



CONTRIBUTION À L'ANALYSE DES DONNÉES FLOUES

Henri Gwét

► To cite this version:

Henri Gwét. CONTRIBUTION À L'ANALYSE DES DONNÉES FLOUES. Statistiques [math.ST].
Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé, 1998. Français. NNT : . tel-01360542

HAL Id: tel-01360542

<https://theses.hal.science/tel-01360542>

Submitted on 9 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M^{le} 96T683



UNIVERSITY OF YAOUNDE I

Faculty of Sciences
Department of Mathematics

THESE

présentée à l'Université de Yaoundé I pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

Spécialité: MATHÉMATIQUES

CONTRIBUTION À L'ANALYSE DES DONNÉES FLOUES

par

Jean Henri GWÉT

Soutenue le 13 Février 1998 devant le jury composé de :

M.	Gérard	MICHEL	Président
MM.	Nicolas	ANDJIGA	
	Jean-Paul	AURAY	
	Gérard	DURU	
	Joël	MOULEN	
	Jean	WOUAFO KAMGA	
MM.	Jean-Paul	AURAY	} Rapporteurs
	Gérard	DURU	
	Joël	MOULEN	

On nous accordera ... sans peine que toute opération par laquelle on compte des objets matériels implique la représentation simultanée de ces objets, et que, par là même, on les laisse dans l'espace. Mais cette intuition de l'espace accompagne-t-elle toute idée de nombre, même celle d'un nombre abstrait?

Henri BERSON

A notre Jury de Thèse,

Au terme de cette thèse, je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté juger mon travail.

Au Professeur Joël MOULEN,

Tu m'as fait confiance en dirigeant mes travaux de recherche. Sois assuré de ma profonde reconnaissance.

Au Professeur Gérard DURU,

Tu m'as accueilli au sein de ton équipe. Ta démarche fondamentalement pluridisciplinaire m'a permis de m'exprimer et de réaliser ce travail. En dirigeant cette thèse, tu m'as adressé de nombreuses remarques et critiques constructives qui ont permis d'améliorer mon travail. Je te remercie très sincèrement de m'avoir donné la possibilité de mener à bien mes travaux de recherche.

Au Professeur Pierre CAZES,

Vous m'avez encouragé dans mes travaux de recherche par vos conseils et votre documentation.

Au Professeur Jean-Pierre BENZÉCRI,

Vous m'avez donné le goût de la pratique statistique. Vous avez conduit mes premiers pas de chercheur. Trouvez dans ce travail, toute la reconnaissance de l'élève à son maître.

Au Professeur Gérard MICHEL,

Vous m'avez réservé un excellent cadre de travail qui m'a permis de terminer dans de bonnes conditions mon travail de thèse.

Au Professeur Jean RIONDET,

Je vous remercie pour votre aide et vos encouragements.

A toute l'équipe de l'URA 934,

Vous m'avez accueilli avec joie dans votre équipe. Par votre soutien matériel et moral, j'ai pu terminer mon travail de thèse. Je remercie tout particulièrement Madame Colette TERRENOIRE, Madame Marcelle BARD, le Professeur Michel LAMURE et le Professeur Jean Paul AURAY pour leurs disponibilités.

*Une pensée va à ceux des miens qui ont su me
supporter matériellement et moralement lors de la
réalisation de ce travail, et tout particulièrement à
A dèle et notre bout de vie Carole.*

Sommaire

Chapitre 0. Introduction.	11
---------------------------	----

Chapitre 1. Sous-ensemble flou	20
--------------------------------	----

1.1. Fonction d'appartenance.....	21
1.1.1. <i>Appartenance nette</i>	21
1.1.2. <i>Appartenance floue</i>	23
1.2. Opérations et Caractérisations.	25
1.2.1. <i>Mesures floues</i>	25
1.2.2. <i>Opérations sur les sous-ensembles flous</i>	26
1.2.3. <i>Caractéristiques d'un sous-ensemble flou</i>	28
1.2.4. <i>Relation floue</i>	32
1.3. Langage parallèle et modificateurs linguistiques.....	35
1.3.1. <i>Langage flou</i>	35
1.3.2. <i>Modificateurs linguistiques</i>	38

2.1. Opérateurs flous	43
2.1.1. Dualité.	43
2.1.2. Opérateurs de conjonction et de disjonction.	44
2.1.3. Opérateurs de pseudo-division et de pseudo- soustraction	49
2.1.4. Opérateurs de maximisation et de minimisation.	52
2.1.5. Opérateur d'équivalence	54
2.1.6. Opérateur de négation.	55
2.1.7. Quelques propriétés des opérateurs flous	56
2.2. Distribution de possibilité conditionnelle	62
2.2.1. Mesure floue et mesure de possibilité.....	62
2.2.2. Conditionnement suivant Hisdal.....	66
2.2.3. Conditionnement suivant Dubois-Prade	66
2.2.4. Conditionnement suivant Nguyen.....	67
2.3. Distribution conditionnelle normalisée.....	68
2.3.1. Construction	68
2.3.2. Unicité.....	70
2.3.3. Quelques propriétés du conditionnement normalisé.....	71
2.3.4. Cas de la conjonction min	73
2.3.5. Cas d'une conjonction archimédienne.	75
2.3.6. Exemple.....	76
2.4. Opérateurs flous et différence symétrique	77
2.4.1. Généralités.....	77
2.4.2. Différence.....	78
2.4.3. Différence symétrique	81

3.1. Applications floues	84
3.1.1. <i>Applications nettes</i>	84
3.1.2. <i>Propriétés des images et images réciproques nettes</i>	86
3.1.3. <i>Applications floues</i>	87
3.1.4. <i>Propriétés des images et images réciproques floues</i>	96
3.2. Distance entre parties floues.	99
3.2.1. <i>Distance de Tchebychev généralisée</i>	99
3.2.2. <i>Distance du cardinal de la différence symétrique</i>	105
3.3. Description nette	108
<i>Affectation</i>	108
3.3.1. <i>Évaluation quantitative</i>	109
3.3.2. <i>Contingence</i>	110
3.3.3. <i>Dépendance entre caractères</i>	111
3.3.4. <i>Proximités</i>	111
3.4. Description floue.....	112
3.4.1. <i>Variables statistiques floues</i>	112
3.4.2. <i>Différentiel et affectation</i>	113
3.4.3. <i>Descripteur et signification</i>	115
3.4.4. <i>Observation floue</i>	117
3.4.5. <i>Évaluation qualitative</i>	118
3.4.6. <i>Correspondances possibilistes</i>	120
3.4.7. <i>Association floue</i>	122
3.4.8. <i>Proximité entre modalités</i>	127

4.1. Information possibiliste.	132
4.1.1. <i>Information de Wiener-Shannon</i>	132

4.1.2. Information généralisée de Kampé De Fériet.	134
4.1.3. Information et mesure de possibilité.	138
4.2. Dépendance informationnelle	144
4.2.1. Dépendance entre modalités.....	145
4.2.2. Dépendance entre caractères	147

Chapitre 5. Pratique de la statistique floue	150
--	-----

5.1. Codage flou.....	151
5.1.1. Association floue.....	151
5.1.2. Questionnaire flou.	155
5.1.3. Normalisation.	159
5.1.4. Dédoublment flou.....	161
5.2. Analyse graphique.	163
5.2.1. Sémantogramme.	163
5.2.2. Représentation graphique d'un caractère flou.....	170
5.3. Proximités et dépendances.....	172
5.3.1. Distance entre sous-ensembles flous.	172
5.3.2. Distances sur un tableau de description flou.	175
5.4. Similarité et analyse différentielle.	178
5.4.1. Similarité.....	178
5.4.2. Analyse différentielle.	180
5.5. Application à la pédiatrie.	186
5.5.1. Les données.....	187
5.5.2. L'analyse.....	197

Chapitre 6. Conclusion	215
------------------------	-----

Chapitre 7. Annexe A: Théorie des treillis	218
7.1. Treillis.....	219
7.1.1. <i>Axiomatique</i>	219
7.1.2. <i>Dualité</i>	222
7.1.3. <i>Ensemble ordonné</i>	224
7.1.4. <i>Diagramme de Hasse</i>	227
7.1.5. <i>Bornes et compléments</i>	230
7.2. Treillis particuliers.....	232
7.2.1. <i>Treillis complets</i>	232
7.2.2. <i>Treillis modulaires</i>	233
7.2.3. <i>Treillis distributif</i>	235
7.3. Groupoïde.	240
7.3.1. <i>Treillis multiplicatif</i>	240
7.3.2. <i>Groupoïde résiduel réticulé</i>	245
Chapitre 8. Annexe b: Tableau de données	249
Chapitre 9. Bibliographie.	258
Chapitre 10. Index	272

Chapitre 0

0. Introduction.

Dans plusieurs domaines de la science, la nature des données rend parfois difficile la construction et l'analyse des tableaux de données par les méthodes traditionnelles de la statistique descriptive. Il s'agit le plus souvent de connaissances imprécises ou vagues que l'on peut avoir d'un phénomène donné. Si à la question « quel âge avez-vous ? », l'on répond « environ 30 ans », une telle réponse ne peut pas être vue comme un caractère statistique au sens classique du terme. Le problème se pose ici au niveau de l'ensemble des observations possibles. Cet ensemble n'est pas net, il est flou. D'où la nécessité de préciser la notion de caractère statistique flou, et plus précisément de caractère qualitatif flou pour lequel nous proposons une interprétation en terme de sous-ensemble. Si la notion de probabilité semble appropriée pour traiter des événements incertains, celle de possibilité est plus indiquée quand les événements sont imprécis.

Partant d'un tableau rectangulaire d'ensembles $I \times J$, où à la croisée de la ligne i et de la colonne j se trouve un nombre $k(i,j)$, l'analyse des données, telle qu'elle se pratique aujourd'hui, traite trois types de correspondances:

- si les $k(i,j)$ sont des entiers, nombre de fois que i a été trouvé associé à j , on parle de correspondance statistique ou tableau de contingence;
- si les $k(i,j)$ sont des probabilités, limite de fréquences ou probabilités selon un modèle, on parle de correspondance probabiliste;
- si les $k(i,j)$ sont booléens, 1 ou 0 selon que l'association entre i et j est possible ou non, on parle de correspondance ensembliste.

Un quatrième type de correspondance se présente souvent, lorsque l'association entre i et j n'est pas nette mais floue. Les $k(i,j)$ sont dans ce cas, non pas des variables booléennes qui valent 0 ou 1 comme dans le cas le cas d'une correspondance ensembliste, mais des variables floues qui sont des nombres réels compris entre 0 et 1. Ils représentent alors le degré d'association ou la possibilité d'association entre i et j . On parlera dans ce cas de correspondance possibiliste (ou correspondance floue).

Dans la pratique, on peut avoir à faire à un tableau de correspondance flou soit à travers un codage, soit directement à la suite d'une enquête. Lorsqu'un ensemble d'individus I est décrit par un ensemble J de caractères quantitatifs, par le biais d'un codage disjonctif complet, il est possible d'obtenir un tableau de description logique en vue d'une analyse des correspondances. Mais il est également possible de procéder à un codage flou pour assouplir le codage usuel en 0,1. Dans ce cas, le terme qui se trouve à la croisée de la ligne i et de la colonne j du tableau $I \times J$ est un réel $\alpha(i,j)$ compris entre 0 et 1. En toute rigueur, rien ne permet de considérer les $\alpha(i,j)$ comme un système de probabilités. Il s'agit plutôt d'un système de fonction d'appartenance des individus à des intervalles donnés de R . On est donc là beaucoup plus proche d'un tableau de correspondances possibiliste que d'un tableau des correspondances probabiliste.

Certains questionnaires peuvent déboucher directement sur des tableaux de description flous. C'est le cas notamment quand les variables sont ordinales. Lorsqu'on demande par exemple à un malade comment sent-il son dos, il est toujours possible de cadrer à nouveau les réponses entre 0 et 1, les douleurs les plus intenses correspondant aux réponses les plus proches de 1. On dira dans ce cas que cette variable est un caractère qualitatif ordinal flou.

On peut également obtenir un tableau de description flou lorsque les variables sont nominales. Par exemple, à la question « quelles qualités trouvez-vous à cet élève ? », on peut ne pas répondre de façon nette et disjonctive par « travailleur », « sérieux » ou « intelligent ». Mais il est possible de répondre de façon floue en associant à chaque attribut, un coefficient compris entre 0 et 1, et qui indique le degré avec lequel l'observateur associe tel attribut à tel élève. On peut par exemple convenir des associations suivantes:

- travailleur $\rightarrow 0.3$
- sérieux $\rightarrow 0.9$
- intelligent $\rightarrow 0.7$

On dira dans ce cas qu'on a à faire à un caractère qualitatif nominal flou. Il reste à trouver dans tous ces cas, une méthode de détermination des fonctions d'appartenance. La méthode du différentiel sémantique que nous introduisons en est une. Fondamentalement, les notions statistiques de caractère, d'observation ou d'affectation reposent sur l'idée d'application. Lorsque toutes ces notions deviennent floues, il faut trouver l'équivalent d'une application dans ce cadre là.

Si en statistique descriptive traditionnelle, une notion comme « modalité observée » peut sembler évidente, dans le cas flou il n'en est rien. En effet, une modalité 'a' du caractère X est observée par l'individu ω d'une population Ω si et seulement si $X(\omega) = a$. C'est clair et précis: la modalité 'a' est l'image de l'individu ω par l'application X. En d'autres termes, l'individu ω a choisi la modalité 'a' et uniquement celle là, parmi toutes les modalités de l'ensemble des observations A. Cette opération d'affectation est symbolisée par une application nette (Figure 0.1).

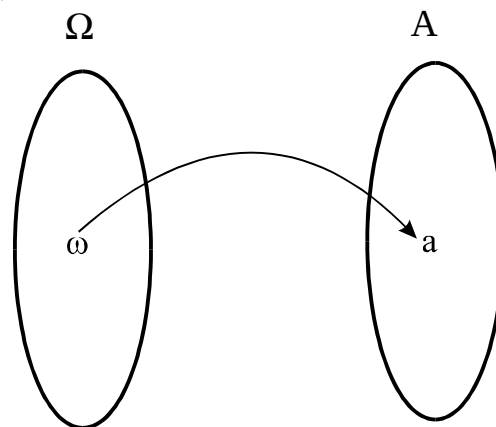


Figure 0.1: Application nette.

Que se passe-t-il si l'application X est floue ? Quel sens donner à l'assertion la « modalité 'a' est observée par l'individu ω » quand précisément l'individu ω a la possibilité de choisir plusieurs modalités à la fois ? Un choix qui peut être non seulement multiple, mais aussi à plusieurs niveaux d'intensité; i.e. l'individu ω a par exemple la possibilité de choisir un peu 'a₁', choisir beaucoup 'a₂' et ne pas choisir 'a₃'. Si l'on convient que

- « choisir un peu » correspond à une association de niveau 0.5,
 - « choisir beaucoup » correspond à une association de niveau 1,
 - « choisir très peu » correspond à une association de niveau 0.1,
- on obtient une liaison multivoque entre l'individu ω et les modalités de l'ensemble des observations A (Figure 0.2).

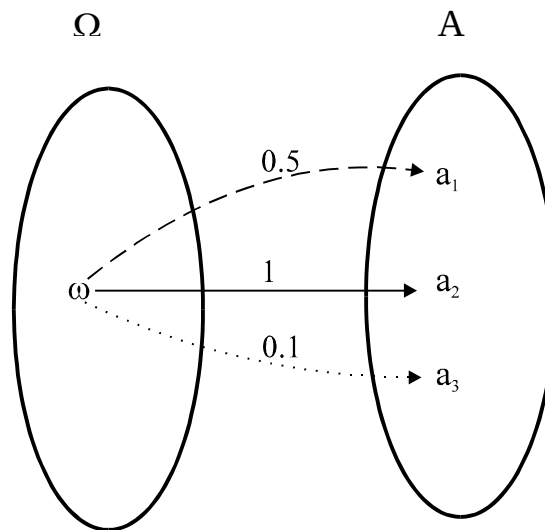


Figure 0.2: Application floue

En introduisant les notions d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble flou par une application floue, nous proposons une autre interprétation du tableau de correspondance possibiliste. Le sous-ensemble $((X,Y)^{-1}(a_i,b_j))_{i,j}$ joue en effet un rôle assez particulier dans l'étude des relations entre deux caractères X et Y décrivant une population Ω donnée. Ce sous-ensemble n'est rien d'autre que la sous-population de Ω formée des individus ayant à la fois les modalités a_i et b_j . Pour résumer l'information contenue dans la paire de variables (X,Y) , on crée un tableau de contingence $k(A,B)$ où à la croisée de la ligne i et de la colonne j , on a le terme $k(a_i,b_j)$ qui est le nombre d'individus ayant à la fois les modalités a_i et b_j (Tableau 0.1). Ce terme mesure, par le cardinal, l'importance que l'on accorde à chacun des sous-ensembles $(X,Y)^{-1}(a_i,b_j)$:

$$k(a_i,b_j) = \text{cardinal}((X,Y)^{-1}(a_i,b_j))$$

$\begin{array}{c} B \\ \backslash \\ A \end{array}$		b_j		marge
a_i		$ (X,Y)^{-1}(a_i,b_j) $		$ X^{-1}(a_i) $
marge		$ Y^{-1}(b_j) $		$ \Omega $

Tableau 0.1: Correspondance statistique

Le $i^{\text{ème}}$ terme de la ligne de marge est le nombre d'individus ayant la modalité a_i :

$$|X^{-1}(a_i)| = \sum_j |(X,Y)^{-1}(a_i,b_j)|$$

De même, le $j^{\text{ème}}$ terme de la colonne de marge est le nombre d'individus ayant la modalité b_j :

$$|Y^{-1}(b_j)| = \sum_i |(X,Y)^{-1}(a_i,b_j)|$$

Cette mesure par le cardinal donne, à notre sens, une évaluation quantitative des données. Lorsqu'on manipule des informations vagues, on a surtout besoin d'une évaluation qualitative des données. C'est pour cela que nous utilisons une autre mesure, la hauteur, pour évaluer le sous-ensemble $(X,Y)^{-1}(a_i,b_j)$. Ce sous-ensemble est flou lorsque les applications X et Y le sont aussi. Un individu ω appartient d'autant plus fortement au sous-ensemble flou $(X,Y)^{-1}(a,b)$ que la possibilité d'association de ω avec les modalités a et b est grande. La hauteur d'un sous-ensemble flou E de Ω est définie par:

$$h(E) = \bigvee_{\omega} \mu_E(\omega) \quad \text{où } \vee \text{ est le max.}$$

On obtient ainsi un tableau de correspondance possibiliste $s(A,B)$ défini par $s(a_i, b_j) = h((X,Y)^{-1}(a_i, b_j))$ (Tableau 0.2). Le terme $s(a,b)$ mesure la possibilité pour un individu d'être associé avec les modalités a et b .

Le $i^{\text{ème}}$ terme de la ligne de marge mesure la possibilité pour un individu d'avoir la modalité a_i :

$$h(X^{-1}(a_i)) = \bigvee_j h((X,Y)^{-1}(a_i, b_j))$$

De même, le $j^{\text{ème}}$ terme de la colonne de marge mesure la possibilité pour un individu d'avoir la modalité b_j :

$$h(Y^{-1}(b_j)) = \bigvee_i h((X,Y)^{-1}(a_i, b_j))$$

$\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$		b_j		marge
a_i		$h((X,Y)^{-1}(a_i, b_j))$		$h(X^{-1}(a_i))$
marge		$h(Y^{-1}(b_j))$		1

Tableau 0.2: Correspondance possibiliste.

Une telle correspondance se présente comme un tableau de contingence classique, à la seule différence que la mesure « cardinal » est remplacée par la mesure « hauteur ».

Le sous-ensemble $X^{-1}(a)$ est une interprétation ensembliste de la modalité 'a'. Une telle interprétation permet de mesurer la proximité entre deux modalités de caractère flou. En effet, à partir du moment où la modalité 'a' est équivalente au sous-ensemble flou $X^{-1}(a)$, il est possible d'évaluer la distance entre les modalités 'a' et 'b' par la distance $d(X^{-1}(a), X^{-1}(b))$ entre les sous-ensembles flous qui leur sont respectivement associés. Un grand choix de distances est offert par Minkowski:

$$d(a,b) = \left(\sum_{\omega} |\mu_{X^{-1}(a)}(\omega) - \mu_{X^{-1}(b)}(\omega)|^p \right)^{1/p}$$

En particulier pour $p=1$, on retrouve la distance de Hamming généralisée largement utilisée dans la littérature. Nous montrons, moyennant un choix approprié d'opérateurs, que la distance de Hamming peut s'exprimer en terme de cardinal d'une différence symétrique entre les sous-ensembles $X^{-1}(a)$ et $X^{-1}(b)$:

$$d(a,b) = |X^{-1}(a) \Delta X^{-1}(b)|.$$

En présence de deux caractères qualitatifs flous, une préoccupation essentielle de l'observateur est de savoir s'il y a un lien eux. Généralement, la dépendance entre deux caractères qualitatifs I et J décrivant une population Ω donnée peut se mesurer par l'une ou l'autre des deux fonctions $\text{Lien}_1(I,J)$ et $\text{Lien}_2(I,J)$, toutes deux positives et ne s'annulant que si I et J sont dépendants (Volle 93):

$$\text{Lien}_1(I,J) = \sum_{i,j} p(i,j) \cdot \log_2 \left(\frac{p(i,j)}{p(i) \cdot p(j)} \right)$$

$$\text{Lien}_2(I,J) = \sum_{i,j} \frac{(p(i,j) - p(i) \cdot p(j))^2}{p(i) \cdot p(j)};$$

où $p(i,j)$ est la proportion des individus ayant simultanément les modalités i et j, $p(i)$ (resp. $p(j)$), la proportion des individus ayant la modalité i (resp. j).

Lien_1 nous vient de la théorie de l'information de Shannon et Lien_2 de la statistique du χ^2 . Pour des caractères flous, nous introduisons une mesure de

dépendance dérivée de Lien_1 mais basée, non pas sur l'information de Shannon, mais sur une information possibiliste que l'on va construire à partir de la théorie de l'information généralisée de Kampé de Fériet (70).

Le premier chapitre rassemble les notations qui seront utilisées tout au long de l'exposé. Un accent tout particulier est mis sur les principales propriétés des sous-ensembles flous. Nous introduisons au second chapitre plusieurs notions d'opérateurs flous. Ces opérateurs sont par la suite utilisés pour faire de l'arithmétique dans le treillis $([0,1], \wedge, \vee)$. C'est au troisième chapitre que nous introduisons la plupart des notions fondamentales de la statistique floue. Les applications floues sont le fondement mathématique de toutes ces notions. Le quatrième chapitre est consacré à la recherche d'une mesure de la liaison entre deux caractères flous. Le cinquième chapitre est une application des méthodes introduites dans notre étude. Dans ce chapitre, d'autres méthodes beaucoup plus pratique sont introduites, en particulier la diagonalisation d'une matrice de ressemblance et les indices de séparation entre modalités de variable flou.

Chapitre 1

1. Sous-ensemble flou

1.1. Fonction d'appartenance.

1.1.1. Appartenance nette.

Soit E un ensemble. Un sous-ensemble A de E est entièrement défini par la connaissance d'un critère permettant d'affirmer, pour tout élément x de E , s'il appartient à A ou n'appartient pas à A . On écrit alors $x \in A$ (x appartient à A) ou $x \notin A$ (x n'appartient pas à A).

1.1.1.1. Définition.

Soit A un sous-ensemble de E . On appelle fonction caractéristique (ou fonction d'appartenance) de A , la fonction $\mu_A: E \rightarrow \{0,1\}$ définie par

$$- \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1.1.1.2. Remarque.

Un sous-ensemble A de E est entièrement défini par la donnée d'une fonction caractéristique μ_A qui prend les valeurs 0 pour les éléments de E qui n'appartiennent pas à A et 1 pour les éléments de E qui appartiennent à A . Cela permet d'écrire le sous-ensemble A sous la forme:

$$- A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in E\}$$

Cette notation indique pour tout élément de E , s'il appartient à A ou s'il n'appartient pas à A .

1.1.1.3. Exemple.

Soient E , l'ensemble défini par $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ et A le sous-ensemble de E défini par $A = \{x_2, x_3, x_6\}$.

On a

$$\mu_A(x_1) = 0, \mu_A(x_2) = 1, \mu_A(x_3) = 1, \mu_A(x_4) = 0, \mu_A(x_5) = 0, \mu_A(x_6) = 1, \mu_A(x_7) = 0$$

et

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 1), (x_7, 0)\}.$$

1.1.1.4. Définition.

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

On appelle complémentaire de A dans E , le sous-ensemble de E noté $\bar{A}$ et définit par:

$$- \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in E$$

On appelle union de A et de B , le sous-ensemble de E noté $A \cup B$ et définit par:

$$- \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

On appelle intersection de A et de B , le sous-ensemble de E noté $A \cap B$ et définit par:

$$- \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

1.1.1.5. Propriété.

Voici quelques propriétés bien connues de l'algèbre de Boole.

- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (associativité)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité)
- $A \cup \bar{A} = E$ (tiers-exclu)
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (non-contradiction)

1.1.2. Appartenance floue

Soit E un ensemble.

1.1.2.1. Définition.

Un sous-ensemble flou de E est un ensemble de couples $A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in E\}$ où $\mu_A: E \rightarrow [0,1]$ est une fonction d'appartenance (floue) à E . μ_A indique le degré d'appartenance de x à A . Si $\mu_A(x) = 1$, on dira que l'appartenance de x à E est nette. Si μ_A ne prend que des valeurs 0 ou 1, on dira que A est un sous-ensemble net de E .

1.1.2.2. Remarque.

Les fonctions caractéristiques Booléennes $\mu_A: E \rightarrow \{0,1\}$ sont des cas particuliers des fonctions d'appartenance Booléennes. De ce fait, les sous-ensembles flous peuvent être vues comme une extension des sous-ensembles nets.

Pour donner un sens verbal à la notion d'appartenance floue,

- si $\mu_A(x) = 0$, on dira que x n'appartient pas à A ,
- si $\mu_A(x)$ est proche de 0, on dira que x appartient un peu à A ,
- si $\mu_A(x)$ est proche de 1, on dira que x appartient fortement à A ,
- si $\mu_A(x) = 1$, on dira que x appartient nettement à A .

1.1.2.3. Exemple.

Soient $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ un ensemble et A un sous-ensemble flou de E défini par:

$$\mu_A(x_1) = 0, \mu_A(x_2) = .5, \mu_A(x_3) = .2, \mu_A(x_4) = 1, \mu_A(x_5) = 0, \mu_A(x_6) = .8, \mu_A(x_7) = 1$$

$$\text{On a } A = \{(x_1, 0), (x_2, .5), (x_3, .2), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, .8), (x_7, 1)\}.$$

On dira alors que x_1 et x_5 n'appartiennent pas à A , x_2 appartient assez à A , x_3 appartient un peu à A , x_4 et x_7 appartiennent nettement à A , x_6 appartient fortement à A

1.1.2.4. Définition.

Soient A un sous-ensemble flou de E et $\alpha \in]0,1[$ un réel. On appelle coupe de niveau α (ou α -coupe) de A , le sous-ensemble net de A noté A_α et définit par:

$$- A_\alpha = \{x \in E / \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

1.1.2.5. Proposition.

La famille des α -coupe de E est une famille monotone, i.e.

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$$

1.1.2.6. Proposition.

Tout sous-ensemble flou A de E peut se décomposer de la manière suivante:

$$- A = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i . A_{\alpha_i}$$

preuve:

D'après la définition d'une α -coupe, on a $\mu_A(x) = \max\{\alpha / x \in A_\alpha\}$. Ce qui peut s'écrire

$$\mu_A(x) = \bigvee_{\alpha} \alpha . \mu_{A_\alpha}(x)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \bigvee_{\alpha} \mu_{A_\alpha}(x) \\ &= \mu_{\bigcup_{\alpha} A_\alpha}(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.1.2.7. Définition.

Soient E et F deux référentiels. Soit $\varphi:E \rightarrow F$ une application. Soit A un sous-ensemble flou de E . On appelle sous-ensemble flou induit par A et φ , le sous-ensemble flou B de F défini par

$$- \mu_B(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in E, y=\varphi(x)} \mu_A(x) & \text{si } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Cette définition est connue sous le nom du principe d'extension.

1.2. Opérations et Caractérisations.

Soient E un ensemble et A une classe des parties de E .

1.2.1. Mesures floues.

1.2.1.1. Définition.

On appelle mesure floue sur E une application $m:A \rightarrow [0,1]$ telle que

- $m(\emptyset) = 0$ et $m(E) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ (monotonie)

1.2.1.2. Remarque.

Une conséquence immédiate de l'axiome de monotonie est fournie par les inégalités suivantes valables quelque soient $A, B \subset E$:

- $m(A \cup B) \geq m(A) \vee m(B)$
- $m(A \cap B) \leq m(A) \wedge m(B)$

où $\vee$ (resp. $\wedge$) représente le maximum (resp. minimum).

1.2.1.3. Commentaire.

Une probabilité est une mesure floue particulière. Les axiomes définissant une mesure floue sont assez faibles. En particulier, on n'impose pas à une mesure floue d'être additive. Ces mesures floues ont permis une évaluation qualitative des données.

1.2.2. Opérations sur les sous-ensembles flous.

Soient A et B deux sous-ensembles flous de E.

1.2.2.1. Définition.

Les sous-ensembles flous A et B sont dits égaux, et on note $A=B$ si et seulement si:

$$- \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

Cela traduit le fait que tout élément de E appartient à A avec le même degré qu'il appartient à B.

On dit que A est inclus dans B, et on note $A \subset B$, si et seulement si:

$$- \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

Cela traduit le fait que tout élément de E qui appartient, même de façon modérée à A, appartient aussi à B avec un degré aussi grand.

1.2.2.2. Définition.

L'intersection de A et de B est le sous-ensemble flou noté $A \cap B$ et défini par:

$$- \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

Cela traduit le fait qu'un élément de E ne peut appartenir à A et à B moins fortement qu'il n'appartient à chacun d'entre eux.

L'union de A et de B est le sous-ensemble flou noté $A \cup B$ et défini par:

$$- \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \forall x \in E$$

Cela traduit le fait qu'un élément de E ne peut appartenir à A ou à B plus qu'il n'appartient à l'un d'entre eux.

1.2.2.3. Définition.

Le complémentaire de A dans E est le sous-ensemble flou noté $\bar{A}$ et définit par:

$$- \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in A$$

Cela traduit le fait qu'un élément de E appartient d'autant plus à $\bar{A}$ qu'il appartient peu à A .

1.2.2.4. Propriété.

Comme pour les sous-ensembles nets, les définitions ci-dessus conduisent aux propriétés suivantes:

- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)
- $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (idempotence)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (lois de De Morgan)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap E = A$, $A \cup E = E$

1.2.2.5. Remarque

Toutes les propriétés des sous-ensembles nets se trouvent vérifiées avec les sous-ensembles flous, sauf les deux propriétés suivantes:

- $A \cup \bar{A} = E$ (tiers exclu)
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (non-contradiction)

Cela est dû au fait que l'ensemble des parties floues de E n'a pas une structure de treillis de Boole, mais de treillis vectoriel.

1.2.3. **Caractéristiques d'un sous-ensemble flou.**

Soient A et B deux sous-ensembles flous de E .

1.2.3.1. Définition.

On appelle support de A et on note $\text{Supp}(A)$, l'ensemble net des éléments de E qui appartiennent au moins un peu à A , soit

- $\text{Supp}(A) = \{x \in E / \mu_A(x) \neq 0\}$

Le support de A est aussi la coupe stricte de niveau 0 de A

1.2.3.2. Définition.

On appelle noyau de A et on note $\overset{o}{A}$, le sous-ensemble des éléments de E qui appartiennent de façon nette à A , soit

- $\overset{o}{A} = \{x \in E / \mu_A(x) = 1\}$

Le noyau de A est aussi la coupe de niveau 1 de A .

1.2.3.3. Définition

On appelle hauteur de A et on note $h(A)$, le plus haut degré d'appartenance à A, soit

$$- h(A) = \bigvee_{x \in E} \mu_A(x)$$

C'est aussi la plus grande valeur prise par la fonction d'appartenance à A.

1.2.3.4. Remarque.

La hauteur est une mesure floue. En effet, on a

- $h(\emptyset) = 0, h(E) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow h(A) \leq h(B)$

1.2.3.5. Définition.

Le sous-ensemble flou A est dit normalisé si et seulement s'il est de hauteur 1, soit

$$- \bigvee_{x \in E} \mu_A(x) = 1$$

1.2.3.6. Définition.

Lorsque E est fini, le cardinal de A est donné par

$$- |A| = \sum_{x \in E} \mu_A(x)$$

1.2.3.7. Remarque.

On vérifie aisément que pour deux sous-ensembles flous A et B, on a

- $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$
- $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$

De plus, on obtient une mesure floue sur E en posant

$$- m(A) = \frac{|A|}{|E|} \quad \forall A \subset E$$

Cette mesure trouve son équivalent en théorie des probabilités par la mesure uniforme.

