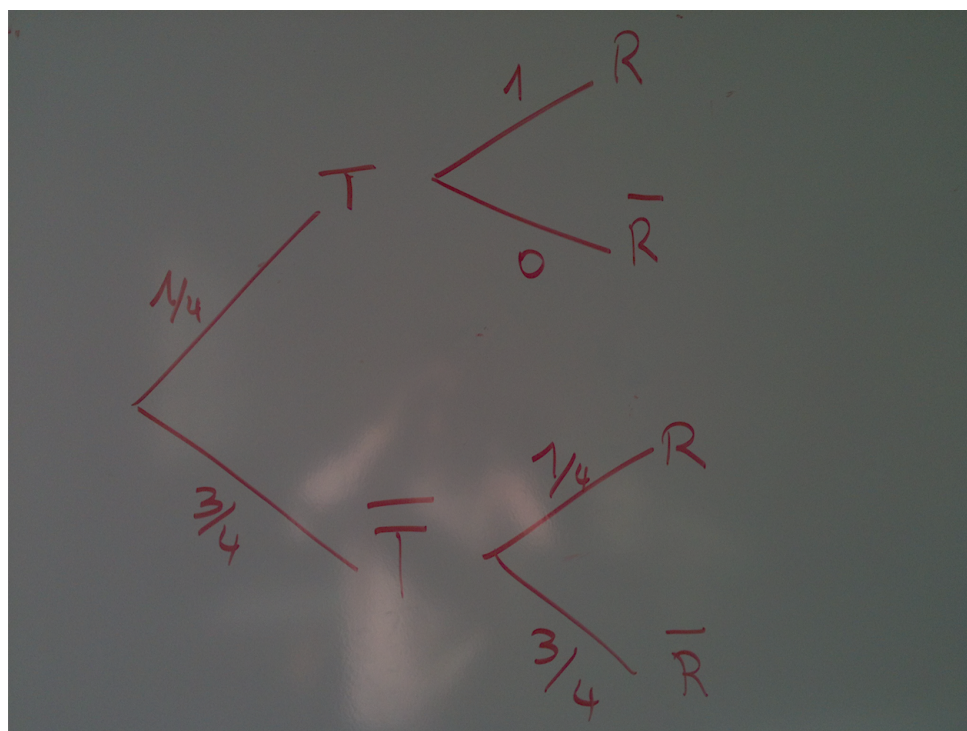


Fig. 11.14 – Arbre pondéré proposé par le professeur B

Les calculs de chacune des probabilités inscrites sur l'arbre correspondent aux résultats obtenus à l'aide des calculs précédents (calcul intégral). La probabilité de l'évènement R est déduite en effectuant la somme de la probabilité de l'évènement $R \cap T$ et de l'évènement $R \cap \bar{T}$, égale à $\frac{7}{16}$. Ainsi, l'arbre pondéré sert à mieux « visualiser » les résultats obtenus par l'élève 3 et non à effectuer des traitements calculatoires.

À la fin de la séance observée, un élève (élève 5) annonce au professeur B qu'avec un raisonnement différent (cf. annexes de la partie 3), il a également obtenu la même probabilité. Par manque de temps le professeur B lui suggère de rédiger son raisonnement qu'il corrigera. Selon les propos du professeur B — que nous avons rencontré de manière informelle — c'est la correction du raisonnement de l'élève 5 qui l'a amené à identifier l'erreur produite dans le raisonnement que nous avons examiné précédemment. D'ailleurs, le professeur B a proposé cette correction à l'ensemble de la classe. Nous n'avons malheureusement pas filmée cette séance, mais nous proposons en annexe la production de l'élève 5.

Le travail de validation mis en œuvre dans cet espace de travail pour résoudre la tâche riche est basé essentiellement sur les outils théoriques telles que la loi uniforme sur un intervalle. Comme nous l'avons souligné auparavant, les difficultés de compréhension des élèves ont conduit le professeur à recourir aux outils de la dimension sémiotique. Mais ces outils sémiotiques sont utilisés pour visualiser les résultats obtenus par le calcul intégral. Ainsi, la dimension sémiotique est utilisée de façon heuristique par rapport à la dimension discursive. Il s'ensuit que le travail de validation est clos sur la dimension discursive et dirigé par le paradigme P2. Le discours de validation rédigé au tableau est constitué des différents calculs ainsi que de l'arbre pondéré. La validation institutionnalisée par le professeur B est un argumentaire constitué d'arguments formels assistés du calcul intégral dont la garantie est la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. Tel qu'il est utilisé dans l'argumentaire de validation, l'arbre pondéré ne peut pas être considéré comme un argument sémiotique. Tous les calculs des probabilités inscrites sur les branches de l'arbre ou celles des événements $R \cap T$, $R \cap \bar{T}$ et R sont déduits du calcul d'intégral associé à la loi uniforme. La manière dont le professeur B a mis en œuvre le travail de validation de la tâche de « la rencontre » n'a pas été envisagée dans notre analyse *a priori*. On constate en outre que le travail de validation est délégué dans un premier temps (le temps de recherche et la correction de l'élève 3) aux élèves, mais à la fin de la séance, le professeur B a dû reprendre en charge ce travail afin de permettre aux autres élèves de la classe d'accéder à la compréhension de l'argumentaire de validation. Ainsi, nous pouvons éventuellement affirmer que le rôle des élèves (excepté celui qui a mené la correction au tableau) a changé au cours de la réalisation de la tâche, en passant du rôle d'ingénieur (pendant la phase de recherche) au rôle de tâcheron (à la fin de la correction de l'élève 3).

11.4.1 Conclusion

La réalisation de deux tâches riches proposées chacune en classe de 3^e A et de Terminale S B présente des différences. La première concerne la circulation du travail de validation qui s'effectue dans les différents plans verticaux de l'espace de travail, du plan [Sem-Ins] vers le plan [Sem-Dis] en passant par le plan [Ins-Dis]. Le travail de validation

mis en œuvre par le professeur A est alors complet (Kuzniak et Nechache, 2014) impliquant un changement de paradigme (de P1 à P2) au cours de la réalisation du travail de validation. Par contre, dans la classe de Terminale S B, le travail de validation est clos sur la dimension discursive et est dirigé par le paradigme P2. Cette différence peut être éventuellement expliquée par le fait qu'en classe de Terminale S B, il y a plus d'outils théoriques disponibles dans le référentiel théorique qu'en classe de 3^e.

Une deuxième différence porte sur la forme de la validation. En effet, la validation institutionnalisée par le professeur A a la forme d'un argumentaire constitué d'un argument sémiotique (le tableau à double entrée). Le professeur B a, lui, institutionnalisé une validation ayant la forme d'un argumentaire constitué principalement d'arguments formels.

Une dernière différence survient dans la gestion du travail de validation par les professeurs A et B. Au regard du niveau de complexité de la tâche proposée (le segment et son milieu), le professeur A a choisi de prendre en charge le travail de validation en indiquant à ses élèves les démarches à suivre. Il a alors attribué aux élèves un rôle de tâcheron. Pour le professeur B, il est clair qu'il a souhaité laisser les élèves effectuer le travail de validation par eux-mêmes tel des ingénieurs. Mais visiblement ce travail a présenté des difficultés pour certains élèves conduisant ce professeur à intervenir à la fin du travail de validation. Nous avons donc une différence entre un professeur qui choisit d'occulter les difficultés en prenant en charge le travail et un professeur qui souhaite laisser ces élèves en autonomie. Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous les différences (surlignées en gras et en rouge) entre notre analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif concernant la catégorie de tâche et le rôle attribué aux élèves dans l'exécution des tâches de « segment et son milieu » et « la rencontre » :

Classes	Catégorie de la tâche <i>a priori</i>	Catégorie de la tâche dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves <i>a priori</i>	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif
3 ^e A Term S B	Riche Riche	Simple Riche	Ingénieur Ingénieur	Tâcheron Ingénieur- Tâcheron

TABLE 11.5 – Catégories de tâche et rôle des élèves dans l'analyse *a priori* et l'ETM_P idoine effectif

En conclusion, pour deux tâches riches distinctes, la gestion de travail de validation est différente entre les deux niveaux de classe et entre les professeurs A et B.

Conclusion de la troisième partie

Cette partie visait à étudier les deux sous-questions de recherche (Q2a) et (Q2b) que nous rappelons ci-dessous :

(Q2a) : Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^e et en classe de 2^{nde} ?

(Q2b) : Ces formes de validation sont-elles propres à ces deux niveaux de classe où sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau du secondaire ?

Nous rappelons également les hypothèses **(H2a)** et **(H2b)** associées respectivement à chacune des deux sous-questions qui ont été vérifiées dans cette partie :

(H2a) : Nous postulons que, dans le domaine des probabilités, la forme de la validation dépend du degré de complexité des tâches proposées. Ainsi, selon le degré de complexité des tâches, le travail de validation dans l'ETM_P est placé dans l'un des plans [Sem-Dis], [Ins-Dis], ou éventuellement clos sur la dimension discursive.

(H2b) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que, pour des tâches identiques proposées dans des ETM idoines similaires, les formes de validation institutionnalisées par les professeurs sont différentes d'un professeur à un autre et ceci, quel que soit le niveau de classe.

Pour répondre à ces questions, nous avons précisé les notions de modélisation et de modèle qui sont spécifiques au domaine des probabilités. Nous avons mis en évidence que le travail de validation et la validation produite à l'issue de ce travail dépendent du modèle probabiliste (analytique ou numérique) choisi pour effectuer les traitements probabilistes. Notre choix de traiter la validation du point de vue des espaces de travail mathématique nous a conduit à clarifier la notion de tâche au sein de ces espaces de travail. Nous avons alors défini trois sortes de catégories de tâches — simple, complexe, riche — tenant compte de la notion de modélisation. Pour chacune des catégories de tâches, nous avons défini une catégorie de travailleur-sujet (tâcheron, technicien, ingénieur). La caractérisation des modèles probabilistes, des catégories de tâches et du travailleur-sujet nous ont permis d'analyser le travail de validation des tâches de différentes catégories mis en oeuvre dans des ETM_P idoines de différents niveaux de classe. Cette analyse révèle ce qui suit :

- *Mêmes tâches de même catégorie en classe de 3^e et de 2^{nde}.*

Que ce soit en 3^e ou en 2^{nde}, pour une même tâche complexe, nous avons constaté que la gestion du travail de validation et la forme de validation était similaire. Dans les quatre classes, la validation institutionnalisée prend la forme d'un argumentaire bâti sur des arguments sémiotiques. En revanche, nous avons observé une différence du rôle des élèves dans la réalisation de la tâche ; plus précisément, dans la classe de 3^e A où les élèves ont eu le rôle de tâcheron alors que dans les trois autres classes, ils ont eu celui de technicien. Cette différence s'explique (selon le professeur A) sans doute par les difficultés en mathématique des élèves de cette classe. Il en résulte que le professeur A a transformé la tâche complexe en une tâche simple. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les caractéristiques de la validation dans le cas d'un traitement d'une même tâche complexe dans deux niveaux de classe.

Classe	Catégorie de la tâche dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif	Validation	Circulation du travail de validation	Paradigme
3 ^e B, 2 ^{nde} B, 2 ^{nde} C	Complexe	Technicien	Argumentaire basé sur des arguments sémiotiques	[Sem – Ins] → Dis	P1 P2 ou P2
3 ^e A	Simple	Tâcheron	Argumentaire basé sur des arguments sémiotiques	[Sem – Ins] → Dis	P1 P2

TABLE 11.6 – La validation d'une même tâche complexe

Conformément à nos attentes, pour une même tâche complexe réalisée dans deux ETM_P idoines de classe de 3^e et dans deux ETM_P idoines de classe de 2^{nde}, une forme de validation est institutionnalisée, basée sur un raisonnement de type « diagrammatique ».

- *Mêmes tâches, mais catégories de tâches différentes en classe de 2^{nde} et de 1^{re} S.*

Dans deux classes de 1^{re} S, le travail de validation d'une même tâche complexe est placé soit dans le plan [Sem-Dis] orienté vers la dimension discursive, soit clos sur la dimension discursive. Nous avons de plus identifié deux sortes d'argumentaires de validation, l'un bâti sur des arguments sémiotiques et des arguments formels, l'autre fondé sur des arguments exclusivement formels. Ce deuxième argumentaire s'organise sous forme de démonstration. Ainsi, la réalisation d'une même tâche

complexe dans deux ETM_P idoines de même niveau entraîne deux formes de validation distinctes.

Pour cette même tâche, mais de catégorie riche, proposée cette fois-ci dans deux classes de 2^{nde} , la gestion du travail de validation est différente. Il est placé soit dans le plan [Sem-Dis], soit clos sur la dimension instrumentale. Dans le premier cas, aucune validation n'est institutionnalisée. Dans le deuxième cas, la validation produite est un argumentaire bâti sur des arguments empirico-expérimentaux. Nous précisons toutefois que dans le premier cas, bien qu'aucune validation n'est institutionnalisée, le professeur B a choisi de donner l'entière responsabilité du travail de validation à ses élèves, tandis que dans l'autre classe de 2^{nde} , le professeur C a choisi de superviser le travail de validation tel un ingénieur, en assignant le rôle de tâcheron à ses élèves. Le professeur C a donc transformé la tâche riche en une tâche simple. Nous faisons le même constat pour le professeur E qui a transformé la tâche complexe en une tâche simple. Ainsi, pour une même tâche riche, le rôle de l'élève dans la réalisation de la tâche dépend de sa gestion par le professeur. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les caractéristiques de la validation dans le cas d'un traitement d'une même tâche de catégorie de tâches différentes et dans deux niveaux de classe :

Classe	Catégorie de tâches dans l' ETM_P idoine effectif	Rôle des élèves dans l' ETM_P idoine effectif	Validation	Circulation du travail de validation	Paradigme
2^{nde} B	Riche	Ingénieur	Aucune	Inachevé	P1
2^{nde} C	Simple	Tâcheron	Argumentaire basé sur des arguments empirico-expérimentaux	Clos sur (<i>Ins</i>)	P1
1^{re} S D	Complexe	Technicien	Argumentaire basé sur des arguments sémiotiques	[<i>Sem - Dis</i>]	P2
1^{re} E	Simple	Tâcheron	Argumentaire basé sur des arguments formels	Clos sur (<i>Dis</i>)	P2

TABLE 11.7 – La validation d'une même tâche mais de catégorie de tâches différentes

Par comparaison entre les classes de 2^{nde} et de 1^{re} S, nous pouvons en déduire que la réalisation d'une même tâche entraîne des formes de validation différentes d'un niveau à un autre. Conformément à nos attentes, la catégorie de la tâche semble

influer sur la forme de validation produite.

- *Même catégorie des tâches (riches) en classe de 3^e et en classe de Terminale S.*

En classe de Terminale S, le travail de validation est placé dans la dimension discursive et a abouti à une forme de validation caractérisée par un argumentaire fondé sur des arguments formels. Mais la complexité (pour un certain nombre d'élèves) de ce travail de validation a obligé l'enseignant à utiliser un outil sémiotique afin d'aider les élèves à comprendre l'argumentaire de validation exposé.

Pour cette même catégorie de tâche, notre analyse du travail de validation dans l'ETM_P idoine de la classe de 3^e a mis en évidence que le travail de validation est complet. En effet, le travail de validation débute dans le plan [Sem-Ins], bascule ensuite dans le plan [Ins-Dis] et s'achève dans le plan [Sem-Dis]. De plus, la validation produite est basée sur des raisonnements, l'un assisté par la simulation et l'expérimentation et l'autre basé sur un raisonnement diagrammatique (avec usage du tableau à double entrée). Ainsi, la validation produite a la forme d'un argumentaire basé sur des arguments empirico-expérimentaux dans le contexte de découverte; il est aussi basé sur des arguments sémiotiques dans le contexte de justification. Cette analyse a révélé que le travail était dirigé par le professeur A et que la part des élèves dans l'élaboration de ce travail était minimale. Le professeur A a donc transformé la tâche riche en une tâche simple. Ils avaient un rôle de tâcheron. *In fine*, pour une même catégorie de tâche, le travail de validation et la forme de validation institutionnalisée en début et en fin d'apprentissage du domaine des probabilités sont différents. Il semble que cette différence dépende du niveau de classe mais également de l'enseignant. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les caractéristiques de la validation dans le cas d'un traitement de deux tâches relevant de la même catégorie de tâches, dans deux niveaux de classe :

Classe	Catégorie de tâches dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif	Validation	Circulation du travail de validation	Paradigme
3 ^e A	Simple	Tâcheron	Argumentaire basé sur des arguments sémiotiques	Dans les trois plans	P1 P2

Classe	Catégorie de tâches dans l'ETM _P idoine effectif	Rôle des élèves dans l'ETM _P idoine effectif	Validation	Circulation du travail de validation	Paradigme
Term S B	Riche	Ingénieur-Tâcheron	Argumentaire basé sur des arguments formels	Clos sur (<i>Dis</i>)	P2

TABLE 11.8 – La validation de tâches relevant de la même catégorie de tâches

Les résultats de cette partie montrent que, pour une même tâche complexe, le travail de validation et la forme de validation institutionnalisée en classe de 3^e et de 2^{nde} sont similaires. Cette forme est caractérisée par un argumentaire de validation basé sur des raisonnements de type « diagrammatique » et constitué d'arguments sémiotiques fondés sur des registres sémiotiques. Alors qu'en classe de 1^{re} S, le travail de validation et les formes de validation sont différents selon l'enseignant. En classe de 1^{re} S, deux formes de validation sont identifiées. L'une est caractérisée par un argumentaire fondé sur des outils sémiotiques assistés par des outils théoriques. L'autre est caractérisée par un argumentaire basé uniquement sur les outils théoriques de la dimension discursive.

Nous avons observé, dans le cas de la réalisation de tâches riches (non identiques) en classe de 3^e et de 2^{nde}, que le travail de validation et la forme de validation présentent à la fois des similarités et des différences. La similarité apparaît dans le recours à la dimension instrumentale dans le travail de validation. Celle-ci est utilisée dans les deux classes dans le contexte de découverte, afin de prédire un résultat qui n'est pas connu. Nous constatons également que, dans la réalisation d'une tâche riche, les élèves des classes de 3^e et de 2^{nde} ont été assignés au rôle de tâcheron. Ainsi, les deux professeurs observés ont eux-mêmes proposé le modèle numérique et ont « dicté » les instructions à suivre « tel un guide pratique » pour réaliser les traitements numériques. La différence entre ces deux niveaux de classes vient du fait qu'en classe de 3^e, la dimension sémiotique est sollicitée pour justifier les résultats fournis par l'expérience, chose qui n'a pas été observée en classe de 2^{nde}. Il semble que la place accordée à la dimension instrumentale dans le travail de validation dépende du professeur.

Nos résultats révèlent également que, selon que la tâche soit de catégorie complexe ou riche, les formes de validation observées sont différentes et le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Dis], dans le plan [Ins-Dis] ou clos sur la dimension discursive. Ainsi, notre hypothèse (**H2a**) se trouve vérifiée. Selon nos résultats, pour une même tâche proposée dans deux ETM_P de même niveau, les formes de validation sont différentes et dépendent du professeur. Or, dans le cas d'une même tâche complexe proposée dans deux

ETM_P idoines de classe de 3^e et de classe de 2^{nde}, les résultats révèlent que les formes de validation sont similaires et ne dépendent pas du professeur. Nous ne pouvons pas affirmer que notre hypothèse (**H2b**) est vérifiée, mais elle l'est néanmoins partiellement.

