



**HAL**  
open science

# Réponses vibratoires non-linéaires dans un contexte industriel : essais et simulations

Maxence Claeys

► **To cite this version:**

Maxence Claeys. Réponses vibratoires non-linéaires dans un contexte industriel : essais et simulations. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ECDL0034 . tel-01356746

**HAL Id: tel-01356746**

**<https://theses.hal.science/tel-01356746>**

Submitted on 26 Aug 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2015 - 34

Année 2015

## **THÈSE**

présentée pour l'obtention du grade de

### **DOCTEUR**

### **DE**

### **L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA  
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

**Maxence CLAEYS**

**RÉPONSES VIBRATOIRES NON-LINÉAIRES DANS UN CONTEXTE  
INDUSTRIEL : ESSAIS ET SIMULATIONS**

Présentée et soutenue publiquement le 10 Novembre 2015, devant le jury d'examen :

J.-L. DION,	Professeur des Universités, Supméca Saint-Ouen	Président de jury
G. CHEVALLIER,	Professeur des Universités, FEMTO-ST Besançon	Rapporteur
O. THOMAS,	Professeur des Universités, ENSAM Lille	Rapporteur
J.-P. LAMBELIN,	Ingénieur, CEA/CESTA	Examinateur
J.-J. SINOU,	Professeur des Universités, École Centrale de Lyon	Directeur de Thèse



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
Contexte de l'étude . . . . .	11
Plan de la thèse . . . . .	13
<b>1 Quelques éléments de dynamique vibratoire linéaire et non-linéaire</b>	<b>15</b>
1.1 Dynamique vibratoire linéaire . . . . .	16
1.1.1 Analyse modale numérique . . . . .	16
1.1.2 Analyse modale expérimentale . . . . .	18
1.2 Réponses vibratoires non-linéaires . . . . .	18
1.2.1 Phénomènes observés . . . . .	18
1.2.2 Origine des non-linéarités . . . . .	22
1.3 Méthodes de simulation vibratoire non-linéaires . . . . .	25
1.3.1 Méthodes temporelles . . . . .	26
1.3.2 Méthodes perturbatives . . . . .	31
1.3.3 Méthode de Balance Harmonique . . . . .	34
1.3.4 Méthode de collocation trigonométrique . . . . .	37
1.3.5 Méthodes de continuation . . . . .	38
1.4 Réduction de modèle . . . . .	42
1.4.1 Projection modale . . . . .	44
1.4.2 Condensation statique . . . . .	46
1.4.3 Méthodes de sous-structuration . . . . .	46
1.4.4 Méthodes avancées . . . . .	50
1.5 Conclusion . . . . .	52
<b>2 Etude d'une poutre métallique bi-encastree</b>	<b>53</b>
2.1 Expériences . . . . .	54

2.1.1	Description de la poutre bi-encastree et des experiences associees . . . . .	54
2.1.2	Reponses frequentielles experimentales . . . . .	55
2.1.3	Reponses multi-harmoniques . . . . .	56
2.1.4	Evolution de la tension statique dans la poutre . . . . .	60
2.2	Modelisation de la poutre non-lineaire bi-encastree . . . . .	60
2.2.1	Modele continu . . . . .	60
2.2.2	Calcul des modes propres . . . . .	62
2.2.3	Projection modale d'un modele elements finis . . . . .	63
2.3	Recalage par la methode des developpements multi-echelles . . . . .	66
2.4	Simulations numeriques . . . . .	73
2.4.1	Methode de Balance Harmonique . . . . .	73
2.4.2	Methode de tir . . . . .	74
2.4.3	Methode de Continuation . . . . .	75
2.5	Comparaisons essai-calcul . . . . .	77
2.5.1	Simulation avec entree ideale . . . . .	77
2.5.2	Simulation avec entree experimentale multi-harmonique . . . . .	81
2.6	Conclusion . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Mesures de la reponse vibratoire d'un assemblage avec des liaisons frottantes</b>	<b>85</b>
3.1	Motivations . . . . .	86
3.2	Maquette d'essai . . . . .	87
3.3	Reponses vibratoires a excitation verticale . . . . .	88
3.3.1	Analyse modale des sous-structures . . . . .	89
3.3.2	Reponse verticale de l'assemblage « Harmonie » . . . . .	90
3.4	Reponses vibratoires a excitation horizontale . . . . .	92
3.4.1	Fonctions de Reponse Frequentielle . . . . .	93
3.4.2	Repetabilite . . . . .	95
3.4.3	Interactions modales . . . . .	97
3.5	Mesures vibrometriques locales du frottement . . . . .	99
3.5.1	Vibrometrie laser a balayage . . . . .	99
3.5.2	Mesures vibrometriques 1D, excitation verticale . . . . .	102
3.5.3	Mesures vibrometriques 3D, excitation horizontale . . . . .	103
3.5.4	Interaction modale non-lineaire . . . . .	105
3.6	Conclusion . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Simulation vibratoire non-lineaire d'un assemblage avec des liaisons frottantes</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	114
4.2	Modele Elements Finis de la structure « Harmonie » . . . . .	115
4.2.1	Modelisation des composants elementaires . . . . .	115
4.2.2	Modelisation des liaisons et des conditions aux limites. . . . .	116
4.3	Recalage et validation . . . . .	118

4.3.1	Validation par les expériences à excitation verticale . . . . .	118
4.3.2	Validation par les expériences à excitation horizontale . . . . .	122
4.4	Réduction de modèle . . . . .	125
4.5	Modèle non-linéaire de frottement . . . . .	126
4.5.1	Définition du vecteur d'application de la force non-linéaire . . . . .	126
4.5.2	Modèle de frottement . . . . .	130
4.6	Méthodes numériques pour les simulations non-linéaires . . . . .	132
4.7	Commentaire sur le calcul du mouvement des lames frottantes . . . . .	136
4.8	Comparaisons essai-calcul . . . . .	139
4.8.1	Réponses fréquentielles . . . . .	139
4.8.2	Réponses multi-harmoniques . . . . .	143
4.8.3	Mouvement de glissement des lames . . . . .	145
4.9	Interactions modales . . . . .	149
4.10	Extension des résultats sur modèle complet . . . . .	150
4.11	Conclusion . . . . .	152
<b>Conclusion</b>		<b>155</b>
	Bilan . . . . .	155
	Perspectives . . . . .	156
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>



## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes deux encadrants. Tout d'abord côté CEA, je remercie chaleureusement Jean-Pierre Lambelin. Jean-Pierre est à l'origine de ce projet de recherche, il a effectué un travail préparatoire important puis a suivi et orienté mes travaux au quotidien depuis 3 ans et demi. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec lui, il m'a beaucoup appris. Je suis ainsi très heureux de pouvoir continuer à travailler avec lui après cette thèse.

Je remercie tout aussi chaleureusement Jean-Jacques Sinou, mon directeur de thèse. Même si nous avons travaillé à distance, Jean-Jacques a réussi à suivre de très près mes travaux, à les orienter et à me faire gagner beaucoup de temps par son aide. Il m'a énormément appris au niveau de la communication scientifique. Ça a été un grand plaisir de travailler avec lui et j'espère que nous aurons l'occasion de collaborer à nouveau dans le futur.

Je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse pour leur important travail critique (au bon sens du terme) et tous les conseils et compliments qu'ils ont pu m'adresser le jour de la soutenance.

Il faut ensuite à rendre à César ce qui lui appartient, les travaux présentés dans ce manuscrit sont le fruit de travaux en équipe. Je remercie tout d'abord l'équipe des essais vibratoires du CEA/CESTA qui a réalisé les essais dont les résultats sont exploités ici. La grande qualité des résultats obtenus vient tout d'abord du soin qui a été apporté à la réalisation des essais. Je remercie à ce propos Rémy qui m'a beaucoup aidé à préparer ces essais et à en exploiter les résultats. Je remercie Benoît ainsi que son ancienne doctorante Zoe et son ancien stagiaire Rémy dont les travaux en optimisation non-linéaire ont permis de proposer la méthode de décomposition d'un signal en harmonique qui est présentée au chapitre 2. Je remercie Thomas qui, au cours de son stage de fin d'étude, a appliqué mes travaux à la simulation de la réponse vibratoire de plots en élastomère. Je me réjouis que Thomas ait accepté de poursuivre ces travaux en thèse. Plus généralement je remercie tous les ingénieurs du laboratoire de calcul thermomécanique pour toute l'aide technique qu'ils ont pu m'apporter. Je tiens aussi à remercier mes responsables hiérarchiques au CEA qui ont toujours soutenus mes travaux et qui ont aussi relu avec une grande minutie ce manuscrit.

En dehors des aspects techniques, j'ai beaucoup apprécié ces années de thèse grâce à la très bonne ambiance qui règne dans le laboratoire CEA qui m'a accueilli. Je remercie tous ceux qui contribuent à ce bon état d'esprit.

Je remercie très profondément mes parents et ma grand-mère qui m'ont soutenu et entouré, ces trois dernières années comme les 23 qui les ont précédés. Enfin je remercie Joséphine qui est en grande partie responsable de mon bonheur depuis 2 ans.



## Résumé

Ces travaux de thèse portent sur l'étude expérimentale et numérique des réponses vibratoires non-linéaires des structures mécaniques. Les études expérimentales menées au CEA/CESTA montrent que la réponse des structures assemblées à des sollicitations vibratoires est souvent très fortement dépendante du niveau d'excitation. Ces résultats expérimentaux ne peuvent pas être reproduits en simulation avec la méthode de simulation vibratoire linéaire classique.

L'objectif de ces travaux est de proposer et de mettre en place des méthodes expérimentales et numériques pour étudier ces réponses non-linéaires. Cet objectif passe par l'étude de maquettes d'essai sujettes aux mêmes phénomènes vibratoires non-linéaire que les objets d'étude industriels du CEA/CESTA. Au niveau expérimental, les développements se basent sur les installations et logiciels industriels. Au niveau simulation, les méthodes de simulation vibratoire non-linéaires et les techniques numériques avancées développées depuis de nombreuses années dans le monde académique sont utilisées dans le contexte industriel du CEA/CESTA.

Le premier objet d'étude est une poutre métallique bi-encastree. Cette structure présente une réponse vibratoire non-linéaire d'origine géométrique. La structure est modélisée avec des conditions aux limites non-idéales et sa réponse vibratoire est simulée par trois méthodes (développement multi-échelles, méthode de balance harmonique et méthode de tir). Ces résultats de simulation sont comparés entre eux et avec l'expérience.

La maquette d'étude au cœur de ces travaux de thèse est un assemblage présentant des interfaces frottantes : la maquette « Harmonie ». De nombreux essais vibratoires sont réalisés sur cette maquette afin d'identifier ses modes de résonance et ceux de ses composants, d'étudier l'évolution de la réponse vibratoire de l'assemblage due au frottement et enfin de mesurer le mouvement vibratoire local dans la zone de frottement.

Un modèle numérique de cette structure est ensuite réalisé. Ce modèle est réduit par une méthode de sous-structuration puis des relations non-linéaires de frottement sont introduites au niveau des liaisons frottantes. La réponse vibratoire non-linéaire du modèle obtenu est simulée grâce à la méthode de balance harmonique couplée à des algorithmes de condensation et de continuation. Des comparaisons essai-calcul sont présentées pour les réponses globales et pour les mouvements locaux des liaisons.



## Abstract

This PhD work deals with the experimental and numerical study of mechanical structures' nonlinear vibration response. Experimental studies led at the CEA/CESTA show that jointed structures vibration responses are often strongly dependent on the excitation level. These experimental results cannot be simulated using the classical linear vibration simulation method.

This work aims at proposing and implementing experimental and numerical methods to study nonlinear responses. This objective involves the study of test structures subject to the same non-linear vibratory phenomena as CEA/CESTA industrial structures. Experimentally, developments are based on industrial facilities and softwares. Numerically, nonlinear vibration simulation methods and advanced numerical techniques that have been developed for many years in academia are applied in the CEA/CESTA industrial context.

The first test structure is a clamped-clamped steel beam. This structure has a geometric nonlinear behavior. The structure is modeled with non-ideal boundary conditions and its frequency response is simulated using three different simulation methods (method of multiple scales, the harmonic balance method and a shooting method). These simulation results are compared one with each other and with experimental results.

The test structure at the heart of this work is an assembly with friction joints named "Harmony". Many vibration tests are carried out to identify its resonance modes and those of its components, to study the evolution of the vibration response due to friction and finally to measure the local vibrational movement in the friction zone.

A numerical model is then developed. This model is reduced using a substructuring method and then in the friction zone, linear joints are replaced by nonlinear friction models. The nonlinear vibration response of this reduced model is simulated using the harmonic balance method coupled with condensation and continuation algorithms. Test-simulation comparisons are presented both for global responses and for local joints movements.



# Introduction

## Contexte de l'étude

La dynamique des structures est le domaine qui étudie la réponse de structures mécaniques à des environnements dynamiques. Le but est d'étudier d'une part les contraintes dans la structure elle-même pour déterminer si elle peut être endommagée par un environnement dynamique et d'autre part d'étudier l'environnement dynamique transmis par la structure à des passagers matériels ou humains ou encore au matériel électronique embarqué pour évaluer les dommages qu'ils peuvent subir. Cette discipline est ainsi d'une importance capitale pour les industries aéronautiques et spatiales, et en particulier pour le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives). Les études dynamiques font appel à la fois à des essais et à la simulation. Tous les environnements dynamiques que la structure étudiée peut être amenée à subir au cours de son cycle de vie nominal ou par accident, ne peuvent pas être reproduits en essai pour des questions de coût et de performance des moyens d'essai. La logique mise en place pour garantir la tenue aux environnements dynamiques d'une structure est d'utiliser les essais disponibles pour modéliser la structure numériquement. Lorsque la simulation est à même de reproduire l'ensemble des essais réalisés, on peut considérer qu'elle donnera une bonne estimation de la réponse à des environnements non-testés en essai. La simulation dynamique est ainsi au cœur de la conception et de la garantie des structures aéronautiques.

Les environnements dynamiques sont généralement séparés entre les signaux transitoires (chocs, impacts, chutes, ...) et les signaux stationnaires (signaux périodiques stables au cours du temps). Les travaux de cette thèse se focalisent sur les signaux stationnaires. Les signaux stationnaires correspondent aux excitations qu'une structure aéronautique subit en phase de transport et en vol. Par interaction air-structure, les phases de vol produisent des vibrations stationnaires qui sont dispersées en fréquence. Par interaction avec une autre structure, des excitations sinusoïdales peuvent également intervenir. C'est le cas par exemple en phase de transport si la structure est transportée par un camion qui oscille verticalement à cause d'une route imparfaite. C'est également le cas en vol, par exemple pour un moteur accroché à une aile d'avion : le moteur subit les oscillations verticales de l'aile. Dans ces travaux de thèse, seuls les environnements sinusoïdaux seront étudiés.

Pour étudier la réponse d'une structure à une excitation sinusoïdale, la méthode la plus répandue dans le monde scientifique et industriel est l'analyse modale et le calcul de fonctions de réponse en

fréquence. Cette méthode, qui sera détaillée dans le chapitre 1 de cette thèse, permet de déterminer les fréquences et les niveaux maximum de résonance d'une structure expérimentale ou d'un modèle numérique pour une sollicitation donnée, ainsi que les déformations associées. Selon le principe de couplage essai-calcul, si les fréquences et les niveaux de résonance des essais et du modèle numérique correspondent entre eux, le modèle est représentatif de la structure. Cette approche vibratoire est très efficace et très bien maîtrisée aujourd'hui mais elle se base sur une hypothèse très forte : le niveau de réponse d'une structure est linéairement dépendant du niveau d'excitation. On parle alors de modèle linéaire. En pratique, les essais montrent très souvent une relation non-linéaire entre le niveau d'excitation et le niveau de réponse. On atteint alors la limite de l'analyse vibratoire numérique classique, ce qui est préjudiciable pour la logique de garantie par essai et calcul. Si la dépendance au niveau d'excitation n'est pas correctement prise en compte, la simulation ne peut pas être prédictive pour des niveaux d'excitation non testés en essai. Ce problème a été mis en évidence depuis plusieurs années au CEA/CESTA (Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine). Au cours de sa thèse réalisée entre 2009 et 2012 au CEA/CESTA, Zoe Sigrist [87] a étudié des méthodes d'identification de loi non-linéaires. Cette approche permet de dépasser la limite de l'analyse vibratoire expérimentale en identifiant une loi non-linéaire entre les signaux d'excitation et de réponse. Ces travaux ont permis aux équipes du CEA/CESTA de mieux appréhender les phénomènes vibratoires non-linéaires mais ne permettent pas d'améliorer la modélisation numérique des structures et la prédiction des réponses vibratoires non-linéaires associées.

Par ailleurs, l'analyse modale numérique permet de prédire, en dehors de toute expérience, les fréquences de résonance d'un modèle mais elle ne permet pas a priori d'évaluer la dissipation qui détermine le niveau maximal de résonance. L'analyse vibratoire numérique classique n'est ainsi pas prédictive pour la dissipation qui est pourtant un élément clef lors d'un dimensionnement en dynamique des structures. La littérature scientifique a montré que la dissipation dans les structures assemblées était très généralement localisée dans les liaisons et principalement due à des phénomènes de frottement. De plus, les essais industriels montrent pour les assemblages avec des liaisons frottantes, une dépendance non-linéaire de la réponse vibratoire au niveau d'excitation. L'objectif de cette thèse du côté du CEA est ainsi la prise en compte de phénomènes non-linéaires dans la modélisation dynamique des structures. Cette prise en compte passe par le développement d'une méthode de simulation vibratoire non-linéaire compatible avec les outils de modélisation industriels du CEA. Le phénomène non-linéaire prioritaire à modéliser est alors le frottement puisqu'il est à la fois responsable de réponses non-linéaires et de dissipation. Du côté académique, la simulation des réponses vibratoires non-linéaires est étudiée depuis plusieurs décennies. De nombreuses méthodes de simulation ont été développées puis améliorées au cours du temps. Elles sont désormais compatibles avec des modèles numériques de taille industrielle. Cependant, l'utilisation de ces méthodes et techniques numériques dans l'industrie reste pour le moment encore peu répandue. Si l'industrie a besoin d'utiliser ces méthodes académiques et ces techniques numériques, les développements scientifiques en dynamique vibratoire non-linéaire ont aujourd'hui besoin de cas d'étude industriels pour progresser et évaluer la pertinence de ces approches. Cette thèse se place ainsi à mi-chemin entre académie et industrie. Elle cherche à mettre en pratique les récents développements et techniques numériques avancées en dynamique non-linéaire dans un

contexte industriel. Elle permet d'illustrer les possibilités de ces techniques, en particulier au niveau de la prédiction de la réponse dynamique des systèmes complexes. Ce travail ouvre ainsi la voie à une maîtrise accrue des marges de dimensionnement.

## Plan de la thèse

Le premier chapitre détaille les notions qui ont été mentionnées dans cette introduction. Les méthodes d'analyse modale numérique et expérimentale sont présentées puis les phénomènes non-linéaires expérimentaux mis en évidence sur des exemples concrets. Ensuite ce chapitre présente une revue des méthodes de simulation en dynamique non-linéaire. Pour pouvoir appliquer ces méthodes à des modèles industriels qui conduisent à des systèmes de plusieurs centaines de milliers d'équations non-linéaires, il convient de réduire la taille du problème non-linéaire posé. Dans la dernière partie de ce chapitre bibliographique, certaines méthodes de réduction du modèle sont présentées.

Les chapitres suivants correspondent aux développements originaux de ces travaux de thèse. Tout d'abord, plusieurs méthodes de simulation vibratoire non-linéaire ont été appliquées à un cas d'étude académique avec une comparaison à l'expérience. La structure étudiée est une poutre métallique bi-encastree. Cette structure est sujette à une non-linéarité de type géométrique qui a été de nombreuses fois étudiée dans la littérature scientifique. Une maquette constituée d'une poutre de section régulière et de deux blocs d'encastrement a été fabriquée puis testée. Un modèle analytique de la poutre avec des conditions aux limites non-idéales est développé. Le problème non-linéaire obtenu est traité par une méthode de simulation analytique et par deux méthodes numériques (méthode de balance harmonique et méthode de tir). Ces méthodes sont comparées entre elles et à l'expérience. Ce cas d'étude a permis de développer une méthode d'analyse des réponses fréquentielles multi-harmoniques avec d'une part un outil de traitement des signaux expérimentaux et d'autre part le calcul numérique par la méthode de balance harmonique. Ces travaux ont donné lieu à une publication [11]. Enfin ce chapitre 2 montre comment ces résultats sur une non-linéarité géométrique peuvent être obtenus directement à partir d'un modèle éléments finis de la structure. Ainsi, au delà d'un cas d'application introductif à ces travaux de thèse, ce chapitre présente une méthode de simulation vibratoire non-linéaire générale qui permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques associées à n'importe quelle structure.

Le chapitre 3 présente les résultats expérimentaux obtenus sur un assemblage plus complexe qui constitue le cœur de la thèse : la maquette « Harmonie », développée au CEA/CESTA. Cet assemblage contient quatre liaisons dans lesquelles du frottement se déclenche à fort niveau d'excitation. Des expériences vibratoires à faible et fort niveau d'excitation ont été réalisées. Deux directions d'excitation ont été testées : l'une verticale et l'autre horizontale. Les résultats de mesures sont présentés à plusieurs niveaux. Tout d'abord la réponse globale de la structure en accélération est présentée. Ensuite, l'étude des réponses vibratoires multi-harmoniques introduite au chapitre 2 est appliquée ici. Enfin, une étude locale du mouvement de frottement est proposée grâce à des mesures par vibrométrie laser à balayage.

Le chapitre 4 présente la méthode de modélisation, de simulation et les résultats obtenus dans le cadre de l'étude numérique de la structure « Harmonie ». La démarche de simulation se veut la plus générale possible pour un assemblage comprenant des non-linéarités localisées dans des liaisons. Elle est appliquée ici avec un modèle de frottement. Cette démarche inclut des étapes de modélisation, de recalage puis de réduction de modèle éléments finis. Ensuite la loi de liaison non-linéaire est introduite, et le système non-linéaire posé est résolu par une méthode de simulation basée sur la méthode de balance harmonique. Les résultats obtenus sont comparés à l'expérience et les paramètres de liaison sont recalés. La comparaison essai-calcul peut alors se faire avec l'ensemble des résultats expérimentaux présentés au chapitre 3. Enfin la démarche de simulation proposée se termine par une procédure permettant de calculer les champs de contraintes associées aux réponses vibratoires non-linéaires. La démarche de modélisation et simulation ainsi que les résultats expérimentaux et numériques associés à « Harmonie » sous excitation verticale ont fait l'objet d'une publication [12].

# Chapitre 1

## Quelques éléments de dynamique vibratoire linéaire et non-linéaire

*De manière générale un système est dit linéaire s'il produit un signal de sortie proportionnel à un signal d'entrée et que cette loi de transformation linéaire est indépendante du signal d'entrée. Tout système mécanique qui ne répond pas à cette définition est ainsi non-linéaire. L'analyse des systèmes mécaniques se fait à la fois de manière expérimentale et par simulation. La première partie de ce chapitre présente les outils d'analyse de la réponse vibratoire des systèmes linéaires. La seconde partie de ce chapitre présente des phénomènes vibratoires expérimentaux qui sont incompatibles avec les hypothèses de linéarité. Ces observations expérimentales sont à l'origine des développements de modèles vibratoires non-linéaires. La partie 1.3 donne ensuite un aperçu des méthodes de simulation qui ont été développées pour calculer la réponse vibratoire d'un système non-linéaire. Parmi ces méthodes, plusieurs méthodes numériques sont adaptables à des modèles éléments finis, mais elles sont assez généralement coûteuses en temps de calcul. Pour réduire ce temps de calcul, on cherche à réduire le nombre de degrés de liberté du système non-linéaire. La dernière partie de ce chapitre s'intéresse ainsi aux méthodes de réduction de modèle.*

## 1.1 Dynamique vibratoire linéaire

Cette partie présente les méthodes d'analyse modale à la fois numérique et expérimentale. On partira d'une description spatiale discrète d'un système mécanique : l'état du système est décrit par un vecteur position  $\mathbf{x}$  et un vecteur vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  dont chaque coordonnée correspond à un degré de liberté (DDL) du système. On note  $n$  la dimension du système. Dans le cadre d'une modélisation mécanique linéaire, l'équation de la dynamique du système s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.1)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont nommées respectivement matrices de masse, amortissement et raideur du système.  $\mathbf{F}_{\text{excit}}$  est la force excitatrice. Ces matrices résultent de la définition du problème et, généralement, dans l'industrie, le problème est formulé par éléments finis [33].

La réponse à une force  $\mathbf{F}_{\text{excit } 1}$  est notée  $\mathbf{x}_1$  et la réponse à une force  $\mathbf{F}_{\text{excit } 2}$  est notée  $\mathbf{x}_2$ . Le système est dit linéaire si la réponse à toute combinaison linéaire de ces forces  $\alpha \mathbf{F}_{\text{excit } 1} + \beta \mathbf{F}_{\text{excit } 2}$  est la combinaison linéaire correspondante des réponses :  $\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$ .

Pour étudier la réponse fréquentielle du système, il convient de considérer le cas d'une excitation sinusoïdale à la pulsation  $\Omega$  et de calculer la réponse  $\mathbf{x}$  en fonction de  $\Omega$ .

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \mathbf{F}_{\text{excit}} \exp(i\Omega t) \quad (1.2)$$

Comme le système est linéaire, la réponse  $\mathbf{x}$  est proportionnelle au signal d'entrée ;  $\mathbf{x}$  s'écrit ainsi sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \exp(i\Omega t) \quad (1.3)$$

La réécriture du problème (1.1) avec cette expression de l'excitation fait apparaître une raideur dynamique :

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.4)$$

La réponse fréquentielle est maximale lorsque la raideur dynamique est minimale, on parle dans ces cas de résonance. L'objectif de la dynamique vibratoire linéaire est principalement de caractériser ces résonances. Pour ce faire, une démarche classique est l'utilisation de l'analyse modale.

### 1.1.1 Analyse modale numérique

Pour un modèle donné, on parle de résonance du système pour les solutions stationnaires non-nulles de l'équation sans amortissement ni excitation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \exp(i\Omega t) \quad (1.6)$$

Il s'agit alors de déterminer les couples  $(\Omega, \Phi)$  solutions de l'équation :

$$-\Omega^2 \mathbf{M} \Phi + \mathbf{K} \Phi = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

En considérant une structure non-libre, isostatique ou hyperstatique pour laquelle tous les degrés de liberté sont associés à une masse, cette dernière équation peut être reformulée sous forme d'équation aux valeurs propres :

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \Phi \quad (1.8)$$

Il existe  $n$  solutions indépendantes de cette dernière équation  $(\Omega_i, \Phi_i)_{i=1..n}$  qui définissent les modes propres de la structure. Il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre en pratique ce problème aux valeurs propres [33]. Les  $\Omega_i$  sont les pulsations propres et les  $\Phi_i$  sont les formes propres, les unes comme les autres sont indépendantes de la force excitatrice du système  $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ . En faisant une projection modale, on diagonalise les matrices de l'équation de la dynamique (1.1) :

$${}^T \Phi_i \mathbf{M} \Phi_i = 1 \quad (1.9)$$

$${}^T \Phi_i \mathbf{K} \Phi_i = \Omega_i^2 \quad (1.10)$$

$\Omega_i$  sont les pulsations propres.

La matrice d'amortissement est généralement choisie de sorte qu'elle soit diagonalisée par projection modale. Les formes les plus courantes sont :

– l'amortissement de Rayleigh :

$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes réelles choisies ou calculées pour représenter un amortissement modal équivalent pour deux modes à des pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . L'amortissement modal équivalent pour le  $i^{\text{ème}}$  mode s'écrit :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \alpha \Omega_i + \frac{\beta}{\Omega_i} \right)$$

– les séries de Caughey ( $N=2$  correspond au modèle de Rayleigh) :

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot \left( \sum_{k=0}^{N-1} a_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^k \right)$$

où les coefficients  $a_k$  sont estimés pour représenter un facteur d'amortissement  $\xi_i$  pour  $N$  modes. L'amortissement modal équivalent pour le  $i^{\text{ème}}$  mode s'écrit :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{\Omega_i} + a_1 \Omega_i + a_2 \Omega_i^3 + \dots + \Omega_{N-1}^{2N-3} \right)$$

Dans les deux cas présentés précédemment, la projection de la matrice d'amortissement  $\mathbf{D}$  sur les vecteurs propres  $\Phi$  est une matrice diagonale dont les coefficients définissent les coefficients d'amortissement modaux  $\xi_i$  :

$${}^T \Phi_i \mathbf{D} \Phi_i = 2 \xi_i \Omega_i \quad (1.11)$$

Ainsi, la projection modale diagonalise l'équation (1.1) et permet de la résoudre directement :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m q_i \Phi_i \quad (1.12)$$

$$q_i = \frac{{}^T \Phi_i \mathbf{F}_{\text{excit}}}{-\Omega^2 + 2i \xi_i \Omega \Omega_i + \Omega_i^2} \quad (1.13)$$

${}^T \Phi_i \mathbf{F}_{\text{excit}}$  sont les coefficients de participation modale ( ${}^T$  désigne le vecteur transposé). Ces pulsations et formes propres caractérisent entièrement la réponse vibratoire du système décrit par l'équation (1.1).

### 1.1.2 Analyse modale expérimentale

D'un point de vue expérimental, la structure testée peut être considérée comme un système mécanique dont les degrés de liberté sont les voies de mesure des capteurs. On note de nouveau  $\mathbf{x}$  le vecteur de déplacement expérimental. L'analyse modale expérimentale consiste à identifier les formes et les pulsations propres d'un système linéaire dont la réponse serait celle qui est mesurée. On note  $\mathbf{H}$  la fonction de transfert entre l'excitation et la réponse :

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}(\Omega) \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.14)$$

L'équation (1.13) nous montre que toute fonction de transfert entre un point d'excitation et un point de réponse s'écrit comme un quotient de polynômes en  $\Omega$  :

$$\mathbf{H}(\Omega) = \frac{\sum_i {}^T \Phi_i \mathbf{F}_{\text{excit}} \prod_{k \neq i} (-\Omega^2 + 2i \xi_k \Omega \Omega_k + \Omega_k^2)}{\prod_k (-\Omega^2 + 2i \xi_k \Omega \Omega_k + \Omega_k^2)} \quad (1.15)$$

$\mathbf{H}(\Omega)$  est aussi dénommée fonction de réponse fréquentielle (FRF).

L'une des méthodes les plus répandues pour l'analyse modale expérimentale est la méthode du polynôme fréquentiel de référence [67]. Cette méthode consiste à optimiser les paramètres  $\Phi_i$ ,  $\Omega_i$  et  $\xi_i$  afin que l'expression analytique (1.15) soit la plus proche possible des mesures expérimentales, au sens des moindres carrés.

Cette méthode est très efficace et permet une excellente analyse des résultats expérimentaux mais elle suppose une fonction de transfert expérimentale linéaire. La partie suivante illustre les limites de cette hypothèse linéaire par des phénomènes observés expérimentalement.

## 1.2 Réponses vibratoires non-linéaires

### 1.2.1 Phénomènes observés

Dans la réponse expérimentale des structures réelles, plusieurs phénomènes ne peuvent pas être traduits par une modélisation linéaire. L'un des phénomènes les plus couramment observés dans les études

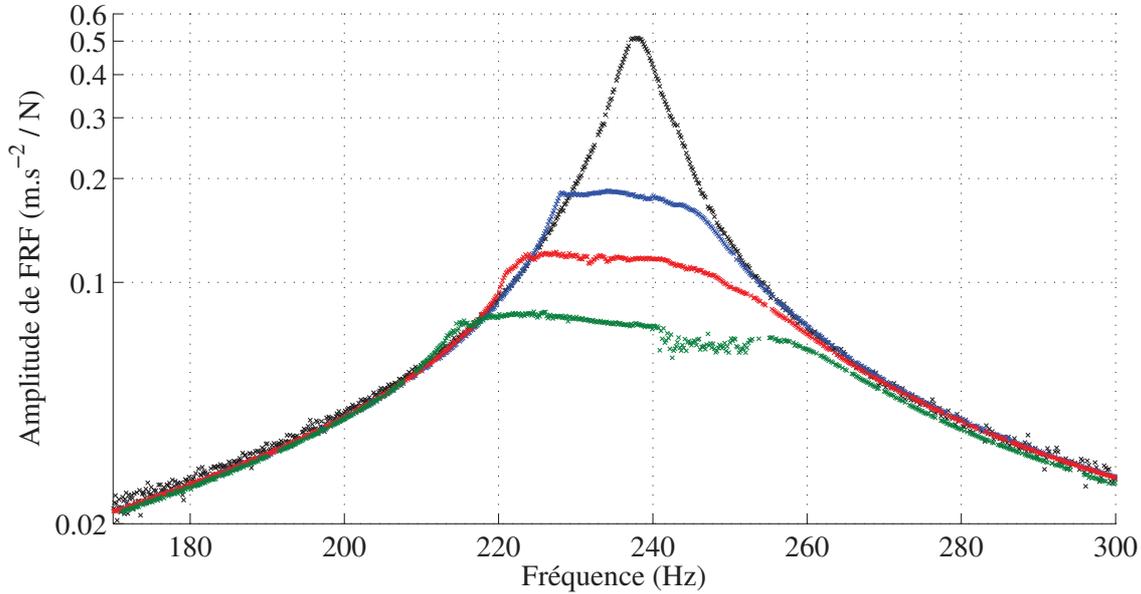


FIG. 1.1: FRF expérimentales mesurées sur la structure « Harmonie » (voir chapitre 3) pour des niveaux d'excitation croissants. Les niveaux sont 70 N (noir), 1070 N (bleu), 1875 N (rouge) et 2910 N (vert).

industrielles est la dépendance de l'amortissement au niveau d'excitation. Dans un cadre linéaire, le niveau maximal de réponse à la résonance est fixé par l'amortissement et est linéairement dépendant du niveau d'excitation. La fonction de réponse fréquentielle, qui correspond à un signal de réponse divisé par le signal d'excitation, est ainsi indépendante du niveau d'excitation. La figure 1.1 présente la fonction de réponse fréquentielle expérimentale de la structure industrielle « Harmonie » qui fait l'objet des chapitres 3 et 4 de ce mémoire de thèse. Les mesures correspondantes à quatre niveaux d'excitation sont tracées. On observe un aplatissement très marqué du pic de résonance. Ce phénomène traduit une augmentation de la dissipation de la structure avec le niveau d'excitation, ce qui est incompatible avec une modélisation linéaire.

De manière analogue, les fréquences de résonance des structures peuvent évoluer avec le niveau d'excitation. La figure 1.2 présente des courbes de réponse fréquentielle de la poutre bi-encastée qui sera étudiée au chapitre 2. La fréquence de résonance observée à faible niveau d'excitation est de 107.5 Hz, elle passe à 113.5 Hz à fort niveau d'excitation. Il s'agit ici d'un phénomène de raidissement, tout se passe comme si la raideur du système augmentait avec le niveau d'excitation. Ce phénomène dépasse là encore le cadre de la dynamique linéaire.

Sur ce même cas d'étude, on observe une discontinuité de la fonction de réponse fréquentielle. Au niveau de la résonance, un changement incrémental de la fréquence d'excitation entraîne une chute

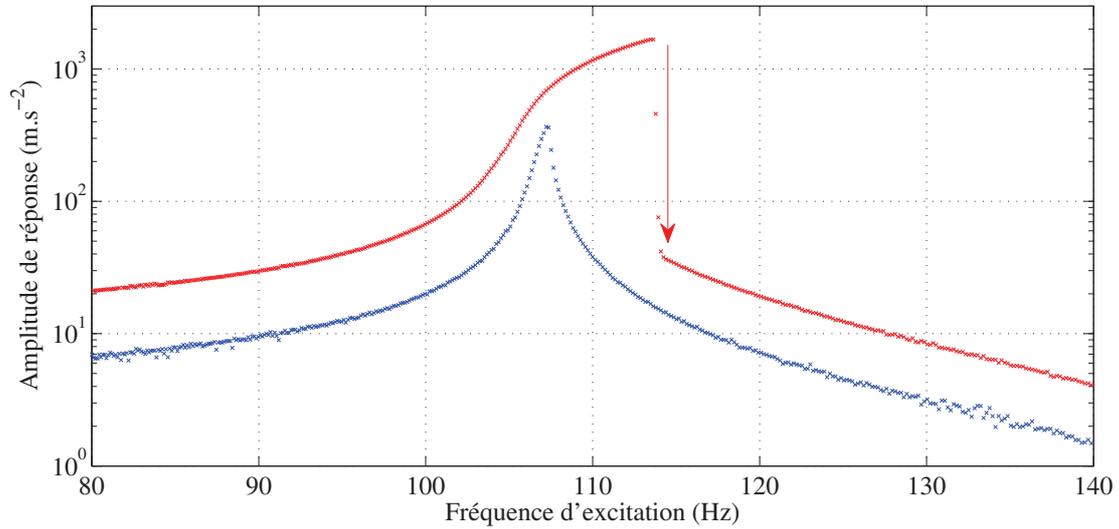


FIG. 1.2: Réponses fréquentielles expérimentales mesurées sur une poutre bi-encastree (voir chapitre 2). Les niveaux d'excitation, en accélération d'entraînement, sont  $1 \text{ m.s}^{-2}$  (courbe bleue) et  $6 \text{ m.s}^{-2}$  (courbe rouge). Expérience réalisée en sinus balayé montant.

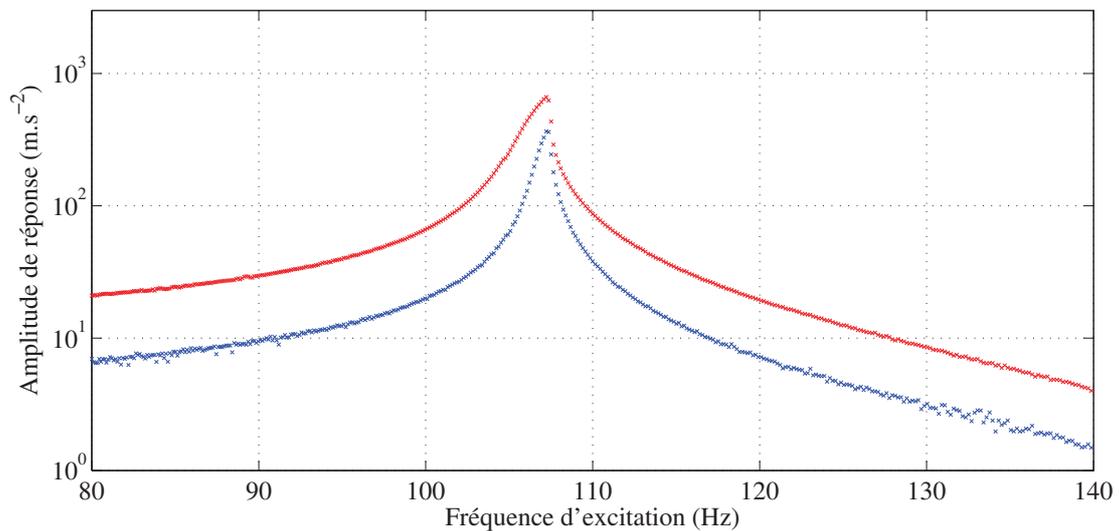


FIG. 1.3: Réponses fréquentielles expérimentales mesurées sur une poutre bi-encastree. L'expérience est réalisée cette fois-ci en sinus balayé descendant.

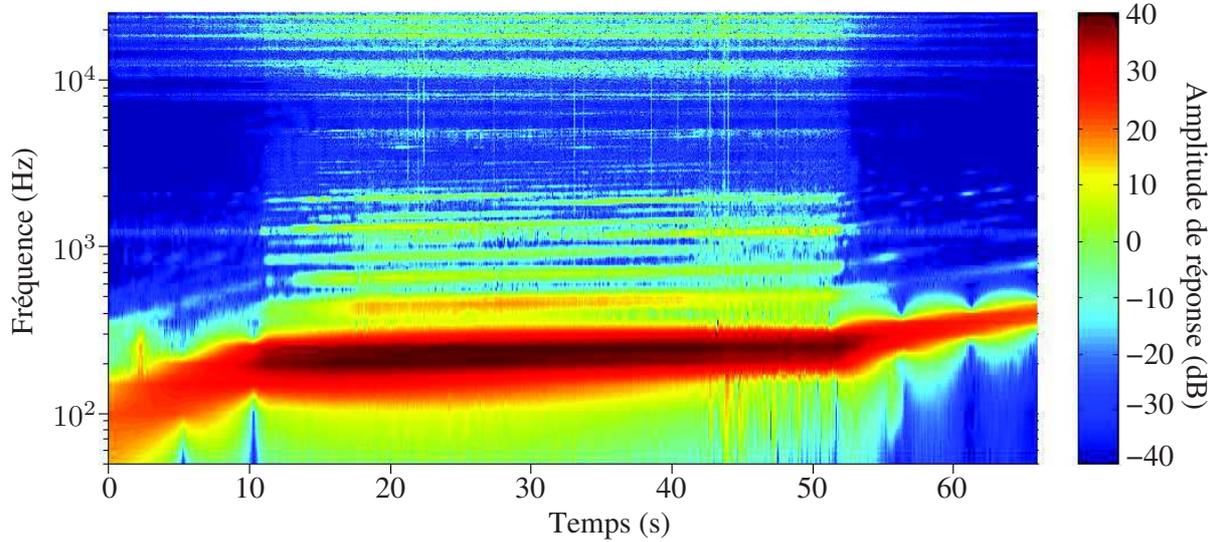


FIG. 1.4: Diagramme temps-fréquence obtenu pour le signal de réponse d'une expérience de sinus balayé sur la structure « Harmonie ». L'amplitude de réponse affichée est une accélération exprimée en dB, référencée à  $1 \text{ m.s}^{-2}$ .

très importante du niveau de réponse. Sur la figure 1.2, le niveau de réponse diminue d'un facteur 100. C'est un phénomène de « saut » qui est illustré par la flèche. La figure 1.3 présente les résultats des mêmes essais que la figure 1.2 mais en parcourant cette fois-ci la plage d'excitation fréquentielle des hautes fréquences vers les basses. La fréquence de résonance à fort niveau d'excitation est alors différente :  $107.5 \text{ Hz}$  au lieu de  $113.5 \text{ Hz}$ . La fonction de réponse fréquentielle dépend ainsi de l'historique d'excitation de la structure, il s'agit d'un phénomène hystérétique.

Un autre phénomène non-linéaire peut également être observé au cours d'essais vibratoires de structures assemblées. Il s'agit de l'apparition de signaux harmoniques d'ordres supérieurs. Lorsqu'une structure est excitée par un signal sinusoïdal, une modélisation linéaire du système nous fait supposer une réponse sinusoïdale de même pulsation  $\Omega$ . En pratique, au voisinage des résonances, en plus d'un signal principal à  $\Omega$  on observe l'apparition de signaux aux harmoniques supérieures : à  $2\Omega$ ,  $3\Omega$ , etc. Ce phénomène est illustré par la figure 1.4. Il s'agit d'un diagramme temps-fréquence d'un signal de réponse expérimental de la structure « Harmonie » (qui fera l'objet du chapitre 3). Au cours de cette expérience, la structure est soumise à une excitation en « sinus balayé », c'est-à-dire à une force d'excitation sinusoïdale dont la fréquence varie lentement de  $100 \text{ Hz}$  à  $400 \text{ Hz}$ . La vitesse de balayage est de  $10 \text{ Hz.s}^{-1}$ , elle est réduite à  $1 \text{ Hz.s}^{-1}$  entre  $210 \text{ Hz}$  et  $250 \text{ Hz}$  pour être sûr de limiter les mesures à des phénomènes stationnaires au voisinage de la résonance. La figure 1.4 présente l'évolution au cours du temps du contenu fréquentiel de la réponse mesurée. La raie principale est bien la réponse harmonique qui évolue de  $100 \text{ Hz}$  à  $t=0$  jusqu'à  $400 \text{ Hz}$  à  $t=70\text{s}$ . Les ruptures de pente à  $t=11\text{s}$  et  $t=51\text{s}$  corres-

pondent aux changements de vitesse de pilotage. Dans la plage autour de la résonance (entre  $t=11s$  et  $t=51s$ ), des raies secondaires d'amplitude non-négligeable s'ajoutent à la raie principale. Il s'agit de contributions aux pulsations  $2\Omega$ ,  $3\Omega$ , etc. Ces contributions ne peuvent pas non plus s'expliquer par une modélisation linéaire.

L'apparition de signaux de réponse aux harmoniques d'ordres supérieurs traduit un transfert d'énergie depuis l'harmonique principale. Lorsqu'on excite la structure au voisinage d'un de ces modes propres, beaucoup d'énergie se déploie selon ce mode principal. Les transferts d'énergie non-linéaire peuvent alors être importants et exciter d'autres modes de résonance de la structure. On parle alors de résonance interne ou d'interaction modale (voir [63] et références associées). Lorsque l'énergie du mode principal sollicite une résonance à l'harmonique  $n$ , il s'agit d'une résonance  $1:n$ . Les interactions modales sont étudiées depuis plusieurs décennies. Elles ont tout d'abord été étudiées sur des systèmes avec peu de degrés de liberté. Dans [30] une interaction modale  $1:2$  est étudiée au niveau expérimental et numérique sur un système à deux degrés de liberté. L'interaction modale  $1:2$  a permis en particulier d'expliquer un phénomène indésirable de roulis à bord des bateaux, que les marins connaissaient depuis des siècles [62]. Beaucoup de travaux ont étudié l'apparition d'interactions modales dues à des non-linéarités géométriques sur des structures continues telles que des poutres, des plaques ou des coques [63]. Parmi ces travaux, Touzé, Thomas et Chaigne ont étudié au niveau théorique [98] et expérimental [99] un phénomène d'interaction modale  $1:1$  entre deux modes jumeaux d'une plaque circulaire libre. Un phénomène analogue a été trouvé au cours de ces travaux de thèse, il est présenté aux chapitres 3 (section 3.4.3) et 4 (section 4.9). Des interactions modales multiples, faisant intervenir plus que deux modes peuvent être mises en évidence. Des interactions modales entre trois modes ont été mises en évidence sur des coques minces accordées comme des instruments de musique [95, 96, 57, 56].

Pour résumer, les phénomènes non-linéaires principaux qui ont été observés expérimentalement sur des structures réelles au cours de ces travaux sont :

- la dépendance de l'amortissement au niveau d'excitation,
- la dépendance des fréquences de résonance au niveau d'excitation,
- les réponses fréquentielles discontinues,
- les phénomènes d'hystérésis,
- l'apparition de réponses harmoniques d'ordres supérieurs,
- les interactions modales.

Ces observations expérimentales justifient la nécessité de passer à une modélisation non-linéaire des structures dans le cadre de l'analyse vibratoire pour pouvoir comprendre et simuler ces phénomènes. La partie suivante présente les origines principales de ces phénomènes non-linéaires.

### 1.2.2 Origine des non-linéarités

Les réponses vibratoires non-linéaires trouvent leur origine dans un très grand nombre de phénomènes physiques. Ces phénomènes peuvent généralement se classer dans l'une des grandes catégories suivantes :

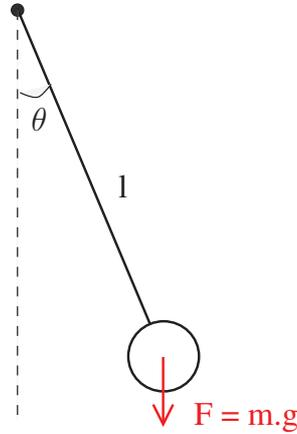


FIG. 1.5: Le pendule simple, exemple d'oscillateur soumis à une force non-linéaire géométrique.

- non-linéarités géométriques de grands déplacements,
- lois de comportement matériau non-linéaires,
- phénomènes de contact et frottement aux interfaces,
- couplages multi-physique.

Au niveau des non-linéarités d'origine géométrique, l'exemple le plus classique est probablement celui du pendule simple présenté en particulier dans l'ouvrage « Nonlinear Oscillations » de Nayfeh et Mook [64]. Le problème du pendule simple est illustré par la figure 1.5. L'équation de la dynamique de ce système non-amorti est :

$$m l \ddot{\theta} + m g \sin(\theta) = 0 \quad (1.16)$$

Si on approxime  $\sin(\theta)$  au premier ordre, on obtient un système linéaire. À l'ordre suivant, on obtient un terme cubique. L'équation de la dynamique devient alors une équation de Duffing [44]. Sans approximation, on peut écrire le système sous la forme générique suivante :

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2 \theta = F_{nl}(\theta) \quad (1.17)$$

avec  $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$  et  $F_{nl}(\theta) = \Omega_0^2 (\theta - \sin(\theta))$

On comprend alors que le caractère non-linéaire de l'équation ne se manifeste que si  $\theta$  est suffisamment grand. Au-delà de cet exemple académique, les non-linéarités géométriques se manifestent également dans les structures industrielles, en particulier dans les ailes d'avions [22] et dans les structures de génie civil telles que les ponts [51]. Le chapitre 2 est intégralement consacré à l'étude d'un exemple concret de système mécanique soumis à une force non-linéaire géométrique : une poutre bi-encastée.

Les forces non-linéaires peuvent également être dues aux matériaux : des lois de comportement viscoélastiques ou élasto-plastiques ne peuvent pas être linéarisées au-delà d'une certaine amplitude



FIG. 1.6: Schéma d'une interface de contact sphère-plan et loi de Hertz en force-déplacement.

de déplacement et de vitesse. De même les alliages à mémoire de forme [102] ou certains matériaux composites n'ont pas un comportement linéaire en raideur ni en amortissement.

Dans les assemblages, les liaisons sont la cause de beaucoup de phénomènes non-linéaires. Les zones de contacts sont le lieu de phénomènes de contacts non-permanents, d'écrasements de la zone de contact et également de phénomènes de frottement. La figure 1.6 présente une loi non-linéaire de force en fonction du déplacement adaptée au cas d'une boule en contact avec un plan. Lorsque le contact est établi, la loi de Hertz permet de prendre en compte l'évolution de la raideur de contact en fonction de l'écrasement de la boule au niveau de la zone de contact. Cette raideur n'est pas linéaire mais durcissante : plus la boule est compressée, plus il est difficile de la compresser. La loi d'Hertz est une loi puissance d'exposant  $3/2$  pour les billes et  $9/10$  pour les cylindres. De plus, au cours de vibrations, le contact peut être rompu. En nommant  $\delta$  l'enfoncement de la boule par rapport au plan, la loi de comportement en raideur en fonction de  $\delta$  est discontinue. Sur la figure 1.6 cette discontinuité est représentée par la rupture de pente en  $\delta = 0$ . Des réponses vibratoires non-linéaires dues à une non-linéarité de type « contact non-permanent » ont été observées expérimentalement et publiées par Noël et al. [66]. Cette étude porte sur un satellite industriel qui contient des liaisons à butées. Les butées induisent une force bilinéaire qui est à l'origine de nombreux phénomènes non-linéaires. Les résultats expérimentaux sont par ailleurs retrouvés qualitativement par simulation avec une modélisation de ces butées [76].

Pour finir, l'accroche au niveau d'un contact peut être rompue et donner lieu à du frottement. La figure 1.7 présente une loi de frottement classique : la loi de Coulomb. Cette loi comporte deux états : un état d'accroche et un état de glissement. L'état de glissement se déclenche lorsque le rapport entre la force tangentielle  $F_T$  et la force normale  $F_N$  dépasse le seuil de Coulomb  $\mu_{Coulomb}$ . Lors du glissement, le point de contact  $x_P$  se déplace de sorte que la force de contact tangentielle dans la liaison reste constante. Avec les notations de la figure 1.7, le mouvement est alors décrit par les équations suivantes :

$$F_T = k(x - x_P) \tag{1.18}$$

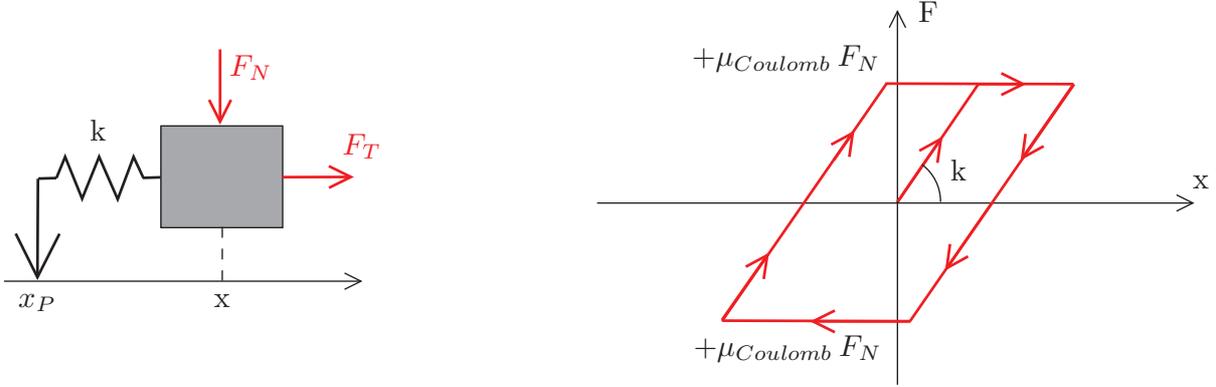


FIG. 1.7: Schéma d'une interface de frottement et loi de Coulomb en force-déplacement.

$$\begin{cases} \dot{x}_P = 0, & \text{si } |F_T| < \mu_{Coulomb} F_N & \text{(état d'accroche)} \\ \dot{x}_P = \dot{x}, & \text{si } |F_T| = \mu_{Coulomb} F_N & \text{(état de glissement)} \end{cases} \quad (1.19)$$

Le graphique force-déplacement de la figure 1.7 présente l'évolution de la force dans la liaison au cours d'un mouvement périodique, en partant de  $(x, F_T) = (0, 0)$ . Le mouvement, qui correspond aux équations (1.18) et (1.19), est hystérétique : une même position est associée à deux forces  $F_T$  selon le sens de la vitesse.

Il est par ailleurs possible de coupler les forces non-linéaires de frottement et de contact normal non-permanent. La réponse vibratoire d'un assemblage modélisé avec une telle liaison est présentée en particulier par Süß [91].

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude respectivement expérimentale et numérique d'un assemblage avec des liaisons frottantes. Le frottement y est modélisé par une loi de Coulomb.

### 1.3 Méthodes de simulation vibratoire non-linéaires

Pour retranscrire par la simulation ces phénomènes non-linéaires, il faut introduire dans l'équation dynamique du système une force non-linéaire. De manière très générale, l'équation dynamique d'un système mécanique non-linéaire discret peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{excit} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1.20)$$

On suppose que le système étudié est isostatique ou hyperstatique et que chaque degré de liberté est associé à une masse. Ainsi les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont inversibles. Par la suite on s'intéressera exclusivement à la réponse vibratoire forcée de tels systèmes non-linéaires. L'excitation est sinusoïdale, de pulsation  $\Omega$  qui parcourt une plage de fréquence pour laquelle on souhaite établir la réponse fréquentielle du système. On cherche la réponse stationnaire du système. Cette réponse peut être

périodique, apériodique ou chaotique. Dans le cadre de ces travaux, on ne s'intéressera qu'aux réponses périodiques.

Pour trouver les solutions périodiques de l'équation non-linéaire (1.20) avec une excitation sinusoïdale, plusieurs méthodes ont été développées [64, 101]. Parmi elles nous présenterons brièvement dans cette partie celles qui sont basées sur une stratégie de résolution temporelle (partie 1.3.1), les méthodes perturbatives (partie 1.3.2), la méthode de balance harmonique (partie 1.3.3) et la méthode de collocation (méthode 1.3.4). D'autres méthodes ne seront pas présentées ici parce que peu utilisées dans la littérature scientifique et dans le monde industriel dans le cadre des études vibratoires. Parmi elles on peut citer la méthode des éléments finis en temps [79]. Une autre option, qui ne sera pas non plus détaillée ici consiste à calculer les modes complexes non-linéaires de l'équation dynamique en régime libre puis à tracer les réponses forcées à partir uniquement de la connaissance de ces modes complexes non-linéaires [47]. La détermination des modes propres non-linéaires nécessite la mise en place d'une méthode de perturbation, d'intégration temporelle ou d'une méthode d'approximation telle que celles présentées dans cette partie. La partie 1.3.5 se concentrera sur les méthodes de continuation qui se couplent aux méthodes de résolution numériques pour permettre de parcourir l'ensemble de la plage des fréquences d'excitation.

### 1.3.1 Méthodes temporelles

Pour les méthodes basées sur une approche temporelle, on réécrit l'équation (1.20) sous forme d'équation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

#### Intégration temporelle directe

À partir d'un état initial  $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , l'équation (1.21) peut être intégrée pour trouver l'état du système à n'importe quel temps  $t > 0$ . D'un point de vue numérique, il faut utiliser un schéma d'intégration temporel couplé à une méthode de résolution non-linéaire.

Les schémas d'intégration consistent à exprimer la dérivée temporelle d'un état à partir de la connaissance des autres états temporels. Les schémas d'intégration se séparent en 2 grandes catégories :

- les schémas explicites : l'expression de la dérivée à l'instant  $t_{i+1}$  ne dépend que des états aux instants précédents [21],
- les schémas implicites : l'expression de la dérivée à l'instant  $t_{i+1}$  dépend des états antérieurs et de l'état à l'instant  $t_{i+1}$  lui-même [90].

L'intervalle de temps entre deux instants est noté  $h$  :

$$h = t_{i+1} - t_i \quad (1.22)$$

Cet intervalle peut être constant ou variable selon le schéma d'intégration choisi, par la suite, il sera considéré constant, sans perdre la généralité du propos. L'état du système à l'instant  $t_i$  est noté avec

un indice  $i$  :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t_i) \\ \dot{\mathbf{x}}(t_i) \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

Tout schéma d'intégration peut s'écrire comme une combinaison linéaire des valeurs du vecteur d'état aux instants précédents et actuel :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad (1.24)$$

Beaucoup de schémas d'intégration existent. Dans cette partie, seul le schéma générique de Newmark, qui est le schéma le plus utilisé, sera brièvement présenté. Il est paramétré par deux constantes  $\gamma$  et  $\beta$  et par le pas de temps  $h$ . Il est généralement présenté sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i + h \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \\ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

Une fois le schéma fixé, l'état du système à l'instant  $i+1$  est entièrement déterminé par la connaissance de l'état à l'instant  $i$  et par l'accélération à l'instant  $i+1$ . Pour calculer cette accélération  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ , il faut écrire l'équation de la dynamique à l'instant  $i+1$  :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) \quad (1.26)$$

En remplaçant les termes  $\mathbf{x}_{i+1}$  et  $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$  par leur expression donnée par le schéma d'intégration (Eq. 1.25), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \gamma h \mathbf{D} + \beta h^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = & -\mathbf{D}(\dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{K} (\mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i) \\ & + \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dans le cas d'un système linéaire (cas où  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  est nul), l'équation (1.27) est un système linéaire qui permet de déterminer  $\mathbf{x}_{i+1}$ . Dans le cas où  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  est une fonction non-linéaire, le terme non-linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) &= \mathbf{F}_{\text{nl}} \left( \left\{ \mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta h^2 \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right\}, \left\{ \dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma h \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right\} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ainsi, en supposant l'état à l'instant  $i$  connu, on obtient une équation non-linéaire en  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$  :

$$\mathbf{H} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} - \mathbf{F}_{\text{excit}} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = 0 \quad (1.29)$$

Avec

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{D} + \beta h^2 \mathbf{K} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{S}_2 = \left[ \{ \mathbf{K} \} \quad \{ \mathbf{D} + h \mathbf{K} \} \quad \left\{ h(1 - \gamma) \mathbf{D} + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{K} \right\} \right] \quad (1.31)$$

À chaque pas de temps on met alors en place un algorithme de Newton pour résoudre le problème (1.29). L'itération initiale est donnée par la solution du problème linéaire (avec  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  nul) :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(0)} = -\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} + \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.32)$$

Ensuite en notant  $\mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}} \mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right)$  la matrice jacobienne de la fonction  $\mathbf{H}$  par rapport à  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ , la correction de l'algorithme de Newton s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k+1)} = \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} - \left[ \mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}} \mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \right]^{-1} \mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \quad (1.33)$$

Une fois la précision requise atteinte sur la valeur du résidu  $\mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \right)$ , la valeur de  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)}$  est sauvegardée :

$$\text{lorsque } \mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \right) < \varepsilon, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \quad (1.34)$$

Les valeurs de la position et de la vitesse à l'instant  $i+1$  peuvent alors être calculées en suivant le schéma d'intégration (Eq. 1.25) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i + h \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \\ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

L'état du système à l'instant  $i+1$  est alors parfaitement défini. De manière itérative, on progresse ainsi d'instant en instant pour construire la réponse dynamique temporelle de la structure. Les résultats obtenus dépendent des paramètres du schéma d'intégration, du pas de temps  $h$  et de la précision demandée sur l'algorithme de Newton. Il est à noter que des procédures existent pour adapter le pas de temps temporel à l'évolution de l'état  $[\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i]$  afin de minimiser l'erreur d'intégration sans trop allonger le temps de calcul.

L'intégration temporelle permet de calculer la réponse stationnaire d'un système non-linéaire. La façon de procéder la plus directe est de partir d'un état initial arbitraire (usuellement  $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ ) et d'imposer une excitation sinusoïdale de pulsation  $\Omega$  constante. On calcule alors la réponse transitoire du système puis la réponse stationnaire.

Cette méthode directe permet effectivement de calculer une réponse fréquentielle stationnaire du système à la pulsation  $\Omega$ . Elle a l'avantage d'être directement implantée dans les codes éléments finis

commerciaux mais elle a plusieurs inconvénients majeurs. Tout d'abord le temps de calcul peut être extrêmement long si le système est peu amorti parce qu'alors le régime transitoire est très long. Ensuite c'est une réponse stationnaire qui est calculée mais en cas de solution multiples, une seule est accessible alors que le paragraphe 1.2.1 a montré des phénomènes d'hystérésis révélateurs de plusieurs solutions stables.

### Méthode de tir

Pour remédier à ces écueils une méthode « de tir » [68] a été développée. Elle est basée sur l'idée qu'une solution  $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$  est stationnaire si la solution au bout d'une période d'excitation est identique à l'état initial :

$$[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}](t = \frac{2\pi}{\Omega}) = [\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}](t = 0). \quad (1.36)$$

On note  $T$  la période d'oscillation et  $\mathbf{x}_T$  la solution à l'instant  $T$ .

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \mathbf{x}_T = \mathbf{x}(t = T) \quad (1.37)$$

Pour un système dynamique défini, avec un schéma d'intégration fixé, l'évolution de l'état  $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$  ne dépend que de l'état initial  $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$ . Ainsi, en se plaçant à  $t = T$ , si  $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$ , alors l'évolution de l'état  $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$  sur l'intervalle de temps  $[T, 2T]$  sera exactement la même que sur l'intervalle  $[0, T]$ . Dans ce contexte d'intégration temporelle numérique, la condition  $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$  est ainsi une condition nécessaire et suffisante de périodicité de la solution.

Comme l'équation dynamique (Eq. 1.21) et le schéma d'intégration (Eq. 1.24) sont fixés, l'état initial détermine intégralement la solution  $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T]$ . Trouver la solution stationnaire du problème (1.21) revient ainsi à trouver des conditions initiales  $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$  telles que  $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$ . L'équation (1.20) se réécrit ainsi comme un problème d'optimisation non-linéaire :

$$\mathbf{H}(\Omega, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \|[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] - [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]\|^2 = \mathbf{0} \quad (1.38)$$

Cette méthode présente l'avantage que la réponse temporelle du système n'est calculée que sur une seule période du signal d'excitation pour chaque itération. Au lieu d'attendre la fin d'un régime transitoire, on converge directement vers le régime stationnaire. De plus la formulation (1.38), sous la forme d'un problème d'optimisation, permet de mettre en place une méthode de continuation qui sera introduite au paragraphe 1.3.5. La continuation permet de suivre des branches de solution et d'avoir éventuellement accès à plusieurs réponses stationnaires pour une même fréquence d'excitation.