1.2.3.8. Définition.

On appelle indice de précision (ou de spécificité) une fonction de $[0,1]^E$ dans $[0,1]$ décroissante et qui est maximum seulement pour les singletons de E.

Le sous-ensemble flou A est dit plus précis que B si et seulement si

$$- \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \quad \text{et} \quad \text{Supp}(A) \subset \text{Supp}(B)$$

1.2.3.9. Exemple.

On suppose E fini et ses éléments ordonnés selon les valeurs décroissantes de μ_A où A est un sous-ensemble flou de E. Un exemple de mesure de précision a été proposé par Yager (1982):

$$- Sp(A) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\mu_A(x_i) - \mu_A(x_{i+1}))$$

où $n = |E|$ et $\mu_A(x_{i+1}) = 0$.

1.2.3.10. Définition.

On appelle indice d'imprécision, une fonction de $[0,1]^E$ dans $[0,1]$ croissante et qui est minimale seulement pour les singletons de E.

1.2.3.11. Exemple.

Un exemple de mesure d'imprécision est proposé par Higashi & Klir (1982). En supposant les éléments de E ordonnés suivant les valeurs décroissantes de μ_A où A est un sous-ensemble flou de E :

$$- H(A) = \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_A(x_{i+1})) \log_2(i)$$

où $n = |E|$ et $\mu_A(x_{i+1}) = 0$.

On vérifie que

- $A \subset B \Rightarrow H(A) \leq H(B)$
- H est minimale et vaut 0 si et seulement si A est un singleton de E .
- H est maximum et vaut $\log_2(n)$ si et seulement si $A = E$.

1.2.3.12. Définition.

On appelle indice de flou, une fonction $v: [0,1]^E \rightarrow [0,1]$ telle que

- $v(A) = 0$ si et seulement si 1 est une partie nette de E
- $v(A)$ est maximum si et seulement si $\mu_A(x) = .5 \quad \forall x \in E$.
- $v(A) \leq v(B) \Leftrightarrow |\mu_A(x) - \mu_{\bar{A}}(x)| \geq |\mu_B(x) - \mu_{\bar{B}}(x)| \quad \forall x \in E$

Cet indice évalue à quel point un ensemble a des frontières mal définies. Le second axiome indique que la valeur .5 est la valeur la plus ambiguë. On remarque que $v(A) = v(\bar{A})$, c'est-à-dire qu'un sous-ensemble est aussi flou que son complément.

1.2.3.13. Exemple.

Un exemple d'indice de flou a été donné par Kaufmann (1977) par:

$$- v(A) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x \in E} |\mu_A(x) - \mu_{\bar{A}}(x)|$$

1.2.3.14. Définition.

La distance linéaire entre A et B est donné par

$$- d(A,B) = \sum_{x \in E} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$$

Cette distance est aussi connue sous le nom de distance de Hamming. Naturellement, plusieurs autres notions de distance peuvent être définies sur l'ensemble des parties floues de E. Néanmoins, elles doivent avoir en commun les trois axiomes servant de base à la définition d'une distance, à savoir

- $d(A,B) \geq 0$ (positivité)
- $d(A,B) = d(B,A)$ (symétrie)
- $d(A,C) \leq d(A,B) \oplus d(B,C)$ (transitivité)

où $\oplus$ est l'opération (généralement la somme) associée à la distance.

1.2.4. **Relation floue.**

Soient E et F deux ensembles.

1.2.4.1. Définition.

On appelle relation floue entre deux éléments de décrivant respectivement E et F, toute application μ_R définie sur $E \times F$ et à valeurs dans $[0,1]$. En d'autres termes, une relation floue est un sous-ensemble flou de $E \times F$.

Pour tout couple (x,y) d'éléments de $E \times F$, $\mu_R(x,y)$ représente le degré avec lequel x et y sont en relation.

1.2.4.2. Définition.

Soit R une relation floue sur $E \times F$. On appelle 1ère projection de R (ou projection de R sur E), le sous-ensemble flou de E défini par

$$- \mu_{R_1}(x) = \bigvee_{y \in F} \mu_R(x, y) \quad \forall x \in E$$

De même, on définit la seconde projection de R par

$$- \mu_{R_2}(y) = \bigvee_{x \in E} \mu_R(x, y) \quad \forall y \in F$$

On appelle « projection globale » de R et on note $h(R)$, la seconde projection de la 1ère projection (ou l'inverse), i.e.

$$- h(R) = \bigvee_{x \in E, y \in F} \mu_R(x, y)$$

La relation R est dite normale si et seulement si

$$- h(R) = 1$$

1.2.4.3. Définition.

Soit R une relation floue sur $E \times F$. On appelle support de R , le sous-ensemble net de $E \times F$ formé des couples (x, y) tels que le degré de relation entre x et y est non nul, soit

$$- \text{Supp}(R) = \{(x, y) \in E \times F / \mu_R(x, y) \neq 0\}$$

1.2.4.4. Définition.

Soient R une relation floue sur $E \times F$ et S une relation floue sur $F \times G$. La composition « max-min » de S par R , notée SoR , est donnée par

$$- \mu_{SoR}(x, z) = \bigvee_{y \in F} \mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)$$

Lorsque R est une relation floue sur $E \times E$, la relation RoR est notée R^2 . Et plus généralement, on a $R^k = Ro \dots oR$ k fois.

1.2.4.5. Définition.

Considérons le cas où R est une relation floue sur $E \times E$.

- i)- la relation R est dite réflexive si et seulement si $xRx = 1 \quad \forall x \in E$.
- ii)- R est dite symétrique si et seulement si $xRy = yRx \quad \forall x, y \in E$
- iii)- R est dite antisymétrique si et seulement si $\forall x, y \in E$,

$$\mu_R(x, y) > 0 \text{ et } \mu_R(y, x) > 0 \Rightarrow x = y$$

- iv)- R est dite transitive si et seulement si $\forall x, z \in E$

$$\mu_R(x, z) \geq \bigvee_{y \in E} \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)$$

1.2.4.6. Définition.

On appelle relation de ressemblance, une relation floue qui est à la fois réflexive et symétrique. Si en plus elle est transitive, on dira que c'est une relation de similitude (ou relation d'équivalence floue).

1.2.4.7. Remarque.

A partir d'une relation de similitude R , il est possible de définir une distance d sur E par la formule:

$$- \quad d(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Cette distance est une ultramétrie puisque l'on a $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$.

1.2.4.8. Définition.

On appelle relation d'ordre floue, une relation floue qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

1.3. Langage parallèle et modificateurs linguistiques

1.3.1. Langage flou.

Soient E un ensemble appelé ensemble des termes et F un ensemble appelé ensemble des discours.

1.3.1.1. Définition.

A chaque élément x de E , on associe un sous-ensemble flou de F noté $S(x)$ et appelé signification de x . Pour un élément de y donné, le degré d'appartenance de y à $S(x)$ définit entre x et y une relation floue R par:

$$- \mu_R(x,y) = \mu_{S(x)}(y).$$

La relation floue R est appelée langage sémantiquement flou ou langage parallèle. On note souvent (E,F,R) pour représenter un langage parallèle.

1.3.1.2. Exemple.

Reprenons ici, l'exemple donné par Kaufmann (1975). Soit E l'ensemble des termes:

$$E = \{ \overset{x_1}{\text{jeune}}, \overset{x_2}{\text{vieux}}, \overset{x_3}{\text{non jeune}}, \overset{x_4}{\text{non vieux}}, \overset{x_5}{\text{non jeune et non vieux}} \}.$$

Soit F l'univers des discours définit par l'ensemble des âges d'individus d'une population:

$$F = \{0, 1, \dots, 100\}.$$

Considérons le terme $x_1 = \text{jeune}$. La signification de x_1 est un sous-ensemble flou de E , soit $S(x_1)$. Supposons que la fonction d'appartenance de $S(x_1)$ soit:

$$- \mu_{S(x_1)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y < 25 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2} & \text{si } y \geq 25 \end{cases}$$

et d'une façon similaire:

$$- \mu_{S(x_2)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y < 50 \\ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^2} & \text{si } y \geq 50 \end{cases}$$

La signification des autres éléments de E, étant donnée la nature de ces termes peut être définie en fonction de $\mu_{S(x_1)}(y)$ et $\mu_{S(x_2)}(y)$, ainsi:

- $\mu_{S(x_3)}(y) = 1 - \mu_{S(x_1)}(y)$
- $\mu_{S(x_4)}(y) = 1 - \mu_{S(x_2)}(y)$
- $\mu_{S(x_5)}(y) = (1 - \mu_{S(x_3)}(y)) \wedge (1 - \mu_{S(x_2)}(y))$

Ainsi, par exemple:

$$\mu_{S(x_1)}(57) = .024, \quad \mu_{S(x_2)}(57) = .66, \quad \mu_{S(x_3)}(57) = .976, \quad \mu_{S(x_4)}(57) = .34$$

$$\mu_{S(x_5)}(57) = .024$$

1.3.1.3. Définition.

Soit un élément x de E. On dit que le terme x est « pleinement significatif » si et seulement si sa signification est de hauteur 1, i.e.

$$- \bigvee_{y \in F} \mu_{S(x)}(y) = 1$$

On dit que x est « sans signification » si et seulement si sa signification est de hauteur 0, i.e.

$$- \bigvee_{y \in F} \mu_{S(x)}(y) = 0$$

1.3.1.4. Définition.

Soit (E, F, R) un langage parallèle. A tout élément y de F , on associe un sous-ensemble flou de E noté $D(y)$ et définit par:

$$- \mu_{D(y)}(x) = \mu_R(x, y).$$

Le sous-ensemble flou $D(y)$ est appelé le descripteur du discours y .

1.3.1.5. Remarque.

Un langage parallèle (E, F, R) se présente sous la forme d'un tableau à double entrée, où la ligne x représente la signification de x et la colonne y , le descripteur de y (Tableau 1.3).

x		$\mu_R(x, y)$		

Tableau 1.3 : Langage parallèle

1.3.1.6. Définition.

Soit (E, F, R) un langage parallèle dont tous les termes $x \in E$ sont pleinement significatifs. On appelle « indice de signification relative », la relation floue H définie sur $E \times E$ par:

$$- \mu_H(x, x') = \bigvee_{y \in F} \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(x', y)$$

1.3.2. **Modificateurs linguistiques.**

Soit (E, F, R) un langage parallèle. Les opérateurs de Zadeh, encore appelés modificateurs linguistiques, permettent de déterminer la fonction d'appartenance d'un terme à partir de la connaissance des fonctions d'appartenance d'autres termes. Cette composition conduit à la définition des modificateurs tels que « très », « plus ou moins », Nous allons nous intéresser à deux types d'opérateurs: les opérateurs unaires et les opérateurs binaires.

1.3.2.1. Définition.

Un modificateur linguistique unaire est une application $m: [0,1]^E \rightarrow [0,1]^E$.
Un modificateur linguistique binaire est une application $m: [0,1]^E \times [0,1]^E \rightarrow [0,1]^E$.

1.3.2.2. Exemple.

Voici quelques exemples de modificateurs unaires:

i)- Opérateur de négation.

Si $S(x)$ est la signification de x , alors $\overline{S(x)}$ est donné par:

$$- \mu_{\overline{S(x)}}(y) = 1 - \mu_{S(x)}(y) \quad \forall y \in E.$$

Son sens verbal est « non ». Sur la Figure 1.1, $S(x)$ est représenté par un trait continu, et $\overline{S(x)}$ par un trait discontinu.

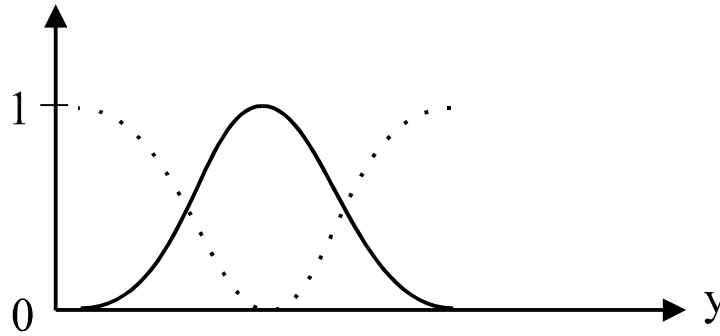


Figure 1.1: Opérateur de négation

ii)-Opérateur de compression.

Il transforme la signification $S(x)$ en $\text{com}(S(x))$ définie par

$$- \mu_{\text{com}(S(x))}(y) = (\mu_{S(x)}(y))^2 \quad \forall y \in E.$$

Cet opérateur est explicité en langage naturel par « très ». Sur la Figure 1.2, $S(x)$ est représenté par un trait continu, et $\text{com}(S(x))$ par un trait discontinu.

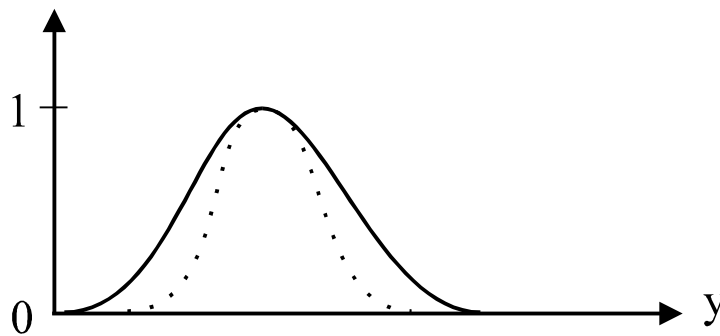


Figure 1.2: Opérateur de compression

iii)-Opérateur de normalisation.

Il transforme la signification $S(x)$ en $\text{nor}(S(x))$ définie par:

$$- \mu_{\text{nor}(S(x))}(y) = \frac{\mu_{S(x)}(y)}{\bigvee_{z \in E} \mu_{S(x)}(z)} \quad \forall y \in E.$$

Son effet est d'amener tous les termes à être pleinement significatifs. Sur la Figure 1.3, $S(x)$ est représenté par un trait continu, et $\text{nor}(S(x))$ par un trait discontinu.

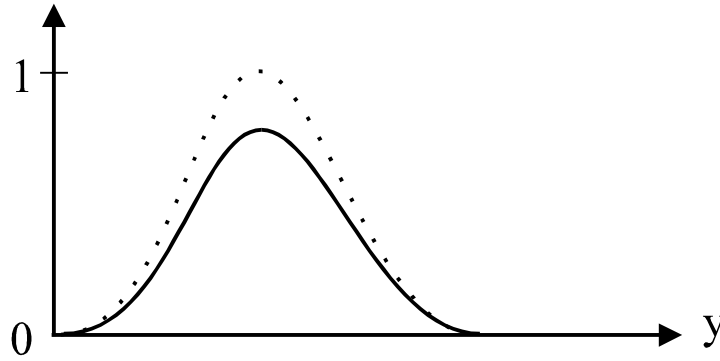


Figure 1.3: Opérateur de normalisation

iv)-Opérateur de dilatation.

Il transforme la signification $S(x)$ en $\text{dil}(S(x))$ définie par

$$- \mu_{\text{dil}(S(x))}(y) = \sqrt{\mu_{S(x)}(y)} \quad \forall x \in E.$$

C'est l'inverse de la compression. Le sens verbal de cet opérateur est « pas très » ou encore « peu ». Sur la Figure 1.4, $S(x)$ est représenté par un trait continu, et $\text{dil}(S(x))$ par un trait discontinu.

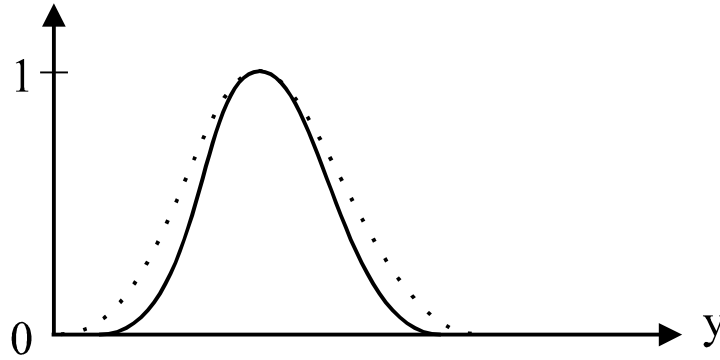


Figure 1.4: Opérateur de dilatation

v)- Opérateur de conditionnement (ou méta-implication).

Il transforme la signification $S(x)$ en $m(S(x))$ définie par:

$$- \mu_{m(S(x))}(y) = \bigvee_{z \in E} \mu_{S(x)}(z) \wedge \mu_T(z, y) \quad \forall y \in E.$$

où T est une relation floue sur $E \times E$.

1.3.2.3. Exemple.

Voici quelques exemples de modificateurs binaires:

i)- Opérateur de conjonction.

Il transforme deux significations $S(x)$ et $S(x')$ en $S(x) \cap S(x')$ définie par:

$$- \mu_{S(x) \cap S(x')}(y) = \mu_{S(x)}(y) \wedge \mu_{S(x')}(y) \quad \forall y \in E.$$

Le sens verbal de cet opérateur est « et ».

ii)- Opérateur de disjonction.

Il transforme deux significations $S(x)$ et $S(x')$ en $S(x) \cup S(x')$ définie par:

$$- \mu_{S(x) \cup S(x')}(y) = \mu_{S(x)}(y) + \mu_{S(x')}(y) - \mu_{S(x)}(y) \cdot \mu_{S(x')}(y) \quad \forall y \in E.$$

Le sens verbal de cet opérateur est « ou ».

Chapitre 2

2. Opérateurs flous et conditionnement normalisé

2.1. Opérateurs flous

Soit n un entier naturel strictement positif. Nous appellerons opérateur flou, toute application de $[0,1]^n$ dans $[0,1]$. Si n est égal à 1, on parlera d'opérateur unaire. Si n est égal à 2, on parlera d'opérateur binaire. Dans le présent travail, nous nous limiterons aux opérateurs unaires et binaires. Sauf indication contraire, on parlera d'opérateur flou pour désigner un opérateur binaire flou. Si $\perp$ est un opérateur unaire, on convient de noter $\perp(a)$, l'image de a par l'application $\perp$. Si $\perp$ est un opérateur binaire, on convient de noter $a\perp b$, l'image du couple (a,b) par l'application $\perp$.

2.1.1. Dualité.

2.1.1.1. Définition

Deux opérateurs T et $\perp$ sont dits duaux l'un par rapport à l'autre si et seulement si

$$- aTb = 1 - \bar{a} \perp \bar{b} \quad \text{où } \bar{a} = 1 - a.$$

Le terme $\bar{a}$ est généralement appelé le pseudo-complément de a .

2.1.1.2. Principe de dualité.

On remarquant que

$$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$$

et

$$a \leq b \Rightarrow \bar{a} \geq \bar{b} \quad \forall a, b \in [0,1].$$

Il en résulte que toute propriété faisant intervenir une suite d'opérateurs $T_1, T_2, \dots$, et $\leq, \geq, 0, 1$ reste vraie si l'on permute T_1 et $\perp_1, T_2$ et $\perp_2, \dots, \leq$ et $\geq, 0$ et 1 , 1 et 0 , où $\perp_i$ est l'opérateur dual de T_i . Ce résultat est connu sous le nom de principe de dualité.

2.1.2. Opérateurs de conjonction et de disjonction.

2.1.2.1. Définition.

Un opérateur de conjonction est un opérateur binaire flou $*$ tel que

- $a*b = b*a$ (commutativité)
- $a*(b*c) = (a*b)*c$ (associativité)
- $b \leq c \Rightarrow a*b \leq a*c$ (monotonie)
- $a*1 = a$ (élément neutre)
- $*$ est continue

Nous disons que $*$ est continue pour traduire le fait que la fonction $t \mapsto a*t$ est continue sur $[0,1]$ quel que soit $a \in [0,1]$.

La conjonction $*$ est dite stricte, si et seulement si elle est strictement monotone, c'est à dire,

- $b < c \Rightarrow a*b < a*c$

2.1.2.2. Définition

Un opérateur de disjonction est un opérateur binaire flou $\oplus$ qui a les mêmes propriétés qu'un opérateur de conjonction excepté la propriété sur l'élément neutre. Pour un opérateur de disjonction, l'élément neutre est 0; c'est à dire

- $a \oplus 0 = a$

La disjonction $\oplus$ est dite stricte, si et seulement si elle est strictement monotone, c'est à dire,

- $b < c \Rightarrow a \oplus b < a \oplus c$

2.1.2.3. Propriété.

Le dual d'un opérateur de conjonction est un opérateur de disjonction, et réciproquement, le dual d'un opérateur de disjonction est un opérateur de conjonction.

Preuve.

Si $*$ est un opérateur de conjonction et $\oplus$ l'opérateur dual de $*$, on a par définition

$$a \oplus b = \overline{\overline{a} * \overline{b}} \quad \forall a, b \in [0, 1].$$

L'opérateur $\oplus$ ainsi défini vérifie toutes les propriétés d'une disjonction. En effet,

- $a \oplus b = b \oplus a$ (commutativité)
- $(a \oplus b) \oplus c = \overline{\overline{a} * \overline{b}} \oplus c$
 $= \overline{\overline{a} * \overline{b} * \overline{c}}$
 $= a \oplus (b \oplus c)$ (associativité)
- $b \leq c \Rightarrow \overline{b} \geq \overline{c}$
 $\Rightarrow \overline{a} * \overline{b} \geq \overline{a} * \overline{c}$
 $\Rightarrow \overline{\overline{a} * \overline{b}} \leq \overline{\overline{a} * \overline{c}}$
 $\Rightarrow a \oplus b \leq a \oplus c$ (monotonie)
- $a \oplus 0 = \overline{\overline{a} * 1}$
 $= \overline{\overline{a}}$
 $= a$ (élément neutre)
- $\oplus$ est continue car la continuité de $*$ entraîne celle de $t \mapsto 1 - \overline{a} * (1 - t)$, et donc celle de $\oplus$

On vérifie de même que si $\oplus$ est une disjonction, l'opérateur $*$ dual de $\oplus$ et défini par $a * b = \overline{\overline{a} \oplus \overline{b}}$ est une conjonction.

Grâce aux résultats obtenus en théorie des équations fonctionnelles, en particulier ceux de Ling C. (1965), on peut regrouper les opérateurs de

conjonction et de disjonction en grandes familles. Les principales classes d'opérateurs de conjonction et de disjonction sont les suivantes:

2.1.2.4. Opérateur idempotent.

Un opérateur $\perp$ est dit idempotent si et seulement si

$$- a \perp a = a \quad \forall a \in [0,1].$$

2.1.2.5. Exemple.

Considérons l'opérateur $\wedge$ défini par

$$- a \wedge b = \min(a,b).$$

On vérifie que c'est une conjonction. Elle est appelée la conjonction min. C'est la seule conjonction idempotente. De plus, elle est la plus grande conjonction, i.e.

pour toute conjonction $*$, on a $a * b \leq a \wedge b \quad \forall a, b \in [0,1].$

Considérons l'opérateur $\vee$ défini par

$$- a \vee b = \max(a,b).$$

On vérifie que c'est une disjonction. Elle est appelée la disjonction max. C'est la seule disjonction idempotente. De plus, elle est la plus petite disjonction, i.e. pour toute disjonction $\oplus$, on a $a \oplus b \geq a \vee b.$

Les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ sont duaux l'un par rapport à l'autre. Ces opérateurs ont été proposés par Zadeh (1965) et sont les plus utilisés dans la littérature.

2.1.2.6. Opérateur archimédien.

Un opérateur $\perp$ est dit archimédien si et seulement si

$$- a \perp a < a \quad \forall a \in]0,1[.$$

Il est dit archimédien strict s'il est archimédien et strictement monotone.

Les conjonctions archimédiennes sont de la forme

$$- a * b = f^{-1}[f(a) \wedge (f(a)+f(b))]$$

où $f:[0,1] \rightarrow [0,+\infty]$ est une fonction continue strictement décroissante telle que $f(1) = 0$. On montre que la conjonction $*$ ainsi définie est stricte si et seulement si $f(0) = +\infty$. La fonction f est appelée le générateur de la conjonction $*$. Si $f(0) = 1$, on dira que le générateur f est normé. Pour une conjonction donnée, le générateur est unique à une constante multiplicative près.

Les disjonctions archimédiennes sont de la forme

$$- a \oplus b = g^{-1}[g(1) \wedge (g(a)+g(b))]$$

où $g:[0,1] \rightarrow [0,+\infty]$ est une fonction continue strictement croissante telle que $g(0) = 0$. La disjonction $\oplus$ ainsi définie est stricte si et seulement si $g(1) = +\infty$. La fonction g est appelée le générateur de la disjonction $\oplus$. Ce générateur est dit normé si $g(1) = 1$. Pour une disjonction donnée, le générateur est unique à une constante multiplicative près.

2.1.2.7. Exemple.

Considérons la conjonction $*$ définie par

$$- a * b = ab$$

et la disjonction $\oplus$ définie par

$$- a \oplus b = a+b-ab.$$

Ces deux opérateurs sont archimédiens stricts et engendrés respectivement par

$$f(x) = -\log(x) \text{ et } g(x) = -\log(1-x).$$

L'opérateur $*$ ainsi défini est appelé la conjonction produit et l'opérateur $\oplus$, la somme probabiliste. Ces opérateurs sont mutuellement duaux.

2.1.2.8. Exemple.

Considérons la conjonction $*$ définie par

$$- a * b = 0 \vee (a + b - 1)$$

et la disjonction $\oplus$ définie par

$$- a \oplus b = 1 \wedge (a + b).$$

Ces deux opérateurs sont non stricts et engendrés respectivement par les générateurs normés $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = x$. Ces opérateurs sont communément appelés les opérateurs de Lukasiewicz

2.1.2.9. Exemple.

Yager (1980) a proposé une famille paramétrée d'opérateurs archimédiens non stricts en posant

$$- a * b = 1 - 1 \wedge [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p} \quad p > 0$$

et

$$- a \oplus b = 1 \wedge (a^p + b^p)^{1/p} \quad p > 0.$$

Les opérateurs de Yager sont engendrés respectivement par les générateurs normés $f(x) = (1-x)^p$ et $g(x) = x^p$. Pour un entier p donné, les opérateurs de Yager sont duaux l'un par rapport à l'autre. Lorsque p tend vers l'infini, on retrouve les opérateurs de Zadeh (2.1.2.5). Autrement dit,

$$- 1 - 1 \wedge [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a \wedge b$$

et

$$- 1 \wedge (a^p + b^p)^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a \vee b$$

2.1.3. Opérateurs de pseudo-division et de pseudo-soustraction

2.1.3.1. Définition

Un opérateur de pseudo-division associé à une conjonction $*$ est une loi de composition $|$ définie sur $[0,1]$ par

$$- a|b = \max\{t \in [0,1] / a*t \leq b\}$$

Cela signifie que $a|b$ est la borne supérieure de l'ensemble $E = \{t \in [0,1] / a*t \leq b\}$.

$a|b$ existe car E est une partie non vide ($0 \in E$) et majorée ($t \in E \Rightarrow t \leq 1$) de $\mathfrak{R}$. Elle admet donc une borne supérieure.

2.1.3.2. Remarque

Le symbole " $|$ " ne doit pas être confondu au connecteur de Sheffer dont la notation usuelle est semblable. L'opérateur $|$ a été suggéré par d'autres auteurs, en particulier De Luca (1972) sous le nom de « quasi-inverse » ou de « pseudo-complément relatif ». Le terme « pseudo-division » nous semble-t-il plus suggestif quand il s'agit de faire de l'algèbre dans le treillis multiplicatif $([0,1], \wedge, \vee, *)$. $a|b$ est en quelque sorte le résultat de la division de b par a dans ce treillis là. Par ailleurs, dans ce treillis là, on peut diviser par zéro car par définition, $0|b = 1 \forall b \in [0,1]$. C'est ce résultat qui autorise la convention $\frac{0}{0} = 1$. Nous conserverons cette convention pour toute la suite du présent document.

2.1.3.3. Définition

Un opérateur de pseudo-soustraction associé à une disjonction $\oplus$ est une loi de composition interne $\ominus$ définie sur $[0,1]$ par

$$- a \ominus b = \min\{t \in [0,1] / a \oplus t \geq b\}.$$

Cela signifie que $a \ominus b$ est la borne inférieure de l'ensemble $E = \{t \in [0,1] / a \oplus t \geq b\}$.

De même que pour $a|b$, l'existence de $a \ominus b$ tient au fait que l'ensemble E est non vide ($1 \in E$) et minorée par 0. Il admet donc une borne inférieure. $a \ominus b$ représente le résultat de la soustraction de b par a dans le treillis $([0,1], \wedge, \vee, *)$.

2.1.3.4. Remarque

Nous avons adopté la notation $a|b$ pour exprimer la division de b par a plutôt que $b|a$ pour des raisons de cohérence avec l'ensemble des notations de la logique floue. Il est certain que dans la théorie de treillis, la notation $b|a$ est plus indiquée. La quantité $b|a$ est évoquée en théorie des treillis par Dubreil-Jacotin (1953) sous le terme de résiduel. Cette remarque vaut également pour $a \ominus b$.

2.1.3.5. Remarque

Si les opérateurs de conjonction $*$ et de disjonction $\oplus$ sont duaux l'un par rapport à l'autre, alors l'opérateur de pseudo-division $|$ associé à la conjonction $*$ est le dual de l'opérateur de pseudo-soustraction $\ominus$ associé à la disjonction $\oplus$ et réciproquement. Ce résultat explique pourquoi l'opérateur de pseudo-soustraction est parfois appelé implication duale.

preuve:

Si l'on pose

$x = \sup\{t \in [0,1] / a * t \leq b\}$ et $y = \inf\{t \in [0,1] / a * \bar{t} \leq b\}$, alors $\bar{x} = y$. En effet, $a * x \leq b \Rightarrow \bar{x} \geq y$ car y est le plus petit réel appartenant à $[0,1]$ tel que $a * \bar{y} \leq b$.

De même, $a * \bar{y} \leq b \Rightarrow \bar{y} \leq x$, ou encore $y \geq \bar{x}$.

D'où, $\bar{x} \geq y$ et $y \geq \bar{x}$ entraînent $\bar{x} = y$.

Par ailleurs, $a * \bar{t} \leq b \Leftrightarrow \bar{a} \oplus t \geq \bar{b}$.

On peut donc écrire $y = \inf\{t \in [0,1] / \bar{a} \oplus t \geq \bar{b}\}$,

Par définition, on a $x = a|b$ et $y = a \ominus b$. D'où $\overline{a|b} = \bar{a} \ominus \bar{b}$

2.1.3.6. Exemple

Dans le cas où $*$ est la conjonction min., on désigne $a|b$ par $a\alpha b$. Cela donne:

$$- a\alpha b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

Cet opérateur a été suggéré par Sanchez (1976).

L'opérateur de pseudo-soustraction duale de α est donné par

$$- a\Theta b = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$$

2.1.3.7. Exemple

Dans le cas où $*$ est la conjonction produit, on désigne $a|b$ par $a\beta b$. Cela donne:

$$- a\beta b = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 1 \wedge \frac{b}{a} & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Cet opérateur a été suggéré par Goguen (1969).

En appliquant la convention $\frac{0}{0} = 1$, l'opérateur de Goguen peut se mettre sous la forme plus condensée:

$$- a\beta b = 1 \wedge \frac{b}{a}$$

L'opérateur de pseudo-soustraction duale de β est donné par

$$- a\Theta b = 0 \vee \frac{b-a}{1-a}$$

2.1.3.8. Exemple

Dans le cas où $*$ est la conjonction de Lukasiewicz, on désigne $a|b$ par $a\gamma b$. Cela donne:

$$- a\gamma b = 1 \wedge (1 - a + b)$$

L'opérateur de pseudo-soustraction duale de γ est donné par

$$- a \ominus b = 0 \vee (b - a)$$

2.1.3.9. Remarque

Dans le cas plus général où $*$ est une conjonction archimédienne générée par une fonction f , on a

$$- a|b = f^{-1}[0 \vee (f(b) - f(a))]$$

L'opérateur de pseudo-soustraction duale est donné par

$$- a \ominus b = 1 - f^{-1}[0 \vee (f(\bar{b}) - f(\bar{a}))]$$

preuve:

Si $*$ est générée par f , alors $f(a*b) = f(a) + f(b)$ et $a|b = \max(a*t \leq b)$.

Dans ce cas, $a*t \leq b$ entraîne $f(t) \geq f(b) - f(a)$.

