



HAL
open science

Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes monotones de l'espace projectif complexe

Simon Schatz

► **To cite this version:**

Simon Schatz. Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes monotones de l'espace projectif complexe. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Strasbourg, 2016. Français. NNT: . tel-01359750v1

HAL Id: tel-01359750

<https://theses.hal.science/tel-01359750v1>

Submitted on 6 Sep 2016 (v1), last revised 27 Jun 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Thèse

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Simon Schatz

**Sur la topologie des sous-
variétés lagrangiennes monotones
de l'espace projectif complexe**

soutenue le 26 septembre 2016
devant la commission d'examen

Mihai Damian, directeur de thèse
Viatcheslav Kharlamov, co-directeur de thèse
Jean-François Barraud, rapporteur
Jean-Yves Welschinger, rapporteur
Sheila Sandon, examinatrice
Jean-Claude Sikorav, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



À Mamoune.

Prenez un cercle, caressez-le, il deviendra vicieux !

Eugène Ionesco

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier celui qui, tout au long de ma thèse a su, avec une grande humanité, me conseiller, me guider, m'aiguiller de ses conseils vers le résultat que tu tiens, lecteur, entre tes mains : Mihai, *mersi*. À chaque fois que j'étais perdu dans ce grand monde symplectique tu as trouvé le temps pour discuter, toujours avec patience et bienveillance, et éclairer ma piste sur ce grand chemin que peut être un doctorat en mathématique. Ma gratitude va également à mon co-directeur, Viatcheslav Kharlamov, qui a toujours laissé la porte de son bureau ouverte et quelques pistes dans un tiroir.

Je remercie Jean-François Barraud pour sa relecture attentive et ses retours précis qui sont venus améliorer l'édition présente de ce manuscrit ; merci également à Jean-Yves Welschinger d'avoir pris le temps de se pencher sur mes travaux. J'en profite aussi pour remercier le relecteur anonyme de mon article : la qualité de ce dernier a sensiblement profité de ses indications et de son exigence. Merci enfin à Sheila Sandon et Jean-Claude Sikorav d'avoir bien voulu participer à mon jury.

Bien sûr, je remercie les deux femmes de ma vie. Ma mère d'abord, présence oblige : non seulement parce que je ne serais pas là sans elle, y compris figurément, mais aussi et plus à-propos pour les heures qu'elle a passé à relire ma calleuse prose mathématique. Jeanne ensuite, qui m'a soutenu sans vaciller ces dernières années, en particulier pendant les périlleuses périodes de rédaction. Cette thèse doit beaucoup à vos déterminations réunies, et par ma voix elle vous rend ici hommage.

Dans des remerciements de thèses, il y a quelques figures obligées : c'est pourtant avec grand plaisir que je les exécute, et je profite ainsi de cet encart pour saluer Charlotte, Nassima, Arthur et Thomas qui ont partagé mon bureau, et ce sans jamais arrêter mes séances de frappe si énergiques fussent-elles.

Il y a les amis, ceux qu'on croise tous les jours dans les couloirs comme Amaury, Florian, Mohamad, Stéphane, ou Vincent et dont les discussions ont plus d'une fois illuminé tel ou tel point de math (ou de paperasse). Ceux qui tel Yvan sont partis chasser les théorèmes sous d'autres cieux. Ceux qui ne veulent pas vraiment quitter le bâtiment, n'est-ce pas Olivier et Leïla ? Et ceux qu'on voit plutôt dehors dont Martin, Florent, Louise et Simon – non, pas moi !

Merci à tous ceux qui ont avalé leur part de bières avec moi, que ce soit pour partager nos états d'âme de doctorant en math comme avec Ranine, Jérémy, Romain ou les Guillaume, de doctorant tout court comme avec Marie, Lauriane, Cécile ou Laure, ou de Strasbourgeois simplement, hein, Vianney, Vanessa, Pierre, Lucas, Thomas, Alicia, Hervé et Corinna et tout l'orchestre !

Je salue également tous les (autres) doctorants de Strasbourg qui m'ont permis souffler en pause café – non Jeanne, je n'y ai pas passé la totalité de mes

jours – et, puisque cette thèse est courte, je me permets d’en citer une petite liste (forcément) incomplète : Abdoulaye, Alexandre, Amandine, Ambroise, Antoine, Audrey, Auguste, Aurélien, Elena, Fabien, Jean-Baptiste, Jérôme, Olivier, Philippe, Romille, Valentina. . .

Merci aussi au personnel de l’UFR et de l’IRMA, qui a su faire preuve de pédagogie en particulier lorsque je devais remplir les ordres de mission lors de mes déplacements. Et ces déplacements n’auraient pas eu le même sel sans mes collègues mathématiciens que j’y ai trouvé et souvent retrouvés : Sacha, Roger, Álvaro, Jagna, Milena, Ana, Amedeo, Vinicius, et les autres, merci pour ces bons moments passés loin de Strasbourg.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Variétés symplectiques

Une variété symplectique (V, ω) est la donnée d'une variété différentielle V , de dimension (nécessairement) paire $2n$, et d'une forme différentielle ω de degré 2, fermée et non dégénérée. Ce dernier point équivaut à dire que ω^n est une forme volume, aussi V est-elle toujours orientable.

En chaque point de V , son tangent est alors un espace vectoriel symplectique, muni d'une forme bilinéaire alternée et non-dégénérée. Cet espace vectoriel symplectique est isomorphe à \mathbb{R}^{2n} ou \mathbb{C}^n muni de la forme standard $-\Im\langle \cdot, \cdot \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit hermitien usuel. Par extension, ω_0 désigne la forme différentielle sur \mathbb{R}^{2n} qui vaut $-\Im\langle \cdot, \cdot \rangle$ en chaque point. Mieux, le théorème de Darboux assure que toute structure symplectique est localement standard : autour de chaque point p de V il existe un voisinage ouvert U , un ouvert U' de \mathbb{R}^{2n} et un difféomorphisme φ de U vers U' tel que le tiré-en-arrière de ω_0 par φ vaille ω – un tel difféomorphisme est appelé symplectomorphisme.

Une particularité de la géométrie symplectique, souvent mise en avant pour l'opposer à la géométrie riemannienne, est l'impossibilité de mesurer des longueurs. En effet, une forme symplectique étant alternée, l'évaluer sur le même vecteur en chaque variable donne invariablement zéro. On peut en revanche calculer des aires : dans le plan \mathbb{R}^2 , la forme standard correspond ainsi à l'aire algébrique du parallélogramme formé par deux vecteurs. Plus généralement, on peut se demander quels espaces sont « sans étendue », et quelle peut être leur taille. La réponse à la deuxième question est que les sous-espaces *isotropes*¹ sont de dimension au plus n ; ceux de cette dimension sont dits lagrangiens.

Dans le cadre différentiel, on définit alors naturellement les sous-variétés lagrangiennes comme étant celles dont, en chaque point, l'espace tangent est lagrangien. Dans la suite nous nous intéresserons aux lagrangiennes fermées et connexes.

1. Sur lesquels la forme symplectique s'annule.

1.2 Variétés lagrangiennes de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

La question qui se pose alors est la suivante : quelles variétés (en particulier fermées) peuvent être à image lagrangienne dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$? On peut distinguer deux sous-questions en se demandant lesquelles admettent une immersion dont le tangent est toujours lagrangien, et lesquelles admettent un plongement vérifiant cette contrainte.

Cela fait bientôt 30 ans que le fameux h-principe de M. Gromov développé dans [Gro86] permet de répondre à la première question :

Théorème 1.1. *Soit L une variété de dimension n . Il existe une immersion lagrangienne de L dans \mathbb{R}^{2n} muni de sa structure symplectique standard si et seulement si $TL \otimes \mathbb{C}$ est trivialisable.*

C'est le cas par exemple des sphères en toute dimension.

Pour ce qui est des plongements lagrangiens, un deuxième résultat de M. Gromov, démontré dans [Gro85], implique entre autres que les lagrangiennes fermées de \mathbb{R}^{2n} ne peuvent être simplement connexes. Un autre résultat de rigidité topologique se trouve dans [Aud88], où M. Audin explique par exemple qu'une variété orientable ne peut avoir de plongement lagrangien dans \mathbb{R}^{2n} que si sa caractéristique d'Euler est nulle — ou ce modulo 4 dans le cas non-orientable. En particulier, le tore est la seule surface orientable candidate ; nous verrons effectivement plus bas des exemples de tores lagrangiens. Quant aux surfaces non-orientables, A. Givental avait déjà deux ans plus tôt dans [Giv86] produit des plongements pour toutes excepté la bouteille de Klein.

Dans le même article de M. Audin, on trouve au contraire un résultat positif :

Théorème 1.2. *Si L admet une immersion lagrangienne dans \mathbb{R}^{2n} , alors il existe un plongement lagrangien de $L \times S^1$ dans \mathbb{R}^{2n+2} .*

Et, autre proposition en faveur d'une certaine flexibilité, L. Polterovich a montré dans [Pol91] que :

Théorème 1.3. *Notons τ l'application renversant l'orientation sur S^{n-1} , et posons*

$$Q = [0,1] \times S^{n-1} /_{(0,p) \sim (1,\tau(p))} \quad \text{et} \quad P = [0,1] \times S^{n-1} /_{(0,p) \sim (1,p)} = S^1 \times S^{n-1}.$$

Alors pour toute variété L^n admettant une immersion lagrangienne dans \mathbb{R}^{2n} , la somme connexe de L et d'un nombre $k \in \mathbb{N}$ de copies de la bouteille de Klein Q se plonge dans \mathbb{R}^{2n} comme sous-variété lagrangienne.

Si de plus n est impair, P peut être utilisé à la place de Q .

La somme connexe ici utilisée permet de supprimer les points doubles de l'immersion lagrangienne pour en faire un plongement. En comptant finement ces points doubles, Ekholm, Eliashberg, Murphy, et Smith ont pu prouver par exemple dans [EEMS13] que :

Théorème 1.4. *Soit L une variété fermée et orientable de dimension 3. Il existe un plongement lagrangien de $L \sharp (S^1 \times S^2)$ dans \mathbb{R}^6 .*

Théorème 1.5. *Soit L une variété fermée de dimension $n > 1$ impaire qui admette une immersion lagrangienne dans \mathbb{R}^{2n} . Alors $L \sharp (S^1 \times S^2)$ ou $L \sharp (S^1 \times S^2) \sharp (S^1 \times S^2)$ admet un plongement lagrangien dans \mathbb{R}^{2n} .*

Enfin, le résultat suivant que démontre S. Nemirovski dans [Nem09] répond à la question de la bouteille de Klein standard, tout en soulignant que les restrictions topologiques vues plus haut, en particulier celle portant sur la caractéristique d'Euler, ne sont pas suffisantes :

Théorème 1.6. *La bouteille de Klein de dimension n se plonge dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ comme sous-variété lagrangienne si et seulement si n est impair.*

Ces théorèmes, en particulier les plus généraux, vont dans le sens d'une assez large flexibilité en ce qui concerne la topologie des sous-variétés lagrangiennes de \mathbb{R}^n . Nous allons voir que cette flexibilité peut être mise en défaut en ajoutant des hypothèses supplémentaires à nos sous-variétés, en particulier lorsqu'elles sont monotones.

1.3 Lagrangiennes monotones de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

Certaines lagrangiennes sont dites monotones ; leur définition est simple...

Définition 1.7. Une sous-variété lagrangienne L est dite monotone si les morphismes d'aire et de Maslov qui lui sont associés sont positivement proportionnels.

... mais demande quelques explications quant aux morphismes en question.

Ceux-ci sont définis sur le second groupe d'homotopie relative $\pi_2(\mathbb{R}^{2n}, L)$. Remarquons que comme \mathbb{R}^{2n} est contractile ses groupes d'homotopie sont tous triviaux et on a en particulier $\pi_2(\mathbb{R}^{2n}, L) \simeq \pi_1(L)$. Le premier calcule comme son nom l'indique l'aire d'un représentant :

Définition 1.8. Soit $u : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, L)$ un représentant lisse de $a \in \pi_2(\mathbb{R}^{2n}, L)$. On définit le morphisme d'aire symplectique par

$$I_\omega(a) = \int_{D^2} u^* \omega.$$

C'est pour le second qu'il est plus simple de se placer sur $\pi_1(L)$. Le long d'un lacet de L , l'indice de Maslov compte le nombre de tours qu'effectue l'espace tangent à L dans la grassmannienne lagrangienne, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de \mathbb{R}^{2n} . Par exemple pour $n = 1$, le cercle unité est une lagrangienne et la grassmannienne est formée de l'ensemble des droites. En faisant une fois le tour du cercle, son tangent revient deux fois sur lui-même : l'indice de Maslov associé est donc 2.

Définition 1.9. Soit $\gamma : S^1 \rightarrow L$ un représentant de $a \in \pi_1(L)$. On voit facilement que la grassmannienne lagrangienne s'identifie à $U(n)/O(n)$, où le carré du déterminant (complexe) est bien défini et à valeurs dans le cercle unité. Par composition, notre lacet devient une application du cercle unité vers lui-même. Son degré constitue l'indice de Maslov de a , noté $\mu_L(a)$.

Cette classe de Maslov a été initialement décrite par Arnold dans [Arn67] comme invariant d'une lagrangienne.

L'exemple le plus simple de lagrangienne monotone se construit en considérant pour chaque coordonnée complexe de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ le cercle des points de

module 1 : c'est le tore de Clifford sur \mathbb{R}^{2n} . Chacun de ces cercles borde un disque d'aire π et d'indice de Maslov 2 comme on l'a vu ci-dessus ; comme ils engendrent le groupe fondamental, on obtient bien une lagrangienne monotone.

Récemment, D. Auroux a décrit dans [Aur14] une famille infinie de tores lagrangiens de \mathbb{R}^6 qui sont monotones et symplectiquement distincts, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas les images les uns des autres par des symplectomorphismes.

Cette notion de monotonie a été très utile dans le cadre de l'homologie de Floer, que nous examinerons en détail dans la section 2.2. Mais pour revenir plus près de notre question de départ, on peut se demander si les résultats de flexibilité, même relative, obtenus dans le cas général sont encore valables dans le cas monotone. La réponse est non, comme l'indique ce théorème de M. Damian de [Dam15] :

Théorème 1.10. *Soit L une lagrangienne compacte, orientable et monotone de \mathbb{R}^{2n} . Supposons de plus que les groupes d'homologie de degré impair de son revêtement universel \tilde{L} s'annulent. Alors il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.*

Un corollaire de ce théorème est que les lagrangiennes construites à l'aide du théorème 1.3 de L. Polterovich avec plus d'une somme connexe de $S^1 \times S^{n-1}$ ne peuvent être monotones lorsque n est impair.

Dans le même article, l'énoncé suivant précise la situation topologique en dimension 3 :

Théorème 1.11. *Soit $L \subset \mathbb{R}^6$ une lagrangienne monotone fermée et orientable. Alors L est difféomorphe au produit de S^1 par une surface fermée orientable.*

À l'aune de ce résultat, M. Damian pose la question de sa généralisation : est-ce que toute lagrangienne orientable et monotone de \mathbb{R}^{2n} s'écrit comme le produit d'un cercle par une variété de dimension $n - 1$?

Nombre de Maslov On a vu précédemment la définition de l'indice de Maslov. Avant de poursuivre plus avant, citons encore quelques résultats qui dépendent d'une quantité appelée *nombre de Maslov*.

Définition 1.12. Soit L une lagrangienne. Le générateur positif de l'image de μ_L dans \mathbb{Z} est appelé nombre de Maslov de L et noté N_L .

On sait depuis [Arn67] que si la variété lagrangienne est orientable, ce nombre est pair. Un théorème de Y.-G. Oh [Oh96] assure de plus que :

Théorème 1.13. *Soit L une lagrangienne monotone de \mathbb{R}^{2n} . Son nombre de Maslov N_L vérifie $1 \leq N_L \leq n$.*

L'exemple du tore de Clifford a amené M. Audin à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 1.14. *Tout tore lagrangien de \mathbb{R}^{2n} a 2 comme nombre de Maslov.*

Dès 1990, C. Viterbo répond dans [Vit90] par oui pour $n = 2$. Sa version monotone a ensuite été prouvée par L. Buhovski dans [Buh10], puis une version généralisée a été montrée par M. Damian dans [Dam12] :

Théorème 1.15. *Sous les hypothèses du théorème 1.10, le nombre de Maslov de L est 2.*

Plus récemment, K. Cieliebak et K. Mohnke ont formulé dans [CM14] une preuve de la conjecture d'Audin originale.

1.4 Variétés lagrangiennes de $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ peut être doté d'une forme symplectique dite de Fubini-Study ; notons-la ω_{FS} . C'est la forme dont le tiré en arrière par la projection $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ est égal à la restriction de la forme standard ω_0 sur S^{2n+1} .

Dans $\mathbb{C}P^n$, comme en fait dans toute autre variété symplectique, on retrouve tout d'abord les lagrangiennes de \mathbb{R}^{2n} décrites antérieurement. En effet, le flot du champ radial $X(x) = -x$ préserve le caractère lagrangien et fait ainsi rentrer toute lagrangienne de \mathbb{R}^{2n} dans un petit ouvert. Or, grâce au théorème de Darboux, toute variété symplectique est localement un tel ouvert : pour cette raison, les lagrangiennes de \mathbb{R}^{2n} sont parfois dites locales ; en tout cas elles apparaissent ici.

Ce ne sont pas les seules : on voit aisément que l'application de conjugaison $\gamma : [z_0 : z_1 \dots : z_n] \mapsto [\bar{z}_0 : \bar{z}_1 \dots : \bar{z}_n]$ vérifie $\gamma^* \omega_{FS} = -\omega_{FS}$. En particulier l'ensemble de ses points fixes, $\mathbb{R}P^n$, est une sous-variété isotrope. Comme elle est de dimension n , on a bien trouvé une lagrangienne. Le résultat de M. Gromov énoncé dans [Gro85] et déjà évoqué plus haut assure que toute lagrangienne locale L vérifie $H^1(L; \mathbb{R}) \neq 0$. Or ce n'est pas vrai pour $\mathbb{R}P^n$, et il s'agit donc d'une lagrangienne particulière à $\mathbb{C}P^n$, qui sort de tout voisinage de Darboux : une telle lagrangienne est parfois dite globale.

Plusieurs résultats de rigidité topologique ont été montrés sur les lagrangiennes de $\mathbb{C}P^n$. On trouve par exemple dans [Bir06] le théorème suivant de P. Biran :

Théorème 1.16. *Soit L une lagrangienne de $\mathbb{C}P^n$ vérifiant $2H_1(L; \mathbb{Z}) = 0$, alors $H^*(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en tant qu'espaces gradués.*

H. Iriyeh y fait écho dans [Iri14] avec le théorème suivant :

Théorème 1.17. *Soit L une lagrangienne de $\mathbb{C}P^n$ vérifiant $3H_1(L; \mathbb{Z}) = 0$, alors $3 \mid n + 1$, $n \geq 5$, L est orientable et en tant qu'espace gradué $H^*(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ vaut :*

- $H^*\left(\frac{SU(3)}{SO(3)_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ si $n = 5$;
- $H^*\left(\frac{SU(3)}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ si $n = 8$.

