



Comportement unilatéral dans les milieux fibreux

Omar Ateeq Mahmood

► To cite this version:

Omar Ateeq Mahmood. Comportement unilatéral dans les milieux fibreux. Mécanique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066012 . tel-01347990

HAL Id: tel-01347990

<https://theses.hal.science/tel-01347990>

Submitted on 22 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
ED 391 : Sciences Mécaniques, Acoustiques, Electronique & Robotique

Institut d'Alembert / Equipe MISES

présentée par

Omar MAHMOOD

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : **Mécanique**

Comportement unilatéral dans les milieux fibreux

Directeurs de thèse : Basile AUDOLY et David RODNEY

Soutenance effectuée le : 1^{er} Avril 2016

Devant un jury composé de :

M. Samuel FOREST	Rapporteur
M. Jean-Noël ROUX	Rapporteur
M. Corrado MAURINI	Examineur
M. Benoît ROMAN	Examineur
M. Basile AUDOLY	Directeur de thèse
M. David RODNEY	Directeur de thèse
M. Stéphane ROUX	Invité
M. Xavier BRAJER	Invité

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on s'intéresse au comportement effectif non linéaire issu de l'homogénéisation d'un milieu désordonné de fibres rectilignes dans le plan. A partir d'une hypothèse de déformation homogène, on obtient une loi de comportement non linéaire d'un milieu isotrope par intégration sur les orientations de fibres. La particularité du modèle réside dans la représentation du flambement des fibres en compression par une loi de comportement de type ressort avec raideurs asymétriques en traction/compression.

Dans un premier temps, la limite d'une raideur nulle en compression est étudiée numériquement par éléments finis sur des géométries planes fissurées. On montre que le champ de contrainte solution est constitué d'un ensemble de graphes de lignes de tension en équilibre avec le chargement. En particulier, le caractère unilatéral révèle une interaction forte des fissures : la raideur en traction d'une éprouvette fissurée peut-être nulle quand bien même la percolation des fissures n'est pas atteinte. Par ailleurs, on montre que le champ de contrainte est partitionné en régions auto-équilibrées et libres de contrainte en dehors des graphes de forces. Pour finir, on propose une application au calcul des bornes énergétiques de la solution élastique d'un problème aux limites.

En perspective, on se propose de mettre en évidence le caractère bi-module d'un voile de fibres de verre avec des mesures de champs de déplacement par corrélations d'images. Un dispositif d'Arcan est mis en place pour exercer un chargement anisotrope sur le voile. Les champs de déplacement ainsi mesurés sont utilisés pour identifier une loi de comportement du matériau. Un résultat préliminaire montre que le caractère unilatéral du milieu est d'autant plus prononcé que la densité du milieu est faible.

Mots clés : Réseaux fibreux, fibres de verre, homogénéisation, élasticité non linéaire, formulation faible, éléments finis, milieu bi-module, comportement unilatéral, corrélation d'images

ABSTRACT

An homogenized non linear mechanical behavior of a 2D disordered fiber mats is considered. Under the homogeneous strain assumptions, a continuum description of an isotropic non linear media is derived by integration over all fibers orientations. The fiber non linearity due to buckling is featured by a lower spring constant in compression than in traction.

First, the response of a sheet containing multiple cracks with different geometries is explored numerically in the case of a tension-field material, corresponding to the singular limit where the compressive spring constants goes to zero. It is reported that the stress solution is composed of a set of pattern built from tensile branches in equilibrium with the boundary conditions. In particular, the unilateral feature reveal a strong interaction between multiple cracks : the tensile stiffness of a cracked sheet can be zero even though the sheet is made up of a single piece. Besides the pattern of tensile branches, it is reported a partitioning of the stress into self-equilibrated and stress free regions. Finally, an application is proposed to find good estimates of the energetic bounds of the boundary value problem.

As an experimental perspective to this work, it is proposed to estimates the bi-modulus feature of a manufactured fiber glass veil using digital image correlations. An Arcan device is set up to enforce an anisotropic loading on the veil. Measured displacement fields are used to identify a material constitutive law. As a preliminary results, it is reported that the unilateral feature is noticeable in light weight fiber glass veil.

Keywords: Fiber networks, fiber glass, homogenization, non linear elasticity, weak formulation, finite elements, bi-modulus media, unilateral constitutive law, images correlations

REMERCIEMENTS

Commençons les traditionnels remerciements par les personnes qui m'ont accompagné et soutenu durant ces trois années de thèse. J'ai eu le privilège de travailler sous la direction exceptionnelle de Basile AUDOLY, que je remercie très chaleureusement pour la confiance qu'il a su m'accorder et pour m'avoir accompagné dans cette aventure scientifique. J'ai été extrêmement touché d'avoir un encadrant avec de grandes qualités humaines, qui a toujours pris le temps de répondre à mes questions malgré un emploi du temps chargé et qui m'a permis d'évoluer dans une ambiance très favorable et épanouissante. C'est grâce à son dynamisme et son enthousiasme constant (et communicatif!) que j'ai appris la rigueur scientifique indispensable au milieu de la recherche. J'ai été témoin en particulier de son aisance et son habileté dans la formulation mathématique des problèmes mécaniques que nous avons rencontré, ce qui a beaucoup aidé à l'aboutissement de ce projet de thèse. Basile, j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec toi. Merci !

Je remercie très chaleureusement Stéphane ROUX, avec qui j'ai eu le privilège de travailler et qui a énormément contribué à la réussite de ces travaux de thèse. Les réunions occasionnelles que nous avons eu avec Stéphane ont toujours été extrêmement constructives et se sont révélées indispensables à l'aboutissement de ces travaux. Ses conseils pertinents et avisés ont été très formateurs et j'ai beaucoup aimé discuter sur les nombreuses problématiques que nous avons abordé ensemble. J'ai toujours trouvé en Stéphane quelqu'un d'attentionné, de très impliqué dans mon avancement et qui a toujours eu la patience de m'expliquer quantité de concepts abstraits en mécanique théorique ou expérimentale, notamment en mesure de corrélation d'images. J'espère avoir hérité quelque peu de sa clairvoyance exceptionnelle en mécanique et de sa perspicacité dont j'ai été témoin tout au long de ces trois dernières années.

Je remercie vivement David RODNEY, mon encadrant hors UPMC, qui a initié mon sujet de thèse et avec qui j'ai eu des échanges très enrichissants, en particulier sur les méthodes numériques de simulation moléculaire, que j'ai pu développer en grande partie grâce à lui. David, je te remercie de m'avoir initié aux subtilités du comportement élastique des milieux fibreux et d'avoir toujours été à l'écoute malgré les difficultés qu'impose l'éloignement géographique.

J'adresse mes vifs remerciements à Samuel FOREST et à Jean-Noël ROUX pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, pour avoir consacré du temps à l'évaluation de ce mémoire et pour leurs remarques judicieuses. Je remercie Benoit ROMAN et Corrado MAURINI

pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon le jury de thèse en tant qu'examineur.

Je remercie mes encadrants industriels Xavier BRAJER et René GY pour m'avoir accueilli à Saint-Gobain Recherche, pour avoir facilité mon intégration sur le site d'Aubervilliers et pour avoir mis à ma disposition toutes les ressources nécessaires à l'aboutissement de cette thèse. Ils ont toujours été disponibles et ouverts aux pistes de recherche proposées, nous laissant ainsi une latitude relativement grande dans le choix de nos orientations, ce qui a été plus que confortable et épanouissant.

J'en profite pour remercier l'ANRT qui a permis la mise en place de ce contrat de recherche (CIFRE n° 1083/2012) et en a assuré le financement.

De nombreuses personnes parmi les ingénieurs et techniciens à Saint-Gobain Recherche ont contribué plus ou moins directement à ces travaux, notamment Ivan BERLINE, Pierrick CAVALIE, Abder RYADI pour la mise à disposition du micro-tomographe, Jessy GILOT pour la mise à disposition du MEB et Alexandre GARCIA (bonne chance en Norvège!) pour toutes les discussions que l'on a eu sur les procédés de fabrication des voiles ADFORS. Qu'ils en soient vivement remerciés!

Je remercie les membres du personnel de l'Institut d'Alembert, notamment dans le corps administratif avec Olivier LABBEY, Catherine DEJANCOURT et Simona OTARASANU pour la bonne ambiance à l'Institut et pour nous avoir accompagné dans nos démarches administratives. Je remercie en particulier les directeurs de l'école doctorale SMAER, Djimédo KONDO et Stéphane RÉGNIER, pour leurs disponibilités et leurs engagements au bien être des doctorants.

Un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué à la bonne ambiance au quotidien de l'Institut, notamment mes anciens co-bureau Adrian (le portoricain), Virgile (et ta panoplie d'uniformes militaires), Nicolas, Charles (13 Ricards!), Raph', et mes nouveaux co-bureau Walid, Stella, Olena, sans oublier les doctorants et post-docs du 3ème et 4ème étages, Claude (un autre survivant de *libmesh*), David (Peña forever), Léo (Wos forever), Hervé (Spider-man), Gaudefroy (le Joker), Shia, Elizabeth, Claire, Julien (ave laccen!), Aurélie, Estelle et la niçoise Stéphanie (« tu sais quoi? ma thèse est finiiiiiiiie! »).

Je remercie les doctorants de SGR, Mamadou (le Gangsta), Victor, Ekatarina, avec qui j'ai pu interagir lors de mes passages à Aubervilliers.

Il est temps à présent de remercier l'ensemble des membres de ma famille qui m'ont soutenu durant ces trois dernières années et mes amis avec qui j'ai pu m'amuser et trouver un bon équilibre entre travail et divertissement.

Pour finir, comme ces remerciements ne peuvent être exhaustifs, je remercie toutes les autres personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler ou de partager des moments de convivialité durant ces trois dernières années et qui me pardonneront l'affront de les avoir oubliées.

TABLE DES MATIÈRES

I	Introduction au comportement élastique des réseaux de fibres	17
1	Réseau fibreux désordonné : du discret au continu...	25
1.1	Introduction	26
1.2	Energie élastique du réseau de fibres de Navier-Bernoulli	27
1.3	Milieu continu équivalent micropolaire	29
1.3.1	Localisation de la cinématique continu	30
1.4	Modules élastiques des assemblages périodiques et désordonnés	32
1.4.1	Cas des réseaux périodiques	32
1.4.2	Cas du réseau aléatoire	33
1.5	Effet d'échelle et solutions évanescences	35
1.5.1	Longueur d'onde des solutions	36
1.6	Milieu continu équivalent au réseau de ressorts	39
2	Simulation discrète de réseaux fibreux	41
2.1	Introduction	42
2.2	Réseau de ressorts	42
2.2.1	Problème aux limites en déplacement	43
2.2.2	Conditions périodiques en déformation imposée	44
2.3	Réseau de poutres de Navier-Bernoulli	45
2.3.1	Problème aux limites en déplacement	45
2.3.2	Conditions périodiques en déformation imposée	46
2.4	Méthode de minimisation de l'énergie élastique	46
3	Application aux assemblages périodiques et désordonnés	49
3.1	Introduction	50
3.2	Elasticité des réseaux périodiques	51
3.2.1	Modules élastiques homogènes équivalents	51
3.2.2	Effet d'échelle	52
3.3	Elasticité du réseau désordonné de Poisson	55
3.3.1	Module élastique homogène équivalent	56

3.3.2	Comportement mécanique du voile de fibre de verre ADFORS	57
II	Milieux continus unilatéraux	63
4	Milieu continu unilatéral	69
4.1	Introduction	70
4.2	Milieu continu bi-module	70
4.2.1	Ressorts à raideurs asymétriques	70
4.2.2	Directions en compression	71
4.2.3	Energie potentielle élastique	73
4.2.4	Loi de comportement	74
5	Outil numérique de simulation d'un milieu bi-module	77
5.1	Introduction	78
5.2	Formulation forte continue	78
5.3	Formulation faible continue	79
5.4	Forme matricielle du problème ($\mathcal{P}2$)	80
5.4.1	Forme discrète de la densité d'énergie potentielle $\hat{w}$	80
5.4.2	Forme discrète du travail des efforts donnés	81
5.4.3	Forme discrète du potentiel de pénalité	82
5.4.4	Système matriciel complet et schéma de résolution	82
5.5	Méthode de continuation numérique	83
5.6	Densité d'énergie potentielle du milieu bi-module	84
5.7	Validations	85
5.7.1	Traction uniaxiale en grande déformation	85
5.7.2	Singularité de contrainte en pointe de fissure	86
6	Etude numérique de l'interaction de fissures en milieux unilatéraux	91
6.1	Déformation uniaxiale sur une éprouvette non fissurée	93
6.2	Eprouvette fissurée	94
6.2.1	Localisation de la contrainte	95
6.2.2	Analyse en pointe de fissure	95
6.2.2.1	Singularité de la contrainte	95
6.2.2.2	Répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation	97
6.3	Eprouvette avec deux fissures débouchantes	99
6.3.1	Géométrie et conditions aux limites	99
6.3.2	Solutions numériques	101
6.4	Eprouvette multi-fissurée	103
6.4.1	Géométrie et conditions aux limites	103
6.4.2	Solutions numériques	104

6.5	Approche théorique des régions auto-équilibrés libres de contrainte	106
6.5.1	Régions auto-équilibrées et libres de contrainte	106
6.5.2	Cas de l'éprouvette avec fissures « balistiques »	108
6.5.3	Cas de l'éprouvette multi-fissurée	109
6.6	Application : encadrement énergétique de la solution	109
6.6.1	Approche en contrainte	110
6.6.2	Approche en déformation	114
7	Identification du comportement bi-module du voile de fibres de verre par mesures de corrélation d'images	119
7.1	Introduction	120
7.2	Identification expérimentale de loi de comportement	121
7.2.1	Mesures de champs par corrélation d'images	121
7.2.2	Identification du paramètre η par la méthode FEMU-U	123
7.3	Installation expérimentale	124
7.3.1	Dispositif d'Arcan	125
7.3.2	Montage général	126
7.4	Résultats (préliminaires)	129
A	Calcul de la rigidité tangente	139
B	Calcul de $w(I_1, I_2)$ pour un milieu bi-module	141
	Bibliographie	142

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les milieux fibreux enchevêtrés regroupent une grande diversité de matériaux qui ont comme point commun d'être constitués d'objets élancés. Ces matériaux sont pourvus d'une raideur spécifique élevée (raideur ramenée à la densité) et de propriétés physiques intéressantes en termes d'isolation thermique et acoustique.

On trouve une grande variété de milieux fibreux à l'état naturel (le bois, les laines organiques) ou synthétique (laine de verre, papier, mousse métallique). Par ailleurs, les enchevêtrements de fibres sont omniprésents dans la structure des tissus biologiques. Les cellules biologiques sont eux aussi constituées d'une structure fibreuse (que l'on nomme cytosquelette) formée de polymères biologiques de filaments d'actines. Les enchevêtrements de fibres peuvent être formés à des échelles spatiales très différentes, allant de l'échelle nanoscopique (polymères, enchevêtrement de nanotube de carbone) à l'échelle millimétrique (tissus de feutre, laines). L'intérêt pour ces milieux est sans cesse renouvelé dans la communauté scientifique et dans l'industrie, en partie grâce aux développements des méthodes permettant d'architecturer des microstructures afin de leur conférer des fonctionnalités particulières.

Le matériau qui sert de support à notre étude est un voile non tissé de fibres de verre. Les fibres ont un diamètre approximatif de $13\mu\text{m}$ et sont liées entre elles par une résine faite d'urée formaldéhyde. Le matériau est fabriqué par Saint-Gobain ADFORS. Le procédé de fabrication commence par le dépôt, sur un tapis roulant (voir figure 0.1), d'un mélange de fibres de verre courtes (longueur de l'ordre du centimètre) dans une solution liquide. Puis, une couche de liant est déposée uniformément sur l'ensemble du voile. Le voile est séché dans un four (pour la réticulation du liant) puis enroulé (en sortie de filière). Le produit fini peut être utilisé en protection de surface des plaques de gypse ou des couches d'isolant thermique et acoustique (il fait alors office de barrière anti-humidité et de résistance au feu) ou en renforcement des bardeaux bitumés de toiture (communément appelés « shingles »).

Le voile présente une texture hétérogène à l'échelle centimétrique (voir figure 0.2). A l'échelle de la microstructure, on observe que les jonctions rigides formées par le liant sont matérialisées par des ponts capillaires qui ne peuvent se former qu'avec un agencement particulier des fibres. En pratique, la dispersion du liant, qui dépend des propriétés de capillarité du liant et de l'organisation des fibres, est difficile à prédire aussi bien qu'à mesurer sur la microstructure réelle.

Le comportement mécanique effectif d'un tel milieu va dépendre des propriétés mé-

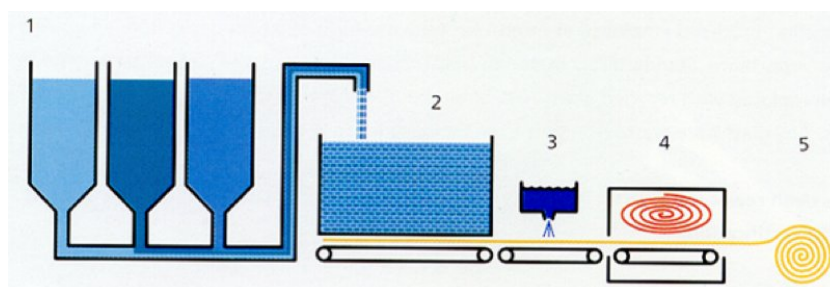


FIGURE 0.1 – Filière de fabrication du voile de fibres de verre ADFORS. 1. Mélange des fibres pré-découpées dans l'eau. 2. Dépôt de la solution sur le tapis de filière. 3. Dépôt de la couche de liant. 4. Séchage du voile et cure du liant dans un four. 5. Enroulement du produit fini.

caniques des constituants et de leurs organisations géométriques dans la microstructure (densité de fibres, orientations, connectivité nodale, rigidité des jonctions, etc). En pratique, l'enchevêtrement peut être modélisé par un assemblage de poutres élancées dont la topologie devrait être, d'un point de vue statistique, équivalent à celui de la microstructure réelle.

La problématique de cette thèse est centrée sur le comportement mécanique élastique du voile de fibres de verre. Comme évoqué ci-dessus, les milieux fibreux désordonnés présentent des propriétés mécaniques intéressantes qui peuvent être parfois très complexes. En particulier, les milieux fibreux présentent des raideurs en traction plus grandes qu'en compression. Cette propriété est communément attribuée au comportement non linéaire des fibres. En effet, à cause de leurs formes élancées et leurs courbures initiales, les fibres sollicitées en compression vont se déformer en flexion. Ainsi, la raideur effective en compression de la fibre est contrôlée par un effet géométrique alors que la raideur en traction sollicite directement le matériau de la fibre (verre de type E). Un tel comportement des fibres a été observé pendant un test de traction imagé au MEB de notre voile de fibres de verre (voir introduction de la partie 2). On peut légitimement se demander quel va être l'effet de ce comportement non linéaire des fibres sur le milieu homogène effectif du voile et quelle est l'approche expérimentale adéquate pour le mettre en évidence.

La première partie de cette thèse est introductive. Elle porte sur le comportement effectif en élasticité linéaire des assemblages de poutres de Navier-Bernoulli dans le plan. L'objectif est de faire un rapprochement entre les principaux résultats déjà existants sur l'homogénéisation des assemblages de poutres élastiques et le comportement effectif du voile mesuré en traction uniaxiale.

- Au chapitre 1, on reprend les principes de l'homogénéisation par le développement asymptotiques pour établir un milieu homogène équivalent de Cosserat à partir d'un assemblage de fibres rectilignes décrites par un modèle de poutre de Navier-Bernoulli.

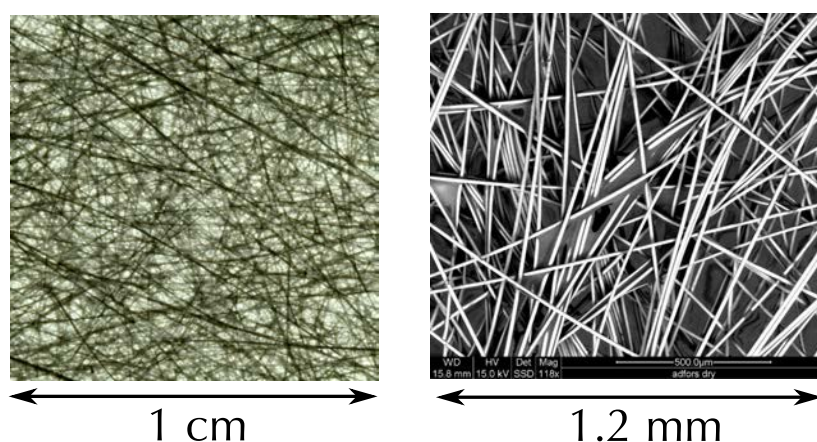


FIGURE 0.2 – Vue à l'échelle centimétrique (photographie, à gauche) et à l'échelle millimétrique (vue au MEB, à droite) du voile de fibres de verre ADFORS. La densité du voile est de 80 g/m^2 .

Ce modèle correspond à une borne supérieure du comportement effectif, mais fournit la rigidité exacte pour quelques assemblages périodiques simples. On souligne dans ce chapitre l'importance des hypothèses de localisation sur la représentation du milieu équivalent.

- Au chapitre 2, on met en place un outil numérique (adapté des méthodes de simulation moléculaire) de calcul mécanique discret des assemblages de poutres. L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement effectif exact d'un assemblage désordonné isotrope obtenu en déposant aléatoirement des fibres courtes dans le plan (un tel assemblage est nommé « réseau de Poisson » dans la littérature dédiée).
- Au chapitre 3, on confronte la raideur effective théorique du chapitre 1 au comportement exact obtenu par simulation discrète, dans le cas de quelques assemblages périodiques simples, puis pour l'assemblage désordonné de Poisson. On montre que la rigidité moyenne théorique constitue une borne supérieure pour le réseau de Poisson. De plus, on met en évidence numériquement l'effet d'échelle dans les assemblages de poutres. Enfin, on présente les résultats expérimentaux de la rigidité du voile en fonction de la densité de fibres, que l'on discutera à la lumière des modèles effectifs théoriques.

La seconde partie de cette thèse traite du comportement *unilatéral* dans les milieux fibreux. Ce comportement est caractérisé par l'absence de rigidité dans une direction de sollicitation. Dans un premier temps, on s'intéresse à la réponse mécanique d'un modèle de milieu continu à raideur nulle en compression, que l'on étudie par des simulations numériques non linéaires de type éléments finis. Puis, on propose une approche expérimentale permettant de caractériser la raideur asymétrique du voile de fibres de verre.

-
- Au chapitre 4, on établit un modèle de milieu *bi-module* homogène et isotrope à partir de la représentation discrète d'un réseau de fibres avec des raideurs longitudinales différentes en traction et en compression (représentation qualitative du flambement des fibres). Le potentiel élastique est obtenu par intégration sur les orientations des fibres sous l'hypothèse de séparation des échelles du problème (longueur caractéristique de la microstructure très inférieure à l'échelle d'étude macroscopique).
 - Au chapitre 5, on établit une formulation aux éléments finis basée sur l'énergie potentielle d'un milieu isotrope non linéaire en loi de comportement afin d'obtenir la réponse mécanique du milieu *bi-module* précédent. L'implémentation est validée sur un cas de singularité de contrainte en pointe de fissure.
 - Au chapitre 6, on met en évidence le caractère localisé et partitionné du champ de contrainte dans les milieux unilatéraux. On montre en particulier que la solution en contrainte d'un problème impliquant un milieu unilatéral peut-être construite à partir d'une famille de graphes de lignes de tension auto-équilibrés. Les régions en dehors des ces graphes sont auto-équilibrées et libres de contrainte.
 - Enfin, Au chapitre 7, on utilise une approche expérimentale basée sur la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images pour de caractériser le comportement bi-module du voile de fibre de verre ADFORS. Les quelques résultats préliminaires obtenus indiquent que le comportement bi-module du voile peut être mise en évidence par cette approche.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Notation	Description
$\underline{a}$	Vecteur (tenseur d'ordre 1)
$\underline{\underline{a}}$	Tenseur d'ordre 2
$\hat{a}$	Variation infinitésimale de a
$\underline{\underline{a}}^s$	Partie symétrique de $\underline{\underline{a}}$
$\underline{\underline{a}}^a$	Partie antisymétrique de $\underline{\underline{a}}$
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Tenseur des permutations de Levi-Civita
$\underline{\underline{r}}_z$	Tenseur de rotation infinitésimal selon z
$\underline{\underline{a}}^T$	Transposée de $\underline{\underline{a}}$
$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}}$	Double contraction $a_{ij}b_{ji}$
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire $a_i b_i$
$\underline{a} \otimes \underline{b}$	Produit tensoriel $a_i b_j$
$a_{,i}$	Dérivée de a par rapport à la variable x_i

Première partie

Introduction au comportement élastique des réseaux de fibres

NOTATIONS INTRODUITES DANS LA PARTIE 1

Symbole	Description
$n = \{i, j\}$	Fibre n reliant les nœuds i et j
ε_n	Elongation de la fibre n
κ_n	Courbure de la fibre n
γ_n	Cisaillement cinématique de la fibre n
$\underline{t}_n$	Vecteur unitaire tangent à la fibre n (orienté de i vers j)
$\underline{q}_n$	Vecteur unitaire normal à la fibre n
χ_n	Orientation de la fibre n (mesurée par rapport à l'axe $O, \underline{e}_1$)
$\underline{u}_i$	Vecteur déplacement au nœud i
ϕ_i	Rotation au nœud i
ℓ_n	Longueur initiale de la fibre n
k_n	Module élastique longitudinal de la fibre n
b_n	Module élastique de flexion de la fibre n
K_n	Raideur longitudinale de la fibre $K_n = k_n/\ell_n$
B_n	Raideur de flexion de la fibre $B_n = b_n/\ell_n$
$\underline{R}_n$	Vecteur force exercé par la fibre n sur le nœud i
M_n	Couple exercé par la fibre n sur le nœud i
E_n	Energie potentielle élastique de la fibre n
w	Densité d'énergie potentielle élastique du milieu discret
$\underline{U}$	Champ de déplacement continu
Φ	Champ de rotation continu
$\underline{\kappa}$	Gradient de la rotation
$\underline{\underline{E}}$	Champ de déformation du milieu continu de Cosserat
$\mathcal{W}$	Densité d'énergie potentielle élastique du milieu continu
$\underline{\Omega}$	Champ de rotation moyen du milieu continu

Symbole	Description
$\underline{\underline{\sigma}}$	Champ de contrainte du milieu continu de Cosserat
$\underline{\underline{m}}$	Champ de couple de contrainte du milieu continu de Cosserat
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur d'élasticité du milieu continu de Cosserat
$\underline{\underline{\underline{M}}}$	Tenseur d'élasticité angulaire du milieu continu de Cosserat
$\underline{\underline{G}}$	Module de cisaillement du milieu continu
G_c	Module de cisaillement de Cosserat
Ψ	Fonction de distribution d'orientation de fibre
ρ	Densité de fibre (nombre de fibres par unité de volume)
c_f	Concentration de fibres (nombre de fibres déposées par unité de volume)
ℓ_m	Longueur moyenne entre jonctions rigides du réseau
E_f	Module d'Young des fibres

HOMOGENÉISATION DES RÉSEAUX DE FIBRES

Il existe une grande variété de matériaux à l'état naturel ou manufacturé dont la microstructure est constituée d'un assemblage de fibres. Ils ont la particularité d'avoir une densité très faible et peuvent présenter des fonctionnalités intéressantes. A l'état naturel, citons par exemple les tissus biologiques constitués d'une structure fibreuse de collagène (Gibson, 2005; Bel-Brunon *et al.*, 2013). Les composites industriels renforcés par des fibres (Davalos *et al.*, 2001), les laines minérales pour l'isolation thermique et acoustique des bâtiments (Baudequin *et al.*, 1999) ou le papier (Cox, 1952; Ostoja-Starzewski et Stahl, 2000; Bronkhorst, 2003) constituent autant d'exemples de milieux fibreux que l'on trouve parmi les matériaux manufacturés.

Les propriétés physiques de ces milieux dépendent directement de l'agencement local des fibres et de leurs propriétés mécaniques. Le calcul des propriétés homogénéisées passe nécessairement par une phase de modélisation de la microstructure. Dans le cas des milieux fibreux, les microstructures sont en général représentées par un réseau de poutres encastrées à leurs extrémités lorsque les fibres sont suffisamment élancées. Dans le cas d'un réseau périodique, l'assemblage « théorique » correspond exactement à la microstructure du matériau. C'est le cas, par exemple, du matériau céramique cellulaire représenté sur la figure 0.3.a qui est constitué d'un assemblage nanostructuré périodique de poutres en alumine (Meza *et al.*, 2014). Lorsque la répartition des fibres ne peut être connue en tout point du réseau, l'assemblage théorique devra être conforme au milieu réel d'un point de vue statistique (donc en moyenne, sur un domaine suffisamment grand du milieu fibreux). C'est le cas par exemple, du voile ADFORS présenté dans l'introduction générale, et dont on montre ici une acquisition de micro-tomographie X (figure 0.3.b).

Si on s'intéresse à la mécanique globale d'un tel milieu, plusieurs approches théoriques ou numériques sont envisageables. Lorsque l'on dispose d'une représentation détaillée de la microstructure (par exemple, l'image de micro-tomographie de la figure 0.3.b), on peut l'utiliser pour effectuer une simulation directe du matériau qui tient compte de toute la microstructure. Bien que cette méthode fournisse des informations précises sur la transmission des efforts à l'échelle des constituants, elle atteint rapidement ses limites lorsque le nombre de degrés de liberté devient trop élevé. C'est le cas du voile désordonné présenté ici, dont le volume élémentaire représentatif (de l'ordre du centimètre carré) contient des milliers de fibres et donc un nombre inabordable de degrés de liberté pour une simulation discrète à grande échelle.

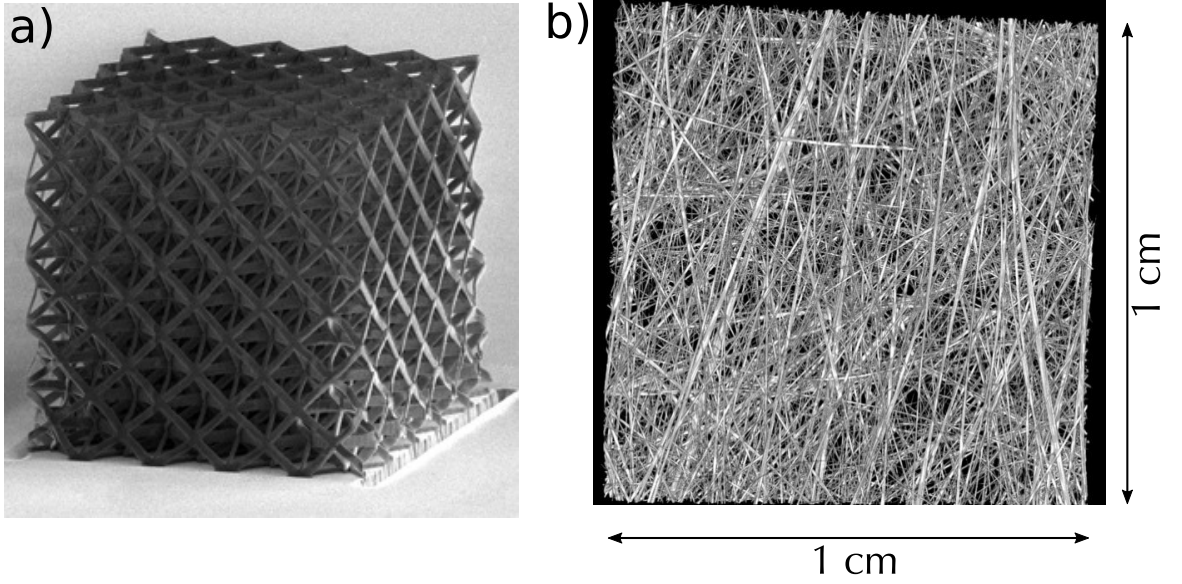


FIGURE 0.3 – a) Vue au microscope électronique à balayage d’un matériau poreux architecturé et constitué d’un assemblage nanostructuré périodique de poutres en alumine (Meza *et al.*, 2014). Sa conception a été faite à partir d’une représentation par un réseau de poutre de Navier-Bernoulli. b) Vue tridimensionnelle obtenue par micro-tomographie du voile de fibres de verre ADFORS (de diamètres approximatifs $13\ \mu\text{m}$) désordonnées et liées par une résine faite d’urée formaldéhyde. Résolution du voxel : $5\ \mu\text{m}$.

Les méthodes d’homogénéisation, qui ont connu des développements considérables depuis les années 60, présentent des avantages évidents car les lois de comportement homogénéisée peuvent être utilisées directement dans les codes de calcul numérique des milieux continus. L’approche par homogénéisation est fondée sur l’hypothèse que l’échelle de variation des champs cinématiques est supérieure à l’échelle de la microstructure (Auriault, 1991). Toute la difficulté consiste donc à conserver toute la phénoménologie du milieu discret lors du passage au milieu continu.

Le choix du milieu continu équivalent dépend de la hiérarchie des échelles du problème. Dans le cas du réseau de poutres de Navier-Bernoulli, le problème fait intervenir trois échelles caractéristiques (voir figure 0.4) : l’échelle macroscopique L , qui représente la taille du domaine fibreux, l’échelle de la microstructure ℓ qui est, dans le cas du milieu désordonné, la moyenne des longueurs entre contacts, et enfin l’épaisseur t des fibres. Si l’homogénéisation suppose effectivement la séparation des échelles microscopiques (ℓ, t) et macroscopique L , c’est l’ordre de grandeur du rapport entre ces échelles qui détermine le type de milieu continu équivalent adapté à la description du milieu hétérogène. La méthode de développement asymptotique double échelle permet de formaliser ce concept (Sánchez-

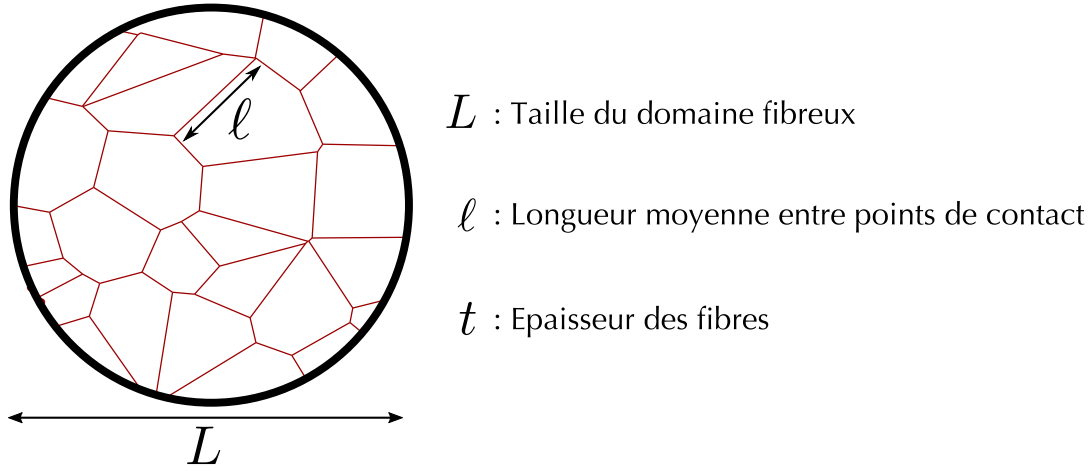


FIGURE 0.4 – Représentation d’un réseau de fibres dans le plan. Le problème contient trois échelles de longueurs : la taille du domaine L , la longueur moyenne entre points de contact ℓ et l’épaisseur des fibres t .

Palencia, 1980; Forest *et al.*, 2001; Buannic et Cartraud, 2001). Ainsi, on peut montrer qu’un milieu classique de Cauchy constitue une représentation continue suffisante du milieu discret sous-jacent lorsque l’échelle macroscopique L est très grande devant l’échelle microscopique ℓ (dans ce cas, c’est le premier terme du développement asymptotique qui est dominant). Lorsque l’échelle micro est du même ordre de grandeur que l’échelle macro, un modèle de Cosserat sera plus adapté et les termes d’ordre supérieur du développement asymptotique ne sont plus négligeables (Bažant et Christensen, 1972; Forest *et al.*, 2001).

Des études numériques par la simulation discrète ont été menées pour étudier l’influence du rapport d’aspect ℓ/t des fibres sur le comportement macroscopique. MacKintosh *et al.* (1995) et Head *et al.* (2003a) ont montré que la déformation moyenne à l’échelle du volume élémentaire représentatif dépend de la densité de fibres : la déformation moyenne d’un milieu fibreux très dense comportant des fibres courtes est quasi-homogène alors que celle d’un milieu dilué (qui contient une majorité de fibres élancées) est hétérogène. Cette différence s’explique par les modes de déformation des fibres. L’élancement moyen étant plus grand dans le milieu dilué, l’énergie élastique de déformation du réseau sera dominée par la flexion des fibres. Dans le cas d’un réseau dense, les fibres sont moins élancées et c’est la déformation longitudinale des fibres qui est prépondérante (Das *et al.*, 2007; Head *et al.*, 2003b). Si le rapport d’aspect des fibres influence le champ de déformation moyen à l’échelle macroscopique, il aura donc une influence sur le choix du modèle continu à choisir pour représenter le milieu hétérogène.

Cette première partie est une présentation succincte des principaux résultats sur l’homogénéisation des assemblages de fibres en mécanique linéaire élastique. Au chapitre 1,

on donne une expression de la rigidité équivalente du réseau de poutres obtenue à partir des développements asymptotiques des champs cinématiques. Cette approche, proposée initialement par [Bažant et Christensen \(1972\)](#), été largement reprise dans la littérature pour développer le calcul du comportement effectif des assemblages de poutres périodiques ([Pradel et Sab, 1998](#); [Warren et Byskov, 2002](#); [Kumar et McDowell, 2004](#)). Au chapitre 2, on présente brièvement la méthode numérique développée pour la simulation discrète d'un réseau de poutres, avec conditions aux limites de Dirichlet et conditions périodiques. Cet outil est utilisé au chapitre 3 pour simuler des microstructures périodiques et aléatoires afin de valider le tenseur d'élasticité présenté au chapitre 1. On présente brièvement les principaux résultats concernant les effets d'échelle L/ℓ (travaux de [Forest et al. \(2001\)](#) et [Tekoglu et Onck \(2005\)](#)) et du rapport d'aspect ℓ/t (travaux de [Head et al. \(2003b\)](#)) sur le comportement effectif. Enfin, quelques résultats théoriques sont confrontés à des mesures expérimentales de module élastique en traction uniaxiale.

RÉSEAU FIBREUX DÉSORDONNÉ : DU DISCRET AU CONTINU...

Dans ce chapitre, on identifie un milieu homogène équivalent de Cosserat à partir d'un assemblage de fibres rectilignes décrites par un modèle de poutre de Navier-Bernoulli. On souligne l'importance des hypothèses de localisation sur la représentation du milieu équivalent. Ainsi, on détermine les modules élastiques de quelques assemblages périodiques régulièrement invoqués dans la littérature, que l'on confrontera à la simulation numérique discrète au chapitre 3. Pour finir, on illustre l'importance des effets d'échelle sur la nature du milieu homogène équivalent.

Sommaire

1.1	Introduction	26
1.2	Energie élastique du réseau de fibres de Navier-Bernoulli	27
1.3	Milieu continu équivalent micropolaire	29
1.3.1	Localisation de la cinématique continu	30
1.4	Modules élastiques des assemblages périodiques et désordonnés	32
1.4.1	Cas des réseaux périodiques	32
1.4.2	Cas du réseau aléatoire	33
1.5	Effet d'échelle et solutions évanescences	35
1.5.1	Longueur d'onde des solutions	36
1.6	Milieu continu équivalent au réseau de ressorts	39

1.1 Introduction

La problématique du comportement effectif des assemblages de fibres a été abondamment étudiée dans la communauté scientifique. Le travail précurseur de Cox (1952) a permis d'établir un comportement effectif d'un réseau de ressorts à partir d'une hypothèse de déformation homogène du milieu. Par la suite, des systèmes plus riches constitués d'un assemblage de poutres ont suscités un intérêt collectif grandissant compte tenu de la place centrale qu'ils occupent dans le domaine de la mécanique des matériaux cellulaires et des tissus biologiques. A ce sujet, on peut distinguer au moins deux communautés scientifiques qui proposent chacune des approches différentes du calcul du comportement effectif.

La communauté des chercheurs en mécanique des matériaux cellulaires emploie couramment l'analyse structurelle en association avec le développement asymptotique des champs cinématiques (Gibson et Ashby, 1997; Tollenaere et Caillerie, 1998; Pradel et Sab, 1998). Dans le cas des milieux périodiques, cette approche aboutit à une loi de comportement effective explicite dont on peut extraire les modules élastiques. Arabnejad et Pasini (2013) présente un tableau résumé des modules élastiques pour quelques assemblages périodiques communs.

La communauté des (bio)physiciens s'intéresse principalement au comportement effectif des tissus biologiques et des matériaux polymères. Les difficultés supplémentaires induites par la microstructure désordonnée et le comportement potentiellement non linéaire des fibres suggèrent l'utilisation de la simulation discrète (Huisman *et al.*, 2007) pour déterminer le comportement effectif en fonction des paramètres tels que la densité (Head *et al.*, 2003b; Heussinger et Frey, 2007), la courbure des fibres (Onck *et al.*, 2005) ou la distribution des raideurs élastiques (Bai *et al.*, 2011).

Dans ce chapitre, on reprend l'approche du développement asymptotique, utilisée par Chen *et al.* (1998) puis par Kumar et McDowell (2004), pour obtenir un tenseur de rigidité équivalent au milieu discret. Cette approche consiste à exprimer la densité d'énergie potentielle élastique du réseau en fonction des champs cinématiques (macroscopiques) continus. L'expression ainsi obtenue est conforme à la densité d'énergie d'un milieu micropolaire (ou milieu de Cosserat) dont on peut extraire un tenseur de rigidité équivalent. Ce résultat sera confronté à la simulation discrète au chapitre 3.

On commence par présenter les hypothèses sur la microstructure ainsi que les conditions nécessaires à l'existence d'un comportement homogène équivalent d'un milieu fibreux bi-dimensionnel (section 1.2). La rigidité équivalente est obtenue par identification à la section 1.3. Au passage, on établit quelques modules élastiques d'assemblages périodiques régulièrement invoqués dans la littérature (cellule carré, triangulaire et nid d'abeilles). Le résultat précédent est étendu au cas d'un assemblage aléatoire de fibres. Pour finir, on illustre l'effet d'échelle dans les milieux micropolaires, qui constitue aujourd'hui un résultat bien identifié (Forest *et al.*, 2001; Tekoğlu et Onck, 2008), sur le problème du cisaillement d'une grille à cellules carrées. On montre que les modes de déformation « étendus » sont prédominants lorsque la longueur caractéristique des fibres est très petite devant l'échelle macroscopique

du milieu (section 1.5).

1.2 Energie élastique du réseau de fibres de Navier-Bernoulli

On considère un réseau de fibres élastiques initialement rectilignes en déformation dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Les fibres ne sont chargées qu'à leurs extrémités que constituent les jonctions nodales du réseau (voir figure 1.1.a). On suppose par ailleurs que les jonctions sont indéformables (les fibres sont encastrées à leurs extrémités) de sorte que seules les fibres contribuent à l'énergie élastique de déformation.

On suppose que les fibres se comportent selon un modèle de poutre de Navier-Bernoulli en élasticité linéaire. On note $n = \{i, j\}$ la fibre d'indice n reliant les nœuds numérotés i et j du réseau. Par ailleurs, on note ℓ_n sa longueur initiale et $\underline{t}_n$ (resp. $\underline{q}_n$) le vecteur unitaire tangent orienté de i vers j (resp. orthogonal à la fibre). La cinématique d'un tel réseau est décrite par les champs de déplacement nodaux $\underline{u}_i$ et de rotation ϕ_i (voir figure 1.1.b). Ainsi, chaque nœud possède 3 degrés de liberté (deux déplacements et une rotation). L'énergie élastique d'une fibre E_n est fonction des trois mesures de déformation suivantes (Bamberger, 1981) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \underline{t}_n \cdot \underline{u}_{ij} / \ell_n \\ \kappa_n &= \phi_{ij} \\ \gamma_n &= \underline{q}_n \cdot \underline{u}_{ij} / \ell_n - (\phi_i + \phi_j) / 2\end{aligned}\tag{1.1}$$

où ε_n représente la mesure de déformation longitudinale, κ_n la mesure de la courbure, γ_n la mesure du cisaillement cinématique, $\underline{u}_{ij} = \underline{u}_j - \underline{u}_i$ et $\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$. On vérifie aisément que ces mesures de déformation sont nulles pour tout mouvement de translation et de rotation infinitésimale. Le modèle de poutre considéré ici est un élément du « premier ordre » ne prenant pas en compte le couplage entre la flexion et l'extension. Cette approximation est suffisante tant que l'effort longitudinal reste faible vis-à-vis de la force critique de flambement de la fibre.