D'où $t \leq f^{-1}[0 \vee (f(b) - f(a))]$

2.1.4. Opérateurs de maximisation et de minimisation.

2.1.4.1. Définition

Soit $|$ un opérateur de pseudo-division. Nous appellerons opérateur de maximisation associé $|$, une loi de composition λ définie sur $[0,1]$ par

$$- a\lambda b = (a|b)|b$$

2.1.4.2. Définition

Soit $\ominus$ un opérateur de pseudo-soustraction. Nous appellerons opérateur de minimisation associé à $\ominus$, une loi de composition σ définie sur $[0,1]$ par

$$- a\sigma b = (a \ominus b) \ominus b$$

2.1.4.3. Remarque

Si l'opérateur de pseudo-soustraction $\ominus$ est le dual de l'opérateur de pseudo-division $|$, alors l'opérateur de minimisation σ associé à $\ominus$ est le dual de l'opérateur de maximisation λ associé à $|$.

preuve:

$$\begin{aligned}\overline{a\lambda b} &= \overline{(a|b)|b} \\ &= \overline{(a|b)} \ominus \bar{b} \\ &= (\bar{a} \ominus \bar{b}) \ominus \bar{b}\end{aligned}$$

2.1.4.4. Exemple

Si $|$ est l'opérateur α de Sanchez, alors

$$- a\lambda b = \begin{cases} 1 & \text{si } a > b \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

et

$$- a\sigma b = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ b & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

2.1.4.5. Exemple

Si $|$ est l'opérateur β de Goguen, alors

$$- a\lambda b = a \vee b$$

et

$$- a\sigma b = a \wedge b$$

2.1.4.6. Remarque

D'une façon plus générale, si $*$ est une conjonction archimédienne, alors l'opérateur de pseudo-division qui lui est associé induit un opérateur de maximisation λ défini par

$$- a \lambda b = a \vee b$$

et un opérateur de pseudo-soustraction σ défini par

$$- a \sigma b = a \wedge b$$

preuve.

Si la conjonction $*$ est générée par la bijection f , on a

$$\begin{aligned} f(a \lambda b) &= f((a|b)|b) \\ &= 0 \vee (f(b) - f(a|b)) \\ &= 0 \vee (f(b) - 0 \vee (f(b) - f(a))) \\ &= f(a \vee b) \end{aligned}$$

$a \sigma b$ s'obtient par dualité

2.1.5. Opérateur d'équivalence

2.1.5.1. Définition

Soit $*$ un opérateur de conjonction et $|$ l'opérateur de pseudo-division qui lui est associé. On appelle opérateur d'équivalence associé à la conjonction $*$, l'opérateur ε défini par

$$- a \varepsilon b = (a|b) * (b|a)$$

2.1.5.2. Exemple

Si $*$ est la conjonction min, alors l'opérateur ε est défini par

$$- a \varepsilon b = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ a \wedge b & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

2.1.5.3. Exemple

Si $*$ est la conjonction produit, alors l'opérateur ε est défini par

$$- a \varepsilon b = \frac{a \wedge b}{a \vee b}$$

2.1.5.4. Exemple

Si $*$ est la conjonction de Lukasiewicz, alors l'opérateur ε est défini par

$$- a \varepsilon b = 1 - |a - b|$$

2.1.6. **Opérateur de négation.**

2.1.6.1. Définition.

Un opérateur de négation est une application $n:[0,1] \rightarrow [0,1]$ telle que

- $n(0) = 1, n(1) = 0$
- $n(n(a)) = a \quad \forall a \in [0,1]$
- n continue
- n strictement décroissante

2.1.6.2. Remarque.

En se basant sur les résultats de la théorie des équations fonctionnelles, on montre (Weber, 1983) que les opérateurs de négation sont de la forme

$$- n(a) = f^{-1}(1-f(a))$$

où $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ est une fonction continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Pour $f(x) = x$, on retrouve la négation classique définie par $n(a) = 1-a$ et utilisée comme pseudo-complément dans le cadre de la théorie des sous-ensembles flous.

2.1.6.3. Définition.

Soient $*$ un opérateur de conjonction et $\oplus$ un opérateur de disjonction. On dit que les opérateurs $*$ et $\oplus$ satisfont aux lois de De Morgan par rapport à la négation n si et seulement si

$$- n(a*b) = n(a) \oplus n(b).$$

2.1.6.4. Proposition.

Si $|$ est un opérateur de pseudo-division associé à une conjonction archimédienne non stricte, alors l'opérateur n défini par $n(a) = a|0$ est une négation. De même, si $\ominus$ est opérateur de pseudo-soustraction associé à une disjonction archimédienne non stricte, alors l'opérateur n défini par $n(a) = a \ominus 0$ est une négation.

preuve.

immédiate.

2.1.7. Quelques propriétés des opérateurs flous

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $*$ un opérateur de conjonction, par $\oplus$ l'opérateur de disjonction dual de $*$, par $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à $*$, par $\ominus$ l'opérateur de pseudo-soustraction dual de $|$, par λ l'opérateur de maximisation associé à $|$ et par σ l'opérateur de minimisation duale de λ . Chaque propriété énoncée est suivie de la propriété duale. Si la propriété énoncée est vraie, il en est de même de la propriété duale de part le principe de dualité

2.1.7.1. Propriété

$$- a*b \leq a \wedge b, \quad a \oplus b \geq a \vee b \quad \forall a, b \in [0,1]$$

preuve:

De part la monotonie de $*$, on a

$$b \leq 1 \Rightarrow a*b \leq a$$

$$a \leq 1 \Rightarrow a*b \leq b$$

D'où $a*b \leq a \wedge b$.

2.1.7.2. Propriété

$$- (a \vee b) * c = (a * c) \vee (b * c) , \quad (a \wedge b) \oplus c = (a \oplus c) \wedge (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

Preuve:

Découle de la monotonie de *

2.1.7.3. Propriété

$$- (a \wedge b) * c = (a * c) \wedge (b * c) , \quad (a \vee b) \oplus c = (a \oplus c) \vee (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

Preuve:

Découle de la monotonie de *

2.1.7.4. Propriété

$$- a|(b|c) = (a*b)|c , \quad a \ominus (b \ominus c) \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

preuve:

si l'on pose $E = \{t \in [0, 1] / a * t \leq b|c\}$ et $F = \{t \in [0, 1] / a * b * t \leq c\}$,

alors les ensembles E et F ont les mêmes éléments, et donc la même borne supérieure.

En effet,

$$\begin{aligned} u \in E &\Rightarrow a * u \leq b|c \\ &\Rightarrow a * b * u \leq b * b|c \leq c \\ &\Rightarrow u \in F \end{aligned}$$

réciroquement,

$$\begin{aligned} u \in F &\Rightarrow a * b * u \leq c \\ &\Rightarrow a * u \leq b|c \\ &\Rightarrow u \in E \end{aligned}$$

2.1.7.5. Propriété

$$- a|b \geq b , \quad a \ominus b \leq b \quad \forall a, b \in [0, 1]$$

Preuve:

Puisque $a * b \leq b$ alors $b \leq a|b$

car $a|b$ est le plus grand réel $t \in [0,1]$ tel que $a * t \leq b$

2.1.7.6. Propriété

$$- a * (a|b) = a \wedge b, \quad a \oplus (a \ominus b) = a \vee b \quad \forall a, b \in [0,1]$$

Preuve:

si $a \leq b$, alors

$$\begin{aligned} a * (a|b) &= a * 1 \\ &= a \end{aligned}$$

si $a > b$, alors $\exists c \in [0,1]$ tel que $a * c = b$, en effet,

la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = a * t$ est continue (car $*$ est continue).

Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = a$, f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et a , en particulier la valeur b .

$$\begin{aligned} a * c = b &\Rightarrow c \leq a|b \\ &\Rightarrow a * c \leq a * a|b \\ &\Rightarrow b \leq a * a|b \end{aligned}$$

or par définition de $a|b$, $a * a|b \leq b$, donc $a * a|b = b$.

D'où le résultat.

2.1.7.7. Propriété

$$- a \leq b \Rightarrow a|c \geq b|c, \quad a \geq b \Rightarrow a \ominus c \leq b \ominus c \quad \forall a, b, c \in [0,1]$$

Preuve:

D'une part

$$b * (b|c) = b \wedge c \leq c$$

D'autre part

$$a \leq b \Rightarrow a * (b|c) \leq b * (b|c)$$

D'où $a * (b|c) \leq c$

Ce qui entraîne $b|c \leq a|c$

2.1.7.8. Propriété

– $b \leq c \Rightarrow a|b \leq a|c$, $b \geq c \Rightarrow a \ominus b \geq a \ominus c$ $\forall a, b, c \in [0,1]$

Preuve:

D'une part

$$a*(a|b) \leq b$$

D'autre part

$$b \leq c \Rightarrow a*(a|b) \leq c. \text{ D'où } a|b \leq a|c$$

2.1.7.9. Propriété

– $a|(b \wedge c) = a|b \wedge a|c$, $a \ominus (b \vee c) = a \ominus b \vee a \ominus c$ $\forall a, b \in [0,1]$

Preuve:

D'une part

$$b \wedge c \leq b \Rightarrow a|(b \wedge c) \leq a|b$$

De même $b \wedge c \leq c \Rightarrow a|(b \wedge c) \leq a|c$; d'où $a|(b \wedge c) \leq (a|b) \wedge (a|c)$

D'autre part si l'on pose $t = a|b \wedge a|c$,

alors $t \leq a|b$ et $t \leq a|c$

D'où $a*t \leq a*(a|b)$ et $a*t \leq a*(a|c)$; ou encore $a*t \leq b$ et $a*t \leq c$.

Finalement, on a $a*t \leq b \wedge c$

D'où $t \leq a|(b \wedge c)$, c'est à dire $(a|b) \wedge (a|c) \leq a|(b \wedge c)$

2.1.7.10. Propriété

– $(a \vee b)|c = a|c \vee b|c$, $(a \wedge b) \ominus c = a \ominus c \vee b \ominus c$ $\forall a, b \in [0,1]$

Preuve:

D'une part

$$a \vee b \geq a \Rightarrow (a \vee b)|c \leq a|c \quad \text{et} \quad a \vee b \geq b \Rightarrow (a \vee b)|c \leq b|c$$

$$\text{D'où } (a \vee b)|c \leq a|c \wedge b|c$$

$$\text{D'autre part, si l'on pose } t = a|c \wedge b|c \text{ alors } t \leq a|c \text{ et } t \leq b|c$$

$$\text{Ce qui donne } a*t \leq c \text{ et } b*t \leq c$$

$$\text{D'où } (a*t) \vee (b*t) \leq c, \text{ c'est à dire } t \leq (a \vee b)|c; \text{ ou encore } a|c \wedge b|c \leq (a \vee b)|c$$

2.1.7.11. Propriété

$$- \quad a|(b \vee c) = a|b \vee a|c, \quad a \ominus (b \wedge c) = a \ominus b \wedge a \ominus c \quad \forall a, b \in [0,1]$$

Preuve:

D'une part

$$b \leq b \vee c \Rightarrow a|b \leq a|(b \vee c) \quad \text{et} \quad c \leq b \vee c \Rightarrow a|c \leq a|(b \vee c)$$

$$\text{D'où } (a|b) \vee (a|c) \leq a|(b \vee c)$$

$$\text{D'autre part, si l'on pose } t = a|(b \vee c),$$

$$\text{alors } a*t \leq b \vee c, \text{ c'est à dire } a*t \leq b \text{ ou } a*t \leq c.$$

$$\text{D'où } t \leq a|b \text{ ou } t \leq a|c, \text{ c'est à dire } t \leq (a|b) \vee (a|c), \text{ ou encore } a|(b \vee c) \leq (a|b) \vee (a|c)$$

2.1.7.12. Propriété

$$- \quad (a \wedge b)|c = a|c \wedge b|c, \quad (a \vee b) \ominus c = a \ominus c \wedge b \ominus c \quad \forall a, b \in [0,1]$$

Preuve:

D'une part

$$a \wedge b \leq a \Rightarrow (a \wedge b)|c \geq a|c \quad \text{et} \quad a \wedge b \leq b \Rightarrow (a \wedge b)|c \geq b|c,$$

$$\text{D'où } (a \wedge b)|c \geq a|c \wedge b|c$$

$$\text{D'autre part, si l'on pose } t = (a \wedge b)|c,$$

$$\text{alors } (a \wedge b)*t \leq c, \text{ ou encore } (a*t) \wedge (b*t) \leq c,$$

$$\text{c'est à dire } (a*t) \leq c \text{ ou } (b*t) \leq c$$

D'où $t \leq a|c$ ou $t \leq b|c$, c'est à dire $t \leq (a|c) \vee (b|c)$,
ou encore $(a \wedge b)|c \leq (a|c) \vee (b|c)$

2.1.7.13. Propriété

– $a \leq b \Leftrightarrow a|b = 1$, $a \geq b \Leftrightarrow a \ominus b = 0 \quad \forall a, b \in [0,1]$

Preuve:

D'une part

$$a \leq b \Rightarrow a * 1 \leq b \Rightarrow 1 \leq a|b \Rightarrow a|b = 1$$

D'autre part

$$a|b = 1 \Rightarrow a * 1 \leq b \Rightarrow a \leq b$$

2.1.7.14. Propriété

– $a|b * a\lambda b = b$, $a \ominus b \oplus a\sigma b = b \quad \forall a, b \in [0,1]$

Preuve:

$$\begin{aligned} a|b * a\lambda b &= a|b * (a|b)|b \\ &= a|b \wedge b \\ &= b \end{aligned}$$

2.1.7.15. Propriété

– $a\lambda b \geq a \vee b$, $a\sigma b \leq a \wedge b \quad \forall a, b \in [0,1]$

Preuve:

D'une part

$$a|b \geq b \Rightarrow (a|b)|b \geq b \Rightarrow a\lambda b \geq b$$

D'autre part

$$\begin{aligned} a * (a|b) &\leq b \Rightarrow a|b * a \leq b \\ &\Rightarrow a \leq (a|b)|b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \wedge b \geq a$$

$$a \wedge b \geq b \text{ et } a \wedge b \geq a \Rightarrow a \wedge b \geq a \vee b$$

2.1.7.16. Propriété

$$- a \wedge b = b \Leftrightarrow a \leq b, \quad a \vee b = b \Leftrightarrow a \geq b \quad \forall a, b \in [0,1]$$

Preuve:

D'une part

$$a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a \Rightarrow a \wedge b = 1 \wedge b = b$$

D'autre part

$$a \wedge b = b \Rightarrow a \vee b \leq b, \text{ d'où } a \vee b = b, \text{ c'est à dire } a \leq b.$$

2.2. Distribution de possibilité conditionnelle

2.2.1. **Mesure floue et mesure de possibilité**

2.2.1.1. Définition

Soit A un ensemble. Une mesure floue sur A est une application $m: [0,1]^A \rightarrow [0,1]$ telle que

- $m(\emptyset) = 0$ et $m(A) = 1$.
- $E \subset F \Rightarrow m(E) \leq m(F). \quad \forall E, F \in [0,1]^A$

Une conséquence immédiate de cette définition est que

- $m(E \cup F) \geq m(E) \vee m(F) \quad \forall E, F \in [0,1]^A.$

2.2.1.2. Définition

Une mesure de possibilité est une mesure floue Π telle

$$- \Pi(E \cup F) = \Pi(E) \vee \Pi(F) \quad \forall E, F \in [0,1]^A.$$

2.2.1.3. Définition

Une distribution de possibilité sur A est une application $\pi: A \rightarrow [0,1]$. Elle est dite normalisée si et seulement si

$$- \bigvee_{a \in A} \pi(a) = 1$$

Cette condition de normalisation trouve son équivalent en théorie des probabilités par la formule $\sum p(a) = 1$, où $(p(a))_{a \in A}$ est une distribution de probabilité.

2.2.1.4. Remarque

Une distribution de possibilité $(\pi(a))_{a \in A}$ peut être interprétée comme un sous-ensemble flou E de A en posant $\pi(a) = \mu_E(a) \quad \forall a \in A$.

A partir d'une distribution de possibilité π sur A , il est possible de construire une mesure de possibilité Π sur $[0,1]^A$ par la formule

$$- \Pi(E) = \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \mu_E(a)$$

En théorie des probabilités, la formule analogue est $P(E) = \sum p(a) \cdot 1_E(a)$. Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, i.e. $p(a) = \frac{1}{|A|}$, on obtient la probabilité uniforme définie par $P(E) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum 1_E(a) = \frac{|E|}{|A|}$. En théorie des possibilités, dire que tous les événements élémentaires ont le même degré de possibilité de réalisation équivaut à dire que $\pi(a) = 1 \quad \forall a \in A$. En reportant ce

résultat dans la définition de $\Pi(E)$, on aboutit à une mesure de possibilité qu'on peut qualifier d'uniforme définie par

$$- \Pi_o(E) = \bigvee_{a \in A} \mu_E(a)$$

Cette mesure de possibilité uniforme doit être utilisée avec beaucoup de précautions car elle correspond à une ignorance totale si tous les événements sont du type normal; c'est à dire si $\forall E \subset A, h(E)=1$. Néanmoins, comme en théorie des probabilités, cette possibilité uniforme permet de disposer sur $[0,1]^A$ d'une mesure de possibilité, en l'absence de connaissances a priori sur A. En effet, une connaissance a priori sur A permettrait de disposer pour chaque événement élémentaire a, d'un degré de possibilité de réalisation $\pi(a)$, et par conséquent, d'une mesure de possibilité Π sur $[0,1]^A$. C'est toute la problématique des pondérations probabilistes que l'on retrouve ici.

2.2.1.5. Définitions

Soient A et B deux ensembles. Pour mesurer l'influence réciproque entre A et B, on introduit une distribution de possibilité conjointe $\pi(a,b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Elle indique dans quelle mesure il est possible que les éléments a et b apparaissent en même temps. Cette distribution peut être vue comme une relation floue sur le produit cartésien $A \times B$ définie par $\pi(a,b) = \mu_R(a,b)$.

On appelle distribution de possibilité marginale sur A, la projection π_1 de R sur A définie par

$$- \pi_1(a) = \bigvee_{b \in B} \pi(a,b) \quad \forall a \in A$$

C'est le pendant d'une probabilité marginale p_1 définie à partir d'une probabilité conjointe p par $p_1(a) = \sum_{b \in B} p(a,b)$, l'addition de la théorie des probabilités étant remplacée par le max.

De même sur B on a

$$- \pi_2(b) = \bigvee_{a \in A} \pi(a, b) \quad \forall b \in B.$$

Pour ne pas multiplier les notations, on écrira π en lieux et places de π_1 et de π_2 .

Les deux équations définissant π_1 et π_2 impliquent

$$- \pi(a, b) \leq \pi(a) \wedge \pi(b) \quad \forall (a, b) \in A \times B$$

2.2.1.6. Définitions

L'influence réciproque entre A et B peut également être étudiée par l'intermédiaire d'une distribution de possibilité conditionnelle $\pi(b/a)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Elle mesure le degré avec lequel il est possible que l'élément $b \in B$ apparaisse sachant que l'élément $a \in A$ est pris en considération.

Les ensembles A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$- \pi(b/a) = \pi(b) \quad \forall a \in A \quad \text{et} \quad \forall b \in B.$$

Moins forte que l'indépendance, la non-interaction entre A et B se traduit par

$$- \pi(a, b) = \pi(a) \wedge \pi(b) \quad \forall a \in A \quad \text{et} \quad \forall b \in B.$$

2.2.1.7. Commentaires

Cette notion d'interaction n'a pas d'équivalent en théorie des probabilités, ou plutôt les notions de dépendance et d'interaction sont confondues. En théorie des possibilités, les deux notions ne coïncident pas forcément. Tout dépend de la façon dont est définie la distribution de possibilité conditionnelle. Avec la formulation de Hisdal (78), l'indépendance implique la non-interaction, mais pas l'inverse. La formulation de Nguyen (78), bien que moins intuitive, conduit à l'équivalence entre les deux notions. D'où l'intérêt qu'elle présente dans certains domaines.

2.2.2. Conditionnement suivant Hisdal

Suivant Hisdal (78), une distribution de possibilité conditionnelle $(\pi(b/a))_{a,b}$ est implicitement définie par:

$$- \pi(a,b) = \pi(a) \wedge \pi(b/a).$$

Cette équation de Hisdal a une traduction naturelle de la formule des probabilités composées

$$- p(a,b) = p(a)p(b/a).$$

En résolvant cette équation, on obtient

$$- \pi(b/a) = \begin{cases} \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ [\pi(a,b), 1] & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \end{cases}$$

La ligne du bas de la partie droite de l'équation précédente indique qu'une distribution de possibilité conditionnelle peut prendre n'importe quelle valeur entre $\pi(a,b)$ et 1 dès l'ors que $\pi(a) = \pi(a,b)$. En tenant compte de la définition de la distribution marginale on obtient

$$- \pi(b) = \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b/a) \quad \forall b \in B.$$

2.2.3. Conditionnement suivant Dubois-Prade

Dubois et Prade (87) proposent de prendre pour distribution de possibilité conditionnelle, la plus grande solution de l'équation de Hisdal, soit

$$- \pi(b/a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \\ \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \end{cases}$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$- \pi(b/a) = \pi(a) \alpha \pi(a,b)$$

où α est l'opérateur de pseudo-division associé à la conjonction min.

Dans la définition implicite du conditionnement de Hisdal, l'opérateur $\wedge$ peut être remplacé par n'importe quel opérateur de conjonction $*$. En choisissant pour distribution conditionnelle, la plus grande solution t de l'équation $\pi(a,b) = \pi(a)*t$, on obtient

$$- \pi(b/a) = \pi(a) | \pi(a,b)$$

où $|$ est l'opérateur de pseudo-division associé à la conjonction $*$.

Cette équation, qui donne l'expression de la distribution de possibilité conditionnelle associée à la conjonction $*$, est une généralisation du conditionnement $\pi(b/a) = \pi(a) \alpha \pi(a,b)$ à des conjonctions autres que la conjonction min. Ainsi, si l'on choisit par exemple la conjonction produit, on obtient une distribution conditionnelle définie par:

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \pi(a) \beta \pi(a,b) \\ &= 1 \wedge \frac{\pi(a,b)}{\pi(a)} \end{aligned}$$

soit

$$- \pi(b/a) = \frac{\pi(a,b)}{\pi(a)}$$

C'est une forme similaire à celle que l'on retrouve en théorie des probabilités.

2.2.4. Conditionnement suivant Nguyen

Nguyen (78) a choisi une approche différente de celle de Hisdal pour définir une distribution de possibilité conditionnelle. Il définit ce qu'il a appelé "distribution de possibilité conditionnelle normalisée" de telle sorte que, par analogie avec ce que l'on retrouve en théorie des probabilités, la notion de non-interaction possibiliste soit équivalente avec la notion d'indépendance.

Cette contrainte l'a mené à la formule

$$- \pi(b/a) = \begin{cases} \pi(a, b) & \text{si } \pi(a) \geq \pi(b) \\ \pi(a, b) \cdot \frac{\pi(b)}{\pi(a)} & \text{si } \pi(a) < \pi(b) \end{cases}$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$- \pi(b/a) = \frac{\pi(a, b)}{\pi(a)} \cdot (\pi(a) \vee \pi(b))$$

Cette distribution de possibilité conditionnelle est identique, à un facteur multiplicatif près, à la distribution conditionnelle donnée par Dubois-Prade et associée à la conjonction produit. C'est ce facteur qu'il convient d'appeler, pour reprendre la terminologie de Nguyen, "facteur de normalisation". C'est à dire un coefficient qui permet à une distribution conditionnelle, de respecter l'équivalence entre la non-interaction et l'indépendance.

2.3. Distribution conditionnelle normalisée

Dans toute la suite du présent papier, $*$ représente une conjonction idempotente, archimédienne stricte ou nilpotente, $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à $*$ et λ l'opérateur de maximisation associé à $|$.

2.3.1. Construction

Nous proposons ici une démarche générale permettant de construire une distribution de possibilité conditionnelle $(\pi(b/a))_{a,b}$ qui conserve l'équivalence dépendance-interaction, c'est à dire telle que

$$- \pi(b/a) = \pi(b) \Leftrightarrow \pi(a, b) = \pi(a) \wedge \pi(b).$$

C'est ce type de distribution que nous appellerons distribution de possibilité conditionnelle normalisée.

Pour construire une telle distribution, nous allons adjoindre un facteur ϕ (relatif à $*$) à la distribution de possibilité conditionnelle proposée par Dubois-Prade de telle sorte que l'équivalence dépendance-interaction soit vérifiée. Cela donne

$$- \pi(b/a) = (\pi(a)|\pi(a,b)) * \phi(\pi(a), \pi(b))$$

Pour satisfaire cette équivalence, la fonction ϕ doit vérifier

$$\begin{aligned} \pi(b) &= [\pi(a)|(\pi(a)\wedge\pi(b))] * \phi(\pi(a), \pi(b)) \\ &= (\pi(a)|\pi(b)) * \phi(\pi(a), \pi(b)) \end{aligned}$$

ou encore

$$- (x|y) * \phi(x, y) = y \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

Ainsi, nous sommes amenés à résoudre l'équation

$$- (x|y) * t = y$$

Cette équation admet une solution t comprise entre 0 et 1. En effet, la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = (x|y) * t$ est continue (car $*$ est continue). Et comme $f(0) = 0$ et $f(1) = x|y$, f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et $x|y$. En particulier, f prend la valeur y car $y \leq (x|y)$.

Mais cette solution n'est pas unique. Comme dans pareille situation, on opte pour le choix le moins arbitraire en retenant la plus grande solution, à savoir:

$$- \phi(x, y) = (x|y)|y$$

La fonction ϕ ainsi définie n'est rien d'autre que l'opérateur de maximisation λ associé à la pseudo-division $|$: $\phi(x, y) = x\lambda y$

L'expression de la distribution de possibilité conditionnelle normalisée ainsi obtenue est donnée par:

$$- \pi(b/a) = [\pi(a)|\pi(a,b)] * [\pi(a)\lambda\pi(b)]$$

2.3.2. Unicité

Bien que la solution à l'équation $(x|y)*t=y$ ne soit pas unique, la distribution de possibilité conditionnelle normalisée est unique en ce sens que

$$- \pi(a)|\pi(a,b) * \varphi(\pi(a),\pi(b)) = \pi(a)|\pi(a,b) * \pi(a)\lambda\pi(b)$$

pour toute fonction φ telle que $(x|y)*\varphi(x,y)=y$

preuve:

Si $*$ est une conjonction archimédienne stricte ou nilpotente, le problème d'unicité ne se pose pas car l'équation $(x|y)*t=y$ admet dans ce cas une solution unique qui est $t = x \vee y$.

En effet si f est le générateur de la conjonction $*$, alors

$$\begin{aligned} (x|y)*t = y &\Rightarrow f(x|y) + f(t) = f(y) \\ &\Rightarrow 0 \vee (f(y)-f(x)) + f(t) = f(y) \\ &\Rightarrow f(t) = f(y) - 0 \vee (f(y)-f(x)) = f(x \vee y) \\ &\Rightarrow t = x \vee y \end{aligned}$$

Si $*$ est la conjonction min,

D'une part

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \min \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \\ \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ 1 & \text{si } \pi(a) > \pi(b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) \leq \pi(b) \end{array} \right. \\ &= \min \left| \begin{array}{ll} \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ 1 & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \\ 1 \text{ ou } \pi(b) & \end{array} \right. \\ &= \left| \begin{array}{ll} \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'autre part

les solutions à $(\pi(a) \alpha \pi(a,b)) \wedge t = \pi(b)$ sont

$$t = \begin{cases} [\pi(b), 1] & \text{si } \pi(a) > \pi(b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) \leq \pi(b) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} (\pi(a) \alpha \pi(a,b)) \wedge t &= \min \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \\ \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) \leq \pi(b) \\ [\pi(b), 1] & \text{si } \pi(a) > \pi(b) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi(a,b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a,b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) = \pi(a,b) \end{cases} \end{aligned}$$

2.3.3. Quelques propriétés du conditionnement normalisé

2.3.3.1. Propriété

– $\pi(a) > \pi(b) \Rightarrow \pi(b/a) = \pi(a,b)$

preuve:

si $*$ est opérateur archimédien strict ou nilpotent, alors

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \pi(a) | \pi(a,b) * (\pi(a) \vee \pi(b)) \\ &= \pi(a) * \pi(a) | \pi(a,b) \\ &= \pi(a) \wedge \pi(a,b) \\ &= \pi(a,b) \end{aligned}$$

si $*$ est l'opérateur min, alors

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \pi(a) \alpha \pi(a,b) \wedge [\pi(a) \alpha \pi(b)] \alpha \pi(b) \\ &= \pi(a) \alpha \pi(a,b) \wedge 1 \\ &= \pi(a,b) \end{aligned}$$

2.3.3.2. Propriété

$$- \pi(a,b) = \pi(b)|\pi(a) * \pi(b/a)$$

preuve

$$\text{si } \pi(b) < \pi(a), \text{ alors } \pi(b)|\pi(a) * \pi(b/a) = \pi(a,b)$$

$$\text{si } \pi(b) \geq \pi(a), \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} \pi(b)|\pi(a) * \pi(b/a) &= \pi(b)|\pi(a) * \pi(a)|\pi(a,b) * \pi(a)\lambda\pi(b) \\ &= \pi(b) * \pi(b)|\pi(a) * \pi(a)|\pi(a,b) \\ &= \pi(a) \wedge \pi(b) * \pi(a)|\pi(a,b) \\ &= \pi(a) * \pi(a)|\pi(a,b) \\ &= \pi(a) \wedge \pi(a,b) \\ &= \pi(a,b) \end{aligned}$$

2.3.3.3. Propriété

$$- \pi(a,b) \leq \pi(b/a) \leq \pi(b)$$

preuve

$$\begin{aligned} \pi(a,b) &= \pi(b)|\pi(a) * \pi(b/a) \\ &\leq \pi(b)|\pi(a) \wedge \pi(b/a) \\ &\leq \pi(b/a) \\ \pi(a,b) \leq \pi(b) &\Rightarrow \pi(a)|\pi(a,b) \leq \pi(a)|\pi(b) \\ &\Rightarrow \pi(b/a) \leq \pi(a)|\pi(b) * \pi(a)\lambda\pi(b) = \pi(b) \end{aligned}$$

2.3.3.4. Propriété

$$- \pi(b) = \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b/a)$$

preuve:

$$\begin{aligned} \pi(a,b) \leq \pi(b/a) \leq \pi(b) &\Rightarrow \pi(a,b) \leq \pi(a) \wedge \pi(b/a) \leq \pi(a) \wedge \pi(b) \\ &\Rightarrow \bigvee_{a \in A} \pi(a,b) \leq \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b/a) \leq \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi(b) \leq \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b/a) \leq \pi(b)$$

$$\Rightarrow \pi(b) = \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \pi(b/a)$$

2.3.3.5. Propriété

$$- \pi(b/a) = \pi(b) \Leftrightarrow \pi(a,b) = \pi(a) \wedge \pi(b)$$

preuve:

Si $\pi(b/a) = \pi(b)$, alors

$$\begin{aligned} \pi(a,b) &= \pi(b) * \pi(a) | \pi(a) \\ &= \pi(a) \wedge \pi(b) \end{aligned}$$

Si $\pi(a,b) = \pi(a) \wedge \pi(b)$, alors

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \pi(a) | [\pi(a) \wedge \pi(b)] * \pi(a) \lambda \pi(b) \\ &= \pi(a) | \pi(b) * \pi(a) \lambda \pi(b) \\ &= \pi(b) \end{aligned}$$

2.3.3.6. Propriété

$$- \pi(a) = \pi(a,b) \Rightarrow \pi(b/a) = \pi(b)$$

preuve:

Si $\pi(a) = \pi(a,b)$, alors

$$\pi(a,b) = \pi(a) \wedge \pi(b)$$

et donc $\pi(b/a) = \pi(b)$

2.3.4. **Cas de la conjonction min**

si l'opérateur $*$ est la conjonction min, alors l'expression de la distribution conditionnelle normalisée prend la forme

$$- \pi(b/a) = \begin{cases} \pi(a, b) & \text{si } \pi(a) > \pi(a, b) \\ \pi(b) & \text{si } \pi(a) = \pi(a, b) \end{cases}$$

Cette distribution vérifie les propriétés suivantes:

2.3.4.1. Propriété

$$- \pi(b/a) = \pi(b) \wedge \pi(a) \alpha \pi(a, b)$$

preuve:

D'après l'unicité de $\pi(b/a)$ on a

$$\pi(b/a) = \pi(a) \alpha \pi(a, b) \wedge t$$

quel que soit t solution de l'équation $\pi(a) \alpha \pi(a, b) \wedge t = \pi(b)$.