En conclusion, les formes de validation identifiées s'appuient sur les registres sémiotiques, sur les outils de la dimension discursive ou sur les outils de la dimension instrumentale. Ces formes de validation dépendent de la catégorie de la tâche, du niveau de la classe considéré et du professeur. Il en résulte que la validation et le travail de validation dans l'enseignement des probabilités varient selon la catégorie des tâches, le niveau de classe et les choix du professeur. Nous signalons toutefois que le travail de validation ne varie pas dans le cas où c'est le même professeur (le professeur B) qui met en place ce travail dans différents ETM_P de différents niveaux (3^e, 2^{nde}, Term S). Si la dépendance de la validation à la catégorie de la tâche et au niveau de classe auquel elle s'adresse peu paraître évidente, ce n'est pas le cas pour la dépendance au professeur. Cette dépendance au professeur nous conduit à interroger (dans la partie suivante) le point de vue du professeur en ce qui concerne les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire.

Quatrième partie

La validation dans l'ETM_P personnel des professeurs

Table des matières

Introduction de la quatrième partie	315
12 Recueil des données	317
12.1 Technique de recueil de données	317
12.1.1 Échantillon de professeurs	317
12.1.2 Passation des entretiens	318
12.1.3 Entretiens d'explicitation semi-directifs avec les professeurs	319
12.1.4 Les questions de la grille d'entretien	320
12.2 Méthodologie d'analyse des données recueillies	322
13 Présentation des résultats des entretiens	323
13.1 Caractérisation du travail de validation dans l'ETM _P personnel des professeurs	323
13.1.1 L'influence du référentiel théorique dans le travail de validation	323
13.1.2 La place de la dimension sémiotique dans le travail de validation dans le domaine des probabilités	328
13.1.3 La place de la dimension instrumentale dans le travail de validation dans le domaine des probabilités	331
13.2 Caractérisation du discours de validation dans l'ETM _P personnel du professeur	333
13.2.1 Les types d'arguments utilisés	333
13.2.2 La structure globale de l'argumentaire de validation	334
14 Interprétation et discussion des résultats	343
14.1 Le rôle des dimensions sémiotique et instrumentale dans le fonctionnement de la genèse discursive	343
14.1.1 Dimension sémiotique et genèse discursive	343
14.1.2 Dimension instrumentale et genèse discursive	344
14.2 Caractérisation du discours de validation pratiqué par les professeurs	345

14.2.1 Les arguments mobilisés dans les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs	345
14.2.2 Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs	346
14.3 Caractérisation des formes de validation	347
Conclusion de la quatrième partie	349
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	351
Références	361

Introduction de la quatrième partie

Nous avons conclu dans la troisième partie que la validation et le travail de validation dépendent de la catégorie de la tâche proposée, du niveau de classe mais aussi du professeur. Or, l'étude comparative des espaces de travail géométrique et probabiliste des classes de 3^e et de 2nde menée dans la deuxième partie de la thèse révèle que dans le domaine de la géométrie, la validation et le travail de validation dépendent seulement du niveau de complexité des tâches. Dans le domaine des probabilités, l'étude montre que la validation et le travail de validation dépendent également du professeur puisque certains professeurs observés privilégient les formes de validation basées sur les registres sémiotiques (tableaux et arbres), quand d'autres les occultent. Cette dépendance de la validation et du travail de validation au professeur dans la résolution de tâches probabilistes nous conduit à étudier la validation et le travail de validation dans l'espace de travail personnel du professeur. Ainsi, dans cette quatrième partie, notre travail d'investigation sur la caractérisation de la validation à la fin de la scolarité obligatoire se poursuivra en quittant les salles de classes et les élèves, pour se concentrer sur la représentation qu'ont les professeurs de la validation dans l'enseignement des probabilités. À travers cette partie, nous avons tenté de cerner les représentations que les professeurs ont de la validation dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire. Pour cela, nous avons mené une enquête sous forme d'entretiens avec cinq professeurs. Les résultats de cette enquête révèlent l'existence de divers styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs interrogés. Ces styles d'argumentaires adoptés se différencient selon le modèle probabiliste (analytique ou numérique) choisi pour traiter une situation aléatoire, mais aussi selon le niveau de classe considéré. L'analyse des styles d'argumentaires de validation identifiés permet d'obtenir des informations concernant la validation et les formes de validation associées, institutionnalisées dans les classes.

Notre objectif est de compléter le travail d'investigation effectué dans les parties précédentes par une enquête auprès des enseignants afin de récolter de nouveaux éléments sur la caractérisation de la validation. Ces nouveaux éléments nous permettront de répondre à la troisième question :

(Q3) : Quels sont les points de vue de l'enseignant sur la forme de la validation dans l'enseignement des probabilités.

Pour étudier cette question, nous avons formulé l'hypothèse **(H3)** :

(H3) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que la validation dans l'enseignement des probabilités dépend des représentations que l'enseignant se fait de la validation dans le domaine enseigné. Cela dépend donc de la manière dont la validation dans le domaine des probabilités est caractérisée dans l'ETM personnel de l'enseignant.

Cette partie est constituée de trois chapitres. Dans le premier, nous précisons notre méthodologie de recueil des données permettant de tester l'hypothèse **(H3)**. Dans le deuxième, nous présentons les résultats issus de l'enquête auprès des enseignants. Enfin nous discuterons ces résultats dans un dernier chapitre.

Chapitre 12

Recueil des données

Nous avons choisi une méthodologie de type qualitatif à l'aide d'entretiens d'explicitation (Vermersch, 2006). Ainsi, nous pensons que les déclarations des enseignants permettent d'avoir accès à leurs opinions et à leurs représentations et, d'une certaine façon, à ce vers quoi ils tendent, ce qui ne nous paraît pas négligeable. Ces entretiens visent à tester l'hypothèse (H3).

12.1 Technique de recueil de données

Pour mieux comprendre la validation et mettre en évidence les éléments caractéristiques de celle-ci, nous optons pour une technique de recueil de données basée sur l'opinion des professeurs. Ces derniers sont invités à exprimer leur attentes et leur pratiques sur le thème de la validation. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser les entretiens d'explicitation et de laisser de côté les questionnaires. Notre choix s'explique par le fait que les questionnaires sont des outils méthodologiques intéressants pour réaliser une étude quantitative (à grande échelle) mais ils sont constitués de questions très souvent fermées et ordonnées dont les réponses s'avèrent superficielles. Au regard de notre objectif, les entretiens d'explicitation nous sont apparus plus adéquats pour accéder aux renseignements sur des points bien précis en lien avec nos questionnements. Nous avons donc mené une étude qualitative à l'aide d'entretiens d'explicitation semi-directifs (Vermersch, 2006), afin de laisser la liberté aux individus interrogés de s'exprimer sur un thème donné. Les entretiens d'explicitation semi-directifs sont de fait des outils méthodologiques privilégiés pour mener une enquête qualitative.

12.1.1 Échantillon de professeurs

Nous avons interrogé les cinq professeurs (A, B, C, D, E) ayant participé à la précédente expérimentation (cf. La section *Échantillon de professeurs et de classes* p. 267). Le choix

de ces cinq professeurs est justifié par le fait que nous avons observé la mise en œuvre du travail de validation de diverses tâches probabilistes par ces professeurs lors de des expérimentations présentées dans la partie précédente. Cela nous a permis de comprendre certaines caractéristiques de leur gestion du travail de validation dans le domaine des probabilités, liées à des tâches de différentes catégories, et de mettre en évidence des formes de validation pratiquées dans différents niveaux de classe. Nous rappelons dans le tableau suivant les différentes tâches proposées par chacun des cinq professeurs dans leurs classes lors de l'expérimentation précédente :

	Le segment et son milieu	Les trois bancs	La politique nataliste	La rencontre
Professeur A	En classe de 3 ^e	En classe de 3 ^e		
Professeur B		En classe de 3 ^e	En classe de 2 ^{nde}	En classe de Term S
Professeur C		En classe de 2 ^{nde}	En classe de 2 ^{nde}	
Professeur D			En classe de 1 ^{re} S	
Professeur E			En classe de 1 ^{re} S	

TABLE 12.1 – Les tâches mises en oeuvre par les professeurs dans leurs classes

Il nous a semblé pertinent de poursuivre notre travail de recherche avec ces cinq professeurs, en réalisant des entretiens individuels. Le choix de ces cinq professeurs est également justifié par le fait qu'ils remplissent les deux critères suivants : l'ancienneté dans l'enseignement et la diversité des niveaux dans lesquels ils interviennent. Ainsi, l'échantillon est constitué de cinq professeurs ayant plus de cinq ans d'expérience et enseignant au collège et au lycée. Le tableau ci-dessous renseigne les différents niveaux de classe dans lesquels les professeurs interrogés interviennent :

	3 ^e	2 ^{nde}	1 ^{re} S	Term S
Professeur A	X			
Professeur B	X	X		X
Professeur C		X		X
Professeur D	X		X	
Professeur E			X	

TABLE 12.2 – Niveaux de classe dans lesquels les professeurs enseignent

12.1.2 Passation des entretiens

Nous avons choisi de réaliser les entretiens de manière individuelle. Nous avons également tenu à réaliser ces entretiens lorsque le chercheur et le professeur interrogé étaient

seuls présents dans la pièce. Ces choix de passation ont été influencés par la volonté d’obtenir l’opinion propre du professeur sans que celle-ci ne soit faussée ou influencée par les réponses d’autres professeurs. Chacun des cinq entretiens s’est déroulé suivant les modalités suivantes :

- les entretiens ont une durée de 45 minutes environ ;
- les entretiens se sont produits soit dans une salle de l’établissement dans lequel les professeurs enseignent, soit dans une salle de l’université Paris-Diderot ;
- les entretiens ont été réalisés pendant les temps libres des professeurs ;
- les entretiens ont eu lieu à la fin de l’expérimentation de la troisième partie, pendant les deux premières semaines du mois de juin 2015.
- avant de commencer l’entretien, nous avons précisé les objectifs de recherche ;
- les entretiens ont été enregistrés à l’aide d’un dictaphone et retranscrits intégralement ;
- lors des entretiens, le chercheur s’est efforcé d’intervenir *via* des reformulations pour prolonger le discours ou la réflexion du professeur.

12.1.3 Entretiens d’explicitation semi-directifs avec les professeurs

Lors des entretiens, le chercheur (l’intervieweur) doit adopter une attitude à la fois non directive, afin de laisser le professeur (l’interviewé) répondre aux questions le plus librement possible, et directive pour obtenir les informations souhaitées sur les objectifs définis à l’avance. Un entretien d’explicitation semi-directif comporte une grille de questions ou de thèmes permettant d’orienter l’individu et visant à obtenir des informations plus riches sur le sujet traité. De ce fait, dans les entretiens avec les professeurs, nous avons choisi d’aborder la validation dans l’enseignement des probabilités (de la 3^e à la Terminale S) du point de vue de la caractérisation du travail et du discours de validation dans l’ETM_P personnel du professeur :

Point 1. Caractérisation du travail de validation dans l’ETM_P personnel du professeur.

À travers les entretiens, nous cherchons à obtenir des informations sur :

- la place accordée à chacune des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) dans le travail de validation ;
- la prise en compte des éléments du référentiel théorique dans le travail de la validation ;
- le paradigme qui dirige le travail de validation dans cet ETM_P personnel.

Point 2. Caractérisation du discours de validation dans l’ETM_P personnel du

professeur

À travers les entretiens, nous visons à obtenir des précisions sur la (ou les) forme(s) de validation pratiquée(s) par les professeurs dans le domaine des probabilités en fonction du niveau enseigné. Ces précisions recherchées sont :

- le type d'argument (empirico-expérimental, formel, sémiotique) utilisé dans l'argumentaire de validation ;
- la mise en forme de l'argumentaire de validation.

12.1.4 Les questions de la grille d'entretien

Pour mener à bien nos entretiens, nous avons eu besoin de définir une ligne de conduite pour leur déroulement. Nous avons donc privilégié la construction d'une grille d'entretien basée sur une liste de plusieurs questions qui dérivent de l'un des deux points cités précédemment. Notre stratégie est de laisser le professeur s'exprimer avec les mots qu'il souhaite utiliser. Nous essaierons simplement de recentrer les échanges sur les deux points qui nous intéressent quand l'entretien s'en écartera. Les questions sont construites à partir de nos questionnements et hypothèses portant sur l'enseignement de la validation. Les questions sont formulées avec un vocabulaire adéquat pour les interviewés ciblés. Elles ne comportent pas d'ambiguïtés de telle sorte qu'elles n'influencent pas la réponse. Pour chacune de ces questions, nous présentons ci-dessous son énoncé et son objectif. Les questions posées aux professeurs relèvent soit de l'étude de l'impact du référentiel théorique et de la place des dimensions sémiotique et instrumentale dans le travail de validation, soit de l'étude du discours de validation.

1) Etude de l'impact du référentiel théorique et de la place des deux genres sémiotique et instrumentale dans le travail de validation.

L'énoncé de la question	L'objectif de la question
« Valider » dans le domaine de la géométrie, est-ce la même chose que dans le domaine des probabilités dans l'enseignement secondaire ? Pourriez-vous expliquer les similitudes ou les différences concernant la validation dans ces deux domaines ?	Les réponses à cette question nous permettent de connaître l'opinion des professeurs sur ce qu'est « valider » dans chacun des deux domaines. Mais aussi d'examiner si les professeurs différencient ou non la pratique de la validation dans les deux domaines. À travers les réponses des professeurs, nous cherchons non seulement à obtenir des informations au sujet de la validation pratiquée dans ces deux domaines mais également à évaluer si le référentiel théorique est à l'origine des similitudes ou des différences exprimées par les professeurs interrogés.

TABLE 12.3 – Les questions de la grille d'entretien

L'énoncé de la question	L'objectif de la question
Dans l'enseignement de la géométrie, selon vous, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet-il de « valider » ? Et dans l'enseignement des probabilités, l'utilisation des logiciels permet-elle de « valider » ?	Le but est de déterminer précisément la place de la dimension instrumentale dans le travail de validation et dans le discours de validation en probabilités accordée par les professeurs. Plus précisément, d'observer si les professeurs privilégient l'usage des outils technologiques de la dimension instrumentale dans le travail de validation uniquement dans le contexte de découverte au même titre qu'en géométrie, ou s'ils lui donnent une place dans le contexte de justification.
Selon vous, les figures permettent-elles de valider dans le domaine de la géométrie ? L'arbre des possibles ou pondéré, le tableau à double entrée ou le diagramme de Venn permettent-ils de valider en probabilités ?	Il s'agit d'évaluer la prise en compte des outils sémiotiques (figures, arbres, tableaux) dans le travail de validation. À travers les réponses à cette question, nous cherchons à savoir si les outils sémiotiques sont utilisés dans le travail de validation dans les deux domaines cités. Plus précisément, nous cherchons à observer si les professeurs privilégient l'usage des outils sémiotiques de la dimension sémiotique dans le travail de validation uniquement dans le contexte de découverte au même titre qu'en géométrie, ou s'ils leur donnent une place dans le contexte de justification.

TABLE 12.4 – Les questions de la grille d'entretien

2) Etude du discours de validation.

L'énoncé de la question	L'objectif de la question
Existe-t-il plusieurs méthodes pour raisonner en probabilités ?	Nous cherchons à obtenir des informations sur le type de raisonnement mobilisé (déductif, diagrammatique, etc.) dans le travail de validation.
Avez-vous les mêmes exigences à l'égard de la validation dans chacun des deux domaines : géométrie et probabilités ? Si oui, lesquelles ? Sinon, quelles sont vos exigences à l'égard de la validation dans chacun des deux domaines ?	À travers les réponses à cette question, nous cherchons à obtenir des précisions sur les différents types d'arguments (formels, sémiotiques, empirico-expérimentaux) utilisés dans l'argumentaire de validation. Nous pourrions ainsi observer si les exigences des professeurs varient ou non en fonction du domaine en jeu, du niveau de classe enseigné et/ou en fonction du niveau de complexité des tâches proposées.
Quel est le discours (écrit et oral) de validation que vous appliquez (ou attendez de la part des élèves) dans la résolution de problèmes probabilistes ?	Les réponses à cette question permettent de repérer les différents éléments caractérisant le discours de validation et d'identifier si possible la (ou les) forme(s) de validation institutionnalisées.

TABLE 12.5 – Les questions de la grille d'entretien

12.2 Méthodologie d'analyse des données recueillies

Nous menons une analyse qualitative basée sur des données subjectives indissociables des représentations des professeurs interrogés. Cette analyse permet d'entrevoir les opinions des professeurs au sujet de la validation dans l'enseignement des probabilités. Les données recueillies sont retranscrites intégralement et présentées sous forme de textes (verbatim des entretiens avec les professeurs). Nous avons fait le choix de transcrire les questions posées, les réponses, les pauses, les hésitations et les interruptions mais aussi les silences car nous pensons que ces éléments « para-textuels » peuvent apporter à l'analyse des entretiens.

L'analyse des données a eu lieu au terme de l'ensemble des entretiens afin de porter un regard global, rétrospectif et analytique sur l'ensemble des données recueillies. Ce choix méthodologique d'analyse global est justifié par le fait qu' :

« Il est impossible d'effectuer les analyses comme si le chercheur ne savait pas ce qui vient après. [...]. C'est bien parce que le dispositif est achevé et que l'on sait ce qui s'est déroulé, au moins dans ses grandes lignes, que l'on revient dessus ; mais pas de la même manière puisque les événements sont examinés avec certaines « lunettes » théoriques, c'est à dire que l'on « filtre » ce qui semble utile aux questions de recherche posées » (Leutenegger, cité par Farah, 2015, p. 175)

En outre, dans chaque transcription des données, nous avons relevé (en gras) les mots, les expressions et les morceaux de phrases qui sont en relation avec notre grille d'entretien définie précédemment, à savoir :

- 1) caractérisation du travail de validation dans l'ETM_P personnel du professeur : l'influence du référentiel théorique et la place des dimensions sémiotique et instrumentale dans le travail de validation ;
- 2) caractérisation du discours de validation dans l'ETM_P personnel du professeur : les arguments mobilisés dans l'argumentaire de validation et les formes de validation institutionnalisées.

Notre analyse des données inclut des extraits d'entretiens qui corroborent les déclarations des professeurs. Nous avons mené un traitement sémantique manuel à travers une analyse empirique, où il s'agit d'étudier les déclarations des professeurs, guidée par une démarche itérative de va et vient entre les informations recueillies et l'analyse en cours d'élaboration.

Chapitre 13

Présentation des résultats des entretiens

Pour plus de précisions, nous invitons le lecteur à prendre connaissance de l'ensemble des transcriptions des entretiens en annexes. La présentation des résultats provenant de l'ensemble des réponses des cinq professeurs est organisée suivant les deux points cités dans le chapitre précédent : le travail de validation dans l'ETM_P personnel et la caractérisation de la validation du point de vue de sa structure. Nous précisons que la présentation des résultats sera accompagnée de quelques extraits qui corroborent les déclarations des professeurs obtenues lors des entretiens.

13.1 Caractérisation du travail de validation dans l'ETM_P personnel des professeurs

Nous avons procédé à une analyse de contenu des échanges en nous focalisant uniquement sur les déclarations relevant :

- du rôle du référentiel théorique dans le travail de validation ;
- de la place accordée aux deux dimensions sémiotique et instrumentale dans le travail de validation.

13.1.1 L'influence du référentiel théorique dans le travail de validation

Les entretiens nous ont permis d'obtenir les déclarations des professeurs sur l'influence du référentiel théorique dans le travail de validation dans les deux domaines comparés suivant les quatre niveaux de classe considérés. Les résultats révèlent que :

1) La validation géométrique est différente de la validation probabiliste

Les raisons de cette différence avancées par les professeurs interrogés sont diverses. La première raison porte sur le fait que le domaine des probabilités est introduit tardivement par rapport à celui de la géométrie. Selon les professeurs interrogés, le domaine de la géométrie est introduit dès l'école primaire alors que celui des probabilités n'est introduit qu'à partir de la classe de 3^e. Il en résulte une pratique de la validation dans l'enseignement de la géométrie plus ancienne que celle pratiquée dans l'enseignement des probabilités :

Professeur C : **La géométrie, on en fait beaucoup depuis l'école primaire**, on est habitué à manipuler, etc. Et en proba c'est plus neuf, et **c'est vrai des fois tu valides moins** et c'est moins précis au niveau de la rédaction, de la justification.