Cette méthode de tir sera utilisée au chapitre 2, paragraphe 2.4.2.

### Méthode des différences finies

La méthode de tir présentée précédemment permet de transformer la recherche de solution périodique de l'équation dynamique en un problème d'optimisation qui utilise l'intégration temporelle. Cependant,

l'intégration temporelle d'un problème non-linéaire fait également intervenir un problème d'optimisation. Il existe une alternative à la logique de la méthode de tir qui permet de regrouper les problèmes d'optimisation en un seul système. Il s'agit de la méthode des différences finies [78].

Le schéma d'intégration est de nouveau supposé fixé. À chaque instant  $t_{i+1}$ , l'intégration temporelle consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant en  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$  :

$$\mathbf{H} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} - \mathbf{F}_{\text{excit}} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

Cette forme, introduite dans le cadre du schéma d'intégration de Newmark, est en réalité généralisable à tout schéma d'intégration. La condition de périodicité s'écrit également en accélération :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 \quad (1.40)$$

Le pas d'intégration est défini comme une fraction de la période :

$$h = \frac{T}{n_T} \quad (1.41)$$

En reprenant l'expression (1.39), le problème complet de recherche d'une solution périodique du schéma d'intégration peut alors s'écrire par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_1 \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_1) \\ \dots \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_{i+1}) \\ \dots \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_{n_T-1}) \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_0 \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_0) \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Il s'agit alors d'un problème à  $3 \cdot n \cdot n_T$  inconnues (avec  $n$  le nombre de degrés de liberté du problème discret). Le système (1.42) contient  $n \cdot n_T$  équations non-linéaires auxquelles on ajoute les relations linéaires du schéma d'intégration :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad \forall i \in [0, n_T - 1] \quad (1.43)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \ddot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad \forall i \in [0, n_T - 1] \quad (1.44)$$

Pour ces relations, la périodicité de la solution est également prise en compte. Si l'indice  $i + 1 - j$  est négatif, il est remplacé par  $i + 1 - j + n_T$ . Il y a ainsi  $2 \cdot n \cdot n_T$  relations supplémentaires. Il s'agit alors d'un problème d'optimisation de taille  $3 \cdot n \cdot n_T$  (la taille du problème non-linéaire est  $n \cdot n_T$ ). Le problème est dépendant de la pulsation  $\Omega$  à travers le pas de temps qui lui est inversement proportionnel ( $h = 2\pi/\Omega$ ). À l'instar du problème d'optimisation obtenu par la méthode de tir (Eq. 1.38), le problème d'optimisation obtenu par la méthode des différences finies peut être traité par une méthode de continuation (voir partie 1.3.5). Une des limites de cette méthode est la taille du système obtenu qui peut s'avérer importante afin d'obtenir une bonne précision. Cette méthode devient peu adaptée lorsque la réponse présente des gradients importants ou des composantes moyenne ou haute fréquence prononcées.

### 1.3.2 Méthodes perturbatives

À l'opposé de l'intégration temporelle en termes de logique de résolution, les méthodes perturbatives permettent de résoudre analytiquement certaines équations dynamiques non-linéaires au voisinage d'une fréquence choisie. Ces méthodes sont détaillées dans les ouvrages d'Ali H. Nayfeh [64, 61], cette partie n'en donne qu'un aperçu. Dans l'ensemble de ce paragraphe, on considèrera des grandeurs adimensionnées, sans pour autant changer de notation pour faciliter la lecture.

Les méthodes de perturbation font l'hypothèse que la solution de l'équation dynamique non-linéaire (1.20) s'écrit comme la superposition de solutions à différentes échelles  $\varepsilon^n$  où  $\varepsilon$  est un petit paramètre adimensionné. Ce petit paramètre représente en particulier l'intensité de la force non-linéaire par rapport à la force de raideur linéaire. On parle de méthodes perturbatives parce qu'il s'agit de perturber la solution du problème linéaire pour qu'elle devienne solution du problème non-linéaire.

Pour un déplacement  $\mathbf{x}$  d'ordre 1, il faut faire l'hypothèse que la force non-linéaire est petite, c'est à dire d'ordre au minimum  $\varepsilon$ . Les méthodes perturbatives proposent de traiter chaque ordre indépendamment. On développe la réponse  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \dots + \varepsilon^n \mathbf{x}_n(t) + o(\varepsilon^n) \quad (1.45)$$

Selon les problèmes on peut également considérer de petits déplacements en  $\mathbf{x}$  et donc  $\mathbf{x}_0(t) = 0$ . La fonction temporelle est également développée en polynôme de  $\varepsilon$ , mais selon les différentes méthodes ce ne sont pas les mêmes variables qui sont développées.

- dans la méthode de Lindstedt-Poincaré, la pulsation  $\Omega$  est développée :

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots + \varepsilon^n \Omega_n + o(\varepsilon^n) \quad (1.46)$$

- dans la méthode des développements multi-échelles, le temps est développé :

$$t = t_0 + \varepsilon t_1 + \dots + \varepsilon^n t_n + o(\varepsilon^n) \quad (1.47)$$

– dans la méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, la phase  $\phi = \Omega t$  est développée :

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \dots + \varepsilon^n \phi_n + o(\varepsilon^n) \quad (1.48)$$

Les trois méthodes induisent des développements analytiques différents mais dans tous les cas, la solution à l'ordre 1 est solution du problème linéaire. Seule l'amplitude complexe de cette réponse  $\mathbf{x}_1$  reste à définir.

Des relations complémentaires sur cette amplitude sont apportées par les équations aux ordres suivants. L'unicité du développement en polynôme de  $\varepsilon$  qui a été introduit, n'est valable que si les ordres suivants ( $\mathbf{x}_2(t)$ ,  $\mathbf{x}_3(t)$ , ...) sont indépendants temporellement de  $\mathbf{x}_1(t)$ . Ainsi, dans les équations dynamiques aux ordres supérieurs à un, les termes de forçage proportionnels à  $\exp(i\Omega_0 t)$  doivent s'annuler entre eux. Cette condition de solvabilité permet de déduire une relation entre l'amplitude de la solution à l'ordre 1 et la fréquence d'excitation. Cette relation est le résultat final de ces méthodes de perturbation ; il s'agit d'une expression analytique de la courbe de réponse fréquentielle. Cette expression analytique permet une fine compréhension de l'effet des termes non-linéaires sur la courbe de réponse fréquentielle. Elle réduit également le temps de calcul numérique à zéro. Cependant, comme la méthode fait l'hypothèse que la pulsation  $\Omega$  se situe au voisinage de la pulsation  $\Omega_0$ , l'expression analytique obtenue n'est valable que dans ce voisinage.

L'utilisation de ces méthodes peut s'illustrer sur l'exemple du pendule autonome présenté en partie 1.2.2. Par exemple, en choisissant d'approximer la fonction non-linéaire sinusoïdale à l'ordre 3, l'équation approchée s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2 \theta - \frac{\Omega_0^2}{6} \theta^3 = 0 \quad (1.49)$$

Le temps est adimensionné par la pulsation  $\Omega$  :

$$\tau = \Omega t \quad (1.50)$$

L'équation (1.49) devient :

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \theta - \frac{1}{6}\theta^3 = 0 \quad (1.51)$$

Dans le cadre de ces méthodes de perturbation, on considère le terme non-linéaire comme petit devant les termes linéaires. Un petit paramètre adimensionné  $\varepsilon$  est introduit et une constante  $\gamma$  telle que :

$$\frac{1}{6} = \gamma\varepsilon \quad (1.52)$$

Dans le cadre de la méthode de Lindstedt-Poincaré, l'angle  $\theta$  et la pulsation  $\Omega$  sont développés en polynôme de  $\varepsilon$  :

$$\theta(\tau) = \theta_0(\tau) + \varepsilon \theta_1(\tau) + o(\varepsilon) \quad (1.53)$$

$$\Omega(\tau) = \Omega_0(\tau) + \varepsilon \Omega_1(\tau) + o(\varepsilon) \quad (1.54)$$

L'équation (1.51) se réécrit :

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2 \frac{d^2(\theta_0 + \varepsilon \theta_1)}{d\tau^2} + (\theta_0 + \varepsilon \theta_1) - \varepsilon \gamma \theta_0^3 + o(\varepsilon) = 0 \quad (1.55)$$

Chaque ordre est alors traité séparément puisque les méthodes perturbatives supposent l'indépendance de chaque ordre :

$$\begin{aligned} \text{Ordre 0} \quad & \frac{d^2\theta_0}{d\tau^2} + \theta_0 = 0 \\ \text{Ordre 1} \quad & \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \theta_1 = -2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) \frac{d^2\theta_0}{d\tau^2} + \gamma \theta_0^3 \end{aligned} \quad (1.56)$$

En considérant que l'on peut choisir l'origine du temps  $\tau$ , la solution de l'ordre 0 peut toujours s'écrire :

$$\theta_0(\tau) = a_0 \cos(\tau) \quad (1.57)$$

Dès lors, l'équation à l'ordre 1 s'écrit :

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \theta_1 = 2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) a_0 \cos(\tau) + \gamma a_0^3 \cos^3(\tau) \quad (1.58)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \theta_1 = 2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) a_0 \cos(\tau) + \frac{3}{4} \gamma a_0^3 \cos(\tau) + \frac{1}{4} \gamma a_0^3 \cos(3\tau) \quad (1.59)$$

Les termes de forçage (à droite de l'équation 1.59) proportionnels à  $\cos(\tau)$  engendrent une solution  $\theta_1$  qui croît en fonction du temps, qui n'est donc pas stationnaire. On parle de termes séculaires. Pour trouver la solution stationnaire du problème, il faut annuler ces termes séculaires. Il s'agit d'une condition de solvabilité qui s'écrit ici :

$$2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right) a_0 + \frac{3}{4} \gamma a_0^3 = 0 \quad (1.60)$$

Ce qui donne l'expression :

$$\Omega_1 = -\Omega_0 \frac{3}{8} \gamma a_0^2 \quad (1.61)$$

Ce résultat lie la pulsation du système autonome à l'amplitude de mouvement, on parle d'équation aux amplitudes. On peut ramener ce résultat dans le domaine dimensionné :

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 = \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} a_0^2\right) \quad (1.62)$$

La courbe correspondante à cette équation est tracée sur la figure 1.8. Il s'agit de la pulsation propre du pendule en fonction de l'amplitude angulaire de son mouvement. Comme il s'agit de la solution du système autonome, on peut parler de mode non-linéaire et pour la courbe représentée sur la figure 1.8 de « backbone curve ».

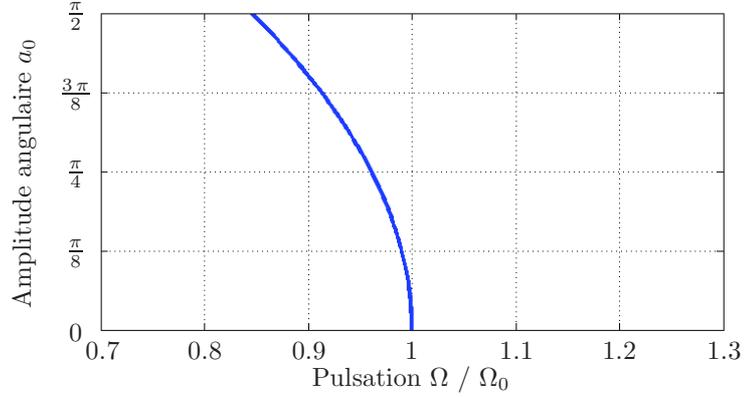


FIG. 1.8: Pulsation propre du pendule en fonction de l'amplitude angulaire de son mouvement. Courbe correspondante à l'équation (1.62).

Une fois l'équation aux amplitudes satisfaite, on peut résoudre complètement le problème à l'ordre 1 :

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \theta_1 = \frac{1}{4}\gamma a_0^3 \cos(3\tau) \quad (1.63)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{32}\gamma a_0^3 \cos(3\tau) \quad (1.64)$$

Ainsi, la solution à l'ordre 1 obtenue par la méthode de Lindstedt-Poincaré est :

$$\theta(t) = a_0 \cos\left(\Omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} a_0^2\right) t\right) + \frac{1}{192} a_0^3 \cos\left(3\Omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} a_0^2\right) t\right) \quad (1.65)$$

Cette solution peut également s'écrire en fonction de la pulsation  $\Omega$  :

$$\theta(t) = 4\sqrt{1 - \frac{\Omega}{\Omega_0}} \cos(\Omega t) + \frac{1}{48} \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{3/2} \cos(3\Omega t) \quad (1.66)$$

Les méthodes perturbatives permettent également de traiter des problèmes plus complexes. La méthode des développements multi-échelles sera mise en œuvre dans le chapitre 2, en partie 2.3, pour traiter le cas d'un système modélisé continûment en espace et soumis à une excitation périodique. La limite principale de ces méthodes est que les développements analytiques obtenus ne sont valables qu'au voisinage d'une pulsation  $\Omega_0$ .

### 1.3.3 Méthode de Balance Harmonique

La méthode de balance harmonique [83] répond au même objectif que la méthode de tir présentée en partie 1.3.1 : calculer la réponse stationnaire de l'équation dynamique non-linéaire (1.20) sans calculer

sa réponse transitoire. Comme c'est une réponse périodique de pulsation  $\Omega$  qui est recherchée, elle est égale exactement à sa série de Fourier :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{B}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{A}_k \sin(k\Omega t)) \quad (1.67)$$

L'idée de la balance harmonique est de tronquer cette série de Fourier et ainsi passer d'une fonction inconnue, continue en temps, à un nombre discret de variables inconnues. Il s'agit d'une approximation de la solution du problème :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{B}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{A}_k \sin(k\Omega t)) \quad (1.68)$$

Les termes d'excitation et non-linéaire sont également écrits dans cette base de Fourier :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{D}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{C}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{S}_k \sin(k\Omega t)) \quad (1.69)$$

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{C}_{k,\text{excit}} \cos(k\Omega t) + \mathbf{S}_{k,\text{excit}} \sin(k\Omega t)) \quad (1.70)$$

Le problème s'écrit alors de manière matricielle entre les coefficients de Fourier :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d & -k\Omega \mathbf{D} \\ k\Omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k,\text{excit}} \\ \mathbf{C}_{k,\text{excit}} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [1, N] \quad (1.71)$$

où  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité.

Il reste désormais à exprimer les coefficients de Fourier de la force non-linéaire ( $\mathbf{S}_k$  et  $\mathbf{C}_k$ ) en fonction des variables ( $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{B}_k$ ). Il existe parfois des relations analytiques entre ces termes mais de manière générale il peut être très difficile, voire impossible, de les déterminer. Une alternative très efficace à la détermination de ces relations analytiques est la méthode dénommée « Alternating Frequency-Time Method » (méthode AFT) [9]. Cette méthode consiste à basculer dans le domaine temporel pour y calculer la force non-linéaire avant de revenir dans l'espace de Fourier. Elle est résumée par le schéma suivant où DFT désigne la transformée de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform) :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_N \mathbf{B}_N] \xrightarrow{DFT^{-1}} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{F}_{\text{nl}}(t) \xrightarrow{DFT} [\mathbf{C}_0 \mathbf{S}_1 \mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_N \mathbf{C}_N] \quad (1.72)$$

On a alors une relation déterministe entre les coefficients de Fourier de la solution  $[\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k]$  et ceux de la force non-linéaire  $[\mathbf{S}_k, \mathbf{C}_k]$ . L'équation (1.20) peut ainsi se mettre sous la forme d'un problème non-linéaire discret qui pourra être traité par une méthode de continuation (voir partie 1.3.5) :

$$\mathbf{H}(\Omega, [\mathbf{B}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_N \mathbf{B}_N]) = \mathbf{0} \quad (1.73)$$

L'utilisation de la méthode de Balance Harmonique peut également être illustrée sur l'exemple du pendule simple. Comme précédemment exposé, en section 1.3.2, le développement à l'ordre 3 de l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2 \theta - \frac{\Omega_0^2}{6} \theta^3 = 0 \quad (1.74)$$

Pour simplifier le propos, et sous réserve de pouvoir choisir l'origine du temps  $t$ , on choisit la décomposition de Fourier suivante (qui est plus lisible ici que l'expression générale donnée par l'équation (1.68)) :

$$\theta(t) = \theta_1 \cos(\Omega t) + \theta_3 \cos(3\Omega t) \quad (1.75)$$

Dès lors :

$$\theta^3(t) = \theta_1^3 \cos^3(\Omega t) + 3\theta_1^2 \theta_3 \cos^2(\Omega t) \cos(3\Omega t) + 3\theta_1 \theta_3^2 \cos(\Omega t) \cos^2(3\Omega t) + \theta_3^3 \cos^3(3\Omega t) \quad (1.76)$$

Dans cette dernière expression, l'idée de la balance harmonique est de se limiter aux termes de pulsation  $\Omega$  et  $3\Omega$ . Les termes de plus haute fréquence sont négligés. Par des formules trigonométriques, on obtient :

$$\theta^3(t) = \frac{3}{4}(\theta_1^3 + \theta_1^2 \theta_3 + 2\theta_1 \theta_3^2) \cos(\Omega t) + \frac{1}{4}(\theta_1^3 + 6\theta_1^2 \theta_3 + 3\theta_3^2) \cos(3\Omega t) \quad (1.77)$$

Ainsi, l'équation (1.77) se décompose entre les composantes aux pulsations  $\Omega$  et  $3\Omega$  :

$$\begin{aligned} \text{À la pulsation } \Omega & \quad -\Omega^2 + \Omega_0^2 - \frac{\Omega_0^2}{8}(\theta_1^3 + \theta_1^2 \theta_3 + 2\theta_1 \theta_3^2) = 0 \\ \text{À la pulsation } 3\Omega & \quad -9\Omega^2 \theta_3 + \Omega_0^2 \theta_3 - \frac{\Omega_0^2}{24}(\theta_1^3 + 6\theta_1^2 \theta_3 + 3\theta_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.78)$$

Ce système peut alors se résoudre par une méthode de Newton. Ici, on peut se passer de la résolution numérique en faisant l'hypothèse  $\theta_1 \gg \theta_3$ . L'équation à la pulsation  $\Omega$  se résume alors à :

$$\Omega^2 - \Omega_0^2 = -\frac{\Omega_0^2}{8} \theta_1^2 \quad (1.79)$$

On obtient alors la même équation aux amplitudes qu'avec la méthode de Lindstedt-Poincaré (voir équation (1.62) et figure 1.8) :

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_1^2}{8}} \simeq \Omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_1^2}{16} \right) \quad (1.80)$$

À la pulsation  $3\Omega$  on obtient également une expression conforme à celle obtenue par perturbation (voir équation (1.64)) :

$$\theta_3 = \frac{\theta_1^3}{192} \quad (1.81)$$

La méthode de balance harmonique est très efficace pour résoudre les problèmes vibratoires non-linéaires discrets. Elle sera largement utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse à la fois sur l'exemple académique d'une poutre métallique bi-encastée (voir chapitre 2) et sur un exemple de structure industrielle avec des liaisons frottantes (voir chapitre 4). Le principal atout de la méthode de

balance harmonique est qu'elle invite l'ingénieur à s'intéresser à l'apparition d'harmoniques et permet ainsi de mettre en évidence des phénomènes de résonance interne qui peuvent être importants dans la réponse de la structure. La principale difficulté vient du choix de la base d'approximation. Le choix du nombre d'harmoniques  $m$  peut s'avérer complexe dans certains cas. Des travaux ont été réalisés par V. Jaumouillé pour adapter automatiquement le nombre d'harmoniques selon le problème traité [36].

### 1.3.4 Méthode de collocation trigonométrique

Tout en restant sur une description de la solution stationnaire du problème dynamique non-linéaire (1.20) sous forme de série de Fourier tronquée, une autre méthode est assez répandue dans la littérature scientifique pour calculer cette solution. Il s'agit d'une adaptation de la méthode de collocation. Le terme « méthode de collocation » désigne une méthode générique de résolution de problèmes continus par une approximation sur une base de solution donnée. La méthode de collocation consiste à écrire l'équilibre du problème approximé sur un nombre d'instants égal à la taille de la base d'approximation.

On peut appliquer cette méthode à l'approximation par série de Fourier (Eq. 1.68) du problème dynamique non-linéaire (1.20). On parle alors de méthode de collocation trigonométrique. La méthode a été introduite et formalisée par Samoilenko et Ronto [80]. L'équilibre du problème est écrit pour  $2N+1$  instants discrets  $t_1, \dots, t_k, \dots, t_{2N+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_1) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t_1) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_1) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t_1), \dot{\mathbf{x}}(t_1)) \\ \dots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_k) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t_k), \dot{\mathbf{x}}(t_k)) \\ \dots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_{2N+1}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t_{2N+1}) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_{2N+1}) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_{2N+1}) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t_{2N+1}), \dot{\mathbf{x}}(t_{2N+1})) \end{array} \right. \quad (1.82)$$

Avec

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t)) \quad (1.83)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^N i k \Omega (\mathbf{A}_k \cos(k\Omega t) - \mathbf{B}_k \sin(k\Omega t)) \quad (1.84)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^N -(k\Omega)^2 (\mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t)) \quad (1.85)$$

Il s'agit ainsi d'un système non-linéaire discret qui peut se résoudre par une méthode de continuation. Le système non-linéaire à résoudre est décrit dans [37]. Nous nous sommes ici limité à  $2N+1$  points de collocation mais pour une meilleure prise en compte des phénomènes non-linéaires, plus de points de collocation peuvent être considérés, il s'agit alors de minimiser un résidu et on parle alors de collocation par moindres carrés.

### 1.3.5 Méthodes de continuation

Les méthodes numériques présentées précédemment, que ce soit la méthode de tir, de balance harmonique ou de collocation mènent toutes à une reformulation du problème dynamique non-linéaire, continu en temps (1.20) sous la forme d'un problème non-linéaire discret de  $n_p$  équations qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \Omega) = \mathbf{0} \quad (1.86)$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur de  $n_p$  paramètres qui permettent de déterminer la réponse temporelle  $\mathbf{x}(t)$ .

Pour tracer une courbe de réponse fréquentielle, il faut trouver les couples  $(\mathbf{X}, \Omega)$  qui minimisent  $\mathbf{H}$  avec la pulsation  $\Omega$  qui varie continument dans un intervalle donné. Comme il s'agit d'un problème d'optimisation non-linéaire, pour chaque recherche d'un couple de solution, l'application d'une méthode de Newton parait la méthode de résolution la plus simple. Cette méthode nécessite un point de départ  $\mathbf{X}_0$ . De plus, en considérant  $\Omega$  comme une variable, on a un problème à  $n_p$  équations et  $n_p+1$  variables, il nous faut donc de plus fixer une variable ou de manière plus générale fixer une direction de descente pour la méthode de Newton. On parle alors de méthode de continuation.

La méthode la plus intuitive, héritée des calculs linéaires, consiste à choisir  $\Omega$ , puis un point de départ simple pour l'algorithme de Newton (tel que  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$ , ou la solution du problème linéaire, ou encore la solution calculée à la pulsation précédente). Il s'agit ensuite de fixer  $\Omega$  pour l'algorithme de Newton, puis une fois la convergence atteinte, réitérer l'opération avec  $\Omega + \Delta\Omega$  et parcourir ainsi la plage de pulsation étudiée.

Selon le type de non-linéarité étudiée, cette stratégie peut échouer. Au-delà des problèmes de convergence, cette stratégie atteint ses limites dans le cas de solutions multiples pour une même fréquence d'excitation. Le phénomène d'hystérésis présenté en partie 1.2.1 montre la réalité de telles solutions multiples. Il faut alors mettre en place des stratégies de continuation plus élaborées. Pour cela, au préalable, on définit une abscisse curviligne  $s$  qui servira à paramétrer la courbe et ainsi quantifier l'écart entre deux points. La longueur d'arc  $\Delta s_{i+1}$  entre deux points  $(\mathbf{X}^{(i)}, \Omega^{(i)})$  et  $(\mathbf{X}^{(i+1)}, \Omega^{(i+1)})$  est donnée par l'expression :

$$\Delta s_{i+1} = \sqrt{(\mathbf{X}^{(i+1)} - \mathbf{X}^{(i)})^2 + \alpha(\Omega^{(i+1)} - \Omega^{(i)})^2} \quad (1.87)$$

$\alpha$  est un coefficient numérique introduit pour prendre en compte la différence d'amplitude entre  $\Omega$  et  $\|\mathbf{X}\|$ . Par ailleurs, on note  $\mathbf{Y}$  le vecteur solution constitué de la variable  $\mathbf{X}$  et de la pulsation  $\Omega$  :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \Omega) \quad (1.88)$$

Le paragraphe suivant présente les méthodes basées sur la logique de prédiction-correction qui sont les plus utilisées dans la littérature scientifique. Une méthode de continuation semi-analytique qui permet de calculer des équations de courbes solution par intervalles sera présentée dans la partie d'après : la Méthode Asymptotique Numérique (MAN).

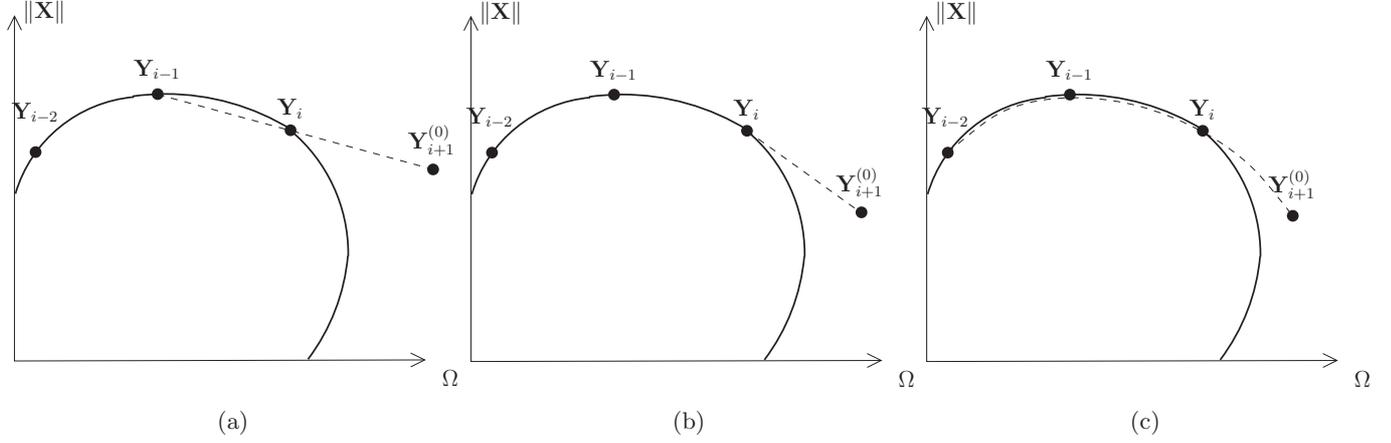


FIG. 1.9: Prédicteurs : (a) sécant (b) tangent et (c) polynomial

### Méthodes de prédiction-correction

Les méthodes de continuation numériques les plus utilisées sont basées sur une stratégie en 2 étapes :

- une étape de prédiction à partir des points précédemment calculés,
- une étape de correction par une méthode de Newton, en spécifiant une direction de descente particulière.

La figure 1.9 présente trois prédicteurs parmi les plus courants.

- la prédiction sécante (voir figure 1.9a) est réalisée sur la droite formée par les deux derniers points calculés :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{Y}_i + \Delta s \frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}}{\|\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}\|} \quad (1.89)$$

- la prédiction tangente (voir figure 1.9b) est réalisée le long de la tangente au dernier point calculé :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{Y}_i + \Delta s \vec{t} \quad (1.90)$$

où la tangente  $\vec{t}$  est un vecteur unitaire orthogonal à la jacobienne de  $\mathbf{H}$  au point  $\mathbf{Y}_i$ .

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Y}} \mathbf{H}(\mathbf{Y}_i) \cdot \vec{t} = 0 \quad (1.91)$$

- la prédiction polynomiale d'ordre  $d$  (voir figure 1.9c) consiste à faire une extrapolation polynomiale à partir des  $d+1$  états précédents ( $\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{i-1}, \dots, \mathbf{Y}_{i-d}$ ) auxquels sont associés les abscisses ( $s_i, s_{i-1}, \dots, s_{i-d}$ ). La prédiction est alors donnée par des polynômes de Lagrange :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} = \sum_{j=i-d}^i \mathbf{Y}_j \left( \prod_{\substack{k=i-d \\ k \neq j}}^i \frac{s_i + \Delta s - s_k}{s_j - s_k} \right) \quad (1.92)$$

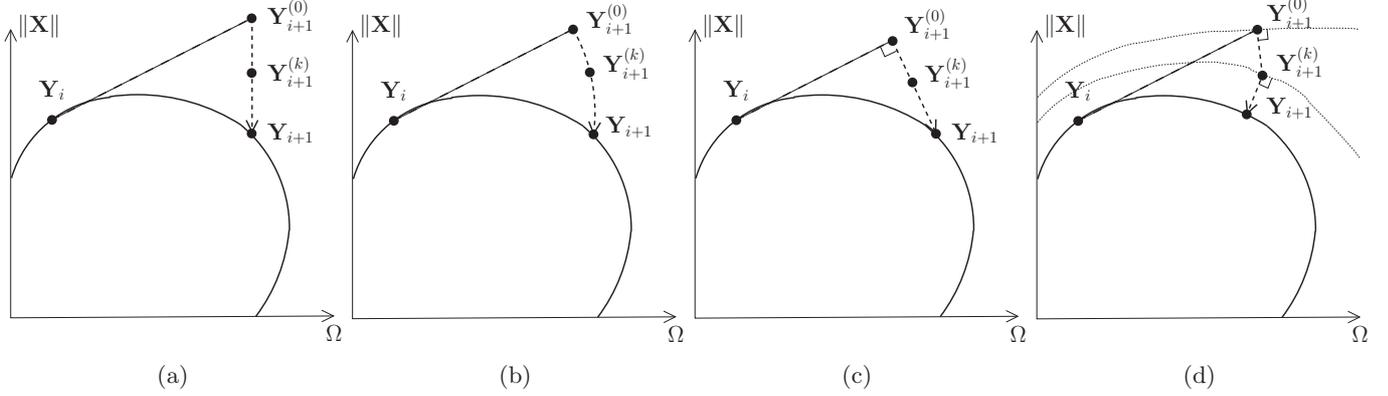


FIG. 1.10: Correcteurs : (a) Pulsation fixe (b) arclength (c) pseudo-arclength et (d) Moore-Penrose

La prédiction sécante est ainsi une prédiction polynomiale d'ordre 1.

Une fois la prédiction  $\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)}$  calculée, elle est déplacée vers une solution de l'équation (1.86) par une méthode de Newton en suivant une direction de descente particulière. Il existe plusieurs méthodes pour cette étape de correction, celles les plus fréquemment utilisées sont représentées sur la figure 1.10 :

– la correction à pulsation fixe (voir figure 1.10a) :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} - \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{H} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) \right]^{-1} \mathbf{H} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

– la correction arclength (voir figure 1.10b) consiste à imposer que la longueur d'arc entre  $\mathbf{Y}_i$  et  $\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)}$  demeure égale à  $\Delta s$  quelle que soit l'itération  $k$ . Cette condition s'écrit :

$$P \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) = \left\| \mathbf{X}_{i+1}^{(k)} - \mathbf{X}_i \right\|^2 + \alpha \left( \Omega_{i+1}^{(k)} - \Omega_i \right)^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (1.94)$$

la correction de Newton suit alors le schéma suivant :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} - \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}} \mathbf{H} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) & \mathbf{J}_{\Omega} \mathbf{H} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) \\ 2 \left( {}^T \mathbf{X}_{i+1}^{(k)} - {}^T \mathbf{X}_i \right) & 2 \alpha \left( \Omega_{i+1}^{(k)} - \Omega_i \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) \\ P \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} \right) \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

– la correction pseudo-arclength (figure 1.10c) consiste à imposer que la direction de descente de l'algorithme de Newton soit orthogonale à la direction de la prédiction ( $\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} - \mathbf{Y}_i$ ). La direction de la première itération de Newton est ainsi la même que pour la méthode arclength (d'où son nom) mais aux itérations suivantes la direction de recherche n'est pas mise à jour, à l'inverse de

la continuation arclength :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} - \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)}) & \mathbf{J}_{\Omega}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)}) \\ 2\left({}^T\mathbf{X}_{i+1}^{(0)} - {}^T\mathbf{X}_i\right) & 2\alpha\left(\Omega_{i+1}^{(0)} - \Omega_i\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

- la correction de Moore Penrose consiste quant à elle à considérer directement la jacobienne en fonction de  $\mathbf{Y}$  ( $\mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)})$ ) pour trouver le minimum de  $\mathbf{H}$ . Dans une logique de Newton, pour trouver la direction de correction associée à cette jacobienne, il faut inverser cette matrice. Cette matrice n'étant pas carrée, elle n'est pas inversible et il faut recourir à une matrice pseudo inverse, définie de la manière suivante pour une matrice générique  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W}^+ = {}^T\mathbf{W}(\mathbf{W}{}^T\mathbf{W})^{-1} \quad (1.97)$$

À chaque itération, la correction est calculée grâce à cette matrice pseudo inverse :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_{i+1}^{(k)} - \left(\mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)})\right)^+ \mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(k)}) \quad (1.98)$$

Cette méthode de correction est représentée sur la figure 1.10d. Les courbes en pointillés sur cette figure représentent les lignes isovaleur de la fonction  $\mathbf{H}$ .

### Méthode Asymptotique Numérique

Il existe une alternative à la logique de prédicteur-correcteur dans la littérature scientifique : la méthode asymptotique numérique (MAN) [13]. La logique de cette méthode est de chercher une branche de solution du problème (1.86) sous la forme d'un développement en série entière au voisinage d'un point solution  $\mathbf{Y}_0$ .

$$\mathbf{Y}(a) = \sum_{k=0}^{n_{\text{MAN}}} a^k \mathbf{Y}_{\mathbf{k}} \quad (1.99)$$

Pour cette méthode, on utilise une nouvelle abscisse  $a$  qui est définie par :

$$a = {}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_1 \quad (1.100)$$

La méthode asymptotique numérique consiste à déterminer les coefficients  $\mathbf{Y}_{\mathbf{k}}$  jusqu'à un ordre  $m$  choisi et une abscisse maximale  $a_{max}$  telle que la fonction  $\mathbf{H}(\mathbf{Y}(a))$  reste inférieure à la tolérance  $\varepsilon$  tant que  $a < a_{max}$ . Pour déterminer les coefficients  $\mathbf{Y}_{\mathbf{k}}$ , on écrit d'abord le développement en série entière de la fonction  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}(a)) = \sum_{k=0}^{n_{\text{MAN}}} a^k \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \quad (1.101)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_2 - \mathbf{F}_2^{\text{nl}} \\ &\dots \\ \mathbf{H}_p &= \mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_p - \mathbf{F}_p^{\text{nl}} \quad \forall p \leq n_{\text{MAN}} \end{aligned} \quad (1.102)$$

$\mathbf{J}_Y \mathbf{H}$  désigne la matrice jacobienne de  $\mathbf{H}$  par rapport à  $\mathbf{Y}$ . Les termes  $\mathbf{F}_p^{\text{nl}}$  sont fonctions uniquement des termes  $\mathbf{Y}_k$  avec  $k < p$ . Ce sont des fonctions non-linéaires de ces termes  $\mathbf{Y}_k$  et leur expression dépend des dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $p$  de la fonction  $\mathbf{H}$  par rapport à  $\mathbf{Y}$ . Suivant la forme de la fonction non-linéaire  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$ , ces dérivées partielles peuvent être très difficiles à exprimer, de plus si la fonction non-linéaire n'est pas de classe  $\mathcal{C}^p$ , il faut la régulariser pour appliquer la méthode. L'obtention de l'expression de ces termes  $\mathbf{F}_p^{\text{nl}}$  est la partie délicate de la méthode asymptotique numérique. Plusieurs stratégies de calcul sont présentées dans l'ouvrage de B. Cochelin et al. [13], selon le type de fonction non-linéaire considérée. Cela dit, une fois une expression explicite de ces termes  $\mathbf{F}_p^{\text{nl}}$  obtenue, les termes  $\mathbf{Y}_k$  peuvent s'obtenir séquentiellement par des relations linéaires, en écrivant l'équilibre du système  $\mathbf{H} = 0$ , à tout ordre :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_Y \mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_Y \mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{F}_2^{\text{nl}} \\ &\dots \\ \mathbf{J}_Y \mathbf{H}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{Y}_p &= \mathbf{F}_p^{\text{nl}} \quad \forall p \leq n_{\text{MAN}} \end{aligned} \tag{1.103}$$

Le calcul des termes  $\mathbf{Y}_p$  est alors immédiat et très simple (résolution d'un système linéaire). Par la suite, il faut définir un rayon de convergence  $a_{\text{max}}$  tel que :  $\forall a < a_{\text{max}}, \mathbf{H}(\mathbf{Y}(a)) < \varepsilon$ .

Les façons de calculer  $a_{\text{max}}$  sont détaillées dans [13]. Lorsque  $a_{\text{max}}$  est atteint, on recommence le processus avec  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(a_{\text{max}})$ . On trace ainsi la courbe de réponse fréquentielle par juxtaposition de branches de solution analytiques du problème. La méthode asymptotique numérique a les avantages d'être peu coûteuse en temps de calcul et de déterminer une expression continue de la courbe de réponse fréquentielle. Cependant elle ne peut pas s'écrire d'une manière générale quelle que soit la fonction non-linéaire  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  considérée. En particulier, si la fonction de force non-linéaire  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^p$ , comme ce sera le cas au chapitre 4, la MAN ne fonctionne plus. Dans de tels cas, pour pouvoir néanmoins utiliser la MAN, une solution proposée par Karkar, Cochelin et Vergez [38] consiste à régulariser la fonction non-linéaire puis à transformer le système d'équation en un système d'équations quadratiques. Le problème ainsi transformé peut se résoudre par la méthode de balance harmonique couplée à la MAN, selon une méthode introduite par Cochelin et Vergez [14].

## 1.4 Réduction de modèle

Les méthodes de simulation numériques présentées précédemment (partie 1.3) représentent un coût en temps de calcul bien plus important que celui des calculs linéaires (analyse modale et calcul de la fonction de réponse fréquentielle). Sur des modèles industriels à plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté minimum, la question du temps de calcul se pose. Cette partie s'intéresse aux méthodes qui permettent de réduire la taille d'un modèle éléments finis tout en conservant au mieux le comportement mécanique du modèle complet. Les critères d'appréciation de cette fidélité au modèle complet sont les suivants :

- correspondance des modes propres des deux modèles, à la fois en fréquence propre et en déformée modale.

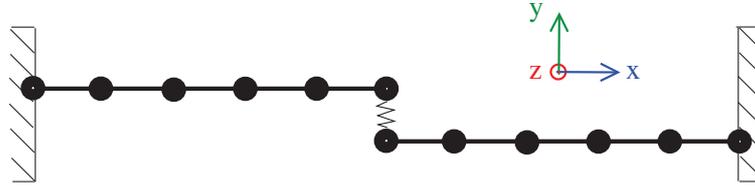


FIG. 1.11: Schéma du modèle éléments finis des deux poutres boulonnées-encastées.

- correspondance des déformations statiques : en imposant le déplacement statique d'un point de la structure, on peut corrélérer les déformations calculées avec les modèles réduit et complet.

Ces travaux de thèse s'intéressent principalement à l'effet des liaisons sur la réponse vibratoire d'assemblages. L'utilisation de modèles réduits dans ce cadre ne peut se faire que si le comportement dynamique du modèle réduit est très proche de celui du modèle complet (c'est le premier critère). Pour que l'introduction de force de liaison ait le même effet sur les modèles réduit et complet, il faut également que le second critère soit respecté pour les points correspondants aux liaisons. Pour satisfaire le premier critère de correspondance au modèle complet, la méthode la plus usuelle est la projection modale (voir partie 1.4.1). Pour satisfaire le second critère, on a recours à la condensation statique (voir partie 1.4.2). Les méthodes de sous-structurations permettent de satisfaire conjointement les deux critères. La partie 1.4.3 présente les méthodes de sous-structuration les plus usuelles et celle qui est implémentée dans le code éléments finis ABAQUS. Enfin, la partie 1.4.4 présente brièvement d'autres techniques de réduction de modèle indépendantes de la sous-structuration.

Toutes les méthodes présentées dans les parties 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3 sont des méthodes dites « de Galerkin ». Elles consistent en une projection sur un espace vectoriel de l'équation dynamique non-linéaire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1.104)$$

Afin d'illustrer ces différentes méthodes, on prendra un exemple simple ; celui d'un assemblage de deux poutres métalliques boulonnées l'une à l'autre à une extrémité et encastées à leurs deux autres extrémités (voir figure 1.11). Ce système est modélisé en deux dimensions sous le logiciel éléments finis ABAQUS avec des éléments de poutre linéaires : 12 nœuds, 30 degrés de liberté (trois DDLs par nœud et deux nœuds sont encastées). Un connecteur linéaire représente la raideur dans la liaison boulonnée. Ce connecteur comporte trois composantes : horizontale ( $x$ ), verticale ( $y$ ) et en rotation ( $\theta$ ). Les DDL que l'on souhaite conserver dans ce modèle complet sont ceux associés aux deux nœuds de la liaison boulonnée (six DDLs au total). Dans la perspective de ces travaux de thèse, il s'agira par la suite de remplacer le connecteur linéaire par un connecteur non-linéaire. Les paramètres du modèle sont détaillés dans le tableau 1.1.

Dimension d'une demi-poutre	0.25 x 20e-3 x 5e-3 m
Distance entre les demi-poutres	1e-3 m
Densité	7850 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'élasticité	2.05e11 Pa
Coefficient de Poisson	0.3
Raideurs du connecteur liaison :	
horizontale	1e8 N.m <sup>-1</sup>
verticale	1e8 N.m <sup>-1</sup>
en rotation	1e8 N.rad <sup>-1</sup>

TAB. 1.1: Paramètres du modèle éléments finis des deux poutres boulonnées-encastées.

### 1.4.1 Projection modale

La projection modale consiste à projeter l'équation dynamique non-linéaire (1.20) sur les modes propres du système  $\Phi_i$  qui ont été introduits en partie 1.1.1. La base modale est tronquée. Usuellement, les premiers modes propres sont conservés jusqu'à atteindre la borne supérieure des fréquences d'excitation étudiées. Dans le cadre des études non-linéaires, comme il peut y avoir des réponses à des harmoniques d'ordre supérieur, il est intéressant de conserver plus de modes que dans le cadre des études linéaires. L'équation dynamique du modèle réduit devient alors :

$${}^T \Phi \mathbf{M} \Phi \{\ddot{q}_i\} + {}^T \Phi \mathbf{D} \Phi \{\dot{q}_i\} + {}^T \Phi \mathbf{K} \Phi \{q_i\} = {}^T \Phi \mathbf{F}_{\text{excit}} + {}^T \Phi \mathbf{F}_{\text{nl}}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) \quad (1.105)$$

où  $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1..n}$  et  $\{q_i\} = {}^T \Phi \mathbf{x}$

Comme il a été montré en partie 1.1.1, la base des modes propres diagonalise conjointement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Les équations suivantes sont ainsi obtenues :

$$\ddot{q}_i + 2 \xi_i \Omega_i \dot{q}_i + \Omega_i^2 q_i = {}^T \Phi_i \mathbf{F}_{\text{excit}} + {}^T \Phi_i \mathbf{F}_{\text{nl}}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) \quad \forall i \in [1, n_{\text{modes}}] \quad (1.106)$$

Les vecteurs propres de ce modèle réduit sont ainsi les vecteurs unitaires  $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  qui sont associées aux pulsations propres  $\Omega_i$  et correspondent ainsi exactement aux modes propres du modèle complet. Les trois premiers modes propres du modèle de deux poutres boulonnées-encastées sont présentés sur la figure 1.12. Cette projection conserve la dynamique du système : par construction, les modes propres de la structure condensée sont exactement ceux du modèle complet. C'est alors le comportement statique qui n'est plus conservé, le tableau 1.2 compare des essais de traction et torsion sur les modèles complet et modal. On remarque que la troncature modale implique que le comportement statique est faussé, mais pas de la même manière selon les expériences statiques. Dans notre exemple, les cinq modes dynamiques retenus permettent de simuler correctement un effort statique selon y, mais pas du tout un effort selon x.

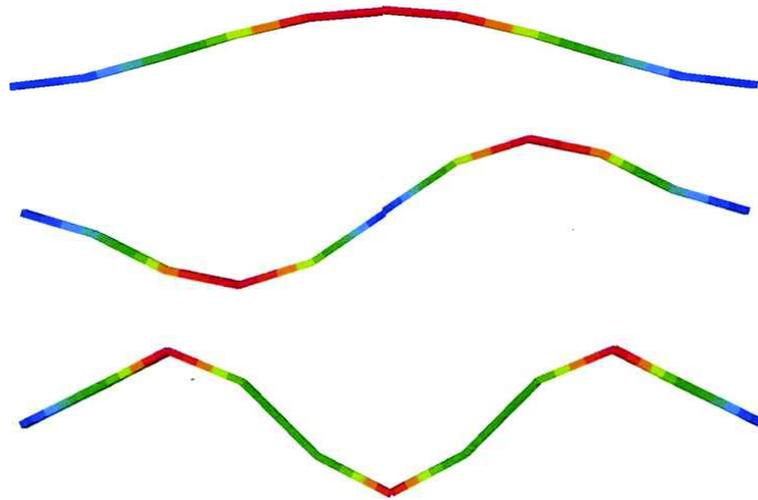


FIG. 1.12: Les trois premiers modes propres du système.

	Modèle complet	Modèle modal
Essai de traction ( $F=100$ ) selon x		
Déplacement du point d'action selon x	$8.0e-7$ m	$6.3e-9$ m
Essai de traction ( $F=100$ ) selon y		
Déplacement du point d'action selon y	$1.512e-3$ m	$1.508e-3$ m
Essai de torsion ( $M=100$ ) autour de l'axe z		
Rotation du point d'action autour de z	$71e-3$ rad	$50e-3$ rad

TAB. 1.2: Résultats d'expériences statiques sur le modèle complet et sur sa projection modale (cinq premiers modes propres retenus).

### 1.4.2 Condensation statique

La condensation statique consiste à projeter l'équation dynamique sur une base constituée des vecteurs obtenus en imposant un déplacement statique unitaire sur un degré de liberté. Tout d'abord, les degrés de liberté du modèle complet sont réordonnés et séparés en deux catégories : ceux qui seront retenus dans la condensation notés avec un indice  $r$  et ceux qui seront éliminés, notés avec un indice  $e$ . Dans cette nouvelle base réordonnée, la matrice de raideur s'écrit ainsi :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ {}^T\mathbf{K}_{er} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

Pour calculer les vecteurs  $\Psi_r$  de la base de réduction, le déplacement d'un DDL retenu est imposé unitaire, le déplacement des autres DDLs retenus est imposé nul et les DDLs éliminés ne sont soumis à aucun effort. En suivant cette définition, on obtient l'équilibre statique suivant dans la base complète :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ {}^T\mathbf{K}_{er} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \Psi_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi = \{\Psi_r\} = \begin{bmatrix} \{\Psi_{r,e}\} \\ \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

où  $\mathbf{I}_d$  désigne la matrice identité. On déduit de ces équations l'expression de la base de réduction de la condensation statique :

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Cette fois-ci l'effet d'un déplacement statique imposé sur l'un des DDLs retenus est rigoureusement le même dans les modèles réduits et complet. Inversement, les modes propres de ce modèle réduit peuvent être très différents de ceux du modèle complet.

Dans l'exemple que nous traitons, les noeuds retenus sont les deux au centre de la bi-poutre, qui sont reliés par le modèle de liaison boulonnée. Les modes statiques correspondants aux trois DDLs d'un de ces noeuds sont tracés figure 1.13. Les trois autres modes statiques du modèle s'obtiennent simplement par symétrie.

Cette méthode de condensation n'est appropriée que pour des calculs statiques. Le tableau 1.3 compare les fréquences propres du modèle réduit avec celles du modèle complet. Plus on s'éloigne des basses fréquences, plus le comportement dynamique du modèle réduit s'éloigne de celui du modèle complet.

### 1.4.3 Méthodes de sous-structuration

La sous-structuration est une façon de combiner condensation statique et modale. Les méthodes de sous-structuration ont été créées pour répondre au problème de la synthèse modale : comment déterminer le comportement dynamique d'un assemblage dont les comportements statique et dynamique de chacune de ses sous-structures est connu. Il s'agit alors de réaliser un modèle réduit de chaque sous-structure qui ait un bon comportement dynamique et qui puisse s'interfacer avec d'autres modèles

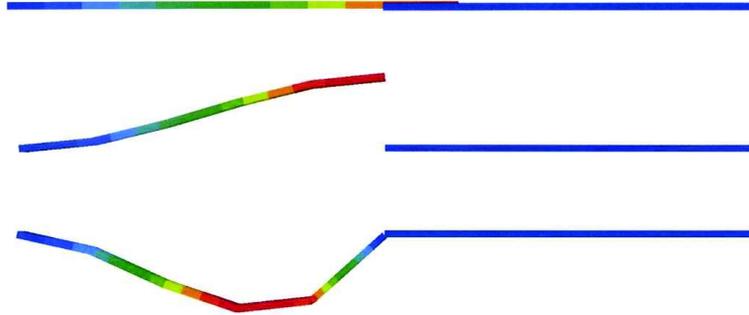


FIG. 1.13: Modes Statiques pour lesquels 1 DDL d'interface est imposé unitaire et les autres nuls. De haut en bas les DDLs non nuls sont  $x$ ,  $y$  et  $\theta$

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$
Modèle complet	105.5	293.8	576.4	960.2	1439
Modèle réduit	107.1	390.6	5579	10346	14814

TAB. 1.3: Fréquences propres (en Hz) du modèle complet et du modèle réduit par condensation statique.

réduits. Cette interface est réalisée grâce à des modes statiques d'interface. Ensuite les méthodes de sous-structuration proposent des méthodes d'assemblage des sous-structures entre elles. Dans la perspective de réduction de modèle de ce chapitre, on ne s'intéressera pas à ces méthodes d'assemblage. Le modèle complet sera considéré comme une seule sous-structure que l'on souhaite réduire en conservant les comportements statique et dynamique. Il existe de nombreuses méthodes de sous-structuration [18]. Quatre de ces méthodes de sous-structuration sont présentées dans cette partie :

- la méthode à interface fixe de Craig et Bampton [15],
- la méthode à interface libre de Mac Neal [52],
- la méthode à interface libre Craig Chang [16],
- la méthode à interface hybride implémentée dans le code éléments finis ABAQUS [42].

### Sous-structuration à interface fixe

Dans la méthode de Craig et Bampton [15], la base de réduction est constituée des vecteurs statiques  $\Psi_r$  précédemment définis (voir partie 1.4.2). Cette base est complétée par les modes propres de la structure complète calculés en bloquant les DDLs retenus :  $\Phi_{C\&B}$ . Pour l'exemple traité dans cette partie, les six premiers modes  $\Phi_{C\&B}$  sont représentés sur la figure 1.14.

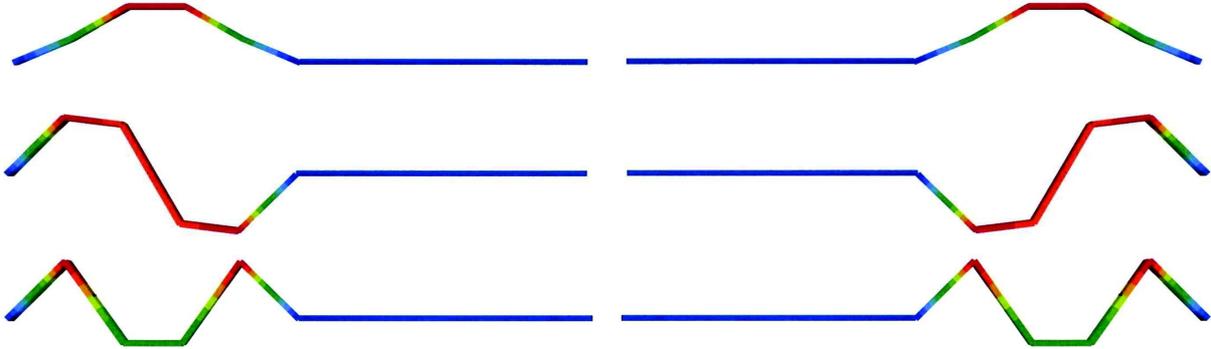


FIG. 1.14: Les six premiers vecteurs de réduction dynamiques dans la méthode de sous-structuration de Craig et Bampton.

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$
Modèle complet	105.5	293.9	576.4	960.2	1439
Condensation statique	107.1	390.6	-	-	-
Craig-Bampton, 2 modes	105.6	294.3	590.5	1438	-
Craig Bampton, 4 modes	105.5	293.9	577.7	963.6	1475
Craig Bampton, 6 modes	105.5	293.9	576.6	960.5	1442
Craig Bampton, 10 modes	105.5	293.9	576.4	960.2	1439

TAB. 1.4: Fréquences propres (en Hz) du modèle complet et des modèles réduits avec une prise en compte d'un nombre croissant de modes dynamiques de sous-structure.

On obtient la base de réduction suivante :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er} & \Phi_{C\&B} \\ \mathbf{I}_d & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi les DDLs retenus sont directement présents dans le modèle réduit, le comportement statique de la structure complète au niveau des DDLs retenus est conservé exactement. Le tableau 1.4 compare les modes propres des modèles complet et réduits par sous-structuration de Craig et Bampton avec différents nombres de modes dynamiques de sous-structure pris en compte. On remarque que la sous-structuration de Craig et Bampton améliore très nettement la dynamique du modèle condensé par rapport à une condensation statique. En augmentant le nombre de modes dynamiques de sous-structure pris en compte, on tend vers les résultats du modèle complet. Pour avoir une bonne estimation des cinq premiers modes d'assemblage, il faut au moins six modes de sous-structure. C'est la méthode de sous-structuration la plus largement employée dans le monde industriel, elle est notamment implémentée dans la plupart des codes de calculs éléments finis commerciaux.

### Sous-structuration à interface libre

Les méthodes de Mac Neal ([52] et [33, p398]) et de Craig Chang ([16] et [28, p278]) utilisent les modes propres à interface libre  $\Phi_p$  directement dans leur base de réduction. Cependant elles ne se basent pas sur les vecteurs statiques  $\Psi_r$ . Il faut introduire les vecteurs de flexibilité résiduelle  $\mathbf{G}_{r,res}$  qui correspondent à la différence entre les vecteurs de flexibilité statique  $\mathbf{G}_{r,0}$  et les vecteurs de flexibilité effective  $\mathbf{G}_{r,p}$  des modes propres  $\Phi_p$ . Les vecteurs de flexibilité statique  $\mathbf{G}_{r,0}$  sont la réponse de la sous-structure à un effort unitaire statique sur un DDL  $r$  :

$$\mathbf{K} \mathbf{G}_{r,0} = \mathbf{1}_r \quad (1.110)$$

où  $\mathbf{1}_r$  est le vecteur dont la  $r^{\text{ième}}$  coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles.

Les vecteurs de flexibilité effective modale sont la projection des vecteurs  $\mathbf{G}_{r,0}$  sur les modes propres  $\Phi_p$ .

$$\mathbf{G}_{r,p} = {}^T \Phi_p \mathbf{G}_{r,0} \Phi_p \quad (1.111)$$

Les vecteurs de flexibilité résiduelle s'obtiennent par différence :

$$\mathbf{G}_{r,res} = \mathbf{G}_{r,0} - \sum_p \mathbf{G}_{r,p} \quad (1.112)$$

On obtient la base de réduction  $[\mathbf{G}_{r,res}, \Phi_p]$ . Le calcul des matrices de masse et de raideur des sous-structures réduites diffère selon la méthode employée. La méthode de Craig-Chang considère une matrice d'inertie résiduelle, qui associe une masse aux vecteurs  $\mathbf{G}_{r,res}$ , alors que la méthode de Mac Neal néglige cette inertie. Ces deux méthodes de sous-structuration à interface libre présentent l'avantage de conserver exactement les modes du modèle complet. Cependant, à l'inverse de la méthode de Craig et Bampton, les DDLs retenus n'apparaissent pas directement dans la base de réduction. Les résultats de calculs ne peuvent ainsi pas être lus directement dans la base réduite. De même, l'application d'un chargement ou d'un déplacement imposé ponctuel ne se fait pas simplement, il faut passer par une projection dans la base de réduction. Ces bases de réduction, même si elles répondent aux critères de fidélité au modèle complet, ne sont d'une part pas très pratiques d'utilisation et d'autre part ne sont généralement pas directement implémentées dans les codes éléments finis. En particulier, l'exemple des deux poutres boulonnées-encastées n'a pas été traité avec ces méthodes de sous-structuration à interface libre parce que ces méthodes ne sont pas disponibles avec le logiciel ABAQUS.

### Sous-structuration à interface hybride

Le code éléments finis ABAQUS propose une méthode de sous-structuration à interface hybride. Cette méthode est une modification de la méthode de Craig et Bampton permettant de prendre en compte les modes de la structure à interface libre. L'algorithme fait l'objet d'un brevet Dassault Système [42] où il est détaillé. Dans cette méthode de sous-structuration les vecteurs de déplacement statique considérés  $\Psi_r$  sont ceux de la méthode de Craig et Bampton (déplacement imposé). On considère ensuite les modes  $\Phi_p$  obtenus avec interface libre. Dans cette méthode, on peut également

considérer les modes  $\Phi_{C\&B}$  obtenus avec interface fixe ou des modes obtenus avec certains DDLs d'interface bloqués et d'autres libres (interface hybride). Dans le cadre de la réduction de modèle avec une seule sous-structure, ce sont les modes  $\Phi_p$  qui permettent d'obtenir la meilleure fidélité à la dynamique du modèle complet. L'idée de cette méthode est de se ramener dans le cadre de la méthode de Craig et Bampton à partir de ces vecteurs  $\{\Psi_r, \Phi_p\}$ . Les vecteurs statiques ne sont pas modifiés, par contre il faut annuler les déplacements aux interfaces pour les vecteurs  $\Phi_p$  :

$$\Phi_p \rightarrow \tilde{\Phi}_p = \Phi_p - \sum_r \Phi_{p,r} \Psi_r = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{p,e} \\ \mathbf{0}_r \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

Les nouveaux vecteurs dynamiques  $\tilde{\Phi}_p$  sont désormais nuls sur les DDLs retenus, cependant, ils ne sont plus orthogonaux entre eux par rapport aux matrices de masse et raideur et même, rien n'assure qu'ils soient non-nuls et linéairement indépendants entre eux. Pour résoudre ce problème, un algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est mis en place. Le produit scalaire considéré est  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = {}^T \mathbf{u} \mathbf{K} \mathbf{v}$ . L'algorithme d'orthogonalisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{\Phi}_1 \\ &\dots \\ \Phi_k &= \tilde{\Phi}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \tilde{\Phi}_k | \Phi_j \rangle \Phi_j \end{aligned} \quad (1.114)$$

Si un vecteur  $\Phi_k$  est annulé par l'algorithme, il est éliminé de la base de réduction. Lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur est normalisé. On obtient une base de réduction  $[\Phi, \Psi]$  qui a exactement les mêmes propriétés que la base de réduction de Craig et Bampton. La différence est que les modes propres du modèle réduit sont cette fois-ci exactement ceux du modèle complet. Afin d'illustrer le processus, les vecteurs  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  sont représentés sur la figure 1.15.

Cette dernière méthode combine tous les avantages des méthodes précédentes et présente surtout l'intérêt d'être déjà implémentée dans le code éléments finis ABAQUS. Elle permet de rendre compte de manière exacte de la réponse du modèle complet dans la gamme de fréquence couverte par la base modale. Cependant, lorsque des relations non-linéaires sont introduites, les vecteurs de réponse dynamiques sont modifiés et la réponse du modèle réduit n'est plus la même que celle du modèle complet.

#### 1.4.4 Méthodes avancées

Des méthodes plus avancées de réduction de modèles non-linéaires ont été développées dans la littérature scientifique et seront brièvement présentées dans cette partie. Les méthodes présentées dans les parties précédentes (parties 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3) sont des méthodes de projection vers un sous-espace vectoriel. On parle de méthodes de Galerkin. Elles sont chacune adaptées à différents types d'excitations (statiques ou dynamiques) sur un modèle linéaire. Dans le cas d'un modèle non-linéaire, les vecteurs de réponse évoluent en fonction du niveau d'excitation. Il peut devenir intéressant

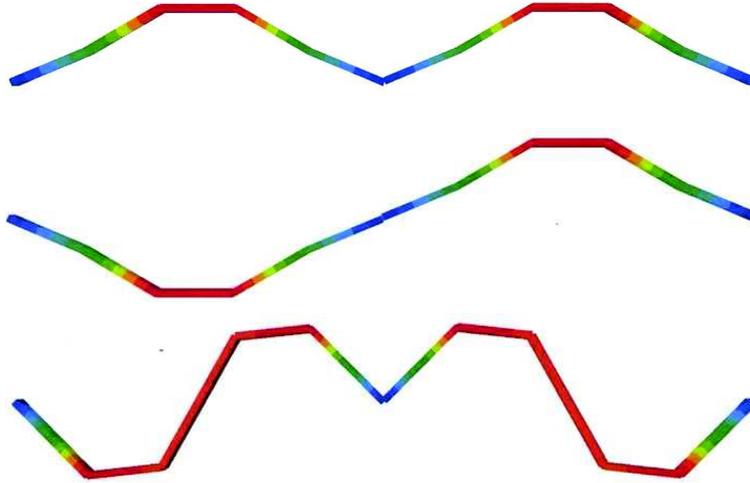


FIG. 1.15: Les trois premiers vecteurs dynamiques de réduction  $\Phi_p$ , dans la méthode de sous-structuration à interface hybride.

d'étendre la base de projection pour mieux approcher la réponse du modèle réduit de celui du modèle complet. Pour montrer une illustration de cette logique, on considère le cas particulier d'une fonction non-linéaire de frottement. Le frottement consiste en une transition d'un régime d'accroche totale du patin frotteur à un régime de glissement libre. Zucca et Epureanu [103] ont ainsi proposé une méthode de réduction de modèle adaptée à ce type de problème. La base de réduction est construite à partir des modes propres de la structure au sein de laquelle les frotteurs sont bloqués ainsi que des modes propres pour lesquels les patins frotteurs peuvent glisser librement. On approxime alors un phénomène non-linéaire par deux états linéaires qui s'en rapprochent. Une autre procédure de Galerkin est étudiée par Segalman [84] : elle consiste à enrichir une base modale avec des « modes de liaison » obtenus en appliquant des efforts statiques sur les nœuds impliqués dans une liaison non-linéaire.

De manière plus générale, on peut chercher la meilleure approximation linéaire d'un système non-linéaire. Pour cela, il convient de simuler la réponse du système pour un assez grand nombre de cas d'excitation et de chercher la projection linéaire qui permet le mieux possible de rendre compte des réponses obtenues. C'est la logique de la décomposition orthogonale propre (POD) aussi dénommée décomposition de Karhunen-Loève. Elle permet de trouver des vecteurs de projections du modèle, orthogonaux entre eux, qui permettent de représenter au mieux (au sens des moindres carrés) les résultats de simulation obtenus. Cette méthode est très largement utilisée pour la réduction de modèle en calcul des structures [39].

Enfin, d'autres méthodes permettent de généraliser la méthode de Galerkin à une projection vers des variétés de l'espace des déplacements. La méthode de Galerkin correspond à une projection vers la variété linéaire générée par la base de réduction (c'est alors un espace vectoriel). Dans le cadre

d'une méthode de Galerkin non-linéaire, la variété de projection n'est plus nécessairement linéaire. Ainsi la projection modale présentée en partie 1.4.1 peut être remplacée par la projection sur des modes normaux non-linéaires [40]. La pertinence d'une telle projection pour reproduire des réponses harmoniques forcées a été montrée en particulier sur des coques [97]. Cette méthode de projection a été étendue aux fonctions non-linéaires dissipatives avec les modes complexes non-linéaires proposés par Laxalde [48]. La méthode de décomposition orthogonale propre peut aussi être remplacée par la recherche de variétés orthogonales entre elles qui optimisent la projection du modèle. On parle alors de décomposition orthogonale propre non-linéaire ou encore d'analyse en composantes principales non-linéaires [45].