Or $\pi(b)$ est solution de cette dernière équation,

c'est à dire $\pi(a) \alpha \pi(a, b) \wedge \pi(b) = \pi(b)$.

D'où le résultat.

2.3.4.2. Propriété

$$- \pi(a, b) = \pi(a) \wedge \pi(b/a)$$

preuve:

$$\begin{aligned} \pi(a) \wedge \pi(b/a) &= \pi(b) \wedge \pi(a) \wedge [\pi(a) \alpha \pi(a, b)] \\ &= \pi(b) \wedge \pi(a) \wedge \pi(a, b) \\ &= \pi(a, b) \end{aligned}$$

La formulation de la distribution de possibilité conditionnelle normalisée définie dans le cas de la conjonction min est compatible avec celle de Hisdal dans la mesure où $\pi(b/a) = \pi(b) \in [\pi(a, b), 1]$ si $\pi(a) = \pi(a, b)$. Elle est néanmoins différente de celle de Dubois-Prade dans la mesure où au lieu de prendre pour $\pi(b/a)$, la solution plus grande solution t de l'équation $\pi(a, b) = \pi(a) \wedge t$, nous prenons la solution de $\pi(a, b) = \pi(a) \wedge t$ telle que $\pi(a, b) = \pi(a) \wedge \pi(b) \Rightarrow \pi(b/a) = \pi(b)$. Cette différence se retrouve dans le cas général entre la distribution conditionnelle

normalisée et la distribution conditionnelle non normalisée. En effet, si $\pi(a)=\pi(a,b)$, dans le cas normalisé on a $\pi(b/a)=\pi(b)$ et dans le cas non normalisé, on a $\pi(b/a)=1$.

2.3.5. Cas d'une conjonction archimédienne.

si l'opérateur $*$ est conjonction archimédienne, alors

$$- \pi(b/a) = [\pi(b)|\pi(a)]|\pi(a,b)$$

preuve

si l'opérateur $*$ est généré par la bijection f , on a

$$\begin{aligned} f(\pi(b/a)) &= f[(\pi(a)|\pi(a,b))*(\pi(a)\vee\pi(b))] \\ &= f(\pi(a,b))-f(\pi(a))+f(\pi(a)\vee\pi(b)) \\ &= f(\pi(a,b))-f(\pi(a))+f(\pi(a))-0\vee[f(\pi(a))-f(\pi(b))] \\ &= f(\pi(a,b))-0\vee[f(\pi(a))-f(\pi(b))] \\ &= f(\pi(a,b))-f[\pi(b)|\pi(a)] \\ &= f[(\pi(b)|\pi(a))|\pi(a,b)] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

En particulier, si l'opérateur $*$ est la conjonction produit, on a

$$\begin{aligned} \pi(b/a) &= \frac{\pi(a,b)}{\pi(b)\beta\pi(a)} \\ &= \frac{\pi(a,b)}{1 \wedge \frac{\pi(a)}{\pi(b)}} \\ &= \frac{\pi(a,b)}{\frac{\pi(a) \wedge \pi(b)}{\pi(b)}} \\ &= \frac{\pi(a,b)}{\pi(a)} \cdot (\pi(a)\vee\pi(b)) \end{aligned}$$

On retrouve là, le résultat du conditionnement possibiliste donné par Nguyen

2.3.6. Exemple

Pour illustrer notre démarche sur le conditionnement possibiliste normalisé, voici un petit exemple sur la fréquentation des bus. Considérons une compagnie de transport en commun qui souhaite lancer des bus sur une nouvelle ligne. Le directeur de la compagnie s'intéresse au taux de remplissage de son bus tout au long de la journée. Mais il s'intéresse également à la destination des personnes qui prennent le bus. On suppose que le bus circule entre 5^H et 20^H. Pour simplifier, on va diviser cette période en trois: Matin, de 5^H à 10^H; Midi, de 10^H à 15^H; Soir, de 15^H à 20^H. On suppose de plus que les gens prennent le bus pour aller soit au travail (Trav), soit pour aller faire des courses (Cour), soit pour les loisirs (Lois). Ainsi, entre l'ensemble $A=\{\text{Matin, Midi, Soir}\}$ des tranches horaires de la journée et l'ensemble $B=\{\text{Trav, Cour, Lois}\}$ des postes du budget temps, il peut s'établir une relation floue telle que par exemple

$\pi(a,b)$	Trav	Cour	Lois	
Matin	.2	.5	.3	.5
Midi	1	.7	0	1
Soir	.1	0	.2	.2
	1	.7	.3	

Par exemple, à la croisée de la ligne Soir et de la colonne Trav, on a $\pi(\text{Soir, Trav}) = .1$ qui évalue la possibilité d'aller au travail en bus le soir. On a également porté les distributions marginales sur A et sur B. Ainsi, $\pi(\text{Soir}) = .2$ exprime le degré avec lequel il est possible de sortir le soir en bus, et $\pi(\text{Trav}) = 1$ le degré avec lequel il est possible d'aller au travail en bus. En appliquant la formule du conditionnement possibiliste normalisé associé à la conjonction min, on obtient le tableau ci-dessous donnant l'expression de la distribution de possibilité conditionnelle normalisée $\pi(b/a)$.

$\pi(b/a)$	Trav	Cour	Lois
Matin	.2	.7	.3

Midi	1	.7	0
Soir	.1	0	.3

Par exemple, $\pi(\text{Trav}/\text{Soir}) = .1$ exprime le degré avec lequel il est possible d'aller au travail en bus sachant qu'on est à la tombée de la nuit.

2.4. Opérateurs flous et différence symétrique

2.4.1. Généralités

2.4.1.1. Définition

Soient E et F deux sous-ensembles nets d'une même référentiel Ω . On appelle différence de E par F et on note $E-F$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F . Par définition, on a

$$- E-F = E - (E \cap F) .$$

Et comme E et F sont des sous-ensembles d'un même référentiel Ω , on a

$$- E-F = E \cap \bar{F}$$

où $\bar{F}$ désigne le complémentaire de F dans Ω , c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à F .

2.4.1.2. Définition

On appelle différence symétrique entre E et F et on note $E \Delta F$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à E ou à F sans appartenir aux deux à la fois. Donc par définition, on a

$$- E \Delta F = E \cup F - E \cap F.$$

Pour un élément ω de Ω donné, si on pose
 $a = 1_E(\omega)$ et $b = 1_F(\omega)$, on a
 $1_{E-F}(\omega) = a \bullet \bar{b}$ et $1_{E\Delta F}(\omega) = a \dot{+} b - a \bullet b$
 où $\bullet$ (resp. $\dot{+}$) désigne le produit (resp. la somme) booléen.

a	b	$a \dot{+} b - a \bullet b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

tableau: différence symétrique

2.4.2. Différence

Nous nous proposons à présent d'étendre cette notion de différence entre deux sous-ensembles au cas flou, i.e. donner un sens à $E-F$ quand E et F sont deux sous-ensembles flous d'un même référentiel Ω . Une première extension de cette notion a été proposée Kaufmann (73):

$$- \mu_{E-F}(\omega) = \mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

C'est la transposition au cas flou de la définition de la différence entre sous-ensembles nets car $\mu_E(\omega) \wedge \mu_{\bar{F}}(\omega)$ est la fonction d'appartenance de $E \cap \bar{F}$.

L'inconvénient majeur de cette extension est que si E est inclu dans F , on n'a pas $E-F = \emptyset$ comme dans le cas booléen.

2.4.2.1. Définition

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω . On appellera différence de E par F , le sous-ensemble flou noté $E-F$ et définit par

$$- \mu_{E-F}(\omega) = 1 - \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

2.4.2.2. Propriété.

$$(E-F) \cap (F-E) = \emptyset$$

preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{(E-F) \cap (F-E)}(\omega) &= \mu_{(E-F)}(\omega) \wedge \mu_{(F-E)}(\omega) \\ &= [1 - \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)] \wedge [1 - \mu_F(\omega) \vee \mu_E(\omega)] \\ &= 1 - [\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \vee \mu_E(\omega)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\forall a, b \in [0, 1], \quad a \vee b \wedge b \vee a = 1$.

en effet,

si $a \leq b$, alors $a \vee b = 1$ et $a \vee b \wedge b \vee a = 1 \wedge b \vee a = 1$

si $a \geq b$, alors $b \vee a = 1$ et $a \vee b \wedge b \vee a = a \vee b \wedge 1 = 1$

2.4.2.3. Propriété

$$- E-F = E-(E \cap F)$$

preuve:

Elle tient au fait que $a|(a \wedge b) = a \vee b$

et donc $1 - a \vee b = 1 - a|(a \wedge b)$.

En posant $a = \mu_E(\omega)$ et $b = \mu_F(\omega)$, on obtient le résultat.

2.4.2.4. Remarque

On a bien $E \subset F \Rightarrow E-F = \emptyset$.

En effet,

$$\begin{aligned} E \subset F &\Rightarrow \mu_E(\omega) \leq \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\ &\Rightarrow \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) = \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\ &\Rightarrow \mu_{E-F}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned}$$

i.e. $E-F = \emptyset$.

On vérifie sans peine que cette définition est une extension de la différence nette. Le choix du type de pseudo-division $|$ dans la définition de la différence dépend des préoccupations que l'on a, et en particulier la façon de traduire le fait qu'un individu ω appartient de façon nette au sous-ensemble $E-F$.

2.4.2.5. Exemple.

Si l'opérateur $|$ est la pseudo-division associée à la conjonction de Lukasiewicz, c'est à dire $a|b = 1 \wedge (1-a+b)$, alors la différence $E-F$ sera donnée par

$$- \mu_{E-F}(\omega) = 0 \vee (\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega))$$

Dire dans ce cas que ω appartient de façon nette à $E-F$ revient à dire que $\mu_{E-F}(\omega) = 1$, i.e. $\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega) = 1$

Mais comme $\mu_E(\omega)$ et $\mu_F(\omega)$ appartiennent à $[0,1]$, on a

$$\mu_E(\omega) = 1 + \mu_F(\omega) \Rightarrow \mu_E(\omega) = 1 \text{ et } \mu_F(\omega) = 0.$$

Autrement dit, dire qu'un individu appartient de façon nette à $E-F$ revient à dire qu'il appartient de façon nette à E et à $\bar{F}$.

2.4.2.6. Exemple.

Si l'on prend pour $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à la conjonction produit, i.e.

$$- a|b = 1 \wedge \frac{b}{a}$$

alors la différence symétrique entre deux sous-ensembles flous E et F est donnée par

$$- \mu_{E-F}(\omega) = 0 \vee \left(1 - \frac{\mu_F(\omega)}{\mu_E(\omega)}\right).$$

Et dans ce cas, dire que qu'un individu ω appartient de façon nette à $E-F$ signifie que $\mu_F(\omega) = 0$, c'est à dire que cet individu appartient de façon nette à $\bar{F}$.

2.4.3. Différence symétrique

2.4.3.1. Définition

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω . On appellera différence symétrique de E et de F , le sous-ensemble flou noté $E\Delta F$ et définit par

$$- \mu_{E\Delta F}(\omega) = 1 - \mu_{E\cup F}(\omega) \mid \mu_{E\cap F}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Lorsque que les sous-ensembles E et F sont nets, on vérifie que cette définition coïncide avec la différence symétrique Booléenne. De plus, on retrouve deux propriétés intéressantes et bien connues de la différence et de la différence symétrique:

2.4.3.2. Propriété

$$- E\Delta F = (E-F) \cup (F-E)$$

preuve:

Le résultat s'obtient en posant $a=\mu_E(\omega)$ et $b=\mu_F(\omega)$

et en remarquant que $(a\vee b) \mid (a\wedge b) = a \mid b \wedge b \mid a \quad \forall a, b \in [0,1]$.

2.4.3.3. Remarque.

Par définition de la différence symétrique, on a $E\Delta F = E\cup F - E\cap F$. Ce qui correspond au sens commun donné à la notion de différence symétrique.

2.4.3.4. Exemple.

Si l'opérateur $|$ est associé à la conjonction de Lukasiewicz, alors la différence symétrique est donnée par

$$\begin{aligned}\mu_{E\Delta F}(\omega) &= \mu_{E\cup F}(\omega) - \mu_{E\cap F}(\omega) \\ &= |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|,\end{aligned}$$

2.4.3.5. Exemple.

Si l'on choisit d'utiliser la conjonction produit, alors on a

$$\begin{aligned}\mu_{E\Delta F}(\omega) &= 1 - \frac{\mu_{E\cap F}(\omega)}{\mu_{E\cup F}(\omega)} \\ &= \frac{|\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|}{\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)}\end{aligned}$$

Chapitre 3

3. Applications floues et correspondance possibiliste

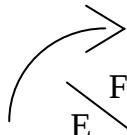
3.1. Applications floues

L'objet de ce paragraphe est de proposer une extension au cas flou, de la notion d'application entre ensembles, avec pour objectif de conserver le maximum de propriétés possible des applications classiques. Commençons d'abord par rappeler ce l'on entend par correspondance entre deux ensembles.

3.1.1. Applications nettes.

Soient E et F deux référentiels. Une correspondance entre E et F est une relation R de E vers F. Une telle relation se présente sous la forme d'un tableau à deux entrées E et F, où à la croisée de la ligne x et de la colonne y, on a le nombre $1_R(x,y)$ qui vaut 1 ou 0 selon que x et y sont en relation ou non:

$$- 1_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est en relation avec } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$E \backslash F$		y		
x		$1_R(x,y)$		

Tableau 3.1 : Correspondance nette

3.1.1.1. Définition

Pour un élément x de E donné, on appelle coupe suivant x , et on note $C(x)$, l'ensemble des éléments y de F qui sont en relation avec x :

$$- C(x) = \{y \in F / 1_R(x, y) = 1\}$$

On peut encore définir la coupe suivant x par la valeur de sa fonction indicatrice:

$$- 1_{C(x)}(y) = 1_R(x, y) \quad \forall y \in F$$

De même, pour $y \in F$, on définit la coupe suivant y par

$$- C(y) = \{x \in E / 1_R(x, y) = 1\}$$

ou encore

$$- 1_{C(y)}(x) = 1_R(x, y) \quad \forall x \in E$$

3.1.1.2. Définition

On appelle application nette (ou application tout court), une correspondance de E vers F telle que

$$- |C(x)| = 1 \quad \forall x \in E$$

où $|\bullet|$ est le cardinal.

Cette condition traduit le fait que sur chaque ligne du tableau de correspondance nette, on retrouve une fois et une seule, le chiffre 1. Ou encore que chaque élément x de l'ensemble de départ E a une image et une seule y dans l'ensemble d'arrivée. L'image d'un élément x de E par l'application X est alors donnée par

$$- X(x) = C(x) \quad \forall x \in E.$$

L'application X est entièrement définie par la connaissance de $X(x) \forall x \in E$. On dit aussi que X est une correspondance de E vers F , fonctionnelle par rapport à la seconde variable.

3.1.1.3. Définition

Soit X une application de E dans F et A un sous-ensemble de E . On appelle image de A par X , le sous-ensemble de F noté $X(A)$ et défini par

$$- X(A) = \{X(x) / x \in A\}$$

Si A est réduit à un seul élément a , on note $X(a)$, l'ensemble $X(\{a\})$.

3.1.1.4. Définition

Soit X une application de E dans F et B un sous-ensemble de F . On appelle image réciproque de B par X , le sous-ensemble noté $X^{-1}(B)$ et défini par

$$- X^{-1}(B) = \{x \in E / X(x) \in B\}$$

Si B est réduit à un seul élément b , on note $X^{-1}(b)$, l'ensemble $X^{-1}(\{b\})$.

3.1.2. **Propriétés des images et images réciproques nettes**

Nous allons énoncer quelques propriétés bien connues des images et images réciproques de sous-ensembles nets par des applications nettes

3.1.2.1. Propriété

Soit X une application de E vers F . Soit A_1 et A_2 deux sous-ensembles de E . Soit B_1 et B_2 deux sous-ensembles de F . Alors

$$- A_1 \subset A_2 \Rightarrow X(A_1) \subset X(A_2)$$

et

$$- B_1 \subset B_2 \Rightarrow X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2)$$

3.1.2.2. Propriété

Soit X une application de E vers F . Soit A_1 et A_2 deux sous-ensembles de E .
Soit B_1 et B_2 deux sous-ensembles de F . Alors

- $X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2)$
- et
- $X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$

3.1.2.3. Propriété

Soit X une application de E vers F . Soit A_1 et A_2 deux sous-ensembles de E .
Soit B_1 et B_2 deux sous-ensembles de F . Alors

- $X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2)$
- et
- $X^{-1}(B_1 \cap B_2) = X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$

3.1.3. Applications floues

Voyons maintenant comment on peut étendre l'ensemble de ces définitions au cas flou. Soit E et F deux référentiels. Une correspondance floue de E vers F se présente sous la forme d'un tableau $E \times F$ où à la croisée de la ligne x et de la colonne y , on a le nombre $\mu_R(x,y) \in [0,1]$ qui évalue le degré avec lequel x et y sont en relation.

3.1.3.1. Définition

Pour un élément x de E donné, nous appellerons coupe suivant x , le sous-ensemble flou $C(x)$ de F défini par

- $\mu_{C(x)}(y) = \mu_R(x,y) \quad \forall y \in F.$

Cette définition est semblable à celle des coupes nettes, sauf qu'ici, les indicatrices sont remplacées par les fonctions d'appartenance. Si la relation est nette, on retrouve la définition des coupes nettes

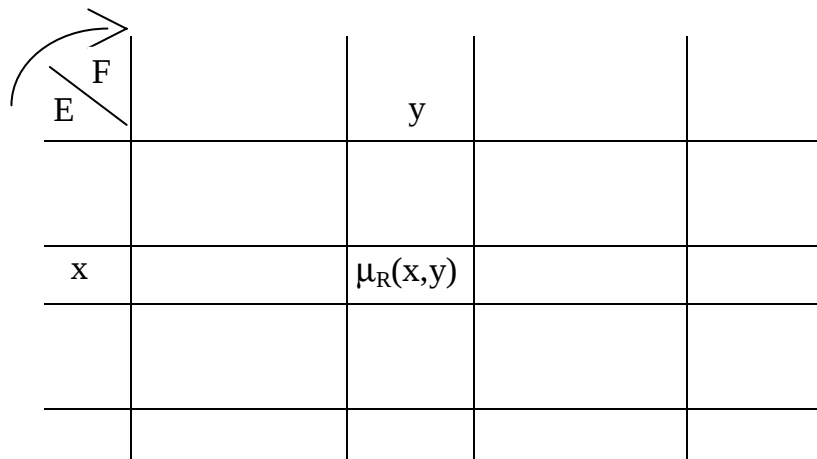


Tableau 3.2 : Correspondance floue.

3.1.3.2. Définition

Soit R une correspondance floue de E vers F et $C(x)$ la coupe suivant un élément x de E . On dira que la correspondance R est une application floue si et seulement si

$$- h(C(x)) = 1 \quad \forall x \in E$$

où h est la hauteur.

D'après la définition de la hauteur, une application floue est telle que

$$- \bigvee_{y \in F} \mu_{C(x)}(y) = 1 \quad \forall x \in E$$

Cette condition traduit le fait que sur chaque ligne du tableau de correspondance floue, on retrouve au moins une fois le chiffre 1. Ou encore que chaque élément de l'ensemble de départ a au moins une image nette dans l'ensemble d'arrivée.

3.1.3.3. Définition

On appellera image floue (ou image tout court) d'un élément x de E par l'application X , le sous-ensemble flou $X(x)$ défini par

$$- X(x) = C(x) \quad \forall x \in E.$$

3.1.3.4. Remarque

Pour reprendre la terminologie traditionnelle, on peut dire qu'une application floue de E vers F est une correspondance floue, fonctionnelle entre E et l'ensemble des sous-ensembles flous de F . C'est à dire une application nette de E vers $[0,1]^F$. Par ailleurs, une application nette n'est qu'une application floue particulière X qui, à tout élément x de E , associe le sous-ensemble flou $X(x)$ défini par

$$- \mu_{X(x)}(y) = 1_{X=y}(x).$$

3.1.3.5. Définitions

Soit X est une application nette de E vers F et A un sous-ensemble flou de E . Le principe d'extension de Zadeh (75) permet de définir à partir de A , un sous-ensemble flou de F , que l'on notera $X(A)$ par

$$- \mu_{X(A)}(y) = \bigvee_{x \in E} \mu_A(x) \cdot 1_{y=X(x)}$$

Le sous-ensemble flou $X(A)$ sera appelé image floue de A par l'application nette X , ou tout simplement image de A par l'application X .

Ce principe s'étend facilement au cas où X est une application floue en posant

$$- \mu_{X(A)}(y) = \bigvee_{x \in E} \mu_A(x) \wedge \mu_{X(x)}(y)$$

$X(A)$ est dans ce cas, l'image floue de A par l'application floue X , ou tout simplement, l'image de A par l'application X .

On dira qu'un élément y de F est image nette d'un élément x de E par l'application floue X si et seulement si

$$- \mu_{X(x)}(y) = 1$$

Cette dernière formule est encore connue sous le nom de « composition max-min ». En effet, si R est une relation floue de E vers F et S une relation floue de F vers G , on définit la composition max-min de R et S , notée SoR par

$$- \mu_{SoR}(x,z) = \bigvee_{y \in F} \mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z) \quad \forall (x,z) \in E \times G$$

Puisque l'on a $\mu_{X(x)}(y) = \mu_R(x,y)$, on peut encore définir l'image de A par l'application X par

$$- X(A) = RoA$$

3.1.3.6. Définition

Soit X une application floue de E vers F . Soit B un sous-ensemble flou de F . Pour définir l'image réciproque de B par X , remarquons que l'image d'un sous-ensemble net par une application nette peut encore se définir par

$$- 1_{X^{-1}(B)}(x) = \sum_{y \in F} 1_B(y) \cdot 1_{X(x)}(y)$$

où $1_{X(x)}$ est la fonction indicatrice sur le singleton $\{X(x)\}$

Nous allons étendre cette formule au cas où l'application X et le sous-ensemble B sont flous en posant

$$- \mu_{X^{-1}(B)}(x) = \bigvee_{y \in F} \mu_B(y) \wedge \mu_{X(x)}(y)$$

Lorsque B est réduit à un seul élément y de F , la formule se réduit à

$$- \mu_{X^{-1}(y)}(x) = \mu_{X(x)}(y)$$

En utilisant la composition max-min, l'image réciproque peut encore se définir par

$$- X^{-1}(B) = B \circ R.$$

3.1.3.7. Remarque

En rapprochant les équations définissant l'image et l'image réciproque, on remarque qu'une ligne x du tableau de correspondance floue représente l'image $X(x)$ de x par X . La colonne y du même tableau est elle, représentée par l'image réciproque $X^{-1}(y)$ de y par X . Par la suite, on écrira $(X=y)$ pour représenter le sous-ensemble flou $X^{-1}(\{y\})$.

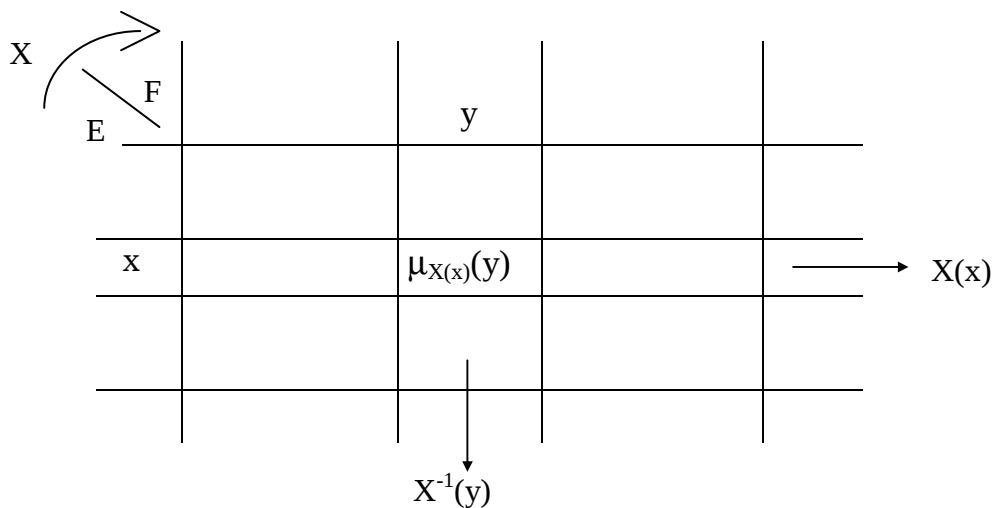


Tableau 3.3 :Correspondance floue, image et image réciproque

3.1.3.8. Remarque

L'image et l'image réciproque par une application X peuvent se définir de façon plus condensée par

$$- \mu_{X(A)}(y) = h(A \cap (X=y))$$

et

$$- \mu_{X^{-1}(B)}(x) = h(B \cap X(x))$$

Ces formes condensées permettent d'utiliser les propriétés de la hauteur pour démontrer certaines propriétés des images et images réciproques. En particulier,

$$- h(A \cup B) = h(A) \vee h(B)$$

et

$$- h(A \cap B) \leq h(A) \wedge h(B)$$

3.1.3.9. Remarque

Les définitions d'image et image réciproque peuvent naturellement s'étendre au cas où l'ensemble de départ ou d'arrivée est un produit d'ensembles en définissant le produit cartésien de sous-ensembles flous par l'intersection de leurs extensions cylindriques au sens de Zadeh (75). Cela signifie que si A est un sous-ensemble flou de E et B un sous-ensemble flou de F, le produit cartésien $A \times B$ est donné par

$$- \mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad \forall x \in E, y \in F$$

Voici deux propriétés intéressantes des applications nettes, qui restent valables dans le cas des applications floues:

3.1.3.10. Propriété

Si $X: E \rightarrow F$ est une application floue, alors

$$- X^{-1}(F) = E$$

preuve:

Par définition de l'image réciproque, on a

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(F)}(x) &= \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \quad \forall x \in E \\ &= h(X(x)) \end{aligned}$$

et comme X est une application floue, on a

$$h(X(x)) = 1 \quad \forall x \in E$$

C'est à dire

$$\mu_{X^{-1}(F)}(x) = 1 \quad \forall x \in E,$$

D'où le résultat.

3.1.3.11. Propriété

$$- \bigcup_{y \in F} (X = y) = E$$

preuve:

$$\begin{aligned} \mu_{\bigcup_{y \in F} (X=y)}(x) &= \bigvee_{y \in F} \mu_{X=y}(x) \\ &= \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \\ &= h(X(x)) = 1 \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3.1.3.12. Définition

On dira qu'une application floue $X:E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si

$$- |\text{noy}(X=y)| \geq 1 \quad \forall y \in F$$

Cela veut dire que sur chaque colonne du tableau de correspondance floue, on retrouve au moins une fois le chiffre 1; ou encore que chaque élément de F est image nette d'au moins un élément de E .

Rappelons que pour un sous-ensemble flou A de E , le noyau de A et le sous-ensemble net de E noté $\text{noy}(A)$ et défini par

$$- \text{noy}(A) = \{x \in E / \mu_A(x) = 1\}$$

3.1.3.13. Remarque

Cette condition de surjectivité équivaut à $X(E) = F$, car $\forall y \in F$,

$$\begin{aligned}
 X(E) = F &\Leftrightarrow \mu_{X(E)}(y) = 1 \quad \forall y \in F \\
 &\Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} \mu_{X(x)}(y) \quad \forall y \in F \\
 &\Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} \mu_{X=y}(x) \quad \forall y \in F \\
 &\Leftrightarrow h(X=y) \quad \forall y \in F \\
 &\Leftrightarrow |\text{noy}(X=y)| \geq 1 \quad \forall y \in F \\
 &\Leftrightarrow X \text{ est surjective}
 \end{aligned}$$

3.1.3.14. Définition

On dira qu'une application floue $X:E \rightarrow F$ est injective si et seulement si

$$- |\text{noy}(X=y)| \leq 1 \quad \forall y \in F$$

Cette condition d'injectivité signifie que chaque élément y de F est image nette par X d'au plus un élément de E . Autrement dit, sur chaque colonne du tableau de correspondances, on retrouve au plus une fois le chiffre 1.

3.1.3.15. Définition

On dira qu'une application floue $X:E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, c'est à dire

$$- |\text{noy}(X=y)| = 1 \quad \forall y \in F$$

On notera que l'ensemble de ces définitions coïncide avec les notions traditionnelles d'injection, de surjection et de bijection lorsque l'application X est nette.

3.1.3.16. Définition

Soient $X:E \rightarrow F$ et $Y:F \rightarrow G$ deux applications floues. L'application composée $Y \circ X: E \rightarrow G$ est définie par

$$- \mu_{Y \circ X}(z) = \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{Y(y)}(z) \quad \forall x \in E, z \in G$$

D'après la définition de l'image floue, on obtient l'associativité de la composition max-min par

$$- (Y \circ X)(x) = Y(X(x)) \quad \forall x \in E.$$

3.1.3.17. Définition

Soit $X:E \rightarrow F$ une application floue et A un sous-ensemble flou de E . On appellera restriction de X sur A , l'application floue $X_A: E \rightarrow F$ définie par

$$- \mu_{X_A}(y) = \mu_A(x) | \mu_{X(x)}(y) \quad \forall x \in E, y \in F$$

où $|$ est un opérateur de pseudo-division.

On voit immédiatement que X_A est bien une application floue et qu'elle coïncide avec X sur le noyau de A . Cela veut dire que si X est nette, alors X_A est sa restriction nette sur A .

3.1.3.18. Exemple.

Considérons l'application floue X représentée par le Tableau 3.4 et le sous-ensemble flou A défini par $A = \{(x_1, .3), (x_2, .7), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, .9)\}$.

Si l'on choisit par exemple la pseudo-division associée à la conjonction produit et définie par $a|b = 1 \wedge \frac{b}{a}$, alors la restriction de X sur A est donnée par le Tableau 3.5

X	y1	y2	y3	y4	
x ₁	.9	0	1	.4	
x ₂	.2	1	.8	0	
x ₃	.8	0	.7	1	
x ₄	.4	.2	1	0	
x ₅	0	1	0	.8	

Tableau 3.4 : Application floue

X _A	y1	y2	y3	y4	
x ₁	1	0	1	1	
x ₂	.3	1	1	0	
x ₃	.8	0	.7	1	
x ₄	1	1	1	1	
x ₅	0	1	0	.8	

Tableau 3.5 : Restriction floue

Pour obtenir par exemple la seconde ligne du tableau ci-dessus, on calcule

- $.7|.2 = .3$;
- $.7|1 = 1$;
- $.7|.8 = 1$;
- $.7|0 = 0$.

3.1.4. Propriétés des images et images réciproques floues.

Soit $X:E \rightarrow F$ une application floue. Soit $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$ des sous-ensembles flous.

3.1.4.1. Propriété.

$$- A_1 \subset A_2 \Rightarrow X(A_1) \subset X(A_2) \quad \forall x \in E.$$

Preuve:

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \quad \forall x \in E.$$

$$\Rightarrow \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_2}(x) \quad \forall x \in E.$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x \in E} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_1}(x) \leq \bigvee_{x \in E} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_2}(x)$$

$$\Rightarrow \mu_{X(A_1)}(y) \leq \mu_{X(A_2)}(y) \quad \forall y \in F.$$

$$\Rightarrow X(A_1) \subset X(A_2)$$

3.1.4.2. Propriété

$$- B_1 \subset B_2 \Rightarrow X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2)$$

Preuve:

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \mu_{B_1}(y) \leq \mu_{B_2}(y) \quad \forall y \in F.$$

$$\Rightarrow \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_1}(y) \leq \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_2}(y) \quad \forall y \in F$$

$$\Rightarrow \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_1}(y) \leq \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_2}(y)$$

$$\Rightarrow \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \leq \mu_{X^{-1}(B_2)}(x) \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2)$$

3.1.4.3. Propriété

$$- X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \mu_{X(A_1 \cup A_2)}(y) &= h((A_1 \cup A_2) \cap (X=y)) \\ &= h(A_1 \cap (X=y)) \vee h(A_2 \cap (X=y)) \\ &= \mu_{X(A_1)}(y) \vee \mu_{X(A_2)}(y) \\ &= \mu_{X(A_1) \cup X(A_2)}(y) \end{aligned}$$

D'où le résultat

3.1.4.4. Propriété

$$- X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(B_1 \cup B_2)}(x) &= h((B_1 \cup B_2) \cap X(x)) \\ &= h(B_1 \cap X(x)) \vee h(B_2 \cap X(x)) \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \vee \mu_{X^{-1}(B_2)}(x) \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)}(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat

3.1.4.5. Propriété

$$- X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \mu_{X(A_1 \cap A_2)}(y) &= h(A_1 \cap A_2 \cap (X=y)) \\ &\leq h(A_1 \cap (X=y)) \wedge h(A_2 \cap (X=y)) \\ &= \mu_{X(A_1)}(y) \wedge \mu_{X(A_2)}(y) \\ &= \mu_{X(A_1) \cap X(A_2)}(y) \end{aligned}$$

D'où le résultat

3.1.4.6. Propriété

$$- X^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(B_1 \cap B_2)}(x) &= h(B_1 \cap B_2 \cap X(x)) \\ &\leq h(B_1 \cap X(x)) \wedge h(B_2 \cap X(x)) \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \wedge \mu_{X^{-1}(B_2)}(x) \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)}(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3.2. Distance entre parties floues.

