



École doctorale régionale Sciences
Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France
Université du Littoral Côte d'Opale



Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 Décembre 2015
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université du Littoral Côte d'Opale
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Titre de la thèse

**Analyse numérique d'une approximation
élément fini pour un modèle d'intrusion
saline dans les aquifères côtiers**

par

Abudawia Amel

Composition du jury :

Jean-Paul Chehab
Paul Deuring
Jocelyne Erhel
Carole Rosier

Hassane Sadok
Rachid Touzani

Pr., Univ. de Picardie J. Verne, Examineur.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Examineur.

D.R., Inria Rennes, Rapporteur.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Directeur de thèse.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Président de Jury.

Pr., Univ. Clermont-Ferrand 2, Rapporteur.



École doctorale régionale Sciences
Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France
Université du Littoral Côte d'Opale



Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 Décembre 2015
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université du Littoral Côte d'Opale
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Titre de la thèse

**Analyse numérique d'une approximation
élément fini pour un modèle d'intrusion
saline dans les aquifères côtiers**

par

Abudawia Amel

Composition du jury :

Jean-Paul Chehab
Paul Deuring
Jocelyne Erhel
Carole Rosier

Hassane Sadok
Rachid Touzani

Pr., Univ. de Picardie J. Verne, Examineur.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Examineur.

D.R., Inria Rennes, Rapporteur.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Directeur de thèse.

Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Président de Jury.

Pr., Univ. Clermont-Ferrand 2, Rapporteur.

Remerciements

Tout d'abord, j'exprime ma profonde reconnaissance à Shalom Eliahou et Hassane Sadok actuel et précédent directeurs du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université du Littoral Côte d'Opale, pour m'avoir accueillie dans leur locaux et pour leurs soutiens constants.

Je remercie chaleureusement Carole Rosier, ma directrice de thèse pour m'avoir permis de travailler sur ce sujet passionnant. Elle a su me faire profiter de ses connaissances en analyse numérique des EPDs tout en les appliquant au domaine complexe de l'hydrogéologie. J'espère avoir su profiter de son expérience en mathématiques appliquées.

Je tiens à remercier, à nouveau, Hassane Sadok pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je le remercie aussi sincèrement d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie extrêmement, Jocelyne Erhel et Rachid Touzani pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et aussi d'être membres du jury. Je les remercie tout particulièrement pour l'énorme travail qu'ils ont accompli, qui m'a permis d'améliorer grandement ce document.

Ma gratitude va également à Jean-Paul Chehab et Paul Deuring qui se sont intéressés à mon travail et qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont aussi à Henrique Rodrigues pour son aide très utile, en particulier pour l'élaboration du chapitre 7 mais aussi pour son amical soutien durant ma dernière année de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Isabelle Buchard et Philippe Marion pour m'avoir soutenue et aidée de manière constante tout au long de mon doctorat.

Je voudrais également remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées que j'ai eu la chance de côtoyer durant ces trois années.

Merci aussi à mon mari et à mes enfants ainsi qu'à tous mes amis en Libye.

Je dédie cette thèse à ma famille qui m'a prodigué le soutien moral et matériel nécessaire à l'accomplissement de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un schéma élément fini que nous appliquons à un modèle décrivant l'intrusion saline dans les aquifères côtiers confinés et libres. Le modèle est basé sur l'approche hydraulique qui consiste à moyenner verticalement le problème initial $3D$, cette approximation repose sur une hypothèse d'écoulement quasi-hydrostatique qui, loin des épontes et des sources, est vérifiée. Pour modéliser les interfaces entre l'eau douce et l'eau salée (respectivement entre la zone saturée et la zone sèche), nous combinons l'approche 'interface nette' à l'approche avec 'interface diffuse'; cette approche est déduite de la théorie de champ de phase, introduite par Allen-Cahn, pour décrire les phénomènes de transition entre deux zones. Compte tenu de ces approximations, le problème consiste en un système fortement couplé d'edps quasi-linéaires de type parabolique dans le cas des aquifères libres décrivant l'évolution des profondeurs des 2 surfaces libres et de type elliptique-parabolique dans le cas des aquifères confinés, les inconnues étant alors la profondeur de l'interface eau salée/eau douce et la charge hydraulique de l'eau douce.

Dans la première partie de la thèse, nous donnons dans le cas d'un aquifère confiné, des résultats d'estimation d'erreur d'un schéma semi-implicite en temps combiné à une discrétisation en espace de type élément fini P_k Lagrange. Ce résultat utilise entre autre un résultat de régularité du gradient de la solution exacte dans l'espace $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$, ce qui permet de traiter la non-linéarité et d'établir l'estimation d'erreur sous des hypothèses de régularité raisonnables de la solution exacte.

Dans la seconde partie de la thèse, nous généralisons l'étude précédente au cas de l'aquifère libre. La difficulté principale est liée à la complexité du système d'edps paraboliques mais à nouveau, grâce au résultat de régularité $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ établi pour les gradients des surfaces libres, nous montrons que le schéma est d'ordre 1 en temps et k en espace pour des solutions suffisamment régulières.

Nous concluons ce travail par des simulations numériques dans différents contextes (impact de la porosité et de la conductivité hydraulique sur l'évolution de l'interface, pompage et injection d'eau douce, effet des marées) validant ainsi le modèle et le schéma. Puis nous comparons les résultats à ceux obtenus avec un schéma volume fini construit à partir d'un maillage structuré.

Summary

In this work, we study a finite element scheme we apply to a model describing saltwater intrusion into coastal aquifers confined and free. The model is based on the hydraulic approach of vertically averaging the 3D original problem, this approximation is based on a quasi-hydrostatic flow hypothesis which, instead of the walls and springs, is checked. To model the interface between freshwater and salt water (respectively between the saturated zone and dry zone), we combine the approach net interface (approach with the diffuse interface); This approach is derived from the phase field theory introduced by Allen-Cahn, to describe the phenomena of transition between two zones. Given these approximations, the problem consists of a strongly coupled to edps parabolic quasi-linear system in the case of unconfined aquifers describing the evolution of the depths of two free surfaces and elliptical-parabolic type in the case confined aquifer, the unknowns being then the depth of salt water / fresh water and the hydraulic load of fresh water. In the first part of the thesis, we give in the case of a confined aquifer, error estimation results of a semi-implicit scheme in a combined time discretization space finite element type P_k Lagrange . This result among other uses a regularity result of the gradient of the exact solution in the space $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$, which can handle the non-linearity and to establish the error estimate under assumptions reasonable regularity of the exact solution. In the second part of the thesis, we generalize the previous study to the case of the free aquifer. The main difficulty is related to the complexity of the system of parabolic edps but again, thanks to regularity result $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ gradients established for the free surfaces, we show that the scheme is of order 1 time and space k for sufficiently regular solutions. We conclude this work by numerical simulations in different contexts (impact of porosity and hydraulic conductivity on the evolution of the interface, and pumping fresh water injection, tidal effects) thus validating the model and diagram. Then we compare the results with those obtained using a finite volume scheme constructed from a structured mesh.

Contents

1	Modélisation	10
1.1	Présentation du problème et des caractéristiques physiques . . .	10
1.1.1	Écoulement d'eau souterraine	10
1.1.2	Écoulement en milieux poreux	11
1.1.3	Écoulement d'eau dans les milieux poreux hétérogènes .	13
1.1.4	Les différents types d'aquifère	13
1.1.5	Description des interfaces	18
1.2	Dérivation du modèle	22
1.2.1	Loi de Darcy	22
1.2.2	Conservation de la masse du fluide	22
1.3	Hypothèses simplificatrices	24
1.3.1	Hypothèses sur le fluide et sur le milieu	24
1.3.2	Hypothèse de Bear	25
1.3.3	Approximation de Dupuit	26
1.3.4	Hypothèse d'interface abrupte ou nette	26
1.3.5	Domaine d'intégration	27
1.3.6	Intégration verticale du modèle $3D$	29
1.4	Equations de continuité	31
1.4.1	Continuité de la pression à l'interface $z = h$	31
1.4.2	Continuité des flux aux interfaces.	32
1.5	Modèle d'intrusion saline	36
1.5.1	Simplification due aux faibles compressibilités du fluide et du sol	36
1.5.2	Cas confiné:	36
1.5.3	Cas libre	38
2	Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère confiné	40
2.1	Introduction	40
2.2	Résultats préliminaires et notations	40
2.3	Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette	43
2.4	Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse	45
2.5	Régularité L^r	46
2.6	Unicité dans le cas confiné avec interface diffuse	51

3	Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère libre	52
3.1	Introduction	52
3.2	Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse . . .	52
3.3	Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette	53
3.4	Unicité dans le cas libre avec interface diffuse	55
4	Analyse numérique du problème dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'	57
4.1	Rappels et notations	58
4.1.1	Résultats d'interpolation	58
4.1.2	Théorèmes de convergence	61
4.2	Analyse numérique du problème dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'	63
4.2.1	Présentation du problème	63
4.2.2	Présentation du schéma et existence de la solution approchée	65
4.3	Estimation de l'erreur pour une solution régulière	67
4.4	Estimation de l'erreur utilisant la régularité $L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$ de la solution	73
5	Analyse numérique du problème dans le cas libre avec l'approche 'interface diffuse'	81
5.1	Présentation du problème	82
5.2	Présentation du schéma et existence de la solution approchée . .	83
5.3	Estimation de l'erreur pour une solution régulière	85
5.4	Estimation de l'erreur utilisant la régularité $L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$ de la solution	92
6	Les Volumes Finis	103
6.1	Introduction et rappels sur la méthode des volumes finis	103
6.1.1	Volumes finis pour une loi de conservation	103
6.1.2	Discrétisation par Volumes Finis pour une équation de de type convection- diffusion	104
6.1.3	Hypothèses sur les données	105
6.2	Résolution du problème dans le cas confiné	109
6.3	Résolution du problème dans le cas libre	111
7	Simulations numériques	113
7.1	Comparaisons Eléments finis - Volumes finis	113
7.1.1	Cas d'un aquifère confiné	113
7.1.2	Cas d'un aquifère libre	116
7.2	Impact des paramètres physiques	121
7.2.1	Porosité	123
7.2.2	Coefficient d'emménagement	123
7.2.3	Epaisseur des zones de transition	126

7.3	Comparaison entre aquifère confiné et aquifère libre	131
8	Conclusion et perspectives	133

Introduction

L'eau douce représente moins de 3% de l'eau totale de la planète. Aux environs de deux tiers de cette quantité d'eau est sous forme de glace, le tiers restant constitue les réserves d'eaux souterraines et le faible pourcentage restant représente les eaux de surface, qui, jusqu'à récemment étaient suffisantes pour répondre à la consommation humaine et aux activités industrielles. A cause de l'explosion démographique et industrielle, les eaux de surface ne sont plus suffisantes et il faut puiser dans les réserves d'eau souterraines qui sont à présent indispensables et incontournables pour les besoins humains.

Plusieurs facteurs impactent les ressources souterraines en eau douce: la diminution du niveau d'eau douce dans les aquifères à cause de leur sur-exploitation, les conséquences des changements climatiques sur le niveau des rivières, la pollution des aquifères par les pesticides et les engrais des terres agricoles qui contaminent l'eau douce pour des décennies. Une meilleure gestion des ressources en eau douce devient un enjeu primordial et "un défi planétaire majeur du XXIe siècle".

Dans les zones côtières, la forte densité de population occasionnent des pompes intensifs d'eau douce, ajoutons à cela la surélévation du niveau de la mer due à la fonte des glaces, deux facteurs qui ne font qu'accroître le problème d'intrusion marine dans les nappes d'eau douce.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à la modélisation du problème d'intrusion saline dans les aquifères côtiers d'un point de vue numérique.

En général, les échanges hydrauliques entre l'eau douce souterraine et l'eau salée sont lents dans des conditions naturelles, ils peuvent alors être remplacés par un quasi-équilibre entre les 2 zones. Cela correspond à l'approximation de Ghyben-Herzberg. Cette approche a conduit à plusieurs modèles analytiques en particulier grâce à la relation linéaire liant les 2 hauteurs des interfaces et celle du niveau de la mer (cf. [18],[30],[50], [58], [61], [81], [95], [96], [97], [94], [99], [100]). Cependant ces solutions analytiques se limitent à des géométries très simples et à des situations où l'hypothèse de Ghyben - Herzberg est satisfaite, elles sont donc essentiellement utilisées comme cas test pour valider des codes numériques. Il n'est plus possible de supposer que la zone d'eau salée est immobile dans des conditions plus drastiques dues à des événements météorologiques ou à l'intervention humaine qui, en pompant intensivement l'eau douce, provoque une baisse du niveau de la nappe phréatique et une intrusion de l'eau salée dans l'aquifère. L'eau salée, qui est plus dense que l'eau douce, glisse en dessous de cette dernière et envahit l'aquifère sous forme d'un biseau salé. Il est nécessaire d'avoir des modèles précis et efficaces simulant le déplacement du front salé dans l'aquifère côtier afin d'optimiser l'exploitation des eaux souterraines.

Ils existent de nombreux livres de référence concernant la modélisation du problème d'intrusion saline, citons par exemple ([17],[18],[20]) et les références qui s'y rapportent. Dans l'optique de notre travail, nous pouvons classer les modèles

existants pour décrire l'intrusion saline en 2 grandes catégories:

Dans un cas, on considère que les deux volumes d'eau interagissent entre eux, formant ainsi une zone de transition caractérisée par les variations de la concentration en sel. Cette approche est très lourde aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue numérique (cf. [3],[13],[37]).

Nous soulignons aussi qu'il existe une zone de transition entre la zone saturée en eau et la zone sèche du réservoir, la zone de "désaturation" restant difficile à définir.

La seconde catégorie consiste à considérer que l'eau douce et l'eau salée sont deux fluides immiscibles. Cela conduit à supposer les domaines occupés par chaque fluide séparés par une interface nette, on néglige alors les transports de masse entre la zone salée et la zone d'eau douce. Par ailleurs, la dimension verticale de l'aquifère (de l'ordre d'une dizaine de mètres) est souvent très petite comparée aux dimensions horizontales de l'aquifère qui sont de l'ordre du km , ce qui rend cette approximation d'autant plus légitime.

De même, l'épaisseur de la zone de transition est négligeable par rapport aux dimensions horizontales de l'aquifère. Pour les mêmes raisons, on peut donc considérer que l'interface entre les zones saturée et sèche, est nette, ce qui revient à négliger les effets de la pression capillaire.

Clairement, cette classe de modèle ne décrit pas le comportement de la zone de transition mais elle donne des informations sur le mouvement du front salé (ou de la surface supérieure de l'aquifère).

Dans ce travail, nous allons étudier une nouvelle approche récemment introduite dans [35] combinant l'efficacité du modèle avec interface nette au réalisme des modèles avec interface diffuse. Cette approche est déduite de la théorie des fonctions de phase, développée à l'origine par Allen-Cahn pour décrire les phénomènes de transition de phase dans un contexte fluide-fluide et qui est utilisée ici pour décrire les trois états stables caractérisant la zone de transition: eau salée, eau douce, eau mélangée et zone saturée, zone sèche et zone insaturée. Dans cette étude, nous allons comparer l'approche avec interface abrupte à celle avec interface diffuse d'un point de vue numérique mais avant de rentrer dans les détails, nous soulignons que l'ajout du terme diffusif est une des raisons principale pour laquelle nous avons opté pour une discrétisation spatiale via la méthode des éléments finis.

Pour décrire le problème, nous devons distinguer deux types d'aquifère : Les aquifères confinés pour lesquels le toit et le substratum sont supposés imperméables, interdisant alors tout échange avec l'extérieur, et les aquifères libres pour lesquels le toit de l'aquifère est semi-perméable ou perméable (en particulier l'aquifère peut être rechargé en eaux pluviales).

D'un point de vue mathématique, dans le cas de l'approche avec interface nette, le modèle consiste en un système fortement couplé d'équations quasi-linéaires dégénérée parabolique-elliptique pour le cas confiné et d'équations paraboliques dégénérées pour le cas libre. L'apport de l'approche avec interface diffuse est double: elle permet d'une part d'éliminer la dégénérescence et d'autre part d'établir un principe du maximum plus réaliste d'un point de vue de la physique, plus précisément une hiérarchie entre les profondeurs des interfaces libres (cf.

[36], [33]). Les premières études mathématiques sur le problème d'intrusion marine ont été faites en prenant pour cadre d'étude les problèmes à frontière libre (l'interface eau douce/eau salée étant cette frontière), citons les travaux de Van Duijn et al ([11], [12], [23], [59], [88]) pour des résultats d'existence de la solution mais aussi de régularité de la frontière libre dans le cas d'un écoulement stationnaire. Dans tous ces travaux, le domaine d'étude est contenu dans le plan vertical et l'interface eau douce/eau salée est traitée comme une frontière libre. Dans ce travail, nous considérons que l'écoulement des eaux souterraines est quasi-horizontale, notre domaine d'étude étant alors dans le plan horizontal (après avoir appliqué l'approximation de Dupuit au modèle initial $3D$, ce qui permet de ramener notre étude à un problème $2D$).

D'un point de vue numérique, nous avons déjà mentionné les travaux liés à l'approximation de Ghyben-Herzberg, pour lesquelles des solutions analytiques existent dans des cas très simplifiés (pour des milieux isotropes et homogènes et dans des configurations simplifiées). Dans des cas plus réalistes, c'est à dire pour des géométries complexes et des milieux hétérogènes et anisotropes, plusieurs méthodes numériques ont été utilisées. Concernant la méthode des différences finies, nous pouvons mentionner les travaux de ([19], [71], [45]) ainsi que les travaux de ([105], [47], [54]) pour la méthode des éléments finis et plus récemment les travaux de [25] pour la méthode des volumes finis. Mais souvent il s'agit de stratégies numériques pour la résolution du problème initial tridimensionnel. Nous mentionnons aussi tous les travaux s'inscrivant dans un cadre de monitoring pour lequel on cherche à localiser l'interface salée afin de câler le choix optimal des puits de pompage et les seuils de quantité d'eau à pomper afin de minimiser l'effet de l'intrusion saline. Par ailleurs, un autre aspect numérique très important lié au problème d'intrusion saline, est celui d'identification des paramètres. Clairement, les codes existants ne peuvent donner des informations exploitables que si les caractéristiques hydro-géologiques du milieu tels que la porosité, la conductivité hydraulique ou même le coefficient d'emmagasinement sont connus, citons par exemple (cf. [89],[90], [91]) et les références qui s'y rapportent pour la résolution numérique du problème inverse d'identification de la conductivité hydraulique dans les cas stationnaire et instationnaire par la méthode des éléments finis.

L'objet de ce travail est de proposer un algorithme précis et efficace pour résoudre le problème d'intrusion marine. Cet algorithme est construit à partir du modèle avec l'approche 'interface diffuse' qui implique un terme diffusif supplémentaire dans les edp's gouvernant l'évolution des inconnues, à savoir les profondeurs des 2 interfaces (h, h_1) dans le cas d'un aquifère libre et la charge hydraulique d'eau douce et h dans le cas d'un aquifère confiné. Par ailleurs ce modèle garantit un principe du maximum permettant en outre de préserver la hiérarchie entre les hauteurs des interfaces h et h_1 . Ces deux raisons nous ont conduit à privilégier la méthode des éléments finis pour la résolution numérique du problème plutôt que la méthode des volumes finis qui, en revanche, est mieux adaptée au problème dans le cas de l'approche avec 'interface nette'. Nous faisons l'analyse numérique des schémas semi-implicites en temps pour les 2 types d'aquifère en établissant des théorèmes d'estimation d'erreur, montrant

que, pour des données suffisamment régulières, la méthode P_k -Lagrange est d'ordre k en espace et d'ordre 1 en temps sous une condition de stabilité entre le pas d'espace et le pas de temps. Puis nous généralisons ce résultat en affaiblissant les hypothèses de régularité et en utilisant la régularité de la solution spécifique au problème, plus précisément la régularité $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ établie pour les gradients des inconnues. Nous proposons un schéma construit à partir de la méthode des volumes finis pour un maillage structuré et nous montrons que ce schéma préserve le principe du maximum. Cette propriété n'a pas été établie pour la résolution avec les éléments finis mais les simulations montrent que les solutions numériques vérifient ce principe du maximum, ce qui résulte du fait qu'à la base, le modèle avec l'approche 'interface diffuse' satisfait ce principe. Nous concluons notre étude en proposant plusieurs tests numériques validant notre approche et montrant aussi l'impact des paramètres physiques du problème sur l'évolution des interfaces.

Le document est organisé comme suit: Dans le premier chapitre, nous rappelons la terminologie relative à cette problématique et nous détaillons l'obtention des modèles $2D$ à partir de l'hypothèse de Dupuit et des approches 'interface nette' et 'interface diffuse'. Nous rappelons dans le chapitre 2 les résultats d'existence globale en temps de la solution pour un aquifère confiné et pour les 2 approches (nette et diffuse) ainsi qu'un résultat d'unicité obtenu dans le cas de l'approche avec 'interface diffuse'. Le chapitre 3 généralise ces résultats au cas d'un aquifère libre.

Dans le chapitre 4, nous décrivons la méthode élément fini P_k Lagrange que nous avons appliquée au problème d'intrusion saline dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'. Nous rappelons que les deux principales difficultés liées à notre cas sont le fort couplage des équations elliptique-parabolique et les non-linéarités. Nous avons dans un premier temps, établi un résultat d'estimation d'erreur pour des solutions très régulières (ce qui revient, en un certain sens, à linéariser le problème), puis nous utilisons la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité $L^4(\Omega_T)$ du gradient de la solution pour nous affranchir des contraintes sur les hypothèses de régularité du précédent théorème. En effet, cette régularité $L^4(\Omega_T)$ du gradient de la solution combinée à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet de traiter la non-linéarité.

Dans le chapitre 5, nous adaptons la méthode élément fini P_k Lagrange au cas libre, toujours avec l'approche 'interface diffuse'. Il s'agit à présent d'un système fortement couplé d'équations quasi-linéaires paraboliques. Tout comme le chapitre précédent, nous établissons un résultat d'estimation d'erreur pour des solutions très régulières, puis nous utilisons la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité $L^4(\Omega_T)$ du gradient de la solution pour nous affranchir des contraintes sur les hypothèses de régularité du précédent théorème; en particulier nous aurons des hypothèses de régularité sur la solution du même ordre que dans le cas des études faites pour des problèmes linéaires. Bien sûr cela va induire une condition de stabilité et des conditions sur les paramètres tels que la porosité, la conductivité hydraulique et l'épaisseur des zones de diffusion. Le point intéressant est qu'avec un choix judicieux des coefficients des

estimations, les conditions stabilité dans les 2 théorèmes seront comparables. Dans le chapitre 6, nous proposons un schéma volume fini explicite en temps dans les cas libre et confiné et pour les approches avec 'interface nette' et 'interface diffuse'. Ces schémas exploitent la nature conservative des systèmes et sont particulièrement bien adaptés aux systèmes dans le cas de l'approche avec interface nette. Nous terminons ce travail par une série de tests numériques présentés dans le chapitre 7. Dans un premier temps nous comparons les approximations éléments finis et volumes finis. Les simulations illustrent que les 2 méthodes conduisent à des résultats qualitatifs similaires lorsque le système évolue sans forçage extérieur. En revanche, la conclusion n'est plus la même dans les cas de l'injection ou du pompage. Nous pouvons faire les mêmes remarques dans les deux cas (injection et pompage) : Avec la méthode volume fini (MVF) , les interfaces semblent être affectées localement par l'injection d'eau douce (ou le pompage) et les effets sur les interfaces sont moindres comparés à ceux observés avec la méthode élément fini (MEF). Dans la seconde partie de ce chapitre, nous utilisons le schéma élément fini pour illustrer l'impact des paramètres physiques sur le comportement des interfaces. Nous nous intéressons en particulier à la porosité et au coefficient d'emménagement. Enfin nous comparons numériquement les deux approches 'interface nette' et 'interface diffuse'; les simulations montrent que l'existence de cette zone de transition impacte clairement les évolutions des interfaces et spécialement de l'interface salée. Cela est bien visible lorsqu'on ajoute au système des conditions de Dirichlet oscillantes simulant ainsi le phénomène des marées. Cela induit une augmentation des effets de la zone de dispersion qui crée une perte de charge réduisant ainsi la zone occupée par l'eau salée dans l'aquifère.

Le chapitre 4 fait l'objet de la publication [1] avec le théorème d'estimations d'erreurs pour une solution régulière ainsi que tout ce qui concerne l'aquifère confiné dans les chapitres 6 et 7. La généralisation des résultats dans le cas libre fait l'objet de la pré-publication [2].

Nous concluons en soulignant que ce modèle ne permet pas de déterminer l'épaisseur des zones de transition (et son évolution) mais l'existence même de ces zones, qu'elles soient d'épaisseur constante ou variable en espace, influent sur l'élévation des interfaces et permettent d'obtenir des résultats plus conformes à la réalité. Inclure au modèle les variations inévitables de la zone de transition, serait très coûteux et il serait alors préférable de travailler directement sur le modèle $3D$ couplant alors la loi de conservation de la masse du fluide à celle de la masse du soluté (ici le sel).

Chapter 1

Modélisation

1.1 Présentation du problème et des caractéristiques physiques

1.1.1 Ecoulement d'eau souterraine

Les formations souterraines peuvent être divisées selon la verticale en plusieurs zones selon la proportion relative des pores occupés par l'eau. On distingue une zone de saturation pour laquelle tous les pores sont complètement remplis d'eau et une zone d'aération (appelée aussi zone non saturée) qui se situe au-dessus de la zone de saturation et dans laquelle les pores contiennent à la fois une phase gazeuse (principalement d'air et de la vapeur d'eau) et d'une phase liquide constituée uniquement d'eau. La surface séparant ces deux zones est nommée surface de la nappe phréatique ou plus simplement surface phréatique (définie ci-dessous).

Zone saturée

La zone saturée correspond à la partie du sol située sous la nappe phréatique (surface libre des aquifères) où les pores sont complètement remplis d'eau, avec une pression d'eau positive.

Zone non saturée

La zone non saturée correspond à la partie située entre de la surface du sol et la surface phréatique des aquifères. Elle est constituée simultanément, au moins pour une période de temps donnée, d'air et d'eau dans les pores. Son épaisseur est très petite voire nulle dans les sols humides, et estimée à plusieurs centaines de mètres dans les sols arides, ou secs. Elle est conçue comme zone d'activité comme l'implantation des arbres, construction de différents ouvrages et le dépôt des déchets.

On distingue aussi :

Zone Vadose

La zone vadose est la partie du sol qui se trouve au dessus de la nappe phréatique, où les pores sont partiellement saturés en eau (zone radiculaire, vadose , intermédiaire), et saturée en eau (zone capillaire). Dans ce cas l'eau est sous pression négative.

Zone capillaire

La zone capillaire est la partie du sol située au dessus de la nappe phréatique et au dessous de la limite de la remontée capillaire, elle est caractérisée par une pression d'eau négative (cf [78]). La figure 1 résume l' ensemble des zones d'écoulements souterrains cités ci - dessus.

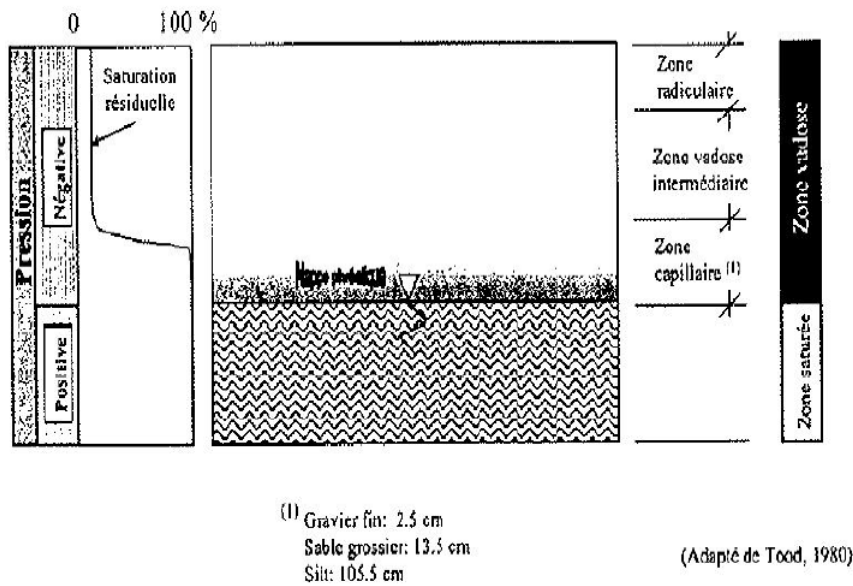


Figure 1.1: Zone saturée et zone non saturée

1.1.2 Ecoulement en milieux poreux

Volume élémentaire représentatif

Il est nécessaire d'aborder le principe de la représentativité des valeurs de paramètre mesurées et de la notion de volume élémentaire représentatif (VER).

Pour ce faire, nous utiliserons des notions introduites par de Marly (1981) et Castany (1985). Généralement, les formations hydrogéologiques sont anisotropes et souvent hétérogènes. La stratigraphie implique obligatoirement un réservoir anisotrope et hétérogène. Il est souvent nécessaire de déterminer des sous-réservoirs homogènes. Par les études lithologiques, on peut déterminer un volume de réservoir, plus petit et homogène, qu'on appelle volume élémentaire représentatif. La taille de ce volume unitaire, assimilé à un cube, est comprise entre deux limites extrêmes: Ce volume doit être assez petit pour être considéré isotrope et homogène, par contre il doit être assez grand, par rapport aux dimensions des vides, pour permettre la continuité de l'écoulement et représenter les caractéristiques statistiques significatives des paramètres de l'aquifère. Pour les milieux poreux, la dimension de ce cube élémentaire est évaluée à un maximum de 50 à 100 d10. Les dimensions du VER peuvent varier de l'échelle du centimètre pour le limon à l'échelle kilométrique pour des roches compactes et fissurées. Ainsi, un aquifère d'alluvions peut être considéré comme un milieu homogène à l'échelle régionale. Découpé en volume plus petit, de l'ordre de grandeur du VER, il devient hétérogène car deux échantillons prélevés au hasard présentent des granulométries différentes. Cependant, chaque VER est homogène, de plus, le VER se doit d'être observé dans le temps pour annuler l'effet des fluctuations des vitesses d'écoulement. Il est clair que cette notion de VER est bonne pour représenter toutes les propriétés d'un sol ou d'une roche. On note que dans un milieu fissuré, la taille du VER peut devenir très grande et ne peut être représentée à l'échelle des instruments de mesure (cf [78]).

Domaine d'écoulement

Au niveau de la surface phréatique, la pression est égale à la pression atmosphérique. C'est en dessous de la zone d'aération, dans la zone de saturation, que les hydrogéologues appellent l'eau rencontrée, eau souterraine. Sauf mention du contraire dans la suite la zone de saturation au domaine d'écoulement, c'est à dire au domaine de définition et d'étude des grandeurs et des relations entre grandeurs relatives à l'écoulement. Ce domaine d'écoulement est limité, supérieurement par la surface phréatique.

Vitesse d'écoulement

Au sein des milieux poreux, la vitesse réelle des particules d'eau est très variable car la direction des vecteurs vitesse et les sections d'écoulement peuvent changer fortement d'un point à l'autre. La vitesse réelle des particules d'eau dans chaque pore du milieu ne peut être, ni mesurée, ni utilisée dans les calculs, car elle est de l'ordre du microscopique. Il faut donc se ramener à une grandeur macroscopique par moyenne spatiale sur l'E.V.R (volume élémentaire représentatif) ou par moyenne statistique: La vitesse de filtration (v) ou vitesse de Darcy, si on considère que le volume testé est l'E.V.R. On distingue la vitesse effective qui est également une vitesse moyenne mais obtenue en ne considérant que le volume des pores où l'eau est mobile au lieu de l'E.V.R entier: $\frac{v}{\phi}$, c'est donc le flux par

unité de surface des vides connectés. Cette dernière vitesse est celle utilisée pour calculer le transport de polluant miscible par convection ou advection. Elle est appelée vitesse effective (cf [68]).

1.1.3 Ecoulement d'eau dans les milieux poreux hétérogènes

Nous nous intéressons dans cette étude aux milieux poreux des aquifères. Un aquifère est une formation géologique contenant de l'eau et à travers laquelle, en conditions normales, une quantité significative de cette eau s'écoule. Un milieu poreux est un matériel constitué par une matrice solide et des vides, appelés pores. Le pourcentage de vide d'un milieu poreux définit sa porosité totale. Ces vides peuvent être occupés par de l'eau, de l'air ou d'autres fluides. En hydrogéologie, l'analyse de la porosité n'est pas exclusivement géométrique mais se réfère également à l'eau contenue dans le milieu poreux, à ses liaisons physiques avec la matrice solide et à ses mouvements possibles. En effet, la porosité totale d'un sol meuble ou d'une roche n'est pas une condition suffisante à l'écoulement d'eau. C'est l'interconnexion des pores ainsi que les relations fluides- solide qui définissent la circulation du fluide

Une exemple de milieu poreux

Milieux poreux naturels

Dans la nature, les roches et les différents types de sol sont certainement les milieux poreux les plus exploités. L' étude géologique des sous - sols permet de classer les différentes couches géologiques selon leur perméabilité à un écoulement de fluide. Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau hydrocarbures. On nomme aquifère un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi être le lieu d'écoulement, par gravité ou par pompage. Une schématisation d'un aquifère est proposée sur la fig (2). La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'évolution géologique. Les roches denses comme le granite ont des porosités inférieures à 2%, au contraire, les roches volcaniques formées à la surface (faible pression) ont des porosités élevées à cause des processus de dégazage associés au refroidissement. Certaines roches atteignant ainsi une porosité de 60%. Les roches sédimentaires se sont formées à partir d'agglomération de grains cimentés entre eux. Les schistes argileux ont une porosité de l'ordre de 10 à 25%. Le grès, formé en général de grains de quartz, a une porosité qui dépend fortement du matériau de cimentation des grains entre 10 et 45%, voir (cf [67]).

1.1.4 Les différents types d'aquifère

Une nappe d'eau est constituée par l'ensemble des eaux comprises dans la zone saturée de l'aquifère dont toutes les parties sont en continuité hydraulique.

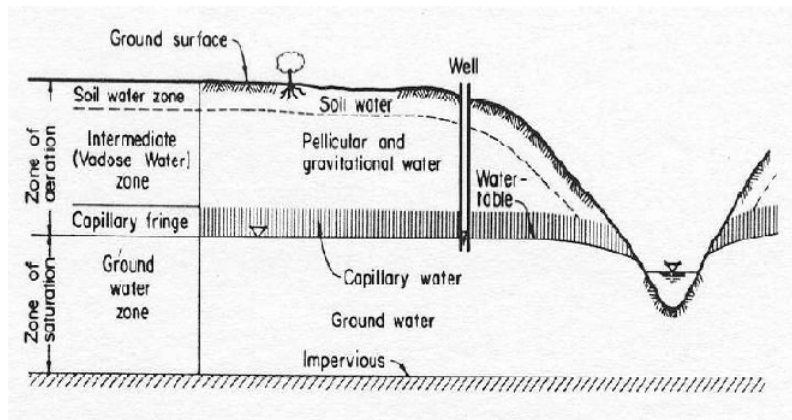


Figure 1.2: Schématisation d'un aquifère (Bear,1972)

Aquifère

Un aquifère est une unité géologique saturée pouvant transmettre des quantités significatives d'eau sous des gradients hydrauliques ordinaires (ou faibles) ou unité géologique capable de fournir des quantités d'eau économiquement avantageuses. On distingue différents types de nappes :

- **Nappe libre**

C'est une nappe dont la limite supérieure dans la formation poreuse est à surface phréatique, la pression exercée sur le toit de cette nappe est égale à la pression atmosphérique. Par exemple : La nappe de vallée : Dans une telle nappe, l'eau circule vers les exutoires qui sont les points bas de la topographie (sources, rivières, du réseau hydrographique de surface) . Prenons pour exemple le nappe de la craie, dans le nord de la France. Les vallées les plus profondes drainent seules la nappe, les autres vallées sont dites vallées sèches. On appelle encore (nappe phréatique) ce type de nappe (du grec phreatos, puits) qui veut simplement dire que c'est la première nappe que l'on rencontre lorsque l'on creuse un puits, et qui est donc la plus facilement exploitée.

- **Nappe captive**

C'est une nappe d'eau souterraine emprisonnée dans une formation géologique perméable, entre deux formation imperméables. L'eau contenue dans la nappe captive est donc soumise à une pression supérieure à cette nappe correspondant à la surface piézométrique est située au dessus de la limite supérieure de l'aquifère confiné.

Caractéristiques principales de l'aquifère

La porosité

Le paramètre principal décrivant un milieu poreux est la porosité définie par

$$\Phi = \frac{V_p}{V_0} = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} \quad (1.1)$$

qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). La relation (1.1) de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surfaces. En effet, une coupe d'un échantillon poreux (un exemple est donné sur la figure suivante) montre une surface composée de deux phases. On définit alors la porosité surfacique (à deux dimensions):

$$\Phi_s = \frac{A_p}{A_0} = \frac{\text{surface des pores}}{\text{surface totale}} \quad (1.2)$$

Pour chaque section effectuée à la cote z , on peut mesurer l'aire $A_p(z)$ occupée par les pores. Si le milieu est homogène (donc la porosité surfacique ne dépend pas de la cote z), on peut écrire que cette aire vaut $\Phi_s A_0$, où A_0 est l'aire totale de la section. À partir de ces mesures, on peut calculer le volume des pores de l'échantillon par

$$V_p = \int A_p(z) dz = A_0 \Phi_s \int dz = \Phi_s V_0.$$

Par conséquent, on obtient une égalité entre la porosité volumique et la porosité surfacique :

$$\Phi_s = \Phi \quad (1.3)$$

La définition peut être appliquée à une dimension, en introduisant une porosité linéique Φ_L , calculée par des mesures de longueurs de segments occupés par le solide ou le vide. Si le matériau est homogène et isotrope, on peut montrer que

$$\Phi = \Phi_L = \Phi_s. \quad (1.4)$$

Valeur de la porosité efficace

L'exploitation d'une formation aquifère à nappe libre implique la récupération de l'eau contenue dans les vides, comme on peut récupérer l'eau d'un échantillon en l'égouttant. Les valeurs de porosité communément admises varient entre 5 et 30%. Toutefois l'eau des aquifères est généralement sous pression et l'on utilise alors le coefficient d'emménagement pour caractériser plus précisément le volume d'eau gravitaire (cf [66]).

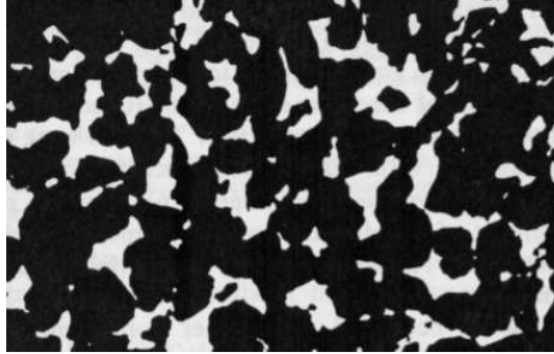


Figure 1.3: Exemple de coupe d'un poreux (grès) .

Pression, hauteurs piézométriques et charge hydraulique.