Professeur A : **Il y a plus de vécu en géométrie** [...] La géométrie c'est quelque chose qui se construit au fur et à mesure du collège.

La deuxième raison porte sur le manque d'expérience et de pratique dans l'enseignement des probabilités. En effet, les professeurs expriment un certain malaise dans l'enseignement de ce domaine, justifié par leur manque d'expérience et de pratique dans cet enseignement par rapport au domaine de la géométrie. D'ailleurs, ils vont jusqu'à « déplorer » leur mauvaise pratique de la validation en probabilités :

Professeur C : Il y a une différence du vécu des élèves et **à mon niveau aussi**, [...] **je ne me rendais pas compte de ce qui il y a derrière** [...] je trouve qu'en géométrie on a plus de pratique, on sait mieux ce que c'est valider [...] Nous **on a moins de pratique, du coup on tolère plus de flou en proba**.

Professeur A : **J'ai du mal à valider en proba**. En fait **c'est lié à mon expérience en tant qu'enseignant**, je n'ai pas une grande expérience.

La troisième raison concerne le manque d'outils théoriques qui empêche la production de justifications. En fait, le manque d'éléments théoriques tels que les théorèmes ou les propriétés dans le domaine des probabilités par rapport à celui de la géométrie rend le travail de la validation compliqué du point de vue des justifications :

Professeur D : **On ne peut dire que c'est tel théorème qu'on va utiliser puisque on ne les a pas** [...] **Pauvre en justifications** [...] alors qu'en géométrie on a des arguments puisqu'on a des propriétés et on peut justifier.

Professeur B : **pas d'outils pour valider**.

Professeur C : Il y a **une différence avec la géométrie**, car **on a plus d'outils, plus de théorèmes**.

La dernière raison porte sur les outils théoriques admis dans le cours sans être prouvés. Les professeurs affirment que la différence entre la validation dans le domaine de la géométrie et dans celui des probabilités est due au fait que dans l'enseignement des probabilités, les théorèmes, les propriétés ou les formules sont très souvent proposés aux élèves sans être démontrés et sans justifier leurs intérêts :

Professeur B : Les propriétés et les théorèmes que l'on utilise sont dans le cours mais ils sont **souvent admis** [...] en géométrie, les propriétés et les théorèmes sont en plus prouvés dans le cours.

Professeur D : Quand on balance en seconde l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, ils [les élèves] vont dire, bon, ils sont bien gentils mais ça sort d'où votre truc, là? On comprend rien et ils auraient raison c'est complètement artificiel. Et comme en Terminale, j'ai l'impression qu'il n'y a pas matière à débattre, dans ces trucs-là, tu balances, c'est un intervalle, c'est $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, et ce n'est pas faire des maths pour moi, **c'est appliquer des recettes**.

En résumé, pour les cinq professeurs le référentiel théorique de l'espace de travail géométrique est bien plus « complet » que celui de l'espace de travail probabiliste qui est « lacunaire ». De plus, le référentiel théorique de l'espace de travail géométrique est construit et justifié avec les élèves, alors que le référentiel théorique de l'espace de travail probabiliste est imposé aux élèves. Les justifications sont « parachutées » sans la moindre justification. Ainsi, selon les propos des professeurs interrogés, le référentiel théorique a bien un impact sur la validation notamment pour produire des justifications.

2) La validation est différente selon les niveaux de classes

Selon les cinq professeurs interrogés, dans le domaine des probabilités, la validation est bien différente entre les quatre niveaux de classes, mais ils précisent que la différence est plus nette à partir de la classe de 1^{re} S. Plusieurs raisons à cette différence sont avancées par les professeurs.

La première raison porte sur le fait que le domaine des probabilités est introduit tardivement dans la scolarité des élèves. De ce fait, les professeurs baissent leur niveau d'exigence concernant la production de la validation au début de l'apprentissage du domaine des probabilités :

Professeur C : **Je suis moins exigeant en proba car c'est nouveau**, et ils n'ont pas beaucoup de vécu. Alors qu'en Terminale il y a plus de rédaction.

La deuxième raison est qu'à partir de la classe de 1^{re} S, des outils théoriques « puissants » sont intégrés dans le référentiel théorique de l'ETM_P :

Professeur B : En 2^{nde} et en 3^e c'est pareil, ce n'est pas vraiment de la démonstration, en Terminale S, tu fais une démonstration et avant [sous-entendu

en 3^e et en 2^{nde}] c'est un peu descriptif ce que tu fais finalement [...] Il y a beaucoup de choses qui basculent en Terminale, moi je trouve, et plus qu'en 1^{re} [...] ils [*sous-entendu les élèves*] ont tout ce qu'il faut, **ils connaissent tout sur les fonctions, il y a les intégrales, les exponentielles.**

Professeur E : Parce qu'on a un modèle théorique dans le cours [*de 1^{re} S*], on peut travailler sur de vrais éléments. **On a construit dans le cours des propriétés et puis on a construit un certain nombre de choses dans le cours qu'on avait pas construit avant**, donc on ne pouvait pas les utiliser, on ne peut donc pas exiger des élèves qu'ils utilisent quelque chose qu'on n'a pas construit avec eux dans le cours.

Les professeurs affirment que le manque d'outils théoriques dans le référentiel des classes de 3^e et de 2^{nde} ne permet pas de réaliser des validations « *propres* », autrement dit avec des justifications (appuyées sur des théorèmes et des propriétés). Il s'ensuit que les exigences demandées dans le cas de la validation dans le domaine des probabilités en classe de 1^{re} S et de Terminale S ne peuvent pas être les mêmes qu'en classes de 3^e et de 2^{nde}. D'ailleurs, l'un des cinq professeurs, ayant une classe de Terminale S, déclare que ses exigences concernant l'élaboration de la validation dans le domaine des probabilités sont identiques à celles qu'ils demandent dans le domaine de la géométrie.

Professeur C : En Terminale, il faut qu'ils rédigent beaucoup plus [...]

Chercheur : Donc en Terminale S, tu as les mêmes exigences qu'en géométrie ?

Professeur C : Oui. Et en 2^{nde} non, pour moi ils sont toujours dans la découverte, [...] ils n'ont pas assez de vécu pour passer au-delà.

En résumé, les cinq professeurs convergent vers l'idée que, parce que le domaine des probabilités n'est introduit qu'à partir de la classe de 3^e, le référentiel théorique de l'ETM_P est moins complet que celui de l'ETM_G, qui est plus fourni et plus étoffé en propriétés et théorèmes justifiés. Rappelons que l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane, en particulier le sous-domaine de la géométrie synthétique, débute à l'école primaire et s'achève globalement à la fin de la classe de 3^e pour laisser la place aux sous-domaines de la géométrie analytique et de la géométrie vectorielle dès la classe de 2^{nde}. Ainsi, le référentiel de l'ETM_G est plus complet en termes d'outils théoriques.

En conclusion, le référentiel théorique de l'espace de travail géométrique est stable entre les différents niveaux de classes et plus complet en termes d'outils théoriques et de leurs justifications. Nous avons donc un référentiel théorique qui est « *achevé* ». Ce qui n'est pas le cas pour le référentiel théorique de l'espace de travail probabiliste. En effet, le référentiel théorique de l'espace de travail probabiliste évolue entre la classe de 3^e et la

classe de Terminale S en passant d'un état « lacunaire » en termes d'outils théoriques et de leurs justifications vers un état « complet » en termes de propriétés et de théorèmes. Précisons toutefois que le référentiel théorique de la classe de 1^{re} S et de Terminale S est certes plus complet en termes de propriétés et de théorèmes, mais ces derniers ne sont pas souvent justifiés. En effet, à ces niveaux de classes, les théorèmes et les propriétés insérés dans le référentiel ne sont pas toujours prouvés. Ainsi, nous distinguons trois états d'évolution du référentiel théorique des deux espaces de travail géométrique et probabiliste en fonction des outils théoriques présents et de leurs justifications : lacunaire (peu d'outils théoriques), complet (riche en outils théoriques qui ne sont pas prouvés) et achevé (riches en propriétés qui sont justifiées).

Nous pouvons schématiser cette évolution (perçue par les professeurs) du référentiel théorique de l'ETM_P en fonction des quatre niveaux de classe, par rapport à celui de l'ETM_G :

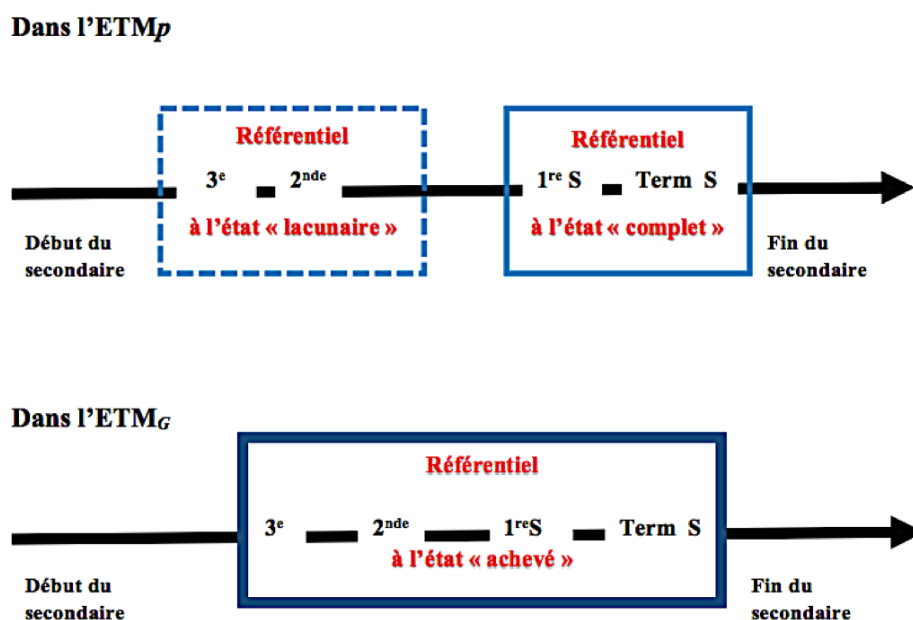


Fig. 13.1 – Evolution du référentiel théorique de l'ETM_P et l'ETM_G dans le secondaire

À travers l'analyse des réponses des professeurs interrogés, nous observons ce que l'on pourrait qualifier de « changement d'état » du référentiel théorique de l'ETM_P, le faisant passer d'un « état lacunaire » à un « état complet ». Ce changement d'état semble influencer sur le travail de validation mis en place par les professeurs dans le domaine des probabilités. Les propos des cinq professeurs laissent penser que l'enrichissement du référentiel théorique impacte grandement l'élaboration de l'argumentaire de validation. Le référentiel théorique est considéré par les professeurs comme « le producteur de garants » de l'argumentaire de validation. Le discours de validation dépend alors du niveau de développement du référentiel théorique. Rappelons que par définition de l'espace de travail mathématique, le référentiel théorique est très fortement lié au travail du discours de preuve. Ce lien est assuré par la genèse discursive. Il en résulte que le niveau de déve-

loppement du référentiel théorique entre les classes de 3^e et de Terminale S va entraîner l'enrichissement de la genèse discursive entre le début et la fin d'apprentissage du domaine des probabilités au niveau du secondaire.

13.1.2 La place de la dimension sémiotique dans le travail de validation dans le domaine des probabilités

L'analyse des réponses des professeurs met en évidence que si les figures sont utilisées pour chercher ou conjecturer un résultat lors de l'élaboration du travail de validation en géométrie, elles ne sont en aucun cas prises en compte dans le discours de validation :

Professeur D : **Les figures servent à conjecturer** encore une fois ou à voir comment ça se passe [...] de chercher, de mettre en évidence une propriété [...]. C'est un appui pour raisonner.

Professeur E : **Elles servent de support visuel**. Elles servent comme **appui pour raisonner**.

Professeur B : C'est **un appui pour raisonner** [...] elle **n'est pas élément de validation** [...] c'est un outil de contrôle.

Professeur C : Support **pour conjecturer** [...] voir des propriétés [...] il faut utiliser des propriétés ou des théorèmes pour valider.

Professeur A : Servent **pour donner la conjecture** [...] ce **n'est pas un outil de validation**.

En revanche, pour les arbres (des possibles ou pondérés) et les tableaux, quatre professeurs sur les cinq interrogés affirment que ces outils sémiotiques sont systématiquement utilisés dans le travail de validation et insérés dans le discours de validation. Parmi ces quatre professeurs, l'un (le professeur C) déclare que les arbres et les tableaux sont des outils théoriques au même titre que les théorèmes et les propriétés en géométrie :

Professeur D : Je considère que **l'arbre est une preuve**. De même pour **les tableaux, ils sont également intégrés dans la validation**.

Professeur B : En 3^e et en 2^{nde}, **les arbres et les tableaux je les intègre dans la validation**.

Professeur C : Les arbres des possibles et les tableaux jouent pour moi **le rôle des théorèmes en géométrie** car ils permettent de dénombrer de manière exhaustive.

Professeur A : **L'arbre pondéré fait partie de la validation**.

Un professeur sur cinq accepte que les arbres (pondéré ou des possibles) et les tableaux à double entrée fassent partie intégrante du discours de validation uniquement au niveau des

classes de 3^e et de 2^{nde}. En effet, il considère que la présence de ces outils sémiotiques dans le discours de validation est légitimée par l'état « lacunaire » du référentiel théorique à ces deux niveaux de classes. Il ajoute qu'à partir de la classe de 1^{re} S, l'arrivée des propriétés et des théorèmes dans le référentiel « change la donne » et conduit à reconsidérer la place de ces deux outils sémiotiques dans la validation :

Professeur B : En 3^e et en 2^{nde}, les arbres et les tableaux je les intègre dans la validation, sachant que la validation est un discours mathématique, mais les propriétés de ces deux registres restent **implicites** car elles **ne sont pas explicitées dans le programme** [...] Les arbres et les tableaux **changent de statut** dès la 1^{re} car il y a plus de propriétés écrites dans le cours.

Sur cinq professeurs, un seul n'a pas la même position que ses collègues concernant la place accordée aux arbres pondérés. Selon lui, l'arbre pondéré a le même statut que celui des figures en géométrie. Dans ce cas, l'arbre pondéré est considéré comme un outil sémiotique permettant d'extraire les données afin de les exploiter. Il ne peut donc pas être intégré dans le discours de validation :

Chercheur : Donc les arbres et les figures, pour toi, c'est exactement la même chose ?

Professeur E : Oui [...] **Pareil pour les figures, quand il y a des données sur les branches de l'arbre, on peut les utiliser.** [...]

Chercheur : D'accord. Mais **l'arbre pondéré ne fait pas partie du corps de la validation non plus ?**

Professeur E : **Non.**

Ce même professeur considère que le tableau à double entrée fait partie intégrante de la validation et ne lui donne pas le même statut que celui des arbres pondérés. Il explique que cet outil sémiotique est lié à la notion d'équiprobabilité :

Professeur E : Alors c'est plus compliqué, **parce qu'il y a une notion d'équiprobabilité derrière une double entrée.** En fait, une fois qu'on a justifié l'équiprobabilité, on n'a que les données finalement dans un tableau, plus que dans les figures en géométrie et dans les arbres pondérés en probabilité. On considère qu'on peut utiliser les données directement là dans le tableau, on n'a plus grand chose à faire, il n'y a que des données.

En résumé, la prise en compte des outils sémiotiques dans le travail de validation en probabilités est à l'appréciation de chacun des cinq professeurs. Ils sont considérés, comme soit des propriétés et des théorèmes quel que soit le niveau de classe, soit comme « temporairement » importants en classe de 3^e et de 2^{nde} en attendant l'arrivée de « vrais outils théoriques » supports du raisonnement, soit de la même manière que les figures

géométriques, quel que soit le niveau de classe. Les outils sémiotiques peuvent donc acquérir un statut d'outils théoriques pour n'importe quel niveau de classe ou un statut « temporaire » d'outils théoriques au début de l'apprentissage du domaine des probabilités. Si les cinq professeurs accordent une place aux outils sémiotiques dans le travail de validation, ils n'ont toutefois pas le même avis sur la place de ces outils dans le discours de validation. Selon ces professeurs, la place des outils dans le discours de validation dépend du niveau de classe dans lequel la validation est produite. Ils considèrent qu'en classes de 3^e et de 2^{nde}, la justification de la construction des outils sémiotiques n'est pas exigée. Les propriétés de ces outils sont admises dans le référentiel théorique et peuvent donc être utilisées comme arguments de validation :

Professeur D : Moi dès le début je leur dis, au baccalauréat l'arbre c'est une preuve donc vous faites un arbre, vous écrivez bien les probabilités sur les branches, et le fait de multiplier quand on suit une branche de probabilité ou d'additionner deux probabilités si on est en bout de branches va constituer, pour nous, une preuve comme quand on cherche en 1^{re} S avec l'espérance. [...] Oui. Oui, ça **je le dis, un arbre pondéré, avec son usage, c'est une démonstration.**

Professeur B : [*En 3^e et 2^{nde}*], les arbres et les tableaux, moi je les intègre dans la validation, sachant que la validation c'est le discours mathématique. Mais **les propriétés de ce discours restent implicites, car elles ne sont pas explicitées dans le programme.**

Professeur A : Oui ils [*les arbres pondérés*] font partie de la validation. On attend qu'ils [*les élèves*] donnent les issues au bout de chaque branche, ils calculent les proba. **On ne justifie pas plus en 3^e que l'on multiplie le long des branches [...] les tableaux c'est pareil.**

Un professeur parmi les cinq ajoutent que dès la classe de 1^{re} S, la justification de la construction des outils sémiotiques est exigée, en particulier pour l'arbre pondéré et le tableau (les diagrammes de Venn sont très peu utilisés en dehors de la classe de 2^{nde}). Sans ses justifications, ils ne sont pas considérés comme arguments de validation :

Professeur E : [...] « d'après l'arbre » je n'accepte pas [...] Et moi j'ai besoin de vérifier qu'ils ont bien compris, **j'ai envie qu'ils me disent que pour aller vers T, bah il y a deux chemins, et qu'ils me disent avec le bon vocabulaire** [...] Bah c'est la formule des probabilités totale, et ça marche bien **parce qu'on a une partition**, parce que, voilà, c'est ce que je veux. [...] je n'accepte pas qu'il [*arbre pondéré*] soit utilisé comme ça, brut, sans justification.

La dimension sémiotique est donc convoquée pour effectuer le travail de validation. Elle peut être utilisée ou non dans l'argumentaire de validation et ceci, quelque soit le niveau de classe. Nous constatons également que la dimension sémiotique est particulièrement mobilisée dans l'argumentaire de validation en classe de 3^e et 2^{nde}.

13.1.3 La place de la dimension instrumentale dans le travail de validation dans le domaine des probabilités

Les cinq professeurs interrogés attribuent aux logiciels utilisés dans le domaine des probabilités le statut d'outils technologiques pour conjecturer, vérifier, contrôler ou illustrer les résultats, pour construire la solution mais également pour multiplier le nombre d'expériences que l'on pourrait effectuer « à la main ». Ils leur donnent le même statut que celui des logiciels de géométrie dynamique.

Professeur B : Ils permettent **de construire la solution**.

Professeur C : Le logiciel lui-même **permet de multiplier le nombre d'expériences**.