Si l'on note k_n le module élastique longitudinal de la fibre et b_n son module de flexion, l'énergie élastique $E_n(\varepsilon_n, \kappa_n, \gamma_n)$ de la fibre est une fonction quadratique des mesures de déformation ε_n, κ_n et γ_n (Bamberger, 1981) :

$$E_n(\varepsilon_n, \kappa_n, \gamma_n) = \frac{1}{2} k_n \ell_n \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2 \ell_n} b_n \kappa_n^2 + \frac{6}{\ell_n} b_n \gamma_n^2\tag{1.2}$$

Par conséquent, la densité d'énergie potentielle w calculée pour un domaine $\mathcal{D}$ de volume V contenant N_f fibres s'écrit :

$$w(\mathcal{D}) = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N_f} E_n(\varepsilon_n, \kappa_n, \gamma_n)$$

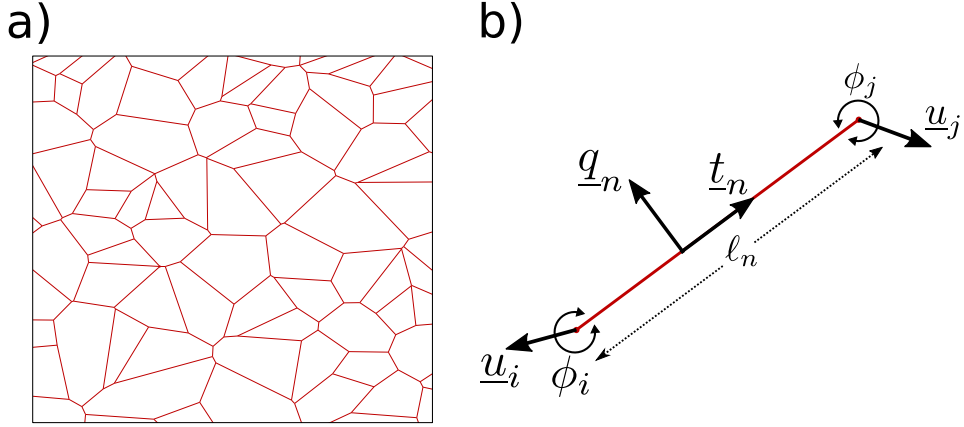


FIGURE 1.1 – a) Exemple de réseau fibreux dans le plan généré par une méthode de Voronoï. b) Champs cinématiques aux nœuds de la fibre $n = \{i, j\}$.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, on omet les bornes de la somme discrète pour simplifier les notations.

On cherche maintenant à calculer la différentielle de l'énergie $w(\mathcal{D})$ en fonction des déplacements $(\underline{u}_i, \phi_i)$ aux nœuds du réseau. Par la suite, on utilise la notation « chapeau » $\hat{\cdot}$ pour désigner la différentielle d'une quantité quelconque a . Ainsi, $\hat{w}$ s'écrit :

$$\hat{w}(\mathcal{D}) = \frac{1}{V} \sum_n \left(k_n \ell_n \varepsilon_n \hat{\varepsilon}_n + \frac{1}{\ell_n} b_n \kappa_n \hat{\kappa}_n + \frac{12}{\ell_n} b_n \gamma_n \hat{\gamma}_n \right)$$

où l'on a omis les bornes de la somme pour alléger les notations. En substituant les déformations (1.1) dans la relation précédente, il vient

$$\hat{w}(\mathcal{D}) = \frac{1}{V} \sum_n \left(\underline{R}_n \cdot \hat{\underline{u}}_{ij} + M_n \cdot \hat{\phi}_{ij} - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n \left(\frac{\hat{\phi}_i + \hat{\phi}_j}{2} \right) \right) \quad (1.3)$$

où l'on a identifié la loi de comportement des fibres avec le vecteur force $\underline{R}_n$ et le couple M_n , tout deux exercés par la fibre n sur le nœud i :

$$\begin{aligned} \underline{R}_n &= k_n \varepsilon_n \underline{t}_n + \frac{12}{\ell_n^2} b_n \gamma_n \underline{q}_n \\ M_n &= \frac{1}{\ell_n} b_n \kappa_n \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'énergie potentielle infinitésimale $\hat{w}$ de la relation (1.3) dépend des champs cinématiques infinitésimaux $(\hat{\underline{u}}_i, \hat{\phi}_i)$ définis ponctuellement sur chaque nœud du réseau. Le milieu homogène équivalent aura nécessairement la même description cinématique. Par conséquent,

on devra le chercher parmi la classe des milieux continus micropolaires (Cosserat et Cosserat, 1909; Eringen, 1999). A la section suivante, on présente la description d'un milieu micropolaire ainsi que l'hypothèse de localisation permettant de relier les champs ponctuels $(\hat{u}_i, \hat{\phi}_i)$ aux champs cinématiques continus.

1.3 Milieu continu équivalent micropolaire

Dans le cas d'un milieu continu de Cosserat, la cinématique à l'échelle du point matériel est décrite par un champ de déplacement $\underline{U}$ auquel s'ajoute un champ de micro-rotation Φ (Cosserat et Cosserat, 1909; Eringen, 1999). Nous avons donc deux mesures indépendantes de la déformation, que l'on note $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\Xi}}$ et qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \mathbf{grad} \underline{U} - \Phi \underline{\underline{r}}_z \\ \underline{\underline{\Xi}} &= \mathbf{grad} \Phi\end{aligned}\tag{1.5}$$

où $\underline{\underline{r}}_z = (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$ est le tenseur de rotation infinitésimal dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. On note par ailleurs que l'on peut décomposer $\underline{\underline{E}}$ en sa partie symétrique et anti-symétrique :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \underline{\underline{E}}^s + \underline{\underline{E}}^a \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \underline{U} + \mathbf{grad}^T \underline{U}) + \left(\frac{1}{2} (\mathbf{grad} \underline{U} - \mathbf{grad}^T \underline{U}) - \Phi \underline{\underline{r}}_z \right)\end{aligned}$$

où l'on retrouve le tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}^s = (\mathbf{grad} \underline{U} + \mathbf{grad}^T \underline{U}) / 2$ des milieux continus de Cauchy. La partie anti-symétrique $\underline{\underline{E}}^a$ peut se réécrire sous la forme $\underline{\underline{E}}^a = (\Omega - \Phi) \underline{\underline{r}}_z$ où l'on a fait apparaître la rotation moyenne du champ de déplacement $\Omega = \frac{1}{2} (U_{2,1} - U_{1,2})$. Sous cette dernière forme, $\underline{\underline{E}}^a$ peut être interprété comme étant la rotation relative des points matériels par rapport à la rotation moyenne Ω . On remarquera que dans le cas d'un milieu de Cauchy, on a $\Omega = \Phi$ et donc $\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{0}}$.

La première variation de la densité d'énergie potentielle $\hat{\mathcal{W}}$ du milieu continu de Cosserat s'écrit (Eringen, 1999) :

$$\hat{\mathcal{W}} = \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{E}}} + \underline{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{\underline{\Xi}}}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes dans la configuration actuelle (qui n'est pas symétrique) et $\underline{\underline{m}}$ le tenseur des couples de contraintes (moment de réaction à la rotation locale Φ). En substituant les mesures de déformation (1.5) dans la relation précédente, il vient :

$$\hat{\mathcal{W}} = \underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{grad} \hat{\underline{U}} + \underline{\underline{m}} \cdot \mathbf{grad} \hat{\Phi} - 2\sigma^a \hat{\Phi}\tag{1.6}$$

où l'on a utilisé la relation $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^s - \sigma^a \underline{\underline{r}}_z$.

La densité d'énergie potentielle infinitésimale $\hat{\mathcal{W}}$ s'exprime en fonction des champs cinématiques continus infinitésimaux $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Phi}})$. Pour pouvoir identifier les contraintes internes continues de (1.6) dans la relation discrète (1.3), il reste à relier la cinématique continue $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Phi}})$ à son équivalent discrète $(\hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{\phi}}_i)$. Ce sujet fait l'objet de la section suivante.

1.3.1 Localisation de la cinématique continu

La localisation des champs cinématiques continus dépend principalement de la microstructure du milieu. Par exemple, dans le cas d'un réseau aléatoire de fibres de Navier-Bernoulli, des études numériques ont montrées que la déformation moyenne à l'échelle du volume élémentaire représentatif dépend de la densité de fibre : la déformation moyenne d'un milieu fibreux très dense est quasi-homogène alors que celle d'un milieu dilué est hétérogène (Head *et al.*, 2003b; Huisman *et al.*, 2007). Cette différence s'explique par les modes de déformation de fibres. L'élancement des fibres étant plus grand dans le milieu dilué, leurs énergies de déformation seront principalement dominées par les changements de courbures. Dans le cas d'un réseau dense, c'est la déformation longitudinale des fibres qui est prépondérante (Head *et al.*, 2003a).

On adopte ici une procédure de localisation classique qui suppose que l'échelle de variation des champs continus est plus grande que l'échelle de la microstructure (caractérisée ici par la longueur moyenne des fibres du réseau). Dans ce cas, on peut écrire les développements asymptotiques des champs discrets $(\hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{\phi}}_i)$ Sánchez-Palencia (1980); Kumar et McDowell (2004), ce qui donne au premier ordre :

$$\begin{aligned}\underline{u}_i &= \underline{U} + \mathbf{grad} \underline{U} \cdot \underline{x}_i \\ \phi_i &= \underline{\Phi} + \mathbf{grad} \underline{\Phi} \cdot \underline{x}_i\end{aligned}\tag{1.7}$$

Les relations de localisation (1.7) sont particulièrement adaptées dans le cas des milieux périodiques (Sab, 1996; Pradel et Sab, 1998). Elles permettent de relier la variation locale des champs de déplacement et de rotation discrète aux champs continus.

Pour finir, en substituant (1.7) dans (1.3), il vient

$$\hat{w}(\Omega) = \frac{1}{V} \sum_n \left(\ell_n(\underline{t}_n \otimes \underline{R}_n) : \mathbf{grad} \hat{\underline{U}} + \ell_n M_n \underline{t}_n \cdot \mathbf{grad} \hat{\underline{\Phi}} - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n \hat{\underline{\Phi}} \right)\tag{1.8}$$

où l'on a négligé le terme $(\mathbf{grad} \hat{\underline{\Phi}} \cdot \underline{t}_n) \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n$.

En comparant les termes de la relation (1.8) précédente avec son équivalent continu (1.6), on peut identifier le champ de contrainte continu $\underline{\underline{\sigma}}$ et de couple de contrainte $\underline{\underline{m}}$ pour un réseau discret :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \frac{1}{V} \sum_n \ell_n \underline{t}_n \otimes \underline{R}_n \\ \underline{\underline{m}} &= \frac{1}{V} \sum_n \ell_n M_n \underline{t}_n\end{aligned}\tag{1.9}$$

Les relations (1.9) constituent les lois de comportement continues du réseau discret de fibres de Navier-Bernoulli, obtenues avec la localisation (1.7). En substituant la loi de comportement de la fibre (1.4) et les relations de localisation (1.7) dans les relations (1.9), il vient :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \frac{1}{V} \sum_n \left(\ell_n k_n \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n + \frac{12}{\ell_n} b_n \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \right) : \mathbf{grad} \underline{U} - \sum_n \frac{12}{\ell_n} b_n \Phi \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \\ \underline{m} &= \frac{1}{V} \sum_n (b_n \ell_n \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n) : \mathbf{grad} \Phi\end{aligned}\tag{1.10}$$

Sous cette dernière forme explicite (1.10), on peut identifier les deux tenseurs de rigidité du milieu homogène équivalent $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{M}}$, qui vérifient les relations d'élasticité linéaire $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}}$ et $\underline{m} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Xi}}$ où l'on rappelle que les mesures de déformation $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\Xi}}$ sont données par la relation (1.5). Il vient les tenseurs d'élasticité suivants :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}} &= \frac{1}{V} \sum_n \left(\ell_n k_n \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n + \frac{12}{\ell_n} b_n \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \right) \\ \underline{\underline{M}} &= \frac{1}{V} \sum_n b_n \ell_n \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n\end{aligned}\tag{1.11}$$

Les tenseurs de rigidité $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{M}}$ ne dépendent que de la topologie locale de la cellule élémentaire et des propriétés mécaniques des fibres.

Ces tenseurs d'élasticité ont été introduits pour la première fois par [Chen et al. \(1998\)](#) pour les assemblages en nid d'abeilles de poutres de Navier-Bernoulli. Notons que (1.11) n'est valable que dans le cadre des relations de localisation (1.7), donc uniquement lorsque la taille caractéristique des hétérogénéités est très petite devant la taille du domaine macroscopique d'étude.

Il est important de préciser que l'approche par l'énergie potentielle présentée ci-dessus ne donne qu'une borne supérieure de l'élasticité homogène. En effet, les déplacements discrets obtenus par la localisation cinématique (1.7) ne vérifient pas systématiquement l'équilibre local du réseau fibreux. Les modules élastiques obtenus avec 1.11 sont donc surévalués par rapport au module effectif exact. Cependant, lorsque l'équilibre local est vérifié, ce tenseur d'élasticité est exactement celui du milieu homogène équivalent. Ce point sera abordé plus en détail au chapitre 3.

Dans les sections 1.4 et 1.4.2, on se propose d'évaluer les modules élastiques de certains assemblages périodiques et aléatoires de fibres à partir des relations (1.11). La pertinence de cette homogénéisation sera évaluée numériquement au chapitre 3.

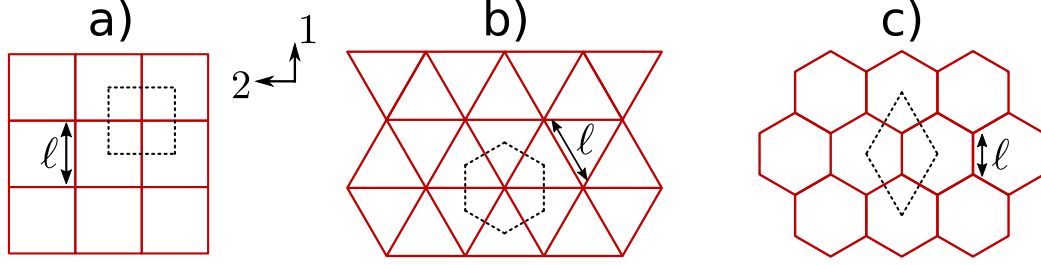


FIGURE 1.2 – Grilles périodiques carrée (a), triangulaire (b) et en nids d’abeilles (c). Les fibres sont de la même longueur ℓ pour les trois grilles. Les cellules élémentaires sont représentées en pointillé.

1.4 Modules élastiques des assemblages périodiques et désordonnés

1.4.1 Cas des réseaux périodiques

On se propose d’évaluer les modules élastiques des assemblages périodiques de fibres en cellules carrées, triangulaires et en nids d’abeilles, comme illustrées sur la figure (1.2). Dans les trois cas, on suppose que les fibres ont toutes la même longueur ℓ et les mêmes modules de traction k et de flexion b . Pour chaque géométrie, on identifie une cellule élémentaire périodique (représentée en pointillé sur la figure (1.2)).

Pour identifier les modules élastiques effectifs du milieu fibreux, il suffit de calculer les composantes de $\underline{\underline{C}}$ et de procéder par identification avec la loi de comportement du milieu micropolaire continu. Par exemple, dans le cas du réseau triangulaire, la cellule élémentaire de surface $\ell^2 \tan(\pi/3)/2$ est composée des trois fibres de directions $\underline{t}_1 = (0, 1)$, $\underline{t}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\underline{t}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, le tenseur de rigidité $\underline{\underline{C}}$ calculé avec (1.11) s’écrit, en notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4\ell^3} \begin{pmatrix} 3k\ell^2 + 12b & k\ell^2 - 12b & 0 & 0 \\ k\ell^2 - 12b & 3k\ell^2 + 12b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\ell^2 - 12b & k\ell^2 + 36b \\ 0 & 0 & k\ell^2 + 36b & k\ell^2 - 12b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ E_{21} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, l’élasticité d’un milieu isotrope continu de Cosserat s’écrit en fonction de trois modules élastiques dans le cas général $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{1}} + 2G \underline{\underline{E}}^s + 2G_c \underline{\underline{E}}^a$ avec λ , le premier coefficient de Lamé, G , le module de cisaillement et G_c , le module de cisaillement qui vient corriger G pour tenir compte des effets de la partie antisymétrique de $\underline{\underline{E}}$. En

Modules	Carrée	Triangulaire	Nid d'abeilles
E	$\frac{k}{l}$	$\frac{2k(12b+k\ell^2)}{\sqrt{3}\ell(4b+k\ell^2)}$	$\frac{\sqrt{3}k}{6\ell}$
G	$\frac{6b}{\ell^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{12b}{\ell^3} + \frac{k}{\ell} \right)$	$\sqrt{3} \left(\frac{k}{12\ell} + \frac{b}{\ell^3} \right)$
G_c	$\frac{12b}{\ell^3}$	$\frac{6\sqrt{3}b}{\ell^3}$	$\frac{2\sqrt{3}b}{\ell^3}$

TABLE 1.1 – Modules élastiques des grilles périodiques carrées, triangulaires et en nids d'abeilles. Dans le cas du réseau à cellules carrées, le module d'Young est calculé dans l'une des deux orientations des fibres et les modules de cisaillement sont calculés par rapport aux deux orientations des fibres.

notation de Voigt, on a :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G + G_c & G - G_c \\ 0 & 0 & G - G_c & G + G_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ E_{21} \end{pmatrix}$$

L'identification des modules élastiques est immédiate et on obtient les résultats présentés dans le tableau (1.1). On procède de la même façon pour les grilles périodiques carrées et en nids d'abeilles.

1.4.2 Cas du réseau aléatoire

Les expressions de $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{M}}$ données par la relation (1.11) sont composées d'une somme discrète sur les orientations de fibres. Ces expressions sont adaptées au calcul de la rigidité d'un milieu périodique car il suffit de dénombrer les orientations de fibre qui constituent la cellule périodique élémentaire.

Dans le cas d'un réseau désordonné, on calcule les propriétés effectives sur un volume élémentaire représentatif du milieu qui est constitué d'un très grand nombre de fibres (Borner *et al.*, 2001). La somme discrète peut alors être approchée par une intégration continue sur les orientations des fibres. Dans ce cas, le milieu fibreux est caractérisé localement par deux grandeurs continues :

- une fonction continue de distribution d'orientation $\Psi(\chi)$ où χ désigne l'orientation dans le plan, $\chi \in [-\pi/2, \pi/2]$, mesurée par rapport à l'axe $(O, \underline{e}_1)$,
- une densité de fibre $\rho = L_T(V)/V$ où $L_T(V)$ représente la longueur totale de fibre contenue dans le volume V .

La fonction de distribution d'orientation $\Psi(\chi)$ permet de répartir une quantité extensive associée à chaque fibre en fonction de son orientation. Ainsi, si on considère la quantité a_n

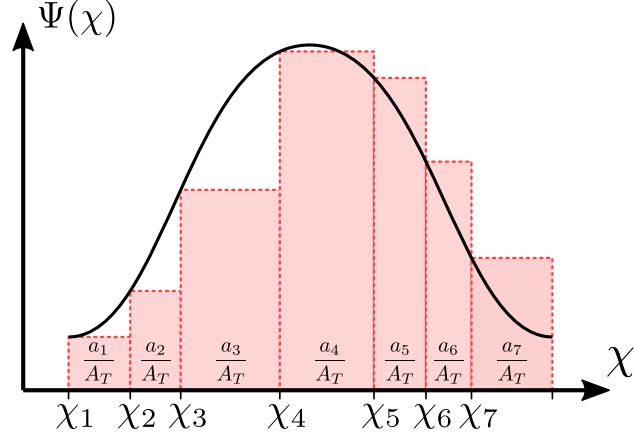


FIGURE 1.3 – Fonction de distribution d'orientation $\Psi(\chi)$. Les quantités discrètes a_n/A_T avec $A_T(V) = \sum_{n=1}^{N_f} a_n$ sont représentées par les aires colorées. La définition de Ψ par la relation (1.12) permet le passage à la limite continue lorsque $N_f \rightarrow \infty$.

associée à chaque fibre n d'un volume V contenant N_f fibres et la somme totale $A_T(V) = \sum_{n=1}^{N_f} a_n$, alors on a la relation suivante entre Ψ et a_n :

$$\frac{a_n}{A_T} = \Psi(\chi_n) \delta\chi_n \quad (1.12)$$

où $\delta\chi_n = \chi_{n+1} - \chi_n$, en supposant que les fibres sont indexées par ordre croissant de leurs orientations χ_n . Une illustration de la relation (1.12) est donnée à la figure (1.3). La définition de Ψ par la relation (1.12) permet l'approximation de la somme discrète : $\sum_{n=1}^{N_f} \frac{a_n}{A_T} = \sum_{n=1}^{N_f} \Psi(\chi_n) \delta\chi_n \xrightarrow{N_f \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi(\chi) d\chi = 1$.

En utilisant (1.12) dans l'expression de l'élasticité homogène (1.11) et en supposant pour simplifier que les propriétés mécaniques des fibres sont constantes $k_n = k$ et $b_n = b$, il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \rho \sum_n \left(k \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n + 12b \frac{L_T^*}{L_T} \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \otimes \underline{t}_n \otimes \underline{q}_n \right) \Psi(\chi_n) \delta\chi_n \\ \underline{\underline{M}} &= \rho \sum_n b \underline{t}_n \otimes \underline{t}_n \Psi(\chi_n) \delta\chi_n \end{aligned}$$

avec la longueur totale de fibre $L_T = \sum_{n=1}^{N_f} \ell_n$ et la somme des inverses des longueurs de fibre $L_T^* = \sum_{n=1}^{N_f} \frac{1}{\ell_n}$.

Enfin, les sommes peuvent être approchées par l'intégration continue suivante :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}} &\simeq \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(k \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} + \frac{A}{\ell_m^2} b \underline{t} \otimes \underline{q} \otimes \underline{t} \otimes \underline{q} \right) \Psi(\chi) d\chi \\ \underline{\underline{M}} &\simeq \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \Psi(\chi) \underline{t} \otimes \underline{t} d\chi\end{aligned}\tag{1.13}$$

avec $\ell_m = \langle \ell_n \rangle$ la longueur moyenne entre nœuds du réseau et $A \simeq 12$ une constante numérique que l'on obtient par approximation de l'espérance $\langle 1/\ell_n \rangle$.

On remarquera que cette dernière relation fait apparaître des propriétés géométriques qui dépendent du procédé d'assemblage du réseau fibreux intrinsèques : la longueur moyenne entre nœuds de la microstructure ℓ_m , la densité ρ et l'anisotropie du réseau, décrite par Ψ . La relation (1.13) sera appliquée pour le cas d'un réseau aléatoire de Poisson au chapitre 3. Le module d'Young obtenu par (1.13) fera l'objet d'une confrontation avec la simulation numérique discrète présentée au chapitre 2.

1.5 Effet d'échelle et solutions évanescences

Le milieu homogène équivalent présenté dans la section précédente a été obtenu avec l'hypothèse de localisation (1.7) qui suppose que la longueur moyenne des hétérogénéités est petite devant l'échelle de longueur caractéristique de la déformation sur le VER. En pratique, l'hypothèse précédente se justifie lorsque la moyenne des petites perturbations du champ de déformation dues à la microstructure s'annule sur le VER. Dans le cas d'un milieu périodique, la pertinence de l'expression (1.11) dépend de l'écart entre le champ de déformation réel et sa moyenne.

Cependant, dans le cas d'un milieu désordonné, nous avons supposé implicitement que l'échelle des hétérogénéités est négligeable devant l'échelle macroscopique d'étude (le VER du réseau discret étant l'équivalent d'un point matériel dans le milieu continu, nous avons implicitement séparé ces deux échelles). Par conséquent, on peut s'interroger sur la nécessité d'utiliser une description de Cosserat pour le milieu équivalent effectif. En effet, dans le cadre de l'homogénéisation des milieux de Cosserat périodiques hétérogènes, *Forest et al.* (2001) ont employé les développements asymptotiques double échelle afin de déterminer le milieu homogène équivalent. Ils ont montré que la nature du milieu homogène équivalent dépend de la hiérarchie des échelles de longueur du problème. Par exemple, dans le cas du milieu fibreux de poutres de Navier-Bernoulli présenté ci-dessus, le problème contient trois échelles de longueurs : la longueur moyenne des fibres ℓ , la longueur interne de Cosserat $t = \sqrt{b/k}$ (correspondant à l'épaisseur des fibres) et la longueur macroscopique d'observation L . Lorsque la séparation des échelles microscopique et macroscopique est vérifiée, le milieu équivalent peut être décrit par un milieu classique de Cauchy. Cette conclusion est aussi partagée par des études numériques basées sur la simulation discrète. Ainsi, *Kouznetsova et al.* (2004) ont étudié le cas du cisaillement d'une couche constituée d'un assemblage

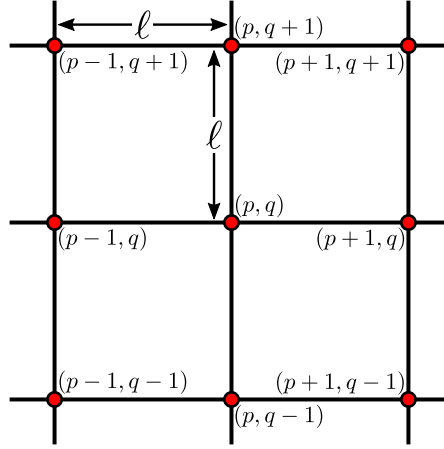


FIGURE 1.4 – Assemblage périodique en cellules carrées de poutre de Navier-Bernoulli.

périodique de poutres. Ils ont montré que l'effort résultant sur la frontière supérieure de la couche tend vers celui que l'on obtiendrait avec un milieu équivalent de Cauchy en déformation homogène. Des études numériques ultérieures sur des géométries plus complexes et des milieux cellulaires aléatoires de Voronoï ont été menées par Tekoğlu et Onck (2008) dont les conclusions viennent conforter celles de Forest *et al.* (2001).

Dans cette section, on se propose d'illustrer la séparation des échelles micro/macro sur un assemblage périodique en cellules carrées de poutres de Navier-Bernoulli. On considère le milieu infini constitué d'un réseau de poutres périodiques comme décrit à la figure (1.4). Les poutres sont identiques (module de traction k et module de flexion b) et régulièrement espacées d'une longueur ℓ dans les deux directions.

1.5.1 Longueur d'onde des solutions

Par la suite, on considère pour simplifier le cas d'une invariance des champs selon la direction verticale. La loi de comportement d'une poutre (1.4) permet d'écrire la condition d'équilibre des forces et moments au nœud central (p, q) :

$$\begin{aligned} k(u_{p+1} - 2u_p + u_{p-1}) &= 0 \\ \ell(\phi_{p+1} - \phi_{p-1}) - 2(v_{p+1} - 2v_p + v_{p-1}) &= 0 \\ \ell(\phi_{p+1} + \phi_{p-1} + 10\phi_p) - 3(v_{p+1} - v_{p-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec $(u_{p,q}, v_{p,q})$ le déplacement et $\phi_{p,q}$ la rotation au nœud (p, q) . Remarquons que la première relation est découplée des autres et peut être résolue indépendamment.

On commence par rechercher des solutions (u_p, v_p, ϕ_p) exponentiellement variables du type :

$$(u_p, v_p, \phi_p) = (u_0, v_0, \phi_0) \exp[j\lambda\ell p] \quad (1.15)$$

avec $j^2 = -1$ et λ le nombre d'onde de la solution discrète.

En substituant (1.15) dans (1.14), on obtient la relation $\underline{\underline{K}} \cdot \underline{X}_0 = \underline{0}$ avec $\underline{X}_0 = (u_0, v_0, \phi_0)$:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k(\cos(\lambda\ell) - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24b}{\ell}(\cos(\lambda\ell) - 1) & -12jb \sin(\lambda\ell) \\ 0 & \frac{12jb}{\ell} \sin(\lambda\ell) & -4b(\cos(\lambda\ell) + 5) \end{pmatrix}$$

Les solutions de $\underline{\underline{K}} \cdot \underline{X}_0 = \underline{0}$ sont données par la relation de dégénérescence $\det \underline{\underline{K}} = 0$:

$$(\cos(\lambda\ell) - 1) (3 \sin^2(\lambda\ell) + 2 \cos^2(\lambda\ell) + 8 \cos(\lambda\ell) - 10) = 0 \quad (1.16)$$

La relation de dispersion possède les trois racines $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{j}{\ell} \operatorname{arctanh} \frac{4\sqrt{3}}{7}$ et $\lambda_2 = -\frac{j}{\ell} \operatorname{arctanh} \frac{4\sqrt{3}}{7}$ avec $\operatorname{arctanh} \frac{4\sqrt{3}}{7} \simeq 2.63$

- Mode étendu $\lambda_1 = 0$: cette racine correspond aux solutions linéaires. Ce mode donne lieu naissance à la classe de solution que l'on obtient sous l'approximation des champs continus lentement variables en espace avec le développement asymptotique $u_{p+1} - u_p = \ell \frac{\partial U}{\partial x}$ où $U(x)$ est la solution du milieu continu équivalent.
- Modes « évanescents » λ_1 et λ_2 : ces racines correspondent à un mode de déformation évanescents lorsque $p \rightarrow +\infty$ (resp. $p \rightarrow -\infty$). Comme les exponentielles ont le même taux de décroissance de part et d'autre de $p = 0$, on a $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Pour obtenir les solutions (u_p, v_p, ϕ_p) de l'équilibre (1.14), on peut résoudre directement ces équations par récurrence. Pour simplifier l'écriture de la solution, on suppose que la longueur des mailles vaut l'unité $\ell = 1$. On peut réécrire (1.14) sous la forme d'une récurrence simple du premier ordre $Y_{p+1} = MY_p$ avec $Y_p = (X_p, X_{p-1})$, $X_p = (u_p, v_p, \phi_p)$ et M une matrice carrée de taille 4×4 au mieux triangularisable. On donne ici directement les solutions de ce problème :

$$\begin{aligned} u_p &= u_0 + p(u_1 - u_0) \\ v_p &= \frac{1}{12} \zeta_1^p \left(- (3 + 2\sqrt{3}) v_0 + (3 + 2\sqrt{3}) v_1 - (3\sqrt{3} + 5) \phi_0 - (\sqrt{3} + 1) \phi_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{12} \zeta_2^p \left(- (3 - 2\sqrt{3}) v_0 + (3 - 2\sqrt{3}) v_1 + (3\sqrt{3} - 5) \phi_0 + (\sqrt{3} - 1) \phi_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} ((9 - 12p)v_0 + (12p - 3)v_1 + (5 - 6p)\phi_0 + (1 - 6p)\phi_1) \\ \phi_p &= \frac{1}{12} \zeta_1^p \left((6 + 3\sqrt{3}) v_0 - (6 + 3\sqrt{3}) v_1 + (9 + 5\sqrt{3}) \phi_0 + (3 + \sqrt{3}) \phi_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{12} \zeta_2^p \left((6 - 3\sqrt{3}) v_0 - (6 - 3\sqrt{3}) v_1 + (9 - 3\sqrt{3}) \phi_0 + (3 - \sqrt{3}) \phi_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (2v_0 - 2v_1 + \phi_0 + \phi_1) \end{aligned}$$

avec $\zeta_1 = 7 - 4\sqrt{3} \simeq 0.07$ et $\zeta_2 = 7 + 4\sqrt{3} \simeq 13.92$. En se restreignant au cas $p \geq 0$ (milieu semi-infini, les termes en ζ_2^p n'ont plus lieu d'être), on cherche les solutions avec

les conditions aux limites suivantes $v_0 = 0$ et $\phi_\infty = 0$, ce qui correspond au cas d'une rotation appliquée aux nœuds $p = 0$ tout en bloquant la rotation « loin » de la frontière du demi-plan, on obtient les constantes correspondantes $v_1 = 2(2 - \sqrt{3})\phi_0$ et $\phi_1 = \zeta_1\phi_0$ ainsi que les solutions suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_p &= \zeta_1^p \phi_0 \\ v_p &= \frac{(\zeta_1^p - 1)\phi_0}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Les modes étendus correspondent à une rotation ϕ_p constante (donc $\phi_p = \phi_0$) et tel que $v_0 = 0$. On a donc les solutions suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_p &= \phi_0 \\ v_p &= 2p\phi_0\end{aligned}$$

Ces deux solutions sont représentées sur la figure 1.5. On voit que la représentation de Cosserat induit des modes évanescents qui n'existent que près des conditions de bord. Par conséquent, si on se place à une échelle d'étude très grande devant la taille des mailles ℓ , la solution sera dominée par les modes étendus, que l'on aurait obtenus avec un milieu classique de Cauchy. Pour s'en convaincre, on peut simplement substituer (u_p, v_p, ϕ_p) par les développements $u_{p+1} - u_p = \ell \frac{\partial U}{\partial x}$, $v_{p+1} - v_p = \ell \frac{\partial V}{\partial x}$, et $\phi_{p+1} - \phi_p = \ell \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ où U, V et Φ sont des champs continus du milieu homogène équivalent. Cette hypothèse n'étant valable que pour $\ell \rightarrow 0$, on obtient les équations d'équilibres continues $d^2U/dx^2 = 0$, $d^2U/dx^2 - d\Phi/dx = 0$ et $2\Phi - dV/dx = 0$ qui ne génèrent que des solutions linéairement variables.

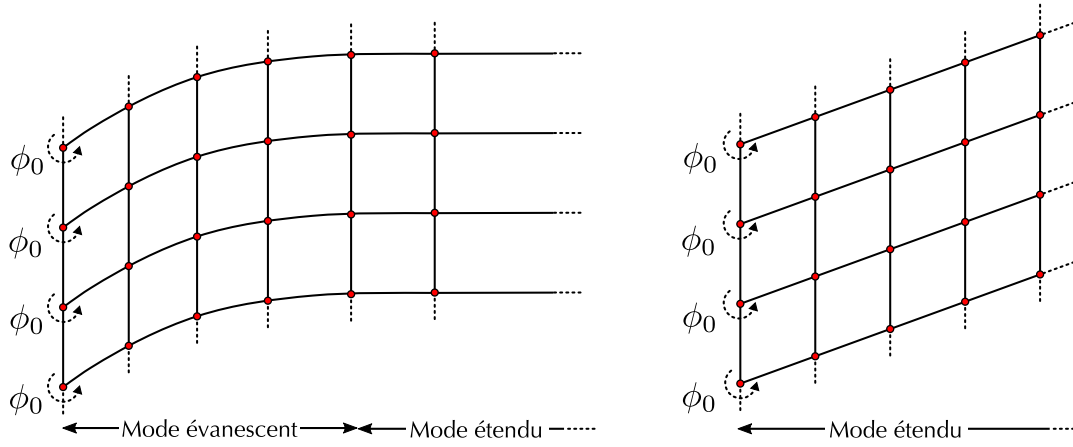


FIGURE 1.5 – Déformée, solution du problème d'équilibre (1.14), avec les conditions aux limites $\phi_0 = \phi$, $v_0 = 0$ et $\phi_\infty = 0$. A gauche, la solution contient le mode évanescent et le mode étendu. A droite, la déformée que l'on obtiendrait avec l'approximation des champs lentement variables en espace : tout se passe comme si les poutres étaient articulées et la rotation ϕ_p constante. On retrouve la solution d'un problème classique de mécanique des milieux continus de Cauchy, qui ne contient que des modes étendus.

1.6 Milieu continu équivalent au réseau de ressorts

Nous venons de voir à la section précédente que la mécanique classique de Cauchy représente une approximation suffisante pour le milieu homogène équivalent lorsque l'échelle macroscopique d'observation L est très grande devant la longueur des hétérogénéités et la longueur interne de Cosserat. Par conséquent, on se propose de réécrire les tenseurs de rigidité (1.13) dans le cas particulier où la rotation interne Φ est constante et toujours alignée avec la rotation moyenne du champ de déplacement $\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$. Dans ce cas, on a $\underline{\underline{E}}^a = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{0}}$, et la relation (1.13) devient :

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (k \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t}) \Psi(\chi) d\chi \quad (1.17)$$

avec $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}}$. Dans la dernière relation, seule la composante longitudinale des forces est prise en compte pour le calcul de la rigidité. On aurait obtenu le même résultat en considérant des ressorts à la place des poutres de Navier-Bernoulli.

Dans le cas d'un milieu isotrope, on a $\Psi = 1/\pi$ et on peut écrire explicitement la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\rho k \pi}{8} (\text{Tr}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \underline{\underline{\underline{1}}} + 2 \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \quad (1.18)$$

avec $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \underline{U} + \mathbf{grad}^T \underline{U})$. La loi de comportement (1.18) est celle d'un système à force centrale. Le coefficient de Poisson d'un tel milieu à 2D vaut $\nu = \frac{1}{3}$.

Conclusions

Le tenseur d'élasticité 1.11 a été obtenu en écrivant l'égalité entre l'énergie potentielle discrète et continue par l'intermédiaire d'un développement asymptotique au premier ordre des champs de déplacement et de rotation discrets. Par conséquent, ces champs cinématiques discrets ne permettent pas de vérifier systématiquement les équations d'équilibre local et le tenseur d'élasticité 1.11 ne donne qu'une borne supérieure des modules élastiques du milieu homogène équivalent.

De plus, nous avons vu que le comportement effectif dépend d'un effet d'échelle, plus précisément du rapport entre la taille du domaine fibreux sollicité et la longueur moyenne entre noeuds du réseau. Lorsque la séparation des échelles est vérifiée, la déformation au sein du réseau peut-être décrite par une cinématique moins riche que celui du milieu micropolaire (suivant les valeurs du rapport d'échelle, cela peut-être un milieu à couple de contrainte ou simplement un milieu de Cauchy classique).

Pour comparer l'écart entre la rigidité obtenue par 1.11 et la rigidité exacte d'un assemblage donné, on souhaite se munir d'un outil de simulation discrète du réseau fibreux adapté des méthodes couramment utilisées en dynamique moléculaire. C'est l'objet du chapitre suivant.

Dans ce chapitre, on présente la démarche employée pour la simulation discrète d'un réseau de fibres. La formulation comprend le cas du réseau de ressorts articulés ainsi que celui des fibres avec modèle de Navier-Bernoulli. On considère d'abord le cas des conditions de Dirichlet en déplacements imposés, puis celui des conditions de frontières périodiques. Enfin, on présente brièvement la méthode itérative employée pour la minimisation de l'énergie potentielle.

Sommaire

2.1	Introduction	42
2.2	Réseau de ressorts	42
2.2.1	Problème aux limites en déplacement	43
2.2.2	Conditions périodiques en déformation imposée	44
2.3	Réseau de poutres de Navier-Bernoulli	45
2.3.1	Problème aux limites en déplacement	45
2.3.2	Conditions périodiques en déformation imposée	46
2.4	Méthode de minimisation de l'énergie élastique	46

2.1 Introduction

Pour confronter la raideur exacte d'un milieu fibreux à la raideur homogénéisée présentée au chapitre précédent, on souhaite se munir d'un outil de simulation discrète du réseau fibreux. La littérature dédiée à ce sujet est abondante et propose plusieurs variantes des méthodes couramment utilisées en dynamique moléculaire (Allen et Tildesley, 1989) et adaptées à la simulation des matériaux polymères. Par exemple, les travaux de Head *et al.* (2003b) sur le comportement mécanique des réseaux de cytosquelettes reposent largement sur la simulation discrète. Leur méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie hamiltonienne qui dépend d'un vecteur d'état du réseau. La déformation longitudinale d'une fibre dépend de la distance des deux noeuds aux extrémités de la fibre. Pour calculer la déformation de flexion, une articulation est ajoutée au centre de chaque fibre auquel on associe une raideur angulaire. Ainsi, l'énergie est une fonction hamiltonienne qui dépend des déplacements nodaux et des rotations aux centres de chaque fibre. Cette approche a été reprise par Onck *et al.* (2005) et étendue au cas des fibres avec courbure initiale au repos.

Dans ce chapitre, on présente sommairement la méthode adoptée pour simuler des réseaux de fibres composés de ressorts (section 2.2) ou de poutres de Navier-Bernoulli (section 2.3). Dans un assemblage de ressorts, les noeuds sont articulés et leurs déplacements constituent les degrés de liberté du système. Lorsque les fibres sont représentées par des poutres de Navier-Bernoulli, les noeuds sont indéformables et les rotations nodales constituent des degrés de liberté supplémentaires. Il est à noter que les fibres ne sont pas discrétisées dans notre méthode : l'énergie de flexion est calculée à partir de la différence de rotation nodale aux extrémités.

La formulation présentée ici comprend deux types de condition aux limites : des conditions de Dirichlet en déplacements imposés ou des conditions de frontières périodiques. Avec les conditions de Dirichlet, les degrés de liberté sont les inconnues cinématiques nodales. Avec des conditions périodiques, il est possible d'imposer une déformation moyenne macroscopique au réseau. Dans ce cas, il faut ajouter aux inconnues nodales les composantes de la déformation macroscopique de la boîte englobante qui n'ont pas été imposées.

Enfin, on présente brièvement la méthode itérative employée pour la minimisation de l'énergie potentielle (section 2.4).

2.2 Réseau de ressorts

On considère un réseau contenant N_f ressorts articulés à leurs extrémités. On rappelle que les fibres sont numérotées par leurs indices $n \in [1; N_f]$ et qu'on associe à chaque fibre la paire d'indices $n = \{i, j\}$ où i et j désignent les indices des noeuds aux extrémités. On note $K_n = k_n/\ell_n$ la raideur longitudinale de la fibre n et ℓ_n sa longueur initiale.

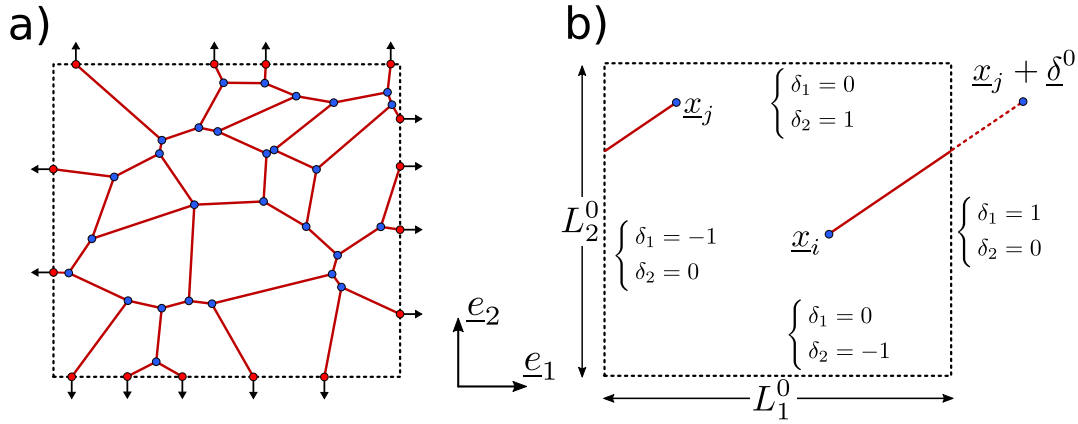


FIGURE 2.1 – a) Conditions de Dirichlet en déplacement imposé sur les nœuds de frontière du réseau. Les nœuds intérieurs constituent les degrés de liberté du système. b) Conditions périodiques : la déformation de la boîte englobante est imposée via la transformation homogène $\underline{F}$. Lorsqu'une fibre franchit l'une des 4 frontières, la position du nœud sortant est corrigé par le vecteur $\underline{\delta}^0$.

2.2.1 Problème aux limites en déplacement

Supposons qu'un déplacement est imposé sur les nœuds de frontière du réseau (voir figure 2.1.a). Les P nœuds intérieurs restants constituent les degrés de liberté du réseau (représentés en bleu sur la figure 2.1.a). On note $\underline{x}_i$ la position du nœud i et $\underline{X} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_P)$ le vecteur d'état du réseau qui contient les positions des nœuds intérieurs. L'énergie potentielle totale du réseau $W(\underline{X})$ s'écrit :

$$W(\underline{X}) = \frac{1}{2} \sum_n K_n \left(\left| \underline{x}_{i(n)j(n)} \right| - \ell_n \right)^2 \quad (2.1)$$

où $i(n)$ et $j(n)$ sont des fonctions de $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui associent à chaque fibre n les indices des nœuds aux extrémités et $\underline{x}_{i(n)j(n)} = \underline{x}_{j(n)} - \underline{x}_{i(n)}$. Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, on omettra la dépendance en n des indices i et j . Notons que l'expression de l'énergie reste valable en grands déplacements.

Le gradient de l'énergie potentielle est nécessaire afin d'estimer une direction de descente pour la méthode de minimisation décrite à la section 2.4. La différentielle de l'énergie s'écrit $dW = \sum_n \underline{R}_n \cdot d\underline{x}_{ij}$ où

$$\underline{R}_n = K_n \left(\left| \underline{x}_{ij} \right| - \ell_n \right) \underline{t}_n \quad (2.2)$$

représente la force appliquée par la fibre n sur le nœud i .

Si on considère un nœud intérieur $i_0 \in [1; P]$, alors on a $d\underline{x}_{ij} = n_{ij} d\underline{x}_{i_0}$ avec $n_{ij} = 1$ (resp. $n_{ij} = -1$) si $j = i_0$ (resp. $i = i_0$) et $n_{ij} = 0$ si la fibre n'est pas reliée au nœud i_0 . Notons que

seuls les liens reliés au nœud i_0 contribueront au gradient de W . Par conséquent, si on note $\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}}$ l'opérateur gradient par rapport à la position $\underline{x}_{i_0}$, il vient $dW = \mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W \cdot d\underline{x}_{i_0}$ avec

$$\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W = \sum_n n_{ij} \underline{R}_n \quad (2.3)$$

Ainsi, $(-\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W)$ représente la résultante des efforts appliqués sur le nœud i_0 . Le vecteur gradient généralisé (de dimension $2P$) est l'assemblage des vecteurs gradients pour chaque nœud intérieur : $\mathbf{grad} W = (\mathbf{grad}_{\underline{x}_1} W, \dots, \mathbf{grad}_{\underline{x}_P} W)$. Une présentation succincte de la méthode itérative de minimisation de W est brièvement exposée à la section 2.4.