Dans la même veine, P. Seidel montre dans le théorème 3.1 de [Sei00] que :

Théorème 1.18. *Pour toute lagrangienne L de $\mathbb{C}P^n$,*

1. $H^1(L; \mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}) \cong 0$,
2. $H^1(L; \mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ pour $g > 1$,
3. si $H^1(L; \mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $H^*(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en tant qu'espaces gradués.

On a également ce résultat de M. Damian dans [Dam12] :

Théorème 1.19. *Soit L une lagrangienne de $\mathbb{C}P^n$ vérifiant $2H_1(L; \mathbb{Z}) = 0$, alors $\pi_1(L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et son revêtement universel \tilde{L} est homéomorphe à S^n .*

Les deux premiers énoncés ont amené P. Biran et O. Cornea à conjecturer dans [BC09] que toute lagrangienne de $L \subset \mathbb{C}P^n$ dont le premier groupe d'homologie entière vérifie $2H_1(L; \mathbb{Z}) = 0$ est difféomorphe à $\mathbb{R}P^n$. Cette dernière hypothèse est assurément nécessaire : R. Chiang construit par exemple dans [Chi04] une lagrangienne de $\mathbb{C}P^3$ ayant la même cohomologie que $\mathbb{R}P^3$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais sans pour autant avoir la même homologie ; elle ne vérifie par contre pas les hypothèses en (co)homologie des théorèmes ci-dessus.

Enfin, le théorème 1.10 de M. Damian et le premier résultat présenté plus bas font écho à l'affirmation suivante de K. Fukaya que l'on peut lire dans [Fuk05] :

Affirmation 1.20. Soit L^n une variété d'Eilenberg-MacLane de type $K(\pi, 1)$ et V une variété symplectique. Supposons que L soit une lagrangienne relativement spinorielle² de M et qu'il existe un difféomorphisme hamiltonien³ qui disjoint L de son image ou que $V = \mathbb{C}P^n$. Alors il existe un élément $a \in \pi_2(V, L)$ d'aire symplectique positive et d'indice de Maslov égal à 2 ; de plus son bord $\partial a \in \pi_1(L)$ est un élément non-trivial dont le centralisateur est d'indice fini.

1.5 Lagrangiennes monotones de $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$

Nous avons vu en 1.3 ce qu'est une lagrangienne monotone de \mathbb{R}^{2n} . Dans le cas général, la définition est la même et celle du morphisme d'aire s'étend sans problème. Pour ce qui est du morphisme de Maslov, il nous faut par contre développer un peu. Le paragraphe qui suit est valable non seulement pour $\mathbb{C}P^n$ mais aussi pour n'importe quelle variété symplectique.

Soit $u : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathbb{C}P^n, L)$ un représentant lisse de $a \in \pi_2(\mathbb{C}P^n, L)$. On peut tirer en arrière au-dessus du disque le fibré tangent à $\mathbb{C}P^n$ muni de sa forme symplectique, et l'on obtient ainsi un fibré associant à chaque point un espace vectoriel symplectique. Comme le disque est contractile, ce fibré est trivialisable. Le long du cercle, le tiré en arrière de TL donne alors, dans cette trivialisatation, un lacet dans la grassmannienne lagrangienne. Il suffit enfin de calculer l'indice de Maslov associé à ce lacet.

L'exemple classique de lagrangienne monotone de $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ est le tore de Clifford ; on peut le définir par exemple comme $T^n = \{[z_0 : z_1 \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid \forall i, 0 \leq i \leq n, |z_i| = 1\}$. Un autre exemple de tore monotone a été décrit par F. Schlenk et Y. Chekanov dans [CS10], lequel a ensuite été étudié en détail par A. Gadbled dans [Gad13]. Plus récemment, R. Vianna a construit dans [Via14] une famille infinie de tores monotones lagrangiens qui, bien qu'ayant le même nombre de Maslov, sont distincts du point de vue symplectique – précisément, aucune isotopie hamiltonienne ne les lie.

En outre, $\mathbb{R}P^n$ que nous avons vu plus haut est aussi monotone. Plus généralement, comme nous le verrons à travers la proposition 2.11, toute lagrangienne de $\mathbb{C}P^n$ dont le premier groupe d'homologie est fini est monotone.

2. Voir la définition 3.1 dans [FOOO09].

3. Un type particulier de symplectomorphisme : c'est le flot au temps 1 du gradient symplectique d'une fonction, traditionnellement appelée hamiltonien, sur V .

Nombre de Maslov En mariant le théorème 1.13 à la construction de P. Biran qui sera présentée dans la section 3 on obtient l'inégalité suivante, déjà remarquée par exemple dans [Iri14] :

Proposition 1.21. *Soit L une lagrangienne monotone de $\mathbb{C}P^n$. Son nombre de Maslov N_L vérifie $1 \leq N_L \leq n + 1$.*

Pour le tore de Clifford ce nombre est 2, donc minimal parmi les lagrangiennes orientables, tandis que $N_{\mathbb{R}P^n} = n + 1$ ce qui montre que l'inégalité supérieure est aussi optimale.

Ce ne sont par ailleurs pas les seuls exemples de lagrangiennes monotones ; certaines ont été construites qui possèdent des nombres de Maslov intermédiaires. C'est le cas de celle introduite par R. Chiang dans [Chi04] ; cet exemple est étendu et complété par A. Amarzaya et Y. Ohnita dans [AO03] en plusieurs familles, qui généralisent les topologies présentées dans le théorème 1.17.

Résultats principaux Nous présentons dans ce mémoire deux autres théorèmes ayant trait à la topologie des sous-variétés monotones de $\mathbb{C}P^n$. Le lecteur anglophone pourra en trouver la substance dans [Sch15]. Le premier évoque les résultats du théorème 1.10 sur \mathbb{R}^{2n} , dont les conclusions restent valables sur toute variété symplectique où les lagrangiennes sont déplaçables par une isotopie hamiltonienne. Nous l'étendons à $\mathbb{C}P^n$, pour lequel les travaux de P. Biran présentés dans [Bir06] vont au contraire dans le sens d'un nombre minimal d'intersections entre deux lagrangiennes globales.

Théorème 1.22. *Soit L une lagrangienne fermée, orientable et monotone de $\mathbb{C}P^n$. Supposons de plus que les groupes d'homologie de degré impair de son revêtement universel \tilde{L} s'annulent. Alors le nombre de Maslov de L est $N_L = 2$, et il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.*

Notons que l'exemple de $\mathbb{R}P^n$ diminue sensiblement l'espoir d'une généralisation beaucoup plus poussée : hormis le cas $n = 1$, où elle coïncide à un difféomorphisme hamiltonien près avec le tore de Clifford, $\mathbb{R}P^n$ ne vérifie pas la conclusion $N_L = 2$. Cependant, si $\mathbb{R}P^n$ est toujours compacte et monotone, elle est orientable exactement pour n impair, tandis que son revêtement universel est la sphère qui vérifie l'hypothèse en homologie exactement dans le cas n pair.

Corollaire 1.23. *Soit $(L_i)_{i \in I}$ une collection finie d'au moins deux variétés compactes, orientables, de dimension $2k+1$ dont tous les groupes d'homologie de degrés impairs de leurs revêtements universels s'annulent. Alors il n'existe pas de plongement lagrangien monotone de la somme connexe $\sharp_{i \in I} L_i$ dans $\mathbb{C}P^{2k+1}$.*

Corollaire 1.24. *Soit $p > 1$, $k > 0$. Il n'existe pas de plongement lagrangien monotone de la somme connexe $(S^1 \times S^{2k})^{\sharp p}$ dans $\mathbb{C}P^{2k+1}$.*

Le théorème 1.22 se généralise à l'énoncé suivant sur les variétés symplectiques entières, pour lesquelles la classe de la forme symplectique en cohomologie (réelle) de De Rahm se relève en une classe de cohomologie entière.

Théorème 1.25. *Soit Σ une variété symplectique dont le nombre de Chern est au moins 2 qui est une hypersurface kählérienne d'une plus grande variété de*

Kähler M , entière, telle que $[\Sigma] \in H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit duale au sens de Poincaré de $[\omega_M] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ et que $M \setminus \Sigma$ soit un domaine de Weinstein sous-critique. Soit L une lagrangienne fermée, orientable et monotone de Σ .

Si l'une des conditions suivantes :

1. L est un espace asphérique, c'est-à-dire d'Eilenberg-MacLane de type $K(\pi, 1)$,
2. $H^2(L, \mathbb{Z}) = 0$ ou $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$ est engendré par $[\omega_\Sigma]$; et les groupes d'homologie de degré impair du revêtement universel \tilde{L} s'annulent,

est vérifiée, alors le nombre de Maslov de L est $N_L = 2$, et il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.

Cette contrainte sur le groupe fondamental permet de préciser quelque peu les topologies possibles en dimension 3 :

Théorème 1.26. *Soit L une variété de dimension 3 fermée, orientable et de groupe fondamental infini. Si L est une lagrangienne monotone d'une variété Σ telle que dans le théorème précédent, alors L est un fibré de Seifert indécomposable.*

Remarque 1.27. On peut alternativement formuler cette conclusion en disant que L est un fibré de Seifert irréductible ou $S^1 \times S^2$.

1.6 Plan du mémoire

Dans une première partie, nous présenterons en détail les outils qui serviront à la démonstration des résultats présentés précédemment.

Tout d'abord, le chapitre 2 sera dédié à l'homologie de Floer relevée et ses applications, issues dans les deux cas des travaux de M. Damian [Dam10, Dam12, Dam15]. On rappellera dans la section 2.2 la construction de l'homologie de Floer « usuelle », puis la section 2.3 viendra décrire sa version relevée. Dans les deux cas, on s'attardera particulièrement sur les conditions sous lesquelles ces homologies sont bien définies. En particulier, la sous-section 2.3.2 contiendra les applications utiles à la preuve des théorèmes principaux.

Ensuite, le chapitre 3 sera consacré à une autre construction, celle du fibré symplectique standard, ainsi qu'à certaines de ses propriétés ; celui-ci s'appuiera particulièrement sur les travaux de P. Biran [Bir01, Bir06]. À une lagrangienne monotone L de $\mathbb{C}P^n$ ou plus généralement d'une hypersurface kählérienne, on associera un fibré en cercles Γ_L qui sera lui-même une lagrangienne monotone de \mathbb{R}^{2n} ou plus généralement d'une variété de Weinstein. La section 3.1 se concentrera sur la construction du fibré symplectique, tandis que la section 3.2 traitera de Γ_L et de ses propriétés.

La seconde partie se concentrera sur la preuve des énoncés précédemment exposés.

Le chapitre 4 sera dédié à la preuve du théorème 4.1 : « l'homologie de Floer relevée est définie sur le revêtement universel de L si et seulement si elle l'est sur celui de Γ_L ». Nous suivrons à cette occasion plusieurs raisonnements présentés par P. Biran et M. Khanevsky dans [BK13]. On présentera ainsi dans la section 4.1 la procédure « d'étirement du cou ». La section 4.2 traitera de la question de régularité de la structure presque-complexe en jeu. La section 4.3

établira l'élément crucial de la preuve, qui consiste en une bijection d'espaces de disques pseudo holomorphes relatifs à bords respectivement dans L et Γ_L .

Dans le chapitre 5 on trouvera les applications du théorème précédemment démontré, avec une attention toute particulière portée, dans la section 5.2, à l'un des éléments faisant la particularité du cas $\mathbb{C}P^n$: Γ_L y est forcément trivial en tant que fibré en cercles au-dessus de L . Dans la section 5.4 on expliquera comment cette condition topologique permet d'éliminer de nombreuses sommes connexes. Enfin, la section 5.5 se penchera plus précisément sur le cas de la dimension 3.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Variétés symplectiques	5
1.2	Variétés lagrangiennes de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$	6
1.3	Lagrangiennes monotones de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$	7
1.4	Variétés lagrangiennes de $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$	9
1.5	Lagrangiennes monotones de $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$	10
1.6	Plan du mémoire	12
I	Contexte symplectique	16
2	Homologie de Floer relevée	17
2.1	Rappels sur la monotonie	17
2.2	Homologie de Floer lagrangienne	19
2.2.1	Présentation générale	19
2.2.2	Conditions d'existence	20
2.3	Homologie de Floer relevée	23
2.3.1	Présentation	23
2.3.2	Application	24
3	Fibré symplectique standard et fibration lagrangienne	26
3.1	Fibré symplectique standard	26
3.2	La fibration lagrangienne en cercles	29
II	Preuves et corollaires	31
4	Sur l'homologie de Floer relevée pour L et Γ_L	32
4.1	Étirement du cou	33
4.1.1	Préliminaires hyperboliques	34
4.1.2	Preuve de la proposition 4.4	36
4.2	Régularité de la structure presque-complexe	40
4.3	Bijection entre les espaces de modules	42
4.4	Conclusion	43
5	Applications	45
5.1	Théorème principal dans le cas d'un $K(\pi, 1)$	45
5.2	Sur le revêtement universel de Γ_L	46
5.3	Lagrangienne dans un produit $\mathbb{C}P^n \times V$	47

5.4	Cas des sommes connexes	47
5.5	Cas de la dimension 3	49
5.5.1	Primalité	49
5.5.2	Cas sphérique	50
5.5.3	Cas réductible	50
5.5.4	Cas asphérique	51
5.6	Conjectures	51

Première partie
Contexte symplectique

Chapitre 2

Homologie de Floer relevée

Le but de ce chapitre est d'expliquer l'origine du théorème suivant de M. Damian, prouvé dans [Dam15] :

Théorème 2.1. *Soit L une lagrangienne compacte, orientable, monotone et déplaçable. Supposons de plus que les groupes d'homologie de degré impair de son revêtement universel s'annulent. Alors il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le sous-groupe des commutateurs est d'indice fini.*

L'argument principal repose sur l'homologie de Floer relevée, dont on trouve une description plus développée dans [Dam10]. Le lecteur intéressé par la construction détaillée de l'homologie de Floer classique pourra se reporter au livre de M. Audin et M. Damian [AD12].

2.1 Rappels sur la monotonie

Structures complexes et presque complexes Tout part de la remarque que le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^{2n} , qui n'est autre que la partie réelle du produit hermitien, peut s'écrire comme $\omega_0(\cdot, i\cdot)$. Plus généralement, cette relation entre structures symplectique, complexe et riemannienne définit une variété de Kähler : c'est une variété complexe qui possède une forme symplectique ω compatible avec sa structure complexe J , au sens où $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne et que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$. Alors, $h = \omega(\cdot, J\cdot) - i\omega$ est une structure hermitienne.

Lorsque la variété symplectique n'est pas complexe, elle peut néanmoins accueillir une structure presque complexe J , c'est-à-dire une section du fibré des endomorphismes du fibré tangent dont le carré est $-\text{Id}$. Celle-ci est dite compatible avec ω sous les mêmes conditions que ci-dessus.

Une manière de définir l'holomorphie d'une application entre deux variétés complexes est d'exiger que sa différentielle commute avec les structures complexes J , donc que l'on ait $du \circ J = J \circ du$. De même, si une structure presque complexe J_0 est définie au départ d'une application différentielle, et une autre J_1 à l'arrivée, on dira qu'elle est J_0 - J_1 -holomorphe si $du \circ J_0 = J_1 \circ du$; lorsque les structures en jeu sont claires, elle sera plus succinctement désignée par pseudo-holomorphe.

Remarque 2.2. Soit en particulier u une application pseudo-holomorphe d'une surface de Riemann (S, j) vers une variété V munie d'une forme symplectique ω et d'une structure presque complexe compatible J . Si (s, t) désignent des coordonnées locales, $(\partial/\partial s, j \cdot \partial/\partial s)$ forme une base de l'espace tangent à S . En outre, $du(j \cdot \partial/\partial s) = J du(\partial/\partial s)$ donc $u^*\omega(\partial/\partial s, j \cdot \partial/\partial s) = \omega(du(\partial/\partial s), J \cdot du(\partial/\partial s)) = \|du(\partial/\partial s)\|^2$. Cette quantité est toujours positive, et ce strictement en tout point où du est non nulle.

Monotonie On a vu dans l'introduction la définition d'une lagrangienne monotone. En réalité, cette notion de *monotonie lagrangienne* est liée à celle de *monotonie symplectique*, dont la définition est un calque de la première :

Définition 2.3. Une variété symplectique V est dite monotone si les morphismes d'aire et de Chern qui lui sont associés sont positivement proportionnels.

Ces deux morphismes sont cette fois définis sur le second groupe d'homotopie standard de V . Le premier calcule toujours l'aire d'un représentant :

Définition 2.4. Soit $u : S^2 \rightarrow V$ un représentant lisse de $a \in \pi_2(V)$. On définit le morphisme d'aire symplectique par

$$I_\omega(a) = \int_{S^2} u^*\omega.$$

Remarque 2.5. En conséquence de la remarque 2.2 précédente, lorsque la structure presque complexe est compatible toute courbe pseudo-holomorphe est d'aire positive, et ce strictement si elle n'est pas constante.

Encore une fois c'est le deuxième qui pose problème. Soit J une structure presque complexe compatible avec ω . Muni de cette structure, le fibré tangent de V devient un fibré principal dont le groupe structural est le groupe unitaire; ainsi, sa classe de Chern est bien définie. Comme l'ensemble des telles structures presque complexes est contractile, les formes ainsi définies ne dépendent pas du choix de J .

Définition 2.6. Le morphisme de Chern est donné par l'intégration de la première classe de Chern le long d'un représentant d'un élément de $\pi_2(V)$. Comme la classe elle-même, on le note $c_1(V)$.

Remarque 2.7. Ce morphisme est à valeurs dans \mathbb{Z} puisque la classe de Chern est entière.

Définition 2.8. Le générateur positif de l'image de $c_1(V)$ dans \mathbb{Z} est appelé nombre de Chern de V et noté N_V .

Le lien entre les notions de monotonie symplectique et lagrangienne ne tient pas qu'à l'analogie de leur définition, mais plus concrètement à cette proposition de Y-G. Oh dans [Oh93] :

Proposition 2.9. Notons φ l'application naturelle $\pi_2(V) \rightarrow \pi_2(V, L)$. Pour tout $A \in \pi_2(V)$, $\mu_L(\varphi(A)) = 2c_1(V) \cdot A$.

Une conséquence immédiate est que :

Corollaire 2.10. *Si une variété symplectique V admet une sous-variété lagrangienne monotone L , alors V est elle-même monotone.*

En s'inspirant de [Bir06] on trouve, par exemple dans [Gad08], que :

Corollaire 2.11. *Soit L une lagrangienne d'une variété symplectique monotone (V, ω) . Si $\pi_1(L)$ est de q -torsion pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$, alors L est monotone et $2N_V \mid qN_L$.*

Exemple 2.12. On a vu que sur \mathbb{R}^{2n} la forme symplectique est exacte, ce qui implique que le morphisme d'aire est nul. Comme le deuxième groupe d'homotopie est de toute façon trivial, le morphisme de Chern est nul également, et la variété est monotone.