Plusieurs notions de distances entre sous-ensembles flous ont été proposées dans la littérature. Citons par exemple une généralisation de la distance de Hamming proposée par Kaufmann (75):

$$- d(E,F) = \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|.$$

où E et F sont deux sous-ensembles flous d'un référentiel Ω . Nous proposons ici, deux notions de distances, paramétrées par le type d'opérateur utilisé. Ces distances semblent mieux adaptées à l'analyse de correspondance possibiliste et au calcul algébrique dans $[0,1]$.

3.2.1. Distance de Tchebychev généralisée.

Rappelons tout d'abord ce que l'on entend par distance de Tchebychev entre deux sous-ensembles nets.

3.2.1.1. Définition

Soit Ω un référentiel. Soient E et F deux sous-ensembles nets de Ω . La distance de Tchebychev entre E et F est donnée par

$$- d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} |1_E(\omega) - 1_F(\omega)|$$

où $\vee$ est le max et 1_E (resp. 1_F) est la fonction indicatrice d'appartenance à E (resp. F).

Avant d'étendre cette définition aux sous-ensembles flous, rappelons qu'une application $d: 2^\Omega \times 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty]$ est une distance si et seulement si

$$\text{i)- } d(E,F) = 0 \Leftrightarrow E = F$$

$$\text{ii)- } d(E,F) = d(F,E) \quad (\text{symétrie})$$

$$\text{iii)- } d(E,G) \leq d(E,F) \oplus d(F,G) \quad (\text{transitivité pour } \oplus)$$

où $\oplus$ est une opération associée à la distance d (généralement une disjonction).

L'on voit que la distance de Tchebychev est bien une distance pour $\oplus = +$.

Si $\oplus$ est l'opération max, alors on dira que la distance d est une ultramétrique, i.e. qu'elle vérifie en plus des deux premières propriétés, l'inégalité:

$$- d(E,G) \leq d(E,F) \vee d(F,G)$$

Le choix de l'opérateur $\oplus$ est étroitement lié à la nature du problème à étudier.

3.2.1.2. Commentaires

Considérons maintenant l'étude d'une distance dans $[0,1]^\Omega$, i.e. le cas où les sous-ensembles en présence sont flous. Une première extension de la distance de Tchebychev au cas flou est donnée par

$$- d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|$$

On peut vérifier que cette application est bien une distance pour $\oplus = +$.

Cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$- d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E\Delta F}(\omega)$$

où Δ est la différence symétrique associée à la conjonction de Lukasiewicz.

L'objet du présent paragraphe est de montrer que ce résultat est généralisable à d'autres opérateurs de conjonction. Considérons le treillis multiplicatif $([0,1], \vee, \wedge, *)$ où $*$ est un opérateur de conjonction sur $[0,1]$. Soit Ω un référentiel quelconque.

On désigne par $\oplus$ l'opérateur de disjonction dual de $*$, i.e. tel que

$$- \overline{a \oplus b} = \bar{a} * \bar{b} \quad \forall a, b \in [0,1].$$

On désigne par $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à la conjonction $*$, et défini par

$$- a|b = \max_{t \in [0,1]} \{a * t \leq b\} \quad \forall a, b \in [0,1].$$

On désigne par Δ , la différence symétrique associée à la conjonction $*$ et définie par

$$- \mu_{E\Delta F}(\omega) = 1 - \mu_{E \cup F}(\omega) | \mu_{E \cap F}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall E, F \in [0,1]^\Omega.$$

On désigne par h la mesure hauteur définie par

$$- h(E) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_E(\omega) \quad \forall E \in [0,1]^\Omega.$$

3.2.1.3. Proposition

Si l'on pose, pour deux sous-ensembles flous E et F , $d(E, F) = h(E\Delta F)$, i.e.

$$- d(E, F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} 1 - [\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)] | [\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)]$$

alors l'application d ainsi définie sur $[0,1]^\Omega$ une distance associée à l'opérateur $\oplus$.

C'est cette distance que nous appellerons distance de Tchebychev généralisée ou encore distance de la hauteur de la différence symétrique. C'est une formulation analogue à celle de la distance du cardinal de la différence symétrique que l'on rencontre souvent en Analyse Des Données, et qui est donnée par

$$- d(E, F) = \frac{1}{n} |E\Delta F| = P(E\Delta F)$$

où P désigne la probabilité uniforme sur 2^Ω .

Dans notre cas, la mesure de probabilité uniforme est remplacée par la mesure de possibilité uniforme qu'est la hauteur.

preuve:

$$\text{On a } d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} 1 - [\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)] | [\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)]$$

$$\text{i)- } d(E,F) = 0 \Leftrightarrow E = F$$

$$d(E,F) = 0 \Leftrightarrow (\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)) | (\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) = \mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \mu_E(\omega) = \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow E = F$$

$$\text{ii)- } d(E,F) = d(F,E)$$

trivial

iii)-

Quel que soit a,b et c appartenant à [0,1], on a

$$a|c * c|b \leq a|b \quad \text{car}$$

$$a * a|c * c|b \leq c * c|b \leq b$$

d'où

$$\begin{aligned} (a|c \wedge c|a) * (b|c \wedge c|b) &= (a|c * b|c) \wedge (a|c * c|b) \wedge (c|a * b|c) \wedge (c|a * c|b) \\ &\leq (a|c * c|b) \wedge (b|c * c|a) \\ &\leq a|b \wedge b|a \end{aligned}$$

Remarquons que $a|b \wedge b|a = (a \vee b) | (a \wedge b)$, car

$$\begin{aligned} a \vee b | a \wedge b &= a|a \wedge a|b \wedge b|a \wedge b|b \\ &= 1 \wedge a|b \wedge b|a \\ &= a|b \wedge b|a \end{aligned}$$

En passant au complément à 1, on a

$$(1 - a \vee b | a \wedge b) \leq (1 - a \vee c | a \wedge c) \oplus (1 - b \vee c | b \wedge c)$$

En posant $a = \mu_E(\omega)$, $b = \mu_F(\omega)$ et $c = \mu_G(\omega)$, on a
 $1 - \mu_{E \cup F}(\omega) | \mu_{E \cap F}(\omega) \leq (1 - \mu_{E \cup G}(\omega) | \mu_{E \cap G}(\omega)) \oplus (1 - \mu_{F \cup G}(\omega) | \mu_{F \cap G}(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$

Remarquons que $\bigvee_i (a_i \oplus b_i) \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i$, car
 $a_j \leq \bigvee_i a_i$ et $b_j \leq \bigvee_i b_i$, entraînent
 $a_j \oplus b_j \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i$; d'où
 $\bigvee_i (a_i \oplus b_i) \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i$.

Finalement, on a
 $\bigvee_{\omega} [1 - \mu_{E \cup F}(\omega) | \mu_{E \cap F}(\omega)] \leq \bigvee_{\omega} [1 - \mu_{E \cup G}(\omega) | \mu_{E \cap G}(\omega)] \oplus [1 - \mu_{F \cup G}(\omega) | \mu_{F \cap G}(\omega)]$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \Delta F}(\omega) &\leq \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \Delta G}(\omega) \oplus \mu_{F \Delta G}(\omega) \\ &\leq \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \Delta G}(\omega) \oplus \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{F \Delta G}(\omega) \end{aligned}$$

D'où

$$d(E, F) \leq d(E, G) \oplus d(G, F)$$

3.2.1.4. Remarque

Il est également possible de définir une distance de Tchebychev entre deux distributions de possibilités. En effet, on peut interpréter une distribution de possibilité π sur Ω comme la fonction d'appartenance à un sous-ensemble flou E tel que $\pi(\omega) = \mu_E(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$. Ainsi pour deux distributions de possibilité π et π' sur Ω , on a

$$- \quad d(\pi, \pi') = \bigvee_{\omega \in \Omega} 1 - [\pi(\omega) \vee \pi'(\omega)] | [\pi(\omega) \wedge \pi'(\omega)]$$

3.2.1.5. Exemple.

Si l'on choisit la conjonction de Lukasiewicz, cela donne

$$- d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|$$

qui est une distance associée à la somme bornée $a \oplus b = 1 \wedge (a+b)$.

Prenons par exemple $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$E = \{(\omega_1, .3), (\omega_2, .2), (\omega_3, 0)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2), (\omega_2, .8), (\omega_3, 1)\}$;

alors on a

$$d(E,F) = .1 \vee .6 \vee 1 = 1.$$

Pour $E = \{(\omega_1, .3), (\omega_2, .2), (\omega_3, 0)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2), (\omega_2, .8), (\omega_3, .5)\}$,

on aura

$$d(E,F) = .1 \vee .6 \vee .5 = .6$$

3.2.1.6. Exemple.

Si l'on choisit la conjonction produit, alors

$$- d(E,F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \frac{|\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|}{\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)}$$

qui est une distance associée à la somme probabiliste $\oplus$ définie par

$$a \oplus b = a + b - ab.$$

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Pour $E = \{(\omega_1, .8), (\omega_2, .2), (\omega_3, 0)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2), (\omega_2, .5), (\omega_3, 1)\}$, on a

$$d(E,F) = \frac{.6}{.8} \vee \frac{.3}{.5} \vee \frac{1}{1} = 1$$

Pour $E = \{(\omega_1, .8), (\omega_2, .2), (\omega_3, 1)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2), (\omega_2, .5), (\omega_3, 1)\}$, on a

$$d(E,F) = \frac{.6}{.8} \vee \frac{.3}{.5} \vee \frac{0}{1} = .75$$

3.2.1.7. Commentaire.

La distance de Tchebychev généralisée présente beaucoup d'avantages, mais aussi quelques inconvénients. L'avantage avec cette famille de distances est qu'elle permet une évaluation qualitative des données par l'utilisation des opérateurs flous. De plus, c'est une distance liée à la différence symétrique, compatible avec l'arithmétique dans le treillis multiplicatif $([0,1], \wedge, \vee, *)$. Mais cette distance n'a d'intérêt pratique que pour des données réellement floues, i.e. qui présentent peu de valeurs booléennes. Dans le cas où les données à analyser sont en majorité booléennes, il est préférable d'utiliser une distance liée, non à la hauteur, mais au cardinal de la différence symétrique.

3.2.2. **Distance du cardinal de la différence symétrique.**

Soient E et F deux sous-ensembles flous d'un référentiel Ω . Si l'on pose $d(E,F) = \text{card}(E \Delta F)$, c'est-à-dire,

$$- d(E,F) = \sum_{\omega \in \Omega} 1 - [\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)] | [\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)],$$

où $|$ est l'opérateur de pseudo-division α de Sanchez, β de Goguen ou γ de Lukasiewicz, alors d est une distance sur $[0,1]^\Omega$.

preuve:

Rappelons que les opérateurs α , β et γ sont définis par:

$$- a \alpha b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

$$- a \beta b = 1 \wedge \frac{b}{a}$$

$$- a \gamma b = 1 \wedge (1 - a + b)$$

$$i)- d(E,F) = 0 \Leftrightarrow E = F$$

$$d(E,F) = 0 \Leftrightarrow (\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)) | (\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) = \mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \mu_E(\omega) = \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow E = F$$

$$\text{ii)-} d(E, F) = d(F, E)$$

trivial

iii)-On a

$$\begin{aligned} d(E, F) &= |E \Delta F| \\ &= |(E-F) \cup (F-E)| \\ &= |E-F| + |F-E| - |(E-F) \cap (F-E)| \\ &= |E-F| + |F-E| \quad \text{car } (E-F) \cap (F-E) = \emptyset \end{aligned}$$

Il faut montrer l'inégalité $d(E, F) \leq d(E, G) + d(G, F)$, i.e.

$$- |E-F| + |F-E| \leq |E-G| + |G-E| + |G-F| + |F-G|$$

Nous allons montrer que

$$- |E-F| \leq |E-G| + |G-F|$$

et

$$- |F-E| \leq |F-G| + |G-E|$$

Pour des raisons de symétrie, il suffit de démontrer la première inégalité pour déduire la seconde en intervertissant E et F.

Pour montrer l'inégalité $|E-F| \leq |E-G| + |G-F|$, il faut montrer que

$$\sum_{\omega \in \Omega} 1 - \mu_E(\omega) \mid \mu_F(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} 1 - \mu_E(\omega) \mid \mu_G(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} 1 - \mu_G(\omega) \mid \mu_F(\omega)$$

ou encore

$$a|c + c|b \leq 1 + a|b \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

Six cas de figure se présentent suivant la position de c par rapport à a et à b:

$$\text{i)- } c \leq a \leq b$$

$$\text{On a } 1 + a|b = 1 + 1 = 2 \geq a|c + c|b$$

$$\text{ii)- } a \leq c \leq b$$

$$\text{On a } 1 + a|b = 1 + 1 = 2 \geq a|c + c|b$$

$$\text{iii)- } a \leq b \leq c$$

$$\text{On a } 1 + a|b = 1 + 1 = 2 \geq a|c + c|b$$

iv)- $c \leq b \leq a$

On a $a|c + c|b = a|c + 1$

et

$$c \leq b \Rightarrow a|c \leq a|b$$

$$\Rightarrow a|c + 1 \leq a|b + 1$$

v)- $b \leq a \leq c$

On a $a|c + c|b = 1 + c|b$

et

$$a \leq c \Rightarrow c|b \leq a|b$$

$$\Rightarrow 1 + c|b \leq 1 + a|b$$

vi)- $b \leq c \leq a$

C'est la seule position qui nécessite l'étude des cas particuliers que sont $| = \alpha$, β ou γ .

1er cas: $| = \alpha$.

Il faut montrer que $a\alpha c + c\alpha b \leq 1 + a\alpha b$ avec $b \leq c \leq a$.

On a $1 + a\alpha b = 1 + b$ et $a\alpha c + c\alpha b = c + b \leq 1 + b$.

2ème cas: $| = \beta$.

Il faut montrer que $a\beta c + c\beta b \leq 1 + a\beta b$ avec $b \leq c \leq a$.

$$\text{On a } a\beta c + c\beta b = \frac{c}{a} + \frac{b}{c} = \frac{c^2 + ba}{ac}$$

$$\text{D'autre part, } 1 + a\beta b = \frac{ac + bc}{ac}$$

Le résultat découle de $c^2 + ba = c(c-b) + b(c+a) \leq a(c-b) + b(c+a) \leq ac + bc$.

3ème cas: $| = \gamma$

Il faut montrer que $a\gamma c + c\gamma b \leq 1 + a\gamma b$ avec $b \leq c \leq a$.

$$a\gamma c + c\gamma b = 1 - a + c + 1 - c + b = 1 + 1 - a + b = 1 + a\gamma b.$$

3.3. Description nette

Soit Ω un référentiel appelé population. Les éléments de Ω , notés ω sont appelés individu. La population Ω est décrite par un certain nombre de caractères $A, B, C, \dots$. Ces caractères peuvent prendre des valeurs quantitatives ou qualitatives. Nous limitons notre étude au cas de caractères qualitatifs. Pour la suite, à chaque fois qu'on parlera de caractère, il sera question de caractère qualitatif. Les différentes valeurs que peut prendre un caractère sont appelées modalité. L'ensemble des modalités du caractère A est noté O_A .

Affectation.

Pour un caractère A donné, l'opération d'affectation consiste à associer à chaque individu de la population, une modalité et une seule. On définit ainsi une application $X_A: \Omega \rightarrow O_A$ appelée variable statistique associée au caractère A . Dans notre exposé, quand il n'y a pas risque de confusion, on parlera de caractère A pour désigner la variable statistique X_A ou l'ensemble des modalités O_A .

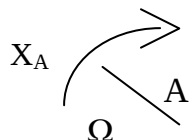
Soit a une modalité du caractère A . On dit qu'un individu ω a observé (de façon nette) la modalité a si et seulement si

$$- X_A(\omega) = a$$

Une modalité est dite observée s'il existe au moins un individu l'ayant observée. Dans notre étude, nous supposons que pour un caractère donné, chaque modalité est observée. Cela n'a rien de restrictif car dans la pratique, une modalité qui n'est pas observée présente peu d'intérêts. La description de la population Ω par le caractère A se présente sous la forme d'un tableau appelé tableau de description (Tableau 3.6).

On note Ω_a , la sous-population de Ω formée des individus ayant observé la modalité a . Ce sous-ensemble est l'image réciproque du singleton $\{a\}$ par l'application X_A : $\Omega_a = X_A^{-1}(\{a\})$. On sait que cet ensemble n'est pas vide car

chaque modalité est observée. De plus, X_A est surjective. On obtient ainsi une partition de la population: $\Omega = \bigcup_{a \in A} \Omega_a$.



Ω		a		
ω		$X_A(\omega)$		

Tableau 3.6 :Description nette de Ω

3.3.1. Évaluation quantitative.

Soient A un caractère et Ω_a la partition Ω induite par A . Pour comparer les sous-populations Ω_a les uns par rapport aux autres, on introduit une mesure sur l'ensemble des parties de Ω . A chaque sous-population Ω_a , on associe un nombre positif qui évalue l'importance de cette sous-population. Les mesures les plus utilisées sont le cardinal et la fréquence, respectivement définies par

$$- m(\Omega_a) = \text{card}(\Omega_a)$$

et

$$- f(\Omega_a) = \frac{\text{card}(\Omega_a)}{\text{card}(\Omega)}.$$

La distribution en fréquence $(f(\Omega_a))_{a \in A}$ est distribution de probabilité. Nous parlons ici d'évaluation quantitative car il s'agit de mesure additive: m_a mesure le nombre d'individus ayant observé la modalité a , f_a mesure la proportion d'individus ayant observé la modalité a .

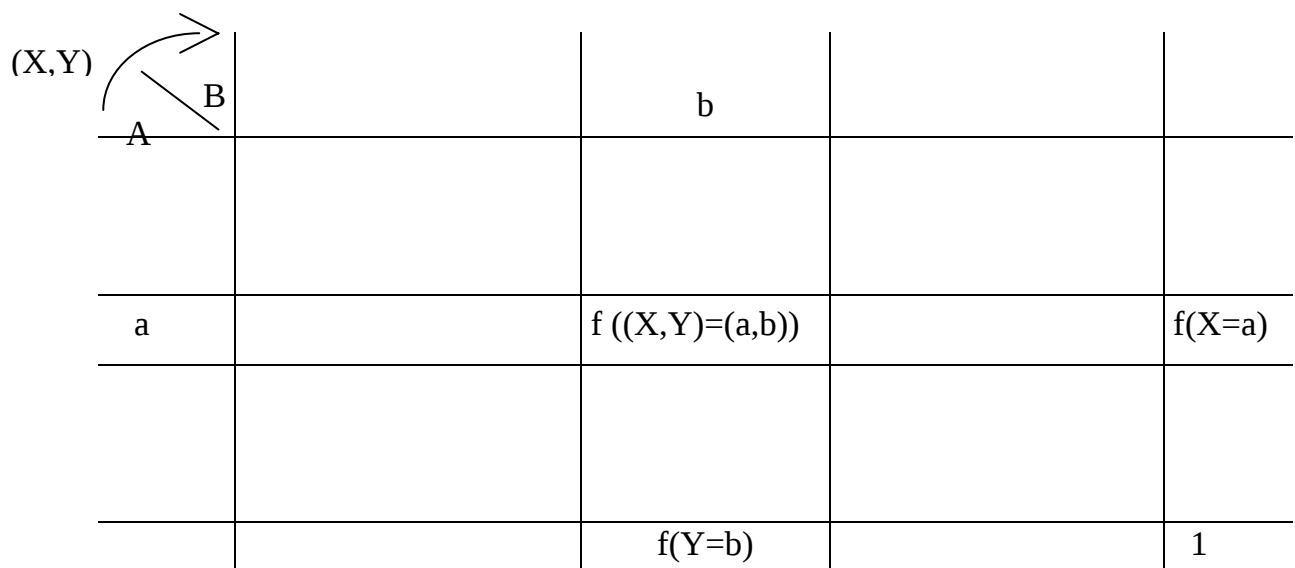
3.3.2. Contingence.

Soient A et B deux caractères. On désigne par Ω_a (resp. Ω_b) l'ensemble des individus ayant observé la modalité a (resp. b). On désigne par Ω_{ab} , l'ensemble des individus ayant observé à la fois les modalités a et b. Un résumé de l'information contenue dans la paire de variable A, B est donné par le tableau de contingence. Ce tableau donne une évaluation quantitative des sous-populations Ω_{ab} . Si l'on choisit la mesure cardinal, on obtient le tableau de contingence en effectif $(m(\Omega_{ab}))_{a,b}$, encore appelé tableau de Burt. Si l'on opte pour la mesure fréquence, on obtient le tableau de contingence en fréquence $(f(\Omega_{ab}))_{a,b}$.

Formellement, $\Omega_{ab} = ((X,Y)=(a,b))$, où X (resp. Y) est la variable statistique associée au caractère A (resp. Y). On a évidemment $\Omega_{ab} = \Omega_a \cap \Omega_b$.

De plus, si l'on pose $f_a = f(X=a)$, $f_b = f(Y=b)$ et $f_{ab} = f((X,Y)=(a,b))$, on a

$$f_a = \sum_b f_{ab} \text{ et } f_b = \sum_a f_{ab}$$



		b	
a		$f((X,Y)=(a,b))$	$f(X=a)$
		$f(Y=b)$	1

Tableau 3.7 : Distribution en fréquence

3.3.3. Dépendance entre caractères.

Pour mesurer la dépendance entre deux caractères A et B, on introduit sur $A \times B$, une distribution de probabilité conditionnelle $(f(b/a))_{a,b}$ définie par

$$- f(b/a) = \frac{f(a,b)}{f(a)}$$

$$\text{où } f(a) = \frac{|\Omega_a|}{|\Omega|} \text{ et } f(a,b) = \frac{|\Omega_{ab}|}{|\Omega|}.$$

Les caractères A et B sont indépendants si et seulement si

$$- f(b/a) = f(b) \quad \forall a, b \in (A \times B)$$

Cette indépendance se traduit encore par $f(a,b) = f(a).f(b)$. Ainsi, en cas d'indépendance, il est possible de reconstituer la fréquence conjointe $f(a,b)$ à partir des fréquences marginales $f(a)$ et $f(b)$.

3.3.4. Proximités.

Soient A et B deux caractères. Soit $(f(a,b))_{a,b}$ une distribution de conjointe de fréquence sur $A \times B$. La proximité entre modalités a et a' se mesure par la distance du χ^2 entre les fréquences conditionnelles $(f(b/a))_b$ et $(f(b/a'))_b$ i.e.

$$- d(a,a') = \sum_{b \in B} \frac{(f(b/a) - f(b/a'))^2}{f(b)}$$

Cette distance est nulle si et seulement si les distributions de fréquences conditionnelles $(f(b/a))_b$ et $(f(b/a'))_b$ sont égales.

3.4. Description floue

3.4.1. Variables statistiques floues

Soit Ω une population. On convient de désigner un individu de Ω par le symbole ω . Nous dirons que la population Ω est décrite par un caractère flou (ou variable statistique floue) X si et seulement si X est une application floue de Ω dans un ensemble A appelé ensemble des observations. Les éléments de A sont appelés des modalités. Si l'application X est nette, on dira que le caractère X est net.

Ainsi, une variable statistique floue est une application $X: \Omega \rightarrow [0,1]^A$ telle que $\bigvee_{a \in A} \mu_{X(\omega)}(a) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$

Si l'ensemble des modalités A est continu, le caractère X est dit quantitatif. S'il est fini ou dénombrable, il est dit qualitatif. Nous nous limiterons dans notre étude au cas où l'ensemble A est fini. Par abus de langage, et quand il n'y a pas risque de confusion, on parlera de variable statistique floue pour désigner l'ensemble des modalités A .

Cette définition est proche de la notion de variable aléatoire floue de Puri-Ralescu (86). La différence essentielle est que l'ensemble Ω est muni d'une mesure de probabilité dans le cas d'une variable aléatoire floue, et d'une mesure de possibilité dans le cas d'une variable statistique floue.

Rappelons la définition donnée par Puri-Ralescu (86) à une variable aléatoire floue. Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité. Soit $F(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des sous-ensembles flous E de $\mathbb{R}^n$ tels que

- i)- $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / \mu_E(x) \geq \alpha\}$ est un compact $\forall \alpha > 0$
- ii)- $\text{Noy}(E) \neq \emptyset$

- Une variable aléatoire floue est une application $X:\Omega\rightarrow F(R^n)$ telle que
- $X_\alpha(\omega)$ est un borélien de R^n .

3.4.2. Différentiel et affectation

Si X est un caractère statistique net, l'opération d'affectation consiste à associer à chaque individu ω de la population Ω , une modalité et une seule de l'ensemble des observations A . Dans le cas d'un caractère flou, l'opération d'affectation consiste à associer à chaque individu ω , une ou plusieurs modalités de A , et à des degrés divers. C'est à dire, un individu peut être faiblement associé à une modalité a_1 et fortement associée à une autre modalité a_2 . Sur le plan pratique, les différents degrés d'association peuvent être obtenus à partir d'une enquête statistique dont le questionnaire repose sur des différentiels sémantiques.

Un tel différentiel se présente sous la forme d'échelles subjectives qui indiquent le degré d'association entre un individu et une modalité. Chacune des échelles est divisée en un certain nombre de cases, généralement 4 à 7, afin de permettre à la personne interrogée d'indiquer l'intensité de sa réaction face au phénomène étudié.

Ces cases symbolisent les valeurs d'appartenance aux modalités des questions. Plus le nombre de cases est grand, plus la fonction d'appartenance est précise. Notons qu'il n'est pas forcément nécessaire de disposer des valeurs précises de ces fonctions d'appartenance. L'erreur que l'on peut commettre en utilisant des valeurs approchées est minimisée par l'utilisation des opérateurs flous qui tendent à privilégier, dans la plupart des cas, l'évaluation qualitative à la mesure quantitative.

Puisque le caractère X est flou, pour un individu ω donné, $X(\omega)$ n'est pas une modalité de A , mais un sous-ensemble flou de A qui représente les différents degrés d'association entre ω et les modalités de A : $X(\omega) = \{(a_1, \mu_{X(\omega)}(a_1))$,

$(a_2, \mu_{X(\omega)}(a_2)), \dots \}$ où a_j est une modalité et $\mu_{X(\omega)}(a_j)$ le degré d'association entre l'individu ω et la modalité a_j . Ce degré d'association varie entre 0 et 1. Il est d'autant plus élevé que l'association entre ω et a_j est forte. Dans la pratique, le 0 correspond à l'extrémité gauche du différentiel, et le 1 à l'extrémité droite.

Prenons l'exemple d'un caractère flou X à trois modalités a_1 , a_2 et a_3 , et un différentiel à quatre cases « non », « un peu », « assez » et « beaucoup ». Chaque individu met une croix sur une case de chaque échelle. Les croix qu'on a mises sur les échelles de A et B correspondent à la première ligne de notre tableau de description floue. On peut retenir le codage suivant:

non $\rightarrow 0$;
 un peu $\rightarrow .3$;
 assez $\rightarrow .7$;
 bcp, très $\rightarrow 1$

Un tel codage n'est pas unique. Néanmoins, les valeurs 0 et 1 qui doivent correspondre aux extrémités du différentiel sémantique. De plus, une attention toute particulière doit être accordée à l'attribution de la valeur .5 lorsqu'il n'y a que deux modalités floues et si une normalisation doit être opérée sur les variables. En effet, il y a un risque étant d'aboutir à une situation où une modalité et son contraire ont la même valeur d'appartenance égale à 1. Ce qui peut compliquer dans certains cas l'interprétation des résultats.

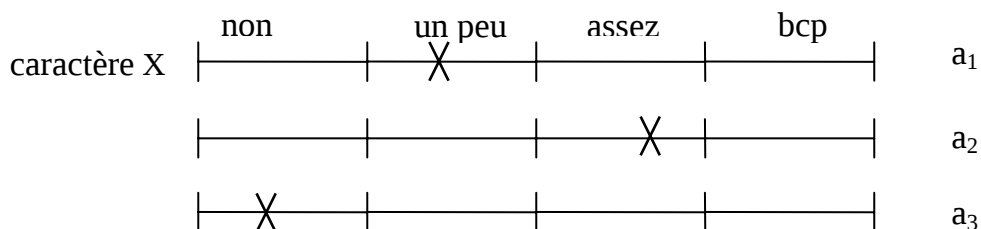


Figure 3.1 : Différentiel sémantique.

3.4.3. Descripteur et signification

On appelle descripteur d'un individu ω , le sous-ensemble flou $X(\omega)$. Pour une modalité $a \in A$ donnée, on appelle signification de a , le sous-ensemble $(X=a)$. La description floue de la population Ω par le caractère X se présente sous la forme d'un tableau à deux entrées.

Ω	a_1		a_j		a_m	
ω_1						
ω_i			$k(i,j)$			$X(\omega_i)$
ω_n						

$X^{-1}(a_j)$

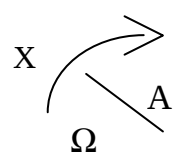
Tableau 3.8 :Description floue de Ω par X

La ligne i du tableau ci-dessus représente le descripteur de l'individu ω_i . La colonne j du même tableau représente la signification de la modalité a_j . A la croisé de la ligne i et de la colonne j , on a le nombre $k(i,j) = \mu_{X(\omega_i)}(a_j)$ qui représente le degré d'association entre l'individu ω_i et la modalité a_j avec par exemple

- $k(i,j) = 0$ si ω_i n'est pas associé à a_j
- $k(i,j) = .3$ si ω_i est assez peu associé à a_j
- $k(i,j) = .5$ si ω_i est modérément associé à a_j
- $k(i,j) = .7$ si ω_i est beaucoup associé à a_j
- $k(i,j) = 1$ si ω_i est énormément associé à a_j

Nous utilisons ici les termes « descripteur » et « signification » par analogie à la terminologie employée en langages parallèle. Pour mieux expliquer ce choix, reprenons l'exemple de Kaufmann (1975).

Un bateau sombre et 9 personnes seulement sont sauvées et abordent sur une île déserte: un homme et huit femmes. Au bout de quelque temps, en ce qui concerne son estimation des femmes, l'univers féminin se réduit, pour ce naufragé, à ces huit femmes. Quand il prononce le mot « jolie » il le rapporte d'une façon floue aux huit femmes, de même pour le mot « intelligente » ou le mot « travailleuse ». Ainsi, entre ces trois mots « jolie », « intelligente » et « travailleuse » qui sont les modalités $a \in A = \{\text{jolie, intelligente, travailleuse}\}$ et la population Ω formée des huit femmes, peut s'établir une relation telle que, par exemple:



	Jolie	Intelligente	Travailleuse	
Pierrette	.3	.2	.9	
Jeannette	.9	.1	1	
Félicienne	0	1	.2	
Hélène	1	.9	0	
Micheline	.8	.9	.8	
Brigitte	.4	.2	.1	
Gilberte	.3	.4	.1	
Cécile	.2	.3	.6	

Tableau 3.9 : Description floue

Quand le naufragé prononce le mot « jolie », à ce mot est associé Hélène, un peu moins Jeannette, encore un peu moins Micheline et jamais Félicienne. A partir de ce tableau, on voit que la signification de « jolie » est:

$$(X=\text{jolie}) = \{(\text{Pierrette}, .3), (\text{Jeannette}, .9), (\text{Félicienne}, 0), (\text{Hélène}, 1), (\text{Micheline}, .8), (\text{Brigitte}, .4), (\text{Gilberte}, .3), (\text{Cécile}, .2)\}$$

et le descripteur de « Jeannette » est

$$X(\text{Jeannette}) = \{(\text{jolie}, .9), (\text{intelligente}, .1), (\text{travailleuse}, 1)\}$$

3.4.4. Observation floue

Une modalité a_j de A est dite observée (ou significative) si et seulement si

$$- \text{supp}(X=a_j) \neq 0.$$

Ce qui peut encore s'écrire,

$$- \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X(\omega)}(a_j) \neq 0$$

Cela revient à dire que la j^{e} colonne du tableau de description floue n'est pas remplie que de chiffres 0. Autrement dit, il existe au moins un individu de la population qui soit associé, même faiblement, à la modalité a_j . Une modalité qui n'est pas observée est dite sans signification. Dans la pratique, une modalité qui n'est pas observée n'a que peu d'intérêt. Dans notre étude, sauf indication contraire, une modalité sera toujours supposée être observée.