2.2.2 Conditions périodiques en déformation imposée

Dans le cas des frontières périodiques, les fibres qui traversent les frontières sont réinsérées dans le réseau à partir de la frontière parallèle opposée de la boîte englobante. Par exemple, pour calculer l'énergie potentielle de la fibre n représentée sur la figure 2.1.b, on corrige la position $\underline{x}_j$ du nœud j par le vecteur $\underline{\delta}^0 = L_1^0 \underline{e}_1$ où L_1^0 et L_2^0 représentent les dimensions de la boîte englobante non déformée. Dans le cas général, on a

$$\underline{\delta}^0 = \delta_1 L_1^0 \underline{e}_1 + \delta_2 L_2^0 \underline{e}_2 \quad (2.4)$$

où les différentes valeurs de δ_1 et δ_2 sont représentées sur la figure 2.1.b pour chacune des frontières.

L'énergie potentielle totale du réseau périodique s'écrit

$$W(\underline{X}) = \frac{1}{2} \sum_n K_n (|\underline{F} \cdot \tilde{\underline{x}}_{ij}| - \ell_n)^2 \quad (2.5)$$

où $\underline{F}$ est la transformation homogène de la boîte englobante $\underline{F} = \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ et $\tilde{\underline{x}}_{ij} = \underline{x}_{ij} + \underline{\delta}^0$ (pour les fibres traversant l'une des frontières).

Notons qu'il était possible d'imposer la déformation de la boîte englobante en imposant directement ses dimensions dans la configuration déformée. L'inconvénient de cette méthode est que toute la déformation sera concentrée sur les fibres traversant les frontières lors de la première itération numérique (la déformation va se propager progressivement à l'intérieur du domaine aux itérations suivantes). Avec la relation 2.5, l'état initial a déjà subi la déformation homogène $\underline{F}$ qui est imposée uniformément pour tous les nœuds du réseau.

Le gradient de l'énergie potentielle par rapport à la position du nœud i_0 s'écrit (calcul analogue à celui de la section précédente) $\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W = \sum_n n_{ij} \underline{R}_n$ avec

$$\underline{R}_n = K_n (|\underline{F} \cdot \tilde{\underline{x}}_{ij}| - \ell_n) \underline{F}^T \cdot \frac{\underline{F} \cdot \tilde{\underline{x}}_{ij}}{|\underline{F} \cdot \tilde{\underline{x}}_{ij}|} \quad (2.6)$$

où $\underline{R}_n$ représente la force appliquée par la fibre n sur le nœud i après application de la déformation homogène $\underline{F}$.

Le tenseur des contraintes est calculée en utilisant la relation (1.9) et en tenant compte de la déformation du réseau :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J L_1^0 L_2^0} \sum_n (\underline{F} \cdot \tilde{\underline{x}}_{ij}) \otimes \underline{R}_n \quad (2.7)$$

avec $J = \det \underline{\underline{F}}$.

2.3 Réseau de poutres de Navier-Bernoulli

Dans cette section, le réseau contient N_f fibres de Navier-Bernoulli présentées au chapitre 1. On note ℓ_n la longueur initiale de la fibre n , $K_n = k_n/\ell_n$ sa raideur longitudinale et $B_n = b_n/\ell_n$ sa raideur de flexion.

2.3.1 Problème aux limites en déplacement

En conditions de Dirichlet, le vecteur d'état du réseau est constitué des positions nodales $\underline{x}_i$ ainsi que des rotations ϕ_i : $\underline{X} = (\underline{x}_1, \phi_1, \dots, \underline{x}_P, \phi_P)$ (vecteur de dimension $3P$). L'énergie potentielle totale du réseau $W(\underline{X})$ s'écrit :

$$W(\underline{X}) = \frac{1}{2} \sum_n K_n (\underline{t}_n \cdot \underline{x}_{ij} - \ell_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_n B_n \phi_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_n 12B_n \left(\frac{\underline{q}_n \cdot \underline{x}_{ij}}{\ell_n} - \frac{\phi_i + \phi_j}{2} \right)^2 \quad (2.8)$$

Le gradient de l'énergie potentielle est nécessaire afin d'estimer une direction de descente pour la méthode de minimisation décrite à la section 2.4. La différentielle de l'énergie s'écrit $dW = \sum_n (\underline{R}_n \cdot d\underline{x}_{ij} + M_n d\phi_{ij} - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n (d\phi_i + d\phi_j))$ où

$$\begin{aligned} \underline{R}_n &= K_n (\underline{t}_n \cdot \underline{x}_{ij} - \ell_n) \underline{t}_n + 12 \frac{B_n}{\ell_n} \left(\frac{\underline{q}_n \cdot \underline{x}_{ij}}{\ell_n} - (\phi_i + \phi_j)/2 \right) \underline{q}_n \\ M_n &= B_n \phi_{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $\underline{R}_n$ (resp. M_n) la force appliquée (resp. le couple appliqué) par la fibre n sur le nœud i .

La calcul des gradients par rapport à la position $\underline{x}_{i_0}$ et la rotation ϕ_{i_0} d'un nœud intérieur d'indice i_0 s'écrit $\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W = \sum_n n_{ij} \underline{R}_n$ et $\mathbf{grad}_{\phi_{i_0}} W = \sum_n (n_{ij} M_n - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n)$. On retrouve bien que $(-\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W)$ représente la résultante des efforts appliqués sur le nœud i_0 et $(-\mathbf{grad}_{\phi_{i_0}} W)$ la résultante des moments sur le nœud i_0 . Le vecteur gradient généralisé (de dimension $3P$) est l'assemblage des vecteur gradients $\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}}$ et $\mathbf{grad}_{\phi_{i_0}}$ pour chaque nœud intérieur.

2.3.2 Conditions périodiques en déformation imposée

La démarche est très similaire au cas de la section 2.2.2. L'énergie potentielle totale du réseau $W(\underline{X})$ est donnée par la relation (2.8) en remplaçant $\underline{x}_{ij}$ par $\underline{F} \cdot \hat{\underline{x}}_{ij}$ avec $\underline{F}$ la transformation homogène de la boîte englobante et $\hat{\underline{x}}_{ij} = \underline{x}_{ij} + \delta^0$. De même, la différentielle de W s'écrit $dW = \sum_n \left((\underline{F}^T \cdot \underline{R}_n) \cdot d\underline{x}_{ij} + M_n d\phi_{ij} - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n (d\phi_i + d\phi_j) \right)$ avec $\underline{R}_n$ et M_n données par la relation (2.9) en remplaçant $\underline{x}_{ij}$ par $\underline{F} \cdot \hat{\underline{x}}_{ij}$. Enfin, on identifie les gradients par rapports à la position $\underline{x}_{i_0}$ et la rotation ϕ_{i_0} d'un nœud intérieur d'indice i_0 : $\mathbf{grad}_{\underline{x}_{i_0}} W = \sum_n n_{ij} \underline{F}^T \cdot \underline{R}_n$ et $\mathbf{grad}_{\phi_{i_0}} W = \sum_n (n_{ij} M_n - \ell_n \underline{R}_n \cdot \underline{q}_n)$.

2.4 Méthode de minimisation de l'énergie élastique

Le minimum de l'énergie potentielle est atteint à l'équilibre, lorsque le gradient de l'énergie s'annule. Pour atteindre ce minimum, on utilise une méthode itérative de descente, dont le principe est d'effectuer une minimisation dans cette direction de descente estimée à partir du gradient de l'énergie (Avriel, 2003). Le processus est répété à chaque itération (nouvelle estimation de la direction de descente, puis nouvelle minimisation) jusqu'à atteindre un seuil de tolérance défini sur la norme du gradient de l'énergie.

En pratique, on utilise la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) dont le principe est de construire une approximation de l'inverse de la dérivée seconde de l'énergie (Avriel, 2003). Cet inverse est utilisé pour appliquer une méthode de Quasi-Newton où la raideur tangente est utilisée à chaque itération pour résoudre un problème linéaire et mettre à jour la position du minimum. L'algorithme suppose que la fonction d'énergie peut être approchée localement par un développement limité quadratique autour de l'optimum.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la résolution d'un problème générique qui ne dépend pas de la topologie du réseau. En effet, cette dernière est utilisée comme donnée d'entrée au solveur numérique et devra être créée au préalable par un module externe que l'on décrit brièvement ici.

Le module de génération du réseau permet de positionner et d'orienter des fibres dans le plan selon une loi de probabilité donnée par l'utilisateur. A chaque positionnement d'une nouvelle fibre, on recherche ses intersections potentielles avec les autres fibres déjà en place. Les intersections détectées constituent les nouvelles jonctions nodales du réseau et auront pour effet de segmenter la fibre en plusieurs tronçons. Remarquons que seuls les tronçons de fibre situés entre deux nœuds participent à la raideur mécanique du réseau. Les extrémités des fibres (tronçons reliés à un seul nœud) peuvent donc être supprimées.

Le réseau est ensuite exporté dans deux fichiers ASCII contenant les informations sur la topologie : liste des nœuds avec leurs positions, liste des fibres avec leurs modules élastiques et les indices des deux nœuds aux extrémités de chaque fibre (une fibre correspond à un tronçon situé entre deux nœuds). Dans le cas des frontières périodiques, on associe en plus un indice pour les fibres traversant une frontière de la boîte englobante afin de corriger la

position d'un de ses nœuds par le vecteur $\underline{\delta}_0$.

Conclusions

Nous avons présenté la méthode employée pour la simulation discrète d'un réseau de fibres, basée sur la minimisation de l'énergie potentielle élastique en fonction des positions des jonctions du réseau. La formulation comprend le cas du réseau de ressorts articulés ainsi que celui des fibres avec modèle de Navier-Bernoulli. Les conditions aux limites peuvent être de type Dirichlet en déplacements imposés ou périodiques. La simulation discrète décrite ci-dessus sera mise à profit au chapitre suivant pour déterminer les modules élastiques effectifs de quelques assemblages réguliers et désordonnés de poutres.

3

APPLICATION AUX ASSEMBLAGES PÉRIODIQUES ET DÉSORDONNÉS

Ce chapitre présente quelques résultats de simulation discrète de réseaux de fibres périodiques et désordonnés. On montre que les modules d'élasticité obtenus par l'équivalence énergétique du chapitre 1 sont exacts pour les réseaux à cellules carrées et triangulaires, alors qu'ils constituent une borne supérieure pour le réseau en nids d'abeilles. On illustre l'effet d'échelle dans les assemblages de poutres sur un cas de cisaillement simple d'un réseau périodique triangulaire. Puis, on calcule le module d'Young effectif d'un assemblage aléatoire de Poisson en fonction de la densité du réseau et on montre qu'il est majoré par celui obtenu par l'équivalence énergétique du chapitre 1. Enfin, on présente la réponse en traction uniaxiale du voile ADFORS en fonction de la densité.

Sommaire

3.1	Introduction	50
3.2	Elasticité des réseaux périodiques	51
3.2.1	Modules élastiques homogènes équivalents	51
3.2.2	Effet d'échelle	52
3.3	Elasticité du réseau désordonné de Poisson	55
3.3.1	Module élastique homogène équivalent	56
3.3.2	Comportement mécanique du voile de fibre de verre ADFORS	57

3.1 Introduction

Le principe de l'équivalence énergétique ainsi que l'utilisation du développement asymptotique ont permis d'obtenir un milieu homogène équivalent micropolaire pour un assemblage de poutres de Navier-Bernoulli. Cependant, en vertu du principe de Hill (Hill, 1965), le tenseur de rigidité effectif constitue un majorant de l'élasticité du milieu discret. En effet, selon la topologie du milieu fibreux, on peut montrer que les équations d'équilibre locales dans le milieu hétérogène ne sont pas systématiquement vérifiées lorsqu'on utilise un développement asymptotique sur les champs cinématiques discrets (relations (1.7)) (Kumar et McDowell, 2004; Wang *et al.*, 2005). Cependant, on peut trouver des assemblages périodiques simples pour lesquels les équations d'équilibre sont vérifiées quand bien même les champs cinématiques discrets vérifient (1.7). Ceci fait l'objet de la section 3.2.

S'agissant des assemblages désordonnés, les modèles analytiques considérés dans la littérature pour le calcul du comportement effectif font appel à des hypothèses de déformations homogènes analogues au développement asymptotique utilisé au chapitre 1. Ainsi, le travail précurseur de Cox (1952) a permis d'établir un comportement effectif d'un réseau aléatoire de ressorts de longueurs infinies à partir d'une hypothèse de déformation homogène du milieu. Par la suite, Åström *et al.* (2000) et Wu et Dzenis (2005) ont étendu les travaux de Cox aux assemblages aléatoires de fibres de longueurs finies avec le modèle de Navier-Bernoulli. La démarche employée consiste à calculer la densité d'énergie potentielle du milieu fibreux par une intégration continue sur les orientations des fibres, en distinguant les fibres élancées, pour lesquelles tous les modes de déformation sont pris en compte, et les fibres courtes, pour lesquelles l'énergie de flexion est négligée. Dans notre cas, la rigidité effective obtenue au chapitre 1 (relation 1.13) ne fait aucune hypothèse sur les modes de déformation des fibres mais les modules élastiques sont très proches de ceux présentés par Åström *et al.* (2000) et Wu et Dzenis (2005). Ceci fait l'objet de la section 3.3.

Dans ce chapitre, la rigidité effective simulée des réseaux périodiques carré, triangulaire et en nids d'abeilles est comparée au tenseur de rigidité discret (1.11). Ensuite, la rigidité effective simulée du réseau aléatoire de Poisson est comparée au tenseur de rigidité continu (1.13). L'effet d'échelle décrit à la section 1.5 est illustré sur un cas de cisaillement simple d'une couche de réseau périodique. Pour finir, on s'intéresse à la rigidité en traction du voile de fibres de verre ADFORS en fonction de la densité de fibres. Compte tenu de la complexité de la microstructure réelle du voile (attribuable en partie à la distribution du liant entre les fibres), on discute en perspective des différentes approches expérimentales basées sur le traitement d'images pour quantifier la répartition du liant et la distribution de contacts dans le réseau fibreux.

3.2 Elasticité des réseaux périodiques

3.2.1 Modules élastiques homogènes équivalents

On se propose de déterminer les modules élastiques équivalents des réseaux périodiques à cellules carrées, triangulaires et en nids d'abeilles présentés à la section 1.4 du chapitre 1. Pour cela, on met en œuvre une simulation discrète en conditions périodiques aux frontières. Les fibres ont toutes la même longueur ℓ et possèdent les mêmes modules élastiques. Par ailleurs, on note t l'épaisseur de la section des fibres projetée dans le plan (épaisseur constante). La déformation de la boîte englobante est imposée via la transformation homogène $\underline{F}$ de la section 2.2.2 du chapitre 2, dont on n'impose qu'une seule composante dans la direction $\underline{e}_2$, de sorte que le champ de contrainte moyen soit uniaxial. La transformation $\underline{F}$ vérifie $|\underline{F} - \underline{I}| \ll 1$ pour que l'on reste dans le domaine de validité du modèle de fibre donné par la loi de comportement (1.11). La contrainte moyenne est calculée via la relation (2.7).

La figure 3.1.a est une représentation en coordonnées polaires des modules d'Young effectifs adimensionnés $E^\square(\theta)/E_f$ (cellule carrée), $E^\Delta(\theta)/E_f$ (cellule triangulaire) et $E^\circ(\theta)/E_f$ (cellule en nid d'abeilles) en fonction de l'orientation θ du réseau et avec un élanement des fibres $r = t/\ell = 0.2$. Les résultats de la simulation discrète sont représentés en lignes continues et ceux issus de la table 1.1 en lignes discontinues. Pour la grille carrée, on retrouve comme prévu $E^\square(0)/E_f = E^\square(\pi/2)/E_f = 1$ dans les directions principales des fibres et $E^\square(\pi/4)/E_f = 2r^2$ dans la direction oblique. Les raideurs simulées pour la grille triangulaire sont en bon accord avec les résultats de la table 1.1. Par contre, le module d'Young simulé pour la grille en nids d'abeilles est au moins quatre fois plus petit que celui de la table 1.1. Ce résultat n'est pas surprenant car les modules élastiques théoriques donnés par (1.11) constituent en réalité une borne supérieure pour la rigidité effective. Cela vient du fondement même de la méthode qui consiste à égaliser l'énergie potentielle du réseau discret à celui du milieu continu. Le principe de Hill [Bornert et al. \(2001\)](#) indique que cette approche surévalue la rigidité effective du milieu car les déplacements discrets obtenus par la localisation cinématique (1.7) ne vérifient pas systématiquement l'équilibre local du réseau fibreux.

Les figures 3.1 a,b et c représentent le module d'Young et de cisaillement adimensionné pour les trois types de grille en fonction de l'élanement r des fibres (valeurs mesurées dans la direction $\theta = \pi/2$ pour la grille à cellules carrées). La concordance est bonne pour les cellules carrées et triangulaires où l'on retrouve les résultats suivants pour des fibres très élanées $r \ll 1$: $E^\square(\pi/2)/E = r$ et $G^\square(\pi/2)/E \simeq r^3/2$ (figure a), $E^\Delta/E \simeq 2\sqrt{3}r/3$ et $G^\Delta/E \simeq \sqrt{3}r/4$ (figure b).

Pour le réseau en nid d'abeilles, on représente, en plus de la borne supérieure de la table 1.1, un résultat théorique obtenu par [Warren et Byskov \(2002\)](#) qui donne la solution exacte. Cette solution a été obtenue choisissant les relations de localisation de sorte que les équations d'équilibre sur la cellule élémentaire soient satisfaites. Malheureusement, le calcul

ne peut pas être généralisé à un réseau quelconque car il fait appel à l'analyse structurale de la cellule élémentaire.

Ces mêmes modules élastiques sont cohérents avec ceux calculés par [Gibson et Ashby \(1997\)](#), [Pradel et Sab \(1998\)](#) et [Vigliotti et Pasini \(2012\)](#) qui utilisent des approches différentes mais trouvent les mêmes résultats dans le cas des fibres élancées ($r \ll 1$). On pourra se référer à [Arabnejad et Pasini \(2013\)](#) qui proposent une revue complète des résultats de modules élastiques pour plusieurs types de réseaux périodiques.

3.2.2 Effet d'échelle

Dans cette section, on présente une illustration de l'effet d'échelle décrit en section 1.5. Pour cela, on utilise une démarche similaire à celle présentée par [Kouznetsova et al. \(2004\)](#), puis par [Tekoglu et Onck \(2005\)](#) et [Tekoğlu et Onck \(2008\)](#) où l'on considère un cas de cisaillement simple d'une couche de hauteur H de milieu cellulaire. On considère ici un réseau à cellules triangulaires dont on note ℓ_c la hauteur de la cellule élémentaire (voir 3.2.a). Un déplacement nul est imposé sur la frontière inférieure et un déplacement horizontal $\underline{U} = (\delta H, 0)$ sur la frontière supérieure. Les rotations sont bloquées aux nœuds de frontière. On note $n = H/\ell_c$ le nombre de cellules élémentaires sur l'épaisseur de la couche et F_x la résultante horizontale sur la frontière supérieure.

On souhaite comparer le module de cisaillement simulé $F_x/L\delta$ à celui obtenu par homogénéisation du réseau triangulaire en déformation homogène, mais en remplaçant les fibres par des ressorts articulés. La cinématique d'un tel milieu est décrite uniquement par le champ de déplacement nodal. La raideur équivalente du réseau de ressorts en déformation homogène est obtenue en ne considérant que le premier terme du tenseur d'élasticité (1.11) (car c'est le terme de rigidité longitudinale des fibres). Ainsi, pour un réseau triangulaire isotrope, on obtient simplement $G^a = \sqrt{3}r/4$ avec $r = t/\ell$.

Le cisaillement adimensionné $F_x/G^a L\delta$ est représenté sur la figure 3.2.a pour plusieurs rapports d'échelle n , avec un élancement constant $t/\ell = 10^{-2}$. On observe que le rapport $F/G^a L\delta$ tend vers l'unité lors de la séparation des échelles $n \gg 1$ (la même chose a été observé par [Tekoğlu et Onck \(2008\)](#) pour un milieu cellulaire de Voronoi). Cela suggère que le milieu homogène équivalent au réseau de ressorts (qui est, par ailleurs, un milieu de Cauchy) constitue une représentation équivalente du réseau de fibres de Navier-Bernoulli lorsque la taille du domaine est grande devant l'échelle de la microstructure.

Une explication peut être trouvée en observant le champ de rotation sur la hauteur de la couche, que l'on représente sur la figure 3.2.b. Le gradient de la rotation $\underline{\kappa}$ est non nul près des bord encastres sur une petite épaisseur de l'ordre de quelques mailles (en effet, pour un maillage carrée, nous avons trouvé un nombre d'onde qui vaut $\text{arctanh} \frac{7}{4\sqrt{3}} \simeq 2.63$ à la section 1.5). Au delà des quelques mailles, $\underline{\kappa}$ devient évanescence. On a par ailleurs $\Phi = (1/2) \text{rot } \underline{U}$ loin des bords. Par conséquent, la rigidité en cisaillement de l'ensemble de la couche est dominée par le comportement du coeur dont le module de cisaillement est G^a .

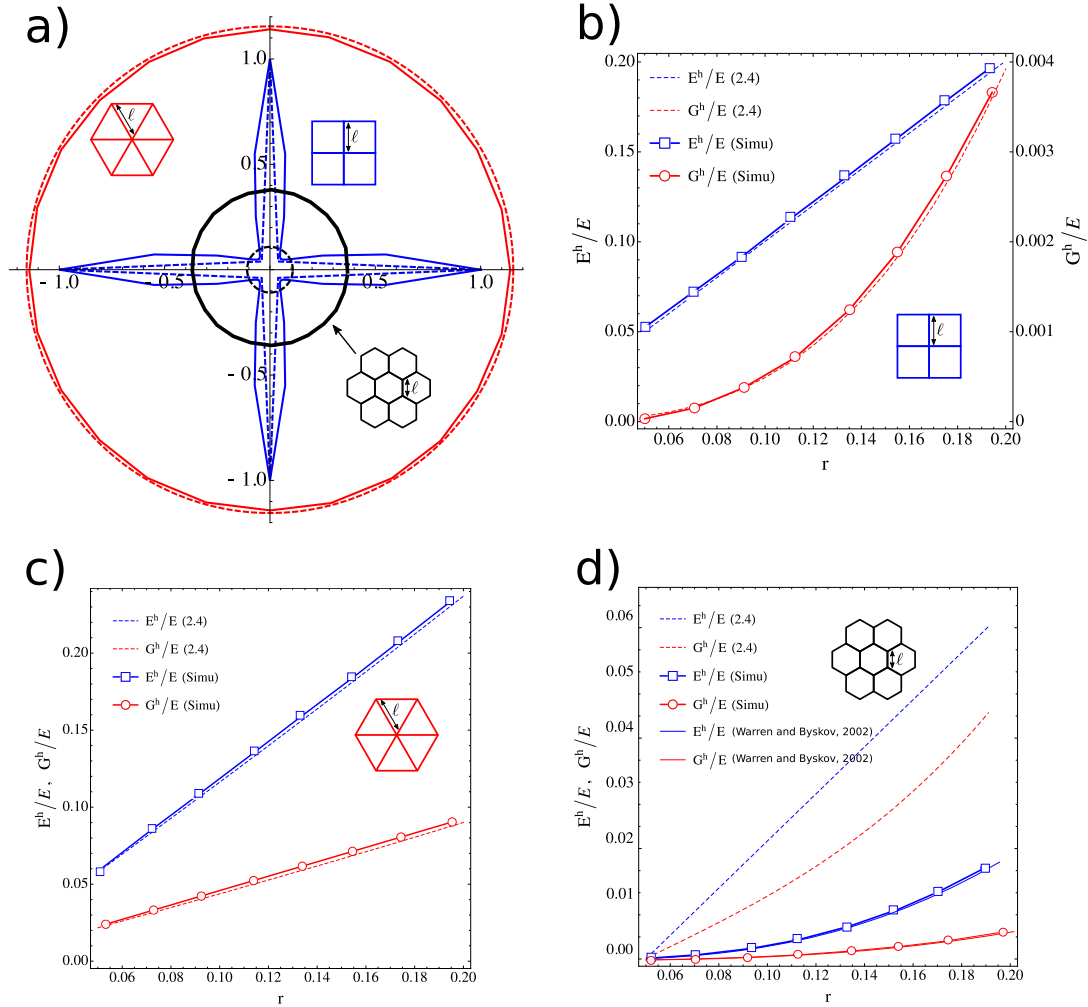


FIGURE 3.1 – a) Représentation polaire du module d'Young du milieu homogène équivalent adimensionné $E^\square(\theta)/E_f$ (cellule carrée), $E^\triangle(\theta)/E_f$ (cellule triangulaire) et $E^\circ(\theta)/E_f$ (cellule en nid d'abeilles) E^h/E_f avec en fonction de l'orientation θ du réseau avec $r = t/\ell = 0.2$. Les grilles à cellules triangulaires et en nids d'abeilles sont isotropes. Les valeurs théoriques (représentées en ligne discontinue) et simulées sont en bon accord pour les réseaux carrés et triangulaires. b), c) et d) : Modules d'Young et de cisaillement adimensionné pour la grille à cellules carrées, triangulaires et en nids d'abeille en fonction de l'élancement r des fibres (valeurs mesurées dans la direction $\theta = \pi/2$). La borne supérieure donne une rigidité exacte pour les réseaux carrés et triangulaires. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de Arabnejad et Pasini (2013).

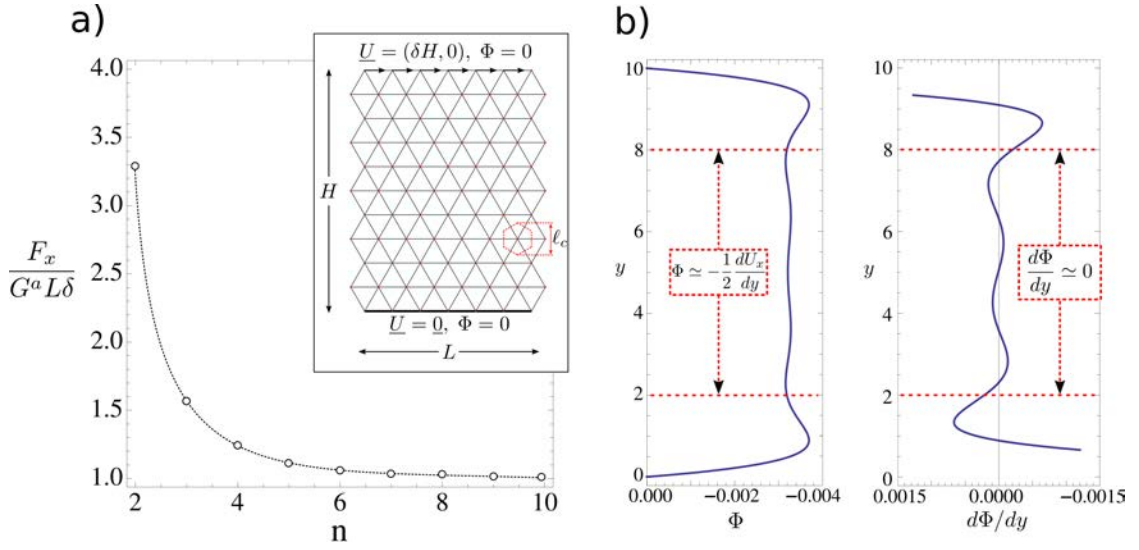


FIGURE 3.2 – a) Module de cisaillement adimensionné $F_x/G^a L \delta$ en fonction du rapport d'échelle $n = H/\ell_c$. On observe que le rapport $F/G^a L \delta$ tend vers l'unité lors de la séparation des échelles $n \gg 1$ (la même tendance a été observée par [Tekoğlu et Onck \(2008\)](#) sur des cellules de Voronoi). b) Champ de rotation Φ et son gradient interpolé sur la hauteur de couche H . On distingue une épaisseur centrale (entre les lignes discontinues) où l'on a $\Phi = (1/2) \text{rot } \underline{U}$ et $\underline{\kappa} = \underline{0}$. Lorsque $n \gg 1$, la rigidité en cisaillement de l'ensemble de la couche H est dominée par cette épaisseur dont le module de cisaillement est G^a .

3.3 Elasticité du réseau désordonné de Poisson

On s'intéresse dorénavant au cas d'un assemblage désordonné de fibres de Navier-Bernoulli. On rappelle ici l'expression du tenseur de rigidité $\underline{\underline{C}}$ d'un tel milieu fibreux, obtenu au chapitre 1 (relation 1.13) :

$$\underline{\underline{C}} \simeq \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(k \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} + \frac{12b}{\ell_m^2} \underline{q} \otimes \underline{t} \otimes \underline{q} \otimes \underline{t} \right) \Psi(\chi) d\chi \quad (3.1)$$

avec $k = E_f S_f$ le module élastique longitudinal de la fibre (E_f son module d'Young et S_f l'aire de la section droite, tout deux identiques pour toutes les fibres du réseau) et $b = E_f I_z$ le module de flexion (avec I_z le moment quadratique selon z de la section droite de la fibre), $\underline{t}$ (resp. $\underline{q}$) le vecteur unitaire tangent (resp. orthogonal) à la fibre, $\ell_m = \langle \ell_n \rangle$ la longueur moyenne entre les nœuds du réseau et Ψ la fonction de distribution d'orientation.

On construit un réseau désordonné de Poisson, que l'on obtient en positionnant aléatoirement des fibres courtes de longueur L_f dans un domaine rectangulaire du plan de surface $\mathcal{A} = L_x L_y$ (Åström *et al.*, 2000). Dans le cas le plus simple (et aussi celui le plus étudié dans la littérature dédiée), chaque fibre a une longueur constante L_f et les positions des centres de chaque fibre ainsi que leurs orientations sont déterminées par une loi uniforme : les centres des fibres sont positionnées dans le domaine rectangulaire $[-L_x, L_y]^2$ et les orientations réparties dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On suppose que chaque intersection entre fibres constitue une jonction indéformable du réseau (voir 3.3.a). Muni de ce processus aléatoire d'assemblage, on peut montrer que la distribution de longueur entre nœuds vérifie une loi de Poisson (Pike et Seager, 1974)

$$p(\ell) = \exp(-\ell/\ell_m) / \ell_m \quad (3.2)$$

avec la longueur moyenne ℓ_m qui vérifie (Wu et Dzenis, 2005) :

$$\ell_m = \frac{L_f}{1 + 2c_f L_f^2 \left(\frac{1}{\pi} + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{t}{L_f} \right)} \quad (3.3)$$

où c_f est la concentration de fibre (nombre de fibre de longueur L_f déposée par unité de surface) et t l'épaisseur dans le plan de la section droite des fibres. La figure 3.3.b présente deux réalisations de réseau généré numériquement avec des concentrations $c_f = 22.44$ et $c_f = 13.1$. Les lignes continues représentent la distribution (3.2) associée à la relation (3.3). La figure 3.3.c compare la relation théorique (3.3) proposée par Wu et Dzenis (2005) au résultat de la simulation discrète. On observe que (3.2) et (3.3) donnent des résultats satisfaisants pour la description de la microstructure.

On peut aussi vérifier que ce procédé d'assemblage génère un réseau isotrope par nature et qu'on a dans ce cas une fonction d'orientation constante $\Phi(\chi) = 1/\pi$.

Finalement, en connaissant les modules élastiques des fibres (k, b) et les paramètres du voile L_f, t, ρ et c_f , la rigidité homogène du réseau est entièrement définie par les relations (3.1) et (3.3).

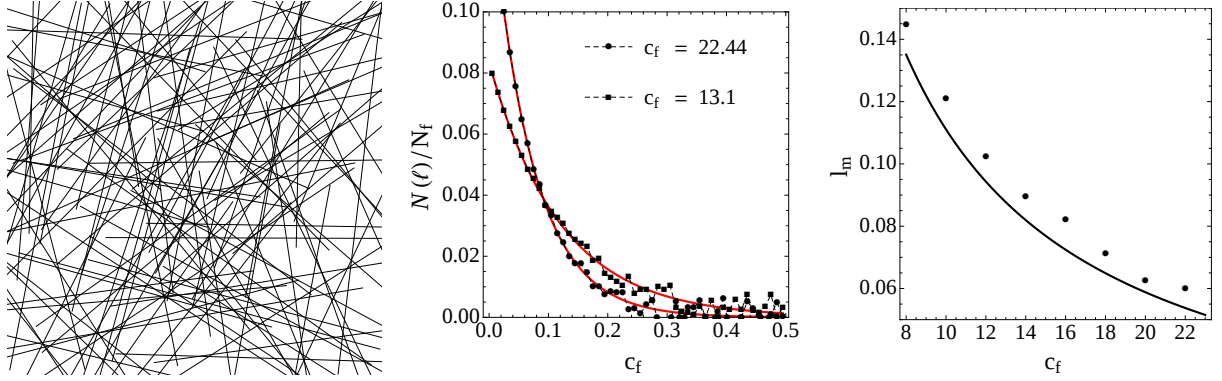


FIGURE 3.3 – A gauche : Exemple de réalisation numérique avec $c_f = 30$ et $L_x/L_f = L_y/L_f = 4$. Au milieu : Distributions normalisées des longueurs de fibres pour deux concentrations $c_f = 22.44$ et $c_f = 13.1$. Les tracées continus représentent la distribution théorique (3.2) avec respectivement $\ell_m/L_f = 0.07$ et $\ell_m/L_f = 0.12$. A droite : Longueur moyenne entre contacts ℓ_m en fonction de la concentration c_f . Le tracé continu correspond à la relation (3.3).

3.3.1 Module élastique homogène équivalent

Le module d'Young effectif théorique E^H du réseau décrit à la section précédente peut-être obtenu avec le tenseur d'élasticité (3.1) muni de la relation (3.3). On donne ici directement le résultat :

$$E^H = \rho k \frac{12b + k\ell_m^2}{12b + 3k\ell_m^2}$$

On voit que E^H dépend linéairement de la densité ρ . Remarquons que cette relation n'est pas réaliste à faible densité car en dessous d'une certaine concentration de fibre, il n'y a pas de percolation géométrique au sein du réseau et donc celui-ci ne présente aucune rigidité mécanique. En pratique, des simulations Monte-Carlo ont été faites pour trouver la valeur de ce seuil qui est d'environ $c_f^* \simeq 5.7$ (Pike et Seager, 1974).

En utilisant $b = E_f I_z$ avec $I_z = t^4/12$ et $k = E_f S_f$ avec $S_f = t^2$, le module effectif dans le plan se réécrit de la façon suivante

$$E^H = \rho K \frac{r^2 + 1}{r^2 + 3} \quad (3.4)$$

avec $K = E_f S_f / \ell_m$ (ℓ_m est la longueur moyenne des fibres) et où l'on a fait apparaître le rapport d'aspect moyen des fibres $r = t / \ell_m$. Dans le cas particulier des fibres élancées $r \ll 1$, on retrouve le résultat de Cox (1952) : $E^H = \rho K / 3$ que l'on obtient en négligeant

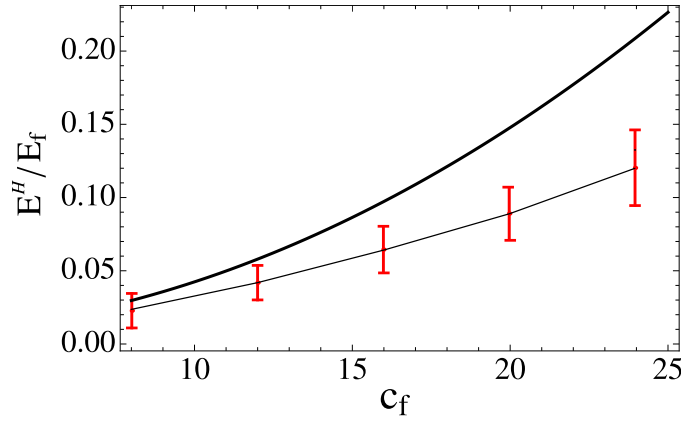


FIGURE 3.4 – Module effectif adimensionné E^H/E_f numérique (symboles avec barres d'erreur) et théorique (ligne continue) donné par la relation (3.4).

l'énergie de flexion et de cisaillement devant celle de traction et donc la loi de comportement est celle du système à force centrale isotrope (1.18).

Pour déterminer le module d'Young effectif par la simulation discrète, on commence par générer une suite de réalisations de réseaux pour quelques valeurs de la concentration de fibre avec $c_f \in [8, 25]$. Les simulations sont menées avec des conditions aux limites périodiques (voir section 2.3 du chapitre 3) en déformations imposées. La contrainte moyenne est calculée avec la relation (2.7).

Les modules effectifs adimensionnés E^H/E_f sont représentés sur la figure 3.4 avec $c_f = \{8, 12, 16, 20, 24\}$ et pour chaque concentration, les nombres de réalisations suivantes ont été simulées $\{10, 10, 8, 6, 4\}$. Notons que l'épaisseur des fibres t est choisie de sorte que même en concentration élevée, le rapport d'aspect moyen des fibres est tel que $\ell_m/t > 20$. La relation (3.4) est représentée en ligne continue. Comme on pouvait s'y attendre, le module effectif théorique est bien supérieur au résultat numérique. Le module d'Young simulé varie quasi-linéairement en fonction de c_f mais les écarts-types sur les fluctuations du résultat simulé sont encore trop élevés pour pouvoir estimer une loi.

3.3.2 Comportement mécanique du voile de fibre de verre ADFORS

Le principe d'assemblage du réseau de Poisson, décrit à la section précédente, est similaire au procédé de fabrication du voile de fibre de verre ADFORS (voir description donnée dans l'introduction générale). Dans cette section, on se propose de caractériser expérimentalement le voile en mesurant son anisotropie par une méthode de traitement sur des images issues de la micro-tomographie X, dont la représentation tri-dimensionnelle est donnée sur la figure 3.5.a. Puis, la raideur en traction uniaxiale du voile est mesurée pour différentes densités de fibre.

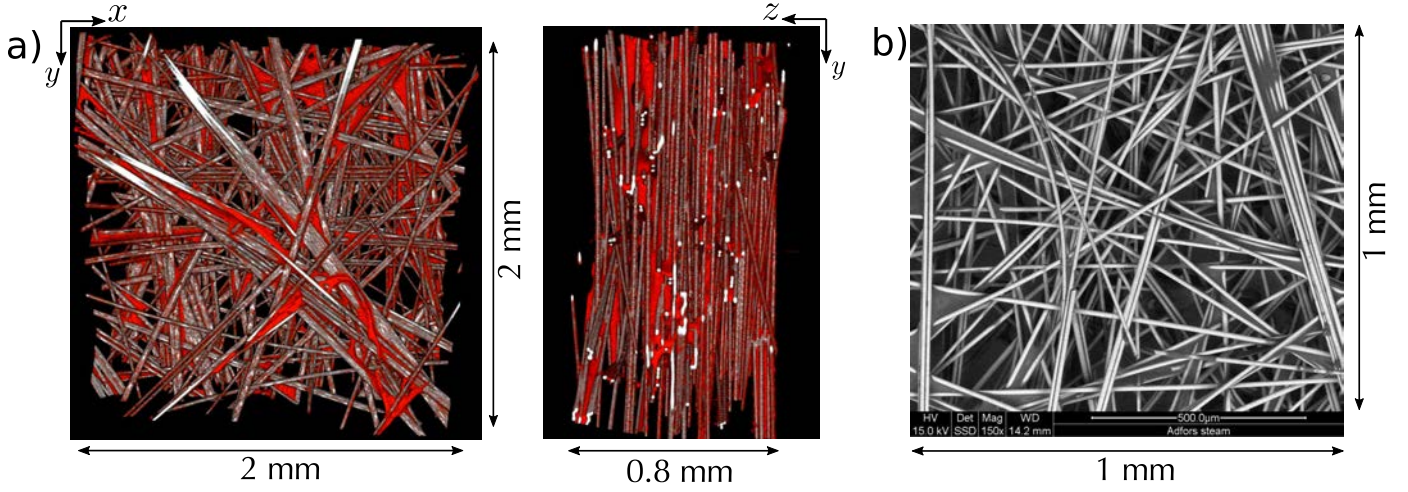


FIGURE 3.5 – a) Vue tridimensionnelle obtenue par micro-tomographie X d’un voile AD-FORS de 85 g/m^2 . Les fibres sont représentées en gris et le liant en rouge. Taille du voxel : $2 \mu\text{m}$. On voit que la résine forme des ponts capillaires entre les fibres lorsque la distance le permet. Image obtenue par Eric Maire (MATEIS, INSA-Lyon) que nous remercions ici de nous permettre de reproduire cette image. b) Vue au Microscope Electronique à Balayage du même voile. On voit les ponts capillaires et les amas de plusieurs fibres collées par la résine.

Pour caractériser la distribution des orientations de fibres qui constituent le voile, une mesure locale du tenseur de structure a été effectuée, conformément à la méthode décrite par Rezakhaniha *et al.* (2012). Pour une image en niveau de gris f (l’image peut être un tableau 2D ou, dans le cas d’une acquisition issue de la tomographie, un tableau 3D constitué d’une pile d’image 2D) le tenseur de structure $\underline{\underline{J}}$ a pour terme général $J_{ij} = \langle f_{,i}, f_{,j} \rangle$ où $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ et $\langle u, v \rangle$ désigne le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot v \cdot h$ avec h une fonction de pondération Gaussienne (Jähne, 1993). Le tenseur $\underline{\underline{J}}$ possède une orientation d’axe propre majeur perpendiculaire à la texture. Ainsi, on peut définir deux nouvelles grandeurs pour cartographier les orientations locales : la trace du tenseur $\underline{\underline{J}}$, qui est d’autant plus grande que l’anisotropie locale est marquée, et le contraste entre les valeurs propres $C = (j_{\max} - j_{\min}) / (j_{\max} + j_{\min})$ qui est proche de 0 lorsque le milieu est localement isotrope.

Le module *OrientationJ* du logiciel de traitement d’image *ImageJ* contient toute l’implémentation du calcul d’orientation par le tenseur de structure Rezakhaniha *et al.* (2012). Il a été utilisé sur chaque image constituant l’épaisseur du voile (donc perpendiculaire à l’axe O, z sur la figure (3.5).a) (un filtrage médian a été appliqué au préalable pour réduire le bruit de la mesure). La figure (3.6) donne un aperçu du résultat sur une image située à mi-épaisseur du voile, où l’on voit qu’une orientation est attribuée à chaque fibre. La figure

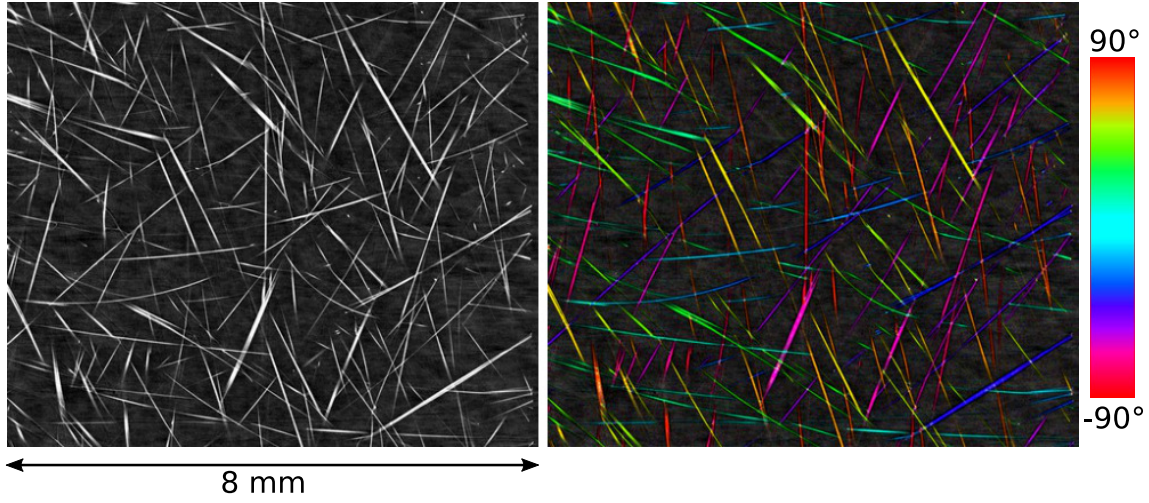


FIGURE 3.6 – Vue obtenue par micro-tomographie de la coupe à mi-épaisseur du voile (taille du voxel : $5.5\mu\text{m}$) et résultat après calcul des orientations par le module OrientationJ.

(3.7) représente la fonction de distribution d'orientation mesurée en coordonnées polaire pour cinq échantillons de grammage 85 g/m^2 . La valeur du rayon indique la fraction volumique de fibre dans une direction donnée. La moyenne des distribution est représenté en rouge. A la vue de cette figure, on peut supposer que la distribution est isotrope.

Pour finir, on soumet des échantillons rectangulaires à une mesure de force en déplacement imposé, sur un banc de traction uniaxiale. Les échantillons font 20 cm de longueur dans le sens de la force appliquée et 5 cm de largeur. On considère les trois densités surfaciques (ou « grammages ») de voile 50, 70 et 85 g/m^2 . Pour chaque grammage, on effectue 10 tests de traction contrôlés en déplacement monotone de 2 mm/s . On présente sur la figure (3.8) les mesures force-déplacement pour 5 échantillons de grammage 85 g/m^2 . La réponse est quasi-linéaire élastique, suivie d'une phase de déformation irréversible qui peut s'apparenter à de l'endommagement ou à une réorganisation des fibres (déblocage/blocage d'un enchevêtrement), puis survient la rupture fragile de l'échantillon. Les modules d'Young pour chaque échantillon sont obtenus par un fit aux moindres carrés par une fonction linéaire, sur la phase élastique de la courbe. Les moyennes et écarts types pour les trois grammages sont présentées sur la figure de droite. On peut en conclure que la loi que suit le module d'Young mesuré en fonction du grammage est très proche de la linéarité, mais devrait sûrement être confirmée avec une gamme plus large de grammage et un nombre de mesure par grammage plus élevé.