L'hydraulique des nappes souterraines est un cas particulier de la mécanique générale des fluides pour lequel les écoulements sont presque toujours laminaires. Les seuls cas d'exception sont constitués par les essais Halliburton et les essais à la sonde de prandtl pratiques à haute pression dans des milieux rocheux fissurés. L'énergie d'une particule du fluide en mouvement est donc considéré comme son énergie potentielle car l'énergie cinétique est si réduite qu'elle est négligée. l'équation de Bernouilli s'écrit:

$$h = z + \int_0^P \frac{dp}{\rho g}$$

où h est le potentiel (ou hauteur piézométrique), ρ la masse volumique de l'eau, P la pression d'eau, z l'altitude du point. Si le fluide est incompressible, la hauteur piézométrique s'écrit:

$$h = z + \frac{P}{\rho \cdot g}, \quad \text{avec} \quad P = (h - z)\rho g$$

où g est l'accélération de la gravité.

La charge hydraulique dans un fluide incompressible, correspond à l'énergie mécanique totale du fluide, elle est définie par :

$$\phi = z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}$$

avec v la vitesse réelle du fluide. En milieux poreux, l'écoulement est généralement lent, ainsi on néglige le terme cinétique $\frac{v^2}{2g}$, par conséquent la hauteur piézométrique et la charge hydraulique peuvent être confondues.

Coefficient d'emmagasinement

La définition du coefficient d'emmagasinement se rapporte principalement aux aquifères à nappe captive dont la limite supérieure est constituée par une formation imperméable. L'aquifère à nappe captive contient une eau sous pression et l'aquifère est ainsi en condition d'artésianisme. En fait, on définit de manière générale le coefficient d'emmagasinement comme étant la source de l'eau disponible, porosité efficace, avec l'eau libérable par dépression. En nappe libre, en première approximation, seule compte l'eau libérable par gravité, porosité efficace. Alors qu'en nappe captive seule l'eau libérée par dépression (et réarrangement des grains) est prise en compte. Si l'on découpe l'aquifère en prismes verticaux de $1 m^2$ de surface de base, on appelle coefficient d'emmagasinement S le rapport de la quantité d'eau libérée par ce prisme sous l'effet d'une baisse de pression de 1 unité au volume total du prisme. On peut définir ainsi en représentation bidimensionnelle la quantité d'eau unitaire (par unité de surface) stockée dans un aquifère. On utilise également la notion de coefficient d'emmagasinement spécifique S_s comme le volume d'eau par unité de volume aquifère que l'on obtient sous une baisse de pression de 1 unité. La dimension est $[L^{-1}]$. On peut déterminer S qui est égale à $S = eS_s$ (avec e = épaisseur en m de l'aquifère) durant les essais de pompage. En nappe captive, il est évidemment très petit: environ 10^{-6} , alors qu'en nappe libre, il est proche de la porosité efficace: 10%, 5%, (cf [67]).

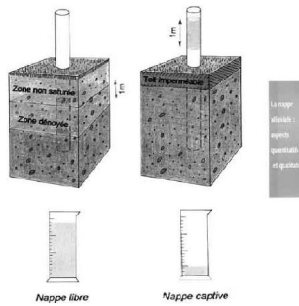


Figure 1.4: Concept d'emmagasinement dans les aquifères captifs et libres

Conductivité hydraulique

la conductivité hydraulique est une mesure de la capacité du milieu à laisser circuler l'eau. Dans le cas anisotrope, elle s'exprime sous la forme d'un tenseur symétrique de second ordre :

$$K = \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{pmatrix}$$

La conductivité hydraulique dépend des caractéristiques du milieu, via la perméabilité intrinsèque k , ainsi que des caractéristiques du fluide

$$K = \frac{\rho g k}{\mu}$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide.

1.1.5 Description des interfaces

- Interface eau douce / eau salée

Sans interface

Cette approche consiste à considérer un modèle d'écoulement de deux fluides miscibles.

Interfaces diffuses

Une approche logique physiquement consiste à supposer que les eaux douce et salée sont deux espèces miscibles et qu'il existe entre ces deux fluides une zone de transition qui n'est ni salée ni douce. Pour une interface entre un milieu saturé en eau et un milieu insaturé en eau, il est difficile de définir la zone de désaturation. Cette approche est très lourde des points de vue théorique et numérique.

Interfaces nettes ou abruptes

Les deux fluides sont considérés immiscibles d'où l'apparition de l'interface. C'est une approximation de la physique qui a fait ses preuves, donc qui peut paraître raisonnable. Elle est basée sur l'hypothèse de non transfert de masse entre zone douce et zone salée. On ne considère pas de terme de pression capillaire mais le prix à payer du point de vue théorique est l'analyse d'interfaces libres. Dans le modèle d'interface abrupte, on considère un écoulement à densité variable défini par deux zones fluides de densités distinctes séparées par une interface abrupte. En effet, à grande échelle et pour de faibles contrastes de densité (aquifères côtiers), et étant donné la variabilité temporelle des forçages hydrauliques (marées, précipitations, etc.), l'épaisseur de la zone de transition due à la diffusion pure de sel entre l'eau de mer et l'eau douce est relativement petite par rapport à la taille du domaine, et par rapport à la variabilité importante due à l'hétérogénéité intrinsèque du milieu.

Approches avec interfaces abruptes (sans diffusion)

Dans l'approche (interface abrupte), on considère l'eau salée et l'eau douce comme deux fluides non-miscibles séparés par une interface : voir figure suivante. L'interface eau salée / eau douce est une surface imperméable en équilibre de pression. Autrement dit, la pression est continue de part et d'autre de

l'interface. Par contre, la densité du fluide est discontinue de part et d'autre de l'interface. Il s'agit donc d'un modèle à deux fluides non miscibles, sans diffusion de sel. Deux méthodes sont possibles pour la résolution de l'intrusion saline avec une approche de type interface abrupte.

La première est une méthode de suivi d'interface (surface tracking) qui consiste à diviser le domaine en deux régions distinctes dont chacune est associée à une équation d'écoulement. Ensuite, la solution des deux équations est utilisée pour retrouver la position de la surface qui représente l'interface eau douce / eau salée (Bear, 1999). La méthode de suivi d'interface peut être appliquée aussi dans le cas $2D$ ou quasi $3D$.

La deuxième méthode, dite (multi-phasique), consiste à considérer l'eau salée et l'eau douce comme deux fluides non-miscibles séparés par une interface, l'écoulement de chaque phase fluide étant cependant résolu dans l'ensemble du domaine, de telle façon que la position de l'interface est obtenue implicitement à la fin de la résolution du problème. Au niveau de l'interface il n'y a pas de mélange (pas d'échange de masse) entre les deux phases fluides. Théoriquement aucune diffusion n'est permise au niveau de l'interface abrupte. (cf [4])

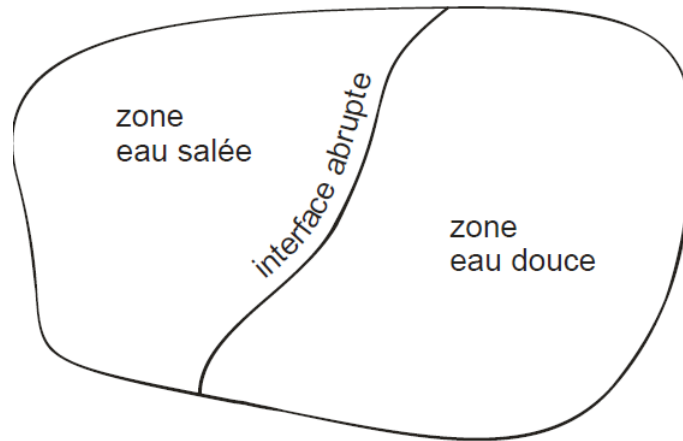


Figure 1.5: Représentation du domaine dans l'hypothèse d'une interface abrupte

- **Interface zone saturée / zone sèche**

Deux conditions définissent cette surface libre: $P =$ pression atmosphérique sur tout point M de la surface libre Exprimé en charge, on prend par convention 0 pour la pression atmosphérique, et on écrit $h = z$. De plus, la surface libre est une surface à flux nul si la nappe n'est pas alimentée par sa surface: $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ c'est donc une deuxième condition imposée à la même surface. Parfois

cependant, la nappe est alimentée par sa surface libre, et le flux qui la traverse, est donné : $\frac{\partial h}{\partial n} = a$ (n normale orientée vers l'extérieur), il en va de même si une évaporation reprend de l'eau de la nappe (a est alors négative). Tout le problème de la surface libre est que l'on ne connaît pas a priori sa position: on est amené à rechercher, par approximations successives, une surface dans l'espace qui vérifie simultanément $h = z$, $\frac{\partial h}{\partial n} = a$. Ce problème est assez délicat. On se donne d'habitude a priori une position estimée de la surface libre, ce qui délimite le domaine d'intégration. On fixe sur cette limite la charge hydraulique ($h = z$) et on vérifie, après intégration de l'équation, que le flux calculé $K \frac{\partial h}{\partial n}$ est correct, s'il ne l'est pas, on modifie dans un sens souhaitable la position de la surface libre et on recommence le calcul. Une autre façon de résoudre le problème est de ne pas considérer la surface libre comme une limite de l'écoulement, mais de représenter dans un même continuum la nappe saturée et la zone non saturée susjacent jusqu'au sol. Il faut alors résoudre l'équation de la diffusivité du milieu non saturé. La surface libre est alors obtenue comme le lieu des points où la pression est nulle. En régime transitoire, l'équation de la diffusivité dans une nappe limitée par une surface libre, s'écrit pour un milieu homogène:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0,$$

dans la nappe et

$$K_x \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + K_y \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + K_z \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 = \Phi \frac{\partial h}{\partial t} + (K_z - q) \frac{\partial h}{\partial z} - q$$

sur la surface libre, où q est le flux (volume par unité de surface horizontale, par unité de temps) des échanges entre la nappe et l'extérieur (évaporation, infiltration) à travers la surface libre, compté positivement s'il est extrait.

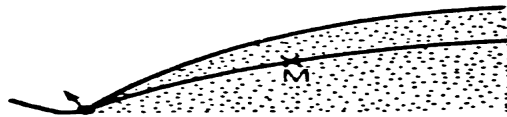
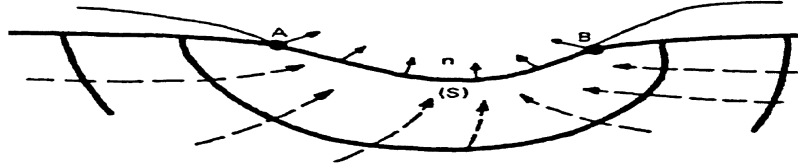


Figure 1.6: (Charge hydraulique en M égale à la cote M)

Surface de suintement

Quand l'eau d'une nappe sourd vers l'extérieur, le long d'une ligne d'émergence: La surface de contact (S) est dite surface de suintement. La condition est alors $h = z$ (car la pression est par définition égale à la pression atmosphérique). $\frac{\partial h}{\partial n} < 0$ (si n est orienté vers l'extérieur), en effet le flux de la nappe est sortant. La surface de suintement pose la même genre de problème que la surface libre.

Bien que l'on connaisse la cote z le long de la surface de suintement, on est obligé de rechercher par approximations successives les points A et B où commence et s'achève respectivement la surface de suintement et où débute la surface libre. On impose généralement la position de la surface, et on vérifie ultérieurement que le flux est bien sortant, (cf [65]).



Écoulement multiphasiques (fluides non miscibles)

Théorie

C'est par exemple, le cas de l'air et de l'eau (milieu non saturé), de huile, de l'eau et du gaz (gisement pétrolier).

Saturation

On définit d'abord la saturation volumique pour chacun des fluides i

$$S_i = \frac{\text{part de la porosité occupée par le fluide } i}{\text{porosité totale}}$$

S_i : varie entre 0 et 1.

Équation de continuité :

On écrit une équation de continuité pour chaque fluide $i = f, s$ (l'indice f désignant l'eau douce et s l'eau salée):

$$\text{div}(\rho_i \vec{U}_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i S_i \Phi) = 0$$

ρ_i : Masse volumique du fluide i .

U_i : Vitesse de Darcy du fluide i .

Φ : Porosité totale d'un milieu poreux.

où $(\rho_i S_i \Phi)$ est la quantité de fluide i contenue dans l'élément de volume unité VER.

Relation entre les saturations :

$$\sum S_i = 1$$

1.2 Dérivation du modèle

1.2.1 Loi de Darcy

La loi de Darcy représente un cas particulier de l'intégration des lois générales de la mécanique, lorsque l'on fait l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide newtonien, incompressible, et qu'au cours de son écoulement dans le sol, les forces d'inertie sont négligeables. On montre que dans ces conditions la loi de Darcy peut se mettre sous la forme

$$q = -\frac{k}{\mu}(\nabla P + \rho g \nabla z), \quad (1.5)$$

ρ est la masse volumique du fluide, μ la viscosité du fluide, k la perméabilité du sol et g est la constante d'accélération gravitationnelle.

$$q = -K \nabla \phi - \frac{k}{\mu}(\rho - \rho_0)g \nabla z, \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu}. \quad (1.6)$$

ϕ représente la charge hydraulique et ρ_0 est la masse volumique de référence de l'eau douce. Dans cette relation, la matrice K est la conductivité hydraulique qui exprime la capacité du sol à conduire le fluide.

1.2.2 Conservation de la masse du fluide

La loi de conservation de la masse du fluide s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho Q. \quad (1.7)$$

où Φ est la porosité et Q est un terme source générique. Donc le système d'équations pour notre problème 3D s'écrit dans le domaine d'eau douce et dans le domaine d'eau salée :

$$\frac{\partial(\rho_f \Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f q_f) = \rho_f Q_f, \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.8)$$

$$q_f = -K_f \nabla \phi_f, \quad (1.9)$$

$$q_s = -K_s \nabla \phi_s, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s q_s) = \rho_s Q_s \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1.11)$$

$$+C.B + C.I \quad (1.12)$$

où $C.B$ désigne les conditions aux bords et $C.I$ conditions initiales. Nous allons faire plusieurs simplifications sur le terme $\frac{\partial \rho_i \phi_i}{\partial t}$, $i = f, s$ compte tenu des paramètres caractérisant le fluide et le milieu.

Coefficient de compressibilité du fluide .

On suppose que la pression P et la densité ρ satisfont l'équation d'état :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_P dP \quad (1.13)$$

où $\alpha_P \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la pression . En intégrant (1.13) on obtient

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha_P(P-P_0)} \quad (1.14)$$

où P_0 est la pression de référence et ρ_0 est la densité de référence du fluide .

Coefficient de compressibilité du sol :

Modéliser la compressibilité du sol revient à modéliser les effets de compressibilité des roches. Les premières tentatives pour expliquer ce phénomène sont basées sur le modèle de la porosité dépendant de la profondeur $\Phi = \Phi(z)$.

Par exemple comme dans le modèle de Athy (cf. [6]), on a $\Phi(z) = \Phi_0 e^{-Mz}$, $(\Phi_0, M) \in \mathbb{R}_+^2$. Le problème dans ce modèle c'est que la variation de la porosité n'est en aucun cas due à la variation de la pression, alors qu'en réalité cette dernière joue un rôle fondamental. C'est pourquoi une approche physique beaucoup plus cohérente consiste à dériver une équation pour la porosité.

Soit σ la contrainte totale dans le domaine ou milieu poreux et σ_s la contrainte liée aux squelettes ou pores alors nous avons :

$$\sigma = \Phi P + (1 - \Phi)\sigma_s.$$

Où ΦP représente les effets dus à la pression. D'après la théorie de Terzaghi la contrainte effective σ_e est définie par :

$$\sigma_e = (1 - \Phi)(\sigma_s - P)$$

Il s'en suit que

$$\sigma_e + P = \sigma$$

En supposant que la contrainte totale reste inchangée nous avons :

$$\partial\sigma_e = -\partial P.$$

De plus le volume V se déforme à cause de la compressibilité du sol mais le volume de la partie solide

$V_s = (1 - \Phi)V$ reste inchangé (cf [10]), on a :

$$\begin{aligned} \frac{dV_s}{d\sigma_e} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d\Phi}{d\sigma_e} V + (1 - \Phi) \frac{dV}{d\sigma_e} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{V} \frac{dV}{d\sigma_e} = \frac{1}{(1 - \Phi)} \frac{dV}{d\sigma_e} \frac{1}{V} \frac{d\Phi}{dP} \end{aligned} \quad (1.15)$$

En supposant que les variations de volume et le comportement élastique du sol sont faibles, on définit la compressibilité du sol par $\beta_P \in R$:

$$\beta_P = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\sigma_e}$$

Il en découle d'après l'équation (1.15) que :

$$\frac{d\Phi}{dP} = (1 - \Phi)\beta_P \Leftrightarrow \Phi = 1 - (1 - \Phi_0) e^{\beta_P(P-P_0)}. \quad (1.16)$$

En résumé, l'approche consiste à supposer que la variation de porosité provient de la compressibilité du squelette du milieu due à la variation de la pression du fluide. Cela donne en utilisant les représentations différentielles :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial P} dP = (1 - \Phi) \left(\frac{1}{(1 - \Phi)} \frac{\partial\Phi}{\partial P} \right) dP = (1 - \Phi) \alpha_P dP$$

$$\frac{d\Phi}{dP} = (1 - \Phi) \beta_P \quad (1.17)$$

où $\beta_P = \frac{1}{(1 - \Phi)} \frac{\partial\Phi}{\partial P}$ est la compressibilité du sol due à la variation de la pression. Une relation entre la porosité Φ et la charge hydraulique ϕ découle de (1.16) : en effet

$$\phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z_h \Leftrightarrow P = \rho_0 g \phi - z_h$$

$$\frac{d\Phi}{(1 - \Phi)} = \beta_P dP \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{(1 - \Phi)} = \beta_P \rho_0 g d\phi$$

donc

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = (1 - \Phi) \beta_\Phi \Leftrightarrow \Phi = 1 - (1 - \Phi_0) e^{\beta_\Phi(\phi - \phi_0)}, \quad (1.18)$$

où $\beta_\Phi = \Phi_0 g \beta_P \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la charge hydraulique et ϕ_0 a charge hydraulique de référence. Afin de pouvoir manipuler l'équation de conservation de masse (1.7) , nous allons devoir faire des hypothèses ρ sur la nature du milieu i.e la porosité du sol Φ celle du fluide i.e sa densité et enfin sur l'écoulement du fluide dans le milieu poreux. Nous supposons que le fluide et le milieu sont compressibles.

1.3 Hypothèses simplificatrices

1.3.1 Hypothèses sur le fluide et sur le milieu

Faible compressibilité du fluide

L'eau douce et l'eau salée sont des fluides faiblement compressibles donc $\alpha_P \ll 1 \Rightarrow \rho \approx \rho_0$

$$q = -K \nabla \cdot \phi$$

Faible compressibilité du sol

On suppose à nouveau que le sol est faiblement compressible et donc $\beta_P \ll 1$.

Hypothèses sur les viscosités de l'eau douce et de l'eau salée

Nous allons aussi supposer que notre milieu est homogène et isotrope et que les viscosités de l'eau douce et de l'eau salée sont identiques, on a :

$$K_{f,x} = K_{f,y} = K_f \quad \text{et} \quad K_{s,x} = K_{s,y} = K_s$$

or

$$K_f = \frac{k\rho_f g}{\mu_f}, \quad K_s = \frac{k\rho_s g}{\mu_s}$$

Si on suppose $\mu_f = \mu_s$, alors

$$\begin{aligned} K_s = \frac{k\rho_s g}{\mu_f} &\iff K_s = \frac{\rho_s}{\rho_f} \underbrace{\frac{k\rho_f g}{\mu_f}}_{=K_f} \\ &\iff K_s = (1 + \alpha) K_f \end{aligned}$$

avec

$$(1 + \alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f}. \quad (1.19)$$

1.3.2 Hypothèse de Bear

Cette hypothèse, formulée par Bear, consiste à négliger les variation de densité dans la direction de l'écoulement, c'est à dire $\nabla \rho \cdot q \ll 1$. Donc

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho Q \iff \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q + \underbrace{\nabla \rho \cdot q}_{=0} = \rho Q \quad (1.20)$$

ou de (1.13) on déduit que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho \alpha_P \frac{\partial P}{\partial t}$$

ou de (1.17) on déduit que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (1 - \Phi) \beta_P \frac{\partial P}{\partial t}$$

on obtient alors

$$\rho(1 - \Phi) \beta_P \frac{\partial P}{\partial t} + \Phi \rho \alpha_P \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q$$

d'où

$$\underbrace{\rho((1-\Phi)\beta_P + \Phi\alpha_P)}_{=S} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q$$

puisque

$$q = -\frac{k\rho_0 g}{\mu} \nabla \phi \quad \text{et} \quad P = \rho_0 g \phi - \rho_0 g z$$

on obtient au final après simplification ($\rho \neq 0$), une équation de conservation de masse couplée à l'équation de Darcy :

$$\underbrace{\rho_0 g((1-\Phi)\beta_P + \Phi\alpha_P)}_{=S_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla \phi) = Q \quad (1.21)$$

$S_0 = \rho_0 g((1-\Phi)\beta_P + \Phi\alpha_P)$ est le coefficient d'emmagasinement en eau du sol.

1.3.3 Approximation de Dupuit

L'hypothèse de Dupuit consiste à considérer l'écoulement quasi - horizontal c'est à dire

$$q_z \ll 1 \iff q_z \approx 0$$

- 1ère conséquence : Puisque $q = -K \nabla \phi$

$$q_z \approx 0 \Rightarrow \partial_z \phi = 0 \quad \text{or} \quad \phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z, \quad \text{donc} \quad \partial_z \phi = 0, \iff P = -\rho_0 g z + c$$

(c indépendant de z).

- 2ème conséquence : L'écoulement étant supposée quasi - horizontal, on intègre verticalement l'équation résultant de la conservation de la masse. On réduit alors notre problème $3D$ à un problème $2D$.

1.3.4 Hypothèse d'interface abrupte ou nette

Le modèle d'interface abrupte consiste à supposer que l'eau salée et l'eau douce sont immiscibles et que donc les zones occupées par chaque fluide sont séparées par une interface abrupte . Cette interface est en réalité une zone de transition (car ces deux fluides sont en fait miscibles), mais dans le modèle on suppose que l'épaisseur de cette zone est très petite comparée aux dimensions de l'aquifère.

Conclusion

Dans chaque domaine nous avons une équation de conservation de masse simplifiée du type (1.21) spécifique au milieu. Dans le domaine de l'eau douce, nous avons :

$$S_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f = Q_f \quad (1.22)$$

Dans le domaine de l'eau de mer, nous avons :

$$S_s \frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \nabla \cdot q_s = Q_s \quad (1.23)$$

où S_f, S_s sont respectivement les coefficients d'emmagasinement en eau dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé, ρ_f, ρ_s sont respectivement les densités de référence dans le domaine de l'eau douce et celui de l'eau salée ϕ_f, ϕ_s sont respectivement la charge hydraulique dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé q_f, q_s sont respectivement la vitesse de Darcy dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé et enfin Q_f, Q_s sont des termes sources. On rappelle que :

$$S_f = \rho_f g ((1 - \Phi)\beta_p + \Phi\alpha_p), \quad q_f = -K_f \nabla(\phi_f), \quad K_f = \frac{kg\rho_f}{\mu_f}$$

$$S_s = \rho_s g ((1 - \Phi)\beta_p + \Phi\alpha_p), \quad q_s = -K_s \nabla(\phi_s), \quad K_s = \frac{kg\rho_s}{\mu_s}$$

1.3.5 Domaine d'intégration

L'aquifère sera schématisé par un domaine 3D dont la projection verticale sur le plan horizontal sera noté Ω . Par ailleurs la cote du substratum sera notée h_2 , la cote de l'interface eau douce/eau salée sera notée h et la cote du toit de l'aquifère sera notée h_1 (ce sera aussi la cote de l'interface entre la zone saturée et la zone insaturée). A priori les fonctions h_1 et h_2 peuvent dépendre des variables spatiales x et y .

Zone sèche Γ_T

On suppose qu'entre $z = h_1$ et Γ_T , la pression est donnée égale à la pression atmosphérique P_a . Si $h_1 < h_{max}$, on impose l'équilibre des pressions $P_f|_{z=h_1} = P_a$ et donc :

$$\phi_f|_{z=h_1} = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1$$

Si $h_1 = h_{max}$ on impose l'équilibre des pressions $P_f|_{z=h_{max}} = P_a$ et donc :

$$\phi_f|_{z=h_{max}} = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_{max}$$

Dans toute la suite, pour simplifier, nous supposons que $h_{max} = 0$. Conséquence sur le choix des inconnues dans notre modèle : on a vu que :

$$\text{si } h_1 < h_{max} \quad \Rightarrow \quad \phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1.$$

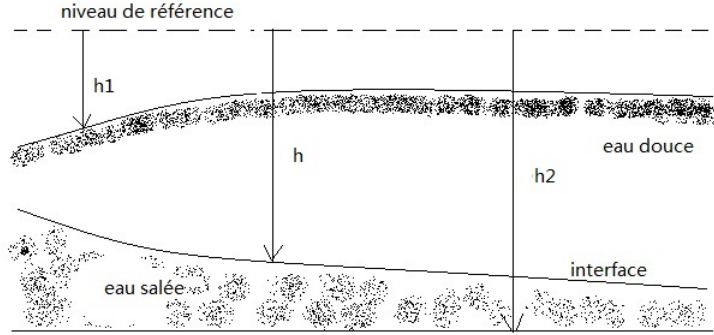


Figure 1.7: L'aquifère est représenté par un domaine $\Omega \times (h_2, h_{max}), \Omega \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{si } jni \ h_1 = h_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g}$$

Donc la bonne inconnue est $h_1^- = \inf(0, h_1)$:

$$\phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + \inf(0, h_1) := \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^-.$$

Le même raisonnement s'applique à la hauteur d'eau salée, nous introduisons donc $h^- = \inf(0, h)$.

Zone rivière Γ_r

On suppose la rivière à l'équilibre hydrodynamique :

$$P_r|_{z=h_{max}} = P_a + \rho_f g(0 - h_{max})$$

$A(x, y)$ fixé, c'est donc $P_r|_{z=h_{max}} = P_a - \rho_f g h_{max}(x, y)$ qui va remplacer la pression P_a .

La condition au bord classique à l'interface d'un aquifère et d'un réservoir d'eau est la continuité de ϕ_f et cela donne :

$$\phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \phi_{riviere} \iff \phi_r|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_r|_{z=h_{max}}}{\rho_f g} + h_{max}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a - \rho_f g h_{max}(x, y)}{\rho_f g} + h_{max} \\
&\iff \phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g} - h_{max} + h_{max} \\
&\iff \phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g}
\end{aligned}$$

Remarque

La présence de la rivière ne change donc rien car fixer ϕ_f au contact du bord de la rivière Γ_r revient à fixer la pression P_a en $z = 0$.

1.3.6 Intégration verticale du modèle 3D

Intégration verticale dans le domaine d'eau douce:

On intégrant la conservation de la masse dans la zone d'eau douce entre la surface supérieure h_1^- et la profondeur de l'interface h^- donne

$$\int_{h^-}^{h_1^-} (\nabla \cdot q_f + S_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t})(z) dz = 0 \quad (1.24)$$

En appliquant la formule de Leibniz au deuxième terme:

$$\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t} dz = S_f \frac{\partial}{\partial t} \int_{h^-}^{h_1^-} \phi_f dz + S_f(h^-) \frac{\partial h^-}{\partial t} - S_f \phi_f(h_1^-) \frac{\partial h_1^-}{\partial t}$$

ici $B_f = h_1^- - h^-$ est l'épaisseur de la zone d'eau douce. On pose $\tilde{\phi}_f$ la moyenne verticale de ϕ_f :

$$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} \phi_f dz$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial_t \phi_f dz &= S_f \partial_t (B_f \tilde{\phi}_f) - S_f \Phi(h_1^-) \partial_t h_1^- + S_f \phi(h^-) \partial_t h^- \\
&= S_f B_f \partial_t \tilde{\phi}_f + S_f \tilde{\phi}_f \partial_t B_f - S_f \phi(h_1^-) \partial_t h_1^- \\
\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial_t \phi_f dz &= S_f B_f \partial_t \tilde{\phi}_f + S_f (\tilde{\phi}_f - \phi_f(h^-)) \partial_t h_1^- - S_f (\tilde{\phi}_f - \phi_f(h^-)) \partial_t h^-.
\end{aligned} \quad (1.25)$$

De même d'après la formule Leibniz :

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \text{div}(q_f) dz = \int_{h^-}^{h_1^-} \text{div}_{x,y} q_{f,x,y} dz + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_{f,z} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{div}_{x,y} \left(\int_{h^-}^{h_1^-} q_{f_{x,y}} dz \right) - q_{f_{x,y}}(h_1^-) \cdot \nabla h_1^- + q_{f_{x,y}}(h^-) \cdot \nabla h^- + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_{f_z} dz \\
&= \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) - q_{f_{x,y}}(h_1^-) \cdot \nabla h_1^- + q_{f_{x,y}}(h^-) \cdot \nabla h^- + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_{f_z} dz
\end{aligned}$$

où

$$\tilde{q}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} q_{f_{x,y}} dz \quad \text{et} \quad \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_{f_z} dz = q_{f_z}(h_1^-) - q_{f_z}(h^-).$$

Alors

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \operatorname{div}(q_f) dz = \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) - q_f(h_1^-) \cdot (\nabla h_1^- - \nabla z) + q_f(h^-) \cdot (\nabla h^- - \nabla z)$$

Donc

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \operatorname{div}(q_f) dz = \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) + q_f(h_1^-) \cdot (\nabla z - \nabla h_1^-) - q_f(h^-) \cdot (\nabla z - \nabla h^-). \quad (1.26)$$

En faisant la somme de (1.25) et (4.5) on obtient donc l'équation (1.24) :

$$\begin{aligned}
&S_f B_f \partial_t \tilde{\phi}_f + \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) + S_f (\tilde{\phi}_f - \phi_f(h_1^-)) \partial_t h_1^- - S_f (\tilde{\phi}_f - \phi_f(h^-)) \partial_t h^- \\
&\quad + q_f(h_1^-) \cdot \nabla(z - h_1^-) - q_f(h^-) \cdot \nabla(z - h^-) = 0
\end{aligned}$$

Comme K_f , ϕ_f et B_f sont indépendants de z , on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_f &= \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} q_{f_{x,y}} dz \\
\tilde{q}_f &= \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} (-K_f \nabla \phi_f) dz \\
\tilde{q}_f &= -K_f \left(\frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} \nabla \phi_f dz \right) = -K_f \nabla \phi_f.
\end{aligned}$$

Puisque ϕ_f indépendant de z , alors $\phi_f = \tilde{\phi}_f = \phi_f(h_1^-) = \phi_f(h^-)$ En effet :

$$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} \phi_f dz = \phi_f$$

d'où

$$\tilde{q}_f = -K_f \nabla \phi_f$$

Ainsi l'intégration verticale des équations (1.8) selon la verticale entre la zone de l'interface h et celle du toit de l'aquifère h_1 s'écrit :

$$S_f B_f \frac{\partial \tilde{\phi}_f}{\partial t} = \nabla \cdot (B_f \tilde{K}_f \nabla \tilde{\phi}_f) - q_f|_{h_1} \cdot \nabla(z - h_1) + q_f|_h \cdot \nabla(z - h). \quad (1.27)$$

Intégration dans le domaine d'eau salée

De même en intégrant l'équation (1.23) selon la verticale, mais cette fois-ci entre la zone du substratum h_2 et celle de l'interface h , on obtient l'équation :

$$S_s B_s \frac{\partial \tilde{\phi}_s}{\partial t} = \nabla \cdot (B_s \tilde{K}_s \nabla \tilde{\phi}_s) - q_s|_h \cdot \nabla(z-h) + q_s|_{h_2} \cdot \nabla(z-h_2). \quad (1.28)$$

où :

$B_s = h - h_2$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée.

$\tilde{\phi}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h \phi_s dz$ est la moyenne de ϕ_s sur la verticale .

$\tilde{K}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h K_s dz$ est la moyenne de chaque élément du tenseur K_s sur la verticale.

Dorénavant on note $\tilde{\phi}_f = \phi_f$ et $\tilde{\phi}_s = \phi_s$, de même pour les tenseurs K_f et K_s .

1.4 Equations de continuité

1.4.1 Continuité de la pression à l'interface $z = h$

On a supposé ϕ_f constant par rapport à z entre h et $inf(h_1, 0)$, on a donc:

$$\phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + inf(0, h_1) := \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1$$

Or on a l'hypothèse de continuité de la pression entre la couche d'eau claire et la couche au-dessus de l'interface libre h_1 :

$$\begin{aligned} \phi_f|_{z=inf(0, h_1)} = \phi_f|_{z=h} &\iff \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 = \frac{P_f|_{z=h}}{\rho_f g} + h \\ &\iff P_f|_{z=h} = P_a + \rho_f g(h_1 - h) \end{aligned}$$

Par ailleurs comme on a supposé la continuité de la pression au travers de l'interface h , on a :

$$\begin{aligned}
P_{f|z=h} = P_{s|z=h} = \rho_s g(\phi_s - h) &\iff P_a + \rho_f g(h_1 - h) = \rho_s g(\phi_s - h) \\
&\iff \rho_s g(\phi_s - h) = P_a + \rho_f g(h_1 - h) \\
&\iff \rho_s \phi_s = \frac{P_a}{g} + \rho_f (h_1 - h) + \rho_s h \\
&\iff \frac{\rho_s}{\rho_f} \phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1 - h) + \frac{\rho_s}{\rho_f} h \\
&\iff (1 + \alpha) \phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1 - h) + (1 + \alpha) h \text{ avec } (1 + \alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f} \\
&\iff (1 + \alpha) \phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 + \alpha h. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Pour simplifier comme P_a et α sont constants, on a :

$$P_{f|z=h} = P_{s|z=h} \implies (1 + \alpha) \nabla \phi_s = \nabla h_1 + \alpha \nabla h \implies (1 + \alpha) \nabla \phi_s = \chi_0 (-h_1) \nabla h_1 + \alpha \nabla h$$

1.4.2 Continuité des flux aux interfaces.

1. Calcul du flux $q_{f|z=h} \cdot \nabla(z - h)$ dans le cas d'une interface nette

L'interface nette peut être représenté par une surface de l'équation

$$F(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = 0$$

En supposant une interface nette, nous avons supposé aucune diffusion à travers l'interface entre l'eau douce et salée qui est

$$\left(\frac{q_f}{\Phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{q_s}{\Phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = 0 \tag{1.30}$$

où \vec{v} désigne la vitesse de l'interface, \vec{n} le vecteur unité normal à l'interface et Φ la porosité du support. En utilisant l'équation qui régit le déplacement de l'interface

$$\partial_t F + \vec{v} \cdot \nabla F = 0$$

et en combinant avec la continuité de la composante normale de la vitesse, on obtient

$$q_f(h) \cdot \nabla(z - h) = q_s(h) \cdot \nabla(z - h) = \Phi \frac{\partial h}{\partial t}.$$

2. Calcul du flux $q_{f|z=h} \cdot \nabla(z - h)$ dans le cas d'une interface faiblement diffuse

Nous incluons à présent dans notre modèle l'existence de deux interfaces diffuses : l'une d'épaisseur δ_1 entre la zone saturée et la zone insaturée et l'autre d'épaisseur δ_h entre la zone d'eau salée et la zone d'eau douce. Ce modèle a été

initialement introduit dans [35] et nous reprenons ici intégralement la présentation du calcul du flux donné dans cet article. Nous soulignons que ce modèle est complètement nouveau par rapport à la littérature existante et qu'il concilie la simplicité des modèles à interface nette avec le réalisme des modèles à interface diffuse.

Nous introduisons une fonction de phase F décrivant les 3 zones (eau douce, eau salée, mélange) telle que :

$$F = \begin{cases} 0 & \text{dans l'eau douce,} \\ \frac{c_s}{2} & \text{sur l'interface nette,} \\ c_s & \text{dans l'eau salée.} \end{cases}$$

où c_s est la concentration moyenne en sel dans la zone salée.

Ainsi l'ensemble $\{(x, y, z) \text{ tels que } F(x, y, z) = \frac{c_s}{2}\}$ représente l'interface nette à l'instant t .

La fonction F satisfait une équation de type **Allen-Cahn** tri-stable (les trois points de stabilités sont ici $0, \frac{c_s}{2}$ et c_s) :

$$\partial_t F + \vec{v} \nabla F - \delta_h \Delta' F + \frac{F(F - \frac{c_s}{2})(F - c_s)(3F^2 - c_s^2/4)}{\delta_h} = 0 \quad (1.31)$$

où le symbole Δ' correspond à la dérivation par rapport aux deux variables x et y . La forme détaillée du potentiel triple n'a pas d'importance; son rôle principal est d'établir et de maintenir les parois du domaine bien définies. La taille caractéristique de l'interface diffuse correspondante est $\delta_h > 0$ (voir par exemple [7] pour des résultats rigoureux). Le paramètre δ_h est petit. Un autre point en faveur du couplage de (1.31) avec l'approche interface nette est la convergence quand $\delta_h \rightarrow 0$ du modèle 'champ de phase' vers celui avec 'interface nette' (voir [76] [75] pour Allen-Cahn, [31] [21] pour Cahn-Hilliard). L'équation satisfaite par le champ de phase (1.31) contient également un terme d'advection par le fluide de l'ordre du paramètre, la vitesse efficace étant désignée par \vec{v} ([24]). Nous soulignons, par ailleurs, que nous avons déjà négligé la diffusion verticale par rapport au terme convectif. Le passage de 3D à 2D suppose que la zone de stabilité $\{F = \frac{c_s}{2}\}$ correspond à l'interface nette $z = h$, on a donc :

$$F(x, y, z, t) = \frac{c_s}{2} \Leftrightarrow z - h(x, y, t) = 0$$

La dérivée de la fonction constante $F(x, h^-(x, t), t) = \frac{c_s}{2}$ est nulle, nous déduisons de $\partial_l [F(x, h^-(x, t), t)] = 0$, $l = x, t$ que $\partial_t F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \partial_t h^-$ et $\nabla' F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \nabla' h^-$. Dérivant une nouvelle fois ces expressions, nous obtenons finalement que $\Delta' F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \Delta' h^- - \partial_{zz}^2 F(x, h^-, t) |\nabla' h^-|^2 - \nabla' \partial_z F(x, h^-, t) \cdot \nabla' h^-$. En incluant ces calculs dans

la projection de l'équation de Allen-Cahn pour $F = \frac{c_s}{2}$, nous obtenons:

$$\partial_z F (-\partial_t h + \vec{v} \cdot \nabla(z-h) - \delta_h \Delta h) + \delta_h \nabla' \partial_z F \cdot \nabla' h^- + \delta_h |\nabla' h^-|^2 \partial_{zz}^2 F = 0 \quad (1.32)$$

En négligeant les deux derniers termes de l'équation (1.32) et en simplifiant par $\partial_z F \neq 0$ (la justification de ces deux points est loin d'être évidente et nous renvoyons à [35] pour plus de détails), nous obtenons :

$$-\partial_t h + \vec{v} \cdot \nabla(z-h) - \delta_h \Delta h = 0 \quad (1.33)$$

On revient alors à l'hypothèse traditionnelle de la modélisation à interface nette : pas de transfert de masse au travers de l'interface $\{F = \frac{c_s}{2}\}$ i.e les composantes normales de la vitesse sont continues et on a :

$$\left(\frac{q_f}{\Phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{q_s}{\Phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (1.34)$$

On a noté \vec{n} le vecteur normal unitaire par rapport à l'interface nette , \vec{v} est la vitesse moyenne réelle de l'interface.