Une modalité a_j de A est dite nettement observée (ou pleinement significative) si et seulement si

$$- \text{noy}(X=a_j) \neq 0.$$

Ce qui peut encore s'écrire,

$$- \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X(\omega)}(a_j) = 1$$

Cela veut dire que la j^e colonne du tableau de description floue comporte au moins une fois le chiffre 1, i.e. qu'il existe au moins un individu de la population qui soit pleinement associé à la modalité a_j .

On dira qu'un individu ω observe de façon nette la modalité a si et seulement si

$$- \mu_{X(\omega)}(a) = 1$$

On remarquera que le fait que X est une variable statistique floue revient à dire que chaque individu observe de façon nette au moins une modalité. Cela veut aussi dire que pour chaque individu ω , le sous-ensemble flou $X(\omega)$ est normalisé. Si X est surjective, alors toutes les modalités de A sont nettement observées, et réciproquement. Naturellement, si une modalité est nettement observée, alors elle est observée.

3.4.5. Évaluation qualitative

Considérons un caractère statistique flou X décrivant une population Ω . A toute modalité observée a de l'ensemble des observations A , on associe le sous-ensemble flou Ω_a défini par

$$- \Omega_a = X^{-1}(\{a\}) = (X=a)$$

Par définition de l'image réciproque, on peut également écrire

$$- \mu_{\Omega_a}(\omega) = \mu_{X(\omega)}(a) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Puisque le caractère X est une application, la famille $(\Omega_a)_{a \in A}$ est une partition floue de Ω , c'est à dire

$$\text{i)- } \bigcup_{a \in A} \Omega_a = \Omega \text{ et}$$

$$\text{ii)- } \Omega_a \neq \emptyset \quad \forall a \in A$$

Rappelons qu'on n'a pas en général $\Omega_a \cap \Omega_{a'} = \emptyset$ comme dans le cas net.

Afin d'évaluer les sous-ensembles flous Ω_a les uns par rapport aux autres, nous allons introduire sur l'ensemble Ω une mesure. Le terme « mesure » représente ici, non seulement les mesures additives communément utilisées, mais des mesures au sens large du terme, i.e. des mesures floues. Rappelons qu'une mesure floue sur Ω est une application $m:[0,1]^\Omega \rightarrow [0,+\infty]$ telle que

$$\text{i)- } m(\emptyset) = 0$$

$$\text{ii)- } E \subset F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$$

Généralement on utilise en statistique les mesures effectif, fréquence ou probabilité. Toutes ces mesures sont plus adaptées, nous semble-t-il, à une évaluation quantitative des objets. Dans le cas de la description statistique floue, l'évaluation qualitative est beaucoup plus intéressante que la mesure quantitative. C'est ainsi qu'on va choisir comme mesure sur Ω , la hauteur h définie par

$$- \quad h(E) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_E(\omega) .$$

La hauteur représente le plus haut degré d'appartenance à un sous-ensemble flou donné. Cette mesure va associer chaque descripteur Ω_a au nombre $s(a) = h(\Omega_a)$. La distribution en hauteur $(s(a))_{a \in A}$ est une distribution de possibilité sur l'ensemble A .

En effet,

$$\begin{aligned} s(a) &= h(\Omega_a) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{\Omega_a}(\omega) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X(\omega)}(a) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \bigvee_{a \in A} s(a) &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \bigvee_{a \in A} \mu_{X(\omega)}(a) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} h(X(\omega)) \end{aligned}$$

et comme X est une application, on a

$$h(X(\omega)) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\text{c'est à dire } \bigvee_{a \in A} s(a) = 1.$$

3.4.6. Correspondances possibilistes

On considère maintenant deux variables statistiques X et Y , à valeurs dans les ensembles d'observations respectifs A et B . Soit $(X,Y): \Omega \rightarrow [0,1]^A \times [0,1]^B$ la variable conjointe définie par $(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. Nous nous proposons et de mesurer la signification conjointe Ω_{ab} d'un couple de modalités observées (a,b) de $A \times B$.

Comme pour le cas d'une variable, on pose

$$- \Omega_{ab} = (X,Y)^{-1}(\{(a,b)\})$$

Pour ne pas alourdir les notations, on écrira par la suite $\Omega_{ab} = (X,Y)^{-1}(a,b)$.

Dans le cas de caractères nets, Ω_{ab} correspond à l'ensemble des individus ayant à la fois la modalité a et la modalité b . Dans le cas d'un caractère flou, celui qui nous intéresse, on a un résultat identique, car d'après la définition de l'image réciproque, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mu_{(X,Y)^{-1}(a,b)}(\omega) &= \mu_{(X,Y)(\omega)}(a,b) \\ &= \mu_{(X(\omega), Y(\omega))}(a,b) \\ &= \mu_{X(\omega)}(a) \wedge \mu_{Y(\omega)}(b) \end{aligned}$$

Puisque

$$- \mu_{X(\omega)}(a) = \mu_{\Omega_a}(\omega)$$

et

$$- \mu_{Y(\omega)}(b) = \mu_{\Omega_b}(\omega)$$

on a

$$\mu_{\Omega_{ab}}(\omega) = \mu_{\Omega_a}(\omega) \wedge \mu_{\Omega_b}(\omega)$$

C'est à dire,

$$- \Omega_{ab} = \Omega_a \cap \Omega_b.$$

Donc, tout comme pour les caractères nets, la signification conjointe est égale à la conjonction des significations. Pour évaluer cette signification, nous allons utiliser comme précédemment, la mesure hauteur.

En posant

$$- s(a,b) = h((X,Y)^{-1}(a,b))$$

on a

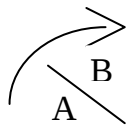
$$\begin{aligned} s(a,b) &= h(\Omega_a \cap \Omega_b) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{\Omega_a}(\omega) \wedge \mu_{\Omega_b}(\omega) \end{aligned}$$

La distribution en hauteur $(s(a,b))_{(a,b) \in A \times B}$ est une distribution de possibilité conjointe sur $A \times B$ car les caractères X et Y sont des applications floues.

En effet,

$$\begin{aligned} \bigvee_{a,b} s(a,b) &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \left(\bigvee_a \mu_{\Omega_a}(\omega) \wedge \bigvee_b \mu_{\Omega_b}(\omega) \right) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \left(\bigvee_a \mu_{X(\omega)}(a) \wedge \bigvee_b \mu_{Y(\omega)}(b) \right) \\ &= \bigvee_{\omega \in \Omega} h(X(\omega)) \wedge h(Y(\omega)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le tableau $(s(a,b))_{(a,b) \in A \times B}$ est ce que l'on appellera tableau de correspondance floue (ou possibiliste si l'on a utilisé une distribution de possibilité π). Il se présente comme étant un tableau de distributions en hauteur.



		b		
a		$h((X,Y)=(a,b))$		$h(X=a)$
		$h(Y=b)$		

Tableau 3.10 : Distribution en hauteur

3.4.7. Association floue.

Une correspondance floue peut également être vue sous l'angle d'une association floue.

3.4.7.1. Définition

Soient Ω un ensemble d'individus, A et B deux caractères qualitatifs flous. Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux modalités. On note Ω_a (resp. Ω_b) la signification de la modalité a (resp. b). Nous définissons entre les modalités a et b un indice d'association s par:

$$- s(a,b) = h(\Omega_a \cap \Omega_b).$$

3.4.7.2. Remarque

Dans cette définition, la hauteur h peut être remplacée par n'importe quelle autre mesure de possibilité. $s(a,b)$ évalue le degré avec lequel l'association entre les modalités a et b est possible. En effet, si X et Y sont deux variables statistiques nettes à valeurs dans les ensembles de modalités respectifs A et B , dire que l'association entre deux modalités $a \in A$ et $b \in B$ est possible revient à dire que

- $\exists \omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)=a$ et $Y(\omega)=b$

Cette équation peut encore s'écrire

- $\exists \omega \in \Omega$ tel que $1_{X(\omega)}(a) \cdot 1_{Y(\omega)}(b) = 1$.

3.4.7.3. Définition

Le tableau $(e(a,b))_{a \in A, b \in B}$ défini par

- $e(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si l'association entre } a \text{ et } b \text{ est possible} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est ce que l'on appelle communément en statistique, un tableau de correspondance ensembliste et que nous allons appeler tableau des associations nettes.

Si comme à l'accoutumée on note

$$\Omega_a = \{\omega \in \Omega / X(\omega)=a\}$$

et

$$\Omega_b = \{\omega \in \Omega / Y(\omega)=b\},$$

la définition de l'association nette prend la forme

- $e(a,b) = \bigvee_{\omega \in \Omega} 1_{\Omega_a}(\omega) \cdot 1_{\Omega_b}(\omega) .$

Si l'on souhaite compter le nombre d'associations entre a et b , on aboutit au tableau de BURT $(t(a,b))_{a \in A, b \in B}$ définit par:

$$- t(a,b) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{\Omega_a}(\omega) \cdot 1_{\Omega_b}(\omega).$$

3.4.7.4. Remarque

Le tableau s ainsi défini est une extension au cas flou, du tableau e d'association ensembliste

En posant

$$- s(a) = h(\Omega_a)$$

et

$$- s(b) = h(\Omega_b).$$

la distribution de possibilité conditionnelle sur $A \times B$ est donnée par

$$- s(b/a) = (s(b)|s(a))|s(a,b).$$

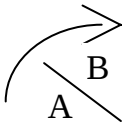
Ainsi, les caractères A et B sont indépendants si et seulement si

$$- s(b/a) = s(b) \quad \forall a \in A, b \in B,$$

ou encore

$$- s(a,b) = s(a) \wedge s(b) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

En définitive, la correspondance floue $(s(a,b))_{a \in A, b \in B}$ sur $A \times B$ se présente sous la forme d'un tableau comme ci-dessous:



		b	
a		$s(a,b)$	$s(a)$
		$s(b)$	1

Tableau 3.11: Association floue

3.4.7.5. Exemple

Prenons l'ensemble Ω des élèves d'une classe, $\Omega = \{\text{Martin, N'Diaye, Joan, Georges}\}$. Cet ensemble est décrit par deux caractères: la couleur de leurs cheveux, $A = \{\text{Noir, Roux, Blanc}\}$ et la couleur de leurs yeux, $B = \{\text{Bleu, Foncé, Clair}\}$. Cela donne un tableau de description floue, par exemple celui ci-dessous

		A			B		
		Noir	Roux	Blanc	Bleu	Foncé	Clair
Ω	Martin	.5	.3	1	1	.5	.1
	N'Diaye	1	.4	0	.2	.6	1
	Joan	0	.2	1	1	0	.8
	Georges	1	.6	.2	.3	.2	1

Tableau 3.10: Description floue des élèves par la couleur des cheveux et des yeux

Le tableau de correspondance floue qui lui est associé est donné ci-dessous.

A	B			
		Bleu	Foncé	Clair
	Noir	.5	.6	1
	Roux	.3	.4	.6
	Blanc	1	.5	.8

Tableau 3.12 : Association floue entre la couleur des cheveux et la couleur des yeux

3.4.7.6. Exemple

Pour illustrer le lien entre association nette et association floue, considérons le tableau net le plus proche du tableau de description floue cité plus haut. Dans chaque case, un nombre inférieur ou égal à 0.5 est remplacé par 0 et un nombre supérieur à 0.5 est remplacé par 1. Sur le plan formel, cela revient à remplacer, pour chaque individu $\omega \in \Omega$, les sous-ensembles flous $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ par les sous-ensembles nets les plus proches. On obtient ainsi le tableau ci-après:

		A			B		
		Noir	Roux	Blanc	Bleu	Foncé	Clair
Ω							
	Martin	0	0	1	1	0	0
	N'Diaye	1	0	0	0	1	1
	Joan	0	0	1	1	0	1
	Georges	1	1	0	0	0	1

Tableau 3.13 : Description nette des élèves par la couleur des cheveux et des yeux

Le tableau des associations nettes associé à (Tableau 3.13) est donné par (Tableau 3.14). On constate que ce n'est rien d'autre que le tableau net le plus proche du tableau des associations floues (Tableau 3.12).

A	B			
		Bleu	Foncé	Clair
	Noir	0	1	1
	Roux	0	0	1
	Blanc	1	0	1

Tableau 3.14 : Association nette entre la couleur des cheveux et la couleur des yeux

3.4.8. Proximité entre modalités.

A partir du tableau de correspondance floue, nous nous proposons de mesurer la proximité entre deux modalités a et a' de l'ensemble des observations du caractère flou X .

3.4.8.1. Définition.

Nous allons définir la proximité au sens de Tchebychev entre les modalités a et a' comme étant égale à la distance au sens de Tchebychev entre les distributions $(s(a,b))_{b \in B}$ et $(s(a',b))_{b \in B}$. Cela donne

$$- d(a,a') = \bigvee_{b \in B} 1 - [s(a,b) \vee s(a',b)] \mid [s(a,b) \wedge s(a',b)]$$

où $\mid$ est un opérateur de pseudo-division.

3.4.8.2. Commentaire.

Nous allons justifier le choix de cette distance.

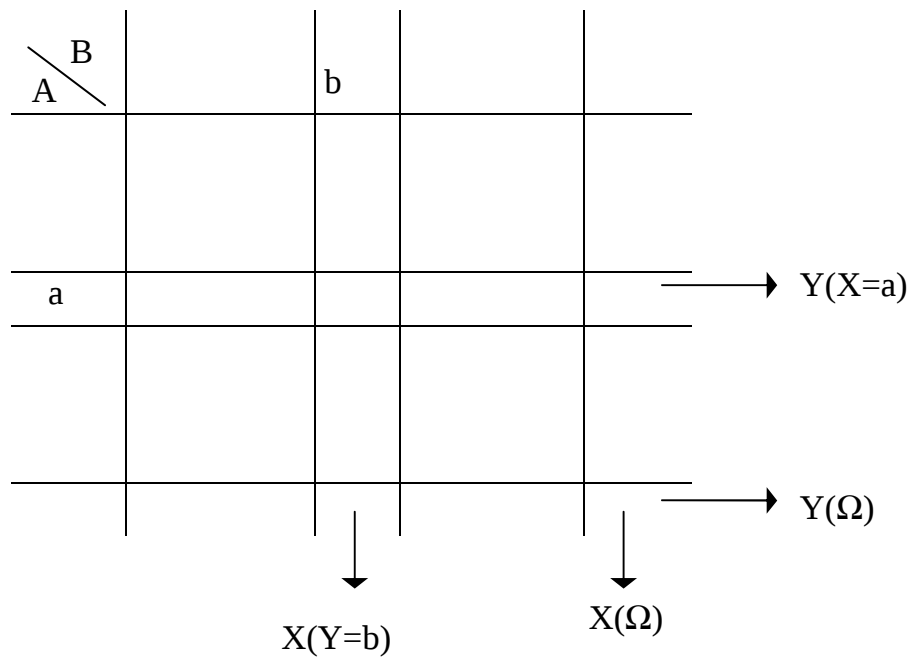
La ligne a du tableau de correspondance floue représente l'image du sous-ensemble flou $(X=a)$ par l'application Y ,
c'est à dire

$$- \pi(a,b) = \mu_{Y(X=a)}(b) \quad \forall (a,b) \in A \times B$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
 s(a,b) &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X=a}(\omega) \wedge \mu_{Y=b}(\omega) \\
 &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X=a}(\omega) \wedge \mu_{Y(\omega)}(b) \\
 &= \mu_{Y(X=a)}(b)
 \end{aligned}$$

Cela veut dire que $s(a,b)$ représente le degré d'appartenance de la modalité b à l'image de la signification $(X=a)$ de la modalité a par l'application floue Y .



La ligne de marge $(s(b))_{b \in B}$ du tableau de correspondance floue représente l'image $Y(\Omega)$ de la population tout entière par l'application Y car quel que soit $b \in B$,

$$\begin{aligned}
 s(b) &= h(Y = b) \\
 &= \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{Y=b}(\omega) \\
 &= \mu_{Y(\Omega)}(b)
 \end{aligned}$$

De même, la colonne de marge représente le sous-ensemble flou $X(\Omega)$; c'est dire

$$- s(a) = \mu_{X(\Omega)}(a)$$

Puisque la modalité a est représentée par le sous-ensemble flou $Y(X=a)$, il est naturel de définir la distance entre deux modalités a et a' par la distance entre les sous-ensembles $Y(X=a)$ et $Y(X=a')$, soit,

$$\begin{aligned} d(a, a') &= d(Y(X=a), Y(X=a')) \\ &= \bigvee_{b \in B} 1 - [\mu_{Y(X=a)}(b) \vee \mu_{Y(X=a')}(b)] \mid [\mu_{Y(X=a)}(b) \wedge \mu_{Y(X=a')}(b)] \end{aligned}$$

Et en remplaçant $\mu_{Y(X=a)}(b)$ par $s(a, b)$ et $\mu_{Y(X=a')}(b)$ par $s(a', b)$, on retrouve l'expression de la distance de Tchebychev entre les modalités a et a' donnée plus haut.

3.4.8.3. Définition.

La proximité au sens du cardinal de la différence symétrique entre les modalités a et a' est définie comme étant égale à la distance entre les distributions conjointes $(s(a, b))_{b \in B}$ et $(s(a', b))_{b \in B}$. Cela donne

$$- d(a, a') = \sum_{b \in B} 1 - [s(a, b) \vee s(a', b)] \mid [s(a, b) \wedge s(a', b)]$$

3.4.8.4. Exemple.

Si l'opérateur de pseudo-division $|$ est l'opérateur β de Goguen défini par $x|y = 1 \wedge \frac{y}{x}$, alors l'expression de la distance entre les modalités a et a' est donnée par

$$d(a, a') = \sum_{b \in B} 1 - \frac{s(a, b) \wedge s(a', b)}{s(a, b) \vee s(a', b)}$$

$$= \sum_{b \in B} \frac{|s(a, b) - s(a', b)|}{s(a, b) \vee s(a', b)}$$

3.4.8.5. Exemple.

Si l'opérateur de pseudo-division $|$ est l'opérateur γ de Lukasiewicz défini par $x|y = 1 \wedge (1 - x + y)$, alors l'expression de la distance entre les modalités a et a' est donnée par

$$\begin{aligned} d(a, a') &= \sum_{b \in B} 1 - [1 - (s(a, b) \vee s(a', b)) + (s(a, b) \wedge s(a', b))] \\ &= \sum_{b \in B} |s(a, b) - s(a', b)| \end{aligned}$$

Chapitre 4

4. Liaison informationnelle

4.1. Information possibiliste.

La théorie de l'information de Shannon est basée sur la notion de probabilité. Soit Ω un ensemble. On suppose l'existence sur Ω (ou sur certaines de ses parties), d'une mesure de probabilité P . Soit A un événement de Ω . L'information fournie par la réalisation de A est donnée par:

$$- J(A) = \log_2\left(\frac{1}{P(A)}\right).$$

Soit $O = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ une partition de Ω . L'information moyenne fournie par la réalisation des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ est donnée par:

$$- H(O) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(A_i)}\right)$$

La théorie de Shannon a fait ses preuves dans plusieurs domaines de la science, et particulier en statistique. La justification de la démarche de Shannon a donné lieu à de nombreuses recherches et la littérature à ce sujet est abondante. Cependant, dans le cas où l'on ne dispose pas sur l'ensemble Ω , d'une mesure de probabilité, le problème de la définition d'une mesure de l'information se pose. Notre étude se base sur un ensemble Ω muni, non d'une mesure de probabilité, mais d'une mesure de possibilité. D'où la nécessité de définir une notion d'information autre que celle de Shannon. Pour y arriver, nous allons nous référer à l'axiomatique proposée par Kampé De Fériet (1970). Mais avant cela, rappelons d'abord la formulation de Shannon.

4.1.1. Information de Wiener-Shannon.

Soit Ω un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité P . Si E est une partie mesurable de Ω , on note $P(E)$, la probabilité pour qu'un événement

élémentaire ω de Ω appartienne à E . La question que s'est posée Shannon est de donner un sens mathématique à la phrase: dire que ω appartient à E , c'est fournir une information sur ω . Par quelques conditions naturelles, il est possible de définir un nombre $J(E)$, qui sera l'information fournie par l'assertion « ω appartient à E ». Ces conditions sont les suivantes:

- i)- J est une fonction réelle positive (éventuellement infinie) et décroissante de la seule probabilité $P : J(E) = \varphi(P(E))$.
- ii)- On admet que si deux événements E et F sont indépendants, l'information fournie par leur réalisation simultanée est la somme de leur information.:
 $J(E \cap F) = J(E) + J(F)$.
- iii)- Un événement qui a une chance sur deux d'être réalisée apporte une information unité: $\varphi(1/2) = 1$.

A partir de ces trois conditions, l'information fournie par un événement est déterminée de façon unique. En effet, si les événements E et F sont indépendants, on a $P(E \cap F) = P(E).P(F)$. D'où

$$\begin{aligned} J(E \cap F) &= \varphi(P(E \cap F)) \\ &= \varphi(P(E).P(F)) \\ &= \varphi(P(E)) + \varphi(P(F)) \end{aligned}$$

Si en outre on peut choisir arbitrairement les valeurs $x = P(E)$ et $y = P(F)$, $(x,y) \in [0,1]$, on obtient une équation fonctionnelle:

$$- \quad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

dont la seule solution continue est $\varphi(x) = k.\log(\frac{1}{x})$.

En tenant compte de la condition de normalisation $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$, on a $\varphi(\frac{1}{2}) = k.\log(2)$, i.e. $k = \frac{1}{\log(2)}$. En fin de compte, l'information fournie par la réalisation de l'événement E est donnée par:

$$- \quad J(E) = \log_2\left(\frac{1}{P(E)}\right)$$

4.1.2. Information généralisée de Kampé De Fériet.

Soit Ω un ensemble et A une classe des parties de Ω : $A \subset P(\Omega)$.

4.1.2.1. Axiome.

Une mesure d'information est une application

- $J: A \rightarrow [0, +\infty]$ (positivité)

4.1.2.2. Axiome.

Quelque soit $E, F \in A$,

- $E \subset F \Rightarrow J(E) \geq J(F)$ (monotonie)

4.1.2.3. Axiome.

- $J(\Omega) = 0$ et $J(\emptyset) = +\infty$ (universalité)

Kampé De Fériet estime que ces trois axiomes sont les seuls imposés par l'intuition pour définir une mesure de l'information.

4.1.2.4. Définition.

L'information conditionnelle fournie par événement F sachant que E est réalisé est donnée par:

- $J(F/E) = J(E \cap F) - J(E)$ avec $J(E) < +\infty$.

Lorsque deux événements E et F sont indépendants, on doit avoir naturellement $J(F/E) = J(F)$, i.e.

- $J(E \cap F) = J(E) + J(F)$.

Kampé De Fériet suggère de considérer cette dernière équation comme la définition de l'indépendance entre les événements E et F .

4.1.2.5. Remarque.

On sait que pour un événement E donné, événement impossible et événement certain sont toujours indépendants de E . Cela est compatible avec la définition (4.1.2.4) car on a

$$J(E \cap \Omega) = J(E)$$

et

$$J(E) + J(\Omega) = J(E)$$

De même on a

$$J(E \cap \emptyset) = J(\emptyset)$$

et

$$J(E) + J(\emptyset) = J(\emptyset)$$

4.1.2.6. Définition.

Soit T une loi de composition interne sur $[0, +\infty]$. Une information définie sur A est dite T -composable si et seulement si:

$$- J(E \cup F) = J(E) T J(F) \quad \forall E, F \in A$$

Elle est dite σ - T -composable si et seulement si

$$- J\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} J(E_i)$$

$$\text{avec } E_i \in A \quad \forall i, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \prod_{i=1}^{+\infty} J(E_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(E_1) T \dots T J(E_n)$$

4.1.2.7. Remarque.

L'information de Shannon est composable pour la loi de composition T définie par:

$$- x T y = -\log(e^{-x} + e^{-y})$$

En effet, on a

$$P(E) = \exp(-J(E)) \quad \text{et} \quad P(E \cup F) = \exp(-J(E \cup F))$$

Si les événements E et F sont incompatibles, alors

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F);$$

c'est-à-dire,

$$\exp(-J(E \cup F)) = \exp(-J(E)) + \exp(-J(F))$$

Ce qui donne,

$$J(E \cup F) = -\log(\exp(-J(E)) + \exp(-J(F)))$$

4.1.2.8. Remarque.

D'après les propriétés de l'inclusion, si une information est T-composable, la loi de composition T vérifie les propriétés suivantes:

- $xTy = yTx$ (commutativité)
- $xT(yTz) = (xTy)Tz$ (associativité)
- $xT+\infty = x$ (élément neutre)
- $y \leq z \Rightarrow xTy \leq xTz$ (monotonie)

4.1.2.9. Définition.

Une information J est dite de type M si et seulement si

$$J(E) = \varphi(\mu(E))$$

où μ est une mesure σ -additive

et $\varphi: [0, \mu(\Omega)] \rightarrow [0, +\infty]$, une bijection strictement décroissante telle que $\varphi(0) = +\infty$ et $\varphi(\mu(\Omega)) = 0$.

4.1.2.10. Remarque.

Il est clair qu'une information de type M est T-composable avec

$$- \quad xTy = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))$$

En effet,

$$\mu(E) = \varphi^{-1}(J(E)).$$

Compte tenu du fait que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) \quad \text{pour } E \cap F = \emptyset,$$

il vient que,

$$\varphi^{-1}(J(E \cup F)) = \varphi^{-1}(J(E)) + \varphi^{-1}(J(F)).$$

Pour deux événements incompatibles E et F, on a

$$J(E \cup F) = J(E) \top J(F).$$

D'où

$$\varphi^{-1}(J(E) \top J(F)) = \varphi^{-1}(J(E)) + \varphi^{-1}(J(F)).$$

Et en posant

$$x = J(E) \quad \text{et} \quad y = J(F)$$

on a

$$\varphi^{-1}(xTy) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y).$$

C'est-à-dire,

$$xTy = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))$$

4.1.2.11. Remarque.

L'information de Shannon est de type M avec φ définie par

$$\varphi(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \mu \text{ étant une mesure de probabilité.}$$

4.1.2.12. Définition.

On appelle information de type Inf, une information $\wedge$ -composable. Autrement dit, une information J est de type Inf si et seulement si

$$- J(E \cup F) = J(E) \wedge J(F) \quad \forall E, F \subset \Omega \quad \text{tels que } E \cap F = \emptyset.$$

4.1.2.13. Commentaire.

Si $J(E \cup F) = J(E) \wedge J(F)$ pour tout couple événements incompatibles E, F , alors $J(E \cup F) = J(E) \wedge J(F)$ pour tous les couples (E, F) de sous-ensembles de Ω (démonstration dans Kampé De Fériet 1970).

D'autre part, l'axiome (4.1.2.2) implique que l'on doit avoir

$$J(E \cup F) \leq J(E) \wedge J(F) \quad \forall E, F \subset \Omega.$$

C'est dire que pour une information de type Inf, borne supérieure de $J(E \cup F)$ est atteinte.

L'information de Shannon et les informations de type Inf possèdent plusieurs propriétés extrémales. Ces propriétés expliquent l'intérêt de ces deux classes d'information (cf. Nguyen 1974 et Kampé De Fériet 1970).

4.1.3. **Information et mesure de possibilité.**

Nous nous proposons dans ce paragraphe de construire une mesure de l'information qui soit compatible avec la notion de possibilité. Nous expliciterons plus loin ce que l'on entend par « compatible avec la notion de possibilité ». Cette mesure sera appelée information possibiliste. A la suite de Kampé De Fériet (1970), d'autres auteurs, en particulier Benvenuti (1990), ont étendu les axiomes de base définissant une information aux événements flous. Dans tout ce qui suit, $*$ représente une conjonction archimédienne, $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à la conjonction $*$ et $\ominus$ l'opérateur de pseudo-soustraction dual de $|$.

4.1.3.1. Définition.

Soit Ω un référentiel. Une information possibiliste est une application J qui vérifie les propriétés suivantes:

- i)- $J:[0,1]^\Omega \rightarrow [0,1]$.
- ii)- $E \subset F \Rightarrow J(E) \geq J(F)$.
- iii)- $J(\emptyset) = 1$ et $J(\Omega) = 0$.

4.1.3.2. Commentaire.

L'axiome i) qui limite l'intervalle de variation de l'information à l'intervalle $[0,1]$ est de nature à nous permettre de faire des calculs algébriques dans le treillis multiplicatif $([0,1], \wedge, \vee, *)$. Les valeurs 1 et 0 attribuées respectivement à $J(\emptyset)$ et $J(\Omega)$ remplacent les valeurs universelles de Kampé De Fériet. Ces valeurs sont les plus indiquées car elles correspondent aux valeurs maximale et minimale de l'information. De plus, ces valeurs doivent être compatibles avec l'opérateur utilisé pour définir le conditionnement.

4.1.3.3. Indépendance.

Nous proposons de traduire l'indépendance entre deux événements flous E et F par:

$$- J(E \cap F) = J(E) \wedge J(F).$$

Ce choix n'est pas complètement arbitraire. En effet, les événements $\emptyset$ et Ω étant indépendants de tout autre événement, si l'on traduit l'indépendance entre deux événements E et F par $J(E \cap F) = J(E) \perp J(F)$, on doit avoir $J(\emptyset) = J(E) \perp J(\emptyset)$ et $J(E) = J(E) \perp J(\Omega)$. Autrement dit, l'opérateur $\perp$ doit être tel que

$$- x \perp 1 = 1 \text{ et } x \perp 0 = x \quad \forall x \in [0,1]$$

Les propriétés de l'intersection font de $([0,1], \perp)$ un semi-groupe et le choix de $\wedge$ pour définir l'indépendance en découle.

4.1.3.4. Conditionnement.

La traduction naturelle du conditionnement de Kampé De Fériet dans le cas flou serait $J(F/E) = J(E) \ominus J(E \cap F)$. Mais alors, en cas d'indépendance entre les événement E et F, on aurait

$$\begin{aligned} J(F/E) &= J(E) \ominus J(E \cap F) \\ &= J(E) \ominus (J(E) \vee J(F)) \\ &= J(E) \ominus J(F) \\ &\neq J(F) \end{aligned}$$

Pour satisfaire la condition d'indépendance $J(F/E) = J(F)$, on est donc amené à résoudre l'équation

$$- \quad t \ominus (J(E) \vee J(F)) = J(F) \quad \forall E, F \in \Omega$$

Si $J(F) \neq 0$, cette équation a une solution unique qui est $t = J(F) \ominus J(E)$.

Si $J(F) = 0$, alors l'ensemble des solutions est $[J(E), 1]$.

Comme dans pareille circonstance, on opte pour le choix le moins arbitraire en retenant la plus petite des solutions, i.e. $t = J(E)$ quand $J(F) = 0$. Moyennant ce choix, on a dans tous les cas $t = J(F) \ominus J(E)$.

En définitive, l'information conditionnelle apportée par F sachant que E est donnée par

$$- \quad J(F/E) = [J(F) \ominus J(E)] \ominus J(E \cap F) \quad \forall E, F \in \Omega.$$

Nous vérifions par la suite que quel que soit $E \in \Omega$, l'application $F \mapsto [J(F) \ominus J(E)] \ominus J(E \cap F)$ ainsi construite est bien une information.

preuve:

$$\begin{aligned} J(\emptyset/E) &= (1 \ominus J(E)) \ominus 1 \\ &= 0 \ominus 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(\Omega/E) &= (0 \ominus J(E)) \ominus J(E) \\
&= J(E) \ominus J(E) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(F \cup G/E) &= [J(F \cup G) \ominus J(E)] \ominus [J((E \cap F) \cup (E \cap G))] \\
&\leq [(J(F \cup G) \ominus J(E)) \ominus J(E \cap F)] \wedge [J(F \cup G) \ominus J(E)] \ominus J(E \cap G) \\
&\leq [J(F) \ominus J(E)] \ominus J(E \cap F) \wedge [J(G) \ominus J(E)] \ominus J(E \cap G) \\
&= J(F/E) \wedge J(G/E)
\end{aligned}$$

4.1.3.5. Définition.

Soit T un opérateur flou continu. Une information J est dite T -composable si et seulement si

$$- J(E \cup F) = J(E) T J(F) \quad \forall E, F \subset \Omega \text{ tels que } E \cap F = \emptyset.$$

4.1.3.6. Remarque.

Les propriétés

- $E \cup F = F \cup E$
- $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
- $E \cup \emptyset = E$
- $F \subset G \Rightarrow E \cup F \subset E \cup G$

entraînent pour l'opérateur T les conditions suivantes:

- $x T y = y T x$ (commutativité)
- $x T (y T z) = (x T y) T z$ (associativité)
- $x T 1 = x$ (élément neutre)
- $y \leq z \Rightarrow x T y \leq x T z$ (monotonie)

L'on voit que T est dans ce cas un opérateur de conjonction.