## 1.5 Conclusion

Ce premier chapitre présente l'analyse modale et les limites de l'hypothèse de linéarité face à des observations expérimentales qui ne peuvent se modéliser qu'avec l'introduction de forces non-linéaires. L'introduction de termes non-linéaires dans l'équation de la dynamique oblige à la mise en place de méthodes de simulation non-linéaires. Des méthodes temporelles, de perturbation et d'approximation par série de Fourier sont présentées. Parmi ces méthodes, trois seront utilisées et comparées entre elles dans le chapitre 2 : la méthode des développements multi-échelles, la méthode de tir et la méthode de balance harmonique. Les méthodes de simulation numérique nécessitent la mise en place de techniques de continuation pour tracer des réponses vibratoires continues en fonction de la pulsation  $\Omega$ . C'est une méthode de prédiction-correction qui a été choisie pour ces travaux de thèse, avec une prédiction polynomiale et une correction de type pseudo-arclength. Enfin ces méthodes de simulation augmentent considérablement les temps de calculs numériques par rapport aux analyses linéaires. Réduire la taille des modèles, et donc des matrices manipulées, devient alors nécessaire. La partie 1.4 a présenté plusieurs méthodes de réduction de modèles. Il s'agit pour la plupart de méthodes de projection sur un espace vectoriel. La technique qui sera utilisée dans ces travaux de thèse, au chapitre 4, est la méthode de sous-structuration à interface hybride implémentée dans le code éléments finis ABAQUS.

La plupart des éléments théoriques utilisés au cours de ces travaux de thèses ont été introduits dans ce chapitre et comparés avec des alternatives existantes dans la littérature scientifique. Les chapitres suivants seront consacrés à l'application de ces méthodes à deux cas d'étude : l'un académique (chapitre 2) et l'autre plus industriel (chapitres 3 et 4).

## Chapitre 2

# Etude d'une poutre métallique bi-encastree

*Avant l'étude d'un assemblage industriel complexe, un premier cas d'étude plus académique a été traité. Il s'agit d'une poutre métallique bi-encastree. Cette étude a pour premier objectif de retrouver par la modélisation et la simulation des phénomènes non-linéaires. Il s'agit également de mettre en œuvre différentes techniques numériques avancées pour le calcul des réponses vibratoires non-linéaires et de comparer leurs performances. Le système choisi se comporte comme un oscillateur de Duffing, qui a reçu une attention considérable dans la littérature scientifique [44]. Au niveau expérimental, l'objectif de cette étude est l'observation et la mesure des phénomènes vibratoires non-linéaires : décalage de la fréquence fondamentale de résonance, sauts d'amplitude, phénomènes d'hystérésis et réponses multi-harmoniques. Pour tracer les réponses multi-harmoniques expérimentales, un algorithme de traitement du signal spécifique a été développé. Ces résultats expérimentaux sont présentés dans la première partie de ce chapitre.*

*Au niveau simulation, le défi principal de cette étude était de retrouver les comportements non-linéaires mesurés expérimentalement. Un soin particulier a été porté à la modélisation. Ces travaux ont ensuite permis de mettre en œuvre trois méthodes de simulation permettant d'estimer la réponse dynamique non-linéaire du système. L'un des objectifs est de discuter des avantages et inconvénients de chaque méthode afin de pouvoir choisir par la suite celle qui apparaît la plus pertinente dans le cadre d'une structure industrielle. De plus, au-delà du caractère académique de ce cas d'étude, il est représentatif des non-linéarités associées aux grands déplacements. Comme de telles non-linéarités apparaissent également dans des structures industrielles, une extension des résultats obtenus à n'importe quelle structure modélisée par éléments finis est présentée.*

*Dans la première partie de ce chapitre, le montage et les résultats expérimentaux sont présentés. La partie 2.2 présente le modèle continu à 1 dimension de la poutre et explique comment procéder avec un modèle éléments finis. La partie 2.3 présente le recalage des paramètres du modèle grâce à la méthode des développements multi-échelles. Les 2 méthodes de simulation numérique sont détaillées en partie 2.4 et enfin les simulations sont comparées aux essais et les hypothèses de modélisation sont justifiées a posteriori en partie 2.5.*

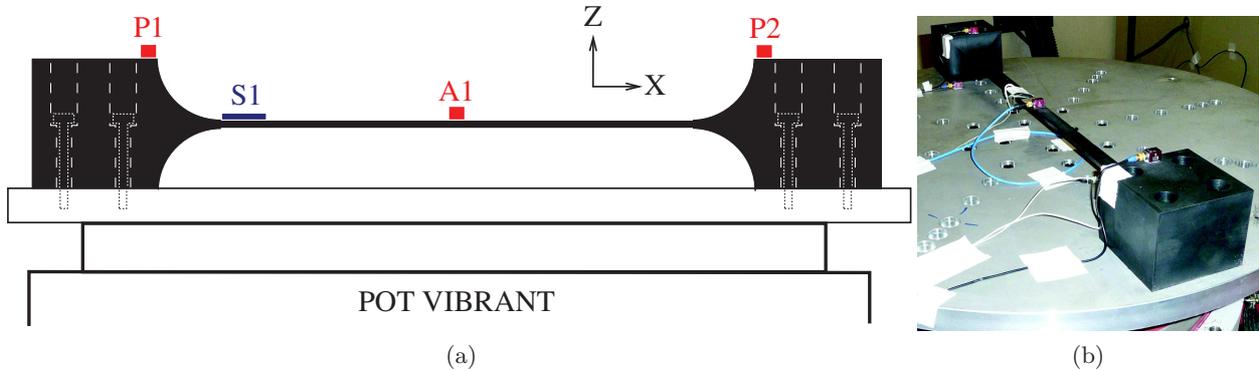


FIG. 2.1: Schéma (a) et photographie (b) du montage expérimental instrumenté par 3 accéléromètres (A1, P1, P2) et une jauge de déformation (S1).

## 2.1 Expériences

### 2.1.1 Description de la poutre bi-encastrée et des expériences associées

Le montage expérimental de la poutre métallique bi-encastrée est présenté par la figure 2.1. La poutre est entièrement en acier et ses dimensions sont 470 x 20 x 5 mm. À chacune de ses extrémités, la poutre est reliée à un gros cube d'acier de dimension 100 x 100 x 85 mm. La pièce complète (poutre et encastremets) a été fabriquée à partir d'une seule pièce métallique pour éviter toute soudure. Des congés ont été dessinés entre la poutre et les cubes d'encastrement afin d'éviter les concentrations de contraintes. Les cubes sont vissés sur un large plateau circulaire en aluminium, lui-même vissé sur le pot vibrant.

Les mouvements de la structure sont mesurés par 3 accéléromètres tridimensionnels. Une jauge de déformation a été installée près d'un congé afin d'évaluer la tension dans la poutre. L'instrumentation est représentée sur la figure 2.1. Chaque signal est nommé de la façon suivante : nom du capteur suivi de la direction de mesure. Le signal d'entrée est défini comme  $\frac{1}{2}(P1Z+P2Z)$ , il s'agit du signal de pilotage du pot vibrant. Les expériences sont réalisées à amplitude d'accélération d'entrée constante. Pour chaque expérience, le niveau d'excitation est défini comme une accélération à la base. Pour la modélisation et l'interprétation des résultats, on se place dans le repère en mouvement lié aux cubes d'encastrement. Dans ce repère, les accéléromètres P1 et P2 ont un mouvement vertical nul. On définit le centre de ce repère comme la position de l'accéléromètre A1 lorsque le système est au repos. Le signal de réponse mesuré est ainsi le mouvement du centre de la poutre dans ce repère en mouvement c'est-à-dire :  $A1Z - \frac{1}{2}(P1Z+P2Z)$ . Le mouvement horizontal des cubes d'encastrement est également mesuré par le signal  $\frac{1}{2}(P2X-P1X)$ .

Des expériences de « sinus balayés » sont réalisées. Le signal de contrôle du pot vibrant est sinusoïdal et sa fréquence varie lentement au cours du temps. Une vitesse de balayage logarithmique a été choisie, cette vitesse est de 1 octave/minute loin de la résonance et de 0,1 oct/min au voisinage de la résonance. La vitesse est ralentie au voisinage de la résonance afin d'éviter au maximum l'obser-

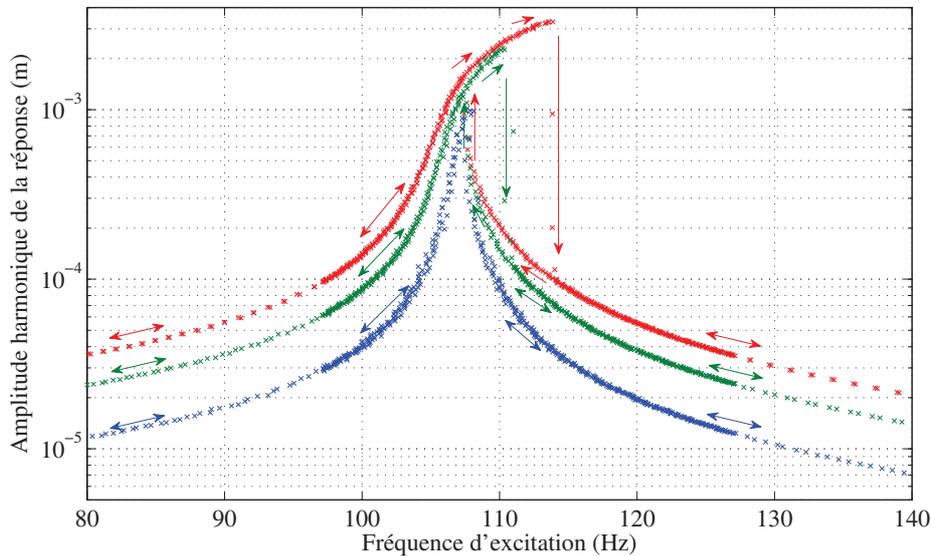


FIG. 2.2: Courbes de réponse fréquentielles harmoniques pour 3 niveaux d'excitation :  $2 \text{ m.s}^{-2}$  (bleu),  $4 \text{ m.s}^{-2}$  (vert) et  $6 \text{ m.s}^{-2}$  (rouge). Les flèches indiquent la direction du balayage fréquentiel.

vation de phénomènes transitoires. La réponse stationnaire du système est recherchée. Pour chaque expérience, la plage de fréquence étudiée est parcourue dans les 2 sens : des basses fréquences vers les hautes puis en sens inverse. Le pot vibrant est contrôlé de sorte que l'amplitude harmonique du signal d'entrée  $\frac{1}{2}(P1Z+P2Z)$  reste constante au cours de l'expérience. Le signal d'entrée est en théorie sinusoïdal de pulsation  $\Omega$  imposée par le système de contrôle mais en pratique, dans ce signal d'entrée, l'apparition de composantes harmoniques d'ordre supérieur à 1 n'est pas contrôlée. Le signal d'entrée peut ainsi être involontairement multi-harmonique (voir paragraphe 2.1.3).

### 2.1.2 Réponses fréquentielles expérimentales

Les courbes de réponse fréquentielles obtenues sont tracées sur la figure 2.2. Les flèches indiquent la direction du balayage fréquentiel. Trois niveaux d'excitation sont tracés. On observe que la réponse évolue fortement avec le niveau d'excitation. Notamment, la fréquence de résonance augmente avec le niveau d'excitation (phénomène de « raidissement »). Les réponses apparaissent discontinues au voisinage des résonances. Il s'agit du phénomène de « saut » : un changement incrémental de la fréquence d'excitation entraîne un changement important du niveau de réponse. Enfin, on observe un phénomène d'hystérésis : la courbe de réponse fréquentielle est différente selon que l'on excite la structure des basses fréquences vers les hautes ou en sens inverse. Des phénomènes de saut sont observés dans les 2 sens de balayage fréquentiel mais les fréquences auxquelles ils se produisent sont différentes selon le sens de balayage. Ces phénomènes démontrent le caractère non-linéaire du système étudié.

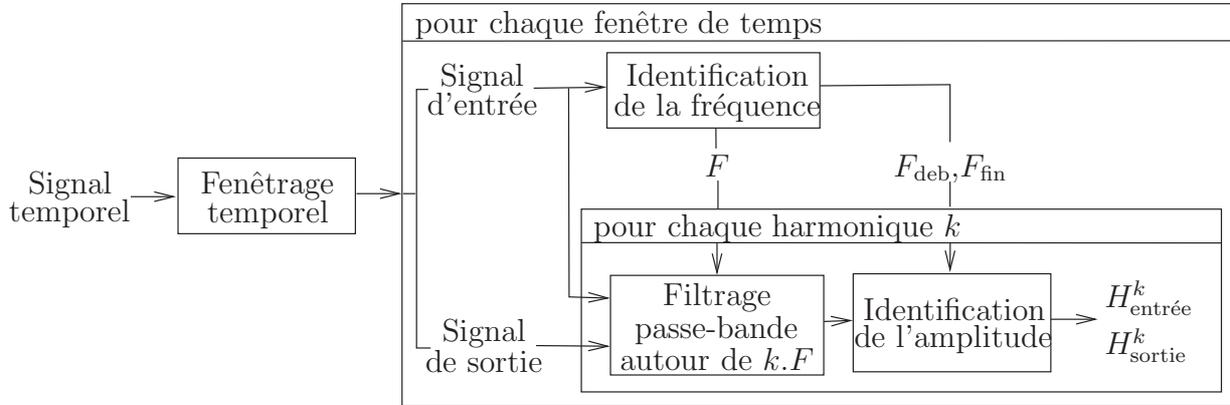


FIG. 2.3: Schéma logique de l'algorithme d'extraction des composantes harmoniques.

### 2.1.3 Réponses multi-harmoniques

Comme le signal de contrôle du pot vibrant est périodique de pulsation  $\Omega$  et que l'on observe des régimes stationnaires, tous les signaux mesurés sont périodiques. Ces signaux peuvent être décomposés en série de Fourier dont la pulsation fondamentale est  $\Omega$ . Le paragraphe 2.1.2 présente les résultats obtenus à la pulsation  $\Omega$ . Les autres composantes harmoniques à  $k.\Omega$ , avec  $k$  entier, sont également étudiées. Un outil de traitement du signal a été développé pour extraire les composantes harmoniques d'un signal temporel. La logique de l'outil est représentée dans la figure 2.3. Son fonctionnement se structure autour de 4 étapes principales :

- fenêtrage temporel des signaux,
- identification de la fréquence fondamentale moyenne de chaque fenêtre de signal  $F$ ,
- filtrage passe-bande autour de  $k.F$  pour chaque harmonique  $k$ ,
- identification de l'amplitude  $H^k$  de chaque harmonique  $k$ .

L'étape de fenêtrage conditionne le pas en fréquence de la courbe de réponse fréquentielle. La distance temporelle entre 2 fenêtres peut être directement convertie en incrément de fréquence d'excitation grâce à la vitesse de balayage logarithmique. Pour ces travaux, une distance de 0.5 s entre chaque fenêtre de temps a été choisie. Ensuite la durée de chaque fenêtre doit être choisie. Il faut qu'il y ait assez de points dans l'échantillon pour que l'étape d'identification de l'amplitude puisse être précise. Cependant si la durée est trop longue, l'hypothèse de stationnarité du signal (amplitude constante) n'est plus valide. Pour réaliser au mieux ce compromis, une durée temporelle correspondant à 5 périodes de la plus petite fréquence d'excitation a été choisie. Pour les expériences présentées, cette durée correspond à  $\frac{5}{70 \text{ Hz}} = 71 \cdot 10^{-3}$  s.

L'étape d'identification de la fréquence fondamentale de chaque échantillon est présentée dans la figure 2.4. Cette étape a été rendue nécessaire par le fait que le système de pilotage ne permettait pas d'enregistrer à chaque instant la fréquence d'excitation demandée. Seule la loi de balayage est

Paramètre	Valeur initiale	Bornes
$A$	Maximum des valeurs de l'échantillon	$\pm 10\%$
$F_{deb}$	$F_{est}$	$\pm 10\%$
$F_{fin}$	$F_{est}$	$\pm 10\%$
$\Phi_0$	$\pm \arccos\left(\frac{y_0}{A}\right)$	$\pm 10^\circ$

TAB. 2.1: Valeurs initiales et bornes pour l'algorithme d'identification CMAES.

connue. Cette loi permet d'obtenir une bonne estimation  $F_{est}$  de la fréquence de chaque échantillon, à environ 1 Hz près. Cependant cette précision n'est pas suffisante pour réaliser une courbe de réponse fréquentielle. Cette estimation a donc été recalée à partir du signal d'entrée. L'objectif de cette étape est donc d'identifier la fréquence fondamentale moyenne d'un échantillon de signal. Tout d'abord le signal est filtré par un filtre passe bande autour de  $F_{est}$  pour éliminer les composantes non fondamentales du signal qui perturbent l'identification. Le filtre choisi est un filtre à réponse impulsionnelle finie avec une bande passante entre  $0.9 F_{est}$  et  $1.1 F_{est}$ . Son effet sur la phase du signal peut être corrigé par une simple translation temporelle. La longueur du filtre est un compromis entre une bonne réjection des harmoniques supérieures (à commencer par l'harmonique 2) et une faible atténuation dans la bande passante. Une longueur de 1000 points a été choisie. Le filtrage introduit un régime transitoire que l'on traite en filtrant un échantillon de signal bien plus large que la fenêtre temporelle choisie.

Ainsi filtré, le signal est mono-harmonique. Sa fréquence est identifiée par ajustement d'un signal synthétique. Le signal synthétique choisi est une fonction sinus balayé avec une vitesse de balayage logarithmique et une amplitude constante. Elle comprend 4 paramètres : l'amplitude  $A$ , la fréquence au début et à la fin de la fenêtre ( $F_{deb}$  et  $F_{fin}$ ) et enfin une phase  $\Phi_0$ . Cette fonction s'écrit :

$$\varphi_{synthétique}(t) = A \sin \left( 2\pi \left[ \left( \frac{F_{fin}}{F_{deb}} \right)^{\frac{t}{t_{fin}}} F_{deb} \right] t + \Phi_0 \right) \quad (2.1)$$

L'identification de ces 4 paramètres est traitée comme un problème d'optimisation non-linéaire. La fonction d'optimisation est la différence au sens des moindres carrés entre l'échantillon et le signal synthétique. Pour réaliser cette optimisation, un algorithme évolutionnaire a été mis en place : la « Covariance Matrix Adaptation-Evolution Strategy » (CMAES) [32]. Cet algorithme a été choisi du fait de sa convergence rapide et de sa faible sensibilité au bruit. Il avait été préalablement utilisé dans la thèse de Zoe Sigrist [87, Annexe 7] effectuée au sein du CEA/CESTA. Les travaux de cette thèse ont ainsi été directement appliqués dans le cadre de cette étude. Pour la mise en place de cet algorithme évolutionnaire, les valeurs des 4 paramètres doivent être initialisées et bornées, ces valeurs sont présentées dans le tableau 2.1.

Pour l'évaluation de la valeur initiale de  $\Phi_0$ , on choisit l'instant initial de l'échantillon comme le premier point après un passage par zéro. La valeur de ce premier point est notée  $y_0$  et la phase  $\Phi_0$  est initialisée par  $\pm \arccos(y_0/A)$ . Cette phase  $\Phi_0$  est un paramètre très sensible pour l'algorithme d'identification. Une fois l'optimisation réalisée, la fréquence de chaque échantillon est fixée comme évoluant entre  $F_{deb}$  et  $F_{fin}$ .  $F$  est défini comme la moyenne logarithmique entre  $F_{deb}$  et  $F_{fin}$ .

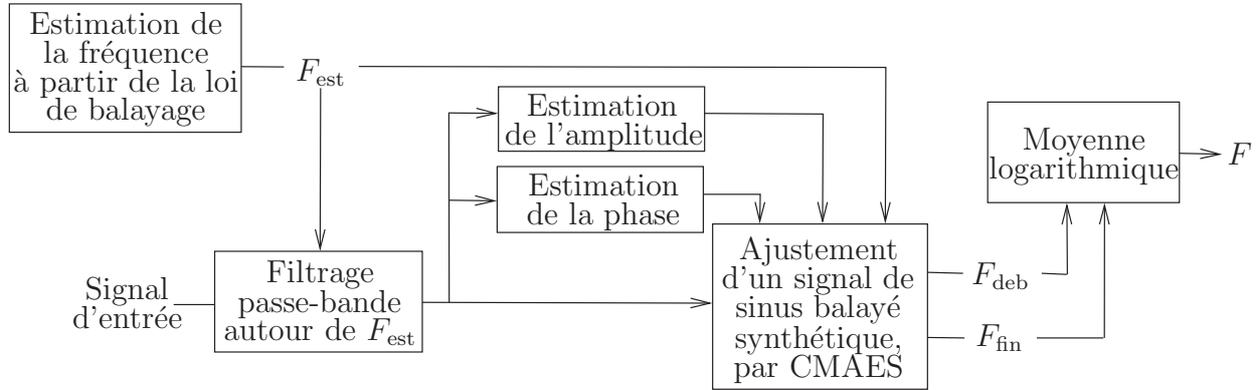
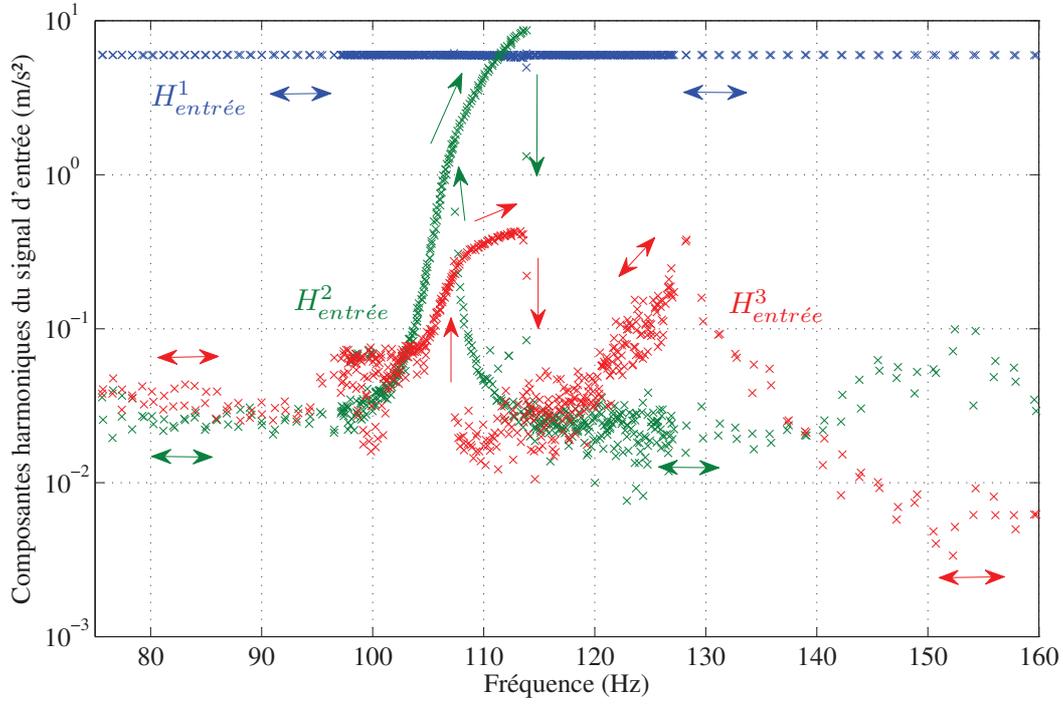


FIG. 2.4: Schéma logique de la fonction d'identification de fréquence.

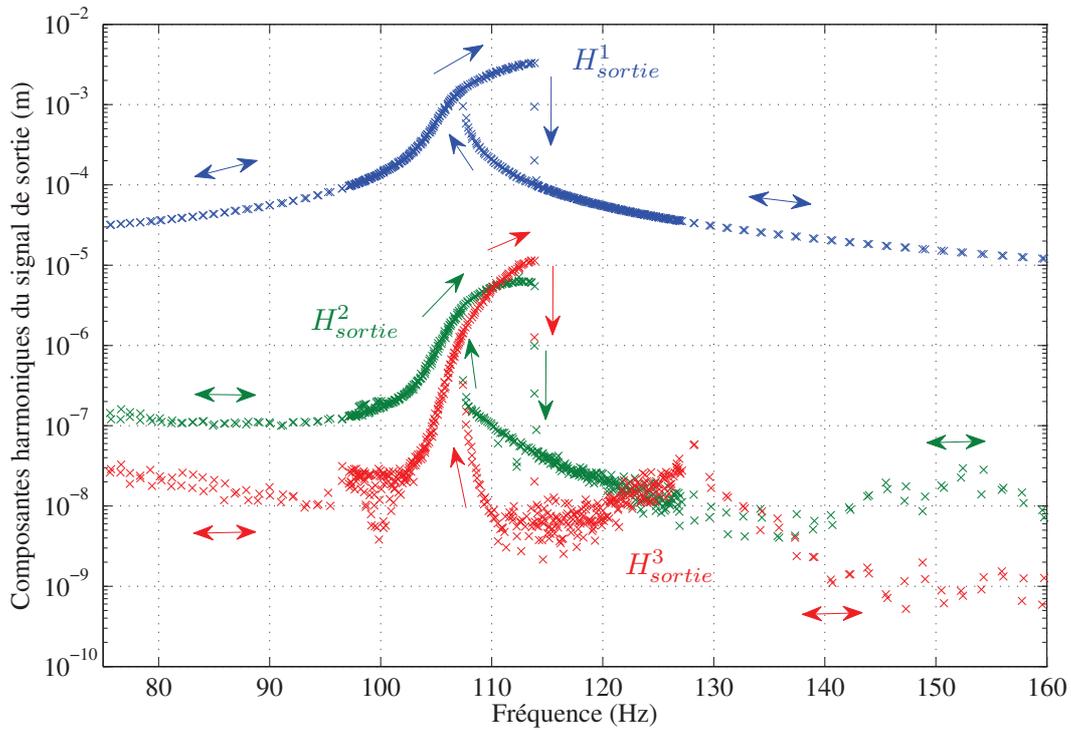
Vient ensuite l'étape d'identification de l'amplitude de chaque harmonique. Pour chaque harmonique  $k$ , les échantillons de signaux d'entrée et de sortie sont filtrés autour de  $k.F$  par le filtre à réponse impulsionnelle finie décrit précédemment. On a alors des signaux mono-harmoniques de fréquence autour de  $k.F$  et dont l'amplitude correspond aux amplitudes harmoniques cherchées. Ces amplitudes  $H_{\text{entrée}}^k$  et  $H_{\text{sortie}}^k$  sont identifiées par le même processus d'identification que pour la fréquence. Cette fois-ci cependant, les fréquences de début et de fin d'échantillon sont fixées à  $k.F_{\text{deb}}$  et  $k.F_{\text{fin}}$ . Il s'agit alors d'optimiser une fonction non-linéaire à 2 paramètres qui sont l'amplitude et la phase du signal à l'harmonique  $k$ . Ici seule les amplitudes sont étudiées mais le même processus d'identification peut être utilisé pour étudier la phase des composantes harmoniques.

D'autres méthodes d'identification sont possibles pour réaliser la même fonction [41], en particulier des méthodes basées sur la transformée de Fourier discrète ou sur des formulations autorégressives [65]. Dans notre cas, l'algorithme d'optimisation permet de mesurer l'erreur entre le signal mesuré et le signal synthétique, ce qui assure la précision de l'identification. Avec des signaux multi-harmoniques synthétiques, cette méthode d'identification donne des erreurs  $< 0,1\%$  pour l'estimation de la fréquence et  $< 1\%$  pour l'estimation de chaque amplitude harmonique.

Les courbes de réponses fréquentielles multi-harmoniques obtenues sont tracées sur la figure 2.5. Les amplitudes d'entrée sont tracées en accélération. On observe que la composante harmonique du signal d'entrée est bien constante car contrôlée par le pot vibrant. On observe cependant des signaux non-négligeables aux harmoniques 2 et 3. Pour le signal de sortie, la réponse est tracée en déplacement, ce qui s'obtient en divisant l'accélération par  $(2k\pi F)^2$ . On peut dès lors se demander si la réponse multi-harmonique observée est un phénomène non-linéaire propre à la structure étudiée ou si le signal multi-harmonique de sortie s'explique uniquement par le fait que le signal d'entrée est lui-même multi-harmonique. Une réponse à cette question sera apportée au paragraphe 2.5.2.



(a)



(b)

FIG. 2.5: Composantes harmoniques expérimentales du signal d'entrée (a) et de sortie (b) pour un niveau d'excitation de  $6 \text{ m.s}^{-2}$ . Les flèches indiquent la direction du balayage fréquentiel.

### 2.1.4 Évolution de la tension statique dans la poutre

En dehors des phénomènes non-linéaires présentés précédemment, il est apparu au cours des expériences que les courbes de réponse fréquentielle obtenues ne sont pas parfaitement reproductibles mais qu'elles sont translatées en fréquence d'une expérience à l'autre. On peut observer des décalages de l'ordre du hertz en réalisant 2 expériences identiques successivement. Nous avons interprété ce phénomène comme l'influence d'une précontrainte statique dans la poutre, qui peut évoluer d'une expérience à l'autre. Cette interprétation a été confirmée par les mesures de la jauge de déformation S1 (l'emplacement de la jauge est indiqué sur la figure 2.1). La valeur de déformation au repos est influencée par le montage de la structure sur le plateau support et elle évolue également entre 2 expériences. Il semble donc que l'état de contrainte lié au vissage des cubes d'encastrement entraîne une tension statique dans la poutre qui n'est pas reproductible et qui varie à cause des expériences vibratoires. Cette observation justifie l'introduction d'un paramètre de recalage qui varie d'une expérience à l'autre lors de la modélisation. Le détail de cette modélisation et une comparaison avec les mesures de la jauges seront présentées dans la partie 2.3.

## 2.2 Modélisation de la poutre non-linéaire bi-encastrée

### 2.2.1 Modèle continu

Un modèle continu de la poutre est développé à partir des équations présentées par Nayfeh [60]. Les caractéristiques de la poutre sont supposées ici constantes en fonction de l'abscisse. Le faible rapport épaisseur sur longueur de la poutre étudiée permet de négliger les termes non-linéaires d'inertie et de courbure qui sont mis en avant par Nayfeh [60, Eq. (14)]. Un amortisseur linéaire visqueux est ajouté au modèle pour prendre en compte la dissipation dans l'équation différentielle dynamique :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \rho A a_{excit} \cos(\Omega t) + T(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

---

$t$	Temps
$x$	Abscisse
$l$	Demi-longueur de la poutre
$w$	Déplacement transverse
$u$	Déplacement longitudinal
$\mu$	Coefficient d'amortissement linéaire visqueux
$a_{excit}$	Amplitude de l'accélération du repère lié aux encastements

---

TAB. 2.2: Notations.

$\rho$	Masse volumique	$7850 \text{ kg.m}^{-3}$
$E$	Module de Young	$205.10^9 \text{ Pa}$
$A$	Section de la poutre	$1.10^{-4} \text{ m}^2$
$I$	Moment d'inertie de la section	$2.08.10^{-10} \text{ m}^4$

TAB. 2.3: Valeur des paramètres physiques de la poutre.

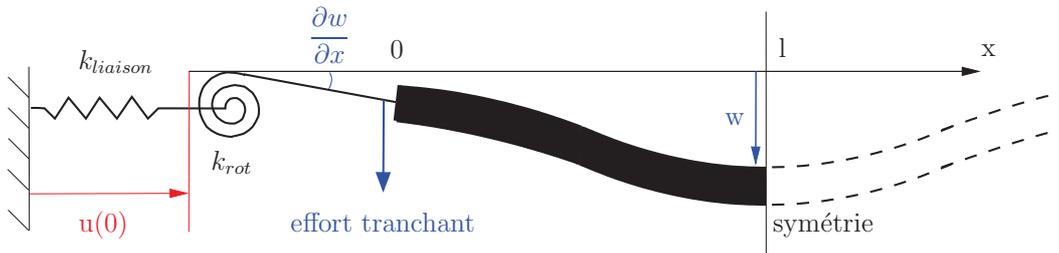


FIG. 2.6: Conditions aux limites du modèle de poutre continu.

Toutes les notations sont définies dans les tableaux 2.2 et 2.3.  $T(t)$  est la tension dans la poutre qui est invariante en fonction de  $x$  et vérifie la relation :

$$T(t) = EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad \forall x \in [0, l] \quad (2.3)$$

Comme la structure et la force excitatrice sont symétriques par rapport au centre de la poutre,  $w(x)$  est symétrique et on peut limiter l'étude à la moitié de la poutre avec une condition de symétrie en  $x = l$ . Les conditions aux limites sont détaillées dans les équations (2.4) et (2.5) et schématisées Figure 2.6.

$$w(0) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0) = k_{rot} \frac{\partial w}{\partial x}(0), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(l) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l) = 0 \quad (2.4)$$

$$T(t) = k_{liaison} u(0) \quad \text{and} \quad u(l) = 0 \quad (2.5)$$

Ces conditions aux limites sont justifiées a posteriori dans le paragraphe 2.5.1. Elles s'expliquent par le fait que le plateau support de la structure n'a pas une raideur infinie et peut fléchir sous l'effet d'une forte tension dans la poutre ou d'un effort tranchant important au niveau des encastremets. Ce fléchissement se traduit par un mouvement horizontal qui a motivé l'introduction d'une raideur longitudinale  $k_{liaison}$  et par une rotation des cubes d'encastrement sous l'effet d'un effort tranchant qui a motivé l'introduction d'une raideur  $k_{rot}$ . Ces 2 raideurs sont des paramètres inconnus a priori qui sont recalés au paragraphe 2.3, tout comme l'amortissement  $\mu$  et la demi longueur effective de la poutre  $l$ . Cette demi longueur effective de la poutre ajoute 2 effets de raideur inconnus a priori à la valeur réelle de la demi longueur de la poutre. Il s'agit de l'effet de la raideur non-infinie des congés au niveau des encastremets ainsi que de l'effet de la précontrainte non-maîtrisée dans la poutre qui

est présenté au paragraphe 2.1.4.

À partir des équations (2.3) et (2.5), on peut exprimer  $T$  en fonction de  $w$  puis réécrire l'équation dynamique (2.2) en fonction uniquement de  $w$ . Le problème non-linéaire continu s'exprime ainsi :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \rho A a_{excit} \cos(\Omega t) + \frac{EA}{2l} \left(1 + \frac{EA}{l k_{liaison}}\right)^{-1} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Calcul des modes propres

L'équation (2.6), continue en temps et en espace peut être directement traitée par des méthodes analytiques telles que la méthode des développements multi-échelles qui sera présentée au paragraphe 2.3. Si on souhaite par contre traiter le problème par des méthodes numériques, il est nécessaire de le discrétiser en espace. Pour cela, les modes propres du système linéaire sous-jacent (Eq. 2.7) sont calculés et l'équation (2.6) est projetée sur cette base modale.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.7)$$

Les modes propres de l'équation (2.7) s'écrivent sous la forme :

$$Y_i(x) = \alpha \sin\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \beta \cos\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \delta \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) \quad (2.8)$$

avec  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  solutions de :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 + \frac{EI\lambda_i^2}{k_{rot}l^2} & 0 & 1 - \frac{EI\lambda_i^2}{k_{rot}l^2} & 0 \\ \cos(\lambda_i) & -\sin(\lambda_i) & \cosh(\lambda_i) & \sinh(\lambda_i) \\ -\cos(\lambda_i) & \sin(\lambda_i) & \cosh(\lambda_i) & \sinh(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

et  $\lambda_i$  la  $i^{\text{ème}}$  solution de l'équation :

$$\left(1 - \frac{EI\lambda_i^2}{k_{rot}l^2}\right) \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) + \left(1 + \frac{EI\lambda_i^2}{k_{rot}l^2}\right) \sin(\lambda_i) \cosh(\lambda_i) = 0 \quad (2.10)$$

$Y_i$  peut alors être réécrit sous la forme :

$$Y_i(x) = -\tan(\lambda_i) \sin\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \tanh(\lambda_i) \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) \quad (2.11)$$

Les formes propres  $Y_1$  et  $Y_2$  sont tracées sur la figure 2.7. Comme la réponse expérimentale du système est le déplacement transverse de la poutre en  $x = l$ , les formes propres sont normalisées pour qu'elles valent 1 en  $x = l$ . Ce choix de normalisation permet ensuite d'avoir une relation simple entre le déplacement total en  $x = l$  et les composantes modales  $w_i$  :

$$w(l) = \sum_i w_i \quad (2.12)$$

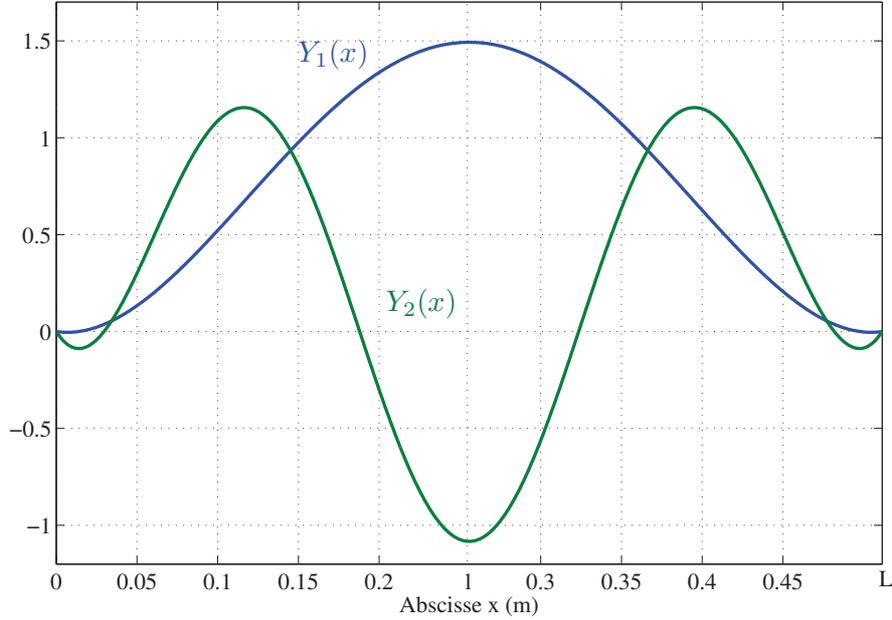


FIG. 2.7: Les 2 premières formes modales.

L'ensemble des modes retenus dans la projection modale est noté  $M$ . Comme seule la première résonance est étudiée ici, on se limite à  $M=\{1,2\}$ . L'équation (2.6) est ensuite projetée sur la base modale :

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{dw_i}{dt} + \Omega_i^2 w_i = \Gamma_i a_{excit} \cos(\Omega t) + \sum_{\{j,k,m\} \in M^3} \Gamma_{ijkm} \cdot w_j w_k w_m \quad \forall i \in M \quad (2.13)$$

où :

$$w_i(t) = \frac{Y_i(l)}{l} \int_0^l w(x,t) \cdot Y_i(x) dx; \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{EI \lambda_i^2}{\rho A l^2}}; \quad \Gamma_i = \frac{Y_i(l)}{l} \int_0^l Y_i(x) dx$$

$$\Gamma_{ijkm} = \frac{-E Y_i(l)}{2\rho l^2 Y_j(l) Y_k(l) Y_m(l)} \left(1 + \frac{EA}{l k_{liaison}}\right)^{-1} \left(\int_0^l \frac{dY_j}{dx} \frac{dY_k}{dx} dx\right) \left(\int_0^l \frac{dY_m}{dx} \frac{dY_i}{dx} dx\right)$$

### 2.2.3 Projection modale d'un modèle éléments finis

Afin de rendre les résultats de cette étude indépendants de la capacité à construire un modèle analytique non-linéaire continu de la structure, nous avons cherché à obtenir les coefficients de l'équation (2.13) par un modèle éléments finis. La poutre bi-encastrée a été ainsi modélisée en 2 dimensions par

Fréquence propre (Hz)	Analytique	ABAQUS	Erreur en %
$F_1$	121,20	121,14	-0,05
$F_2$	334,08	333,87	-0,06
$F_3$	654,93	655,19	0,04

TAB. 2.4: Comparaison entre les fréquences propres du modèle analytique et celles du modèle éléments finis.

10 éléments poutre quadratiques. Il s'agit ainsi d'un modèle à 21 nœuds. Par simplicité, nous avons soumis ce modèle à des conditions d'encastrement parfaites en  $x = 0$  :

$$u(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0) = 0 \quad (2.14)$$

Les coefficients correspondants à ces conditions aux limites idéales peuvent être comparés directement aux résultats analytiques calculés en partie 2.2, en prenant  $k_{rot} \rightarrow \infty$  et  $k_{liaison} \rightarrow \infty$ . L'analyse modale numérique du système permet directement d'obtenir les pulsations propres  $\Omega_i$  et les facteurs de participation  $\Gamma_i$ . Les fréquences propres des modèles numérique et analytique sont comparées dans le tableau 2.4. La difficulté consiste à déterminer les coefficients non-linéaires  $\Gamma_{ijklm}$  à partir d'un logiciel éléments finis. Une méthode a été présentée par Muravyov [58] et a été appliquée ici. Cette procédure a été a posteriori dénommée STEP (STiffness Evaluation Procedure). Une revue présentant les différentes manières de l'implémenter et différents domaines d'application a été proposée par Mignolet et al. [54]. Parmi les applications de cette méthode, Lazarus et al. [50] l'utilisent pour déterminer les coefficients non-linéaires d'une nano-poutre bi-encastrée. Mignolet et Soize [55] ont étudié le couplage de cette méthode avec la prise en compte d'incertitudes géométriques [55]. Une autre méthode a été proposée par Touzé [100] pour calculer ces coefficients dans le cas d'une modélisation avec des éléments finis de type coque mince. Elle limite le nombre de calculs à effectuer par rapport à la procédure STEP mais n'est pas adaptable à un logiciel élément fini commercial.

Pour un problème modélisé par éléments finis, les termes non-linéaires géométriques trouvent leur origine dans l'opérateur de déformation de Green-Lagrange. Cet opérateur contient une fonction quadratique du déplacement qui est négligée dans l'hypothèse des petites déformations. L'opérateur est alors approximé par le tenseur des petites déformations qui est linéaire. Si l'on conserve ces termes quadratiques et que l'on applique le principe des travaux virtuels pour obtenir l'équation de la dynamique, on obtient une force polynomiale d'ordre au plus 3. Ce résultat est assez général pour les non-linéarités géométriques, seules les non-linéarités de type poutre en grande rotation génèrent des termes en cosinus et sinus des degrés de liberté du système [94]. Ainsi l'équation dynamique non-linéaire d'une structure modélisée par éléments finis soumise à des grands déplacements peut très généralement se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl2}}(\mathbf{W}) + \mathbf{F}_{\text{nl3}}(\mathbf{W}) \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{W} = {}^T[w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$  est le vecteur des déplacements du modèle.

$\mathbf{F}_{\text{nl2}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{nl3}}$  sont des fonctions respectivement quadratiques et cubiques :

$$\mathbf{F}_{\text{nl2}}(\mathbf{W}) = \left\{ \sum_{b,c \in [1..n]^2} \gamma_{abc} w_b w_c \right\}_{a=1..n} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nl3}}(\mathbf{W}) = \left\{ \sum_{b,c,d \in [1..n]^3} \gamma_{abcd} w_b w_c w_d \right\}_{a=1..n} \quad (2.17)$$

On note  $\Phi_{\mathbf{M}} = \{\Phi_{\mathbf{m}}\}_{m \in M}$  la base modale du système linéaire sous-jacent de l'équation (2.15). En projetant l'équation (2.15) sur sa base modale, on obtient :

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}} + {}^T \Phi_{\mathbf{M}} \mathbf{D} \Phi_{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_M^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{M}} = {}^T \Phi_{\mathbf{M}} \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{f}_{\text{nl2}}(\mathbf{Q}_{\mathbf{M}}) + \mathbf{f}_{\text{nl3}}(\mathbf{Q}_{\mathbf{M}}) \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{Q}_{\mathbf{M}}$  est le vecteur des déplacements modaux. Les fonctions  $\mathbf{f}_{\text{nl2}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{nl3}}$  sont également respectivement quadratiques et cubiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{nl2}}(\mathbf{Q}_{\mathbf{M}}) &= {}^T \Phi_{\mathbf{M}} \mathbf{F}_{\text{nl2}} ({}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{M}} \Phi_{\mathbf{M}}) = \left\{ \sum_{a,b,c \in [1..n]^3} \Phi_{\mathbf{i}|a} \gamma_{abc} \left( \sum_{j \in M} \Phi_{\mathbf{j}|b} q_j \right) \left( \sum_{k \in M} \Phi_{\mathbf{k}|c} q_k \right) \right\}_{i \in M} \\ &= \left\{ \sum_{j,k \in M^2} \Gamma_{ijk} q_j q_k \right\}_{i \in M} \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{a,b,c \in [1..n]^3} \Phi_{\mathbf{i}|a} \Phi_{\mathbf{j}|b} \Phi_{\mathbf{k}|c} \gamma_{abc} \quad (2.20)$$

De même :

$$\mathbf{f}_{\text{nl3}}(\mathbf{Q}_{\mathbf{M}}) = {}^T \Phi_{\mathbf{M}} \mathbf{F}_{\text{nl3}} ({}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{M}} \Phi_{\mathbf{M}}) = \left\{ \sum_{j,k,m \in M^3} \Gamma_{ijkm} q_j q_k q_m \right\}_{i \in M} \quad (2.21)$$

avec

$$\Gamma_{ijkm} = \sum_{a,b,c,d \in [1..n]^4} \Phi_{\mathbf{i}|a} \Phi_{\mathbf{j}|b} \Phi_{\mathbf{k}|c} \Phi_{\mathbf{m}|d} \gamma_{abcd} \quad (2.22)$$

Nous cherchons à évaluer directement les coefficients non-linéaires modaux  $\Gamma_{ijk}$  et  $\Gamma_{ijkm}$ . Pour cela, l'idée de Muravyov [58] est d'utiliser les algorithmes de dynamique non-linéaire des logiciels éléments finis commerciaux dans lesquels les fonctions  $\mathbf{F}_{\text{nl2}}(\mathbf{W})$  et  $\mathbf{F}_{\text{nl3}}(\mathbf{W})$  sont calculées. Lors d'un calcul statique non-linéaire, la force générée par un déplacement imposé  $\mathbf{W}$  est  $\mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl2}}(\mathbf{W}) + \mathbf{F}_{\text{nl3}}(\mathbf{W})$  alors que pour le même déplacement imposé, un calcul statique linéaire produira une force  $\mathbf{F}_{\text{excit}}$ .

Par différence, on peut générer  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl2}}(\mathbf{W}) + \mathbf{F}_{\mathbf{nl3}}(\mathbf{W})$  pour n'importe quel déplacement imposé. Ainsi par l'algorithmique décrite par Muravyov et par un certain nombre de calculs statiques linéaires et non-linéaires sur le modèle éléments finis complet, les termes  $\Gamma_{ijk}$  et  $\Gamma_{ijkm}$  vont pouvoir être évalués.

Cet algorithme est ici détaillé pour le premier terme  $\Gamma_{1111}$ . On commence par évaluer la réponse en force à un déplacement imposé suivant le vecteur  $A.\Phi_1$ . L'amplitude  $A$  doit être assez importante pour que les effets non-linéaires soient significatifs mais pas trop pour limiter les problèmes de convergence lors des calculs statiques non-linéaires. Pour la poutre bi-encastrée,  $A = 10^{-3}$  m a été choisi. En réalisant le calcul éléments finis en linéaire et en non-linéaire on obtient par différence  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl2}}(A.\Phi_1) + \mathbf{F}_{\mathbf{nl3}}(A.\Phi_1)$ . Pour différencier les 2 contributions, on réalise la même opération avec le déplacement imposé suivant le vecteur  $-A.\Phi_1$ . Comme la fonction  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl2}}$  est symétrique alors que  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl3}}$  est antisymétrique, on obtient par différence  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl2}}(A.\Phi_1) - \mathbf{F}_{\mathbf{nl3}}(A.\Phi_1)$ . Par différence avec le résultat précédent, on a :

$$\Gamma_{1111} = \frac{\mathbf{f}_{\mathbf{nl3}}([A, 0, \dots, 0])}{A^3} = \frac{1}{A^3} {}^T\Phi_1 \mathbf{F}_{\mathbf{nl3}}(A.\Phi_1) \quad (2.23)$$

Cette logique est étendue à tous les coefficients non-linéaires  $\Gamma_{ijk}$  et  $\Gamma_{ijkl}$ . Pour la poutre bi-encastrée avec des conditions d'encastrement idéales, on peut comparer ces coefficients obtenus numériquement avec ceux calculés par le modèle analytique. La comparaison est présentée sur le tableau 2.5 pour tous les coefficients non-nuls. On observe que l'intégralité des coefficients est retrouvée par cette méthode numérique avec une excellente précision par rapport au modèle analytique de la poutre.

Au niveau informatique, le processus est présenté sur la Figure 2.8. Les calculs éléments finis sont réalisés par le logiciel ABAQUS (étapes représentées en orange). Le reste de l'algorithmique a été implémenté dans le langage Python. Trois scripts Python, représentés chacun par un rectangle vert, ont été réalisés.

## 2.3 Recalage par la méthode des développements multi-échelles

La méthode des développements multi-échelles [64], permet de résoudre analytiquement l'équation différentielle (2.2) au voisinage de la première résonance. Cette méthode est utilisée ici pour recalculer les 4 paramètres inconnus du modèle présentés au paragraphe 2.2.1 : la demi-longueur effective de la poutre  $l$ , le coefficient d'amortissement linéaire visqueux  $\mu$ , les raideurs d'encastrement en rotation  $k_{rot}$  et longitudinale  $k_{liaison}$ . Cette méthode de recalage est directement inspirée de la méthode proposée par Malatkar [53]. De plus, la mise en place de la méthode des développements multi-échelles suit la démarche détaillée dans les travaux de Tabaddor [92, 93].

Tout d'abord, les variables et les paramètres sont adimensionnés :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \sqrt{\frac{EI \lambda^2}{\rho A l^2}} t; & \tilde{\Omega} &= \sqrt{\frac{\rho A l^2}{EI \lambda^2}} \Omega; & \tilde{x} &= \frac{x}{l}; & r &= \sqrt{\frac{I}{A}} (\text{rayon de giration}); & \tilde{w} &= \frac{w}{r}; \\ \tilde{a}_{excit}(\tilde{t}) &= \frac{\rho A l^4}{EI \lambda^4 r} a_{excit}(t); & \tilde{\mu} &= \frac{l^2}{\lambda^2 \sqrt{\rho A EI}} \mu; & \tilde{k}_{liaison} &= \frac{l}{EA} k_{liaison}; & \tilde{k}_{rot} &= \frac{l^2}{EI \lambda^2} k_{rot} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Coefficient	Analytique	ABAQUS	Erreur en %
$\Gamma_{1111}$	$-1.67 \cdot 10^{10}$	$-1.66 \cdot 10^{10}$	-0.22
$\Gamma_{1113}$	$-1.18 \cdot 10^{10}$	$-1.17 \cdot 10^{10}$	0.44
$\Gamma_{1122}$	$-6.24 \cdot 10^{10}$	$-6.23 \cdot 10^{10}$	-0.29
$\Gamma_{1131}$	$-4.47 \cdot 10^{10}$	$-4.47 \cdot 10^{10}$	-0.12
$\Gamma_{1133}$	$-1.55 \cdot 10^{11}$	$-1.55 \cdot 10^{11}$	-0.24
$\Gamma_{1221}$	$-6.92 \cdot 10^{10}$	$-6.92 \cdot 10^{10}$	0.08
$\Gamma_{1223}$	$-4.84 \cdot 10^{10}$	$-4.86 \cdot 10^{10}$	0.47
$\Gamma_{1232}$	$-1.12 \cdot 10^{11}$	$-1.11 \cdot 10^{11}$	-0.52
$\Gamma_{1331}$	$-1.98 \cdot 10^{11}$	$-1.96 \cdot 10^{10}$	-0.71
$\Gamma_{1333}$	$-3.60 \cdot 10^{11}$	$-3.59 \cdot 10^{11}$	-0.28
$\Gamma_{2222}$	$-2.59 \cdot 10^{10}$	$-2.59 \cdot 10^{10}$	-0.10
$\Gamma_{2231}$	$-6.18 \cdot 10^{10}$	$-6.17 \cdot 10^{10}$	-0.17
$\Gamma_{2233}$	$-5.56 \cdot 10^{10}$	$-5.55 \cdot 10^{10}$	-0.17
$\Gamma_{2332}$	$-6.41 \cdot 10^{10}$	$-6.35 \cdot 10^{10}$	-0.94
$\Gamma_{3331}$	$-1.53 \cdot 10^{11}$	$-1.52 \cdot 10^{11}$	-0.77
$\Gamma_{3333}$	$-1.38 \cdot 10^{12}$	$-1.36 \cdot 10^{12}$	-1.18

TAB. 2.5: Comparaison entre les coefficients non-linéaires calculés analytiquement et ceux évalués grâce à la méthode éléments finis « Muravyov ».

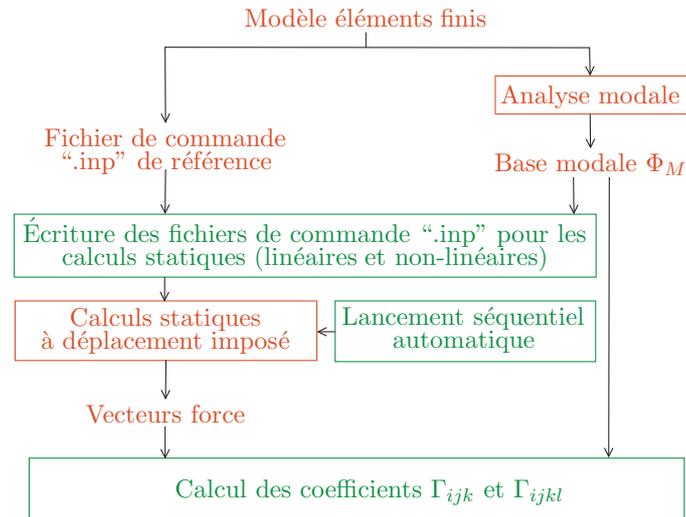


FIG. 2.8: Processus informatique de calcul des coefficients non-linéaires géométriques modaux ( $\Gamma_{ijk}$  et  $\Gamma_{ijkl}$ ) à partir d'un modèle éléments finis. Les étapes réalisées sous ABAQUS sont représentées en orange, celles réalisées par un script Python en vert.

Le paramètre  $\varepsilon$  est introduit : il représente l'ordre de grandeur du petit déplacement  $\tilde{w}$ .  $\tilde{t}$  et  $\tilde{w}$  sont développés en polynôme de  $\varepsilon$  :

$$\tilde{t} = \tilde{t}_0 + \varepsilon \tilde{t}_1 + \varepsilon^2 \tilde{t}_2 + \dots \quad \text{et} \quad \tilde{w} = \varepsilon \tilde{w}_1 + \varepsilon^2 \tilde{w}_2 + \varepsilon^3 \tilde{w}_3 + \dots \quad (2.25)$$

L'ordre de grandeur du terme non-linéaire dans l'équation (2.2) est  $\varepsilon^3$ . Les termes adimensionnés d'amortissement et d'excitation sont redéfinis de sorte que leur ordre de grandeur soit également  $\varepsilon^3$  :

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\mu}}{\varepsilon^2} \quad \text{and} \quad \tilde{a}_{excit} = \frac{\tilde{a}_{excit}}{\varepsilon^3} \quad (2.26)$$

Dans le cadre de la méthode des développements multi-échelles, les phénomènes se produisant aux différentes échelles  $\varepsilon^i$  sont supposés indépendants les uns des autres. L'équation dynamique (2.2) peut ainsi être séparée en fonction des différents ordres :

$$\begin{aligned} \text{1}^{\text{er}} \text{ ordre} \quad & \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \\ \text{2}^{\text{ème}} \text{ ordre} \quad & \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial \tilde{t}_0^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_2}{\partial \tilde{x}^4} = -2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_1} \\ \text{3}^{\text{ème}} \text{ ordre} \quad & \frac{\partial^2 \tilde{w}_3}{\partial \tilde{t}_0^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_3}{\partial \tilde{x}^4} = -2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_1} - \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0} + \tilde{a}_{excit} \cos(\tilde{\Omega} \tilde{t}) \\ & + \left(1 + \frac{1}{\tilde{k}_{liaison}}\right)^{-1} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}}\right)^2 dx\right) \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \tilde{w}_i(0) = 0; \quad \frac{\partial^3 \tilde{w}_i}{\partial \tilde{x}^3}(0) = \tilde{k}_{rot} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial \tilde{x}}(0); \quad \tilde{w}_i(1) = 0; \quad \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial \tilde{x}}(1) = 0$$

$\tilde{w}_1$  est la solution du problème linéaire sous-jacent. On écrit  $\tilde{w}_1$  comme le produit d'une composante spatiale et temporelle. La composante spatiale est une combinaison linéaire de modes propres de la structure. Comme on se place au voisinage de la première résonance, le premier mode domine. En utilisant la formulation adimensionnée  $\tilde{Y}_1(\tilde{w}) = Y_1(w)$ , on peut écrire  $\tilde{w}_1$  sous la forme :

$$\tilde{w}_1(\tilde{x}, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = \tilde{Y}_1(\tilde{x}) A_1(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) e^{i\tilde{t}_0} + cc \text{ (complexe conjugué)} \quad (2.28)$$

L'indépendance entre les différentes échelles et l'unicité d'un tel développement repose sur l'orthogonalité des termes  $\tilde{w}_i$  entre eux et sur une condition de solvabilité. Comme le problème est auto-adjoint, ce qui peut être démontré en suivant la procédure présentée par Nayfeh [61], la condition de solvabilité consiste en l'élimination des termes séculaires. Ces termes séculaires sont les termes de forçage qui sont colinéaires en temps et en espace à  $\tilde{w}_1$ . À l'ordre 2, la condition de solvabilité s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_1} = \frac{\partial A_1}{\partial \tilde{t}_1} = 0 \quad (2.29)$$

Ainsi  $\tilde{w}_2$  est solution du même problème homogène que  $\tilde{w}_1$ .  $\tilde{w}_2$  est donc colinéaire à  $\tilde{w}_1$ . Comme on impose qu'il lui soit également orthogonal,  $\tilde{w}_2$  est par conséquent nul.

Pour le traitement de la condition de solvabilité de l'ordre 3, on définit préalablement le paramètre de désaccordage  $\sigma$  qui mesure la distance entre la pulsation d'excitation  $\Omega$  et la première pulsation

propre du système  $\Omega_1$ . Comme on se place au voisinage de  $\Omega_1$ , on considère que le désaccordage adimensionné est d'ordre  $\varepsilon^2$  et on définit :

$$\sigma = \frac{\Omega - \Omega_1}{\varepsilon^2 \Omega_1} \quad (2.30)$$

Cette définition permet de développer la pulsation d'excitation :

$$\tilde{\Omega} \tilde{t} = \tilde{t}_0 + \sigma \tilde{t}_2 \quad (2.31)$$

Dès lors, la condition de solvabilité du problème (2.27) à l'ordre 3 s'écrit :

$$-i \frac{dA_1}{d\tilde{t}_2} - i \frac{\tilde{\mu}}{2} + \frac{a_{excit}}{2} \left( \int_0^1 \tilde{Y}_1 d\tilde{x} \right) e^{i\sigma \tilde{t}_2} - 3A_1^2 \bar{A}_1 \left( 1 + \frac{1}{\tilde{k}_{liaison}} \right)^{-1} \left( \int_0^1 \left( \frac{d\tilde{Y}_1}{d\tilde{x}} \right)^2 dx \right)^2 = 0 \quad (2.32)$$

En écrivant  $A_1$  sous forme polaire,

$$A_1(\tilde{t}_2) = \frac{a_1(\tilde{t}_2)}{2} e^{i\beta(\tilde{t}_2)} \quad (2.33)$$

et en introduisant l'angle  $\theta = \sigma \tilde{t}_2 - \beta(\tilde{t}_2)$ , l'équation (2.32) se réécrit :

$$-\frac{i}{2} \frac{da_1}{d\tilde{t}_2} + i \frac{a_1}{2} \frac{d\theta}{d\tilde{t}_2} - i\sigma \frac{a_1}{2} - i \frac{\tilde{\mu}}{2} + \frac{a_{excit}}{2} \left( \int_0^1 \tilde{Y}_1 d\tilde{x} \right) e^{i\theta} - \frac{3}{8} a_1^3 \left( 1 + \frac{1}{\tilde{k}_{liaison}} \right)^{-1} \left( \int_0^1 \left( \frac{d\tilde{Y}_1}{d\tilde{x}} \right)^2 dx \right)^2 = 0 \quad (2.34)$$

On considère le régime stationnaire pour lequel  $\frac{da_1}{d\tilde{t}_2}$  et  $\frac{d\theta}{d\tilde{t}_2}$  sont nuls. En séparant partie réelle et imaginaire et en sommant le carré des expressions obtenues afin de faire disparaître la dépendance en  $\theta$ , on obtient une relation entre l'amplitude  $a_1$  et le désaccordage fréquentiel  $\sigma$  que l'on nomme l'équation aux amplitudes :

$$\sigma = -\frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{\tilde{k}_{liaison}} \right)^{-1} \left( \int_0^1 \left( \frac{d\tilde{Y}_1}{d\tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} \right)^2 a_1^2 \pm \sqrt{\left( \frac{\tilde{a}_{excit}}{a_1} \int_0^1 \tilde{Y}_1 d\tilde{x} \right)^2 - \left( \frac{\tilde{\mu}}{2} \right)^2} \quad (2.35)$$

Cette équation donne une expression analytique de la courbe de réponse fréquentielle. Il s'agit bien de l'amplitude de réponse stationnaire en fonction de la fréquence d'excitation. Afin de pouvoir comparer ces résultats aux essais, on réécrit l'équation aux amplitudes avec des grandeurs dimensionnées. On obtient une relation entre la fréquence d'excitation  $F$  et l'amplitude de déplacement  $w$  au milieu de la poutre. La courbe correspondante est tracée Figure 2.9.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \left( 1 + \mathbf{B} w^2 \pm \mathbf{C} \sqrt{\left( \frac{a_{excit}}{\Omega_0^2 w} \right)^2 - \mathbf{D}^2} \right) \quad (2.36)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI \lambda_1^2}{\rho A l^2}}; & \Omega_0 &= 2\pi \mathbf{F}_0; & \mathbf{B} &= \frac{-3 Al^2}{16 I Y_1(l)^2 \lambda_1^4} \left( \int_0^l \left( \frac{dY_1}{dx} \right)^2 dx \right)^2 \left( 1 + \frac{EA}{l k_{liaison}} \right)^{-1} \\ \mathbf{C} &= \frac{Y_1(l)}{l} \left( \int_0^l Y_1(x) dx \right); & \mathbf{D} &= \left( \int_0^l Y_1(x) dx \right)^{-1} \frac{l^3}{\lambda_1^2 Y_1(l) \sqrt{\rho A E I}} \mu \end{aligned} \quad (2.37)$$

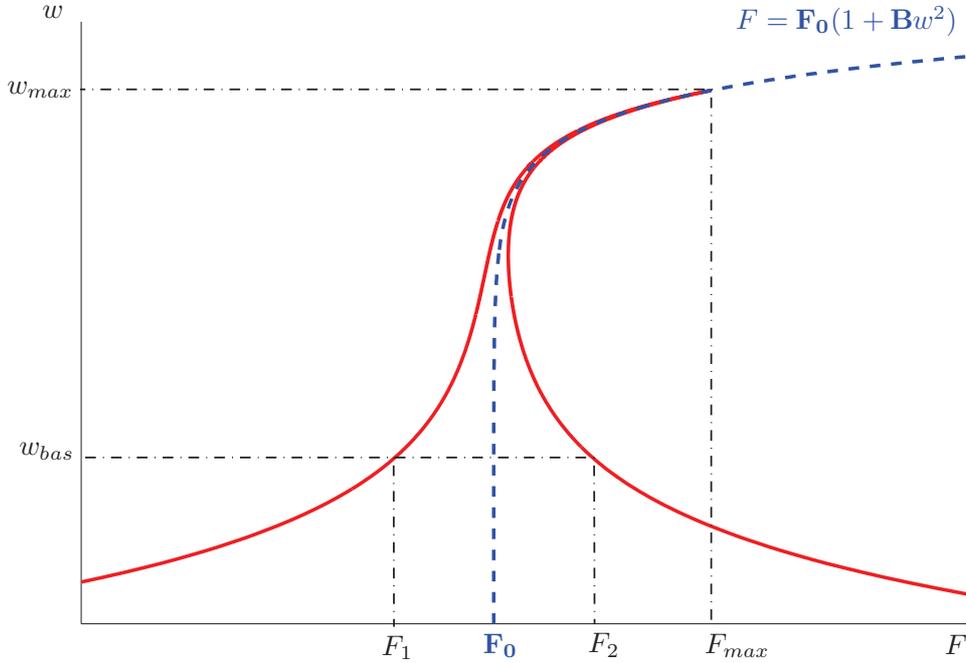


FIG. 2.9: Courbe de réponse fréquentielle paramétrique obtenue par la méthode des développements multi-échelles.