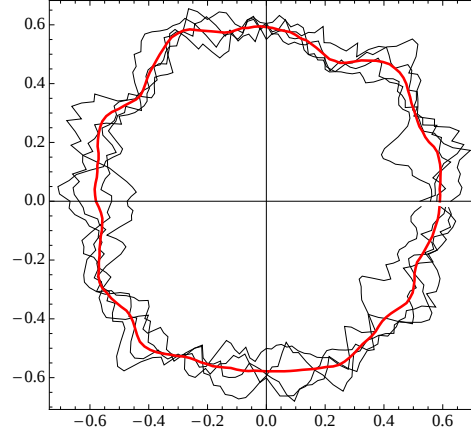


FIGURE 3.7 – Fonctions de distribution d'orientation mesurées pour 5 échantillons de voile de grammage 85 g/m^2 , représentées en coordonnées polaires. Les échantillons imagés sont carrés de taille 8 mm .

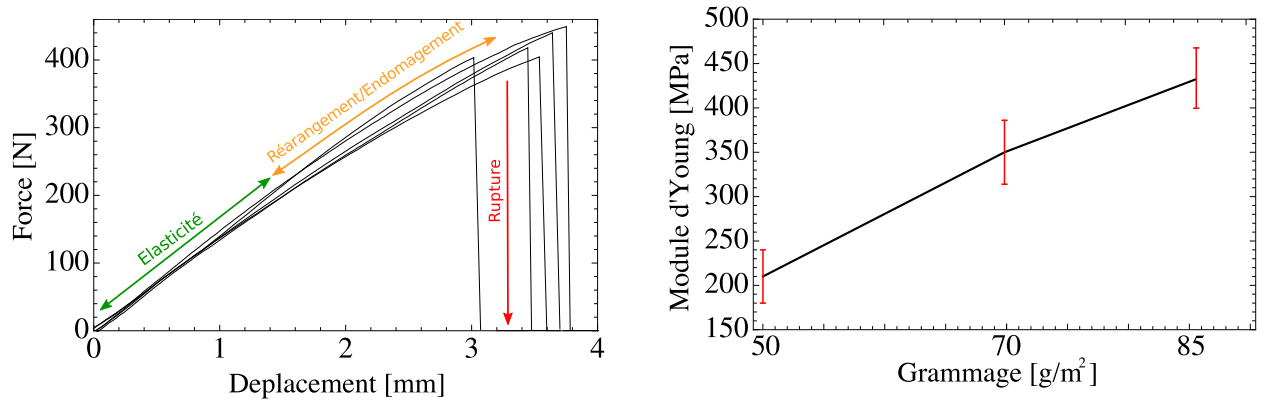


FIGURE 3.8 – A gauche : Mesures de force-déplacement pour 5 échantillons de voiles 85 g/m^2 en traction monotone uniaxiale. La réponse est élastique linéaire, suivie d'une phase de déformation irréversible, puis survient la rupture fragile de l'échantillon. A droite : Module élastique effectif en fonction du grammage. Les valeurs des modules effectif sont le résultat d'une moyenne sur 5 échantillons par grammage.

Conclusions

Cette première partie avait pour objectif d'évaluer la pertinence des modules effectifs que l'on retrouve dans la littérature pour les milieux fibreux désordonnés et de présenter la microstructure et le comportement en traction simple du voile.

Nous avons commencé par revoir un résultat classique de l'homogénéisation des assemblages de poutres : le calcul d'une borne supérieure du comportement effectif, que l'on obtient en égalisant les énergies potentielles des milieux discret et continu. Le développement asymptotique au premier ordre des champs de déplacement et de rotation discrets constitue la relation de localisation cinématique.

Puis, un outil de simulation discrète d'un réseau de fibres, basé sur la minimisation de l'énergie potentielle élastique, a été mise en place afin de déterminer la rigidité effective des réseaux périodiques et du réseau désordonné de Poisson.

Les résultats numériques montrent que pour les assemblages périodiques ne contenant qu'un seul noeud et pour lesquels les équations d'équilibre sont vérifiées avec la relation de localisation, la borne supérieure donne la rigidité effective exacte du réseau (c'est le cas pour le réseau carré et triangulaire, mais pas pour celui en nids d'abeilles). Comme cela était attendu, pour le réseau désordonné de Poisson, la simulation prédit une raideur bien plus petite que la borne supérieure. Par contre, le module est une fonction linéaire de la densité dans le cas théorique et simulé.

Lorsque l'on s'intéresse au voile de fibres de verre ADFORS, la caractérisation par traitement d'images de micro-tomographie montre que les fibres sont homogènement distribuées dans le voile. Par ailleurs, l'étude du comportement du voile en traction simple pour les trois grammages 50, 70 et 80 g/m² a permis de mettre en évidence une dépendance quasi-linéaire en fonction du grammage.

Pour aller plus loin dans l'étude du comportement élastique du voile, il est indispensable de mettre en place une stratégie de caractérisation fine de la microstructure. L'observation au MEB du voile montre des éléments de la microstructure bien plus complexe que la représentation idéalisée du réseau désordonné de Poisson. Les jonctions frottantes, les agglomérats de fibres et la répartition indéterminée des jonctions sont des éléments qui ne peuvent être négligés dans la représentation idéalisée du voile. Toutefois, obtenir ces informations nécessite des développements conséquents d'outils de traitement d'images et l'exploitation intensive des acquisitions de micro-tomographie X.

Pour déterminer finement la mécanique, on peut aussi simuler directement les représentations tri-dimensionnelles obtenues par micro-tomographie X. L'avantage évident de cette approche est qu'il n'est plus nécessaire de représenter la microstructure réelle par un réseau idéalisé. En pratique, cette approche peut être très difficile à mettre en oeuvre, car il le volume de réseau fibreux imagé doit être représentatif de la microstructure et il sera probablement nécessaire d'effectuer un plusieurs acquisitions pour arriver à ce résultat.

Dans la deuxième partie, on considère une propriété mécanique intrinsèque des milieux fibreux qui lorsqu'ils sont soumis à la compression : les fibres, du fait de leurs élancements et de leurs courbures initiales, se déforment en flexion lorsqu'ils sont sollicités en compression. Cette particularité peut induire un comportement macroscopique *bi-module* que l'on se propose d'étudier, d'abord dans un cadre purement théorique et désolidarisé du voile ADFORS. Puis, au dernier chapitre, on met en oeuvre une méthode de mesure de champs par corrélations d'images pour caractériser le comportement bi-module dans le voile ADFORS.

Deuxième partie

Milieux continus unilatéraux

MILIEUX CONTINUS UNILATÉRAUX

Les modèles classiques de loi de comportement des milieux hétérogènes couramment utilisés dans la littérature supposent que les modules élastiques du matériau sont identiques en traction et en compression. Or une grande variété de milieux hétérogènes présente des propriétés mécaniques différentes en traction et en compression. C'est le cas par exemple des matériaux poreux comme les céramiques (Jones, 1977), du béton ou encore des composites renforcés par des fibres (Ambartsumyan et Khachatryan, 1966). Une étude de Gall *et al.* (1999) à permis de mettre en évidence ce comportement asymétrique sur des alliages Nickel-Titane (NiTi) polycristallins. Dans le cas d'un milieu à endommagement anisotrope, la raideur en traction dans la direction perpendiculaire aux microfissures est plus faible que celle en compression (Mazars *et al.*, 1990; Chaboche, 1992), ceci étant due à l'ouverture des fissures en traction (voir figure 3.9.a). On appelle communément *bi-module* un milieu qui présente des raideurs différentes en traction et en compression.

La forme mathématique de la loi de comportement d'un milieu bi-module est particulière. En général, elle est constituée d'une condition portant sur le signe des valeurs propres du tenseur des contraintes (Kanno, 2011). Cette dernière propriété est la source de difficultés d'ordre mathématique : si la loi de comportement est définie par morceaux, elle ne possède pas toujours les propriétés de différentiabilité et de convexité suffisantes pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution¹. Des travaux visant à étendre les propriétés de la mécanique classique aux matériaux bi-module ont débutés dans les années 70 avec les contributions de Ambartsumyan et Khachatryan (1966) et Ambartsumyan (1986). Plus tard, Curnier *et al.* (1994) ont construit un cadre général pour l'élasticité des milieux bi-modules. Ils présentent les conditions nécessaires et suffisantes sur l'énergie potentielle élastique pour que le problème soit bien posé. Des développements ultérieurs (Kanno, 2011; Du et Guo, 2014) ont permis d'étendre les formulations variationnelles et les bornes classiques d'Hashin-Shtrickman pour l'homogénéisation de milieux aléatoires bi-modules.

Le cas particulier d'un milieu à raideur nulle en traction/compression est communément appelé *milieu unilatéral*. Cette classe de matériaux comprend, entre autres, les films minces qui ne peuvent transmettre que des efforts de traction (fig. 3.9.b), et les milieux granulaires

1. Cela explique en partie que l'aspect bi-module est généralement ignoré dans les applications de l'ingénieur, en particulier lorsque le degré de non linéarité du milieu est faible (i.e. lorsque le rapport des raideurs en traction et compression est proche de l'unité). S'ajoute à cela une difficulté supplémentaire d'ordre numérique pour la résolution d'un problème aux valeurs propres.

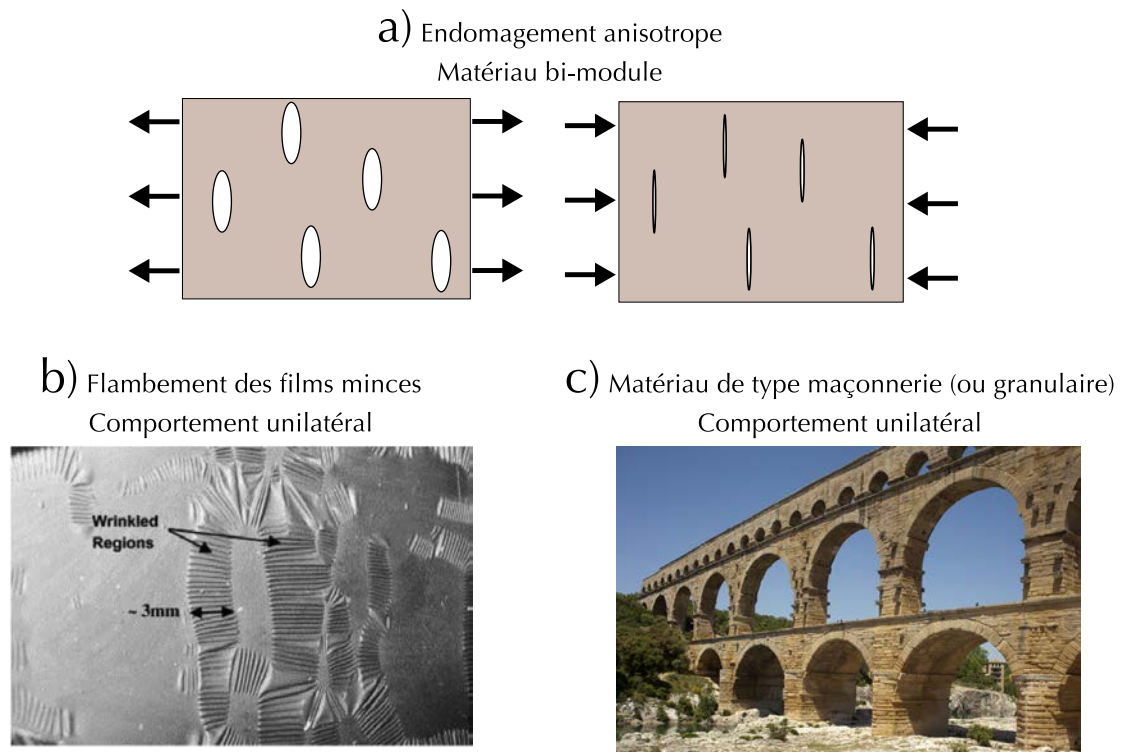


FIGURE 3.9 – Variétés de milieux à loi de comportement bi-module ou unilatéral. a) Endommagement anisotrope : la raideur en traction dans la direction perpendiculaire aux microfissures est plus faible que celle en compression (Mazars *et al.*, 1990; Chaboche, 1992). b) Flambement des films minces (Plante et Dubowsky, 2006) : le comportement des films minces peut être modélisé par un milieu unilatéral avec raideur nulle en compression. c) Matériau de type maçonnerie ou milieux granulaires (Le pont du Gard, aqueduc alimentant la cité romaine de Nemausus (Nîmes)) : le comportement des ces matériaux peut être modélisé par un milieu unilatéral avec raideur nulle en traction.

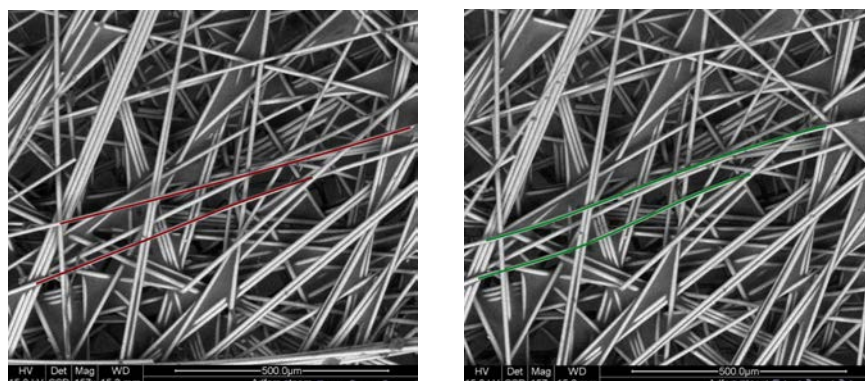


FIGURE 3.10 – Images de l'état initial non déformé (à gauche), puis déformé (à droite) issues de l'Imagerie Electronique à Balayage d'un voile fibreux en traction uniaxiale. Les deux fibres au repos sur l'état initial (soulignées en rouge) se déforment en flexion (soulignées en vert) lorsqu'une composante de compression est exercée via leurs extrémités encastrées.

qui ne peuvent transmettre que des efforts de compression. L'étude du milieu continu unilatéral a débuté avec les travaux précurseurs de [Heyman \(1966\)](#) sur les matériaux de type « maçonnerie » (voir fig. 3.9.b). Les briques étant supposées infiniment rigides, la raideur effective du milieu est infinie en compression et nulle en traction (d'où l'appellation consacrée « Rigid No-Tension material »). Le modèle précédent a été enrichi en considérant une raideur élastique finie en compression et nulle en traction ([Del Piero, 1989](#); [Angelillo, 1993](#)) (aussi dénommé « Elastic No-Tension material »). Notons qu'un tel milieu est bien hyperélastique dans sa formulation : la contrainte dérive d'une fonction d'énergie potentielle qui est convexe (mais pas strictement convexe ([Giaquinta et Giusti, 1985](#))). Ces derniers développements ont permis de mettre en évidence des conditions nécessaires sur le chargement pour s'assurer de l'existence d'une solution d'équilibre de la structure ([Giaquinta et Giusti, 1985](#)). Une autre particularité réside dans la forme du champ de contrainte solution d'un problème de milieu unilatéral : il est en général constitué de sous domaines auto-équilibrés et libres de contraintes ([Del Piero, 1989](#)). Ces régions sont déterminées uniquement par la géométrie du domaine et des conditions aux limites. La section 6.5 du chapitre 6 est dédiée à ce sujet.

Les milieux fibreux désordonnés présentent des propriétés mécaniques intéressantes, en particulier lorsqu'ils sont soumis à la compression. Les fibres, du fait de leurs élancements, sont des objets qui présentent naturellement un caractère unilatéral dû au flambement en compression. C'est notamment ce qui induit le comportement bi-module de certains composites renforcés par des fibres ([Sun et al., 2010](#)).

On s'intéresse à la réponse mécanique des voiles de fibres de verre désordonnées. La figure 3.10.a est une illustration issue de l'Imagerie Electronique à Balayage de la mi-

crostructure d'un voile réalisé par Saint-Gobain ADFORS. Il est constitué de fibres de verre courtes et quasi-rectilignes, de diamètres approximatifs $13\text{ }\mu\text{m}$ et liées par une résine d'urée-formaldéhyde. On s'intéresse au comportement mécanique du voile dans le domaine élastique. La figure 3.10.b représente la déformée de ce même voile en traction uniaxiale dans la direction verticale. Du fait de leurs élancements et de leurs courbures initiales, les deux fibres sollicitées en compression sur la configuration initiale (soulignées en rouge) se déforment en flexion et ne transmettent qu'un effort résiduel en compression. On peut légitimement se demander quel va être l'effet de ce comportement non linéaire des fibres sur le milieu homogène effectif.

Dans cette partie, on obtient une loi de comportement non linéaire bi-module par dérivation de l'énergie potentielle d'un réseau de ressorts unilatéraux (chapitre 4). La loi de comportement ainsi obtenue est paramétrée par η qui définit le rapport entre la raideur en compression et la raideur en traction des fibres (milieu linéaire pour $\eta = 1$, bi-module pour $\eta \in]0, 1]$ et unilatéral pour $\eta = 0$). Une formulation éléments finis adaptée à notre problème est proposée au chapitre 5. Enfin, en étudiant la réponse mécanique du milieu sur des géométries fissurées, on met en évidence la localisation de la réponse en contrainte sur des graphes de forces auto-équilibrés (chapitre 6). On propose une application à l'encadrement énergétique de la solutions d'un problème aux limites pour les milieux unilatéraux.

On établit le potentiel élastique d'un milieu *bi-module* homogène et isotrope à partir de la représentation discrète d'un réseau de fibres avec des raideurs longitudinales différentes en traction et en compression (représentation qualitative du flambement des fibres). Le potentiel élastique est obtenu par intégration sur les orientations de fibres sous l'hypothèse de séparation des échelles du problème (longueur caractéristique de la microstructure très inférieure à l'échelle d'étude macroscopique). La différentiation de ce potentiel élastique aboutit à une loi de comportement non linéaire paramétrée.

Sommaire

4.1	Introduction	70
4.2	Milieu continu bi-module	70
4.2.1	Ressorts à raideurs asymétriques	70
4.2.2	Directions en compression	71
4.2.3	Energie potentielle élastique	73
4.2.4	Loi de comportement	74

4.1 Introduction

Les lois de comportements à raideurs asymétriques s'écrivent généralement à partir de conditions portant sur le signe des valeurs propres du tenseur des contraintes ou des déformations (Kanno, 2011). En pratique, ces expressions ne sont pas commodes à utiliser et les auteurs ont couramment recours à des théorèmes de l'analyse convexe pour réécrire ces lois de comportement sous une forme variationnelle (Du et Guo, 2014). Dans le cas d'un milieu unilatéral, le formalisme de l'analyse limite des matériaux parfaitement plastique est souvent invoqué pour proposer une forme unifiée de la loi de comportement (Del Piero, 1989; Angelillo, 1993).

Cependant, comme nous l'avons évoqué dans la partie précédente, on peut avantageusement utiliser le formalisme des modèles à directions de fibre (Cox, 1952; Narter *et al.*, 1999) basés sur une approche en déformation du calcul du comportement homogène, pour obtenir la densité d'énergie potentielle d'un milieu fibreux hyper-élastique bi-module, qui en plus vérifie les conditions nécessaires de convexité pour s'assurer de l'existence et l'unicité de la solution.

C'est la démarche adoptée dans ce chapitre, où l'on construit un modèle de loi de comportement continu bi-module à partir d'une représentation idéale d'un réseau aléatoire de fibres rectilignes en négligeant le seuil de flambement. La non linéarité du modèle est obtenue en associant une raideur asymétrique à chaque fibre. Enfin, la loi de comportement peut être obtenue par différentiation de ce potentiel élastique.

4.2 Milieu continu bi-module

On considère un réseau de fibres élastiques rectilignes en déformation dans le plan. Par ailleurs, on suppose que les fibres ne transmettent que des efforts longitudinaux et peuvent donc être assimilées à des ressorts élastiques. Cette dernière hypothèse implique nécessairement que les jonctions nodales du réseau soient réticulées (*i.e.* elles ne transmettent pas de couples de contrainte aux fibres). Un milieu continu équivalent d'un assemblage de ressorts articulés a déjà été donné à la section 1.6 du chapitre 1 dans le cas d'une déformation homogène sur le volume élémentaire représentatif (hypothèses de localisation (1.7)) avec des ressorts élastiques linéaires. On considère ici le cas des ressorts non linéaires avec raideurs asymétriques en traction/compression.

4.2.1 Ressorts à raideurs asymétriques

On considère un volume représentatif de ressorts en déformation homogène. On note $\underline{\underline{\varepsilon}}$ la déformation de Green-Lagrange qui caractérise l'état de déformation de ce volume de ressorts et $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ sa base principale. Par convention, $\underline{e}_1$ (resp. $\underline{e}_2$) est associé à la plus grande (resp. plus petite) déformation principale. Par ailleurs, on note ℓ^0 la longueur au repos du ressort et $\chi \in \Xi$ son orientation mesurée par rapport à la direction de la plus grande

déformation principale $(O, \underline{e}_1)$, avec $\Xi = [-\pi/2, \pi/2]$ (voir figure 4.1). La tension T exercée par la fibre est liée à sa déformation longitudinale $e = \delta\ell/\ell^0$ via la loi de comportement $T = ke$ où k représente le module élastique longitudinal et $\delta\ell = \ell - \ell^0$ l'extension du ressort (avec ℓ la longueur déformée). Par ailleurs, la déformation longitudinale $e = \delta\ell/\ell^0$ du ressort est liée à la déformation macroscopique $\underline{\varepsilon}$ par la relation

$$e(\chi, \underline{\varepsilon}) = \underline{t} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{t} \quad (4.1)$$

avec $\underline{t} = (\cos \chi, \sin \chi)$ le vecteur unitaire tangent au ressort.

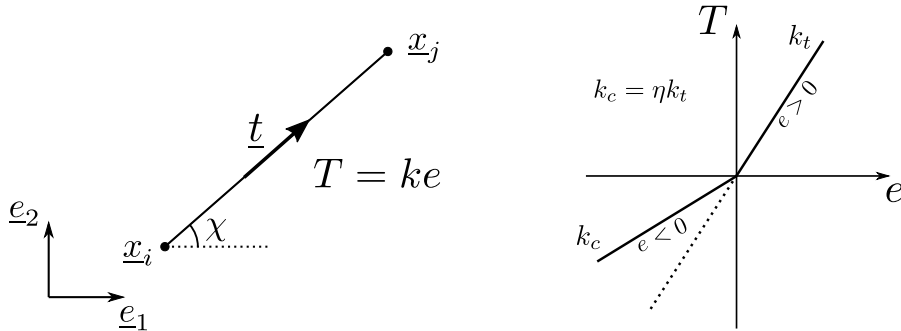


FIGURE 4.1 – Représentation d'une fibre d'orientation χ . Le paramètre $\eta = k_c/k_t$ caractérise le « degré » de non linéarité de la loi de comportement.

On considère une loi de comportement non linéaire des ressorts : on note k_t le module élastique en extension ($e > 0$) et k_c le module en compression ($e < 0$) qui est réduite d'un facteur $\eta \in]0, 1]$ tel que $k_c = \eta k_t$ (voir figure 4.1). Par conséquent, l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_f$ du ressort fibre s'écrit :

$$\mathcal{E}_f(\chi, \underline{\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ell^0 k_t e^2(\chi, \underline{\varepsilon}) & \text{si } e(\chi, \underline{\varepsilon}) > 0 \\ \frac{1}{2} \ell^0 k_c e^2(\chi, \underline{\varepsilon}) & \text{si } e(\chi, \underline{\varepsilon}) < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Par la suite, on fait l'hypothèse que tous les ressorts du réseau possèdent un comportement mécanique identique à celui décrit par l'énergie potentielle (4.2).

Pour déterminer le comportement homogène équivalent du réseau de fibres, il est nécessaire de considérer séparément les orientations de fibres en compression de celles en traction en étudiant le signe de $e(\chi, \underline{\varepsilon})$ pour un état de déformation $\underline{\varepsilon}$ imposé.

4.2.2 Directions en compression

L'état de déformation d'une fibre est donné par le signe de son extension (4.1), que l'on peut expliciter dans la base principale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\underline{\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$e(\chi, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \cos^2 \chi + \varepsilon_2 \sin^2 \chi \quad (4.3)$$

On remarque que l'extension devient indépendante de l'orientation χ du ressort lorsque l'état de déformation est isotrope (i.e. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$). Ainsi, il est plus avantageux de réécrire e en faisant apparaître la déformation moyenne $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ et déviatorique $\varepsilon_d = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$,

$$e(\chi, \varepsilon_m, \varepsilon_d) = \varepsilon_m + \varepsilon_d \cos(2\chi) \quad (4.4)$$

On voit clairement avec (4.4) que c'est la composante de cisaillement qui aura un effet « discriminant » pour déterminer les directions compressives du milieu. En utilisant une représentation polaire de la déformation

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \varepsilon \cos \phi \\ \varepsilon_d &= \varepsilon \sin \phi \end{aligned} \quad (4.5)$$

il vient :

$$e(\chi, \phi, \varepsilon) = \varepsilon (\cos \phi + \sin \phi \cos(2\chi)) \quad (4.6)$$

où ε et $\phi \in [0, \pi]$ représentent respectivement l'intensité et l'anisotropie de la déformation.

A partir de la relation (4.6), on peut distinguer trois cas de figures suivant la direction χ du ressort et l'anisotropie ϕ de la déformation :

— si $0 < \phi < \pi/4$, on a

$$e(\chi, \phi, \varepsilon) > 0 \quad \forall \chi \quad (4.7)$$

et donc tous les ressorts, quelles que soient leurs directions, sont en traction.

— si $3\pi/4 < \phi < \pi$, alors

$$e(\chi, \phi, \varepsilon) < 0 \quad \forall \chi \quad (4.8)$$

et donc tous les ressorts, quelles que soient leurs directions, sont en compression.

— dans le cas intermédiaire $\phi \in [\pi/4, 3\pi/4]$, l'équation $e(\chi, \phi, \varepsilon) = 0$ admet une solution donnée par l'orientation critique χ_c suivante

$$\cos(2\chi_c) = -\frac{1}{\tan \phi} \quad (4.9)$$

Dans ce cas, les ressorts en compression et en traction coexistent sur les orientations respectives suivantes :

$$e(\chi, \phi, \varepsilon) < 0 \quad \forall \chi \in [-\pi/2, -\chi_c] \cup [\chi_c, \pi/2], \quad e(\chi, \phi, \varepsilon) > 0 \quad \text{sinon} \quad (4.10)$$

Les différents cas décrits ci-dessus sont illustrés sur la figure 4.2 (demi-cercle supérieur correspondant à $\phi \in [0, \pi]$). Les directions compressives définissent un « cône » (représenté en rouge clair sur la figure 4.2) orienté dans la direction principale de compression (lorsqu'elle existe). L'angle d'ouverture χ_c du cône est d'autant plus élevé que l'intensité de la composante compressive est grande devant celle en traction.

Le demi-cercle inférieur correspondant à $\phi \in [\pi, 2\pi]$ est simplement obtenu en permutant ε_1 et ε_2 dans la convection de départ (ε_1 devient alors la plus petite valeur propre et ε_2 la plus grande).

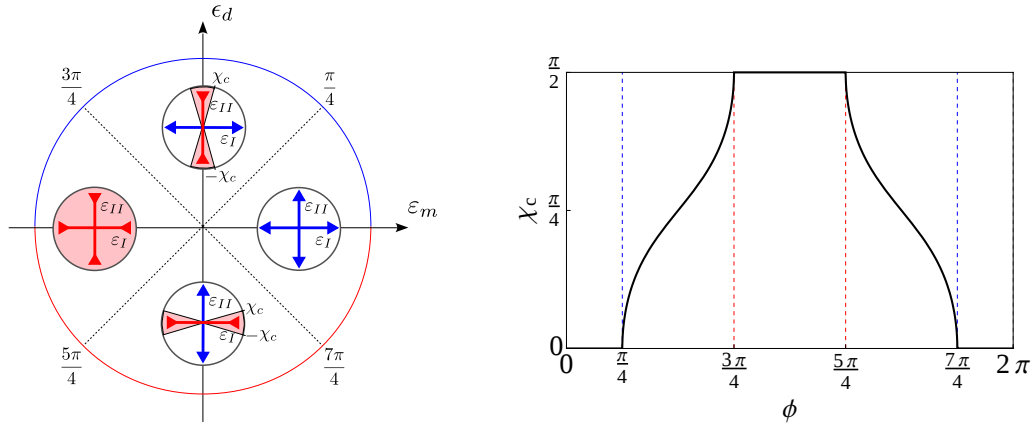


FIGURE 4.2 – A gauche : Déformation dans le plan polaire (ε, ϕ) . Les différents cas issus de l'analyse précédente peuvent être représentés dans les quatre quadrants de la représentation polaire (ε, ϕ) de la déformation. Dans le premier quadrant $\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$, toutes les fibres sont en traction. Dans les deux quadrants intermédiaires $\phi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ et $\phi \in [3\pi/4, 5\pi/4]$, il existe un cône de fibres en compression qui a pour axe la direction compressive (représenté en rouge clair). Dans le dernier quadrant $\phi \in [5\pi/4, 7\pi/4]$, toutes les fibres sont en compression. A droite : Angle d'ouverture du cône $\chi_c(\phi)$.

4.2.3 Énergie potentielle élastique

Si l'on note $\omega_c \subset \Xi$ (resp. $\omega_t \subset \Xi$) l'ensemble des directions en compression (resp. en traction), on a vu dans la section précédente que ces ensembles s'écrivent

$$\omega_c = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \phi \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ [-\frac{\pi}{2}, -\chi_c] \cup [\chi_c, \frac{\pi}{2}] & \text{si } \phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \text{si } \phi \in [\frac{3\pi}{4}, \pi] \end{cases}, \quad \omega_t = \Xi \setminus \omega_c \quad (4.11)$$

La densité d'énergie potentielle élastique w étant une grandeur extensive, elle s'obtient par une sommation des contributions individuelles de chaque fibre qui constituent le volume élémentaire représentatifs (VER) de volume $\mathcal{V}$. A l'instar du passage à la limite continue effectuée à la section 1.4.2, on peut approcher la somme discrète des énergies potentielles (4.2) par l'intégration continue suivante

$$w(\varepsilon, \phi) = \frac{1}{2} \rho k_t \int_{\omega_t} \psi(\chi) e^2(\chi, \phi, \varepsilon) d\chi + \frac{1}{2} \rho \eta k_t \int_{\omega_c} \psi(\chi) e^2(\chi, \phi, \varepsilon) d\chi$$

avec ρ la densité locale de fibres (longueur de fibre par unité de volume) et $\psi(\chi)$ la fonction de distribution d'orientation des fibres, définie tel que $\int_{\Xi} \psi(\chi) d\chi = 1$.

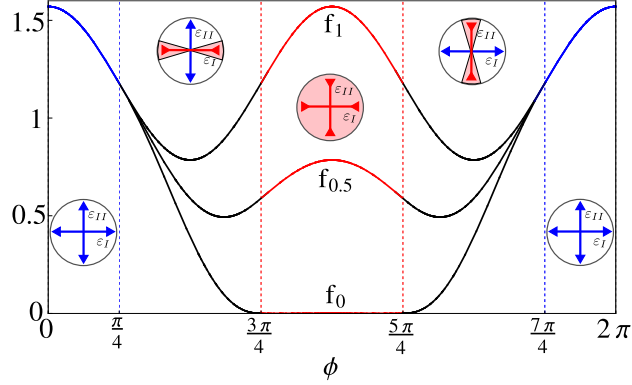


FIGURE 4.3 – Tracé de f_η pour $\eta = 1$ (cas linéaire) et $\eta = 0$ (raideur nulle en compression). La densité d'énergie s'annule lorsque $\phi \in [3\pi/4, 5\pi/4]$.

En utilisant les relations (4.6), (4.9) et (4.11), on peut calculer les deux intégrales précédentes dans l'expression de w . On obtient le résultat suivant :

$$w(\varepsilon, \phi) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 f_\eta(\phi) \quad (4.12)$$

avec f_η la fonction $\mathcal{C}^2$ par morceaux, π -périodique, définie de la façon suivante :

$$f_\eta(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{4} k_t (3 + \cos(2\phi)) & \text{si } \phi \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \frac{1}{4\pi} k_t \left(6(1-\eta) \sqrt{-\cos(2\phi)} \cos \phi + (3 + \cos(2\phi)) (\pi + (1-\eta) \arccos(-\cot \phi)) \right) & \text{si } \phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ \frac{1}{4} \eta k_t (3 + \cos(2\phi)) & \text{si } \phi \in [\frac{3\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

dont la représentation graphique est donnée sur la figure 4.3. Comme prévu, le comportement non linéaire des fibres n'a aucun effet sur la raideur macroscopique lorsque le milieu est sollicité en traction bi-axiale (les fonctions f_η sont coïncidentes quelle que soit la valeur de η). Par ailleurs, on retrouve bien que le milieu possède une raideur nulle en compression biaxial lorsque $\eta = 0$.

Il est possible d'obtenir une loi de comportement $\underline{\sigma}(\underline{\varepsilon})$ par dérivation de l'expression (4.12) de l'énergie w . C'est l'objet de la section suivante.

4.2.4 Loi de comportement

On peut extraire une loi de comportement à partir de (4.12) en écrivant la forme incrémentale de w . Dans cette section, on utilise la notation « chapeau » $\hat{a}$ pour désigner la différentielle d'une quantité quelconque a . Le calcul de $\hat{w}$ s'écrit simplement

$$\hat{w} = \varepsilon \hat{\varepsilon} f_\eta(\phi) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \hat{\phi} f'_\eta(\phi) \quad (4.13)$$

Par ailleurs, en utilisant la représentation polaire (4.5) du tenseur de déformation, on obtient les relations

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_m &= \hat{\varepsilon} \cos \phi - \varepsilon \hat{\phi} \sin \phi \\ \hat{\varepsilon}_d &= \hat{\varepsilon} \sin \phi + \varepsilon \hat{\phi} \cos \phi\end{aligned}\tag{4.14}$$

que l'on peut inverser pour obtenir

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon}_m \cos \phi + \hat{\varepsilon}_d \sin \phi \\ \varepsilon \hat{\phi} &= -\hat{\varepsilon}_m \sin \phi + \hat{\varepsilon}_d \cos \phi\end{aligned}\tag{4.15}$$

Enfin, en substituant (4.15) dans (4.13), il vient

$$\hat{w} = \hat{\varepsilon}_m \left(\varepsilon_m f_\eta - \frac{1}{2} \varepsilon_d f'_\eta \right) + \hat{\varepsilon}_d \left(\varepsilon_d f_\eta + \frac{1}{2} \varepsilon_m f'_\eta \right)\tag{4.16}$$

La relation précédente pourra être avantageusement comparée à l'expression général $\hat{w}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, que l'on peut expliciter en utilisant la décomposition en parties sphérique et déviatorique suivante

$$\hat{w} = 2(\sigma_m \hat{\varepsilon}_m + \sigma_d \hat{\varepsilon}_d)\tag{4.17}$$

Si l'on compare les deux dernières relations (4.16) et (4.17), il est possible d'identifier les quantités suivantes, qui représentent la contrainte moyenne σ_m et la contrainte déviatorique σ_d

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_m f_\eta - \frac{1}{2} \varepsilon_d f'_\eta \right) \\ \sigma_d &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_d f_\eta + \frac{1}{2} \varepsilon_m f'_\eta \right)\end{aligned}\tag{4.18}$$

La relation (4.18) constitue la loi de comportement du milieu bi-module.

Forme tensorielle de la loi de comportement : A partir des définitions $\varepsilon_m = (1/2) \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\varepsilon_d = \frac{1}{2} \sqrt{2 \underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d}$, on obtient les relations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_m &= \frac{1}{2} \text{Tr } \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \\ 2\varepsilon_d \hat{\varepsilon}_d &= (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_m \underline{\underline{1}}) : (\underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} - \hat{\varepsilon}_m \underline{\underline{1}}) \end{cases}$$

que l'on peut remplacer dans la relation (4.17). Il vient

$$\begin{aligned}\hat{w} &= 2(\sigma_m \hat{\varepsilon}_m + \sigma_d \hat{\varepsilon}_d) \\ &= \sigma_m \text{Tr } \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} + \frac{\sigma_d}{\varepsilon_d} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_m \underline{\underline{1}}) : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \\ &= \left(\sigma_m \underline{\underline{1}} + \frac{\sigma_d}{\varepsilon_d} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_m \underline{\underline{1}}) \right) : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \\ &= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}\end{aligned}$$

avec l'identification suivante du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{1}} + \frac{\sigma_d}{\varepsilon_d} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_m \underline{\underline{1}}) \quad (4.19)$$

En substituant (4.18) dans (4.19), on obtient la forme tensorielle de la loi de comportement d'un milieu bi-module. Les relations (4.18) et (4.19) ne peuvent être inversées analytiquement. En pratique, pour déterminer la loi de comportement inverse, on peut procéder à une inversion semi-analytique de (4.18) en calculant le rapport σ_d/σ_m qui permet d'exprimer l'angle d'anisotropie de la contrainte en fonction de l'angle d'anisotropie de la déformation. Ce calcul sera fait à la fin du chapitre 6.

Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode de calcul du comportement homogène du milieu fibreux est très similaire à ce qui est présenté au chapitre 1 sur les milieux désordonnés. Néanmoins, la raideur asymétrique des fibres nécessite une considération des différents états de déformation au cas par cas, ce qui aboutit à une énergie potentielle continue quadratique en ε et définie par morceaux. Le modèle est paramétré par η le rapport entre la raideur en compression sur la raideur en traction du milieu. Le cas d'un milieu élastique linéaire est donné par $\eta = 1$, celui d'un milieu bi-module par $\eta \in]0, 1]$ et le milieu unilatéral est obtenu avec $\eta = 0$.

L'objet du chapitre suivant est de proposer un outil de calcul numérique, fondé sur un formalisme générique aux éléments finis et adapté à la loi de comportement obtenue dans ce chapitre.

OUTIL NUMÉRIQUE DE SIMULATION D'UN MILIEU BI-MODULE

Pour déterminer numériquement la solution en déplacement d'un problème aux limites avec un milieu bi-module, on utilise une formulation aux éléments finis basée sur l'énergie potentielle d'un milieu isotrope non linéaire en loi de comportement. De plus, une méthode de continuation numérique est mise en place pour suivre la solution en fonction du paramètre de non linéarité η décrit au chapitre précédent. L'implémentation est validée sur un cas de singularité de contrainte en pointe de fissure.

Sommaire

5.1	Introduction	78
5.2	Formulation forte continue	78
5.3	Formulation faible continue	79
5.4	Forme matricielle du problème ($\mathcal{P}2$)	80
5.4.1	Forme discrète de la densité d'énergie potentielle $\hat{w}$	80
5.4.2	Forme discrète du travail des efforts donnés	81
5.4.3	Forme discrète du potentiel de pénalité	82
5.4.4	Système matriciel complet et schéma de résolution	82
5.5	Méthode de continuation numérique	83
5.6	Densité d'énergie potentielle du milieu bi-module	84
5.7	Validations	85
5.7.1	Traction uniaxiale en grande déformation	85
5.7.2	Singularité de contrainte en pointe de fissure	86

5.1 Introduction

Une loi de comportement bi-module, paramétrée par le rapport η de la raideur en compression à celle en traction, a été obtenue au chapitre précédent par intégration de l'énergie potentielle sur les directions de fibres. Bien que la forme de cette loi soit d'une apparente simplicité, sa résolution numérique dans un problème aux limites peut être fastidieuse, même pour une géométrie simple. En effet, dans une formulation aux éléments finis, le problème sera d'autant plus mal conditionné que η est petit. Le cas limite d'une raideur en compression nulle $\eta = 0$, correspondant à un milieu unilatéral, est encore plus complexe car, comme on le verra plus en détail au chapitre suivant, il existe des problèmes aux limites simples d'apparence mais qui n'ont pas de solution (Lucchesi *et al.*, 2000). De plus, la solution en contrainte d'un tel problème est généralement discontinue avec éventuellement des régions à contraintes nulles.

Des stratégies numériques ont vu le jour au début des années 1990 pour traiter des problèmes aux limites impliquant des milieux unilatéraux (Cuomo et Ventura, 2000). La plupart d'entre elles utilisent des stratégies « sur mesure » adaptées à des formes particulières de loi de comportement unilatéral ou alors des régularisation *ad-hoc* de ces mêmes lois (Genna, 1994; Alfano *et al.*, 2000).

Dans notre cas d'étude, la loi de comportement se présente avantageusement sous une forme énergétique (relation (4.12)). Afin d'obtenir la réponse numérique du milieu hyperélastique bi-module, on se propose d'implémenter une formulation aux éléments finis générique pour une fonction quelconque d'énergie potentielle d'un milieu élastique isotrope bi-dimensionnel $w(I_1, I_2)$, où I_1 et I_2 représentent des invariants scalaires de la déformation. Cet outil nous permettra d'analyser l'impact du paramètre de non-linéarité η dans la réponse mécanique du milieu sur des éprouvettes fissurées. On commence par écrire les formulations forte continue, faible continue et faible discrète (sections 5.2 à 5.4) associées à un problème aux limites de Dirichlet. On présentera ensuite brièvement les particularités de l'implémentation numérique (sections 5.5 et 5.6) et enfin la validation de cette dernière (section 5.7).

5.2 Formulation forte continue

On considère un volume Ω_0 en configuration initiale non déformée (resp. Ω en configuration déformée) d'un milieu parfaitement élastique isotrope en déformation plane. On note $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ la déformation de Cauchy-Green droite et $\underline{\underline{F}} = \mathbf{grad} \underline{\underline{x}}$ le gradient de la transformation $\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}) \in \Omega$ défini pour tout point matériel $\underline{\underline{X}}$ dans la configuration non déformée. Le milieu étant supposé isotrope, la densité d'énergie potentielle élastique $w(\underline{\underline{C}})$ ne dépend que de deux invariants scalaires de la déformation. On fait le choix des invariants

suivants

$$\begin{aligned} I_1 &= \det \underline{\underline{F}} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \underline{\underline{C}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

On note $\partial\Omega^T$ (resp. $\partial\Omega^u = \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega^T$) la frontière de Ω_0 où l'on impose le chargement $\underline{T}^d$ (resp. la position finale $\underline{x}^d$). Dans le cas d'un milieu hyperélastique de densité d'énergie potentielle $w(I_1, I_2)$, la solution $\underline{x}$ d'un problème aux limites est donnée par le minimum de l'énergie potentielle, que l'on note $\mathcal{W}(\underline{x})$. Lorsque des conditions cinématiques $\underline{x}^d$ sont imposées sur $\partial\Omega^u$, on cherche le minimum de $\mathcal{W}(\underline{x})$ sous la contrainte $\underline{x} = \underline{x}^d$ sur $\partial\Omega^u$. En pratique, on utilisera simplement un potentiel élastique de *pénalité* que l'on ajoute à la fonction $\mathcal{W}(\underline{x})$. Ainsi, la forme « forte » du problème aux limites s'écrit dans le cas général :

On cherche $\underline{x} \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{W}(\underline{x}) = \min_{\underline{x}' \in \mathcal{K}} \mathcal{W}(\underline{x}')$ avec

$$\mathcal{W}(\underline{x}) = \int_{\Omega_0} w(I_1, I_2) dV - \int_{\partial\Omega^T} \underline{T}^d \cdot (\underline{x} - \underline{X}) dS + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\partial\Omega^u} (\underline{x} - \underline{x}^d)^2 dS \quad (\mathcal{P1})$$

où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des champs de position cinématiquement admissibles et ϵ est un coefficient numérique suffisamment petit, par rapport auquel on s'assurera de la convergence numérique de la solution.

La forme variationnelle équivalente au problème ($\mathcal{P1}$) est présentée dans la section suivante.

5.3 Formulation faible continue

Dans toute la suite, on utilise la notation « chapeau » ' $\hat{\cdot}$ ' pour désigner la différentielle d'une quantité quelconque. Ainsi, la différentielle de la densité d'énergie potentielle $w(I_1, I_2)$ s'écrit

$$\hat{w}(I_1, I_2, \hat{I}_1, \hat{I}_2) = w_{,1} \hat{I}_1 + w_{,2} \hat{I}_2 \quad (5.2)$$

où $w_{,i} = \partial w / \partial I_i$ représente la dérivée par rapport à l'invariant d'indice i .

La définition (5.1) de I_1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{F}_{11} F_{22} + F_{11} \hat{F}_{22} - \hat{F}_{21} F_{12} - F_{21} \hat{F}_{12} \\ &= \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\hat{F}}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

où $\underline{\underline{H}}$ représente le tenseur des co-facteurs de $\underline{\underline{F}}$ et est défini par $\underline{\underline{H}} = (\det \underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-T}$. La convention sur la double contraction $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij} B_{ji}$ a été utilisée dans (5.3).

La différentielle du second invariant I_2 est immédiate :

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\underline{\underline{\hat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}) \\ &= \underline{\underline{F}}^T : \underline{\underline{\hat{F}}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

En substituant (5.3) et (5.4) dans (5.2), il vient

$$\begin{aligned}\hat{w} &= (w_{,1}\underline{\underline{H}} + w_{,2}\underline{\underline{F}}^T) : \hat{\underline{\underline{F}}} \\ &= \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{F}}) : \hat{\underline{\underline{F}}}\end{aligned}\quad (5.5)$$

où l'on a identifié la contrainte de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\underline{N}} = w_{,1}\underline{\underline{H}} + w_{,2}\underline{\underline{F}}^T \quad (5.6)$$

Finalement, la forme faible complète du problème (P1) s'écrit :

On cherche $\underline{\underline{x}} \in \mathcal{K}$ tel que

$$\forall \hat{\underline{\underline{x}}} \in \mathcal{K}, \quad \int_{\Omega_0} \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{F}}) : \hat{\underline{\underline{F}}} dV - \int_{\partial\Omega^T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \hat{\underline{\underline{x}}} dS + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega^u} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}^d) \cdot \hat{\underline{\underline{x}}} dS = 0 \quad (\mathcal{P2})$$

La forme discrète du problème (P2) fait l'objet de la section suivante.