Remarque : La pondération par $\frac{1}{\Phi}$ provient de la définition de la vitesse moyenne réelle:

$$v = \frac{Q}{S_v} = \frac{Q}{\Phi S} = \frac{1}{\Phi} \frac{Q}{S} = \frac{q_f}{\Phi} \text{ avec } q_f = \frac{Q}{S} \text{ et } \Phi = \frac{S_v}{S}.$$

avec Q le débit s'écoulant dans la section, S la surface de la section, q_f la vitesse fictive de filtration, S_v la surface du vide dans le milieu poreux.

En combinant (1.33) et (1.34) nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_f(h) \cdot \nabla(z-h) &= q_s(h) \cdot \nabla(z-h) = \Phi \left[\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \Delta h \right] \\ &= \Phi \left[\chi_0(-h) \frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \operatorname{div}(\chi_0(-h) \nabla h) \right]. \end{aligned}$$

3. Calcul du flux $q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z-h_1)$ dans le cas d'une interface faiblement diffuse

Nous appliquons le même type de raisonnement que dans le cas précédent pour décrire la zone de transition entre la zone saturée et la zone insaturée d'épaisseur δ_1 .

Ici pour modéliser la dynamique de cette interface, nous introduisons une fonction de phase F telle que:

$$F = \begin{cases} -1 & \text{dans la zone insaturée,} \\ 0 & \text{sur l'interface nette,} \\ 1 & \text{dans la zone saturée.} \end{cases}$$

Ainsi $\{F(x, y, z, t) = 0\}$ représente l'interface nette. La fonction F satisfait une équation de type **Allen-Cahn** :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F - \delta_1 \Delta F + \frac{F(F-1)(F+1)}{\delta_1} = 0$$

où \vec{v} est la vitesse de l'interface et δ_1 est l'épaisseur de la zone diffuse entre la zone saturée et la zone sèche. Nous notons que le passage de 3D à 2D suppose que la sone de transition $\{F = 0\}$ correspond à l'interface nette h_1 , on a donc:

$$F(x, y, z, t) = 0 \iff z - h_1(x, y, t) = 0.$$

et la projection d'Allen-Cahn pour $F = 0$ donne:

$$-\frac{\partial h_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla(z - h_1) - \delta_1 \Delta h_1 = 0. \quad (1.35)$$

En combinant (1.35) et la continuité des composantes normales de la vitesse à l'interface $z = h_1$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) &= \Phi \frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \Delta h_1 \\ &= \Phi \chi_0(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \nabla(\chi_0(-h_1) \nabla h_1). \end{aligned}$$

4. Calcul du flux $q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z - h_1)$ dans le cas d'un aquifère confiné

Dans le cas où on suppose que la couche supérieure de l'aquifère est imperméable i.e pas de flux entre la zone d'eau douce et le toit $z = h_1$, on a :

$$q_s(h_1) \nabla(z - h_1) = 0. \quad (1.36)$$

5. Calcul du flux $q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2)$

Dans le cas où on suppose que la couche inférieure de l'aquifère est imperméable i.e pas de flux entre la zone salée et le fond $z = h_2$, on a :

$$q_s(h_2) \nabla(z - h_2) = 0. \quad (1.37)$$

Nous insistons sur le fait que, puisque nous avons supposé l'écoulement quasi-horizontale, la condition (1.37) impose des conditions sur la topographie $(x, y) \rightarrow h_2(x, y)$. Par exemple si le tenseur de perméabilité K_s est diagonal, on doit avoir $h_2 = \text{constante}$. Pour garder le maximum de généralités sur le tenseur K_s , il faudrait considérer la fonction h_2 variable.

Mais, pour simplifier les démonstrations qui vont suivre, nous avons supposé $h_2 = \text{constante}$. Nous insistons néanmoins sur le fait que les démonstrations se généralisent de manière automatique au cas $h_2 = h_2(x, y)$.

1.5 Modèle d'intrusion saline

1.5.1 Simplification dûe aux faibles compressibilités du fluide et du sol

Nous simplifions notre système $2D$ en omettant le terme avec le coefficient d'emmagasinement S_s , on obtient ainsi :

$$S_f B_f \partial_t \phi_f - \operatorname{div}(B_f K_f \nabla \phi_f) + q_f(h_1^-) \cdot \nabla(z - h_1^-) - q_f(h^-) \cdot \nabla(z - h^-) = \widetilde{Q}_f \quad (1.38)$$

$$-\operatorname{div}(B_s K_s \nabla \phi_s) + q_s(h) \cdot \nabla(z - h^-) - q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2) = \widetilde{Q}_s \quad (1.39)$$

Cela réxulte de la combinaison de deux points suivants:

- d'une part l'eau salée est confinée car la couche h_2 est imperméable donc:

$$\partial_t \phi_s \ll 1.$$

- d'autre part $S_s \ll 1$ car le coefficient de compressibilité du fluide est très faible i.e $\alpha_P \ll 1$ et le coefficient de compressibilité du sol est très faible aussi i.e $\beta_P \ll 1$

$$S_s = \rho_s g((1 - \Phi)\beta_P + \Phi\alpha_P) \ll 1.$$

Donc ces deux points combinés entraînent : $S_s B_s \partial_t \phi_s \approx 0$.

1.5.2 Cas confiné:

Les bonnes inconnues sont les fonctions ϕ_s , et ϕ_f . De plus $q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2) = q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) = 0$

- **Cas interface nette**

Notre modèle est alors régi par les systèmes suivants :

- Dans le cas stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(K(x)B_f(\phi_f, \phi_s)\nabla\phi_f) = Q_f \quad \text{sur } \Omega, \\ -\operatorname{div}(1 + \alpha)(K(x)B_s(\phi_f, \phi_s)\nabla\phi_s) = Q_s \quad \text{sur } \Omega, \\ B_f(\phi_f, \phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\phi_f, \phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta)\phi_s - \delta\phi_f. \end{array} \right.$$

où $\delta = \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f}$.

- Dans le cas non stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K B_f(\phi_f, \phi_s)\nabla\phi_f) = Q_f, \\ \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(1 + \alpha)(K B_s(\phi_f, \phi_s)\nabla\phi_s) = Q_s, \\ B_f(\phi_f, \phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\phi_f, \phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta)\phi_s - \delta\phi_f. \end{array} \right.$$

Ce système peut être écrit sous une forme plus compacte si nous considérons la charge hydraulique de l'eau douce ϕ_f et la profondeur de l'interface (h) comme inconnues. En effet, on a

$$\phi_s = \frac{\rho_f}{\rho_s} \phi_f + \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_s} h = \frac{1}{1 + \alpha} \phi_f + \frac{\alpha}{1 + \alpha} h.$$

Donc

$$-\Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K(h_1 - h) \nabla \phi_f) = Q_f,$$

et

$$\Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K(h - h_2) \nabla h) + \operatorname{div}(K(h_1 - h) \nabla \phi_f) - \operatorname{div}(K((h_1 - h_2) \nabla \phi_f)) = Q_s,$$

Ainsi en posant

$$h_2 \mapsto -h_2, \quad h \mapsto -h, \quad h_1 \mapsto -h_1,$$

notre système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h) \nabla h) + \operatorname{div}(K(h_2 - h) \nabla \phi_f) = -Q_s \\ -\operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h) \nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases}$$

• **Cas interface diffuse**

- Dans le cas non stationnaire :

$$\begin{cases} -\Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K B_f(\phi_f, \phi_s) \nabla \phi_f) + \delta_h \Phi \Delta h = Q_f, \\ \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(1 + \alpha)(K B_s(\phi_f, \phi_s) \nabla \phi_s) - \delta_h \Phi \Delta h = Q_s, \\ B_f(\phi_f, \phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\phi_f, \phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta) \phi_s - \delta \phi_f \end{cases}$$

Ce système peut être réécrit sous une forme plus compacte si nous considérons la charge de l'eau douce et la profondeur de l'interface comme inconnues. En effet, on a

$$\phi_s = \frac{\rho_f}{\rho_s} \phi_f + \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_s} h = \frac{1}{1 + \alpha} \phi_f + \frac{\alpha}{1 + \alpha} h.$$

Donc

$$\delta_h \Phi \Delta h - \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K(h_1 - h) \nabla \phi_f) = Q_f, \quad (1.40)$$

et

$$\Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K(h - h_2) \nabla h) - \delta_h \Phi \Delta h + \operatorname{div}(K(h_1 - h) \nabla \phi_f) - \operatorname{div}(K((h_1 - h_2) \nabla \phi_f)) = Q_s, \quad (1.41)$$

Ainsi, en mettant

$$h_2 \mapsto -h_2, \quad h \mapsto -h, \quad h_1 \mapsto -h_1,$$

En sommant (1.40),(1.41) notre système s'écrit de la forme suivante :

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h)\nabla h) - \delta_h \Phi \Delta h + \operatorname{div}(K(h_2 - h)\nabla \phi_f) = -Q_s \\ -\operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h_1)\nabla \phi_f) + \operatorname{div}(\alpha K(h_2 - h)\nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases} \quad (1.42)$$

1.5.3 Cas libre

En faisant la somme entre les deux équations (1.38), (1.39) , on a

$$-\operatorname{div}(B_s K_s \nabla \phi_s) + q_s(h) \cdot \nabla(z - h) - q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2) = Q_s$$

$$S_f B_f \partial_t \phi_f - \operatorname{div}(B_f K_f \nabla \phi_f) - \operatorname{div}(B_s K_s \nabla \phi_s) + q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) - q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2) = Q_f + Q_s.$$

Alors on remplace

$$B_s = h - h_2, \quad B_f = h_1 - h, \quad K_s = (1 + \alpha)K_f, \quad q_s(h_2) \cdot (\nabla z - \nabla h_2) = 0, \quad \partial_t \phi_f = \partial_t h_1, \quad \nabla \phi_f = \nabla h_1$$

et on obtient :

$$-\operatorname{div}((h - h_2)K_f(1 + \alpha)\nabla \phi_s) + q_s(h) \cdot \nabla(z - h) = Q_s \quad (1.43)$$

$$S_f(h_1 - h)\partial_t h_1 - \operatorname{div}((h_1 - h)K_f \nabla h_1) + q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) - \operatorname{div}((h - h_2)K_f(1 + \alpha)\nabla \phi_s) = Q_f + Q_s. \quad (1.44)$$

Or

$$(1 + \alpha)\nabla \phi_s = \nabla h_1 + \alpha \nabla h,$$

$$q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) = \Phi \left[\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \operatorname{div}(\nabla h_1) \right],$$

$$q_s(h) \cdot \nabla(z - h) = \Phi \left[\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \operatorname{div}(\nabla h) \right]$$

(1.43) et (1.44) deviennent :

$$-\operatorname{div}((h - h_2)K_f \nabla h_1) - \operatorname{div}((h - h_2)K_f \alpha \nabla h) + \Phi \left[\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \operatorname{div}(\nabla h) \right] = Q_s$$

$$S_f(h_1 - h)\partial_t h_1 - \operatorname{div}((h_1 - h)K_f \nabla h_1) - \operatorname{div}((h - h_2)K_f \nabla h_1) - \operatorname{div}((h - h_2)K_f \alpha \nabla h)$$

$$+ \Phi \left[\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \operatorname{div}(\nabla h_1) \right] = Q_f + Q_s$$

c'est à dire

$$\Phi \partial_t h - \operatorname{div}((\alpha K_f(h - h_2) + \delta_h \Phi)\nabla h) - \operatorname{div}((h - h_2)K_f \nabla h_1) = Q_s$$

$$(S_f(h_1-h)+\Phi)\partial_t h_1 - \text{div}(K_f((h_1-h)+(h-h_2)+\delta_1\Phi)\nabla h_1) - \text{div}((h-h_2)K_f\alpha\nabla h) = Q_f + Q_s$$

Nous supposons que la taille des interfaces diffuses sont comparables : $\delta_h = \delta_1 = \delta$, cette hypothèse permettra de montrer que $h_1 \geq h$. De plus nous supposons que : $q_{L_f} = q_{L_s} = q_L$. Nous faisons un changement de variables pour retourner notre axe vertical :

$$h_1 \rightarrow -h_1, \quad h \rightarrow -h, \quad h_2 \rightarrow -h_2$$

Notre système devient :

$$\begin{cases} -\Phi \partial_t h + \text{div}((\alpha K_f(h_2 - h) + \delta\Phi)\nabla h) + \text{div}(K_f(h_2 - h)\nabla h_1) = Q_s, \\ -(S_f(h - h_1) + \Phi)\partial_t h_1 + \text{div}(K_f((h - h_1) + (h_2 - h))\nabla h_1) + \text{div}(\delta\Phi K_f\nabla h_1) \\ \quad + \text{div}(K_f\alpha(h_2 - h)\nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases} \quad (1.45)$$

Dans ces deux systèmes précédents, la première équation modélise la conservation de masse totale d'eau, tandis que la seconde modélise la conservation de la masse d'eau douce ou claire. Il s'agit d'un modèle $2D$, le processus d'upscaling ayant préservé la troisième dimension via les termes de surfaces libres h et h_1 . [1]

Chapter 2

Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère confiné

2.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons rappeler les résultats d'existence globale en temps d'une solution du problème correspondant au cas de l'aquifère confiné avec l'approche nette et avec celle d'interface diffuse.

Concernant le cas 'interface nette', la preuve est donnée dans [69] et celle du cas 'interface diffuse' est faite [33]. Ces articles permettent de conclure que, malgré la non-dégénérescence des équations dans le cas 'interface diffuse', il faut toujours supposer l'existence d'une zone d'eau douce d'épaisseur strictement positive dans le réservoir d'eau pour établir une majoration uniforme de la norme $L^2(\Omega_T)$ du gradient de la charge hydraulique, cette estimation est indispensable pour le passage à la limite.

Dans la seconde partie du chapitre, nous rappelons un résultat de régularité du gradient des solutions dans l'espace $L^r(0, T; \Omega_T)$ qui est établi pour l'approche avec interface diffuse. Ce résultat permet alors de prouver l'unicité de la solution, (cf. [62]).

2.2 Résultats préliminaires et notations

Dans cette partie, on introduit quelques notations et résultats. On suppose $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev :

$$H^1(\Omega) := \{\phi \in L^2(\Omega); \nabla\phi \in L^2(\Omega)\}$$

muni de norme

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit $H_0^1(\Omega) := \{\phi \in H^1(\Omega); \phi = 0 \text{ dans } \Gamma\}$

Dans la suite de l'espace $H_0^1(\Omega)$ sera muni de la norme Hilbertienne

$$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, grâce à la deuxième inégalité de Poincaré.

Pour $u \in H^2(\Omega)$, on pose

$$A(u) := -\Delta u \in L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

Soit une fonction $\omega \in L^2(\Omega)$ donnée, la fonction ϕ associée à ω est définie par

$$-\Delta \phi = \omega \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\phi = 0 \quad \text{dans } \Gamma_D. \quad (2.3)$$

Il est facile de voir que $\phi \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ et $\|\phi\|_{(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} \leq C \|\omega\|_{L^2(\Omega)}$ où C est une constante positif. En d'autres termes A^{-1} est un opérateur continue $L^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ et $\phi = A^{-1}(\omega)$.

$H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, muni de la norme dual :

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, \psi \rangle}{\left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dy \right)^{1/2}},$$

où $\langle f, \psi \rangle$ désigne l'appariement de la dualité. Si ω est simplement supposé être dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution ϕ satisfait $\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi dy = \langle \omega, \psi \rangle$ pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, donc (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) (cf. [74]) :

$$\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dy \right)^{1/2} = \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$V = H_0^1(\Omega), \quad V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \quad H = L^2(\Omega).$$

La symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre V et V' .

On a les inclusions compactes et denses suivantes :

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Pour tout $T > 0$, soit $W(0, T)$ l'espace tel que :

$$W(0, T) := \left\{ \omega \in L^2(0, T, V), \frac{d\omega}{dt} \in L^2(0, T, V') \right\},$$

muni de la norme hilbertienne :

$$\|\omega\|_{W(0, T)} = \left(\|\omega\|_{L^2(0, T, V)}^2 + \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|_{L^2(0, T, V')}^2 \right)^{1/2}.$$

Donc, on a l'injection continue :

$$W(0, T) \subset C([0, T], [V, V']_{1/2}) = C([0, T], H)$$

et on déduit du lemme de Aubin que l'injection suivante:

$W(0, T) \subset L^2(0, T, H)$ est compacte.

Nous considérons que la nappe captive est délimitée par deux couches horizontales et imperméables. Nous supposons que le toit de l'aquifère est délimité par le plan horizontal $z = h_1$, c.à.d $h_1 = \text{constante}$ et nous prendrons cette constante nulle pour ce chapitre . La surface supérieure correspond à $z = 0$ et la surface inférieure à $z = h_2$, h_2 est donc aussi l'épaisseur de la nappe supposée telle que $h_2 > \delta > 0$. On introduit la fonction $T_s(h)$ (qui représente l'épaisseur de la zone d'eau salée) :

$$T_s(h) = h_2 - h \quad \text{si} \quad \delta \leq h \leq h_2$$

On prolonge T_s continument par des constantes en dehors de $[\delta, h_2]$. Le prolongement de T_s pour $h \leq \delta$ nous permet d'assurer une zone d'eau douce d'épaisseur $\geq \delta$ dans l'aquifère.

On pose $K = \alpha K$ et $f = \frac{\phi f}{\alpha}$ et comme précédemment h désigne la profondeur de l'interface et donc f 'la charge de hydraulique' d'eau douce alors (h, f) satisfont le système suivant:

Cas Interface nette:

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T_s(h) K \nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h) K \nabla f) = -Q_s, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h) K \nabla h) = Q_s + Q_f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ h = h_D, f = f_D, & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ h(x, 0) = h_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Cas Interface diffuse:

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T_s(h)K\nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h)K\nabla f) - \Phi \delta_h \nabla \cdot (\nabla h) = -Q_s, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h)K\nabla h) = Q_s + Q_f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ h = h_D, f = f_D, & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ h(x, 0) = h_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où les fonctions Q_s et Q_f représentent les termes sources extérieures correspondant au pompage ou à l'alimentation respectivement en eau douce ou en eau salée dans l'aquifère.

Le tenseur représentant la conductivité hydraulique est tel qu'il existe 2 réels positifs K_- et K_+ vérifiant

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq 0 \quad (2.4)$$

2.3 Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette

Le but de cette section est de rappeler le résultat suivant (cf.[69]) :

Théorème 1. *Soit $h_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\delta \leq h_0(y) \leq h_2$ p.p. $y \in \Omega$, $h_D \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ telle que $\frac{dh_D}{dt} \in L^2(0, T, (H^1(\Omega))')$ et $\delta \leq h_D(t, y) \leq h_2$ p.p. $(t, y) \in [0, T] \times \Omega$, $f_D \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ et $Q_s, Q_f \in L^2(0, T, H)$.*

Alors,

pour tout $T > 0$, il existe une solution $h \in W(0, T) + h_D$, $f \in L^2(0, T, V) + f_D$ satisfaisant les équations variationnelles suivantes :

$$\int_0^T \Phi \left\langle \frac{dh}{dt}, v \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (KT_s(h) \nabla(h-f)) \cdot \nabla v + Q_s v dy dt = 0, \quad (2.5)$$

$\forall v \in L^2(0, T, V)$.

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h_2 \nabla f - KT_s(h) \nabla h) \cdot \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega dy dt = 0, \quad (2.6)$$

$\forall \omega \in L^2(0, T, V)$.

telle que

$$h(0, \cdot) = h_0. \quad (2.7)$$

$$\delta \leq h(t, y) \leq h_2, \text{ pour } p.p. (t, y) \in [0, T] \times \Omega. \quad (2.8)$$

Remarques :

1) Si on pose $u = h - h_D$ et $v = f - f_D$ dans (2.5)-(2.6), alors $(u, v) \in V \times V$ et ils satisfont le système couplé suivant pour tout $\omega \in L^2(0, T, V)$:

$$\int_0^T \Phi \left\langle \frac{d(u + h_D)}{dt}, \omega \right\rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega} \{T_s(u + h_D)K\{\nabla(u + h_D) - \nabla(v + f_D)\} \cdot \nabla \omega + Q_s \omega\} dy dt = 0. \quad (2.9)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{h_2 \nabla(v + f_D) - T_s K(u + h_D) \nabla(u + h_D)\} \cdot \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega dy dt = 0. \quad (2.10)$$

avec

$$u(0, \cdot) = u_0 := h_0 - h_D,$$

2) Puisque $u \in W(0, T) \subset C([0, T], L^2(\Omega))$ alors (2.7) a bien un sens. De plus,

$$u \in C([0, T], L^p(\Omega)), \forall p \in [2, +\infty),$$

et $\exists C > 0$, telle que :

$$\|(u(t) + h_D)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \forall t \in [0, T].$$

Idée de la preuve : Compte tenu des termes non linéaires et du couplage, il faut introduire des termes de troncature (cf. [74]). On note $x^+ := \max(x, 0)$ et soit M une constante précisée ultérieurement, nous posons $h_M(x) = \min(1, M/x)$, $x > 0$. Soient $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$ une suite décroissante qui tend vers 0, le système (2.5) - (2.7) est remplacé par le système d'équations variationnelles suivant : $\forall \omega \in L^2(0, T, V)$

$$\int_0^T \Phi \left\langle \frac{dh_k}{dt}, \omega \right\rangle_{V', V} dt + T_s(h_k)K\{\nabla h_k - h_M(\|\nabla f_k\|_{L^2(\Omega_T)})\nabla f_k\} \cdot \nabla \omega dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \epsilon_k K \nabla h_k \cdot \nabla \omega + \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega dy dt = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\{h_2 \nabla(f_k) - T_s(h_k)K \nabla(h_k)\} \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega \right) dy dt = 0. \quad (2.12)$$

En utilisant l'opérateur A précédemment défini par (2.1), nous pouvons écrire

$$v_k = A^{-1} \left\{ \frac{-1}{h_2} \operatorname{div}(-h_2 \nabla f_D + T_s(h_k)K \nabla h_k) - Q_s - Q_f \right\} := A^{-1}(H(u_k)).$$

Dans la première étape, en utilisant le théorème de Schauder, il est prouvé que pour tout $T > 0$ et tout $k \in N$, (2.11)- (2.11) a une solution $u_k \in W(0, T)$ telle que $u_k(0, \cdot) = u_0$. Ensuite le principe du maximum : pour chaque k , $\delta \leq h_k(t, x) \leq h_2$ p.p. $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ est établi, ce qui permet de montrer que la suite $\{f_k\}_k$ est bornée dans $L^2(0, T, H^1)$. La technique de Alt-Luckhaus appliquée aux translatés en temps de u permettent d'appliquer les résultats de compacité et de prouver que tout point limite faible u dans $W(0, T)$ de la suite $(u_k)_k$ satisfait (2.9)-(2.10).

2.4 Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse

On considère à présent le modèle correspondant au cas confiné avec l'approche interface diffuse.

Comme précédemment, nous introduisons les fonctions T_s et T_f définies par :

$$T_s(u) = h_2 - u \text{ et } T_f(u) = u, \forall u \in (\delta, h_2)$$

ces fonctions sont étendues continument et par des constantes eu dehors (δ, h_2) où $0 < \delta < h_2$. Le système s'écrit alors dans Ω_T .

$$\Phi \partial_t h - \nabla \cdot (T_s(h)K \nabla h) - \nabla \cdot (\Phi \delta_h \nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h)K \nabla f) = -\tilde{Q}_s T_s(h), \quad (2.13)$$

$$-\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h)K \nabla f) = \tilde{Q}_s T_s(h) + \tilde{Q}_f T_f(h). \quad (2.14)$$

Le système (2.13)-(2.14) est complété par les conditions initiales et aux frontières :

$$h = h_D, \quad f = f_D \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (2.15)$$

$$h(0, x) = h(x) \text{ dans } \Omega$$

avec les conditions de compatibilité $h_0(x) = h_D(0, x), \forall x \in \Gamma$.

Les termes sources \tilde{Q}_s et \tilde{Q}_f sont des fonctions données de $L^2(0, T; H)$ telles que $\tilde{Q}_s < 0$.

Les fonctions h_D et f_D appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))')$ tandis que les fonction h_0 est une fonction de $H^1(\Omega)$. Finalement nous supposons que les données initiales et aux frontières satisfont les conditions physique-ment réalistes de hiérarchie :

$$\delta \leq h_D \leq h_2, \quad p.p. \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad \delta \leq h_0 \leq h_2, \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

Nous pouvons alors donner le résultat suivant d'existence :

Théorème 2. $\forall T > 0$, le problème (2.13)-(2.14) admet une solution faible (h, f) satisfaisant $(h - h_D, f - f_D) \in W(0, T) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. De plus, le principe suivant de maximum est valide :

$$\delta \leq h(t, x) \leq h_2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } t \in (0, T)$$

La stratégie de la preuve s'inspire de la précédente si ce n'est que, dans ce cas, le problème n'est plus dégénéré. La première étape consiste en l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder qui établira un résultat d'existence pour un problème tronqué auxiliaire puis il est démontré que la solution tronquée satisfait le principe du maximum annoncé dans le théorème et finalement des estimations uniformes (par rapport à la troncature) permettent de lever la troncature.

2.5 Régularité L^p

Nous allons à présent donner un résultat de régularité prouvé dans la thèse de J.LI (cf. [62]).

Rappels préliminaires

Nous introduisons l'espace de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}, \quad (2.16)$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}. \quad (2.17)$$

Nous notons

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{Fermeture de } C_0^\infty(\Omega) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega), \quad (2.18)$$

que nous munissons de la norme

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)^n}. \quad (2.19)$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré, la norme (2.19) est équivalente à la norme (2.17) sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Puis nous définissons l'espace dual $W^{-1,p}(\Omega)$ comme suit:

Etant donné $1 < p < \infty$, on définit p' par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On pose $W^{-1,p}(\Omega) = (W_0^{1,p'}(\Omega))' = \text{espace dual de } W_0^{1,p'}(\Omega)$

où $L^2(\Omega)$ est identifié à son dual.
On observe que l'application

$$\begin{aligned} (L^p(\Omega))^n &\longrightarrow W^{-1,p}(\Omega) \\ \phi &\longmapsto \operatorname{div} \phi \end{aligned}$$

est surjective. Nous munissons alors $W^{-1,p}(\Omega)$ avec la norme quotient associée, i.e.

$$\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \inf_{\operatorname{div}g=f} \|g\|_{(L^p(\Omega))^n}. \quad (2.20)$$

qui est une façon de définir la norme sur $W^{-1,p}(\Omega)$.

- **Cas elliptique**

Nous rappelons enfin le résultat (cf. J. L. Lions et E. Magenes [63]):

$\forall p$, t.q. $1 < p < \infty$, $(-\Delta)^{-1}$ est un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$.

On pose $G = (-\Delta)^{-1}$ et $g(p) = \|G\|_{\mathcal{L}(W^{-1,p}(\Omega); W_0^{1,p}(\Omega))}$.

On souligne que $g(2)=1$.

Nous donnons à présent deux lemmes préliminaires qui sont une conséquence du résultat de régularité de Meyers [68] et dont on peut trouver les détails de la démonstration dans [22].

On énoncera les lemmes pour tout domaine Ω dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) de frontière Γ suffisamment régulière.

Lemme 1. *Soit $A \in (L^\infty(\Omega))^n$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant*

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \forall x \in \Omega \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $\beta = \max_{1 \leq i,j \leq n} \|A_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Il existe $r(\alpha, \beta) > 2$, tel que , pour tout $f \in W^{-1,r}(\Omega)$ et $\forall g_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, l'unique solution u du problème

$$\begin{cases} \nabla \cdot (A \nabla u) = f, \forall x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) + g_0 \end{cases}$$

appartient à $W^{1,r}(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C(\alpha, \beta, r) \|f - \nabla \cdot (A \nabla g_0)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \quad (2.21)$$

où $C(\alpha, \beta, r)$ est une constante ne dépendant que des constantes α et β caractérisant l'opérateur A et de r .

Remarque :

La preuve donnée dans [22] nous permet de préciser la constante $C(\alpha, \beta, r)$. Soit $c \geq 0$, posons

$$\mu = \frac{\alpha + c}{\beta + c} \text{ et } \nu^2 = \frac{\beta^2 + c^2}{(\beta + c)^2}, \quad (2.22)$$

nous choisissons c t.q. $c > \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}$ de sorte à assurer $\nu < \mu$. Puisque $g(2) = 1$ et $0 < 1 - \mu + \nu < 1$, en utilisant la continuité de l'application $g(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$g(r)(1 - \mu + \nu) < 1. \quad (2.23)$$

Ainsi, plus $(1 - \mu + \nu)$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra des constantes α, β liées à l'opérateur elliptique A .

Le cas limite correspond au cas où l'opérateur A est le Laplacien, (ou proportionnel au Laplacien), alors $\mu = 1$ et $\nu = 0$ donc (2.23) est satisfaite $\forall r \geq 2$.

Compte tenu des précédentes estimations, nous pouvons majorer la constante $C(\alpha, \beta, r)$ par

$$C(\alpha, \beta, r) \leq (1 - g(r)(1 - \mu + \nu))^{-1} \frac{g(r)}{\beta + c}. \quad (2.24)$$

- **Cas parabolique**

Enonçons, à présent, le lemme correspondant au cas parabolique. Nous définissons (cf.[22])

$$X_p = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$

muni de la norme :

$$\left(\int_0^T \|v(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)^n}.$$

Nous introduisons

$$Y_p = L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$$

et nous soulignons que l'application $v \rightarrow \operatorname{div}_x v$ envoie $(L^p(\Omega_T))^n$ sur $L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$. Nous munissons alors Y_p de la norme $\|f\|_{Y_p} = \inf_{\operatorname{div}_x g=f} \|g\|_{L^p(\Omega_T)^n}$, nous pouvons alors énoncer l'analogie du lemme 1 (cf. [22]).

Lemme 2. Soient f et u^0 tels que $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ et $u^0 \in H$. Soit u la solution appartenant à $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f & \text{dans } \Omega_T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

Alors, en supposant que Γ est suffisamment régulière, il existe $r > 2$, dépendant de α, β et Ω tel que si

$$f \in L^r(0, T; W^{-1, r}(\Omega))$$

et si

$$u^0 \in W^{-1, r}(\Omega)$$

alors $u \in L^r(0, T; W_0^{1, r}(\Omega))$ et il existe $\hat{C}(\alpha, \beta, r) > 0$ telle que

$$\|u\|_{W_0^{1, r}(\Omega)} \leq \hat{C}(\alpha, \beta, r)(\|f\|_{L^r(0, T; W^{-1, r}(\Omega))} + \|u_0\|_{W_0^{1, r}(\Omega)}). \quad (2.25)$$

Remarque :

Comme pour le lemme 1, nous pouvons préciser la constante $\hat{C}(\alpha, \beta, r)$ (cf. [22]).

Posons

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, \text{ l'opérateur associé aux conditions de Dirichlet homogènes.}$$

Il est connu que, étant donné $F \in Y_p$, il existe une unique solution $u \in X_p$ telle que :

$$\begin{cases} Pu = F & \text{dans } \Omega_T. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Posons $\hat{g}(p) = \|P^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_p; X_p)}$, alors $\hat{g}(2) = 1$.

En utilisant la continuité de l'application $\hat{g}(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1, \quad (2.26)$$

où les constantes $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ et \hat{c} sont les constantes définies précédemment par (2.22) grâce aux constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

A nouveau, plus $(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu})$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra essentiellement des constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ caractérisant l'opérateur elliptique A .

La constante $\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r)$ doit alors satisfaire :

$$\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r) \leq (1 - \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}))^{-1} \frac{\hat{g}(r)}{\hat{\beta} + \hat{c}}. \quad (2.27)$$

La détermination de r dépend uniquement des coefficients d'ellipticité des opérateurs et de leur norme L_∞ . Nous allons préciser cette dépendance en fonction des paramètres physiques.

Rappelons que la quantité $g(r)(1 - \mu + \nu)$ dépend de α, β avec, dans notre cas, $\alpha = K_-, \beta = K_+$ et $g(r) = \|(\Delta)^{-1}\|_{L(W^{-1,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega))}$.

Donc

$$\mu = \frac{K_- + c}{K_+ + c} \text{ et } \nu^2 = \frac{K_+^2 + c^2}{(K_+ + c)^2} \quad (2.28)$$

et la constante c est choisie telle que $c > \frac{K_+^2 - K_-^2}{2K_-}$ de sorte à assurer $\nu < \mu$.

Ainsi, si r est tel que $k(r) := g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$, alors cet exposant convient. Réciproquement, soit r donné > 2 , on peut toujours ajuster K_- et K_+ pour que $k(r) = g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$.

Concernant $\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu})$, nous avons $\hat{\alpha} = \delta, \hat{\beta} = \delta + K_+ \frac{(h_2 - \delta_1)}{\Phi}$ et $\hat{g}(r) = \|P^{-1}\|_{L(Y_r, X_r)}$.
Donc

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{c}}{\hat{\beta} + \hat{c}} \text{ et } \hat{\nu}^2 = \frac{\hat{\beta}^2 + \hat{c}^2}{(\hat{\beta} + \hat{c})^2}, \quad (2.29)$$

et nous choisissons $\hat{c} > 0$ t.q. $\hat{c} > \frac{\hat{\beta}^2 - \hat{\alpha}^2}{2\hat{\alpha}}$ de sorte à assurer $\hat{\nu} < \hat{\mu}$. Ainsi, si $r \geq 2$ est tel que $\hat{k}(r) := \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$, alors cet exposant convient. Réciproquement, soit r donné > 2 , on peut toujours ajuster h_2, δ_1, K_+, Φ et δ pour que $\hat{k}(r) = \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$.

Soit $r_1(K_-, K_+) > 2$ le plus grand réel tel que $g(r_1)(1 - \mu - \nu) < 1$ où μ et ν sont définis par (2.28) et soit $r_2(\Phi, \delta, \delta_1, h_2, K_+) > 2$, le plus grand réel tel que $\hat{g}(r_2)(1 - \hat{\mu} - \hat{\nu}) < 1$ où $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$ sont définis par (2.29), posons

$$r(\Phi, \delta, \delta_1, h_2, K_-, K_+) = \text{Inf}(r_1(K_-, K_+), r_2(\Phi, \delta, \delta_1, h_2, K_+)). \quad (2.30)$$

Proposition 1:

Soit (h, f) une solution du problème (2.13)-(2.14) et $r(\Phi, \delta, \delta_1, h_2, K_-, K_+) > 2$ le réel déterminé par (2.30). Si $(h_D, f_D) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2, h_0 \in W^{1,r}(\Omega)$ et $(Q_s, Q_f) \in L^r(\Omega_T)^2$ alors ∇h et ∇f sont dans $L^r(\Omega_T)$, de plus on a

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_1(\Phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \quad (2.31)$$

et

$$\|\nabla f\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_2(\Phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1). \quad (2.32)$$

Pour montrer ce résultat de régularité supplémentaire, il faut repartir de la construction d'une solution du problème (2.13)-(2.14) dans la preuve du théorème d'existence plus précisément de la construction de la solution du problème intermédiaire tronqué et linéarisé. Nous rappelons que cette dernière solution apparait comme le point fixe d'une application, il faut donc intégrer à ce processus de construction le résultat de régularité $L^r(\Omega_T)$ (cf. [62]).

2.6 Unicité dans le cas confiné avec interface diffuse

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat d'unicité qui nous permet de dire que notre problème est bien posé dans l'espace $W(0, T)$ introduit précédemment.

Soit (h, f) et (\bar{h}, \bar{f}) deux solutions de (2.13)-(2.14) .

Posons $u = h - \bar{h} \in W(0, T)$, $v = f - \bar{f} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$.

Alors (u, v) est solution de

$$\begin{aligned} \Phi \partial_t u - \nabla \cdot (\delta \Phi + K T_s(\bar{h})) \nabla u - \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla h) \\ + \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla f) + \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla v) = 0 \end{aligned}$$

$$-h_2 \nabla \cdot (K \nabla v) + \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla h) + \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla u) = 0$$

Théorème 3. *Soient $(\Phi, h_2, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \in (\mathbb{R}_*^+)^6$ tels que $g(4)(1 - \mu + \nu) < 1$ et $\hat{g}(4)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$ soient vérifiées. Supposons de plus que $h_0 \in W^{1,4}(\Omega)$, $(h_D, f_D) \in L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))^2$ et $(Q_s, Q_f) \in L^4(\Omega_T)^2$, alors la solution du système (2.13)-(2.14) est unique dans $W(0, T) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$.*

La preuve de ce théorème repose sur le précédent résultat de régularité établi pour $r = 4$, qui combiné aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg, nous permet de majorer les termes non-linéaires (cf. [62]).

Chapter 3

Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère libre

3.1 Introduction

Nous allons à présent rappeler les résultats d'existence globale en temps concernant les problèmes correspondant à l'aquifère libre avec le cas de l'interface nette et celui de l'interface diffuse'.

Le cas correspondant à l'approche avec 'interface libre' a été traité dans [36] et celui de l'interface diffuse est fait dans [33]. Ces articles permettent de conclure que le terme diffusif supplémentaire est essentiel pour établir un principe du maximum plus naturel d'un point de vue de la physique. Précisément la preuve dans le cas 'interface diffuse' permet d'établir une hiérarchie entre les deux profondeurs des interfaces h et h_1 qu'il est impossible d'obtenir dans le cas de l'approche avec 'interface nette'. Dans la seconde partie du chapitre, nous rappelons un résultat de régularité du gradient des solutions dans l'espace $L^r(0, T; \Omega_T)$ qui est établi pour l'approche avec interface diffuse. Ce résultat permet alors de prouver l'unicité de la solution.

3.2 Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse

Les inconnues bien adaptées au cas de l'aquifère nette, sont les hauteurs de deux surfaces libres $h^+ = \sup(0, h) = \chi_0(h)h$ et $h_1^+ = \chi_0(h_1)h_1$. Rappelons qu'alors le système s'écrit :

$$(0) \begin{cases} \Phi \chi_0(h) \partial_t h - \nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \nabla h) - \nabla \cdot (\delta \Phi \chi_0(h) \nabla h) \\ -\nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \nabla h_1) = -\widetilde{Q}_s T_s(h), \\ \Phi \chi_0(h_1) \partial_t h_1 - \nabla \cdot (K(T_f(h-h_1) + T_s(h)) \chi_0(h_1) \nabla h_1) \\ -\nabla \cdot (\delta \Phi K \chi_0(h_1) \nabla h_1) - \nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \chi_0(h) \nabla h) \\ = -\widetilde{Q}_f T_f(h-h_1) - \widetilde{Q}_s T_s(h). \end{cases}$$

On rappelle que $\chi_0(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_1 \leq 0 \\ 1 & \text{si } h_1 \geq 0 \end{cases}$.