Professeur D : Pareil, **une conjecture**. Donc on lance des dés, on simule [...] on regarde la somme et on conjecture [...] C'est formidable au lieu de lancer 250000 fois des dés, ça c'est sûr que c'est extrêmement pratique.

Professeur A : En probabilité, je vais choisir des situations où je vais utiliser la simulation avec le tableur **pour conjecturer**.

Ils affirment que les logiciels permettent uniquement de réaliser des validations « expérimentales » ou « visuelles ». D'où la nécessité d'effectuer une validation discursive afin de « prouver mathématiquement » les résultats fournis par l'expérience. En ce qui concerne la géométrie, les cinq professeurs ont la même démarche pour justifier ces résultats empiriques. Ils utilisent tous les théorèmes et les propriétés. Alors que dans le domaine des probabilités, chacun des professeurs justifie à sa manière le passage des résultats empiriques aux résultats théoriques, en particulier dans le cas de la simulation (signalons que les réponses des professeurs portent toutes sur l'usage des logiciels dans le cadre de la simulation à l'aide d'un tableur). Deux manières de justifier les résultats empiriques sont identifiées. L'une utilise la loi des grands nombres et les intervalles de fluctuation ou de confiance pour légitimer le passage des résultats empiriques aux résultats théoriques :

Professeur C : Le logiciel, lui-même, est là pour multiplier le nombre d'expériences qu'on ne pourrait pas faire à la main, ça prendrait trop de temps et après **on valide le résultat avec les intervalles de fluctuation ou de confiance, des choses comme ça. On met quand même des outils mathématiques autour**, et on ne prend pas la valeur telle quelle, on ne la

prend pas comme valeur exacte.[...] On utilise aussi la loi des grands nombres expérimentalement.

L'autre manière est d'utiliser l'arbre (des possibles ou pondéré) ou le tableau à double entrée pour légitimer le passage des résultats empiriques aux résultats théoriques. Ainsi, le passage entre ces deux formes de résultats est basé sur l'usage du tableau à double entrée pour dénombrer les cas favorables et les cas possibles :

Professeur B : Soit je leur ferai **un tableau à double entrée**, on compte le nombre de sommes qui donnent sept et sur le nombre de cas possibles [...].

Professeur D : Après on valide, on fait un tableau à double entrée, on compte les issues et on trouve la probabilité comme une espèce de fréquence limite. [...] Donc on va mettre premier dé d'un côté et deuxième dé de l'autre. On a fait 36 issues, il y en a qui avaient fait aussi un arbre avec 36 issues. Et là-dedans qu'est ce qui donne 3, bon bah là ils ont les calculs, et ils ont vu que en vrai, ce n'était pas la fréquence attendue qui devient la probabilité, ce n'était pas la fréquence observée, [...] mais quand on le fait plein plein de fois, ça se rapproche.

Ce passage entre les deux résultats est assuré par les arbres, moyens pour prouver les résultats empiriques.

Professeur D : Oui, moi j'essaie, je considère que **l'arbre est une preuve**.

En résumé, selon les professeurs, l'usage de la dimension instrumentale dans le travail de validation relatif au domaine des probabilités (pour n'importe quel niveau de classe) est très apprécié dans le contexte de découverte pour conjecturer (comme dans le domaine de la géométrie). Le résultat conjecturé est justifié soit par l'usage des outils théoriques tels que la loi des grands nombres avec, selon les niveaux de classe, les intervalles de fluctuation ou de confiance. Mais cela peut ne pas suffir pour les professeurs, qui envisagent également une justification par l'usage des outils sémiotiques. Nous retrouvons ainsi ce que nous avons constaté dans l'analyse des ETM_P idoines dans la troisième partie où certains professeurs (dans le traitement de la tâche du « segment et son milieu ») ont élaboré un raisonnement de type « diagrammatique » basé sur les outils sémiotiques pour prouver les résultats obtenus par la simulation.

13.2 Caractérisation du discours de validation dans l'ETM_P personnel du professeur

Dans cette section, nous présenterons les résultats relatifs au discours de validation. L'analyse des réponses des professeurs aux questions 4, 5 et 6 de la grille d'entretien met en relief les types d'arguments utilisés dans l'argumentaire de validation et la structure globale de l'argumentaire de validation.

13.2.1 Les types d'arguments utilisés

Plusieurs types d'arguments sont utilisés par les professeurs dans les argumentaires de validation relevant du domaine des probabilités.

- Les arguments sémiotiques prennent appui sur les outils sémiotiques tels que les arbres pondérés ou des possibles, et les tableaux à double entrée. Selon les professeurs interrogés, la construction de ces outils n'est pas justifiée en classes de 3^e et de 2^{nde}. Autrement dit, les garanties (qui ne sont pas elles-mêmes garanties) ne sont pas explicitées à ces deux niveaux de classe. Toutefois, ces outils sémiotiques sont acceptés dans l'argumentaire de validation. Mais à partir de la classe de 1^{re}S, les garanties doivent être explicitées et extraites du référentiel théorique, sinon les arguments sont rejetés.
- Les arguments formels sont formulés dans le langage naturel associé au vocabulaire probabiliste. Les garanties sont non seulement explicitées mais elles doivent être issues du référentiel théorique. Dans le cas contraire, les arguments sont incomplets. Ces arguments portent essentiellement sur l'usage des lois de probabilité telles que la loi binomiale et la loi normale qui sont utilisées uniquement à partir de la classe de 1^{re}S. Selon les propos des professeurs, les arguments formels sont mobilisés dans le contexte de justification et essentiellement à partir de la classe de 1^{re}S.
- Les arguments empirico-expérimentaux sont employés dans le contexte de découverte pour formuler des conjectures.

Professeur D : Non. Pareil une conjecture. Donc on lance des dés [*le professeur prend l'exemple du lancer de dés équilibrés à six faces pour illustrer sa réponse*], alors on simule je sais pas combien de lancers de dé, on regarde la somme, on conjecture. D'ailleurs, on voit la fluctuation [...]. Donc voilà, pour passer des statistiques aux probabilités, c'est vrai qu'on utilise ces outils-là, pour voir les fréquences, pour voir que ça se rapproche, pour voir plus l'échantillon est grand.

En particulier, ces arguments sont utilisés pour obtenir un résultat qui est connu *a priori* ou non. Selon les situations aléatoires étudiées, les arguments empirico-expérimentaux sont complétés avec l'usage de la loi des grands nombres. Ils peuvent également être complétés avec l'usage des intervalles de confiance ou de fluctuation :

Professeur A : Je vais choisir des situations où ils peuvent trouver la probabilité théorique. C'est d'ailleurs ce que j'ai fait cette année, trouver des situations où **on va conjecturer en faisant l'approche fréquentiste** et en mettant d'abord en commun. Donc si on fait d'abord l'expérience réelle, on manipule, etc. On va mettre en commun. On va se dire qu'on approche de quelque chose puis **on va multiplier le nombre d'expériences et approcher une proba théorique** [*sous-entendu on utilise la loi des grands nombres*]. Mais du coup, **on peut le faire dans les deux sens et on l'a fait dans les deux sens**.
 Professeur C : Le logiciel, lui-même, est là pour multiplier le nombre d'expériences qu'on ne peut pas faire à la main, ça prendrait trop de temps, et après **on valide le résultat avec les intervalles de fluctuation ou de confiance**.

D'après les déclarations des professeurs, les arguments sémiotiques sont employés dans les argumentaires de validation et font partie du discours de validation, notamment en classe de 3^e et de 2^{nde}. Concernant les arguments empirico-expérimentaux, les professeurs les utilisent pour conjecturer des résultats, vérifier les résultats connus *a priori*. En revanche, ces arguments ne font pas partie du discours de validation et ceci, quel que soit le niveau de classe. Signalons que nous avons également fait le même constat dans la troisième partie lorsque les professeurs font appel à un modèle probabiliste de type numérique pour traiter la tâche probabiliste.

En résumé, les professeurs interrogés utilisent les arguments sémiotiques, formels et empirico-expérimentaux dans le travail de validation pour construire l'argumentaire de validation. En revanche, dans le discours de validation, seul les arguments sémiotiques (en particulier en classe de 3^e et de 2^{nde}) et formels (dès la classe de 1^{re}S) sont inclus dans le discours de validation.

13.2.2 La structure globale de l'argumentaire de validation

L'analyse des réponses des professeurs obtenues à la deuxième partie de la grille d'entretien révèle l'existence d'une variété de *styles* d'argumentaires de validation adoptés par les cinq professeurs interrogés. Ces styles d'argumentaires caractérisent selon nous les formes de validation pratiquées dans les ETM_P idoines mis en œuvre par les cinq professeurs.

L'analyse des réponses révèle également que les styles d'argumentaire adoptés par les cinq professeurs sont distincts selon que l'argumentaire de validation est élaboré dans un modèle probabiliste de type analytique ou de type numérique. Ces styles d'argumentaires dépendent donc des modèles probabilistes utilisés pour traiter la tâche probabiliste. De plus, ces styles d'argumentaire semblent être différents selon que la validation s'adresse

aux classes de niveaux 3^e et 2^{nde} d'un côté, ou de 1^{re} S et Terminale S de l'autre côté.

1) Les styles adoptés par les professeurs dans le modèle probabiliste de type analytique

En classes de 3^e et de 2^{nde}, nous avons distingué trois styles d'argumentaire (notés Style 1, Style 2 et Style 3) utilisés dans la résolution de tâches probabilistes faisant intervenir un modèle probabiliste de type analytique. Ils sont constitués de plusieurs étapes que nous représentons ci-après :

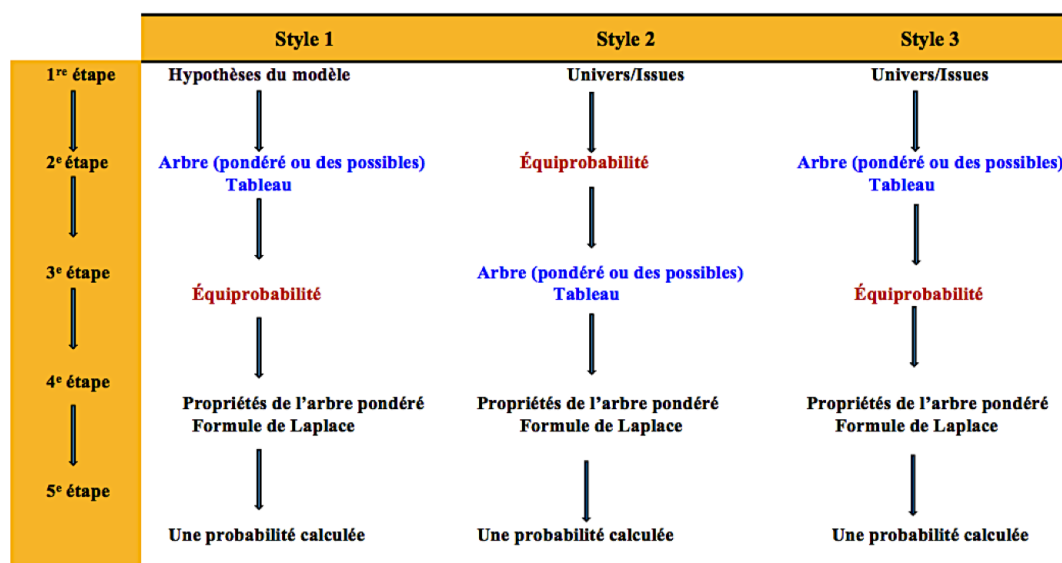


Fig. 13.2 – Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs en classes de 3^e et de 2^{nde}

Ces trois styles sont organisés en cinq étapes. Chacune d'elles suit un ordre précis. Dans la première étape, un professeur sur cinq propose de débiter l'argumentaire de validation par l'explicitation des hypothèses du modèle réel qui justifie par la suite le choix d'utiliser un arbre (pondéré ou des possibles) ou un tableau à double entrée. Selon ce professeur, c'est par ces hypothèses que la modélisation de la situation aléatoire par un tableau à double entrée ou par un arbre pondéré est légitimée. En général, ces hypothèses sont explicitées dans l'énoncé de la situation à l'aide d'expressions, comme par exemple « au hasard » ou « indiscernable au toucher » (dans le cas de tirages de boules dans une urne). Ces expressions sont très souvent employées comme des indices de l'hypothèse d'équiprobabilité. Une fois que l'arbre pondéré ou le tableau à double entrée est construit, le calcul de la probabilité de l'événement considéré est effectué respectivement par les propriétés liées à l'arbre pondéré ou par l'application de la formule de Laplace. Par contre, quatre professeurs sur cinq choisissent de débiter l'argumentaire de validation par l'explicitation des issues de l'expérience aléatoire étudiée afin de décrire l'univers de l'expérience aléatoire.

Dans la deuxième étape, un professeur sur cinq suggère d'expliciter l'hypothèse d'équiprobabilité avant de modéliser la situation aléatoire par un arbre (pondéré ou des possibles) ou un tableau à double entrée. Selon lui, c'est l'hypothèse d'équiprobabilité qui permet de construire l'arbre ou le tableau. Alors que quatre professeurs sur cinq placent la construction de l'arbre (pondéré ou des possibles) ou du tableau à double entrée avant l'hypothèse de l'équiprobabilité. La raison avancée pour ce choix est que c'est l'usage de la formule de Laplace pour déterminer la probabilité d'un événement qui nécessite la formulation de l'hypothèse de l'équiprobabilité.

Dans la troisième et la quatrième étape, les cinq professeurs appliquent ou les propriétés de l'arbre pondéré, ou la formule de Laplace (lorsque le tableau à double entrée ou un arbre des possibles sont utilisés) pour déterminer la probabilité d'un événement. Le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles sont obtenus à partir des arbres ou des tableaux.

L'analyse des réponses des professeurs a mis en exergue deux styles d'argumentaires (notés SP1 et SP2) adoptés par les professeurs pour les classes de 1^{re} S. Ces styles d'argumentaire se différencient par l'usage de l'arbre pondéré ou du tableau à double entrée ou l'usage des formules qui relèvent de la loi de probabilité utilisée. Ces styles d'argumentaire sont constitués de plusieurs étapes que nous présentons sous cette forme :

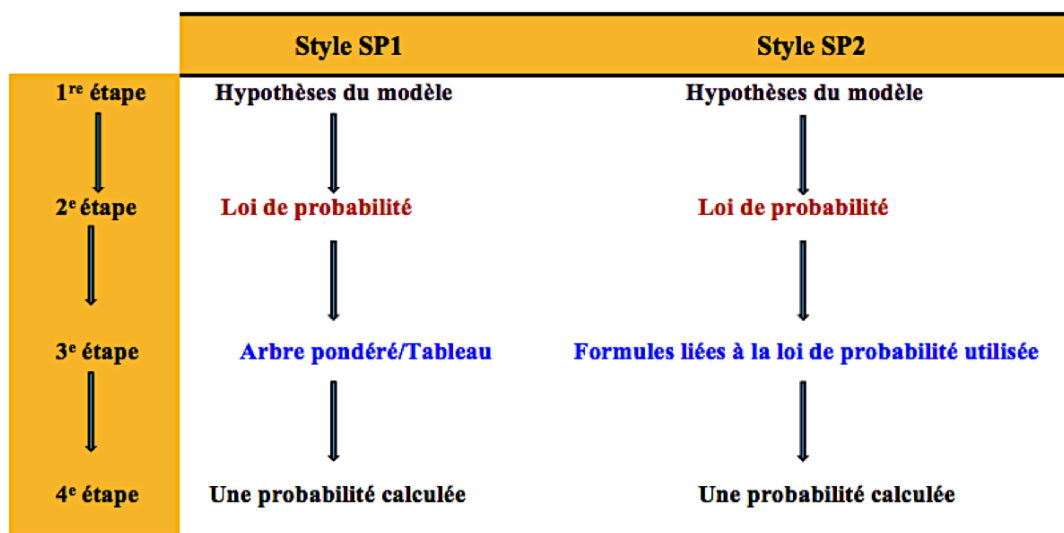


Fig. 13.3 – Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs en classe de première S

Dans ces deux styles d'argumentaires de validation, la première étape consiste à expliciter les hypothèses du modèle réel permettant par la suite de justifier le choix de la loi de probabilité pour effectuer les traitements probabilistes. Par exemple, dans le cas de l'utilisation du schéma de Bernoulli, les professeurs exigent des élèves la justification de

son utilisation. Cette justification est présentée sous la forme d'un discours écrit :

Professeur E : Je leur demande de me montrer qu'on a une épreuve de Bernoulli qui est répétée plusieurs fois, identique et indépendante, puis on a une variable aléatoire qui compte le nombre de succès et donc voilà, il y a trois phrases à faire. Il y a quand même un raisonnement phrasé.

Professeur D : En 1^{re} S, [...] je veux que là, si c'est une variable aléatoire je veux qu'ils (les élèves) me mettent ça un peu en forme, quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire [...] Pourquoi on est dans le schéma de Bernoulli. Effectivement, on apprend un petit peu à lire le texte, si on voit « indépendant », on sait. Mais bon après on explique pourquoi on est dans ce modèle-là.

La troisième étape de styles d'argumentaire SP1 et SP2 fait intervenir des outils différents. Dans le style d'argumentaire SP1, les arbres pondérés sont utilisés comme outils sémiotiques pour représenter la situation aléatoire et comme outils technologiques pour évaluer la probabilité d'un événement. Le style d'argumentaire SP2 fait appel aux formules intégrées dans la loi de probabilité utilisée.

En classe de Terminale S, les deux styles d'argumentaire (notés ST1 et ST2) adoptés par les professeurs et mis en évidence sont différents par rapport à l'emploi ou non de la calculatrice pour déterminer le résultat. En effet, en classe de Terminale S, les lois à densité (loi normale, loi exponentielle, loi uniforme) sont introduites. Habituellement, la loi normale est appliquée avec la calculatrice puisqu'à ce niveau de classe, il n'existe pas d'outils théoriques (liés au calcul intégral) permettant de calculer « à la main » la probabilité. Ces styles ST1 et ST2 sont composés de plusieurs étapes que nous présentons ci-après (cf. figure 13.4).

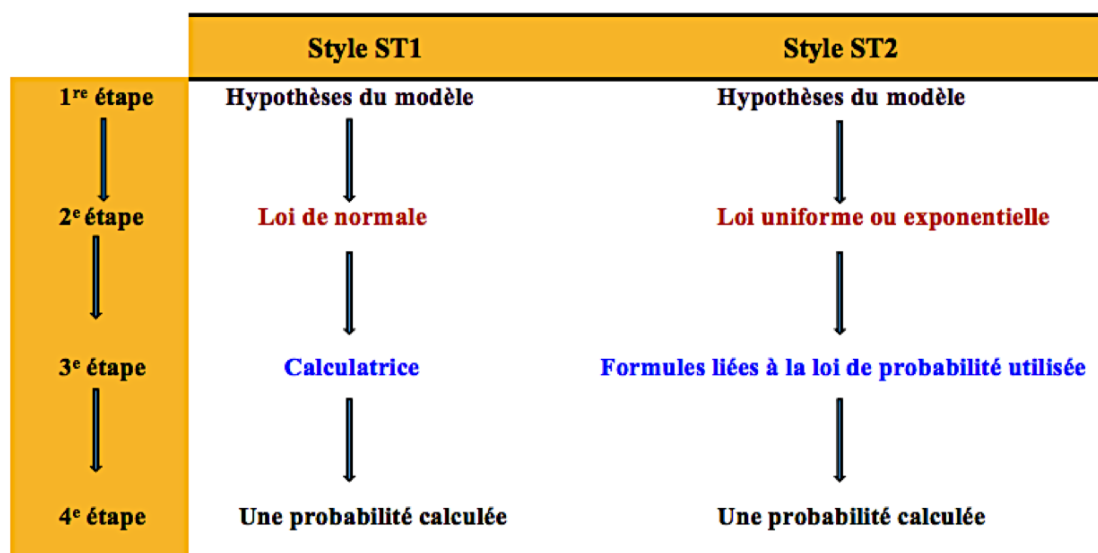


Fig. 13.4 – Les styles d’argumentaires de validation adoptés par les professeurs en classe de terminale S

Dans les deux styles d’argumentaires, la première étape consiste à formuler les hypothèses du modèle réel qui permettent de choisir une loi de probabilité. Dans la deuxième étape, il est question de choisir le modèle probabiliste, autrement dit une loi de probabilité parmi celles que nous avons citées précédemment. Selon la loi de probabilité choisie, les traitements probabilistes sont réalisés à l’aide d’outils théoriques tels que les formules propres à la loi de probabilité (cf. le style ST2), et qui font intervenir du calcul intégral. Les traitements probabilistes sont également pris en charge par la calculatrice (cf. le style ST1) lorsque la loi normale est choisie comme modèle probabiliste. Dans ce cas, l’usage des outils technologiques de la dimension instrumentale sont indispensables pour pouvoir implémenter le modèle de la loi normale en vue d’effectuer des calculs. L’usage des arbres pondérés dans la validation n’a pas été évoqué par les professeurs alors qu’il est officiellement reconnu par les documents institutionnels comme un outil de preuve à ce niveau de classe.