5.4 Forme matricielle du problème (P2)

5.4.1 Forme discrète de la densité d'énergie potentielle $\hat{w}$

Dans le cadre d'une discrétisation en éléments finis, on considère le partitionnement du domaine non déformé Ω_0 en N_e sous-domaines élémentaires $\Omega_0 = \bigcup_j^{N_e} \Omega_j$. On suppose que les éléments Ω_j sont tous de la même famille polynomiale (même type et même ordre d'interpolation). Par ailleurs, on note N_i le nombre de degrés de liberté de la composante x_i sur un élément donné. Les composantes x_i sont approximées par une combinaison linéaire des fonctions de base Φ_{α_i} et des degrés de liberté nodaux $x_i^{\alpha_i}$:

$$x_i = x_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i} \quad (5.7)$$

où l'indice de sommation $\alpha_i \in [1; N_i]$ est associé au champ x_i sur l'élément courant. Par ailleurs, on note $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{N_i})$ le vecteur de taille N_i des degrés de liberté associés à x_i . Les gradients de x_i et $\hat{x}_i$ par rapport aux degrés de liberté s'écrivent

$$\begin{aligned}x_{i,j} &= x_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i,j} \\ \hat{x}_{i,j} &= \hat{x}_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i,j}\end{aligned}\quad (5.8)$$

Dans le cas général, les différentielles $w_{,i}$ de la densité d'énergie sont des fonctions non linéaires de $\underline{\underline{F}}$. Il est donc nécessaire de linéariser la contrainte $\underline{\underline{N}}(\underline{\underline{F}})$ autour d'un état de déformation $\underline{\underline{F}}^0$:

$$\underline{\underline{N}}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{F}}^0) + \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{F}}^0) : (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^0) \quad (5.9)$$

où l'on voit apparaître le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{D}}(\underline{F}) = (\partial N_{ij} / \partial F_{kl}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$ qui représente la raideur élastique tangente et dont l'expression complète est donnée en Annexe A. On utilise par la suite les notations concises $\underline{N}(\underline{F}^0) = \underline{N}^0$, $\underline{D}(\underline{F}^0) = \underline{D}^0$ et $\delta \underline{F} = \underline{F} - \underline{F}^0$ (où l'on a $|\delta \underline{F}| \ll 1$ par définition du développement asymptotique (5.9)). Par conséquent, en substituant (5.9) dans la première intégrale de volume du problème (P2), on obtient $\int_{\Omega_0} \left(\hat{\underline{F}} : \underline{N}^0 + \hat{\underline{F}} : \underline{D}^0 : \delta \underline{F} \right) dV$ et le premier terme devient, avec la discrétisation (5.8) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \hat{\underline{F}} : \underline{N}^0 dV &= \int_{\Omega_0} \hat{F}_{ij} N_{ji}^0 dV \\ &= \int_{\Omega_0} \hat{x}_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i, j} N_{ji}^0 dV \\ &= \left(\hat{X}_1^T, \hat{X}_2^T \right) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où l'on a identifié les sous vecteurs $B_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3, \dots, b_i^{N_i})$ avec $b_i^{\alpha_i} = \int_{\Omega_0} N_{ji}^0 \Phi_{\alpha_i, j} dV$.

Le second terme de l'intégrale de volume devient, avec (5.8) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \hat{\underline{F}} : \underline{D}^0 : \delta \underline{F} dV &= \int_{\Omega_0} \hat{F}_{ji} D_{ijkl}^0 \delta F_{lk} dV \\ &= \int_{\Omega_0} \hat{x}_j^{\alpha_j} \Phi_{\alpha_j, i} D_{ijkl}^0 \delta x_l^{\alpha_l} \Phi_{\alpha_l, k} dV \\ &= \left(\hat{X}_1^T, \hat{X}_2^T \right) \cdot \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où l'on a identifié K_{jl} la sous matrice de rigidité élémentaire de taille N_l lignes par N_j colonnes et de terme général $k_{jl}^{\alpha_j, \alpha_l} = \int_{\Omega_0} \Phi_{\alpha_j, i} D_{ijkl}^0 \Phi_{\alpha_l, k} dV$.

On appelle $X = (X_1, X_2)$ (resp. $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2)$) le vecteur des degrés de liberté de $\underline{x}$ (resp. $\hat{\underline{x}}$) sur l'élément courant. Par ailleurs, on note $B(X^0) = (B_1, B_2)$ le vecteur élémentaire que l'on peut évaluer connaissant $\underline{N}^0$ et $K(X^0)$ la matrice de rigidité issue de l'assemblage des sous matrices K_{jl} dont le terme général dépend de la raideur tangente $\underline{D}^0$.

A partir de (5.11) et (5.10), la forme discrète de la densité d'énergie $\hat{w}$ s'écrit :

$$\hat{w} = \hat{X}^T \cdot (B(X^0) + K(X^0) \cdot (X - X^0)) \quad (5.12)$$

5.4.2 Forme discrète du travail des efforts donnés

En appliquant la discrétisation précédente (5.7) au travail des efforts donnés $\int_{\Omega_0} \underline{T}^d \cdot \hat{\underline{x}} dS$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \underline{\hat{x}} \cdot \underline{T}^d &= \int_{\Omega_0} \hat{x}_i T_i^d dS \\
&= \int_{\Omega_0} \hat{x}_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i} T_i^{d, \beta_i} \Phi_{\beta_i} dS \\
&= \left(\hat{X}_1^T, \hat{X}_2^T \right) \cdot \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \\
&= \hat{X}^T \cdot G
\end{aligned} \tag{5.13}$$

où l'on a identifié le vecteur force élémentaire $G = (G_1, G_2)$ avec $G_i = (g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^{N_i})$ et $g_i^{\alpha_i} = \int_{\Omega_0} \Phi_{\alpha_i} T_i^{d, \beta_i} \Phi_{\beta_i} dS$.

5.4.3 Forme discrète du potentiel de pénalité

En appliquant la discrétisation précédente (5.7) à l'énergie potentielle de pénalité $\int_{\partial\Omega^u} \underline{\hat{x}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}^d) dS$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^u} \underline{\hat{x}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}^d) dS &= \int_{\partial\Omega^u} (\hat{x}_i x_i - \hat{x}_i x_i^d) dS \\
&= \int_{\partial\Omega^u} (\hat{x}_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i} x_i^{\beta_i} \Phi_{\beta_i} - \hat{x}_i^{\alpha_i} \Phi_{\alpha_i} x_i^{d, \beta_i} \Phi_{\beta_i}) dS \\
&= \left(\hat{X}_1^T, \hat{X}_2^T \right) \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \left(\hat{X}_1^T, \hat{X}_2^T \right) \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \\
&= \hat{X}^T \cdot M \cdot X - \hat{X}^T \cdot U
\end{aligned} \tag{5.14}$$

où l'on a identifié la matrice élémentaire M de taille N_i issue de l'assemblage des sous matrices M_{ii} de terme général $m_{ii}^{\alpha_i, \beta_i} = \int_{\partial\Omega^u} \Phi_{\alpha_i} \Phi_{\beta_i} dS$ ainsi que le vecteur élémentaire $U = (U_1, U_2)$ avec $U_i = (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{N_i})$ et $u_i^{\alpha_i} = \int_{\partial\Omega^u} \Phi_{\alpha_i} x_i^{d, \beta_i} \Phi_{\beta_i} dS$.

5.4.4 Système matriciel complet et schéma de résolution

En sommant les contributions à l'énergie potentielle (5.12), (5.13) et (5.14), le problème (P2) prend la forme matricielle suivante :

La solution X est telle que

$$\forall \hat{X} \in \mathcal{K}, \quad \hat{X} \cdot (B(X^0) + K(X^0) \cdot (X - X^0) - G + M \cdot X - U) = 0 \tag{5.15}$$

La nullité de la relation (5.15) pour tout $\hat{X} \in \mathcal{K}$ implique nécessairement que X soit solution du système matricielle suivant :

On cherche X tel que, $|X - X^0| < \xi$ et

$$R(X^0) \cdot (X - X^0) - Q(X^0) = 0 \quad (\mathcal{P3})$$

avec $\xi > 0$ donnée, $R(X^0) = K(X^0) + M$ et $Q(X^0) = G + U - B(X^0) - M \cdot X^0$.

Le problème $(\mathcal{P3})$ est résolu par itérations à partir d'un état de déformation initial X^0 . En pratique, on utilise la librairie C++ orientée objet dédiée aux éléments finis *libmesh* C++ (Kirk *et al.*, 2006). Libmesh fait appel aux méthodes de résolutions non linéaires (méthodes itératives variantes de la méthode de Newton) et linéaires (méthodes de Krylov) de la librairie PETSC (Balay *et al.*, 2008). L'utilisateur implémente au préalable la matrice de raideur élémentaire $R(X^0)$ et le vecteurs force élémentaires $Q(X^0)$ pour un état de déformation initial donnée X^0 . L'assemblage du système matriciel complet est gérée automatiquement par Libmesh.

5.5 Méthode de continuation numérique

Dans cette section, on présente brièvement le principe d'une méthode de *continuation numérique* utilisée au sein de la librairie Libmesh afin d'obtenir un faisceau de solution numérique $X(\eta)$ pour $\eta \in]0, 1]$. Les méthodes de continuations consistent à « suivre » l'évolution de la solution X pour des petites variations du paramètre η . On utilise ici une variante de cette méthode, dénommée « *pseudo-continuation numérique* » dont on ne présente que le principe général (le lecteur pourra se référer à Keller (1977) pour plus de détails).

On considère l'équation vectorielle non linéaire suivant, paramétrée par η :

$$\mathcal{F}(X, \eta) = 0 \quad (5.16)$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}^N \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et N représente la dimension du système. La figure 5.1 représente le faisceau de solution $\Gamma(\eta)$ (5.16) dans le plan (X, η) .

Le principe de la pseudo continuation numérique est d'utiliser l'abscisse curviligne s du faisceau $\Gamma(\eta)$ au lieu de sa paramétrisation naturelle η . A partir d'un point de départ (X_0, η_0) sur Γ et de la tangente $(\dot{X}_0, \dot{\eta}_0)$ en ce point (voir la figure 5.1), le plan Π_0 perpendiculaire à la tangente $(\dot{X}_0, \dot{\eta}_0)$ situé à une petite distance δs de (X_0, η_0) s'écrit

$$\Pi_0 : \dot{X}_0(X - X_0) + \dot{\eta}_0(\eta - \eta_0) = \delta s \quad (5.17)$$

L'incrément d'abscisse curviligne δs doit être choisi suffisamment petit de façon à s'assurer d'avoir une intersection avec la courbe Γ . Par conséquent, la solution suivante (X_1, η_1) , qui doit vérifier (5.12) tout en restant dans le plan Π_0 , peut être obtenue par la résolution du système matriciel de taille $N+1$ composé de la différentielle de (5.16) ainsi que de l'équation

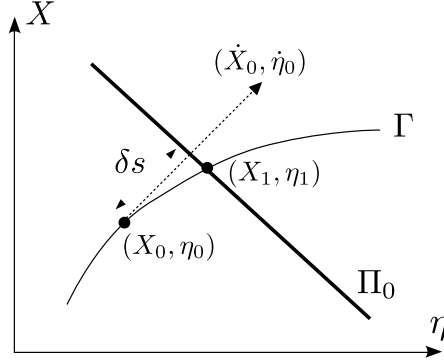


Figure 5.1 – Illustration du principe de la méthode de pseudo-continuation numérique. A partir d'une solution initiale (X_0, η_0) , la nouvelle solution (X_1, η_1) est déterminée par une minimisation sous contrainte, car (X_1, η_1) doit vérifier (5.12) tout en restant dans le plan Π_0 .

du plan (5.17). Ce nouveau système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_X & \mathcal{F}_\eta \\ \dot{X}_0 & \dot{\eta}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta s \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

où $\mathcal{F}_X$ est la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à X (c'est la matrice de rigidité R définie dans (P3)) et $\mathcal{F}_\eta$ représente la dérivée par rapport au paramètre η . Le système (5.18) est résolu pour chaque incrément δs de l'abscisse curviligne par une méthode de Newton-Raphson similaire à celle décrite à la section précédente.

5.6 Densité d'énergie potentielle du milieu bi-module

La matrice de raideur tangente $R(X^0)$ et le vecteur force $Q(X^0)$ du problème (P3) font appel aux dérivées d'ordre 1 et 2 de la densité d'énergie potentielle w par rapport aux invariants (5.1). Dans le cas d'un milieu bi-module, l'expression $w(\varepsilon_m, \varepsilon_d)$, donnée par la relation (4.12), devient :

$$w(I_1, I_2) = \begin{cases} \frac{1}{8}\pi k_t \left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) & \varepsilon_m > \varepsilon_d \\ \frac{1}{8}k_t \left(\left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) \left(\pi\eta + (1 - \eta) \arccos \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{I_1 + I_2}}{\sqrt{I_2 - I_1}} \right) \right) \dots & -\varepsilon_d < \varepsilon_m < \varepsilon_d \\ \dots + 6(1 - \eta) \left(\sqrt{\frac{I_1 + I_2}{2}} - 1 \right) \sqrt{\sqrt{2(I_1 + I_2)} - 1 - I_1} & \\ \frac{1}{4}\pi\eta k_t \left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) & \varepsilon_m < -\varepsilon_d \end{cases} \quad (5.19)$$

Les formules de la relation (5.19) sont établies en Annexe B.

En pratique, les dérivées premières et secondes de (5.19) sont calculées en utilisant la *différentiation automatique*. Cette méthode permet d'obtenir les valeurs exactes des dérivées d'ordre 1 et 2 de (5.19) sans avoir recours aux différences finies, ni à devoir saisir l'expression analytique des dérivées. Quelle que soit la complexité de son expression, la différentielle d'une fonction quelconque en un point donnée est obtenue par différentiation des opérations de base qui composent son expression, via la surcharge des opérateurs de base du C++. Le lecteur pourra se référer à la documentation de la librairie de différentiation automatique FADBAD++ que l'on utilise dans ces travaux [Bendtsen et Stauning \(1996\)](#).

5.7 Validations

Dans cette section, on vérifie la validité de l'implémentation numérique précédente sur un cas de traction uniaxiale en grande déformation d'un matériau hyperélastique Néo-Hookéen. Puis, dans le cas de l'élasticité linéaire, on considère un milieu fissuré avec un chargement en mode I. On retrouve les solutions connues de l'élasticité linéaire valable en pointe de fissure dans région à KI dominance : singularité de contrainte et solution en déplacement aux lèvres de la fissure.

5.7.1 Traction uniaxiale en grande déformation

On considère la fonction de densité d'énergie potentielle élastique du milieu hyperélastique Néo-Hookéen, qui s'écrit

$$w(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\alpha}{2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - 1 \right)^2 \quad (5.20)$$

où les λ_i sont les valeurs propres du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ et où α, β sont des paramètres internes qui vérifient la stabilité énergétique du milieu ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Le premier terme contient la partie déviatorique de la déformation et le second sa partie sphérique. En faisant appel à la définition des invariants (5.1), on a

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

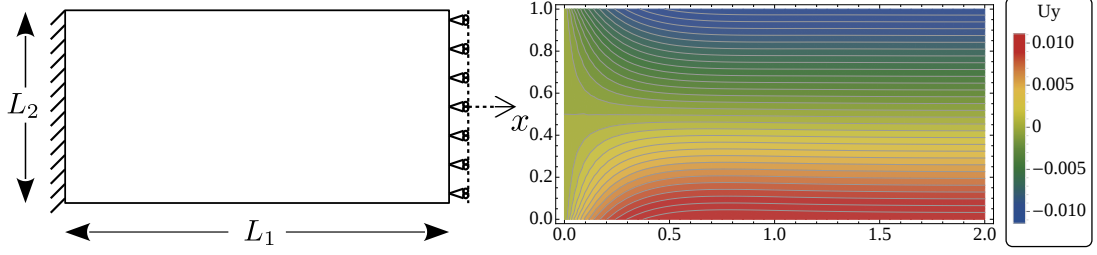


FIGURE 5.2 – A gauche : Géométrie et conditions aux limites. A droite : Déplacement vertical solution du problème pour $\lambda_1 = 1.2$.

La fonction d'énergie élastique 5.20 peut se réécrire en fonction I_1 et I_2 :

$$w(I_1, I_2) = \alpha(I_2 - I_1) + \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(I_1 + I_2)} - 1 \right)^2 \quad (5.21)$$

On considère un rectangle homogène dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de longueur L_1 (resp. L_2) dans la direction $\underline{e}_1$ (resp. $\underline{e}_2$) comme illustré sur la figure 5.2. On impose des conditions aux limites de Dirichlet sur les frontières verticales : la frontière de gauche est encastree, celle de droite se voit appliquer un déplacement homogène imposé dans la direction $\underline{e}_1$. L'objectif est de comparer la contraction dans la direction transverse λ_2 en fonction de l'allongement λ_1 .

Pour la simulation numérique, on utilise les paramètres $\alpha = 2$ and $\beta = 10$. De plus, le déplacement dans la direction $\underline{e}_1$ est utilisé comme paramètre de continuité numérique dans l'algorithme présenté à la section 83.

Le déplacement vertical solution du problème pour $\lambda_1 = 1.2$ est représenté sur la figure 5.2. Dans la limite d'un domaine très élancé dans la direction $\underline{e}_1$, la contraction transverse λ_2 théorique est donnée par la relation $\partial w(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_2 = 0$. La solution λ_2 en fonction de λ_1 analytique (ligne continue) et numérique (symboles) est représentée sur la figure 87 pour quelques valeurs du rapport d'aspect de la géométrie. On retrouve le fait que pour un rapport d'aspect $L_1/L_2 = 0.5$, la solution théorique n'est plus valable.

5.7.2 Singularité de contrainte en pointe de fissure

Dans le second exemple d'application, on considère la fissure de longueur a dans un domaine rectangulaire illustrée sur la figure 5.4. Une contrainte surfacique homogène σ_0 est imposée sur les frontières supérieure et inférieure (ouverture de la fissure en mode I). Dans le cas de l'élasticité linéaire, ce problème possède des solutions analytiques bien connues en pointe de fissure. Si on se place en coordonnées polaire, avec r la distance à la pointe de fissure et θ l'angle polaire mesuré par rapport à l'axe horizontal $(O, \underline{e}_1)$, la solution en

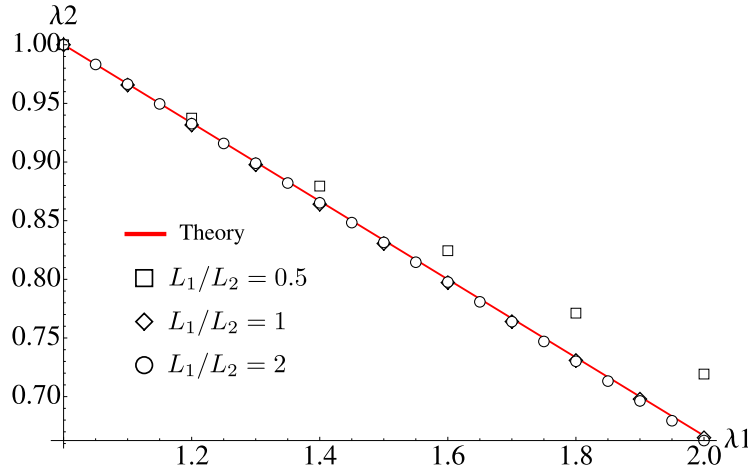


FIGURE 5.3 – Solution λ_2 en fonction de λ_1 analytique (ligne continue) et numérique (symboles) pour quelques valeurs du rapport d’aspect de la géométrie. L’écart pour $L_1/L_2 = 0.5$ est dû à la non validité de la relation $\partial w(\lambda_1, \lambda_2)/\partial \lambda_2 = 0$.

contrainte est singulière et on a, dans la zone à K1 dominance, la solution suivante (Gross et Seelig, 2011) :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(-\cos \frac{3\theta}{2} + 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\tag{5.22}$$

où K_I est le facteur d’intensité de contrainte en mode I. Sa valeur dépend des conditions aux limites et de la géométrie du problème. Pour la géométrie représentée sur la figure 5.4, en supposant $V > H$, le facteur d’intensité de contrainte vaut

$$K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2H}{\pi a} \tan \left(\frac{\pi a}{2H} \right)} G_I \left(\frac{a}{H} \right)\tag{5.23}$$

avec G_I la fonction suivante

$$G_I(\alpha) = \frac{0.752 + 2.02\alpha + 0.37 \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2}\alpha \right) \right)^3}{\cos \left(\frac{\pi}{2}\alpha \right)}$$

Les parties sphérique et déviatorique de la contrainte s’obtiennent immédiatement à

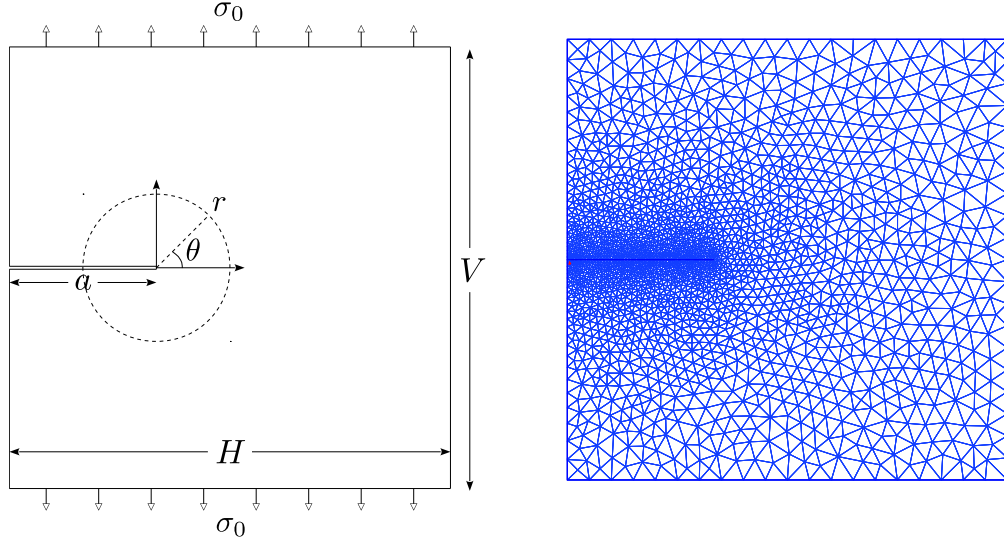


FIGURE 5.4 – A gauche : Géométrie et conditions aux limites. A droite : Maillage avec éléments de Lagrange d'ordre 2 utilisé pour la simulation.

partir de (5.22) :

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_d &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} |\sin \theta|\end{aligned}\tag{5.24}$$

et on rappelle que les rapports des contraintes et déformations sphérique et déviatorique sont indépendants du rayon r (Gross et Seelig, 2011) :

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_m}{\sigma_d} &= \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{|\sin \theta|} \\ \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_d} &= (1 - 2\nu) \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{|\sin \theta|}\end{aligned}$$

Le saut de déplacement vertical à travers les lèvres de la fissure est donnée par (Gross et Seelig, 2011) :

$$[[u]] = \frac{4(1 - \nu)}{\mu} K_1 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e_2\tag{5.25}$$

Le calcul est mené sur le maillage triangulaire avec éléments de Lagrange d'ordre 2, représenté sur la figure 5.4. Le chargement σ_0 est utilisé comme paramètre de continuation numérique. Pour la loi de comportement, on conserve la relation 86 qui, dans le cas des petites déformations $\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1$ et $\lambda_2 = 1 + \varepsilon_2$ avec ε_1 et ε_2 les valeurs propres de la

déformation linéarisée, se réduit à la loi de Hooke classique, avec les relations entre modules élastiques $\lambda = \beta/4 - \alpha$ et $\mu = \alpha$.

La simulation est effectuée avec $\alpha = 60$ Pa et $\beta = 480$ Pa (ce qui correspond à un coefficient de Poisson $\nu = 0.25$ et un module de cisaillement $\mu = 60$). Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\sigma_0 = 0.05$ Pa, $a = 2$, $H = 4$ et $V = 2H$.

La figure 5.5.a représente la comparaison entre le saut de déplacement vertical à travers la fissure analytique (ligne discontinue) et simulé (ligne continue). On retrouve le fait que la solution analytique n'est valable que dans la région à KI dominance. La figure 5.5.b représente la contrainte moyenne en échelle Log-Log sur une ligne horizontale qui prolonge la fissure (pour $\theta = 0$) pour différentes valeurs de la contrainte imposée $100\sigma_0$, $10\sigma_0$ et σ_0 . On voit que la contrainte moyenne varie en $r^{-1/2}$ dans la zone à KI dominance. Les figures 5.5.c et 5.5.d présentent les contraintes moyenne et déviatorique théoriques (ligne discontinue) et simulées (ligne continue) à la distance $r = 6 \times 10^{-3}$ m de la pointe de fissure (cette distance est située dans la zone à KI dominance). Les figures 5.5.e et 5.5.f présentent les déformations moyenne et déviatorique théoriques (ligne discontinue) et simulées (ligne continue) à la même distance $r = 6 \times 10^{-3}$ m de la pointe de fissure.

Conclusions

Dans ce chapitre, une formulation aux éléments finis générique a été mise en place pour simuler la réponse numérique du milieu hyper-élastique isotrope bi-module. Cette formulation utilise une méthode de continuation numérique pour « suivre » l'évolution de la solution numérique en fonction d'un paramètre (en l'occurrence ici le paramètre η). De plus, avec la différentiation automatique, les dérivées premières et secondes de l'expression de la densité d'énergie $w(I_1, I_2)$ sont calculées automatiquement et de manière exacte. L'implémentation est validée sur un cas de singularité de contrainte en pointe de fissure.

Cet outil nous permettra d'analyser l'impact du paramètre de non-linéarité η dans la réponse mécanique du milieu sur des éprouvettes fissurées, ce que l'on fait au chapitre suivant.

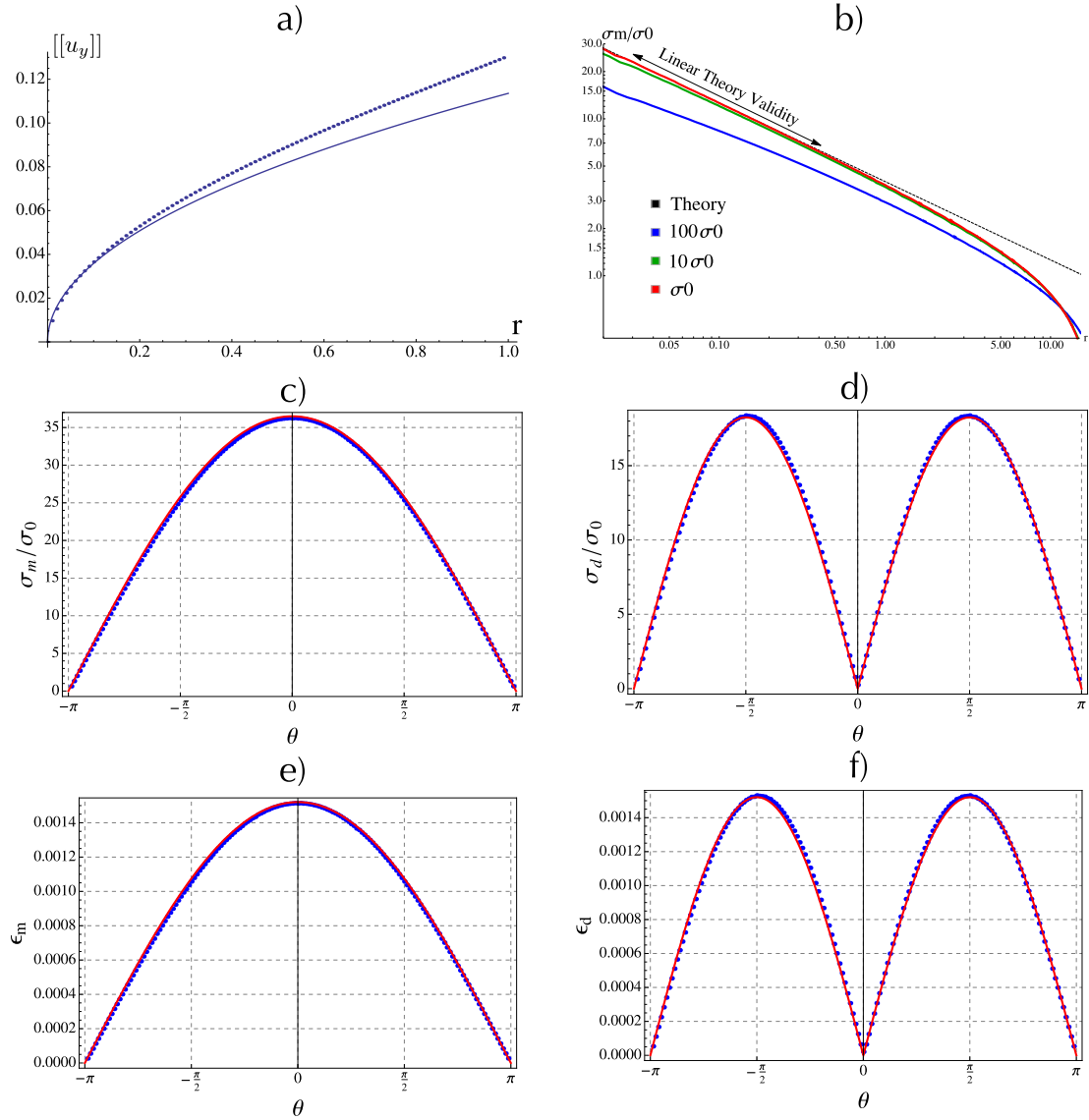


FIGURE 5.5 – Comparaison des solutions numériques et théoriques en pointe de fissure. (a) : Saut de déplacement vertical à travers la fissure, dans le cas analytique (ligne discontinue) et simulé (ligne continue). On retrouve le fait que la solution analytique n'est valable que dans la région à KI dominance. (b) : Contrainte moyenne en échelle Log-Log sur une ligne horizontale qui prolonge la fissure (pour $\theta = 0$) pour différentes valeurs de la contrainte imposée $100\sigma_0$, $10\sigma_0$ et σ_0 . On voit que la contrainte moyenne varie en $r^{-1/2}$ dans la zone à KI dominance. (c) et (d) : Contraintes moyenne et déviatorique théoriques (ligne discontinue) et simulées (ligne continue) à la distance $r = 6 \times 10^{-3}\text{m}$ de la pointe de fissure (cette distance est située dans la zone à KI dominance). (e) et (f) : Déformations moyenne et déviatorique théoriques (ligne discontinue) et simulées (ligne continue) à la même distance $r = 6 \times 10^{-3}\text{m}$ de la pointe de fissure.

6

ETUDE NUMÉRIQUE DE L'INTERACTION DE FISSURES EN MILIEUX UNILATÉRAUX

Dans ce chapitre, on met en évidence le caractère localisé et partitionné du champ de contrainte dans les milieux unilatéraux. La loi de comportement bi-module est simulée dans le cas $\eta \ll 1$ sur des éprouvettes fissurées via l'implémentation numérique présentée au chapitre précédent. On montre en particulier que la solution en contrainte peut-être construite à partir d'une famille de graphes de lignes de tension auto-équilibrés. Les régions en dehors des ces graphes sont auto-équilibrées et libres de contrainte. Enfin, on propose une application directe pour l'encadrement de la solution d'un problème aux limites.

Sommaire

6.1	Déformation uniaxiale sur une éprouvette non fissurée	93
6.2	Eprouvette fissurée	94
6.2.1	Localisation de la contrainte	95
6.2.2	Analyse en pointe de fissure	95
6.2.2.1	Singularité de la contrainte	95
6.2.2.2	Répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation . .	97
6.3	Eprouvette avec deux fissures débouchantes	99
6.3.1	Géométrie et conditions aux limites	99
6.3.2	Solutions numériques	101
6.4	Eprouvette multi-fissurée	103
6.4.1	Géométrie et conditions aux limites	103
6.4.2	Solutions numériques	104
6.5	Approche théorique des régions auto-équilibrés libres de contrainte	106

6.5.1	Régions auto-équilibrées et libres de contrainte	106
6.5.2	Cas de l'éprouvette avec fissures « balistiques »	108
6.5.3	Cas de l'éprouvette multi-fissurée	109
6.6	Application : encadrement énergétique de la solution	109
6.6.1	Approche en contrainte	110
6.6.2	Approche en déformation	114

6.1 Déformation uniaxiale sur une éprouvette non fissurée

On considère l'éprouvette rectangulaire de la figure 6.1 avec un chargement uniaxial $\underline{T}^d = \sigma_0 \underline{e}_y$ symétrique sur la frontière supérieure et $-\underline{T}^d$ sur la frontière inférieure de l'éprouvette. On rappelle que le milieu est décrit par la loi de comportement bi-module (4.12) (voir chapitre 4) paramétrée par la raideur en traction k_t et le ratio $\eta = k_t/k_c$ où k_c représente la raideur en compression du milieu.

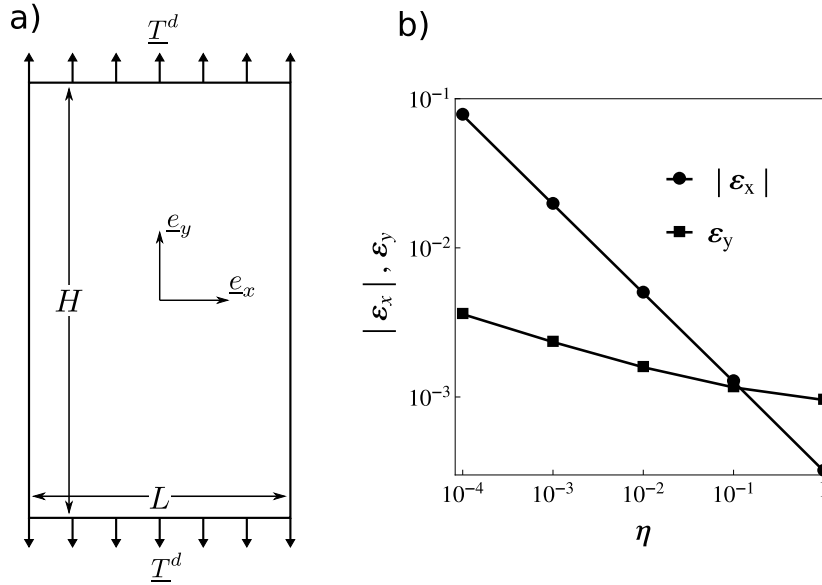


FIGURE 6.1 – a) Géométrie et conditions aux limites. b) Déformations $|\varepsilon_x|$ et ε_y de l'éprouvette en fonction de η . La raideur en compression η a un impact significatif sur la contraction horizontale $|\varepsilon_x|$. L'évolution de $|\varepsilon_x|$ indique que dans le cas asymptotique $\eta \rightarrow 0$, il n'existe pas de solution au problème de la figure a) car la géométrie serait totalement contractée ($|\varepsilon_x| = 1$).

La figure 6.1.b représente les déformations horizontales $|\varepsilon_x|$ et verticales ε_y obtenues par simulations numériques (non linéaires) pour quelques valeurs de η avec $k_t = 10^3 \text{ N/m}$, $\sigma_0 = 1 \text{ Pa}$ sur une éprouvette rectangulaire avec $L = 1 \text{ m}$ et $H/L = 2$. Comme prévu, on retrouve le coefficient de Poisson $\nu = |\varepsilon_x|/\varepsilon_y = 1/3$ dans le cas linéaire $\eta = 1$. Dans le cas non linéaire, la raideur en compression η a un impact significatif sur la contraction horizontale $|\varepsilon_x|$. Lorsque $\eta < 1$, $|\varepsilon_x|$ dépend du chargement σ_0 . Or dans le cas asymptotique $\eta \rightarrow 0$, l'évolution de $|\varepsilon_x|$ indique que le seul chargement compatible et supportable serait le chargement nul $\sigma_0 = 0$. Ainsi, il n'existe pas de solution au problème de la figure a) pour $\sigma_0 > 0$ car la géométrie serait totalement contractée ($|\varepsilon_x| = 1$).

L'exemple précédant illustre l'une des particularités des milieux unilatéraux : la solution

en contrainte statiquement admissible avec le chargement n'est pas une condition suffisante pour s'assurer l'existence d'une solution du problème aux limites. Ce point sera discuté plus en détail dans la section 6.5 de ce chapitre.

6.2 Epreuve fissurée

On considère une éprouvette de largeur L contenant une fissure centrée de longueur ℓ . Un déplacement vertical $\underline{u}^d = \delta \underline{e}_y$ (resp. $\underline{u}^d = -\delta \underline{e}_y$) est imposé sur le bord supérieur (resp. inférieur). Le déplacement horizontal est imposé nul sur ces mêmes frontières (conditions non glissantes). Les bords latéraux ainsi que les lèvres de la fissure sont libres de contrainte. Dans cette configuration, la fissure est chargée en mode I .

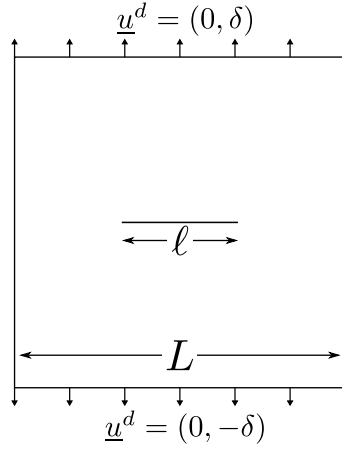


FIGURE 6.2 – Géométrie fissurée et conditions aux limites en déplacement imposées sur les bords supérieur et inférieur. Les bords latéraux ainsi que les lèvres de la fissure sont libres de contrainte.

La simulation est menée sur une éprouvette carrée avec $L = 6$, $\ell = L/3$, $k_t = 10^3$ et $\delta = L/100$. Le domaine est discrétisé en éléments triangulaires à 6 nœuds (interpolation de Lagrange d'ordre 2). Le maillage final après convergence du calcul¹ contient 5172 éléments (11016 nœuds) de longueur caractéristique $L/20$ près des frontières du domaine et $\ell/300$ en pointe de fissure.

1. La présence de singularité géométrique nous suggère d'utiliser une méthode de raffinement automatique de maillage non-structuré. Le critère de raffinement/grossissement est basé sur une estimation *a posteriori* du résidu

6.2.1 Localisation de la contrainte

La figure 6.3 représente la distribution de l'intensité de la contrainte $\sigma = \sqrt{(\underline{\sigma} : \underline{\sigma})} / 2$ dans le cas linéaire ($\eta = 1$) et non linéaire quasi-unilatéral ($\eta = 10^{-3}$). La fissure centrée est représentée en trait épais blanc. Pour $\eta = 1$ (sous figure a), on remarquera les concentrations de contraintes aux singularités géométriques (pointes de fissure) et aux singularités dues aux conditions aux limites (les quatre coins du domaine sont les intersections des conditions de déplacement imposé $\underline{u}^d$ avec les conditions de contrainte « libre » imposée $\underline{T}^d = \underline{0}$). Dans le cas quasi-unilatéral (sous figure b), la contrainte se localise fortement sur des branches reliant les pointes de fissures aux quatre coins du domaine. On remarquera que le « graphe » de force qui en résulte ne transmet que des efforts de traction sur chacune de ces branches (représentées par des flèches bidirectionnelles sur la figure 6.3.b) et constitue l'essentiel de la transmission des efforts entre les bords supérieur et inférieur (la contrainte σ chute en dehors de ce graphe). Par ailleurs, la chute de la raideur en compression entraîne une augmentation de la contraction horizontale de l'éprouvette. Il en résulte l'émergence d'une région de compression bi-axiale (région en forme de losange dont la fissure constitue l'une des diagonale sur la sous figure b). La contrainte dans cette région est quasiment nulle $\eta = 10^{-3}$.

6.2.2 Analyse en pointe de fissure

On s'intéresse ici à la l'analyse en pointe de fissure. On cherche à caractériser le taux de décroissance de la singularité de contrainte en fonction de η ainsi que la répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation.

6.2.2.1 Singularité de la contrainte

On s'intéresse à la décroissance de σ en pointe de fissure en fonction du paramètre η . La valeur de σ le long d'une ligne horizontale qui prolonge la fissure est représentée sur la figure 6.4 pour quelques valeurs de η . Pour $\eta = 1$, on retrouve la décroissance en $r^{-1/2}$ de la contrainte σ , que l'on peut observer sur les deux pointes de fissure. Cependant, lorsque η prend les valeurs $\eta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$, on observe que le taux de décroissance en $r^{-1/2}$ de la singularité reste inchangé. Précisons que cette décroissance ne dépend pas de la symétrie du système : on retrouve le même taux de décroissance en $r^{-1/2}$ sur les deux pointes de la fissure même lorsque celle-ci est décentrée sur l'axe horizontale.

Le caractère universel du taux de décroissance est la conséquence de l'indépendance de l'intégrale de contours de Rice, pour les problèmes élastiques linéaires aussi bien que non linéaires (Rice, 1968).

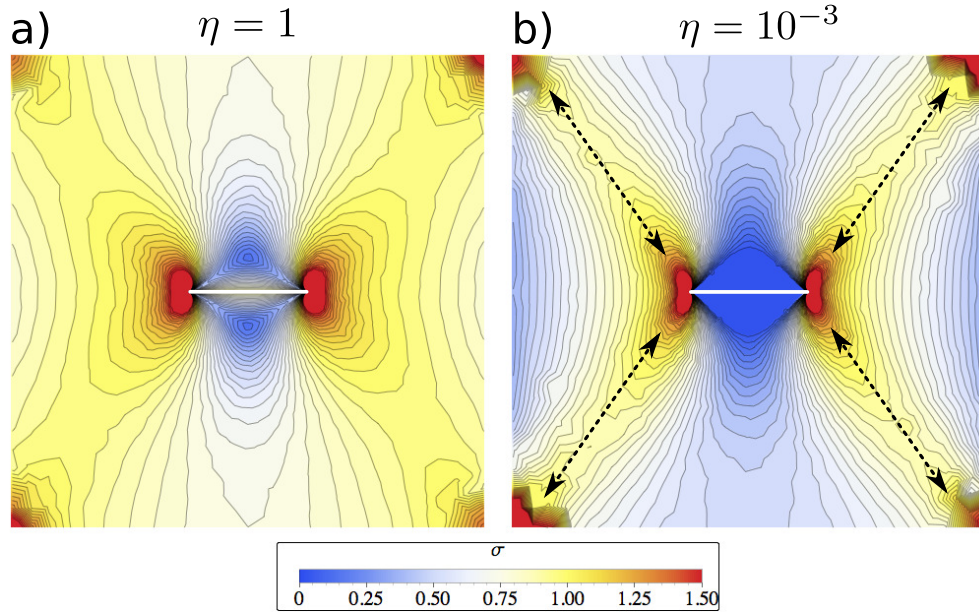


FIGURE 6.3 – Solution en contrainte sur l'éprouvette fissurée. a) Distribution de l'intensité de la contrainte $\sigma = \sqrt{(\underline{\sigma} : \underline{\sigma})} / 2$ dans le cas linéaire ($\eta = 1$). La fissure est représentée au centre par le segment blanc. On notera la concentration en pointe de fissure et aux quatre coins du domaine. b) Intensité de la contrainte σ dans le cas non linéaire quasi-unilatéral ($\eta = 10^{-3}$). La contrainte s'est localisée sur des branches (représentées par des flèches bidirectionnelles) reliant les pointes de fissures aux quatre coins du domaine. Par ailleurs, on observe l'émergence d'une région de compression bi-axiale, en forme de losange dont la fissure constitue l'une des diagonales.

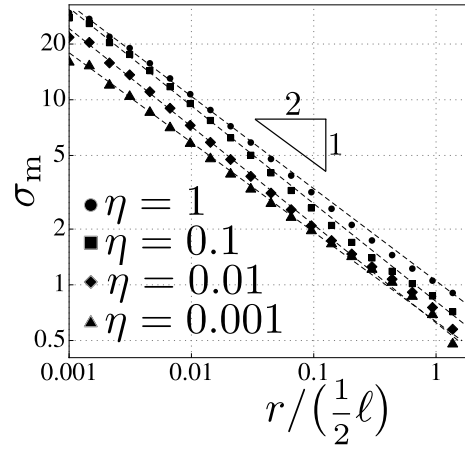


FIGURE 6.4 – Solution en contrainte $\sigma = (\underline{\sigma} : \underline{\sigma}) / 2$ en fonction du paramètre η dans le cas de l'éprouvette fissurée, sur une ligne horizontale qui prolonge la fissure. On retrouve la décroissance en $r^{-1/2}$ de la contrainte σ pour toutes valeurs de η .

6.2.2.2 Répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation

La figure 6.5 représente l'anisotropie de la déformation ϕ (définie par la relation 4.5) sur l'éprouvette entière pour $\eta = 10^{-3}$ (sous figure a). Dans cette représentation, la valeur de ϕ près des bords latéraux est d'autant plus élevée que la composante de compression est localement dominante devant la traction. Le même champ est représenté sur un domaine circulaire de rayon $\ell/40$ et centré sur la pointe de fissure (sous figure b). En l'absence d'échelle de longueur, l'anisotropie ϕ ne dépend plus de la distance à la pointe de fissure (les lignes de niveaux sont radiales sur la sous figure b). On peut distinguer trois quadrants selon les valeurs des déformations principales autour de la pointe de fissure. Dans le quadrant (a), on a $\phi \in [0, \pi/4]$ ce qui correspond à un état de traction dans les deux directions principales. Dans le quadrant (b), on a $\phi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ ce qui indique que l'une des directions principales est compressive. Les directions de fibres en compression forment un cône dont l'angle d'ouverture est une fonction croissante de ϕ . Dans le quadrant (c), toutes les directions sont compressives ($\phi \in [3\pi/4, \pi]$). Cette région angulaire appartient au losange libre de contrainte illustré à la figure 6.3.b.