Exemple 2.13. Le deuxième groupe de cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ est quant à lui engendré par la forme symplectique, les deux morphismes sont donc nécessairement liés. Vérifions qu'ils le sont positivement. Le plongement de $\mathbb{C}P^1$ suivant $v : [z : w] \mapsto [z : w : 0 \dots 0]$ engendre $\pi_2(\mathbb{C}P^n)$. Il est clairement holomorphe et d'après la remarque 2.5, son aire est positive. Grâce au théorème 14.10 de [MS74], on calcule que $c_1(\mathbb{C}P^n).v = n + 1$.

2.2 Homologie de Floer lagrangienne

2.2.1 Présentation générale

Soit L une sous-variété lagrangienne (compacte) de (V, ω) . On fixe un diffeomorphisme hamiltonien ϕ , et on considère l'image de L par ϕ , notée $\phi(L)$. L'intersection de L et de $\phi(L)$ peut être supposée transverse de manière générique. Ainsi, elle est composée de points isolés, et ceux-ci sont les générateurs sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du complexe de Floer associé à ϕ . Entre ces points on définit les bandes de Floer, des demi-cylindres pseudo-holomorphes s'appuyant d'un côté sur L , de l'autre sur $\phi(L)$, et convergeant aux infinis vers l'un ou l'autre des générateurs du complexe. Précisément, on considère les cylindres pseudo-holomorphes simples

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} + i[0, 1] &\longrightarrow V \\ (s + it) &\longmapsto v(s, t) \end{aligned}$$

tels que les $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} v(s, t)$ appartiennent à $L \cap \phi(L)$, $v(\mathbb{R}, 0)$ est incluse dans L et $v(\mathbb{R}, 1)$ dans $\phi(L)$. *Simple* signifie ici que si un revêtement ramifié (complexe) ϕ de $\mathbb{R} + i[0, 1]$ factorise u , le degré de ϕ est 1. Comme c'est le cas pour les trajectoires de gradient en théorie de Morse, \mathbb{R} agit par translation sur la première coordonnée, et l'on va considérer en fait l'espace des bandes de Floer quotienté par cette action. Celui des bandes reliant les générateurs x et y sera noté $\mathcal{L}(x, y)$, et l'on notera éventuellement sa dimension en exposant.

Parmi ces bandes, on compte celles qui sont isolées pour définir la différentielle :

$$\partial x = \sum_{y \in L \cap \phi(L)} n_2(x, y)y$$

où $n_2(x, y)$ désigne le nombre de bandes isolées reliant x à y modulo 2, c'est-à-dire le cardinal, modulo 2, de $\mathcal{L}^0(x, y)$.

De manière encore une fois analogue à l'homologie de Morse, le caractère bien défini de $n_2(x, y)$ est dû à la compacité des espaces de trajectoires considérés, et la relation $\partial^2 = 0$ s'obtient en compactifiant les espaces de dimension 1. Ainsi, $\mathcal{L}^1(x, y)$ sera tout de même d'une variété (ouverte), dont le bord de la compactification s'identifie aux éléments de $\mathcal{L}^0(x, z) \times \mathcal{L}^0(z, y)$ qui sont autant de trajectoires brisées joignant x à y .

L'homologie construite ne dépend alors pas de ϕ ni de la structure presque-complexe choisie pour définir les bandes. Pour le montrer, on construit entre deux couples (ϕ, J) une homotopie générique, laquelle détermine un morphisme entre les complexes de Floer qui induit un isomorphisme en homologie.

Les travaux [Oh96] de Y-G. Oh permettent d'être plus précis : si dans un voisinage de Weinstein $U(L)$ autour de L on définit comme hamiltonien une fonction de Morse sur L composée à droite par la projection donnée par $U(L)$, et que la structure presque-complexe est bien choisie, alors le complexe de Floer est exactement le complexe de Morse. De plus, les bandes de Floer qui restent dans $U(L)$ s'appuient, dans L , sur les trajectoires de gradient, et sont isolées si et seulement si la trajectoire de gradient correspondante l'est, si bien que ces bandes engendrent la différentielle de Morse. Quant à celles qui sortent du voisinage de Weinstein, elles sont de plus grande énergie et font davantage varier la graduation. Plus précisément, la différentielle de Floer se décompose en la somme :

$$\partial = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 \dots \quad (2.1)$$

où ∂_0 est la différentielle de Morse et les ∂_k sont des applications diminuant la graduation de $1 - kN_L$.

2.2.2 Conditions d'existence

Comme nous l'avons vu plus haut, la condition essentielle à l'existence de l'homologie de Floer est que les espaces $\mathcal{L}(x, y)$ soient des variétés, compactes, et que le bord de celles de dimension 1 soit constitué des trajectoires brisées. Examinons chacun de ces trois points.

Les travaux d'A. Floer [Flo88, Flo89] donnent la réponse à la première question : pour un choix générique¹ du difféomorphisme hamiltonien ϕ et de la structure presque complexe, les espaces de cylindres sont des variétés différentielles ; leur dimension au point $[v]$ est $\mu(v) - 1$ où μ désigne l'indice de Viterbo-Maslov. Ce dernier a été construit par C. Viterbo dans [Vit87] de manière similaire à l'indice de Maslov que nous avons déjà vu en 1.5 : puisqu'une bande est contractile – c'est topologiquement un disque – il s'agit de définir le long de son bord un lacet de tangents lagrangiens. Pour cela, on suit d'abord la trace $s \mapsto v(s, 0)$ le long de L en prenant en chaque point le tangent de L , puis on le complète en suivant $s \mapsto v(s, 1)$ le long de $\phi(L)$ mais en prenant cette fois des plans lagrangiens transverses à $\phi(L)$. La variété ouverte ainsi obtenue se prolonge en une variété à bord à l'aide du procédé de « recollement » (gluing), dont on peut trouver l'étude dans les travaux de Y-G. Oh [Oh93] ou, de manière plus détaillée, dans le livre de M. Audin et M. Damian [AD12].

Le deuxième point, la compacité, est traité par les travaux de M. Gromov sur la compacité des espaces de courbes simples pseudo-holomorphes, en particulier dans [Gro85]. De ceux-ci il découle que les obstructions à la compacité

1. Nous reviendrons plus précisément sur cette notion dans la section 4.2.

apparaissent lorsqu’une suite de trajectoires tend – dans un sens que nous expliciterons dans la sous-section 4.1.1 – vers la concaténation de trajectoires avec des courbes pseudo-holomorphes, sphères ou disques à bord lagrangien. Cependant, la somme des indices de Viterbo-Maslov et de Maslov (à l’aune de la proposition 2.9 dans le cas des sphères) est alors conservée. En outre, toutes ces courbes pseudo-holomorphes ont nécessairement une aire positive, donc dans le contexte monotone où nous sommes, des indices de Maslov également positifs, et un multiple de N_L par définition de ce dernier. Puisque nous ne nous intéressons qu’aux bandes dont l’indice est 1 ou 2, ces disques ou sphères ne peuvent apparaître dès lors que $N_L \geq 3$.

Les mêmes travaux de M. Gromov assurent que le bord de $\mathcal{L}^1(x, y)$ est bien formé de trajectoires brisées dans le cas $N_L \geq 3$, et permettent également de préciser le cas $N_L = 2$. Remarquons que dans le cas qui nous intéresse, celui d’une lagrangienne monotone orientée, et comme nous l’avons vu dans l’introduction, V. Arnold a montré dans [Arn67] que c’est sa seule valeur strictement inférieure à 3. Dans ce cas, rien n’exclut que le bord d’un des espaces de trajectoires $\mathcal{L}^1(x, y)$ soit un disque à bord lagrangien : c’est d’ailleurs ce qui se passe dans le cas le plus élémentaire, c’est-à-dire celui d’un cercle lagrangien dans \mathbb{C} , déplacé par une petite translation de sorte que son image le coupe en deux points. Notons ceux-ci x et y , comme sur la figure 2.1 ; ils sont reliés par les trajectoires suivantes : u et v de x vers y et w de y vers x .

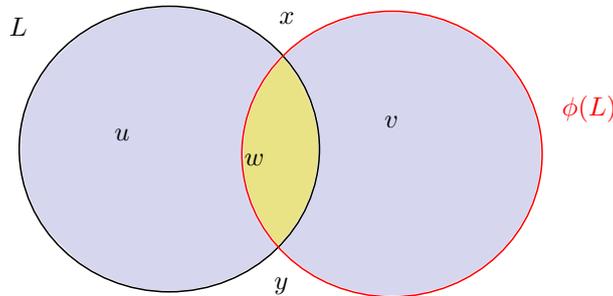


FIGURE 2.1 – Les générateurs x et y du complexe de Floer et les éléments de $\mathcal{L}^0(x, y)$ et de $\mathcal{L}^0(y, x)$ pour L le cercle lagrangien dans le plan.

On constate donc que la différentielle de x est nulle², et puisque x est aussi

2. Rappelons que l’homologie est à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

l'image de y , le carré de la différentielle est identiquement nul. Que s'est-il passé ? Il faut déjà considérer précisément dans quels espaces \mathcal{L} les disques peuvent apparaître. Ceux-ci ont un indice de Maslov correspondant à tout ce qui est « disponible », comme il n'en reste plus pour une éventuelle trajectoire, cette dernière est constante : un disque n'apparaîtra que dans le bord de $\mathcal{L}^1(x, x)$.

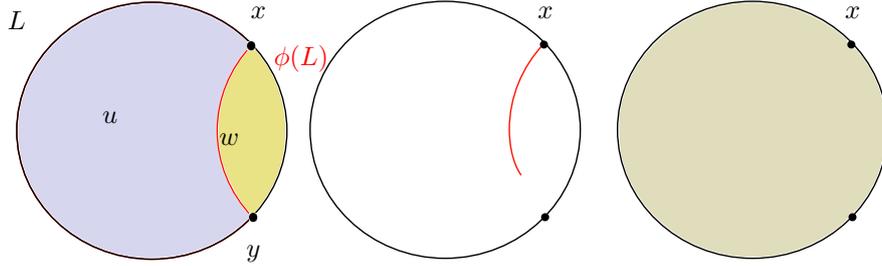


FIGURE 2.2 – Une composante connexe de $\mathcal{L}^1(x, x)$ avec comme bord une trajectoire brisée à gauche et un disque à droite.

Ici, il y a quand même un nombre pair de trajectoires brisées reliant x à lui-même, chacune étant un des bords d'une composante connexe de $\mathcal{L}^1(x, x)$, l'autre bord étant un disque. Plus généralement, comme les bords (en nombre pair) de $\mathcal{L}^1(x, x)$ se répartissent entre trajectoires brisées et disques de Maslov 2, il suffit que ces derniers soient en nombre pair pour que les trajectoires brisées reliant x à x le soient aussi, et que l'homologie de Floer soit bien définie.

Notons \mathcal{D} l'ensemble des disques J -holomorphes simples à bord lagrangien de Maslov 2. Les résultats de transversalité énoncés par D. McDuff et D. Salamon dans [MS04] assurent que, pour une structure presque complexe J générique, il s'agit d'une variété de dimension $n + 2$ dès lors que les disques de \mathcal{D} sont simples. C'est en effet le cas pour L monotone, comme l'ont montré D. Kwon et Y-G. Oh dans [KO00, KO98] et L. Lazzarini [Laz]. Ces arguments sont également présentés rassemblés dans [BC07] par P. Biran et O. Cornea.

Le même argument que nous avons déjà présenté pour expliquer la compactification des espaces $\mathcal{L}^1(x, y)$ donne ici la compacité tel quel de \mathcal{D} : tous ces disques ont par monotonie la même aire symplectique, donc les résultats de [Gro85] assurent que les valeurs d'adhérence d'une suite dans \mathcal{D} sont constituées de disques ou de sphères de Maslov 2, et ceux-ci sont bien des éléments de \mathcal{D} .

Posons alors

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2) = \mathcal{D} \times S^1 / PSL_2(\mathbb{R})$$

où l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$h \cdot (u, p) = (u \circ h, h^{-1}(p)).$$

On peut alors considérer l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{ev} : \mathcal{M} &\longrightarrow L \\ [u, p] &\longmapsto u(p) \end{aligned} \tag{2.2}$$

définie entre deux variétés de même dimension n . Son degré modulo 2 est donc bien défini : il y a soit un nombre pair, soit un nombre impair de disques qui passent en tout point générique.

Dans [Oh96], Y.-G. Oh démontre que ce degré est le même pour L et pour son image par une isotopie hamiltonienne générique. En particulier l'homologie de Floer est bien définie.

2.3 Homologie de Floer relevée

2.3.1 Présentation

Soit $\bar{L} \rightarrow L$ un revêtement (connexe) de L : on voudrait utiliser la construction précédente pour construire une homologie sur \bar{L} . Des générateurs naturels sont les relevés des générateurs du complexe de Floer classique, qui sont les points d'intersections $L \cap \phi(L)$. Pour la différentielle, on aimerait relever les bandes pseudo-holomorphes mais cela signifierait construire un revêtement compatible de la variété symplectique, ce qui n'a pas de raison d'exister. Au lieu de cela, on considère seulement les empreintes que celles-ci laissent sur L : la différentielle du complexe relevé est alors obtenue en comptant le nombre de trajectoires relevées. Pour l'écrire autrement, et en notant $\bar{z} \in \bar{L}$ un point relevant $z \in L$, on a :

$$\partial \bar{x} = \sum_{y \in L \cap \phi(L)} n_2(\bar{x}, \bar{y}) \bar{y}$$

où $n_2(\bar{x}, \bar{y})$ désigne, modulo 2, le nombre de bandes de $\mathcal{L}^0(x, y)$ dont l'empreinte sur L se relève en un chemin de \bar{x} à \bar{y} .

Comme dans la section précédente, et pour les mêmes raisons, cette homologie est bien définie pour $N_L > 2$. Dans le cas $N_L = 2$, le raisonnement tient jusqu'au tout dernier paragraphe : en effet, les disques bordés par $\phi(L)$ correspondent automatiquement à une trajectoire (nécessairement un lacet, puisqu'elle s'appuie sur $\mathcal{L}^1(x, x)$) qui est contractile, tandis que ce n'est pas toujours le cas pour les disques bordant L .

Remarque 2.14. Soient (u, p) et (v, q) deux représentant de $\delta \in \mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2)$; notons $x = \text{ev}(\delta)$ et $h \in PSL_2(\mathbb{R})$ tels que $(u, p) = h \cdot (v, q)$. Les bords ∂u et ∂v respectivement de u et v sont des lacets de L naturellement basés en x . Comme $PSL_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, il existe dans celui-ci un chemin de l'identité vers h , qui induit une homotopie – fixant x – de ∂v vers ∂u . Par conséquent ∂ induit ainsi une application $\mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2) \rightarrow \pi_1(L, x)$, que nous noterons également ∂ .

Ainsi, les images correspondantes par la différentielle ne seront pas les mêmes pour certains revêtements. Voyons cela à travers notre précédent exemple, pour le revêtement universel :

En effet, l'image par la différentielle d'un relevé \tilde{x} de x est ici $\tilde{x} + g \cdot \tilde{x}$ où g désigne le générateur positif de $\pi_1(L)$; l'image d'un relevé \tilde{y} de y est le relevé

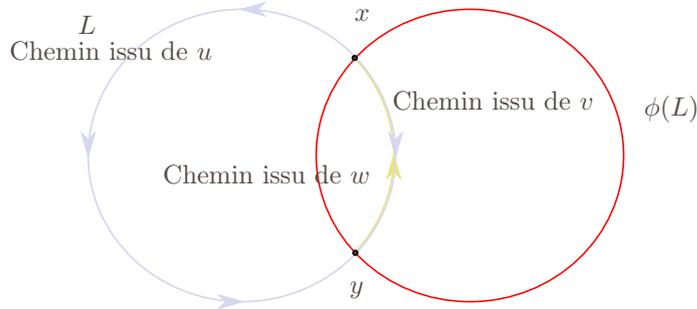


FIGURE 2.3 – Les chemins issus de $\mathcal{L}^0(x, y)$ et de $\mathcal{L}^0(y, x)$, dont le décompte donne la différentielle du complexe de Floer relevé, pour le cercle dans le plan.

de x qui suit immédiatement \tilde{y} . Clairement, le carré de la différentielle n'est pas nul.

Cependant, en restreignant l'espace \mathcal{M} aux disques d'un bord donné, on peut distinguer les cas où l'homologie est tout de même définie. Notons donc, dans le cas général, $\mathcal{M}^{g,x}$ l'ensemble des éléments de $\text{ev}^{-1}(x) \subset \mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2)$ dont le bord est la classe $g \in \pi_1(L, x)$ ³. Supposons maintenant qu'un disque de $\mathcal{M}^{g,x}$ soit l'un des bords d'une composante Λ de $\mathcal{L}^1(x, x)$, avec une trajectoire brisée à l'autre bord. La trace que laisse sur L cette trajectoire brisée est de fait un lacet basé en x , et comme Λ forme une homotopie entre ce lacet et le bord du disque, il s'agit nécessairement d'un lacet de g . Par le même raisonnement que dans le cas non relevé, si le cardinal de $\mathcal{M}^{g,x}$ est pair, le nombre de trajectoires relevées menant au même point relevé est lui aussi pair dans le bord de $\mathcal{L}^1(x, x)$, et la différentielle est bien définie.

Effectivement, M. Damian montre dans [Dam12] que c'est la seule contrainte :

Proposition 2.15. *Soit L une lagrangienne orientée. L'homologie de Floer relevée est bien définie sur son revêtement universel si et seulement si*

- son nombre de Maslov minimal est $N_L > 2$, ou
- $N_L = 2$ et en tout point générique $x \in L$, et pour tout $g \in \pi_1(L, x)$, passe un nombre pair de disques pseudo-holomorphes de Maslov 2 à bord lagrangien dans la classe g .

2.3.2 Application

On utilise alors la disjonction suivante : soit l'homologie de Floer relevée est bien définie, soit elle ne l'est pas.

³. Pour le revêtement universel. Pour un revêtement \bar{L} quelconque, on pourra faire le même raisonnement en remplaçant $\pi_1(L, x)$ par son sous-groupe correspondant à \bar{L} .