Dans le modèle présenté en partie 2.2, quatre paramètres sont recalés expérimentalement :  $\mu$ ,  $l$ ,  $k_{rot}$  et  $k_{liaison}$ . La méthode de recalage mise en place se base sur les travaux de Malatkar [53]. Il s'agit d'estimer la valeur des paramètres à partir de la simple lecture de quelques points sur la courbe de réponse fréquentielle.

Tout d'abord, sur la courbe de réponse fréquentielle analytique, Fig. (2.9), on définit 4 grandeurs observables.  $w_{max}$  est l'amplitude maximale atteinte. On choisit une amplitude  $w_{bas}$  arbitrairement basse, de sorte que  $\mathbf{B} w_{bas}^2 \ll 1$  (peu d'effets non-linéaires). La courbe de réponse fréquentielle coupe l'ordonnée  $w_{bas}$  en  $F_1$  et  $F_2$ . On peut ensuite évaluer les paramètres  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{F}_0$  à partir des quatre valeurs précédemment observées :

$$\mathbf{F}_0 = \frac{F_1 + F_2}{2} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B} = \frac{F_{max} - \mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0 w_{max}^2} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{D} = \frac{a_{excit}}{w_{max} \Omega_0^2} \quad (2.40)$$

Parametre		Exp 1 Excit = 2 m.s <sup>-2</sup>	Exp 2 Excit = 4 m.s <sup>-2</sup>	Exp 3 Excit = 6 m.s <sup>-2</sup>
$l$	Demi-longueur effective	0,2549 m	0,2552 m	0,2554 m
$\mu$	Coefficient d'amortissement visqueux	2,4 kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup>		
$k_{rot}$	Raideur d'encastrement en rotation	5,66.10 <sup>4</sup> N.rad <sup>-1</sup>		
$k_{liaison}$	Raideur d'encastrement longitudinale	8,11.10 <sup>7</sup> N.m <sup>-1</sup>		

TAB. 2.6: Valeur des paramètres physiques recalés.

$$\mathbf{C} = \left( \left( \frac{a_{excit}}{\Omega_0^2 w_{bas}} \right)^2 - \mathbf{D}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{F_2 - F_1}{2} \right) \quad (2.41)$$

Les quatre paramètres physiques du modèle ( $\mu$ ,  $l$ ,  $k_{rot}$  et  $k_{liaison}$ ) peuvent être calculés à partir des relations (2.36). Les dépendances sont les suivantes :  $\mathbf{C}(k_{rot})$ ,  $\mathbf{F}_0(k_{rot}, l)$ ,  $\mathbf{B}(k_{rot}, l, k_{liaison})$ ,  $\mathbf{D}(k_{rot}, l, \mu)$ . En utilisant la relation  $\mathbf{C}(k_{rot})$ , la raideur  $k_{rot}$  est évaluée en premier par une méthode de dichotomie. Les trois autres paramètres ( $\mu$ ,  $l$  et  $k_{liaison}$ ) sont calculés directement en inversant les relations (2.36). Le tableau 2.6 donne les valeurs recalées des paramètres pour les quatre expériences. Seule la demi-longueur effective de la poutre varie d'une expérience à l'autre. C'est le phénomène présenté au paragraphe 2.1.4, cette variation est expliquée par la présence d'une contrainte statique dans la poutre. Pour confirmer cette hypothèse, une relation est établie entre les variations de longueur effective de la poutre et l'effet d'une déformation statique. Des comparaisons sont ensuite effectuées avec les mesures de la jauge de déformation.

Lorsqu'une force statique longitudinale  $\delta P$  est appliquée, la fréquence fondamentale de la poutre est modifiée selon la formule suivante [7, p. 144] :

$$\frac{\delta \mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0} = \frac{1}{2} \frac{\delta P}{P_{flambage}} \quad (2.42)$$

où  $P_{flambage} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  pour une poutre bi-encastree. Grâce à l'expression analytique de la fréquence fondamentale (voir Eq. (2.36)), on traduit cette variation de fréquence propre  $\delta \mathbf{F}_0$  en variation de la demi-longueur effective de la poutre  $\delta l$  :

$$\frac{\delta \mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0} = -2 \frac{\delta l}{l} \quad (2.43)$$

La force  $\delta P$  peut être traduite en déformation longitudinale  $\delta \varepsilon$  :

$$\delta P = EA \delta \varepsilon \quad (2.44)$$

Enfin, on obtient une expression entre la déformation longitudinale de la poutre  $\delta \varepsilon$  et la variation de la demi-longueur effective de la poutre  $\delta l$  :

$$\delta \varepsilon = -4 \frac{P_{flambage}}{EA} \frac{\delta l}{l} \quad (2.45)$$

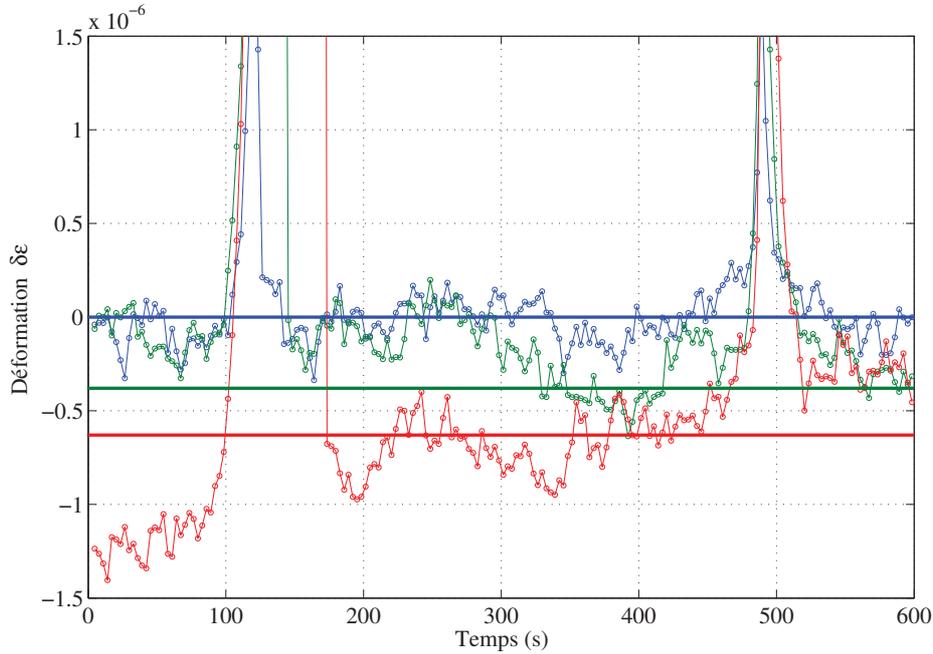


FIG. 2.10: Comparaison des valeurs de déformation expérimentale mesurées par les jauges (courbes avec cercles) avec celles du modèle de chargement longitudinal constant identifié à partir de la courbe de réponse fréquentielle (lignes droites). 3 niveaux d'excitation sont représentés :  $2 \text{ m.s}^{-2}$  (bleu),  $4 \text{ m.s}^{-2}$  (vert) et  $6 \text{ m.s}^{-2}$  (rouge).

Ainsi, les valeurs recalées de  $\delta l$  sont traduites en déformation  $\delta \varepsilon$  et comparées avec les mesures de la jauge sur la figure 2.10. Les mesures expérimentales sont filtrées par un filtre passe bas et moyennées pour apprécier leur valeur statique. Au voisinage des phénomènes de résonance, la déformation statique de la poutre augmente. Il s'agit de l'apparition du terme de tension  $T(t)$  (voir Eq. (2.3)) qui est proportionnel à  $w^2 \cos^2(\Omega t)$  et a donc une composante statique. En dehors de ces résonances, comme  $w^2$  est très faible, la valeur statique mesurée par la jauge n'est pas influencée par la réponse dynamique de la poutre. La déformation évoluant beaucoup au cours de l'expérience, il est difficile de définir précisément une déformation statique longitudinale constante. Cependant, la figure 2.10 montre que le recalage du paramètre  $l$  se traduit par des valeurs de déformation qui sont cohérentes avec les mesures de jauges. Cette comparaison justifie donc les explications données au paragraphe 2.1.4 sur la variabilité de la fréquence fondamentale. Il apparaît dès lors légitime de changer la valeur du paramètre recalé  $l$  d'une expérience à l'autre.

De récents travaux de Avalos et al. [3] se sont intéressés à une modélisation stochastique de poutres bi-encastrées dont le comportement incertain provient de l'état de la poutre avant et après encastrement. Ces travaux justifient eux aussi l'hypothèse que les glissements en fréquence observés proviennent

d'une évolution de la précharge de la poutre due aux conditions d'encastrement. La démarche de recalage présentée dans ce chapitre permet de compenser la méconnaissance a priori de la tension dans la poutre, cependant une modélisation stochastique serait nécessaire à une démarche de modélisation prédictive.

## 2.4 Simulations numériques

La méthode des développements multi-échelles n'est valable qu'au voisinage d'une fréquence particulière et ne parait pas facilement adaptable aux structures plus complexes en termes de taille du modèle et de fonctions non-linéaires qui seront abordées dans la suite de ces travaux (voir chapitre 4). Ce premier exemple académique a servi de cas-test pour mettre en œuvre deux méthodes de simulation numériques : la méthode de Balance Harmonique et la méthode de tir. Dans les deux cas, ces méthodes ont été couplées à une méthode de continuation pour résoudre numériquement le problème non-linéaire discret (Eq. (2.13)). Ce problème est tout d'abord réécrit sous forme matricielle :

$$\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{W}) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{W} &= \{w_i\}_{i \in M}; & \mathbf{D} &= \frac{\mu}{\rho A}; & \mathbf{K} &= \text{Diag}(\Omega_i^2)_{i \in M}; & \mathbf{F}_{\text{excit}} &= \{\Gamma_i a_{\text{excit}} \cos(\Omega t)\}_{i \in M} \\ \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{W}) &= \left\{ \sum_{\{j,k,m\} \in M^3} \Gamma_{ijkm} \cdot w_j w_k w_m \right\}_{i \in M} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dans ce qui suit, sont présentées succinctement les méthodes de balance harmonique et de tir ainsi que la technique de continuation mise en œuvre. Ces méthodes avait déjà été appliquées dans la littérature scientifique à l'étude de la réponse vibratoire non-linéaire de poutres [77, 4, 5]. La démarche de comparaison de ces méthodes entre elles et avec des résultats expérimentaux est, elle, plus originale.

### 2.4.1 Méthode de Balance Harmonique

La solution du problème (2.46) qui est recherchée est stationnaire. La méthode de Balance Harmonique [83] consiste à approcher cette solution par une série de Fourier tronquée de pulsation fondamentale  $\Omega$ . On passe ainsi d'une variable continue en temps à des coefficients de Fourier discrets. L'ordre de la série de Fourier  $N$ , est choisi en fonction du nombre d'harmoniques significatives attendues dans la réponse dynamique non-linéaire du système. Dans ce cas, l'ordre  $N$  a été choisi égal à 5. La réponse du système ainsi que les efforts non-linéaires et l'excitation sont développés en série de Fourier tronquée :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{B}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{A}_k \sin(k\Omega t)) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^N (\mathbf{C}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{S}_k \sin(k\Omega t)) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{C}_{k, \text{excit}} \cos(k\Omega t) + \mathbf{S}_{k, \text{excit}} \sin(k\Omega t)) \quad (2.50)$$

avec  $\mathbf{C}_{1,excit} = \{\Gamma_i a_{excit}\}_{i \in M}$  ,  $\mathbf{C}_{k,excit} = 0 \quad \forall k \neq 1$  et  $\mathbf{S}_{k,excit} = 0 \quad \forall k \in [1, N]$ .  
L'équation (2.46) est ensuite formulée dans cette nouvelle base de Fourier :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\Omega)^2\mathbf{I}_d & -k\Omega\mathbf{D} \\ k\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\Omega)^2\mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k,excit} \\ \mathbf{C}_{k,excit} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [1, N] \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité.

Les différents ordres harmoniques sont ainsi séparés. Les termes d'excitation  $\mathbf{S}_{k,excit}$  et  $\mathbf{C}_{k,excit}$  sont connus, la difficulté est de calculer les termes  $\mathbf{S}_k$  et  $\mathbf{C}_k$ . Dans le cas particulier d'une non-linéarité cubique, une relation analytique directe peut être exprimée entre les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires  $\mathbf{S}_k$  et  $\mathbf{C}_k$  et les coefficients de Fourier de la réponse  $[\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_N\mathbf{B}_N]$ . Cependant pour beaucoup de fonctions non-linéaires et en particulier pour l'exemple industriel qui sera traité au chapitre 4, une expression analytique de cette relation ne sera pas disponible. Nous nous sommes ainsi orientés vers un processus de calcul itératif pour ces coefficients non-linéaires. Il s'agit de la méthode AFT (« Alternating Frequency-Time domain method ») développée par Cameron et Griffin [9]. Cette méthode est décrite par le schéma suivant où DFT désigne la transformée de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform) :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_N\mathbf{B}_N] \xrightarrow{DFT^{-1}} \mathbf{W}(t) \xrightarrow{eq(2.47)} \mathbf{F}_{nl}(t) \xrightarrow{DFT} [\mathbf{C}_0\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_N\mathbf{C}_N] \quad (2.52)$$

Cette méthode permet donc de calculer les coefficients de Fourier de la force non-linéaire  $[\mathbf{C}_0\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_N\mathbf{C}_N]$  à partir des coefficients de Fourier de la réponse  $\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_N\mathbf{B}_N]$ , on peut résumer ce processus par une fonction non-linéaire :

$$[\mathbf{C}_0\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_N\mathbf{C}_N] = \mathbf{V}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (2.53)$$

L'équation de la dynamique discrète dans la base de Fourier (2.51) peut dès lors être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{V}_{excit} + \mathbf{V}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (2.54)$$

avec  $\mathbf{A} = \text{Diag} \left( \mathbf{K}, \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K} - (k\Omega)^2\mathbf{I}_d & -k\Omega\mathbf{D} \\ k\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\Omega)^2\mathbf{I}_d \end{array} \right] \right\}_{k=1,N} \right)$   
et  $\mathbf{V}_{excit} = [\mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{C}_{1,excit} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]_{2N+1}$

Le problème non-linéaire (2.46) continu en temps a ainsi été ramené à un problème non-linéaire discret dont la solution permet de décrire la réponse stationnaire de l'équation (2.46).

## 2.4.2 Méthode de tir

La méthode de tir est une méthode différente qui répond au même objectif que la précédente mais en utilisant l'intégration temporelle [68].

Tout d'abord, l'équation (2.46) est réécrite sous forme d'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{g}(\mathbf{Z}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z} = [\mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}}] \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(\mathbf{Z}) = [\dot{\mathbf{W}}, -\mathbf{D}\dot{\mathbf{W}} - \mathbf{K}\mathbf{W} + \mathbf{F}(\mathbf{W}) + \mathbf{F}_{\text{excit}}] \quad (2.55)$$

La réponse temporelle du système soumis à cette équation d'état dépend des conditions initiales. On note  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{Z}(t=0)$  l'état initial du système et  $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$  l'état du système au temps  $t$  connaissant la condition initiale  $\mathbf{z}_0$ . Cette expression souligne la dépendance de la réponse aux conditions initiales. La solution  $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$  est stationnaire si elle est périodique de période  $T = 1/\Omega$ . L'idée de la méthode de tir est de trouver  $\mathbf{z}_0$  de sorte que  $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$  soit périodique. On calcule ainsi  $\mathbf{Z}(T, \mathbf{z}_0)$  pour le comparer à  $\mathbf{z}_0$ . Ce calcul est effectué par intégration temporelle. Un pas de temps maximal est choisi puis un schéma d'intégration de Runge-Kutta du 4<sup>ème</sup> ordre est utilisé. Un algorithme d'adaptation du pas de temps est également mis en place pour minimiser l'erreur numérique sur le calcul de  $\mathbf{Z}(T, \mathbf{z}_0)$ .

La fonction résidu  $\mathbf{H}$  qui mesure l'erreur de périodicité de  $Z$  est introduite :

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_0, \Omega) = \mathbf{Z}(T, \mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_0 \quad (2.56)$$

On cherche alors à minimiser  $\mathbf{H}$ , qui est une fonction non-linéaire de  $\mathbf{z}_0$  et de  $\Omega$ . De même que pour la méthode de balance harmonique, l'équation (2.46) continue en temps a été transformée en un problème discret d'optimisation non-linéaire.

### 2.4.3 Méthode de Continuation

Afin de tracer une courbe de réponse fréquentielle continue dans l'espace des solutions, une méthode de continuation est mise en place. On détaille cette méthode pour la résolution du problème d'optimisation non-linéaire obtenu par la méthode de balance harmonique (2.54). La même méthode est appliquée pour l'équation (2.56) en remplaçant  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{z}_0$ . La méthode de continuation implémentée est dénommée « pseudo-arclength ».  $\Omega$  est considéré comme une variable au même titre que  $\mathbf{X}$ . La longueur d'arc entre deux points  $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{X}^{(i)}, \Omega^{(i)}]$  et  $\mathbf{Y}_{i+1} = [\mathbf{X}^{(i+1)}, \Omega^{(i+1)}]$  est définie par l'équation :

$$\Delta s_{i+1} = \sqrt{(\mathbf{X}^{(i+1)} - \mathbf{X}^{(i)})^2 + \alpha(\Omega^{(i+1)} - \Omega^{(i)})^2} \quad (2.57)$$

$\alpha$  est un coefficient numérique introduit pour prendre en compte la différence d'amplitude entre  $\Omega$  ( $\sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ ) et  $\|\mathbf{X}\|$  ( $\sim 10^{-3} \text{ m}$ ). Ce coefficient joue un rôle très important dans la convergence de l'algorithme de continuation, en particulier au voisinage des points singuliers.

La méthode de continuation est illustrée par la figure 2.11. Elle commence par une étape de prédiction. À partir de trois points déjà calculés sur la courbe de réponse fréquentielle, le point suivant est extrapolé de manière polynomiale. Un polynôme de Lagrange du second ordre est utilisé. La prédiction à l'abscisse  $s_{i+1}$  est ainsi :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} = \sum_{k=i-2}^i \left( \prod_{\substack{l=i-2 \\ l \neq k}}^i \left( \frac{s_{i+1} - s_l}{s_k - s_l} \right) \right) \mathbf{Y}_k \quad (2.58)$$

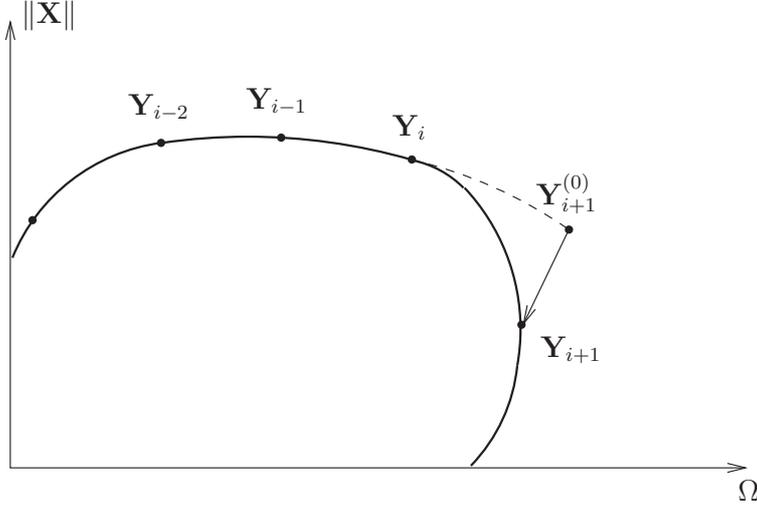


FIG. 2.11: Schéma du processus de continuation. La solution recherchée est tracée en trait plein noir. La prédiction polynomiale est représentée par les pointillés et la correction par la flèche.

Le pas de prédiction  $\Delta s$  est fixé a priori et est soumis à un algorithme adaptatif. Si l'étape de correction ne converge pas, la prédiction est modifiée avec un pas de prédiction égal à la moitié du pas de prédiction précédent.

Au cours de l'étape de correction, on cherche à rapprocher la prédiction  $\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)}$  de la courbe  $\mathbf{H}(\mathbf{Y}) = 0$ . Un algorithme de Newton est utilisé pour ce problème d'optimisation non-linéaire. Dans le cadre de la méthode « pseudo-arclength » choisie, la direction de recherche de la solution  $\mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{Y}_{i+1}^{(0)}$  est orthogonale à la direction de la prédiction  $\mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} - \mathbf{Y}_i$ , comme l'illustre la figure 2.11. La  $(j+1)^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme de correction nous donne le point  $\mathbf{Y}_{i+1}^{(j+1)}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}) \\ \mathbf{Y}_{i+1}^{(0)} - \mathbf{Y}_i \end{bmatrix} \left( \mathbf{Y}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} \right) = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Le calcul de la jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{Y}}\mathbf{H}$  se fait par différence finie. L'étape de correction se termine lorsque la norme de la fonction résidu  $\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)})$  est inférieure à la tolérance  $\varepsilon$  fixée par l'utilisateur.

Une telle méthode de continuation avec pas adaptatif permet de tracer des courbes continues de réponse fréquentielle et permet en particulier de passer les points singuliers qui caractérisent la courbe de réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing. Une méthode naïve consistant à fixer la pulsation  $\Omega_{i+1}$  puis à déterminer  $\mathbf{X}^{(i+1)}$  par une méthode de Newton initialisée par  $\mathbf{X}^{(i)}$  ne permet pas d'obtenir de tels résultats.

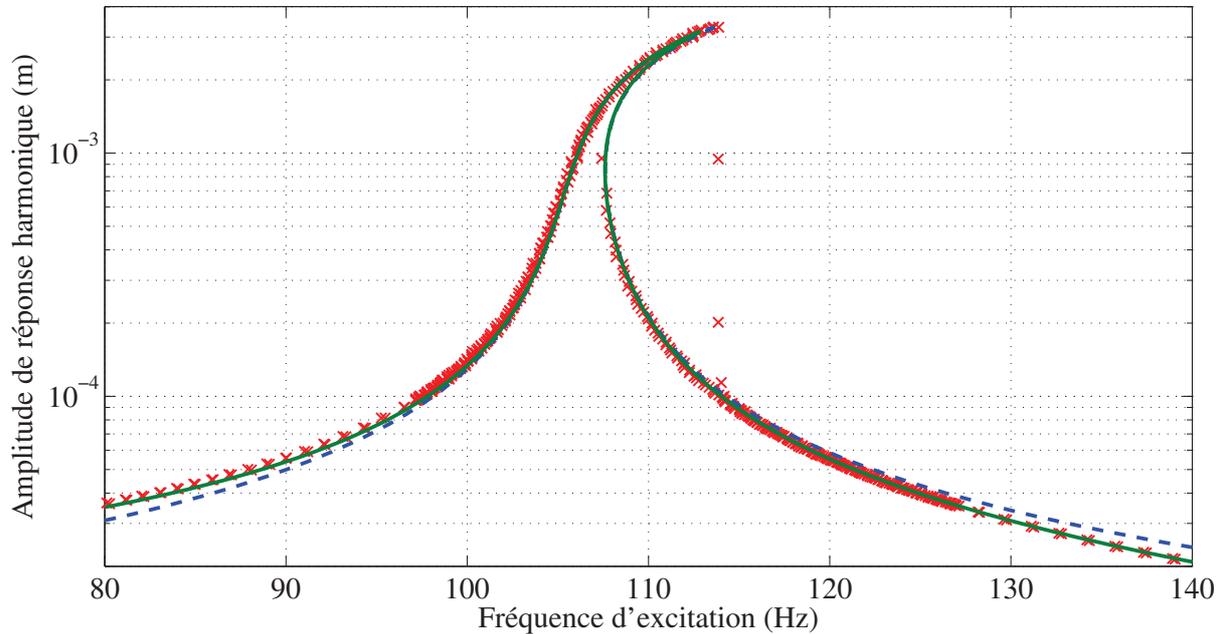


FIG. 2.12: Comparaison des données expérimentales (croix rouges) avec les résultats de simulation, pour une excitation de  $6 \text{ m.s}^{-2}$ . Les résultats obtenus par la méthode des développements multi-échelles (courbe bleue en pointillés) sont comparés à ceux obtenus par les méthodes numériques (courbe verte).

## 2.5 Comparaisons essai-calcul

Cette partie présente les résultats de simulation obtenus en considérant une excitation sinusoïdale (paragraphe 2.5.1) et une excitation multi-harmonique (paragraphe 2.5.2). Ces résultats sont comparés aux mesures expérimentales. Les hypothèses de modélisations sont également justifiées par l'expérience et l'influence des paramètres de recalage est étudiée.

### 2.5.1 Simulation avec entrée idéale

Les courbes de réponses fréquentielles simulées sont comparées aux mesures sur les figures 2.12 et 2.13. La figure 2.12 présente à la fois les résultats de simulation obtenus par la méthode des développements multi-échelles et par les simulations numériques. Il est à noter que les deux méthodes de simulation numérique (introduites aux paragraphes 2.4.1 et 2.4.2) ont donné des résultats identiques à 0.01% près. Cette convergence vient de la faible tolérance  $\varepsilon$  choisie pour les deux méthodes. Ainsi, sur chaque figure présentée dans cette partie, une seule courbe de résultat de simulation numérique est tracée puisque les résultats obtenus par les deux méthodes se confondent. Cette convergence des deux méthodes de simulation entre elles justifie a posteriori le choix de l'ordre de la troncature des séries de Fourier ( $N = 5$ ) dans la méthode de Balance Harmonique. Les deux méthodes de simulation ont également engendré des temps de calculs tout à fait comparables et qui dépendent principalement

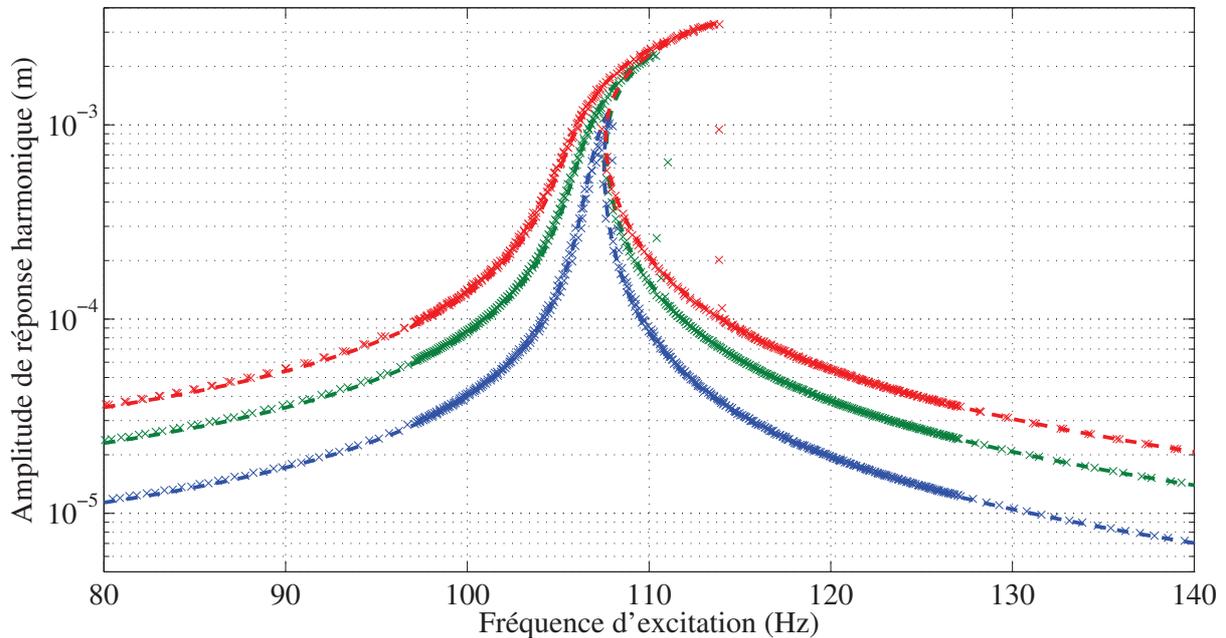


FIG. 2.13: Comparaison des données expérimentales (croix) avec la simulation numérique (courbes en pointillés) pour 3 niveaux d'excitation :  $2 \text{ m.s}^{-2}$  (bleu),  $4 \text{ m.s}^{-2}$  (vert) et  $6 \text{ m.s}^{-2}$  (rouge).

des paramètres de la méthode de continuation choisie. Ainsi, cet exemple n'aide pas vraiment au choix d'une méthode de calcul par rapport à l'autre. Par la suite, la méthode de Balance Harmonique a été privilégiée parce qu'elle permet d'avoir un accès direct à la décomposition harmonique de la réponse et que ces résultats peuvent être comparés à l'expérience (voir paragraphe 2.1.3).

Si les résultats des deux méthodes numériques se rejoignent, ils diffèrent cependant de la courbe de réponse fréquentielle analytique obtenue par la méthode des développements multi-échelles (précédemment présentée partie 2.3). La figure 2.12 met ainsi en avant les limites de la méthode des développements multi-échelles : cette méthode n'est, par construction, valable qu'au voisinage de la fréquence de résonance  $\mathbf{F}_0$ . La figure 2.12 montre ainsi que lorsqu'on s'éloigne de  $\mathbf{F}_0$  (à  $F=80 \text{ Hz}$  ou  $F=140 \text{ Hz}$  en particulier), la courbe de réponse analytique s'éloigne de celle des essais et des résultats numériques. De même, en observant attentivement le pic de résonance de la figure 2.12, on remarque que le sommet de la courbe de réponse analytique est plus élevé que celui de la réponse numérique et qu'elle est plus en accord avec l'expérience. Cette différence s'explique à nouveau par la distance  $F - \mathbf{F}_0$ . Comme ici l'effet de raidissement non-linéaire est très important, l'écart  $F - \mathbf{F}_0$  est significatif (8 Hz) et suffit à expliquer la différence entre les méthodes de simulation. La courbe la plus proche de la solution du problème posé par l'équation (2.6) reste bien celle obtenue par les méthodes numériques. Si la courbe analytique est plus proche des résultats, c'est un artefact dû à la méthode de recalage du modèle. Le paramètre qui permet d'ajuster la hauteur du pic de réponse est le coefficient d'amor-

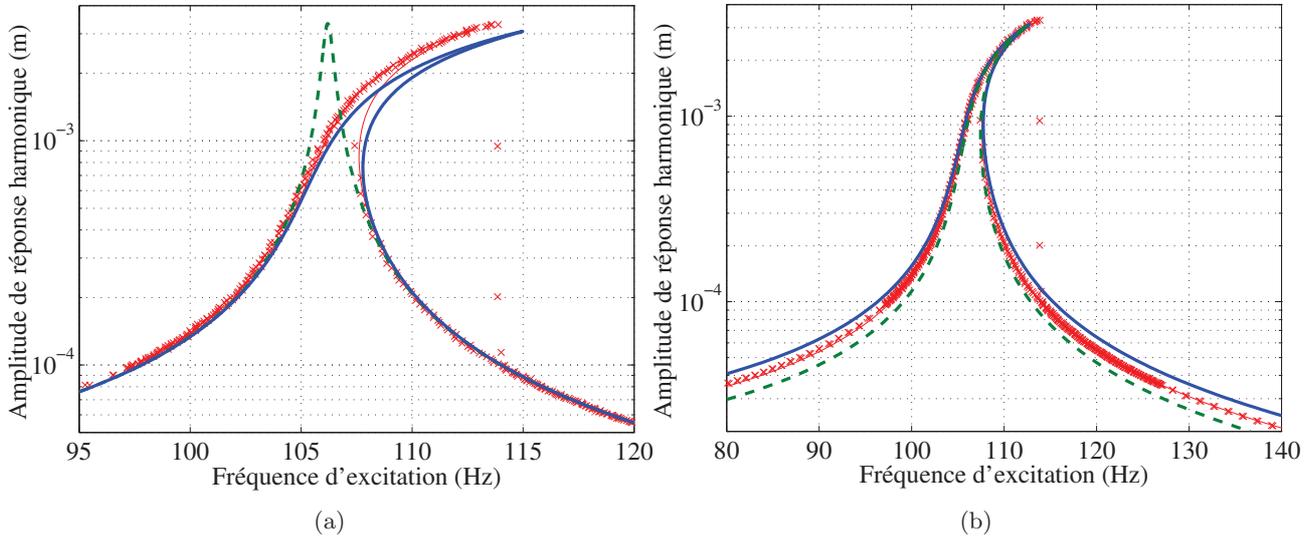


FIG. 2.14: Influence des paramètres  $k_{liaison}$  (a) et  $k_{rot}$  (b). Les mesures (croix rouges) sont comparées avec des simulations numériques. Les courbes rouges en trait plein représentent les résultats obtenus avec les paramètres recalés. La courbe bleue représente les asymptotes  $k_{liaison} \rightarrow \infty$  (a) et  $k_{rot} \rightarrow \infty$  (b). La courbe verte en pointillé représente les résultats obtenus avec  $k_{liaison} = 0$  (a) et  $k_{rot} = \frac{1}{2}k_{rot, recalé}$  (b).

tissement visqueux  $\mu$ . Ce paramètre a été ajusté en se basant sur la méthode des développements multi-échelles (voir partie 2.3), c'est pour cela que la courbe analytique est si proche des essais. La réponse du problème non-linéaire avec le jeu de paramètres recalés est en réalité plus proche de la courbe numérique. On se rend alors compte alors que la dissipation dans le modèle a été légèrement surestimée par la méthode de recalage proposée en partie 2.3.

La figure 2.13 compare les courbes de réponse fréquentielle harmonique obtenues par la méthode de balance harmonique aux courbes expérimentales, pour différents niveaux d'excitation. Les simulations reproduisent parfaitement les résultats expérimentaux quel que soit le niveau d'excitation. Les caractéristiques non-linéaires de ces réponses (présentées au paragraphe 2.1.2) sont parfaitement reproduites et ainsi expliquées par la méthode de simulation mise en place. Cette comparaison permet de valider le modèle développé, la valeur des paramètres recalés ainsi que les méthodes de simulation numérique utilisées.

L'effet des conditions d'encastrement non-idéales est illustré par la figure 2.14. Les courbes correspondantes à des conditions d'encastrement idéales (courbes bleues) sont comparées aux résultats expérimentaux :  $k_{liaison} \rightarrow \infty$ , Fig. 2.14a et  $k_{rot} \rightarrow \infty$ , Fig. 2.14b. Cette comparaison révèle que la prise en compte de ces conditions d'encastrement non-idéales est nécessaire pour obtenir une bonne

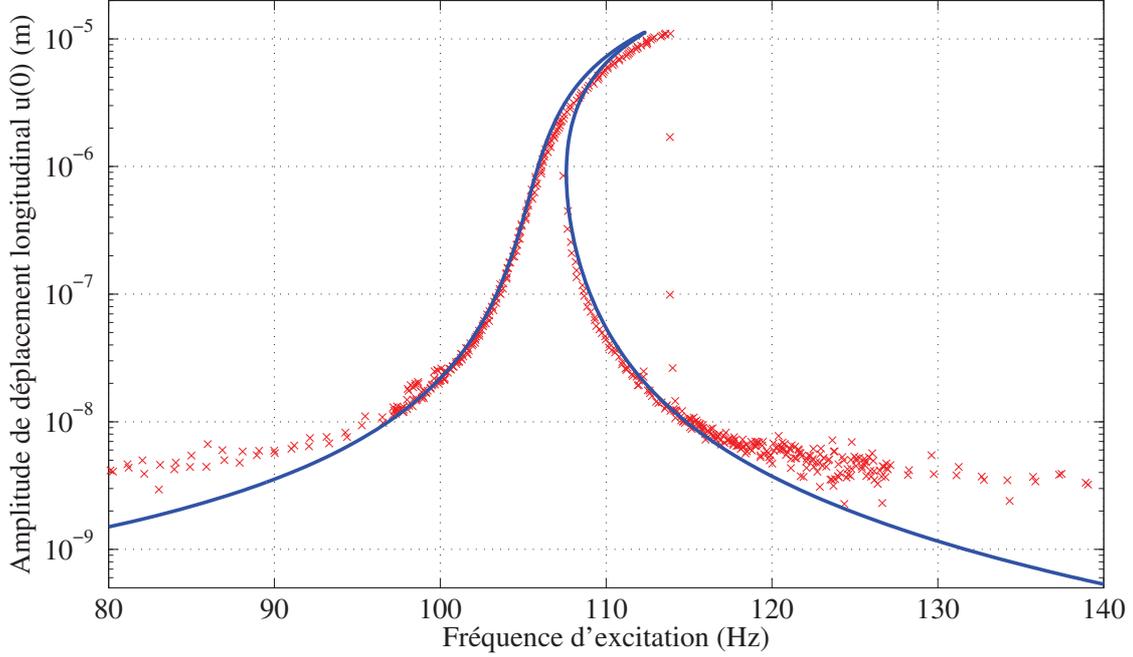


FIG. 2.15: Déplacement longitudinal au niveau des encastresments.  $u(0)$  est mesuré par le signal  $\frac{1}{2}$ (P2X-P1X) et tracé avec des croix rouges. Les résultats de simulation sont tracés en trait plein bleu.

corrélation calculs-essais. Le recalage de ces paramètres est important : les courbes en tirets verts sur la figure 2.14 montrent les résultats obtenus avec des valeurs de  $k_{liaison}$  et  $k_{rot}$  trop faibles. On observe par ailleurs que  $k_{rot}$  influence le facteur de participation modale du problème (termes  $\Gamma_i$  dans l'équation (2.13)), alors que  $k_{liaison}$  influence la courbure non-linéaire de la réponse (termes  $\Gamma_{ijkm}$  dans l'équation (2.13)).

Pour aller au-delà du seul argument de recalage des courbes de réponse fréquentielle, la flexibilité des encastresments a été mesurée plus directement à travers le déplacement  $u(0)$ . Ce déplacement est mesuré par le signal  $1/2$ (P2X-P1X).  $u(0)$  se déduit par ailleurs directement de  $w$  dans le cadre du modèle mis en place dans la partie 2.2 :

$$u(0) = \frac{w^2}{2Y_1(l)^2} \left(1 + \frac{lk_{liaison}}{EA}\right)^{-1} \int_0^l \left(\frac{dY_1}{dx}\right)^2 dx \quad (2.60)$$

Les accéléromètres ne mesurent que la partie dynamique du déplacement longitudinal. Ainsi, l'équation (2.60) nous permet d'attendre un signal à la fréquence  $2\Omega$ . Cette composante principale à  $2\Omega$  est tracée sur la figure 2.15, à la fois pour les simulations et les essais. On observe une très bonne corrélation des 2 courbes. La flexibilité des encastresments de la poutre est ainsi bien réelle, il ne s'agit pas d'un artifice de modélisation. La figure 2.15 montre qu'un modèle d'encastrement idéal  $u(0) = 0$  ne représenterait pas la réalité expérimentale et justifie ainsi l'introduction de  $k_{liaison}$ .

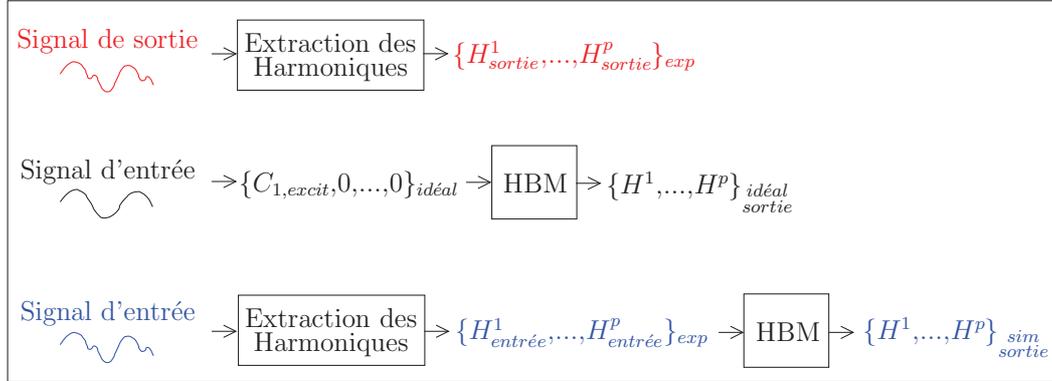


FIG. 2.16: Processus logique d'obtention des réponses multi-harmoniques. De haut en bas : traitement des données expérimentales, simulation avec entrée idéale et simulation avec entrée multi-harmonique expérimentale.

### 2.5.2 Simulation avec entrée expérimentale multi-harmonique

Dans la méthode de Balance Harmonique présentée au paragraphe 2.4.1, l'excitation est supposée sinusoïdale ( $\mathbf{F}_{\text{excit}} = \{\Gamma_i a_{\text{excit}}\}_{i \in M} \cos(\Omega t)$ ). Or, les résultats expérimentaux présentés en figure 2.5 montrent que le signal d'entrée n'est pas mono-harmonique. Aussi, en utilisant les termes  $\mathbf{C}_{\mathbf{k}, \text{excit}}$ , on peut calculer la réponse du système à une entrée multi-harmonique. L'idée est ainsi de prendre en compte les composantes excitatrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{k}, \text{excit}}$  expérimentales. On a ainsi trois résultats multi-harmoniques, comme l'illustre la figure 2.16. Tout d'abord la réponse expérimentale multi-harmonique est extraite par la méthode présentée dans la partie 2.1.3. Ensuite la réponse du modèle à une excitation sinusoïdale est simulée numériquement. Enfin, dans un 3<sup>ème</sup> processus, les composantes harmoniques du signal d'entrée sont extraites selon la méthode de la partie 2.1.3 et on utilise ces composantes comme signal d'entrée pour la simulation numérique. Pour le dernier processus, l'introduction de l'excitation multi-harmonique se fait grâce à la formule :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{k}, \text{excit}} = \left\{ \Gamma_i H_{\text{entrée}}^k \right\}_{i \in M} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{\mathbf{k}, \text{excit}} = 0 \quad \forall k \in [1, N] \quad (2.61)$$

Dans ces travaux, la phase des différentes composantes harmoniques n'a pas été étudiée mais en utilisant les termes  $S_{\text{excit}}$ , la phase des composantes harmoniques du signal d'entrée peut être prise en compte. Les simulations que nous avons pu faire en intervertissant les rôles de  $C_{\text{excit}}$  et  $S_{\text{excit}}$  montrent cependant que les phases des composantes du signal d'entrée ne semblent pas affecter les amplitudes harmoniques de la réponse.

La figure 2.5 montre que les composantes harmoniques du signal d'entrée sont sujettes à des phénomènes hystérétiques de la même façon que la réponse de la poutre. Ainsi il y a deux jeux de données d'entrée : les mesures obtenues avec un balayage fréquentiel montant et celle avec un balayage descendant. Du fait de l'hystérésis, ces mesures ne se recouvrent pas sur l'ensemble de la

plage de fréquence. Un choix doit être fait quant à l'utilisation d'une mesure ou d'une autre. Il a été choisi de reproduire en simulation les expériences jusqu'au saut de réponse fréquentielle. Une première simulation part des basses fréquences, et monte jusqu'au maximum de résonance où le saut apparaît. Pour cette simulation les mesures effectuées avec le balayage fréquentiel montant sont utilisées. Une seconde simulation est effectuée, en partant des hautes fréquences, et en s'arrêtant de la même façon, au moment où le saut apparaît. Cette fois ce sont les mesures associées au balayage fréquentiel descendant qui sont utilisées. La réponse fréquentielle simulée obtenue n'est pas continue. Pour qu'elle le soit il faudrait utiliser la méthode de continuation pour relier les deux points singuliers où les sauts apparaissent. Le segment de courbe manquant correspond à un équilibre instable qui ne peut pas être obtenu par les essais réalisés. Ainsi comme on ne dispose pas de données d'entrées correspondantes à ce segment de courbe, il est inaccessible. Ce problème ne se pose pas avec l'excitation idéale puisque l'excitation reste identique pour ce segment de courbe.

La figure 2.17 présente des comparaisons entre les résultats des trois processus décrits par la figure 2.16, pour les harmoniques 2 et 3. Pour l'harmonique 2 (Fig. 2.17 (a), (c) et (e)), la simulation avec entrée idéale ne donne aucune composante à l'harmonique 2. C'est un résultat général d'un oscillateur de Duffing ; le terme  $\cos^3(\Omega t)$  se décompose en  $\cos(\Omega t)$  et  $\cos(3\Omega t)$  mais n'a aucune composante en  $\cos(2\Omega t)$ . Cependant un signal est bel et bien observé expérimentalement à  $2\Omega$ . En prenant en compte la composante à  $2\Omega$  du signal d'entrée, la simulation devient en accord avec l'expérience. La composante à  $2\Omega$  du signal de sortie est ainsi uniquement due à la composante à  $2\Omega$  du signal d'entrée et non au caractère non-linéaire du système. Pour l'harmonique 3 (Fig. 2.17 (b), (d) et (f)), le diagnostic est différent, les deux effets se mêlent. Au voisinage de la résonance primaire, on observe une résonance à l'harmonique 3 même avec une excitation sinusoïdale (courbes en pointillé sur les figures 2.17 (b), (d) et (f)). Il s'agit alors d'un effet non-linéaire qui se retrouve expérimentalement. Cependant en dehors de cette résonance, le niveau de réponse à l'harmonique 3 ne peut plus s'expliquer par un effet non-linéaire (Fig. 2.17 (b), (d) et (f), dans les plages de fréquence [80-100] Hz et [120-160] Hz). De même que pour l'harmonique 2, c'est alors la composante à  $3\Omega$  du signal d'entrée qui explique à elle seule la composante à  $3\Omega$  du signal de sortie.

Cette étude sur une géométrie simple souligne ainsi la précision de la méthode de Balance Harmonique et démontre sa capacité à simuler les réponses multi-harmoniques. La méthode présentée permet également d'expliquer l'origine de ces réponses multi-harmoniques. Elles peuvent être dues au terme non-linéaire dans l'équation dynamique du système ou être dues à un artefact expérimental : les composantes harmoniques dans le signal d'entrée génèrent des harmoniques dans le signal de sortie.

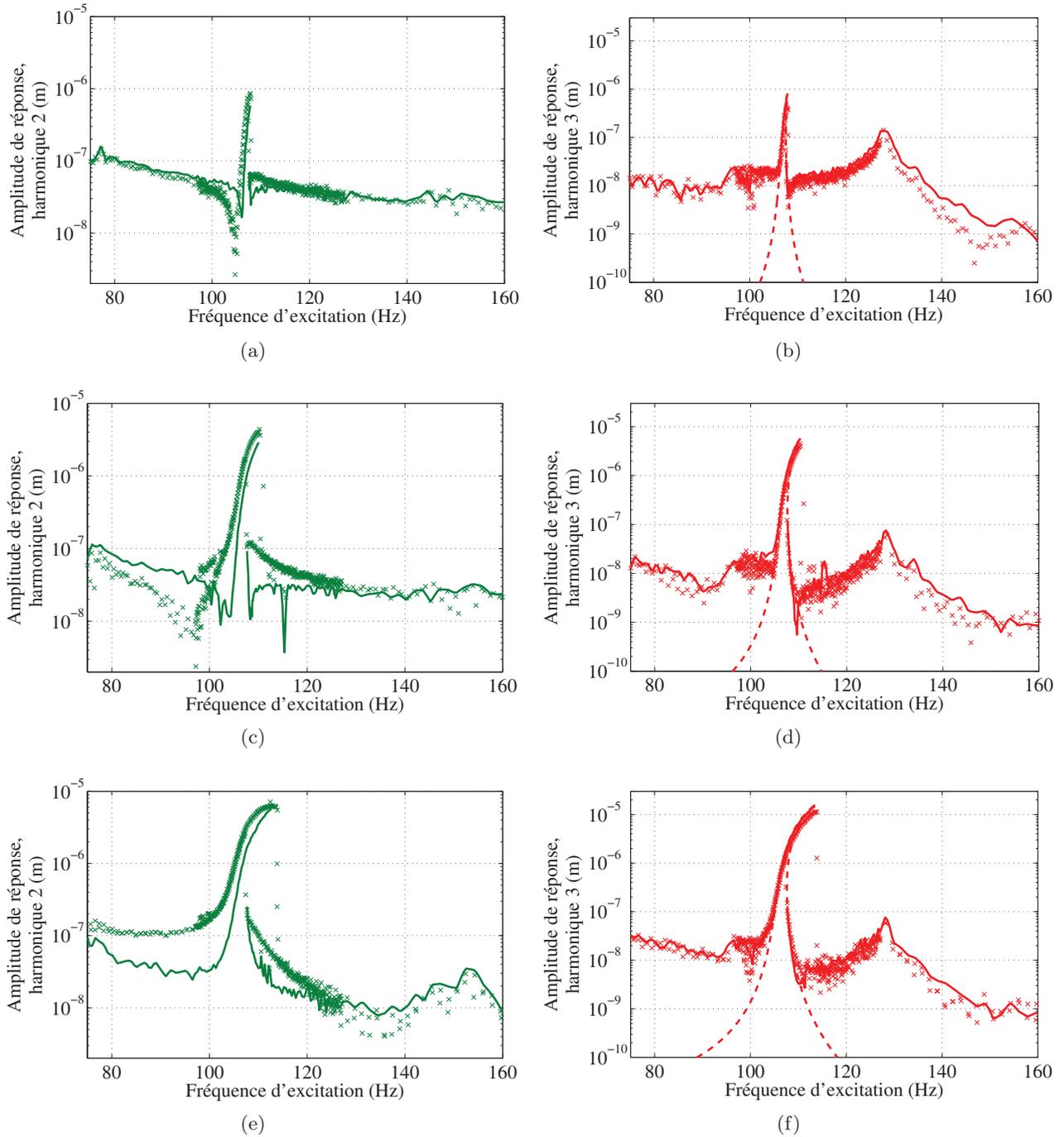


FIG. 2.17: Réponses fréquentielles aux harmoniques 2 (a, c, e) et 3 (b, d, f). Les résultats sont obtenus pour des niveaux d'excitation de  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (a,b),  $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (c,d) et  $6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (e,f). Les données expérimentales sont tracées avec des croix. Les résultats de simulation avec entrée idéale sont tracés en pointillé. Les courbes en trait plein représentent les résultats de simulation avec une entrée multi-harmonique expérimentale.

## 2.6 Conclusion

Cette première étude de réponses vibratoires non-linéaires répond à ses objectifs. Différents phénomènes non-linéaires ont été observés expérimentalement et ils sont tous reproduits par la simulation. Un effort particulier a été porté sur la modélisation de la poutre bi-encastrée étudiée afin d'obtenir une très bonne corrélation calculs-essais. Plus spécifiquement, les conditions aux limites non-idéales introduites sont nécessaires pour aboutir à une corrélation calculs-essais satisfaisante. Elles ont été justifiées par des mesures complémentaires qui permettent de conclure que le montage expérimental a été justement modélisé. Au-delà de cette validation de la démarche générale en simulation non-linéaire, cette première étude a permis de développer trois résultats importants.

Tout d'abord trois méthodes de simulation ont été comparées entre elles. La première est analytique : la méthode des développements multi-échelles. Elle permet de déterminer une équation de la courbe de réponse fréquentielle non-linéaire et ainsi de voir directement l'effet de chaque terme de l'équation dynamique sur la réponse fréquentielle. Cette méthode est cependant très calculatoire et semble ainsi difficile à mettre en place pour des structures modélisées par éléments finis. De plus elle n'est valable qu'au voisinage d'une fréquence particulière et n'est ainsi pas adaptée à l'étude de larges plages en fréquence. Ensuite deux méthodes numériques ont été présentées et utilisées : la méthode de Balance Harmonique et une méthode de tir basée sur l'intégration temporelle. Cette étude a montré la précision et l'efficacité de ces deux méthodes. Parmi elles, la méthode de balance harmonique a été privilégiée pour la suite parce qu'elle facilite l'étude des réponses multi-harmoniques.

Le second résultat important de cette étude est le développement d'une méthode de comparaison calculs-essais multi-harmonique. Un outil de traitement du signal a été développé pour extraire les différentes composantes harmoniques des signaux expérimentaux. Ces réponses multi-harmoniques expérimentales ont ensuite été comparées à la simulation. Cette comparaison a permis d'expliquer si les réponses expérimentales multi-harmoniques étaient dues à des phénomènes vibratoires non-linéaires intrinsèques au système ou si elles résultaient d'une excitation multi-harmonique.

Enfin, le dernier résultat important de ce chapitre est la possibilité d'appliquer les méthodes de simulation présentées à toute structure modélisée par éléments finis pour laquelle des non-linéarités géométriques sont attendues. La méthode, ici dénommée « Muravyov », présentée au paragraphe 2.2.3 permet de déterminer les termes non-linéaires géométriques dans l'équation dynamique de n'importe quel modèle éléments finis.

Ce chapitre est ainsi un préambule à l'étude de structures non-linéaires industrielles mais il présente aussi un intérêt industriel direct en montrant comment étudier une structure sujette à des non-linéarités géométriques.

## Chapitre 3

# Mesures de la réponse vibratoire d'un assemblage avec des liaisons frottantes

*La structure « Harmonie » est le cas d'application principal de ces travaux de thèse. Il s'agit d'un assemblage représentatif d'une structure industrielle pour laquelle la réponse vibratoire est influencée par l'apparition de frottement dans certaines liaisons. Ce chapitre présente la démarche expérimentale et les résultats obtenus avec cette maquette d'essai.*

*Les essais vibratoires sont réalisés sur pot vibrant, selon deux axes, et répondent à trois objectifs principaux. Tout d'abord, des mesures à faibles niveaux d'excitation sont effectuées pour permettre de recalibrer un modèle éléments finis linéaire de la structure. Ensuite, de même que pour la poutre bi-encastree présentée au chapitre précédent, l'évolution de la courbe de réponse fréquentielle est étudiée lorsque le niveau d'excitation augmente, afin d'identifier la contribution des effets non-linéaires sur la réponse vibratoire du système. Enfin, une étude locale et temporelle du phénomène de frottement est menée grâce à la vibrométrie laser à balayage. Le mouvement des lames qui sont sujettes au glissement pour les forts niveaux d'excitation est mesuré par cette instrumentation optique. Ces dernières mesures révèlent l'apparition d'interactions modales dues au frottement.*

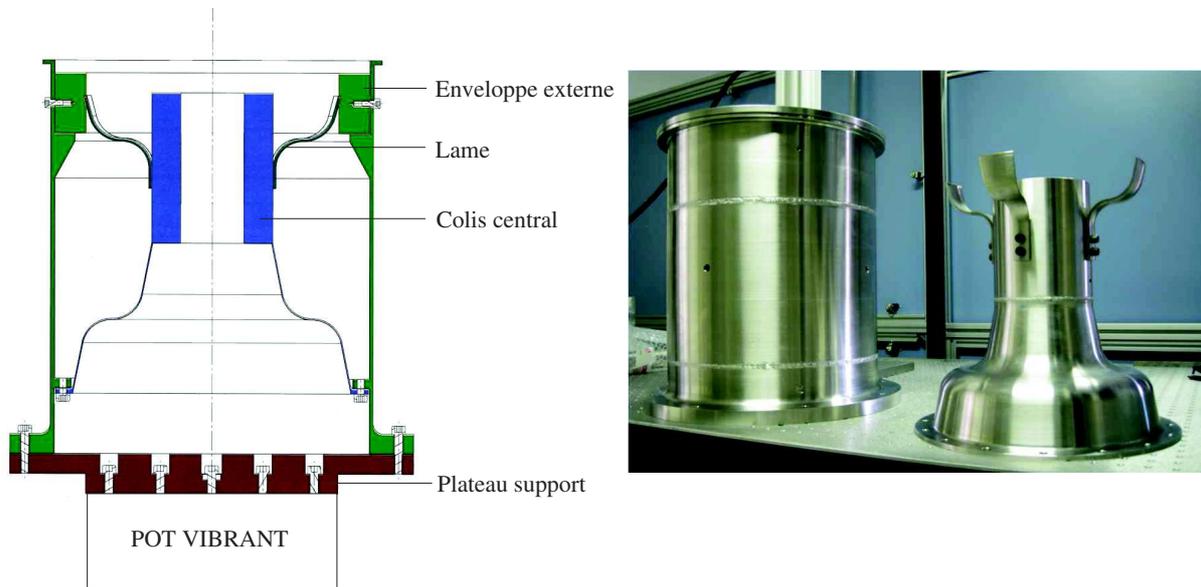


FIG. 3.1: Schéma en coupe et photographie de la structure « Harmonie ».

### 3.1 Motivations

L'étude vibratoire expérimentale des assemblages industriels montre généralement une dépendance de la réponse au niveau d'excitation. L'une des raisons principales de ces réponses non-linéaires est l'apparition de frottement dans les liaisons. Le frottement a un effet double sur les assemblages : en raideur et en dissipation. Le frottement traduit le relâchement d'une contrainte de liaison par l'apparition de glissement. Il entraîne ainsi une diminution de la raideur locale. À l'échelle d'un assemblage complet, l'apparition de frottement dans les liaisons conduit ainsi généralement à un effet adoucissant : l'atténuation locale des raideurs entraîne une baisse des fréquences de résonance de la structure. De plus, le frottement est un phénomène dissipatif qui contribue à augmenter l'amortissement du système.

Ces deux effets se retrouvent dans les réponses vibratoires des assemblages industriels et limitent la validité des études vibratoires linéaires. L'objectif de cette thèse est d'introduire la simulation vibratoire non-linéaire dans un contexte industriel. Ainsi, l'objet d'étude choisi doit être proche d'un assemblage industriel. Cependant, généralement, les assemblages industriels contiennent beaucoup de liaisons. Il peut être difficile d'apporter des éléments de compréhension de tels effets non-linéaires sur les réponses vibratoires et d'identifier dans quelles liaisons le frottement se déclenche. La maquette « Harmonie » a été conçue de sorte que la dissipation d'énergie soit concentrée sur quatre liaisons frottantes. Il s'agit ainsi d'un cas d'étude industriel « simplifié » pour permettre une meilleure analyse scientifique. Cette démarche d'étude d'une maquette d'essai simplifiée plutôt qu'une structure industrielle réelle est courante. En particulier, au début des années 2000, l'agence anglaise AWE (Atomic Weapon Establishment), a proposé à des chercheurs universitaires une maquette d'étude destinée à

Composant	Matériau	Dimensions (mm) Rayon max, Hauteur	Masse (kg)
Colis central	Acier inox 304L	160, 300	11.92
Enveloppe externe	Acier inox 304L	204, 420	44.88
Lame ( $\times 4$ )	Acier haute résistance Z8-cnd17-04	65, 118	0.1086 ( $\times 4$ )
Plateau support exp. verticales	Aluminium 2017A	204, 40	9.47
Plateau support exp. horizontales	Aluminium 2017A	218, 25	8.67

TAB. 3.1: Propriétés des composants de l'assemblage.

l'identification de modèles linéaires de liaison. Les résultats de cette étude ont pu être publiés en 2006 [1].

Au niveau expérimentation, les protocoles suivis pour « Harmonie » sont très proches des pratiques industrielles usuelles. Les expériences vibratoires sont réalisées sur pot vibrant et la réponse de la structure est mesurée par des accéléromètres et des jauges de déformation. Tout d'abord, les sous-structures constitutives de l'assemblage sont testées individuellement afin de faciliter le recalage d'un modèle éléments finis puis l'assemblage est testé selon deux axes d'excitation (l'un vertical et l'autre horizontal). Les niveaux d'excitation sont ensuite augmentés afin d'observer l'évolution de la réponse fréquentielle.

Au-delà de ces expériences vibratoires usuelles pour l'industrie, une instrumentation plus originale a été mise en place afin d'observer directement le frottement dans les zones de contact. La vibrométrie laser à balayage a été utilisée pour mesurer la vitesse de nombreux points de mesure dans la zone de liaison. Ce diagnostic supplémentaire permet de confronter les modèles de frottement à la réalité expérimentale locale du phénomène.

## 3.2 Maquette d'essai

La structure « Harmonie » est représentée sur la figure 3.1. Elle est composée de deux parties principales : un colis central et une enveloppe externe. Le bas du colis est attaché à l'enveloppe par une bride boulonnée et en haut ces deux composants sont reliés par quatre lames qui sont vissées sur le colis et en simple contact contre l'enveloppe. Cette liaison de contact favorise l'apparition de frottement à fort niveau d'excitation. Au cours de l'assemblage, lorsque le colis avec les lames est inséré dans l'enveloppe, les lames sont mises en compression de sorte que le contact lame-enveloppe ne soit jamais rompu, même au cours des expériences vibratoires. Sur la figure 3.1, l'assemblage est représenté avec le plateau support qui lui permet d'être couplé au pot vibrant pour les excitations verticales. Pour les expériences à excitation horizontale (qui seront présentées en partie 3.4), un autre

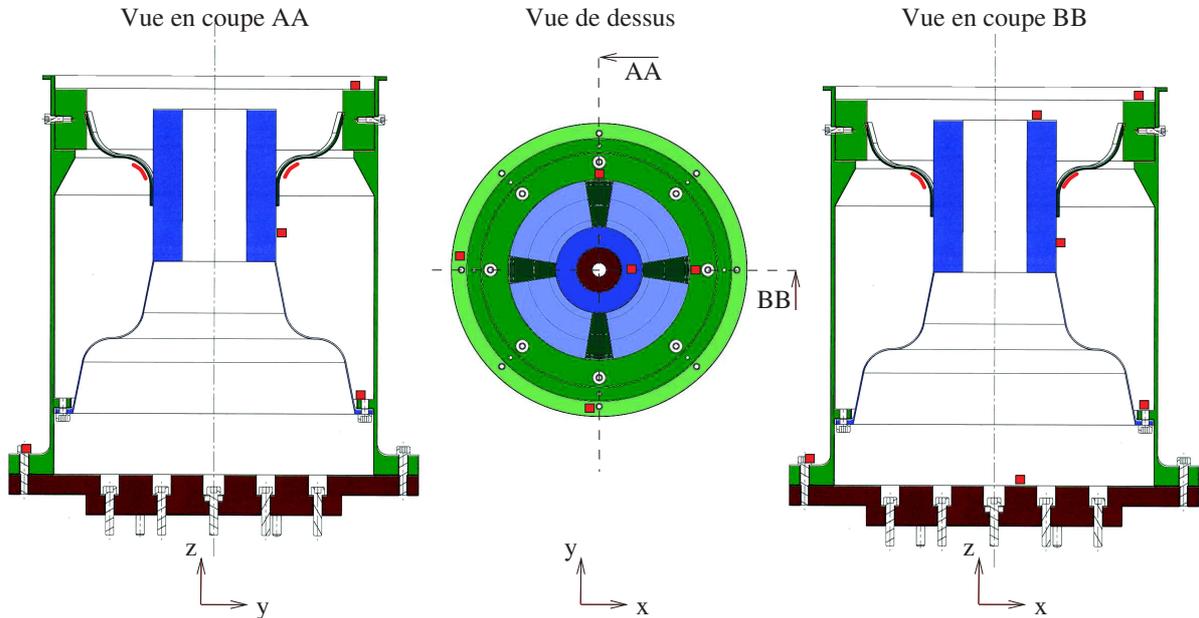


FIG. 3.2: Emplacement des capteurs. Les accéléromètres sont représentés par des carrés rouges. Quatre jauges de déformation (schématisées en rouge) ont été placées en dessous des lames.

plateau support est nécessaire. Les propriétés des différentes parties de l'assemblage sont détaillées dans le tableau 3.1. Les masses correspondent à des valeurs mesurées. La maquette est instrumentée avec 10 accéléromètres triaxiaux et 4 jauges de déformation qui sont représentées sur la figure 3.2. L'instrumentation est identique pour les expériences à excitations verticale et horizontale.