En conclusion, l’analyse des entretiens révèle que lorsque le modèle probabiliste de type analytique est choisi pour traiter la tâche probabiliste, les professeurs adoptent une variété de styles d’argumentaires pour les différents niveaux de classe (3^e, 2^{nde}, 1^{re} S et Terminale S). Les styles d’argumentaires adoptés par les professeurs pour les classes de 3^e et de 2^{nde} (Style 1, Style 2, Style 3) identifiés s’appuient tous sur l’usage d’outils sémiotiques tels que les arbres (pondéré et des possibles) ou les tableaux à double entrée. L’usage de ces outils est articulé avec l’application de la formule de Laplace pour évaluer la probabilité d’un événement. Ces styles d’argumentaires favorisent les raisonnements de type « diagrammatique » assistés par la formule de Laplace. Ces styles d’argumentaires

de validation sont selon nous caractéristiques des formes de validation pratiquées dans les traitements de tâches probabilistes faisant appel à un modèle probabiliste de type analytique au niveau des classes de 3^e et de 2^{nde}. Il semble que les styles d'argumentaires adoptés par les professeurs pour ces deux niveaux soient liés aux formes de validation identifiées chez les professeurs (en particulier, les professeurs A, B et C) dans l'analyse de la validation dans les ETM_P idoines dans la troisième partie de thèse. Ce lien porte sur l'usage des outils sémiotiques, de l'explicitation des hypothèses du modèle réel et de la formule de Laplace pour évaluer la probabilité. Toutefois, la description de l'univers de l'expérience aléatoire (correspondant à la première étape des Style 2 et Style 3) n'a pas été observée dans les formes de validation identifiées dans les ETM_P idoines.

En classe de 1^{re} S, l'un des styles d'argumentaires (SP1) identifié privilégie des raisonnements de type « diagrammatique » assisté par les formules liées à la loi de probabilité considérée pour les traitements probabilistes. L'autre style d'argumentaires (SP2) reconnu est fondé sur un raisonnement propre au modèle probabiliste (par exemple lorsqu'on choisit la loi binomiale) choisi. Ce style favorise donc l'usage des outils théoriques de la dimension discursive pour produire le discours de validation. Ces deux sortes de styles adoptés par les professeurs pour le niveau de 1^{re} S semblent avoir un lien avec les formes de validation utilisées par les professeurs (D et E) dans les ETM_P idoines — au niveau de la classe de 1^{re} S — analysés dans la troisième partie.

Enfin, en classe de Terminale S, deux styles d'argumentaire (ST1 et ST2) de validation sont mis en évidence. L'un prend appui sur le raisonnement propre au modèle probabiliste (dans le cas où les lois uniforme ou exponentielle sont utilisées). Ce style d'argumentaire favorise particulièrement l'usage des outils théoriques pour produire le discours de validation. Ce style a, selon nous, un lien avec la forme de validation observée dans l'ETM_P idoine de la classe de Terminale avec le professeur B (cf. l'analyse de la tâche de « la rencontre », troisième partie). Dans l'autre style d'argumentaire, bien que le modèle probabiliste choisi soit de type analytique (la loi normale), le traitement calculatoire est pris en charge par la calculatrice. Ce style d'argumentaire est alors basé sur un raisonnement propre au modèle probabiliste choisi et assisté par les outils technologiques de la dimension instrumentale.

Nous avons donc des styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs pour différents niveaux de classe dans le cas d'un traitement à l'aide d'un modèle probabiliste de type analytique. Ces styles d'argumentaires impliquent *a priori* un travail de validation dirigé par le paradigme P1 articulé avec P2 ou par le paradigme P2 au sein des plans [Sem-Dis], [Ins-Dis] ou clos sur la dimension discursive. Ces styles d'argumentaire adoptés par les professeurs interrogés semblent influencer les formes de validation utilisées par les professeurs dans leur classe.

2) Le style adopté par les professeurs dans le modèle probabiliste de type numérique

Lorsque les professeurs sont confrontés à des tâches faisant appel au modèle probabiliste de type numérique, ils adoptent deux styles d'argumentaires de validation (notés SN1 et SN2). Ces styles d'argumentaires comportent plusieurs étapes que nous présentons sous cette forme :

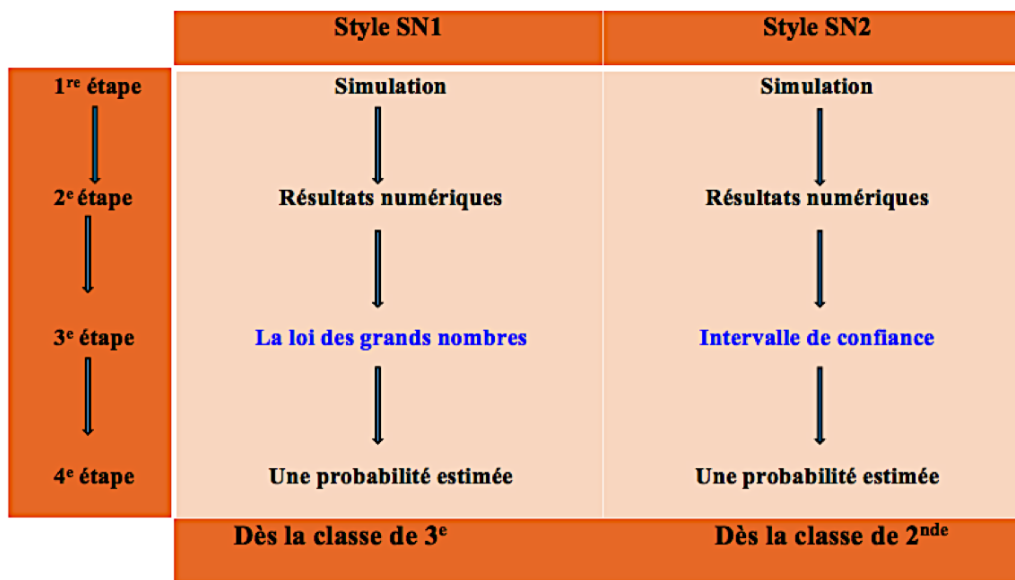


Fig. 13.5 – Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs à partir de la classe de 3^e

Dans les deux styles d'argumentaires, le point de départ est la simulation de l'expérience aléatoire. Celle-ci fournit des résultats numériques qui font partie du domaine de la statistique descriptive. Par la suite, les professeurs suggèrent d'utiliser la loi des grands nombres afin d'estimer la valeur de la probabilité de l'événement cherchée. Pour obtenir une valeur un peu plus précise de cette probabilité, un professeur parmi les cinq suggère clairement d'utiliser les intervalles de confiance. Ces deux styles d'argumentaires se distinguent donc par la troisième étape où l'estimation de la probabilité est effectuée *via* la loi des grands nombres dès la classe de 3^e, ou par l'intervalle de confiance dès la classe de 2nde.

Dans les deux cas, l'estimation de la probabilité requiert un ou deux changements de domaine :

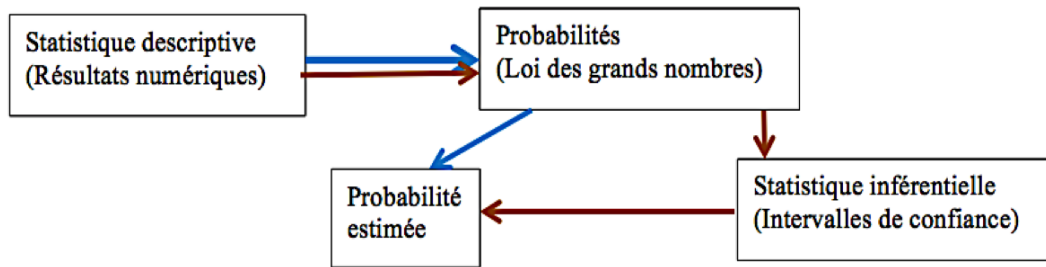


Fig. 13.6 – Les changements de domaines produits dans les styles d'argumentaire adoptés par les professeurs

Dans ces deux styles, nous devons tout de même apporter une précision : il s'agit d'une étape que n'avons pas insérée dans les deux schémas de style d'argumentaire présentés ci-dessus. En effet, il existe une différence en ce qui concerne la justification des résultats empiriques. Nous avons constaté qu'un seul professeur sur les cinq interrogés considère que la loi des grands nombres ou les intervalles de confiance (ou les intervalles de fluctuation) suffisent pour justifier. Alors que les quatre autres professeurs considèrent que les résultats estimés par les outils théoriques cités ci-dessus ne suffisent pas et qu'il est nécessaire de recourir aux outils sémiotiques (tels que les arbres ou les tableaux) ou aux outils théoriques. En revanche, le cas où les outils sémiotiques ne peuvent pas être utilisés (ou ne sont pas adéquats) ou le cas où les outils théoriques ne sont pas disponibles dans le référentiel théorique n'ont pas été évoqués par les professeurs. Cela suppose que les professeurs interrogés utilisent davantage des situations aléatoires dans lesquelles les probabilités estimées peuvent être justifiées à l'aide des outils des dimensions sémiotique ou discursive.

Dans le cas où le modèle probabiliste choisi est de type numérique et mis en œuvre à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur), nous avons identifié deux sortes de styles d'argumentaires (SN1 et SN2) adoptés par les professeurs pour les différents niveaux de classes de 3^e, 2^{nde}, 1^{re} et Terminale S. Ces styles d'argumentaires adoptés par les professeurs favorisent un travail de validation dirigé par le paradigme P1 articulé avec P2 au sein du plan [Ins-Dis], qui peut cependant basculer dans le plan [Sem-Dis] ou être orienté vers la dimension discursive.

Soulignons toutefois une corrélation entre le style d'argumentaire SN1 et les formes de validation identifiées chez les professeurs (A et C) dans l'analyse du travail de validation dans les ETM_P idoines (cf. l'analyse de l'ETM_P idoine de la classe de 3^e A et 2^{nde} C, troisième partie).

Chapitre 14

Interprétation et discussion des résultats

Nous allons croiser les différents résultats obtenus dans le chapitre précédent, afin de les discuter.

Nous discuterons d'abord du rôle de chacune des dimensions sémiotique et instrumentale dans le fonctionnement de la genèse discursive au début et en cours d'apprentissage du domaine des probabilités au niveau du secondaire. Cela nous permet d'obtenir des éléments caractéristiques du travail de validation mis en œuvre. Par la suite, nous discuterons des styles d'argumentaire de validation adoptés par les professeurs pour résoudre des tâches probabilistes afin d'identifier des éléments caractéristiques du discours de validation pratiqué dans l'enseignement des probabilités.

14.1 Le rôle des dimensions sémiotique et instrumentale dans le fonctionnement de la genèse discursive

14.1.1 Dimension sémiotique et genèse discursive

Tout d'abord, les résultats obtenus mettent clairement en évidence l'impact du niveau de développement du référentiel sur le travail de validation, en particulier dans le travail discursif de la validation. Le référentiel théorique a un rôle important dans la validation au sein de l'ETM_P personnel des professeurs. La non-disponibilité d'outils théoriques, quand le référentiel théorique est à l'état « lacunaire », complexifie la gestion du travail de validation pour le professeur. Nous avons noté que lorsque le référentiel est à l'état « lacunaire », les professeurs éprouvent le besoin de faire appel aux outils de la dimension sémiotique pour effectuer le travail de validation dans le contexte de justification, allant parfois jusqu'à considérer ces outils sémiotiques (arbres et tableaux) comme des outils théoriques du référentiel afin de produire un argumentaire de validation « institutionna-

lisible » dans les classes de 3^e et de 2^{nde}. Ainsi, les outils sémiotiques tels que les arbres et les tableaux sont utilisés pour représenter les situations aléatoires, effectuer des calculs probabilistes ou du dénombrement, mais aussi pour justifier les résultats. Les arbres et les tableaux acquièrent ainsi le statut d'outils mathématiques (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). Nous pouvons assimiler cette pratique du travail de validation chez ces professeurs à une question de survie de la validation. On cherche à combler le vide du référentiel en l'alimentant d'éléments provenant d'une autre dimension que la dimension discursive.

Lorsque le niveau de développement du référentiel théorique atteint son état complet, ce besoin de la dimension sémiotique semble s'atténuer. Les professeurs font alors appel aux nouveaux outils théoriques qui résident désormais dans le référentiel théorique. Ces outils théoriques permettent le fonctionnement de la genèse discursive sans « presque » se référer à la dimension sémiotique. Ils contribuent à bâtir des arguments dont les garanties sont issues du référentiel. Notons par ailleurs, que cette pratique du travail de validation mise en évidence par nos analyses est conforme aux attentes institutionnelles pour les quatre niveaux de classes de 3^e, 2^{nde}, 1^{re} S et Term S.

En conclusion, les résultats mettent en évidence que la genèse discursive a pour source principale la dimension sémiotique dans les deux premières années de l'enseignement du domaine des probabilités. Au delà, c'est le référentiel théorique qui prend le relais en alimentant la genèse discursive, bien que la dimension sémiotique continue d'être sollicitée dans l'élaboration du travail de validation.

14.1.2 Dimension instrumentale et genèse discursive

Dans le cas où le modèle probabiliste choisi est de type numérique, si la dimension instrumentale est appréciée par les professeurs pour découvrir un résultat ou pour le conjecturer, elle est cependant exclue du discours de validation, dès lors qu'elle ne contribue qu'à produire des arguments empirico-expérimentaux. Les professeurs considèrent que ces arguments ne peuvent pas être intégrés à l'argumentaire de validation et au discours de validation. Les raisons avancées par les professeurs portent sur le fait que les garanties de ces arguments ne sont pas des éléments du référentiel théorique. La dimension instrumentale est alors utilisée uniquement dans le contexte de la découverte. Par ailleurs, lorsque le modèle probabiliste de type numérique est choisi pour mettre en place la simulation (à l'aide de la calculatrice ou d'un ordinateur) d'une expérience aléatoire, la dimension instrumentale est alors favorisée par les professeurs pour construire une solution qui sera par la suite validée à l'aide d'outils théoriques issus du domaine des probabilités telle que la loi des grands nombres, ou d'outils théoriques tels que les intervalles de confiance is-

sus du sous-domaine de la statistique inférentielle. Ainsi, l'argumentaire de validation est fondé sur des arguments de type empirico-expérimentaux associés aux outils théoriques issus du domaine des probabilités ou de celui de la statistique. Un tel usage de la dimension instrumentale est recommandé par les documents institutionnels. Un autre usage de la dimension instrumentale que nous avons constaté dans l'analyse des ETM_P, que nous n'avons pas retrouvés dans les déclarations des professeurs interrogés, fait appel au modèle probabiliste de type numérique lorsque le modèle probabiliste de type analytique n'est pas disponible dans le référentiel théorique (cf. la tâche de la politique nataliste en classe de 2^{nde}). Nous avons constaté que pour assurer le travail de validation, l'argumentaire de validation est élaboré grâce aux outils technologiques de la dimension instrumentale. Celle-ci vient alors alimenter la genèse discursive afin de produire le discours de validation.

14.2 Caractérisation du discours de validation pratiqué par les professeurs

Rappelons que le discours de validation, tel que nous l'avons défini, est un argumentaire de validation constitué d'un certain nombre d'arguments de différents types (formel, sémiotique, empirico-expérimentaux). Les argumentaires de validation sont caractérisés non seulement par le(s) type(s) d'argument(s) mobilisé(s) mais aussi par la manière dont ils sont enchaînés au sein de l'argumentaire. Ces caractéristiques définissent la structure globale de l'argumentaire de validation. Ces caractéristiques de l'argumentaire de validation sont des éléments qui contribuent selon nous à la caractérisation de la validation et aux formes qui lui sont associées dans l'enseignement des probabilités. Nos analyses des réponses des professeurs interrogés mettent en relief une variété de styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs du secondaire, qui nous renseignent sur les formes de validation institutionnalisées dans l'enseignement des probabilités. Ces styles d'argumentaires se distinguent principalement par les arguments qu'ils mobilisent, le modèle probabiliste choisi pour traiter la tâche et pour certains d'entre eux, par le niveau de classe considéré.

14.2.1 Les arguments mobilisés dans les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs

Il existe plusieurs arguments mobilisés dans les styles d'argumentaire de validation selon le modèle probabiliste choisi pour traiter une situation aléatoire. Dans le cas d'une validation utilisant un modèle probabiliste de type analytique. L'analyse des styles — Style 1, Style 2 et Style 3 — montre que les professeurs favorisent largement l'usage des arguments sémiotiques fondés sur les outils sémiotiques (arbres pondérés,

arbres des possibles, tableaux à double entrée), afin de nourrir les argumentaires de validation produits dans les classes de 3^e et de 2^{nde}. En classe de 1^{re} S et de Terminale S, les professeurs favorisent l'usage des arguments formels qui s'appuient sur les outils du référentiel théorique ; car l'état du développement du référentiel théorique à ces niveaux de classe le permet. Ces arguments formels sont à la base de raisonnements propres au modèle probabiliste dans lequel est effectué le traitement calculatoire. Toutefois, l'usage des arguments sémiotiques dans l'argumentaire de validation est envisagé et le plus souvent accepté par les professeurs à ces niveaux de classe.

Dans le cas d'une validation utilisant un modèle probabiliste de type numérique, pour n'importe quel niveau de classe, les arguments empirico-expérimentaux sont mobilisés dans le travail de validation dans le contexte de découverte. Ces arguments sont obligatoirement articulés avec des outils théoriques, comme la loi des grands nombres ou les intervalles de confiance, dans l'argumentaire de validation. Nous avons alors des argumentaires qui sont qualifié, de « convenables » (par les professeurs).

Nous pouvons ainsi caractériser deux types d'argumentaires de validation en fonction du modèle probabiliste choisi. Visiblement, ces argumentaires sont différents à cause du niveau de développement du référentiel qui alimente le discours de validation. Quand l'état du développement du référentiel est au stade « lacunaire », les professeurs tentent de combler ces lacunes en se référant aux outils de la dimension sémiotique. Ils donnent par la suite à ces outils sémiotiques un nouveau statut, celui d'outils théoriques. Ils peuvent également s'appuyer sur les outils technologique de la dimension instrumentale, articulés avec les outils issus du référentiel théorique de l'espace de travail probabiliste ou de la statistique.