Le premier cas équivaut à ce que le nombre de Maslov N_L soit strictement plus grand que 2, ou que $N_L = 2$ avec pour chaque élément du groupe fondamental (ou de son sous-groupe relatif au revêtement considéré) et en chaque point générique de L un nombre pair de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov égal à 2 passant par ce point à bord lagrangien dans la classe considérée. Dans ce cas il existe, comme dans le cas standard, d'après les travaux [Oh96] de Y-G. Oh et de P. Biran dans [Bir06], une suite exacte de l'homologie de \bar{L} vers son homologie de Floer relevée qui revient à la décomposition 2.1 de la différentielle; le lecteur intéressé pourra en trouver un énoncé détaillé dans la section 4.4 du recueil de M. Damian [Dam10]. Remarquons que sous l'hypothèse $N_L \in 2\mathbb{N}$, vérifiée dès que L est orientée, les différentielles autres que celle de Morse diminuent toutes la graduation d'un nombre impair. En particulier, lorsque les groupes d'homologie d'indice impair de \bar{L} sont nuls, les différentielles depuis ou vers $H_0(\bar{L}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont toutes zéro, et l'homologie de Floer relevée ne peut pas s'annuler lorsqu'elle est bien définie. On a ainsi dans [Dam15] :

Proposition 2.16. *Si les groupes d'homologie d'indice impair de \bar{L} sont nuls, et que l'homologie de Floer relevée est bien définie, alors elle n'est pas nulle.*

Le deuxième cas équivaut, pour L orientable, à ce que $N_L = 2$ et qu'il existe un point générique⁴ $x \in L$ et un élément $g_0 \in \pi_1(L, x)$ qui borde un nombre impair de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov égal à 2. On peut alors tenir le raisonnement suivant, qui sous-tend la proposition 3.2 de [Dam15].

Dénotons par E l'ensemble des tels éléments de $\pi_1(L, x)$. On a vu que l'espace $\mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2)$ est compact, ce qui implique que E est fini. Montrons alors que E est stable par conjugaison. Considérons pour cela un lacet γ basé en x et notons $h = [\gamma]g[\gamma]^{-1}$. Alors sur \mathcal{M} , γ induit un cobordisme entre $\mathcal{M}^{g,x}$ et $\mathcal{M}^{h,x}$, puisque par construction on a construit une homotopie entre le bord « à l'arrivée » et h . En particulier, ces deux espaces ont bien la même parité. Par conséquent :

Proposition 2.17. *Soit L une lagrangienne monotone orientée. Si l'homologie de Floer relevée sur \tilde{L} n'est pas définie, alors le nombre minimal de Maslov de L est 2 et il existe $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.*

4. Pour l'application d'évaluation.

Chapitre 3

Fibré symplectique standard et fibration lagrangienne

Comme ω est fermée, elle définit une classe en cohomologie de De Rahm. Rappelons aussi que ω^n est une forme volume, qui est exacte si et seulement si ω l'est. Ainsi, d'une part, V est toujours orientable, et d'autre part si V est fermée ω n'est pas exacte. Sa classe $[\omega]$ est alors non nulle, et on peut se poser la question de savoir si elle est définie en cohomologie à coefficients entiers :

Définition 3.1. Une variété symplectique (V, ω) est dite *entière* lorsque la classe $[\omega] \in H_{dR}^2(V, \mathbb{R})$ se relève à $H^2(V, \mathbb{Z})$.

3.1 Fibré symplectique standard

Soit (Σ, τ) une variété symplectique fermée entière, c'est-à-dire telle que la classe $[\tau]$ en cohomologie de De Rahm est bien définie dans $H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$. Le fibré symplectique standard, qui a été introduit par P. Biran dans [Bir01] nous permettra de comprendre la structure symplectique de M privé d'une partie de petite dimension en fonction de celle de Σ .

Soit $\mathcal{N} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ le fibré en droites complexes dont $[\tau]$ est la première classe de Chern. Choisissons une métrique hermitienne sur \mathcal{N} ainsi qu'une connexion ∇ , et notons H^∇ le sous-fibré horizontal associé. La forme de transgression α est alors l'unique forme différentielle de degré 1 vérifiant :

$$\alpha \lrcorner_{H^\nabla} = 0 \quad \alpha_{(p,u)}(u) = 0 \quad \alpha_{(p,u)}(iu) = \frac{1}{2\pi}$$

où $(p, u) \in \mathcal{N}$. On a alors $d\alpha = -\pi^*\tau$. Notons r la distance, donnée par la métrique choisie, à la section nulle 0_Σ . La forme symplectique standard sur $\mathcal{N} \setminus 0_\Sigma$ est alors :

$$\omega_{std} = -d\left(e^{-r^2}\alpha\right) = e^{-r^2}\pi^*\tau + 2re^{-r^2}dr \wedge \alpha \quad (3.1)$$

Remarquons que dans la direction verticale, celle des fibres, $rdr \wedge d\alpha$ n'est rien d'autre que la forme symplectique usuelle sur \mathbb{C} . Chaque terme, dans la dernière expression de ω_{std} , peut donc s'écrire sur tout \mathcal{N} , et c'est ainsi que

nous y étendons ω_{std} . De plus, le premier terme est symplectique sur le sous-fibré horizontal, tandis que le second l'est le long des fibres.

Le fibré en disques symplectique standard est alors défini comme :

$$E_r = \{(p, u) \in \mathcal{N}, |u| \leq r\}$$

sur lequel ω_{std} est la forme symplectique.

Remarque 3.2. Notons $P \subset \mathcal{N}$ le fibré en cercles au-dessus de Σ constitué des éléments d'un rayon $r = r_0$ fixé. Alors (P, α) est une variété de contact. Il suffit en effet de vérifier que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume. C'est effectivement le cas puisque $(-1)^n \alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge (\pi^* \tau)^n$, c'est-à-dire le produit de deux formes volumes sur les sous-fibrés $H^\nabla \upharpoonright_P$ et $i\mathbb{R} \frac{\partial}{\partial r}$ dont la somme directe est TP .

Définition 3.3. Un sous-ensemble d'une variété symplectique M est appelé CW-complexe isotrope s'il est homéomorphe à un CW-complexe de manière à ce que l'intérieur de chaque cellule soit plongé dans M comme sous-variété isotrope.

Soit φ une fonction lisse sur une variété de dimension n . Grâce au lemme de Morse (voir par exemple [Lau93, Mil63]) on peut définir un point critique p comme étant non-dégénéré s'il existe des coordonnées $(x_1, x_1 \dots x_n)$ centrées en zéro au voisinage de p telles que pour un certain k entre 0 et n

$$f(x_1, x_1 \dots x_n) = f(p) + \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

De même on définit les points de dégénérescence minimale, dits de type naissance-mort comme :

Définition 3.4. Un point critique p est de type naissance-mort s'il existe des coordonnées $(x_1, x_1 \dots x_n)$ au voisinage de p telles que pour un certain k entre 1 et n

$$f(x_1, x_1 \dots x_n) = f(p) + x_1^3 + \sum_{i=2}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

Une fonction est dite de Morse généralisée si tous ses points critiques sont non-dégénérés ou de type naissance-mort. Dans tous les cas, l'indice en un point critique est $n - k$.

Rappelons la définition d'un domaine de Weinstein :

Définition 3.5. (Voir l'introduction de [CE12]) Un domaine de Weinstein est une variété symplectique (V, ω) qui possède une structure de Weinstein (V, ω, X, φ) où X est un champ de vecteurs complet et φ une fonction de Morse éventuellement généralisée qui est propre et minorée. Il faut de plus que :

- X soit un champ de Liouville, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_X \omega = \omega$;
- X soit un pseudo-gradient pour φ .

Le domaine (V, ω, X, φ) est dit sous-critique si aucun point critique de φ n'est d'indice $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$.

Rappelons maintenant le théorème 1.A de [Bir01], sous sa forme étendue en proposition 2.1 de [BK13] :

Théorème 3.6. Soit (M^{2n+2}, ω) une variété kählérienne fermée entière et $\Sigma \subset M$ une hypersurface complexe dont la classe d'homologie $[\Sigma] \in H_{2n}(M; \mathbb{Z})$ est le dual de Poincaré d'un multiple $k[\omega]$ de $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Alors il existe un CW-complexe isotrope $\Delta \subset M$ dont le complémentaire – le sous-ensemble dense ouvert $M \setminus \Delta$ muni de ω – est symplectomorphe au fibré symplectique standard $(\mathcal{N}, \frac{1}{k}\omega_{std})$ au-dessus de Σ relativement à $\tau = k\omega|_{\Sigma}$.

Il existe finalement un plongement $F : (\mathcal{N}, \frac{1}{k}\omega_{std}) \hookrightarrow (M, \omega)$ tel que :

- la restriction de F à la section nulle est l'identité sur Σ ,
- $\Delta = M \setminus F(\mathcal{N})$ est un CW-complexe isotrope,
- pour tout $r > 0$, $(M \setminus F(\overset{\circ}{E}_r), \omega)$ est un domaine de Weinstein.

Remarque 3.7. Comme Δ est isotrope, il en découle immédiatement que sa dimension est au plus moitié de celle de M . Cette simple remarque sera utile dans la sous-section 4.1.

Notation 3.8. Dans la suite du texte, M et Σ désigneront des variétés soumises aux hypothèses du théorème 3.6 ci-dessus, et Δ le CW-complexe défini dans sa conclusion. Nous poserons $W = M \setminus \Sigma$ et, par abus de notation, nous noterons par π la composée $\pi \circ F^{-1}$, application $M \setminus \Delta \rightarrow \Sigma$.

La propriété suivante sur les domaines de Weinstein sous-critiques, issue de la combinaison du lemme 3.2 de [BC02] et du théorème 1.1 de [CE12], nous sera particulièrement utile :

Proposition 3.9. Soit (V, ω, X, φ) un domaine de Weinstein sous-critique, et C une partie compacte de V . Il existe une isotopie hamiltonienne à support compact pour laquelle C ne rencontre pas son image au temps 1.

Exemple 3.10. $\mathbb{C}P^n$ peut ainsi être compris comme l'hyperplan $\{z_{n+1} = 0\}$ de $\mathbb{C}P^{n+1}$. La projection π est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_0 : z_1 \dots z_n : z_{n+1}] &\longmapsto [z_0 : z_1 \dots z_n] \end{aligned}$$

où $\Delta = \{[0 : 0 : \dots : 0 : 1]\} \in \mathbb{C}P^{n+1}$. Dans ce cas on a $k = 1$.

Sur $W = \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}P^n$ la fonction de Morse de la structure de Weinstein est $\varphi([z_0 : \dots : z_{n+1}]) = \frac{-|z_{n+1}|^2}{\sum_{k=0}^{n+1} |z_k|^2}$ et X est son gradient pour la métrique de

Fubini–Study. W est sous-critique puisque $[0 : 0 : \dots : 0 : 1]$ est le seul point critique de φ et qu'il est d'indice 0. Remarquons que dans ce cas particulier $W \simeq \mathbb{C}^{n+1}$.

Exemple 3.11. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, et notons $[z_0 : \dots : z_n]$ les éléments de $\mathbb{C}P^n$ et $[w_0 : \dots : w_{n+r}]$ ceux de $\mathbb{C}P^{n+r}$. L'hypersurface

$$\Sigma = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} z_k w_k = z_n \sum_{k=n}^{n+r} w_k \right\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^{n+r}$$

vérifie les hypothèses du théorème 3.6 et le domaine de Weinstein formé est sous-critique. C'est l'exemple 3.3 de [Bir01].

Remarque 3.12. Dans [BK13], Biran et Khanevsky ont introduit la notion de section symplectique hyperplane. Les résultats de ce manuscrit, en particulier le théorème 1.25 se vérifient dans ce cadre plus large.

3.2 La fibration lagrangienne en cercles

Suivant les constructions précédentes, on note P le fibré en cercles au-dessus de Σ constitué des éléments de rayon $r = r_0$. On définit alors $\Gamma_L = P \cap \pi^{-1}(L)$; c'est le fibré en cercles de rayon r_0 au-dessus de L .

En un point p de $\Gamma_L \subset \mathcal{N}$, l'espace tangent à \mathcal{N} se décompose en $T_p\mathcal{N} = H^\nabla \oplus \mathbb{C}$, et l'application tangente à π identifie H^∇ à $T_{\pi(p)}\Sigma$. De même, $T_{\pi(p)}L$ s'identifie à un sous-espace \mathcal{R} de H^∇ et $T_p\Gamma_L$ se décompose en la somme directe de \mathcal{R} avec une droite réelle de \mathbb{C} . La forme symplectique standard se décompose elle aussi, comme on peut le voir dans la formule 3.1, et chaque composante s'annule sur chaque terme de la somme directe. Γ_L est donc bien une lagrangienne de \mathcal{N} et, partant, de M comme de W .

On considère maintenant le morphisme induit par $\pi : (W \setminus \Delta, \Gamma_L) \rightarrow (\Sigma, L)$ sur les groupes d'homotopie relative d'indice 2. Rappelons que si Λ est une sous-variété lagrangienne de (V, ω) , $\mu_\Lambda : \pi_2(V, \Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne l'indice de Maslov; nous noterons ι l'inclusion $W \setminus \Delta \rightarrow W$.

Proposition 3.13. (*Proposition 4.1.A de [Bir06]*) *Supposons que $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma > 1$ ou que W est sous-critique.*

1. *Le morphisme $\iota_* : \pi_2(W \setminus \Delta) \rightarrow \pi_2(W)$ induit par l'inclusion ι est surjectif. C'est un isomorphisme si $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma > 2$.*
2. *Pour tout $B \in \pi_2(W \setminus \Delta, \Gamma_L)$,*

$$\mu_{\Gamma_L}(B) = \mu_L(\pi_* B)$$

en particulier, si $L \subset \Sigma$ est monotone alors $\Gamma_L \subset W$ est monotone aussi, avec le même nombre de Maslov.

Démonstration. Le premier point découle directement de la dimension de Δ , inférieure de moitié à celle de W .

Grâce à la décomposition $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+^* \times S^1$ on peut voir $\mathcal{N} \setminus \Sigma \approx W \setminus \Delta$ comme un fibré de fibre \mathbb{R}_+^* au-dessus de P ; comme cette fibre est totalement asphérique, $\pi_2(W \setminus \Delta, \Gamma_L) = \pi_2(P, \Gamma_L)$. Soit donc $A \in \pi_2(P, \Gamma_L)$ dont $\tilde{u} : (D, \partial D) \rightarrow (P, \Gamma_L)$ est un représentant lisse; notons $u = \pi_P \circ \tilde{u}$, avec $\pi_P : P \rightarrow \Sigma$ la projection de P comme fibré en cercles au-dessus de Σ .

Par construction de P on a $H^\nabla \upharpoonright_P \subset TP$ et même $H^\nabla = \ker(\alpha \upharpoonright_{TP})$, puisque $\ker(\alpha) = H^\nabla \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial r} \notin TP$. Or sur P la forme symplectique est standard, donc d'après la formule 3.1 la définissant,

$$(TW \upharpoonright_P, \omega) \simeq (H^\nabla \upharpoonright_P, \omega \upharpoonright_{H^\nabla}) \oplus \pi_P^*(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$$

avec

$$\begin{cases} (H^\nabla \upharpoonright_P, \omega \upharpoonright_{H^\nabla}) = (H^\nabla \upharpoonright_P, e^{-r_0^2} \pi^* \omega_\Sigma) \simeq \pi_P^*(T\Sigma, e^{-r_0^2} \omega_\Sigma) \\ (\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}) = (\mathcal{N}, 2r_0 e^{-r_0^2} dr \wedge \alpha) \end{cases} .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(TW \upharpoonright_P, \omega) &\simeq \tilde{u}^*(H^\nabla, \omega \upharpoonright_{H^\nabla}) \oplus \tilde{u}^* \pi_P^*(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}) \\ &\simeq u^*(T\Sigma, e^{-r_0^2} \omega_\Sigma) \oplus u^*(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}). \end{aligned}$$

L'indice de Maslov de \tilde{u} est obtenu en trivialisant ce fibré vectoriel symplectique et en considérant le chemin de lagrangiennes sur le bord. On trouve celui de u en trivialisant $u^*(T\Sigma, \omega_\Sigma)$ qui est isomorphe à $u^*(T\Sigma, e^{-r_0^2}\omega_\Sigma)$: on veut donc vérifier que les lacets lagrangiens sont en bijection, et que le terme en $u^*(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$ n'apporte aucune contribution à l'indice de Maslov.

Comme $\Gamma_L \subset P$, $T\Gamma_L = (T\Gamma_L \cap H^\nabla) \oplus \mathbb{R}i \frac{\partial}{\partial r} \simeq \pi^*TL \oplus \mathbb{R}i \frac{\partial}{\partial r}$ via $T\pi$. Alors

$$\partial\tilde{u}^*T\Gamma_L \simeq (\partial u^*TL) \oplus \left(\partial\tilde{u}^*\mathbb{R}i \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Le lacet sur lequel on calcule l'indice de Maslov peut donc être vu, en trivialisant les deux fibrés sommés séparément, comme un lacet dans $\Lambda_n \times \Lambda_1 \subset \Lambda_{n+1}$, où Λ_k est l'ensemble des lagrangiennes de \mathbb{C}^k et $n = \dim L$. Le lacet dans Λ_n venant de la trivialisatation de ∂u^*TL dans $u^*(T\Sigma, e^{-r_0^2}\omega_\Sigma) \simeq u^*(T\Sigma, \omega_\Sigma)$, il donne $\mu_L(u)$.

Celui dans Λ_1 vient de la trivialisatation de $\partial\tilde{u}^*\mathbb{R}i \frac{\partial}{\partial r}$ dans $u^*(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$. Or, ce lacet s'étend à tout le disque unité ($\tilde{u}^*\mathbb{R}i \frac{\partial}{\partial r}$ est défini partout). C'est donc un lacet trivial, et cette partie ne contribue pas à l'indice de Maslov de $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u})$.

Il suffit enfin de remarquer que l'application induite par π_P est un isomorphisme entre $\pi_2(P, \Gamma_L)$ et $\pi_2(\Sigma, L)$, car il s'agit d'une fibration en cercles. \square

Deuxième partie

Preuves et corollaires

Chapitre 4

Sur l'homologie de Floer relevée pour L et Γ_L

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit Σ une variété symplectique dont le nombre de Chern est au moins 2 qui est une hypersurface kählérienne d'une plus grande variété de Kähler M , entière, telle que $[\Sigma]$ dans $H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit duale au sens de Poincaré de $[\omega_M] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ et que $W = M \setminus \Sigma$ soit un domaine de Weinstein sous-critique. Notons Γ_L la lagrangienne de M définie en section §3.2.*

L'homologie de Floer relevée est définie sur le revêtement universel de $\Gamma_L \subset W$ si et seulement si elle est définie sur celui de L .

Comme nous l'avons vu dans la proposition 2.15, l'homologie de Floer relevée est définie sur le revêtement universel si et seulement si :

- le nombre de Maslov est strictement supérieur à 2 ou,
- ce nombre est 2 et pour tout point générique, tout élément du groupe fondamental borde un nombre pair de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov 2.

La proposition 3.13 assure que dans notre cas les nombres de Maslov sont égaux ; il s'agit donc de comparer les nombres de disques bordés par L et Γ_L pour régler le cas $N_L = 2$.