### 3.3 Réponses vibratoires à excitation verticale

Pour exciter la structure verticalement, on utilise un pot vibrant industriel de force maximale 13 kN. La structure est vissée sur un plateau qui est lui-même vissé sur la partie mobile du pot vibrant. Il était tout d'abord prévu de faire des expériences à amplitude d'accélération constante au niveau du plateau support. Des difficultés de pilotage du moyen d'essai sont alors apparues. Il a été constaté qu'en pilotant le pot vibrant avec une amplitude de tension de commande constante, une antirésonance apparaît toujours au niveau du plateau support. Ce point ne peut ainsi pas être choisi comme point pilote pour les expériences vibratoires, parce que quelle que soit la tension pilote employée, l'accélération du plateau support à cette fréquence d'antirésonance sera toujours nulle. Il a donc été décidé de piloter le pot vibrant avec une tension de commande constante. Cette condition est similaire à une excitation à force constante. Pour avoir une réelle condition de force constante, il faudrait travailler à intensité du courant de commande du pot vibrant constante. Ce signal n'étant pas accessible dans le complexe expérimental utilisé, il a été choisi de travailler dans une plage de fréquence

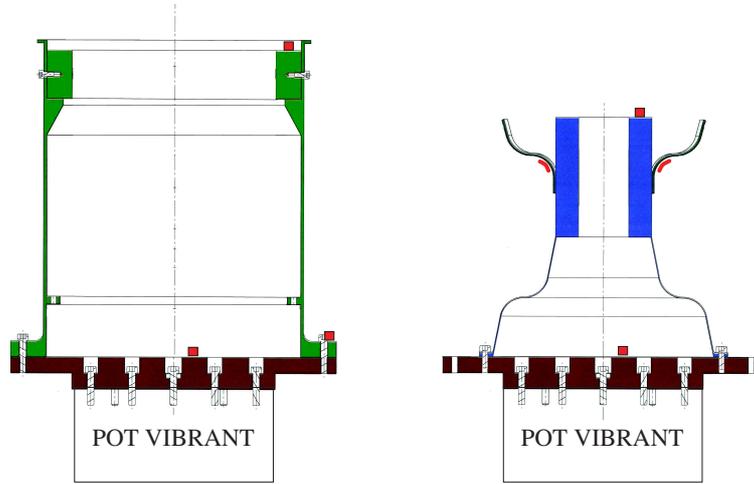


FIG. 3.3: Montages de test des sous-structures.

étroite pour laquelle on fait l'approximation qu'une tension de pilotage constante est équivalente à une force constante.

### 3.3.1 Analyse modale des sous-structures

Avant de tester l'assemblage entier, les deux composantes principales de la structure sont testées séparément avec une excitation verticale dans l'objectif de recalibrer le modèle éléments finis qui sera développé dans le prochain chapitre. Les deux montages expérimentaux correspondants sont représentés sur la figure 3.3. Ces structures sont excitées à très faible niveau pour éviter tout phénomène non-linéaire. Les premières fréquences de résonance mesurées sont données dans le tableau 3.2. Pour les résonances de la sous-structure composée du colis central et des lames, les signaux des jauges de déformation sont utilisés pour caractériser la participation des lames sur les modes de résonance. Un mode où les mouvements des lames et du colis sont en phase est identifié à 218.7 Hz. Ensuite, entre 247 Hz et 251.5 Hz, plusieurs pics de résonance sont observés. Les mouvements des quatre lames ne sont pas en phase dans cette plage de fréquence, et il est difficile de séparer les modes.

Sous-structure	Mode	Fréquence de résonance
Sous-structure 1 : Enveloppe	1 <sup>er</sup> mode vertical	889 Hz
Sous-structure 2 : Colis central + Lames	1 <sup>er</sup> mode vertical (lames et colis central en phase)	218.7 Hz
Sous-structure 2 : Colis central + Lames	Plusieurs modes où les lames ne sont pas en phase	[247-251.5] Hz

TAB. 3.2: Fréquences propres des sous-structures.

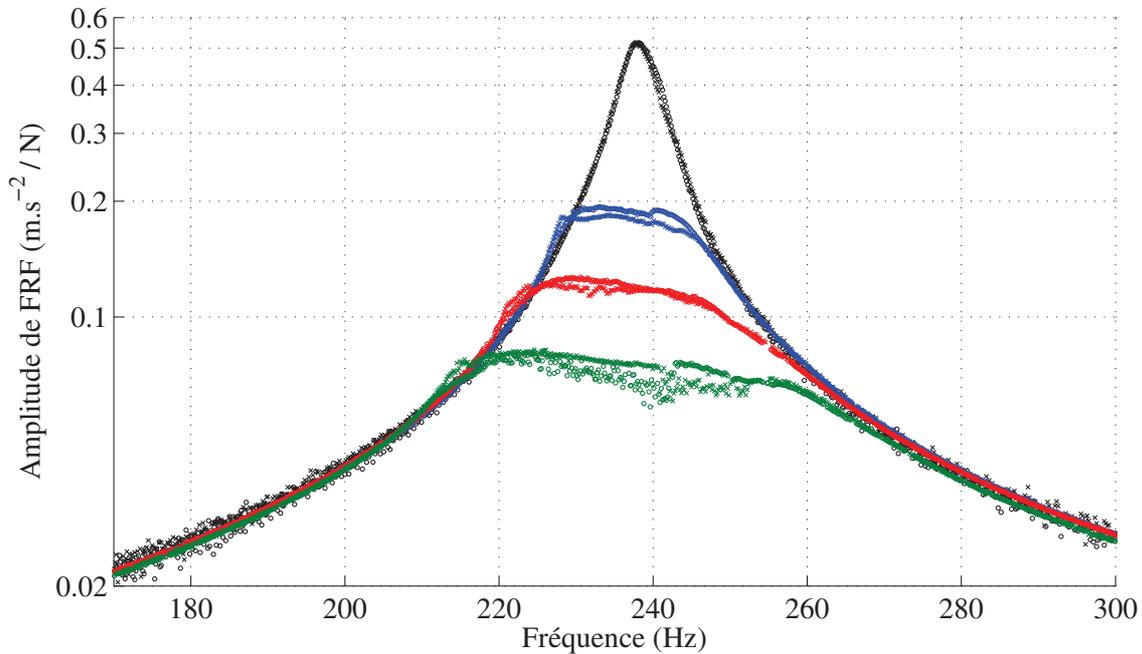


FIG. 3.4: FRF expérimentales au sommet du colis central pour des niveaux d'excitation croissants. Les niveaux sont 70 N (noir), 1070 N (bleu), 1875 N (rouge) et 2910 N (vert). Pour chaque niveau d'excitation, les premiers résultats obtenus sont représentés par des croix et les seconds par des cercles.

### 3.3.2 Réponse verticale de l'assemblage « Harmonie »

Avec la configuration expérimentale présentée sur la figure 3.1, la structure « Harmonie » assemblée est soumise à des excitations vibratoires verticales. En premier lieu les fréquences de résonance verticales de la structure sont identifiées par une expérience à très faible niveau d'excitation (faible tension pilote du pot vibrant). Le premier mode se situe à 237.9 Hz, le second à 873 Hz. Ensuite, les niveaux d'excitation sont augmentés. Le montage expérimental demeurant inchangé, chaque tension pilote peut être associée à une force excitatrice. Pour réaliser cette association en pratique, on choisit un point de mesure et une fréquence pour laquelle la structure répond linéairement. Il faut choisir une fréquence assez loin de la résonance pour que le frottement ne se déclenche pas. La réponse mesurée sur la structure dépend alors linéairement de la force appliquée. Pour établir cette relation linéaire, on utilise le modèle éléments finis qui sera présenté au chapitre 4. Un calcul linéaire de réponse au point de mesure et à la fréquence choisie permet d'obtenir directement le coefficient reliant la réponse mesurée par l'accéléromètre au niveau d'excitation en force. Ainsi, chaque expérience vibratoire réalisée est associée à une force excitatrice. Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) sont dès lors définies comme la réponse fréquentielle mesurée divisée par le niveau d'excitation en force. Les FRF expérimentales pour différents niveaux d'excitation sont tracés sur les figures 3.4 et 3.5.

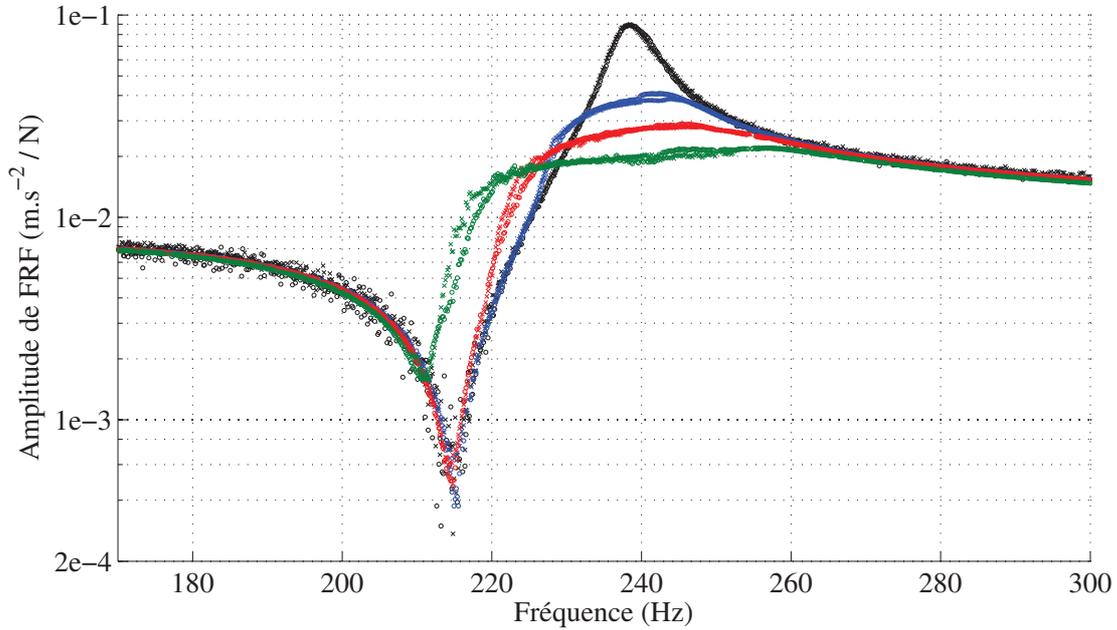


FIG. 3.5: FRF expérimentales sur le plateau support. La légende des courbes est la même que pour la figure 3.4.

Le frottement se manifeste par un aplatissement des pics de résonance qui traduit une augmentation de la dissipation. On observe également une diminution de la fréquence de résonance, qui traduit l'adoucissement induit par le frottement. Ces effets sont manifestes à la fois au sommet du colis central (voir figure 3.4) et sur le plateau support (voir figure 3.5). Ainsi, même si le frottement est un phénomène local, il agit sur la réponse globale de la structure et lui confère un comportement non-linéaire non négligeable. Pour chaque niveau d'excitation, la mesure de la FRF a été reproduite deux fois successivement afin de pouvoir apprécier la répétabilité des résultats. Les résultats des deux expériences sont présentés pour chaque niveau d'excitation sur les figures 3.4 et 3.5. On peut remarquer que la variabilité d'une FRF à l'autre est plus importante dans les plages de fréquence où le frottement agit. La très faible variabilité en dehors de la plage fréquentielle d'apparition du frottement ( $< 1\%$  pour des niveaux de réponse assez importants) caractérise les incertitudes de mesures. Cette variabilité devient beaucoup plus importante (jusqu'à  $30\%$ ) dans les zones fréquentielles de frottement. Cette différence montre que le frottement n'est pas un processus complètement déterministe du point de vue de l'ingénieur. Cela dit, cette variabilité reste faible par rapport à la différence de réponse entre deux niveaux d'excitation. Un modèle de frottement déterministe apparaît ainsi suffisamment pertinent pour reproduire ces réponses expérimentales. Pour les comparaisons calculs-essais qui seront présentées au chapitre 4, pour chaque niveau d'excitation, les mesures présentées seront celles provenant de la première des deux expériences effectuées.

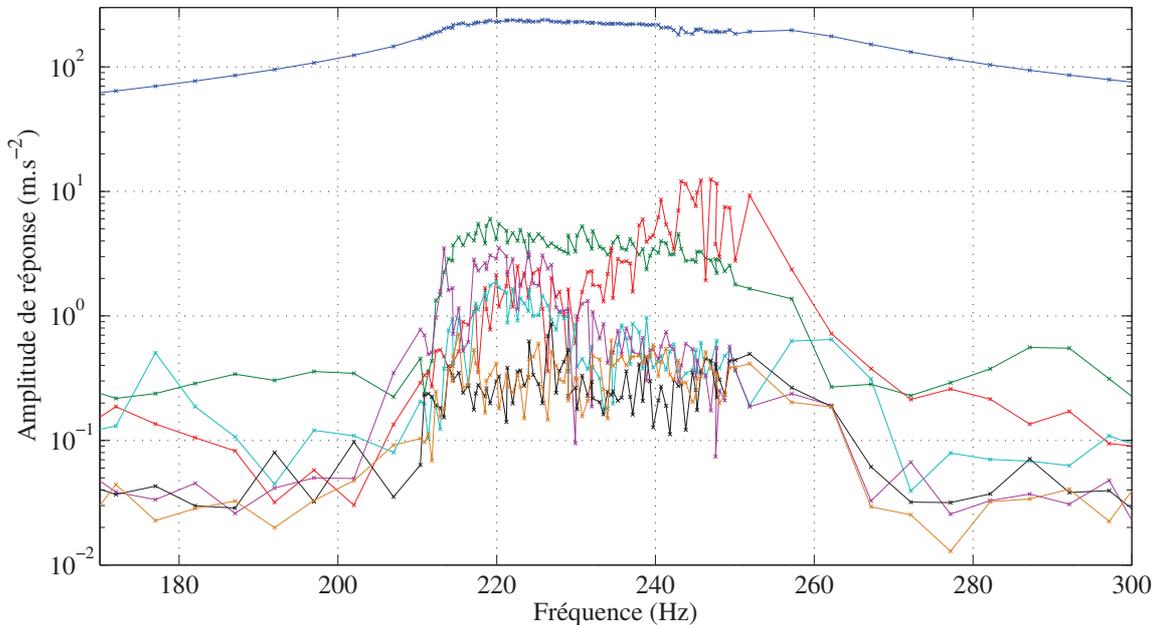


FIG. 3.6: Décomposition en harmoniques de la réponse vibratoire verticale au sommet du colis avec une excitation de 2910 N. Les harmoniques représentées sont 1 (bleu), 3 (vert), 5 (rouge), 7 (azur), 9 (violet), 11 (noir) et 13 (orange).

Une étude de l'apparition d'harmoniques dans la réponse vibratoire de la structure est également menée. On utilise pour cela l'outil présenté dans le chapitre 2 (partie 2.1.3). La figure 3.6 présente la décomposition en harmoniques du signal de réponse au sommet du colis central. Les composantes harmoniques sont très faibles par rapport à la composante harmonique principale. Elles n'ont ainsi pas un effet très important sur la réponse de la structure. On remarque tout de même une nette augmentation du niveau mesuré des harmoniques d'ordre supérieur à 1 dans la plage de fréquence où le frottement agit (entre 210 Hz et 260 Hz environ). Le frottement semble ainsi générer une réponse multi-harmonique mesurable.

### 3.4 Réponses vibratoires à excitation horizontale

La structure « Harmonie » a également été testée avec une excitation à la base horizontale. Les lames de contact sont alors sollicitées différemment et de nouveaux phénomènes vibratoires non-linéaires sont observés. Les effets principaux sur la réponse fréquentielle harmonique sont présentés dans la partie 3.4.1 puis la dispersion expérimentale associée à ces mesures est étudiée (partie 3.4.2). Enfin, l'accent est mis sur l'observation d'interactions modales non-linéaires (partie 3.4.3).

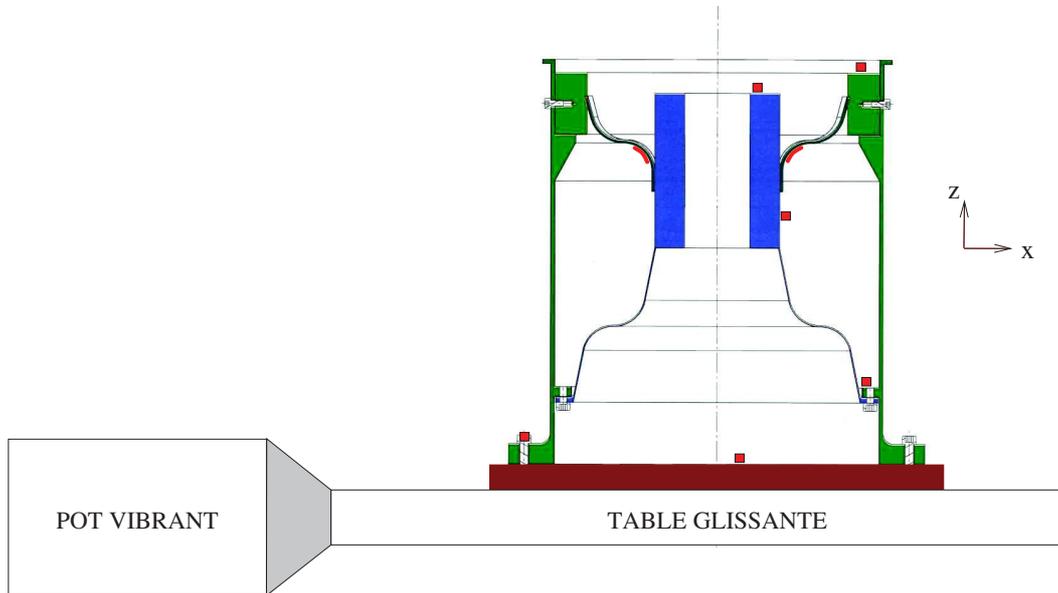


FIG. 3.7: Schéma du montage d'essai avec excitations transverses.

### 3.4.1 Fonctions de Réponse Fréquentielle

Le montage expérimental permettant d'exciter la structure « Harmonie » horizontalement est présenté sur la figure 3.7. Le pot vibrant est piloté de sorte que l'amplitude d'accélération mesurée sur le plateau support reste constante. Le problème de pilotage présenté précédemment (en partie 3.3), ne se présente pas pour ces excitations horizontales. Le phénomène d'antirésonance qui se produit avec l'excitation verticale, au niveau du plateau support à 218 Hz (voir figure 3.5), ne se produit pas avec une excitation horizontale dans la plage de fréquence considérée. Les niveaux d'excitation sont ainsi définis comme des accélérations à la base. La FRF est alors définie comme le rapport entre l'accélération de sortie et l'accélération à la base.

Tout d'abord, les modes propres linéaires de la structure ont été identifiés par un essai de sinus balayé large bande (5 Hz - 2000 Hz) à faible niveau d'excitation. Les résonances les plus marquées sont observées à 134 Hz, 309 Hz, 1240 Hz, 1675 Hz et 1826 Hz. On s'intéresse au premier mode transverse à 134 Hz. Les niveaux d'excitation sont ensuite montés. Les FRF mesurées au sommet du colis central et au sommet de l'enveloppe externe sont présentés respectivement sur les figures 3.8 et 3.9. De manière similaire aux résultats observés avec l'excitation verticale, on observe des effets dissipatifs et adoucissants. Ces effets se retrouvent sur l'ensemble de la structure : à la fois au sommet du colis central (voir figure 3.8) et au sommet de l'enveloppe externe (voir figure 3.9).

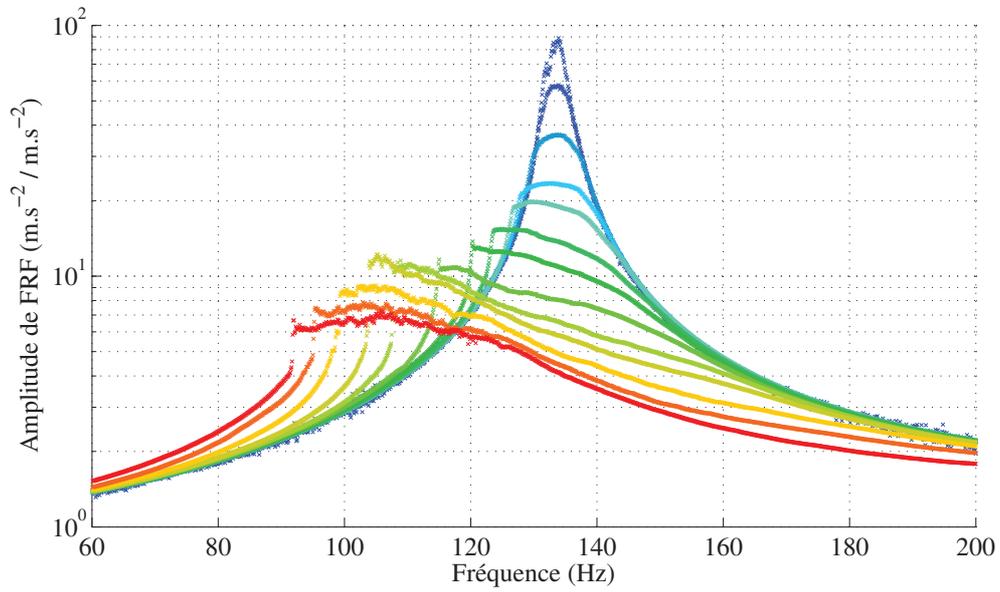


FIG. 3.8: FRF expérimentales au sommet du colis central pour des niveaux d'excitation croissants. Les niveaux d'excitations, en allant du bleu vers le rouge sont : 0.2, 0.5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 15, 20, 25 et 30  $\text{m.s}^{-2}$ .

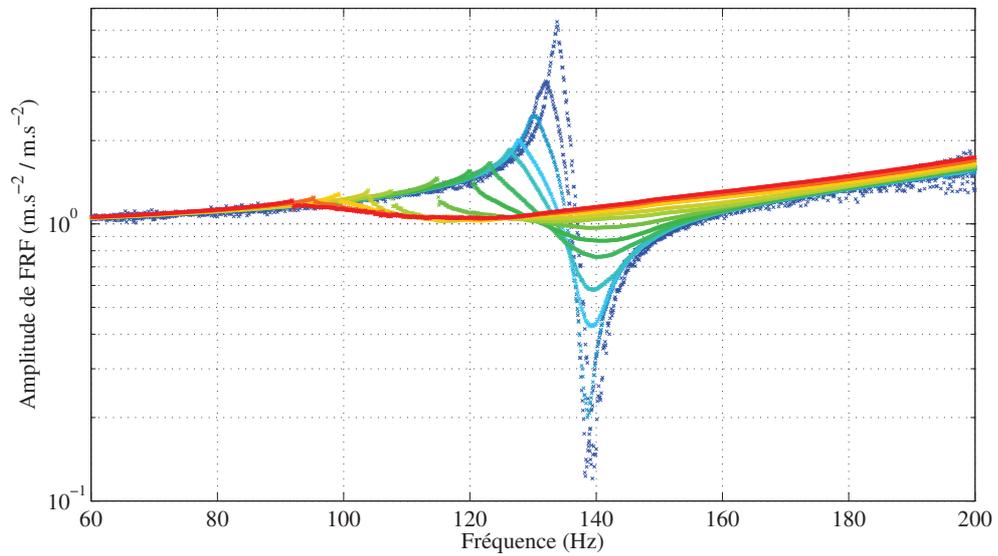


FIG. 3.9: FRF expérimentales au sommet de l'enveloppe externe. La légende des courbes est la même que pour la figure 3.8.

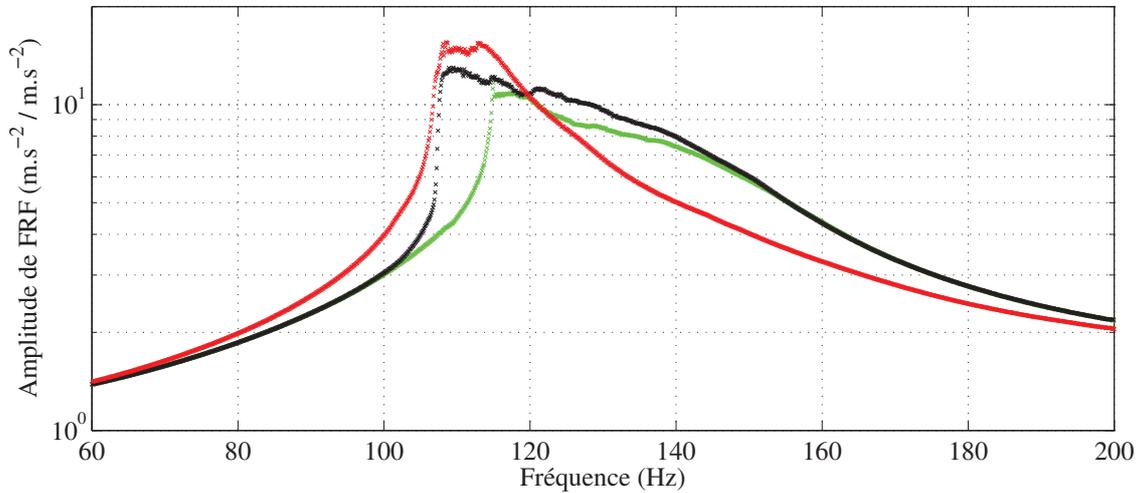


FIG. 3.10: Répétabilité des expériences. Les 3 courbes sont mesurées avec le même niveau d'excitation. La première expérience (vert) et la seconde (noir) sont réalisées consécutivement, la troisième (rouge) est réalisée à la fin du cycle d'expérience dont les résultats sont présentés sur les figures 3.8 et 3.9.

### 3.4.2 Répétabilité

Des essais de répétabilité ont également été menés avec les excitations transverses. Les courbes verte et noire de la figure 3.10 présentent deux mesures effectuées successivement au niveau d'excitation  $10 \text{ m.s}^{-2}$ .

On observe une variabilité des résultats très importante dans la zone où le frottement apparaît. Après avoir réalisé l'ensemble des expériences correspondantes aux niveaux d'essais présentés sur les figures 3.8 et 3.9, une nouvelle expérience de répétabilité a été effectuée au niveau  $10 \text{ m.s}^{-2}$  (courbe rouge sur la figure 3.10). On observe une variation très importante de la FRF mesurée par rapport aux deux expériences précédentes. L'évolution entre ces trois mesures va dans le sens d'un adoucissement de plus en plus marqué, qui signifie un phénomène de frottement de plus en plus important. Cela va de pair avec une baisse du seuil de déclenchement du frottement.

On peut corrélérer cette évolution avec l'observation a posteriori d'une usure des lames au niveau de la zone de contact. La figure 3.11 présente l'état des lames après la campagne d'expériences. Les lames étaient neuves avant les expériences. Les traces noires observées révèlent l'usure des lames provoquée par le frottement. On remarque que les marques d'usure sont différentes selon la direction selon laquelle les lames sont sollicitées. La lame dont le bord est colinéaire à la direction d'excitation a été soumise à du frottement sur l'ensemble de la zone de contact. Par contre, la lame située à  $90^\circ$  par rapport à cette dernière ne semble avoir subi du frottement qu'au bord de cette zone de contact. Cette dernière lame n'est pas sollicitée dans la direction de son bord, si du frottement se produit, il doit plutôt s'agir de frottement vertical.

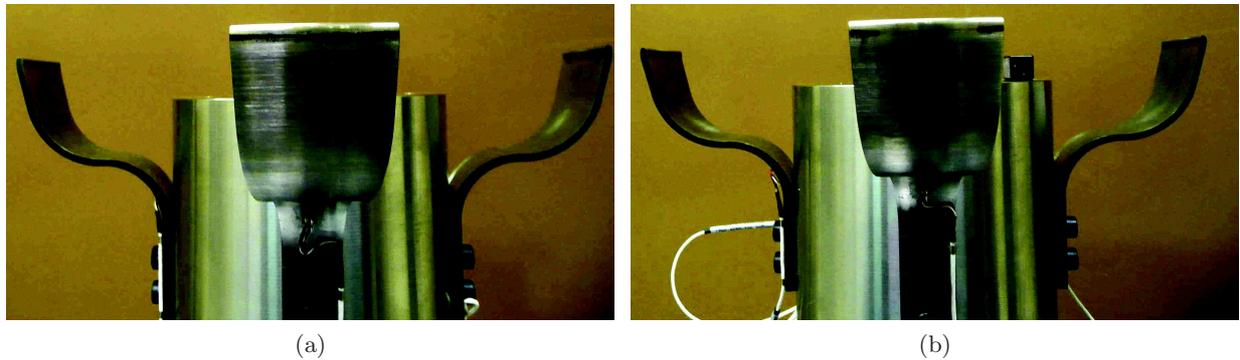


FIG. 3.11: Photographies de l'usure des lames à la fin des expériences vibratoires : une lame dont le bord est colinéaire à la direction d'excitation (a) et une lame dont le bord est orthogonal à la direction d'excitation (b).

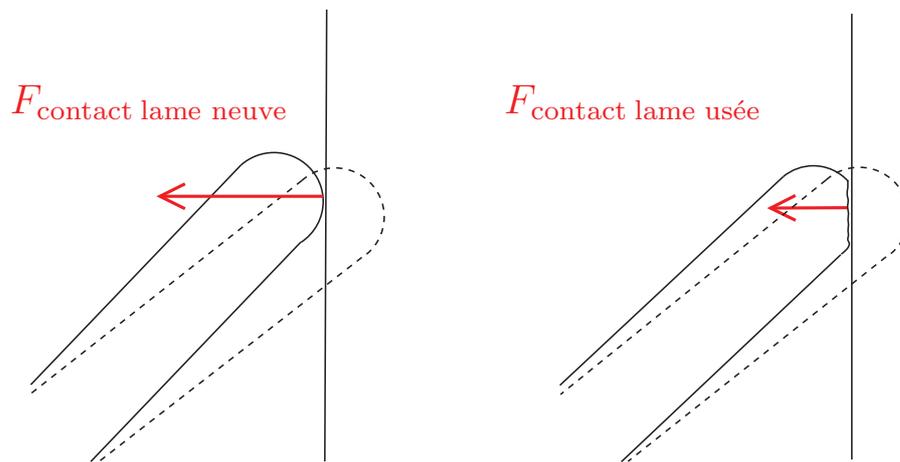


FIG. 3.12: Effet de l'usure d'une lame sur la force de contact. La position de la lame avant assemblage est représentée en pointillés.

L'usure diminue l'épaisseur de la lame. Comme les lames sont en compression à cause du montage, la réduction de l'épaisseur de la lame induit un relâchement de la pression exercée par la lame sur la zone de contact. Ce phénomène est illustré par la figure 3.12. Dans un modèle de frottement de type Coulomb, le seuil de déclenchement du frottement dépend linéairement de la force normale de contact. Ainsi, l'usure des lames contribue à baisser de manière irréversible le seuil de frottement. La variabilité d'une expérience à l'autre observée sur la figure 3.10 peut dès lors s'expliquer par les effets combinés du caractère incertain du frottement et d'une dérive liée à l'usure des lames. Les résultats expérimentaux de répétabilité de la figure 3.10 révèlent que ces phénomènes de dispersion et d'évolution des caractéristiques de l'interface frottante jouent un rôle important qui ne peut être négligé dans la modélisation.

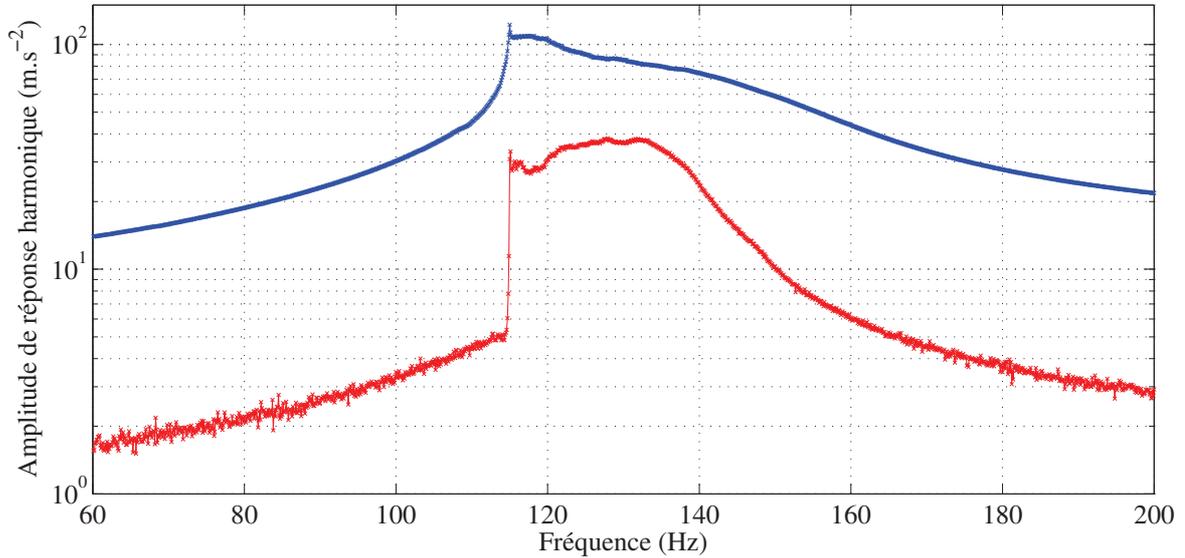


FIG. 3.13: Réponse vibratoire au sommet du colis central dans la direction d'excitation  $x$  (courbe bleue) et dans la direction  $y$  (courbe rouge). Le niveau d'excitation est de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ .

### 3.4.3 Interactions modales

Comme l'a montré le chapitre 2, la réponse d'une structure non-linéaire à une excitation sinusoïdale de fréquence  $F$  s'écrit généralement comme une superposition de contributions harmoniques  $k.F$ , avec  $k$  entier. On se place au voisinage d'une fréquence de résonance  $F_0$ , de sorte que la réponse soit importante, de même que les effets non-linéaires. Si il existe une fréquence de résonance de la structure  $F_{\text{res}}$  telle que  $F_{\text{res}} = k.F$ , alors la composante de la réponse vibratoire à l'harmonique  $k$  excite ce mode de résonance. Cette composante peut alors devenir mesurable et se retrouver de manière évidente dans la réponse vibratoire de la structure. On parle alors d'interaction modale. Ce terme traduit le fait que la résonance à  $F_{\text{res}}$  est excitée par la résonance non-linéaire au voisinage de  $F_0$ . On peut également dénommer ce phénomène « résonance interne ». C'est un phénomène largement étudié dans la communauté scientifique mais les études expérimentales sur structures industrielles restent rares. On peut en particulier citer les travaux de Noël et al. [66] qui ont montré de nombreuses interactions modales dans la réponse vibratoire d'un satellite spatial.

La première manifestation de ces interactions modales dues au frottement est l'apparition d'une réponse vibratoire marquée dans une direction orthogonale à l'excitation. La figure 3.13 compare les réponses mesurées dans les directions  $X$  et  $Y$  au sommet du colis central. Lorsque le frottement apparaît, entre 115 Hz et 150 Hz environ, le niveau de réponse dans la direction orthogonale à l'excitation augmente considérablement. Il s'agit ainsi d'un effet non-linéaire lié au frottement. En dehors de cette plage de fréquence, les très faibles niveaux mesurés peuvent s'expliquer par une direction d'excitation

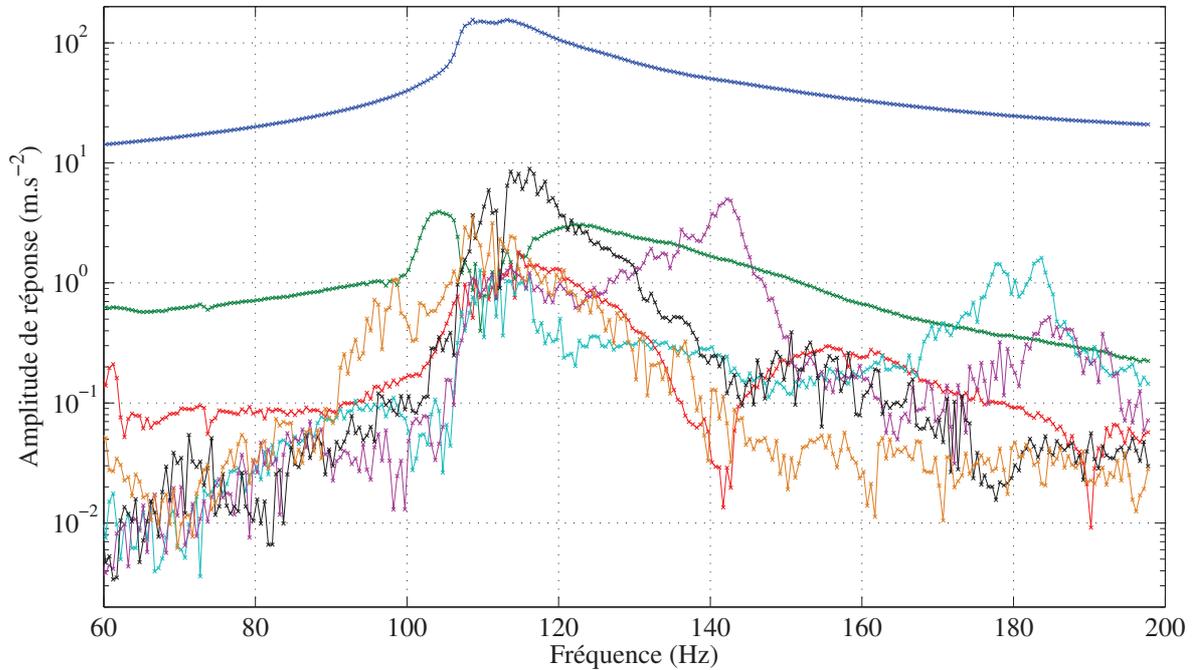


FIG. 3.14: Décomposition en harmoniques de la réponse vibratoire horizontale au sommet du colis avec une excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ . Les harmoniques représentées sont 1 (bleu), 3 (vert), 5 (rouge), 7 (azur), 9 (violet), 11 (noir) et 13 (orange).

qui n'est pas exactement dans la direction X. Lorsque le frottement se déclenche, il introduit une force non-linéaire qui n'est pas seulement dans la direction d'excitation et qui excite le premier mode transverse dans la direction Y. Il s'agit ainsi d'une interaction modale entre le premier mode transverse dans la direction X et le premier mode transverse dans la direction Y. Comme ces deux modes sont à la même fréquence, on peut parler d'une interaction 1 :1.

Pour observer d'autres interactions modales, il convient de décomposer le signal de réponse vibratoire en harmoniques. On utilise l'outil présenté dans le chapitre 2 (partie 2.1.3). La figure 3.14 illustre la décomposition en harmoniques du signal de réponse au sommet du colis central. Les courbes présentées correspondent aux niveaux mesurés au cours de la dernière expérience avec un niveau d'excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  (courbe rouge sur la figure 3.10). De même que pour l'excitation verticale présentée en partie 3.3.2, les niveaux observés aux harmoniques d'ordre supérieur à 1 sont faibles et ont une influence mineure sur le comportement de la structure. Leur amplitude est significativement plus importante dans la zone où le frottement agit (entre 115 Hz et 150 Hz). Parmi ces composantes, on remarque deux pics de résonance : le premier à 116 Hz à l'harmonique 11 (courbe noire) et le second

à 142 Hz à l'harmonique 9 (courbe violette). Ces pics correspondent ainsi tous deux à des signaux autour de 1277 Hz ( $116 \times 11 = 1276$  Hz et  $142 \times 9 = 1278$  Hz). On peut interpréter ces résonances aux harmoniques 9 et 11 comme des interactions modales entre le premier mode transverse et un mode situé à 1277 Hz. Ce mode pourrait être le troisième mode transverse, malgré une différence de 37 Hz avec la fréquence de résonance mesurée au cours de l'identification modale. Il pourrait également s'agir d'un autre mode qui ne serait pas sollicité par une excitation transverse et donc pas identifié.

### 3.5 Mesures vibrométriques locales du frottement

Les mesures par accéléromètres permettent de visualiser l'effet du frottement local sur la réponse vibratoire globale de la structure. En complément de ces mesures, la vibrométrie laser à balayage a été utilisée pour observer le mouvement des pièces dans la zone de contact et apporter une meilleure compréhension des phénomènes non-linéaires locaux associés. La partie 3.5.1 présente brièvement la vibrométrie laser à balayage. Les résultats expérimentaux obtenus sont ensuite présentés dans le cas d'excitations horizontale (partie 3.5.2) et verticale (partie 3.5.3). La partie 3.5.4 se concentre sur un phénomène de résonance interne révélé par ces mesures vibrométriques.

#### 3.5.1 Vibrométrie laser à balayage

La vibrométrie laser utilise l'effet Doppler pour mesurer la vitesse d'un point en mouvement. Lorsque le faisceau laser incident est réfléchi par le point de mesure en mouvement, la fréquence du faisceau laser réfléchi est modifiée par effet Doppler. Un traitement numérique permet une mesure de la vitesse instantanée du point de mesure. Le dispositif est dit « à balayage » parce que des servomoteurs permettent de modifier automatiquement la position du point de mesure pour passer à un nouveau point de mesure. Le dispositif qui a été utilisé permet ainsi d'enregistrer successivement le mouvement de toute une grille de points de mesure sur la structure étudiée. Pour ces mesures, on utilise une excitation sinusoïdale à fréquence fixe et on observe le régime stationnaire. Le signal de contrôle du pot vibrant est enregistré et permet de synchroniser les enregistrements de vitesse effectués sur les différents points de mesures. On obtient à la fin une visualisation du champ de vitesse dans la zone de mesure.

Deux instruments ont été mis en œuvre. Pour les expériences avec une excitation verticale, un vibromètre laser à balayage 1D [72] a été utilisé. Il a été placé à la verticale de la structure pour observer le mouvement d'une lame (voir figure 3.15a). Les résultats de ces mesures seront présentés dans la partie 3.5.2. Pour les expériences avec une excitation horizontale, un vibromètre laser à balayage 3D [71] a été utilisé. Il s'agit de trois vibromètres laser 1D dont les faisceaux arrivent avec des angles d'incidence différents sur la structure. Les données des trois vibromètres sont traitées par un logiciel qui déduit la vitesse du point de mesure dans les trois directions d'un repère préalablement défini. On obtient alors un champ de vitesse en trois dimensions. Le dispositif a été positionné pour pouvoir observer le mouvement de deux lames de la structure simultanément (voir figure 3.15b). Les résultats de ces mesures seront présentés dans les parties 3.5.3 et 3.5.4.



FIG. 3.15: Photographies des montages expérimentaux pour les mesures vibrométriques laser à balayage 1D (a) et 3D (b).



FIG. 3.16: Emplacement des points de mesures pour la vibrométrie laser 1D.

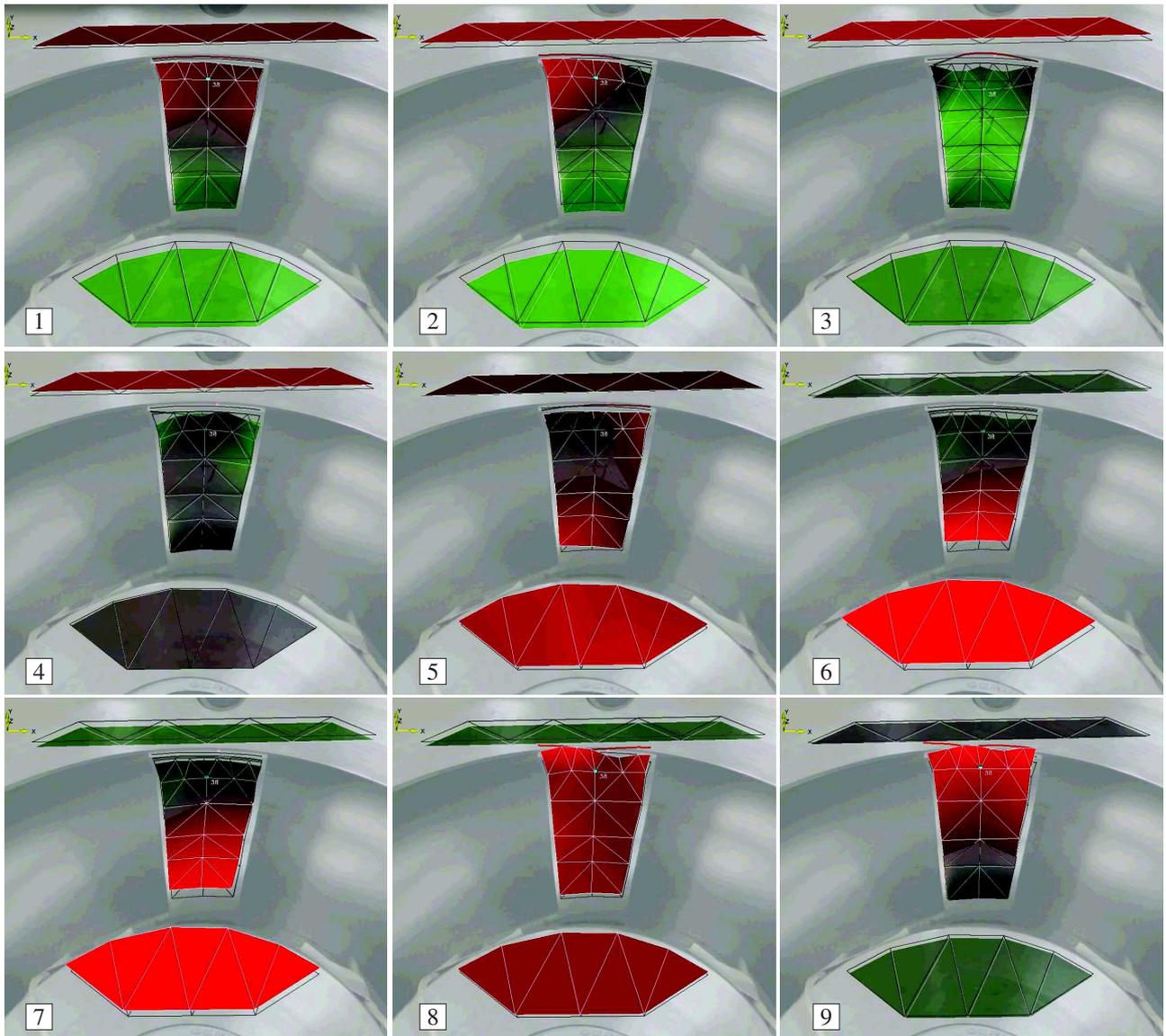


FIG. 3.17: Évolution de la déformation d'une lame au cours d'un cycle de vibration où le frottement intervient. Résultats obtenus par vibrométrie laser avec une excitation axiale sinusoïdale (238 Hz, 3420 N).

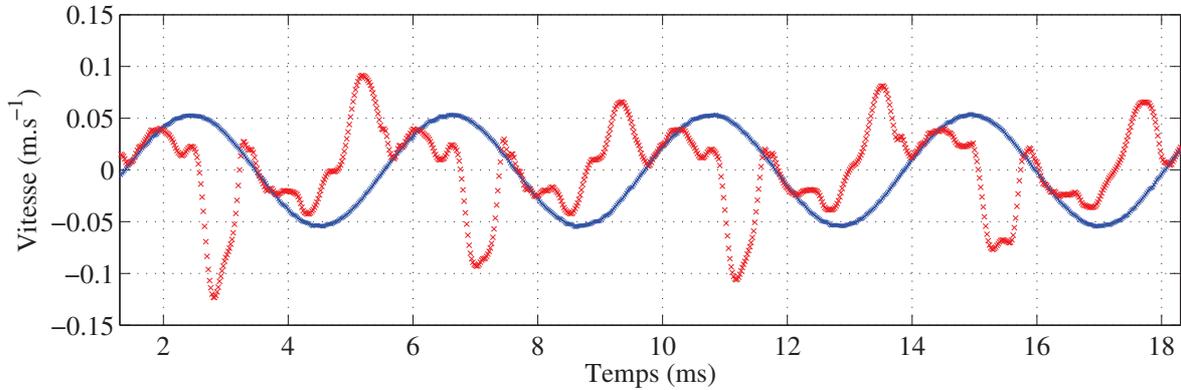


FIG. 3.18: Comparaison de la vitesse verticale du bord de la lame (courbe rouge) avec celle de l'enveloppe adjacente (courbe bleu). Mesures effectuées pour une excitation de 2910 N, à 238 Hz.

### 3.5.2 Mesures vibrométriques 1D, excitation verticale

Pour les expériences à excitation verticale, les mesures vibrométriques ont été concentrées sur le comportement d'une lame. Par symétrie, ce mouvement est représentatif de celui des trois autres lames. Les 52 points de mesure pour la vibrométrie laser 1D sont positionnés sur la figure 3.16. La mesure de la vitesse de chaque point est échantillonnée à 50000 Hz, ce qui fait 210 instants de mesure par période du signal d'excitation et permet ainsi une description très fine du frottement. Les mesures synchronisées pour l'ensemble des points du maillage expérimental permettent de visualiser un « film » du mouvement de la lame. 9 images de ce film sont présentées sur la figure 3.17. Ces images correspondent à un échantillonnage régulier d'une période du signal d'excitation. Les couleurs et le déplacement des points du maillage correspondent aux valeurs de vitesse mesurées. Un point en rouge, déplacé vers le haut, traduit une vitesse verticale positive alors qu'un point en vert, déplacé vers le bas révèle une vitesse verticale négative. Le glissement de la lame par rapport à l'enveloppe externe se traduit par une différence de couleur entre le bord de la lame et l'enveloppe.

Lorsque le bord de la lame et l'enveloppe externe ont la même couleur (images n°1, 5, 6 et 7 sur la figure 3.17), la lame reste accrochée à l'enveloppe. Sur l'image 2, le côté droit du bord de la lame a une couleur différente de l'enveloppe, il glisse alors que le côté gauche reste accroché : il s'agit d'un glissement partiel. Les images 3, 4, 8 et 9 témoignent d'un glissement total, les vitesses des points du bord de la lame y sont toujours différentes de la vitesse de l'enveloppe externe. La figure 3.17 montre ainsi qu'au cours de chaque période du mouvement stationnaire, il y a une phase d'accroche, une phase de glissement puis une deuxième phase d'accroche et une deuxième phase de glissement.

Ce mouvement d'accroche-glissement est également révélé par la figure 3.18. La vitesse du bord de la lame est définie comme la moyenne des mesures de vitesse des points appartenant au bord de la lame et de même pour l'enveloppe externe. Sur la figure 3.18, la vitesse du bord de la lame est

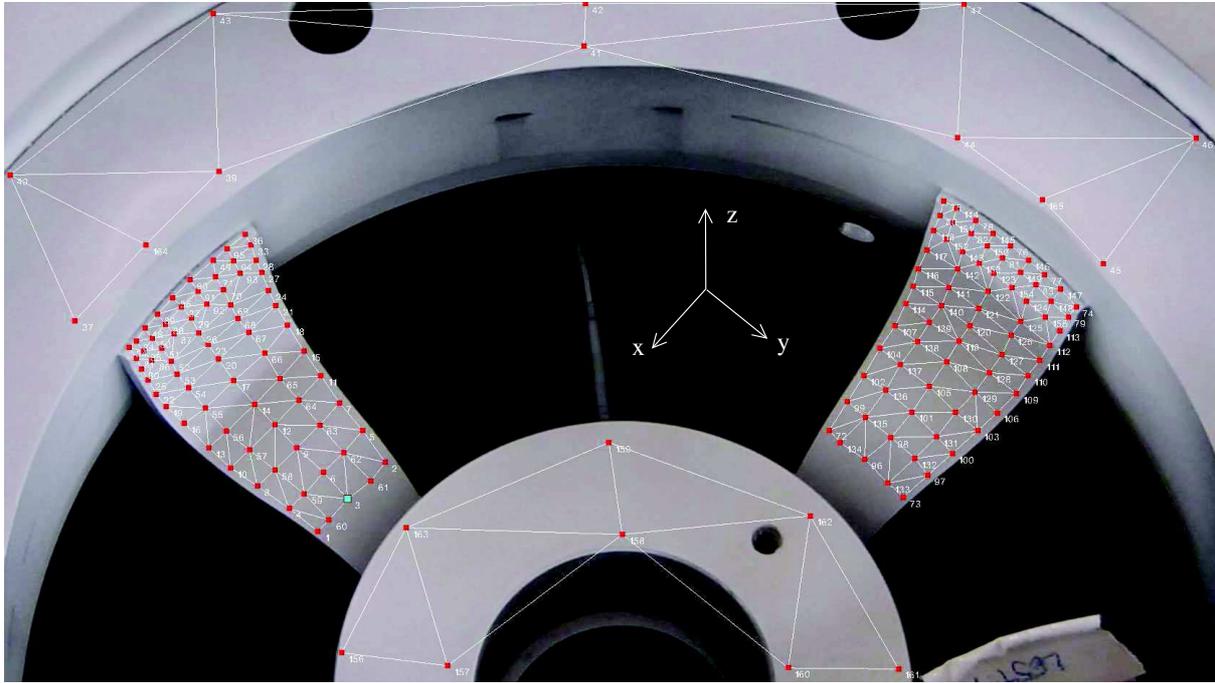


FIG. 3.19: Emplacement des points de mesures pour la vibrométrie laser 3D.

comparée à la vitesse de l'enveloppe externe. Lorsque les deux vitesses sont égales, les deux pièces sont accrochées entre elles, sinon, elles glissent l'une par rapport à l'autre. La figure 3.18 traduit ainsi bien un mouvement stationnaire avec deux phases de glissement par période. On peut également noter que le mouvement de la lame au cours des phases de glissement n'est pas parfaitement identique d'une période à l'autre malgré le fait qu'on ait atteint un régime stationnaire. Cette observation peut être mise en relation avec les observations de variabilité des mesures de réponses fréquentielles faites en partie 3.3.2 : le frottement n'est pas un phénomène parfaitement déterministe à l'échelle macroscopique.

### 3.5.3 Mesures vibrométriques 3D, excitation horizontale

Au cours des expériences à excitations horizontales, les lames ne sont plus sollicitées de manière symétrique. Deux lames sont excitées dans la direction de leur bord supérieur alors que deux autres sont en contact avec une surface de l'enveloppe orthogonale à la direction d'excitation. Ainsi pour ces expériences, l'étude du mouvement des lames nécessite de mesurer le mouvement de deux lames et d'avoir accès aux trois composantes du mouvement des deux lames. C'est pourquoi pour cette expérience, la vibrométrie laser à balayage 3D a été utilisée sur une zone de mesure incluant deux lames. L'emplacement des points de mesure est présenté sur la figure 3.19. La direction d'excitation est  $x$ . La lame située à gauche sur la figure 3.19 est celle pour laquelle le frottement se déclenche en premier et est le plus intense. Pour la suite de l'étude, nous nous focaliserons sur la description du

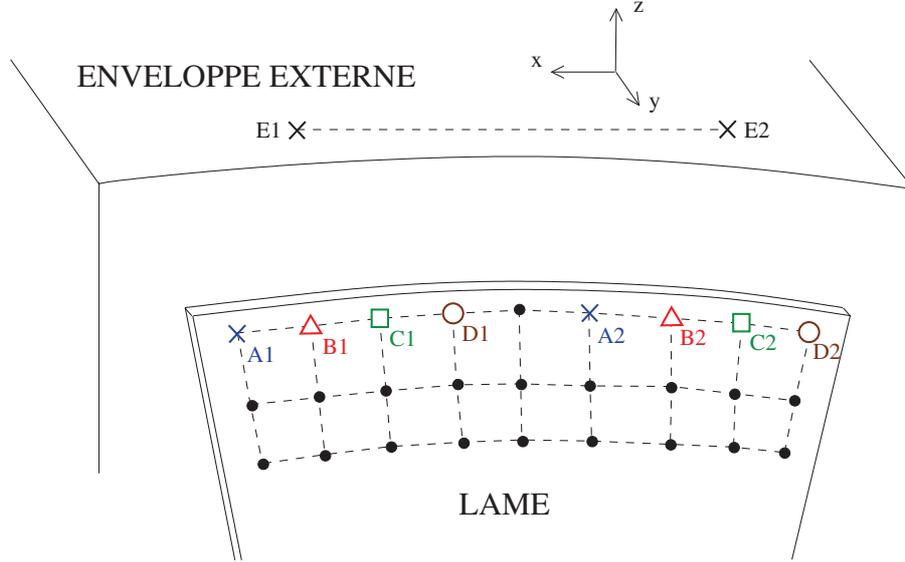


FIG. 3.20: Définition de notation des points de mesures pour le calcul de la vitesse de rotation du bord de lame.

mouvement associé à cette lame. Le mouvement du bord de cette lame est décrit comme un mouvement de corps rigide défini par trois translations et trois rotations. Les composantes qui sont affectées par le frottement sont la rotation autour de l'axe  $y$  et la translation selon  $x$ .

Pour calculer la vitesse de rotation autour de l'axe  $y$ , on utilise les mesures de vitesse verticale (selon  $z$ ) des points appartenant au bord de la lame. On nomme ces points selon les notations de la figure 3.20. La vitesse de rotation expérimentale de la lame est définie comme :

$$\dot{\theta}_y(\text{lame}) = \frac{1}{4} \left( \frac{v_z(A2) - v_z(A1)}{d(A1, A2)} + \frac{v_z(B2) - v_z(B1)}{d(B1, B2)} + \frac{v_z(C2) - v_z(C1)}{d(C1, C2)} + \frac{v_z(D2) - v_z(D1)}{d(D1, D2)} \right) \quad (3.1)$$

où  $v_z$  désigne la vitesse mesurée dans la direction  $z$  et  $d$  désigne la distance entre deux points. De même, on définit la vitesse de rotation de l'enveloppe :

$$\dot{\theta}_y(\text{enveloppe}) = \frac{v_z(E2) - v_z(E1)}{d(E1, E2)} \quad (3.2)$$

Les résultats de mesures en rotation sont présentés sur la figure 3.21, pour un niveau d'excitation très faible ( $0.5 \text{ m.s}^{-2}$ ). On observe ainsi que dès les plus faibles niveaux d'excitation la lame frotte en rotation contre l'enveloppe. Comme pour les résultats des expériences à excitations verticales présentés en partie 3.3.2, on observe une alternance de phases d'accroche et de glissement, caractéristique du frottement. Ce phénomène se poursuit à plus fort niveau d'excitation. Les mesures en rotation à plus fort niveau d'excitation ne sont pas présentées dans cette partie parce qu'elles montrent surtout l'ap-

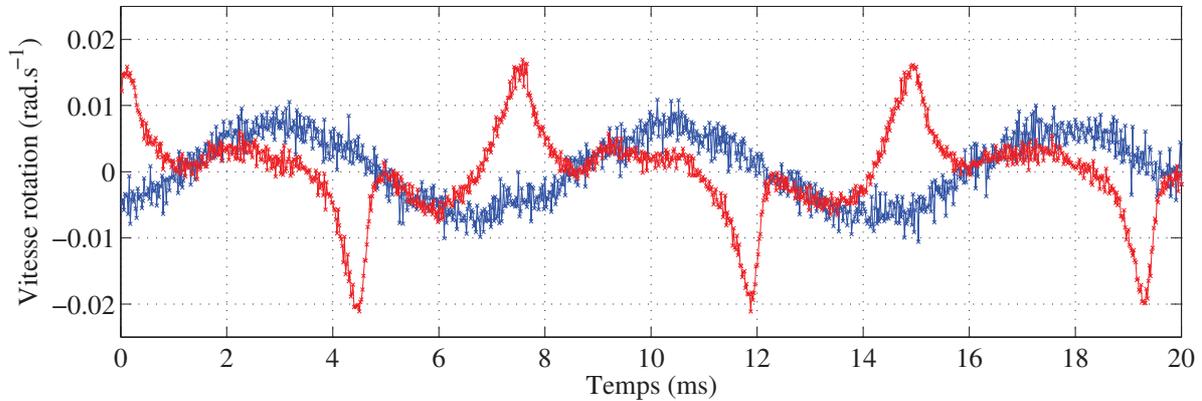


FIG. 3.21: Vitesse de rotation du bord de la lame (courbe rouge) et de l'enveloppe (courbe bleue), à 135 Hz et à très faible niveau d'excitation ( $0.5 \text{ m.s}^{-2}$ ).

partition d'une résonance interne qui sera décrite dans la partie 3.5.4.

L'étude du mouvement transverse selon  $x$  de la lame et de l'enveloppe se fait en prenant la moyenne des vitesses selon  $x$  des points appartenant au bord supérieur de la lame et à l'enveloppe externe respectivement. Les mesures obtenues pour différents niveaux d'excitation sont présentées sur la figure 3.22. Un phénomène d'apparition de glissement dans le mouvement de la lame (courbes rouges) est identifié. Avec une excitation de  $15 \text{ m.s}^{-2}$ , la lame et l'enveloppe restent accrochées. En montant le niveau d'excitation, des phases de glissement apparaissent peu à peu et deviennent évidentes à fort niveau d'excitation.

Ainsi, le premier mouvement de frottement qui se déclenche est une rotation des lames autour de l'axe  $y$ , le frottement par translation selon  $x$  ne se déclenche qu'à niveau d'excitation beaucoup plus fort.

### 3.5.4 Interaction modale non-linéaire

Pour la structure « Harmonie », la vibrométrie laser à balayage a permis de mettre en avant une interaction modale. La figure 3.23 présente le mouvement moyen d'une lame dans la direction  $y$ . On étudie la lame positionnée à gauche sur la figure 3.19. Le signal considéré est la moyenne des vitesses instantanées selon  $y$  mesurées sur l'ensemble des points de mesure vibrométriques présents sur cette lame. La structure « Harmonie » est excitée à 130 Hz, et comme l'excitation n'est pas parfaitement monodirectionnelle selon  $x$ , on mesure un mouvement de la lame à 130 Hz selon la direction  $y$  (figure 3.23 en haut). À 135 Hz (figure 3.23 en bas), ce signal est perturbé par une importante composante stationnaire à  $13 \times 135 \text{ Hz} = 1755 \text{ Hz}$ , alors que l'excitation demeure sinusoïdale à 135 Hz, il s'agit d'une interaction modale.