4.1.3.7. Définition.

Nous dirons qu'une information est de type P (P pour possibilité) ou compatible avec la notion de possibilité si et seulement si

$$- J(E) = \varphi(\Pi(E)) \quad \forall E \subset \Omega$$

où Π est une mesure de possibilité sur Ω et $\varphi:[0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction continue strictement décroissante telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$.

Il est immédiat que $J(E) = \varphi(\Pi(E))$ détermine une information car

$$J(\emptyset) = \varphi(0) = 1$$

et

$$J(\Omega) = \varphi(1) = 0.$$

D'autre part,

$$E \subset F \Rightarrow \Pi(E) \leq \Pi(F)$$

$$\Rightarrow \varphi(\Pi(E)) \geq \varphi(\Pi(F))$$

$$\Rightarrow J(E) \geq J(F).$$

4.1.3.8. Remarque.

Il est clair que $J(E) = \varphi(\Pi(E))$ détermine une bijection $\Pi([0,1]) \leftrightarrow J([0,1])$, et $\Pi(E) = \varphi^{-1}(J(E))$.

D'autre part, pour deux événements E et F, on a

$$\Pi(E \cup F) = \Pi(E) \vee \Pi(F)$$

D'où

$$\varphi^{-1}(J(E \cup F)) = \varphi^{-1}(J(E)) \vee \varphi^{-1}(J(F)),$$

ou encore

$$J(E \cup F) = \varphi(\varphi^{-1}(J(E)) \vee \varphi^{-1}(J(F))).$$

Autrement dit, une information de type P est T-composable avec

$$xTy = \varphi(\varphi^{-1}(x) \vee \varphi^{-1}(y)).$$

4.1.3.9. Construction.

Nous nous de construire sur $[0,1]^\Omega$, une information de type Inf, compatible avec la notion de possibilité. En reprenant les notations de (4.1.3.7), cette double contrainte conduit à

$$\begin{aligned}\varphi(\Pi(E \cup F)) &= \varphi(\Pi(E) \vee \Pi(F)) \\ &= \varphi(\Pi(E)) \wedge \Pi(F)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

D'autre part, si les événements E et F sont indépendants, on doit avoir $J(E \cap F) = J(E) \vee J(F)$

Cela conduit à

$$\begin{aligned}\varphi(\Pi(E \cap F)) &= \varphi(\Pi(E) \wedge \Pi(F)) \\ &= \varphi(\Pi(E)) \vee \Pi(F)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

Autrement dit, la fonction φ doit vérifier les propriétés suivantes:

- $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$
- $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$
- $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$
- φ strictement décroissante

Plusieurs satisfont ces conditions. En particulier toute fonction de négation qui satisfait aux lois de De Morgan pour les opérateurs $\wedge$ et $\vee$. Ainsi est-il naturel de retenir la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1-x$ et utilisée comme négation dans le cadre de la théorie des sous-ensembles flous.

Cela conduit à la définition suivante:

4.1.3.10. Définition.

L'information fournie par un événement floue E est donnée par

$$- J(E) = 1 - \Pi(E)$$

4.1.3.11. Propriété.

L'information apportée par F sachant E vérifie

$$- J(F/E) = 1 - [\Pi(F)|\Pi(E)]|\Pi(E \cap F).$$

preuve.

$$\begin{aligned} J(F/E) &= (J(F) \ominus J(E)) \ominus J(E \cap F) \\ &= [(1 - \Pi(F)) \ominus (1 - \Pi(E))] \ominus (1 - \Pi(E \cap F)) \\ &= [1 - \Pi(F)|\Pi(E)] \ominus (1 - \Pi(E \cap F)) \\ &= 1 - (\Pi(F)|\Pi(E))|\Pi(E \cap F) \end{aligned}$$

En se rappelant qu'on a défini le conditionnement possibiliste normalisé par $\pi(y/x) = (\pi(y)|\pi(x))|\pi(x,y)$, nous en droit d'écrire

$$- J(F/E) = 1 - \Pi(F/E)$$

$$\text{avec } \Pi(F/E) = (\Pi(F)|\Pi(E))|\Pi(E \cap F)$$

C'est là une autre justification du conditionnement possibiliste normalisé.

4.2. Dépendance informationnelle

Nous nous proposons de construire une mesure de la liaison (ou de la dépendance) entre deux caractères flous A et B. Soit H cette mesure. Pour un minimum de cohérence, H doit vérifier au moins les propriétés suivantes:

- $H(A,B) = H(B,A)$
- $H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$

Soit Ω un ensemble d'individus muni d'une mesure possibilité Π . Si E est une partie floue Ω , $\Pi(E)$ évalue le degré avec lequel la réalisation de E est possible. Nous avons mesuré la valeur de l'information fournie par la réalisation de E par

$$- J(E) = 1 - \Pi(E).$$

4.2.1. Dépendance entre modalités

4.2.1.1. Définition

Soit A un caractère flou. Nous avons vu que le caractère A induit une partition floue $(\Omega_a)_{a \in A}$ de Ω , où Ω_a est la signification de la modalité $a \in A$. Il apparaît naturel de dire que l'information apportée par la modalité a est l'information fournie par la signification Ω_a de a . Si on note $J(a)$ l'information apportée par la modalité a , on aura $J(a) = 1 - \Pi(\Omega_a)$, c'est à dire

$$- J(a) = 1 - s(a).$$

4.2.1.2. Définitions

Soient A et B deux caractères qualitatifs flous. On dira que deux modalités $a \in A$ et $b \in B$ sont indépendantes si et seulement

$$- s(b/a) = s(b)$$

4.2.1.3. Définition

L'information conjointe apportée par les modalités $a \in A$ et $b \in B$ est définie par

$$- J(a,b) = 1 - \Pi(\Omega_a \cap \Omega_b),$$

c'est à dire

$$- J(a,b) = 1 - s(a,b).$$

De même, l'information conditionnelle apportée par b sachant a est donnée par

$$- J(b/a) = 1 - s(b/a).$$

4.2.1.4. Définition

De part la définition axiomatique de l'information, on a

$$- J(a,b) \geq J(a) \vee J(b) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

L'égalité n'a lieu dans cette inéquation que si et seulement si a et b sont indépendants. D'où l'intuition de prendre pour indicateur de la dépendance entre a et b, la mesure H définie par

$$- H(a,b) = [J(a) \vee J(b)] \ominus J(a,b).$$

Cette mesure vérifie les deux propriétés suivantes:

4.2.1.5. Propriétés

$$- H(a,b) = J(b) \ominus J(b/a).$$

preuve:

$$\begin{aligned} J(b) \ominus J(b/a) &= J(b) \ominus [(J(b) \ominus J(a)) \ominus J(a,b)] \\ &= [J(b) \oplus (J(b) \ominus J(a))] \ominus J(a,b) \\ &= [J(a) \vee J(b)] \ominus J(a,b). \end{aligned}$$

4.2.1.6. Propriétés

$$- H(a,b) = 1 - [s(a) \wedge s(b)] | s(a,b).$$

preuve:

$$\begin{aligned} H(a,b) &= [J(a) \vee J(b)] \ominus J(a,b) \\ &= [(1-s(a)) \vee (1-s(b))] | (1-s(a,b)) \\ &= 1 - [s(a) \wedge s(b)] | s(a,b) \end{aligned}$$

4.2.2. Dépendance entre caractères

4.2.2.1. Définition

Nous allons mesurer la dépendance globale entre A et B en prenant la moyenne des dépendances élémentaires $H(a,b)$, soit

$$- H(A,B) = \frac{1}{|A||B|} \sum_{a,b} [1 - (s(a) \wedge s(b)) | s(a,b)]$$

4.2.2.2. Remarque

Les différents opérateurs utilisés pour définir la mesure de dépendance H sont liés au choix de la conjonction *. Nous proposons ici une formulation explicite de la mesure H au cas où la conjonction * est l'opérateur produit défini par $x*y = xy$. Dans ce cas, l'opérateur | est défini par $x|y = 1 \wedge \frac{y}{x}$. Cela donne

$$- H(A,B) = \frac{1}{|A||B|} \sum_{a,b} \left[1 - \frac{s(a,b)}{s(a) \wedge s(b)} \right]$$

Cette équation est l'équivalent de la formule de l'information mutuelle entre deux variables A et B que l'on rencontre en statistique:

$$- H(A,B) = \sum_{a,b} [p(a,b) \log_2 \frac{p(a,b)}{p(a) \cdot p(b)}]$$

La différence principale entre les deux formulations est que l'information mutuelle utilise l'information de Shannon définie par $J(E) = \log_2 \left(\frac{1}{P(E)} \right)$ et le système de pondération des points par leurs masses, alors que notre indicateur H utilise l'information J définie par $J(E) = 1 - \Pi(E)$ et le système de pondération uniforme des points. D'autres conjonctions aboutiraient à d'autres formulations de la mesure H, mais l'information associée à la conjonction produit est certainement celle qui se rapproche le plus de l'information mutuelle communément utilisée en statistique.

4.2.2.3. Exemple.

Pour illustrer la notion de liaison possibiliste entre deux ensembles, considérons un service de pédiatrie soucieux de promouvoir l'allaitement maternel. Inquiet de constater le faible attrait de cette idée, le Chef de service se demande si son personnel est vraiment informé et motivé. Il souhaite connaître la qualité du service fourni par le personnel de santé. Le Directeur de l'hôpital a résolu d'observer une population de 500 personnes au travers d'un questionnaire flou suivant la méthode du différentiel sémantique. Les questions, au nombre de 30, se présentent sous forme d'échelles subjectives. Prenons par exemple deux questions:

A: Conseillez-vous l'introduction dans l'alimentation du bébé

	non	un peu	assez	beaucoup
des farines	X			
de la bouillie				X
de jus de fruits	X			
de l'eau		X		

B: Que pensez-vous du message de l'allaitement maternel exclusif jusqu'à 6 mois?

	non	un peu	assez	très
ambiguë				X
justifié			X	
excessif		X		

Dans cet exemple, la variable A a quatre modalités: farines (Fari), bouillie (Boui), jus de fruits (Frui) et eau (Eau). La variable B a trois modalités: ambiguë (Ambi), justifié (Just) et excessif (Exce).

Un extrait du tableau de descriptions floues serait par exemple le suivant:

	A				B		
	Fari	Boui	Frui	Eau	Ambi	Just	Exce
ω_1	0	1	0	.3	1	.7	.3
ω_2	.3	.7	.3	1	0	0	1
ω_3	0	1	.3	.3	.3	0	1
ω_4	.3	.3	0	1	0	.3	1
ω_5	0	1	.7	.3	1	0	.3
ω_6	.3	.7	0	1	0	.7	1
ω_7	0	1	.3	.3	1	0	.7

tableau: Descriptions floues.

Le tableau de correspondances floues associé au tableau ci-dessus est donné par

	B			
		Ambi	Just	Exce
A	Fari	0	.3	.3
	Boui	1	.7	1
	Frui	.7	0	.3
	Eau	.3	.7	1
		1	.7	1

tableau: Correspondances floues.

Pour ce tableau de correspondances floues, la valeur de la mesure de liaison entre A et B est $H(A,B) = 0.23$. Plus cette valeur est élevée, plus la liaison entre A et B est forte.

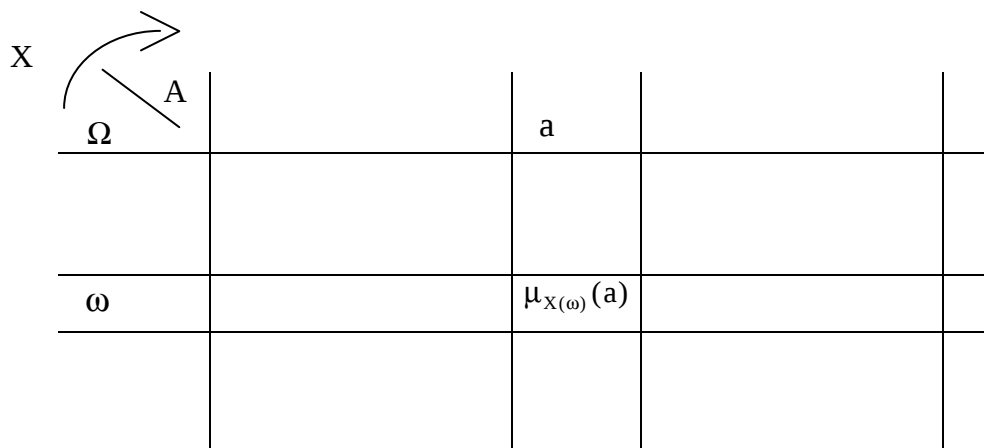
Chapitre 5

5. Pratique de la statistique floue

5.1. Codage flou

5.1.1. Association floue.

Dans une enquête statistique, tout individu est associé à une modalité de variable et une seule. Le questionnaire qui sert de support à l'enquête met en correspondance les individus d'une population Ω et les différentes modalités d'une variable X (Figure 5.1). Si A est l'ensemble des modalités de X , à la croisée de la ligne individu $\omega \in \Omega$ et de la colonne modalité $a \in A$, on a le nombre $\mu_{X(\omega)}(a)$ qui vaut 1 ou 0 selon que l'individu ω a observé la modalité 'a' ou non.



Ω		a	
ω		$\mu_{X(\omega)}(a)$	

Figure 5.1: Opération d'association.

Prenons l'exemple d'une enquête sur une population Ω d'élèves d'une classe donnée. Soit X une variable de cette enquête. Si X est la variable « sexe », l'ensemble A des modalités de X a deux éléments: $A = \{\text{Femme}, \text{Homme}\}$. X est une application de Ω dans A : $X(\omega) = \text{Femme}$ si ω est une femme et $X(\omega) = \text{Homme}$ si ω est un homme. C'est cette application X qui matérialise l'association entre les individus de Ω et les modalités de A .

Une telle association peut être vue sous l'angle d'une fonction d'appartenance au sous-ensemble $X(\omega)$:

$$\mu_{X(\omega)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) = a \\ 0 & \text{si } X(\omega) \neq a \end{cases} \text{ avec } a \in \{\text{Femme, Homme}\}$$

On dit alors que l'association entre les individus de Ω et les modalités de A est nette, c'est à dire qu'il y a association ou il n'y a pas association (Tableau 5.1).

	Femme	Homme	
ω	1	0	$\rightarrow$ si ω est une femme
ω'	0	1	$\rightarrow$ si ω' est un homme

Tableau 5.1: Association nette.

Les valeurs 0 et 1 utilisées ici n'ont rien de numériques. Ces valeurs sont des modalités quantitatives d'une variable qualitative. La somme $0+1$ n'a ici aucun sens, pas plus que la différence $1-0$. Du point de vue mathématiques, l'ensemble $\{0,1\}$ a une structure de treillis de Boole pour les opérations $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ définies par le Tableau 5.2.

$\dot{+}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\dot{\times}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tableau 5.2: Opérations de Boole.

Pour un individu ω donné, il est toujours possible de définir un ordre sur l'ensemble des modalités $A=\{\text{Femme, Homme}\}$ par:

$$a \leq a' \Leftrightarrow \mu_{X(\omega)}(a) \dot{\times} \mu_{X(\omega)}(a') = \mu_{X(\omega)}(a) \quad \forall a, a' \in A.$$

Cette relation d'ordre est en fait l'ordre du treillis $(\{0,1\}, \dot{+}, \dot{\times})$.

Toute enquête statistique repose sur la détermination, pour chaque individu ω , de la fonction d'appartenance $\mu_{X(\omega)}$. La fiche d'enquête (ou questionnaire) à remplir se présente généralement sous la forme suivante:

Question X: quel est votre sexe ? ☐ femme
☐ homme

Si ω est une femme, on remplit la fiche comme ceci :

Question X: quel est votre sexe ? ☒ femme
☐ homme

Si ω est un homme, on remplit la fiche comme cela :

Question X: quel est votre sexe ? ☐ femme
☒ homme

Il peut arriver que l'individu ω observe « plus ou moins » la modalité 'a', i.e. $\mu_{X(\omega)}(a) \in [0,1]$. Dans ce cas, on dira que l'association entre l'individu ω et la modalité 'a' est floue. L'objet central de notre étude est de trouver un moyen simple de saisir de telles associations et une méthode pratique pour les analyser.

Prenons l'exemple d'une enquête sur une population Ω de médecins et d'infirmiers du service de pédiatrie d'un hôpital. Le personnel de santé donne des conseils aux mamans qui arrivent dans ce service. L'enquête (ou une partie de l'enquête) consiste à savoir quel supplément alimentaire, en plus du lait maternel, il faut conseiller aux mamans de donner à leurs bébés.

Soit X la variable « supplément alimentaire ». Soit A l'ensemble des modalités de la variable X , c'est à dire l'ensemble des suppléments alimentaires que le personnel conseille aux mamans. Pour simplifier, posons $A = \{\text{farine, bouillie}\}$. Un personnel de santé peut conseiller à une maman d'administrer à son bébé un peu de farine et assez de bouillie. Dans ce cas, l'association entre les individus et les modalités de la variables X n'est plus nette, mais floue. Il y a une double différence entre l'association nette et l'association floue.

La première différence est qu'un individu peut être associé à plus d'une modalité de variable. Cela veut dire qu'on n'a plus une situation du style: soit $X(\omega)=\text{farine}$, soit $X(\omega)=\text{bouillie}$. Mais qu'on peut parfaitement avoir $X(\omega)=\text{farine}$ et $X(\omega)=\text{bouillie}$ simultanément. En d'autres termes, le médecin ω peut conseiller la farine et la bouillie. Sur le plan formel, X est une application multivoque. Cela se traduit au niveau d'une fiche d'enquête par le schéma suivant:

Question X: quel supplément alimentaire pour le bébé ?
☐ farine
☐ bouillie

Ainsi, une maman peut choisir de cocher simultanément les deux cases. Quiconque a essayé de dépouiller des enquêtes statistiques sait que cette possibilité n'est pas offerte dans le cas d'un questionnaire classique. Seul notre cadre de travail, celui d'un questionnaire flou, offre cette possibilité.

La seconde différence entre association nette et association floue est qu'il existe, dans le second cas, plusieurs degrés d'associations entre un individu et une modalité de variable. Cela signifie qu'on n'a plus $\mu_{X(\omega)}(a)=1$ ou 0 selon que ω est associé à 'a' ou non. Mais $\mu_{X(\omega)}(a)$ appartient à l'intervalle $[0,1]$ et est d'autant plus élevé que l'association entre ω et 'a' est forte.

Si le médecin ω conseille un peu de farine et assez de bouillie, on peut par exemple écrire $\mu_{X(\omega)}(\text{farine})=0.3$ et $\mu_{X(\omega)}(\text{bouillie})=0.7$. Comme pour les associations nettes, les valeurs 0.3 et 0.7 n'ont rien de numériques. Nous appelons de telles valeurs, des valeurs de références. Sur ces valeurs, des opérations telles que $0.7+0.3$ ou $0.7-0.3$ n'ont aucun sens. On aurait bien pu écrire $\mu_{X(\omega)}(\text{farine})=0.7$ et $\mu_{X(\omega)}(\text{bouillie})=0.3$, ou encore $\mu_{X(\omega)}(\text{farine})=0.9$ et $\mu_{X(\omega)}(\text{bouillie})=0.2$. C'est uniquement pour faciliter l'interprétation des résultats qu'on convient d'écrire $\mu_{X(\omega)}(\text{farine})=0.3$ pour indiquer que ω conseille un peu de farine et $\mu_{X(\omega)}(\text{bouillie})=0.7$ pour indiquer que ω conseille assez de bouillie. Les seules opérations autorisées sur ces valeurs de références sont celles

introduites au chapitre 2 par l'intermédiaire des opérateurs flous. Une des questions qui se pose lorsqu'on s'intéresse à la statistique floue est de savoir comment trouver les fonctions d'appartenance. Plus précisément, pour un individu ω , quelle valeur doit-on donner à $\mu_{X(\omega)}(\text{farine})$ et à $\mu_{X(\omega)}(\text{bouillie})$.

Fondamentalement, la fonction d'appartenance $\mu_{X(\omega)}$ définit sur l'ensemble $A=\{\text{farine, bouillie}\}$ une relation d'ordre, et c'est cet ordre qui est important: $a \leq a' \Leftrightarrow \mu_{X(\omega)}(a) \wedge \mu_{X(\omega)}(a') = \mu_{X(\omega)}(a) \quad \forall a, a' \in A$, où $\wedge$ est le minimum. Dire que $a \leq a'$ signifie que « a' » est plus $X(\omega)$ que « a », ou encore, dans le cas de l'exemple ci-dessus, que ω conseille plus « a' » que « a ». En clair, peu importe la quantité de farine ou de bouillie que le pédiatre conseille à une maman. Ce qui est déterminant, c'est de savoir si le pédiatre préconise aux mamans de donner plus de farine à leurs bébés que de bouillie, ou l'inverse. Dans la pratique, la fonction d'appartenance s'obtient au travers d'un questionnaire flou.

5.1.2. Questionnaire flou.

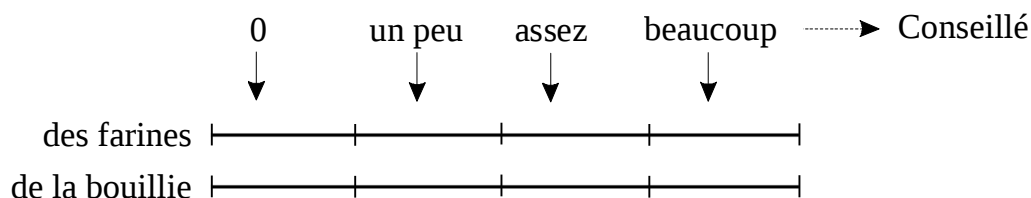
Nous nous proposons d'utiliser des échelles pour définir ce qui est mal défini. Une telle démarche rejoint le sens commun qui veut que notre perception du flou repose sur une quantification de la qualité. Lorsque nous disons par exemple « elle m'aime un peu, beaucoup, énormément ou pas du tout », nous introduisons de fait, une échelle à quatre degrés:

- 0- pas du tout,
- 1- un peu,
- 2- beaucoup,
- 3- énormément.

C'est cette échelle que nous appelons « différentiel sémantique ». Ce différentiel permet de déterminer les fonctions d'appartenances.

En reprenant l'exemple précédent du médecin qui donne des conseils aux mamans qui arrivent dans un service de pédiatrie, le différentiel prend la forme de deux échelles à quatre degrés. La question à poser se présente comme suit:

Quel supplément alimentaire préconisez-vous au bébé vers le 2^{ème} mois?



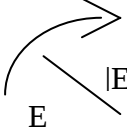
A chaque case, on associe un attribut: '0', 'un peu', 'assez', 'beaucoup'. Ces attributs indiquent l'intensité de la réaction de la personne interrogée face au phénomène étudié. L'attribut '0' correspond à l'intensité la plus faible. Il faut noter qu'il ne s'agit ici ni d'un différentiel continu, ni d'une échelle analogique, mais bien d'un différentiel flou. C'est cette forme de saisie d'une fonction d'appartenance que nous appelons questionnaire flou. Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, peu importe les valeurs qui sont associées aux différents attributs. L'essentiel est de savoir si par exemple le médecin préconise beaucoup de bouillie et pas du tout de farine. Sur la fiche du questionnaire flou, le médecin met une croix sur la case de son choix, marquant ainsi sa préférence à tel attribut plutôt qu'à tel autre.

Pour faciliter l'interprétation des résultats et assurer une certaine cohérence dans les calculs, un minimum de règles doivent être respectées quant à l'affectation des valeurs de références aux différentes cases de l'échelle:

- i)- L'échelle du différentiel sémantique est ordonnée. Il s'agit de l'ordre du treillis $([0,1], \wedge, \vee)$.
- ii)- Toutes les valeurs de références sont comprises entre 0 et 1. Cela tient au fait que ces valeurs de références sont des degrés d'appartenance à un sous-ensemble flou.

- iii)-Pour ne pas alourdir le questionnaire flou, le nombre de cases pour chaque échelle doit être limité à 7. Le nombre minimum est naturellement de deux: les cases associées à 0 et à 1.
- iv)-Soit E l'ensemble des valeurs de référence. Si $\text{card}(E)$ est impair, on doit avoir $0.5 \in E$. Et si $\text{card}(E)$ est pair, on doit avoir $0.5 \notin E$.

Le Tableau 5.3 donne un exemple de valeurs de références en fonction du nombre de cases sur l'échelle du différentiel sémantique. Sur ce tableau, E représente l'ensemble des valeurs de références, et α une valeur de référence. Ces valeurs de référence sont classés par ordre croissant: $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$. A la croisée de la ligne i et de la colonne j , on a la valeur de la référence α_i quand le nombre de cases sur le différentiel est j .



$ E $	2	3	4	5	6	7
α_1	0	0	0	0	0	0
α_2	1	.5	.3	.3	.2	.2
α_3	-	1	.7	.5	.4	.4
α_4	-	-	1	.7	.6	.5
α_5	-	-	-	1	.8	.6
α_6	-	-	-	-	1	.8
α_7	-	-	-	-	-	1

Tableau 5.3: Valeurs de références.

Il peut arriver qu'on souhaite obtenir de la personne interrogée, non seulement l'intensité de sa réaction à l'égard du phénomène étudié, mais aussi la nature de cette réaction: positive ou négative. D'où la nécessité de disposer d'un différentiel sémantique symétrique. En reprenant la même question que précédemment, un tel différentiel se présente sous la forme suivante:

Quel supplément alimentaire préconisez-vous au bébé vers le 2^{ème} mois?

Déconseillé ◀--- très assez un peu 0 un peu assez très ---▶ Conseillé

	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
des farines								
de la bouillie								

Contrairement au cas d'un différentiel simple, l'attribut '0' correspond ici à une certaine neutralité face au phénomène étudié. Il peut également correspondre à une ignorance, en particulier si une personne a choisit de cocher la case '0' pour toutes les modalités d'une même question. De part sa nature, un différentiel symétrique doit avoir un nombre impair de cases.

A partir d'un questionnaire flou, on construit un tableau $k(\Omega, A)$, appelé tableau de description flou. Ω représente l'ensemble des individus interrogés et A l'ensemble des modalités d'un caractère flou X . Le tableau $k(\Omega, A)$ est défini par $k(\omega, a) = \mu_{X(\omega)}(a)$ (Tableau 5.4).

X

Ω		a		
ω		$\mu_{X(\omega)}(a)$		

Tableau 5.4: Tableau de description flou.

5.1.3. Normalisation.

On considère un caractère flou X décrivant une population Ω . Soit A l'ensemble des modalités du caractère X . Sur le plan formel, X est une application floue. Cela signifie que pour tout individu ω , $X(\omega)$ est un sous-ensemble flou normalisé de A . Autrement dit, on doit avoir:

$$\bigvee_a \mu_{X(\omega)}(a) = 1 \quad \forall a \in A,$$

Ramené à un questionnaire flou, cette condition traduit le fait que pour chaque question, chaque individu doit cocher au moins une des cases ayant la plus forte intensité: la case "très". Il peut arriver qu'au moment de l'enquête, pour une question donnée, un individu ne coche aucune des cases "très". Cela signifie que l'individu en question juge l'attribut "très" excessif. Une telle exigence trouve sa justification dans le fait que la notion d'intensité peut varier d'un individu à un autre. Si un individu ω ne coche aucune des cases 'très', on procède à une normalisation. C'est à dire, pour un individu ω et pour une modalité 'a' donnée, on remplace chaque possibilité d'association $\mu_{X(\omega)}(a)$ par

$$\mu_{\text{Nor}(X(\omega))}(a) = \frac{\mu_{X(\omega)}(a)}{M(\omega)} \quad \text{avec } M(\omega) = \bigvee_{a \in A} \mu_{X(\omega)}(a)$$

On voit immédiatement que la nouvelle variable $\text{Nor}(X)$ est normalisée, i.e.

$$\bigvee_{a \in A} \mu_{\text{Nor}(X(\omega))}(a) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Cet opérateur qui transforme le sous-ensemble $X(\omega)$ en $\text{Nor}(X(\omega))$ n'est rien d'autre que l'opérateur de normalisation de Zadeh (c.f. 1.3.2.2).

Signalons que la normalisation est toujours possible même lorsque $M(\omega)=0$ pour un individu ω donné. Si $M(\omega)=0$, on utilise la convention $\frac{\alpha}{0}=1 \quad \forall \alpha \in [0,1]$ (c.f. 2.1.3.2).

Soit $k(\Omega, A)$ un tableau de description flou. Le tableau normalisé $k'(\Omega, A)$ obtenu à partir de $k(\Omega, A)$ est donné par:

$$k'(\omega, a) = \frac{k(\omega, a)}{\bigvee_{a \in A} k(\omega, a)} \quad \forall (\omega, a) \in \Omega \times A.$$

Si pour un individu ω donné, la fonction d'appartenance au sous-ensemble flou $X(\omega)$ est constante, on aboutit, après normalisation, à une situation d'ignorance totale où $X(\omega)$ et $\overline{X(\omega)}$ sont également possibles, i.e. l'occurrence de l'événement $X(\omega)$ n'est pas plus surprenante que celle de son contraire. En effet, si pour tout $a \in A$, $\mu_{X(\omega)}(a) = \alpha$, on a

$$M(\omega) = \alpha$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Nor}(X(\omega))}(a) &= \frac{\alpha}{\alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

De même, on a $\mu_{\overline{X(\omega)}}(a) = 1 - \alpha \quad \forall a \in A$, d'où

$$M(\omega) = 1 - \alpha$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Nor}(\overline{X(\omega)})}(a) &= \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Après normalisation, l'événement $X(\omega)$ est son contraire $\overline{X(\omega)}$ sont tous deux complètement possibles car si $(\pi(a))_{a \in A}$ est une distribution de possibilité sur A , on a

$$\begin{aligned} \Pi(\text{Nor}(X(\omega))) &= \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \mu_{\text{Nor}(X(\omega))}(a) \\ &= \bigvee_{a \in A} \pi(a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 \Pi(\text{Nor}(\overline{X(\omega)})) &= \bigvee_{a \in A} \pi(a) \wedge \mu_{\text{Nor}(\overline{X(\omega)})}(a) \\
 &= \bigvee_{a \in A} \pi(a) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Une façon de contourner cette ignorance est de dédoubler chaque modalité de variable.

5.1.4. Dédoublement flou.

Soit Ω une population d'individus décrite par un caractère flou X . Soit Mod une modalité de X . On pose $\mu_{\text{Mod}}(\omega) = \mu_{X(\omega)}(\text{Mod})$. Le dédoublement flou (ou dédoublement tout court) de la modalité Mod consiste à définir deux nouvelles modalités $\text{Mod}+$ et $\text{Mod}-$ par:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{Mod}+}(\omega) &= \begin{cases} 2 * \mu_{\text{Mod}}(\omega) - 1 & \text{si } \mu_{\text{Mod}}(\omega) > .5 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \\
 \mu_{\text{Mod}-}(\omega) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\text{Mod}}(\omega) > .5 \\ 1 - 2 * \mu_{\text{Mod}}(\omega) & \text{si non} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce dédoublement se schématise par la Figure 5.2. Un dédoublement flou donne le sens et l'intensité de la personne interrogée. Un dédoublement binaire donne le sens de la réaction, mais pas son intensité (Figure 5.3 et Figure 5.4).

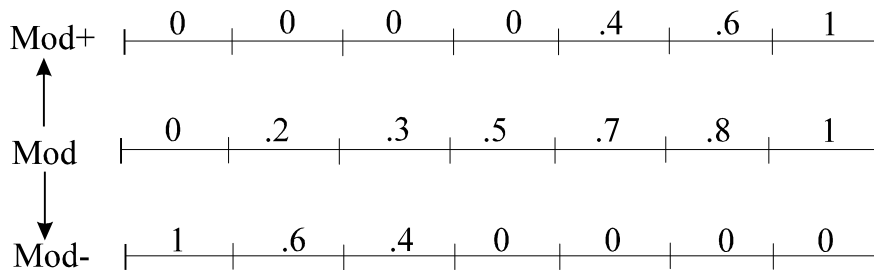


Figure 5.2: Dédoublement flou.