Notation 4.2. Notons donc, pour $\tilde{p} \in \Gamma_L$ et $p \in L$ des points génériques par rapport à l'application d'évaluation définie en 2.2 :

- $\mathcal{M}^{\tilde{g}, \tilde{p}}$ l'ensemble des disques de $\mathcal{M}_{0,1}(W, \Gamma_L, J; 2)$ – c'est-à-dire de W à bord sur Γ_L , J -holomorphes et d'indice de Maslov égal à 2 – qui passent par \tilde{p} et dont le bord appartient à la classe $\tilde{g} \in \pi_1(\Gamma_L, \tilde{p})$.
- $\mathcal{M}^{g,p}$ l'ensemble des disques de $\mathcal{M}_{0,1}(\Sigma, L, J_\Sigma; 2)$ – c'est-à-dire de Σ à bord sur L , J_Σ -holomorphes et d'indice de Maslov égal à 2 – qui passent par p et dont le bord appartient à la classe $g \in \pi_1(L, p)$.

L'idée est alors de construire une bijection entre ces ensembles, à l'aide de la projection $\pi : W \setminus \Delta \rightarrow \Sigma$. Afin que les disques pseudo-holomorphes de W d'indice de Maslov 2 ne puissent s'aventurer trop loin de P et, en particulier, n'atteignent pas Δ , nous allons construire une structure presque complexe grâce à la technique « d'étirement du cou ». Cette dernière a été d'abord présentée dans [BEH⁺03] avant d'être adaptée à la présente situation dans [BK13].

Ainsi, la projection sera donc bien définie et l'on aura même :

Proposition 4.3. *Il existe une structure presque complexe J sur W telle que pour tout $p \in \Gamma_L$ générique et tout $g \in \pi_1(\Gamma_L)$, l'application $\mathcal{M}^{g,p} \rightarrow \mathcal{M}^{\pi_*g, \pi(p)}$ de composition à gauche par la projection sur Σ est bien définie, et constitue une bijection si $\mathcal{M}^{g,p} \neq \emptyset$.*

Notons que d'autres contraintes pèsent sur le choix de la structure presque complexe, puisqu'on souhaite également que la projection π soit pseudo-holomorphe ; elle devra également être régulière, au sens que donnent à ce mot McDuff et Salamon dans [MS04].

4.1 Étirement du cou

Commençons par fixer J_Σ , une structure presque complexe sur Σ calibrée par ω_Σ . Rappelons ici que le fibré en disques symplectique standard est :

$$E_r = \{(p, u) \in \mathcal{N}, |u| \leq r\}$$

Choisissons un $\epsilon > 0$ tel que la restriction de l'application F du théorème 3.6 de Biran à $E_{r_0+\epsilon}$ constitue toujours un difféomorphisme. Ici, r_0 désigne comme dans 3.2 le rayon utilisé pour construire Γ_L . Notons alors U le complémentaire de $E_{r_0+\epsilon}$ dans M – ou W . C'est un voisinage de Δ , et l'espace dans lequel nous voudrions éviter de voir nos disques traîner.

Définissons maintenant une structure presque complexe $J_{\mathcal{N}}$ sur \mathcal{N} , en multipliant par i sur les fibres – qui s'identifient à \mathbb{C} – et en appliquant J_Σ sur les vecteurs horizontaux, c'est-à-dire :

$$\forall v \in H^\nabla, J_{\mathcal{N}}(v) = \left(T\pi|_{H^\nabla} \right)^{-1} \circ J_\Sigma \circ T\pi(v) \quad (4.1)$$

Notons qu'ainsi définie, $J_{\mathcal{N}}$ est calibrée par ω_{std} .

La dernière étape consiste simplement à pousser $J_{\mathcal{N}}$ sur $E_{r_0+\epsilon} \cong M \setminus U$ via F , puis à prolonger la structure obtenue sur M tout entier par une structure générique calibrant ω . De plus, J_W désignera sa restriction à W .

Rappelons que P est le fibré en cercles de rayon r_0 dans \mathcal{N} qui peut, puisqu'il est inclus dans $E_{r_0+\epsilon}$, être vu comme une partie de M ou de W . Nous allons dans la suite considérer les composantes connexes de $M \setminus P$ et $W \setminus P$ avec les notations suivantes : $\Sigma \subset M^+$, $W^+ = M^+ \setminus \Sigma$ et $\Delta \subset U \subset W^- = M^-$. Pour tout $R > 0$ on notera :

$$W^R = W^- \bigcup_{\{-R\} \times P} [-R, R] \times P \bigcup_{\{R\} \times P} W^+$$

Sur W^R on définit la structure presque complexe comme J_W sur W^- et W^+ et par translation sur le cylindre du milieu. Cette structure n'est que continue près du bord, c'est pourquoi c'est en fait une approximation lisse que nous noterons J^R . Plus précisément, on peut effectuer cette opération en n'utilisant que les coordonnées radiale $t \in [-R, R]$ et angulaire dans les fibres de P , de manière à ce que la projection de J^R ne soit pas modifiée.

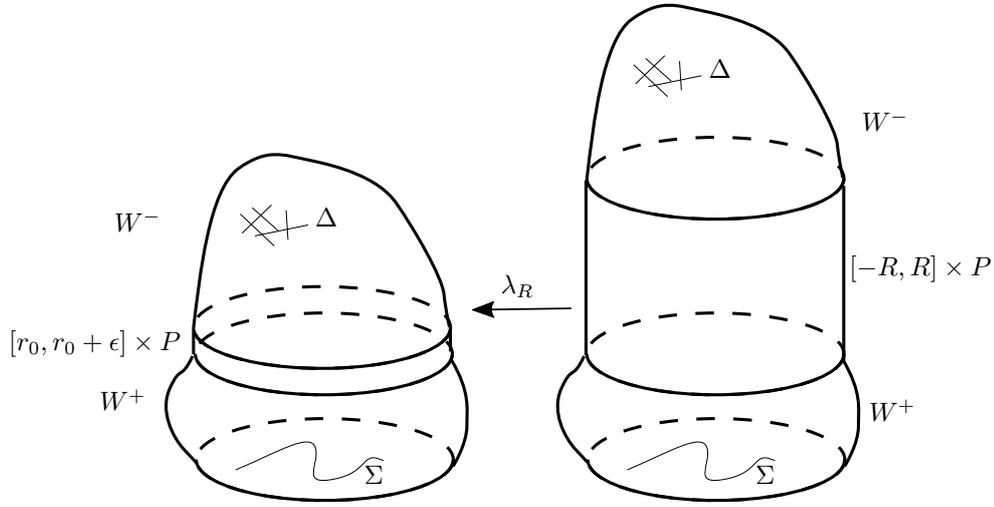


FIGURE 4.1 – L'étirement du cou.

Pour ramener J^R sur W , introduisons un difféomorphisme décroissant $\varphi_R : [-R - \epsilon, R] \rightarrow [r_0, r_0 + \epsilon]$ dont la dérivée vérifie $\varphi'_R(t) = -1$ au voisinage du bord de $[-R - \epsilon, R]$. On définit alors le difféomorphisme $\lambda_R : W^R \rightarrow W$

comme l'identité sur W^+ comme sur U , et comme induit par φ_R de $[-R - \epsilon, R] \times P$ vers $[r_0, r_0 + \epsilon] \times P$. On utilise ici l'identification $W^- \setminus U \approx]r_0, r_0 + \epsilon] \times P$ donnée par F . Enfin, on définit J_R sur W comme le poussé en avant $(\lambda_R)_* J^R$. Par construction, c'est une structure compatible avec ω , et telle que π est J_R - J_Σ -holomorphe en dehors de U .

Proposition 4.4. *Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$ et tout J_R ainsi construit, chaque disque d'indice de Maslov 2, J_R -holomorphe et passant par $p \in \Gamma_L$ est inclus dans l'image de $E_{r_0+\epsilon}$ par F .*

4.1.1 Préliminaires hyperboliques

Afin de mener à bien l'étirement du cou, nous aurons besoin des résultats suivants de [BEH⁺03]. Ceux-ci permettent de définir la notion de convergence d'une surface de Riemann, c'est-à-dire de contrôler ce qui se passe à la source des courbes pseudo-holomorphes.

Définition 4.5. Une surface de Riemann nodale $\mathbf{S} = (S, j, M, D)$ est la donnée d'une surface de Riemann compacte (S, j) , d'un m -uplet M de points marqués distincts et d'un ensemble D de k paires nodales dont l'union consiste en $2k$ points de $S \setminus M$.

Elle est dite stable si chacune de ses composantes connexes vérifie

$$2g + \bar{m} \geq 2$$

où g désigne le genre de la composante et \bar{m} le nombre de points marqués (issus de M ou de D).

À une surface nodale on peut associer la surface singulière construite en identifiant les deux points de chaque paire nodale ; la surface de départ est dite connexe dès que cette surface singulière l'est.

Définition 4.6. Le genre arithmétique d'une surface de Riemann nodale est défini comme $g = k + 1 - b_0 + \sum_{i=1}^{b_0} g_i$, où b_0 est le nombre de composantes connexes de S et $\sum g_i$ la somme de leurs genres (au sens usuel). La signature de cette surface est alors le couple (g, μ) , où μ désigne le cardinal de M .

Théorème 4.7. (*d'uniformisation de Poincaré*) Si \mathbf{S} est stable il existe une unique métrique h complète, de volume fini et de courbure constante égale à -1 .

Cette dernière nous permet de décomposer \mathbf{S} :

Définition 4.8. Notons $\rho(x)$ le rayon d'injectivité par rapport à h en un point non marqué $x \in S$. Pour $\epsilon > 0$, on définit la partie épaisse de \mathbf{S} comme étant l'ensemble des points vérifiant $\rho(x) \geq \epsilon$. La partie fine de \mathbf{S} est alors l'adhérence du complémentaire de la partie épaisse.

Fait 4.9. Pour tout $\epsilon < \ln(1 + \sqrt{2})$, toute composante connexe de la partie fine est conformément équivalente à :

- un cylindre fini $[-L, L] \times S^1$ en l'absence de point marqué, ou
- un cylindre infini $\mathbb{R}_+ \times S^1$ au bout duquel se trouve un unique point marqué.

Ces composantes sont compactes dans le premier cas, non compactes dans le second. À chacune d'entre elles, on associe un cercle :

- dans le cas d'un cylindre fini, il s'agit de l'unique géodésique fermée de longueur minimale, dite géodésique minimale,
- dans le cas d'un cylindre infini, on construit le cercle spécial Γ par éclatement du point marqué : en notant z celui-ci on le remplace dans S par $(T_z S \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$, ajoutant ainsi une composante de bord. La structure complexe induit alors une action naturelle de $S^1 \subset \mathbb{C}$ sur Γ , qui est donc canoniquement métrisable.

Pour tout point marqué z , S^z désignera le résultat de l'éclatement orienté en z . À partir d'ici ϵ désigne un réel de $]0, \ln(1 + \sqrt{2})[$.

Définition 4.10. Une surface de Riemann nodale est dite décorée si à chaque paire $\{\underline{d}, \bar{d}\}$ de D est associée une application

$$S^1 = (T_{\underline{d}} S \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^* \longrightarrow (T_{\bar{d}} S \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^* = S^1$$

orthogonale mais inversant l'orientation, qui permet ainsi de recoller les bords issus des éclatements $S^{\underline{d}}$ et $S^{\bar{d}}$.

Le résultat d'un tel recollement pour chaque paire de D par une collection r d'applications crée une surface non nodale (pour laquelle $D = \emptyset$) notée $\mathbf{S}^{D,r}$, de même bord que \mathbf{S} , et dont le genre est le genre arithmétique de \mathbf{S} .

Notation 4.11. On note :

- $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ l'ensemble des surfaces non nodales stables de signature (g, μ) ,
- $\mathcal{M}_{g,\mu}$ l'ensemble des surfaces (nodales) stables de signature (g, μ) ,

— $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$ l'ensemble des surfaces nodales décorées stables de signature (g, μ) .

Remarque 4.12. Une surface non nodale étant un cas particulier de surface nodale qui n'a pas besoin de décoration, on a naturellement $\mathcal{M}_{g,\mu} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ et $\mathcal{M}_{g,\mu} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$.

Définition 4.13. Une suite (\mathbf{S}_n, r_n) de $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$ est dite convergente vers $(\mathbf{S}, r) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$ s'il existe à partir d'un certain rang des difféomorphismes $\varphi_n : \mathbf{S}^{D,r} \rightarrow \mathbf{S}_n^{D_n,r_n}$ respectant M tels que :

1. Les cercles spéciaux pour h_n sont des images par φ_n de cercles spéciaux pour h , et les autres cercles spéciaux pour h sont envoyés sur des géodésiques minimales. Ici h_n et h désignent les métriques définies par le théorème 4.7 pour \mathbf{S}_n et \mathbf{S} respectivement.
2. $\varphi_n^* h_n \rightarrow h$ au sens C_{loc}^{∞} sur $S^{D,r}$ privé de M et des cercles spéciaux.
3. Pour toute composante connexe C de la partie fine de $\mathbf{S}^{D,r} \setminus M$ contenant un cercle spécial Γ et tout $c \in \Gamma$, en notant δ_n la géodésique pour $\varphi_n^* h_n$ qui intersecte orthogonalement Γ en c et s'arrête lorsqu'elle rejoint la partie épaisse de $\mathbf{S}^{D,r}$ (munie de $\varphi_n^* h_n$), $\delta_n \cap C$ converge au sens C^0 vers une géodésique pour h , continue, et qui passe par c .

Une suite de $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ est dite convergente s'il existe une décoration pour chaque élément telle que la suite obtenue converge dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$.

Théorème 4.14. (*Deligne-Mumford, Wolpert [DM69, Wol85]*) $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{\S}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ sont des espaces métriques compacts, dans lesquels $\mathcal{M}_{g,\mu}$ est dense.

En d'autres termes, ils forment une compactification de $\mathcal{M}_{g,\mu}$.

4.1.2 Preuve de la proposition 4.4

Démonstration. Cette preuve suit le raisonnement de [BK13] et se réfère aux résultats de [BEH⁺03], qui sont aussi vérifiés pour des courbes pseudo-holomorphes à bord lagrangien.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une structure presque complexe J_{Σ} sur Σ et une suite de réels $R_n > 0$ tendant vers l'infini avec pour disque $u'_n : (D, \partial D) \rightarrow (W, \Gamma_L)$ qui est J_{R_n} -holomorphe, d'indice de Maslov 2 et quitte $E_{r_0+\epsilon}$. Remarquons dès à présent que par principe du maximum (ou précisément ici du minimum), ces disques sont tous à images dans E_{r_0} .

Pour simplifier les écritures, on dénotera J_{R_n} par J_n et W^{R_n} par W^n . Une manière équivalente de considérer cette suite est de poser $u_n = \lambda_{R_n}^{-1} \circ u'_n : (D, \partial D) \rightarrow (W^n, \Gamma_L)$; c'est dans ce cadre que nous allons raisonner.

Notation 4.15. Notons donc, conformément aux notations précédentes :

- $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^R, J_R)$ l'espace des courbes J_R -holomorphes depuis des surfaces stables de signature (g, μ) ,
- $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+}) = \bigcup_{R \in \mathbb{R}_+} \mathcal{M}_{g,\mu}(W^R, J_R)$.

F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki et E. Zehnder définissent dans [BEH⁺03] une notion de convergence sur $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$ ainsi

qu'une compactification de cet espace. Cette dernière est fabriquée en introduisant un autre type de courbes, appelées *immeubles holomorphes*. Pour décrire la construction d'un immeuble, nous allons avoir besoin de quelques notations supplémentaires : posons donc $W_\infty^+ =]-\infty, 0] \times P \cup W^+$ et $W_\infty^- = [0, +\infty[\times P \cup W^-$, chacun recollé le long de leurs bords P . Étendons ensuite J_W sur les parties cylindriques $]-\infty, 0] \times P$ et $[0, +\infty[\times P$ par invariance selon les translations, puis lisons-la près des bords de la même manière que J_R . L'union disjointe de W_∞^+ et W_∞^- munie de cette structure presque complexe sera notée (W^∞, J_∞) ; on peut l'envisager comme la limite de (W^R, J_R) lorsque $R \rightarrow \infty$. Remarquons que d'un strict point de vue différentiel, $W^\infty \simeq W \setminus P$. On considérera également des cylindres $\mathbb{R} \times P$ munis de J_∞ qui est là encore définie par invariance selon les translations.

Lorsque la surface sous-jacente est un disque et que l'on exige que l'image du bord reste dans Γ_L , un immeuble \bar{u} est composé des éléments suivants :

- Une base J_∞ -holomorphe $u_+ : (S_+, \partial S_+) \rightarrow (W_\infty^+, \Gamma_L)$, où S_+ est un disque contenant un ou plusieurs points marqués. Au voisinage de ceux-ci, u_+ est asymptotiquement cylindrique et converge vers une orbite périodique du champ de Reeb de (P, α) , où α est la forme de transgression explicitée en 3.1. Par construction de α , les orbites de Reeb périodiques sont précisément les fibres du fibré en cercles $P \rightarrow \Sigma$.
- Un certain nombre de courbes intermédiaires, des applications J_∞ -holomorphes $u'_i : S_i \rightarrow \mathbb{R} \times P$ où chaque S_i est une sphère avec au moins un point marqué. Au voisinage de ceux-ci, les u'_i sont asymptotiquement cylindriques, en s'appuyant également sur des orbites de Reeb.
- Un certain nombre de courbes J_∞ -holomorphes servant de toiture, chacune de la forme $u_- : S_- \rightarrow W_\infty^-$ où S_- est une sphère avec un point marqué au moins. Au voisinage de celui-ci, u_- est asymptotiquement cylindrique de la même manière que u_+ . Pour simplifier les notations, nous supposons qu'il n'y a qu'une seule courbe de ce type; la preuve est la même lorsqu'elles sont plusieurs.

De plus, ces éléments coïncident au niveau des points marqués, c'est-à-dire qu'à chaque cylindre asymptotique en correspond un autre, reposant sur la même orbite mais dans l'autre direction dans la composante réelle, de manière à ce qu'ils se complètent. Ainsi les différents éléments de \bar{u} peuvent-ils être collés; il en résulte une unique disque topologique. La compactification de $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$ se fera ainsi en lui ajoutant les immeubles dans (W^∞, J_∞) dont la source se recolle en une surface nodale de signature (g, μ) ; le résultat sera noté $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$.

Nous pouvons maintenant décrire la convergence d'une suite de $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$ vers un immeuble. Dans cette convergence, les courbes pseudo-holomorphes u_+ et u_- auront un rôle particulier; on notera u^0 leur union comme courbe de $S^0 = S_+ \cup S_- \rightarrow W_\infty^+ \cup W_\infty^-$.