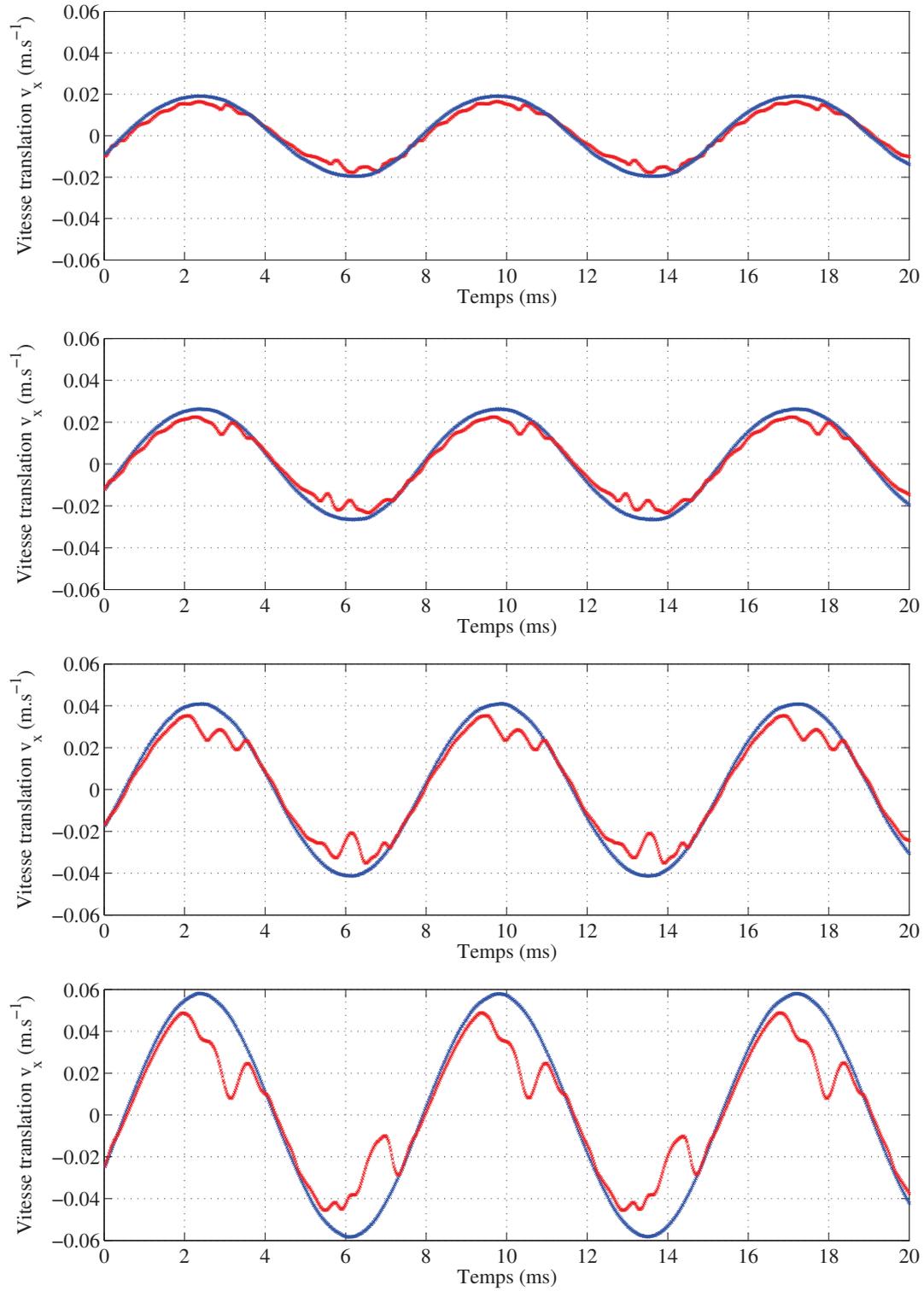


FIG. 3.22: Vitesse de translation du bord de la lame (courbes rouges) et de l'enveloppe (courbes bleues) à 135 Hz et pour quatre niveaux d'excitation. De haut en bas : 15, 20, 30 et 40  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

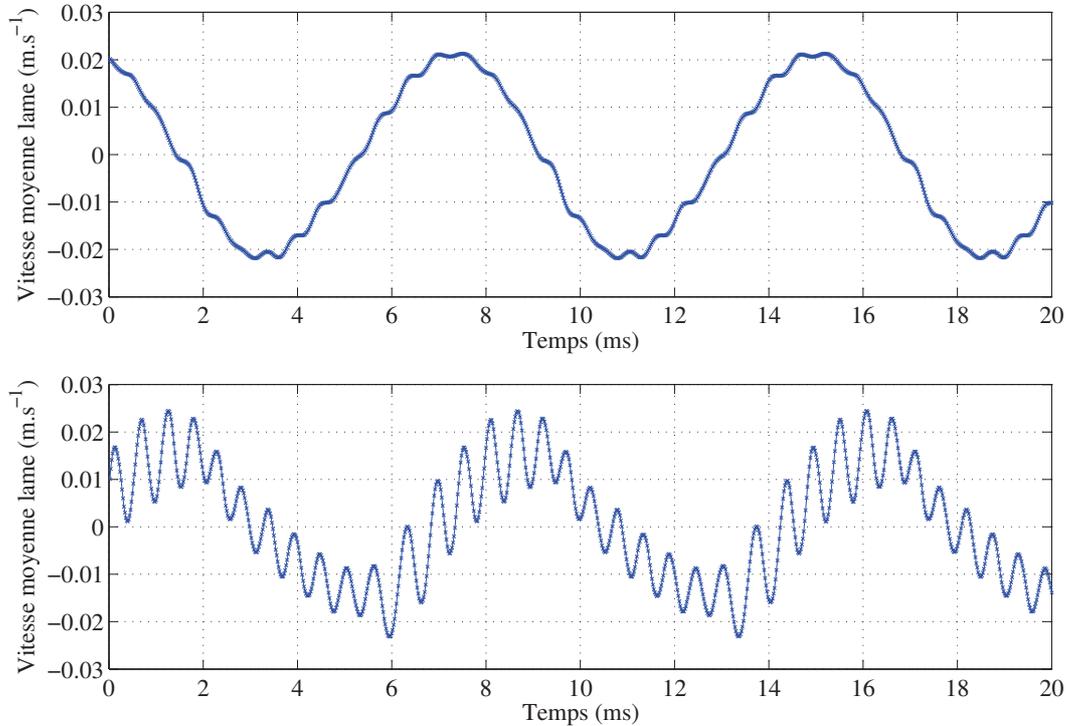


FIG. 3.23: Vitesse moyenne dans la direction  $y$  de la lame pour un niveau d'excitation selon  $x$  de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  et pour 2 fréquences d'excitation : 130 Hz (en haut) et 135 Hz (en bas).

Le logiciel d'acquisition de données du système de vibrométrie laser 3D permet d'extraire directement les composantes harmoniques des signaux mesurés et de les présenter sur le maillage expérimental. La figure 3.24 présente ainsi la composante à l'harmonique 13 de la réponse de la structure à 135 Hz et avec une excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ . Le mode qui est excité à l'harmonique 13 est le mode de pompage de la lame. Ainsi il s'agit d'une interaction 1 :13 entre le premier mode transverse de la structure « Harmonie » et le mode local de pompage d'une lame. Notons qu'en restant dans une logique linéaire, ce mode de pompage ne pourrait être excité qu'avec une excitation à 1755 Hz dans la direction  $y$  alors que l'excitation ici est à 135 Hz et dans la direction  $x$ .

Cette interaction modale influence le mouvement local d'accroche et de glissement de la lame par rapport à l'enveloppe externe. La figure 3.25 présente l'évolution de la vitesse de rotation autour de  $y$  du bord supérieur de la lame avec les mêmes conditions d'excitation. Ce mouvement se décompose de nouveau en phases d'accroche où les mouvements de la lame et de l'enveloppe se superposent et en phases de glissement où ils se séparent.

Pendant les phases de glissement entre la lame et l'enveloppe, le mouvement est très différent de

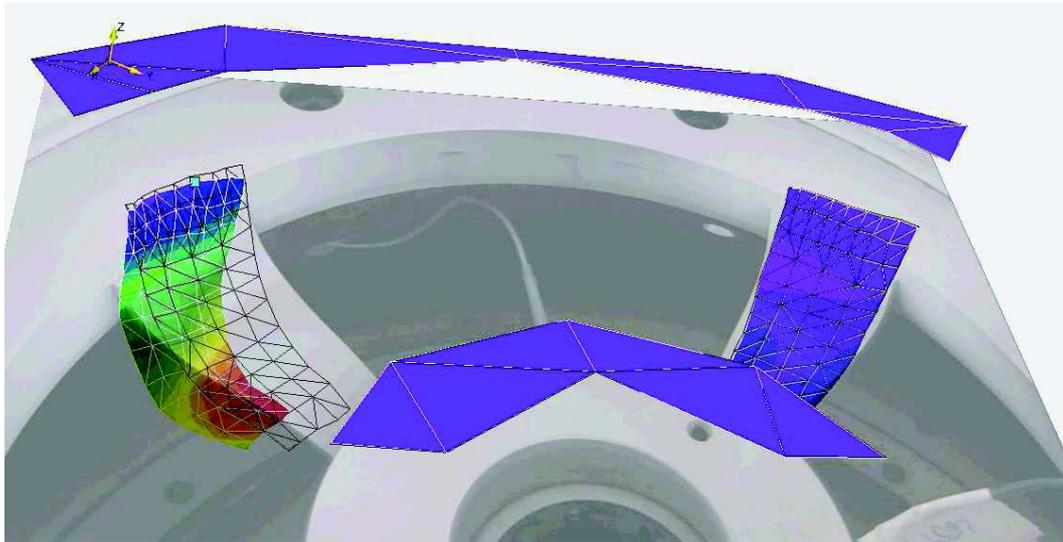


FIG. 3.24: Composantes à  $13 \times 135 = 1755$  Hz des signaux de vitesse mesurés par le vibromètre laser à balayage (excitation : 135 Hz,  $10 \text{ m.s}^{-2}$ ). Les couleurs représentent la norme du vecteur vitesse : du bleu (vitesse nulle) au rouge (vitesse maximale). Le maillage est déformé selon les vecteurs vitesse mesurés.

celui décrit au paragraphe 3.5.3 et illustré par la figure 3.21. Des oscillations temporelles de la vitesse de rotation du bord de la lame apparaissent lors de ces phases de glissement. Afin d'illustrer visuellement ce comportement local, 10 instants du cycle d'évolution du contact entre la lame et l'enveloppe sont présentés sur la figure 3.26. Les instants retenus sont désignés par une lettre et sont reportés sur la figure 3.25. Les images de la figure 3.26, obtenues par vibrométrie laser permettent de comprendre l'évolution du comportement de la lame au cours d'un cycle. Il faut interpréter ces images comme la représentation d'une mesure de vitesse, il ne s'agit pas d'une mesure de position de la lame même si graphiquement le maillage expérimental est déformé, ce qui pourrait laisser penser que c'est la position qui est représentée. Ainsi sur les images (a) et (f), la vitesse de l'ensemble de la structure est nulle, il s'agit d'une inversion du sens de déplacement de la structure, ce qui signifie que le colis central est à son maximum de déplacement (selon  $+x$  et  $-x$  respectivement). Inversement, les phases de glissement apparaissent lorsque la vitesse du colis central est maximale, c'est-à-dire lorsqu'il passe par la position centrale.

La figure 3.26 permet d'illustrer les oscillations observées sur la figure 3.25. Les instants (a), (b), (f) et (g) correspondent au début et à la fin des phases d'accroche. Au cours des phases de glissement, la lame oscille entre une grande vitesse de glissement en rotation (instants (c), (e) et (h), (j)) et des instants d'accroche instantanée (instants (d) et (i)). La fréquence de ces oscillations correspond à 13 fois la fréquence d'excitation.

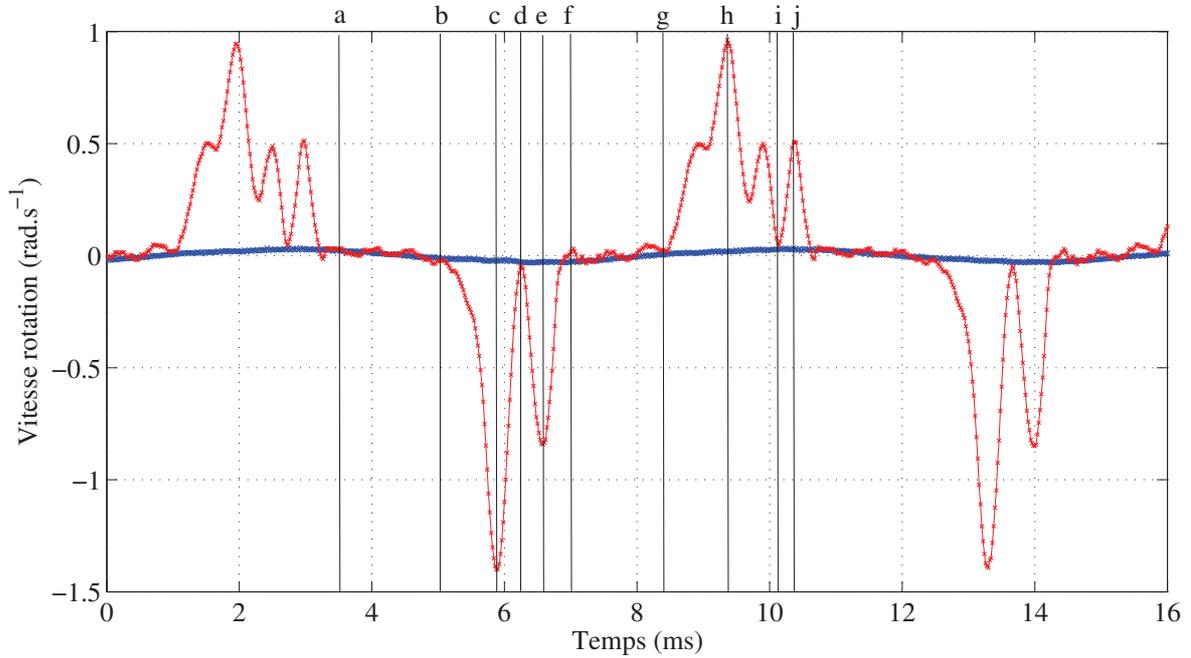


FIG. 3.25: Vitesse de rotation du bord de la lame (courbe rouge) et de l'enveloppe (courbe bleue), à 135 Hz et avec une excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ .

On peut donc interpréter ces battements comme une conséquence de l'interaction modale révélée par la figure 3.23. Inversement, sur la figure 3.23, l'oscillation à l'harmonique 13 est stationnaire au cours du temps, elle n'est pas influencée par les phases d'accroche et de glissement. Il s'agit donc bien d'une interaction modale qui a une influence sur le mouvement d'accroche-glissement du contact frottant. Le mode de battement de la lame reste entretenu tout au long du cycle. Lorsque la lame est accrochée, il n'a pas de conséquence sur la vitesse de rotation de la lame. Lorsque le glissement se déclenche, le battement de la lame entraîne la rotation du bord avec une fréquence qui est celle du mode de la lame. La vibrométrie laser à balayage permet ainsi de révéler ce phénomène non-linéaire très marqué qui n'est pas du tout intuitif a priori.

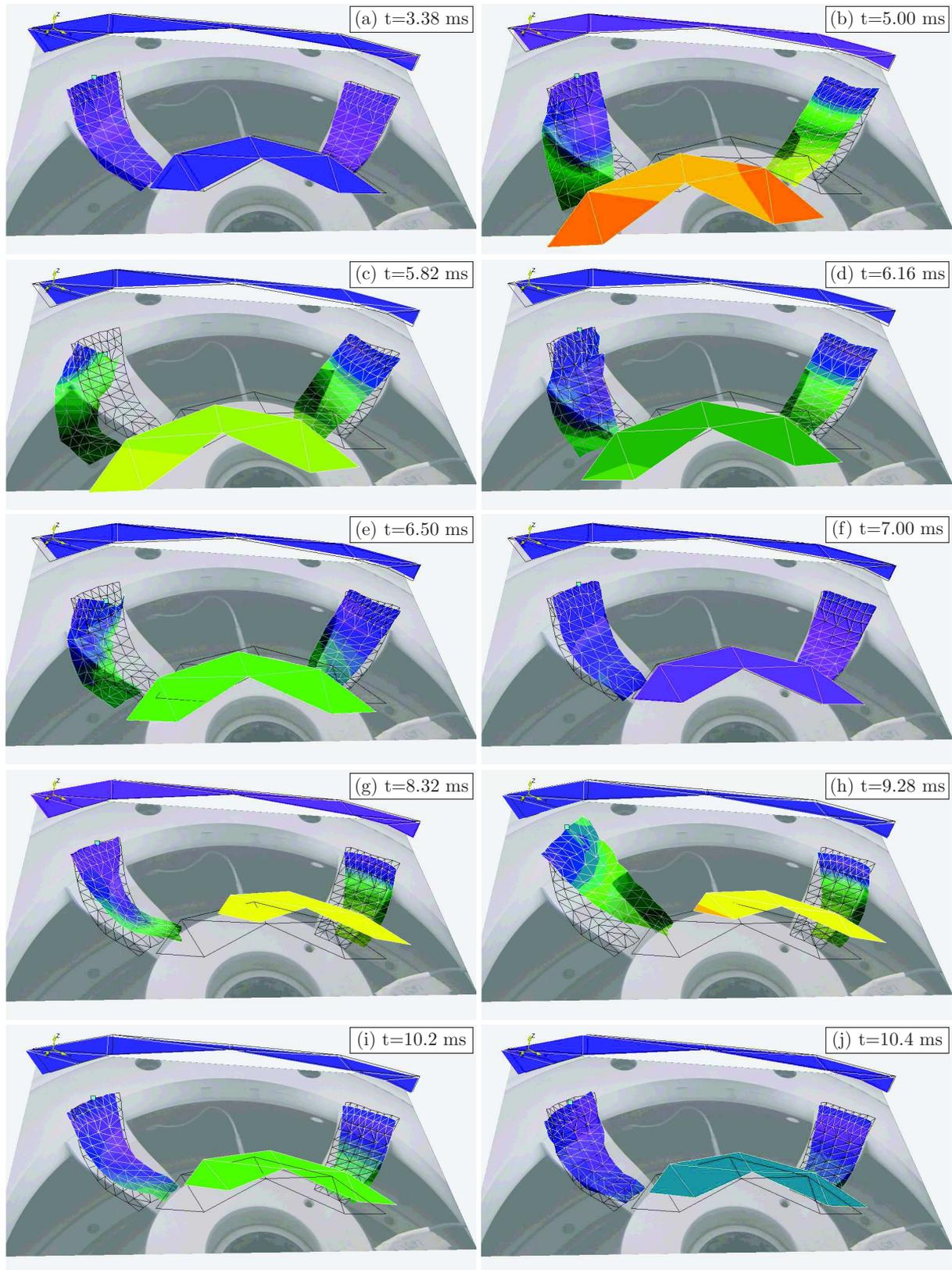


FIG. 3.26: Evolution de la déformation de la zone de mesure vibrométrique pour une excitation transverse ( $135 \text{ Hz}$ ,  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ). Les instants auxquels correspondent les images sont indiqués sur la figure 3.25.

### 3.6 Conclusion

Les réponses vibratoires expérimentales de la structure « Harmonie » présentées dans ce chapitre sont fortement non-linéaires. Elles justifient la nécessité de s'orienter vers une modélisation non-linéaire avec prise en compte du comportement local frottant et le développement de techniques numériques avancées permettant de reproduire la réponse non-linéaire du système. De manière générale, les effets observés sur les courbes de réponse fréquentielles sont caractéristiques du frottement avec des effets adoucissants et dissipatifs. De plus, l'apparition du frottement s'accompagne de réponses vibratoires multi-harmoniques. Ces effets se retrouvent sur l'ensemble de la structure et non pas seulement au voisinage des liaisons frottantes, pour des excitations verticales ou horizontales. Afin d'obtenir un diagnostic expérimental plus précis dans la zone où le frottement apparaît, des mesures par vibrométrie laser à balayage sont effectuées. Elles révèlent un mouvement temporel du frottement constitué d'une alternance de phases d'accroche et de glissement dans la zone de liaison. Dans le cas des excitations verticales, le glissement apparaît dans direction verticale. Dans le cas des excitations selon l'axe horizontal  $x$ , il apparaît tout d'abord en rotation autour de l'axe  $y$  puis en translation selon  $x$  à fort niveau d'excitation. Dans ce dernier cas des excitations horizontales, plusieurs phénomènes non-linéaires d'interaction modale sont observés. Le premier mode transverse de la structure « Harmonie », dans la direction  $X$ , à 134 Hz, déclenche une réponse selon le premier mode transverse selon  $Y$ , également à 134 Hz et également selon le troisième mode transverse à 1275 Hz. La vibrométrie laser 3D révèle que ce premier mode transverse interagit aussi avec un mode de pompage des lames frottantes. Cette dernière interaction a une très forte influence sur le mouvement temporel d'accroche-glissement au niveau du contact frottant.

Ces résultats expérimentaux permettent de caractériser la réponse vibratoire de la structure « Harmonie ». Ils apportent des éléments de compréhension fine des comportements globaux et locaux non-linéaires. L'objectif principal de ces travaux de thèse est de montrer que de tels comportements vibratoires non-linéaires peuvent être précisément modélisés et simulés. La mise en place d'un modèle éléments finis non-linéaire et de techniques numériques d'estimation des réponses vibratoires associées fait l'objet du chapitre suivant. Le chapitre 4 a pour objectif la validation sur ce cas d'étude industriel de la démarche globale présentée au chapitre 1 et appliquée sur un cas d'étude académique au chapitre 2. Cette validation est faite par la comparaison entre les résultats de simulation et les mesures présentées dans ce chapitre 3.



## Chapitre 4

# Simulation vibratoire non-linéaire d'un assemblage avec des liaisons frottantes

*La démarche de modélisation et de simulation de la réponse vibratoire non-linéaire de la structure « Harmonie » est présentée dans ce chapitre. Tout d'abord le modèle éléments finis de la structure est présenté et justifié par des essais vibratoires à faible niveau d'excitation. Les paramètres de ce modèle éléments finis sont recalés afin d'obtenir un modèle linéaire qui reproduise au mieux la réponse de la structure à très faible niveau d'excitation. Ce modèle est réduit en utilisant la méthode de sous-structuration à interface hybride présentée au chapitre 1.*

*Les modèles de connecteurs linéaires dans les zones où le frottement se déclenche sont ensuite remplacés par des modèles de liaisons non-linéaires. Un système d'équations dynamiques non-linéaires est alors obtenu dans la base réduite. Ce problème est traité par la méthode de balance harmonique couplée à une méthode de continuation de type pseudo-arclength. De plus, une stratégie de condensation du problème non-linéaire sur un nombre de variables minimal est utilisée. Les résultats de simulation sont comparés aux résultats expérimentaux du chapitre 3, au niveau de la réponse globale de la structure et au niveau du mouvement local de frottement des lames. L'ensemble des phénomènes présentés au chapitre 3 sont comparés à l'expérience (évolution des fréquences de résonance, réponses multi-harmoniques, résonances internes, ...).*

*Enfin, dans le cadre d'une utilisation industrielle de ces travaux, la question du calcul du champ de contraintes sur modèle complet à partir des résultats sur modèle réduit est soulevée et une réponse y est apportée.*

## 4.1 Introduction

L'étude de l'effet du frottement sur les réponses vibratoires des structures assemblées est un sujet d'étude industriel et scientifique très actif depuis plusieurs décennies. Le domaine d'application industriel le plus courant est celui des turbomachines. Les roues aubagées possèdent une source naturelle d'amortissement par frottement dans la liaison aube-disque [10, 89, 73]. Cette source « naturelle » d'amortissement n'étant généralement pas suffisante, les industriels motoristes utilisent aussi de petits frotteurs disposés sous les plateformes des aubes. Il existe de nombreuses géométries possibles pour ces frotteurs, par exemple, les frotteurs en coin, de type plaques, les frotteurs creux ou à jonc de friction. Les études concernant ce type de dispositifs sont nombreuses dans la littérature scientifique [85, 75, 69, 43, 25, 82, 49]. De manière plus générale, l'étude du frottement dans les roues aubagées a accéléré le développement de modèles de frottement et de méthodes de simulation vibratoires adaptées à des structures industrielles. Les articles de revue bibliographique de Feeny et al. [23], de Gaul et Nitsche [27], de Berger [6], l'ouvrage de Sextro [86] ainsi que plus récemment l'article de Bograd et al. [8] permettent d'apprécier l'évolution historique des modèles de frottement et des méthodes de simulation vibratoire associées.

Au niveau des méthodes de résolution, l'utilisation d'un modèle éléments finis, d'une méthode de réduction de modèle et de la méthode de balance harmonique couplée à un algorithme de continuation correspond à l'état de l'art scientifique pour simuler la réponse vibratoire d'un assemblage avec des liaisons frottantes. Beaucoup de travaux ont permis d'améliorer l'efficacité de la méthode de balance harmonique pour traiter les problèmes de frottement : [70, 81, 75, 69, 2, 91].

Ce chapitre présente ainsi une application industrielle de méthodes qui correspondent à l'état de l'art scientifique. Une telle application à un cas d'étude industriel, avec une comparaison expérimentale précise, constitue à la fois un transfert de méthodes académiques vers l'industrie et une contribution scientifique originale. Ce chapitre détaille l'ensemble de la méthode de modélisation et simulation numérique de la maquette « Harmonie » :

- modélisation éléments finis,
- recalage des paramètres du modèle éléments finis,
- réduction de modèle,
- modélisation non-linéaire des liaisons frottantes,
- méthode de simulation vibratoire non-linéaire,
- recalage des paramètres du modèle non-linéaire de liaison,
- comparaisons essai-calcul,
- reconstruction des résultats sur modèle complet avec calcul des champs de contraintes.

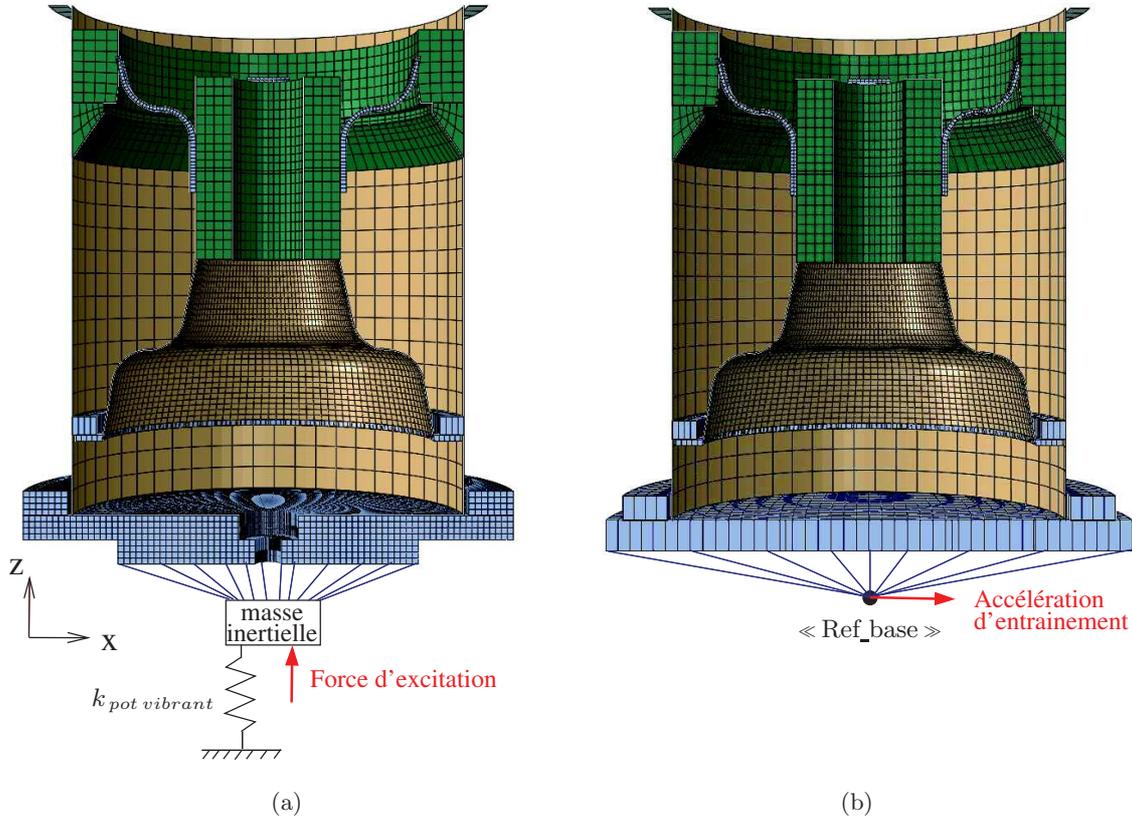


FIG. 4.1: Vue en coupe du modèle éléments finis pour les expériences à excitations verticales (a) et horizontales (b).

## 4.2 Modèle Éléments Finis de la structure « Harmonie »

La structure a été modélisée par l'intermédiaire du logiciel éléments finis ABAQUS. La figure 4.1 présente une vue en coupe des modèles des assemblages expérimentaux correspondants aux expériences à excitation verticale (figure 4.1a) et horizontale (figure 4.1b). La différence entre les deux assemblages se situe uniquement au niveau du plateau support. Sur la figure 4.1, les éléments de type solide, coque mince et coque épaisse sont colorés respectivement en vert, jaune et gris. Cette partie détaille la méthode et les choix de modélisation tout d'abord au niveau des composants de l'assemblage pris individuellement (partie 4.2.1) puis au niveau des liaisons entre ces composants (partie 4.2.2).

### 4.2.1 Modélisation des composants élémentaires

Chaque composant du modèle numérique a fait l'objet d'une étude de convergence de maillage. Le choix de la taille et du type d'élément fini pour chaque composant de l'assemblage est fait de sorte

Composant	Masse numérique	Erreur par rapport à l'expérience
Enveloppe	44.79 kg	0.2%
Colis central	11.92 kg	< 0.1%
Lame	$108.8 \cdot 10^{-3}$ kg	0.2%
Plateau expériences verticales	9.57 kg	1%
Plateau expériences horizontales	9.27 kg	7%

TAB. 4.1: Comparaison des masses numérique et expérimentale de chaque composant de l'assemblage « Harmonie ».

à minimiser le nombre de degrés de liberté du modèle tout en conservant le bon comportement de la pièce. Dans notre cas, le critère d'évaluation pour la convergence de maillage est la première fréquence propre de la pièce en condition encastrée à la base et libre au sommet. Lorsque cette fréquence propre demeure la même à moins de 1% près en doublant le nombre de degrés de liberté, on considère que le raffinement du maillage est suffisant. Inversement, le raffinement est considéré comme juste suffisant si le fait d'augmenter la taille des mailles a un impact visible sur la qualité des résultats.

Une fois la convergence de maillage atteinte, la modélisation de chaque composant est vérifiée en comparant la masse du modèle éléments finis de ce composant avec celle mesurée expérimentalement. Le résultat de cette comparaison est présenté dans le tableau 4.1. L'écart de masse expérimentale et numérique pour les plateaux s'explique principalement par les usinages qu'ils ont subis et qui ne sont pas modélisés. En particulier, le plateau qui a servi aux expériences horizontales a été réutilisé après d'autres expériences pour lesquelles il avait été usiné. La masse de la matière enlevée par usinage (27 trous perforants avec lamage ainsi qu'un usinage de surface) correspond à l'écart de masse entre la mesure et le modèle. Par ailleurs ces usinages n'ont pas d'influence sur le comportement mécanique de la plaque en condition encastrée à la base. À la lumière de ces informations, les résultats présentés dans le tableau 4.1 permettent d'avoir confiance dans la modélisation des composants.

#### 4.2.2 Modélisation des liaisons et des conditions aux limites.

Pour le montage avec l'excitation verticale, la partie mobile du pot vibrant est modélisée par une masse inertielle ponctuelle ( $m_{\text{pot vibrant}} = 15.88\text{kg}$ , selon les caractéristiques données par le fabricant du pot vibrant) dont les degrés de liberté horizontaux et en rotation sont bloqués. Un ressort de faible raideur ( $k_{\text{pot vibrant}} = 22800 \text{ N.m}$ , selon les caractéristiques données par le fabricant) limite le mouvement vertical de cette masse ponctuelle par rapport au sol. L'excitation est définie comme une force appliquée sur cette masse ponctuelle. La masse ponctuelle est reliée à la base du plateau support par un couplage structural. Ce couplage est un élément de recalage du modèle éléments finis. Deux types de couplage peuvent être choisis :

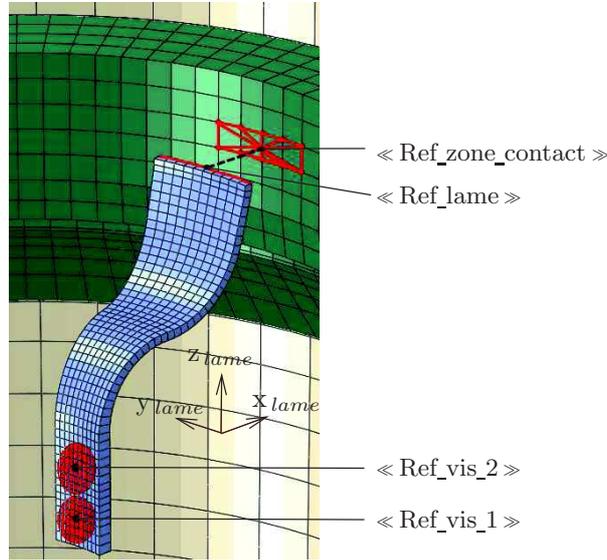


FIG. 4.2: Schéma de la modélisation éléments finis d'une lame.

- le couplage cinématique impose à tous les nœuds de la surface d'influence le mouvement du nœud de référence. La surface d'influence est ainsi indéformable, elle a un mouvement de corps rigide.
- le couplage structural impose que la moyenne des mouvements des nœuds de la surface d'influence soit égale au mouvement du nœud de référence. La surface d'influence peut alors se déformer, sous réserve que la condition de couplage reste vérifiée.

Ici, le couplage structural pour la liaison pot vibrant - plateau support a été choisi à partir des premiers essais sur sous-structure (voir partie 4.3).

Pour le montage avec l'excitation horizontale, qui a été présenté en Section 3 (voir figure 3.7), le pot vibrant impose l'accélération horizontale de la table glissante qui supporte le montage. La modélisation éléments finis se place dans le repère de la table glissante. Ainsi, ni la table glissante, ni le pot vibrant ne sont modélisés. L'excitation est appliquée à travers un terme d'accélération d'entraînement. De manière analogue à la modélisation du montage avec excitation verticale, le plateau support est ici contrôlé par un nœud de référence dénommé « Ref\_base » (voir figure 4.1b). Le couplage entre le plateau et ce nœud est cinématique : tous les nœuds de la face inférieure du plateau ont le même mouvement que le nœud référence « Ref\_base ». Ce mouvement du nœud « Ref\_base » est bloqué dans les directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ainsi qu'en rotation autour de l'axe vertical  $z$ . Les rotations autour des axes  $x$  et  $y$  ne sont pas bloquées mais contrôlées par des ressorts qui sont des paramètres de recalage. La valeur de ces raideurs est issue du processus de recalage et détaillée dans le paragraphe 4.3. Ces conditions aux limites particulières se justifient par le fait que la table glissante, qui repose sur un bain d'huile, n'a pas une raideur infinie en rotation. Cette raideur, en particulier autour de l'axe  $y$ , est un paramètre

Sous-ensemble	Mode	Fréquence de résonance numérique	Erreur par rapport à l'expérience
n°1 : Plateau-Enveloppe	Premier mode vertical	880.4 Hz	1%
n°2 : Plateau-colis-lames	Premier mode vertical (le colis et les lames sont synchrones en phase)	210.8 Hz	3.6%
n°2 : Plateau-colis-lames	Plusieurs modes impliquant les lames (voir figure 4.3)	[254.0-260.0] Hz	≈ 3%

TAB. 4.2: Comparaison des modes de résonance numériques et expérimentaux des sous-structures testées.

déterminant pour les fréquences de résonance du montage excité dans la direction  $x$ .

La liaison entre les lames et le colis central a fait l'objet d'un recalage particulier. Le modèle éléments finis d'une lame est présenté sur la figure 4.2. Les nœuds de référence qui lui sont associés dans le cadre de cette modélisation sont également représentés et nommés. Pour faciliter les explications, un repère local  $(x_{\text{lame}}, y_{\text{lame}}, z_{\text{lame}})$  est défini. Dans le montage expérimental, les lames sont reliées au colis central par deux vis. Dans le modèle numérique, ces vis sont représentées par des connecteurs entre deux nœuds de référence. Du côté de la lame, ces nœuds de référence, dénommés « Ref\_vis\_1 » et « Ref\_vis\_2 », contrôlent de manière rigide une zone d'influence dont le rayon est un paramètre de recalage qui vaut 0.01m. Des nœuds de référence et des zones d'influence identiques sont définies par symétrie sur la paroi du colis central. Les connecteurs représentant ces vis sont infiniment rigides (de raideur  $10^{10} \text{ N.m}^{-1}$ ) dans les directions  $x_{\text{lame}}$  et  $z_{\text{lame}}$  ainsi qu'en rotation autour de  $y_{\text{lame}}$  et  $z_{\text{lame}}$ . Suite au processus de recalage, des raideurs finies ont été introduites dans la direction  $y_{\text{lame}}$  et en rotation autour de  $x_{\text{lame}}$ .

### 4.3 Recalage et validation

La partie 4.2.2 a montré que, même si la modélisation de chaque composant de l'assemblage « Harmonie » peut se faire sans introduction de paramètres de recalage, des paramètres inconnus a priori interviennent dans la modélisation des liaisons. Le critère de performance qui est retenu pour le recalage de ces paramètres est la corrélation entre les premiers modes de résonance expérimentaux et numériques de toutes les structures testées à très faible niveau d'excitation.

#### 4.3.1 Validation par les expériences à excitation verticale

Le tableau 4.2 compare les fréquences de résonance numériques et expérimentales des deux sous-ensembles qui ont été testés avec une excitation verticale. La sous-structure plateau-colis-lames présente un ensemble de 4 modes de résonance entre 254 Hz et 260 Hz. La figure 4.3 représente la forme de ces modes. Ce sont des modes pour lesquels les déplacements sont localisés dans les lames. Ils peuvent

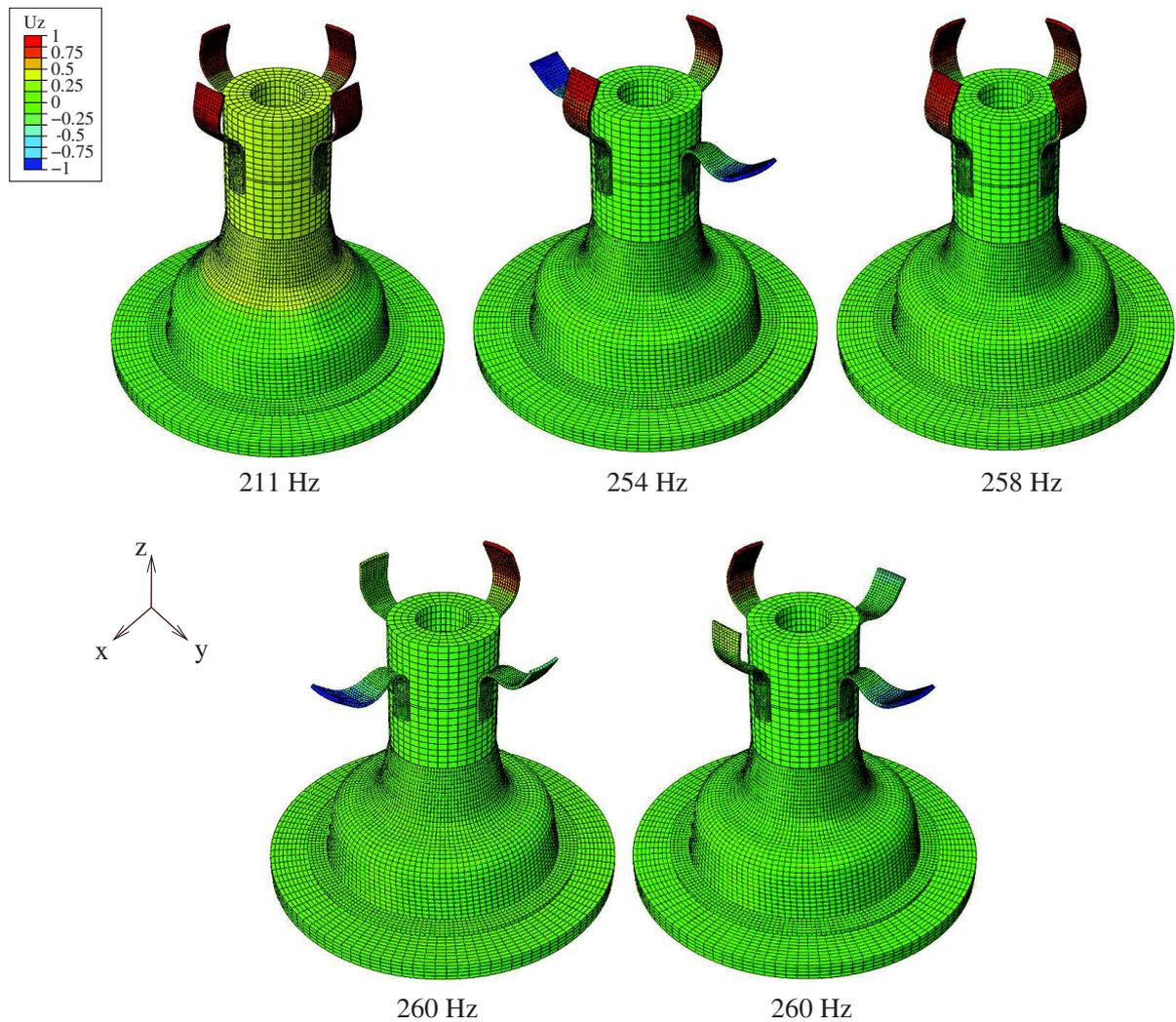


FIG. 4.3: Modes numériques du sous-ensemble plateau, colis central et lames.

être corrélés à l'ensemble de pics de résonances observés expérimentalement sur ce sous-ensemble dans la plage de fréquence  $[247, 251.5]$  Hz. La très bonne corrélation en fréquence entre les résultats numériques et expérimentaux permet de valider en partie la modélisation des lames et de la liaison lame-colis. Ces premiers essais ont été réalisés avec très peu d'accéléromètres (deux ou trois), c'est pourquoi aucune corrélation de déformation modale n'est présentée.

La bonne corrélation essai-calcul sur les sous-ensembles nous permet d'étudier l'assemblage complet « Harmonie ». Les expériences ont été réalisées avec une amplitude de tension pilote du pot vibrant constante alors que les calculs numériques ne peuvent se faire qu'en imposant une force d'excitation constante. La force d'excitation n'est pas linéairement dépendante de la tension pilote du pot et surtout cette relation dépend fortement de la fréquence. Afin de pouvoir comparer néanmoins essais et calculs,

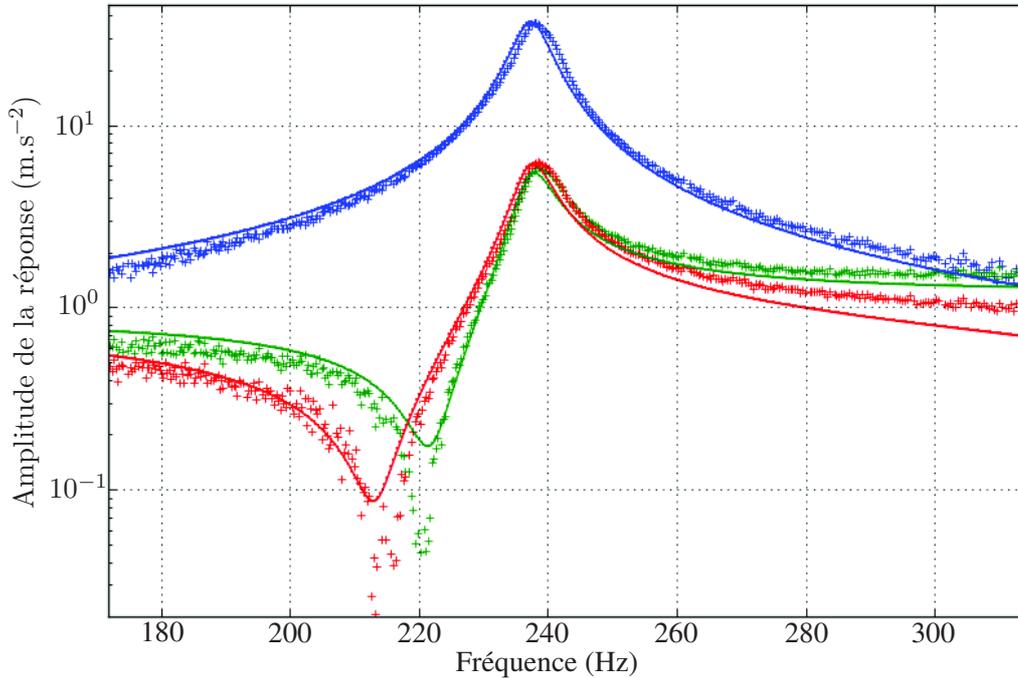


FIG. 4.4: Réponses fréquentielles expérimentales (croix) et numériques (traits pleins) obtenues, sous excitation verticale, en trois points de mesure : sommet du colis (bleu), bord supérieur de l'enveloppe externe (vert) et au centre du plateau support (rouge).

le pilotage expérimental a été représenté par une excitation en force d'amplitude constante identifiée. Cette modélisation est valable uniquement au voisinage de la première fréquence de résonance. La méthode de définition du niveau d'excitation est la suivante :

- une première identification du niveau d'excitation en force a été réalisée avec les résultats d'expérience obtenus avec une tension pilote de 20 mV. Ces résultats expérimentaux sont parfaitement représentés, au voisinage de la première résonance verticale, par une force d'excitation d'amplitude 70 N. La figure 4.4 présente cette comparaison en trois points de mesures de l'assemblage. Cette équivalence n'est valable que dans la plage de fréquence [180-300] Hz, au-delà, la figure 4.4 montre que la modélisation en force d'amplitude constante n'est plus valable.
- à plus fort niveau d'excitation, on considère la réponse de la structure à une fréquence loin de la résonance pour laquelle aucun phénomène non-linéaire de frottement ne se déclenche. On choisit 100 Hz. La réponse de la structure est alors linéairement dépendante du niveau d'excitation en force. On en déduit une relation qui permet de définir le niveau d'excitation pour une expérience :

$$\text{Niveau d'excitation} = 70 \text{ N} \times \frac{\text{Amplitude de réponse à 100 Hz}}{\text{Amplitude de réponse à 100 Hz avec une excitation de 70 N}} \quad (4.1)$$

Fréquence de résonance numérique	Erreur en fréquence par rapport à l'expérience	Corrélation spatiale (DAC)
237.6 Hz	0.1%	99.8
878.4 Hz	0.6%	88.9

TAB. 4.3: Comparaison des modes de résonance numériques et expérimentaux de la structure « Harmonie » sous excitation verticale.

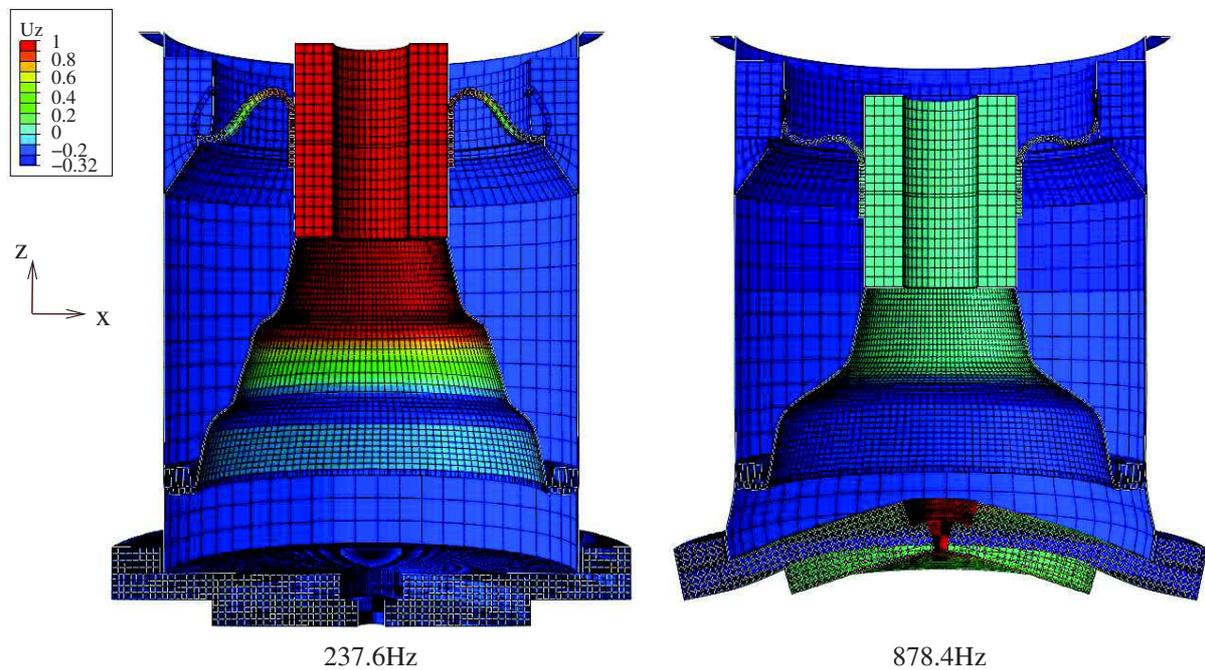


FIG. 4.5: Vue en coupe des modes numériques de l'assemblage, sous excitation verticale

Par la suite, les fonctions de réponse en réponse (FRF) pour ces expériences à excitation verticale seront définies comme la réponse du système en accélération divisée par le niveau d'excitation identifié en force.

Les conditions de pilotage du pot vibrant et la modélisation de type « force d'amplitude constante » ne sont équivalentes que sur une petite plage de fréquence, néanmoins il ne s'agit que d'hypothèses sur le terme d'excitation, les conditions aux limites du modèle restent valables quelle que soit la fréquence d'excitation. Ainsi les fréquences propres du modèle éléments finis peuvent être directement comparées aux fréquences de résonance expérimentales. Cette comparaison est présentée dans le tableau 4.3. Une corrélation des déformations spatiales a également été réalisée. Du fait de l'impossibilité de disposer d'une mesure du signal d'entrée en force, l'analyse modale expérimentale est impossible. On privilégie alors une comparaison des déformées opérationnelles observées aux fréquences de résonance (plutôt

que le critère classique de corrélation des déformations modales, critère de MAC) pour réaliser la comparaison des déformées associées. C'est-à-dire qu'en se plaçant à la fréquence de résonance  $F_i$ , on mesure un vecteur complexe de déformation expérimentale sur les 30 voies de mesures de l'expérience  $\Psi_{\text{exp}}$ . De même, dans le modèle éléments finis, on considère les degrés de liberté les plus pertinents pour représenter chaque voie de mesure. Il s'agit de choisir un nœud proche de la position du capteur puis d'associer la bonne direction à chaque voie de mesure. En réalisant une simulation numérique de la réponse du modèle à la fréquence  $F_i$ , on obtient un vecteur complexe de déformation numérique  $\Psi_{\text{num}}$ . Pour corréler ces déformations on utilise le critère DAC (Displacement Assurance Criterion) [46] :

$$DAC = 100 \times \frac{(\Psi_{\text{exp}}|\Psi_{\text{num}})^2}{(\Psi_{\text{exp}}|\Psi_{\text{exp}})(\Psi_{\text{num}}|\Psi_{\text{num}})} \quad (4.2)$$

où  $(.|.)$  représente le produit scalaire hermitien.

Les résultats en termes de corrélation des déformées opérationnelles sont également présentés dans le tableau 4.3. Une vue en coupe des deux premiers modes propres numériques est présentée sur la figure 4.5.

### 4.3.2 Validation par les expériences à excitation horizontale

Pour aller au-delà des bonnes corrélations obtenues dans la partie 4.3.1, les expériences à excitation horizontale permettent de solliciter les liaisons du modèle dans d'autres directions et ainsi d'ajuster d'autres paramètres de recalage. Comme indiqué précédemment, dans le cas des excitations horizontales, l'excitation est une accélération d'entraînement. Les fonctions de réponse en fréquence sont alors définies comme le rapport des accélérations mesurées au niveau des points de réponse, sur l'accélération mesurée au niveau du point d'entrée. Il n'y a alors aucune limite à comparer essais et calculs sur de larges plages de fréquence et une technique d'analyse modale expérimentale peut être utilisée.

Au cours de ces expériences à excitation horizontale, seule la structure complète « Harmonie » a été testée. Les critères de performance du recalage ont ainsi été les 3 premiers modes transverses de la structure. Ces modes sont représentés sur la figure 4.6. Les paramètres qui ont été ajustés au cours de cette phase de recalage sont :

- Les raideurs selon  $y_{\text{lame}}$  et en rotation autour de  $x_{\text{lame}}$  des vis liant les lames au colis. Ces deux raideurs ont une influence directe sur la première fréquence propre. Leurs valeurs recalées sont :  $k_{\text{vis}_y} = 3e6 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_{\text{vis}_{\theta x}} = 1e4 \text{ N.rad}^{-1}$
- La raideur en flexion de la table glissante, qui se traduit par un ressort imposé sur la rotation du point « Ref\_Base ». Cette raideur a une grande influence sur la seconde fréquence propre et une influence négligeable sur la première. La valeur recalée est :  $k_{\text{« Ref_Base »}_x} = k_{\text{« Ref_Base »}_y} = 3e7 \text{ N.rad}^{-1}$ .

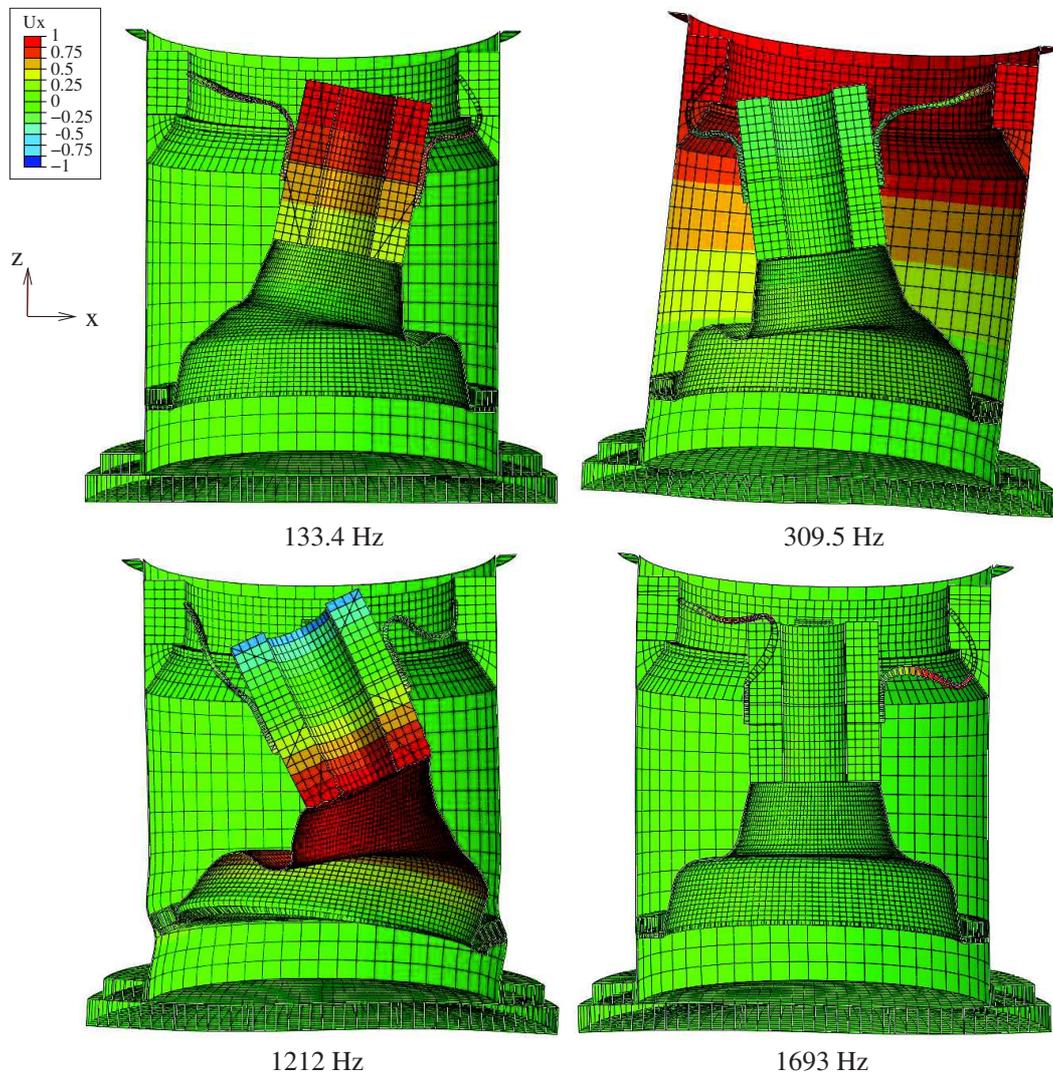


FIG. 4.6: Vue en coupe des modes numériques de l'assemblage, sous excitation horizontale

Fréquence de résonance numérique	Erreur en fréquence par rapport à l'expérience	Corrélation spatiale (MAC)
133.4 Hz	-1.0%	94.4
308.5 Hz	-0.2%	98.4
1212 Hz	-2.3%	87.1

TAB. 4.4: Comparaison des modes propres numériques et expérimentaux de la structure « Harmonie » sous excitation horizontale.

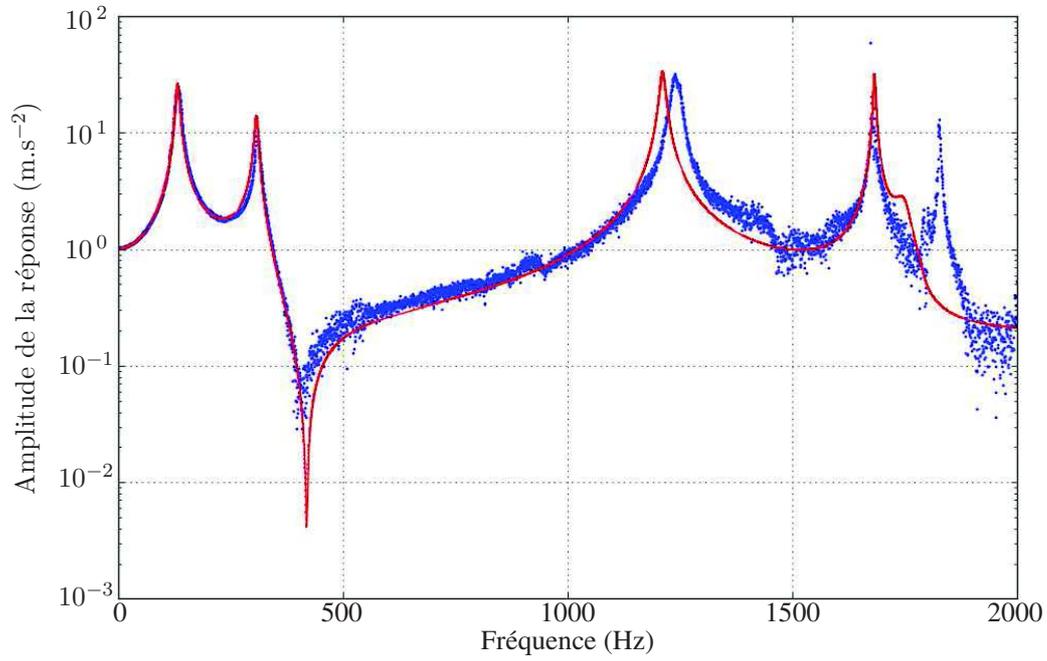


FIG. 4.7: Réponses fréquentielles expérimentales (points bleus) et numériques (trait plein rouge) obtenues, sous excitation horizontale au sommet du colis.

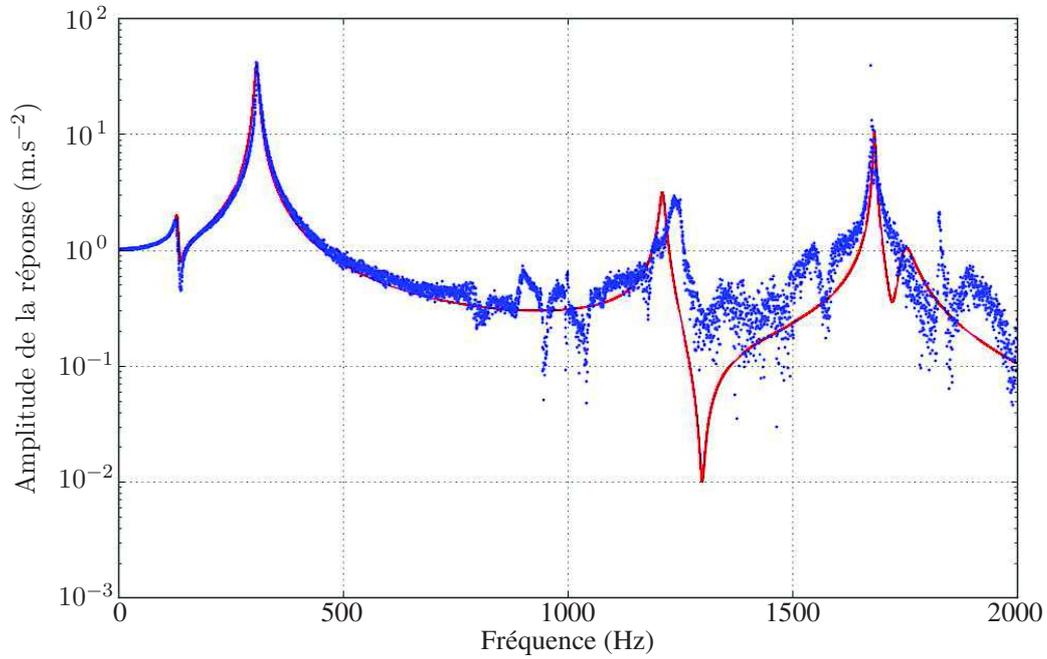


FIG. 4.8: Réponses fréquentielles expérimentales (points bleus) et numériques (trait plein rouge) obtenues, sous excitation horizontale sur le bord supérieur de l'enveloppe.

Le résultat de ce recalage est présenté par le tableau 4.4 qui donne le niveau de corrélation tant en fréquence propre qu'en déformation modale. La corrélation entre les formes propres expérimentales et numériques est ici réalisée par le critère de MAC (Modal Assurance Criterion). En dénommant  $\Phi_{\text{exp}}$  les vecteurs de déformation modale expérimentale et  $\Phi_{\text{num}}$  les formes propres numériques projetées sur le maillage expérimental, le critère de MAC s'écrit :

$$MAC = 100 \times \frac{(\Phi_{\text{exp}} | \Phi_{\text{num}})^2}{(\Phi_{\text{exp}} | \Phi_{\text{exp}}) (\Phi_{\text{num}} | \Phi_{\text{num}})} \quad (4.3)$$

Les figures 4.7 et 4.8 comparent les fonctions de réponse en fréquence expérimentales et numériques en deux points de l'assemblage. Ces figures témoignent de la capacité du modèle à reproduire le comportement vibratoire transverse de la structure sur une très large plage de fréquence :  $[0, 1800]$  Hz.

Cette première étape d'élaboration et de validation d'un modèle éléments finis est une étape préliminaire clé et indispensable : la modélisation non-linéaire ne peut apporter un plus pour l'ingénieur que si le modèle linéaire sous-jacent est déjà capable de reproduire le comportement de la structure expérimentale à faible niveau d'excitation.

## 4.4 Réduction de modèle

Les modèles présentés en partie 4.2 contiennent respectivement 278848 et 174054 degrés de liberté (DDLs). Comme il a été expliqué dans le chapitre 1, des matrices d'une telle taille rendent les calculs numériques non-linéaires extrêmement longs. Afin de pallier cette difficulté, une méthode de réduction de modèle a été mise en place. La méthode de réduction de modèle retenue est la méthode de sous-structuration à interface hybride proposée par le logiciel ABAQUS et détaillée dans le chapitre 1, partie 1.4.3. Cette méthode permet de retenir des DDLs physiques afin de leur appliquer des efforts ou de lire directement leur déplacement dans la base réduite. Les degrés de liberté retenus sont les suivants :

- Pour chaque accéléromètre (l'instrumentation est présentée au chapitre 3, figures 3.3 et 3.7), les DDLs selon x, y et z du nœud du modèle le plus proche de la position du capteur sont retenus. 30 et 27 DDLs sont retenus ici selon que l'excitation est verticale ou horizontale. La différence vient de la non-prise en compte dans le cas horizontal du capteur pilote. Ces DDLs permettent une comparaison directe avec l'expérience des résultats sur base réduite.
- Pour le montage à excitation verticale, le degré de liberté vertical de la masse inertielle représentant le pot vibrant est retenu. C'est sur ce DDL qu'est appliquée l'excitation dans la base complète comme dans la base réduite.
- Pour chaque lame, les six DDLs des nœuds de référence « Ref\_zone\_contact », « Ref\_vis\_1 » et « Ref\_vis\_2 » (voir figure 4.2) sont retenus. Ce sont sur ces DDLs dans la base réduite que seront appliqués les efforts non-linéaires. Les DDLs du nœud de référence « Ref\_lame » sont volontairement exclus de la base de réduction. Les explications de ce choix seront données dans la partie

4.7. 72 DDLs sont retenus ici.