14.2.2 Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs

Une variété de styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs sont mis en évidence. Ces styles d'argumentaires dépendent du modèle probabiliste choisi et du niveau de classe. Lorsque le modèle probabiliste de type analytique est choisi, les styles d'argumentaires adoptés (Style 1, Style 2, Style 3, SP1) par les professeurs pour les classes de 3^e, 2^{nde} et 1^{re} sont caractérisés par l'usage des outils sémiotiques pour bâtir les argumentaires de validation. Les outils sémiotiques sont aussi présents dans le discours de validation. Ces styles d'argumentaires favorisent alors les formes de validation basées essentiellement sur les outils sémiotiques. D'autre styles d'argumentaire adoptés (SP2, ST1, ST2) par les professeurs sont caractérisés par l'usage des outils théoriques de l'espace de travail pour bâtir les argumentaires et le discours de validation. Ces styles d'argumentaires favorisent les formes de validation basées sur les outils de la dimension

discursive.

Lorsque le modèle probabiliste de type numérique est utilisé, deux styles d'argumentaires (**SN1** et **SN2**) adoptés par les professeurs sont révélés. Ces styles d'argumentaire sont caractérisés par l'usage de la simulation informatique pour produire des résultats empiriques. Le passage des résultats empiriques à l'estimation des résultats probabilistes est garanti par les outils théoriques tels que la loi des grands nombres ou les intervalles de confiance. Il en résulte que ces deux styles d'argumentaires favorisent les formes de validation fondées sur des outils technologiques assistés par les outils théoriques, issus du domaine de probabilités ou de la statistique.

14.3 Caractérisation des formes de validation

Les deux dimensions sémiotique et instrumentale sont sollicitées au début de l'apprentissage des probabilités au niveau secondaire. Ces dimensions permettent d'assurer le travail de validation dans le contexte de découverte. En revanche, dans le contexte de justification, la dimension sémiotique permet à la genèse discursive de fonctionner afin de produire le discours de validation. La dimension sémiotique est donc une sorte de source principale de la genèse discursive qui est alors décalée de l'axe discursif vers le plan $[Sem - Dis]$. Or, dans le cas où la dimension sémiotique ne peut pas assurer le travail de validation (dans les situations aléatoires nécessitant d'effectuer des simulations d'échantillons de grandes tailles), alors la dimension instrumentale est sollicitée pour permettre à la genèse discursive de fonctionner et ceci, quelque soit le niveau de classe.

Bien que l'usage des dimensions sémiotique et instrumentale perdure dans le travail de validation, celles-ci n'ont cependant pas la même place à partir de la classe de 1^{re} S. En effet, à partir de la 1^{re} S, le référentiel théorique se développe en termes de nouveaux outils théoriques provoquant un usage moins important de la dimension sémiotique. Ce n'est pas le cas pour la dimension instrumentale qui, quelque soit le niveau de classe et quelque soit l'état de développement du référentiel théorique, est sollicitée pour conjecturer un résultat ou le vérifier empiriquement dans le contexte de découverte. Parfois, les outils technologiques de la dimension instrumentale sont associés aux outils théoriques pour élaborer le travail de validation et produire ainsi le discours de validation. En classe de 3^e et de 2^{nde}, le référentiel théorique de l'espace de travail mathématique est constitué d'outils théoriques issus du domaine des probabilités (La formule de Laplace, l'équiprobabilité, etc.), mais aussi d'outils issus de la dimension sémiotique (les arbres et les tableaux). Les outils issus de la dimension instrumentale ne sont pas intégrés dans le référentiel théorique mais leur usage est combiné avec des outils théoriques issus du domaine des probabilités (la loi des grands nombres) et de la statistique (les intervalles de confiance).

Dès la classe de 1^{re} S, le référentiel théorique est plus alimenté par des outils théoriques

tels que les lois de probabilités et leurs formules, issus du domaine des probabilités. L'état de développement du référentiel évolue et devient de fait moins dépendant des dimensions sémiotique et instrumentale.

Du point de vue de la caractérisation du discours de validation, les styles d'argumentaires adoptés par les professeurs se distinguent par le choix du modèle probabiliste pour effectuer les traitements et l'usage des outils sémiotiques, technologiques ou théoriques. Ces styles d'argumentaires dépendent du niveau de classe auxquels ils sont destinés. Les styles d'argumentaires adoptés par les professeurs caractérisent les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités dans les différents niveaux de classe pris en compte dans notre étude. Ces formes de validation sont alors caractérisées par le niveau de développement du référentiel théorique et par le rôle des dimensions sémiotique et instrumentale et leurs articulations avec la genèse discursive dans le travail de validation. Mais elles sont également caractérisées par les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs. Dans le tableau ci-dessous nous avons synthétisé cette caractérisation des formes de validation :

	Modèle probabiliste de type analytique	Modèle probabiliste de type analytique	Modèle probabiliste de type numérique
Classes	3 ^e et 2 ^{nde}	1 ^{re} S et Term S	Les quatre niveaux de classes
Niveau de développement du référentiel	Lacunaire	Complet	Lacunaire/Complet
Source principale qui alimente la genèse discursive	Dimension sémiotique Dimension instrumentale	Référentiel théorique	Dimension instrumentale
Styles de validation adoptés par les professeurs	S1, S2 ou S3	SP1/SP2 ou ST1/ST2	SN1/SN2

TABLE 14.1 – Les caractéristiques de la validation dans le secondaire

Conclusion de la quatrième partie

Cette quatrième partie avait pour objectif d'apporter des éléments de réponse à la question **Q3** qui porte sur l'opinion des professeurs concernant la validation dans l'enseignement secondaire. Nous avons mené une enquête sous forme d'entretiens auprès de cinq professeurs. Les conclusions de cette enquête ont révélé trois points qui nous paraissent importants dans la caractérisation de la validation dans l'ETM_P personnel des enseignants.

1) *Le rôle du référentiel théorique dans l'élaboration du discours de validation.*

Au début de l'enseignement et de l'apprentissage du domaine des probabilités, le référentiel est en cours de construction et de ce fait, il ne peut pas assurer complètement la mission de fournir des éléments théoriques pour bâtir le discours de validation. Mais à partir de la classe de 1^{re}S, le référentiel évolue et permet de produire un discours de validation fondé sur des outils théoriques.

2) *Le rôle des dimensions sémiotique et instrumentale dans le travail et dans le discours de validation.*

Le rôle joué par les dimensions sémiotique et instrumentale dans le travail de validation se définit en fonction du niveau de développement du référentiel théorique. Ainsi, lorsque celui-ci est à l'état « lacunaire » en classes de 3^e et de 2^{nde}, les dimensions sémiotique et instrumentale sont au cœur du travail de validation. Dès la classe de 1^{re} S, les dimensions sémiotique et instrumentale restent pertinentes pour effectuer le travail de validation mais elles n'ont pas la même importance dans ce travail. En ce qui concerne le discours de validation au début de l'apprentissage, la dimension sémiotique assure en partie le fonctionnement de la genèse discursive et est intégrée dans le discours de validation. Dans ce cas les outils sémiotiques (arbres et tableaux à double entrée) sont considérés en tant qu'outils théoriques et acquièrent le statut d'outils mathématiques¹ (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016), ce qui n'est plus le cas lorsque le référentiel théorique est à l'état « complet ». En effet, à l'état « complet », le référentiel théorique est suffisamment développé en matière d'outils théoriques. De ce fait, la dimension sémiotique n'a plus les mêmes fonctions que dans le cas où le niveau de développement du référentiel est à l'état

1. Un outil mathématique est à la fois un outil sémiotique, technologique et théorique.

« lacunaire ». Nous avons alors une évolution du rôle de la dimension sémiotique dans le discours de validation entre les classes de 2^{nde} et de 1^{re} S.

3) *Selon le niveau de classe considéré, différents styles d'argumentaires de validation sont adoptés par les professeurs.*

Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs sont distincts selon les niveaux de classes et selon le modèle probabiliste (analytique ou numérique) choisi. Si le modèle probabiliste de type analytique est mobilisé, alors nous avons des styles d'argumentaires qui privilégient les formes de validation basées essentiellement sur les outils sémiotiques. Ces formes de validation sont pratiquées essentiellement en classe de 3^e et de 2^{nde}. Dans les classes de 1^{re} et de Terminale S, on retrouve de nouveaux styles d'argumentaires qui privilégient les formes de validation faisant intervenir essentiellement les outils de la dimension discursive. Dans le cas où le modèle probabiliste de type numérique est mobilisé, les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs favorisent les formes de validation qui prennent appui sur les outils technologiques de la dimension instrumentale, articulés avec les outils théoriques issus du domaine des probabilités ou du domaine de la statistique.

En conséquence, les styles d'argumentaires de validation identifiés chez les professeurs nous renseignent sur les formes de validation institutionnalisées dans les ETM_P idoines. Nous en déduisons qu'il existe plusieurs formes de validation utilisées selon les niveaux de classe et le modèle probabiliste mobilisé. Pour les classes de 3^e et de 2^{nde}, nous avons des formes qui sont exclusivement basées sur les outils sémiotiques et qui sont pratiquées dans le cas d'un modèle d'équiprobabilité, avec utilisation ou non de la formule de Laplace. Ces formes de validation sont similaires à celles identifiées dans les ETM_P idoines en classe de 3^e et de 2^{nde} dans la troisième partie de cette thèse. Pour les classes de 1^{re} S et de Terminale S, nous avons une nouvelle forme qui s'appuie sur les outils théoriques (les lois de probabilité) du référentiel théorique. Dans le cas de l'utilisation du modèle numérique, les formes de validation présentent de la 3^e jusqu'à la Terminale S sont similaires, mais elles présentent une différence portant sur l'outil théorique utilisé pour justifier le résultat obtenu *via* la simulation.

Ces trois points caractéristiques de la validation dans l'ETM_P personnel des enseignants nous permettent de déduire que la validation dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire dépend de la représentation que les enseignants se font de la validation dans le domaine des probabilités. On peut en conclure que notre hypothèse **H3** est vérifiée.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Nous allons à présent revenir sur nos questions de recherche et présenter les résultats obtenus et nos éléments de réponse. Nous élargirons notre réflexion en développant les nouvelles questions que nous inspirent ces résultats.

NOTRE RECHERCHE SUR LA VALIDATION MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS EN FIN DE SCOLARITÉ OBLIGATOIRE

Notre recherche porte sur le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classe de 3^e et de 2^{nde}. Nous avons adopté le modèle des espaces de travail mathématique pour étudier le travail de validation et mettre en relief les caractéristiques de la validation dans l'enseignement des probabilités. Nous avons alors mené trois sortes d'enquêtes. Chacune d'elles avait pour but de répondre à l'une des questions de recherche suivantes :

Q1 : Existe-t-il des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} ?

Q2a : Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^e et en classe de 2^{nde} ?

Q2b : Les formes de validation observées dans les classes de 3^e et de 2^{nde} sont-elles propres à ces deux niveaux de classe où sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau secondaire ?

Q3 : Quels sont les points de vue de l'enseignant sur la forme de la validation dans l'enseignement des probabilités ?

Ces questions avaient pour objectif de nourrir la question de recherche concernant le statut de la validation :

QR : Quel est le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^e et de 2^{nde} ?

Les réponses obtenues à la première question (Q1) résultent d'une enquête descriptive et exploratoire sur les pratiques de la validation dans le domaine des probabilités en comparaison avec les pratiques de la validation dans le domaine de la géométrie. Cette comparaison s'est effectuée du point de vue des documents officiels, mais aussi de celui des pratiques de la validation dans les classes de 3^e et 2^{nde}. Les conclusions de cette enquête indiquent l'existence de différences entre les formes de validation dans le domaine de la géométrie et celui des probabilités. Ces différences résultent d'une invariance du travail de validation dans l'ETM_G par rapport à l'ETM_P. Ces différences relèvent du rôle du référentiel théorique et de la place de la dimension sémiotique dans le travail de validation. En effet, le référentiel théorique de l'ETM_G est plus substantiel et permet de bâtir un discours de preuve basé sur des outils théoriques et sur le raisonnement déductif. En revanche, le référentiel théorique de l'ETM_P est en plein développement. L'élaboration du discours de preuve nécessite le recours aux outils de la dimension sémiotique. Le discours de preuve est alors constitué des outils sémiotiques tels que les arbres ou les tableaux et est fondé sur un raisonnement de type « diagrammatique ».

En clair, ces différences relèvent du rôle du référentiel théorique et de la dimension sémiotique dans le travail de validation au sein l'ETM_P ainsi que de la place de la dimension sémiotique dans le discours de validation. Ces deux éléments de différences observées font partie des éléments caractéristiques de la validation dans l'enseignement des probabilités que nous avons retrouvés dans les résultats obtenus dans la deuxième et la troisième enquête.

Les réponses obtenues aux deux sous-questions (Q2a) et (Q2b) découlent d'une deuxième enquête dans le cadre de laquelle nous avons sélectionné des tâches probabilistes à l'aide de l'outil méthodologique construit pour les besoins de cette enquête. Ces tâches ont été mises en œuvre dans les niveaux de classes allant de la 3^e à la Terminale S. Elles mettent en jeu la modélisation qui est une des spécificités du domaine des probabilités. L'objectif de la mise en œuvre de ces tâches était d'évaluer l'influence de la catégorie des tâches sur le travail de validation et sur les formes de validation privilégiées par le professeur dans le domaine des probabilités en fonction du niveau de classe. Les résultats de cette enquête révèlent une corrélation entre la catégorie de la tâche et les formes de validation observées dans les classes de 3^e à Terminale S. Ces formes de validation privilégiées dans chacun des niveaux d'enseignement dépendent du modèle probabiliste (analytique ou numérique) choisi pour traiter les situations aléatoires. Elles se caractérisent par la place de

la dimension sémiotique et de la dimension instrumentale dans le discours de validation. Notre choix d'étendre l'étude de la validation dans les classes de 1^{re} S et Terminale S nous a permis d'identifier les formes de validation privilégiées en fin de la scolarité obligatoire. Cette caractérisation des formes de validation est confirmée par les résultats de la troisième enquête.

Notre quête de la caractérisation de la validation dans le domaine des probabilités nous a conduit à interroger le point de vue que l'enseignant se fait de la validation. C'est par une enquête sous forme d'entretiens avec des enseignants du secondaire que nous avons tenté de répondre à la question Q3. Les résultats obtenus à partir de ces entretiens montrent que les formes de validation institutionnalisées dans les classes dépendent du point de vue que le professeur se fait de la validation dans l'enseignement des probabilités. Ces résultats mettent en relief différents styles d'argumentaires de validation probabilistes adoptés par le professeur selon le niveau de classe considéré. Ces styles sont selon nous des caractéristiques de la validation et des formes de validation associées dans l'enseignement des probabilités. Ces résultats nous ont d'ailleurs aidé à compléter les autres résultats obtenus dans les deux premières parties, notamment sur le rôle du référentiel et la place des deux dimensions, sémiotique et instrumentale, dans l'élaboration du travail de validation lié à l'exécution d'une tâche.

CARACTERISATION DE LA VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES EN FIN DE SCOLARITE OBLIGATOIRE

De ces trois enquêtes, nous pouvons dégager les caractéristiques principales de la validation en probabilités en fin de scolarité obligatoire.

Le rôle du référentiel théorique dans le travail de validation et son influence sur les formes de validation

L'invariance du travail de validation notée en géométrie par rapport aux probabilités s'explique par le fait qu'en fin de scolarité obligatoire, il existe déjà une très forte rhétorique du discours de validation installée dans le travail de validation géométrique. Cette rhétorique est permise par une genèse discursive développée sur un référentiel théorique suffisamment riche en termes de propriétés et de théorèmes, et sur une pratique standardisée du discours de validation. Alors qu'en probabilités, la genèse discursive est en émergence dans les deux niveaux d'enseignements de 3^e et de 2^{nde}, le référentiel théorique est en cours de construction et la pratique du discours de validation est en cours d'évolution. Nous avons donc un développement tardif de la genèse discursive dans le domaine des probabilités par rapport à celui de la géométrie, dû à l'introduction tardive du domaine des probabilités dans les programmes scolaires français.

Le rôle de la dimension sémiotique dans le travail de validation et son influence sur les formes de validation

Les outils sémiotiques (les arbres pondérés ou des possibles, les tableaux à double entrée) sont utilisés, au même titre que les figures en géométrie, en fin de scolarité obligatoire pas seulement comme des variétés de représentations sémiotiques, mais aussi comme des registres de représentation sémiotique dans lesquels des traitements mathématiques sont permis. Notre conclusion sur l'usage des outils sémiotiques rejoint celle de Parzysz (2011) :

« le domaine des statistiques et des probabilités met en jeu des représentations variées qui constituent non seulement des illustrations des situations étudiées, mais surtout peuvent à l'instar des dessins en géométrie devenir des outils de résolution des problèmes, à condition de les munir de règles leur conférant un caractère opératoire. Cette variété pose, de façon peut-être plus cruciale qu'en géométrie, non seulement la question de la traduction de la situation (concrète ou pseudo-concrète) dans la théorie, mais aussi la double question du traitement (transformation au sein d'un registre donné) et de la conversion (passage d'un registre à un autre) (Duval, 1995) » (Parzysz, 2011, pp. 138-139).

Nous avons également constaté qu'en fin de scolarité obligatoire, les outils sémiotiques (arbres et tableaux) sont intégrés dans les formes de validation pratiquées en qualité d'outils technologique et théorique. Ainsi, les arbres et les tableaux, à la différence des figures dans l'enseignement de la géométrie en France, sont des outils mathématiques intégrés dans le discours écrit de la validation. Ces outils mathématiques permettent de traduire une situation aléatoire dans le modèle choisi, d'effectuer des traitements probabilistes donnant lieu à un raisonnement de type « diagrammatique », mais aussi de prouver les résultats obtenus par les traitements probabilistes. C'est pourquoi nous pensons qu'en fin de scolarité obligatoire, le rôle des registres de représentation sémiotique dans la validation n'est pas le même dans le domaine des probabilités et dans le domaine de la géométrie. Cette place accordée aux registres de représentation sémiotique est un des éléments caractéristiques de la validation dans l'enseignement des probabilités en fin de scolarité obligatoire.

Le rôle de la dimension instrumentale dans le travail de validation et son influence sur les formes de validation

La dimension instrumentale joue un rôle important dans le travail de validation lorsque la résolution d'une situation aléatoire nécessite l'usage (ou la construction) d'un modèle probabiliste de type numérique avec la simulation. Dans ce cas, la dimension instrumentale a pour fonction principale de construire une solution qui est formulée dans le domaine de

la statistique (la fréquence du phénomène aléatoire observée). Son interprétation dans le domaine des probabilités nécessite le recours à la loi des grands nombres qui est un outil théorique du référentiel de l'espace de travail probabiliste, ou le recours à l'intervalle de confiance qui est un outil théorique issu du domaine de la statistique (inférentielle). La dimension instrumentale n'apparaît pas directement dans le discours écrit de la validation. D'un autre côté, la dimension instrumentale peut être une alternative pour effectuer le « bon » travail de validation lorsque le modèle probabiliste de type analytique n'est pas disponible dans le référentiel théorique.

Nos conclusions concernant le rôle de la dimension instrumentale rejoignent celles de Rauscher et Adjage (2014) dans le cadre de la résolution de problème faisant appel à la modélisation. Ils proposent de renforcer et d'enrichir le référentiel théorique et empirique de l'ETM (en particulier l'ETM idoine) de l'utilisateur en favorisant l'appui sur les expérimentations, conduisant ainsi l'utilisateur de l'ETM à développer davantage la genèse expérimentale (intégrée dans la genèse instrumentale). Du point de vue de l'ETM, la genèse expérimentale va enrichir le référentiel théorique afin de le rendre disponible (Rauscher et Adjage, 2014).