En fait, nous pouvons simplifier ce système en enlevant les troncatures $\chi_0(h_1), \chi_0(h)$ là où elles sont inutiles, le système devient alors:

$$(1) \begin{cases} \Phi \partial_t h - \nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \nabla h) - \nabla \cdot (\delta \Phi \nabla h) \\ -\nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \nabla h_1) = -\widetilde{Q}_s T_s(h), \\ \Phi \partial_t h_1 - \nabla \cdot (K(T_f(h-h_1) + T_s(h)) \chi_0(h_1) \nabla h_1) \\ -\nabla \cdot (\delta \Phi K \nabla h_1) - \nabla \cdot (KT_s(h) \chi_0(h_1) \chi_0(h) \nabla h) \\ = -\widetilde{Q}_f T_f(h-h_1) - \widetilde{Q}_s T_s(h). \end{cases}$$

Théorème 4. *On suppose qu'il existe deux réels positifs K_- et K_+ tels que:*

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \Sigma_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty, x \in \Omega, \xi \in R^2 \text{ et } \xi \neq 0.$$

On suppose de plus une faible hétérogénéité spatiale:

$$K_- \leq K_+ \leq 2K_-.$$

Alors pour tout $T > 0$, le problème (1) admet une solution faible (h, h_1) satisfaisant:

- (a) $h - h_D, h_1 - h_{1,D} \in W(0, T)$,
- (b) $0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2(t, x)$ pour presque tout x dans Ω et pour tout t dans $(0, T)$.

La démonstration reprend les étapes des démonstrations du cas confiné mais elle est plus technique.

3.3 Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette

Nous introduisons à nouveau les fonctions T_s et T_f définies par :

$$T_s(u) = \begin{cases} h_2 - u & , \forall u \in [0, h_2] \\ 0 & , u \leq 0 \end{cases} \text{ et } T_f(u) = u, \forall u \in [\delta, h_2] (0 < \delta < h_2)$$

et nous étendons continument par des constantes ces fonctions pour $u \geq h_2$ pour la fonction T_s et en dehors de l'intervalle $[\delta, h_2]$ pour la fonction T_f . Cette condition sur T_f , impose à l'aquifère une épaisseur d'eau douce toujours $\geq \delta$.

Nous avons le système :

$$\Phi \partial_t h - \nabla \cdot \left(K T_s(h) \nabla h \right) - \nabla \cdot \left(K T_s(h) \mathcal{X}_0(h_1) \nabla h_1 \right) = -\widetilde{Q}_s T_s(h), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi \partial_t h_1 - \nabla \cdot \left(K \left(T_f(h - h_1) + T_s(h) \right) \nabla h_1 \right) - \nabla \cdot \left(K T_s(h) \mathcal{X}_0(h_1) \nabla h \right) \\ = - \left(\widetilde{Q}_f T_f(h - h_1) + \widetilde{Q}_s T_s(h) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

On remarque qu'on n'a pas utilisé h^+ et h_1^+ dans les fonctions T_f et T_s car ces informations seraient redondantes. Pour la même raison, on a supprimé $\chi_0(h)$ et $\chi_0(h_1)$ devant les termes $\partial_t h$, $\partial_t h_1$, ∇h et ∇h_1 et on les maintient là où ils sont nécessaires.

Le système (3.1)-(3.2) est complété par les conditions initiales et aux limites

$$h = h_D, h_1 = h_{1,D}, \text{ dans } \Gamma \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$h(0, x) = h_0(x), h_1(0, x) = h_{1,0}(x), \text{ dans } \Omega, \quad (3.4)$$

avec les conditions de compatibilité

$$h_0(x) = h_D(0, x), h_{1,0}(x) = h_{1,D}(0, x), x \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Les termes sources \widetilde{Q}_f et \widetilde{Q}_s sont des fonctions de $L^2(0, T; H)$.

Les fonctions h_D et $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H'(\Omega))')$ tandis que les fonctions h_0 et $h_{1,0}$ sont dans $H^1(\Omega)$. Enfin, nous supposons que les données initiales et aux limites satisfont les conditions supplémentaires de hiérarchie des hauteurs des interfaces, $0 \leq h_{1,D} \leq h_{1,D} + \delta \leq h_D \leq h_2$, $\forall t \in (0, T)$ p.p. dans Ω et $0 \leq h_{1,0} \leq h_{1,0} + \delta \leq h_0 \leq h_2$ p.p. dans Ω .

Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 5. *Supposons une hétérogénéité spatiale pour le tenseur de conductivité hydraulique:*

$$K_+ \leq 2\sqrt{\gamma} K_-, \quad 0 < \gamma < \frac{8}{9}.$$

Alors, pour tout $T > 0$, le problème (3.1)-(3.4) admet une solution faible (h, h_1) satisfaisant

$$(h - h_D, h_1 - h_{1,D}) \in (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H_0^1(\Omega))'))^2$$

De plus, le principe du maximum suivant est vrai:

$0 \leq h_1(t, x)$ et $0 \leq h(t, x) \leq h_2$ pour p.p. $x \in \Omega$ et pour chaque $t \in (0, T)$.

La première étape consiste à montrer que le problème régularisé et tronqué admet une solution, grâce au théorème du point fixe de Schauder. On peut alors suffisamment contrôler la vitesse de la surface libre pour éliminer le précédent contrôle. La solution du système régularisé satisfait le principe du maximum énoncé dans le théorème puis des estimations uniformes suffisantes permettent de faire tendre vers 0 la régularisation.

3.4 Unicité dans le cas libre avec interface diffuse

Nous allons à présent énoncer un résultat d'unicité analogue à celui énoncé dans le cas confiné. Si nous supposons plus de régularité sur les données, nous pouvons alors énoncer le résultat :

Proposition 2 : Soit (h, h_1) une solution de (3.1)-(3.5), alors il existe $r(\alpha, \beta) > 2$ tel que si $(h_D, h_{1,D}) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2$, $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,r}(\Omega)^2$, $(Q_s, Q_f) \in L^r(\Omega_T)^2$, alors ∇h et ∇h_1 sont dans $L^r(\Omega_T)^2$.

De plus, on a

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,1}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K) \quad (3.6)$$

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,2}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K) \quad (3.7)$$

La preuve de cette proposition reprend les étapes de la proposition précédente donnée dans le cas confiné mais elle est plus technique.

Précisons qu'ici $\alpha = \delta$ et $\beta = \delta + \frac{K_+ h_2}{\phi}$.

Nous concluons cette section, en énonçant le théorème d'unicité :

Théorème 6. *Supposons que $(h_2, \delta, K_+, \Phi) \in \mathbb{R}_*^{+4}$ soient tels que $\hat{g}(4)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$ et que les données initiales et aux limites vérifient les hypothèses de la Proposition 2, alors la solution du système (1) est unique dans $W(0, T)^2$.*

Remarque :

1) Les paramètres physiques sont ajustés de sorte que $r \geq 4$.

2) La preuve de ce résultat repose sur le même arguments que celui établi dans le cas confiné mais est plus technique. Nous renvoyons le lecteur à [34] pour les détails de la preuve.

Chapter 4

Analyse numérique du problème dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'

Dans ce chapitre, nous allons décrire la méthode élément fini P_k Lagrange que nous avons appliquée au problème d'intrusion saline dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'. C'est justement la présence de la zone diffuse qui nous a fait privilégier la méthode des éléments finis. Avant de donner le théorème d'estimation d'erreur pour notre schéma numérique, nous allons rappeler des résultats classiques d'interpolation avec les éléments finis P_k Lagrange ainsi qu'un théorème d'estimation d'erreur sur un exemple classique linéaire, ceci afin de mieux localiser les difficultés propres à notre étude. Ces rappels figurent en détail dans le livre d'A. Ern - J. Guermond (cf. [48]). Nous rappelons que les deux principales difficultés liées à notre cas sont le fort couplage des équations elliptique-parabolique et les non-linéarités. Nous allons dans un premier temps, établir un résultat d'estimation d'erreur pour des solutions très régulières (ce qui revient, en un certain sens, à linéariser le problème), puis nous utiliserons la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ du gradient de la solution pour nous affranchir des contraintes sur les hypothèses de régularité du précédent théorème.

Compte tenu du fait que notre inconnue, la hauteur de l'interface eau douce / eau salée est notée " h ", afin qu'il n'y ait pas de confusion avec la notation classique de la discrétisation en espace (notée aussi h pour la méthode des éléments finis), nous noterons la discrétisation en espace, b , dans ce document.

4.1 Rappels et notations

Nous rappelons que cette section est tirée du livre d'A. Ern - J. Guermond [48]

4.1.1 Résultats d'interpolation

Théorème 7. Soit Ω un domaine polyédrique de R^d . Soit (\mathcal{T}_b) une famille régulière de maillages affines. Soit $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange avec $P_k \subset \hat{P}$ pour $k+1 > \frac{d}{2}$. Notons V_b^k l'espace d'approximation associé et \mathcal{I}_b^k l'opérateur d'interpolation correspondant. Soit $s > \frac{d}{2}$ et posons $l = \min(k, s-1)$. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $b > 0$ et toute fonction v dans $H^s(\Omega)$

$$|v - \mathcal{I}_b^k v|_{0,\Omega} + \sum_{m=1}^{k+1} b^m \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_b} |v - \mathcal{I}_b^k v|_{m,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq cb^{k+1} |v|_{k+1,\Omega}$$

où $\mathcal{I}_b^k = \sum_{i=1}^n \sigma_{i=1}(v) \Theta_{i=1}$, $\Theta_{i=1}$ la fonction de forme locale sur K .

En particulier, si V_b^k est H^1 -conforme, on a

$$\forall b, \forall v \in H^s(\Omega), \quad |v - \mathcal{I}_b^k v|_{1,\Omega} \leq cb^k |v|_{k+1,\Omega}$$

Enfin, si $v \in H^1(\Omega)$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_b \in V_b^k} |v - v_b|_{1,\Omega} = 0$

Proposition 3 : Soit $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini. Soit $(\mathcal{T}_b)_b$ une famille régulière de maillages affines et supposons $b \leq 1$. Supposons $\hat{P} \subset H^l(\hat{K})$ pour $l \geq 1$. Posons

$$P_K = \{\hat{p} \circ T_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$$

Alors, il existe $c > 0$ tel que pour $0 \leq m \leq l$, on ait

$$\forall b, \forall K \in \mathcal{T}_b, \forall v \in P_K, \quad \|v\|_{l,K} \leq cb_K^{m-1} \|v\|_{m,K} \quad (4.1)$$

Preuve Par la suite, c désigne une constante générique pouvant dépendre de \hat{K} , \hat{P} , et l mais indépendante de b, K , et v .

i- Puisque dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe $c > 0$ telle que pour tout $j \leq l$, on ait

$$\forall \hat{v} \in \hat{P}, \quad \|\hat{v}\|_{j,\hat{K}} \leq c \|\hat{v}\|_{0,\hat{K}} \quad (4.2)$$

ii- Soit $j \leq l$ et soit $v \in P_K$. En utilisant (4.1), (4.2) et la régularité de la famille $(\mathcal{T}_b)_b$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |v|_{j,K} &\leq cb_K^{-j} |\det(J_K)|^{\frac{1}{2}} \|\hat{v}\|_{j,\hat{K}} \\ &\leq cb_K^{-j} |\det(J_K)|^{\frac{1}{2}} \|\hat{v}\|_{0,\hat{K}} \end{aligned}$$

$$\leq cb_K^{-1} \|v\|_{0,K}$$

Comme $b_K \leq b \leq 1$ par hypothèse, il vient

$$\forall v \in P_K, 0 \leq j \leq l, \|v\|_{j,K} \leq cb_K^{-j} \|v\|_{0,K} \quad (4.3)$$

De (4.2) avec $j = l$, nous déduisons (4.1) pour $m = 0$.

iii- Soit $m \leq l$. Soit k avec $l - m \leq k \leq l$ et α un multi-indice avec $|\alpha| = k$. En écrivant $\partial^\alpha v = \partial^\beta \partial^\gamma v$ avec $|\beta| = l - m$ et $|\gamma| = k + m - l$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha v\|_{0,K} &\leq \|\partial^\gamma v\|_{l-m,K} \\ &\leq cb_K^{m-1} \|\partial^\gamma v\|_{0,K} \\ &\leq cb_K^{m-1} |v|_{k+m-l,K} \end{aligned}$$

Comme le multi-indice α est arbitraire, nous obtenons

$$|v|_{k,K} \leq cb_K^{m-l} |v|_{k+m-l,K} \leq cb_K^{m-l} \|v\|_{m,K} \quad (4.4)$$

la deuxième majoration résultant du fait que $k + m - l \leq m$. L'inégalité (4.1) résulte finalement de (4.2) pour $j = l - m$ et (4.4) pour $l - m \leq k \leq l$.

Proposition 4 : Soit Ω un domaine polyédrique de R^d et $(\mathcal{T}_b)_b$ une famille de maillages de Ω . Soit $k \geq 1$ le degré de l'élément fini de Lagrange considéré et $1 \leq l \leq k$.

Nous considérons les opérateurs de projection orthogonale suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_b^{0,k} : L^2(\Omega) &\longrightarrow V_b^k, \\ \mathcal{P}_b^{1,k} : H^1(\Omega) &\longrightarrow V_b^k, \end{aligned}$$

(i) Si la famille $(\mathcal{T}_b)_b$ est régulière, il existe $c > 0$ telle que $\forall b, \forall v \in H^{l+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)\|_{0,\Omega} &\leq cb^{l+1} |v|_{l+1,\Omega} \\ \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{1,\Omega} &\leq cb^l |v|_{l+1,\Omega} \end{aligned}$$

(ii) Si la famille $(\mathcal{T}_b)_b$ est quasi-uniforme et si Ω est convexe, il existe $c > 0$ telle que

$$\forall b, \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \|v - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)\|_{1,\Omega} \leq cb^l |v|_{l+1,\Omega}$$

(iii) Si la famille $(\mathcal{T}_b)_b$ est régulière et si Ω est convexe, il existe $c > 0$ telle que

$$\forall b, \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega} \leq cb^{l+1} |v|_{l+1,\Omega}$$

Preuve Pour $k \geq 1$ et $1 \leq l \leq k$, on a

$$\forall b, \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \|v - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)\|_{0,\Omega} \leq \|v - \mathcal{I}_b^k(v)\|_{0,\Omega} \leq cb^{l+1} |v|_{l+1,\Omega}$$

et de même

$$\forall b, \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{1,\Omega} \leq \|v - \mathcal{I}_b^k(v)\|_{1,\Omega} \leq cb^l |v|_{l+1,\Omega}$$

De plus, Lorsque Ω est convexe, alors $\forall f \in L^2(\Omega)$, la solution $\xi(f)$ du problème

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \xi(f) \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &(v, \xi(f))_{1,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

appartient à $H^2(\Omega)$ et satisfait l'estimation

$$\|\xi(f)\|_{2,\Omega} \leq c\|f\|_{0,\Omega}$$

où c est une constante strictement positive. Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega} &= \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{(f, v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v))_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \\ &= \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{(\xi(f), v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v))_{1,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \end{aligned}$$

Puit, pour $v_b \in V_b$, il vient

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega} &= \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{(\xi(f), v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v), \xi(f) - v_b)_{1,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \\ &\leq \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{1,\Omega} \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|\xi(f)\|_{1,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \end{aligned}$$

En prenant $v_b = \mathcal{I}_b^k \xi(f)$ et en utilisant le théorème d'interpolation, nous obtenons

$$\sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|\xi(f) - v_b\|_{1,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \leq cb$$

ce qui implique

$$\|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega} \leq cb \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{1,\Omega} \leq cb^{l+1} |v|_{l+1,\Omega}$$

iii- Pour $v \in H^{l+1}(\Omega)$, nous constatons que

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)|_{1,\Omega} &\leq |v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)|_{1,\Omega} + |\mathcal{P}_b^{1,k}(v) - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)|_{1,\Omega} \\ &\leq |v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)|_{1,\Omega} + |\mathcal{P}_b^{0,k}(v) [v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)]|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Car $\mathcal{P}_b^{0,k}[\mathcal{P}_b^{1,k}(v)] = \mathcal{P}_b^{1,k}(v)$. Comme la famille $(\mathcal{T}_b)_b$ est quasi-uniforme, nous disposons

$$|\mathcal{P}_b^{0,k}[v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)]|_{1,\Omega} \leq \frac{c}{b} \|\mathcal{P}_b^{0,k}[v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)]\|_{0,\Omega} \leq \frac{c}{b} \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega}$$

Nous en déduisons

$$|v - \mathcal{P}_b^{0,k}(v)|_{1,\Omega} \leq |v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)|_{1,\Omega} + \frac{c}{b} \|v - \mathcal{P}_b^{1,k}(v)\|_{0,\Omega} \leq cb^l |v|_{l+1,\Omega}$$

d'après (i) et (ii). Nous concluons b suffisamment petit. [48]

4.1.2 Théorèmes de convergence

Dans cette section, on se place dans le cadre abstrait des espaces de Hilbert, on note $V \subset L$ deux espaces de Hilbert réels séparables tels que l'injection de V dans L soit continue et que V soit dense dans L .

Pour presque tout $t \in [0, T]$, on se donne une forme bilinéaire $a(t, u, v) : V \times V \rightarrow R$, il existe $M > 0$ tel que

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad p.p.t \in [0, T], \quad \forall u, v \in V.$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $\alpha, \gamma > 0$ tel que

$$a(t; u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2 - \gamma \|u\|_L^2 \quad p.p.t \in [0, T], \quad \forall u \in V.$$

Pour $f \in L^2(]0, T[, V')$ et $u_0 \in L$, où l'espace $W(V)$ définit par

$$W(V) = \{v :]0, T[\rightarrow V; v \in L^2(]0, T[; V); d_t v \in L^2(]0, T[; V')\}.$$

Muni de la norme $\|u\|_W = (\|u\|_{L^2(]0, T[; V)}^2 + \|d_t u\|_{L^2(]0, T[; V')}^2)^{\frac{1}{2}}$, $W(V)$ est un espace de Hilbert.

Nous considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W(V) \text{ tel que} \\ \langle d_t u, v \rangle_{V, V'} + a(t; u, v) = \langle f(t), v \rangle_{V, V'} \quad p.p.t \in [0, T], \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

Considérons aussi l'équation de la chaleur

$$S = \left\{ \begin{array}{l} d_t u - \nabla \cdot (k(x) \nabla u) = f \quad x \in \Omega, t \geq 0 \\ u(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

Rappelons que l'inconnue $u(x, t)$ représente la température au point $x \in \Omega$ à l'instant t , les données du problème étant la conductivité thermique $k(x) > 0$ (éventuellement dépendante de la position x), le terme source f et la condition initiale u_0 .

Ainsi, une formulation faible possible du problème S est

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W(H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} d_t u v + \int_{\Omega} k(x) \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad P.P.t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

De plus, nous supposons $f(t) \in C^0([0, T]; L)$. On se donne $(V_b)_{0 \leq b \leq 1}$ une famille de sous-espace de V de dimension finie. Nous supposons qu'il existe un opérateur d'interpolation linéaire $\mathcal{I}_b \in \mathcal{L}(W, V_b)$ et $k > 0, c > 0$ tels que

$$\forall v \in W, \|v - \mathcal{I}_b v\|_L + b \|v - \mathcal{I}_b v\|_V \leq c b^{k+1} \|v\|_W$$

On pose à $V = H_0^1(\Omega)^d$ où V_b est un espace d'approximation P_k ou Q_k , $W = H^{k+1}(\Omega)$ et \mathcal{I}_b est l'opérateur d'interpolation de lagrange. Nous considérons le problème approché:

$$V_b = \begin{cases} \text{Trouver } u_b \in \mathcal{C}^1([0, T]; V_b) \text{ tel que} \\ (d_t u_b, v_b)_L + a(t, u_b, v_b) = (f, v_b)_L \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall v_b \in V_b \\ u_b(0) = u_{0b} \end{cases}$$

Pour savoir si $u_b(t)$ est une bonne approximation de $u(t)$, nous introduisons pour tout $t \in [0, T]$ l'opérateur $\mathcal{J}_{bt} \in \mathcal{L}(V, V_b)$ tel que pour tout $w \in V$, $\mathcal{J}_{bt}(w)$ est la solution de

$$\forall v_b \in V_b, \quad a(t; \mathcal{J}_{bt}(w), v_b) = a(t; w, v_b).$$

De plus

(§) il existe $c > 0$ tel que pour tout w dans $\mathcal{C}^1([0, T]; W)$, et $\forall j = 0, 1$

$$\|w - \mathcal{J}_{bt}(w)\|_{\mathcal{C}^j([0, T]; L)} + b\|w - \mathcal{J}_{bt}(w)\|_{\mathcal{C}^j([0, T]; V)} \leq cb^{k+1}\|w\|_{\mathcal{C}^j([0, T]; W)} \quad (4.5)$$

Théorème 8. Si $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty]; W)$, alors $\forall t > 0$

$$\|u(t) - u_b(t)\|_L \leq \|u_0 - u_{0b}\|_L e^{-\frac{cp\alpha t}{2}} + c\left(1 + \frac{1}{\alpha cp}\right)b^{k+1}\|u\|_{\mathcal{C}^1([0, t]; W)}$$

$$\left[\frac{1}{T} \int_0^T \|u - u_b\|_V^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}\|u_0 - u_{0b}\|_L + cb^k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} + \frac{1}{\alpha\sqrt{cp}}\right)\|u\|_{\mathcal{C}^1([0, T]; W)}$$

Preuve

Nous allons comparer $u_b(t)$ à \mathcal{J}_{bt} . On obtient les notations

$$e_b(t) = \mathcal{J}_{bt}(u) - u_b(t) \text{ et } \eta(t) = u(t) - \mathcal{J}_{bt}(u).$$

après l'hypothèse (4.5) signifie que $\mathcal{J}_{bt}(u)$ est une approximation optimale de $u(t)$; donc

$$\|\eta\|_{\mathcal{C}^1([0, T]; L)} + b\|\eta\|_{\mathcal{C}^1([0, T]; V)} \leq cb^{k+1}\|u\|_{\mathcal{C}^1([0, T]; W)}.$$

En retranchant les deux derniers problèmes (V) , (V_b) , la définition de $\mathcal{J}_{bt}(u)$ nous permet d'écrire

$$\forall v_b \in V_b, \quad (d_t e_b, v_b)_L + a(t; e_b, v_b) = -(d_t \eta, v_b)_L.$$

En choisissant $e_b(t)$ comme fonction test, nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_b\|_L^2 + \alpha \|e_b\|_V^2 \leq \|d_t \eta\|_{V'} \|e_b\|_V \leq \frac{\alpha}{2} \|e_b\|_V^2 + \frac{1}{2\alpha} \|d_t \eta\|_{V'}^2.$$

De la relation $\|v\|_V^2 \geq cp\|v\|_L^2$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|e_b\|_L^2 + \alpha cp\|e_b\|_V^2 \leq \frac{d}{dt}\|e_b\|_L^2 + \alpha\|e_b\|_L^2 \leq \frac{1}{\alpha cp}\|d_t\eta\|_L^2. \quad (4.6)$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|e_b(t)\|_L^2 &\leq \|e_b(0)\|_L^2 e^{-\alpha cpt} + \frac{1}{\alpha cp} \int_0^t e^{-\alpha cp(t-\tau)} \|d_\tau\eta\|_L^2 d\tau, \\ &\leq \|e_b(0)\|_L^2 e^{-\alpha cpt} + \frac{1}{(\alpha cp)^2} (1 - e^{-\alpha cpt}) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|d_\tau\eta\|_L^2. \end{aligned}$$

De l'inégalité triangulaire $\|u - u_b\|_L \leq \|e_b\|_L + \|\eta\|_L$ nous déduisons finalement

$$\|u(t) - u_b(t)\|_L \leq \|e_b(0)\|_L e^{-\frac{\alpha cpt}{2}} + \left(1 + \frac{1}{\alpha cp}\right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\|\eta\|_L + \|d_\tau\eta\|_L).$$

D'où la première majoration.

En intégrant (4.6) par rapport au temps, nous obtenons

$$\alpha \int_0^T \|e_b\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha cp} \int_0^T \|d_t\eta\|_L^2 + \|e_b(0)\|_L^2 \leq \frac{T}{\alpha cp} \sup_{0 \leq t \leq T} \|d_t\eta\|_L^2 + \|e_b(0)\|_L^2$$

D'où nous déduisons

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|e_b\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha^2 cp} \sup_{0 \leq t \leq T} \|d_t\eta\|_L^2 + \frac{1}{\alpha T} \|e_b(0)\|_L^2$$

La seconde majoration suit aisément.

- En particulier

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [\|u(t) - u_b(t)\|_L + b[\frac{1}{t} \int_0^t \|u - u_b\|_V^2]^{\frac{1}{2}}] \leq cb^{k+1} \|u\|_{C^1([0, \infty[; W]}$$

4.2 Analyse numérique du problème dans le cas confiné avec l'approche 'interface diffuse'

4.2.1 Présentation du problème

On considère Ω un domaine ouvert borné de R^2 , décrivant la projection sur le plan horizontal du milieu poreux avec Γ sa frontière supposée de classe C^1 . L'intervalle de temps d'intérêt est $(0, T)$ et $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$. Pour tout $T > 0$, soit $W(0, T)$ l'espace

$$W(0, T) := \{\omega \in L^2(0, T, V), \frac{d\omega}{dt} \in L^2(0, T, V')\}$$

où

$$V = H_0^1(\Omega), V' = H^{-1}(\Omega), H = L^2(\Omega).$$

muni de la norme hilbertienne

$$\|\omega\|_{W(0,T)} = \left(\|\omega\|_{L^2(0,T,V)}^2 + \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|_{L^2(0,T,V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous rappelons que notre système est :

$$\Phi \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (T_s(h)K\nabla f) - \nabla \cdot ((\delta + T_s(h)K)\nabla h) = -Q_s, \quad (4.7)$$

$$-\nabla((h_2 - h_1)K\nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h)K\nabla h) = Q_f + Q_s. \quad (4.8)$$

où f est la charge hydraulique, δ est l'épaisseur de l'interface diffuse et $T_s(h) = h_2 - h$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée qui se prolonge de façon continue par des constantes à l'extérieur de $[h_1, h_2]$. Nous soulignons que dans l'équation (2.13) du chapitre 2, l'épaisseur de la zone diffuse est notée δ_h et de plus, elle est multipliée par la porosité Φ . Le paramètre δ_h étant arbitraire, nous incorporons la porosité à ce coefficient que nous notons à présent δ .

Les termes sources Q_f et Q_s sont des fonctions données de $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Le tenseur K est la conductivité hydraulique. Le problème est complété par les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$h = h_D, \quad \text{et} \quad f = f_D \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (4.9)$$

$$h(0, x) = h_0(x), \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (4.10)$$

Les fonctions h_D, f_D appartiennent à l'espace $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ telles que leurs dérivées en temps sont $\partial_t h_D, \partial_t f_D \in L^2(0, T, H^1(\Omega)')$. La fonction $h_0 \in H^1(\Omega)$ doit satisfaire la condition de compatibilité

$$h_{0/\Gamma} = h_D(0, x).$$

Nous avons rappelé dans le chapitre 2, le résultat d'existence globale en temps de la solution de (4.7) – (4.8), plus précisément.

Théorème 9. *Soit h_2, h_1 et δ trois réels non négatifs et Supposons qu'il existe deux nombres positifs K_- et K_+ tels que*

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty \quad x \in \Omega, \xi \neq 0. \quad (4.11)$$

Alors, pour tout $T > 0$, le problème (4.7)-(4.9) admet une solution faible $(h - h_D, f - f_D) \in W(0, T)$ satisfaisant

$$h_1 \leq h(t, x) \leq h_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_T.$$

Par ailleurs, nous avons le résultat de régularité suivant :

Lemme 3. Soient $(\Phi, h_2, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \in (\mathbb{R}_*^+)^6$ tels que $g(4)(1 - \mu + \nu) < 1$ et $\hat{g}(4)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$ soient vérifiées. Supposons de plus que $h_0 \in W^{1,4}(\Omega)$, $(h_D, f_D) \in L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))^2$ et $(Q_s, Q_f) \in L^4(\Omega_T)^2$, alors la solution du système (4.7)-(4.8) est unique dans $W(0, T) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$. De plus ∇h et ∇f sont dans $L^4(\Omega_T)$ et il existe une constante C_4 telle que

$$\|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)} \leq C_4(\Phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \quad (4.12)$$

et

$$\|\nabla f\|_{L^4(\Omega_T)} \leq C_4(\Phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1). \quad (4.13)$$

Nous rappelons que la preuve de ce résultat est donnée dans la thèse de J.LI [62].

4.2.2 Présentation du schéma et existence de la solution approchée

Nous présentons le schéma que nous allons utiliser pour l'analyse numérique de l'évolution de l'interface eau douce / eau salée dans le cas confiné.

Soit \mathcal{T}_b , $b \in [0, 1]$ une triangulation régulière du domaine Ω , nous introduisons l'espace approximatif

$$V_b^k := \{w \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_b, w|_K \in P_k(K)\}, \quad k \geq 1.$$

On note $\mathcal{I}_b \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega), V_b^k)$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange alors il existe une constante $C_I > 0$ telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{L^2} + b \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{H^1} \leq C_I b^{k+1} \|v\|_{H^{k+1}}, \quad (4.14)$$

où l'entier $k \geq 1$, (donc $H^{k+1}(\Omega)$ est inclus dans $C^0(\bar{\Omega})$). Nous introduisons \mathcal{P}_b l'opérateur de projection orthogonale sur V_b^k telle que

$$\forall v_b \in V_b^k, \quad a(\mathcal{P}_b(w), v_b) = a(w, v_b) := \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v_b \, dx \quad (4.15)$$

on déduit alors de (4.14) que $\forall w \in C^1([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\forall j \in \{0, 1\}$:

$$\|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; L^2)} + b \|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; H^1)} \leq C_I b^{k+1} \|w\|_{C^j([0, T]; H^{k+1}(\Omega))} \quad (4.16)$$

Par ailleurs il existe une constante $C(b) > 0$ telle que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(b) \|w\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in V_b^k, \quad (4.17)$$

où la constante $C(b)$ dépend de la discrétisation de l'espace V_b^k .

Dans notre cas, et pour un maillage quasi-uniforme $C(b) \leq cb^{-1}$.

Enfin, nous notons f^n l'approximation de $f(t^n)$ où $t_n = n \cdot \delta t$, $n = 1, N$ et $\delta t = \frac{T}{N}$.

Si $h_b^n \in [h_1 + \delta, h_2]$ et f_b^n sont donnés dans le $(\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(f_D) + V_b^k)$, nous considérons le problème approché

Trouver $(h_b^{n+1}, f_b^{n+1}) \in (\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(f_D) + V_b^k)$ telle que $\forall w \in V_b^k$:

$$\int_{\Omega} [(h_2 - h_1)K\nabla f_b^{n+1} - T_s(h_b^n)K\nabla h_b^n] \cdot \nabla w - (Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1})w \, dx = 0 \quad (4.18)$$

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{h_b^{n+1} - h_b^n}{\delta t} w \, dx + [T_s(h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - f_b^{n+1}) + \delta\nabla h_b^{n+1}] \cdot \nabla w + Q_s^{n+1}w \, dx = 0 \quad (4.19)$$

avec

$$(h_b^0, f_b^0) = (\mathcal{I}_b(h_0), \mathcal{I}_b(f_0)).$$

Lemme 4. Soit h_b^0 et f_b^0 dans $(\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(f_D) + V_b^k)$, le problème approché (4.18)-(4.19) a une unique solution $(h_b^n, f_b^n) \in (\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(f_D) + V_b^k)$.

Preuve:

Nous prouvons ce résultat par récurrence sur n :

Soit A_1, A_2 les formes bilinéaires continues définies sur $V_b^k \times V_b^k$ par

$$A_1(u, w) = \int_{\Omega} (h_2 - h_1)K\nabla u \cdot \nabla w \, dx,$$

$$A_2(v, w) = \int_{\Omega} \Phi \frac{vw}{\delta t} \, dx + \int_{\Omega} (\delta + T_s(h_b^n)K)\nabla v \cdot \nabla w \, dx,$$

et L_1, L_2 formes linéaires continues définies sur V_b^k par

$$L_1(w) = \int_{\Omega} T_s(h_b^n)K\nabla h_b^n \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} (Q_f^{n+1} + Q_s^{n+1})w \, dx,$$

$$L_2(w) = \int_{\Omega} T_s(h_b^n)K\nabla f_b^{n+1} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} (\Phi \frac{h_b^n}{\delta t} - Q_s^{n+1})w \, dx.$$

le problème approché peut s'écrire :

$$A_1(f_b^{n+1}, w) = L_1(w) \quad \forall w \in V_b^k,$$

$$A_2(h_b^{n+1}, w) = L_2(w) \quad \forall w \in V_b^k.$$

Comme $(h_2 - h_1) \neq 0$ et $T_s(h_b^n) \geq 0$, les coercitivités de A_1 et A_2 on V_b^k sont clairs. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, le couple (h_b^{n+1}, f_b^{n+1}) est bien défini et unique.

A partir de maintenant (et juste pour la section qui suit), nous allons poser $\Phi = 1$ pour simplifier les expressions littérales.

4.3 Estimation de l'erreur pour une solution régulière

Supposons que:

$$\lambda_1 = \delta t C_p^{-2} \frac{\delta}{4} > 2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \delta t \left(\frac{12}{\delta} + \frac{5}{\delta K_-} \right) K_+^2 C_m^2 > 2.$$

où C_p est la constante de Poincaré et C_m est la constante majorant la norme L_∞ des gradients des inconnues h et f (définie ci-dessous par (4.26)).

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat de convergence suivant :

Théorème 10. *Si $\delta t C(b)^2 h_2 (1 + \frac{2h_2}{\delta}) < 1$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute solution (h, f) du problème (4.7)-(4.8) dans $Z(\Omega_T) = C^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{k+1}(\Omega)) \cap C^0([0, T], H^3(\Omega))$ on obtient*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|h(t^n) - h_b^n\|_{L^2} \leq C (b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|f\|_{Z(\Omega_T)}), \quad (4.20)$$

$$\left[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h(t^n) - h_b^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C (b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|f\|_{Z(\Omega_T)}), \quad (4.21)$$

$$\left[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|f(t^n) - f_b^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C (b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|f\|_{Z(\Omega_T)}). \quad (4.22)$$

Preuve:

A l'instant t^{n+1} (nous rappelons la notation $h^{n+1} = h(t^{n+1})$) nous avons :
 $\forall v_b \in V_b^k$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} (t^{n+1}) v_b \, dx + \int_{\Omega} [T_s(h^{n+1}) K (\nabla h^{n+1} - \nabla f^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b \, dx \\ & = - \int_{\Omega} Q_s^{n+1} v_b \, dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(h_2 - h_1) K \nabla f^{n+1} - T_s(h^{n+1}) K \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b \, dx \\ & = \int_{\Omega} (Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}) v_b \, dx. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Puisque $h_1 + \delta \leq h^{n+1} \leq h_2$, on a $T_s(h^{n+1}) = h_2 - h^{n+1}$, on déduit de (4.23) que :

$$\frac{1}{\delta t} (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla (h^{n+1} - f^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}, \nabla v_b)$$

$$= (-Q_s^{n+1}, v_b) + R^{n+1}(v_b) \quad (4.25)$$

avec la notation classique $(f, g) = \int_{\Omega} f g \, dx$ et où

$$R^{n+1}(v_b) = \left(\frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h^{n+1}}{\partial t}, v_b \right) - ((h_2 - h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) \\ + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b).$$

Nous établissons d'abord une estimation uniforme du résidu R^{n+1} .

Déjà, nous posons

$$D = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) := (A) - (B),$$

avec

$$A = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b h - \partial_t h)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n}{\delta t} - \frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t},$$

et

$$B = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} ds = -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} \\ = -\frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t} + \frac{\partial h}{\partial s}(t^{n+1}),$$

alors

$$|(D, v_b)| \leq (\|\mathcal{P}_b h - h\|_{C^1([0, T], L^2)} + \delta t \|h\|_{C^2([0, T], L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \\ \leq \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}.$$

En outre,

$$C := R^{n+1}(v_b) - (D, v_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b),$$

On décompose C comme suit :

$$C = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n)K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b).$$

Comme nous supposons que $h \in C^0([0, T], H^3(\Omega))$, il existe une constante $C_m > 0$, telle que

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m \quad \text{et} \quad \|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m. \quad (4.26)$$

L'application de ces estimations uniformes des gradients de h et f entraîne

$$|C| \leq K_+ \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{L^2} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^\infty}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\ + K_+ \|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^2} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^\infty}) \|\nabla v_b\|_{L^2}$$

$$\leq 2K_+ C_m \{ \|h - \mathcal{P}_b h\|_{C([0,T],L^2)} + \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2} \} \|\nabla v_b\|_{L^2}$$

$$\leq 2K_+ C_m \{ C_I b^{(k+1)} \|h\|_{C([0,T],H^{k+1})} + \delta t \|h\|_{C^1([0,T],H^1)} \} \|\nabla v_b\|_{L^2}.$$

donc

$$|R^{n+1}(v_b)| \leq 2K_+ C_m \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \quad (4.27)$$

Nous introduisons les erreurs $e_b^n = \mathcal{P}_b h^n - h_b^n$, $\bar{f}_b^n = \mathcal{P}_b f^n - f_b^n$, alors les différences (4.25)-(4.19) et (4.24)-(4.18) donnent

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} ((e_b^{n+1} - e_b^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b h^n) \nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) \\ - ((h_2 - h_b^n) \nabla(h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla v_b) = R^{n+1}(v_b), \end{aligned}$$

$$(h_2 - h_1)(K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla w_b) - ((h_2 - h^{n+1}) \nabla h^{n+1}, \nabla w_b) + ((h_2 - h_b^n) \nabla h_b^n, \nabla w_b) = 0.$$

En posant $v_b = e_b^{n+1}$ dans la première équation et $w_b = \bar{f}_b^{n+1}$ dans la seconde, après sommation des deux égalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} ((e_b^{n+1} - e_b^n), e_b^{n+1}) + ((h_2 - \mathcal{P}_b h^n) K \nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\ - ((h_2 - h_b^n) K \nabla(h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) (h_2 - h_1)(K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\ - ((h_2 - h^{n+1}) K \nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n) K \nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) = R^{n+1}(e_b^{n+1}). \end{aligned}$$

Premièrement nous avons

$$\begin{aligned} -((h_2 - h_b^n) K \nabla(h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + ((h_2 - h_1) K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\ + ((h_2 - h_b^n) K \nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\ = ((h_2 - h_b^n) K \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n) K \nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\ + ((h_2 - h_t) K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n) K \nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\ = ((h_2 - h_b^n) K \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})) + ((h_b^n - h_1) K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\ + ((h_2 - h_b^n) K \nabla P_b(h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n) K \nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\ + ((h_2 - h_b^n) K \nabla(e_b^{n+1} - e_b^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}), \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$((h_2 - h_b^n) K \nabla P_b(h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_2 - h^{n+1}) K \nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1})$$

$$\begin{aligned}
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(P_b(h^n) - h^{n+1}), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_b^n - h^{n+1})K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(P_b(h^n) - h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h^n - h^{n+1}), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad - ((h_b^n - P_b(h^n))K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((P_b(h^n) - h^n)K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad \quad - ((h^n - h^{n+1})K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&:= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5.
\end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned}
&((h_2 - \mathcal{P}_b h^n)K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\
&= (-e_b^n K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla[(h^{n+1} \\
&\quad - P_b(h^{n+1}) - (f^{n+1} - P_b(f^{n+1}))], \nabla e_b^{n+1}) \\
&:= E_6 + E_7 + E_8.
\end{aligned}$$

Posons $E_0 := +((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - e_b^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1})$.