De plus, pour chaque modèle, les vecteurs propres de la structure assemblée correspondants aux fréquences propres entre 5 et 2000 Hz sont introduits dans la base réduite. Cela correspond à 34 et 30 modes propres, respectivement pour les montages à excitation verticale et horizontal. Ainsi, sans force non-linéaire, les réponses vibratoires des modèles complet et réduits, et en particulier leurs modes propres, sont exactement les mêmes sur l'ensemble de la plage [5 - 2000] Hz. Les modèles réduits sont finalement de taille 137 et 129 DDLs, ce qui amène à une réduction significative de la taille du système d'équations dynamiques à traiter pour la suite. Avant introduction des liaisons non-linéaires, l'équation de la dynamique dans la base réduite s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) \quad (4.4)$$

$\mathbf{x}$  est le vecteur déplacement dans la base réduite,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices réduites de masse, amortissement et raideur et  $\mathbf{F}_{\text{excit}}$  est la projection du vecteur d'excitation dans la base réduite. La matrice d'amortissement est définie proportionnelle à la matrice de masse :  $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M}$ . Des valeurs différentes de  $\alpha$  sont considérées pour les expériences à excitation verticale et horizontale ( $\alpha=35$ s et  $\alpha=14$ s respectivement). Ces valeurs ont été ajustées afin d'obtenir une très bonne corrélation entre les résultats de simulation vibratoire linéaire et les résultats d'essai au voisinage du premier mode longitudinal et du premier mode transverse.

## 4.5 Modèle non-linéaire de frottement

L'introduction d'un modèle de frottement dans le modèle se fait en remplaçant une raideur linéaire par une liaison non-linéaire. Il s'agit de modèles de dimension 1 : l'allongement dans la direction de la liaison produit une force non-linéaire dans la direction de la liaison. Cette direction peut être quelconque (verticale, horizontale, diagonale, en rotation, ...). La définition de cette liaison non-linéaire et son interaction avec le modèle complet sont explicitées dans les paragraphes qui suivent.

### 4.5.1 Définition du vecteur d'application de la force non-linéaire

Dans le modèle complet, pour annuler l'effet de la liaison il suffit de retrancher à la matrice de raideur, la matrice de raideur de liaison :

$$\mathbf{K}_{\text{m.c.}} - k_{\text{liaison m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}}^T = \mathbf{K}_{\text{m.c. sans liaison}} \quad (4.5)$$

où m.c. signifie « modèle complet ».  $\mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}}$  est le vecteur liaison exprimé dans la base complète. Seules deux de ses composantes ne sont pas nulles, celles correspondantes aux nœuds « Ref\_zone\_contact » et « Ref\_lame », elles valent respectivement 1 et -1.

Pour que le modèle réduit ait le même comportement dynamique que le modèle complet avec et sans liaison, il faut réduire les modèles respectivement avec et sans liaison. En reprenant les notations du chapitre 1, (partie 1.4.3, paragraphe « Sous-structuration à interface hybride »), la base de réduction

pour le modèle complet s'écrit :

$$[\Psi_r, \Phi_p] = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er} & \{\Phi_p\}_{p=1..n_{modes}} \\ \{\mathbf{I}_d\}_r & \mathbf{0}_{r, n_{modes}} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_{ee}$  et  $\mathbf{K}_{er}$  s'obtiennent en séparant les DDLs retenus (r) des DDLs éliminés (e) dans la matrice de raideur du modèle complet :

$$\mathbf{K}_{m.c.} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{K}_{re} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

On sépare également le vecteur liaison entre DDLs éliminés et retenus :

$$\mathbf{V}_{liaison\ m.c.} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^e \\ \mathbf{V}^r \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

#### Cas où les nœuds du vecteur liaison sont retenus

Lorsque tous les DDLs impliqués dans la liaison sont retenus dans le modèle réduit ( $\mathbf{V}^e = \mathbf{0}_e$ ), la matrice de raideur du modèle sans liaison s'écrit :

$$\mathbf{K}_{m.c. \text{ sans liaison}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{K}_{re} & \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{V}^r T \mathbf{V}^r \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Puis la base de réduction sans liaison s'écrit :

$$[\Psi_r, \Phi_p] = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er} & \{\Phi_p \text{ sans liaison}\}_{p=1..n_{modes}} \\ \{\mathbf{I}_d\}_r & \mathbf{0}_{r, n_{modes}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Les vecteurs  $\Psi_r$  sont les mêmes pour les bases de réduction avec et sans liaison. L'équation (4.5) peut se projeter simplement sur  $\Psi_r$  et on obtient l'expression du modèle de liaison dans la base réduite :

$${}^T \Psi_r \mathbf{K}_{m.c.} \Psi_r - {}^T \Psi_r \mathbf{K}_{m.c. \text{ sans liaison}} \Psi_r = k_{liaison\ m.c.} {}^T \Psi_r \mathbf{V}_{liaison\ m.c.} {}^T \mathbf{V}_{liaison\ m.c.} \Psi_r \quad (4.11)$$

Dans ce cas, on peut écrire simplement le modèle de liaison dans la base réduite :

$$\mathbf{F}_{liaison}(\mathbf{x}) = k_{liaison\ m.c.} \mathbf{V}_{liaison} {}^T \mathbf{V}_{liaison} \mathbf{x} \quad (4.12)$$

avec  $\mathbf{V}_{liaison} = {}^T [\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{liaison\ m.c.}$

Toujours dans ce cas, chaque vecteur liaison est porté par deux DDLs qui sont distincts de ceux des autres vecteurs liaison. Chaque modèle de liaison est indépendant des autres et l'effort total sur la structure dû aux liaisons s'écrit simplement comme la somme des modèles de liaison :

$$\mathbf{F}_{liaisons}(\mathbf{x}) = \sum_j k_{liaison\ j\ m.c.} \mathbf{V}_{liaison\ j} {}^T \mathbf{V}_{liaison\ j} \mathbf{x} \quad (4.13)$$

### Cas d'une liaison pour laquelle un nœud n'est pas retenu

La définition du modèle de liaison dans la base réduite se complique lorsque l'on fait le choix de ne pas retenir dans la base réduite un DDL impliqué dans la liaison. Nous avons choisi dans ces travaux de ne pas retenir dans le modèle réduit les nœuds « Ref\_lame » qui sont impliqués dans les vecteurs de liaison. Ce choix est expliqué en partie 4.7.

Ainsi chaque vecteur liaison contient une composante  $\mathbf{V}^e$  qui vaut -1 pour le DDL correspondant à « Ref\_lame » et 0 ailleurs. À l'inverse, le nœud « Ref\_zone\_contact » est conservé,  $\mathbf{V}^r$  qui vaut 1 pour le DDL correspondant à « Ref\_zone\_contact » et zéro ailleurs. Dès lors la matrice de raideur du modèle sans liaison s'écrit :

$$\mathbf{K}_{\text{m.c. sans liaison}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{V}^e T \mathbf{V}^e & \mathbf{K}_{er} - \mathbf{V}^e T \mathbf{V}^r \\ \mathbf{K}_{re} - \mathbf{V}^r T \mathbf{V}^e & \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{V}^r T \mathbf{V}^r \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

La base de réduction associée au modèle sans liaison est ainsi :

$$\begin{bmatrix} -(\mathbf{K}_{ee} - \mathbf{V}^e T \mathbf{V}^e)^{-1} (\mathbf{K}_{er} - \mathbf{V}^e T \mathbf{V}^r) & \{\Phi_{\mathbf{p} \text{ sans liaison}}\}_{p=1..n_{modes}} \\ \{\mathbf{I}_d\}_r & \mathbf{0}_{r, n_{modes}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Cette base est complètement différente de la base initiale  $[\Psi_r, \Phi_p]$ , on ne peut donc pas simplement projeter l'équation (4.5) pour obtenir l'expression de la matrice de liaison exprimée dans la base réduite. On se place tout d'abord dans le cas où on ne s'intéresse qu'à une seule liaison (« liaison 1 »). Comme la matrice de liaison dans la base complète est de rang 1, le modèle de liaison dans la base réduite est au plus de rang 1 (il ne peut pas gagner des degrés de liberté). Le modèle de liaison dans la base réduite a donc la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{liaison 1}}(\mathbf{x}) = k_{\text{liaison 1}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} T \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \mathbf{x} \quad (4.16)$$

Ensuite, pour calculer  $k_{\text{liaison 1}}$  et  $\mathbf{V}_{\text{liaison 1}}$  on peut appliquer au modèle de liaison un effort qui se projette de la même manière dans les bases  $[\Psi_r, \Phi_p]$  et  $[\Psi_r, \Phi_p]_{\text{sans liaison}}$ . C'est le cas du vecteur  $[\mathbf{0}_e, \mathbf{V}_1^r]$  dont la projection est  $[\mathbf{V}_1^r, \mathbf{0}_{n_{modes}}]$  quelle que soit la base de réduction. On rappelle que  $\mathbf{V}_1^r$  est un vecteur de taille r qui vaut 1 sur le DDL retenu correspondant à « Ref\_zone\_contact 1 » et 0 sur les autres DDLs retenus. L'effort de liaison calculé dans le modèle complet et projeté dans le modèle réduit doit être égal à l'effort dans la liaison dans le modèle réduit, ce qui s'écrit :

$$k_{\text{liaison 1 m.c.}} T[\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} T \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_e \\ \mathbf{V}_1^r \end{bmatrix} = k_{\text{liaison 1}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} T \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^r \\ \mathbf{0}_{n_{modes}} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Cette équation se ré-écrit directement :

$$k_{\text{liaison 1 m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} |_{\text{Ref zone contact 1}} T[\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} = k_{\text{liaison 1}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 1}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \quad (4.18)$$

On déduit de cette équation que le vecteur liaison  $\mathbf{V}_{\text{liaison 1}}$  peut se définir comme la projection du vecteur  $\mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}}$  :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} = \mathbf{V}_{\text{liaison 1}}^* = T[\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} \quad (4.19)$$

Pour calculer  $\mathbf{V}_{\text{liaison 1}}^*$ , on peut définir ce vecteur comme un cas de chargement de la structure et demander au code éléments finis ABAQUS, au cours de l'étape de sous-structuration, de projeter ce cas de chargement sur le modèle réduit. Une astuce pour définir ce cas de chargement consiste à créer dans le modèle éléments finis un nouveau nœud de référence « Ref\_liaison 1 » dont le mouvement est donné par le vecteur liaison :

$$x_{\text{Ref liaison 1}} = {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} \mathbf{x}_{\text{m.c.}} = x_{\text{Ref zone contact 1}} - x_{\text{Ref lame 1}} \quad (4.20)$$

Le cas de chargement associé au vecteur  $\mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}}$  est alors équivalent à un chargement sur le nœud « Ref\_liaison 1 », ce qui peut être défini aisément dans ABAQUS.

On peut ensuite déduire de l'équation (4.17) l'expression de la raideur de liaison  $k_{\text{liaison 1}}$  :

$$k_{\text{liaison 1 m.c.}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 1 m.c.}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_e \\ \mathbf{V}_1^r \end{bmatrix} = k_{\text{liaison 1}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^r \\ \mathbf{0}_{n_{\text{modes}}} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$k_{\text{liaison 1}} = \frac{k_{\text{liaison 1 m.c.}}}{\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 1}}} \quad (4.22)$$

### Cas d'un ensemble de liaisons pour lesquelles un nœud n'est pas retenu

Si on considère désormais les effets combinés de deux modèles de liaison, on observe qu'ils peuvent être interdépendants. L'effort engendré par le modèle de liaison 1 peut en particulier entraîner une contribution sur le DDL « Ref\_zone\_contact 2 », impliqué dans la liaison 2. On suppose que le modèle de la liaison 1 reste valable. En reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, le modèle de la liaison 2 s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{liaison 2}}(\mathbf{x}) = k_{\text{liaison 2}} \mathbf{V}_{\text{liaison 2}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 2}} \mathbf{x} \quad (4.23)$$

On sollicite l'ensemble des liaisons 1 et 2 par un effort dans la direction  $[\mathbf{0}_e, \mathbf{V}_2^r]$  (avec les notations du paragraphe précédent). La réponse des modèles de liaison réduits doit être égale à la projection de la réponse du modèle complet :

$$k_{\text{liaison 2 m.c.}} {}^T [\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{\text{liaison 2 m.c.}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 2 m.c.}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_e \\ \mathbf{V}_2^r \end{bmatrix} = k_{\text{liaison 1}} \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2^r \\ \mathbf{0}_{n_{\text{modes}}} \end{bmatrix} + k_{\text{liaison 2}} \mathbf{V}_{\text{liaison 2}} {}^T \mathbf{V}_{\text{liaison 2}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2^r \\ \mathbf{0}_{n_{\text{modes}}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

On note  $\mathbf{V}_{\text{liaison 2}}^* = {}^T [\Psi_r, \Phi_p] \mathbf{V}_{\text{liaison 2 m.c.}}$

$$k_{\text{liaison 2 m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison 2}}^* = \frac{k_{\text{liaison 1 m.c.}}}{\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 1}}} (\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 2}}) \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} + k_{\text{liaison 2}} (\mathbf{V}_{\text{liaison 2}} |_{\text{Ref zone contact 2}}) \mathbf{V}_{\text{liaison 2}} \quad (4.25)$$

On déduit de cette équation l'expression de  $\mathbf{V}_{\text{liaison 2}}$  et de  $k_{\text{liaison 2}}$  :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison 2}} = \mathbf{V}_{\text{liaison 2}}^* - \left( \frac{k_{\text{liaison 1 m.c.}}}{k_{\text{liaison 2 m.c.}}} \right) \left( \frac{\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 2}}}{\mathbf{V}_{\text{liaison 1}} |_{\text{Ref zone contact 1}}} \right) \mathbf{V}_{\text{liaison 1}} \quad (4.26)$$

$$k_{liaison\ 2} = \frac{k_{liaison\ 2\ m.c.}}{\mathbf{V}_{liaison\ 2}|_{Ref\ zone\ contact\ 2}} \quad (4.27)$$

On peut alors vérifier a posteriori que  $\mathbf{V}_{liaison\ 2} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^r \\ \mathbf{0}_{n_{modes}} \end{bmatrix} = 0$  afin d'assurer que l'ajout de ce modèle de liaison 2 ne rajoute pas de terme à l'équation (4.17) qui a permis de définir le modèle de liaison 1.

Les équations (4.26) et (4.27) sont généralisables pour définir un ensemble de liaisons :

$$\mathbf{V}_{liaison\ k} = \mathbf{V}_{liaison\ k}^* - \sum_{j=1}^{k-1} \left( \frac{k_{liaison\ j\ m.c.}}{k_{liaison\ k\ m.c.}} \right) \left( \frac{\mathbf{V}_{liaison\ j}|_{Ref\ zone\ contact\ k}}{\mathbf{V}_{liaison\ j}|_{Ref\ zone\ contact\ j}} \right) \mathbf{V}_{liaison\ j} \quad (4.28)$$

$$k_{liaison\ k} = \frac{k_{liaison\ k\ m.c.}}{\mathbf{V}_{liaison\ k}|_{Ref\ zone\ contact\ k}} \quad (4.29)$$

Avec ces définitions, les modèles de liaisons peuvent être traités indépendamment et sommés :

$$\mathbf{F}_{liaisons}(\mathbf{x}) = \sum_j k_{liaison\ j} u_j \mathbf{V}_{liaison\ j} \quad (4.30)$$

où  $u_j = {}^T \mathbf{V}_{liaison\ j} \mathbf{x}$ .

Dans le cadre d'une modélisation non-linéaire de ces liaisons, les efforts linéaires  $k_{liaison\ j} u_j$  sont remplacés par des efforts non-linéaires  $f_{nl\ liaison\ j}(u_j)$ . Pour réaliser ce remplacement on ajoute un effort non-linéaire  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x})$  à droite dans l'équation de la dynamique (4.4).

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) = \sum_j (k_{liaison\ j} u_j - f_{nl\ liaison\ j}(u_j)) \mathbf{V}_{liaison\ j} \quad (4.31)$$

#### 4.5.2 Modèle de frottement

Une fois le vecteur liaison défini, il reste à introduire la force non-linéaire en dimension 1 :  $f_{nl\ liaison}(u)$ . De nombreux modèles de frottement ont été développés pour représenter la force non-linéaire induite par le frottement. On remarque en particulier le modèle de Coulomb élastique, de Dahl [17], d'Iwan [34, 35], de Valanis [26] ou de LuGre [27]. Pour le phénomène de frottement observé sur la structure « Harmonie », un modèle de frottement de Coulomb élastique a été retenu. Ce modèle est schématisé sur la figure 4.9a, il consiste à mettre en série un ressort linéaire et un frotteur de Coulomb. Dans la littérature scientifique, ce modèle est également désigné sous les noms d'élément de Jenkins, de modèle de frottement de Masing ou encore de modèle de Prandtl. Le glissement se déclenche dans le frotteur de Coulomb lorsque la force  $f$  qu'il subit dépasse le seuil de Coulomb  $F_{Coulomb}$ . Alors, le glissement du point P est tel que la force  $f$  reste égale au seuil de Coulomb. On distingue ainsi deux phases :

- une phase d'accroche où  $|f| < F_{Coulomb}$  et où le point P reste immobile  $v_P = 0$
- une phase de glissement où  $|f| = F_{Coulomb}$  et où  $v_P = \dot{u}$

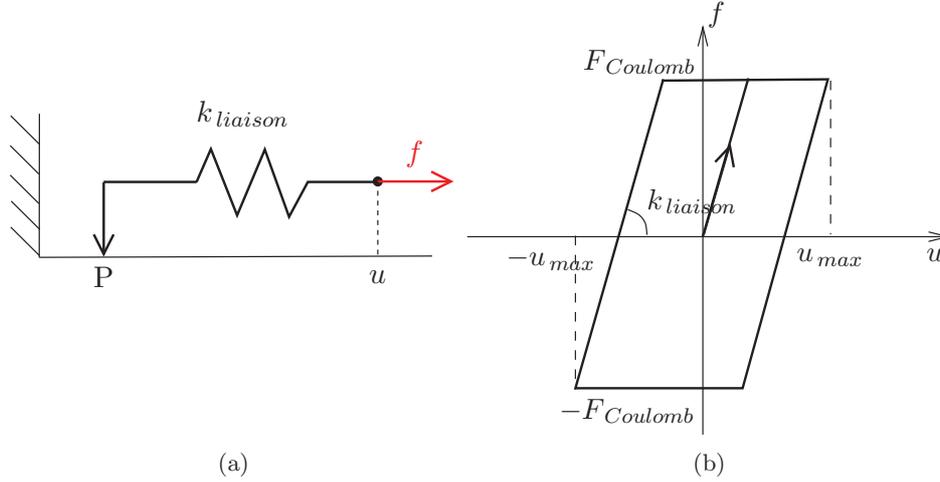


FIG. 4.9: Schéma (a) et diagramme force-déplacement (b) d'un modèle de frottement de Coulomb élastique.

Au niveau algorithmique, une formulation itérative, initialement proposée par Guillen et Pierre [29], est mise en place. À chaque étape  $i$  de l'itération temporelle, le frotteur de Coulomb est tout d'abord supposé en position accrochée entre l'état  $i-1$  et  $i$ . Une force virtuelle  ${}^{vir}f$  est ainsi calculée :

$${}^{vir}f = f_{i-1} + k_{liaison}(u_i - u_{i-1}) \quad (4.32)$$

Ensuite le comportement du frotteur de Coulomb est pris en compte. Deux états sont alors considérés. Si la force virtuelle  ${}^{vir}f$  est inférieure au seuil de Coulomb, le frotteur reste dans l'état d'accroche et la force de liaison est égale à cette force virtuelle. Si la force virtuelle dépasse le seuil de Coulomb, alors on passe dans un état de glissement, et la force de liaison est égale au seuil de Coulomb :

$$f_i = \begin{cases} {}^{vir}f & \text{si } |{}^{vir}f| < F_{Coulomb} \quad (\text{accroche}) \\ \text{sgn}({}^{vir}f) F_{Coulomb} & \text{si } |{}^{vir}f| \geq F_{Coulomb} \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (4.33)$$

En appliquant ce schéma à un mouvement périodique, on obtient le diagramme force-déplacement présenté sur la figure 4.9b. Enfin, comme expliqué au paragraphe 4.5.1, cette force non-linéaire vient se substituer à la force linéaire de liaison et ainsi, la force vectorielle non-linéaire qui intervient dans l'équation de la dynamique est :

$$\mathbf{F}_{nl, liaison}(u_i) = (k_{liaison} u_i - f_i) \mathbf{V}_{liaison} \quad (4.34)$$

Lorsque plusieurs liaisons interviennent dans une structure, comme c'est le cas pour la maquette « Harmonie », les forces vectorielles non-linéaires s'ajoutent entre elles. L'équation de la dynamique devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{excit}(t) + \sum_{liaison} \mathbf{F}_{nl, liaison}({}^T \mathbf{V}_{liaison} \mathbf{x}) \quad (4.35)$$

Pour ce cas d'application, la maquette « Harmonie » comporte quatre contacts lame-enveloppe et pour chaque contact, le frottement peut se déclencher dans trois directions : verticale (selon  $z_{\text{lame}}$ ), horizontale (selon  $y_{\text{lame}}$ ) ou en rotation autour de  $x_{\text{lame}}$ . Pour la simulation des expériences à excitation verticale, seules les composantes selon  $z_{\text{lame}}$  sont considérées comme des liaisons non-linéaires. On a ainsi quatre liaisons non-linéaires et un seul paramètre de recalage non-linéaire  $F_{\text{Coulomb}, z}$ . Pour la simulation des expériences à excitation horizontale, la vibrométrie laser à balayage (voir chapitre 3, partie 3.5.3) montre que c'est tout d'abord le frottement en rotation autour de  $x_{\text{lame}}$  qui est déclenché. À plus fort niveau d'excitation, le frottement dans la direction  $y_{\text{lame}}$  devient mesurable. Ces deux aspects du frottement apparaissent pour les lames dont le bord supérieur est colinéaire à la direction d'excitation. On limite ainsi les liaisons non-linéaires aux composantes selon  $\theta_{x_{\text{lame}}}$  et  $y_{\text{lame}}$  pour ces deux lames. De plus, les deux autres lames (dont le bord supérieur est orthogonal à la direction d'excitation) sont sollicitées dans le plan  $xz$ , formé par la direction d'excitation  $x$  et la verticale  $z$ . Elles peuvent être sujettes à du frottement dans la direction verticale. On ajoute ainsi comme liaisons non-linéaires les composantes selon  $z_{\text{lame}}$  de ces deux lames. En tout, pour les expériences à excitation horizontale, on retient six liaisons non-linéaires et trois paramètres de recalage :  $F_{\text{Coulomb}, \theta_x}$ ,  $F_{\text{Coulomb}, y}$  et  $F_{\text{Coulomb}, z}$ .

Le frottement est ainsi appliqué seulement à certains mouvements de la lame, pour lesquels son bord supérieur est considéré indéformable. Les modèles non-linéaires associés à chaque type de mouvement sont indépendants entre eux. Cette démarche de modélisation non-linéaire se rapproche ainsi de la méthode proposée par Festjens [24]. Festjens propose d'utiliser des macro-modèles non-linéaires de liaison qui associent à chaque mode de déformation principal de la liaison un modèle non-linéaire. Ici les modes de déformation de la lame retenus laissent son bord supérieur rigide. Les mesures vibrométriques présentées en partie 3.5 ont montré qu'expérimentalement, le bord supérieur de la lame se déforme. Une manière d'aller au-delà de la modélisation proposée pourrait être de rajouter des modèles non-linéaires de frottement associés aux mouvements de la lame dans lesquels son bord supérieur se déforme.

## 4.6 Méthodes numériques pour les simulations non-linéaires

L'équation (4.35) est résolue en utilisant la méthode de balance harmonique, qui a été introduite au chapitre 1 (partie 1.3.3). Cette partie explicite plus spécifiquement comment la méthode est implémentée pour ce cas d'application. Pour minimiser la taille des calculs non-linéaires, on utilise une méthode de condensation initialement introduite par Hahn et Chen [31] et utilisée sur un exemple industriel par Sinou [88]. Ensuite, la méthode de continuation « pseudo-arclength », décrite au chapitre 1 (partie 1.3.5) est mise en place.

Les vecteurs de déplacement, de force d'excitation et de force non-linéaire sont décomposés en série de Fourier et de nouveaux vecteurs contenant leurs coefficients de Fourier sont définis. Afin de pouvoir réaliser des études multi-harmoniques, la troncature est réalisée à l'ordre  $N = 15$ .

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t) \quad \mathbf{X} = {}^T[\mathbf{B}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{B}_N] \quad (4.36)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_k \sin(k \Omega t) + \mathbf{C}_k \cos(k \Omega t) \quad \mathbf{W}_{\text{nl}} = [\mathbf{C}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{S}_N, \mathbf{C}_N] \quad (4.37)$$

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \mathbf{C}_{1, \text{excit}} \cos(\Omega t) \quad \mathbf{W}_{\text{excit}} = {}^T[0, 0, \mathbf{C}_{1, \text{excit}}, 0, \dots, 0] \quad (4.38)$$

L'équation de la dynamique se réécrit dans le domaine de Fourier :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d & -k\Omega \mathbf{D} \\ k\Omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{k, \text{excit}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix} \quad \forall k \in [1, N] \quad (4.39)$$

En réunissant toutes les harmoniques  $k$ , on obtient un grand système de taille  $(2N+1)n$  :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{W}_{\text{excit}} + \mathbf{W}_{\text{nl}} \quad (4.40)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}$  diagonale par bloc :

$$\mathbf{A} = \text{Diag} \left( \mathbf{K}, \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d & -k\Omega \mathbf{D} \\ k\Omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\Omega)^2 \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \right\}_{k=1..N} \right) \quad (4.41)$$

À cette étape-là, la question du calcul des efforts non-linéaires se pose. Avant de présenter la mise en place de la méthode AFT (Alternating Frequency-Time method [9]) qui permet de calculer  $\mathbf{W}_{\text{nl}}$ , on procède à une étape de condensation, ou plus exactement de substitution sur des degrés de liberté spécifiques, qui permet de réduire considérablement la taille du système non-linéaire à résoudre.

On a constaté au cours de l'étape d'introduction de la force de liaison non-linéaire, que les fonctions non-linéaires sont de dimension 1 et qu'elles sont en quantité très réduite. Au maximum, 6 relations non-linéaires sont introduites dans le modèle. En se plaçant dans une base judicieuse qui comporterait les vecteurs d'application associés à ces liaisons, le terme de force non-linéaire ne s'appliquerait que sur ces vecteurs. C'est l'idée à la base de cette méthode de condensation/substitution : effectuer un changement de base afin de séparer la base de calcul en vecteurs sur lesquels un effort non-linéaire s'applique et en vecteurs selon lesquels l'équation de la dynamique est linéaire.

On note  $q$  le nombre de vecteurs d'application des efforts non-linéaires. Ces  $q$  vecteurs  $\{\mathbf{V}_{\text{liaison}, i}\}_{i=1..q}$  sont choisis pour être les premiers vecteurs de la nouvelle base. La nouvelle base est obtenue en appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmit à la famille de vecteurs  $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1..n+q} = \{\{\mathbf{V}_{\text{liaison}, i}\}_{i=1..q}, [\mathbf{I}_d]_n\}$ . Le produit scalaire considéré pour cet algorithme est le produit scalaire cartésien de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , noté  $(\cdot, \cdot)$ . L'algorithme s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_1 &= \frac{\mathbf{V}_1}{\|\mathbf{V}_1\|} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{V}}_i &= \frac{\mathbf{V}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_i | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j}{\left\| \mathbf{V}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_i | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\|} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Au final, les vecteurs nuls sont éliminés et une base orthonormale  $\tilde{\mathbf{V}} = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1..n}$  est créée. Dans cette nouvelle base, les vecteurs liaisons s'expriment uniquement en fonction des  $q$  premiers vecteurs de la base :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j + \left\| \mathbf{V}_{\text{liaison}, i} - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\| \tilde{\mathbf{V}}_i \quad \forall i \in [1, q] \quad (4.43)$$

Les DDLs correspondants à ces  $q$  premiers vecteurs seront désignés comme les DDLs non-linéaires parce que la force non-linéaire agit uniquement sur eux. On sépare ainsi les variables dans la nouvelle base entre les  $q$  DDLs non-linéaires et les  $p=n-q$  DDLs linéaires :

$${}^T \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_q \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$${}^T \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} \ddot{\mathbf{x}} + {}^T \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{V}} \dot{\mathbf{x}} + {}^T \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{x} = {}^T \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_q) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Le même changement de base est effectué dans le domaine de Fourier :

$$\Lambda = \text{Diag} \left( \tilde{\mathbf{V}}_q, \tilde{\mathbf{V}}_q, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_q, \tilde{\mathbf{V}}_p, \tilde{\mathbf{V}}_p, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_p \right)_{(2N+1)n} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{V}}_q = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1..q}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_p = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=q..n} \quad (4.46)$$

$${}^T \Lambda \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{X}_p \end{bmatrix} \quad {}^T \Lambda \mathbf{A} \Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{qq} & \mathbf{A}_{qp} \\ \mathbf{A}_{pq} & \mathbf{A}_{pp} \end{bmatrix} \quad {}^T \Lambda \mathbf{W}_{\text{excit}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{excit}, q} \\ \mathbf{W}_{\text{excit}, p} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

On peut dès lors réécrire l'équation de la dynamique dans la base de Fourier (Eq. 4.40) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{qq} & \mathbf{A}_{qp} \\ \mathbf{A}_{pq} & \mathbf{A}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{X}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{excit}, q} \\ \mathbf{W}_{\text{excit}, p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

L'équation précédente permet d'établir une relation linéaire entre  $\mathbf{X}_p$  et  $\mathbf{X}_q$  :

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{A}_{pp}^{-1} (\mathbf{W}_{\text{excit}, p} - \mathbf{A}_{pq} \mathbf{X}_q) \quad (4.49)$$

Dès lors, par substitution, le système (4.48) peut se réécrire sous la forme d'un système non-linéaire de dimension  $(2N+1)q$  :

$$(\mathbf{A}_{qq} - \mathbf{A}_{qp} \mathbf{A}_{pp}^{-1} \mathbf{A}_{pq}) \mathbf{X}_q = \mathbf{W}_{\text{excit}, q} - \mathbf{A}_{qp} \mathbf{A}_{pp}^{-1} \mathbf{W}_{\text{excit}, p} + \mathbf{W}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \quad (4.50)$$

C'est ce dernier système de taille  $(2N+1)q$  qui sera résolu. Une fois  $\mathbf{X}_q$  déterminé, on remonte directement à la solution  $\mathbf{X}$  du problème (4.40) en appliquant les relations (4.47) et (4.49) :

$$\mathbf{X} = \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{A}_{pp}^{-1} (\mathbf{W}_{\text{excit}, p} - \mathbf{A}_{pq} \mathbf{X}_q) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Dans l'équation (4.50), reste à définir la relation  $\mathbf{W}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q)$ . On utilise ici la méthode AFT. Tout d'abord, on se place dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier inverse :

$$\{\mathbf{x}_q\}_i(t) = \{\mathbf{B}_0\}_i + \sum_{k=1}^N \{\mathbf{A}_k\}_i \sin(k \Omega t) + \{\mathbf{B}_k\}_i \cos(k \Omega t) \quad \forall i \in [1, q] \quad (4.52)$$

où les coefficients  $\{\mathbf{A}_k\}_i$  et  $\{\mathbf{B}_k\}_i$  sont ici les coordonnées du vecteur  $\mathbf{X}_q$  :

$$\mathbf{X}_q = [\{\mathbf{B}_0\}_{i=1..q}, \{\{\mathbf{A}_k\}_{i=1..q}, \{\mathbf{B}_k\}_{i=1..q}\}_{k=1..N}] \quad (4.53)$$

Pour ce cas d'étude, une base de discrétisation temporelle régulière de taille  $N_T = 300$  a été retenue. Ensuite on déduit de ces déplacements les allongements dans la direction de chaque liaison  $u_{liaison, i} = {}^T \mathbf{V}_{liaison, i} \mathbf{x}$ . On utilise pour cela l'équation (4.43) :

$$u_{liaison, i}(t) = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{liaison, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \{\mathbf{x}_q\}_j(t) + \left\| \mathbf{V}_{liaison, i} - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{liaison, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\| \{\mathbf{x}_q\}_i(t) \quad (4.54)$$

La force non-linéaire pour chaque liaison peut alors être directement calculée par l'algorithme itératif décrit au paragraphe 4.5.2. Afin d'être sûr d'enregistrer le comportement stationnaire de la force non-linéaire, on part d'un état initial  $f(u_{liaison, i}(t_0)) = f_0 = 0$ . On calcule cette fonction hystérétique sur un cycle complet jusqu'à  $t = 2\pi/\Omega$  puis on fixe  $f_0 = f(u_{liaison, i}(t = 2\pi/\Omega))$ . Le cycle hystérétique est à nouveau calculé et cette fois-ci les valeurs temporelles de  $f$  sont sauvegardées car on est sûr d'avoir atteint le régime stationnaire.

$$\mathbf{F}_{nl liaison i} = (k_{liaison i} u_{liaison, i} - f_{nl liaison}(u_{liaison, i})) \mathbf{V}_{liaison i} \quad (4.55)$$

Il faut alors considérer l'expression du vecteur  $\mathbf{V}_{liaison i}$  dans la nouvelle base  $\tilde{\mathbf{V}}_j$  qui est donnée par l'équation (4.43). Enfin on somme la contribution de chaque liaison  $i$  :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}_q(t)) = \sum_{i=1}^q \mathbf{F}_{nl liaison i}(\mathbf{x}_q(t)) \quad (4.56)$$

Une fois cette force non-linéaire calculée dans le domaine temporel, elle est rebasculée dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète. Pour ne pas multiplier les notations, on renomme  $\mathbf{S}_k$  et  $\mathbf{C}_k$  les coefficients de Fourier de la force  $\mathbf{F}_{nl}$  dans la nouvelle base de taille  $q$ .

$$\mathbf{W}_{nl}(\mathbf{X}_q) = [\mathbf{C}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{S}_N, \mathbf{C}_N] \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \frac{2}{N_T} \sum_{j=0}^{N_T-1} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}_q(t_j)) \sin(k t_j) \\ \mathbf{C}_k &= \frac{2}{N_T} \sum_{j=0}^{N_T-1} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}_q(t_j)) \cos(k t_j) \end{aligned} \quad \forall k \in [0, N] \quad (4.58)$$

avec  $t_j = \frac{j2\pi}{N_T\Omega}$ .

La démarche AFT, qui a été explicitement détaillée pour ce cas d'application par les équations (4.52) à (4.58), peut se résumer par le schéma suivant où DFT désigne la transformée de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform) :

$$\mathbf{X}_q \xrightarrow{DFT^{-1}} \mathbf{x}_q(t) \rightarrow \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}_q(t)) \xrightarrow{DFT} \mathbf{W}_{nl}(\mathbf{X}_q) \quad (4.59)$$

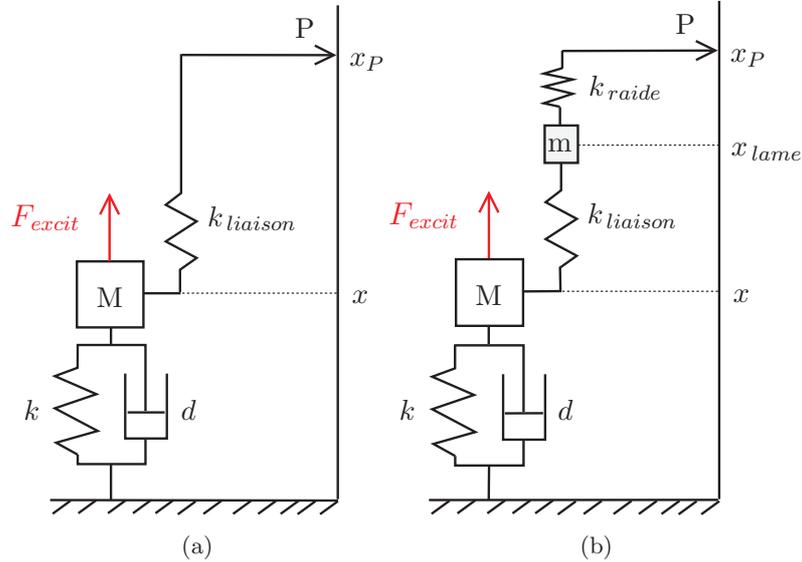


FIG. 4.10: Modèle à un DDL avec un frotteur (a) et modèle à deux DDLs équivalent (b)

La relation non-linéaire  $\mathbf{W}_{nl}(\mathbf{X}_q)$  est désormais explicite et permet de traiter l'équation (4.50) comme un problème d'optimisation non-linéaire :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_q) = (\mathbf{A}_{qq} - \mathbf{A}_{qp}\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathbf{A}_{pq}) \mathbf{X}_q - \mathbf{W}_{excit,q} - \mathbf{A}_{qp}\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathbf{W}_{excit,p} + \mathbf{W}_{nl}(\mathbf{X}_q) = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

Ce problème est alors traité par la méthode de continuation « pseudo-arclength » associée à un prédicteur polynomial d'ordre 2. Cette méthode de prédiction-corrrection, introduite au chapitre 1, partie 1.3.5 est par ailleurs utilisée et détaillée au chapitre 2, partie 2.4.3. L'implémentation est ici parfaitement identique. Une fois que l'algorithme a convergé vers un couple solution  $(\mathbf{X}_q, \Omega)$ , la solution associée  $\mathbf{X}$  est calculée par la relation (4.51) et le résultat est stocké avant de poursuivre la continuation.

## 4.7 Commentaire sur le calcul du mouvement des lames frottantes

Les mesures vibrométriques présentées au chapitre 3 nous invitent à simuler le mouvement du bord supérieur des lames au cours du frottement pour pouvoir le comparer aux mesures expérimentales. A priori, la manière la plus simple pour observer ce mouvement est de conserver le nœud correspondant (« Ref\_lame » sur la figure 4.2) dans la base de réduction, pour pouvoir lire directement son mouvement à l'issue du calcul. Cependant, avec cette méthode naïve, un problème de convergence apparaît. Pour le mettre en évidence, et justifier la modélisation choisie, des explications seront données sur un exemple analogue très simple. En se limitant au voisinage de son premier mode propre, la structure « Harmonie » peut être modélisée par le système à 1-DDL représenté sur la figure 4.10a. Ajouter un degré de liberté correspondant au haut de la lame dans ce modèle correspond à passer au modèle

Paramètre	Valeur
$M$	10 kg
$m$	0.001 kg
$k$	$2.24 \cdot 10^7 \text{ kg.s}^{-2}$
$k_{liaison}$	$8.11 \cdot 10^6 \text{ kg.s}^{-2}$
$k_{raide}$	$10^9 \text{ kg.s}^{-2}$
$d$	$350 \text{ kg.s}^{-1}$
$F_{Coulomb}$	1000 N
$F_{excit}$	1000 N

TAB. 4.5: Valeurs des paramètres pour les modèles 1-DDL et 2-DDLs présentés sur la figure 4.10.

à 2-DDLs représenté sur la figure 4.10b. Les paramètres choisis pour ces modèles sont retranscrits dans le tableau 4.5. La valeur de la petite masse  $m$  est choisie de sorte qu'elle n'ait pas d'influence sur les résultats numériques. Les résultats sont identiques avec  $m/10$  ou  $m/100$ . Ainsi, comme l'inertie de cette masse  $m$  n'a pas d'influence sur la dynamique du modèle et comme la somme des raideurs  $k_{raide} + k_{liaison}$  est équivalente à  $k_{liaison}$ , les modèles à 1-DDL et 2-DDLs sont mécaniquement équivalents et doivent donner les mêmes résultats sur le degré de liberté principal  $x$ .

Les résultats de simulation obtenus par la méthode de balance harmonique pour les deux modèles sont superposés sur la figure 4.11. Les résultats obtenus avec le modèle à 1-DDL (courbe noire) ne sont pas sensibles au nombre  $N$  d'harmoniques choisi dans la méthode de Balance Harmonique. Quel que soit le nombre  $N$  considéré, la courbe de réponse fréquentielle harmonique obtenue est la courbe noire. À l'inverse, avec le modèle à 2-DDLs, la réponse fréquentielle harmonique calculée est fortement dépendante du nombre  $N$  d'harmoniques. Les résultats obtenus avec  $N=1$ ,  $N=5$  et  $N=11$  sont présentés sur la figure 4.11. Les temps de calculs nécessaires pour calculer ces réponses (pourtant sur un système à 2-DDLs) augmentent exponentiellement avec le nombre  $N$ . Pour  $N>11$ , l'algorithme d'optimisation ne converge plus. Afin de comprendre ce phénomène, la vitesse du point  $P$  calculée avec le modèle à 1-DDL est présentée sur la figure 4.12. Le calcul de cette vitesse  $v_P = \dot{x}_P$  est très simple en utilisant la formulation itérative introduite en partie 4.5.2 :

$$v_p(t_i) = \begin{cases} 0 & \text{pour l'état d'accroche} \\ \dot{x}(t_i) & \text{pour l'état de glissement} \end{cases} \quad (4.61)$$

Cette vitesse apparaît discontinue lors de l'apparition du glissement. Lorsqu'un DDL est introduit très proche de ce point  $P$ , comme dans le modèle à 2-DDLs de la figure 4.10b, ce DDL et le point  $P$  ont à peu près le même mouvement. Dans la méthode de Balance Harmonique, le déplacement de chaque DDL est approximé par une série de Fourier tronquée. La discontinuité révélée par la figure 4.12 ne peut pas être correctement approximée par une série de Fourier avec peu d'harmoniques. C'est la raison pour laquelle les modèles à 1-DDL et 2-DDLs de la figure 4.10, même si ils sont mécaniquement équivalents, conduisent à des résultats numériques très différents. Dans un cas le mouvement du point de contact  $P$  est libre d'être discontinu alors que dans l'autre cas, il est contraint d'avoir un mouvement

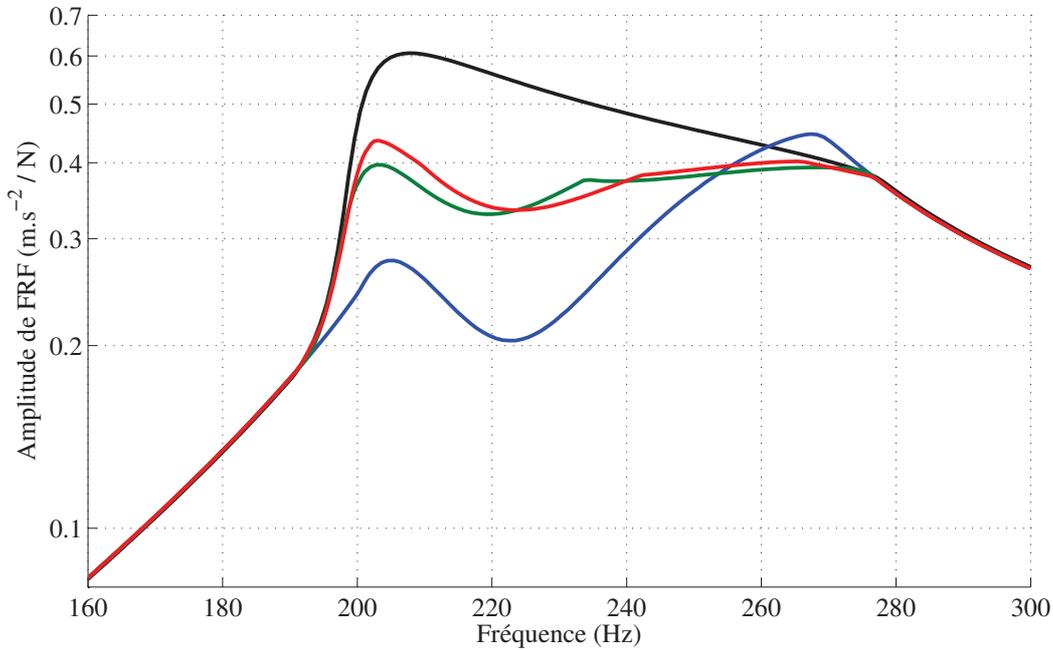


FIG. 4.11: Réponse fréquentielle harmonique en  $\ddot{x}$  (voir Fig. 4.10) pour le système à 1-DDL (courbe noire) et pour le système à 2-DDL, avec un nombre  $N$  d'harmoniques prises en compte dans la méthode de Balance Harmonique :  $N=1$  (bleu),  $N=5$  (vert),  $N=11$  (rouge).

continu, décrit par une série de Fourier d'ordre  $N$ . Pour éviter ce problème, le nombre d'harmoniques retenues peut être augmenté mais cela mène à de forts problèmes de convergence. Une solution de contournement est retenue pour ce cas d'application. Le nœud correspondant au bord supérieur de chaque lame (« Ref\_lame ») n'est pas retenu dans la condensation. Les calculs non-linéaires se font avec le modèle de Coulomb élastique dont la raideur, calculée selon la méthode explicitée dans la partie 4.5.1, correspond à la raideur de la lame toute entière. Le cas d'étude est alors analogue au modèle à 1-DDL de la figure 4.10a et le problème de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques retenues ne se pose pas. La vitesse  $v_P$  du point P est calculé à l'aide de la formule (4.61) et peut ensuite être directement comparée aux mesures vibrométriques effectuées sur le bord supérieur de la lame. Ces comparaisons seront présentées en partie 4.8.3.

D'autres méthodes peuvent permettre de traiter ce problème de convergence. Poudou [75, 74] a identifié précisément ce problème et propose de le résoudre en faisant croître itérativement la valeur de  $k_{raide}$ . Une autre méthode, développée par Nacivet et al. [59], est basée sur une formulation Lagrangienne de la force de frottement, couplée à une méthode temps-fréquence.

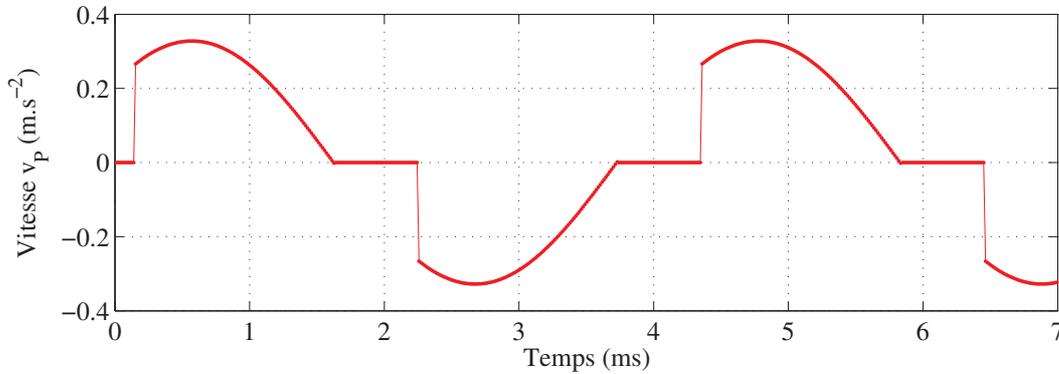


FIG. 4.12: Vitesse du point P du modèle à 1-DDL en fonction du temps. Ce signal de réponse est simulé avec une excitation sinusoïdale à 238 Hz.

## 4.8 Comparaisons essai-calcul

Dans cette partie, les résultats de simulation, obtenus en suivant la démarche qui est présentée dans ce chapitre, sont comparés aux résultats expérimentaux qui ont été introduits au chapitre 3. Cette comparaison est faite à l'échelle globale de la structure avec les réponses fréquentielles harmoniques et multi-harmoniques ainsi qu'à l'échelle locale au niveau du mouvement temporel de frottement dans la zone de contact.

### 4.8.1 Réponses fréquentielles

Les figures 4.13 et 4.14 comparent les résultats d'essai et de simulation pour une excitation verticale. On observe une excellente corrélation essai-calcul, à la fois au sommet du colis (voir figure 4.13) et sur le plateau support (voir figure 4.14) et pour les quatre niveaux d'excitation testés en essai : 70 N, 1070 N, 1875 N et 2910 N. À l'issue du processus de modélisation présenté dans ce chapitre, l'unique paramètre du modèle de frottement ( $F_{Coulombz}$ ) reste à identifier. La valeur de ce paramètre est bien la même pour tous les résultats de simulation présentés sur les figures 4.13 et 4.14, elle est de 290 N. Afin d'apprécier l'ordre de grandeur de ce chiffre, il peut être comparé à l'effort normal sur la liaison qui vient de la compression des lames au cours du montage. Par un calcul statique, la force normale dans la liaison est estimée à 320 N. L'ordre de grandeur de la force seuil de Coulomb paraît ainsi raisonnable.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent également des résultats numériques pour des niveaux d'excitation qui dépassent les niveaux qui étaient accessibles expérimentalement. Les courbes en tirets marrons et violets présentent les résultats de simulation à 6000 N et 10000 N. Elles permettent d'apprécier le comportement asymptotique du modèle à très fort niveau d'excitation. Au-delà d'un certain niveau, l'augmentation du niveau d'excitation se traduit par une augmentation du niveau de résonance maximal et donc une diminution de la dissipation. Le système tend alors vers un régime asymptotique

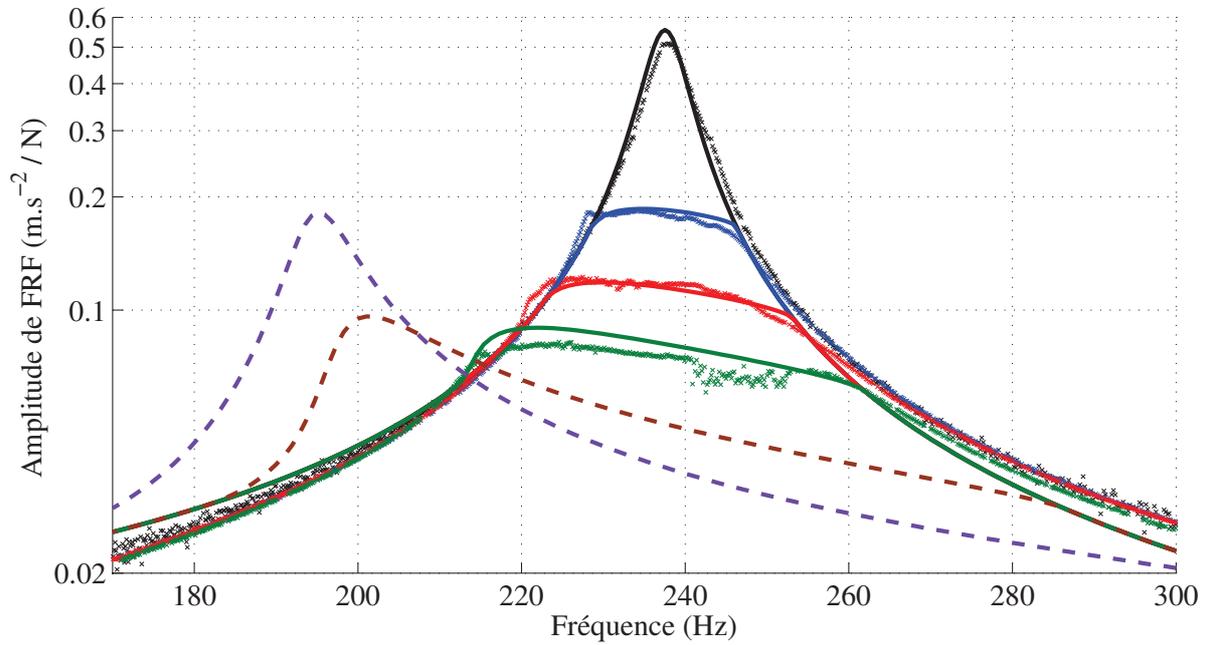


FIG. 4.13: Comparaison essai-calcul de la réponse fréquentielle verticale au sommet du colis. Les résultats d'essai sont représentés avec des croix, les simulations avec des traits pleins. Les couleurs correspondent aux différents niveaux d'excitation : 70 N (noir), 1070 N (bleu), 1875 N (rouge) et 2910 N (vert). Les deux courbes en tirets représentent les résultats de simulation à 6000 N (marron) et 10000 N (violet).

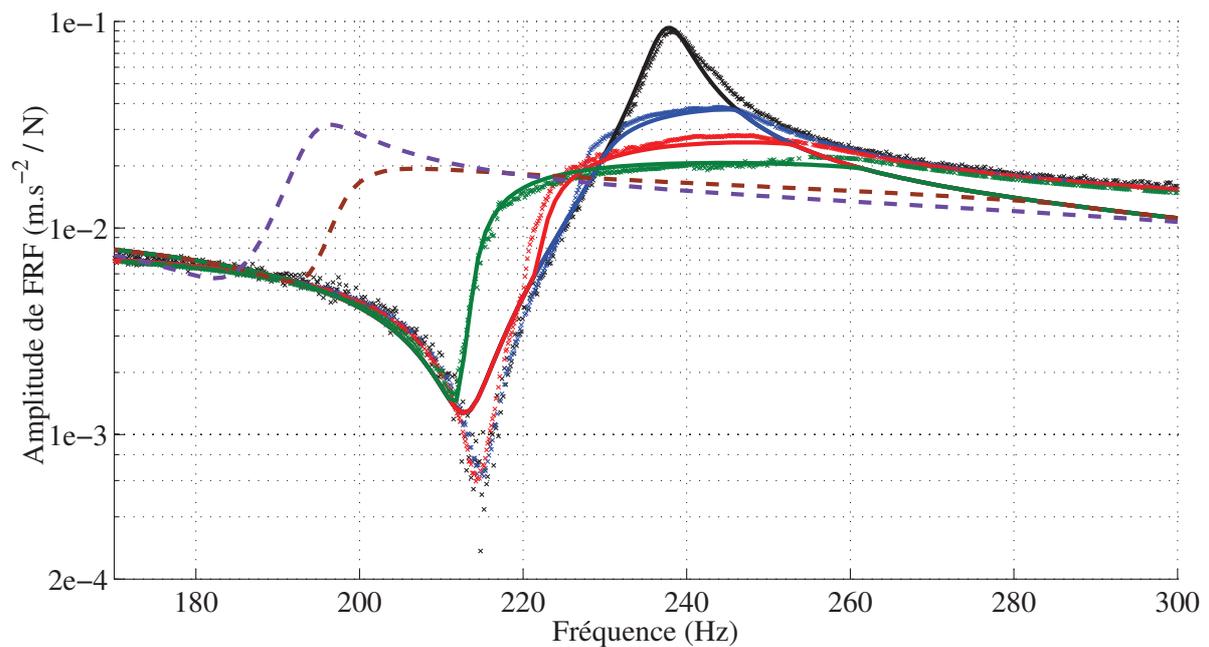


FIG. 4.14: Comparaison essai-calcul de la réponse fréquentielle verticale sur le plateau support. La légende est identique à celle de la figure 4.13.

	Jeu de paramètres 1	Jeu de paramètres 2
	Expériences pour lesquelles $0.2 < F_{excit} < 10 \text{ m.s}^{-2}$	Expériences pour lesquelles $15 < F_{excit} < 30 \text{ m.s}^{-2}$
$F_{Coulomb \theta y}$	300 N	230 N
$F_{Coulomb x}$	$+\infty$	130 N
$F_{Coulomb z}$	$+\infty$	500 N

TAB. 4.6: Valeurs des paramètres du modèle de frottement. Expériences à excitation horizontales.

résonant, dont la fréquence de résonance est autour de 190 Hz. Ce régime correspond à un mode de résonance où les lames glissent librement contre la paroi intérieure de l'enveloppe. Ainsi, le frottement correspond à une évolution non-linéaire entre deux modes de résonance : l'un où les lames restent accrochées à la paroi et l'autre où elles peuvent glisser librement. Al Sayed et al. [2] a étudié cette transition entre deux modes de résonance. Ces travaux montrent que le niveau d'excitation qui génère une dissipation maximale correspond à un régime de frottement dans lequel, au cours d'un cycle, la durée pendant laquelle les lames sont accrochées est égale à celle pendant laquelle elles glissent.

Dans le cas d'une excitation horizontale, trois paramètres doivent être recalés :  $F_{Coulomb \theta y}$ ,  $F_{Coulomb x}$  et  $F_{Coulomb z}$ . La partie 3.5.3 a montré que le frottement dans ces trois directions apparaissait de manière séquentielle lorsque le niveau d'excitation augmente : d'abord la rotation autour de la direction y, puis la translation selon x puis la translation verticale des lames orientées orthogonalement à la direction d'excitation. Le recalage des trois paramètres a été fait de manière séquentielle : d'abord  $F_{Coulomb \theta y}$  puis  $F_{Coulomb x}$  puis  $F_{Coulomb z}$ . En effectuant ce recalage, il apparaît que l'évolution du système ne peut être négligée pour obtenir une bonne corrélation essai-calcul. Au chapitre 3, la figure 3.10 a montré l'importance de cette évolution de l'état de la structure. Ainsi, pour reproduire l'intégralité des niveaux d'excitation testés expérimentalement, deux jeux de paramètres ont dû être recalés. Les valeurs de ce recalage sont présentées dans le tableau 4.6. La comparaison des résultats expérimentaux avec les simulations réalisées avec le jeu de paramètre 1 est présentée sur la figure 4.15. Celle correspondante au jeu de paramètre 2 est présentée sur la figure 4.16. Entre les deux jeux de paramètres, la valeur de  $F_{Coulomb \theta y}$  diminue. Cette évolution va dans le sens de l'usure décrite en partie 3.4.2. La valeur des paramètres  $F_{Coulomb x}$  et  $F_{Coulomb z}$  n'a pas pu être recalée dans le jeu de paramètre 1 parce que les frottements associés ne se déclenchent pas en deçà d'une excitation de  $15 \text{ m.s}^{-2}$ .

Enfin la valeur recalée de  $F_{Coulomb z}$  est supérieure à celle identifiée par les expériences verticales (pour lesquelles  $F_{Coulomb z} = 290 \text{ N}$ ). Ce qui peut expliquer cette différence est l'effort normal de liaison. Au cours des expériences verticales, l'effort normal dans chaque liaison est uniquement lié à la compression des lames due au montage. Dans le cas des expériences horizontales, s'ajoute à cet effort statique de montage une composante dynamique liée au mouvement du colis central qui appuie alternativement sur une lame puis sur son opposée. Dans le modèle utilisé dans ces travaux, on suppose cet effort constant, il conviendrait probablement mieux de prendre en compte une loi de

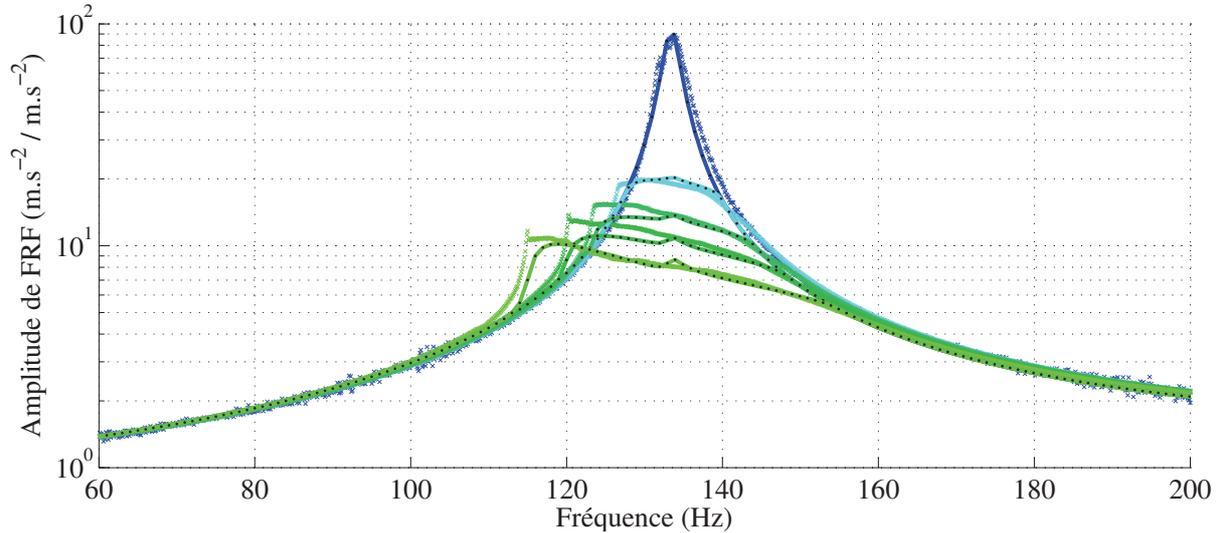


FIG. 4.15: Comparaison essai-calcul de la réponse fréquentielle horizontale selon x au sommet du colis. Les résultats d'essai sont représentés avec des croix, les simulations avec des traits pleins et des points noirs. En allant du bleu vers le vert, les couleurs correspondent aux niveaux d'excitation : 0.2, 3, 5, 7 et 10  $\text{m.s}^{-2}$ .

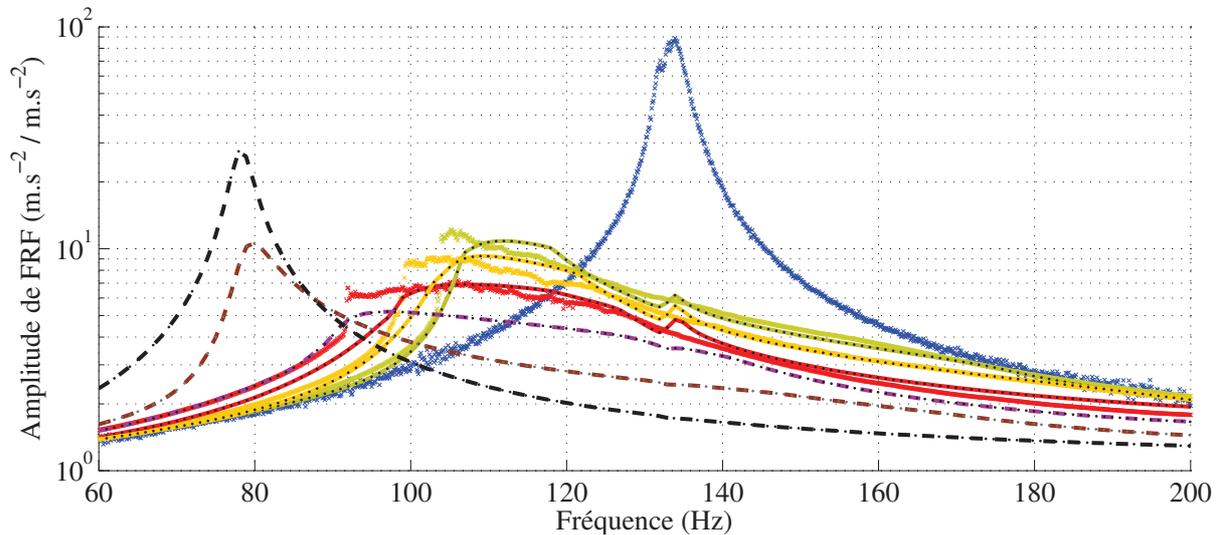


FIG. 4.16: Comparaison essai-calcul de la réponse fréquentielle horizontale selon x au sommet du colis. En allant du vert vers le rouge, les couleurs correspondent aux niveaux d'excitation : 15, 20 et 30  $\text{m.s}^{-2}$ . Les trois courbes en tirets représentent les résultats de simulation à 50  $\text{m.s}^{-2}$  (violet), 100  $\text{m.s}^{-2}$  (marron) et 200  $\text{m.s}^{-2}$  (noir). La courbe bleue rappelle les résultats d'essai à faible niveau d'excitation (0.2  $\text{m.s}^{-2}$ ).