Contrairement à la singularité de contrainte en pointe de fissure décrite par la théorie classique de la rupture en élasticité linéaire, la répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation (décrite sur la figure 6.5) n'est pas universelle. En effet, on considère une géométrie contenant une fissure excentrée d'une distance $d = 1$, comme décrite sur la figure 6.6. L'intensité de la contrainte σ est mesurée autour des deux pointes de fissure t et t' , sur des cercles de rayon $\ell/40$. Le résultat est tracé sur la figure de droite pour $\eta = 10^{-3}$ (milieu quasi-unilatéral). Le secteur angulaire (c) de la figure 6.5 (losange libre de contrainte) est

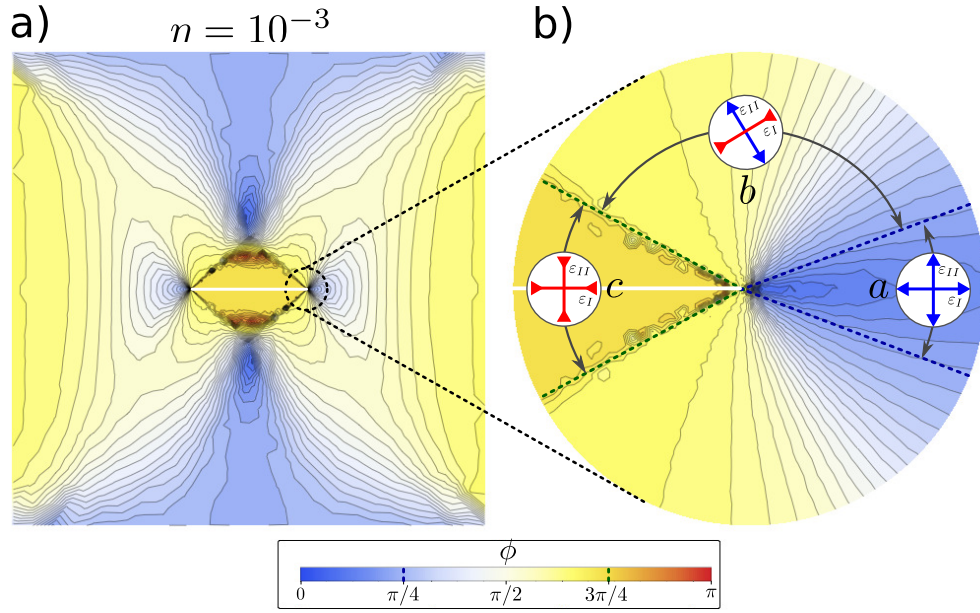


FIGURE 6.5 – Anisotropie ϕ de la solution en déformation sur l'éprouvette fissurée pour $\eta = 10^{-3}$. a) Solution sur l'ensemble du domaine. b) Solution sur un domaine circulaire de rayon $\ell/40$ centré sur la pointe de fissure. On peut distinguer trois quadrants selon les valeurs des déformations principales autour de la pointe de fissure. Dans le quadrant (a), on a $\phi \in [0, \pi/4]$ ce qui correspond à un état de bi-traction. Dans le quadrant (b), on a $\phi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ ce qui indique que l'une des directions principales est compressive. Les directions de fibres en compression forment un cône dont l'angle d'ouverture est une fonction croissante de ϕ . Dans le quadrant (c), toutes les directions sont compressives ($\phi \in [3\pi/4, \pi]$).

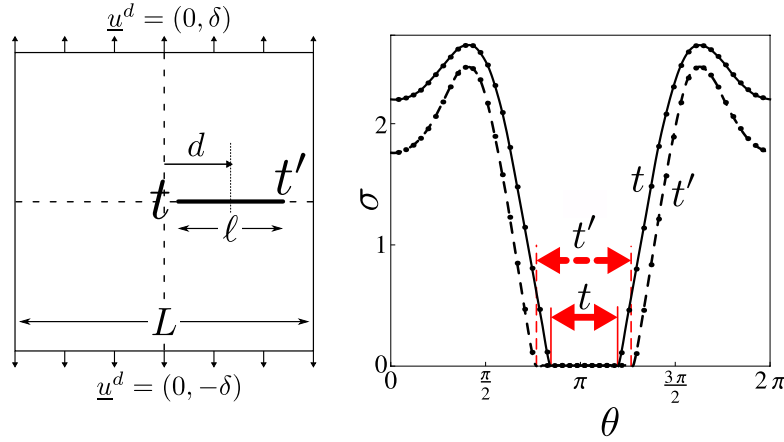


FIGURE 6.6 – Solution en contrainte $\sigma = (\underline{\sigma} : \underline{\sigma}) / 2$ pour $\eta = 10^{-3}$ dans le cas de l'éprouvette fissurée excentrée d'une distance $d = 1$ par rapport à la géométrie centrée (géométrie de gauche). Les valeurs de l'intensité de la contrainte σ représentées sont obtenues sur un cercle de rayon $\ell/40$ centré sur les points (t) et (t') de la fissure de longueur ℓ décentrée horizontalement d'une distance $d = 1$. Le secteur angulaire (c) (domaine caractérisé par $\sigma = 0$ sur les courbes) est plus grand en t' qu'en t ce qui démontre le caractère non universel de la répartition angulaire de la déformation en pointe de fissure.

représenté ici par les deux flèches bidirectionnelles (voir fig. 6.6) pour t et t' . On observe que ce secteur angulaire est plus grand en t' qu'en t , ce qui indique que le losange « déchargée » n'est plus symétrique. La répartition angulaire de l'anisotropie de la déformation n'est donc pas universelle.

6.3 Eprouvette avec deux fissures débouchantes

Dans cette section, on s'intéresse à une géométrie qui met en évidence l'existence de sous-domaines libres de contrainte au sein de l'éprouvette dans le cas d'un milieu unilatéral ($\eta \rightarrow 0$). L'une des conséquences directes est que le graphe de force unidimensionnel possède un caractère exclusif : lorsqu'il existe, il est le seul chemin possible par lequel sont transmis les efforts du système. La géométrie, qui contient deux fissures débouchantes centro-symétriques, est décrite ci-dessous.

6.3.1 Géométrie et conditions aux limites

On considère une éprouvette de largeur L contenant deux fissures centro-symétriques de longueur ℓ (voir figure 6.7.a). Un déplacement vertical $\underline{u}^d = \delta \underline{e}_y$ (resp. $\underline{u}^d = -\delta \underline{e}_y$) est imposé sur le bord supérieur (resp. inférieur). Le déplacement horizontal est supposé nul

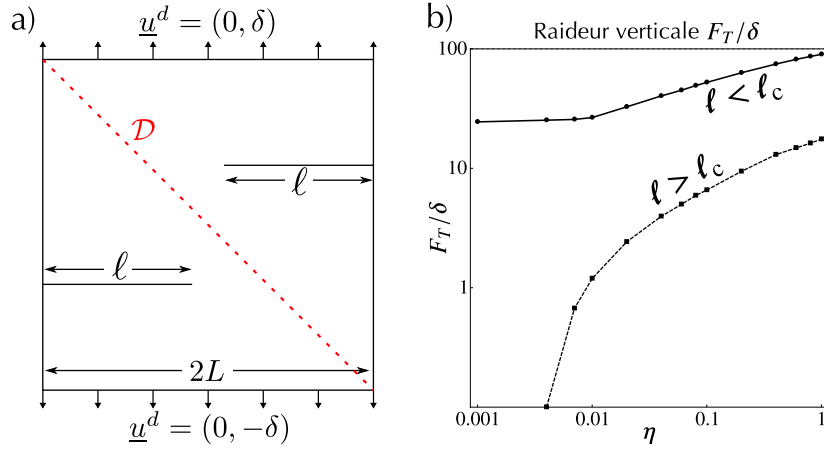


FIGURE 6.7 – a) Epreuve carrée de largeur L avec deux fissures débouchantes centrosymétriques de longueur ℓ . Les conditions aux limites en déplacement sont imposées sur les bords supérieur et inférieur. Les bords latéraux ainsi que les lèvres des fissures sont libres de contrainte. b) Raideur verticale en fonction de η pour les deux régimes identifiés : lorsque $\ell < \ell_c$, le milieu présente une raideur verticale non nulle dans le cas quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$. Mais lorsque les longueurs de fissures dépassent la longueur critique identifiée ($\ell > \ell_c$), l'éprouvette ne présente aucune raideur verticale lorsque $\eta = 10^{-2}$. La longueur critique ℓ_c est identifiée et correspond à la longueur pour laquelle les fissures traversent la diagonale $\mathcal{D}$ représentée en ligne discontinue sur la figure a).

sur ces mêmes frontières (conditions non glissantes). Les bords latéraux ainsi que les lèvres de la fissure sont libres de contrainte.

Par la suite, la simulation est menée pour plusieurs longueurs de fissure avec $k_t = 10^3$ et $\delta = L/100$. Le domaine est discrétisé en éléments triangulaires à 6 nœuds (interpolation de Lagrange d'ordre 2). Le maillage final après convergence du calcul contient 5172 éléments (11016 nœuds) de longueur caractéristique $L/20$ près des frontières du domaine et $\ell/300$ en pointe de fissure.

On définit la raideur verticale macroscopique de l'éprouvette F_T/δ , où F_T représente la résultante sur les bords supérieur et inférieur. Cette raideur verticale est calculée en fonction de η en augmentant progressivement les longueurs des fissures. Ce faisant, on observe que l'éprouvette présente deux comportements distincts, de part et d'autre d'une longueur de fissure particulière, que l'on note ℓ_c . La figure 6.7.b représente ces deux types de comportement.

Lorsque les longueurs des fissures sont plus petites que la longueur critique ($\ell < \ell_c$), le milieu possède une raideur verticale non nulle lorsque le milieu est quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$. Cependant, lorsque les longueurs de fissures dépassent la longueur critique identifiée ($\ell > \ell_c$), l'éprouvette ne présente aucune raideur verticale lorsque $\eta = 10^{-2}$. La longueur

critique ℓ_c est identifiée et correspond à la longueur pour laquelle les fissures traversent la diagonale $\mathcal{D}$ représentée en ligne discontinue sur la figure a).

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'éprouvette dans les deux cas $\ell < \ell_c$ et $\ell > \ell_c$, il faut avoir une information sur la répartition des contraintes dans le cas linéaire $\eta = 1$ et quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$. C'est l'objet de la section suivante.

6.3.2 Solutions numériques

Considérons les deux géométries correspondant à $\ell = 0.8\ell_c$ et $\ell = 1.2\ell_c$. La carte des contraintes $\sigma = \sqrt{(\underline{\sigma} : \underline{\sigma})}/2$ est représentée dans le cas $\ell < \ell_c$ pour un milieu linéaire élastique et quasi-unilatéral sur les sous figures 6.8. a et b. On observe que lorsque $\ell < \ell_c$, la redistribution des contraintes dans le cas quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$ donne lieu à une localisation importante sur la diagonale qui relie le coin supérieur gauche au coin inférieur droit. En effet, alors que la contrainte semble diffuser dans tout le domaine pour $\eta = 1$ (sous figure a), la transmission des efforts se fait sur un même chemin lorsque le milieu devient quasi-unilatéral ($\eta = 10^{-2}$, sous figure b). Comme pour la fissure centrée de la figure 6.2, le graphe de force qui en résulte relie les singularités de contrainte du domaine (pointes de fissures et intersections des conditions aux limites en déplacement et en efforts). Par ailleurs, on voit clairement pour cette géométrie que certaines régions sont libres de contrainte lorsque ($\eta = 10^{-2}$). Ce point sera abordé plus en détail à la section 6.5 où l'on utilisera une approche théorique pour prédire les sous-domaines libres de contrainte.

En augmentant la taille des fissures pour qu'elles traversent la diagonale $\mathcal{D}$, la redistribution des contraintes diffère dans le cas quasi-unilatéral. On observe encore une contrainte diffuse pour $\eta = 1$ (sous figure c). Cependant, dans le cas quasi-unilatéral, le champ de contrainte s'annule sur tout le domaine² de sorte qu'aucun effort ne peut être transmis à travers l'éprouvette (sous figure c).

Avec cette géométrie, nous avons mise en évidence une caractéristique importante des milieux unilatéraux : comme l'état de contrainte est unidirectionnel, la solution est donnée par une famille de ligne de tension (ou de compression, suivant le type de milieu unilatéral étudié) en équilibre avec le chargement. Dans un cas simple, comme celui présenté ici, il est possible d'identifier ces lignes de tension à l'avance. Par exemple, dans le cas $\ell < \ell_c$, toutes les lignes qui permettent de transmettre les efforts de part et d'autre de l'éprouvette sont celles qui passent entre les pointes de fissure le long de la diagonale $\mathcal{D}$. Lorsque $\ell > \ell_c$, ces lignes de tension n'existent plus, et la raideur macroscopique est nulle.

A la section suivante, on considère une géométrie plus complexe faisant intervenir quatre fissures.

2. La valeur de la contrainte σ n'est pas exactement nulle car on ne peut qu'approximer le cas d'un milieu unilatéral (la résolution numérique en dessous de $\eta = 10^{-2}$ devient laborieuse car le conditionnement de la matrice de raideur augmente en diminuant η).

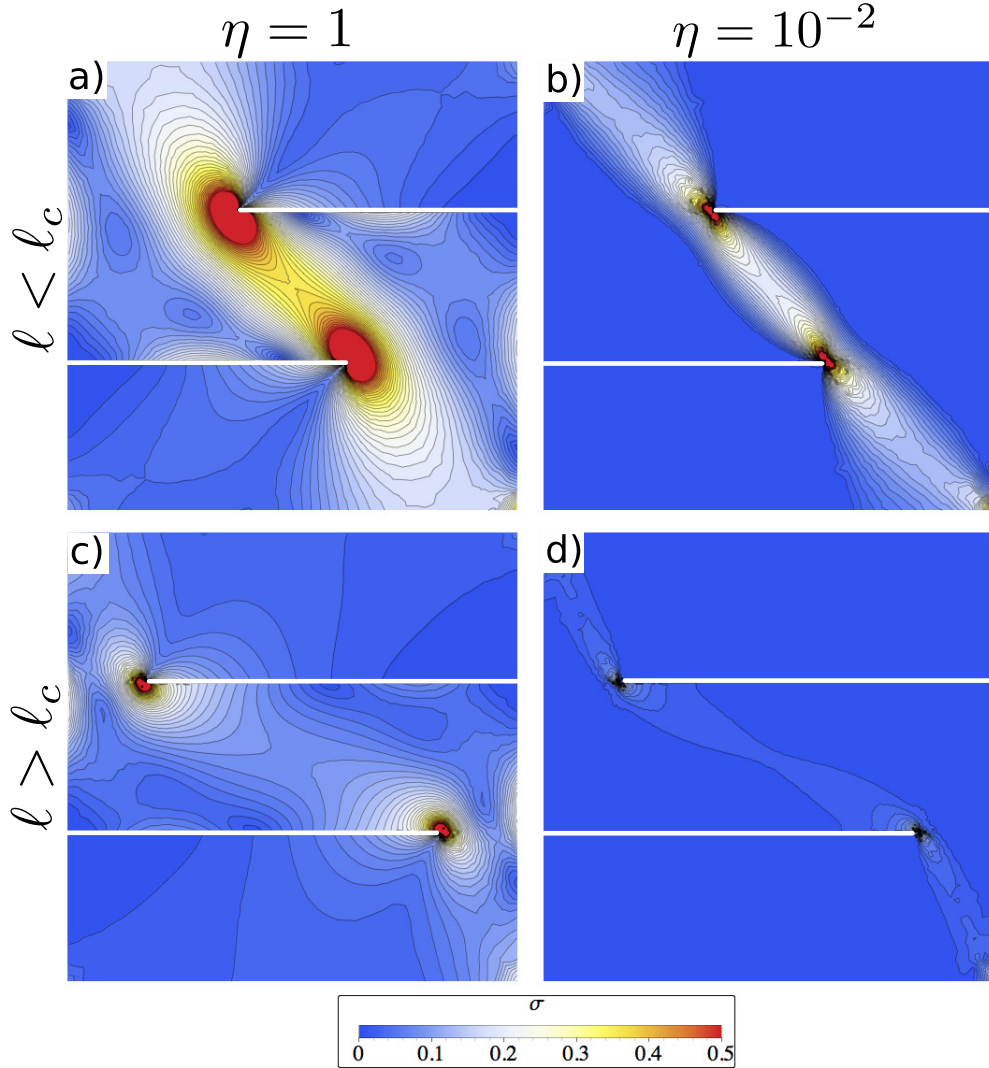


FIGURE 6.8 – Intensité de la contrainte $\sigma = \sqrt{(\underline{\sigma} : \underline{\sigma})}/2$ pour les deux longueurs $\ell < \ell_c$ (sous figures a et b) et $\ell > \ell_c$ (sous figures c et d) dans le cas $\eta = 1$ et $\eta = 10^{-2}$. Sous figures a) et b) (cas $\ell < \ell_c$) : diffusion de la contrainte σ dans tout le domaine pour $\eta = 1$ mais localisation très forte entre les quatre points de concentration de contrainte du domaine lorsque $\eta = 10^{-2}$. La diagonale constitue le seul chemin direct entre les bords supérieur et inférieur. Par ailleurs, on voit clairement pour cette géométrie que certaines régions sont libres de contrainte lorsque ($\eta = 10^{-2}$). Sous figures c) et d) (cas $\ell > \ell_c$) : la contrainte tend vers 0 partout dans le cas quasi-unilatéral (la valeur résiduelle de la contrainte observable en d) vient du fait que $\eta = 10^{-2} \neq 0$. Comme on le verra à la section 6.5, la géométrie pour $\ell > \ell_c$ n'admet pas de solution pour un milieu parfaitement unilatéral.

6.4 Epreuve multi-fissurée

Dans cette section, on s'intéresse à une géométrie plus complexe faisant intervenir 4 fissures, décrit à la figure 6.9.

6.4.1 Géométrie et conditions aux limites

On considère une éprouvette de largeur L contenant quatre fissures centro-symétriques, illustrée à la figure 6.9. Un déplacement vertical $\underline{u}^d = \delta \underline{e}_y$ (resp. $\underline{u}^d = -\delta \underline{e}_y$) est imposé sur le bord supérieur (resp. inférieur). Le déplacement horizontal est supposé nul sur ces mêmes frontières (conditions non glissantes). Les bords latéraux ainsi que les lèvres des fissures sont libres de contrainte.

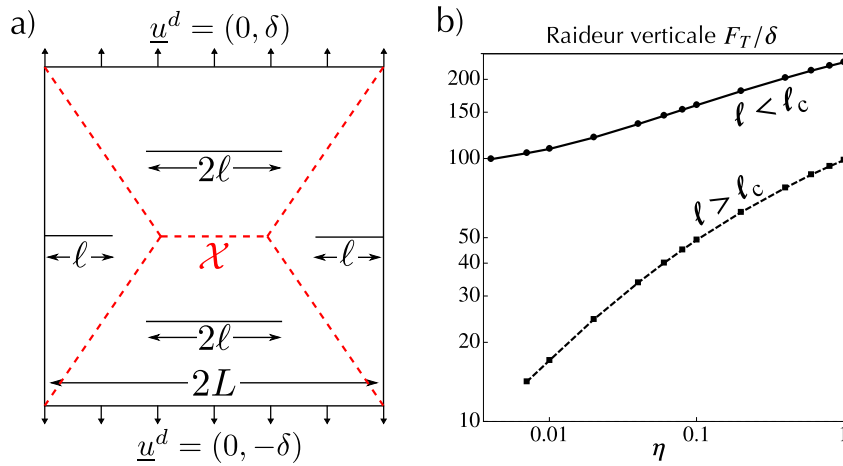


FIGURE 6.9 – a) Epreuve carrée de largeur L avec quatre fissures centro-symétriques. Les conditions aux limites en déplacement sont imposées sur les bords supérieur et inférieur. Les bords latéraux ainsi que les lèvres des fissures sont libres de contrainte. b) Raideur verticale en fonction de η pour les deux régimes identifiés : lorsque $\ell < \ell_c$, le milieu présente une raideur verticale non nulle dans le cas quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$. Mais lorsque les longueurs de fissures dépassent la longueur critique identifiée ($\ell > \ell_c$), l'éprouvette ne présente aucune raideur verticale lorsque $\eta = 10^{-2}$. La longueur critique ℓ_c est identifiée et correspond à la longueur pour laquelle les fissures de longueurs 2ℓ traversent les branches du graphe $\mathcal{X}$ représenté en ligne discontinue sur la figure a).

L'analyse numérique est très similaire à celle de la section précédente : la simulation est menée pour plusieurs longueurs de fissure avec $k_t = 10^3$ et $\delta = L/100$. Le domaine est discrétisé en éléments triangulaires à 6 nœuds (interpolation de Lagrange d'ordre 2). Le maillage final après convergence du calcul contient 5172 éléments (11016 nœuds) de longueur caractéristique $L/20$ près des frontières du domaine et $\ell/300$ en pointe de fissure.

On procède comme précédemment calculant la raideur verticale macroscopique de l'éprouvette F_T/δ en fonction de η et pour plusieurs longueurs des fissures. On retrouve encore une fois les deux comportements distincts, de part et d'autre d'une longueur de fissure particulière, que l'on note ℓ_c . La figure 6.9.b représente ces deux types de comportement.

Pour $\ell < \ell_c$, le milieu possède une raideur verticale non nulle lorsque le milieu est quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$ alors que pour $\ell > \ell_c$, l'éprouvette ne présente aucune raideur verticale lorsque $\eta = 10^{-2}$. Pour cette géométrie, la longueur critique ℓ_c est identifiée et correspond à la longueur pour laquelle les fissures de longueurs 2ℓ traversent les branches du graphe $\mathcal{X}$ représenté en ligne discontinue sur la figure a).

Comme précédemment, il faut avoir une information sur la répartition des contraintes dans le cas linéaire $\eta = 1$ et quasi-unilatéral $\eta = 10^{-2}$. C'est l'objet de la section suivante.

6.4.2 Solutions numériques

Les cas du milieu élastique linéaire ($\eta = 1$) et non linéaire quasi-unilatéral ($\eta = 10^{-2}$) sont simulés pour les deux géométries $\ell < \ell_c$ et $\ell > \ell_c$.

La figure 6.10 représente l'intensité de contrainte σ pour les deux longueurs $\ell = 0.8\ell_c$ (sous figures a et b) et $\ell = 1.2\ell_c$ (sous figures c et d) dans le cas $\eta = 1$ et $\eta = 10^{-2}$. Lorsque $\ell < \ell_c$, la redistribution de contrainte σ dans le cas $\eta = 10^{-2}$ donne lieu à une localisation très forte entre les points de concentration de contrainte du domaine. Cette localisation fait apparaître un graphe de force à plusieurs branches, en forme de « X » ($\eta = 10^{-2}$, sous figure b) et similaire au graphe $\mathcal{X}$ de la figure 6.9.a. On note par ailleurs que la transmission des efforts se fait exclusivement sur ce motif (les régions en dehors du graphe de force sont quasiment « déchargées » lorsque $\eta = 10^{-2}$).

Pour $\ell > \ell_c$ et dans le cas $\eta = 10^{-2}$, la redistribution des contraintes s'annule sur tout le domaine de telle sorte qu'aucun effort ne peut être transmis à travers l'éprouvette (sous figure d).

Avec cette nouvelle géométrie, nous avons trouvé un graphe de force plus complexe que la simple diagonale de la géométrie précédente. On peut aisément vérifier que l'ensemble des graphes $\mathcal{X}$ qu'il est possible de construire lorsque $\ell < \ell_c$ sont en équilibre avec le chargement. Par ailleurs, toutes les branches du graphe sont sollicitées en traction. Il s'agit donc d'une des solutions possibles pour transmettre les efforts entre les bords inférieur et supérieur de l'éprouvette. Par ailleurs, lorsque $\ell > \ell_c$, la construction d'un tel graphe n'est plus possible, ce qui explique la nullité de la raideur verticale pour $\eta = 10^{-2}$.

En pratique, on peut rechercher une méthode systématique de construction de la solution en contrainte qui contient les régions libres de contraintes et les graphes auto-équilibrés solutions d'un tel problème aux limites. C'est l'objet de la section suivante.

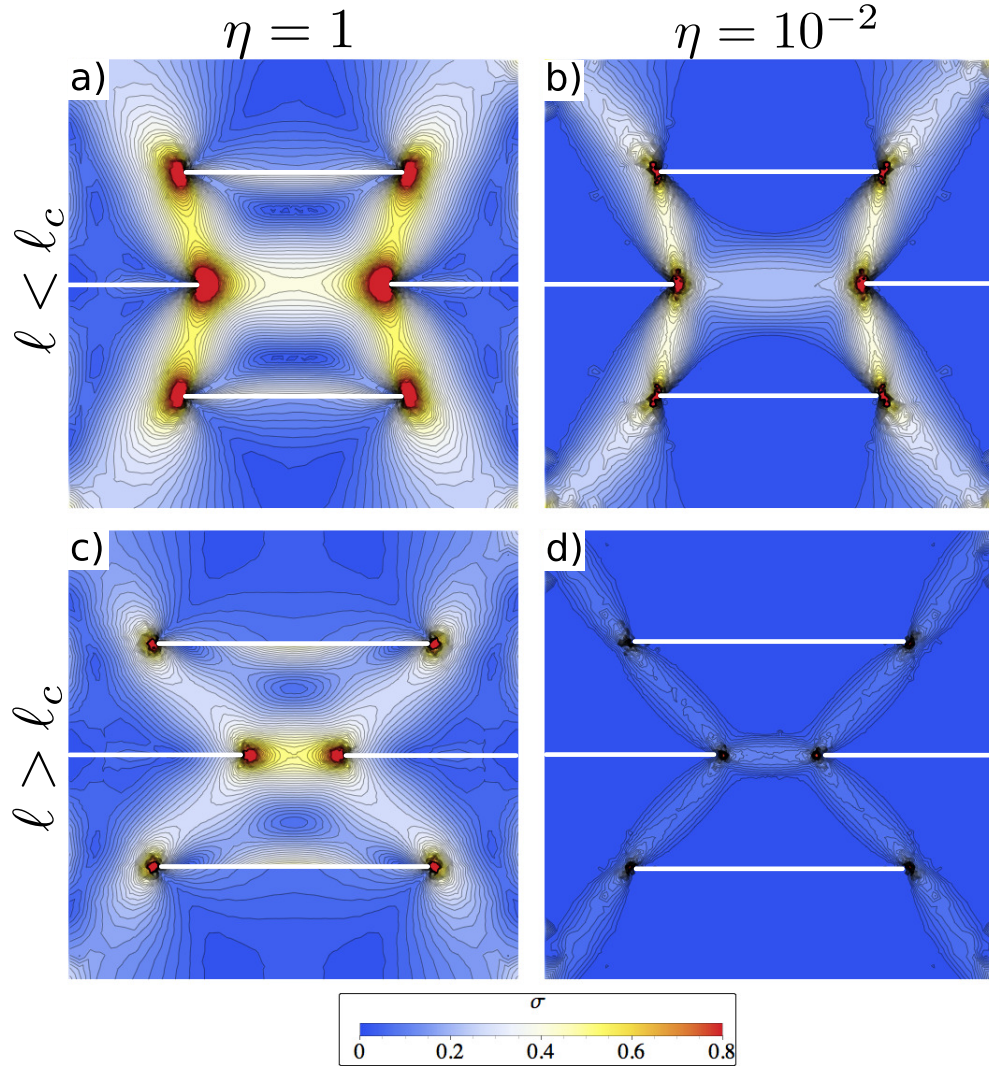


FIGURE 6.10 – Intensité de la contrainte $\sigma = \sqrt{(\underline{\sigma} : \underline{\sigma})} / 2$ pour les deux longueurs $\ell < \ell_c$ (sous figures a et b) et $\ell > \ell_c$ (sous figures c et d) dans le cas $\eta = 1$ et $\eta = 10^{-2}$. Sous figures a) et b) (cas $\ell < \ell_c$) : la contrainte est diffuse pour $\eta = 1$ mais localisée entre les dix points de concentration de contrainte du domaines lorsque $\eta = 10^{-2}$. Le graphe en « X » est auto-équilibré et ne transmet que des efforts de traction sur chacune de ses branches. Par ailleurs, on voit pour cette géométrie que certaines régions sont libres de contrainte lorsque $\eta = 10^{-2}$. Sous figures c) et d) (cas $\ell > \ell_c$) : la contrainte tend vers 0 partout dans le cas quasi-unilatéral (la valeur résiduelle de la contrainte observable en d) vient du fait que $\eta = 10^{-2} \neq 0$. Comme on le verra à la section 6.5, la géométrie pour $\ell > \ell_c$ n'admet pas de solution pour un milieu parfaitement unilatéral et pour le chargement imposé.

6.5 Approche théorique des régions auto-équilibrées libres de contrainte

Dans la section précédente, l'analyse numérique des éprouvettes fissurées a permis de mettre en évidence deux aspects propres aux milieux unilatéraux : la localisation des contraintes sur des graphes de forces auto-équilibrés et l'existence de régions libres de contrainte au sein de l'éprouvette. Dans cette section, on présente la justification théorique de l'existence de ces régions.

Les premiers travaux concernant les milieux unilatéraux ont débuté avec l'extension de l'analyse limite, ordinairement utilisée en plasticité, aux matériaux de type « maçonnerie » à rigidité nulle en traction [Heyman \(1966\)](#). Ces résultats pionniers ont rapidement attiré l'attention des mathématiciens qui ont étendu le formalisme de la mécanique « classique » aux milieux unilatéraux ([Anzellotti, 1985](#); [Baiocchi et al., 1988](#); [Giaquinta et Giusti, 1985](#)). En particulier, dans le cas d'un problème avec conditions aux limites imposées, des conditions nécessaires sur le chargement ont été définies afin d'assurer de l'existence d'une solution d'équilibre ([Del Piero, 1989](#)). Une autre particularité des milieux unilatéraux est que la solution en contrainte se présente généralement sous forme de domaines auto-équilibrés. On présente ici les principes théoriques, proposés initialement par [Del Piero \(1989\)](#) puis généralisés par [Šilhavý \(2014\)](#), pour justifier l'existence des régions auto-équilibrées et libres de contrainte déterminées aux sections 6.3 et 6.4.

6.5.1 Régions auto-équilibrées et libres de contrainte

On considère un corps matériel $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ délimité par sa frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_s \cup \partial\Omega_k$ où $\partial\Omega_s$ représente la surface chargée par la contrainte imposée $\underline{\underline{\sigma}}^d$ et $\partial\Omega_k$ représente la surface où le déplacement $\underline{u}^d$ est imposé (voir Fig. 6.11). On note $\underline{f}_v$ le chargement volumique sur Ω . En suivant la terminologie de [Del Piero \(1989\)](#), on dit qu'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est en *équilibre* avec le chargement $(\underline{\underline{\sigma}}^d, \underline{f}_v)$ s'il vérifie l'équation d'équilibre $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0}$ et les conditions aux limites $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^d$ sur $\partial\Omega_s$. Pour un milieu unilatéral, le champ de contrainte est *unilatéralement statiquement admissible* si il est en équilibre avec le chargement $(\underline{\underline{\sigma}}^d, \underline{f}_v)$ et si il vérifie la condition d'unilatéralité (condition qui s'exprime sur les valeurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}$).

On considère un sous-domaine $\Pi \subset \Omega$ dont la frontière $\partial\Pi = \partial\Pi_s \cup \partial\Pi_k$ est telle que $\partial\Pi_s = \partial\Pi \cap \partial\Omega_s$ et $\partial\Pi_k = \partial\Pi \setminus \partial\Pi_s$ (de fait, les points matériels de $\partial\Pi_k$ peuvent être des points intérieurs à Ω). La résultante $\underline{R}(\Pi)$ et le moment $\underline{M}_o(\Pi)$ au point o du chargement

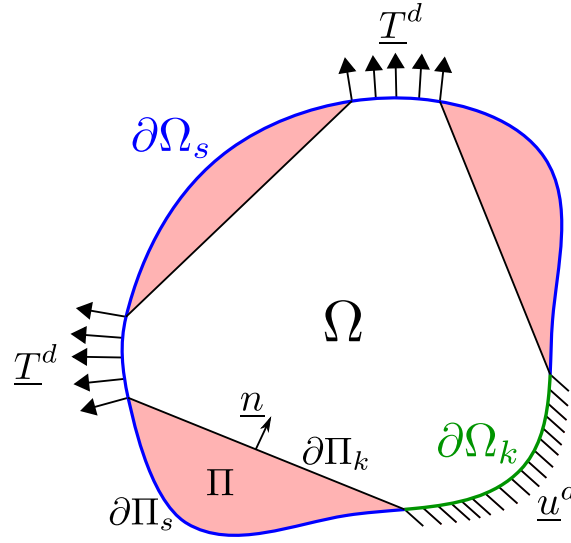


FIGURE 6.11 – Un domaine matériel Ω et ses frontières $\partial\Omega_s$ (en bleu) et $\partial\Omega_k$ (en vert). Les trois sous-domaines représentés en rouge sont auto-équilibrés et libres de contrainte.

$(\underline{\sigma}^d, \underline{f}_v)$ sur le sous-domaine Π s'écrivent

$$\begin{aligned} \underline{R}(\Pi) &= \int_{\Pi} \underline{f}_v dv + \int_{\Pi_s} \underline{\sigma}^d \cdot \underline{n} ds \\ \underline{M}_o(\Pi) &= \int_{\Pi} (\underline{x} - \underline{o}) \wedge \underline{f}_v dv + \int_{\Pi_s} (\underline{x} - \underline{o}) \wedge (\underline{\sigma}^d \cdot \underline{n}) ds \end{aligned}$$

On dit que le sous-domaine Π est *auto-équilibré* sous le chargement $(\underline{\sigma}^d, \underline{f}_v)$ si $\underline{R}(\Pi) = \underline{0}$ et $\underline{M}_o(\Pi) = \underline{0}$. On dit de plus que Π est *délimité par un plan* si les points matériels de $\partial\Pi_k$ sont contenu dans un plan. Enfin, la frontière $\partial\Pi_k$ est *libre de contrainte* si $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ sur $\partial\Pi_k$.

Dans le cas d'un milieu unilatéral, [Del Piero \(1989\)](#) à démontré que tout sous-domaine Π délimité par un plan est auto-équilibré et libre de contrainte si la résultante du chargement $\underline{R}(\Pi)$ s'annule. Cela implique que la surface $\partial\Pi_k$ est libre de contrainte. Les deux sous-domaines Π et $\Omega \setminus \Pi$ peuvent donc être considérés comme totalement indépendants. Ce cas particulier de sous-domaine auto-équilibré et libre de contrainte est illustré sur la figure 6.11 : les trois sous-domaines représentés en rouge sont délimités par un plan et de résultante nulle. Par conséquent, ils sont libres de contrainte et la transmission des efforts ne peut se faire qu'à l'intérieur de l'enveloppe convexe définie par $\partial\Omega_k$ et les surfaces de $\partial\Omega_s$ ou la contrainte imposée $\underline{T}^d$ est non nulle.

6.5.2 Cas de l'éprouvette avec fissures « balistiques »

On reprend l'éprouvette à deux fissures, que l'on décrit sur la figure 6.12. On cherche à déterminer le partitionnement de la solution en contrainte.

La géométrie de la figure 6.12.a contient 4 sous-domaines triangulaires dénommés Π_a , Π'_a , Π_b et Π'_b . Selon la terminologie définie précédemment, ces sous-domaines sont délimités par des plans. Par exemple, Π_a est séparé du reste de l'éprouvette par le plan OB . Par ailleurs, nous avons $\underline{R}(\Pi_a) = \underline{R}(\Pi'_a) = \underline{R}(\Pi_b) = \underline{R}(\Pi'_b) = \underline{0}$. Par conséquent, dans un milieu unilatéral, ces quatre sous-domaines sont auto-équilibrés et libres de contrainte. Ceci est conforme à ce que l'on a obtenu par calcul numérique.

Lorsque $\ell < \ell_c$, il existe une famille de lignes de tension traversant la géométrie entre les bords supérieur et inférieur (figure 6.12.b). La diagonale reliant le coin supérieur gauche au coin inférieur droit est un exemple de ligne de tension possible. Ces lignes de tension constituent les graphes de force auto-équilibrés par lesquels transitent les efforts de traction. Par conséquent, ℓ_c représente la longueur pour laquelle les fissures interceptent la diagonale. Lorsque $\ell > \ell_c$ (figure 6.12.c), les sous-domaines auto-équilibrés se rejoignent et aucune transmission des efforts n'est plus possible dans cette configuration. Ceci est conforme avec l'annulation de la raideur verticale macroscopique que l'on obtient numériquement lorsque $\eta \rightarrow 0$.

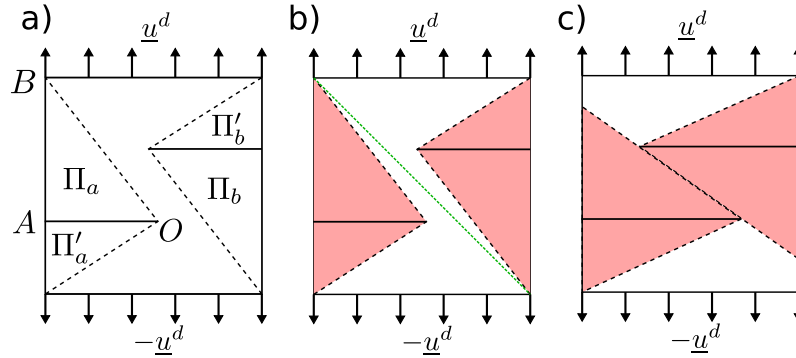


FIGURE 6.12 – Epreuve avec deux fissures balistique centro-symétriques de taille ℓ avec déplacements imposés sur les bords supérieur et inférieur. a) Les sous-domaines triangulaires Π_a , Π'_a , Π_b et Π'_b sont délimités par des plans. De plus, la résultante du chargement est nulle sur ces triangles. Ils sont donc libres de contrainte. b) Cas $\ell < \ell_c$: les seules lignes de tension en équilibre avec les conditions de bord sont celles qui traversent le domaine entre les régions libres de contrainte (par exemple, la diagonale en tirets verts). Il existe donc un champ de contrainte non nulle solution à ce problème. c) Cas $\ell > \ell_c$: les sous-domaines libres de contrainte se rejoignent. Il n'existe pas de graphe auto-équilibré permettant de rejoindre les bords supérieur et inférieur. La contrainte nulle $\underline{\sigma} = \underline{0}$ est la seule solution possible pour ce problème.

6.5.3 Cas de l'éprouvette multi-fissurée

On reprend l'éprouvette à quatre fissures, que l'on décrit sur la figure 6.12.

On identifie aisément les quatre sous-domaines triangulaires (représentés en rouge clair sur la figure a) libres de contrainte. Lorsque $\ell < \ell_c$, il existe une famille de graphes de lignes de tension auto-équilibrés avec les conditions aux limites et traversants la géométrie entre les bord supérieur et inférieur (figure 6.12.b). Un exemple de graphe est représenté en tirets verts sur la figure a. Dans le cas unilatéral, le champ de contrainte solution du problème est constitué uniquement de cette famille de graphes. Par conséquent, ℓ_c représente la longueur pour laquelle les deux fissures interceptent les triangles libres de contrainte. En effet, lorsque $\ell > \ell_c$ (figure 6.12.c), aucune transmission des efforts n'est possible dans cette configuration car les fissures deviennent « débouchantes » (elles rejoignent les triangles libres de contrainte qui ne participent aucunement à la mécanique globale de l'éprouvette). Ceci est conforme avec la raideur verticale macroscopique nulle que l'on obtient numériquement lorsque $\eta \rightarrow 0$.

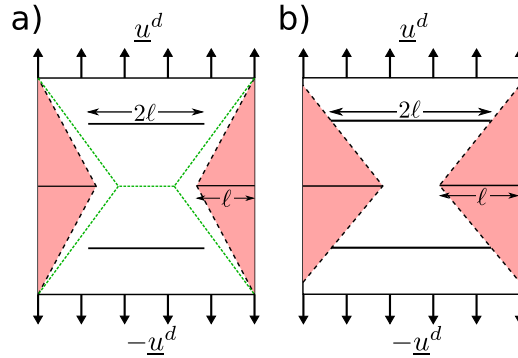


FIGURE 6.13 – Epreuve avec 4 fissures centro-symétriques avec déplacements imposés sur les bords supérieur et inférieur. a) Lorsque $\ell < \ell_c$, la transmission des efforts de tension peut se faire le long du graphe auto-équilibré représenté en tirets verts. Dans ce cas, il existe une solution en contrainte non nulle pour ce problème. b) Lorsque $\ell > \ell_c$, les fissures de longueurs 2ℓ deviennent débouchantes car elles interceptent les sous-domaines libres de contrainte. Par conséquent, il n'existe aucun graphe de force en équilibre avec le chargement et la seule solution possible est le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$.

6.6 Application : encadrement énergétique de la solution

Une conséquence directe de la décomposition en sous-domaines auto-équilibrés du champ de contrainte est qu'il est possible de proposer une solution en contrainte unilatéralement statiquement admissible et définie par morceaux afin d'obtenir une borne inférieure de la solution d'un problème impliquant un milieu continu unilatéral.

On se propose ici de construire une de ces bornes pour la géométrie contenant une fissure centrée et présentée sur la figure 6.14.

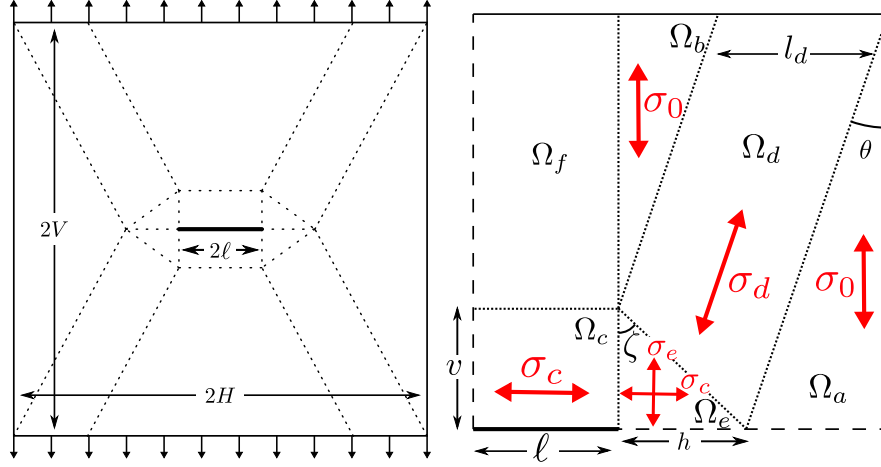


FIGURE 6.14 – A gauche : la géométrie rectangulaire contenant une fissure centrée de longueur 2ℓ . On considère des conditions aux limites cinématiques $\underline{u}^d = (0, u)$ sur le bord supérieur (resp. $-\underline{u}^d$ sur le bord inférieur). Les lignes discontinues représentent les frontières internes du domaine de définition du champ de contrainte donné par la relation 6.2. A droite : Dans le premier quadrant $[0, H] \times [0, V]$, on représente les sous-domaines auto-équilibrés Ω_i du champ de contrainte constant par morceaux donné par la relation 6.2. Dans chaque sous-domaines, les états de contrainte sont représentés en rouge.

6.6.1 Approche en contrainte

L'énergie complémentaire d'un champs unilatéralement statiquement admissible fournit une borne inférieure de l'énergie à l'équilibre d'un problème aux limites d'élasticité. Pour tout champ de contrainte unilatéralement statiquement admissible $\underline{\underline{\sigma}}^*$, la fonctionnelle d'énergie complémentaire

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\Omega} e_c^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega^u} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \quad (6.1)$$

réalise un minimum lorsque $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ représente la solution du problème élastique, $\partial\Omega^u$ est la frontière de Ω où l'on impose un déplacement $\underline{u}^d$ ($\partial\Omega^T$ est son complémentaire dans $\partial\Omega$ où l'on impose un chargement en contrainte) et $\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^T$. Dans l'expression (6.1), e_c^* se réfère à la fonction densité d'énergie complémentaire du milieu.

On propose un champ de contrainte constant par morceau et défini sur les sous domaines Ω_i du premier quart $[0, H] \times [0, V]$ du domaine total, comme illustrés sur le figure 6.14. Ce champ de contrainte est paramétré de la façon suivante

$$\underline{\underline{\sigma}}(\sigma_0, \sigma_c, \sigma_d, \sigma_e, \theta) = \begin{cases} \sigma_0 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 & \text{in } \Omega_a \cup \Omega_b \\ \sigma_c \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \text{in } \Omega_c \\ \sigma_0 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_d \underline{t} \otimes \underline{t} & \text{in } \Omega_d \\ (\sigma_0 + \sigma_e) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_c \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \text{in } \Omega_e \\ \underline{0} & \text{in } \Omega_f \end{cases} \quad (6.2)$$

où $\underline{t} = (\sin \theta, \cos \theta)$ est le vecteur unitaire tangent à la « branche » Ω_d (voir la figure 6.14), σ_0 est l'état de contrainte naturel solution de problème en l'absence de fissure, σ_c, σ_d et σ_e sont les intensités de contrainte dans leurs domaines respectifs (représentés sur la figure 6.14).