Par un calcul de base, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2) + \delta \|\nabla e_b^{n+1}\|_{H^1}^2 + \int_{\Omega} (h_b^n - h_1)K\nabla \bar{f}_b^{n+1} \cdot \nabla \bar{f}_b^{n+1} dx \\
&+ \int_{\Omega} (h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}) \cdot \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}) dx = \sum_{i=0}^8 E_i.
\end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous pouvons faire les estimations suivantes:

$$\begin{aligned}
|E_0| &\leq \sqrt{h_2}K_+ \|\nabla(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)}\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2} \\
&\quad + h_2K_+ \|\nabla(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}, \\
&\leq \sqrt{h_2}K_+ C(b) \|(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)}\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2} \\
&\quad + h_2K_+ C(b) \|(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2},
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
|E_0| &\leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)}\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{4} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + (\frac{h_2}{2K_-} + \frac{h_2^2}{\delta})K_+^2 C(b)^2 \|(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

De la même façon

$$|E_1| \leq h_2 K^+ \|\nabla(P_b(h^n) - h^n)\|_{L^2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq h_2 K_+ C_I b^k \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}$$

$$|E_1| \leq \frac{5 h_2^2}{2 \delta K_-} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_2| \leq h_2 K_+ \|\nabla(h^n - h^{n+1})\|_{L^2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq h_2 K_+ \delta t \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_2| \leq \frac{5 h_2^2}{2 \delta K_-} K_+^2 \delta t^2 \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_3| \leq K_+ \|e_b^n\|_{L^2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K^+ C_m \|e_b^n\|_{L^2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_3| \leq \frac{5}{2 \delta K_-} K_+^2 C_m^2 \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_4| \leq K_+ \|P_b(h^n) - h^n\|_{L^2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K^+ C_m C_I b^{k+1} \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_4| \leq \frac{5 C_m^2}{2 \delta K_-} K_+^2 C_I^2 b^{2k+2} \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_5| \leq K_+ \|h^n - h^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K^+ C_m \delta t \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_5| \leq \frac{5 C_m^2}{2 \delta K_-} K_+^2 \delta t^2 \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_6| \leq K_+ \|e_b^n\|_{L^2} \|\nabla(h^{n+1} - f^{n+1})\|_{L^\infty} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \leq 2 K^+ C_m \|e_b^n\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_6| \leq \frac{6}{\delta} K_+^2 C_m^2 \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{6} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_7| \leq h_2 K_+ \|\nabla(h^{n+1} - P_b(h^{n+1}))\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \leq h_b K^+ C_I b^k \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_7| \leq \frac{3 h_2^2}{2 \delta} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta}{6} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_8| \leq h_2 K_+ \|\nabla(f^{n+1} - P_b(f^{n+1}))\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \leq h_2 K_+ C_I b^k \|f\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$|E_8| \leq \frac{3h_2^2}{2\delta} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|f\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta}{6} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

En rassemblant ces inégalités, nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2) + \left(\frac{1}{2\delta t} - \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{h_2^2}{\delta}\right) K_+^2 C(b)^2\right) \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{8} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \frac{\delta K_-}{2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_-}{2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)} \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2}^2 \\ & \leq \left(\frac{6}{\delta} + \frac{5}{2\delta K_-}\right) K_+^2 C_m^2 \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{5(h_2^2 + C_m^2)}{2\delta K_-} K_+^2 \delta t^2 \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 \\ & + \left(\frac{11h_2^2 + 5C_m^2}{2}\right) \frac{K_+^2 C_I}{\delta K_-} b^{2k+2} \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Z(\Omega_T)}^2) + \frac{8K_+^2 C_I^2 C_m^2}{\delta} (b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

Si

$$\left(1 - \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{2h_2^2}{\delta}\right) K_+^2 C(b)^2 \delta t\right) > 0,$$

alors

$$\left(\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2\right) + \frac{\delta \delta t}{4} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \delta \delta t K_- \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \quad (4.28)$$

$$\leq \delta t \left(\frac{12}{\delta} + \frac{5}{\delta K_-}\right) K_+^2 C_m^2 \|e_b^n\|_{L^2}^2 + 4 C_f^2 \delta t (b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Z(\Omega_T)}^2)$$

où C_f est définie comme suit

$$C_f^2 = \max\left(\frac{5(h_2^2 + C_m^2)}{2\delta K_-} K_+^2, \left(\frac{11h_2^2 + 5C_m^2}{2}\right) \frac{K_+^2 C_I^2}{\delta K_-}, \frac{8K_+^2 C_I^2 C_m^2}{\delta}\right).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et en appliquant le lemme de Gronwall discret (4.28), nous obtenons

$$\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \left\{\frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1}\right\}^n \|e_b^0\|_{L^2}^2 + 4 C_f^2 (b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Z(\Omega_T)}^2) \times \delta t \sum_{k=0}^n \left\{\frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1}\right\}^{n-k}$$

où (C_p étant la constante de Poincaré) :

$$\lambda_1 = \delta t C_p^{-2} \frac{\delta}{4} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \delta t \left(\frac{12}{\delta} + \frac{5}{\delta K_-}\right) K_+^2 C_m^2.$$

Donc si δt est suffisamment petit pour avoir $\lambda_1 < 2$ et $\lambda_2 < 2$, nous avons

$$\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq e^{n(\lambda_2 - \lambda_1)} \|e_b^0\|_{L^2}^2 + 4 C_f^2 \delta t \frac{e^{n(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Z(\Omega_T)}^2).$$

Puisque $\|e_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2 (b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2$ et $n\delta t \leq T$, nous obtenons la stabilité L^2 (4.20) du théorème 10. Nous obtenons les estimations (4.21), (4.22) en additionnant (4.28) pour $n = 1, \dots, N$.

4.4 Estimation de l'erreur utilisant la régularité $L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$ de la solution

Nous allons exploiter dans cette partie, la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité L^4 des gradients des inconnues.

Plusieurs parties de la démonstration du résultat suivant sont identiques à la preuve précédente mais nous les laissons afin de faciliter la lecture du document. Supposons que les paramètres Φ et K_- vérifient

$$(\Phi - 2(\frac{43}{8} + 54\frac{K_-^6}{\alpha})C_4) > 0.$$

avec $0 < \alpha < 1$ et C_4 la constante intervenant dans la majoration L^4 des gradients des inconnues, alors nous avons le résultat de convergence suivant

Théorème 11. *Si $(\Phi - (\frac{h_2}{2K_-} + \frac{2h_2^2}{\delta} + \frac{25}{4\delta K_-^2} + 36)K_+^2 C(b)^2 \delta t) > 0$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute solution (h, f) du problème (4.7)-(4.8) dans $Y(\Omega_T) = C^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{k+1}(\Omega))$ on obtient*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|h(t^n) - h_b^n\|_{L^2} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|f\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (4.29)$$

$$[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h(t^n) - h_b^n\|_{H^1}^2]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|f\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (4.30)$$

$$[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|f(t^n) - f_b^n\|_{H^1}^2]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|f\|_{Y(\Omega_T)}). \quad (4.31)$$

Preuve:

A l'instant t^{n+1} (nous rappelons la notation $h^{n+1} = h(t^{n+1})$) nous avons :
 $\forall v_l \in V_b^k$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\Phi \partial h}{\partial t} (t^{n+1}) v_b \, dx + \int_{\Omega} [T_s(h^{n+1})K(\nabla h^{n+1} - \nabla f^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b \, dx \\ = - \int_{\Omega} Q_s^{n+1} v_b \, dx, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(h_2 - h_1)K \nabla f^{n+1} - T_s(h^{n+1})K \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b \, dx \\ = \int_{\Omega} (Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}) v_b \, dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Puisque $h_1 + \delta \leq h^{n+1} \leq h_2$, on a $T_s(h^{n+1}) = h_2 - h^{n+1}$, on déduit de (4.32) que :

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\delta t}(\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}) + \delta\nabla h^{n+1}, \nabla v_b) \\ &= (-Q_s^{n+1}, v_b) + R^{n+1}(v_b) \end{aligned} \quad (4.34)$$

où

$$\begin{aligned} R^{n+1}(v_b) = & \Phi\left(\frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h^{n+1}}{\partial t}, v_b\right) - ((h_2 - h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) \\ & + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b). \end{aligned}$$

L'estimation uniforme pour le résidu R^{n+1} se fait comme précédemment si ce n'est la majoration du terme C que nous allons reproduire ici.

Soit

$$D = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) := (A) - (B),$$

avec

$$A = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b h - \partial_t h)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n}{\delta t} - \frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t},$$

et

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} ds &= -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} \\ &= -\frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t} + \frac{\partial h}{\partial s}(t^{n+1}), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |(D, v_b)| &\leq (\|\mathcal{P}_b h - h\|_{C^1([0,T],L^2)} + \delta t \|h\|_{C^2([0,T],L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \\ &\leq \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Soit

$$C := R^{n+1}(v_b) - \Phi(D, v_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n))(K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b),$$

On décompose C comme suit :

$$C = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n)K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b).$$

Nous allons ici majorer ces termes compte tenu du résultat de régularité $L^4(\Omega_T)$ des gradients de h et f et de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg appliquée à l'espace $L^4(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
|C| &\leq K^+ \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{L^4} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\
&\quad + K^+ \|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^4} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\
&\leq K^+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) (\|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{H^1}^{1/2}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\
&\quad + K^+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) (\|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^2}^{1/2} \|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{H^1}^{1/2}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\
&\leq K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) \{ \|h - \mathcal{P}_b h\|_{C([0,T],L^2)}^{1/2} \|h - \mathcal{P}_b h\|_{C([0,T],H^1)}^{1/2} + \\
&\quad \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2}^{1/2} \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2}^{1/2} \} \|\nabla v_b\|_{L^2} \\
&\leq K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) \{ C_I b^{(k+\frac{1}{2})} \|h\|_{C([0,T],H^{k+1})} + \delta t \|h\|_{C^1([0,T],H^1)} \} \|\nabla v_b\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

donc

$$|R^{n+1}(v_b)| \leq \max(C_I, 1) \{ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) + \Phi b^{1/2}) b^{k+\frac{1}{2}}$$

$$+ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}) + \Phi) \delta t \} \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \quad (4.34)$$

Nous introduisons les erreurs $e_b^n = \mathcal{P}_b h^n - h_b^n$, $\bar{f}_b^n = \mathcal{P}_b f^n - f_b^n$, alors les différences (4.34)-(4.19) et (4.33)-(4.18) donnent

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi}{\delta t} ((e_b^{n+1} - e_b^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b h^n) \nabla (h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla v_b) \\
&+ \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla v_b) - ((h_2 - h_b^n) \nabla (h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla v_b) = R^{n+1}(v_b),
\end{aligned}$$

$$(h_2 - h_1) (K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla w_b) - ((h_2 - h^{n+1}) \nabla h^{n+1}, \nabla w_b) + ((h_2 - h_b^n) \nabla h_b^n, \nabla w_b) = 0.$$

Tout à fait comme au paragraphe précédent, en posant $v_b = e_b^{n+1}$ dans la première équation et $w_b = \bar{f}_b^{n+1}$ dans la seconde, après sommation des deux égalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi}{\delta t} ((e_b^{n+1} - e_b^n), e_b^{n+1}) + ((h_2 - \mathcal{P}_b h^n) K \nabla (h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) \\
&\quad - ((h_2 - h_b^n) K \nabla (h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + (h_2 - h_1) (K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad - ((h_2 - h^{n+1}) K \nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n) K \nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) = R^{n+1}(e_b^{n+1}).
\end{aligned}$$

A nouveau, nous utilisons les décompositions suivantes:

$$\begin{aligned}
&-((h_2 - h_b^n) K \nabla (h_b^{n+1} - f_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + ((h_2 - h_1) K \nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad + ((h_2 - h_b^n) K \nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\
&\quad + ((h_2 - h_t)K\nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla h_b^n, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})) + ((h_b^n - h_1)K\nabla \bar{f}_b^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad + ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\
&\quad \quad \quad + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - e_b^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}), \\
&\quad \quad \quad ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_2 - h^{n+1})K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(P_b(h^n) - h^{n+1}), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((h_b^n - h^{n+1})K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&= ((h_2 - h_b^n)K\nabla(P_b(h^n) - h^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h^n - h^{n+1}), \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad - ((h_b^n - P_b(h^n))K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) - ((P_b(h^n) - h^n)K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad \quad \quad - ((h^n - h^{n+1})K\nabla h^{n+1}, \nabla \bar{f}_b^{n+1}) \\
&\quad \quad \quad := E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&((h_2 - P_b h^n)K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla P_b(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) \\
&= (-e_b^n K\nabla(h^{n+1} - f^{n+1}), \nabla e_b^{n+1}) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla[(h^{n+1} \\
&\quad - P_b(h^{n+1}) - (f^{n+1} - P_b(f^{n+1}))], \nabla e_b^{n+1}) \\
&\quad \quad \quad := E_6 + E_7 + E_8.
\end{aligned}$$

En posant $E_0 := +((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - e_b^n), \nabla \bar{f}_b^{n+1})$, nous obtenons de la même manière

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2) + \delta \|\nabla e_b^{n+1}\|_{H^1}^2 + \int_{\Omega} (h_b^n - h_1)K\nabla \bar{f}_b^{n+1} \cdot \nabla \bar{f}_b^{n+1} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}) \cdot \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1}) dx = \sum_{i=0}^8 E_i.
\end{aligned}$$

Les majorations de E_0, E_1, E_2, E_7 et E_8 sont rigoureusement identiques au cas précédent car la constante C_m n'intervient pas, nous rappelons donc que:

$$|E_0| \leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)} \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{4} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ + \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{h_2^2}{\delta}\right) K_+^2 C(b)^2 \|(e_b^{n+1} - e_b^n)\|_{L^2}^2.$$

De la même façon

$$|E_1| \leq \frac{5h_2^2}{2\delta K_-} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_2| \leq \frac{5h_2^2}{2\delta K_-} K_+^2 \delta t^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_7| \leq \frac{3h_2^2}{2\delta} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta}{6} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$|E_8| \leq \frac{3h_2^2}{2\delta} K_+^2 C_I^2 b^{2k} \|f\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta}{6} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

La difficulté est à présent d'estimer E_3, E_4, E_5 et E_6 , ce que nous allons faire en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour la majoration du terme C , à savoir l'estimation $L^4(\Omega_T)$ des gradients des inconnues, combinée à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg pour la norme $L^4(\Omega_T)$.

$$|E_3| \leq K^+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^n\|_{L^4} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K^+ (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \\ \leq K^+ C(b)^{1/2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} + K^+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}.$$

$$|E_3| \leq \left(\frac{5K_+ C(b)}{2\delta K_-}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_1} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_1}{2} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \frac{\epsilon_3}{2} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 \\ + \frac{1}{2\epsilon_3} \left(\frac{\epsilon_2 K_+}{2}\right)^2 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2, \\ \leq \left(\frac{5K_+ C(b)}{2\delta K_-}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_1} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon_3} \left(\frac{\epsilon_2 K_+}{2}\right)^2 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\delta K_-}{10} + \frac{1}{2\epsilon_2}\right) \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ + (\epsilon_1 + \frac{\epsilon_3}{2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4.$$

De manière analogue:

$$|E_4| \leq K_+ \|P_b(h^n) - h^n\|_{L^4} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K_+ C_I b^{k+\frac{1}{2}} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$\begin{aligned}
|E_4| &\leq \frac{5C_I^2}{2\delta K_-} K_+^2 b^{2k+1} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2, \\
&\leq \frac{5C_I^2}{4\delta K_-} K_+^2 b^{2k+1} (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4) \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

$$|E_5| \leq K_+ \|h^n - h^{n+1}\|_{L^4} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2} \leq K^+ \delta t \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2},$$

$$\begin{aligned}
|E_5| &\leq \frac{5K_+^2}{2\delta K_-} \delta t^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2, \\
&\leq \frac{5K_+^2}{4\delta K_-} \delta t^2 (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4) \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{\delta K_-}{10} \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
|E_6| &\leq K^+ \|\nabla(h^{n+1} - f^{n+1})\|_{L^4} \|e_b^n\|_{L^4} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq K_+ (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla(h^{n+1} - f^{n+1})\|_{L^4} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq K^+ C(b)^{1/2} \|\nabla(h^{n+1} - f^{n+1})\|_{L^4} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} \\
&\quad + K^+ \|\nabla(h^{n+1} - f^{n+1})\|_{L^4} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^{3/2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|E_6| &\leq \frac{1}{2\epsilon_5} \left(\frac{K_+ C(b)}{\epsilon_4}\right)^2 \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \epsilon_5 \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}^4) \\
&\quad + (\delta\epsilon_4 + 2\epsilon_6 K_+^2) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \epsilon_6^{-3} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}^4) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2, \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon_5} \left(\frac{K_+ C(b)}{\epsilon_4}\right)^2 \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\delta\epsilon_4 + 2\epsilon_6 K_+^2) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + (2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}^4)
\end{aligned}$$

En rassemblant ces inégalités (après avoir pris $\epsilon_4 = \frac{1}{6}$), nous trouvons après simplifications

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2) + \left(\frac{\Phi}{2\delta t} - \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{h_2^2}{\delta} + \frac{25}{8\delta K_-^2 \epsilon_1} + \frac{18}{\epsilon_5}\right) K_+^2 C(b)^2\right) \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 \\
&+ \left(\frac{\delta}{8} - K_+^2 \left(\frac{\epsilon_2^2}{4\epsilon_3} + 2\epsilon_6\right)\right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\delta K_-}{2} - \frac{1}{2\epsilon_2}\right) \|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_-}{2} \|\sqrt{(h_2 - h_b^n)} \nabla(e_b^{n+1} - \bar{f}_b^{n+1})\|_{L^2}^2 \\
&\leq \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \left((\epsilon_1 + 2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3} + \frac{\epsilon_3}{2}) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + (2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3}) \|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}^4\right) \\
&\quad + C_f(K_-, K_+, \delta, h_2, C_I) (b^k + \delta t)^2 (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4) \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Y(\Omega_T)}^2).
\end{aligned}$$

Si les réels $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$ et $\epsilon_6 > 0$ sont choisis de telle sorte que:

$$\left(\frac{\delta}{8} - K_+^2\left(\frac{\epsilon_2^2}{4\epsilon_3} + 2\epsilon_6\right)\right) > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta K_-}{2} - \frac{1}{2\epsilon_2}\right) > 0 \quad (4.35)$$

et si La condition de stabilité suivante est satisfaite

$$\left(\Phi - \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{2h_2^2}{\delta} + \frac{25}{4\delta K_-^2 \epsilon_1} + \frac{36}{\epsilon_5}\right)K_+^2 C(b)^2 \delta t\right) > 0, \quad (4.36)$$

alors

$$\begin{aligned} & \Phi(\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2) + 2\delta t\left(\frac{\delta}{8} - K_+^2\left(\frac{\epsilon_2^2}{4\epsilon_3} + 2\epsilon_6\right)\right)\|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + 2\delta t\left(\frac{\delta K_-}{2} - \frac{1}{2\epsilon_2}\right)\|\nabla \bar{f}_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \leq 2\delta t \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|e_b^k\|_{L^2}^2) \left((\epsilon_1 + 2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3} + \frac{\epsilon_3}{2})\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + (2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3})\|\nabla f^{n+1}\|_{L^4}^4\right) \\ & + 2C_f(K_-, K_+, \delta, h_2, C_I)\delta t(1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4)(b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Y(\Omega_T)}^2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

En sommant cette inégalité pour $n \in \{0, \dots, p\}$, pour $p \in \{0, \dots, N+1\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \Phi\|e_b^{p+1}\|_{L^2}^2 \leq \Phi\|e_b^0\|_{L^2}^2 + 2C_f(b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Y(\Omega_T)}^2) \times \delta t \sum_{k=0}^p (1 + \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4) \\ & + 2 \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|e_b^k\|_{L^2}^2) \left((\epsilon_1 + 2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3} + \frac{\epsilon_3}{2})\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 + (2\epsilon_5 + \epsilon_6^{-3})\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla f^{k+1}\|_{L^4}^4\right) \end{aligned}$$

Donc si δt est suffisamment petit pour avoir

$$\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4$$

et

$$\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla f^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla f\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4,$$

alors (puisque $n\delta t \leq T$)

$$\left(\Phi - 2C(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)C_4\right) \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|e_b^k\|_{L^2}^2) \leq \Phi\|e_b^0\|_{L^2}^2 + 2C_f T(b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|f\|_{Y(\Omega_T)}^2)$$

Si le paramètre Φ satisfait:

$$\left(\Phi - 2C(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)C_4\right) > 0, \quad (4.38)$$

alors, puisque $\|e_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2(b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$, nous obtenons la stabilité L^2 (4.29) du théorème 11. Nous prouvons les estimations (4.30), (4.31) en additionnant (4.37) pour $n = 1, \dots, N$.

Il nous reste à donner un sens aux conditions (4.35), (4.36) et (4.38), en particulier en calant les $\epsilon_i, i = 1, 6$.

Nous rappelons que δ représente l'épaisseur des interfaces diffuses, on peut sans perte de généralité supposer que $\delta = \mathcal{O}(1)$ et que $0 \leq \delta \leq 1$, prenons alors $\epsilon_2 = \frac{\alpha}{K_-}$ avec $0 < \alpha < 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_5 = 1$, $\epsilon_3 = 3/4$ et $\epsilon_6 = \frac{1}{3}(\frac{\alpha}{K_-})^2$ ce qui donne un sens à (4.35) (en particulier si le milieu est supposé homogène). La condition de stabilité (4.36) devient:

$$\Phi - \left(\frac{h_2}{2K_-} + \frac{2h_2^2}{\delta} + \frac{25}{4\delta K_-^2} + 36 \right) K_+^2 C(b)^2 \delta t > 0, \quad (4.39)$$

et l'inégalité (4.38)

$$\left(\Phi - 2 \left(\frac{43}{8} + 54 \frac{K_-^6}{\alpha} \right) C_4 \right) > 0. \quad (4.40)$$

Les deux conditions (4.39) et (4.40) peuvent paraître contraignantes mais soulignons que nous pouvons prendre le coefficient Φ aussi grand que voulu en faisant un changement d'échelle temporelle, bien sûr, Φ ne représentera plus la porosité.

Chapter 5

Analyse numérique du problème dans le cas libre avec l'approche 'interface diffuse'

Dans ce chapitre, nous allons décrire la méthode élément fini P_k Lagrange que nous avons appliquée au problème d'intrusion saline dans le cas libre avec l'approche 'interface diffuse'. C'est justement la présence de la zone diffuse qui nous a fait privilégier la méthode des éléments finis. Nous rappelons que les deux principales difficultés liées à notre problème sont le fort couplage des équations paraboliques et les non-linéarités. Nous allons dans un premier temps, établir un résultat d'estimation d'erreur pour des solutions très régulières (ce qui revient, en un certain sens, à linéariser le problème). Puis nous utiliserons la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ du gradient de la solution pour nous affranchir des contraintes sur les hypothèses de régularité; en particulier nous aurons des hypothèses de régularité sur la solution du même ordre que dans le cas des études faites pour des problèmes linéaires. Bien sûr cela va induire une condition de stabilité et des conditions sur les paramètres tels que la porosité, la conductivité hydraulique et l'épaisseur des zones de diffusion. Le point intéressant est qu'avec un choix judicieux des coefficients des estimations, les conditions stabilité dans les 2 cas seront comparables.

Le chapitre est organisé comme suit: après un rappel du problème ainsi que des principaux résultats théoriques relatifs au problème, nous présentons le schéma et montrons l'existence et l'unicité de la solution approchée. Puis nous établissons des estimations d'erreur en norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ainsi qu'en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ en supposant dans un premier temps que la solution est $C(0, T; H^3(\Omega))$ puis en utilisant la régularité $L^4(\Omega_T)$ du gradient de la solution, le résultat final est obtenu grâce à l'utilisation de l'inégalité de Gagliardo-

Nirenberg.

5.1 Présentation du problème

Le système d'équations décrivant l'évolution de la profondeur de l'interface h entre l'eau douce et l'eau salée et celle de la profondeur h_1 de l'interface entre la zone saturée et la zone sèche s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} \delta \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_s T_s(h) w \, dxdt = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi \langle \partial_t h_1, w \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} K \left((T_s(h) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 + T_s(h) \nabla h \right) \cdot \nabla w \, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} \delta_1 \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_f T_f(h - h_1) + \tilde{Q}_s T_s(h) w \, dxdt = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

où δ est l'épaisseur de l'interface diffuse entre l'eau douce et l'eau salée (on a intégré dans ce paramètre la porosité Φ comme au chapitre précédent) et δ_1 est l'épaisseur de l'interface diffuse entre la zone saturée et la zone sèche. Par ailleurs, $T_s(h) = h_2 - h$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée. On prolonge T_s de façon continue et par des constantes à l'extérieur de $[0, h_2]$. Les termes sources $Q_f := \tilde{Q}_f T_f(h - h_1)$ et $Q_s := \tilde{Q}_s T_s(h)$ sont des fonctions données de $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ et le tenseur K (conductivité hydraulique) est tel qu'il existe deux nombres positifs K_- et K_+ tels que

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty \quad x \in \Omega, \xi \neq 0. \quad (5.3)$$

Le problème est complété par les conditions aux limites et initiales suivantes:

$$h = h_D, \quad \text{et} \quad h_1 = h_{1,D} \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (5.4)$$

$$h(0, x) = h_0(x), \quad \text{et} \quad h_1(0, x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (5.5)$$

Les fonctions $h_D, h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ et sont telles que leurs dérivées en temps $\partial_t h_D, \partial_t h_{1,D} \in L^2(0, T, H^1(\Omega)')$. Les fonctions $h_0, h_{1,0} \in H^1(\Omega)$ doivent satisfaire les conditions de compatibilité

$$h_{0/\Gamma} = h_D(0, x) \quad \text{et} \quad h_{1,0/\Gamma} = h_{1,D}(0, x).$$

Nous rappelons le théorème donnant l'existence globale en temps de la solution de (5.1) - (5.2) (cf [9]):

Théorème 12. *Soient h_2, h_1, δ et δ_1 4 réels positifs alors, pour tout $T > 0$, le problème (5.1)-(5.2) admet une solution faible $(h_1, h) \in W(0, T)$ satisfaisant*

$$0 \leq h_1 \leq h(t, x) \leq h_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_T.$$

En général, les deux réels δ_1 et δ sont différents mais sans aucune perte de généralité, nous allons les supposer égaux par la suite.

Par ailleurs, nous rappelons que si nous supposons plus de régularité sur les données, nous pouvons alors énoncer le résultat :

Proposition : Soit (h, h_1) une solution de (5.1)-(5.2), alors il existe $r(\alpha, \beta) > 2$ tel que si $(h_D, h_{1,D}) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2$, $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,r}(\Omega)^2$, $(Q_s, Q_f) \in L^r(\Omega_T)^2$, alors ∇h et ∇h_1 sont dans $L^r(\Omega_T)^2$.

De plus, on a

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,1}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K, \Phi) \quad (5.6)$$

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,2}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K, \Phi) \quad (5.7)$$

Précisons qu'ainsi ue nous l'avons rappelé dans le chapitre 3 $\alpha = \delta$ et $\beta = \delta + \frac{K+h_2}{\phi}$ et que nous supposons que $(h_2, \delta, K_+, \phi) \in \mathbb{R}_*^{+4}$ sont tels que $\hat{g}(4)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$ de sorte que $r = 4$ dans les inégalités (5.6)-(5.7). Par la suite, nous noterons $C_4 > 0$ la constante telle que:

$$C_4^4(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K, \Phi) = \text{Max}(C_{4,1}, C_{4,2}),$$

où les constantes $C_{4,1}, C_{4,2}$ sont définies par (5.6)-(5.7).

5.2 Présentation du schéma et existence de la solution approchée

Nous présentons le schéma que nous allons utiliser pour l'analyse numérique du problème de l'intrusion saline dans le cas libre.

Nous reprenons les notations du chapitre 4.

Soit $\mathcal{T}_b, b \in [0, 1]$ une triangulation régulière du domaine Ω , nous introduisons l'espace approximatif

$$V_b^k := \{w \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_b, w|_K \in P_k(K)\}, \quad k \geq 1. \quad (5.8)$$

On note $\mathcal{I}_b \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega), V_b^k)$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange alors il existe une constante $C_I > 0$ telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{L^2} + b \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{H^1} \leq C_I b^{k+1} \|v\|_{H^{k+1}}, \quad (5.9)$$

où l'entier $k \geq 1$, donc $H^{k+1}(\Omega)$ est inclus dans $C^0(\bar{\Omega})$. Nous introduisons \mathcal{P}_b l'opérateur de projection orthogonale sur V_b^k telle que

$$\forall v_b \in V_b^k, \quad a(\mathcal{P}_b(w), v_b) = a(w, v_b) := \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v_b \, dx \quad (5.10)$$

on déduit alors de (4.15) alors $\forall w \in C^1([0, T]; H^{k+1}(\Omega)), \forall j \in \{0, 1\}$:

$$\|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; L^2)} + b \|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; H^1)} \leq C_I b^{k+1} \|w\|_{C^j([0, T]; H^{k+1}(\Omega))} \quad (5.11)$$

Nous rappelons qu'il existe une constante $C(b) > 0$ telle que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(b) \|w\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in V_b^k, \quad (5.12)$$

où la constante $C(b)$ dépend de la discrétisation de l'espace V_b^k , dans notre cas, et pour un maillage quasi-uniforme $C(b) \leq c b^{-1}$.

Enfin, nous notons h^n l'approximation de la fonction h au temps $t_n = n \cdot \delta t$, $n = 1, N$ et $\delta t = \frac{T}{N}$.

Si h_b^n et $h_{1,b}^n$ sont données dans l'espace $(\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k)$ et sont telles que

$$0 \leq h_{1,b}^n \leq h_b^n \leq h_2,$$

nous considérons le problème approché

Trouver $(h_{1,b}^{n+1}, h_b^{n+1}) \in (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k)$, $\forall w \in V_b^k$. telles que

$$\Phi \frac{h_{1,b}^{n+1} - h_{1,b}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\delta \nabla h_{1,b}^{n+1}) - K \nabla \cdot (T_f(h_b^n - h_{1,b}^n) \nabla h_{1,b}^{n+1}) - K \nabla \cdot (T_s(h_b^n)) \nabla (h_{1,b}^{n+1} + h_b^n) = Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1} \quad (5.13)$$

$$\Phi \frac{h_b^{n+1} - h_b^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\delta \nabla h_b^{n+1}) - \nabla \cdot (K T_s(h_b^n) \nabla (h_b^{n+1} + h_{1,b}^{n+1})) = Q_s^{n+1} \quad (5.14)$$

Soient A_1, A_2 les formes bilinéaires continues définies sur $V_b^k \times V_b^k$ par

$$A_1(h_1^{n+1}, w) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Phi \frac{h_1^{n+1}}{\delta t} w + [\delta \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w + (T_f(h^n - h_1^n) + T_s(h^n)) K \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w] \, dx dy,$$

$$A_2(h^{n+1}, v) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\Phi \frac{h^{n+1}}{\delta t} v + (\delta + K T_s(h^n)) \nabla h^{n+1} \cdot \nabla v) \, dx dy,$$

et L_1, L_2 les formes linéaires continues définies sur V_b^k par

$$L_1(w) = \int_{\Omega} (\Phi \frac{h_1^n}{\delta t} w - \int_{\Omega} (Q_f^{n+1} + Q_s^{n+1}) w + \int_{\Omega} K T_s(h^n) \nabla h^n \cdot \nabla w) \, dx dy$$

$$L_2(v) = \int_{\Omega} \left[(\Phi \frac{h^n}{\delta t} - Q_s^{n+1}) v + K T_s(h^n) \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla v \right]$$

Le problème approché peut se ré-écrire:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (h_{1,b}^{n+1}, h_b^{n+1}) \in (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \text{ t.q. } \forall v \in V_b^k, \\ A_1(h_{1,b}^{n+1}, v) = L_1(v) \quad \text{et} \quad A_2(h_b^{n+1}, v) = L_2(v) \end{aligned}$$

Comme $T_f(h_b^n - h_{1,b}^n) \geq 0$ et $T_s(h_b^n) \geq 0$, les coercivités de A_1 et A_2 sur V_b^k sont claires. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, le couple $(h_{1,b}^{n+1}, h_b^{n+1})$ est bien défini et unique.

5.3 Estimation de l'erreur pour une solution régulière

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat de convergence suivant :

Théorème 13. *Si $\delta t C(b)^2 h_2 (1 + \frac{2h_2}{\delta}) < 1$, il existe une constante $C > 0$, pour toute solution (h, h_1) du problème (5.1)-(5.2) dans $Z(\Omega_T) = C^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{k+1}(\Omega)) \cap C^0([0, T], H^3(\Omega))$ on a*

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} \|h(t^n) - h_b^n\|_{L^2} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}), \quad (5.15)$$

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} \|h_1(t^n) - h_{1,b}^n\|_{L^2} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}) \quad (5.16)$$

$$\left[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h(t^n) - h_b^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}), \quad (5.17)$$

$$\left[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h_1(t^n) - h_{1,b}^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}). \quad (5.18)$$

Preuve

Sans perdre de généralité, nous allons poser, uniquement pour cette preuve $\Phi = 1$.

Soit t^{n+1} (nous rappelons la notation $h^{n+1} = h(t^{n+1})$) on a : $\forall v_b \in V_b^k$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) v_b dx + \int_{\Omega} [T_s(h^{n+1}) K(\nabla h^{n+1} - \nabla h_1^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b dx = - \int_{\Omega} Q_s^{n+1} v_b dx \quad (5.19)$$

Puisque $0 \leq h_1 \leq h^{n+1} \leq h_2$, on a $T_s(h^{n+1}) = h_2 - h^{n+1}$.

Nous allons procéder comme dans le cas confiné en écrivant la formulation faible satisfaite par la projection orthogonale $P_b(h^{n+1})$. Cela fera apparaître un résidu pour lequel nous donnerons une estimation.

On déduit de (5.19) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}, \nabla v_b) \\ & = (-Q_s^{n+1}, v_b) + R^{n+1}(v_b) \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec la notation classique $(f, g) = \int_{\Omega} f g dx$ et où R^{n+1} désigne

$$R^{n+1}(v_b) = \left(\frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}), v_b \right)$$

$$-((h_2 - h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b).$$

Nous établissons d'abord une estimation uniforme de R^{n+1} .
Soit

$$D = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) := (A) - (B),$$

avec

$$A = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b(h) - \partial_t h)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t},$$

et

$$B = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} ds = -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} = -\frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t} + \frac{\partial h}{\partial s}(t^{n+1}),$$

alors

$$|(D, v_b)| \leq (\|\mathcal{P}_b(h) - h\|_{C^1([0, T], L^2)} + \delta t \|h\|_{C^2([0, T], L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \leq \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}.$$

Posons

$$C := R^{n+1}(v_b) - (D, v_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n))(K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b),$$

nous décomposons C comme suit

$$C = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1}))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b).$$

Comme nous supposons que $(h, h_1) \in C^0([0, T], H^3(\Omega))$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m \quad \text{et} \quad \|\nabla h_1\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m. \quad (5.21)$$

En appliquant ces estimations uniformes, on obtient

$$|C| \leq K_+ \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1})\|_{L^2} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^\infty}) \|\nabla v_b\|_{L^2} +$$

$$K_+ \|\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)\|_{L^2} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^\infty}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \leq 2K_+ C_m$$

$$\begin{aligned} \{ \|h - \mathcal{P}_b(h)\|_{C([0, T], L^2)} + \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2} \} \|\nabla v_b\|_{L^2} &\leq 2K_+ C_m \{ C_I b^{(k+1)} \|h\|_{C([0, T], H^{k+1})} \\ &\quad + \delta t \|h\|_{C^1([0, T], H^1)} \} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|R^{n+1}(v_b)| \leq 2K_+ C_m \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Z(\Omega_T)} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \quad (5.22)$$

De la même manière, l'équation pour h_1^{n+1} peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}) w_b dx + \int_{\Omega} \delta \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w_b dx + \int_{\Omega} (h^{n+1} - h_1^{n+1}) K \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w_b dx + \\ \int_{\Omega} (h_2 - h^{n+1}) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}) \cdot \nabla w_b dx = \int_{\Omega} -(Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}) dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

On introduit le résidu R_1^{n+1} comme suit

$$\begin{aligned} R_1^{n+1}(w_b) = & \left(\frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}), w_b \right) - ((h^{n+1} - h_1^{n+1}) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) \\ & + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) - ((h_2 - h^{n+1}) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b) \\ & + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b). \end{aligned}$$

Nous déduisons de (5.23) que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t}, w_b \right) + \delta (\nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) \\ + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b) = -((Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}), w_b) + R_1^{n+1}(w_b) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nous allons maintenant établir une estimation uniforme pour R_1^{n+1} .