Le discours de validation

Le discours de validation est distinct selon le modèle probabiliste choisi pour traiter la tâche probabiliste. Ainsi, en classes de 3^e et de 2^{nde}, le discours de validation appliqué est fondé sur un raisonnement de type « diagrammatique » constitué essentiellement d'arguments sémiotiques. C'est un discours standardisé, formulé à l'écrit, que les enseignants développent autour de la dimension sémiotique. En revanche, il n'existe pas de discours écrit standardisé autour de la dimension instrumentale. En effet, le discours est très souvent formulé à l'oral, et il est bâti sur des arguments empirico-expérimentaux. Ces arguments ne sont pas clairement explicités car les étapes liées à la construction du protocole expérimental et le modèle probabiliste de type numérique ne sont jamais explicités. Selon nous, c'est par la description précise du protocole expérimental associé à l'expérience réelle que l'on construit le modèle probabiliste de type numérique. La description du protocole doit faire partie du discours de validation, qui sera par la suite complété par le discours fondé sur les outils issus du domaine des probabilités ou de la statistique afin de justifier le résultat estimé.

Les styles d'argumentaires de validation du professeur et la nature du travail de l'élève

Les styles d'argumentaires de validation adoptés par les professeurs se distinguent par le niveau de classe (de la 3^e à la Terminale S) et le modèle probabiliste choisi pour effectuer le travail de validation. Pour les niveaux de 3^e et de 2^{nde}, nous avons des styles d'argumentaires qui mobilisent davantage la dimension sémiotique (cf. sections 14.2.1 et 14.3) dans

le cas où le travail de validation mobilise le modèle probabiliste de type analytique. Ces styles d'argumentaires adoptés par les professeurs privilégient les formes de validation où les traitements sémiotiques sont effectués à partir de registres de représentation sémiotique (arbre pondéré, arbre des possibles et tableau à double entrée). Une autre caractéristique de ces formes est qu'elles sont pratiquées dans les deux contextes de validation : découverte et justification. D'autres styles d'argumentaires sont adoptés par les professeurs en classes de 3^e et de 2^{nde} lorsque le travail de validation nécessite le recours à un modèle probabiliste de type numérique (cf. sections 14.2.2 et 14.3). Les styles vont donner lieu à des formes de validation caractérisées par l'usage de la dimension instrumentale, où les traitements sont réalisés d'abord *via* une simulation informatique, puis *via* un recours aux outils théoriques du référentiel théorique telle que la loi des grands nombres, ou aux outils théoriques issus de la statistique tels que les intervalles de confiance. Toutefois, ces styles d'argumentaires de validation peuvent varier d'un professeur à un autre. En effet, un professeur a son propre style d'argumentaires de validation. Il peut varier en fonction du niveau de classe et de la nature des tâches proposées.

La nature du travail de l'élève et les formes de validation

Les formes de validation institutionnalisées dans les classes résultent généralement d'un travail collaboratif entre le professeur et ses élèves. Dans ce travail collaboratif, le professeur doit veiller au bon fonctionnement du travail mathématique exigé par la tâche proposée. Mais il doit aussi faire adhérer ses élèves à ce travail afin de mener son projet d'enseignement. Tel un « chef de projet », il va attribuer un rôle de travailleur mathématicien à ses élèves. Ce rôle va dépendre de la catégorie de la tâche et de la forme de travail attendue par le professeur. Ainsi, les élèves peuvent être assignés aux rôles du travailleur tâcheron, technicien ou ingénieur. Ces rôles peuvent néanmoins être modifiés par le professeur au cours de la mise en œuvre du travail mathématique. Ces modifications peuvent être liées au degré de complexité de la tâche (cf. la conclusion de la troisième partie). Par exemple, dans le cas d'une tâche riche, un professeur peut décider de donner le rôle de travailleur-ingénieur à ses élèves. Et si au cours de la réalisation de la tâche il s'aperçoit qu'ils ont des difficultés à assumer ce rôle, il peut décider de leur attribuer celui de technicien ou de tâcheron.

LIMITES DE CE TRAVAIL DE RECHERCHE

Nous indiquons dans ce paragraphe un certain nombre de limites à ce travail de recherche. Ces limites sont soit d'ordre méthodologique, soit liées au contexte culturel.

Les limites méthodologiques

Dans notre travail de thèse, nous avons opté pour des méthodologies de type qualitatif pour tester chacune des nos hypothèses. Ces méthodologies portent principalement sur

des études de cas à partir des représentations d'enseignants, mais aussi du point de vue collectif à partir des observations de classes. Nous avons procédé à ces choix méthodologiques au regard de notre problématique initiale et de nos questions.

Nous avons signalé dans la deuxième partie plusieurs obstacles auxquels nous nous sommes heurtés au cours de cette recherche et qui nous ont amenés en partie à reconsidérer nos conclusions.

En premier lieu, notre choix du public de l'étude a été contraint par plusieurs facteurs d'ordre pratique. En effet, nous avons dû consacrer un temps significatif à la recherche de professeurs prêts à participer et à nous accueillir dans leurs classes. Or, seuls quelques-uns ont répondu positivement à notre demande. Nous nous sommes donc limités à une étude portant sur quatre enseignants (puis trois puisque un professeur s'est désisté au cours de l'expérimentation) dans la deuxième partie, et à cinq enseignants dans la troisième et la quatrième partie de la thèse. Ces derniers n'exerçant pas dans un même établissement. À quoi s'est ajouté un changement de l'équipe de professeurs entre la deuxième et la troisième partie, multipliant ainsi les facteurs à prendre en compte dans l'interprétation des données. Il aurait été utile de conserver la même équipe de professeurs tout au long de cette étude, mais dans ce cas la diversité aurait sans doute été moindre.

En deuxième lieu, nous avons fait le choix de travailler avec un échantillon de professeurs (et de classes) restreint. Le faible nombre de professeurs (soit quatre dans la deuxième partie, et cinq dans les deux dernières parties) relativise la portée de ce travail. Il serait utile de le poursuivre avec d'autres professeurs pour confirmer ou infirmer nos résultats, mais aussi pour les enrichir.

Une autre limite de notre étude concerne toujours les professeurs. En effet, lors des entretiens, nous nous sommes vus restreints à interroger les professeurs sur leurs points de vue sur la validation en probabilités. En aucun cas nous n'avons abordé leur cursus d'études universitaires, en particulier du point de vue des probabilités, et leur parcours professionnel (les différents niveaux d'enseignement déjà pris en charge par exemple) afin de comprendre leurs points de vue sur la validation en probabilités et sur la gestion de celle-ci. Du côté des élèves, une limite évidente est que nous n'avons pas analysé les validations produites individuellement par les élèves afin de confirmer les informations récoltées au cours des observations de classes. Nous cherchions en effet à caractériser la validation dans l'enseignement des probabilités du côté des professeurs. Nous n'avons pas non plus pris en compte le niveau mathématique des élèves dans ce travail alors qu'il pourrait probablement nous être utile pour apprécier la gestion du travail de validation par le professeur et en particulier, justifier le rôle de travailleur que le professeur leur attribue lors de l'exécution d'un travail mathématique.

En dernier lieu, nous pensons que notre choix méthodologique (de la deuxième partie) de la mise en œuvre des tâches probabilistes dans les différents niveaux d'enseignement aurait été plus pertinent si nous avions traité toutes les catégories des tâches au deux niveaux

d'enseignement (3^e et 2^{nde}). En effet, nous avons traité uniquement une même tâche complexe dans ces deux niveaux de classes alors qu'il aurait sans doute fallu procéder de la même manière avec une tâche riche, et éventuellement avec une tâche simple. Cela n'était néanmoins pas possible étant données les contraintes temporelles et pratiques du présent travail de thèse. Signalons cependant que nous avons déjà mené une recherche portant sur l'analyse du travail de validation et des formes de validation liées à l'exécution d'une même tâche riche dans les quatre niveaux : 3^e, 2^{nde}, 1^{er} S et Terminale S. Nous analysons actuellement les résultats de cette recherche qui porte sur la situation du paradoxe de Bertrand.

Les limites culturelles

Notre recherche s'est déroulée dans un contexte culturel exclusivement français. Elle rend compte d'un travail qui s'effectue dans des classes françaises avec des élèves et des professeurs français. Si le domaine des probabilités émerge tardivement dans l'enseignement secondaire français, ce n'est cependant pas le cas dans d'autres pays. Dans des pays européens voisins, comme l'Italie, l'apprentissage du domaine des probabilités apparaît à partir des deux dernières années (6-10 ans) de l'école primaire et cet apprentissage est basé sur une étude des situations aléatoires avec l'usage des tableaux. De même, au Québec, l'enseignement des probabilités est initié dès l'école primaire avec un travail portant sur les expériences aléatoires à l'aide des outils sémiotiques et de la simulation. Ce travail se poursuit tout au long du secondaire.

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans le prolongement de ce travail, il serait possible d'envisager de reprendre certains aspects de l'étude en adaptant la méthodologie afin de dépasser les limites que nous venons de soulever.

Le choix du public

Concernant le choix du public, il serait souhaitable de reprendre l'étude en augmentant le nombre de professeurs et en étendant le champ des observations aux classes de 1^{re} et de Terminale des filières S et ES. Notre idée serait d'explorer l'influence du référentiel théorique dans le travail de validation et de mettre en évidence les formes de validation privilégiées dans chacun des niveaux d'enseignement. Nous pourrions également étudier les caractéristiques de la validation du point de vue des manuels afin d'observer une éventuelle corrélation avec les caractéristiques que nous avons obtenues dans notre recherche.

Les données inexploitées

Comme nous l'avons déjà souligné dans la deuxième partie de notre thèse, nous disposons

d'un certain nombre de données encore inexploitées tels que les enregistrements vidéo d'un ensemble de séances d'enseignement en probabilités de la classe de 3^e à la classe de 1^{re} S. Ces séances comportent à la fois des phases d'institutionnalisation des notions probabilistes, mais également des phases de recherche et de correction d'exercices. Nous n'avons pas pu effectuer une analyse pertinente de ces données durant la thèse, néanmoins nous avons la perspective de mener ce travail après la thèse en prenant en compte ces phases d'institutionnalisation qui sont des indicateurs de ce qui est inséré dans le référentiel théorique de l'ETM_P idoine et personnel des élèves. Nous nous proposons également d'analyser d'autres phases de correction d'exercices en tenant compte des résultats obtenus sur la caractérisation de la validation en fin de scolarité obligatoire.

Dépasser les limites culturelles

Dépasser les limites culturelles sera un autre enjeu de notre futur travail de recherche. Nous sommes dans l'optique de poursuivre notre étude de la caractérisation de la validation en nous ouvrant à d'autres cultures éducatives. Comme nous l'avons indiqué dans les limites de ce travail, au Québec l'enseignement et l'apprentissage des probabilités est initié dès l'école primaire avec une approche intéressante portant sur l'usage des outils sémiotiques et la simulation. Nous pensons qu'une étude comparative entre les contextes français et québécois du point de vue de la gestion du travail de validation et des formes de validation pratiquées dans les classes constitue une perspective originale pour continuer nos recherches.

Les formes de validation

Nous avons identifié plusieurs formes de validation privilégiées dans l'enseignement des probabilités. Ces formes de validation s'appuient sur les registres sémiotiques, les outils de la dimension discursive ou les outils de la dimension instrumentale. Ces formes de validation sont caractérisées par leur dépendance à la catégorie de la tâche, au niveau de la classe considéré et au professeur. Une étude complémentaire pourrait être envisagée afin d'observer si ces formes de validation sont également présentes dans d'autres niveaux de classes et s'il existe d'autres formes de validation que nous n'avons pas identifiées au cours de notre étude.

La catégorisation des tâches et les espaces de travail mathématiques

Au cours de ce travail de thèse, nous avons construit un outil méthodologique, celui de la catégorisation des tâches (simple, complexe, riche) adaptée pour les besoins de notre travail. Cette catégorisation des tâches s'est révélée intéressante pour analyser non seulement les caractéristiques du travail de validation et du discours de validation dans le domaine des probabilités, mais aussi le rôle attribué aux élèves dans l'exécution du travail selon les catégories tâcheron, technicien ou ingénieur. Nous envisageons d'utiliser cet

outil méthodologique pour étudier la validation faisant appel aux modèles probabilistes de type numérique avec l'usage des outils de la statistique inférentielle que nous n'avons pu examiner dans notre travail.

Cet outil méthodologique pourrait être adapté pour analyser le travail mathématique mis en œuvre dans la résolution des tâches au sein des espaces de travail mathématique.

Les paradigmes probabilistes et les espaces de travail probabilistes

Notre recherche de la caractérisation de la validation dans le domaine des probabilités nous a permis d'apporter des précisions concernant les paradigmes probabilistes P1 et P2. En effet, les validations pratiquées dans l'enseignement des probabilités en fin de scolarité obligatoire font appel à des outils sémiotiques (les arbres des possibles et les tableaux à double entrée). Ces outils sémiotiques sont utilisés pour représenter une situation aléatoire et pour effectuer des traitements liés au dénombrement (des branches ou des cases). Cette manière d'utiliser les outils dans la validation caractérise selon nous la validation associée au paradigme P1. Les validations font également appel aux outils sémiotiques pour effectuer des traitements probabilistes à l'aide des techniques de calculs propres aux registres sémiotiques (arbres pondérés et tableaux à double entrée). Ces outils sont alors utilisés comme des outils technologiques et théoriques dans la validation. Cette manière d'utiliser les outils sémiotiques caractérise la validation associée au paradigme P2. Les validations faisant appel aux outils théoriques issus du référentiel théorique caractérisent également la validation associée au paradigme P2. Bien qu'elles soient utilisées dans la validation, les propriétés liées à ces outils ne sont pas toujours justifiées dans le référentiel théorique de l'espace de travail. Ainsi, nous identifions un paradigme P2 qualifiable de **paradigme P2 tronqué**.

En conclusion, nous pensons que notre travail de thèse tire son originalité du fait que nous avons examiné la question de la mise en place effective de la validation dans des classes en observant le travail des professeurs, élargissant ainsi la réflexion sur le développement des modes de pensée probabilistes dans le cadre scolaire. Notre travail de thèse est en partie exploratoire. Il repose sur un nombre de cas étudiés restreints. Cependant, il a permis l'identification de formes de validation particulières, mais aussi de dégager des tâches probabilistes intéressantes que les professeurs acceptent d'introduire dans leur classes. Ces tâches et ces formes de validation pourront faciliter la mise en place et l'analyse d'une étude de plus grande ampleur. Dans une autre perspective, un travail axé sur la formation des enseignants et s'appuyant à la fois sur les formes de validation identifiées et sur certaines des tâches probabilistes repérées dans cette thèse est concevable à la fois dans le cadre d'un travail de recherche, mais aussi dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants.

Références

- BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3):261–304.
- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2):147–176.
- BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, pages 189–200.
- BARCLAY, H. J. (2005). *Sterile Insect Technique : Principles and Practice in Area-Wide Integrated Pest Management*, chapitre Mathematical Models for the Use of Sterile Insects, pages 147–174. Springer Netherlands, Dordrecht.
- BATANERO, C., ESTEPA, A., GODINO, J. D. et GREEN, D. R. (1996). Intuitive structures and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2):151–169.
- BENNETT, E. (2007). *Second Probabilistic Reasoning and Misconceptions among Elementary Statistics Students*. Unpublished Senior Project partially to fulfill the graduation requirements for the University of Wisconsin-Superior, Superior, WI.
- BERNOULLI, J. (1713). *L'Ars Conjectandi, traduction de Meusnier en 1987*. IREM de Rouen et Université de Rouen Haute-Normandie, Rouen.
- BLUM, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32:195–232.
- BLUM, W., GALBRAITH, P., HENN, H. W. et NISS, M. (2007). *Applications and Modeling*. Mathematics Education.
- BLUM, W. et LEISS, D. (2005). « Filling Up »- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. *In Proceedings for the CERME4, WG 13 Modeling and Applications*.
- BORROMEO-FERRI, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *In ZDM*, volume 38.2, pages 86–95. Springer.
- BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1):77–125.

- BROUSSEAU, G. (1998). *La Théorie des Situations Didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.
- CABASSUT, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot Paris.
- CARRANZA, P. (2004). *Glissements dans l'enseignement de la statistique en classe de seconde*. Mémoire de DEA de didactique des mathématiques. Université Paris-Diderot Paris.
- CARRANZA, P. (2010). *La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique. Une expérience en classe de BTS*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot Paris.
- CARRANZA, P. et KUZNIAK, A. (2006). Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au lycée en France. *EMF 2006*.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2):221–266.
- CHIESI, F. et PRIMI, C. (2009). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Learning and Individual Differences*, 19(2):309–313.
- COUNTINHO, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le collège : de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'enseignement informatique Cabri Géomètre II*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble.
- DEROUET, C. et PARZYSZ, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM*, pages 1–17. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0769-9>.
- DESROSIERE, A. (2006). Journal Electronique d'Histoire des probabilités et de la statistique. 2006 <http://www.jehps.net/Juin2006/Desrosieres.pdf>.
- DHEIB, M. (2009). *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes*. Thèse de doctorat. Université Paris-Descartes, Paris.
- DOUADY, R. (1999). Didactique des mathématiques. in *CDROM encyclopédie Universalis*.
- DRESS, F. (2002). *Probabilités et statistique pour les sciences de la vie*. Dunod.
- DRESS, F. (2007). *Les probabilités et la statistique de A à Z*. Dunod.
- DUPUIS, C. et ROUSSET-BERT, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation. *Repère-Irem*, (22):51–72.
- DURRAND-GUERRIER, V. (2005). Démonstration, argumentation et apprentissages des mathématiques dans l'enseignement secondaire. Quelques jalons sur la question de la preuve dans les travaux de didactique mathématiques. In *Acte du XXIIème Colloque CORFEM*, Lyon.

- DUVAL, R. (1993a). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31):37–61.
- DUVAL, R. (1993b). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5:37–65.
- DUVAL, R. (1995). *Sémios et pensée humaine*. Edition Peter Lang, Suisse.
- DUVAL, R. et EGRET, M. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère-Irem*, (12):114–140.
- FARAH, L. (2015). *Etude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot Paris.
- FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel, The Netherlands.
- FRANK, K. et LESTER, J. r. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Information Age Publishing.
- GATTUSO, L. et PANNONE, M. A. (2002). Teacher's training in a statistics teaching experiment. In B. Philips (Ed.) *Proceedings of the Sixth International Conference on the teaching of Statistics (On CD)*, Hawthorn. VIC : International Statistical Institute.
- GATTUSO, L. et VERMETTE, S. (2013). L'enseignement des statistiques et probabilités au Canada et en Italie. *Statistique et Enseignement*, 4(1):107–129.
- GAYDIER, F. (2011). *Simulation informatique d'expériences aléatoires et acquisition de notions de probabilités au lycée*. Thèse de doctorat. Université de Paris 5.
- GIAQUINTO, M. (2005). Mathematical activity. *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, 327:75–78.
- GIRARD, J. C. (2001). Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In Henry. M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*, pages 189–200.
- GONSETH, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon, Lausanne.
- GREER, B. et RITSON, R. (1994). Readiness of teachers in Northern Ireland to teach Data Handling. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Teaching Statistics*, volume 1, Marrakech, Morocco.
- HACKING, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*. Seuil, Paris.
- HAWKINS, A. et KAPADIA, R. (1984). Children's conceptions of probability a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2):349–377.
- HENRY, M. (1993). Paradoxes et lois de probabilités. *Repères-IREM*, (66):5–16.