Pour que (6.2) soit unilatéralement statiquement admissible, il faut que la relation de saut $[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n}_{ed} = \underline{0}$ soit satisfaite à l'interface entre Ω_e et Ω_d , ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(\zeta) (\sigma_d \sin^2(\theta) - \sigma_c) + \sigma_d \sin(\zeta) \sin(\theta) \cos(\theta) &= 0 \\ \sigma_d \cos(\zeta) \sin(\theta) \cos(\theta) + \sin(\zeta) (\sigma_d \cos^2(\theta) - \sigma_e) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Le problème d'optimisation consiste à rechercher le jeu de paramètre $\{\sigma_0, \sigma_c, \sigma_d, \sigma_e, \theta, \zeta\}$ optimum qui réalise le minimum de l'énergie complémentaire. Sachant que l'on dispose de deux relations de saut (6.3), le jeu de paramètre indépendant peut être réduit au 4 paramètres suivants $\{\sigma_0, \sigma_d, \theta, \zeta\}$. De plus, en substituant (6.2) dans 6.1 et sachant que le champ de contrainte est constant par morceaux, l'énergie complémentaire $E_c(\underline{\underline{\sigma}})$ prend la forme suivante :

$$E_c(\sigma_0, \sigma_d, \theta, \zeta) = \sum_i \mathcal{V}_i e_c^* \left(\underline{\underline{\sigma}}_i \right) - Fu \quad (6.4)$$

où les $\mathcal{V}_i$ sont les volumes des domaines Ω_i représentés sur la figure 6.14 (l'indice i prend les valeurs $\{a, b, c, d, e, f\}$), $\underline{\underline{\sigma}}_i$ représente la restriction de $\underline{\underline{\sigma}}$ au domaine Ω_i et F est résultante de réaction aux conditions aux limites en déplacement imposées sur les frontières supérieur et inférieur :

$$F = \sigma_0 (H - \ell) + \sigma_d l_d \cos^2 \theta \quad (6.5)$$

avec l_d la largeur mesurée dans le direction $\underline{e}_1$ du domaine Ω_d (voir fig. 6.14) :

$$l_d = H - \ell - \tan \theta \left(V - \frac{H - \ell - V \tan \theta}{\tan \zeta} \right)$$

Il reste à calculer la densité d'énergie complémentaire e_c^* sur chaque domaine. Comme la loi de comportement bi-module est non linéaire, on doit utiliser la forme générale de $e_c^*(\underline{\underline{\sigma}})$:

$$e_c^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{K}} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - w(\underline{\underline{\varepsilon}})) \quad (6.6)$$

où w est la densité d'énergie potentielle et $\mathcal{K}$ représente l'espace des champs de déformation cinématiquement admissibles. Cette expression ne permet pas d'obtenir une forme explicite

de $e_c^*(\underline{\sigma})$ compte tenue de la forme encombrante de la loi de comportement du milieu bi-module paramétrée par η et donnée par la relation (4.18), que l'on réécrit ici par commodité :

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_m f_\eta(\phi) - \frac{1}{2} \varepsilon_d f'_\eta(\phi) \right) \\ \sigma_d &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_d f_\eta(\phi) + \frac{1}{2} \varepsilon_m f'_\eta(\phi) \right)\end{aligned}\tag{6.7}$$

avec σ_m la contrainte moyenne, σ_d la contrainte déviatorique et $f_\eta(\phi)$ la fonction de l'anisotropie de la déformation ϕ paramétrée par η et donnée par la relation (4.12).

Une autre solution consiste à inverser la loi de comportement (6.7) pour pouvoir calculer directement l'expression $e_c^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - w(\underline{\varepsilon})$. Cependant, comme la relation (6.7) ne peut être inversée explicitement, nous allons avoir recours à l'approche semi-analytique décrite ci-dessous.

En calculant le rapport σ_d/σ_m , il vient la relation suivante entre les angles d'anisotropie de la contrainte ψ et de la déformation ϕ :

$$\tan \psi = \frac{2f(\phi) \tan \phi + f'(\phi)}{2f(\phi) - f'(\phi) \tan \phi}$$

La figure est une représentation de la fonction $\psi = \mathcal{H}(\phi)$ pour plusieurs valeurs de η entre 0.05 et 1. Comme on peut le constater, $\mathcal{H}$ est strictement monotone donc inversible au moins numériquement et ce quel que soit la valeur de η .

Ainsi, on peut inverser la loi de comportement (6.7) et on obtient :

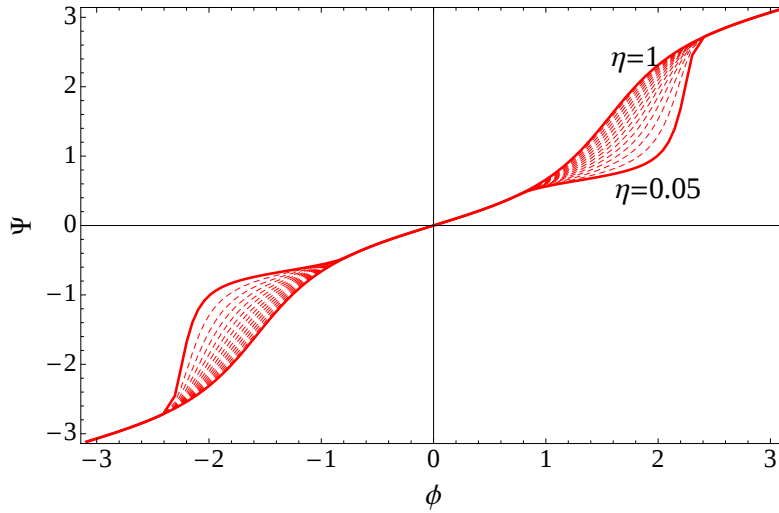
$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \frac{4}{4g^2 + g'^2} (2g\sigma_m + g'\zeta_d) \\ \varepsilon_d &= \frac{4}{4g^2 + g'^2} (-g'\sigma_m + 2g\sigma_d)\end{aligned}\tag{6.8}$$

avec $g(\psi) = f(\mathcal{H}^{-1}(\psi))$.

En substituant (6.8) et (6.7) dans l'expression (6.6) (le calcul du max n'est plus nécessaire grâce à la loi de comportement inversée (6.8)) on obtient l'expression suivante de la densité d'énergie complémentaire (on donne directement le résultat du calcul) :

$$e_c^*(\underline{\sigma}) = \frac{8g}{4g^2 + g'^2} (\sigma_m^2 + \sigma_d^2)\tag{6.9}$$

Pour finir, en substituant (6.9) dans l'expression de l'énergie complémentaire totale (6.4), on obtient la forme explicite de $E_c(\sigma_0, \sigma_d, \theta, \zeta)$ dont on cherche le minimum en fonction des paramètres $\{\sigma_0, \sigma_d, \theta, \zeta\}$, pour toute valeur de η . Remarquons qu'il est plus commode d'utiliser le jeu de paramètre h et v (voir fig. 6.14) au lieu des angles ζ et θ car la valeur minimum de l'angle ζ dépend de θ (alors que h et v sont indépendants l'un de l'autre). La

FIGURE 6.15 – Représentation de $\psi = \mathcal{H}(\phi)$ pour plusieurs valeurs de η entre 0.05 et 1.

recherche du minimum a été effectuée avec l’algorithme de Nelder-Mead implémenté dans *Mathematica*.

La solution du problème de minimisation globale est présentée sur la figure 6.16, pour $H = V$, $H/\delta = 1/3$, $U = 5 \times 10^{-3}$ et $k = 10^3$.

On observe qu’en diminuant η de 1 à 10^{-4} , les paramètres σ_0 et σ_d évoluent en sens opposés (fig.6.16.a). Le cas $\eta = 1$ (linéaire) est caractérisé par une état de contrainte dominé par σ_0 qui correspond à la solution sans fissure. Cependant, lorsque $\eta = 10^{-4}$, c’est l’état de contrainte généré par la fissure qui devient dominant (augmentation de σ_d et σ_e) alors que la contrainte verticale σ_0 diminue. Cette variation est tout à fait cohérente avec ce qui a été décrit lors de l’étude numérique de la géométrie fissurée : la contrainte, initialement diffuse dans le cas linéaire, va se localiser sur des branches obliques similaires à celle décrite par le domaine Ω_d sur la figure (6.14). La contrainte horizontale σ_c de part et d’autre de la fissure à doublé ($\sigma_c(\eta = 10^{-4})/\sigma_c(\eta = 1) = 2$) mais reste inférieure à σ_d (on a $\sigma_d(\eta = 10^{-4})/\sigma_c(\eta = 10^{-4}) = 5$).

Les paramètres géométriques h et v évoluent peu jusqu’à $\eta = 0.1$ (fig.6.16.b and c), puis augmentent rapidement en dessous de cette valeur.

Dans cette approche, la pertinence du champ de contrainte (6.2) peut être mesurée en évaluant le rapport entre la résultante des forces F dans la direction verticale (relation (6.5)) obtenue avec le champ de contrainte (6.2) et son équivalent, que l’on note F_{fem} , obtenu par la simulation numérique. Par ailleurs, sachant que la pertinence du champ de contrainte (6.2) dépend de la taille de la fissure, on calcule ce rapport pour plusieurs longueurs de fissure. Le résultat est donné sur la figure 6.16.d. On observe que le champ de contrainte (6.2) est d’autant plus proche de la solution numérique obtenue par élément fini que le

rapport H/ℓ est grand.

Pour finir, on compare la borne inférieure obtenue par l'approche en contrainte ci-dessus à la solution obtenue par éléments finis. La proximité entre la borne inférieure et la réponse numérique est très bonne, ce qui indique que le champ de contrainte (6.2) est pertinent pour approcher la solution obtenue par éléments finis.

6.6.2 Approche en déformation

L'énergie potentielle d'un champs de déplacement cinématiquement admissible fournit une borne supérieure de l'énergie à l'équilibre d'un problème aux limites d'élasticité. Pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{u}^*$, la fonctionnelle d'énergie potentielle

$$E_p(\underline{\varepsilon}^*) = \int_{\Omega} w(\underline{\varepsilon}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega^T} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dS \quad (6.10)$$

réalise un minimum lorsque $\underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon}$, où $\underline{\varepsilon}$ représente la solution en déformation du problème élastique, $\partial\Omega^T$ est la frontière de Ω où l'on impose un effort ($\partial\Omega^u$ est son complémentaire dans $\partial\Omega$ où l'on impose un déplacement) et $\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^T$. Dans notre géométrie, l'intégrale de frontière de (6.10) s'annule en l'absence de force imposée.

Une solution continue par morceaux est proposée, dont le domaine de définition est représenté sur la figure 6.17. Sur les sous-domaines $\Omega_a \cup \Omega_b \cup \Omega_c$, la déformation s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_x \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_0 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \frac{\varepsilon_x}{2V} x (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) & \text{in } \Omega_a \\ \varepsilon_x \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\varepsilon_0}{\mu} (\mu - \ell + x) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu} y - \frac{\varepsilon_x}{V} x - \frac{U}{\mu} \right) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) & \text{in } \Omega_b \\ \varepsilon_x \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\varepsilon_x}{2V} x (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) & \text{in } \Omega_c \end{cases} \quad (6.11)$$

où ε_x est le paramètre qui mesure la déformation horizontale de la géométrie. C'est aussi le seule paramètre inconnu du problème d'optimisation. La déformation verticale $\varepsilon_0 = u/V$ et connue. Le paramètre géométrique μ représente l'épaisseur de la branche Ω_b .

Le champ de déplacement associé à (6.11) est cinématiquement admissible (on peut aisément vérifier que le champ est continu à la traversé des interfaces du domaine).

Le calcul de l'énergie potentiel total 6.10 est immédiat, connaissant la densité d'énergie potentielle du milieu bi-module (4.12), ainsi que la déformation (6.11) paramétré par ε_x .

La solution du problème de minimisation globale est présentée sur la figure 6.16.e, pour les mêmes paramètres que précédemment avec $\mu = 0.3\ell$ (grandeur estimée à partir de la réponse simulée par éléments finis). On retrouve le fait que lorsqu'on diminue la raideur en compression du milieu, la contraction horizontale de l'éprouvette augmente, ce qui est cohérent avec ce qui a été observé sur la réponse numérique. Cependant, comme on pouvait s'y attendre, la borne supérieure obtenue est de moins bonne qualité que la borne inférieure car le champ de déformation n'est pas suffisamment paramétré.

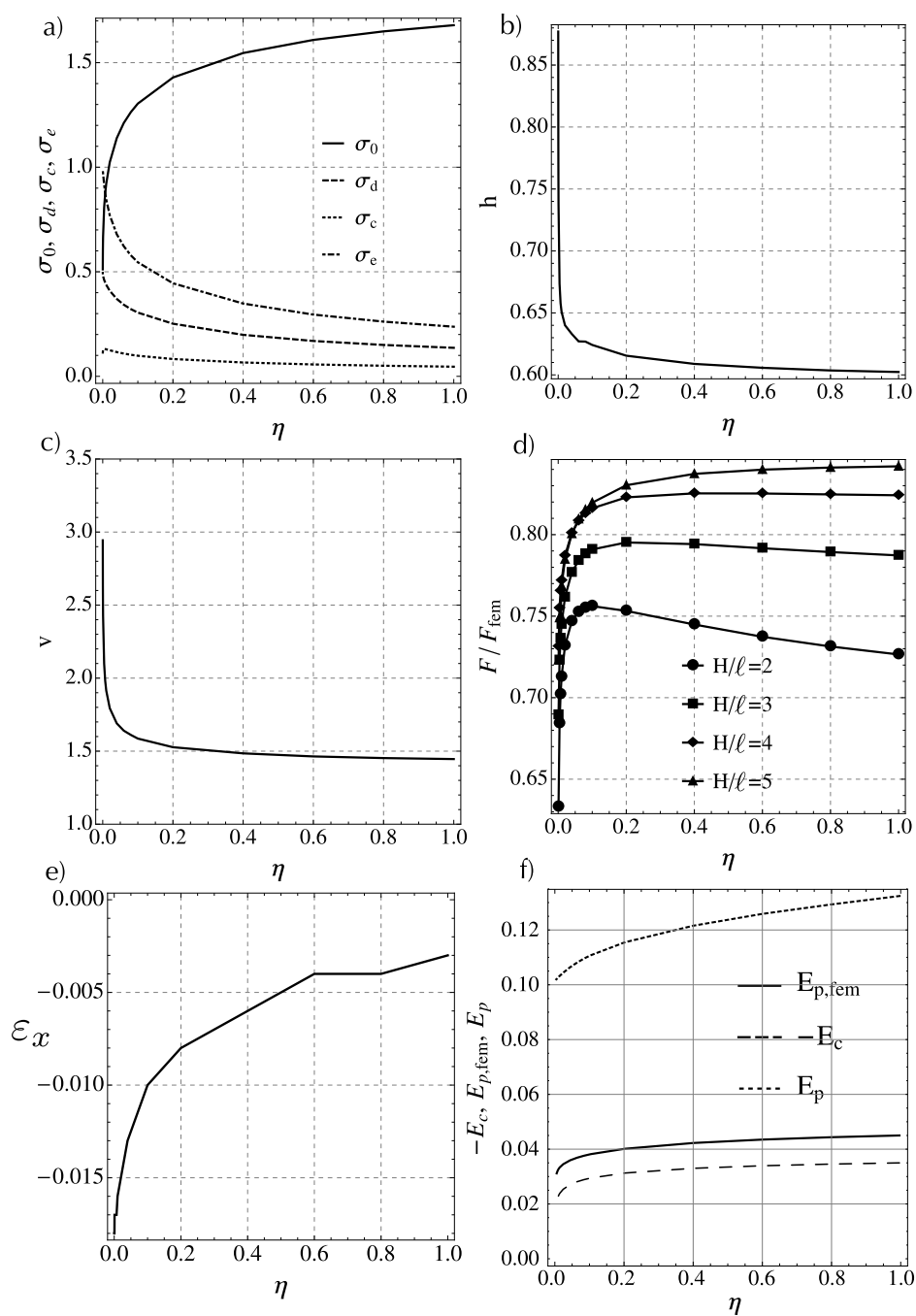


FIGURE 6.16 – Paramètres à l'optimum en fonction de η , avec contraintes (a) $\sigma_0, \sigma_d, \sigma_c$ et σ_e , (b) h , (c) v , (d) le rapport des résultantes verticales F/F_{fem} . (e) Encadrement énergétique obtenu avec l'approche en contrainte (borne inférieure), et l'approche en déformation (borne supérieure). La ligne continue représente la solution obtenue par éléments finis. η est compris dans l'intervalle $[10^{-4}, 1]$.

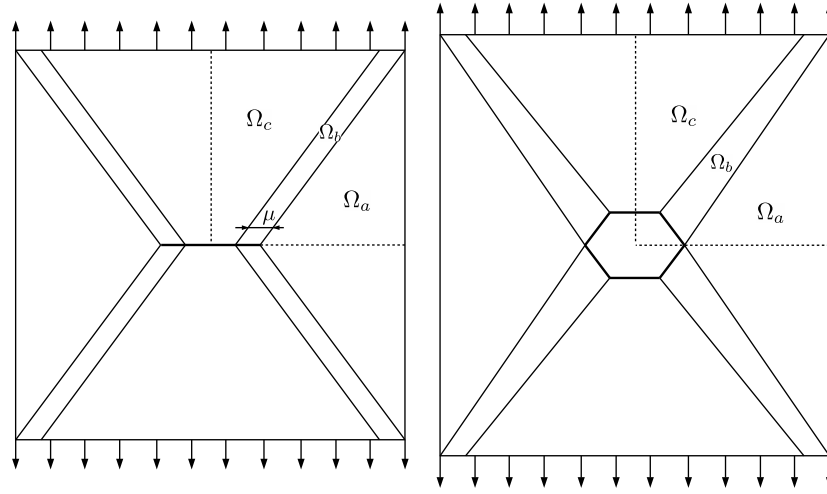


FIGURE 6.17 – Domaines du champ de déformation (6.11) pour une géométrie fissurée avec conditions aux limites cinématiques $\underline{u}^d = (0, u)$ sur le bord supérieur (resp. $-\underline{u}^d$ sur le bord inférieur). A gauche : la configuration non déformée. Le paramètre μ représente la largeur de la branche Ω_b au repos. A droite : configuration déformée par application du champs de déplacement issu de (6.11). Le paramètre ε_x contrôle la déformation horizontale des trois domaines Ω_a , Ω_b et Ω_c .

Conclusions

La loi de comportement paramétrée par η du milieu isotrope bi-module a été simulée pour des géométries simples, qui ne diffèrent que par la disposition des fissures qu'elles contiennent. Dans le cas d'un milieu quasi-unilatéral, les particularités de la réponse en contrainte évoquées dans la littérature dédiée, à savoir la localisation, le partitionnement en sous-domaines auto-équilibrés et l'existence de régions à contraintes nulles, ont pu être mise en évidence numériquement. Dans toutes les géométries simulées, nous avons vu que les solutions en contrainte étaient toujours localisées sur des chemins unidimensionnels qui forment des graphes auto-équilibrés avec le chargement et constitués uniquement de lignes de tension. Nous avons vu que si, pour une géométrie et des conditions aux limites données, ces graphes ne peuvent être construit, alors la contrainte nulle est la seule solution du problème. Par ailleurs, sur la base de travaux antérieurs, nous avons mis en évidence l'existence de régions libres de contrainte dans les géométries étudiées. Une application a été proposée pour l'encadrement numérique de la solution d'un problème aux limites donné et une borne inférieure de bonne qualité a été obtenue en choisissant un champs de contrainte unilatéralement statiquement admissible et constant par morceaux.

Toutefois, certains aspects de la réponse en contrainte des milieux unilatéraux sont encore incertains. Le formalisme théorique des milieux unilatéraux est apparu très récemment au sein de la communauté scientifique et il n'existe pas encore de méthode théorique ou numérique qui permettent s'assurer de l'existence, de l'unicité et du calcul de la solution pour un chargement donné.

A ce stade, on peut légitimement se demander si le comportement théorique du milieu bi-module étudié numériquement dans ce chapitre, peut-être rapproché du comportement d'un matériau réel. C'est l'objet du dernier chapitre de cette partie, où l'on propose une approche expérimentale pour mettre en évidence la raideur asymétrique du voile de fibres de verre présenté en introduction de cette partie.

IDENTIFICATION DU COMPORTEMENT BI-MODULE DU VOILE DE FIBRES DE VERRE PAR MESURES DE CORRÉLATION D'IMAGES

Dans ce chapitre, le comportement bi-module dans les matériaux fibreux est abordé par une approche expérimentale. On se propose de mettre évidence le caractère bi-module dans les voiles de fibres de verre par la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images. On met en place un système d'Arcan afin de contrôler l'anisotropie de la sollicitation imposée. Puis, les champs de déplacement mesurés sont utilisés dans la méthode d'identification FEMU-U pour mesurer le rapport η dans le voile, en fonction du grammage.

Sommaire

7.1	Introduction	120
7.2	Identification expérimentale de loi de comportement	121
7.2.1	Mesures de champs par corrélation d'images	121
7.2.2	Identification du paramètre η par la méthode FEMU-U	123
7.3	Installation expérimentale	124
7.3.1	Dispositif d'Arcan	125
7.3.2	Montage général	126
7.4	Résultats (préliminaires)	129

7.1 Introduction

Les avancées technologiques sur les appareils de prise de vue ces dernières années ainsi que leurs mises à disposition à des prix abordables ont été à l'origine de l'essor considérable des méthodes de mesure de champs par corrélation d'images au sein de la communauté de mécanique expérimentale. La connaissance des champs de déplacement en milieu hétérogène fournit des indications clés pour la compréhension des mécanismes de déformation à l'échelle des hétérogénéités et est indispensable pour l'analyse des effets mécaniques multi-échelles.

La mesure par corrélation d'images numériques (CIN) a été introduite initialement au début des années 80 (Burt, 1982; Sutton *et al.*, 1983) dans sa forme la plus élémentaire. Le principe est de mesurer un champ de déplacement à la surface d'une éprouvette à partir de deux images acquises à deux états de chargement distincts. Dans les premiers développements de la méthode, l'image en configuration initiale est partitionnée en sous régions (ou zones d'étude) dont on recherche les nouvelles positions sur l'image déformée. La position finale d'une zone d'étude est donnée par le maximum de vraisemblance avec la zone d'étude dans la configuration initiale. Le calcul peut être mené dans l'espace physique (Burt, 1982; Sutton *et al.*, 1983) ou dans l'espace de Fourier (Chen *et al.*, 1993; Berthaud *et al.*, 1996). Cette première déclinaison de la corrélation d'images est une approche locale car chaque zone d'étude est traitée indépendamment des autres. La conséquence directe est matérialisée sur le champ de déplacement par la présence de discontinuités (plus ou moins fortes selon l'intensité du déplacement mesuré).

L'approche globale, qui a été introduite dans les années 2000, est basée sur une formulation de type éléments finis du problème de corrélation (Brogiato, 2004; Sun *et al.*, 2005; Besnard *et al.*, 2006). Les champs de déplacement sont interpolés sur une base de fonctions de forme associée à un maillage qui est superposé sur la totalité du domaine d'étude. Le problème de minimisation du résidu global prend la forme d'un système linéaire (au moins en petits déplacements) dont les inconnues sont les déplacements nodaux. La méthode globale possède quelques avantages, notamment celui d'être plus robuste face au bruit de l'acquisition. De plus, les champs de déplacement obtenus sont au minimum continus.

Les méthodes CIN ont été étendues plus tard à la mécanique de la rupture pour mesurer le facteur d'intensité de contrainte (McNeill *et al.*, 1987) ou le déplacement d'ouverture en pointe de fissure (Dawicke et Sutton, 1994).

La corrélation d'image montre tout son potentiel lorsqu'elle est utilisée pour identifier des lois de comportement. En effet, les processus standards d'identification de loi de comportement (par exemple, la mesure d'un module élastique en traction simple) font souvent l'hypothèse d'un champ de déformation homogène et n'exploitent qu'une grandeur scalaire macroscopique (en général les courbes effort-déplacement). Ces approches sont limitées à des lois de comportement contenant un nombre très limité de paramètres, sous peine de devoir effectuer un grand nombre de mesures sous des sollicitations différentes. En revanche, l'utilisation d'un champ de déplacement à des fins d'identification permet d'identifier plus de paramètres (potentiellement variables en espace) avec un nombre limité de mesures. Par

ailleurs, l'identification sur des mesures de champs offre plus de perspectives sur des lois de comportement non linéaires, hétérogènes et/ou anisotropes. On pourra se référer par exemple aux travaux sur l'identification d'une loi d'endommagement isotrope d'un matériau composite (Claire *et al.*, 2004) et son adaptation au cas anisotrope (Crouzeix *et al.*, 2009).

En pratique, il existe plusieurs approches différentes pour l'identifications de paramètres à partir des mesures de champs (Avril *et al.*, 2008; Grédiac et Hild, 2012). La plus utilisée aujourd'hui (et la plus intuitive) est la méthode FEMU (« *Finite Element Method Updating* ») dans sa déclinaison cinématique (que l'on note alors FEMU-U). Elle consiste à rechercher le jeu de paramètres de la loi de comportement qui minimise l'écart entre le champ de déplacement mesuré par CIN et le champ de déplacement simulé. On définit une norme pondérée permettant de mesurer l'écart entre les champs mesurés et simulés, l'optimum étant déterminé par itérations (ce qui nécessite de faire au moins un calcul aux éléments finis à chaque itération) (Mathieu *et al.*, 2015). C'est la méthode qui est utilisée dans la suite de ce chapitre.

La problématique du comportement non linéaire bi-module dans les milieux fibreux a été évoquée dans l'introduction de cette partie. Elle est justifiée par l'observation au MEB de la déformation en flexion de fibres sollicitées en compression (que l'on peut attribuer à la courbure initiale des fibres et à leurs élancements). Le sujet a été abordé numériquement (chapitre 5 et 6) par la résolution de problèmes aux limites avec une loi de comportement non linéaire bi-module paramétrée par η . On s'est intéressé en particulier au cas limite $\eta = 0$.

Dans ce chapitre, le problème est traité par une approche expérimentale. On se propose de mettre en évidence le caractère bi-module dans les voiles de fibres de verre par la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images (section 7.2.1), associée à la méthode FEMU-U pour identifier le paramètre η en fonction de la densité du voile (section 7.2.2). Dans cette optique, on met en place un système d'Arcan afin de contrôler l'anisotropie de la sollicitation imposée (section 7.3). Le champ de déplacement par corrélation d'images est mesurée pour différents degrés d'anisotropie du chargement. Enfin, on minimise l'écart entre le champ de déplacement simulé et le champ mesuré afin d'identifier le paramètre optimal η pour quelques valeurs de la densité du voile (section (7.4)).

7.2 Identification expérimentale de loi de comportement

7.2.1 Mesures de champs par corrélation d'images

On considère deux images en niveaux de gris, représentées par les fonctions bidimensionnelles f et g de la position $\underline{x}$ sur l'image. Les deux images sont acquises à des états différents du chargement et on suppose que f est l'image en configuration initiale et g en configuration déformée. On suppose que les pixels de l'image initiale sont advectés par le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$. L'hypothèse de conservation du *flot optique* est la relation

permettant de relier f à g et $\underline{u}(\underline{x})$ (Grédiac et Hild, 2012) :

$$g(\underline{x} + \underline{u}) = f(\underline{x}) + b(\underline{x}) \quad (7.1)$$

où $b(\underline{x})$ représente le bruit de l'acquisition qui est propre aux caméras CCD.

Avec la relation précédente, on ne peut pas déterminer $\underline{u}$ à la seule connaissance de f et g sans faire d'hypothèses supplémentaires sur la régularité du champ de déplacement. En effet, sachant qu'un pixel ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (par exemple, 256 pour une image en niveaux de gris 8 bits), le problème précédent est mal posé car il existe plusieurs déplacements possibles pour un même pixel dans la configuration initiale. Par conséquent, la corrélation doit être faite à une échelle plus grande que le pixel, donc sur des zones d'intérêts contenant suffisamment de pixels pour que le problème soit bien posé. Si on considère l'approche globale de la corrélation d'images et que l'on note Ω le domaine d'intérêt de l'image (domaine où l'on souhaite mesurer le champ de déplacement $\underline{u}$), le problème de conservation du flot optique se ramène à une minimisation de la fonctionnelle suivante (Mathieu et al., 2015)

$$\mathcal{J}^2(\underline{v}) = \frac{1}{2|\Omega|\gamma_f^2} \int_{\Omega} (g(\underline{x} + \underline{v}) - f(\underline{x}))^2 d\underline{x} \quad (7.2)$$

où $|\Omega|$ représente le volume en pixel du domaine Ω , γ_f la variance en niveaux de gris du bruit de l'acquisition $b(\underline{x})$ et $\underline{v}$ un champ de déplacement virtuel. La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est intensive et vaut 1 à l'optimum ($\mathcal{J}(\underline{u}) = 1$).

Sous l'hypothèse des petits déplacements, on peut écrire au premier ordre $g(\underline{x} + \underline{v}) = g(\underline{x}) + \underline{v} \cdot \mathbf{grad} g$ et la relation précédente devient

$$\mathcal{J}^2(\underline{v}) = \frac{1}{2|\Omega|\gamma_f^2} \int_{\Omega} (g(\underline{x}) + \underline{v} \cdot \mathbf{grad} g - f(\underline{x}))^2 d\underline{x} \quad (7.3)$$

La décomposition sur une base de fonctions de forme de type éléments finis du champ de déplacement a été proposée initialement par Broggiato (2004) puis par Besnard et al. (2006) pour l'approche globale de corrélation d'images. Cette décomposition a l'avantage d'imposer une continuité sur le champ de déplacement et de ramener la minimisation de (7.3) à la résolution d'un système matriciel. En effet, avec $\underline{v}$ de la forme $\underline{v} = \sum_p v_p \underline{\phi}_p(\underline{x})$ où les $\underline{\phi}_p$ sont les fonctions de forme de l'élément, la minimisation de la fonctionnelle (7.3) se réduit à la résolution d'un système linéaire $\mathbf{M}_{cin} \mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n)}$ où $\mathbf{U}^{(n)}$ représente le vecteur des déplacements nodaux à l'itération n (Hild et Roux, 2012) avec

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{2|\Omega|\gamma_f^2} \int_{\Omega} \underline{\phi}_i \cdot (\mathbf{grad} f \otimes \mathbf{grad} f) \cdot \underline{\phi}_j d\underline{x}$$

et

$$\mathbf{B}_i^{(n)} = \frac{1}{2|\Omega|\gamma_f^2} \int_{\Omega} (f(\underline{x}) - \bar{g}^{(n)}(\underline{x})) \mathbf{grad} f \cdot \underline{\phi}_i d\underline{x}$$

où $\bar{g}^{(n)} = g(\underline{x} + \underline{v}^{(n)})$ est une nouvelle image construite à partir de l'estimation à l'itération n du champ de déplacement $\underline{v}^{(n)}$. Ici, la matrice de corrélation M_{cin} est construite uniquement à partir de l'image f et des fonctions de forme. Par contre, le vecteur $B^{(n)}$ doit être mis à jour à chaque itération. L'optimum est atteint lorsque la norme du vecteur déplacement vérifie une certaine tolérance définie par l'utilisateur.

La matrice de covariance C_u contient l'information sur l'incertitude de la mesure dû au bruit de l'acquisition. C_u est liée à la matrice de corrélation par la relation suivante (Hild et Roux, 2012)

$$C_u = 2\gamma_f^2 M_{cin}^{-1} \quad (7.4)$$

Le calcul du champ de déplacement présenté ici est implémenté dans le code de calcul de corrélation d'images CORRELI-T3, développé au LMT, qui fait appel à des éléments triangulaires d'ordre 1 et qui prend en charge les maillages non structurés sur des domaines de formes arbitraires définis par l'utilisateur.

Remarquons que la texture à la surface du matériau est un élément déterminant de la précision de la mesure. La corrélation sera d'autant plus précise que la dynamique en niveaux de gris est suffisamment étendue pour que les zones d'études se distinguent facilement les unes par rapport aux autres. Lorsque la texture en surface de l'échantillon est très homogène (par exemple à la surface du verre, de l'acier ou du plâtre), il faut réaliser une texture artificielle, un mouchetis, par dépôt d'un marquage (le plus commun étant l'utilisation d'une peinture aérosol) sur la surface de l'échantillon. Comme on le verra par la suite (section 7.4), la texture naturelle en surface du voile de verre génère une dynamique et un contraste sur les images en niveaux de gris de qualité suffisante pour obtenir un champ de déplacement à partir de la seule connaissance des images f , g et de la variance du bruit γ_f .

7.2.2 Identification du paramètre η par la méthode FEMU-U

La mesure de champs de déplacement par corrélation d'images présentée à la section précédente peut être mise à contribution pour l'identification de lois de comportement. Parmi les différentes approches développées conjointement aux méthodes de corrélation d'images (Avril *et al.*, 2008; Grédiac et Hild, 2012), on préférera la méthode FEMU (« *Finite Element Method Updating* ») (Collins *et al.*, 1974; Grédiac et Hild, 2012) dans sa déclinaison cinématique (que l'on note alors FEMU-U) qui a l'avantage de pouvoir s'interfacer directement avec le calcul de corrélation d'images décrit à la section précédente. Le principe est de rechercher le jeu de paramètres de la loi de comportement qui minimise l'écart entre le champ de déplacement mesuré par CIN et le champ de déplacement simulé. En pratique, on définit la norme pondérée permettant de mesurer l'écart entre les champs mesurés et simulés (Mathieu *et al.*, 2015)

$$\chi_u^2(p) = \frac{1}{N_u} (\underline{u}_m - \underline{u}_c(p))^T \cdot C_u^{-1} \cdot (\underline{u}_m - \underline{u}_c(p)) \quad (7.5)$$

où $\underline{p}$ est le vecteur des N_p paramètres de la loi de comportement, $\underline{u}_m$ le champ mesuré par CIN, $\underline{u}_c(\underline{p})$ le champ simulé pour avec le jeu de paramètres $\underline{p}$ et N_u le nombre de degrés de liberté cinématique des champs de déplacement. Le préfacteur $1/N_u$ permet de rendre le calcul indépendant du nombre de degrés de liberté.

En pratique, le champ de déplacement mesuré $\underline{u}_m$ est considéré comme une donnée d'entrée dans la relation (7.5). Néanmoins, pour être en mesure de comparer $\underline{u}_c$ et $\underline{u}_m$, il faut que ces deux champs soient obtenus avec les mêmes conditions aux limites. Ici, on utilise le déplacement mesuré $\underline{u}_m$ sur la totalité des frontières du domaine de corrélation d'images comme conditions aux limites pour le calcul numérique de $\underline{u}_c$. Remarquons que cette méthode ne permettrait pas d'identifier un paramètre comme la raideur isotrope d'un milieu (car celui-ci n'aura aucune influence sur $\underline{u}_c$ lorsqu'un déplacement est imposé sur toutes les frontières du domaine de calcul).

Dans le cas général d'une loi de comportement constituée de plusieurs paramètres, on pourra chercher le minimum de χ_u par itérations (Mathieu *et al.*, 2015), avec la linéarisation de $\underline{u}_c(\underline{p})$, qui fait intervenir une matrice rectangulaire $\partial \underline{u}_c / \partial \underline{p}$ de taille $N_u \times N_p$ que l'on peut calculer par différences finies (donc en faisant deux simulations à chaque itération). Cependant, dans notre cas, on veut identifier le caractère bi-module des voiles isotrope de fibres de verre ADFORS à l'aide de la loi de comportement non linéaire obtenue au chapitre 4 et paramétrée par η , le rapport de la raideur en compression sur la raideur en traction¹. Ainsi, la fonction pondérée χ_u ne dépend que de η , ce qui rend la minimisation beaucoup plus simple.

A la section suivante, on décrit le dispositif de mesure du champ de déplacement $\underline{u}_m$ pour les voiles de fibres de verre ADFORS.

7.3 Installation expérimentale

On rappelle que l'énergie potentielle élastique du milieu bi-module présentée au chapitre 4 s'écrit $w(\varepsilon, \phi) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 f_\eta(\phi)$ où ε et ϕ sont les composantes de la déformation en coordonnées polaires avec $\varepsilon = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}/2$, l'intensité de la déformation, et ϕ l'angle d'anisotropie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La figure 4.3, qui représente le tracé de $f_\eta(\phi)$, montre que dans une état de traction bi-axial (donc sur le quadrant $\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$), la fonction f_η est indépendante de η et toutes les fibres sont en traction, quels que soient leurs directions. En revanche, le caractère non linéaire du modèle est d'autant plus marqué que l'intensité de la compression est importante devant celle de la traction (donc sur les trois autres quadrants où il existe une

1. En réalité, la loi de comportement du chapitre 4 fait intervenir deux paramètres, η et k_t (la raideur en traction des fibres). Ici, on s'intéresse seulement au comportement asymétrique donc à la valeur η . Par ailleurs, notons que le fait d'imposer un déplacement mesuré sur toute les frontières du domaine pour le calcul éléments finis de $\underline{u}_c$ ne permettrait pas d'identifier le paramètre de raideur isotrope k_t . Il faudrait avoir recours à une autre méthode d'identification, comme par exemple la variante FEMU-F, qui exploite, en plus du champs de déplacement, la courbe force-déplacement mesurée.

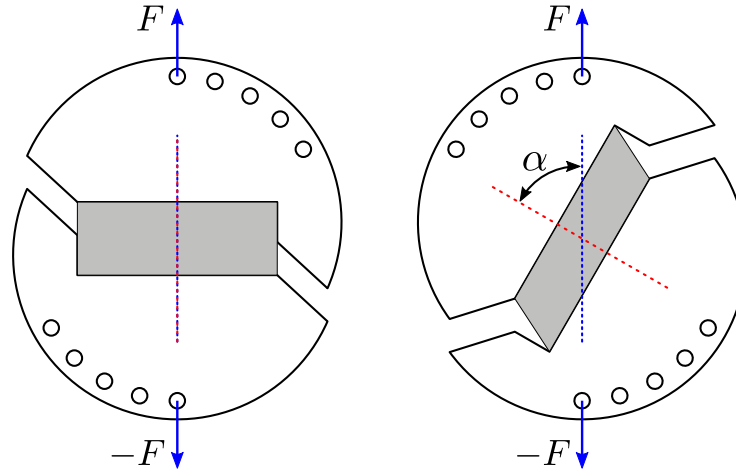


FIGURE 7.1 – Schéma de principe du montage d'Arcan. Les mors sont constitués de deux demi-disques que l'on place sur un banc de traction uniaxiale. L'orientation α des demi-disques permet de moduler la déformation en cisaillement que l'on souhaite imposer à l'échantillon. À gauche, l'axe de l'échantillon rectangulaire (représenté en gris) est alignée avec l'axe du chargement ce qui correspond à un cas de traction uniaxiale ($\alpha = 0^\circ$). À droite, l'axe de l'échantillon a subi une rotation de $\alpha = 60^\circ$ par rapport à l'axe du chargement, ce qui engendre une sollicitation mixte en traction et cisaillement.

direction de compression). C'est la raison pour laquelle un test de traction simple uniaxial n'est pas suffisant pour identifier la raideur asymétrique du milieu. Étant donné que le matériau d'étude est un voile, on pourra au mieux augmenter l'intensité dans la direction de compression en créant un état de cisaillement contrôlé par un dispositif d'Arcan. Un tel dispositif est décrit à la section suivante.

7.3.1 Dispositif d'Arcan

Le dispositif Arcan désigne des mors particuliers, introduit initialement par [Arcan et al. \(1978\)](#) puis utilisé par [Voloshin et Arcan \(1980\)](#) pour appliquer un état de cisaillement uniforme sur un échantillon de composite renforcé. Le principe est de créer un état de cisaillement contrôlé en créant un écart angulaire α entre l'axe de l'échantillon et l'axe du chargement. Comme on peut le voir sur le schéma de principe de la figure 7.1, l'échantillon (représenté en gris sur la figure) est placé entre deux mors en forme de demi-disque percés aux extrémités. L'échantillon se voit imposer une déformation de cisaillement plus ou moins importante suivant l'écart angulaire α entre l'axe de l'échantillon et l'axe du chargement.

Notre matériau d'étude étant un voile, un chargement de cisaillement important va inévitablement engendrer un mouvement hors plan de l'échantillon matérialisé par l'appari-

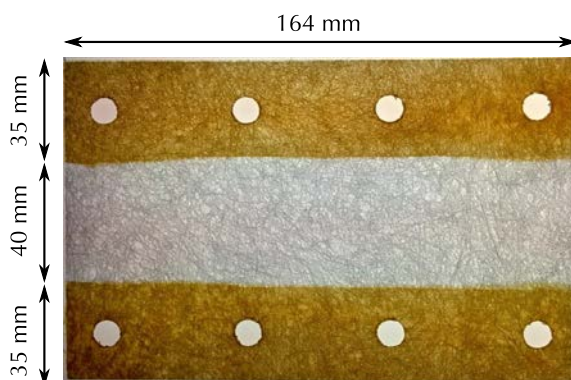


FIGURE 7.2 – Echantillon de voile ADFORS de densité surfacique de fibres 50 g/m^2 . Les parties supérieure et inférieure de l'échantillon (épaisseur de 35 mm) ont été trempées dans du Néoprène liquide à séchage rapide. Le champ de déplacement est calculé sur la région rectangulaire centrale.

tion de plis. Aussi, dans la suite, nous limitons l'angle de rotation de l'échantillon à $\alpha = 45^\circ$. De plus, on place l'échantillon entre deux plaques de PMMA transparent pour bloquer les éventuels mouvements hors plan.

7.3.2 Montage général

L'une des difficultés à imposer un chargement sur un matériau constitué de fibres de verre est que le serrage des mors entraîne inévitablement la rupture des fibres. Un serrage insuffisant entraîne le glissement de l'échantillon entre le mors.

Pour encaster l'échantillon aux mors, celui-ci a été trempé dans du Néoprène liquide à séchage rapide qui pénètre entre les fibres et rigidifie le voile (bande supérieure et inférieure de 35 mm d'épaisseur, voir figure 7.2). Les trous de perçage vont permettre de serrer l'échantillon entre les mors et le champ de déplacement sera calculé sur la région rectangulaire centrale. La zone d'intérêt, sur lequel on procède au calcul du champ de déplacement, fait 164 mm de longueur pour 40 mm d'épaisseur.

Par la suite, on s'intéresse à trois grammages de voile isotrope ADFORS : 80, 50 et 30 g/m^2 . Pour chaque densités, les fibres ont toutes un diamètre approximatif de $13 \mu\text{m}$ et des longueurs de 18 mm.

Les mors Arcan ont été confectionnée en PMMA transparent à la découpeuse laser. La figure 7.3 présente le montage globale des mors Arcan (1 et 2) avec un angle d'orientation $\alpha = 30^\circ$. L'échantillon (4) est serré entre les mors sur les deux bandes de résine supérieure et inférieure (5). La région rectangulaire centrale constitue la zone de calcul du champ de déplacement dont la frontière est délimitée en ligne pointillée (6). Par ailleurs, pour bloquer les éventuels plissement de l'échantillons qui surviendrait en augmentant le degrés

de cisaillement, la zone centrale de l'échantillon est placée entre deux plaques transparentes (7). Les rails de guidage (8) sont ajoutés pour empêcher une éventuelle rotation dans le plan du mors supérieur.

Les mors sont placés sur un banc de traction SHIMADZU AGS-X avec une cellule de force de capacité 10 kN de précision $\pm 0.5\%$. On applique un changement en traction monotone à la vitesse de 2 mm/min. Les photos sont prises avec un appareil CANON EOS 60D, avec une focale de 16 mm et un temps d'exposition de 1/50. Les images sont obtenues au format CR2 de taille 5184×3456 .

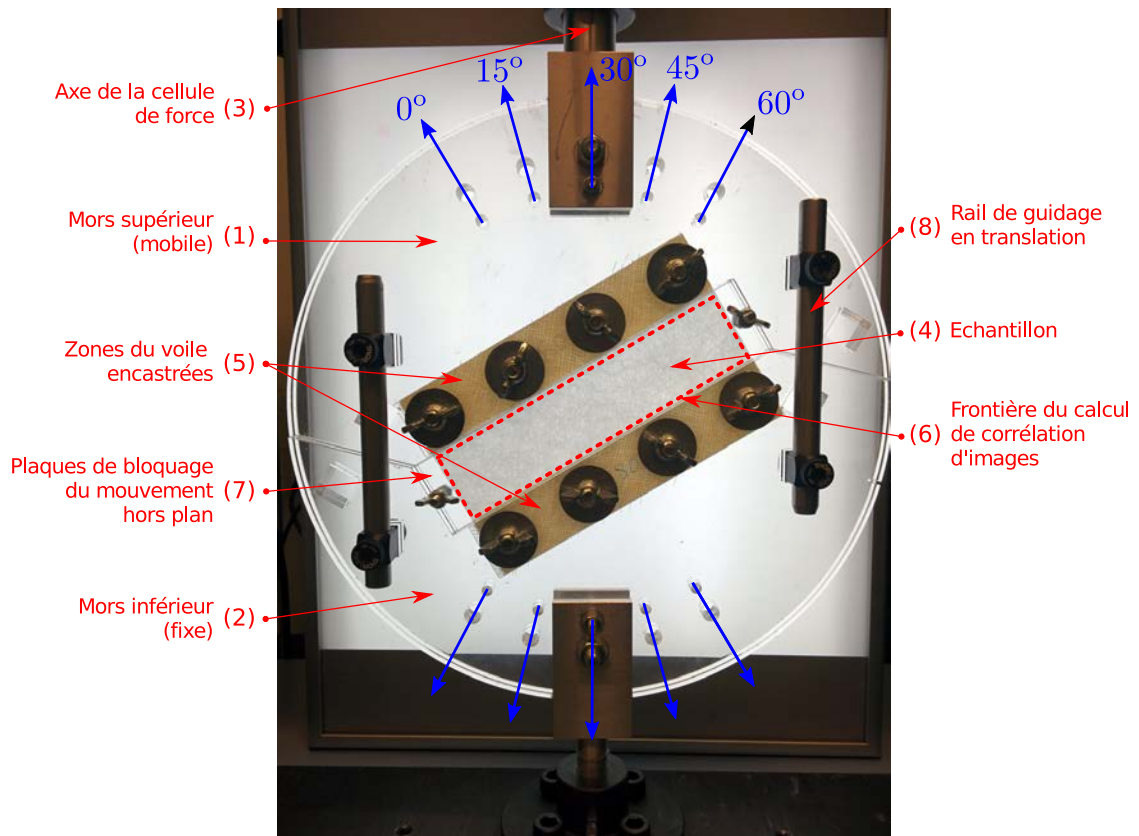


FIGURE 7.3 – Montage des mors Arcan (1 et 2) avec un axe de chargement de 30° (3). L'échantillon (4) est serré entre les mors sur les deux bandes de résine (5). Le calcul du champ de déplacement se fait sur la région rectangulaire centrale délimitée en pointillé (6). Les deux plaques transparentes (7) sont utilisées pour bloquer la formation des plis pendant le chargement. Un fond lumineux est placé derrière le système pour avoir un meilleur contraste de la texture fibreuse lors des acquisitions.