Soit

$$D_1 = \frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}) := (A_1) - (B_1),$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b h_1 - \partial_t h_1)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b h_1^n}{\delta t} - \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\delta t},$$

et

$$B_1 = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} ds = -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h_1}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h_1}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} = -\frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\delta t} + \frac{\partial h_1}{\partial s}(t^{n+1}),$$

alors

$$|(D_1, v_b)| \leq (\|\mathcal{P}_b h_1 - h_1\|_{C^1([0,T],L^2)} + \delta t \|h_1\|_{C^2([0,T],L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \leq \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h_1\|_{Z(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}.$$

De plus:

$$\begin{aligned} C_1 &:= R_1^{n+1}(v_b) - (D_1, v_b) = ((-\mathcal{P}_b(h^n) + h^{n+1})\nabla(h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - h^{n+1})\nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) \\ &+ ((h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^n))\nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n))\nabla h^{n+1}, \nabla w_b) + ((h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^n))\nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) \end{aligned}$$

Mais puisque

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m \quad \text{et} \quad \|\nabla h_1\|_{L^\infty(\Omega_T)} < C_m,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} |C_1| &\leq K_+ \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty} \|\nabla w_b\|_{L^2} + K_+ \|h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b h_1^n\|_{L^2} \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^\infty} \|\nabla w_b\|_{L^2} \\ &\leq 2K_+ C_m \{C_I b^{(k+1)} \max(\|h\|_{C([0,T],H^{k+1})}, \|h_1\|_{C([0,T],H^{k+1})}) \\ &\quad + \delta t \max(\|h\|_{C^1([0,T],H^1)}, \|h_1\|_{C^1([0,T],H^1)})\} \|\nabla w_b\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|R_1^{n+1}(w_b)| \leq 2K_+ C_m \max(C_b, 1)(b^{k+1} + \delta t) \max(\|h\|_{Z(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}) \|\nabla w_b\|_{L^2} \quad (5.25)$$

On introduit les erreurs $e_b^n = \mathcal{P}_b(h^n) - h_b^n$, et $s_b^n = \mathcal{P}_b(h_1^n) - h_{1,b}^{n+1}$, les différences (5.24)-(5.13) et (5.20)-(5.14) donnent

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, v_b) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla v_b) \\ &\quad - \left((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} + h_{1,b}^{n+1}), \nabla v_b \right) = R^{n+1}(v_b). \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, w_b) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla w_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))K\nabla h_1^{n+1}, w_b) \\ &\quad - \left((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_{1,b}^{n+1} + h_b^{n+1} - h_b^n - h_b^{n+1}), \nabla w_b \right) - \left((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla h_{1,b}^{n+1}, \nabla w_b \right) \\ &\quad + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h_1^{n+1} + h^n), \nabla w_b) = R_1^{n+1}(w_b). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Prenant $v_b = e_b^{n+1}$ dans l'équation (5.26) et $w_b = s_b^{n+1}$ dans (5.27), on obtient après addition des deux équations:

$$\frac{1}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{1}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) +$$

$$((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla e_b^{n+1} + \nabla s_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} + h_{1,b}^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))$$

$$+ ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1}) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n))K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1})$$

$$- ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla h_{1,b}^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1})$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{1}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta(\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta(\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + \\ & ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(\mathcal{P}_b(h^{n+1}) + \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})), \nabla e_b^{n+1} + \nabla s_b^{n+1}) \\ & + ((h_b^n - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) + \\ & ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1}) + ((e_b^n - s_b^n)K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla(h_1^{n+1} - h_{1,b}^{n+1}), \nabla s_b^{n+1}) \\ & = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1}) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{1}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta(\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta(\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + \\ & \underbrace{((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) +}_{=E_0} \\ & \underbrace{((h_2 - h_b^n)K\nabla(-\mathcal{P}_b(h^{n+1}) + h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) + h_1^{n+1}), \nabla e_b^{n+1} + \nabla s_b^{n+1}))}_{=E_1} \\ & + \underbrace{((h_b^n - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))}_{=E_2} \\ & + \underbrace{((e_b^n - s_b^n)K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1})}_{=E_3} + \underbrace{((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla(h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})), \nabla s_b^{n+1}))}_{=E_4} \\ & + \underbrace{((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1})}_{=E_4} = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1}) \end{aligned}$$

Nous allons à présent estimer les termes E_i , $i = 1, 4$, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et aux inégalités de Young.

$$|E_0| \leq K_+ h_2^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|\nabla(h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Z(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla(h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq C_I b^k \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}}$$

$$\leq K_- \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{h_2 K_+^2}{K_-} C_I^2 b^{2k} (\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 + \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2),$$

$$\begin{aligned} |E_1| &\leq K_+ \underbrace{(\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)})}_{\leq 2C_m} \|e_b^n\|_{L^2(\Omega)} (\|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \frac{4C_m^2 K_+^2}{2\delta} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_1 \delta}{2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_2 \delta}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} (\|e_b^n\|_{L^2(\Omega)} + \|s_b^n\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \frac{\epsilon_2 \delta}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_m^2 K_+^2}{\epsilon_2 \delta} (\|e_b^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|s_b^n\|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_3| &\leq K_+ \|(h_b^n - h_{1,b}^n)^{\frac{1}{2}} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \sqrt{h_2} \|\nabla(h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))\|_{L^2} \\ &\leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{h_b^n - h_{1,b}^n} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} + \frac{h_2 K_+^2}{2K_-} C_I^2 b^{2k} \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$E_4 = ((h_2 - h_b^n) K \nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1})$$

et on écrit

$$h_b^{n+1} - h_b^n = -e_b^{n+1} + e_b^n + (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - h^{n+1}) - (\mathcal{P}_b(h^n) - h^n) + h^{n+1} - h^n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |E_4| &\leq h_2 C(b) K_+ \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \\ &+ h_2 K_+ \left(\underbrace{\|\nabla(\mathcal{P}_b(h^n) - h^n)\|_{L^2}}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Z(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla(\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - h^{n+1})\|_{L^2}}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Z(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla(h^{n+1} - h^n)\|_{L^2}}_{\leq \delta t \|h\|_{Z(\Omega_T)}} \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{h_2^2 C(b)^2 K_+^2}{2\delta \epsilon_2} \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{4\delta \epsilon_2}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{2h_2^2 K_+^2 C_I^2 b^{2k}}{2\delta \epsilon_2} + \frac{h_2^2 K_+^2 \delta t^2}{2\delta \epsilon_2} \right) \|h\|_{Z(\Omega_T)}^2 \end{aligned}$$

En supposant satisfaite la condition suivante:

$$\left(1 - \frac{h_2^2 K_+^2 C(b)^2 \delta t}{\delta \epsilon_2}\right) > 0,$$

nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2) + \frac{1}{2\delta t} (\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|s_b^n\|_{L^2}^2 + \|s_b^{n+1} - s_b^n\|_{L^2}^2) + \delta \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}
& +\delta(1-3\epsilon_2)\|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2+(K_--\frac{K_-}{2})\|\sqrt{h_2-h_b^n}\nabla(e_b^{n+1}+s_b^{n+1})\|_{L^2}^2+\frac{K_-}{2}\|\sqrt{h_b^n-h_{1,b}^n}\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& -\frac{h_2^2C(b)^2K_+^2}{2\delta\epsilon_2}\|e_b^{n+1}-e_b^n\|_{L^2} \leq \frac{C_m^2K_+^2}{\delta}(\frac{2}{\epsilon_1}+\frac{3}{\epsilon_2})\|e_b^n\|_{L^2}^2+\frac{C_m^2K_+^2}{\delta}\frac{1}{2\epsilon_2}\|s_b^n\|_{L^2}^2 \\
& +K_+^2C_f^2\frac{5h_2^2}{2\delta\epsilon_2}b^{2k}\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2+K_+^2C_f^2h_2(\frac{3}{2K_-})b^{2k}\|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2+\frac{K_+^2h_2^2}{2\delta\epsilon_2}\delta t^2\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2
\end{aligned}$$

Nous choisissons ϵ_1 tel que $(1-\frac{\epsilon_1}{2}) > 0 \Leftrightarrow \epsilon_1 < 2$ et ϵ_2 tel que $(1-3\epsilon_2) > 0 \Leftrightarrow \epsilon_2 < \frac{1}{3}$, par exemple $\epsilon_1 = \frac{3}{2}, \epsilon_2 = \frac{1}{4}$.
Nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\delta t}(\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2-\|e_b^n\|_{L^2}^2)+(\frac{1}{2\delta t}-\frac{2h_2^2K_+^2C(b)^2}{\delta})\|e_b^{n+1}-e_b^n\|_{L^2}^2+\frac{1}{2\delta t}(\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2-\|s_b^n\|_{L^2}^2)+\frac{1}{2\delta t}\|s_b^{n+1}-s_b^n\|_{L^2}^2 \\
& +\frac{\delta}{4}\|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2+\frac{\delta}{4}\|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2+\frac{K_-}{2}\|\sqrt{h_2-h_b^n}\nabla(e_b^{n+1}+s_b^{n+1})\|_{L^2}^2+\frac{K_-}{2}\|\sqrt{h_b^n-h_{1,b}^n}\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{40C_m^2K_+^2}{3\delta}\|e_b^n\|_{L^2}^2+\frac{2C_m^2K_+^2}{\delta}\|s_b^n\|_{L^2}^2+K_+^2C_f^2h_2(\frac{3}{2K_-}+\frac{5h_2}{2\delta})\text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2,\|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2)b^{2k} \\
& \quad +\frac{2K_+^2h_2^2}{\delta}\text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2,\|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2)\delta t^2
\end{aligned}$$

Ainsi, si δt et $C(b)$ sont tels que $4h_2^2K_+^2C(b)^2\delta t < \delta$, on a

$$(\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2-\|e_b^n\|_{L^2}^2)+(\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2-\|s_b^n\|_{L^2}^2)+\delta t\frac{\delta}{2}\|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2+\delta t\frac{\delta}{2}\|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \quad (5.28)$$

$$\leq \delta t\frac{80}{3\delta}K_+^2C_m^2\|e_b^n\|_{L^2}^2+\delta t\frac{4K_+^2C_m^2}{\delta}\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2+C_f^2\delta t(b^{2k}+\delta t^2)\text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2,\|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2)$$

avec

$$C_f^2 = \text{max}(2K_+^2C_f^2h_2(\frac{3}{2K_-}+\frac{5h_2}{2\delta}),\frac{4K_+^2h_2^2}{\delta}).$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré et le lemme de Gronwall discret nous déduisons

$$\begin{aligned} & \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{1 + \delta t \lambda_2}{1 + \delta t \lambda_1}\right)^n (\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) \\ & + C_f^2 (b^k + \delta t)^2 \delta t \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1 + \delta t \lambda_2}{1 + \delta t \lambda_1} \right\}^{n-k} \text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2) \end{aligned}$$

où

$$\lambda_1 = \frac{C_p^{-2} \delta}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{80}{3 \delta} K_+^2 C_m^2.$$

Ainsi nous obtenons le résultat suivant de stabilité L^2 :

$$\begin{aligned} & \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq e^{n\delta t(\lambda_2 - \lambda_1)} (\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) \\ & + C_f^2 \delta \frac{e^{n\delta t(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} (b^k + \delta t)^2 \text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2) \end{aligned}$$

Puisque $\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_f^2 (b^k + \delta t)^2 \text{Max}(\|h\|_{Z(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Z(\Omega_T)}^2)$ et $n\delta t \leq T$, nous obtenons les estimations en norme H_1 du théorème en additionnant (5.28) pour $n = 1, \dots, N$.

5.4 Estimation de l'erreur utilisant la régularité $L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$ de la solution

Nous allons exploiter dans cette partie, la régularité spécifique à notre problème, à savoir la régularité L^4 des gradients des inconnues.

Plusieurs parties de la démonstration du résultat suivant sont identiques à la preuve précédente mais nous les maintenons afin de faciliter la lecture de ce manuscrit.

Supposons que les paramètres Φ et K_- vérifient

$$\left(\Phi - 10 \left(\frac{36}{\alpha} + \frac{35}{4}\right) K_-^4 \alpha^{-2} C_4\right) > 0.$$

avec $0 < \alpha < 1$ et C_4 la constante intervenant dans la majoration L^4 des gradients des inconnues, alors nous avons le résultat de convergence suivant

Théorème 14. *Si $\left(\Phi - \frac{4h_2^2 K_+^2}{\delta} C(b)^2 \delta t - \frac{81}{2} \left(\frac{K_+}{K_-}\right)^2 C(b)^2 \delta t\right) > 0$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute solution (h, h_1) du problème (5.1)-(5.2) dans $Y(\Omega_T) = C^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{k+1}(\Omega))$ on a*

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} \|h(t^n) - h_b^n\|_{L^2} \leq C (b^k + \delta t) \text{max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (5.29)$$

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} \|h_1(t^n) - h_{1,b}^n\|_{L^2} \leq C (b^k + \delta t) \text{max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (5.30)$$

$$\left[\frac{1}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h(t^n) - h_b^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C (b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (5.31)$$

$$\left[\frac{\Phi}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|h_1(t^n) - h_{1,b}^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C (b^k + \delta t) \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}). \quad (5.32)$$

Preuve:

Soit t^{n+1} (nous rappelons la notation $h^{n+1} = h(t^{n+1})$) on a : $\forall v_b \in V_b^k$

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) v_b dx + \int_{\Omega} [T_s(h^{n+1})K(\nabla h^{n+1} - \nabla h_1^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}] \cdot \nabla v_b dx = - \int_{\Omega} Q_s^{n+1} v_b dx \quad (5.33)$$

Puisque $0 \leq h_1 \leq h^{n+1} \leq h_2$, on a $T_s(h^{n+1}) = h_2 - h^{n+1}$.

On déduit de (5.33) :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\delta t} (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n), v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}) + \delta \nabla h^{n+1}, \nabla v_b) \\ = (-Q_s^{n+1}, v_b) + \Phi R^{n+1}(v_b) \end{aligned} \quad (5.34)$$

avec la notation classique $(f, g) = \int_{\Omega} f g dx$ et où R^{n+1} désigne

$$R^{n+1}(v_b) = \left(\frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}), v_b \right)$$

$$-((h_2 - h^{n+1})K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b).$$

Nous établissons d'abord une estimation uniforme de R^{n+1} .

Soit

$$D = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}) := (A) - (B),$$

avec

$$A = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b(h) - \partial_t h)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)}{\delta t} - \frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t},$$

et

$$B = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} ds = -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} = -\frac{h^{n+1} - h^n}{\delta t} + \frac{\partial h}{\partial t}(t^{n+1}),$$

alors

$$|(D, v_b)| \leq (\|\mathcal{P}_b(h) - h\|_{C^1([0, T], L^2)} + \delta t \|h\|_{C^2([0, T], L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \leq \max(C_I, 1) (b^{k+1} + \delta t) \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}.$$

Posons

$$C := R^{n+1}(v_b) - (D, v_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n))(K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b),$$

nous décomposons C comme suit

$$C = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1}))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} - h_1^{n+1}), \nabla v_b).$$

Nous allons ici majorer ces termes compte tenu du résultat de régularité $L^4(\Omega_T)$ obtenu pour les gradients de h et h_1 .

$$\begin{aligned} |C| &\leq K_+ \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{L^4} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\ &\quad + K_+ \|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^4} (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\ &\leq K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) (\|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^{n+1}\|_{H^1}^{1/2}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\ &\quad + K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) (\|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{L^2}^{1/2} \|\mathcal{P}_b h^{n+1} - \mathcal{P}_b h^n\|_{H^1}^{1/2}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \\ &\leq K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) \{ \|h - \mathcal{P}_b h\|_{C([0,T],L^2)}^{1/2} \|h - \mathcal{P}_b h\|_{C([0,T],H^1)}^{1/2} + \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2}^{1/2} \|h^{n+1} - h^n\|_{L^2}^{1/2} \} \\ &\leq K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) \{ C_I b^{(k+\frac{1}{2})} \|h\|_{C([0,T],H^{k+1})} + \delta t \|h\|_{C^1([0,T],H^1)} \} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \end{aligned}$$

donc

$$|R^{n+1}(v_b)| \leq \max(C_I, 1) \{ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) + b^{1/2}) b^{k+\frac{1}{2}}$$

$$+ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) + 1) \delta t \} \|h\|_{Y(\Omega_T)} \|\nabla v_b\|_{L^2}. \quad (5.35)$$

De la même manière, l'équation pour h_1^{n+1} peut s'écrire:

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}) w_b dx + \int_{\Omega} \delta \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w_b dx + \int_{\Omega} (h^{n+1} - h_1^{n+1}) K \nabla h_1^{n+1} \cdot \nabla w_b dx \quad (5.36)$$

$$+ \int_{\Omega} (h_2 - h^{n+1}) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}) \cdot \nabla w_b dx = \int_{\Omega} -(Q_s^{n+1}(T_s(h^n)) + Q_f^{n+1}(T_f(h^n - h_1^n))) dx.$$

On introduit le résidu R_1^{n+1} comme suit

$$R_1^{n+1}(w_b) = \left(\frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}), w_b \right) - ((h^{n+1} - h_1^{n+1}) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b)$$

$$\begin{aligned}
& +((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) - ((h_2 - h^{n+1}) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b) \\
& +((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Nous déduisons de (5.36) que:

$$\begin{aligned}
& \Phi \left(\frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t}, w_b \right) + \delta (K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla w_b) \\
& + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla w_b) = -((Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}), w_b) + \Phi R_1^{n+1}(w_b) \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir une estimation uniforme pour R_1^{n+1} .
Soit

$$D_1 = \frac{\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)}{\delta t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t^{n+1}) := (A_1) - (B_1),$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b h_1 - \partial_t h_1)(s) ds = \frac{\mathcal{P}_b h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b h_1^n}{\delta t} - \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\delta t},$$

et

$$B_1 = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} ds = -\frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial h_1}{\partial t}(s) ds + \frac{1}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial h_1}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} = -\frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\delta t} + \frac{\partial h_1}{\partial s}(t^{n+1}),$$

alors

$$|(D_1, v_b)| \leq (\|\mathcal{P}_b h_1 - h_1\|_{C^1([0,T],L^2)} + \delta t \|h_1\|_{C^2([0,T],L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \leq \max(C_I, 1)(b^{k+1} + \delta t) \|h_1\|_{Y(\Omega_T)} \|v_b\|_{L^2}.$$

De plus:

$$\begin{aligned}
C_1 := R_1^{n+1}(v_b) - (D_1, v_b) &= ((-\mathcal{P}_b(h^n) + h^{n+1}) K \nabla (h_1^{n+1} + h^{n+1}), \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - h^{n+1}) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla v_b) \\
&+ ((h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla v_b) = ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla h^{n+1}, \nabla v_b) + ((h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla v_b)
\end{aligned}$$

Nous décomposons C_1 de la même façon que nous l'avons fait pour C , i.e.

$$\begin{aligned}
C_1 &= ((h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1})) K \nabla h^{n+1}, \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h^n)) K \nabla h^{n+1}, \nabla v_b) \\
&+ ((h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla v_b) + ((\mathcal{P}_b(h_1^{n+1}) - \mathcal{P}_b(h_1^n)) K \nabla h_1^{n+1}, \nabla v_b).
\end{aligned}$$

Nous allons ici majorer ces termes compte tenu du résultat de régularité $L^4(\Omega_T)$ obtenu pour les gradients de h et h_1 . En utilisant les mêmes arguments que pour la majoration de C , nous déduisons que

$$|C_1| \leq K_+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \{C_I b^{(k+\frac{1}{2})} \|h\|_{C([0,T],H^{k+1})} + \delta t \|h\|_{C^1([0,T],H^1)}\} \|\nabla v_b\|_{L^2}$$

$$+ K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4} \{C_I b^{(k+\frac{1}{2})} \|h_1\|_{C([0,T],H^{k+1})} + \delta t \|h_1\|_{C^1([0,T],H^1)}\} \|\nabla v_b\|_{L^2}.$$

donc

$$|R_1^{n+1}(v_b)| \leq 2 \text{Max}(C_I, 1) \{ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) + b^{1/2}) b^{k+\frac{1}{2}}$$

$$+ (K_+ (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}) + 1) \delta t \} \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}) \|\nabla v_b\|_{L^2} \quad (5.39)$$

On introduit les erreurs $e_b^n = \mathcal{P}_b(h^n) - h_b^n$, et $s_b^n = \mathcal{P}_b(h_1^n) - h_{1,b}^n$, les différences (5.24)-(5.13) et (5.20)-(5.14) donnent

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, v_b) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla v_b) + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla v_b) \\ & - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} + h_{1,b}^{n+1}), \nabla v_b) = R^{n+1}(v_b). \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, w_b) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla w_b) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))K\nabla h_1^{n+1}, w_b) \\ & - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_{1,b}^{n+1} + h_b^{n+1} - h_b^n - h_b^{n+1}), \nabla w_b) - ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla h_{1,b}^{n+1}, \nabla w_b) \\ & + ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h_1^{n+1} + h^n), \nabla w_b) = R_1^{n+1}(w_b). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Prenant $v_b = e_b^{n+1}$ dans l'équation (5.40) et $w_b = s_b^{n+1}$ dans (5.41), on obtient après sommation des deux équations et simplifications :

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{\Phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + \\ & ((h_2 - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla e_b^{n+1} + \nabla s_b^{n+1}) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} + h_{1,b}^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) \\ & + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1}) + ((\mathcal{P}_b(h^n) - \mathcal{P}_b(h_1^n))K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) \\ & - ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla h_{1,b}^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1}) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\Phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{\Phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) +$$

$$\begin{aligned}
& ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) - ((h_2 - h_b^n)K\nabla(\mathcal{P}_b(h_b^{n+1}) + \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) \\
& + ((h_b^n - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) + ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) + \\
& ((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1}) + ((e_b^n - s_b^n)K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + ((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla(h_1^{n+1} - h_{1,b}^{n+1}), \nabla s_b^{n+1}) \\
& = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1})
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{\Phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta(\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta(\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + \\
& \quad ((h_2 - h_b^n)K\nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})) + \\
& \quad \underbrace{((h_2 - h_b^n)K\nabla(h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1}) + h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))}_{=E_0} \\
& \quad + \underbrace{((h_b^n - \mathcal{P}_b(h^n))K\nabla(h^{n+1} + h_1^{n+1}), \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))}_{=E_1} \\
& + \underbrace{((e_b^n - s_b^n)K\nabla h_1^{n+1}, \nabla s_b^{n+1})}_{=E_2} + \underbrace{((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1})}_{\geq 0} + \underbrace{((h_b^n - h_{1,b}^n)K\nabla(h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1})), \nabla s_b^{n+1})}_{=E_3} \\
& \quad + \underbrace{((h_2 - h_b^n)K\nabla(h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1})}_{=E_4} = R^n(e_b^{n+1}) + R_1^{n+1}(s_b^{n+1})
\end{aligned}$$

Nous allons à présent estimer les termes E_i , $i = 1, 4$, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et aux inégalités de Young et à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

$$\begin{aligned}
|E_0| & \leq K_+ h_2^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\left(\|\nabla(h^{n+1} - \mathcal{P}_b(h^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)} \right)}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Y(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla(h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq C_I b^k \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}} \\
& \leq K_- \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{h_2 K_+^2}{K_-} C_I^2 b^{2k} (\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E_1| & \leq K_+ (\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4(\Omega)}) \|e_b^n\|_{L^4(\Omega)} (\|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}) \\
& \leq K_+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + K_+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad := S_1 + S_2 + S_3 + S_4.
\end{aligned}$$

Nous allons détailler la majoration du terme S_1 , les autres majorations s'obtiendront de la même façon.

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq K_+ C(b)^{1/2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2} + K_+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^{3/2}, \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon_1} K_+ C(b) \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^2 + \left(\frac{K_+ \epsilon_1}{2} + K_+^{4/3} \epsilon_2\right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \epsilon_2^{-3} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_3} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{K_+ \epsilon_1}{2} + K_+^{4/3} \epsilon_2\right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

De même, nous avons pour le terme S_2 :

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_3} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{K_+ \epsilon_1}{2} + K_+^{4/3} \epsilon_2\right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

Concernant le terme S_3 , nous écrivons

$$\begin{aligned} |S_3| &\leq K_+ C(b)^{1/2} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} + K_+ \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4} \|e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}, \\ &\leq \frac{K_+}{2\epsilon_4} C(b) \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^2 + \frac{K_+ \epsilon_4}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{K_+ \epsilon_5}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+}{2\epsilon_5} \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^2 \|e_b^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |S_3| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_6} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+}{2} (\epsilon_4 + \epsilon_5) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left(\epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}\right) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

De même, nous avons pour le terme S_4 :

$$\begin{aligned} |S_4| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_6} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+}{2} (\epsilon_4 + \epsilon_5) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left(\epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}\right) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la majoration pour E_1 :

$$\begin{aligned} |E_1| &\leq \left(\left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_3} + \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_6}\right) \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + (K_+ \epsilon_1 + 2K_+^{4/3} \epsilon_2 + K_+^2 \epsilon_7) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + K_+ (\epsilon_4 + \epsilon_5) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3} + \epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4). \end{aligned}$$

La majoration du terme E_2 se fera sur le même principe que celle de E_1 , plus précisément nous avons:

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n\|_{L^2(\Omega)} + \|s_b^n\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^4} + \|e_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ K_+ \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} (\|s_b^n - s_b^{n+1}\|_{L^4} + \|s_b^{n+1}\|_{L^4}) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} := T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que $T_1 = S_4$, donc nous avons:

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_6} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+}{2} (\epsilon_4 + \epsilon_5) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (\epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

Quant à la majoration de T_2 , nous remarquons que nous pouvons utiliser celle établie pour S_2 en substituant s_b^n à e_b^n , ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_3} \|s_b^n - s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{K_+ \epsilon_1}{2} + K_+^{4/3} \epsilon_2\right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_3} \|s_b^n - s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_6} \|e_b^n - e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7 \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left(\frac{K_+}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_4 + \epsilon_5) + K_+^{4/3} \epsilon_2\right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 \\ &\quad + (\epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_3| &\leq K_+ \|(h_b^n - h_{1,b}^n)^{\frac{1}{2}} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \sqrt{h_2} \|\nabla (h_1^{n+1} - \mathcal{P}_b(h_1^{n+1}))\|_{L^2} \\ &\leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{h_b^n - h_{1,b}^n} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} + \frac{h_2 K_+^2}{2K_-} C_I^2 b^{2k} \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$E_4 = ((h_2 - h_b^n) K \nabla (h_b^{n+1} - h_b^n), \nabla s_b^{n+1})$$

et on écrit

$$h_b^{n+1} - h_b^n = -e_b^{n+1} + e_b^n + (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - h^{n+1}) - (\mathcal{P}_b(h^n) - h^n) + h^{n+1} - h^n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |E_4| &\leq h_2 C(b) K_+ \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \\ &+ h_2 K_+ \left(\underbrace{\|\nabla (\mathcal{P}_b(h^n) - h^n)\|_{L^2}}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Y(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla (\mathcal{P}_b(h^{n+1}) - h^{n+1})\|_{L^2}}_{\leq C_I b^k \|h\|_{Y(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla (h^{n+1} - h^n)\|_{L^2}}_{\leq \delta t \|h\|_{Y(\Omega_T)}} \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2h_2^2 C(b)^2 K_+^2}{\delta} \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{4h_2^2 K_+^2 C_I^2 b^{2k}}{\delta} + \frac{2h_2^2 K_+^2 \delta t^2}{\delta} \right) \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$$

En rassemblant ces inégalités, nous trouvons après simplifications

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2) + \frac{\Phi}{2\delta t} (\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|s_b^n\|_{L^2}^2 + \|s_b^{n+1} - s_b^n\|_{L^2}^2) \\ & \quad + \left(\frac{\delta}{2} - (K_+ \epsilon_1 + 2K_+^{4/3} \epsilon_2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7) \right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \quad - \left(\frac{2h_2^2 C(b)^2 K_+^2}{\delta} + \left(\left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_3} + \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4} \right)^2 \frac{3}{2\epsilon_6} \right) \right) \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \left(\frac{\delta}{4} - \left(\frac{K_+}{2} (\epsilon_1 + 2\epsilon_4 + 2\epsilon_5) + K_+^{4/3} \epsilon_2 \right) \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_1} \right)^2 \frac{1}{2\epsilon_3} \|s_b^n - s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \left(K_- - \frac{K_-}{2} \right) \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla (e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2}^2 + \frac{K_-}{2} \|\sqrt{h_b^n - h_{1,b}^n} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \leq (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3} + \epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \\ & \quad + (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 \\ & + C_f(K_-, K_+, \delta, h_2, C_I) (b^k + \delta t)^2 (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2). \end{aligned}$$

Si les réels $\{\epsilon_i > 0\}_{i=1,7}$ sont choisis de telle sorte que:

$$\left(\frac{\delta}{2} - (K_+ \epsilon_1 + 2K_+^{4/3} \epsilon_2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7) \right) > 0 \text{ et } \left(\frac{\delta}{4} - \left(\frac{K_+}{2} (\epsilon_1 + 2\epsilon_4 + 2\epsilon_5) + K_+^{4/3} \epsilon_2 \right) \right) > 0 \quad (5.42)$$

et si la condition suivante est satisfaite

$$\left(\Phi - \frac{4h_2^2 C(b)^2 \delta t K_+^2}{\delta} + \left(\left(\frac{K_+ C(b)}{\sqrt{2}\epsilon_1} \right)^2 \frac{\delta t}{\epsilon_3} + \left(\frac{K_+ C(b)}{2\epsilon_4} \right)^2 \frac{3\delta t}{\epsilon_6} \right) \right) > 0, \quad (5.43)$$

alors

$$\begin{aligned} & \Phi (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2) + \Phi (\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|s_b^n\|_{L^2}^2) + 2\delta t \left(\frac{\delta}{2} - (K_+ \epsilon_1 + 2K_+^{4/3} \epsilon_2 + \frac{K_+^2}{2} \epsilon_7) \right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + 2\delta t \left(\frac{\delta}{4} - \left(\frac{K_+}{2} (\epsilon_1 + 2\epsilon_4 + 2\epsilon_5) + K_+^{4/3} \epsilon_2 \right) \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq 2\delta t (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 \\ & \quad + 2\delta t (\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3} + \epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7} \epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \\ & + C_f(K_-, K_+, \delta, h_2, C_I) (b^k + \delta t)^2 (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2). \quad (5.44) \end{aligned}$$

En sommant cette inégalité pour $n \in \{0, \dots, p\}$, pour $p \in \{0, \dots, N+1\}$, nous

obtenons

$$\begin{aligned}
\Phi(\|e_b^{p+1}\|_{L^2}^2 + \|s_b^{p+1}\|_{L^2}^2) &\leq \Phi(\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) + 2(\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|s_b^k\|_{L^2}^2) \delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4 \\
&\quad + 2C_f(b^k + \delta t)^2 \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2) \times \delta t \sum_{k=0}^p (1 + \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4) \\
&\quad + 2(\epsilon_3 + \epsilon_2^{-3} + \epsilon_6 + \frac{1}{8\epsilon_7}\epsilon_5^{-2}) \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|e_b^k\|_{L^2}^2) \delta t \sum_{k=0}^p (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4).
\end{aligned}$$

Donc si δt est suffisamment petit pour avoir

$$\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4$$

et

$$\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla f^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla f\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4,$$

alors (puisque $n\delta t \leq T$)

$$\begin{aligned}
&(\Phi - 10C_4F_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)) \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|e_b^k\|_{L^2}^2) + (\Phi - 2C_4F_2(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)) \text{Max}_{k \in (0, N+1)}(\|s_b^k\|_{L^2}^2) \\
&\leq \Phi(\|e_{b+}^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) + 2C_f(T + 2C_4)(b^k + \delta t)^2 \text{Max}(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2)
\end{aligned}$$

Si le paramètre Φ satisfait:

$$(\Phi - 10C_4F_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)) > 0, \quad (5.45)$$

alors, puisque $\|e_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2(b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$ et $\|s_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2(b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$, nous obtenons la stabilité L^2 (5.29) -(5.30) du théorème 14. Nous prouvons les estimations (5.31), (5.32) en additionnant (5.44) pour $n = 1, \dots, N$.

Il nous reste à donner un sens aux conditions (5.42), (5.43) et (5.45), en particulier en calant les $\epsilon_i, i = 1, 7$.

Nous rappelons que δ représente l'épaisseur des interfaces diffuses, on peut sans perte de généralité supposer que $\delta = \mathcal{O}(1)$ et que $0 \leq \delta \leq 1$, prenons alors

$$\epsilon_1 = \frac{\alpha}{3K_-}, \quad \epsilon_2 = \frac{\alpha}{6(K_-)^{4/3}}, \quad \epsilon_4 = \epsilon_5 = \frac{\alpha}{3K_-} \quad \text{et} \quad \epsilon_7 = \frac{2\alpha}{3K_-},$$

avec $0 < \alpha < 1$. Ces choix donnent un sens à (5.42) (en particulier si le milieu est supposé homogène).

En prenant

$$\epsilon_3 = \frac{K_-^4}{\alpha^2} \quad \text{et} \quad \epsilon_6 = \frac{3K_-^4}{\alpha^2},$$

la condition de stabilité (5.43) devient:

$$\left(\Phi - \frac{4h_2^2 K_+^2}{\delta} C(b)^2 \delta t - \frac{81}{2} \left(\frac{K_+}{K_-} \right)^2 C(b)^2 \delta t \right) > 0, \quad (5.46)$$

et l'inégalité (5.45)

$$\left(\Phi - 10 \left(\frac{36}{\alpha} + \frac{35}{4} \right) K_-^4 \alpha^{-2} C_4 \right) > 0. \quad (5.47)$$

Les deux conditions (5.46) et (5.47) peuvent paraître contraignantes mais soulignons que nous pouvons prendre le coefficient Φ arbitrairement grand en faisant un changement d'échelle temporelle, bien sûr, Φ ne représentera plus la porosité.

Chapter 6

Les Volumes Finis

6.1 Introduction et rappels sur la méthode des volumes finis

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale, c'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments finis, elle est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaire sont des rectangles en 2D ou des parallépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finis. De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode: Fluent, Star CD, CFX,elsA. Par ailleurs, la méthode des Volumes Finis est localement 'prudente', car elle est fondée sur un équilibre approché: Un équilibre local est écrit sur chaque cellule de discrétisation qui est souvent appelée "volume de contrôle ", grâce à la formule de divergence, une formulation intégrale des flux sur la frontière du volume de contrôle est alors obtenue. Les flux sur la frontière sont discrétisés par rapport aux inconnues discrètes.

6.1.1 Volumes finis pour une loi de conservation

Considérons une loi de conservation d'une grandeur physique ω dans une maille de volume Ω , faisant intervenir un flux $F(\omega)$ et un terme source $S(\omega)$. Son expression sous forme intégrale est

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} F(\omega) d\Omega = \int_{\Omega} S(\omega) d\Omega$$

Appelons Σ la surface de la maille de normale extérieure n . La théorème d'Ostrogradski conduit à:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega d\Omega + \oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega$$

L'intégrale $\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma$ représente la somme des flux à travers chaque face de la maille. Le flux est supposé constant sur chaque face, l'intégrale se ramène à une somme discrète sur chaque face de la maille. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \sum_{\text{face de la maille}} F_{\text{face}} \cdot n \cdot m(\Sigma_{\text{face}})$$

La quantité $F_{\text{face}} = F(\omega_{\text{face}})$ est une approximation de flux F sur une face de la maille, c'est le flux numérique sur la face considérée. La discrétisation spatiale revient à calculer le bilan des flux sur une maille élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions évaluées sur chaque face de la maille. La manière dont on approche les flux numériques en fonction de l'inconnue discrète détermine le schéma numérique. L'écriture du schéma numérique peut également utiliser des inconnues auxiliaires, par exemple le gradient de l'inconnue par maille. Explicitons maintenant le terme de dérivée temporelle. Un élément fondamental de la discrétisation en Volumes Finis est de supposer que la grandeur ω est constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de sa moyenne sur la maille ou bien à sa valeur au centre de la maille. D'autre part, le terme de dérivation en temps est évalué au moyen d'une méthode numérique d'intégration d'équation différentielle (Runge -Kutta, Euler explicite au implicite, ..) et faite intervenir un pas de temps d'intégration Δt . Ce dernier peut être constant ou variable. Pour fixer les idées, on écrira la formulation avec une méthode d'Euler explicite. Notons $\Delta\omega$ l'incrément de la grandeur ω entre deux itérations temporelles successives. On peut ainsi écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega d\Omega = \Omega \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{maille}} = \Omega \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Finalement la loi de conservation discrétisée avec la méthode des Volumes Finis peut s'écrire:

$$\Omega \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \sum_{\text{face}} F_{\text{face}} \cdot n_{\text{face}} \Sigma_{\text{face}} = \Omega S$$

6.1.2 Discrétisation par Volumes Finis pour une équation de de type convection- diffusion

Dans ce chapitre, on présente un schéma de type volumes finis pour le problème mono-dimensionnel non linéaire de type convection-diffusion

$$\Phi(x)u_t + b(u)_x - (K(x)\alpha(u)_x)_x = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times (0, 1) \quad (6.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } (0, 1), \quad (6.2)$$

$$u(t, 0) = 1 \quad \text{et} \quad u(t, 1) = 0. \quad (6.3)$$

- On note : $x_{i+\frac{1}{2}}$ le centre de $I_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$, $x_{\frac{1}{2}} := 0$, $x_{N_x+\frac{1}{2}} := 1$.
 - $I_i := [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $i = 1, \dots, N_x$, le volume de contrôle, (cf. figure suivante)
 - $h_i := |I_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, et on pose $h = \min_i(h_i)$.
 - Pour une condition initiale $u^0 \in L^\infty(I)$, on pose $u_i^0 := \frac{1}{h_i} \int_{I_i} u^0(x) dx$, avec les conditions aux bords $u_{\frac{1}{2}}^n = 1$, et $u_{N_x+\frac{1}{2}}^n = 0$.
 - Pour $\Phi \in L^\infty(I)$, on pose $\Phi_i := \frac{1}{h_i} \int_{I_i} \Phi(x) dx$.
 - Pour des raisons de simplicité, on suppose la fonction K constante par morceaux, on pose $K_{i+\frac{1}{2}} := K|_{I_{i+\frac{1}{2}}}$.
 - Soit u_i^n [resp. $u_{i+\frac{1}{2}}^n$] une approximation de u au point (x_i, t_n) supposée constante sur le volume de contrôle I_i [resp. au point $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$].

Ces approximations seront définies par les schémas numériques qui suivent. On aura besoin aussi de l'hypothèse sur la régularité du maillage :

$\exists \beta \in]0, 1[$, tel que $\beta \Delta x \leq h$, où β est une constante indépendante de h .

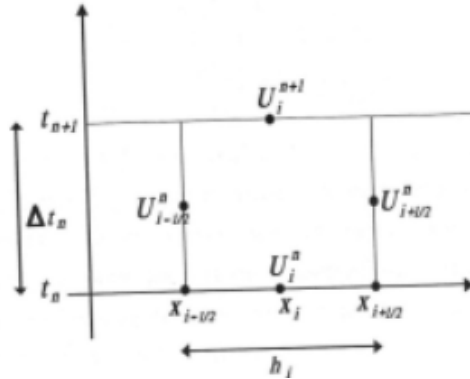


Figure 6.1: Volume de contrôle

6.1.3 Hypothèses sur les données

Par la suite, on introduit les hypothèses suivantes :

- $\Omega := I \times J \subset \mathbb{R}^2$.
- $\alpha \in C^2([0, 1])$ tel que pour $a = \alpha'$, $a(0) = a(1) = 0$ et $a(s) > 0 \forall s \in]0, 1[$.
- $b \in C^1([0, 1])$ est une fonction monotone telle que $b'(s) > 0, \forall s \in]0, 1[$.
- α^{-1} est une fonction continue hölderienne d'exposant $\theta \in]0, 1[$ et $b \circ \alpha^{-1}$ une fonction continue hölderienne d'exposant $\frac{1+\theta}{2}$.

En intégrant (6.1) sur $I_i \times [t_n, t_{n+1}]$, on obtient le schéma suivant :
 Pour $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} & \Phi_i (u_i^{n+1} - u_i^n) h_i + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(b(u)_{i+\frac{1}{2}} - b(u)_{i-\frac{1}{2}} \right) dt = \\ & K_{i+\frac{1}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt - K_{i-\frac{1}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ce schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^- + F_{i-\frac{1}{2}}^+ \right) + \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left(G_{i+\frac{1}{2}}^- + G_{i-\frac{1}{2}}^+ \right) \quad (6.5)$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ et $G_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ sont respectivement le flux de conservation et le flux de diffusion, à droite et à gauche de point $x_{i+\frac{1}{2}} = I_{i+1} \cap I_i$, définis par

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+ := \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}} dt, \quad G_{i+\frac{1}{2}}^- := -\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}} dt \quad (6.6)$$

et

$$F_{i+\frac{1}{2}}^+ := \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt, \quad F_{i+\frac{1}{2}}^- := -\frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt \quad (6.7)$$

Soient $F_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(u_{i+1}, u_i)$ et $G_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(u_{i+1}, u_i)$ des approximations à deux points respectivement de $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ et $G_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ appelées aussi flux numériques . La conservation des flux numériques est une propriété caractéristique des schémas numériques pour les lois de conservation, cette conservation est en général définie par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface du maillage . La consistance du flux numérique est en général définie pour que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux doit être supérieur ou égale à l'ordre du pas de maillage. Ainsi d'après ces définitions de la conservation et de la consistance, pour les flux numériques des termes de convection et de diffusion citées séparément dans [49], on peut les généraliser par :

Définitions (Conservativité) On dira que les flux approchés $F_{i+\frac{1}{2}}^*$ et $G_{i+\frac{1}{2}}^*$ sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{*-} + F_{i+\frac{1}{2}}^{*+} = 0, \quad \text{et} \quad G_{i+\frac{1}{2}}^{*-} + G_{i+\frac{1}{2}}^{*+} = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N_x - 1. \quad (6.8)$$

plus une conservation globale :

$$G_{N_x+\frac{1}{2}}^{*-} + G_{\frac{1}{2}}^{*+} = [b(u)]_{x=0}^{x=1}, \quad \text{et} \quad F_{N_x+\frac{1}{2}}^{*-} + F_{\frac{1}{2}}^{*+} = [K(x)\alpha(u)_x]_{x=0}^{x=1}. \quad (6.9)$$

où $[G(s)]_{s=0}^{s=1} := G(1) - G(0)$.