- HENRY, M. (1997a). *Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Chaput B and Henry M (coords.) Enseigner les probabilités au Lycée.* IREM de Reims, Reims.
- HENRY, M. (1997b). *Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. In Chaput B and Henry M (coords.) Enseigner les probabilités au Lycée.* IREM de Reims, Reims.
- HENRY, M. (1997c). *Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Modélisation en probabilités. Introduction de la partie B. In Chaput B and Henry M (coords.) Enseigner les probabilités au Lycée.* IREM de Reims, Reims.
- HENRY, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repère-Irem*, (36):15–34.
- HENRY, M. (2000). Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités. *Gazette des Mathématiciens*, 84:49–56.
- HENRY, M. (2001a). *Autour de la modélisation en probabilités.* Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon.
- HENRY, M. (2001b). Quelle place pour l'aléatoire au collège ? *Repère-Irem*, (42).
- HENRY, M. (2009). Emergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *Repères-IREM*, (74):67–89.
- HENRY, M. (2010). Evolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. *Statistique et Enseignement*, 1(1):35–45.
- HENRY, M. (2013). La réforme des programmes de lycée et alors ? Les nouveaux programmes en mathématiques et en physique. Leur impact sur l'enseignement post-baccalauréa. *In Colloque des Commissions inter-IREM Université-Lycée-Statistique et Probabilités*, Lyon.
- HOUEMENT, C. et KUZNIAK, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. volume 40.3, pages 238–312.
- HOUEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11:175–193.
- JENDRASZEK, P. (2008). *Misconceptions of probability among future mathematics teachers.* Doctoral dissertation. Columbia University.
- JONES, G. A. (2005). *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning.* Springer, New York.
- KAHNEMAN, D. et TVERSKY, A. (1972). Subjective probability : A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3:430–454.
- KAISER, G. (1996). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht- Ein Überblick über die aktuelle und historische diskussion. *In Graumann, G. et al. (eds) : Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, pages 66–84, Franzbecker. Bad Salzdetfurth.

- KIET, A. B. (2015). *Apports de la simulation et de l'utilisation de logiciels pour l'enseignement apprentissage des probabilités et des statistiques en première année d'Université au Vietnam dans un cursus non mathématique*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot Paris.
- KNIPPING, C. (2002). *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement - Analyses comparatives de l'enseignement des mathématiques en Allemagne et en France*. Thèse de doctorat. Université de Grenoble 1.
- KNIPPING, C. (2003b). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement . analyses comparatives des classes allemandes et françaises en quatrième. *Bulletin APMEP*, (449): 784–796.
- KNIPPING, C. et REID, D. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. volume 40.3, pages 427–441. Springer.
- KNIPPING, C. et REID, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom. proving processes. *The arguments of mathematics*, 30:119–146.
- KOLMOGOROV, A. (1950). *Foundations of probability's calculation*. Chelsea Publishing Company, New York.
- KUHN, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions. Trad : La structure des révolution scientifiques*. Flammarion, Paris.
- KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. volume 6.2, pages 167–187.
- KUZNIAK, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 15, pages 75–95. IREM de STRASBOURG.
- KUZNIAK, A. (2011a). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 16, pages 9–24.
- KUZNIAK, A. (2011b). *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique*. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, Paris.
- KUZNIAK, A. (2014). Travail mathématique et domaine mathématique. *In Acte du troisième symposium ETM*, Montréal.
- KUZNIAK, A. et DROUHARD, J. P. (2015). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique. *In Actes du quatrième symposium ETM*, Madrid.
- KUZNIAK, A. et NECHACHE, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *In Acte du 41^e Colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.
- KUZNIAK, A., NECHACHE, A. et DROUHARD, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, pages 1–14.

- KUZNIAK, A. et RAUSCHER, J.-C. (2002). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *In Acte du XXIXème Colloque COPIRELEM*, La Roche sur Yon.
- KUZNIAK, A. et RICHARD, P. (2014). Spaces for mathematical work : viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1):17–26.
- KVATINSKY, T. et EVEN, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding about probability. *In B. Philips (Ed.) Proceedings of the Sixth International Conference on the teaching of Statistics (On CD)*, Hawthorn. VIC : International Statistical Institute.
- LAHANIER-REUTER, D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. PUF.
- LAPLACE, P. S. (1995). *Essai philosophique sur les probabilités*, 5^e édition de 1825, Bourgeois, Paris. Préface à la *Théorie analytique des probabilités* (1^{re} édition 1812). Réédition en 2 vol. Jacques Gabay, Paris.
- LAUTIER, F. (1999). *Ergotopiques, Sur les espaces des lieux de travail*. Edition Octarès, Toulouse.
- LAVAL, D. (2016). *L'algorithmique au lycée : contribuer aux apprentissages dans différents champs mathématiques enseignés et développement de savoirs spécifiques*. Thèse de doctorat paraîtra fin 2016. Université Paris-Diderot Paris.
- LECOUTRE, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in « purely random » situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6):557–568.
- LECOUTRE, M. P. et DURAND, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs : l'étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19:357–368.
- LESH, R., GALBRAITH, P. L., HAINES, C. R. et HURFORD, A. (2010). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer, New York.
- LESH, R. A. et DOERR, H. M. (2003). *A modeling perspective on teacher development*. *In Lesh & Doerr (Eds)*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah.
- MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.
- MAURY, S. (1992). La représentation du savoir chez l'enseignant, source de difficultés dans l'enseignement de certaines connaissances? *TREMA*, 1.
- MENCOL (2008). Les programmes du collège-bulletin officiel de l'Education Nationale, BO spécial numéro 6 du 28 août 2008. <http://cache.media.education.gouv.fr/>.
- MENPRE (2010). Programme d'enseignement spécifique de mathématiques en classe de première de la série scientifique, BO spécial numéro 9, du 30 septembre 2010. <http://cache.media.education.gouv.fr>.

- MENSEC (2009). Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique, arrêté du 23 juin 2009, BO numéro 30, du 23 juillet 2009. <http://cache.media.education.gouv.fr>.
- MENTERM (2011). Programme d'enseignement spécifique de mathématiques en classe de terminale de la série scientifique, BO spécial numéro 8, du 30 septembre 2011. <http://cache.media.education.gouv.fr>.
- MONTOYA-DELGADILLO, E. et VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématique. volume 19, pages 73–101.
- NECHACHE, A. (2015). Comparaison de la démarche de la validation dans les espaces de travail idoines en géométrie et en probabilité. *In Actes du quatrième symposium ETM*, Madrid.
- PARZYSZ, B. (1990). Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste. *Bulletin APMEP*, (372).
- PARZYSZ, B. (1993). Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres. *Repères-IREM*, (10):91–104.
- PARZYSZ, B. (2007). Expérience aléatoire et simulation : le jeu de croix ou pile. *Repères-IREM*, (66):27–44.
- PARZYSZ, B. (2009). Des expériences au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, (74):91–103.
- PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 16, pages 127–147.
- PARZYSZ, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *In Relime*, volume 17.4, pages 65–82.
- PEDEMONTE, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble 1.
- PICHARD, J. F. (2001). Les probabilités au tournant du XVIII^e siècle. *In Autour de la modélisation en probabilités*, pages 13–45, Besançon. PUFC.
- PLUVINAGE, F. (2005). Árboles de transiciones e iquetadas en cálculo de probabilidades. *Relime*, 8(1):91–99.
- POLAKI, M. V. (2005). Dealing with compound events. *G.A. Jones (Ed.), Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning*, pages 191–214.
- RAUSCHER, J. L. et ADJIAGE, R. (2014). Espaces de travail de résolution d'un problème de modélisation. *In Relime*, volume 17.4, pages 41–64.
- REBOUL, O. (2001). *Introduction à la rhétorique*. PUF.
- RESCOL-DEM (2009). Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège-Raisonnement et démonstration, juillet 2009. <http://eduscol.education.fr>.

- RESCOL-GEOM (2007). Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège-Géométrie au collège, juillet 2007. <http://eduscol.education.fr/>.
- RESCOL-PROB (2008). Ressources pour les classes de collège-Probabilités, mars 2008. <http://eduscol.education.fr/>.
- RESPRE-PROB (2012). Ressources pour la classe de première générale et technologique-Statistiques et probabilités, février 2012. <http://eduscol.education.fr/>.
- RESSEC-PROB (2009). Ressources pour la classe de seconde-Probabilités et statistiques, juin 2009. <http://eduscol.education.fr/>.
- RESTERM-PROB (2012). Ressources pour la classe de terminale générale et technologique-Probabilité et statistiques, février 2012. <http://eduscol.education.fr/>.
- ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques. *In Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 27.3, pages 271–311.
- ROBERT, A., PENNINCKX, J. et LATTIATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe mathématiques. (Se) former au métier de l'enseignant du secondaire à partir d'analyses vidéos*. Pratiques & Techniques, Besançon.
- RUELLE, D. (1991). *Hasard et chaos*. Odile Jacob, Paris.
- SHAUGHNESSY, J. M. (1977). Misconceptions of probability : an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8:285–316.
- SIERPINSKA, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole : task problematization. *In An International Journal of Mathematics Education*, volume 24.2, pages 7–15.
- SIGWARD, E., BRISOUX, F., BRUCKNER, C. et MONKA, Y. (2014). *Manuel de Seconde, Odyssée*. Hatier, Paris.
- STEINBRING, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. *R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Chance encounters : Probability in education*, pages 135–168.
- STOHL, H. (2005). Probability in teacher education and development. *G.A. Jones (Ed.), Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning*, pages 345–366.
- TALLMAN, M. et CARLSON, M. P. (2012). A characterization of Calculus I Final Exams in U.S. Colleges and Universities. *In Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Portland.
- TANGUAY, D. (2005). Une expérimentation sur l'apprentissage de la structure déductive en démonstration. *In Actes du 4^e colloque de didactique des mathématiques de l'Université de Crête*, Rethymnon, Crête.
- THIENARD, J. C. (2001). A propos de la définition de la probabilité. *In Autour de la modélisation en probabilités*, pages 57–94, Besançon. PUFC.

TOULMIN, S. E. (1993). *The use of arguments, Trad : Les usages de l'argumentation*. Presse Universitaire de France, Paris.

VERMERSCH, P. (2006). *L'entretien d'explicitation*. esf, Paris.

VON MISES, R. (1952). *Probability, Statistics and Truth, J. Neyman, O. Scholl & E. Rabinovitch (Trans.)*. Ouvrage original publié en 1928. William Hodge and company, London.

VU NHU, T. H. (2009). *Une étude didactique sur l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de notions statistiques dans leurs liens avec les probabilités*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble.

WHITE, N. et MESA, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. *In ZDM*, volume 46.4, pages 675–690. Springer.

WOZNIAK, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

ANNEXES

ANNEXES DE LA DEUXIÈME PARTIE

ANNEXES DE LA DEUXIÈME PARTIE
SÉANCES DE GÉOMÉTRIE

EXERCICE-SÉANCE-GEOMÉTRIE-CLASSE 3^e A


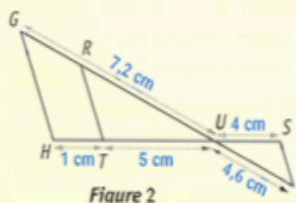
JE FAIS LE POINT

CHAPITRE

J'ai appris à...

- Agrandir ou réduire une figure.
- Calculer une longueur en utilisant le théorème de Thalès.
- Reconnaître deux droites parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.

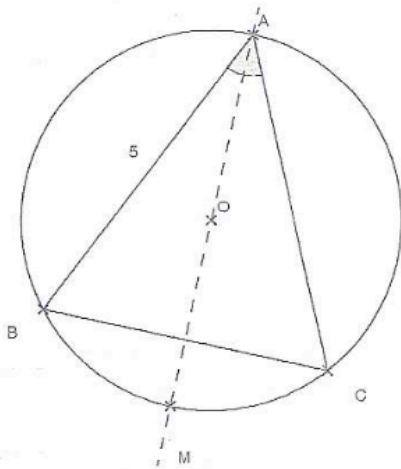
! Attention : Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

	A	B	C	Si échec, revoir :
<p>• Pour les exercices 45 à 54, on utilise les figures suivantes :</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Figure 1</p> <p>Les points A, O, I et J sont alignés. Les points M, O, E et F sont alignés.</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Figure 2</p> <p>Les points G, R, U et L sont alignés. Les points H, T, U et S sont alignés.</p> </div> </div>				

45 Sur la figure 1, le triangle AOM est une réduction du triangle IOE de rapport :	$\frac{3}{9}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{2}{3}$	p. 206
46 Sur la figure 1, on a :	$\widehat{OEI} = \widehat{OFJ}$	$\widehat{OEI} = \widehat{OAM}$	$\widehat{OEI} = \widehat{AMO}$	p. 206
47 Sur la figure 1, d'après le théorème de Thalès, on a :	$\frac{OE}{EF} = \frac{OI}{IJ} = \frac{EI}{FJ}$	$\frac{OF}{OE} = \frac{OJ}{OI} = \frac{FJ}{EI}$	$\frac{OE}{OF} = \frac{OI}{OJ} = \frac{FJ}{EI}$	p. 206
48 Sur la figure 1, d'après le théorème de Thalès, on a :	$\frac{AO}{AI} = \frac{MO}{ME} = \frac{AM}{EI}$	$\frac{AO}{OE} = \frac{MO}{OI} = \frac{AM}{EI}$	$\frac{OA}{OI} = \frac{OM}{OE} = \frac{AM}{EI}$	p. 206
49 Sur la figure 1, la longueur OA est égale à :	$\frac{2}{3} \times 7,5$ cm	$\frac{9 \times 7,5}{6}$ cm	5 cm	p. 209
50 Sur la figure 1, la longueur EI (en centimètres) est égale à :	$\sqrt{9^2 - 7,5^2}$	4,5	$\frac{6}{9} FJ$	p. 209
51 Sur la figure 2, les droites (GH) et (SL) sont parallèles	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	p. 207 p. 210
52 Sur la figure 2, les droites (GH) et (RT) sont parallèles	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	p. 207
53 Sur la figure 2, si UR = 5,75 cm, les droites (RT) et (SL) sont parallèles	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	p. 207 p. 210
54 Sur la figure 2, si UR = 6 cm, les droites (GH) et (RT) sont parallèles	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	p. 207 p. 210

→ corrigés : voir page 309

EXERCICE-SÉANCE-GEOMÉTRIE-CLASSE 3^e B



On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle \widehat{BAC} mesure 50° et AB est égal à 5 cm. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (OA) coupe ce cercle, noté (\mathcal{C}) , en un autre point M.

1) Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BAM} ?

Aucune justification n'est demandée.

2) Quelle est la nature du triangle BAM ?

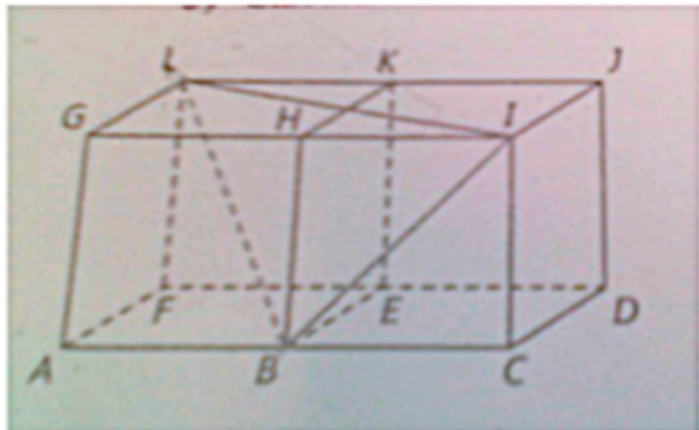
Justifier.

3) Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième de centimètre près.

4) La droite (BO) coupe le cercle (\mathcal{C}) en un autre point K. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BKC} ?

EXERCICE-SÉANCE-GEOMÉTRIE-CLASSE 2nde C

Dans la figure ci-contre, ABEFGHKL et BCDEHIJK sont deux cubes de côté 6 cm. Quelle est la nature du triangle BIL ?



EXERCICE-SÉANCE-GEOMETRIE-CLASSE 2nde D

1/ Rappel

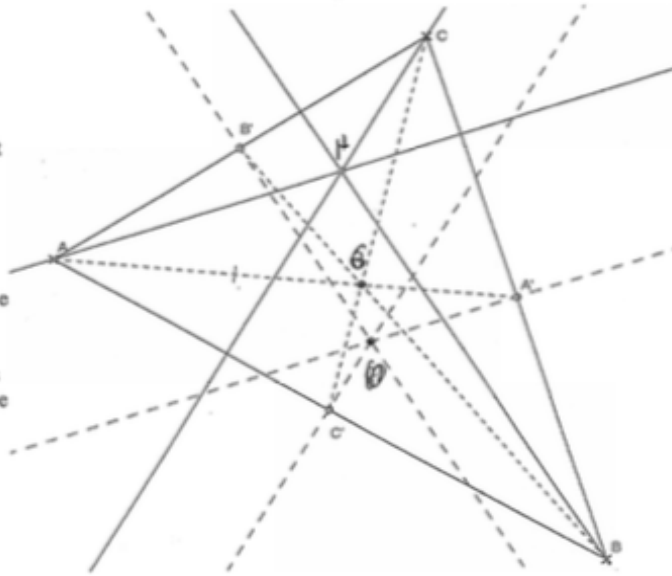
Rappeler la définition des hauteurs et de l'orthocentre d'un triangle.

Rappeler la définition des médianes et du centre de gravité d'un triangle.

Rappeler le résultat vu au collège Si $[AA']$ est une médiane, G, le centre de gravité $AG =$

Rappeler la définition des médiatrices d'un triangle. Quelle est la propriété de leur point d'intersection?

Placer l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O au triangle ABC.
Rappeler la conjecture faite sur les points O, H et G.



2/ Démontrer que si $[MN]$ a pour milieu I, pour tout point O du plan $\vec{OM} + \vec{ON} = 2\vec{OI}$
aide : en utilisant la relation de Chasles, décomposer \vec{OM} et \vec{ON}

3/ Soit un triangle ABC, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
G est son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit.

Soit H défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, démontrer que $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$

aide : se servir du résultat de la 2^{ème} question

en déduire 2 autres relations similaires

En déduire que H appartient aux 3 hauteurs du triangle ABC

Démontrer que $2\vec{GA}' + \vec{GA} = \vec{0}$

aide : se servir d'un résultat rappelé ci-dessus

En déduire que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

aide : se servir du résultat de la 2^{ème} question

A partir de la relation $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ du résultat $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, démontrer que les vecteurs \vec{OH} et \vec{OG} sont colinéaires.

Que peut-on en déduire pour les points O, H et G?

EXERCICE-SÉANCE-PROBABILITÉS-CLASSE 3^e B

Exercice extrait du Brevet des collèges Polynésie juin 2013

Soit l'expérience aléatoire suivante :

- tirer au hasard une boule noire, noter son numéro ;
- tirer au hasard une boule blanche, noter son numéro ;
- puis calculer la somme des 2 numéros tirés.



EXERCICE-SÉANCE-PROBABILITÉS-CLASSE 2^{nde} C

Exercice 18 p 308 (Odyssée 2^{nde})

18 On dispose de deux porte-monnaie identiques.
Le premier contient 3 billets de 10 € et 5 billets de 20 €.
Le second contient 2 billets de 10 € et 4 billets de 20 €.
On choisit au hasard un porte-monnaie et on tire à l'aveugle un billet de ce porte-monnaie.
Quelle est la probabilité de choisir un billet de 10 € ? un billet de 20 € ?

EXERCICE-SÉANCE-PROBABILITÉS-CLASSE 2^{nde} D

L'énoncé de l'exercice écrit au tableau:

On lance deux dés non-truqués. Si on fait la somme des résultats des faces supérieures on a alors une probabilité de la somme 7 est supérieure à celle d'obtenir la somme 11. L'affirmation est elle vraie ou fausse?