7.4 Résultats (préliminaires)

Dans cette dernière section, on présente les résultats préliminaires sur l'identification de η pour trois voiles de grammages 80, 50 et 30 g/m². A ce stade, nous avons été en mesure d'exploiter seulement neuf mesures de champ de déplacement (trois par densité de voile). Les résultats ci-dessous sont donc qualifiés de préliminaires car la campagne de mesure ne fournit, à ce stade, qu'un résultat qualitatif sur la variation de η en fonction du grammage, qui devrait être confirmé par des mesures supplémentaires.

La mesure de force en fonction du déplacement vertical du mors supérieur est donnée à titre informatif sur la figure 7.4 en fonction de l'angle d'orientation des mors $\alpha = \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ et pour un voile de 80 g/m². Les courbes sont obtenues en moyennant les réponses de trois tests pour chaque angle α . Comme évoqué au chapitre 3, on retrouve la phase linéaire élastique, suivie d'une phase non linéaire pouvant s'apparenter à de l'endommagement, puis survient une rupture fragile. En identifiant le module élastique en traction uniaxiale (pour $\alpha = 0^\circ$), on obtient une valeur environ 7% inférieure à celle mesurée au chapitre 3, ce qui est probablement attribuable à un léger glissement de l'échantillon et à l'élasticité des mors. Dans tout les cas, il serait nécessaire d'évaluer la raideur élastique du montage avant de pouvoir exploiter cette mesure.

Un exemple de champ de déplacement obtenu par corrélation d'images est illustré sur la figure 7.5 pour un angle $\alpha = 30^\circ$ et un échantillon de grammage 80 g/m². Le champ solution est interpolé sur un maillage triangulaire régulier (éléments de Lagrange d'ordre 1). Le pas du maillage doit être choisi le plus petit possible mais toujours supérieur à la longueur caractéristique des variations du niveau de gris de la texture fibreuse (ici de l'ordre de la dizaine de pixels). Dans notre cas, le pas du maillage est de 60 pixels pour toutes les acquisitions. La longueur de régularisation vaut 90 pixels. La figure (a) représente le contour du domaine en configuration initiale (ligne bleue) et celui en configuration déformée (ligne rouge) dont on a amplifié le déplacement d'un facteur 50. Précisons que les deux images ont été prises à deux états du chargement pendant la phase élastique linéaire des courbes effort-déplacement. Bien que le domaine d'étude soit, en moyenne, déformé en cisaillement, on observe que les frontières situées près des mors ne sont pas en translation. En pratique, cela n'a pas d'importance sur le processus d'identification, car les positions des noeuds de frontière dans la configuration déformée seront imposées comme conditions aux limites pour la simulation numérique. L'observation de la déformée permet d'apprécier un éventuel glissement de l'échantillon et de s'assurer que l'on impose, en moyenne, l'état de déformation désiré. Les composantes du champ de déplacement, illustrées sur les figures (b) et (c), sont utilisées telles quelles dans la relation (7.5).

Les valeurs de la fonction χ_u^2 , définies par la relation (7.5), sont tracées sur la figure 7.6 pour des échantillons de densités (a) 80 g/m², (b) 50 g/m² et (c) 30 g/m², en fonction du paramètre η et pour un angle de rotation des mors $\alpha = 30^\circ$. Pour chaque échantillon, on obtient les minimums suivants : (a) $\eta = 1$, (b) $\eta = 0.83$ et (c) $\eta = 0.44$. Précisons que ces valeurs ne correspondent qu'à une seule mesure de champ par densité. Sur l'ensemble des

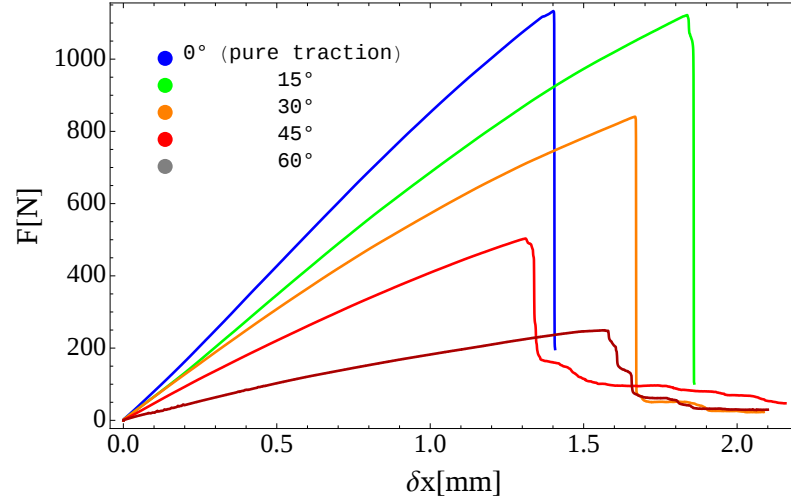


FIGURE 7.4 – Courbes efforts-déplacements pour un voile de grammage 80 g/m^2 avec les angles d'orientation des mors $\alpha = \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$. La courbe pour chaque angle α correspond à une moyenne sur 3 échantillons. Le comportement montre une phase linéaire élastique suivit d'une phase non linéaire qui peut s'apparenter à de l'endommagement, et enfin une rupture fragile.

neufs mesures de champ (trois pour chaque densité de voile), on observe des fluctuations importantes, aussi bien sur les valeurs du minimum de χ_u^2 (variation entre 0.5 et 10.5 pour l'ensemble des mesures) que sur les valeurs de η identifiées. La figure (d) représente les valeurs de η identifiées en fonction de la densité. On observe que les valeurs sont très fluctuantes d'une mesure à l'autre pour un même grammage (par exemple, pour 30 g/m^2 , η varie de 0.45 à 0.82). Néanmoins, la tendance montre que η est une fonction croissante de la densité. Précisons que ces mesures ont été effectuées pour un angle de $\alpha = 30^\circ$ et que l'on ne sait pas encore, à ce stade, comment l'identification η pourrait être affectée en augmentant l'intensité du cisaillement.

Cette observation est encore incomplète à ce stade et pourrait être confirmée avec des mesures de champ supplémentaires. Pourtant, elle est intuitive dans le cas d'un réseau de poutre théorique dans le plan. En effet, si on suppose que chaque fibre du réseau possède une légère courbure initiale (comme c'est le cas dans le voile réel), alors la raideur en compression d'une fibre va dépendre de son module de flexion, qui est lui-même proportionnel à l'inverse cubique de la longueur entre contact. Bien que la rigidité effective tangente (en déformation infinitésimale) est identique en traction et en compression, la raideur effective en déformation finie du réseau sera plus faible en compression qu'en traction (Huisman *et al.*, 2007). Cependant, en augmentant le grammage, on augmente le nombre de jonctions rigides et donc on diminue la longueur moyenne entre les jonctions du réseau. La valeur de

η devrait donc en théorie, être une fonction croissante de la densité.

En pratique, et comme il a été suggéré au chapitre 3, l'analyse de la microstructure réelle du voile ADFORS par traitement d'images issues de la micro-tomographie X est indispensable pour évaluer la longueur moyenne entre les jonctions rigides en fonction de la densité. La dispersion du liant observé au MEB suggère que le nombre de ponts capillaires, qui forment les jonctions rigides du réseau, pourrait augmenter avec le grammage.

Conclusions

Le problème du comportement non linéaire bi-module dans les voiles de fibres de verre ADFORS a été abordé par une approche expérimentale basée sur la mesure du champ de déplacement par corrélation d'images, associée à une méthode d'identification de loi de comportement. Des mors particuliers ont été confectionnés pour imposer un état de déformation anisotrope et les champs de déplacement ont été obtenus à partir des images prises à deux états du chargement sur la phase élastique de la courbe effort-déformation. L'identification, par la méthode FEMU-U, du paramètre η de la loi de comportement présentée au chapitre 4 a été effectuée pour trois types de voile, de grammages respectifs 80 g/m², 50 g/m² et 30 g/m². A ce stade, les résultats obtenus sont préliminaires car seulement trois mesures de champs ont été effectuées pour chaque densité et les valeurs de η obtenues sont très fluctuantes d'une mesure à l'autre. Néanmoins, les premiers résultats semblent indiquer que le rapport η diminue avec le grammage. Ce résultat préliminaire pourrait être confirmé avec des mesures supplémentaires et surtout, en parallèle, par l'observation de la microstructure au micro-tomographe associée à une méthode de traitement d'images afin de quantifier la longueur moyenne entre les jonctions du réseau en fonction de la densité.

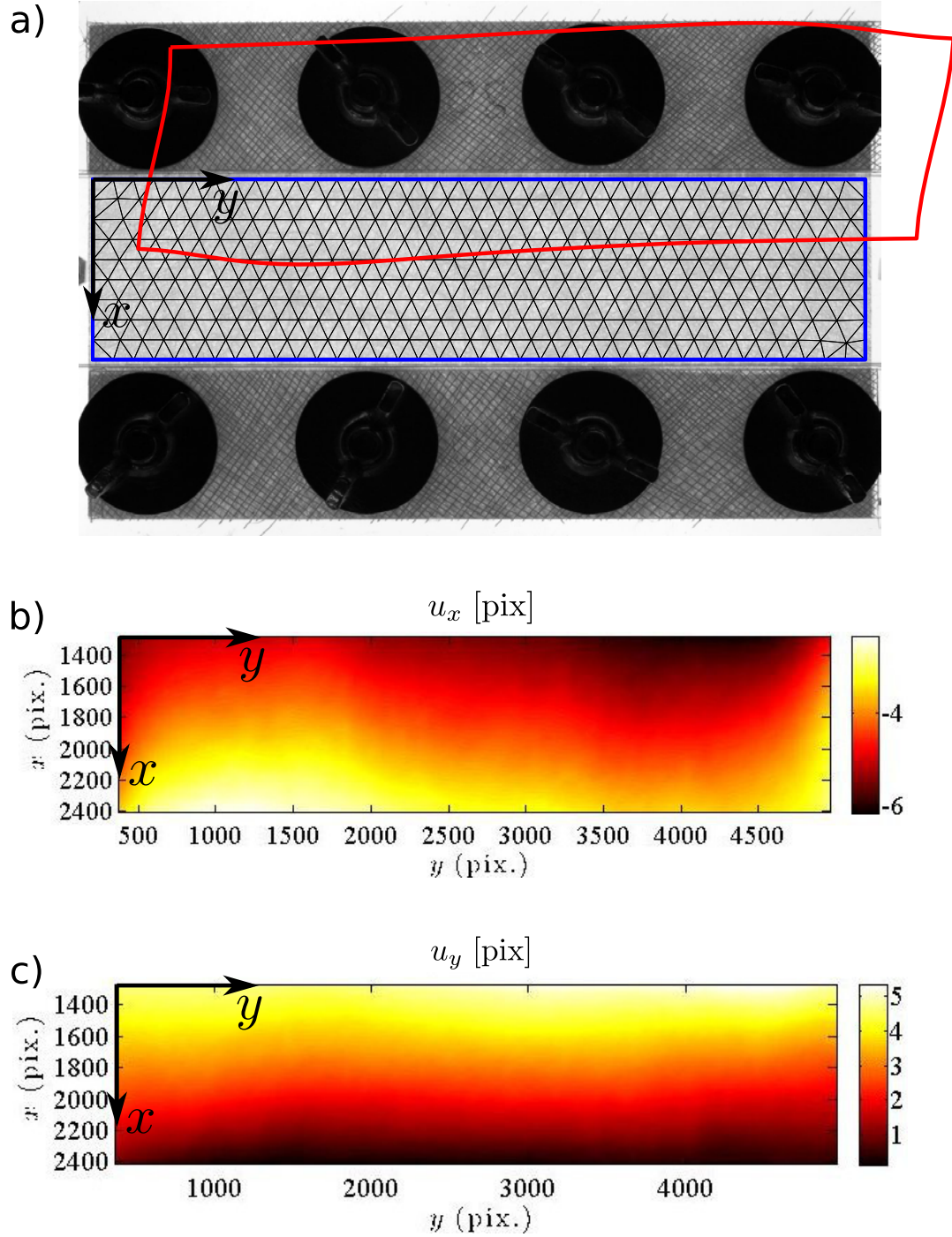


FIGURE 7.5 – Mesure de champs de déplacement par corrélation d’images avec un angle de rotation des mors $\alpha = 30^\circ$ et un échantillon de grammage de 80 g/m^2 . a) Contour du domaine de calcul en configuration initiale (ligne bleue) et en configuration déformée (ligne rouge). Le déplacement a été amplifié par d’un facteur 50. Le champ solution est interpolé sur un maillage triangulaire d’ordre 1. La longueur caractéristique d’une maille est d’environ 60 pixels et la longueur de régularisation vaut 90 pixels. b) et c) : Composantes du champ de déplacement.

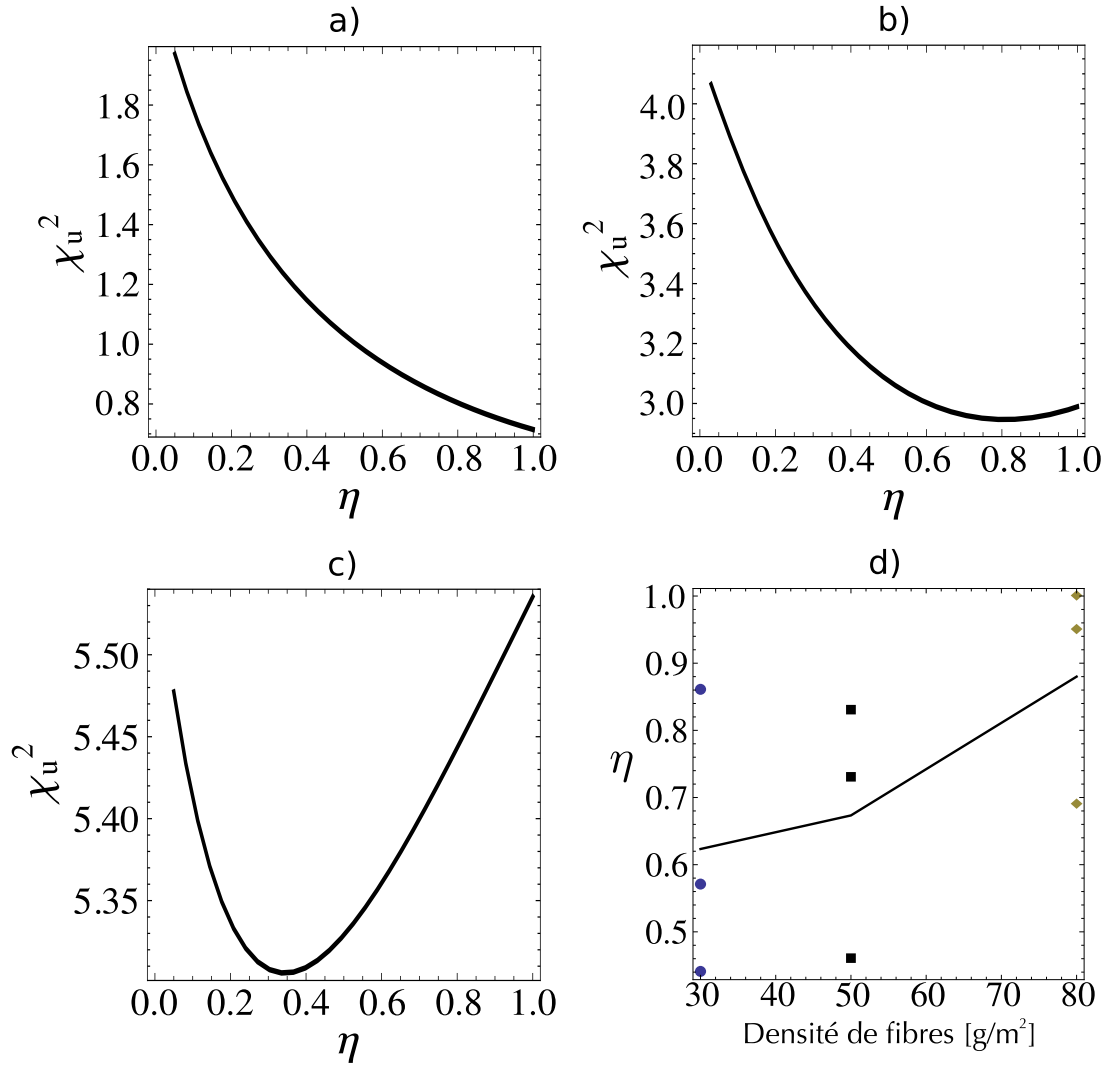


FIGURE 7.6 – (a), (b) et (c) : Valeurs de χ_u^2 en fonction de η pour un angle de rotation des mors $\alpha = 30^\circ$. Les échantillons ont un grammage de (a) 80 g/m², (b) 50 g/m² et (c) 30 g/m². Les valeurs des minimums sont obtenus pour (a) $\eta = 1$, (b) $\eta = 0.83$ et (c) $\eta = 0.44$. Remarquons que ces minimums ne sont pas obtenus avec les mêmes niveaux de précisions : dans l'ensemble χ_u^2 qui varie entre 0.8 et 5.5 pour les trois mesures. Il est important de préciser que ces courbes ne correspondent qu'à une seule mesure chacune et que la valeur du minimum pour chaque grammage est très variable d'une mesure à l'autre. En effet, la figure (d) présente les valeurs de η identifiées pour chaque densité (trois mesures de η par densité). On voit bien que les valeurs identifiées sont très fluctuantes d'une mesure à l'autre pour un même grammage (par exemple, pour 30 g/m², η varie de 0.57 à 0.88). La tendance montre que η est croissante en fonction de la densité, mais on ne peut, à ce stade, conclure quantitativement sur ce résultat.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La première partie était seulement introductive et avait pour objectif d'évaluer la pertinence des modules effectifs que l'on retrouve dans la littérature pour les milieux fibreux désordonnés.

Nous nous sommes intéressés au comportement linéaire élastique des assemblages de poutres de Navier-Bernoulli. Nous avons commencé par revoir les résultats classiques du calcul du comportement effectif d'un assemblage de poutres. En particulier celui de la borne supérieure pour le comportement effectif, que l'on obtient par une approche en déformation, dans laquelle on utilise un développement asymptotique au premier ordre des champs de déplacement et de rotation discrets. Nous avons vu que pour certains assemblages périodiques dont la cellule élémentaire ne contient qu'un seul noeud, la borne supérieure donne la rigidité effective exacte du réseau (c'est le cas pour le réseau carré et triangulaire, mais pas pour celui en nid d'abeilles).

Puis un outil de simulation discrète d'un réseau de fibres, fondé sur la minimisation de l'énergie potentielle élastique, a été mis en place afin de déterminer la rigidité effective du réseau désordonné de Poisson. Le module d'Young simulé de cet assemblage montre une dépendance quasi-linéaire de la densité. La réponse homogénéisée théorique montre cette même fonction linéaire, mais la raideur prédite est beaucoup plus grande que celle simulée. Pour finir, des tests de traction sur le voile ADFORS ont permis de mettre en évidence cette même dépendance linéaire pour la gamme de densité étudiée.

Cependant, au vu de la microstructure réelle du voile de fibre de verre, dans lequel existent des jonctions frottantes, des agglomérats de fibres et une répartition non déterminée des jonctions, on ne peut, à ce stade, être sûr que les mêmes mécanismes de déformation se produisent dans le modèle théorique et dans le voile ADFORS. La traction imagée au MEB pourrait permettre d'avoir une idée plus précise des mécanismes de déformation des fibres (et de leurs interactions) dans le voile et d'adapter la borne supérieure de l'approche théorique.

Une approche plus directe pour déterminer finement la mécanique du voile serait d'utiliser la simulation discrète sur des représentations tri-dimensionnelles obtenues par microtomographie X. Cette approche semble être la plus prometteuse car elle tient compte de la microstructure réelle. Cependant, des conditions doivent être vérifiées pour que le résultat soit pertinent. Tout d'abord, la précision de l'acquisition (*i.e.* la taille du voxel) doit être suffisamment fine pour distinguer les contacts entre fibres et la dispersion du liant. Dans

notre, cela n'a été possible qu'avec des résolutions très petites (de l'ordre du micromètre). Ensuite, le volume de réseau fibreux imagé doit être représentatif de la microstructure. En pratique, cette dernière condition est délicate à vérifier et il sera probablement nécessaire d'effectuer plusieurs acquisitions pour arriver à ce résultat.

Dans la seconde partie, nous avons considéré un modèle de milieu isotrope, bi-module et paramétré par le rapport entre la raideur en compression sur la raideur en traction du milieu. L'énergie potentielle a été obtenue par intégration des énergies potentielles des fibres, en tenant compte leurs orientations et de l'état de déformation macroscopique du réseau. Le milieu est unilatéral dans le cas d'une raideur nulle en compression ($\eta = 0$) et possède une densité d'énergie continue définie par morceaux. Une formulation aux éléments finis générique adaptée à ce problème a été mise en place pour simuler la réponse numérique de ce milieu. En considérant des problèmes aux limites sur des géométries fissurées, nous avons mis en évidence quelques particularités de la réponse en contrainte des milieux unilatéraux. Tout d'abord, nous avons systématiquement observé une forte localisation de la contrainte pour toutes les géométries considérées. En particulier, ces localisations forment des motifs, que l'on peut décrire comme des graphes de force. Ces graphes ne sont constitués que de lignes de tension et ils sont auto-équilibrés avec le chargement. Nous avons vu que si, pour une géométrie et des conditions aux limites données, ces graphes ne peuvent être construits, alors la contrainte nulle est la seule solution du problème. Par ailleurs, en utilisant des développements théoriques existants, nous avons mis en évidence l'existence de régions libres de contrainte dans les géométries étudiées. Une application a été proposée pour l'encadrement numérique de la solution du problème aux limites du domaine rectangulaire contenant une fissure centrée, et une borne inférieure a été obtenue en choisissant un champ de contrainte unilatéralement statiquement admissible et constant par morceaux.

Enfin, on s'est intéressé à la caractérisation expérimentale du comportement bi-module dans les voiles de fibres de verre ADFORS. Nous avons utilisé une méthode de mesure du champ de déplacement par corrélation d'images, associée à une méthode d'identification de loi de comportement. Un état de déformation anisotrope a été imposé au voile en confectionnant des mors « Arcan ». Les champs de déplacement ont pu être calculés à partir des images prises à deux états du chargement sur la phase élastique de la courbe effort-déformation. Bien que les mesures effectuées ne sont pas en nombre suffisant pour quantifier la valeur du rapport η dans le voile, les premiers résultats semblent indiquer que η est une fonction croissante du grammage. Cette conclusion est cohérente avec le fait que l'élancement moyen des fibres est une fonction décroissante du grammage, mais cela gagnerait à être vérifié par l'observation de la microstructure au micro-tomographe associée à une méthode de traitement d'images afin de quantifier la longueur moyenne entre les jonctions du réseau en fonction de la densité.

Toutefois, certains aspects de la réponse en contrainte des milieux unilatéraux sont encore incertains. Dans les travaux présentés ici sur le champ de contrainte solution dans les milieux unilatéraux, nous avons expliqué la présence des graphes de force en utilisant des

considérations d'équilibres : s'il est possible de construire un graphe de force en équilibre avec le chargement et qui vérifie la condition d'unilatéralité, alors il constitue une partie de la solution en contrainte (la solution en contrainte est constituée de la superposition de l'ensemble des graphes de force que l'on peut construire). Or dans toutes les géométries considérées ici, les graphes de forces relient les points de concentration de contrainte ce qui peut prêter à confusion car on pourrait penser que ce sont les concentrations qui sont à l'origine des graphes de force. Pour s'assurer que ce n'est pas le cas, on pourra essayer de refaire les simulations en supprimant les points de concentration de contrainte (la méthode la plus simple consiste à évider un cercle centré sur les pointes de fissure). De plus, on peut éventuellement avoir recours à la simulation discrète pour laquelle on peut traiter le cas $\eta = 0$ de manière exacte (on rappelle que dans toutes les simulations aux éléments finis effectuées, η avait toujours une valeur résiduelle et ne pouvait jamais atteindre 0, pour des raisons numériques évidentes).

Pour finir, la solution en contrainte du milieu unilatéral présentée ici peut être discutée au regard de la solution post-flambée des films minces. En effet, le cas parfaitement unilatéral fournit une indication sur les « chemins » privilégiés pour la transmission des efforts. La connaissance de ces chemins de forces et des régions en compression peut avoir un intérêt considérable pour éviter la situation de flambement d'un film mince.



CALCUL DE LA RIGIDITÉ TANGENTE

La rigidité tangente $\underline{\underline{D}}$ issue de la linéarisation de $\underline{N}(\underline{F})$ dans la relation (5.9) a pour expression :

$$\underline{\underline{D}}(\underline{F}) = \frac{\partial N_{ij}}{\partial F_{kl}} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \quad (\text{A.1})$$

En utilisant l'expression (5.6) de la contrainte de Piola-Kirchhoff, on a :

$$D_{ijkl} = H_{ij} \frac{\partial w_{1,0}}{\partial F_{kl}} + w_{1,0} \frac{\partial H_{ij}}{\partial F_{kl}} + F_{ij} \frac{\partial w_{0,1}}{\partial F_{kl}} + w_{0,1} \frac{\partial F_{ij}}{\partial F_{kl}} \quad (\text{A.2})$$

où l'on a utilisé la notation $\partial^n w(I_1, I_2) / (\partial^p I_1 \partial^q I_2) = w_{p,q}$ avec $n = p + q$.

Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ possède la symétrie $D_{ijkl} = D_{klij}$. En utilisant les définitions (5.1) de I_1 et I_2 , on peut calculer explicitement chacune des composantes de D_{ijkl} :

$$\begin{aligned} D_{1111} &= F_{11}^2 w_{0,2} + 2F_{22}F_{11}w_{1,1} + F_{22}^2 w_{2,0} + w_{0,1} \\ D_{2222} &= F_{11}^2 w_{2,0} + 2F_{22}F_{11}w_{1,1} + F_{22}^2 w_{0,2} + w_{0,1} \\ D_{1212} &= F_{12}^2 w_{0,2} - 2F_{21}F_{12}w_{1,1} + F_{21}^2 w_{2,0} + w_{0,1} \\ D_{2121} &= F_{12}^2 w_{2,0} - 2F_{21}F_{12}w_{1,1} + F_{21}^2 w_{0,2} + w_{0,1} \\ D_{1112} &= D_{1211} = F_{11}(F_{12}w_{0,2} - F_{21}w_{1,1}) + F_{22}(F_{12}w_{1,1} - F_{21}w_{2,0}) \\ D_{1121} &= D_{2111} = F_{11}(F_{21}w_{0,2} - F_{12}w_{1,1}) + F_{22}(F_{21}w_{1,1} - F_{12}w_{2,0}) \\ D_{1222} &= D_{2212} = F_{12}(F_{22}w_{0,2} + F_{11}w_{1,1}) - F_{21}(F_{22}w_{1,1} + F_{11}w_{2,0}) \\ D_{2221} &= D_{2122} = F_{21}(F_{22}w_{0,2} + F_{11}w_{1,1}) - F_{12}(F_{22}w_{1,1} + F_{11}w_{2,0}) \\ D_{1122} &= D_{2211} = F_{11}^2 w_{1,1} + F_{22}F_{11}(w_{0,2} + w_{2,0}) + F_{22}^2 w_{1,1} + w_{1,0} \\ D_{1221} &= D_{2112} = -F_{12}^2 w_{1,1} + F_{21}F_{12}(w_{0,2} + w_{2,0}) - F_{21}^2 w_{1,1} - w_{1,0} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

B

CALCUL DE $w(I_1, I_2)$ POUR UN MILIEU BI-MODULE

Cette section présente le calcul de $w(I_1, I_2)$ avec I_1 et I_2 les invariants définis par (5.1), à partir la relation 4.12.

La déformation linéarisée de Green-Lagrange $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'écrit en fonction de $\underline{\underline{F}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \underline{u} + \mathbf{grad}^T \underline{u}) \\ &= \frac{1}{2} ((\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) + (\underline{\underline{F}}^T - \underline{\underline{1}})) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T) - \underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

avec $\underline{u} = \underline{x} - \underline{X}$ le champ de déplacement. Cette relation implique que l'on peut écrire les déformations principales $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de celles de $\underline{\underline{F}}$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + \varepsilon_1 \\ \lambda_2 &= 1 + \varepsilon_2\end{aligned}\tag{B.1}$$

où l'on a noté (λ_1, λ_2) les extensions (longueurs finales sur longueurs initiales) dans les deux directions principales. La relation (B.1) implique que $(\lambda_1, \lambda_2) \sim 1$ car $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \ll 1$.

En utilisant les invariants (5.1), on a

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= \det \underline{\underline{F}} + \frac{1}{2} \text{Tr} \underline{\underline{C}} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ &= 2(1 + \varepsilon_m)^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}I_2 - I_1 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \underline{\underline{C}} - \det \underline{\underline{F}} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\end{aligned}$$

Comme $I_1 + I_2 > 0$, on obtient la déformation moyenne ε_m à partir de la première relation :

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{2}} - 1 \quad (\text{B.2})$$

De plus, on a $I_2 - I_1 > 0$, on en déduit la déformation déviatorique :

$$\sqrt{\frac{I_2 - I_1}{2}} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{2} = \varepsilon_d \quad (\text{B.3})$$

En substituant (B.2) et (B.3) dans l'expression $w(\varepsilon_m, \varepsilon_d)$ donnée par (2.X), il vient après simplification :

$$w(I_1, I_2) = \begin{cases} \frac{1}{8}\pi k_t \left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) & \varepsilon_m > \varepsilon_d \\ \frac{1}{8}k_t \left(\left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) \left(\pi\eta + (1 - \eta) \arccos \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{I_1 + I_2}}{\sqrt{I_2 - I_1}} \right) \right) \dots & -\varepsilon_d < \varepsilon_m < \varepsilon_d \\ \dots + 6(1 - \eta) \left(\sqrt{\frac{I_1 + I_2}{2}} - 1 \right) \sqrt{\sqrt{2(I_1 + I_2)} - 1 - I_1} & \\ \frac{1}{4}\pi\eta k_t \left(3I_2 + I_1 + 4 - 4\sqrt{2(I_1 + I_2)} \right) & \varepsilon_m < -\varepsilon_d \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- G. ALFANO, L. ROSATI et N. VALOROSO : A numerical strategy for finite element analysis of no-tension materials. *International journal for numerical methods in engineering*, 48 (3):317–350, 2000.
- M. P. ALLEN et D. J. TILDESLEY : *Computer simulation of liquids*. Oxford university press, 1989.
- S. A. AMBARTSUMYAN : Elasticity theory of different moduli. *China Railway Publishing House, Beijing*, 1986.
- S. A. AMBARTSUMYAN et A. A. KHACHATRYAN : Basic equations in the theory of elasticity for materials with different stiffness in tension and compression. *Mechanics of Solids*, 1 (2):29–34, 1966.
- M. ANGELILLO : Constitutive relations for no-tension materials. *Meccanica*, 28(3):195–202, 1993.
- G. ANZELLOTTI : A class of convex non-coercive functionals and masonry-like materials. *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*, 2(4):261–307, 1985.
- S. ARABNEJAD et D. PASINI : Mechanical properties of lattice materials via asymptotic homogenization and comparison with alternative homogenization methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 77:249–262, 2013.
- M. ARCAN, Z. HASHIN, et A. VOLOSHIN : A method to produce uniform plane-stress states with applications to fiber-reinforced materials. *Experimental mechanics*, 18(4):141–146, 1978.
- J. A. ÅSTRÖM, J. P. MÄKINEN, M. J. ALAVA et J. TIMONEN : Elasticity of poissonian fiber networks. *Phys. Rev. E*, 61:5550–5556, May 2000. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.61.5550>.
- J.-L. AURIAULT : Heterogeneous medium. is an equivalent macroscopic description possible? *International journal of engineering science*, 29(7):785–795, 1991.
- M. AVRIEL : *Nonlinear programming : analysis and methods*. Courier Corporation, 2003.

- S. AVRIL, M. BONNET, A.-S. BRETTELLE, M. GREDIAC, F. HILD, P. IENNY, F. LATOURTE, D. LEMOSSE, S. PAGANO, E. PAGNACCO *et al.* : Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48 (4):381–402, 2008.
- M. BAI, A. R. MISSEL, W. S. KLUG et A. J. LEVINE : The mechanics and affine-nonaffine transition in polydisperse semiflexible networks. *Soft Matter*, 7:907–914, 2011. URL <http://dx.doi.org/10.1039/C0SM00496K>.
- C. BAIOCCHI, G. BUTTAZZO, F. GASTALDI et F. TOMARELLI : General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 100(2):149–189, 1988.
- S. BALAY, K. BUSCHELMAN, V. EIJKHOUT, W. GROPP, D. KAUSHIK, M. KNEPLEY, L. MCINNES, B. SMITH et H. ZHANG : Petsc users manual. *Technical Report ANL-95/11 – Revision 3.0.0*, Argonne National Laboratory, 2008.
- Y. BAMBERGER : *Mécanique de l'ingénieur III*. Hermann, 1981.
- M. BAUDEQUIN, G. RYSCHENKOW et S. ROUX : Non-linear elastic behavior of light fibrous materials. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 12(1):157–162, 1999.
- Z. BAŽANT et M. CHRISTENSEN : Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress. *International Journal of Solids and Structures*, 8(3):327–346, 1972.
- A. BEL-BRUNON, M. CORET, K. BRUYÈRE-GARNIER et A. COMBESURE : Comparison of two homogenization methods using a damage model for a fibrous membrane, based on the fibers' fracture process at the microscale. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 39:1–10, 2013.
- C. BENDTSEN et O. STAUNING : Fadbad, a flexible c++ package for automatic differentiation. *Technical Report : IMM-REP- 1996-17*, Technical University of Denmark, 1996.
- Y. BERTHAUD, J. SCHOLZ et J. THESING : Méthodes optiques et acoustiques de mesures des caractéristiques mécaniques. In *Proceedings Colloque national MECAMAT 'Mécanismes et mécanique des grandes déformations*, p. 77–80, 1996.
- G. BESNARD, F. HILD et S. ROUX : “finite-element” displacement fields analysis from digital images : application to portevin-le chatelier bands. *Experimental Mechanics*, 46 (6):789–803, 2006.
- M. BORNERT, T. BRETHEAU et P. GILORMINI : Homogénéisation en mécanique des matériaux, tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. 2001.

- G. BROGGIATO : Adaptive image correlation technique for full-field strain measurement. *In Proc. 12th Int. Conf. Exp. Mech., Bari, Italy*, p. 420–421, 2004.
- C. BRONKHORST : Modelling paper as a two-dimensional elastic-plastic stochastic network. *International Journal of Solids and Structures*, 40(20):5441 – 5454, 2003. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303002816>.
- N. BUANNIC et P. CARTRAUD : Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. i. asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40):7139–7161, 2001.
- P. J. BURT : Local correlation measures for motion analysis : a comparative study. *In Proc. Pattern Recognition and Image Processing Conf., Las Vegas, 1982*, p. 269–274, 1982.
- J.-L. CHABOCHE : Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics*, 1(2): 148–171, 1992.
- D. CHEN, F.-P. CHIANG, Y. TAN et H. DON : Digital speckle-displacement measurement using a complex spectrum method. *Applied optics*, 32(11):1839–1849, 1993.
- J. CHEN, Y. HUANG et M. ORTIZ : Fracture analysis of cellular materials : a strain gradient model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5):789–828, 1998.
- D. CLAIRE, F. HILD et S. ROUX : A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(2):189–208, 2004.
- J. D. COLLINS, G. C. HART, T. HASELMAN et B. KENNEDY : Statistical identification of structures. *AIAA journal*, 12(2):185–190, 1974.
- E. COSSERAT et F. COSSERAT : Théorie des corps déformables. *Paris*, 1909.
- H. L. COX : The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*, 3(3):72, 1952.
- L. CROUZEIX, J. N. PÉRIÉ, F. COLLOMBET et B. DOUCHIN : An orthotropic variant of the equilibrium gap method applied to the analysis of a biaxial test on a composite material. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(11):1732–1740, 2009.
- M. CUOMO et G. VENTURA : A complementary energy formulation of no tension masonry-like solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(1):313–339, 2000.
- A. CURNIER, Q.-C. HE et P. ZYSSET : Conewise linear elastic materials. *Journal of Elasticity*, 37(1):1–38, 1994.

- M. DAS, F. C. MACKINTOSH et A. J. LEVINE : Effective medium theory of semiflexible filamentous networks. *Phys. Rev. Lett.*, 99:038101, Jul 2007. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.038101>.
- J. F. DAVALOS, P. QIAO, X. F. XU, J. ROBINSON et K. E. BARTH : Modeling and characterization of fiber-reinforced plastic honeycomb sandwich panels for highway bridge applications. *Composite structures*, 52(3):441–452, 2001.
- D. DAWICKE et M. SUTTON : Ctoa and crack-tunneling measurements in thin sheet 2024-t3 aluminum alloy. *Experimental Mechanics*, 34(4):357–368, 1994.
- G. DEL PIERO : Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials. *Meccanica*, 24(3):150–162, 1989.
- Z. DU et X. GUO : Variational principles and the related bounding theorems for bi-modulus materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 73:183 – 211, 2014.
- A. ERINGEN : Foundations and solids, microcontinuum field theories, 1999.
- S. FOREST, F. PRADEL et K. SAB : Asymptotic analysis of heterogeneous cosserat media. *International Journal of Solids and Structures*, 38(26–27):4585 – 4608, 2001. ISSN 0020-7683.
- K. GALL, H. SEHITOGLU, Y. CHUMLYAKOV et I. KIRIEVA : Tension–compression asymmetry of the stress–strain response in aged single crystal and polycrystalline niti. *Acta Materialia*, 47(4):1203 – 1217, 1999. ISSN 1359-6454.
- F. GENNA : An accurate numerical integration scheme for solving structural problems in the presence of a ‘no tension’ material. *Computers & structures*, 53(2):253–273, 1994.
- M. GIAQUINTA et E. GIUSTI : Researches on the equilibrium of masonry structures. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 88(4):359–392, 1985.
- L. J. GIBSON : Biomechanics of cellular solids. *Journal of biomechanics*, 38(3):377–399, 2005.
- L. J. GIBSON et M. F. ASHBY : *Cellular solids : structure and properties*. Cambridge university press, 1997.
- M. GRÉDIAC et F. HILD : *Full-field measurements and identification in solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2012.
- D. GROSS et T. SEELIG : *Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics*. Springer Science & Business Media, 2011.

- D. A. HEAD, A. J. LEVINE et F. C. MACKINTOSH : Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 91(10):108102, Sep 2003a.
- D. A. HEAD, A. J. LEVINE et F. C. MACKINTOSH : Distinct regimes of elastic response and deformation modes of cross-linked cytoskeletal and semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. E*, 68:061907, Dec 2003b. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.061907>.
- C. HEUSSINGER et E. FREY : Role of architecture in the elastic response of semiflexible polymer and fiber networks. *Phys. Rev. E*, 75(1):011917, Jan 2007.
- J. HEYMAN : The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2(2):249 – 279, 1966.
- F. HILD et S. ROUX : Comparison of local and global approaches to digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 52(9):1503–1519, 2012.
- R. HILL : A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222, 1965.
- E. M. HUISMAN, T. van DILLEN, P. R. ONCK et E. Van der GIESSEN : Three-dimensional cross-linked f-actin networks : Relation between network architecture and mechanical behavior. *Phys. Rev. Lett.*, 99(20):208103, Nov 2007. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.208103>.
- B. JÄHNE : *Spatio-temporal image processing : theory and scientific applications*, vol. 751. Springer Science & Business Media, 1993.
- R. M. JONES : Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. *AIAA Journal*, 15(1):16–23, 1977.
- Y. KANNO : *Nonsmooth mechanics and convex optimization*. CRC Press, 2011.
- H. B. KELLER : *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. Academic Press, 1977.
- B. S. KIRK, J. W. PETERSON, R. H. STOGNER et G. F. CAREY : libmesh : a c++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulations. *Engineering with Computers*, 22(3-4):237–254, 2006.
- V. KOUZNETSOVA, M. GEERS et W. BREKELMANS : Size of a representative volume element in a second-order computational homogenization framework. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4), 2004.
- R. S. KUMAR et D. L. MCDOWELL : Generalized continuum modeling of 2-d periodic cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 41(26):7399–7422, 2004.

- M. LUCCHESI, C. PADOVANI et G. PASQUINELLI : Thermodynamics of no-tension materials. *International journal of solids and structures*, 37(45):6581–6604, 2000.
- F. C. MACKINTOSH, J. KAS et P. A. JANMEY : Elasticity of semiflexible biopolymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4425–4428, Dec 1995.
- F. MATHIEU, H. LECLERC, F. HILD et S. ROUX : Estimation of elastoplastic parameters via weighted femu and integrated-dic. *Experimental Mechanics*, 55(1):105–119, 2015.
- J. MAZARS, Y. BERTHAUD et S. RAMTANI : The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4):629–635, 1990.
- S. MCNEILL, W. PETERS et M. SUTTON : Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering fracture mechanics*, 28(1):101–112, 1987.
- L. R. MEZA, S. DAS et J. R. GREER : Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices. *Science*, 345(6202):1322–1326, 2014. ISSN 0036-8075.
- M. A. NARTER, S. K. BATRA et D. R. BUCHANAN : Micromechanics of three-dimensional fibrewebs : constitutive equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1989):3543–3563, 1999.
- P. R. ONCK, T. KOEMAN, T. van DILLEN et E. van der GIESSEN : Alternative explanation of stiffening in cross-linked semiflexible networks. *Phys. Rev. Lett.*, 95:178102, Oct 2005. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.178102>.
- M. OSTOJA-STARZEWSKI et D. C. STAHL : Random fiber networks and special elastic orthotropy of paper. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 60(2):131–149, 2000.
- G. PIKE et C. SEAGER : Percolation and conductivity : A computer study. i. *Physical review B*, 10(4):1421, 1974.
- J.-S. PLANTE et S. DUBOWSKY : Large-scale failure modes of dielectric elastomer actuators. *International Journal of Solids and Structures*, 43(25–26):7727 – 7751, 2006. ISSN 0020-7683.
- F. PRADEL et K. SAB : Cosserat modelling of elastic periodic lattice structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series {IIB} - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(11):699 – 704, 1998. ISSN 1287-4620.
- R. REZAKHANIHA, A. AGIANNIOTIS, J. T. C. SCHRAUWEN, A. GRIFFA, D. SAGE, C. BOUTEN, F. Van de VOSSE, M. UNSER et N. STERGIOPULOS : Experimental investigation of collagen waviness and orientation in the arterial adventitia using confocal laser scanning microscopy. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 11(3-4):461–473, 2012.

- J. R. RICE : A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, 35(2):379–386, 1968.
- K. SAB : Déformations microscopiques et macoscopiques dans un assemblage dense de particules rigides. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 322(10):715–721, 1996.
- E. SÁNCHEZ-PALENCIA : Non-homogeneous media and vibration theory. *In Non-homogeneous media and vibration theory*, vol. 127, 1980.
- M. ŠILHAVÝ : Collapse mechanisms and the existence of equilibrium solutions for masonry bodies. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 19(7):821–831, 2014.
- J.-y. SUN, H.-q. ZHU, S.-h. QIN, D.-l. YANG et X.-t. HE : A review on the research of mechanical problems with different moduli in tension and compression. *Journal of mechanical science and technology*, 24(9):1845–1854, 2010.
- Y. SUN, J. H. PANG, C. K. WONG et F. SU : Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied optics*, 44(34):7357–7363, 2005.
- M. SUTTON, W. WOLTERS, W. PETERS, W. RANSON et S. MCNEILL : Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and vision computing*, 1(3):133–139, 1983.
- C. TEKOG̈LU et P. ONCK : Size effects in the mechanical behavior of cellular materials. *Journal of Materials Science*, 40(22):5911–5917, 2005. ISSN 0022-2461.
- C. TEKOG̈LU et P. R. ONCK : Size effects in two-dimensional voronoi foams : A comparison between generalized continua and discrete models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(12):3541 – 3564, 2008. ISSN 0022-5096.
- H. TOLLENAERE et D. CAILLERIE : Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7):699–705, 1998.
- A. VIGLIOTTI et D. PASINI : Linear multiscale analysis and finite element validation of stretching and bending dominated lattice materials. *Mechanics of Materials*, 46:57–68, 2012.
- A. VOLOSHIN et M. ARCAN : Pure shear moduli of unidirectional fibre-reinforced materials (frm). *Fibre Science and Technology*, 13(2):125–134, 1980.
- A.-J. WANG, R. KUMAR et D. MCDOWELL : Mechanical behavior of extruded prismatic cellular metals. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 12(3):185–200, 2005.
- W. E. WARREN et E. BYSKOV : Three-fold symmetry restrictions on two-dimensional micropolar materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21(5):779–792, 2002.

X. F. WU et Y. DZENIS : Elasticity of planar fiber networks. *Journal of Applied Physics*, 98(9):093501–093501–9, 2005. ISSN 0021-8979.