Définitions (Consistance) On dira que les flux approchés $F_{i+\frac{1}{2}}^*$ et $G_{i+\frac{1}{2}}^*$ sont consistants au sens des volumes finis, si on a :

$$G_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(v, v) = \pm b(v), \quad \text{pour tout } v \in [0, 1],$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}(u_{i+1}, u_i) = \pm K_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \theta(h), \quad \text{pour tout } u \text{ assez régulière où}$$

$|\theta(h)| \leq Ch$, ($C \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de u).

Définitions (Volumes Finis) On dira qu'un schéma numérique pour le problème (6.5) est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions (de conservativité et de consistance). De (6.4) on déduit trois familles de schémas de type volumes finis conservatifs et consistants : l'un explicite, les deux autres sont implicite et semi-implicite.

Schéma explicite

En utilisant dans (6.4) une approximation explicite, on a : pour $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} \Phi_i (u_i^{n+1} - u_i^n) h_i + \left(b(u)_{i+\frac{1}{2}}^n - b(u)_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \Delta t_n = K_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta t_n \\ - K_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta t_n \end{aligned} \quad (6.10)$$

où le terme de convection est approché par un schéma de Godunov décentré amont, ce qui assure une conservation et une consistance pour le terme de convection. Pour le terme de diffusion on choisit une approximation centrée, d'ordre 1 de la forme :

$$\left(\frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{\alpha(u_{i+\frac{1}{2}}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i} \quad (6.11)$$

Ainsi du fait que $b'(u) \geq 0$ et $\alpha'(0) = \alpha'(1) = 0$, d'après les dernières hypothèses, le schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \quad (6.12)$$

pour $i = 2, \dots, N_x - 1$, et

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_1 h_1} (b(u_1^n) - b(1)) + \frac{K_{\frac{3}{2}} \Delta t_n}{\Phi_1 h_1 \Delta x_1} (\alpha(u_2^n) - \alpha(u_1^n)) \quad (6.13)$$

$$u_{N_x}^{n+1} = u_{N_x}^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{N_x} h_{N_x}} (b(u_{N_x}^n) - b(u_{N_x-1}^n)) - \frac{K_{N_x-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{N_x} h_{N_x} \Delta x_{N_x-1}} (\alpha(u_{N_x}^n) - \alpha(u_{N_x-1}^n)) \quad (6.14)$$

Pour des raisons de simplicité des notations, on pose

$$\alpha(u_0^n) := \alpha(u_1^n), \quad \alpha(u_{N_x+1}^n) := \alpha(u_{N_x}^n), \quad \text{et} \quad b(u_0^n) := b(1)$$

ainsi on peut écrire le schéma sous la forme suivante : pour $i = 1, \dots, N_x$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \quad (6.15)$$

Ici les flux numériques sont donnés par : pour $i = 1, \dots, N_x$

$$G_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) := b(u_{i-1}^n), \quad F_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) := \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \quad (6.16)$$

et

$$G_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^n, u_i^n) := b(u_i^n), \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^n, u_i^n) := -\frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) \quad (6.17)$$

Ce qui assure la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, et par suite le schéma explicite (6.15) est de type volumes finis au sens de la définition de volume fini.

Schéma semi- implicite

Ici on considère un approximation implicite pour le terme de diffusion et une approximation explicite pour le terme de convection dans (6.4) , ainsi on a :
pour $i = 1, \dots, N_x$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1})) \quad (6.18)$$

avec $\alpha(u_0^{n+1}) := \alpha(u_1^{n+1})$, $\alpha(u_{N_x+1}^{n+1}) := \alpha(u_{N_x}^{n+1})$, et $b(u_0^n) := b(1)$

Ici les flux numériques sont donnés par : pour $i = 1, \dots, N_x$

$$G_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) := b(u_{i-1}^n), \quad F_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}) := \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1})) \quad (6.19)$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^n, u_i^n) := -b(u_i^n), \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) := -\frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) \quad (6.20)$$

6.2 Résolution du problème dans le cas confiné

On définit le maillage rectangulaire \mathcal{T} , de l'intervalle $(0, L_x) \times (0, L_y)$ constitué de $N \times M$ cellules notée K_{ij} $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$, les $N \times M$ points $(x_i, y_j)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}$ de $(0, L_x) \times (0, L_y)$. tels que $K_{ij} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ doivent satisfaire les hypothèses suivantes

$$x = x_{i-\frac{1}{2}} = 0 < x_1 < x_{\frac{1}{2}} \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_N < x_{N+\frac{1}{2}} = x_N = L_x,$$

$$y = y_{i-\frac{1}{2}} = 0 < y_1 < y_{\frac{1}{2}} \dots < y_{i-\frac{1}{2}} < y_i < y_{i+\frac{1}{2}} < y_N < y_{N+\frac{1}{2}} = y_N = L_y.$$

avec

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, N, & k_i &= y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, M, \\ h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N, & k_{i+\frac{1}{2}} &= y_{i+1} - y_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ h_i^- &= x_i - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, N, & k_i^- &= y_i - y_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, M, \\ h_i^+ &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_i, \quad i = 0, \dots, N, & k_i^+ &= y_{i+\frac{1}{2}} - y_i, \quad i = 0, \dots, M, \\ h &= \max\{h_i, i = 1, \dots, N\}, \quad k = \max\{k_i, i = 1, \dots, M\} \text{ et } |K_{ij}| = h_i k_j. \end{aligned}$$

Les inconnues discrètes $h_{i,j}^n$ correspondent à une approximation de $h(t_n, x_i, y_j)$ (ou de la valeur moyenne de h sur K_{ij}). Soit $\alpha(h) = -\frac{1}{2}(h_b - h)^2$, et $\lambda = T_s(h) = (h_b - h)$.

L'intégration de la première équation sur chaque cellule $[t_n, t_{n+1}] \times K_{ij}$ donne :

$$(h_{ij}^{n+1} - h_{ij}^n)|K_{ij}| = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{(F_{i+\frac{1}{2},j} + F_{i-\frac{1}{2},j} + F_{i,j+\frac{1}{2}} + F_{i,j-\frac{1}{2}}) - (G_{i+\frac{1}{2},j} + G_{i-\frac{1}{2},j} + G_{i,j+\frac{1}{2}} + G_{i,j-\frac{1}{2}}) - \int_{K_{ij}} Q_s(x,y)dx dy\} dt$$

où $Q_s(i,j) = \frac{1}{|K_{ij}|} \int_{K_{ij}} Q_s(x,y)dx dy$ est la valeur moyenne de Q_s sur K_{ij} . Les flux sont ensuite approchés par des équations aux différences finies par rapport aux inconnues discrètes $h_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = k_j \frac{(\alpha(h)_{i+1,j} - \alpha(h)_{i,j})}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ pour } i = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2}} = h_i \frac{(\alpha(h)_{i,j+1} - \alpha(h)_{i,j})}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ pour } i = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

le terme $(T_s(h) \frac{\partial f}{\partial x})(x_{i+\frac{1}{2}})$ est approché comme suit

$$G_{i+\frac{1}{2},j} = \lambda_i k_j \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{ij}}{h_i^+} \text{ sur } K_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N,$$

et

$$G_{i+\frac{1}{2},j} = -\lambda_i k_j \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{ij}}{h_i^-} \text{ sur } K_{i+1,j}, \quad i = 0, \dots, N.$$

En exigeant que les deux approximations ci-dessus de $T_s(h) \frac{\partial f}{\partial x}$ soient égales (à cause de la conservativité du flux), on obtient la valeur de $f_{i+\frac{1}{2},j}$, $\forall i = 1, \dots, N-1$

$$f_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{f_{i+1,j} \frac{\lambda_{i+1,j}}{h_{i+1,j}} + f_{ij} \frac{\lambda_{i,j}}{h_i^+}}{\frac{\lambda_{i+1,j}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_{i,j}}{h_i^+}}$$

avec $\lambda_{i+1,j} = (h_b - h_{i+1,j})$ et $\lambda_{i,j} = (h_b - h_{i,j})$.

Ce qui conduit à l'expression pour l'approximation $G_{i+\frac{1}{2},j}$ de $T_s(h) \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$:

$$G_{i+\frac{1}{2},j} = k_j \tau_{i+\frac{1}{2},j} (f_{i+1,j} - f_{i,j}), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

avec

$$\tau_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\lambda_{i,j} \lambda_{i+1,j}}{h_i^+ \lambda_{i+1,j} + h_{i+1}^- \lambda_{i,j}}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

Si le maillage est régulier i.e

$$\begin{cases} h_i = h \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ k_j = k \quad \forall j \in \{1, \dots, M\} \end{cases},$$

et si on pose que le point (x_i, y_j) est le centre de K_{ij} avec $h_i^+ = h_i^- = \frac{h}{2}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = h$ ($\forall k$), alors

$$G_{i+\frac{1}{2},j} = 2 \times k \times \frac{\lambda_{i,j}\lambda_{i+1,j}}{\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j}} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h}$$

On déduit que le schéma numérique explicite en temps pour l'approximation de l'équation (4.7) est

$$\begin{aligned} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\delta t} &= \frac{1}{h^2}(\alpha(h)_{i+1,j}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i-1,j}^n) + \frac{1}{k^2}(\alpha(h)_{i,j+1}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i,j-1}^n) \\ &\quad - \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i+1,j}^n}{\lambda_{i+1,j}^n + \lambda_{i,j}^n} (f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n) - \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i-1,j}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i-1,j}^n} (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{k^2} \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i,j+1}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j+1}^n} (f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n) - \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i,j-1}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j-1}^n} (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n) \right\} - Q_{s,i,j}^n. \end{aligned} \quad (6.21)$$

De la même manière, le schéma numérique pour l'approximation de l'équation (4.8) est

$$\begin{aligned} \frac{k}{h}(f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) + \frac{h}{k}(f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n) &= \frac{1}{h_b - h_t} \left(\frac{k}{h}(\alpha(h)_{i+1,j}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i-1,j}^n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{k}(\alpha(h)_{i,j+1}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i,j-1}^n) \right) - hk(Q_f + Q_s)_{i,j}^n := B_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Remarque : Lorsque $\delta \neq 0$, nous ajoutons à l'équation (6.21) le terme diffusif discret

$$\delta \left(\left(\frac{1}{h^2}(h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n) + \frac{1}{k^2}(h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n) \right) \right).$$

et nous ajoutons à l'équation (6.22) le terme diffusif discret

$$\delta \left(\left(\frac{1}{h^2}(f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) + \frac{1}{k^2}(f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n) \right) \right).$$

6.3 Résolution du problème dans le cas libre

De la même façon, le schéma numérique explicite en temps pour l'approximation de l'équation (5.14) est

$$\begin{aligned} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\delta t} &- \frac{1}{h^2}(\alpha(h)_{i+1,j}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i-1,j}^n) - \frac{1}{k^2}(\alpha(h)_{i,j+1}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i,j-1}^n) \\ &+ \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i+1,j}^n}{\lambda_{i+1,j}^n + \lambda_{i,j}^n} (f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n) - \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i-1,j}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i-1,j}^n} (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) \right\} + \frac{2}{k^2} \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i,j+1}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j+1}^n} (f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_{i,j}^n \lambda_{i,j-1}^n}{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j-1}^n} (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n) \right\} = -Q_{s,i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

De la même manière, le schéma numérique pour l'approximation de l'équation (5.13) est:

$$\begin{aligned}
& \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\delta t} - \frac{1}{h^2}(\alpha(f)_{i+1,j}^n - 2\alpha(f)_{i,j}^n + \alpha(f)_{i-1,j}^n) - \frac{1}{k^2}(\alpha(f)_{i,j+1}^n - 2\alpha(h)_{i,j}^n + \alpha(h)_{i,j-1}^n) \\
& \quad + \frac{1}{h^2}(\alpha(h)_{i+1,j}^{n+1} - 2\alpha(h)_{i,j}^{n+1} + \alpha(h)_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{k^2}(\alpha(h)_{i,j+1}^{n+1} - 2\alpha(h)_{i,j}^{n+1} + \alpha(h)_{i,j-1}^{n+1}) \\
& \qquad \qquad \qquad = -(Q_f + Q_s)_{i,j}^{n+1}. \tag{6.24}
\end{aligned}$$

Remarque: Si $\delta \neq 0$, nous ajoutons à l'équation (6.23) le terme diffusif discret

$$\delta \left(\left(\frac{1}{h^2}(h_{i+1,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{k^2}(h_{i,j+1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}) \right) \right).$$

et nous ajoutons à l'équation (6.24) le terme diffusif discret

$$\delta \left(\left(\frac{1}{h^2}(f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{k^2}(f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}) \right) \right).$$

Chapter 7

Simulations numériques

Nous allons appliquer à notre problème, les schémas avec la discrétisation spatiale utilisant les éléments finis P1 Lagrange et celle utilisant les volumes finis que nous avons détaillés dans les chapitres précédents. Concernant le schéma éléments finis, nous avons adapté le package FreeFem++ à notre cas et nous renvoyons à [64] pour plus de détails.

Dans chacune des simulations suivantes, nous résolvons numériquement le problème complet **2D** et nous représentons à différents temps, la section (par rapport à y) de la profondeur h de l'interface eau douce/eau salée ainsi que celle de l'interface h_1 entre le milieu saturé et le milieu insaturé.

Dans les tests numériques, nous approchons l'aquifère par le carré $(-50\text{ m}, 50\text{ m}) \times (0, 100\text{ m})$ et nous prenons $h_2 = 10\text{ m}$ pour la profondeur de l'aquifère, $K = 39.024\text{ m/jour}$ pour la conductivité hydraulique et $\Phi = 0.3$ pour la porosité.

7.1 Comparaisons Eléments finis - Volumes finis

7.1.1 Cas d'un aquifère confiné

Pour tester la solution numérique obtenue à partir des méthodes élément fini et volume fini, nous comparons les résultats numériques à la solution analytique proposée par Keulegan. Nous considérons un aquifère confiné d'épaisseur uniforme avec une interface verticale en $x = 0$, l'eau salée étant dans la partie $x < 0$ et l'eau douce dans la partie $x > 0$. A $t = 0$, la grille est retirée et l'interface commence à se déplacer en raison de la différence de densité. L'interface est alors décrite par un profil linéaire pivotant autour d'un axe fixe $(0, D/2)$. Keulegan a donné une solution analytique pour le mouvement de l'élévation de l'interface (cf. [77], [45])

$$h(x, t) = -\frac{D}{2}\left(1 + \frac{x}{l(t)}\right).$$

La localisation de l'intersection de l'interface avec le bas de l'aquifère est donnée pour $h = -D$ par

$$l(t) = \sqrt{\frac{D\alpha kt}{\Phi}} \quad (7.1)$$

où le paramètre $\alpha = \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1$ caractérise le contraste de densité.

La position initiale de l'interface a été fixée à $l = 20\text{ m}$, position correspondant au temps $t_0 = 12.28$ jours. Dans la figure 7.1 nous traçons la solution linéaire exacte aux deux temps $t = t - t_0 = 5, 10\text{ jours}$ (courbes 'resut') et la solution numérique (courbes 'resutt') obtenue avec la méthode des éléments finis *P1* Lagrange. Nous observons que l'interface numérique se déplace plus vite que la solution théorique. Nous pouvons corriger cette différence en raffinant le maillage, i.e. en prenant $N = 160$ (courbe 'erreraftps10'), cela nous permet de diviser par 10 l'erreur obtenue avec $N = 100$ (courbe 'erreftps10'). (cf. figure 7.2). Par ailleurs, avec $N = 160$, le schéma numérique fit bien la solution analytique, ce qui est conforme aux résultats numériques présentés dans ([64], [69], [93]). Enfin, la figure 7.3 montre la progression du pied de l'interface que l'on compare à celui calculé avec la formule analytique. On constate que le pied de l'interface se déplace exactement à la vitesse analytique.

Nous précisons que le pas de temps correspondant à $N = 100$ est $\delta t = 10^{-2}$ et que celui pour $N = 160$ est $\delta t = 5.10^{-3}$. Nous soulignons que ces paramètres ne sont pas aussi faibles que ceux préconisés par la condition stabilité donnée dans les théorèmes d'estimation d'erreur.

Nous répétons cette comparaison avec la méthode des volumes finis et nous gardons les mêmes pas de temps et d'espace. A nouveau, nous observons une légère erreur au temps $t = 5$ jours qui augmente au temps $t = 10$ jours (cf Figure 7.4). Cette erreur peut être amoindrie en augmentant N , le nombre de points de la grille de discrétisation (cf Figure 7.5). Comme pour la méthode des éléments finis *P1* Lagrange, l'erreur obtenue pour $N = 100$ est divisée par 10 par rapport à celle obtenue avec $N = 160$. la comparaison numérique entre les méthodes éléments finis et volumes finis montre que les 2 approches se comportent de façon similaire, au moins dans le cas de l'aquifère confiné.

Pour conclure, nous soulignons que schéma de volumes finis fonctionne même si le paramètre δ (qui caractérise l'épaisseur des zones diffuses) est nul alors que dans le cas de la méthode élément fini, nous avons pris $\delta = 10^{-4}\text{ m}$.

Nous observons que, même si le principe du maximum n'a pas été établi dans le cas de l'approximation éléments finis, les solutions semblent (numériquement) satisfaire ce principe, sans doute cela est-il dû au fait que le modèle avec l'approche 'interface diffuse' respecte cette hiérarchie entre les hauteurs des interfaces. Il serait bien sûr très intéressant d'appliquer à ce problème les schémas volumes finis qui, par construction, préservent la positivité des inconnues.

Afin de terminer cette étude comparative, l'analyse d'erreur (menée pour la méthode élément fini) doit aussi être faite dans le cas de la méthode des volumes finis.

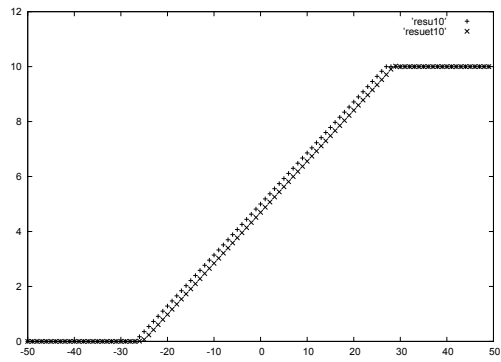
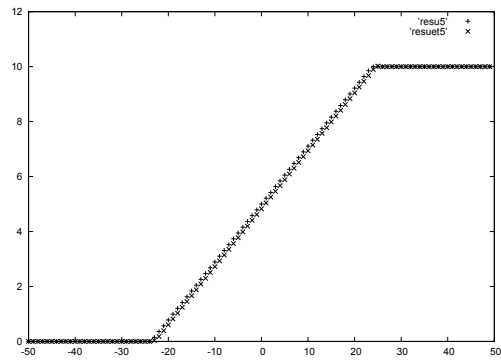


Figure 7.1: Evolution de l'interface obtenue avec MEF à 5 et 10 jours, $N=100$.

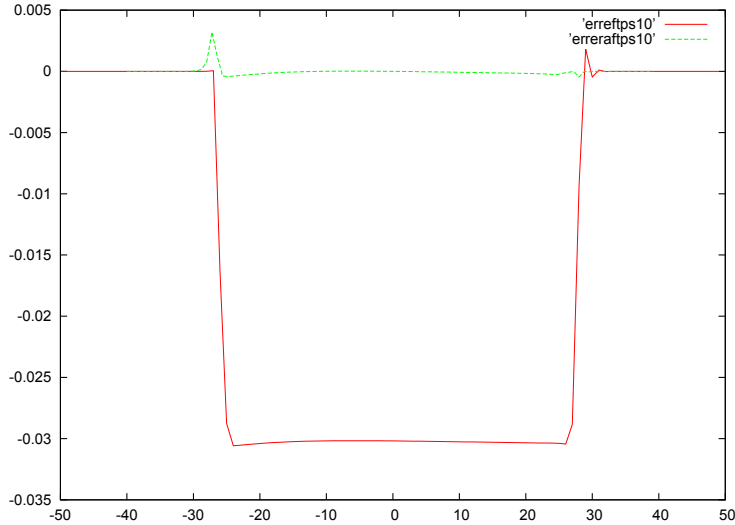


Figure 7.2: *Erreur relative pour la MEF entre la solution obtenue pour $N = 100$ et $N = 160$.*

7.1.2 Cas d'un aquifère libre

Nous allons à présent comparer les 2 méthodes dans le cas d'un aquifère libre. Le problème consiste alors au couplage des 2 équations quasi-linéaires paraboliques (5.1)-(5.2) rappelées au chapitre 5. Les schémas sont ceux donnés au chapitre 5 pour la discrétisation élément fini et au chapitre 6 pour la discrétisation volume fini. Dans la première partie de cette section, nous allons associer à notre problème des conditions de Neumann homogènes, ce qui permet de laisser la solution évoluer librement et nous allons considérer 3 cas de figure: le premier cas où aucun forçage extérieur n'est imposé au système, le second cas où on injecte tout au long de la simulation de l'eau douce localisé autour du point (15 m, 50 m) et le dernier cas correspond au cas du pompage d'eau douce localisé autour du point (15 m, 50 m). Dans la seconde partie de la section, nous allons imposer en $x = -50m$ (ce qui correspond au côté 'mer'), des conditions oscillantes de Dirichlet, simulant ainsi les effets que pourrait induire les marées sur l'aquifère. A nouveau, nous regarderons successivement les 3 cas: sans forçage extérieur, avec injection (ou pompage) d'eau douce.

Les séquences représentent les interfaces aux temps $t = 0.1, 0.5, 1$ jour.

Avec des conditions aux limites de Neumann

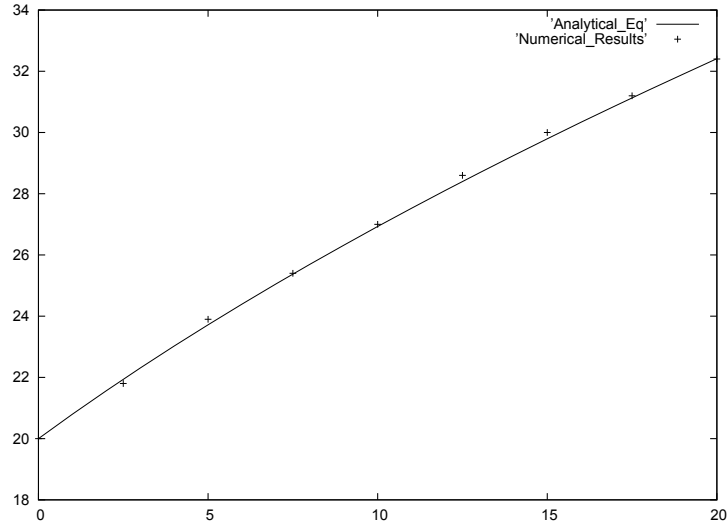


Figure 7.3: *Mouvement du pied de l'interface; Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique .*

La figure 7.6 illustre que les 2 méthodes conduisent à des résultats qualitatifs similaires lorsque le système évolue sans forçage extérieur. En revanche, la conclusion n'est plus la même dans les cas de l'injection ou du pompage.

Concernant le scénario du pompage, on voit que l'effet du pompage est moins visible dans le cas de la méthode volume fini (MVF) que dans celui de la méthode élément fini (MEF); ce constat se fait aussi bien pour l'interface eau douce/eau salée pour laquelle le cône salé est plus aplati pour MVF que pour la table d'eau dont la baisse du niveau est beaucoup moins visible pour MVF. Ce comportement s'accroît au cours du temps. Par ailleurs, on remarque que le processus d'injection affecte globalement l'aquifère pour MEF alors que le changement est localisé autour de la zone de pompage pour MVF.

Nous pouvons faire les mêmes remarques dans le cas de l'injection: Avec MVF, les interfaces semblent être affectées localement par l'injection d'eau douce et les effets sont moindres comparés à ceux observés avec MEF.

Avec des conditions aux limites de Dirichlet

La figure 7.9 montre que, tout comme avec les conditions de Neumann, les 2 méthodes conduisent à des résultats qualitatifs similaires lorsque le système

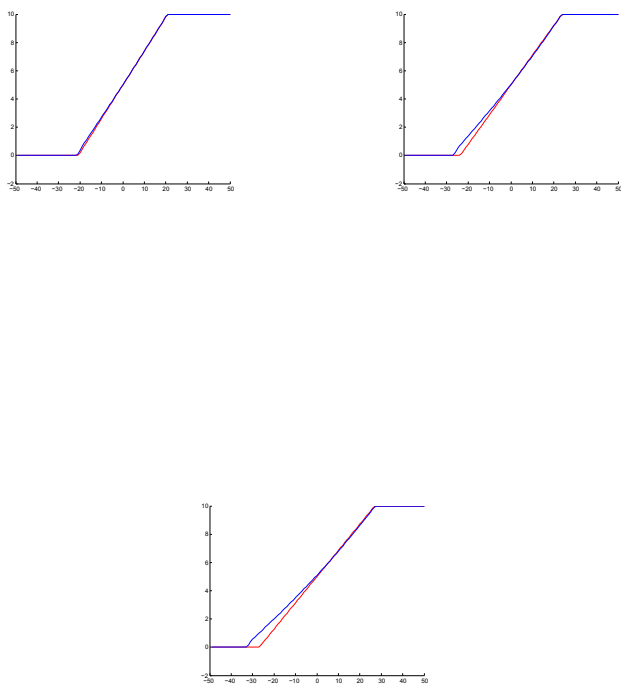


Figure 7.4: Evolution de l'interface obtenue à 1, 5, 10 jours avec MVF, $N=100$.

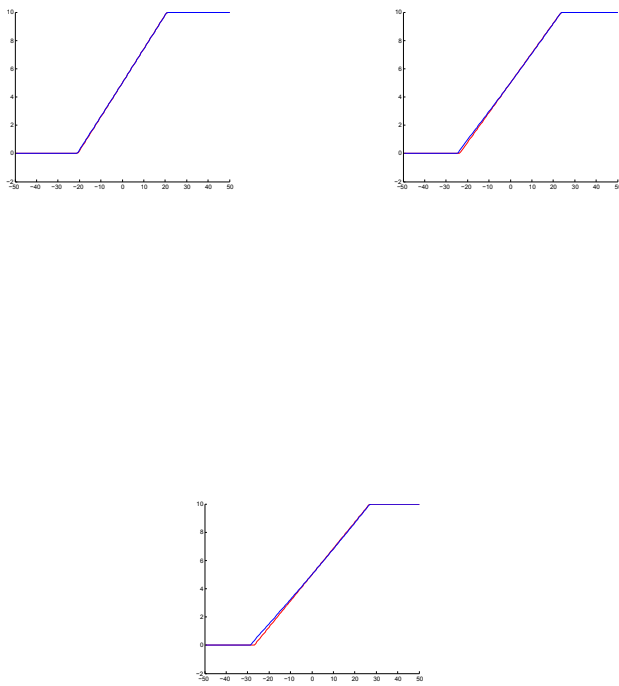


Figure 7.5: Evolution de l'interface obtenue à 1, 5, 10 jours avec MVF, $N=160$.

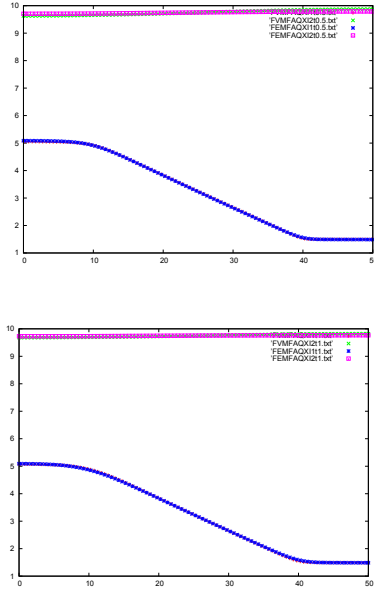


Figure 7.6: Comparaison entre MEF et MVF sans forçage extérieur. Les conditions aux limites sont celles de Neumann homogènes.

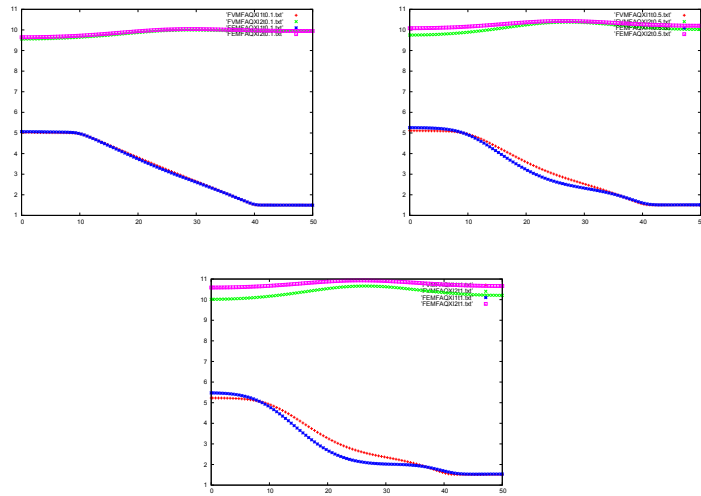


Figure 7.7: Comparaison entre MEF et MVF pour un scénario d'injection. Les conditions aux limites sont celles de Neumann homogènes.

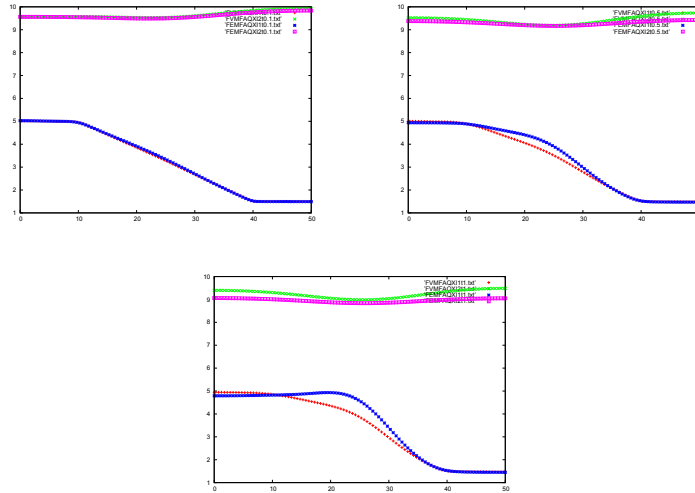


Figure 7.8: Comparaison entre MEF et MVF pour un scénario de pompage. Les conditions aux limites sont celles de Neumann homogènes.

évolue sans forçage extérieur et cela malgré les effets de la marée à gauche du domaine.

Dans les cas du pompage ou de l'injection, nous aboutissons aussi aux mêmes conclusions que précédemment, les effets des pompes et de l'injection sont moins forts pour MVF que pour MEF. Par ailleurs, le processus d'injection (ou de pompage) affecte globalement l'aquifère pour MEF alors que le changement est localisé autour de la zone d'injection (ou de pompage) pour MVF.

7.2 Impact des paramètres physiques

Dans cette section, nous allons utiliser le schéma élément fini pour illustrer l'impact des paramètres physiques sur le comportement des interfaces. Cette étape est incontournable car, si ces codes ont vocation à renseigner sur la localisation des interfaces afin de mieux adapter les pompes d'eau douce, il est essentiel de connaître suffisamment précisément les caractéristiques physiques du milieu telles que la porosité, la conductivité hydraulique ou la storativité afin de donner des informations exploitables.

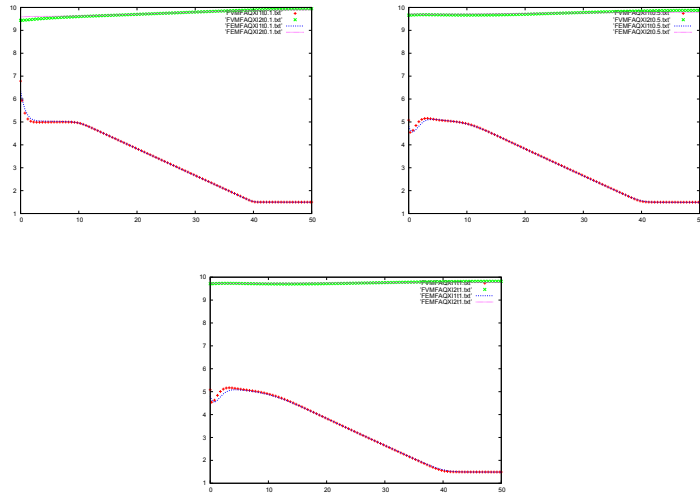


Figure 7.9: Comparaison entre MEF et MVF sans forçage extérieur. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet prenant en compte le phénomène des marées.

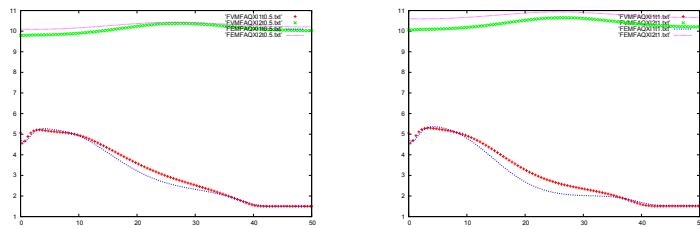


Figure 7.10: Comparaison entre MEF et MVF pour un scénario d'injection. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet prenant en compte le phénomène des marées.

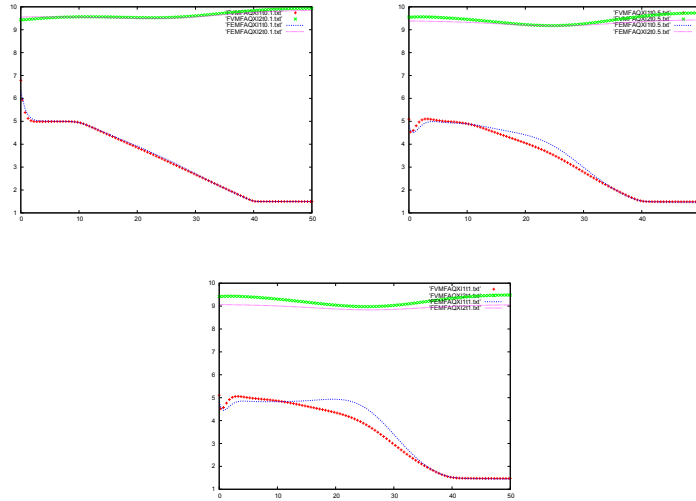


Figure 7.11: Comparaison entre MEF et MVF pour un scénario de pompage. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet prenant en compte le phénomène des marées.

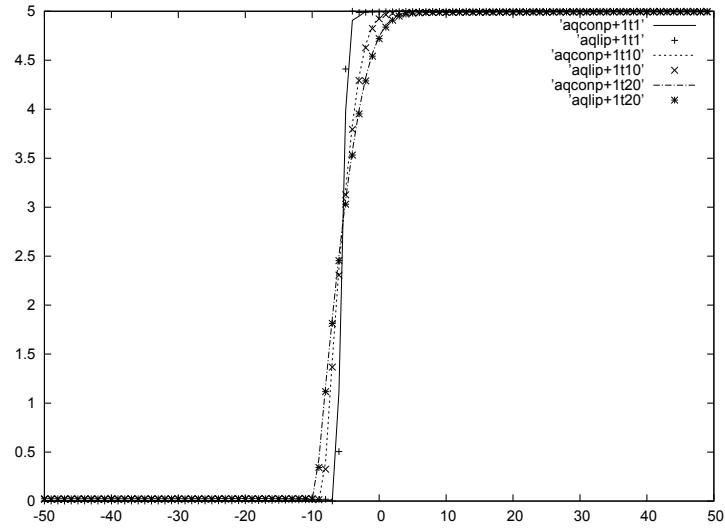
7.2.1 Porosité

Les tracés suivants (cf. Figure 7.12) montrent que, sans terme de forçage, la différence entre le cas de l'aquifère confiné et celui de l'aquifère libre est négligeable lorsque la porosité n'est pas trop faible ($\Phi = 1$, $\Phi = 0,3$). Pour $\Phi = 0,03$ la différence devient perceptible comme nous pouvons le voir dans la figure 7.13. Plus précisément, nous remarquons que cette différence est de plus en plus importante lorsque la porosité devient de plus en plus faible: Dans la figure 7.21, nous représentons sur le même tracé la différence pour les porosités suivantes $\Phi = 1$, $\Phi = 0,3$ et $\Phi = 0,03$. Pour $\Phi = 1$ et $\Phi = 0,3$, la différence est du même ordre que celui de la discrétisation en espace alors qu'il est 10 fois supérieur dans le cas de $\Phi = 0,03$.

7.2.2 Coefficient d'emmagasinement

Les figures suivantes sont consacrées aux aspects phénoménologiques liés à la compressibilité du sol. L'emmagasinement est caractérisé par le paramètre S_f . Intuitivement, plus S_f est important, plus le sol peut stocker de l'eau. Les modèles existants en général négligent le coefficient de stockage S_f . Nous allons regarder si cette hypothèse est légitime au cours d'un scénario d'injection d'eau puis au cours de celui du pompage d'eau douce: la Figure 7.15 correspond à un scénario d'injection. Puisque le sol est compressible ($S_f \neq 0$), il peut contenir plus d'eau, nous observons effectivement une sur-estimation de la hauteur de

[$\Phi = 1.$]



[$\Phi = 0.3$]

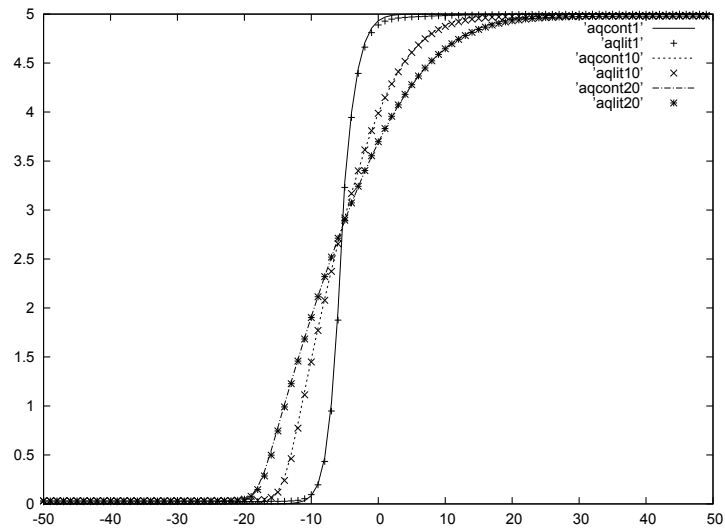


Figure 7.12: Comparaison de l'élévation de l'interface dans le cas d'un aquifère confiné (aqcont T) et celui d'un aquifère libre (aqlit T) pour différentes valeurs de la porosité.