Définition 4.16. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{M}_{g,\mu}(W^n, J_n)$ et $\bar{u} \in \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$; notons $\mathbf{S}_n \in \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ et $\mathbf{S} \in \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}$ leur surface de départ respective. On dit que (u_n) converge vers \bar{u} si, quitte à adjoindre un nombre fixé de points marqués M_n à \mathbf{S}_n et M à \mathbf{S} , \mathbf{S}_n converge vers \mathbf{S} et si, en reprenant les notations de la définition 4.13 on a :

1. $u_n \circ \varphi_n \upharpoonright_{S^0 \setminus M}$ converge vers u^0 uniformément sur tout compact.
2. À partir d'un certain rang, pour chaque i , $u_n \circ \varphi_n \upharpoonright_{S_i \setminus M}$ est à image dans

la partie cylindrique $[-R_n, R_n] \times P$.

3. Pour chaque i , il existe une suite de réels $(t_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, sur tout compact, $(t_{i,n} + p_{\mathbb{R}}, p_P) \circ u_n \circ \varphi_n \upharpoonright_{S_i \setminus M}$ converge uniformément vers u_i .

Comme promis, on a alors d'après le théorème 10.3 de [BEH⁺03] :

Théorème 4.17. $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}(W^{\mathbb{R}_+}, J_{\mathbb{R}_+})$ est un espace métrique dont, pour toute borne $E > 0$, l'ensemble des courbes pseudo-holomorphes d'énergie au plus E est une partie compacte.

Il nous faut donc encore définir l'énergie d'une courbe et vérifier l'existence d'une borne sur celle-ci dans notre cas.

Définition 4.18. Soit $u : (D, \partial D) \rightarrow (W^R, \Gamma_L)$ un disque J_R -holomorphe. Son énergie est la somme de son énergie symplectique (ou horizontale) $E_\omega(u)$ et de son énergie de contact (ou verticale) notée $E_\alpha(u)$. La première est définie par

$$E_\omega(u) = \int_{u^{-1}(W^+ \cup W^-)} u^* \omega + \int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u^* p_P^* \omega$$

où p_P est la projection $[-R, R] \times P \rightarrow P$. La seconde par

$$E_\alpha(u) = \sup_{\phi \in \mathcal{T}} \int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} (\phi \circ p_{\mathbb{R}} \circ u) \cdot u^*(dt \wedge \alpha)$$

où $p_{\mathbb{R}}$ est la projection $[-R, R] \times P \rightarrow [-R, R]$, t la variable réelle de $[-R, R]$, et $\mathcal{T} = \left\{ \phi \in C^\infty([-R, R], \mathbb{R}_+) \mid \int_{[-R, R]} \phi d\lambda = 1 \right\}$.

Montrons d'abord que l'énergie symplectique de (u_n) est uniformément bornée. Pour ce faire, nous allons la comparer à $\int_{u_n^{-1}([-R, R] \times P)} u_n'^* \omega$, elle-même bornée par monotonie. Pour alléger un tant soit peu les écritures, notons simplement $u = u_n$, $u' = u'_n$ et $R = R_n$.

Comme λ_R restreinte à $[-R, R] \times P$ est à image dans $E_{r_0, r_0 + \epsilon}$ où ω est standard, nous avons, avec $r = \varphi_R(t)$:

$$(\lambda_R^* \omega) \big|_{[-R, R] \times P} = e^{-\varphi_R(t)^2} \pi_\Sigma^* \omega_\Sigma + 2re^{-r^2} dr \wedge \alpha.$$

Séparons alors $\int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u'^* \omega$ selon cette somme et considérons le terme de droite :

$$\int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u'^* (2re^{-r^2} dr \wedge \alpha) = 2 \int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u'^* (e^{-r^2}) u'^* (r dr \wedge \alpha)$$

celui-ci est positif car u' est J_R -holomorphe et J_R est, dans les fibres, le produit usuel par i : $u'^* (r dr \wedge \alpha^\nabla)$ est alors tout simplement une norme au carré.

Pour le terme de gauche, $e^{-\varphi_R(t)^2} \geq e^{-(r_0 + \epsilon)}$ implique que :

$$\int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u^* (e^{-\varphi_R(t)^2} \pi_\Sigma^* \omega_\Sigma) \geq \int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u^* (e^{-(r_0 + \epsilon)} \pi_\Sigma^* \omega_\Sigma)$$

étant donné que $\pi_\Sigma \circ u$ est J_Σ -holomorphe partout où il est défini pour notre choix de J_R . En combinant les deux inégalités, nous obtenons :

$$\int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u'^* \omega \geq \int_{u^{-1}([-R, R] \times P)} u^* p_P^* \omega$$

et enfin

$$\int_{D^2} u'^* \omega \geq E_\omega(u).$$

Comme Γ_L est monotone dans W et u'_n d'indice de Maslov 2, l'intégrale de gauche est constante ; nous avons obtenu une majoration uniforme de l'énergie symplectique de (u_n) .

Le lemme 9.2 de [BEH+03] indique l'existence d'une constante C – qui précisément dépend de W , de sa structure presque complexe avant l'étirement, de P et de α – telle que $E_\alpha + E_\omega \leq CE_\omega$. Nous avons montré que l'énergie ω de (u_n) est uniformément bornée, c'est donc aussi le cas de son énergie totale.

Nous savons maintenant que (u_n) , ou au moins une de ses sous-suites, converge vers un immeuble \bar{u} . Calculons l'indice de Maslov de celui-ci.

Considérons tout d'abord u_+ . Par construction de J_∞ sur W_∞^+ , la projection $\pi_+ : W_\infty^+ \rightarrow \Sigma$ est (J_∞, J_Σ) -holomorphe, et donc π_+ envoie u_+ sur un disque épointé $\pi_+ \circ u_+ : (S_+, \partial S_+) \rightarrow (\Sigma, L)$. On remarque que π_+ projette les orbites périodiques à l'infini chacune sur un point de Σ car ce sont les fibres du fibré en cercles $P \rightarrow \Sigma$. Comme la convergence à proximité de ces points marqués se fait en norme C^1 et que la limite a une énergie bornée, ils induisent sur $\pi_+ \circ u_+$ des singularités non-essentiels. On en déduit que $\pi_+ \circ u_+$ est en fait un véritable disque J_Σ -holomorphe.

De même, on peut projeter sur Σ les courbes intermédiaires en oubliant la coordonnée réelle et en projetant celle en P . Les singularités sont non-essentiels par le même raisonnement que ci-dessus, et on obtient des sphères J_Σ -holomorphes.

Hélas, cette méthode ne fonctionne pas directement pour u_- , car d'une part cette courbe pourrait rencontrer le squelette isotrope Δ , et d'autre part même définie la projection n'a pas de raison d'être holomorphe. Comme $\text{codim } \Delta > 2 = \dim u_-$, on peut du moins perturber u_- dans $W^- \subset W_\infty^-$, de manière à ce que le résultat \tilde{u}_- lui soit homotope, et évite Δ . Cette courbe perturbée n'est par contre plus holomorphe en dehors du cylindre $[0, +\infty[\times P$. On peut maintenant projeter \tilde{u}_- sur Σ . Ses singularités sont encore non-essentiels puisqu'elles se trouvent dans la partie non-perturbée : on obtient donc une sphère $v : S^2 \rightarrow \Sigma$. Nous affirmons que v a un nombre de Chern positif ; comme Σ est monotone il suffit de montrer que v a une aire symplectique positive. On a

$$\int_{S^2} v^* \omega_\Sigma = \int_{S_-} \tilde{u}_-^* \pi_-^* \omega_\Sigma = \int_{\tilde{u}_-^{-1}(W^-)} \tilde{u}_-^* \pi_-^* \omega_\Sigma + \int_{\tilde{u}_-^{-1}(W_\infty^- \setminus W^-)} \tilde{u}_-^* \pi_-^* \omega_\Sigma.$$

Comme u_- n'est pas perturbée sur $W_\infty^- \setminus W^-$, où π_- est (J_∞, J_Σ) -holomorphe, le second terme est strictement positif. Quant au premier,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{u}_-^{-1}(W^-)} \tilde{u}_-^* \pi_-^* \omega_\Sigma &= \int_{\tilde{u}_-^{-1}(W^- \setminus \Delta)} \tilde{u}_-^* (-d\alpha^\nabla) \\ &= \int_{\partial \tilde{u}_-^{-1}(W^- \setminus \Delta)} \tilde{u}_-^* (-\alpha^\nabla) \\ &= e^{(r_0+\epsilon)^2} \int_{\partial \tilde{u}_-^{-1}(W^- \setminus \Delta)} \tilde{u}_-^* \left(-e^{-(r_0+\epsilon)^2} \alpha^\nabla \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{(r_0+\epsilon)^2} \int_{\partial \bar{u}_-^{-1}(W^- \setminus \Delta)} \tilde{u}_-^* \left(-e^{-r^2} \alpha^\nabla \right) \\
&= e^{(r_0+\epsilon)^2} \int_{\bar{u}_-^{-1}(W^- \setminus \Delta)} \tilde{u}_-^* d \left(-e^{-r^2} \alpha^\nabla \right) \\
&= e^{(r_0+\epsilon)^2} \int_{\bar{u}_-^{-1}(W^-)} \tilde{u}_-^* \omega \\
&= e^{(r_0+\epsilon)^2} \int_{u_-^{-1}(W^-)} u_-^* \omega
\end{aligned}$$

qui est positif puisque u_- est J_∞ -holomorphe. Finalement, on trouve bien $c_1^\Sigma([v]) > 0$.

Il suffit pour conclure d'utiliser que :

$$2 = \mu_{\Gamma_L}(\bar{u}) = \mu_L([\pi_+ \circ u_+]) + \sum_i 2c_1^\Sigma([\pi \circ u_i]) + 2c_1^\Sigma([v])$$

où tous les termes sont positifs puisqu'il s'agit de courbes holomorphes dans des variétés monotones, et la dernière classe de Chern est strictement positive. Étant donné que $N_\Sigma \geq 2$, nous avons atteint la contradiction recherchée. \square

4.2 Régularité de la structure presque-complexe

Nous avons utilisé dans la sous-section 2.2.2 que les espaces de courbes pseudo-holomorphes simples $\mathcal{L}(x, y)$ et $\mathcal{M}_{0,1}(V, L, J; 2)$ (avec ici $V = \Sigma$ ou W) étaient des variétés différentielles. Vérifions-le ; autrement dit, montrons que les structures presque complexes J_R et J_Σ sont régulières au sens de [MS04]. Pour simplifier les écritures, nous présenterons le résultat en détail seulement pour l'ensemble \mathcal{D} des courbes pseudo-holomorphes à bord lagrangien.

Considérons en effet l'ensemble $\mathcal{B} = C^\infty((D^2, S^1), (W, \Gamma_L))$ des applications lisses du disque vers W et à bord dans Γ_L . C'est une variété de Fréchet dont le tangent en un point u est constitué des champs de vecteurs à valeur dans TW le long de u , et dans $T\Gamma_L$ le long du bord :

$$T_u \mathcal{B} = \Omega_G^0(D^2, E) = \{ \xi \in \Omega^0(D^2, E) \mid \xi(S^1) \subset G \}$$

où $G = (\partial u)^* T\Gamma_L$ et $E = u^*(TW, J_R)$. De plus, \mathcal{B} est l'ensemble de départ de

$$\bar{\partial}_{J_R} : u \mapsto \frac{1}{2}(Tu + J_R \circ Tu \circ j)$$

avec j la multiplication complexe sur le disque. Pour $u \in \mathcal{B}$, $\bar{\partial}_{J_R}(u)$ est à images dans l'espace des formes de degré 1 antilinéaires par rapport à J_R , définies le long de u , à valeurs u^*TW à l'intérieur de D^2 et $(\partial u)^* T\Gamma_L$ sur S^1 , c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_u = \Omega_G^{0,1}(D^2, E) = \{ \eta \in \Omega^{0,1}(D^2, E) \mid \eta(TS^1) \subset G \}.$$

Globalement, \mathcal{E} constitue un fibré au-dessus de \mathcal{B} , dont une section est

$$\mathcal{S}(u) = (u, \bar{\partial}_{J_R}(u))$$

et l'on voit que \mathcal{D} est l'intersection du graphe de \mathcal{S} avec la section nulle. Pour se restreindre aux courbes simples, on prend l'intersection avec l'ouvert de \mathcal{B} constitué des courbes injectives quelque part, c'est-à-dire des applications u pour lesquelles il existe z dans l'intérieur de D^2 tel que $du(z) \neq 0$ et $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$.

L'idée est alors d'appliquer le théorème des fonctions implicites : il s'agit de montrer que l'intersection du graphe de \mathcal{S} avec la section nulle est transverse, c'est-à-dire que pour toute courbe $u \in \mathcal{D}$ on a $\text{Im}(T_u\mathcal{S}) + T_u\mathcal{B} = T_u\mathcal{E}$. Comme les vecteurs horizontaux sont déjà donnés par $T_u\mathcal{B}$, il faut et suffit que la composante verticale de $T_u\mathcal{S}$ soit surjective ; notons donc D_u celle-ci. Toutefois, ce théorème demande une application entre deux variétés de Banach. Pour satisfaire cette condition, il suffit de prolonger D_u sur l'adhérence $W_G^{k,p}(D^2, E)$ de $\Omega_G^0(D^2, E)$ dans l'espace de Sobolev $W^{k,p}(D^2, E)$, comme application à valeurs dans $W_G^{k,p}(D^2, \Lambda^{0,1}T^*D^2 \otimes E)$ qui est l'adhérence de $\Omega_G^{0,1}(D^2, E)$ dans $W^{k,p}(D^2, \Lambda^{0,1}T^*D^2 \otimes E)$. Les résultats de régularité elliptique (3.1.9 de [MS04]) impliquent que les zéros de $\bar{\partial}_{J_R}$ seront tout de même des courbes lisses.

Il ne nous reste alors qu'un paramètre libre : la structure presque complexe. Si celle-ci est compatible avec ω , D_u est en fait un opérateur de Fredholm (voir par exemple le théorème 8.1.5 de [AD12]), et le théorème de Smale (la version en dimension infinie du théorème de Sard) assure alors de la surjectivité de D_u pour les structures compatibles en dehors d'un sous-ensemble maigre.

Remarque 4.19. Cette discussion résume très rapidement le raisonnement conduisant au théorème 3.1.5 de [MS04].

Il nous faut cependant rappeler maintenant que le choix de la structure presque complexe J_R sur W n'était que partiellement libre : plus précisément, il nous était possible de choisir n'importe quelle structure compatible avec ω sur un voisinage U de W^- , tandis que sur $E_{r_0+\epsilon}$ il s'agissait d'appliquer i le long des fibres de \mathcal{N} et J_Σ sur la distribution horizontale H^∇ ; J_Σ , définie sur Σ , n'avait d'autre contrainte que d'être compatible avec ω_Σ .

Comme la structure presque complexe sur U est choisie arbitrairement, on obtient la régularité des disques sortant de $E_{r_0+\epsilon}$.

Afin de traiter le cas des disques qui restent dans $E_{r_0+\epsilon}$, remarquons d'abord que λ_R identifie $(E_{r_0+\epsilon}, J_R)$ avec (E'_R, J^R) où $E'_R = [-R, R] \times P \cup_{\{R\} \times P} W^+$; c'est dans ce cadre que nous raisonnerons. Notons alors J_H la restriction de J^R sur H^∇ , c'est-à-dire essentiellement J_Σ à travers l'identification 4.1. La définition de J^R peut être écrite comme la décomposition $(TE'_R, J^R) \simeq (H^\nabla, J_H) \oplus \pi^*(\mathcal{N}, i)$.

Soit u un disque qui reste dans E'_R . On pose $Tu|_{\pi^*\mathcal{N}}$ la composition de Tu avec la projection sur $\pi^*\mathcal{N}$ le long de H^∇ , et $Tu|_{H^\nabla}$ la composition de Tu avec la projection de H^∇ le long de $\pi^*\mathcal{N}$. On a donc la décomposition suivante :

$$\bar{\partial}_{J_R}(u) = \frac{1}{2} \left(Tu|_{\pi^*\mathcal{N}} + (\pi^*i) \circ Tu|_{\pi^*\mathcal{N}} \circ j \right) \oplus \frac{1}{2} \left(Tu|_{H^\nabla} + J_H \circ Tu|_{H^\nabla} \circ j \right).$$

On remarque alors que

$$Tu|_{H^\nabla} + J_H \circ Tu|_{H^\nabla} \circ j = \left(T\pi|_{H^\nabla} \right)^{-1} (T(\pi \circ u) + J_\Sigma \circ T(\pi \circ u) \circ j)$$

est nul si et seulement si $\pi \circ u$ est J_Σ -holomorphe.

Tout comme l'opérateur $\bar{\partial}_{J_R}$, le fibré vectoriel \mathcal{E} se décompose en la somme directe

$$\mathcal{E}_u \approx \Omega_{G_{\mathcal{N}}}^{0,1}(D^2, u^*(\pi^*\mathcal{N}, i)) \oplus \Omega_{G_H}^{0,1}(D^2, u^*(H^\nabla, J_H)).$$

où $G_{\mathcal{N}} = (\partial u)^*\pi^*TS^1$ et où $G_H = (\partial u)^*\left(T\pi|_{H^\nabla}\right)^{-1}TL$. Le terme de droite correspond aux formes de degré 1 antilinéaires par rapport à J_Σ au-dessus des applications lisses $(D^2, S^1) \rightarrow (\Sigma, L)$. À la partie de droite de $\bar{\partial}_{J_R}$ nous pouvons donc associer une linéarisation qui est surjective si et seulement si la linéarisation $\bar{\partial}_{J_\Sigma}$ l'est. Comme on l'a vu, c'est vrai pour une structure J_Σ générique au sens du théorème de Smale ; en particulier il existe une telle structure.

Pour régler le cas du terme de gauche, considérons une trivialisatoin holomorphe $g : (\pi \circ u)^*\mathcal{N} \rightarrow D \times \mathbb{C}$. Celle-ci entraîne les identifications :

$$\Omega_{G_{\mathcal{N}}}^{0,1}(D^2, u^*(\pi^*\mathcal{N}, i)) \approx_g \Omega_{g^{-1} \circ G_{\mathcal{N}}}^{0,1}(D^2, (\mathbb{C}, i))$$

et

$$\frac{1}{2} \left(Tu|_{\pi^*\mathcal{N}} + (\pi^*i) \circ Tu|_{\pi^*\mathcal{N}} \circ j \right) = g^{-1} \circ \bar{\partial}.$$

Comme la multiplication par i est une structure complexe intégrable, elle est régulière par le théorème de Riemann-Roch (C.1.10 dans [MS04]).

Comme cette décomposition continue d'être valable pour D_u , on obtient un opérateur surjectif, puisque surjectif sur chaque sous-espace de la décomposition.

4.3 Bijection entre les espaces de modules

Nous allons dans cette sous-section démontrer la proposition 4.3.