Coulomb dépendante de l'effort normal de liaison :

$$F_{Coulomb} = \mu_{Coulomb} \times F_{normale, liaison} \quad (4.62)$$

Une telle loi n'a pas été implémentée dans ces travaux de thèse mais elle conduirait vraisemblablement à une amélioration des résultats à fort niveau d'excitation.

À l'instar des simulations réalisées en vertical, la figure 4.16 présente des résultats de simulation pour de forts niveaux d'excitation. Un régime asymptotique résonant autour de 78 Hz est observé. De même que pour les excitations verticales, il correspond à un régime où les lames glissent librement contre la paroi de l'enveloppe.

Les difficultés de recalage liées à l'évolution de l'état de la structure montrent les limites d'une modélisation déterministe des paramètres de frottement. Dans l'objectif d'améliorer le caractère prédictif de ces calculs, la prise en compte d'incertitudes sur les paramètres ou l'étude de l'évolution de ces derniers semble pertinente. Les incertitudes n'ont pas été prise en compte dans ces travaux mais il convient de signaler que des travaux se sont déjà intéressés au lien entre simulation par balance harmonique et propagation d'incertitudes [19, 20].

#### 4.8.2 Réponses multi-harmoniques

L'étude de l'apparition de signaux de réponse aux harmoniques d'ordre supérieur à 1 est l'un des objectifs de cette thèse. Une méthode d'extraction des signaux harmoniques de chaque ordre a été introduite au chapitre 2 (partie 2.1.3) sur l'exemple de la poutre bi-encastree. Elle a été utilisée au chapitre 3 pour tracer les réponses harmoniques de la structure « Harmonie » jusqu'à l'ordre 13. Comme l'a montré le chapitre 2, la méthode de balance harmonique permet de calculer directement les réponses harmoniques. À partir du vecteur de déplacement dans la base de Fourier,  $\mathbf{X} = {}^T[\mathbf{B}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{B}_N]$ , l'amplitude en accélération de la  $k^{\text{ème}}$  harmonique au niveau du DDL  $i$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{H}^k|_i = \sqrt{(\mathbf{A}_k|_i)^2 + (\mathbf{B}_k|_i)^2} \times (k \Omega)^2 \quad (4.63)$$

Les réponses harmoniques verticales au niveau du sommet du colis, pour une excitation verticale de 2910 N sont présentées sur la figure 4.17b. Elles peuvent être comparées aux réponses harmoniques expérimentales qui ont été présentées au chapitre 3 et qui sont reproduites sur la figure 4.17a. Les signaux harmoniques d'ordre supérieur à 1 apparaissent avec le frottement. La figure 4.17b montre qu'ils ne sont présents qu'entre 210 Hz et 260 Hz. En dehors de cette plage de fréquence, le frottement ne se déclenche pas, la force non-linéaire est nulle et la réponse numérique du système est linéaire et mono-harmonique. La figure 4.17a montre également une forte augmentation des signaux harmoniques dans la zone [210-260] Hz. En dehors de cette zone, on peut interpréter les signaux mesurés comme les composantes harmoniques du bruit de mesure. Dans la zone de frottement, les niveaux observés et mesurés sont comparables. La simulation prédit correctement ici l'apparition de signaux harmoniques. La principale différence entre les essais et la simulation apparait à 239 Hz à l'harmonique 5. Le phénomène de résonance à l'harmonique 5 observé dans les résultats numériques s'explique par une

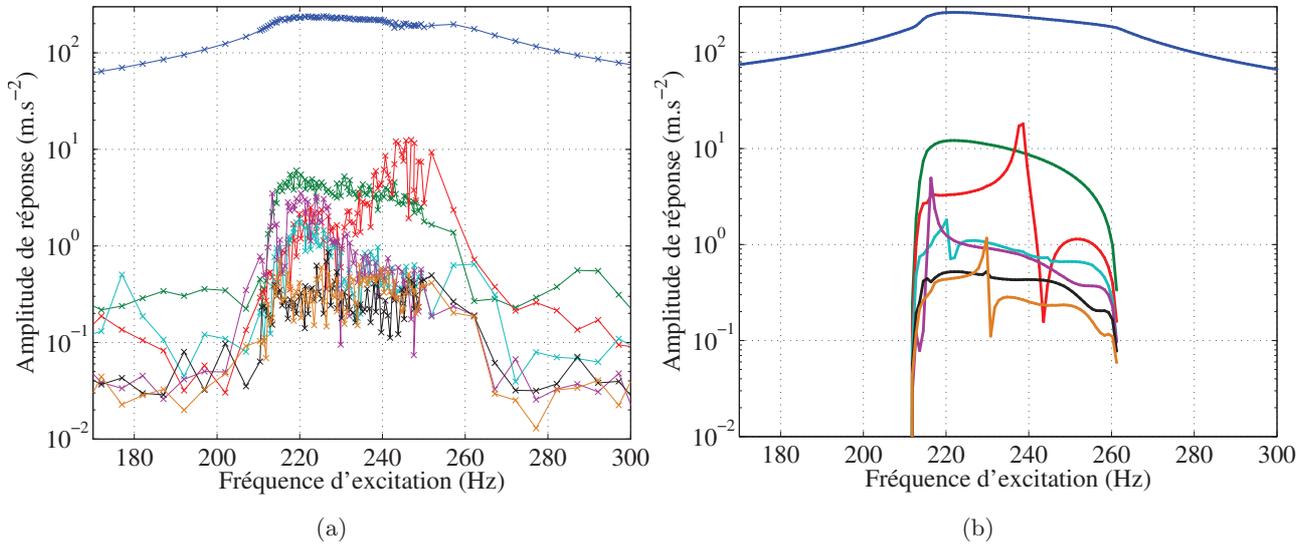


FIG. 4.17: Réponse multi-harmonique mesurée (a) et simulée (b), au sommet du colis, avec une excitation verticale de 2910 N. Les différentes courbes correspondent aux harmoniques : 1 (bleu), 3 (vert), 5 (rouge), 7 (violet), 9 (azur), 11 (noir) et 13 (orange).

interaction avec le second mode transverse du modèle, qui, dans cette configuration d'expérience, est situé à 1192 Hz. Expérimentalement, ce mode est situé plus haut en fréquence, ce qui peut expliquer la différence observée.

Les résultats sur plusieurs harmoniques pour les expériences à excitation horizontale sont présentés sur la figure 4.18. La figure 4.18a reproduit les résultats expérimentaux présentés au chapitre 3, la figure 4.18b présente les résultats numériques correspondants. De même que pour les expériences à excitation verticale, la simulation est en accord avec les niveaux observés expérimentalement. Il est à noter que les résultats expérimentaux présentés ne correspondent pas à la même expérience que celle qui a servi au recalage du modèle. Ainsi, l'usure de la structure présentée au chapitre 3 fait que les résultats à l'harmonique 1 sont moins bien corrélés avec la simulation que dans les résultats présentés dans la figure 4.15.

Dans la comparaison essai-calcul de la figure 4.18, on observe que le phénomène d'interaction modale observé à l'harmonique 9, à 143 Hz, se retrouve dans les résultats numériques et expérimentaux, même s'il est beaucoup plus marqué dans les résultats numériques. La fréquence absolue de cette résonance ( $9 \times 143 = 1287$  Hz) ne correspond pas à la fréquence propre numérique du troisième mode transverse (1212 Hz). En revanche, cette fréquence est très proche de la fréquence propre du premier mode de torsion de la structure : 1293 Hz. La résonance interne observée doit donc s'interpréter comme une interaction modale entre le premier mode transverse et le premier mode de torsion de l'assemblage. Cette observation numérique permet de proposer une nouvelle interprétation à la résonance interne observée expérimentalement à l'harmonique 9, à 142 Hz. Il pourrait également s'agir d'une

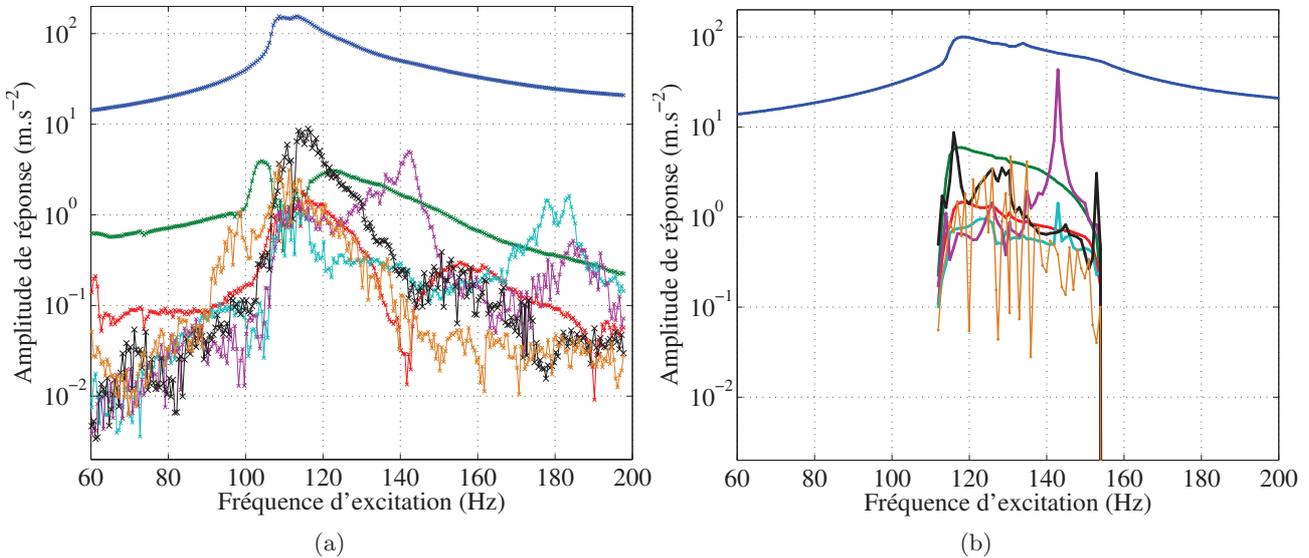


FIG. 4.18: Réponse multi-harmonique mesurée (a) et simulée (b), au sommet du colis, avec une excitation horizontale selon  $x$  de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ . Les différentes courbes correspondent aux harmoniques : 1 (bleu), 3 (vert), 5 (rouge), 7 (violet), 9 (azur), 11 (noir) et 13 (orange).

interaction modale avec le premier mode de torsion de l'assemblage. Ce mode n'a pas pu être identifié expérimentalement parce qu'il n'est pas excité par une accélération d'entraînement horizontale.

### 4.8.3 Mouvement de glissement des lames

Le dernier niveau de comparaison entre la simulation et l'expérience est l'échelle locale avec l'étude du mouvement de frottement pour le haut des lames de contact. Le mouvement du point de contact (point P dans la figure 4.9a) est comparé avec le mouvement moyen des points situés au sommet de la lame. Les mesures du mouvement du haut des lames sont présentées au chapitre 3, parties 3.5.2 et 3.5.3. Elles sont ici comparées au mouvement simulé du point P pour les mêmes conditions d'excitation et selon la même direction.

Tout d'abord, le mouvement de frottement vertical est étudié. La figure 4.19 compare les mouvements verticaux expérimentaux et simulés. L'alternance de phases d'accroche (où les vitesses de l'enveloppe et de la lame sont égales) et de phase de glissement (où les vitesses sont différentes) est bien retranscrite par la simulation. L'amplitude des mouvements de glissement est comparable. Le modèle « Coulomb-élastique » à une dimension et un seul paramètre permet donc bien de reproduire les caractéristiques principales du mouvement de frottement expérimental. Le mouvement du point P est cependant discontinu alors que le mouvement réel de la lame est continu. Cette différence vient du fait que dans le modèle de liaison proposé on ne prend pas en compte la masse inertielle de la lame.

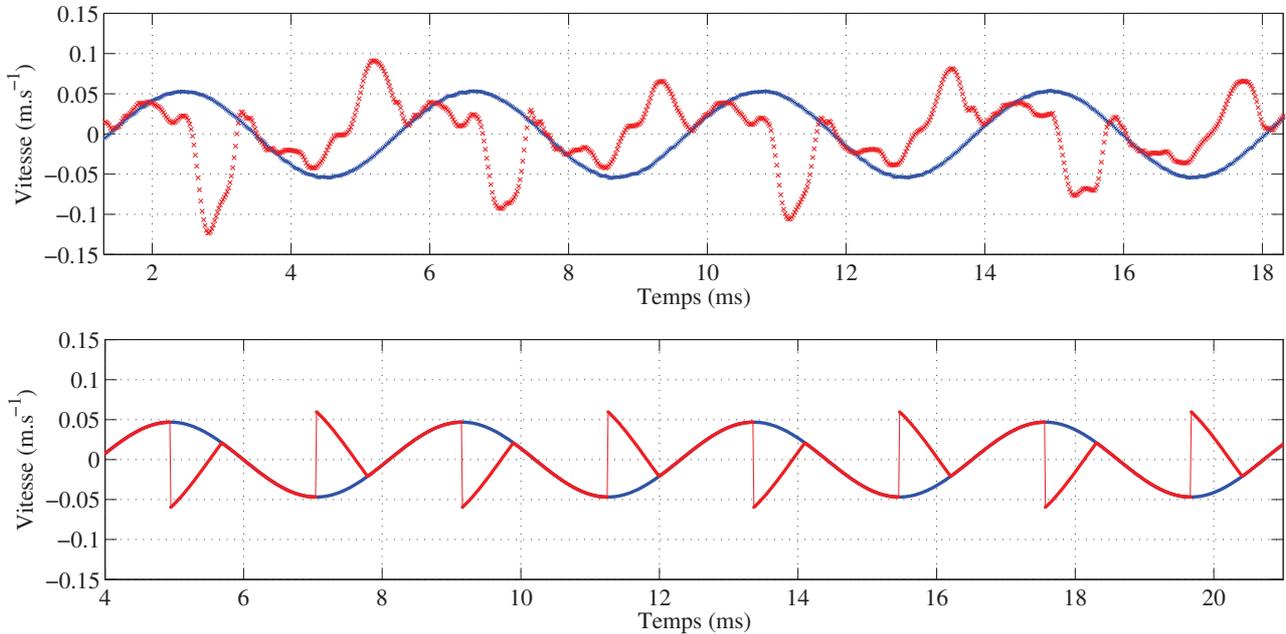


FIG. 4.19: Mouvement vertical mesuré (haut) et simulé (bas) dans la zone de contact. Le mouvement de l'enveloppe externe est tracé en bleu, celui du haut de la lame en rouge.

Ainsi, le modèle proposé atteint ses limites dans la comparaison très fine des mouvements simulé et mesuré de la lame.

Au cours des expériences à excitation horizontale, le mouvement de glissement principal concerne la rotation des lames dont le bord supérieur est colinéaire à la direction d'excitation. Le chapitre 3 (partie 3.5.2) a présenté un phénomène d'interaction modale qui a une forte influence sur le mouvement de rotation de la lame.

Dans le modèle numérique, un mode de lame est présent à 1750 Hz, il est représenté sur la figure 4.20. Ce mode correspond en forme et en fréquence au mode qui a été identifié expérimentalement comme étant excité par une interaction modale 1 :13 (voir chapitre 3, partie 3.5.4). Les simulations vibratoires non-linéaires prenant en compte le frottement permettent d'observer cette interaction modale à 135 Hz. La figure 4.21 compare les mouvements de rotation mesurés et simulés de la paroi de l'enveloppe et de la lame. Les oscillations du mouvement de glissement, caractéristiques de l'interaction modale 1 :13, se retrouvent dans les résultats de simulation.

Au-delà de cette corrélation essai-calcul sur le mouvement de la lame, l'interaction modale se caractérise également par une plage de fréquence limitée : la figure 3.23 du chapitre 3 a montré que l'interaction modale s'éteint à 130 Hz. De la même façon, le mouvement selon  $y$  d'un point situé au

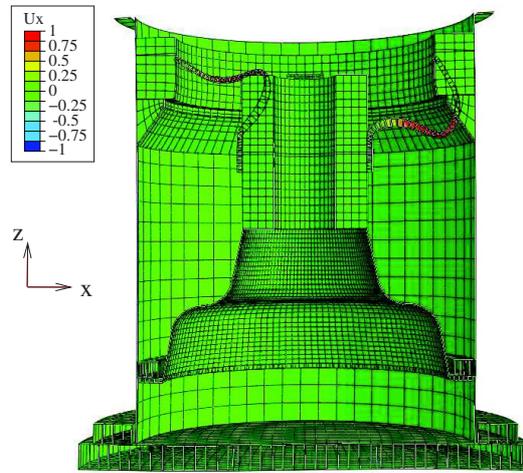


FIG. 4.20: Mode numérique à 1750 Hz

centre de la lame est tracé sur la figure 4.22. La figure 4.22 présente le mouvement obtenu à 135 Hz et celui obtenu à 132 Hz. De même qu’au chapitre 3, on observe que l’interaction modale est très localisée en fréquence. Les amplitudes présentées sur les figures 3.23 et 4.22 ne sont pas comparables entre elles puisqu’elles correspondent respectivement au mouvement moyen de la lame selon  $y$  et au mouvement d’un point de la lame situé en son centre. Ainsi, la simulation reproduit les résultats expérimentaux et confirme l’hypothèse d’une interaction modale 1 :13 avec un mode de lame à 1750 Hz.

Lors des expériences à excitations horizontales selon  $x$ , la partie 3.5.3 a montré qu’après le glissement en rotation, à plus fort niveau d’excitation, se déclenche le glissement en translation selon  $x$ . Des mesures vibrométriques ont en particulier exhibé ce phénomène à 135 Hz et  $40 \text{ m.s}^{-2}$  d’excitation. Cette expérience est reproduite numériquement avec les seuils de frottement qui ont été recalés et présentés en partie 4.8.1. La figure 4.23 compare les résultats de simulations aux mesures vibrométriques pour le mouvement de translation de la lame. Le frottement est déclenché dans les deux cas. À plus faible niveau d’excitation, pour la même fréquence, le frottement selon  $x$  ne se déclenche pas. Le seuil de frottement  $F_{Coulomb\ x}$  est ainsi en accord avec les observations expérimentales. La comparaison des figures 4.23 haut et bas révèle cependant que pour du frottement de faible niveau (phase de glissement de courte durée) le modèle de Coulomb élastique utilisé ne reproduit pas fidèlement les amplitudes de glissement observées expérimentalement. Pour une meilleure représentation de ces comportements, des modèles de frottement plus riches qui prennent en compte l’influence des microglissements pourraient améliorer les résultats.

Le dernier phénomène de frottement qui a été modélisé est le glissement vertical des deux autres lames (celles dont le bord supérieur est orthogonal à la direction d’excitation). Ce phénomène n’a pas été observé par la vibrométrie laser à balayage parce que les mesures à fort niveau d’excitation ont été

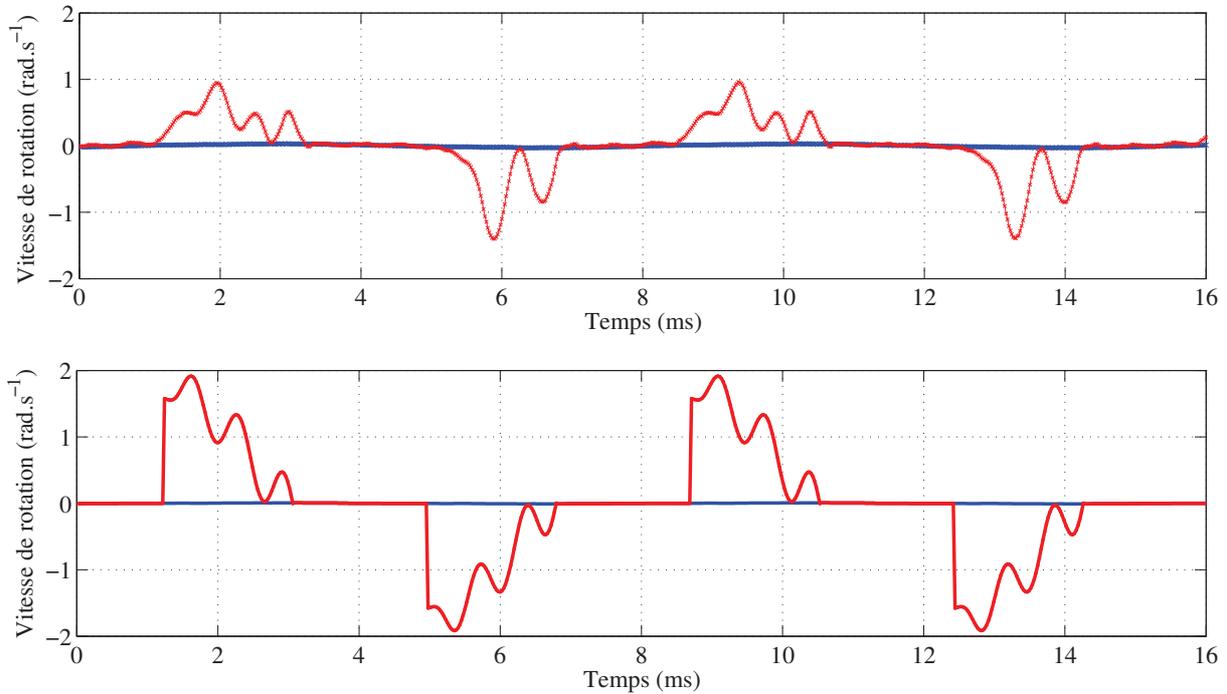


FIG. 4.21: Mouvements de rotation mesuré (haut) et simulé (bas) de la paroi de l'enveloppe (courbe bleue) et de la lame (courbe rouge). Les résultats sont obtenus avec une excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  à 135 Hz.

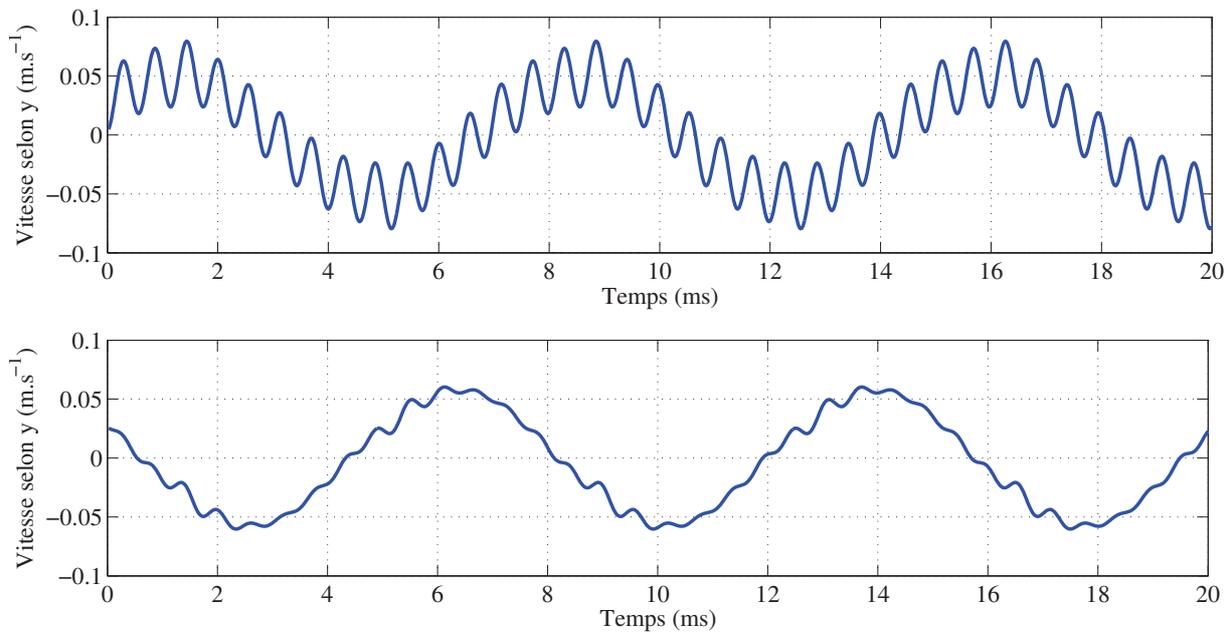


FIG. 4.22: Mouvement simulé selon y d'un nœud situé au centre de la lame avec une excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  à 135 Hz (haut) et 132 Hz (bas).

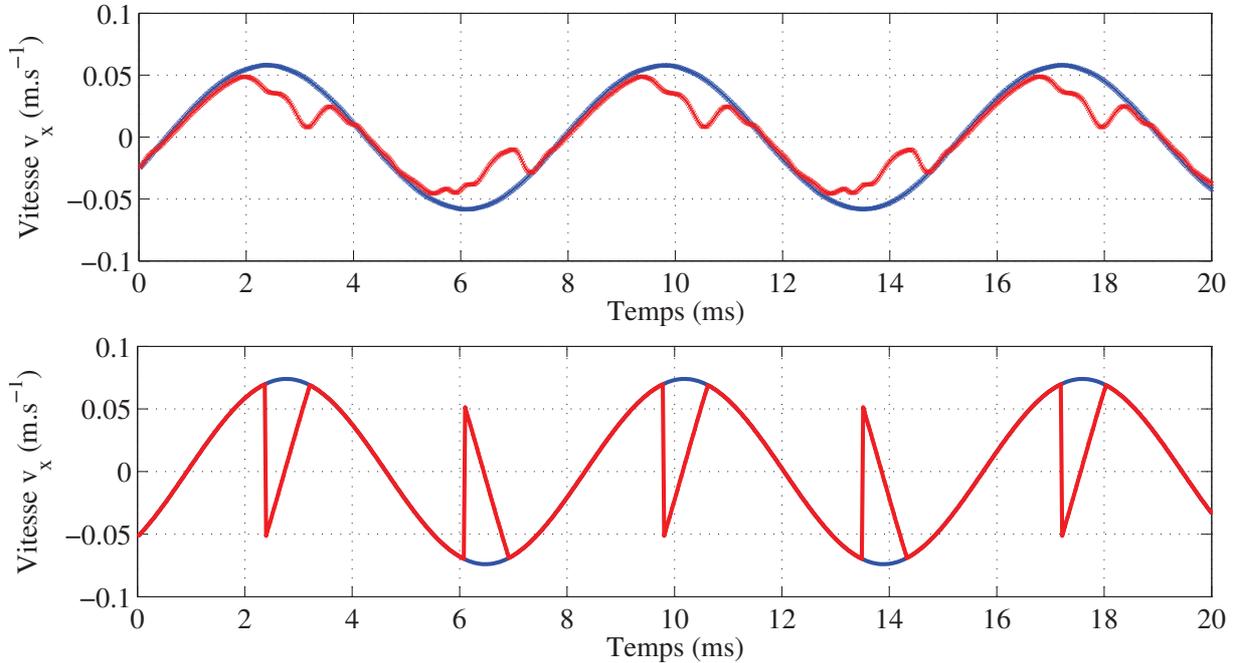


FIG. 4.23: Mouvement de translation selon  $x$  de l'enveloppe (courbes bleues) et de la lame (courbes rouges) mesuré (haut) et simulé (bas) avec une excitation selon  $x$  à 135 Hz, d'amplitude  $40 \text{ m.s}^{-2}$ .

seulement réalisées à la fréquence 135 Hz. La vibrométrie laser à balayage nous permet ainsi seulement de conclure qu'à 135 Hz et avec une amplitude d'excitation de  $40 \text{ m.s}^{-2}$ , le frottement vertical ne se déclenche pas. Avec le seuil de glissement  $F_{Coulombz}$  recalé à 500 N, cette observation expérimentale se retrouve dans les résultats numériques.

## 4.9 Interactions modales

Au chapitre 3, la notion d'interaction modale a été introduite pour expliquer des résonances à des harmoniques d'ordres supérieurs ou dans des directions différentes de la direction d'excitation. Trois interactions modales principales ont été identifiées :

- une interaction 1 :1 entre le mode horizontal dans la direction  $x$  et son jumeau selon  $y$ .
- une faible interaction 1 :9 entre le mode fondamental horizontal et un mode à 1280 Hz.
- une forte interaction 1 :13 entre le mode fondamental horizontal et un mode de pompage des lames à 1750 Hz. Cette interaction a une forte influence sur le mouvement de rotation du haut de la lame.

La méthode de simulation mise en place permet de retrouver par le calcul ces interactions modales. L'interaction 1 :9 se retrouve dans la réponse multi-harmonique présentée dans la partie 4.8.2. L'interaction 1 :13 est retrouvée dans le mouvement des lames présenté dans la partie 4.8.3. L'interaction

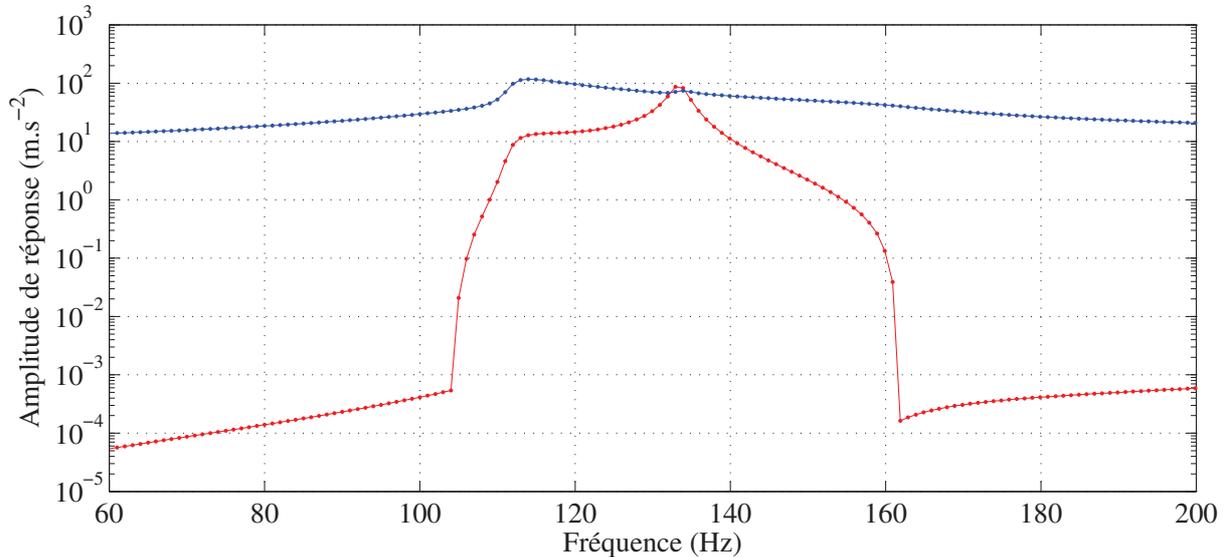


FIG. 4.24: Réponses fréquentielles simulées au sommet du colis dans les directions x (courbe bleue) et y (courbe rouge). Les simulations sont réalisées avec une amplitude d'excitation de  $10 \text{ m.s}^{-2}$  selon x.

1 : 1 entre les deux directions horizontales est également simulée. La figure 4.24 présente les réponses fréquentielles harmoniques dans les directions x et y. On observe une très forte augmentation de la réponse dans la direction y (orthogonale à l'excitation) dans la plage de fréquence où le frottement apparaît : [110, 160] Hz. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux présentés en partie 3.4.3 (figure 3.13). Les niveaux de réponse non-négligeables dans une direction orthogonale à la direction d'excitation sont ainsi bien un effet non-linéaire du frottement.

Les trois interactions modales observées sont ainsi reproduites par la simulation. Ces résultats sont un indicateur de la qualité du modèle non-linéaire réalisé et de la pertinence de la démarche d'ingénieur et de la méthode de simulation non-linéaire proposée pour simuler des phénomènes vibratoires non-linéaires complexes.

#### 4.10 Extension des résultats sur modèle complet

La dernière étape de la méthode de simulation non-linéaire mise en place dans ces travaux de thèse est le retour vers le modèle éléments finis complet. Les chapitres 2 et 4 ont montré la pertinence de la méthode de simulation proposée pour reproduire des phénomènes non-linéaire complexes. Les résultats montrés concernent tous le mouvement de points de la structure. En ingénierie, les critères de robustesse d'une structure s'expriment plus généralement en contraintes (seuil de rupture, seuil d'endurance, etc...). Afin d'utiliser la méthode proposée dans un contexte industriel, la question du calcul des champs de contraintes se pose.

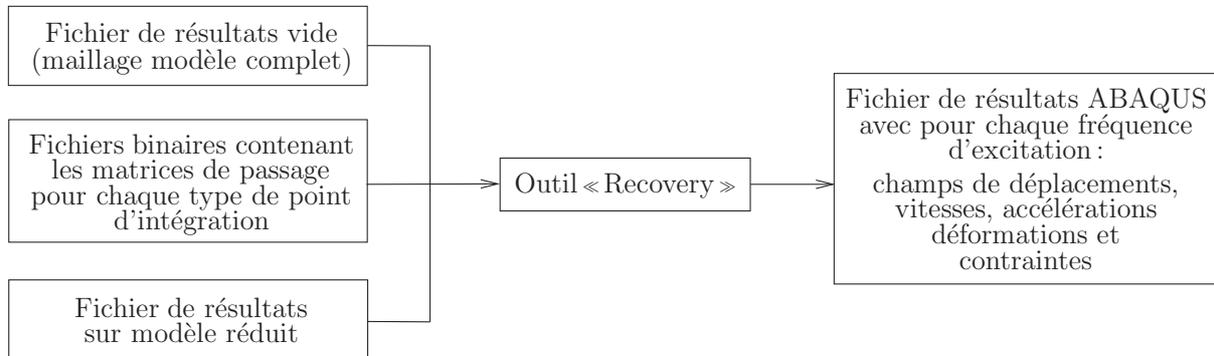


FIG. 4.25: Schéma de principe du logiciel « Recovery » de retour vers un modèle complet.

D'un point de vue théorique ce calcul n'est pas compliqué : la réduction de modèle se fait par une matrice de passage, en utilisant la transposée de cette matrice de passage, on étend les résultats de la base réduite vers la base complète. Une fois les résultats obtenus sur modèle complet, les déformations puis les contraintes peuvent être calculées en utilisant les formules adaptées pour chaque type d'élément fini. En pratique, nous utilisons ici un logiciel éléments finis commercial qui n'est pas prévu pour prendre en compte des résultats de calcul sur base réduite, effectués en dehors du logiciel.

Ainsi, dans le cadre de ces travaux de thèses, le développement d'un logiciel de retour vers modèle complet a été demandé à Dassault Système, éditeur du code éléments finis ABAQUS. Cet outil dénommé « Recovery » permet d'étendre les résultats de la base réduite vers la base complète et de calculer les champs de déformations et contraintes associés. Le résultat est un fichier de résultats au format ABAQUS. La figure 4.25 schématise le fonctionnement de ce logiciel. En entrée de cet outil, plusieurs données doivent être fournies :

- un fichier de résultats vierge contenant le maillage complet,
- des fichiers binaires contenant les matrices de passage,
- un fichier de résultats sur modèle réduit présentant, pour chaque fréquence d'excitation, la réponse en déplacement, vitesse et accélération selon chaque DDL du modèle réduit sous la forme partie réelle et partie imaginaire harmoniques.

Une difficulté se présente au niveau des fichiers contenant les matrices de passage qui sont générés lors de l'étape de réduction de modèle par le code ABAQUS. Les matrices de passage vers les DDLs du modèle complet sont présentes et on peut demander à stocker également les matrices de passage vers les points d'intégration du modèle. L'écueil ici vient du fait que certains éléments possèdent plusieurs points d'intégration. Par exemple, les éléments coque possèdent généralement 5 points d'intégration dans leur épaisseur. L'architecture du code ABAQUS fait qu'il n'est possible d'enregistrer dans un fichier les matrices de passage qu'un seul type de point d'intégration. Ainsi, pour un modèle contenant

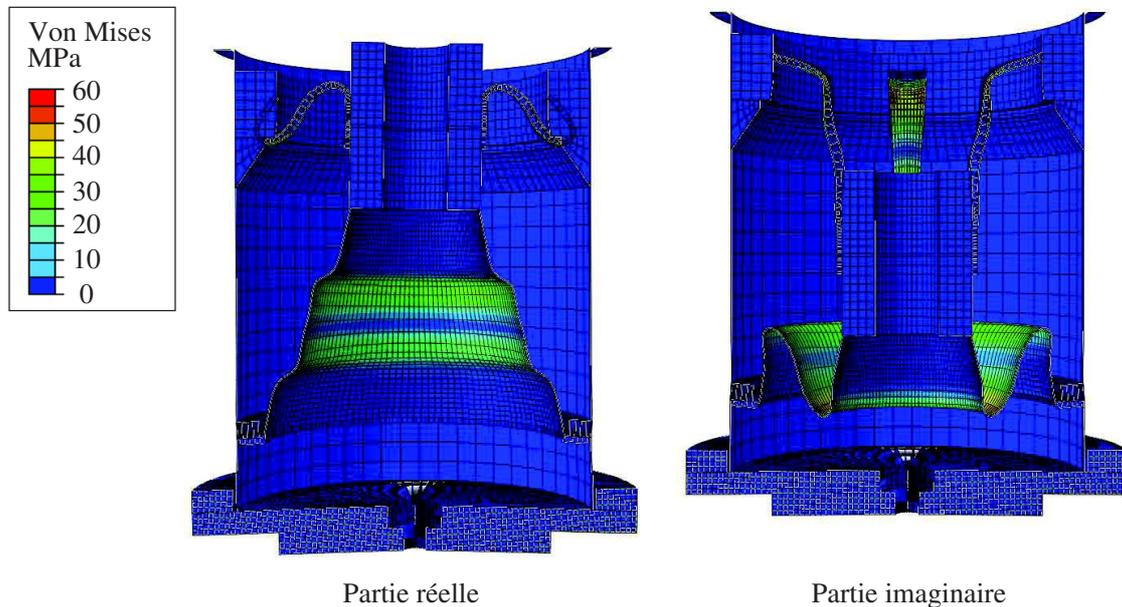


FIG. 4.26: Champ de contrainte simulé pour une excitation verticale de 2910 N à 238 Hz.

par exemple des éléments solides (dénommés « C3D8 »), des éléments coque linéaires (« S4R ») et quadratiques (« S8R »), il faut générer autant de fichiers binaires contenant les matrices de passage qu'il y a de sortes d'élément fini et de point d'intégration. Ici il faut générer 11 fichiers :

- un pour le barycentre des éléments solides,
- cinq pour les points d'intégration dans l'épaisseur des éléments coque linéaires,
- cinq pour les points d'intégration dans l'épaisseur des éléments coque quadratiques.

Moyennant cet effort initial pour générer les bons fichiers, l'outil permet une extension des résultats du modèle réduit vers le modèle complet avec calcul des champs de déformations et de contraintes. La figure 4.26 illustre les résultats obtenus en champ de contraintes. La figure est déformée selon le champ de déplacement et colorée selon le champ des contraintes de Von Mises.

Une fois ce fichier de résultat obtenu, il devient immédiat de tracer tout résultat en contrainte ou en déplacement. En particulier, la figure 4.27 présente la courbe de réponse fréquentielle en contrainte de type Von Mises sur un élément de la jupe du colis central. Ce type de courbe permet de conclure sur la tenue de la structure à l'environnement vibratoire testé.

## 4.11 Conclusion

La méthode de simulation mise en place sur un exemple académique au chapitre 2 a ici été appliquée à un cas d'étude avec des caractéristiques industrielles. La technique de balance harmonique condensée a ainsi été adaptée. La première étape qui est très importante est la modélisation linéaire de

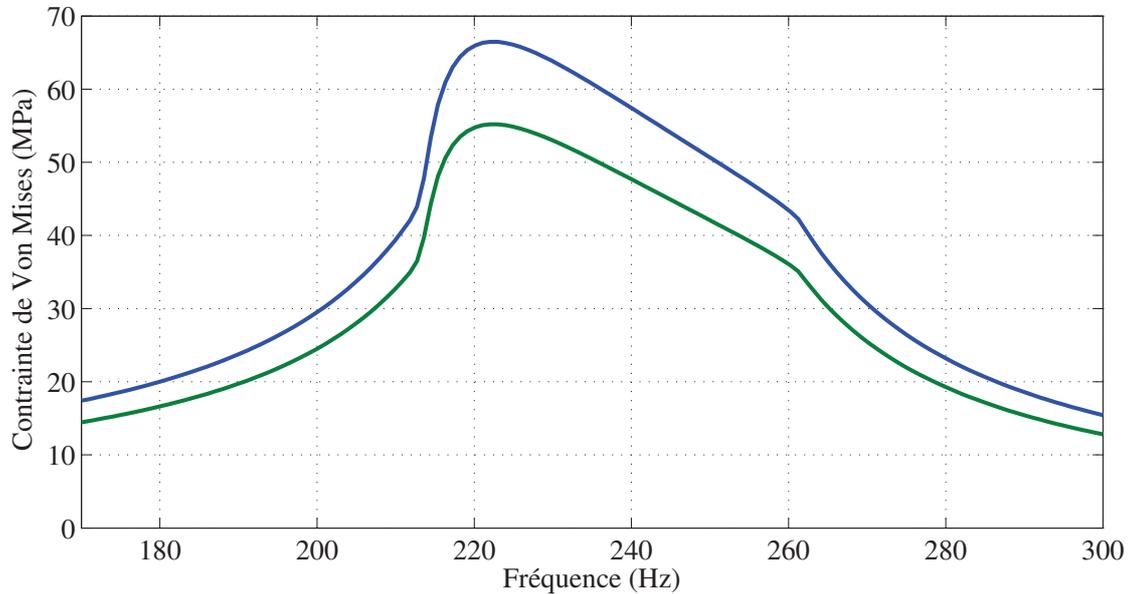


FIG. 4.27: Courbe de réponse en contrainte de type « Von Mises » pour un élément situé au milieu de la jupe du colis central. La courbe verte présente les contraintes sur la paroi intérieure et la bleue les contraintes sur la paroi extérieure.

la structure. La réponse numérique du modèle éléments finis linéaire doit être parfaitement en accord avec la réponse expérimentale de la structure à très faible niveau d'excitation. Ainsi une démarche minutieuse de modélisation a été mise en place, les composants de l'assemblage « Harmonie » ont été testés séparément, une étude de convergence de maillage a été réalisée, les liaisons ont ensuite été modélisées par des connecteurs dont les paramètres ont été recalés. À l'issue de ce travail, une très bonne corrélation essai-calcul à faible niveau d'excitation a été obtenue. Ce travail ne constitue aucunement un développement scientifique original de ces travaux de thèse mais c'est une étape essentielle pour aller vers une modélisation non-linéaire pertinente d'une structure complexe.

Une fois le modèle linéaire validé, il est réduit en utilisant un algorithme de sous-structuration. Ensuite les modèles linéaires de liaisons de contact entre les lames et l'enveloppe externe sont remplacés par des modèles non-linéaires de Coulomb élastique. Chaque modèle de liaison est associé à un unique paramètre de recalage : la force seuil de Coulomb. Une fois les modèles non-linéaires introduits, le système non-linéaire obtenu est reformulé pour minimiser le nombre d'équations affectées par des fonctions non-linéaires. Une procédure de condensation permet alors de réduire la taille du problème non-linéaire à résoudre : il correspond au nombre de liaisons non-linéaires introduites dans le problème. Ce problème condensé est résolu par la méthode de balance harmonique avec continuation qui a déjà été utilisée au chapitre 2. La réponse harmonique du modèle est alors calculée puis comparée aux résultats expérimentaux. À cette étape, les paramètres des modèles non-linéaires de liaison

sont recalés. Une fois ces paramètres recalés, les réponses harmoniques numériques sont parfaitement en accord avec les courbes expérimentales quels que soient les niveaux d'excitation. De plus, comme au chapitre 2, les réponses multi-harmoniques sont étudiées et là encore, la simulation est en accord avec l'expérience. En particulier, des phénomènes d'interactions modales sont mis en évidence. Cette très bonne corrélation valide l'ensemble de la démarche de modélisation et de simulation mise en place.

Le dernier niveau de comparaison essai-calcul étudié est l'échelle locale où le mouvement de frottement mesuré par vibrométrie laser à balayage est comparé aux simulations. Avec la méthode de simulation choisie, la balance harmonique, un problème apparaît pour étudier le mouvement de frottement. Ajouter un degré de liberté au modèle au voisinage du point de frottement perturbe fortement le mouvement numérique de ce point en l'obligeant à être décrit par une série de Fourier. Une telle modélisation entraîne de gros problèmes de convergence de l'algorithme d'optimisation non-linéaire. La solution proposée ici consiste à ne pas introduire de tels degrés de liberté au voisinage du point de frottement mais à calculer le mouvement discontinu du patin frotteur. Les comparaisons essai-calcul prouvent alors la pertinence de cette démarche, et au-delà, du choix de modèle de frottement.

Ce dernier chapitre démontre la pertinence de la démarche de simulation vibratoire non-linéaire dans un contexte industriel. Le contexte industriel a amené à s'intéresser à la question du calcul des contraintes à partir des résultats sur modèle réduit. Une réponse concrète a été apportée au cours de ces travaux par un développement commandé à l'éditeur de logiciel Dassault Système et présenté dans la dernière partie de ce chapitre. La méthode de simulation proposée répond ainsi pleinement à la problématique industrielle et permet d'envisager l'utilisation de modèles éléments finis comportant des éléments non-linéaires dans une phase de prédiction et dimensionnement de systèmes complexes à interfaces non-linéaires.

# Conclusion

## Bilan

Ces travaux de thèse s'articulent autour de deux maquettes d'essai : une poutre bi-encastée et la maquette « Harmonie ». L'étude de la poutre bi-encastée a permis d'appliquer plusieurs méthodes de simulation vibratoires non-linéaires : développements multi-échelles, méthode de tir et de balance harmonique. Les résultats obtenus par ces trois méthodes sont en accord les uns avec les autres. Grâce à la modélisation de conditions aux limites non-idéales, ces résultats sont parfaitement en accord avec l'expérience. Ce premier exemple permet de prouver l'utilité de la démarche de simulation vibratoire non-linéaire dans un contexte industriel où l'objectif est de disposer d'outils de simulation permettant de prévoir le comportement des structures. Cette démarche permet de quantifier l'influence des effets non-linéaires sur la réponse vibratoire des systèmes mécaniques. Parmi les trois méthodes mises en œuvre, la méthode de balance harmonique a été retenue parce qu'en plus d'être efficace et adaptable à des modèles éléments finis, elle permet une interprétation directe des réponses multi-harmoniques. Ainsi, au cours de ces premiers travaux, une méthode d'analyse des réponses vibratoires multi-harmoniques a été développée. Elle comporte un volet expérimental et un volet numérique.

Le cœur de ces travaux de thèse est l'étude expérimentale et numérique de l'effet du frottement sur la réponse fréquentielle d'un assemblage. Ces travaux ont été réalisés autour de la conception et de l'étude de la maquette « Harmonie ». L'étude expérimentale montre les effets importants du frottement sur la réponse vibratoire de la structure. De plus, l'utilisation de la vibrométrie laser à balayage permet une observation directe du mouvement de frottement dans les zones de contact. Au niveau de la simulation numérique, la méthode de balance harmonique qui a été retenue à l'issue des premiers travaux, a de nouveau été mise en œuvre sur ce cas d'application. Autour de cette méthode de simulation, une démarche complète d'ingénieur a été mise en place. Cette démarche commence par la création d'un modèle éléments finis dont la réponse vibratoire est en accord avec les résultats d'expériences à faible niveau d'excitation. Un modèle industriel non-linéaire ne peut être pertinent que si le modèle linéaire sous-jacent représente correctement le comportement de la structure réelle à très faible niveau d'excitation. Le modèle éléments finis est ensuite réduit par une méthode de sous-structuration. Les modèles linéaires de liaisons sont alors remplacés par des modèles non-linéaires. Pour l'étude de la maquette « Harmonie », c'est un modèle de frottement simple qui a été implémenté. Le système d'équations non-linéaires exprimé pour le modèle réduit peut alors être traité par la méthode de balance harmonique

couplée à un algorithme de continuation. Pour réduire au maximum les temps de calcul, une procédure de condensation du modèle par substitution a été également mise en place. La réponse vibratoire de la structure à différents niveaux d'excitation peut alors être simulée. Par comparaison avec les résultats expérimentaux, les paramètres des modèles de liaison non-linéaires sont recalés. Une fois le modèle recalé, une dernière étape de cette démarche d'ingénierie permet d'étendre ces résultats sur le modèle éléments finis complet afin de pouvoir, en particulier, calculer les champs de contraintes de la structure.

La pertinence de cette démarche a été prouvée par de très bonnes corrélations calculs-essais à trois niveaux :

- les réponses vibratoires harmoniques,
- les réponses vibratoires multi-harmoniques,
- le mouvement temporel local, au niveau des lames de la maquette, sous l'effet du frottement.

Les résultats numériques obtenus permettent de reproduire et ainsi de comprendre l'évolution de la dissipation dans l'assemblage ainsi que l'ensemble des effets non-linéaires. En particulier, parmi ces effets, des interactions modales ont été mises en évidence. Sous l'effet du frottement, lorsque la structure est sollicitée au voisinage du premier mode horizontal, plusieurs modes sont excités, à des fréquences et dans des directions différentes. Ces interactions modales se retrouvent dans les résultats expérimentaux et numériques.

Ainsi, l'apport de ces travaux de thèse est une démarche industrielle de calcul qui permet la prise en compte de modèles non-linéaires de liaison ou de non-linéarités géométriques. Les très bonnes corrélations calculs-essais obtenues sur les deux maquettes d'essai étudiées prouvent la pertinence de la démarche proposée.

## Perspectives

Pour aller au-delà de ces résultats au niveau industriel, une mise en œuvre de la démarche présentée sur un cas d'étude réel du CEA/CESTA est programmée. De plus, des travaux sont d'ores et déjà en cours pour appliquer cette méthode à un autre type de liaison non-linéaire comme un connecteur au comportement viscoélastique par exemple. À l'avenir, l'étude des liaisons boulonnées et collées est également envisagée. Pour la modélisation de ces liaisons non-linéaires, l'étude de la réponse de la structure « Harmonie » à des excitations horizontales a montré que les paramètres de liaison sont incertains et peuvent évoluer au cours du temps. La prise en compte de ces incertitudes de modélisation permettrait de rendre les résultats de simulation plus prédictifs. La prise en compte de paramètres incertains dans les modèles vibratoires non-linéaires est un premier axe de développement prévu pour les prochaines années.

Par ailleurs, comme expliqué dans l'introduction de ce mémoire de thèse, les excitations vibratoires stationnaires sur les structures aéronautiques sont principalement de deux types : sinusoïdales ou à spectre fréquentiel continu. Ces excitations de type « bruit blanc gaussien » ne peuvent pas être prises

en compte avec la méthode de simulation présentée dans ce mémoire. L'étude des réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires décrites par un spectre fréquentiel moyen est l'autre axe de développement prévu sur ce thème.



# Bibliographie

- [1] H. Ahmadian, J.E. Mottershead, S. James, M.I. Friswell, and C.A . Reece. Modelling and updating of large surface-to-surface joints in the AWE-MACE structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 :868–880, 2006.
- [2] B. Al Sayed, E. Chatelet, S. Baguet, and G. Jacquet-Richardet. Dissipated energy and boundary condition effects associated to dry friction on the dynamics of vibrating structures. *Mechanism and Machine Theory*, 46 :479–491, 2011.
- [3] J. Avalos, L.A. Ritcher, X.Q. Wang, R. Murthy, and M.P. Mignolet. Stochastic modal models of slender uncertain curved beams preloaded through clamping. *Journal of Sound and Vibration*, 334 :363–376, 2015.
- [4] L. Azrar, R. Benamar, and R.G. White. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of S-S and C-C beams at large vibration amplitudes. part I : General theory and application to the single mode approach to free and forced vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 224 :183–207, 1999.
- [5] L. Azrar, R. Benamar, and R.G. White. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of S-S and C-C beams at large vibration amplitudes. part II : Multimode approach to the steady state forced periodic response. *Journal of Sound and Vibration*, 255 :1–41, 2002.
- [6] E.J. Berger. Friction modeling for dynamic system simulation. *Applied Mechanics Reviews*, 55(6) :535–577, 2002.
- [7] R.D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger publishing company, 1981.
- [8] S. Bograd, P. Reuss, A. Schmidt, L. Gaul, and M. Mayer. Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :2801–2826, 2011.
- [9] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An alternating frequency time domain method for calculating the steady state response of nonlinear dynamic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989.
- [10] D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez, and J. Dupeux. Numerical and experimental study of friction damping in blade attachments of rotating bladed disks. *International Journal of Rotating Machinery*, pages 1–13, 2006. Article ID 71302.

- 
- [11] M. Claeys, J.-J. Sinou, J.-P. Lambelin, and B. Alcoverro. Multi-harmonic measurements and numerical simulations of nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :4196–4212, 2014.
- [12] M. Claeys, J.-J. Sinou, J.-P. Lambelin, and B. Alcoverro. Experiments and numerical simulations of nonlinear vibration responses of an assembly with friction joints - application to a test structure named “harmony”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70 :1097–1116, 2016.
- [13] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Science Publications - Lavoisier, 2007.
- [14] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :243–262, 2009.
- [15] R.R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructure for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 1(2) :1313–1319, 1968.
- [16] R.R. Craig and C.J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. In *Proceeding 18<sup>th</sup> AIAA/ASME Structure, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 89–99, 1977.
- [17] P.R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14 :1675–1682, 1976.
- [18] D. de Klerk, D.J. Rixen, and S.N. Voormeeren. General framework for dynamical substructuring : history, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46(5) :1169–1181, 2008.
- [19] J. Didier, J.-J. Sinou, and B. Faverjon. Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :671–703, 2012.
- [20] J. Didier, J.-J. Sinou, and B. Faverjon. Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 :3250–3270, 2013.
- [21] M.A. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1373–1386, 1989.
- [22] E. Dowell, J. Edwards, and T. Strganac. Nonlinear aeroelasticity. *Journal of aircraft*, 40(5) :857–874, 2003.
- [23] B.F. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs, and K. Popp. A historical review of dry friction and stick slip phenomena. *Applied Mechanics Reviews*, 51(5) :321–341, 1998.
- [24] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamical analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7) :2100–2113, 2014.
- [25] C.M. Firrone, D. Botto, and M.M. Gola. Optimization of interblade friction damper design. In *Proceeding of 8th Biennial ASME Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, pages 469–478, 2006. Paper ESDA2006-95605.
- [26] L. Gaul and J. Lenz. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints. *Acta Mechanica*, 125(1-4) :169–181, 1997.

- 
- [27] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, 2001.
- [28] A. Girard and N. Roy. *Dynamique des structures industrielles*. Hermes Science Publications - Lavoisier, 2003.
- [29] J. Guillen and C. Pierre. An efficient, hybrid, frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems. In *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, pages 169–178. Springer, 1999.
- [30] A.G. Haddow, A.D.S. Barr, and D.T. Mook. Theoretical and experimental study of modal interaction in two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3) :451–473, 1984.
- [31] E.J. Hahn and P.Y. Chen. Harmonic balance analysis of general squeeze film damped multidegree-of-freedom rotor bearing systems. *Journal of Tribology*, 116 :499–507, 1994.
- [32] N. Hansen and A. Ostermeier. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies. *Evolutionary Computation*, 9(2) :159–195, 2001.
- [33] J.-F. Imbert. *Analyse de structures par éléments finis*. Sup'Aero - Cepadues Edition, 1991.
- [34] W.D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :893–900, 1966.
- [35] W.D. Iwan. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34 :612—617, 1967.
- [36] V. Jaumouillé, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems — application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :4048—4067, 2010.
- [37] A.N. Jean and H.D. Nelson. Periodic response investigation of large order nonlinear rotordynamic systems using collocation. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3) :473–489, 1990.
- [38] S. Karkar, B. Cochelin, and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : the case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :968–977, 2013.
- [39] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear Dynamics*, 41 :147–169, 2005.
- [40] G. Kerschen, M. Peeters, J.-C. Golinval, and A.F. Vakakis. Nonlinear normal modes. part 1 : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :170–194, 2009.
- [41] G. Kerschen, K. Worden, A.F. Vakakis, and J.-C. Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 :505–592, 2006.
- [42] M. Kim, V. Belsky, and M. Belyi. Substructure generation using automated multilevel substructuring, 2013. Patent US 2013/0124150A1 and EP 2597578A1.

- 
- [43] K.H. Koh, J.H. Griffin, S. Filippi, and A. Akay. Characterization of turbine blade friction dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(4) :856–862, 2005.
- [44] I. Kovacic and M.J. Brennan. *The Duffing equation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [45] M. A. Kramer. Nonlinear principal component analysis using autoassociative neural networks. *AIChE Journal*, 37 :233–243, 1991.
- [46] T. Lauwagie, J. Guggenberger, J. Strobbe, and E. Dascotte. Model updating using operational data. In *Proceedings of ISMA2010 including USD2010*, pages 2669–2678, 2010.
- [47] D. Laxalde. *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étage*. Mémoire de Thèse, École Centrale de Lyon, 2007.
- [48] D. Laxalde and F. Thouverez. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322 :1009–1025, 2009.
- [49] D. Laxalde, F. Thouverez, J.-J. Sinou, and J.-P. Lombard. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(4) :676–687, 2007.
- [50] A. Lazarus, O. Thomas, and J.-F. Deü. Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to nems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 49 :35–51, 2012.
- [51] A.C. Lazer and P.J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : some new connections with nonlinear analysis. *Siam Review*, 32(4) :537–578, 1990.
- [52] R. Mac Neal. Hybrid method of component mode analysis. *Computers and Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [53] P. Malatkar and A.H. Nayfeh. A parametric identification technique for single-degree-of-freedom weakly nonlinear systems with cubic nonlinearities. *Journal of Vibration and Control*, 9 :317–333, 2003.
- [54] M.P. Mignolet, A. Przekop, S.A. Rizzi, and S.M. Spottswood. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :2437–2460, 2013.
- [55] M.P. Mignolet and C. Soize. Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :3951–3963, 2008.
- [56] M. Monteil, O. Thomas, and C. Touzé. Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan. *Applied Acoustics*, 89 :1–15, 2015.
- [57] M. Monteil, C. Touzé, O. Thomas, and S. Benacchio. Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1 :2 :4 and 1 :2 :2 internal resonances. *Nonlinear Dynamics*, 75 :175–200, 2014.
- [58] A.A. Muravyov and S.A. Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers and Structures*, 81 :1513–1523, 2003.

- 
- [59] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jezequel. A dynamic lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1) :201–219, 2003.
- [60] A.H. Nayfeh. Nonlinear transverse vibrations of beams with properties that vary along the length. *Journal of the Acoustical Society of America*, 53 :766–770, 1973.
- [61] A.H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, 1973.
- [62] A.H. Nayfeh. On the undesirable roll characteristics of ships in regular seas. *Journal of Ship Research*, 32(2) :92–100, 1988.
- [63] A.H. Nayfeh. *Nonlinear Interactions*. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [64] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [65] S.A. Nield, P.D. McFadden, and M.S. Williams. A review of time-frequency methods for structural vibration analysis. *Engineering Structures*, 25 :713–728, 2003.
- [66] J.-P. Noel, L. Renson, and G. Kerschen. Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : experimental identification and modal interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :2588–2607, 2014.
- [67] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Guillaume, and J. Leuridan. The polymax frequency-domain method : a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration*, 11(3-4) :395–409, 2004.
- [68] M. Peeters, R. Vigi  , G. S  randour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part 2 : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.
- [69] E.P. Petrov and D.J. Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *ASME Journal of Turbomachinery*, 125(2) :364–371, 2003.
- [70] C. Pierre, A.A. Ferri, and E.H. Dowell. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Transactions of the ASME*, 52 :958–964, 1985.
- [71] Polytec. Psv-500-3d scanning vibrometer datasheet. URL <http://www.polytec.com>.
- [72] Polytec. Psv-500 scanning vibrometer datasheet. URL <http://www.polytec.com>.
- [73] K. Popp, L. Panning, and W. Sextro. Vibration damping by friction forces : theory and applications. *Journal of Vibration and Control*, 9(3-4) :419–448, 2003.
- [74] O. Poudou. *Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems*. PhD Thesis, The University of Michigan, 2007.
- [75] O. Poudou and C. Pierre. Hybrid frequency time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping. *Collection of Technical Papers AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Norfolk, USA*, 1 :111–124, 2003.
- [76] L. Renson, J.-P. Noel, and G. Kerschen. Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : numerical continuation and normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 79 :1293–1309, 2015.

- 
- [77] P. Ribeiro. Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods. *Computers and Structures*, 82 :1413–1423, 2004.
- [78] R.D. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. New York : Interscience Publishers, 1957.
- [79] R. Riff and B. Baruch. Time finite element discretization of hamilton’s law of varying action. *AIAA Journal*, 22(9) :1310–1318, 1984.
- [80] A.M. Samoilenko and N.I. Ronto. *Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions*. Mir publishers, Moscow, 1979.
- [81] K.Y. Sanliturk and D.J. Ewins. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :511–523, 1996.
- [82] K.Y. Sanliturk, D.J. Ewins, and A.B. Stanbridge. Underplatform dampers for turbine blades : theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4) :919–929, 2006.
- [83] E. Sarrouy and J-J. Sinou. Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - on the use of the harmonic balance methods. In Farzad Ebrahimi, editor, *Advances in Vibration Analysis Research*, Chapter 21. INTECH, Open Access Publisher, 2011.
- [84] D.J. Segalman. Model reduction of systems with localized nonlinearities. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2 :249–266, July 2007.
- [85] W. Sextro. The calculation of the forced response of shrouded blades with friction contacts and its experimental verification. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2000*, 2000. Paper No. 2000-GT-0540.
- [86] W. Sextro. *Dynamical contact problems with friction*, volume 2. Springer, 2002.
- [87] Z. Sigrist. *Contribution à l’identification de systèmes non-linéaires en milieu bruité pour la modélisation de structures mécaniques soumises à des excitations vibratoires*. Thèse, Université de Bordeaux, 2012.
- [88] J.-J. Sinou. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 44 :1713–1732, 2009.
- [89] A.V. Srinivasan and D.G. Cutts. Dry friction damping mechanisms in engine blades. *Journal of Engineering for Power*, 105(2) :332–341, 1983.
- [90] K. Subbaraj and M.A. Dokainish. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-II. implicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1387–1401, 1989.
- [91] D. Süß and K. Willner. Investigation of a jointed friction oscillator using the multiharmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52 :73–87, 2015.
- [92] M.M. Tabaddor. *Nonlinear vibration of beam and multibeam systems*. PhD Thesis, Virginia Tech, 1996.
- [93] M.M. Tabaddor. Influence of nonlinear boundary conditions on the single-mode response of a cantilever beam. *International Journal of Solid and Structures*, 37 :4915–4931, 2000.

- 
- [94] O. Thomas. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. HDR, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [95] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :3339–3373, 2005.
- [96] O. Thomas, C. Touzé, and É. Luminais. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : Experiments on a 1 :1 :2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 49 :259–284, 2007.
- [97] C. Touzé, M. Amabili, and O. Thomas. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197 :2030–2045, 2008.
- [98] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, 2002.
- [99] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. part 2 : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :1075–1101, 2003.
- [100] C. Touzé, M. Vidrascu, and D. Chapelle. Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models. *Computational Mechanics*, 54 :567–580, 2014.
- [101] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, V.N. Pilipchuck, and A.A. Zevin. *Normal modes and localization in nonlinear systems*. John Wiley & Sons, 1996.
- [102] J. Warminski, S. Lenci, M.P. Carmtmell, G. Rega, and M. Wiercigroch. *Nonlinear dynamic phenomena in mechanics*. Springer, 2012.
- [103] S. Zucca and B.I. Epureanu. Bi-linear reduced-order models of structures with friction intermittent contacts. *Nonlinear Dynamics*, 77 :1055–1067, 2014.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur J-J. SINOÛ

et les rapports de

Monsieur G. CHEVALLIER  
Professeur - FEMTO ST - 24 chemin de l'Epitaphe - 25000 Besançon

Et de

Monsieur O. THOMAS  
Professeur - ENSAM Lille - 8 bd Louis XIV - 59800 Lille

**Monsieur CLAEYS Maxence**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 3 novembre 2015

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes