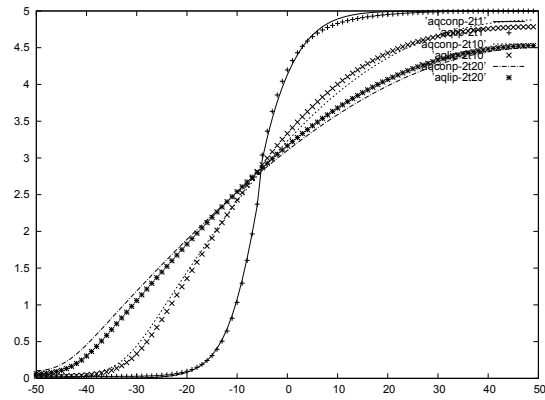


Figure 7.13: Comparaison de l'élévation de l'interface dans le cas d'un aquifère confiné (aqcontT) et celui d'un aquifère libre (aqitT) pour $\Phi = 0.03$.

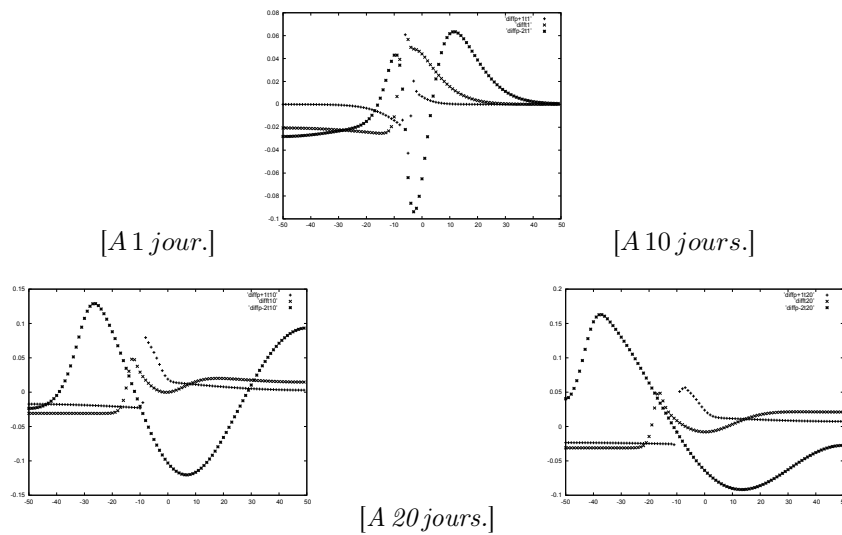


Figure 7.14: Différence entre les évolutions des interfaces dans le cas d'un aquifère confiné et celui d'un aquifère libre.

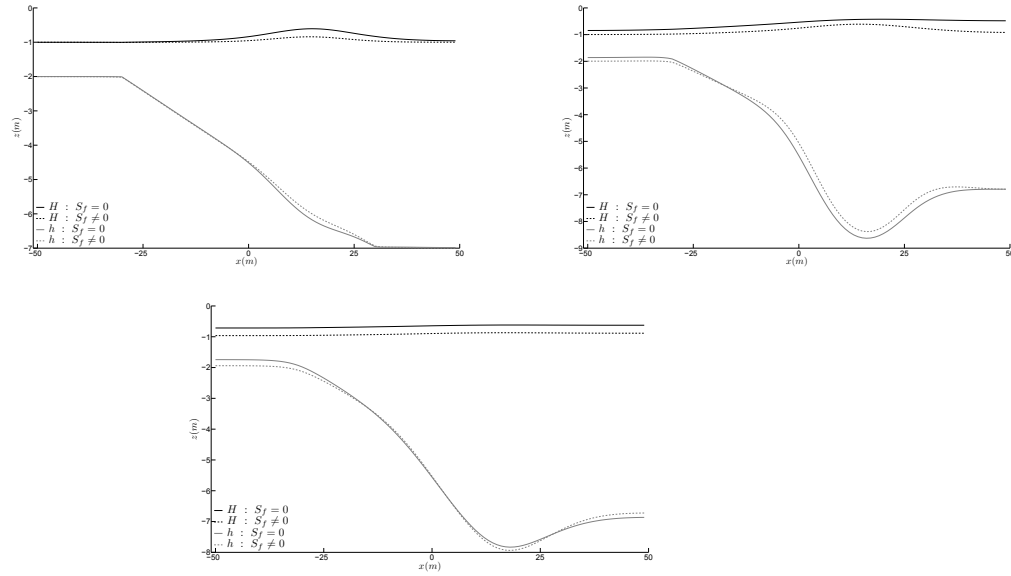


Figure 7.15: Comparaison de la profondeur des interfaces h and h_1 pour un sol compressible (lignes en pointillées, $S_f = 0.25 \neq 0$) et pour un sol incompressible ($S_f = 0$) durant un scénario d'injection. La séquence des résultats correspond aux temps $t = 0.1, 1, 4$ jours.

la nappe phréatique et une sous-estimation de la hauteur de l'interface pour la zone salée avec le modèle où la storativité est négligée ($S_f = 0$). Ces erreurs d'estimation persistent plus de trois jours après la fin de la phase d'injection. (Un tel processus d'injection est classiquement utilisé par les opérateurs pour faire baisser l'interface salée).

Ainsi négliger S_f produit une sur-estimation de l'impact du processus d'injection, en particulier dans la zone d'injection. La Figure 7.16 présente les sous/sur-estimations au cours d'un processus de pompage. Nous observons une dépression locale de la table d'eau et de l'apparition d'un cône salé.

7.2.3 Epaisseur des zones de transition

Nous comparons tout d'abord le modèle avec l'approche 'interface nette' ($\delta = 0$) à celui avec l'approche 'interface diffuse' ($\delta \neq 0$). Nous vérifions que pour un δ petit, les résultats des 2 expériences numériques coïncident (cf. Figure 7.17). Comme il a été souligné dans [38], la dispersion produit des effets non négligeables; en particulier, elle crée des pertes de charge qui réduisent la zone de l'aquifère occupée par l'eau salée (l'eau salée se rejetant de la zone de diffusion dans la mer) (cf. [35]). L'épaisseur de cette zone est caractérisée par le paramètre δ dans notre modèle. Nous allons examiner la possibilité de faire varier δ dans le domaine en mettant la zone de mélange plus épaisse du côté du

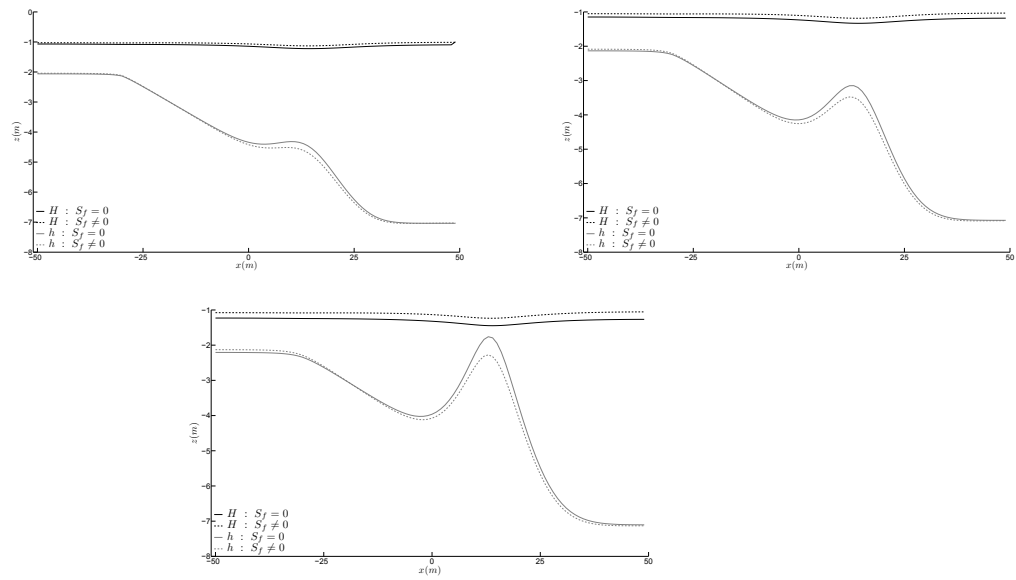


Figure 7.16: Comparaison de la profondeur des interfaces h and h_1 pour un sol compressible (lignes en pointillées, $S_f = 0.25 \neq 0$) et pour un sol incompressible ($S_f = 0$) durant un *scénario* de pompage. Le pompage est fait de manière constante en temps et par un puits de rayon $1m$ centré en $(x, y) = (15 m, 50)$. La séquence des résultats correspond aux temps $t = 1, 2, 3$ jours.

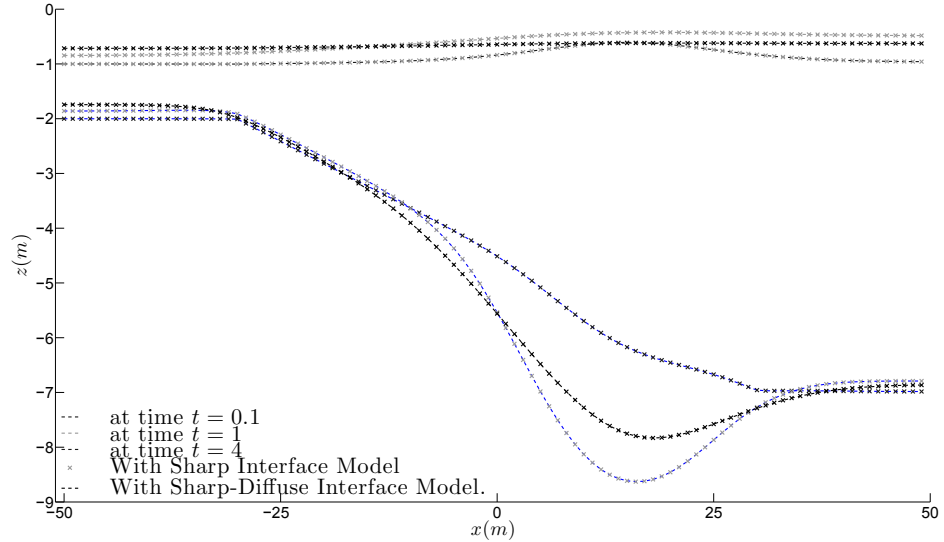


Figure 7.17: Compatibilité entre le modèle 'interface diffuse' ('dif') pour un δ petit, $\delta = 0.1 m$, et le modèle 'interface nette'. Une grande quantité d'eau est injectée durant un temps court (0.8 jour) en $(x, y) = (15 m, 50)$, les interfaces h et h_1 évoluent librement. La séquence des résultats correspond aux temps $t = 0.1, 1, 4$ jours.

rivage (à gauche de notre domaine). Nous imposons des conditions aux limites de Neumann homogènes à gauche du domaine afin d'observer l'évolution libre des interfaces compte tenu des rejets d'eau. Conformément à [38], nous observons dans la figure 7.18 que l'interface salée est moins élevée dans le cas d'une valeur plus grande de δ . Si $Max(\delta) = \mathcal{O}(1)$ on observe une différence de 2% au niveau de l'élévation des interfaces. De plus cet effet augmente avec le temps. Enfin, nous couplons le dernier phénomène avec les effets de marées. Les fluctuations de marée produisent des ondes de pression progressives dans les aquifères côtiers. Pour cette simulation, nous utilisons les paramètres donnés dans [38], après une remise à l'échelle de notre aquifère. Nous imposons une condition de Dirichlet en la frontière gauche $x = -50$ pour l'interface salée h . Le paramètre δ est calibré en utilisant la formule de l'amplitude de la zone de dispersion (eq. (2) dans [38]). Il est d'ordre un. Dans la figure 7.19, on observe les fluctuations des marées dans les eaux souterraines. Les oscillations apparaissent bien entendu pour les 2 modèles (avec $\delta = 0$ ou avec $\delta = \mathcal{O}(1)$). En vue de comparer les résultats entre les deux modèles, nous avons tracé aussi une solution de référence, ici dérivée de la formule analytique de [51]. La courbe obtenue à partir du modèle avec interface diffuse fit mieux la solution analytique. Cette observation est également confirmée à une autre échelle par la figure 7.20 (courbe 'acdeltah' : avec δ , solution de référence donnée par Ferris, courbe 'ssdeltah': sans δ).

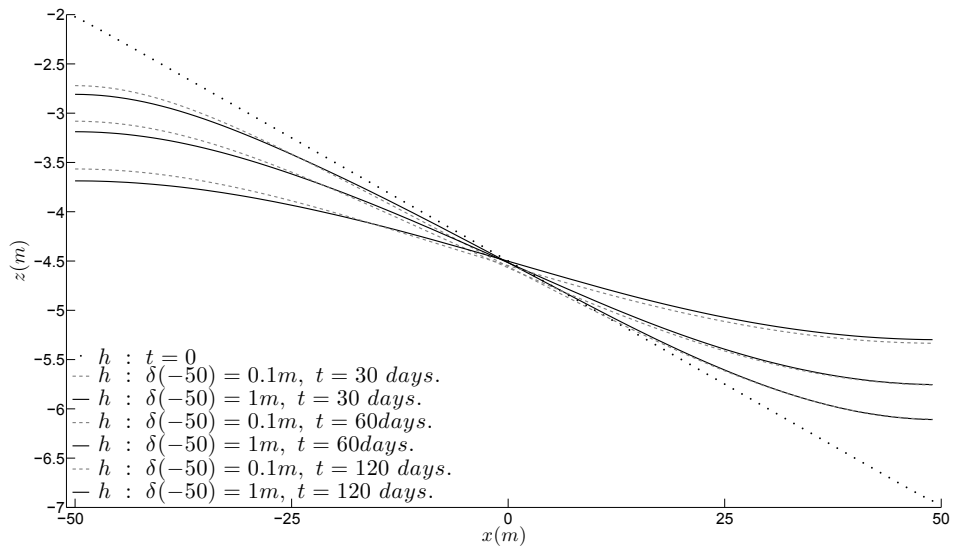


Figure 7.18: Effet de la largeur caractéristique de la zone de mélange : La zone de mélange étant plus épaisse sur le côté de la rive, nous testons avec $\delta(x) = \chi_{(-50,-20)}(x) + 0.1 \chi_{(10,50)}(x) + (0.4 - 0.03x) \chi_{(-20,10)}(x)$ (cas $\delta(-50) = 1$). Le résultat est comparé à celui correspondant à une mince zone de mélange constante $\delta = 0, 1$ (cas $\delta(-50) = 0, 1$). Les résultats sont couplés correspondant aux simulations aux $t = 30, 60, 120$ jours. Pour les deux simulations, l'interface est initialement située sur la diagonale. Elle tend alors vers une ligne horizontale en raison des effets de gravité. Sur le côté gauche on observe que le mélange réduit la zone de l'aquifère occupée par l'eau salée.

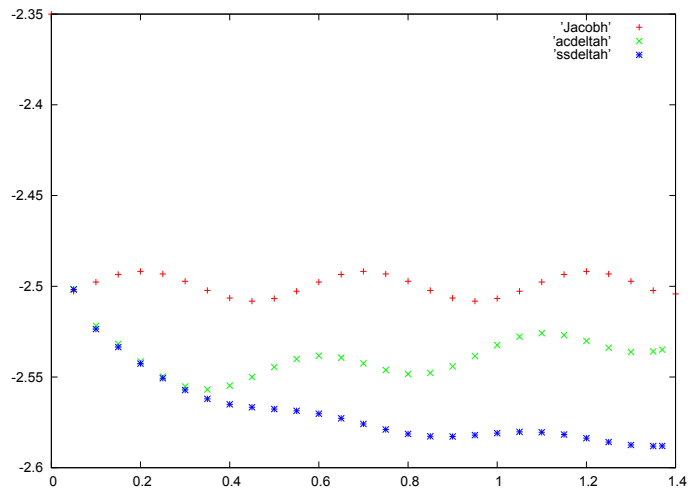


Figure 7.19: Effet de la largeur caractéristique de la zone de mélange avec des conditions oscillantes de Dirichlet à gauche du domaine. On a tracé l'interface h après un cycle de marée pour le modèle avec δ , celui sans δ et la solution de référence donnée par Ferris.

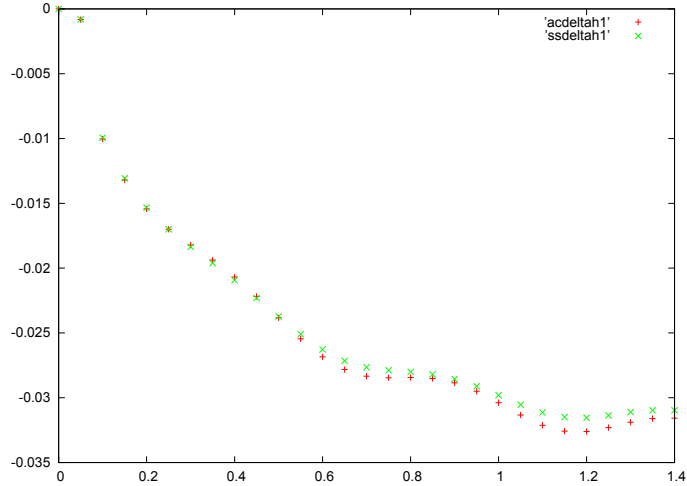


Figure 7.20: Effet de la largeur caractéristique de la zone de mélange avec des conditions oscillantes de Dirichlet à gauche du domaine. On a tracé l'interface h_1 après un cycle de marée pour le modèle avec δ , celui sans δ .

7.3 Comparaison entre aquifère confiné et aquifère libre

Pour conclure cette série de comparaison, nous proposons une simulation illustrant la différence de comportement de l'interface selon qu'on considère un aquifère confiné ou un aquifère libre, en particulier dans un scénario de pompage. Nous soulignons que dans la section portant sur l'impact de la porosité, les tests ont montré que, sans forçage extérieur, la différence entre les 2 types (aquifère confiné - aquifère libre) est perceptible pour des porosités faibles. Les résultats ci-dessous (cf. figure 7.21) montrent que, même pour des porosités non faibles et dans un scénario de pompage, l'évolution de l'interface entre la zone d'eau douce et celle d'eau salée diffère selon le type d'aquifères.

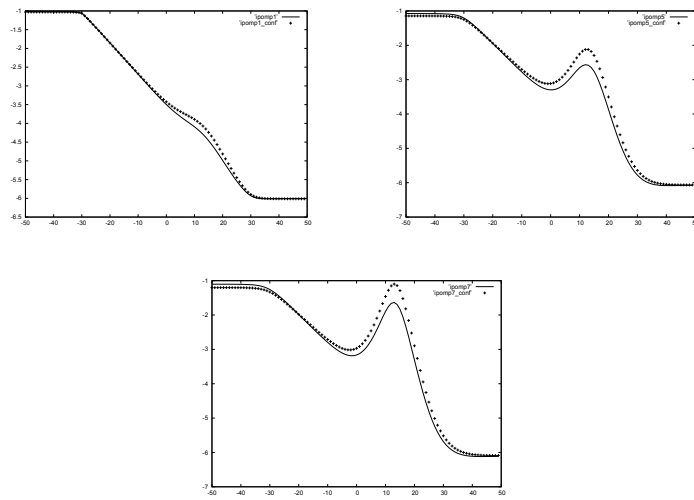


Figure 7.21: *Comparaison de l'évolution de l'interface pour un aquifère confiné et un aquifère libre aux temps $t = 1, 5, 7$ jours.*

Chapter 8

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme précis et efficace pour résoudre le problème d'intrusion marine. Cet algorithme dérive du modèle découlant de l'approche 'interface diffuse' qui implique un terme diffusif supplémentaire dans les edp's gouvernant l'évolution des inconnues et qui permet de garantir un principe du maximum permettant en outre de préserver la hiérarchie entre les hauteurs des interfaces. Ces deux raisons nous ont conduit à privilégier les méthodes des éléments finis pour la résolution numérique du problème plutôt que la méthode des volumes finis qui semble, néanmoins, mieux adaptée au problème dans le cas de l'approche avec 'interface nette' (car ce schéma préserve le principe du maximum). Nous avons fait l'analyse numérique des schémas semi-implicites en temps pour les 2 types d'aquifère en établissant des théorèmes d'estimation d'erreur, montrant que la méthode P_k -Lagrange est d'ordre k en espace et d'ordre 1 en temps sous une condition de stabilité entre le pas d'espace et le pas de temps. Ce résultat a été prouvé en utilisant la régularité de la solution spécifique au problème, plus précisément la régularité $L^4(\Omega_T)$ établie pour les gradients des inconnues. Les simulations numériques montrent que, même si le principe du maximum n'a pas été prouvé pour le schéma éléments finis, les solutions approchées vérifient ce principe, ce qui résulte du fait qu'à la base, le modèle avec l'approche 'interface diffuse' satisfait ce principe. Les comparaisons entre les approximations éléments finis et volumes finis illustrent que les 2 méthodes conduisent à des résultats qualitatifs similaires lorsque le système évolue sans forçage extérieur. En revanche, avec la méthode volume fini (MVF), les interfaces semblent être affectées localement par l'injection d'eau douce (ou le pompage) et les effets sur les interfaces sont moindres comparés à ceux observés avec la méthode élément fini (MEF). Nous avons utilisé le schéma élément fini pour illustrer l'impact des caractéristiques hydrogéologiques du milieu poreux sur le comportement des interfaces, telles que la porosité et le coefficient d'emménagement. Enfin nous avons comparé numériquement les deux approches 'interface nette' et 'interface diffuse'; les simulations montrent que l'existence même de cette zone de transition impacte clairement les évolutions des interfaces et spécialement de l'interface salée, permettant ainsi d'obtenir des

résultats plus conformes à la réalité.

Cette conclusion entraîne naturellement les perspectives à court terme : à savoir l'étude complète du schéma volume fini avec un résultat de convergence dans le cas d'un aquifère confiné et d'un aquifère libre et la résolution théorique et numérique des problèmes d'identification des paramètres. A plus long terme, ce code a vocation à être couplé à d'autres problématiques telles que la contamination de la nappe phréatique ou les problèmes de crue des rivières.

Bibliography

- [1] A. Abudawia, C. Rosier., Numerical analysis for a seawater intrusion problem in a confined aquifer, *Math. and Comp. in Simulations*, April 3, 2014.
- [2] A. Abudawia, H.J. Rodrigues, C. Rosier, Finite element approximation for a seawater intrusion problem in a free aquifer, in preparation .
- [3] P. Ackerer, A. Younes, *Efficient approximations for the the simulation of density driven flow in porous media*, *Adv. Water Res.*, Vol. 31, 15–27, 2008.
- [4] Ahmad Al Biter, thèse, Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires, institut national polytechnique de Toulouse, 2007.
- [5] G. Alducin, J. Esquivel-Avila, L. Reyes-Avila, Steady filtration problems with seawater intrusion : Variational analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 151, pp. 13-25, 1998.
- [6] L. F. Athy, Density, porosity and compactation of sedimentary rocks, *Bull.Amer.Assoc. Petrol. Geol.*, 14, 1 - 24, 1930.
- [7] M. Alfaro, D. Hilhorst, M. Hiroshi, *Optimal interface width for the Allen-Cahn equation*, *RIMS Kokyuroku*, 1416, 148–160, 2005.
- [8] M. Alfaro, D. Hilhorst, M. Hiroshi, *Optimal interface width for the Allen-Cahn equation*, *RIMS Kokyuroku*, 1416, 148–160, 2005.
- [9] M. Alfaro, P. Alifrangis, *Convergence of a mass conserving Allen-Cahn equation whose Lagrange multiplier is nonlocal and local*, *Interfaces Free Bound.*, to appear. *Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 6:729–747, 1996.
- [10] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, *Math. Z.*, Vol. 1, 311–341, 1983.
- [11] H. W. Alt, C. J. Van Duijn, A stationary flow of fresh and salt groundwater in coastal aquifer, *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, Vol. 14 No. 8 pp. 625-656, 1990.

- [12] H. W. Alt, C. J. Van Duijn, A free boundary problem involving a cusp. Part I: global analysis, *European Journal of Appl. Math.* 4, 39-63, 1993.
- [13] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani. *Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 6:729–747, 1996.
- [14] J.-P. Aubin. *Analyse fonctionnelle appliquée*, volume 1 et 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [15] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G. A. Pozzi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : Existence and uniqueness theorem, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, Vol. 4, pp. 1-82, 1973.
- [16] C. Baiocchi, V. Comincioli, L. Guerri, G. Volpi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : A numerical approach, *Calcolo* 10, pp. 1-85, 1973.
- [17] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier, New York, 1972.
- [18] J. Bear, A. H-D. Cheng, S. Sorek, D. Ouazar, I. Herrera (Eds.), *Seawater Intrusion in Coastal Aquifers-Concepts, Methods and Practices*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1999.
- [19] J. Bear, J. Kapular, A numerical solution for the movement of an interface in a layered coastal aquifer, *Journal of Hydrology*, Vol. 50, pp. 273-298, 1981.
- [20] J. Bear, A. Verruijt, *Modelling groundwater flow and pollution*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
- [21] G. Bellettini, L. Bertini, M. Mariani, M. Novaga, Convergence of the one-dimensional Cahn- Hilliard equation, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 44(5), 3458- 3480, 2012.
- [22] A. Bensoussan, J. L. Lion, G. Papanicoulou, *Asymptotic analysis for periodic structure*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [23] C. H. Berestycki, A. Bonnet, C. J. Van Duijn, Flots stationnaires d'eau sale et d'eau douce en milieux poreux dans des couches aquifères, *C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I* 317, 255-260. 1993.
- [24] A. J. Bray, Theory of phase-ordering kinetics, *Adv. in Physics*, Vol. 43(3), 357- 459, 1994.
- [25] D. Ouazar, I. Elmahi, Simulation of salt-freshwater interface in coastal aquifers using finite volume method on unstructured meshes, *Proceedings of finite volume for complex applications II*, Ed. Hermes, pp. 525-532, Germany, 1999.

- [26] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1991.
- [27] R.L. Burden et J.D. Faires. *Numerical Analysis*. PWS Publishing Company, 1993.
- [28] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, *Free energy of non-uniform systems. I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys., 28, 258–267, 1958.
- [29] J.Céa. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14: 354–444, 1964.
- [30] S. Charmonman, A solution of the pattern of fresh-water flow in an unconfined coastal aquifer, Journal of Geophysical Research, Vol. 70, No. 12, 1965.
- [31] Z. Chen, R. Ewing, *Mathematical analysis for reservoir models*, SIAM J. Math. Anal., 30(2), pp 431–453, 1999.
- [32] A. J. Chorin. Numerical solution of the Navier - Stokes equations. Math. Comp., 22:745–762, 1968.
- [33] C. Choquet, J. Li, C. Rosier, *Global existence for seawater intrusion models : Comparison between sharp interface and sharp-diffuse interface approaches*, EJDE, Vol. 2015 (2015), No. 126, pp. 1–27.
- [34] C. Choquet, C. Rosier, L. Rosier, *Uniqueness for a strongly coupled system of quasi-linear parabolic equations issuing from a sea intrusion problem*, in preparation.
- [35] C. Choquet, M. M. Diédhiou, C. Rosier, Derivation of a sharp-diffuse interface model in a free aquifer. Numerical simulations, à paraître dans SINP, 2015.
- [36] C. Choquet, M. M. Diédhiou, C. Rosier, Mathematical analysis of a sharp-diffuse interfaces model for seawater intrusion, to appear in J. Diff. Equations, 2015.
- [37] C. Choquet, *Parabolic and degenerate parabolic models for pressure-driven transport problems*, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 20, 543–566, 2010.
- [38] H.H. Cooper, *A hypothesis concerning the dynamic balance of fresh water and salt water in a coastal aquifer*, U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 1613-C, 1–12, 1964.
- [39] R. Dautray et J. - L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1985.
- [40] M. M. Diédhiou, Thèse de l’Université de La Rochelle, préprint.

- [41] T. Doppler, H.J. Hendricks Franssen, H.P. Kaiser, U. Kuhlmann and F. Stauffer, *Field evidence of a dynamic leakage coefficient for modelling river-aquifer interactions*, J. of Hydrology, Vol. 347, 177–187, 2007.
- [42] M. Dubé, M. Rost, K. R. Elder, M. Alava, S. Majaniemi, and T. Ala-Nissila, *Liquid Conservation and Nonlocal Interface Dynamics in Imbibition*, Phys. Rev. Lett., Vol. 83 (8), 1628–1631, 1999.
- [43] C. J. van Duijn, D. Hilhorst, *On a Doubly Nonlinear Diffusion Equation in Hydrology*, Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl., Vol. 11, no. 3. pp. 305-333, (1987).
- [44] J. Dupuit, *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux couverts et à travers les terrains perméables*, Dunod, Paris, 1863.
- [45] H. L. Essaid, *A quasi-three dimensional finite difference model to simulate freshwater and salt water flow in layered coastal aquifer systems*, U.S. Geological survey water resources investigations, Report 90-4130. Menlo Park, California, 1990.
- [46] H. L. Essaid, *A Multilayered Sharp Interface Model of Coupled Freshwater and Saltwater Flow in Coastal Systems: Model Developpement and Application.*, Water Res. Res., Vol. 26, 1431–1454, 1990.
- [47] D. Esselaoui, Y. Loukili, A. Bourgeat, *Perfection of the simulation of freshwater/saltwater interface motion, Recent advances in problems of flow and transport in porous media*, eds. J.M. Crolet and M.E. Hatri, pp. 117-129, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [48] Alexandre Ern, Jean-Guermond, *éléments finis : théorie, applicationns, mise en oeuvre*, Mathématiques Applications 36. Springer. Smal.
- [49] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *Finite volume methods*, vol. 3, Handbook of numerical analysis, 2000.
- [50] C. W. Fetter, *Position of saline water interface beneath oceanic islands*, Water Resour. Vol. 8, No. 5, 1972.
- [51] J. G. Ferris, *Cyclic fluctuations of water level as a basis for determining aquifer transmissibility*, Int. Assoc. Sci. Hydrology Publ., Vol. 1, 97–101, 1951.
- [52] J. Hadamard . *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. MSM . Hermann, Paris, 1932 .
- [53] A. Hidani, *Modélisation des écoulements diphasiques en milieux poreux à plusieurs types de roches*. Thèse de Doctorat, Université de Saint-Atienne, 1993.

- [54] P. S. Huyakorn, P. F. Anderson, J. W. Mercer, H. O. White, Salt intrusion in aquifers : developement and testing of three dimensional finite element model, *Water. Resou. Res.*, Vol. 23, pp. 293-319, 1987.
- [55] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*. Mathématiques & Applications, 22, Springer, 1996.
- [56] C.W. Gear. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equation. Prentice Hall, 1971.
- [57] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two - or three- dimensional cavity flows. *J. Comput. Phys.*, 30:76 - 95, 1979.
- [58] R. E. Glover, The pattern of freshwater flow in a coastal aquifer, *J. of Ground Water Resour.*, Vol. 64, pp. 439-475, 1959.
- [59] R.E. Grundy, C. J. Van Duijn, The fresh-salt water interface in a semi-pervious aquifer, *Applicable Analysis* 38, 69-96, 1990.
- [60] A. Jungel, A. Unterreiter, Discret maximum and minimum principles for finite element approximations of non-monotone elliptic equations, *Numerische Mathematik*, Vol. 99, Issue 3, pp 485-508, 2005.
- [61] H. G. Keulegan, An example report on model laws for density curent, U.S. Natl. Bur. of Stand., Gaitherburg, Md, 1954.
- [62] J.Li, Analyse mathématique de modèles d'intrusion marine dans les aquifères côtiers, Thèse, Univ du Littoral Côte d'Opale, 20.oct.2015.
- [63] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. 1, Dunod, 1968. Livre de éléments finis : théorie, applicationns, mise en oeuvre. Alexandre Ern, Jean-Guermond.
- [64] P. Marion, K. Najib, C. Rosier, *Numerical simulations for a seawater intrusion problem in a free aquifer*, *Appl. Numer. Math.*, Vol. 75, 48-60, 2014.
- [65] G. de Marsily. Cours d'Hydrogéologie. Université paris VI. Septembre 2004.
- [66] Maxime Nicolas, group écoulements de particules IUSTI , écoulements dans les milieux poreux, école doctorale mécanique, physique et modélisation, université de provence, marseille 2003.
- [67] [Members.unine.ch / philippe.renard / hydrogen / node 20 .html](http://Members.unine.ch/philippe.renard/hydrogen/node20.html). 27- 08-2002.

- [68] N. G. Meyers, An Lp-estimate for the gradient of solution of second order elliptic divergence equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Vol. 17, pp. 189-206, 1963. *Modèles Mathématiques En Hydrogéologie*. Série coordonnée par: Jean Pierre Carbonnel, université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Radu Drobot, université Technique de Construction, Bucarest, 1995 .
- [69] K. Najib, C. Rosier, *On the global existence for a degenerate elliptic-parabolic seawater intrusion problem*, *Math. Comput. Simulation*, Vol. 81 Issue 1, 2282–2295, 2011.
- [70] J. Necas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16: 305 - 326, 1962.
- [71] J.F. Polo, F. J. R. Ramis, Simulation of salt water - Fresh water interface motion, *Water Resources Research*, Vol. 19, No. 1, pp. 61-68, 1983.
- [72] O. Pironneau, F. Hecht, A. Le Hyaric, *FreeFem++ version 2.15-1*, <http://wwwfrefem.org/ff++/>
- [73] E. V. Radkevich, *On conditions for the existence of classical solution of the modified Stefan problem (The Gibbs–Thomson law)*, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, Vol. 75, 221–246, 1993.
- [74] C. Rosier, L. Rosier, *Well-posedness of a degenerate parabolic equation issuing from two-dimensional perfect fluid dynamics*, *Applicable Anal.*, Vol. 75 (3-4), pp 441–465, 2000.
- [75] J. Rubinstein, P. Sternberg, J.B. Keller, Front interaction and non-homogeneous equilibria for tristable reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 53, 1669- 1685, 1993.
- [76] J. Rubinstein, P. Sternberg, J.B. Keller, Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening, *SIAM Appl. Math.*, Vol. 49, 116- 133, 1989.
- [77] U. Shamir, G. Dagan, Motion of the seawater interface in coastal aquifers : A numerical solution, *Water Resour. Res.* 7(3), (1971) 644-657.
- [78] M.Saïd. Bir. Mémoire de magistère : Ecoulements au travers les milieux poreux. Approche stochastique, faculté du génie de la construction département de génie civil, 2012.
- [79] P. Saramito, N. Roquet, *Rheolef users manual*. LMC-IMAG, 2002. <http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/usrman.ps.gz>
- [80] E. Shimborski, Encadrement d'une frontière libre relative à un problème d'hydraulique. *Boll.Unione Mat. Ital.* B12,66-7, 1975.
- [81] S. Shmorak, A. Murcado, Upconong of fresh water-sea water interface below pumping wells, field study, *Water Resour.*, Vol. 5, No. 6, 1969.

- [82] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T, B)$, Ann. Mat. Pura Appl., vol. 146 (4), 65–96, 1987.
- [83] L. J. Slooten, J. Hidalgo, J. Carrera, Parameter estimation in density dependent groundwater flow and solute transport modelling, 17th Salt Water Intrusion Meeting, Delft, Netherlands, 6-10 May 2002.
- [84] P. Sonneveld, CGS : a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 52, pp. 10-36, 1989.
- [85] G.Strang. Variational crimes in the finite element method. Dans A.K.Aziz, éditeur, The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 1972.
- [86] N-Z Sun, Inverse problems in groundwater modelling, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland, 1994.
- [87] N-Z Sun, W. G. Yeh, 1990, Coupled inverse problems in groundwater modelling 1. Sensivity analysis and parameter identification, Water Resources Research, Vol. 26, pp. 2507-2525.
- [88] L.A. Peletier, C. J. Van Duijn, A boundary layer problem in fresh-salt groundwater flow, Quart. J. Mech. Appl. Math. 45, 1-24, 1992.
- [89] M. H. Tber, M. E. Talibi, A finite element method for hydraulic conductivity identification in a seawater intrusion problem, Computers & Geosciences 33 (2007) 860–874.
- [90] M. H. Tber, M. E. Talibi, D. Ouaraza, Parameters identification in a seawater intrusion model using adjoint sensitive method , Math. Comput. Simul. 77 (2008), pp 301-312.
- [91] M. H. Tber, M. E. Talibi, D. Ouaraza, Identification of the Hydraulic Conductivities in a Saltwater Intrusion Problem, J. Inv. Ill-Posed Problems 15 (2007), 1–20.
- [92] M. E. Talibi, M. H. Tber, *Existence of solutions for a degenerate seawater intrusion problem*, EJDE, Vol. 72, pp 1-14, 2005.
- [93] M. H. Tber, Analyse Mathématique et Simulation Numérique de Problèmes Directs et Inverses Issus d’un Modèle d’Intrusion Marine dans les Aquifères Côtiers, Phd, Université Cadi Ayyad , Faculté des Sciences Semlalia Mar-rakech, April 21, 2006.
- [94] J. C. Van Dam, P. C. Sikkema, Approximate solution of the problem of the shape of the interface in a semi-confined aquifer, Journal of Hydrology, Vol. 56, pp. 221-237, 1982.

- [95] P. Van Der Veer, Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation, *Journal of Hydrology*, Vol. 34, pp. 1-11, 1977.
- [96] P. Van Der Veer, Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation, *Journal of Hydrology*, Vol. 35, pp. 271-278, 1977.
- [97] P. Van Der Veer, Exact solution for two dimensional groundwater flow problems involving a semi-previous boundary, *Journal of Hydrology*, Vol. 37, pp. 159-168, 1978.
- [98] H. Van der Vorst, Bi-CGSTAB : a fast smoothly converging variant of Bi-CG for the somution of non-symmetric linear systemes, *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, Vol. 13, pp. 631-644, 1992.
- [99] V. N. Vappicha, S. H. Nagaraja, An approximate solution for the transient interface in a coastal aquifer, *J. Hydrol.*, Vol. 31, pp. 161-173.
- [100] A. Verruijt, A note on the Ghiber-Herzberg formula, *IASH bull.*, 13, pp. 43-45, 1968.
- [101] C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, 2002.
- [102] C. I. Voss, SUTRA: A finite element simulation model for saturated-unsaturated fluid density dependent groundwater flow with energy transport of chemically-reactive simple-species transport, *U. S. Geolg. Sur. Water. Resour. Invest.*, 84-4369, 409.
- [103] J. E. Warren, H. S. Price, Flow in heterogeneous porous media, *Society of Petroleum Engineering Journal*, pp. 153-169, 1967.
- [104] R. Willis, B. A. Finney, Planning model for optimal control of saltwater intrusion, *J. Water. Resour. Planning Management*, ASCE, Vol. 114, pp. 163-178, 1988.
- [105] J. L. Wilson, A. Da Costa, finite Element Simulation of A Saltwater/Freshwater Interface With Indirect Toe Tracking, *Water Resour. Research*, Vol. 18, No. 4, pp. 1069-1080, 1982.
- [106] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Part 1, Springer Verlag, 1986.