Rappelons tout d'abord le lemme 7.1.1 de [BK13] :

Proposition 4.20. *Soit $u : (D^2, S^1) \rightarrow (\Sigma, L)$ un disque J_Σ -holomorphe. Pour tout $\xi \in S^1$ et tout \tilde{p} dans la fibre au-dessus de $u(\xi)$, il existe un unique relèvement $\tilde{u} : (D^2, S^1) \rightarrow (\mathcal{N} \setminus \Sigma, \Gamma_L)$ de u qui est $J_{\mathcal{N}}$ -holomorphe et tel que $\tilde{u}(\xi) = \tilde{p}$.*

Démonstration. La preuve se fait en se ramenant au cadre de l'analyse complexe usuelle : d'abord en tirant (\mathcal{N}, J_Σ) en arrière par u , puis en trivialisant sur D le fibré obtenu. Ainsi, relever u en \tilde{u} revient à trouver une fonction $\Psi : D^1 \rightarrow \mathbb{C}$ qui :

- ne s'annule pas, puisque \tilde{u} ne rencontre pas Σ ,
- envoie ∂D dans l'image trivialisée de Γ_L ,
- vérifie $\Psi(\xi) = \tilde{p}$ où (ξ, \tilde{p}) est l'image de \tilde{p} dans $D \times \mathbb{C}$.

La deuxième condition revient à ce que pour $\zeta \in \partial D$ on ait $|\Psi(\zeta)| = h(\zeta)$ avec $h : \partial D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ correspondant à $u^*\Gamma_L$.

Comme Ψ ne s'annule pas sur un domaine simplement connexe, $\Psi = \exp \Phi$ où Φ est holomorphe. Notons $\Phi = g + if$ ses parties réelles et imaginaires. Alors g est l'unique solution du problème de Dirichlet avec la condition de bord $g = \ln \circ h$, et f est son conjugué harmonique. Φ est alors déterminée à une constante additive près, donc Ψ à une constante multiplicative près. Cette dernière est imposée par la troisième condition. \square

Au vu de la proposition 2.15, tâchons de mettre en correspondance l'espace des disques pseudo-holomorphes \tilde{u} passant par $\tilde{p} \in \Gamma_L$, vérifiant $[\partial\tilde{u}] = \tilde{g} \in \pi_1(\Gamma_L, \tilde{p})$ et $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}) = 2$ avec son homologue pour (Σ, L) .

Grâce à la proposition 4.4, les projections $u = \pi \circ \tilde{u}$ de ces disques sont bien définies ; elles passent par $p = \pi(\tilde{p})$, vérifient $[\partial u] = g = \pi_*\tilde{g}$ et $\mu_L(u) = 2$ par 3.13, et la construction de $J_{\mathcal{N}}$ nous assure qu'elles sont encore pseudo-holomorphes. La proposition 4.20 nous dit que cette projection est de surcroît injective entre les espaces de modules. Cependant, il pourrait y avoir un autre disque pseudo-holomorphe u passant aussi par p vérifiant $[\partial u] = g$ et $\mu_L(u) = 2$, dont le relèvement \tilde{u} n'aurait pas été compté en haut car $[\partial\tilde{u}] \neq \tilde{g}$: en d'autres mots, la projection pourrait ne pas être surjective. La proposition suivante permet de contrôler ce cas :

Proposition 4.21. *Soit $u : (D^2, S^1) \rightarrow (\Sigma, L)$ un disque J_{Σ} -holomorphe tel que $\mu_L(u) = 2$, $[\partial u] = \pi_*\tilde{g}$ et que u passe par $p \in L$. Fixons $\tilde{p} \in \Gamma_L \cap \pi^{-1}(p)$ et supposons qu'il existe un disque pseudo-holomorphe $\tilde{u}_0 : (D^2, S^1) \rightarrow (W, \Gamma_L)$ tel que $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}_0) = 2$, $[\partial\tilde{u}_0] = \tilde{g}$ et que \tilde{u}_0 passe par \tilde{p} .*

Si \tilde{u} est le relèvement pseudo-holomorphe de u passant par \tilde{p} , alors $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}) = 2$ et $[\partial\tilde{u}] = \tilde{g}$.

Démonstration. Par la proposition 3.13, nous avons que $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}) = \mu_L(u) = 2$. La proposition 4.4, d'étirement du cou, assure que tant \tilde{u}_0 que \tilde{u} évitent Δ .

Posons alors

$$\begin{aligned} \gamma : S^1 &\longrightarrow \Gamma_L \\ v &\longmapsto v.\tilde{p} \end{aligned}$$

de manière à ce que $\ker \pi_* = \langle [\gamma] \rangle \subset \pi_1(\Gamma_L)$, où π_* est l'application induite par π entre les groupes fondamentaux de Γ_L et L . Comme $\pi_*[\partial\tilde{u}] = [\partial u] = g = \pi_*\tilde{g}$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $[\partial\tilde{u}] = \tilde{g}[\gamma]^l$. En outre, $\mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}) = \mu_{\Gamma_L}(\tilde{u}_0)$ donc par monotonie

$$\int_{D^2} \tilde{u}_0^* \omega = \int_{D^2} \tilde{u}^* \omega.$$

Et comme on évite Δ , $\omega = -d(e^{-r^2} \alpha^{\nabla})$ et l'application de la formule de Stokes donne

$$e^{-r_0^2} \int_{S^1} (\partial\tilde{u}_0)^* \alpha^{\nabla} = e^{-r_0^2} \int_{S^1} (\partial\tilde{u})^* \alpha^{\nabla}$$

d'où

$$\int_{S^1} \partial\tilde{u}_0^* \alpha^{\nabla} = \int_{S^1} \partial\tilde{u}^* \alpha^{\nabla} + l \int_{S^1} \gamma^* \alpha^{\nabla}.$$

Comme $\int_{S^1} \gamma^* \alpha^{\nabla} > 0$, $l = 0$ et $[\partial\tilde{u}] = \tilde{g}$. □

4.4 Conclusion

Nous pouvons maintenant aisément montrer le théorème 4.1.

Démonstration. Comme nous l'avons vu dans la proposition 2.15, l'homologie de Floer relevée est définie sur le revêtement universel si et seulement si :

- le nombre de Maslov est strictement supérieur à 2 ou,
- ce nombre est 2 et pour tout point générique, tout élément du groupe fondamental borde un nombre pair de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov 2.

La proposition 3.13 assure que dans notre cas les nombres minimaux de Maslov sont égaux. Dans le cas où celui-ci est 2, la proposition 4.3 implique directement que si l'homologie relevée n'est pas définie sur le revêtement universel de Γ_L elle ne l'est pas non plus pour celui de L . S'il existe un élément du groupe fondamental de L qui borde un nombre pair de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov 2, en relevant un de ces disques par la proposition 4.20, on obtient un élément du groupe fondamental de Γ_L auquel appliquer la proposition 4.3. \square

Chapitre 5

Applications

Ce chapitre apporte la preuve des résultats principaux et traite des corollaires et applications que l'on peut en tirer, avant tout dans l'optique du cas où la variété ambiante est $\mathbb{C}P^n$.

Remarque 5.1. Sauf mention contraire explicite, les homologies des revêtements universels évoquées dans ce chapitre sont à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.1 Théorème principal dans le cas d'un $K(\pi, 1)$

Rassemblons ici la preuve de la première partie du théorème 1.25, c'est-à-dire l'énoncé suivant :

Théorème. *Soit Σ une variété symplectique dont le nombre de Chern est au moins 2 qui est une hypersurface kählérienne d'une plus grande variété de Kähler M , entière, telle que $[\Sigma]$ dans $H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit duale au sens de Poincaré de $[\omega_M] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ et que $M \setminus \Sigma$ soit un domaine de Weinstein sous-critique.*

Soit L une variété orientée, fermée, connexe qui est une lagrangienne monotone de Σ .

Si L est un espace sphérique, c'est-à-dire d'Eilenberg-MacLane de type alors le nombre de Maslov de L est $N_L = 2$, et il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.

Démonstration. D'après la section 3.2, Γ_L est – tout comme L dans Σ – une lagrangienne monotone de $M \setminus \Sigma$ et un $K(\pi, 1)$ orienté compact. La proposition 3.9 nous indique alors l'existence d'une transformation hamiltonienne pour laquelle Γ_L ne rencontre pas son image. L'homologie de Floer relevée, si elle bien définie, ne peut alors qu'être nulle, puisqu'elle est engendrée par les relevés des intersections entre Γ_L et son image.

Or, comme Γ_L est un $K(\pi, 1)$, son revêtement universel est contractile et, en particulier, n'a pas d'homologie hors le groupe d'indice zéro. Nous avons vu dans la sous-section 2.3.2 que cela interdisait à l'homologie de Floer relevée d'être nulle.

Par conséquent, cette homologie n'est pas définie. Le lemme 4.1 assure alors que l'homologie de Floer relevée n'est pas non plus définie pour le revêtement universel de L . Le résultat découle alors de la proposition 2.17. \square

5.2 Sur le revêtement universel de Γ_L

Nous nous tournons maintenant vers la deuxième condition possible dans le théorème 1.25.

Lemme 5.2. *Soit Σ une variété symplectique dont le nombre de Chern est au moins 2 qui est une hypersurface kählérienne d'une plus grande variété de Kähler M , entière, telle que $[\Sigma]$ dans $H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit duale au sens de Poincaré de $[\omega_M] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ et que $M \setminus \Sigma$ soit un domaine de Weinstein sous-critique.*

Soit L une variété orientée, fermée, connexe, dont tous les groupes d'homologie de degrés impairs du revêtement universel \tilde{L} s'annulent et qui est une lagrangienne monotone de Σ .

Si le revêtement universel de Γ_L est $\tilde{\Gamma}_L = \tilde{L} \times \mathbb{R}$ alors le nombre de Maslov N_L de L est 2 et il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.

Démonstration. Vu l'hypothèse sur $\tilde{\Gamma}_L$, \tilde{L} en est un rétracte par déformation et leurs homologies sont identiques; en particulier, ses groupes de degrés impairs s'annulent. Comme dans la preuve précédente, la discussion conduite dans la sous-section 2.3.2 interdit alors à l'homologie de Floer relevée sur $\tilde{\Gamma}_L$ d'être nulle, alors qu'elle l'est nécessairement si elle est définie.

Elle n'est donc de nouveau pas définie, et le résultat découle à nouveau de la combinaison du lemme 4.1 et de la proposition 2.17. \square

Lemme 5.3. *Si la classe d'Euler $e_{\Gamma_L} \in H^2(L, \mathbb{Z})$ est de torsion, alors le revêtement universel de Γ_L est $\tilde{\Gamma}_L = \tilde{L} \times \mathbb{R}$.*

Démonstration. Scindons $H^2(L; \mathbb{Z})$ en sa partie libre et sa torsion. Le théorème des coefficients universels [Hat02] implique que cette dernière s'identifie à la torsion de $H_1(L; \mathbb{Z})$. Celui-ci peut être vu comme l'image de $\pi_1(L)$ par son abélianisation α ; posons alors G l'image réciproque par α de la partie libre de $H_1(L; \mathbb{Z})$. C'est un sous-groupe (normal) de $\pi_1(L)$, d'indice fini par le premier théorème d'isomorphisme. On considère alors $p : \tilde{L} \rightarrow L$ le revêtement fini relatif à G .

Il est clair que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\tilde{L}) \simeq G & \longrightarrow & H_1(\tilde{L}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \\ \pi_1(L) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(L; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute, et par construction $p_* : \pi_1(\tilde{L}) \rightarrow \pi_1(L)$ est l'inclusion de G . En conséquence, l'application $p_* : H_1(\tilde{L}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(L; \mathbb{Z})$ est à images dans la partie libre de $H_1(L; \mathbb{Z})$, et en particulier cette application s'annule sur la torsion de $H_1(\tilde{L}; \mathbb{Z})$.

Considérons maintenant plus attentivement la suite exacte qui donne lieu au théorème des coefficients universels :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_1(\tilde{L}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{L}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \text{Hom}(H_2(\tilde{L}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{Ext}(p_*, \mathbb{Z}) & & \uparrow p^* & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_1(L; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(L; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}(H_2(L; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et souvenons-nous que la classe d'Euler e_{Γ_L} est dans la torsion de $H^2(L; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire dans $\ker(\beta)$. Celle du fibré en cercles $p^*\Gamma_L$ au-dessus de \bar{L} est alors, par naturalité, le tiré en arrière $p^*e_{\Gamma_L}$, qui est aussi dans la torsion de $H^2(\bar{L}; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire $\ker(\bar{\beta})$. La calculer revient donc à calculer l'image par $\text{Ext}(p_*, \mathbb{Z})$ d'un antécédent de e_{Γ_L} . Comme $\text{Ext}(\cdot, \mathbb{Z})$ est nul sur la partie libre d'un groupe abélien et que p_* est nulle sur la partie de torsion, $\text{Ext}(p_*, \mathbb{Z}) = 0$, $p^*e_{\Gamma_L} = 0$ et $p^*\Gamma_L = S^1 \times \bar{L}$. Son revêtement universel, et par conséquent celui de Γ_L , est donc $\mathbb{R} \times \tilde{L}$. \square

Lemme 5.4. *Si $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$ est engendré par $[\omega_\Sigma]$ alors la classe d'Euler $e_{\Gamma_L} \in H^2(L, \mathbb{Z})$ est de torsion.*

Remarque 5.5. C'est en particulier le cas pour $\Sigma = \mathbb{C}P^n$.

Démonstration. Notons P le fibré au-dessus de Σ des cercles de même rayon que ceux de Γ_L , de manière à ce que $\Gamma_L = \iota^*P$ où ι désigne l'inclusion $L \hookrightarrow \Sigma$. Par naturalité de la classe d'Euler $e_{\Gamma_L} = \iota^*e_P$, mais $e_P \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ est colinéaire à $[\omega_\Sigma]$ si elle n'est pas de torsion, et $\iota^*\omega_\Sigma = 0$ puisque L est lagrangienne. \square

La combinaison des trois lemmes précédents prouve le théorème 1.25 sous sa deuxième condition.

5.3 Lagrangienne dans un produit $\mathbb{C}P^n \times V$

Théorème 5.6. *Soit (V^{2d}, ω_V) une variété symplectique telle que le produit $(\mathbb{C}P^n \times V, \omega_{FS} \oplus \omega_V)$ soit monotone. Soit L une lagrangienne fermée, orientable et monotone de $\mathbb{C}P^n \times V$ telle que les groupes d'homologie de degré impair de son revêtement universel \tilde{L} s'annulent. Alors le nombre de Maslov de L est $N_L = 2$, et il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ dont le centralisateur est d'indice fini.*

Remarque 5.7.

1. $(\mathbb{C}P^n \times V, \omega_{FS} \oplus \omega_V)$ est en particulier monotone lorsque $\pi_2(V) = 0$.
2. On retrouve cette généralisation dans le théorème 4.2.A de [Bir06].

Démonstration. L'idée est de construire Γ_L dans $\mathbb{C}^{n+1} \times V$ de la même façon que présenté en 3; la proposition 3.13 en particulier s'étend à ce cas. Le lemme 5.4 s'applique toujours puisque Γ_L est construit de même, et le lemme 5.3 ne dépend pas de la variété ambiante. On en déduit que l'homologie de Floer relevée n'est pas définie pour le revêtement universel de Γ_L .

Toute contribution à l'indice de Maslov venant de $V \subset \mathbb{C}^{n+1} \times V$ pour les disques de la proposition 4.3 serait positive, donc le résultat tient toujours. On en déduit que le théorème d'équivalence des homologies relevées 4.1 est toujours valide ici, et donc que l'homologie de Floer relevée sur \tilde{L} n'est pas définie. \square

5.4 Cas des sommes connexes

Le signe $*$ entre deux groupes désignera ici, comme c'est souvent l'usage, leur produit libre; l'élément neutre sera noté e .

Lemme 5.8. Soit $(G_i)_{i \in I}$ une collection finie d'au moins deux groupes non-triviaux. Il existe un élément non-trivial $g \in *_{i \in I} G_i$ dont le centralisateur est d'indice fini si, et seulement si, $|I| = 2$ et chaque G_i est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque 5.9. On peut décrire ce dernier cas de manière explicite : en notant $\text{Dih}_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle u, v \mid u^2, v^2 \rangle$, on vérifie facilement que le centralisateur de uv est $Z(uv) = \langle uv \rangle = \left\{ (uv)^k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et qu'il est d'indice fini.

Démonstration. Nous supposons pour cette preuve que $I = \{1, 2\}$, le cas général en découlant immédiatement par associativité du produit libre. Un élément non-trivial de $G_1 * G_2$ peut s'écrire de manière unique comme un produit d'éléments non-triviaux de G_1 et G_2 alternativement. Ce simple fait forme la base du joli sous-lemme suivant :

Lemme 5.10. Soit $u \in G_1$, $v \in G_2$ et $g \in G_1 * G_2$ tous non-triviaux. S'il existe une puissance strictement positive de uv qui commute avec g , alors g est lui-même une puissance de uv .

Démonstration. Supposons ainsi que $(uv)^k \in Z(g)$ pour $k > 0$. On écrit g comme produit $\prod_{j=1}^n z_j$ d'éléments non-triviaux de chacun des groupes, alternativement, avec $n > 0$. Commençons par vérifier que n est bien pair : si ce n'est pas le cas la décomposition de g commence et finit avec un facteur du même groupe, et les décompositions en produits de $(uv)^k g$ et $g(uv)^k$ n'ont même pas autant de facteurs.

On peut maintenant écrire $g = \prod_{j=1}^m x_j y_j$. Si les x_j appartiennent à G_1 et les y_j à G_2 l'égalité de $(uv)^k g$ et $g(uv)^k$ assure que les k premiers x_j et y_j sont respectivement u et v , et en simplifiant au fur et à mesure que $x_{j+k} = x_j$ et $y_{j+k} = y_j$; on a donc bien $g = (uv)^m$. Sinon, il suffit d'utiliser g^{-1} pour revenir à cette situation, et alors $g = (uv)^{-m}$. \square

Prouvons maintenant le lemme principal. S'il existe $u' \neq u$ non-triviaux dans G_1 (respectivement $v' \neq v$ dans G_2) alors g ne peut pas être à la fois une puissance et de uv et de $u'v$ (respectivement uv') ; il n'y a donc aucune puissance de uv ou aucune puissance de $u'v$ (respectivement uv') dans $Z(g)$. Comme ces produits ont chacun une infinité de puissances, $Z(g)$ est d'indice infini. Sinon, on est dans le cas $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

En combinant ce lemme 5.8 avec le théorème 1.22, on en tire le corollaire suivant :

Corollaire 5.11. Soit L une variété compacte et orientable dont tous les groupes d'homologie de degrés impairs de son revêtement universel \tilde{L} s'annulent. Si son groupe fondamental s'écrit comme un produit libre (non-trivial) autre que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et que :

1. $H^2(L, \mathbb{Z}) = 0$ ou que
2. $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$ est engendré par $[\omega_\Sigma]$,

alors L ne peut être plongée dans Σ comme sous-variété lagrangienne monotone.

On peut alors montrer le corollaire 1.23 :

Corollaire. Soit $(L_i)_{i \in I}$ une collection finie d'au moins deux variétés compactes, orientables, de dimension $2k + 1$ dont tous les groupes d'homologie de degrés impairs de leurs revêtements universels s'annulent. Alors il n'existe pas de plongement lagrangien monotone de la somme connexe $\#_{i \in I} L_i$ dans $\mathbb{C}P^{2k+1}$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'en particulier les groupes de degré $2k + 1 = \dim L_i$ des revêtements universels s'annulent : ces revêtements ne sont pas compacts contrairement aux L_i , et donc tous les groupes fondamentaux sont infinis.

Prouvons ensuite que la propriété en homologie s'étend à $\#_{i \in I} L_i$: par définition du revêtement universel son premier groupe d'homologie est nul ; par non-compacité c'est aussi le cas de son $2k + 1^{\text{e}}$ groupe. Les autres peuvent être calculés à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris : au moment de faire la somme connexe de deux L_i , on considère pour chacun un ouvert consistant en la variété privée d'une boule, de manière à ce que l'intersection de ces deux ouverts dans la somme connexe soit une couronne solide. On applique ensuite aux préimages de ces deux ouverts sur le revêtement universel la suite de Mayer-Vietoris. Une récurrence simple achève le raisonnement.

Les hypothèses du corollaire 5.11 sont alors vérifiées pour $\#_{i \in I} L_i$. \square

5.5 Cas de la dimension 3

En dimension 3 la condition de nullité des groupes d'homologie de degrés impairs du revêtement universel est évidemment très faible : le premier est toujours nul, le troisième l'est si et seulement si le groupe fondamental de la variété de départ est infini.

5.5.1 Primalité

C'est justement le cas des variétés qui ne sont pas premières : si u et v désignent des éléments non-triviaux des groupes G_1 et G_2 réciproquement, alors l'élément uv du produit libre $G_1 * G_2$ est clairement d'ordre infini. On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 5.12. *Toute lagrangienne L monotone, fermée et orientée de $\mathbb{C}P^3$ est première.*

Démonstration. Si L est la somme connexe non-triviale $L_1 \# L_2$, le théorème de Poincaré-Perelman [Per02, Per03a, Per03b] assure que ni L_1 ni L_2 ne sont simplement connexes. En particulier $\pi_1(L) = \pi_1(L_1) * \pi_1(L_2)$ est infini, et on peut appliquer le théorème principal 1.22. Le lemme 5.8 assure alors que $\pi_1(L_1) = \pi_1(L_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; on en déduit que nécessairement $L_1 = L_2 = \mathbb{R}P^3$ – voir par exemple le théorème 2.2 de [AFW12], associé à la remarque (A) sur la même page.

Or, $2H_1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$ est trivial – on peut le voir par exemple en utilisant la suite de Mayer-Vietoris. Le théorème 1.19 énoncé par M. Damian dans [Dam15] exclut alors ce cas. \square

5.5.2 Cas sphérique

En dimension trois, la conjecture d'elliptisation prouvée par Perelman assure que toute variété dont le groupe fondamental est fini est une variété sphérique, c'est-à-dire se construisant comme quotient de la sphère par l'action libre d'un sous-groupe fini de SO_4 . Parmi ces variétés sphériques, les espaces lenticulaires sont celles dont le groupe fondamental est cyclique.

En outre, le nombre de Maslov d'une variété orientable est pair et soumis à l'inégalité d'Oh 1.13, il ne peut donc prendre que les valeurs 2 ou 4 ; nous allons explorer chacune de ces possibilités.

Proposition 5.13. *Toute lagrangienne fermée, orientée, sphérique de nombre de Maslov 4 de $\mathbb{C}P^3$ est un espace lenticulaire $L(p, q)$ avec p pair.*

Remarque 5.14. Cette classe inclut l'exemple de $\mathbb{R}P^3$. Comme il avait déjà été observé par P. Biran dans [Bir06] la condition sur le nombre de Maslov implique que $H^*(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en tant qu'espaces gradués.

Démonstration. Comme L est une variété sphérique, son groupe fondamental est fini et par conséquent $H_1(L; \mathbb{Z})$ également. La proposition 2.11 assure alors qu'elle est monotone.

Le théorème 1.7 b de M. Damian dans [Dam12] implique alors que le groupe fondamental de $\Gamma_L \subset \mathbb{C}^4$ est \mathbb{Z} . De plus comme L est sphérique son deuxième groupe d'homotopie est trivial. La suite exacte correspondant à cette fibration en cercles

$$\pi_2(L) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(\Gamma_L) \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \perp$$

devient alors

$$\perp \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \perp$$

et donc $\pi_1(L)$ est cyclique et L est lenticulaire. En calculant son homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, par exemple à l'aide du théorème des coefficients universels, la première condition du théorème de P. Seidel 1.18 implique que p doit être pair. \square

Remarque 5.15. Le cas $N_L = 2$ est au moins non vide, puisqu'il contient l'exemple de R. Chiang.

5.5.3 Cas réductible

Définition 5.16. Une variété de dimension 3 est irréductible si toute sphère plongée y borde une boule plongée.

Remarque 5.17. Le « théorème de la sphère » de Papakyriakopoulos – voir par exemple [Pap57, Whi58], ou en français [Bat71] – affirme que si le deuxième groupe d'homotopie est non-trivial, il existe une sphère plongée. La condition ci-dessus équivaut donc à $\pi_2 = 0$.

Fait 5.18. *La seule variété de dimension trois orientée qui est première sans être irréductible est le produit du cercle et de la sphère.*

Remarque 5.19. En conséquence de la proposition 5.12, c'est donc la seule topologie réductible possible.

5.5.4 Cas asphérique

Sinon, L est un $K(\pi, 1)$. En effet, le revêtement universel de L partage avec celle-ci son deuxième groupe d'homotopie, qui est donc nul; par le théorème d'Hurewicz, il est acyclique en degré 1 et 2. Or, comme le groupe fondamental est infini, son troisième groupe d'homologie est aussi nul, ainsi que les suivants par argument de dimension, et ce revêtement est donc totalement acyclique, donc totalement asphérique à nouveau par le théorème d'Hurewicz. La variété L est bien un espace d'Eilenberg-MacLane.

Proposition 5.20. *Soit L un $K(\pi, 1)$ de dimension 3 fermé et orienté, dans le groupe fondamental duquel existe un élément g non trivial dont le centralisateur $Z(g)$ est d'indice fini. Alors L est un fibré de Seifert.*

Démonstration. Notons $\bar{L} \rightarrow L$ le revêtement fini de L correspondant à $Z(g)$. D'après le théorème 1.15 de [AFW12], L est un fibré de Seifert si et seulement si \bar{L} l'est. Or, comme \bar{L} est un $K(\pi, 1)$, $g \in \pi_1(\bar{L}) = Z(g)$ est d'ordre infini, et $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}$ est un sous-groupe normal. Le théorème 3.5 de [AFW12] implique alors que \bar{L} est un fibré de Seifert. \square

Le théorème 1.26 en découle immédiatement.

5.6 Conjectures

Au vu du théorème 1.11 décrivant la topologie des lagrangiennes monotones de \mathbb{R}^6 , montré par M. Damian dans [Dam15], on peut espérer l'énoncé suivant :

Conjecture 5.21. *Soit $L \subset \mathbb{C}P^3$ une lagrangienne monotone fermée et orientable dont le groupe fondamental est infini. Alors L est difféomorphe au produit de S^1 par une surface fermée orientable.*

La démonstration du théorème de M. Damian repose sur l'existence d'un morphisme sur le groupe fondamental de L à valeur dans \mathbb{Z} valant 1 sur une partie finie stable par conjugaison; en l'occurrence la moitié du morphisme de de Maslov convient comme on l'a vu dans le paragraphe 2.3.2. Malheureusement, il n'est pas possible d'utiliser ce morphisme tel quel, puisqu'il n'est pas défini sur $\pi_1(L)$ dans le cas de $\mathbb{C}P^3$. Cependant, il l'est sur $\pi_1(\Gamma_L)$ puisque $\Gamma_L \subset \mathbb{C}^4$; en trouvant une bonne section $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(\Gamma_L)$ on pourrait tenir le même raisonnement.

Bibliographie

- [Abb84] Edwin Abbott ABBOTT : *Flatland : A Romance of Many Dimensions*. Seeley, 1884.
- [AD12] Michèle AUDIN et Mihai DAMIAN : *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.
- [AFW12] Matthias ASCHENBRENNER, Stefan FRIEDL et Henry WILTON : 3-manifold groups. <http://arxiv.org/abs/1205.0202>, mai 2012.
- [AO03] Amartuvshin AMARZAYA et Yoshihiro OHNITA : Hamiltonian stability of certain minimal lagrangian submanifolds in complex projective spaces. *Tohoku Math. J. (2)*, 55(4) :583–610, 12 2003.
- [Arn67] Vladimir Igorevitch ARNOLD : Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification. *Funktsional Anal. i Prilozhen. 1*, pages 1–14, 1967.
- [Arn86] Vladimir Igorevitch ARNOLD : First steps in symplectic topology. *Russian Mathematical Surveys*, 41(6) :1, 1986.
- [Aud88] Michèle AUDIN : Fibrés normaux d’immersions en dimension double, points doubles d’immersions lagrangiennes et plongements totalement réels. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 63 :593–623, 1988.
- [Aur14] Denis AUROUX : Infinitely many monotone Lagrangian tori in \mathbb{R}^6 . *Inventiones mathematicae*, pages 1–16, 2014.
- [Bat71] Jean-Loïc BATUDE : Singularités génériques des applications différentiables de la 2-sphère dans une 3-variété différentiable. Application à la démonstration du théorème de la sphère. *Ann. Inst. Fourier*, 21(3) :155–172, 1971.
- [BC02] Paul BIRAN et Kai CIELIEBAK : Lagrangian embeddings into subcritical Stein manifolds. *Israel Journal of Mathematics*, 127(1) : 221–244, 2002.
- [BC07] Paul BIRAN et Octav CORNEA : Quantum Structures for Lagrangian Submanifolds. *ArXiv e-prints*, août 2007.
- [BC09] Paul BIRAN et Octav CORNEA : A Lagrangian Quantum Homology. *New Perspectives and Challenges in Symplectic Field Theory*, CRM Proceedings and Lecture Notes(49) :1–44, 2009.
- [BEH⁺03] Frédéric BOURGEOIS, Yakov ELIASHBERG, Helmut HOFER, Kris WYSOCKI et Eduard ZEHNDER : Compactness results in symplectic field theory. *Geometry and Topology*, 7(2) :799–888, 2003.
- [Bir01] Paul BIRAN : Lagrangian barriers and symplectic embeddings. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 11(3) :407–464, 2001.

- [Bir06] Paul BIRAN : Lagrangian non-intersections. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 16(2) :279–326, 2006.
- [BK13] Paul BIRAN et Michael KHANEVSKY : A Floer–Gysin exact sequence for Lagrangian submanifolds. *Comment. Math. Helvetici*, 88(4) : 899–952, 2013.
- [Buh10] Lev BUHOVSKY : The Maslov class of Lagrangian tori and quantum products in Floer cohomology. *J. Topol. Anal.*, 2(1) :57–75, 2010.
- [CE12] Kai CIELIEBAK et Yakov ELIASHBERG : *From Stein to Weinstein and Back : Symplectic Geometry of Affine Complex Manifolds*. American Mathematical Society colloquium publications. American Mathematical Society, 2012.
- [Chi04] River CHIANG : New Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}P^n$. *International Mathematics Research Notices*, 2004(45) :2437–2441, 2004.
- [CM14] Kai CIELIEBAK et Klaus MOHNKE : Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings. <http://arxiv.org/abs/1411.1870>, novembre 2014.
- [CS10] Yuri CHEKANOV et Felix SCHLENK : Notes on monotone Lagrangian twist tori. *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences*, 17(0) :104–121, 2010.
- [Dam99] Mihai DAMIAN : *Homologie de Novikov et applications en topologie symplectique*. Thèse de doctorat, École polytechnique, 1999.
- [Dam09] Mihai DAMIAN : Constraints on exact Lagrangians in cotangent bundles of manifolds fibered over the circle. *Comment. Math. Helv.*, 84(4) :705–746, 2009.
- [Dam10] Mihai DAMIAN : *Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes*. Habilitation à diriger des recherches en mathématiques, Université de Strasbourg, novembre 2010. 84 pages.
- [Dam12] Mihai DAMIAN : Floer homology on the universal cover, a proof of Audin’s conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds. *Comment. Math. Helvetici*, 87 :433–462, 2012.
- [Dam15] Mihai DAMIAN : On the topology of monotone Lagrangian submanifolds. *Annales scientifiques de l’école normale supérieure*, 48(1) :237–252, 2015.
- [DM69] Pierre DELIGNE et David MUMFORD : The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 36(1) :75–109, January 1969.
- [EEMS13] Tobias EKHOLOM, Yakov ELIASHBERG, Emmy MURPHY et Ivan SMITH : Constructing exact Lagrangian immersions with few double points. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 23(6) :1772–1803, 2013.
- [EGH00] Yakov ELIASHBERG, Alexander GIVENTAL et Helmut HOFER : Introduction to symplectic field theory. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, (Special Volume, Part II) :560–673, 2000. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [Flo88] Andreas FLOER : The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(6) : 775–813, 1988.

- [Flo89] Andreas FLOER : Symplectic fixed points and holomorphic spheres. *Communications in Mathematical Physics*, 120(4) :575–611, 1989.
- [FOOO09] Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA et Kaoru ONO : Anti-symplectic involution and Floer cohomology. <http://arxiv.org/abs/0912.2646>, décembre 2009.
- [Fuk05] Kenji FUKAYA : Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology. *"Morse Theoretic methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology"*, ed. P. Biran etc. *Nato Science Series II*, 217 :231–276, 2005.
- [Gad08] Agnès GADBLED : *Sous-variétés lagrangiennes monotones*. Theses, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, juin 2008.
- [Gad13] Agnès GADBLED : On exotic monotone Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ and $S^2 \times S^2$. *J. Symplectic Geom.*, 11(3) :343–361, 06 2013.
- [Giv86] Alexandre Borissovitch GIVENTAL : Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies ouverts de Whitney. *Funktsional Anal. i Ego Prilozhen.*, 20(3) :42–54, Juillet-septembre 1986.
- [Gro85] Mikhaïl Leonidovitch GROMOV : Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, 82(2) :307–347, 1985.
- [Gro86] Mikhaïl Leonidovitch GROMOV : *Partial Differential Relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 1986.
- [Hat02] Allen HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Iri14] Hiroshi IRIYEH : Symplectic topology of Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}P^n$ with intermediate minimal Maslov numbers. <http://arxiv.org/abs/1401.0777>, janvier 2014.
- [KO98] Daesung KWON et Yong-Geun OH : Structure of the image of analytic discs attached to totally real submanifolds. *In The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996)*, volume 25 de *Monogr. Geom. Topology*, pages 139–166. Int. Press, Cambridge, MA, 1998.
- [KO00] Daesung KWON et Yong-Geun OH : Structure of the image of (pseudo)-holomorphic discs with totally real boundary condition. *Comm. Anal. Geom.*, 8(1) :31–82, 2000. Appendix 1 by Jean-Pierre Rosay.
- [Lau93] François LAUDENBACH : *Topologie différentielle : majeure de mathématique*. Ecole polytechnique, 1993.
- [Laz] Laurent LAZZARINI : Decomposition of a J-Holomorphic curve. Téléchargeable sur <https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.lazzarini/Articles/net.ps>.
- [Mil63] John Willard MILNOR : *Morse Theory*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1963.
- [Mor01] Shigeyuki MORITA : *Geometry of Differential Forms*. Iwanami series in modern mathematics. American Mathematical Society, 2001.
- [MS74] John Willard MILNOR et James Dillon STASHEFF : *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

- [MS95] Dusa MCDUFF et Dietmar Arno SALAMON : *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1995.
- [MS04] Dusa MCDUFF et Dietmar Arno SALAMON : *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*. Numéro vol. 52 de American Mathematical Society colloquium publications. American Mathematical Society, 2004.
- [Nem09] Stefan NEMIROVSKI : Lagrangian Klein bottles in \mathbb{R}^{2n} . *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 19(3) :902–909, 2009.
- [Oh93] Yong-Geun OH : Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(7) :949–993, 1993.
- [Oh96] Yong-Geun OH : Floer cohomology, spectral sequences, and the Maslov class of Lagrangian embeddings. *International Mathematics Research Notices*, 1996(7) :305–346, 1996.
- [Pap57] Christos Dimitriou PAPAKYRIAKOPOULOS : On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Annals of Mathematics*, 66(1) :1–26, 1957.
- [Per02] Grigori Iakovlevitch PERELMAN : The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. <http://arxiv.org/abs/math/0211159>, novembre 2002.
- [Per03a] Grigori Iakovlevitch PERELMAN : Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math/0307245>, juillet 2003.
- [Per03b] Grigori Iakovlevitch PERELMAN : Ricci flow with surgery on three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math/0303109>, mars 2003.
- [Pol91] Leonid POLTEROVICH : The surgery of lagrange submanifolds. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 1(2) :198–210, 1991.
- [Sch15] Simon SCHATZ : A topological constraint for monotone Lagrangians in hypersurfaces of Kähler manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, 281(3) :877–892, août 2015.
- [Sei00] Paul SEIDEL : Graded Lagrangian submanifolds. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :103–149, 2000.
- [Sta62] John STALLINGS : On fibering certain 3-manifolds. *In Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, pages 95–100. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [Via14] Renato VIANNA : Infinitely many exotic monotone Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$. <http://arxiv.org/abs/1409.2850>, septembre 2014.
- [Vit87] Claude VITERBO : Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d’action et indice des systèmes hamiltoniens. (Intersection of Lagrangian submanifolds, action functionals and indices of Hamiltonian systems). *Bull. Soc. Math. Fr.*, 115 :361–390, 1987.
- [Vit90] Claude VITERBO : A new obstruction to embedding Lagrangian tori. *Inventiones mathematicae*, 100(1) :301–320, 1990.
- [Whi58] John Henry Constantine WHITEHEAD : On 2-spheres in 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64(4) :161–166, 07 1958.

- [Wol85] Scott WOLPERT : On the weil-petersson geometry of the moduli space of curves. *American Journal of Mathematics*, 107(4) :969–997, 1985.

Les sous-variétés isotropes maximales en géométrie symplectique sont appelées lagrangiennes ; parmi celles-ci on en distingue certaines dites monotones. Historiquement, leur définition est en partie motivée par la construction de l'homologie de Floer lagrangienne ; ces sous-variétés présentent ainsi une classe plus rigide, moins étendue, de lagrangiennes.

Ce manuscrit établit une contrainte sur le groupe fondamental de certaines lagrangiennes monotones, qui s'applique en particulier lorsque la variété symplectique ambiante est l'espace projectif complexe. Une des conséquences du théorème principal est d'exclure du cas monotone toute une collection d'exemples classiques dus à L. Polterovich. Il conduit également à une discussion sur les topologies possibles en dimension 3.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

ISSN 0755-3390

IRMA 2016/005

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01359750>