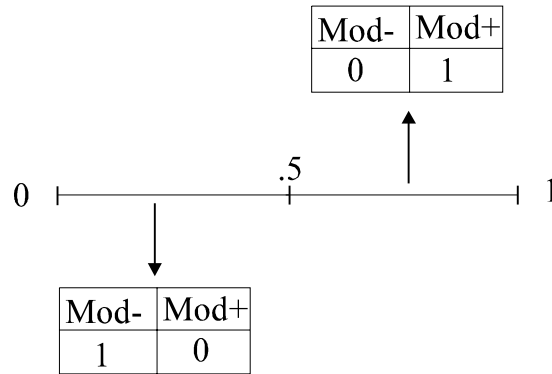


Figure 5.3: Dédoublément binaire d'une modalité de variable floue

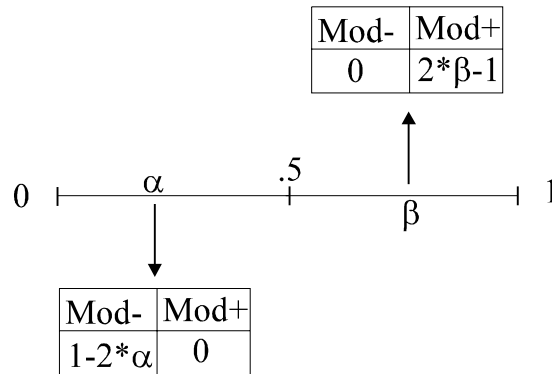


Figure 5.4: Dédoublément flou d'une modalité de variable floue

Le dédoublement flou peut être considéré comme une extension du dédoublement binaire. En effet, si Mod est une modalité binaire, on a

$$\begin{aligned}
 1_{\text{Mod}+}(\omega) &= (2 * 1_{\text{Mod}}(\omega) - 1) * 1_{\text{Mod} \geq .5} \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est Mod} + \\ 0 & \text{si non} \end{cases}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 1_{\text{Mod}-}(\omega) &= (1 - 2 * 1_{\text{Mod}}(\omega)) * 1_{\text{Mod} \leq .5} \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est Mod} - \\ 0 & \text{si non} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans la pratique, le dédoublement est utilisé dans deux cas figure:

- lorsqu'on est en présence d'un caractère flou à une seule modalité,
- si pour un individu ω donné, la fonction d'appartenance à $X(\omega)$ est constante, i.e. $\mu_{X(\omega)}(a) = C^{te} \quad \forall a \in A$.

5.2. Analyse graphique.

5.2.1. Sémantogramme.

Nous proposons ici, une représentation graphique d'un sous-ensemble flou. Nous appelons cette représentation un sémantogramme. Le principe du sémantogramme consiste à traduire les degrés d'appartenance en niveaux de gris. Il est d'ailleurs possible de remplacer les niveaux de gris par une palette de couleurs. Nous avons cependant préféré utiliser les niveaux de gris pour au moins deux raisons. D'une part, contrairement à la couleur, les niveaux de gris sont gérés par la plupart des périphériques d'impression. D'autre part, l'échelle de gris, qui va du blanc total (0% de noir et 100% de blanc) au noir total (100% de noir et 0% de blanc) coïncide parfaitement avec l'échelle $[0,1]$: le blanc est codé 0 et le noir est codé 1.

Le sémantogramme que nous présentons a un sens différent de celui de Molles (1990). Le terme sémantogramme est repris ici car dans notre pratique de la statistique floue, les valeurs d'appartenance aux sous-ensembles flous sont généralement des points de références issus d'un différentiel sémantique.

Soit Ω un référentiel fini de cardinal n : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Soit E un sous-ensemble flou de Ω . Soit μ_E la fonction d'appartenance à E . Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par μ_E . On suppose que ces valeurs sont ordonnées: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$, et on pose pour tout $k=1, \dots, m$:

- $f_E(k) = 100 * \alpha_k$
- $h_E(k) = 100 * \text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = \alpha_k\} / n$.

Pour chaque valeur de k , on construit un bâton de hauteur $h_E(k)$ et remplit d'une couleur équivalente à $f_E(k)$ pour cent de gris (Figure 5.5).

La fonction f_E traduit ainsi les degrés d'appartenance à E en niveaux de gris tandis que la fonction h_E traduit l'effectif de l'ensemble des individus ayant un niveau d'appartenance donné. Ainsi, un individu qui a un degré d'appartenance à E égale à 0, sera représenté sur le sémantogramme par une division ou un bâton de couleur 0% de gris, i.e. le blanc total, et dont la hauteur est proportionnelle à la taille de cet ensemble. De même, un individu qui a un degré d'appartenance à E égal à 1, sera représenté sur le sémantogramme par une division de couleur 100% de gris, i.e. le noir total. Entre ces deux extrêmes, la couleur associée à un individu est d'un gris d'autant plus intense que le degré d'appartenance de cet individu au sous-ensemble flou E est grand.

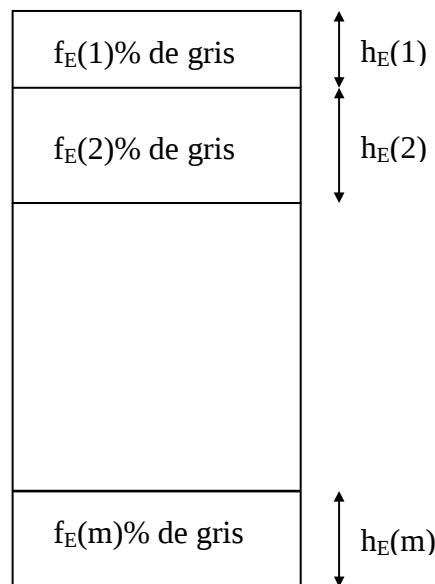


Figure 5.5: Sémantogramme

Dans la pratique, il peut arriver que le périphérique d'affichage ou d'impression n'arrive pas à bien distinguer les différents niveaux de gris à partir d'un certain seuil. Autrement dit, pour un tel périphérique, les couleurs 60% de gris et 70% de gris se confondent avec la couleur 100% de gris, i.e. le noir. Dans ce cas, pour arriver à différencier sur le sémantogramme les individus qui ont un fort degré d'appartenance à un ensemble, il convient d'associer par exemple la couleur 50% de gris à la valeur de référence 1. Cela revient à définir la fonction f_E par $f_E(k) = 50 * \alpha_k$.

5.2.1.1.1. .

Soit Ω un référentiel ayant 10 éléments: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}$. Soit E le sous-ensemble flou de Ω défini par

$$E = \{(\omega_1, 0), (\omega_2, .5), (\omega_3, .8), (\omega_4, .6), (\omega_5, .1), (\omega_6, .6), (\omega_7, .9), (\omega_8, 1), (\omega_9, .3), (\omega_{10}, .8)\}$$

Le sémantogramme de E est donné par la Figure 5.6.

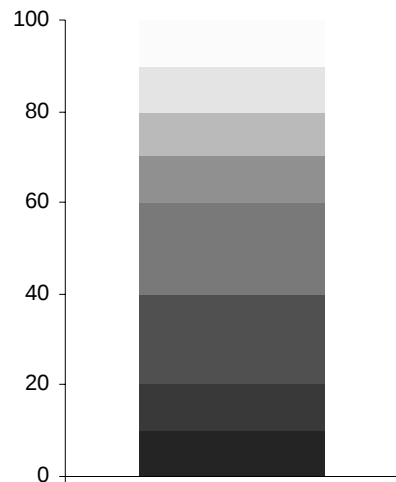


Figure 5.6: Sémantogramme.

Nous allons maintenant définir un sémantogramme bipolaire. Celui-ci est particulièrement adaptée au différentiel sémantique symétrique. Il s'agit dans ce cas, de répartir les valeurs d'appartenance à un sous-ensemble flou de part et d'autre de la valeur 0.5, dont nous avons dit qu'elle est la valeur la plus ambiguë.

Considérons un référentiel Ω fini et de cardinal n : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Soit E un sous-ensemble flou de Ω . On suppose que μ_E prend un nombre fini de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, et que ces valeurs sont ordonnées: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$. On distinguera deux: le cas où $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\} = 0$ et le cas où $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\} \neq 0$.

Cas où $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\} = 0$

Pour chaque valeur de k entre 1 et m , on construit une barre ou un bâton de hauteur $h_E(k) = 100 * \text{card}(\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = \alpha_k\}) / n$ et de gris $f_E(k) = 100 * |1 - 2 * \alpha_k|$. On suppose que les valeurs d'appartenance à E sont ordonnées de la façon suivante: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < 0.5 < \alpha_{p+1} < \dots < \alpha_m$. Le sémantogramme bipolaire est alors constitué de l'empilage de ces différents bâtons, d'une part au dessus d'une barre horizontale de référence et par ordre croissant des valeurs de k telles que $k \geq p+1$, d'autre part, au-dessous de cette même droite de référence, et par ordre décroissant des valeurs de k telles que $k \leq p$ (Figure 5.7).

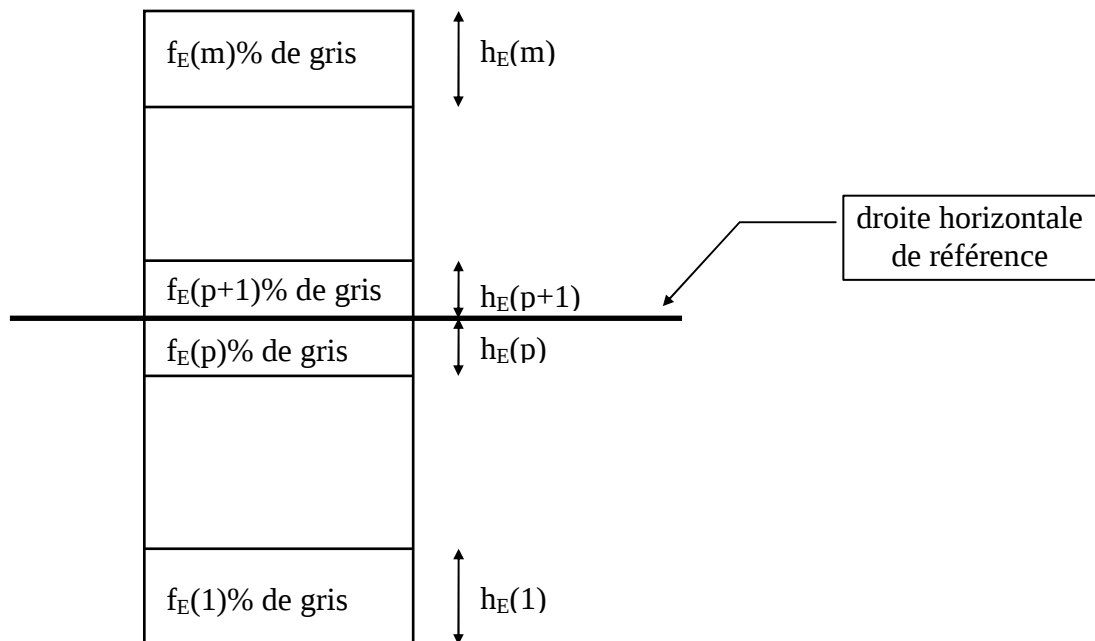


Figure 5.7: Sémantogramme bipolaire

Cas où $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\} \neq 0$

Le procédé est tout à fait semblable à celui qui vient d'être décrit, la seule différence provenant de l'existence d'une division correspondant au niveau d'appartenance $\alpha_p = 0.5$, de hauteur $h_E(p) = 100 * \text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = \alpha_p\} / n$ et de niveau de gris $f_E(p) = 100 * |1 - 2 * \alpha_p|$, c'est à dire 0. Deux cas se distinguent, suivant que $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\}$ est pair ou impair.

Si $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\}$ est pair et de la forme $2h$ où h est un entier naturel non nul, alors la division correspondant au niveau α_p est de hauteur $200h/n$. Elle est composée de deux divisions de hauteur $h_E(p) = 100h/n$ que l'on place l'une au-dessus de la droite horizontale de référence, et l'autre au-dessous. Toutes les autres divisions s'empilent ensuite, pardessus pour qui correspondent à des valeurs de k supérieures à α_p , et par dessous pour celles qui correspondent à des valeurs de k inférieures à α_p . En supposant que les valeurs d'appartenance à E sont ordonnées comme suit, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-1} < \alpha_p = 0.5 < \alpha_{p+1} < \dots < \alpha_m$, le sémantogramme bipolaire prend la forme Figure 5.8.

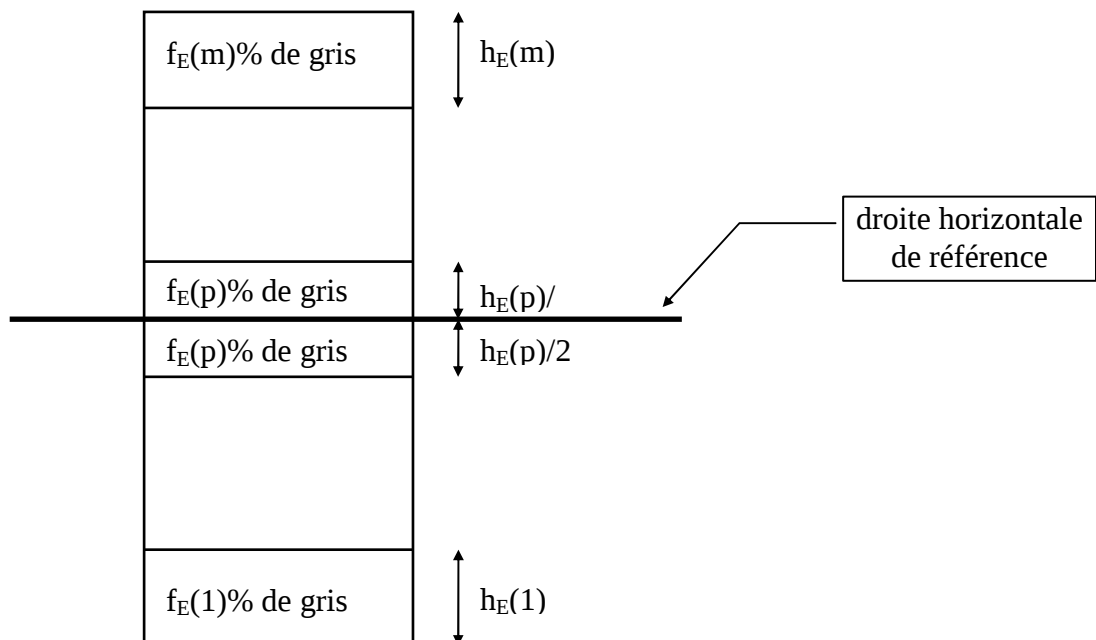


Figure 5.8: Sémantogramme bipolaire .

Si $\text{card}\{\omega \in \Omega / \mu_E(\omega) = 0.5\}$ est impair et de la forme $2h+1$, alors la division correspondant α_p peut être considérée comme la réunion de trois divisions, deux de hauteur $100h/n$ chacune, et une autre de hauteur $100/n$. Cette dernière a la hauteur unité (puisque'elle correspond à un seul individu) et est centrée sur la droite horizontale de référence, les deux autres étant placées, l'une au-dessus, et l'autre au-dessous. Les divisions correspondant aux autres valeurs de k sont placées ensuite par dessus ou par dessous comme pour le cas pair.

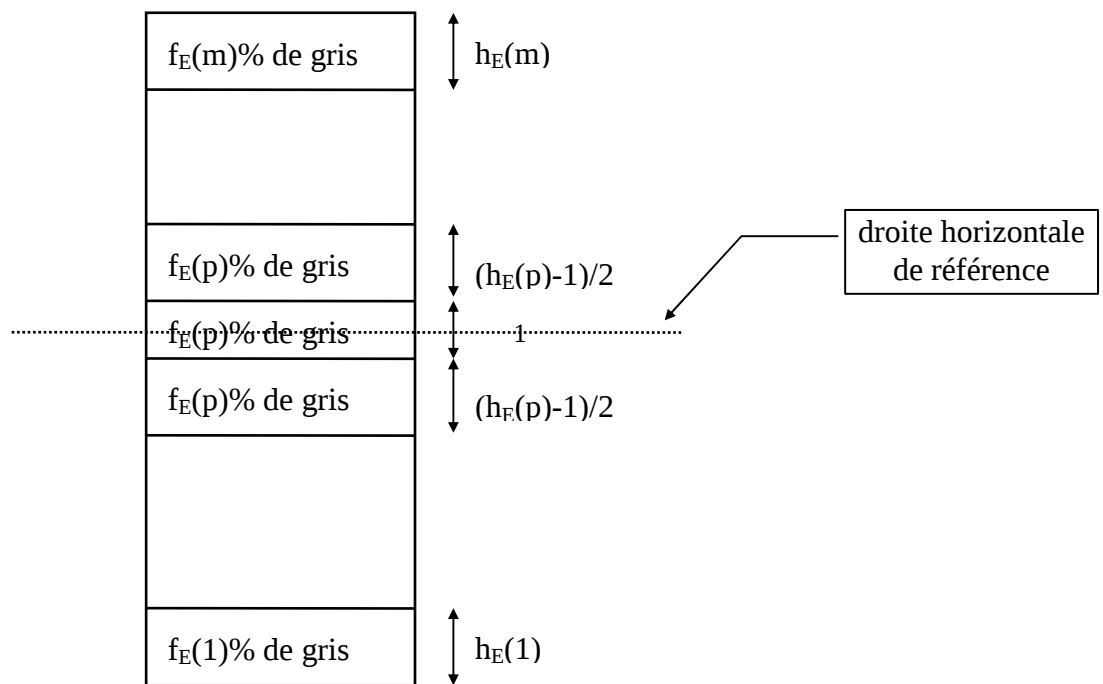


Figure 5.9: Sémantogramme bipolaire.

Ainsi les individus ω_i tel que $\mu_E(\omega_i) = 0$ constituent une division du sémantogramme colorée à 100% de gris. Cette division se trouve du côté bas du sémantogramme par rapport au point de repère et est la plus basse du sémantogramme. De même, les individus ω_i tel que $\mu_E(\omega_i) = 1$ constituent la division la plus haute du sémantogramme. Elle est aussi colorée à 100% de gris. En revanche, les individus ω_i tels que $\mu_E(\omega_i) = 0.5$, figurent dans la division centrale du sémantogramme, colorée à 0% de gris (c'est à dire du blanc total). En d'autres termes, le niveau de gris de la division dans laquelle figure un individu

est d'autant plus intense que sa valeur d'appartenance au sous-ensemble flou E s'écarte de la valeur de référence 0.5.

En attribuant un niveau de gris élevé à la plus petite valeur α_1 , nous traduisons le fait que le degré d'appartenance $\mu_E(\omega_i)=\alpha_1$ indique une association forte entre l'individu ω_i et le sous-ensemble E , mais dans un sens négatif par rapport à 0.5 qui est le point de repère. Inversement, le niveau de gris élevé associé à α_m indique que le degré d'appartenance $\mu_E(\omega_i)=\alpha_m$ traduit une association positive forte entre ω_i et le sous-ensemble E .

5.2.1.2. Exemple.

Soient $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{20}\}$ et le sous-ensemble flou E de Ω définit par:
 $E=\{(\omega_1,.8),(\omega_2,0),(\omega_3,.6),(\omega_4,.95),(\omega_5,.9),(\omega_6,.3),(\omega_7,.85),(\omega_8,1),(\omega_9,.65),(\omega_{10},.4),$
 $(\omega_{11},.5),(\omega_{12},0),(\omega_{13},.2),(\omega_{14},.75),(\omega_{15},0),(\omega_{16},.5),(\omega_{17},.7),(\omega_{18},0),(\omega_{19},.1),(\omega_{20},.55)\}$

Le sémantogramme bipolaire de E est donné par la Figure 5.10.

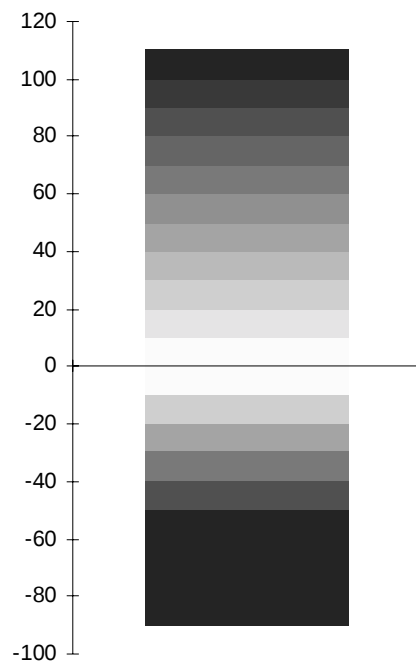


Figure 5.10: Sémantogramme bipolaire

5.2.2. Représentation graphique d'un caractère flou.

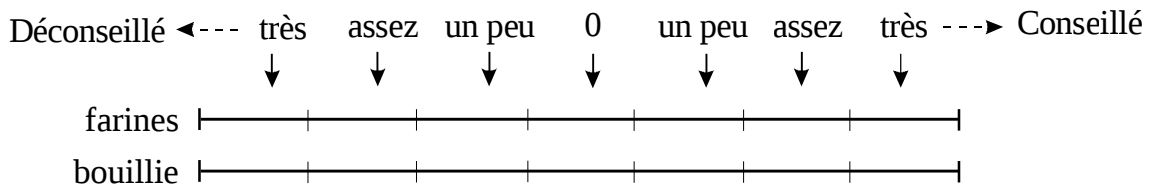
Soit Ω un référentiel fini de cardinal n . Soient X une variable floue sur Ω et A l'ensemble des modalités de X . Nous avons vu qu'une telle variable induit sur Ω une famille de sous-ensemble flous $(\Omega_a)_{a \in A}$ définie par

$$\mu_{\Omega_a}(\omega) = \mu_{X(\omega)}(a) \quad \forall (\omega, a) \in \Omega \times A.$$

Nous allons représenter la variable X par les sémantogrammes des modalités de A , i.e. les sémantogrammes des sous-ensembles flous $(\Omega_a)_{a \in A}$. Si la variable X est issue d'un différentiel sémantique simple, on utilise un sémantogramme simple. Si elle est issue d'un différentiel symétrique, on utilise un sémantogramme bipolaire.

Reprenons l'exemple déjà cité au §5.1.1. Soit Ω l'ensemble du personnel du service de pédiatrie. On pose à chaque personnel la question suivante:

Quel supplément alimentaire préconisez-vous au bébé vers le 2^{ème} mois?



Un exemple du tableau de description flou issu d'un tel questionnaire est donné par le Tableau 5.5.

Le sémantogramme bipolaire de cette question est donné par la Figure 5.11. Sur cette figure, les zones sombres indiquent une association forte entre un individu et une modalité de réponse. Cette association est positive si la couleur se trouve au-dessus de la barre d'origine, et négative si elle se trouve au-dessous de cette barre.

	farine	bouillie
ω_1	0.0	0.0
ω_2	0.7	0.2
ω_3	0.5	0.3
ω_4	0.8	0.3
ω_5	0.3	0.2
ω_6	0.2	0.7
ω_7	0.0	0.5
ω_8	1.0	0.7
ω_9	0.5	0.8
ω_{10}	0.2	0.2
ω_{11}	0.3	0.5
ω_{12}	0.2	0.7
ω_{13}	0.5	0.7
ω_{14}	0.7	0.5
ω_{15}	0.2	0.3
ω_{16}	0.2	0.7
ω_{17}	0.3	0.0
ω_{18}	0.3	0.8
ω_{19}	0.8	0.2
ω_{20}	0.2	0.3
ω_{21}	0.7	1.0
ω_{22}	0.2	0.3
ω_{23}	0.3	0.5
ω_{24}	0.7	0.8
ω_{25}	0.5	0.8
ω_{26}	0.5	0.8
ω_{27}	0.3	0.7
ω_{28}	0.8	0.7
ω_{29}	0.5	0.2
ω_{30}	0.2	0.8

Tableau 5.5: Tableau de données floues.

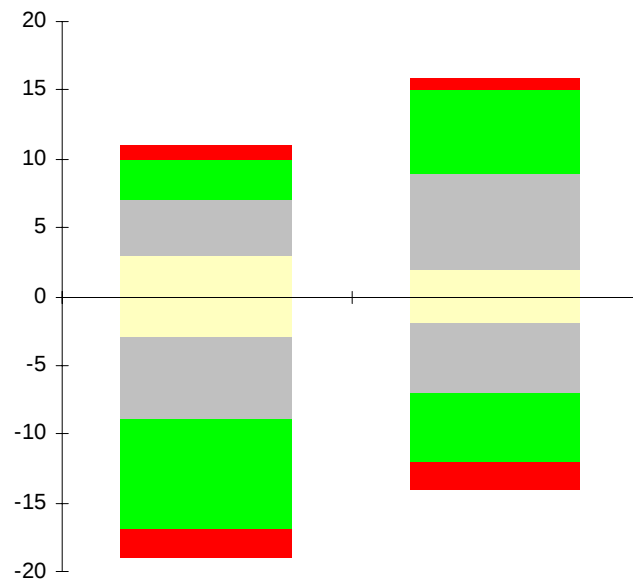


Figure 5.11: Sémantogramme bipolaire.

5.3. Proximités et dépendances.

5.3.1. Distance entre sous-ensembles flous.

5.3.1.1. Cardinal.

Soit Ω un référentiel. Soit E un sous-ensemble flou de Ω . Le cardinal de E est donné par

$$\text{card}(E) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_E(\omega)$$

où $\mu_E : \Omega \rightarrow [0,1]$ est la fonction d'appartenance à E .

Si le sous-ensemble E est net, i.e. si $\mu_E(\omega)$ vaut 1 ou 0 selon que ω appartient ou non à E , cette définition du cardinal coïncide avec la notion classique du cardinal.

5.3.1.2. Exemple.

Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}$. Soit E , le sous-ensemble flou défini par

$$E = \{(\omega_1, .1), (\omega_2, 0), (\omega_3, .5), (\omega_4, 1), (\omega_5, .9), (\omega_6, .7), (\omega_7, 0)\}$$

Le cardinal de E est donné par

$$\begin{aligned} \text{card}(E) &= \sum_{\omega \in \Omega} \mu_E(\omega) \\ &= .1 + 0 + .5 + 1 + .9 + .7 + 0 \\ &= 3.2 \end{aligned}$$

Soit E le sous-ensemble net de Ω défini par $E = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$. Le sous-ensemble E peut encore s'écrire

$$E = \{(\omega_1, 0), (\omega_2, 1), (\omega_3, 1), (\omega_4, 0), (\omega_5, 1), (\omega_6, 0), (\omega_7, 1)\}.$$

Le cardinal de E vaut alors

$$\begin{aligned} \text{card}(E) &= 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on voit bien que le cardinal de E est le nombre d'éléments de E .

5.3.1.3. Différence symétrique.

Soit Ω un référentiel. Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω . La différence symétrique de E et de F est le sous-ensemble flou $E \Delta F$ défini par

$$\mu_{E \Delta F}(\omega) = \mu_{E \cup F}(\omega) - \mu_{E \cap F}(\omega)$$

Cette définition peut encore s'écrire

$$\mu_{E \Delta F}(\omega) = |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|$$

5.3.1.4. Exemple.

Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9\}$.

Soit E, le sous-ensemble flou définit par

$$E = \{(\omega_1, 0), (\omega_2, .9), (\omega_3, .5), (\omega_4, .6), (\omega_5, .3), (\omega_6, .4), (\omega_7, .5), (\omega_8, .1), (\omega_9, .5)\}$$

Soit F, le sous-ensemble flou définit par

$$F = \{(\omega_1, .6), (\omega_2, .5), (\omega_3, .1), (\omega_4, .3), (\omega_5, .3), (\omega_6, 0), (\omega_7, .9), (\omega_8, .5), (\omega_9, .6)\}$$

La différence symétrique de E et de F est donnée par

$$E \Delta F = \{(\omega_1, .6), (\omega_2, .4), (\omega_3, .4), (\omega_4, .3), (\omega_5, 0), (\omega_6, .4), (\omega_7, .4), (\omega_8, .4), (\omega_9, .1)\}$$

5.3.1.5. Distance entre sous-ensembles flous.

Soit Ω un référentiel. Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω . La distance entre E et F est définie comme étant le cardinal de la différence symétrique de E et F, soit:

$$d(E, F) = \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|$$

5.3.1.6. Exemple.

Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9\}$.

Soit E, le sous-ensemble flou définit par

$$E = \{(\omega_1, 0), (\omega_2, .9), (\omega_3, .5), (\omega_4, .6), (\omega_5, .3), (\omega_6, .4), (\omega_7, .5), (\omega_8, .1), (\omega_9, .5)\}$$

Soit F, le sous-ensemble flou définit par

$$F = \{(\omega_1, .6), (\omega_2, .5), (\omega_3, .1), (\omega_4, .3), (\omega_5, .3), (\omega_6, 0), (\omega_7, .9), (\omega_8, .5), (\omega_9, .6)\}$$

La distance entre E et F est donnée par

$$\begin{aligned} d(E, F) &= .6 + .4 + .4 + .3 + 0 + .4 + .4 + .4 + .1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

5.3.2. Distances sur un tableau de description flou.

Soit Ω une population décrite par un caractère flou X . Soit A l'ensemble des modalités de X . Une correspondance floue entre Ω et A se présente sous la forme d'un tableau à double entrée appelé tableau description flou (Tableau 5.6). A la croisée de la ligne ω et de la colonne 'a', se trouve le nombre $\mu_{X(\omega)}(a)$ qui représente la possibilité pour l'individu ω de posséder la modalité 'a'. La ligne ω représente le sous-ensemble flou $X(\omega)$ de A . Ce sous-ensemble est défini par:

$$X(\omega) = \{(a, \mu_{X(\omega)}(a)) / a \in A\}.$$

		a		
ω		$\mu_{X(\omega)}(a)$		

Tableau 5.6: Tableau de description flou.

La colonne 'a' représente le sous-ensemble flou Ω_a de Ω . Ce sous-ensemble est défini par:

$$\Omega_a = \{(\omega, \mu_{\Omega_a}(\omega)) / \omega \in \Omega\} \quad \text{avec} \quad \mu_{\Omega_a}(\omega) = \mu_{X(\omega)}(a)$$

Soient ω et ω' deux individus de la population Ω . La distance entre ω et ω' est définie comme étant la distance entre les sous-ensembles flous $X(\omega)$ et $X(\omega')$ induit par ces individus, soit:

$$d(\omega, \omega') = \sum_{a \in A} |\mu_{X(\omega)}(a) - \mu_{X(\omega')}(a)|$$

Le terme $|\mu_{X(\omega)}(a) - \mu_{X(\omega')}(a)|$ est nulle si et seulement si les individus ω et ω' possèdent la modalité 'a' avec le même degré. Autrement dit, la distance entre ω et ω' est nulle si et seulement si ces individus possèdent avec le même degré, les modalités de A.

Soient a et a' deux modalités du caractère flou X. La distance entre a et a' est définie comme étant la distance entre les sous-ensembles flous Ω_a $\Omega_{a'}$, soit:

$$d(a, a') = \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_{a'}}(\omega)|$$

Cette formule peut s'étendre au cas de deux modalités a et b appartenant respectivement aux caractères flous A et B, soit:

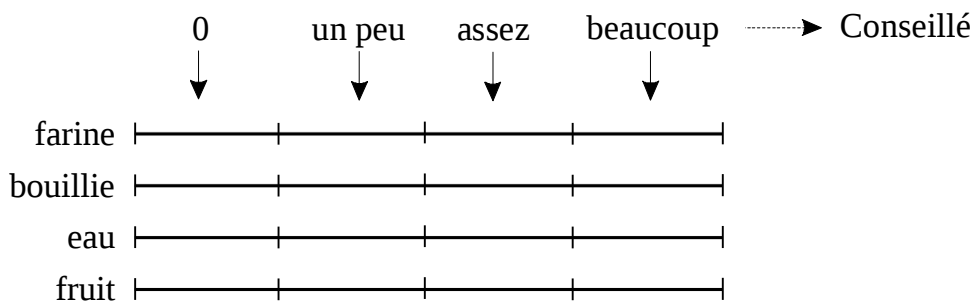
$$d(a, b) = \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_b}(\omega)|$$

La distance entre les modalités a et b est nulle si et seulement si $\Omega_a = \Omega_b$, i.e. tous les individus possèdent avec le même degré les modalités de a et b.

5.3.2.1.1. Exemple.

Reprenons l'exemple du personnel du service de pédiatrie à qui on demande s'il préconise l'introduction dans l'alimentation du bébé, de l'eau, de la bouillie, des jus de fruit ou de la farine. Le questionnaire flou prend la forme suivante:

Quel supplément alimentaire préconisez-vous au bébé vers le 2^{ème} mois?



Un exemple de tableau de description flou issu d'un tel questionnaire est donné par le Tableau 5.7. Sur ce tableau,

1.0 représente 'beaucoup',

0.7 représente 'assez',

0.3 représente 'un peu'

0.0 représente '0'.

Pour cet exemple, on a

$$\begin{aligned} d(\omega_2, \omega_5) &= .4 + .3 + .3 + .7 \\ &= 1.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\omega_1, \omega_8) &= .3 + 0 + .4 + .4 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\text{farine}, \text{eau}) &= .3 + 0 + 0 + 0 + .7 + 0 + .7 + .4 + .7 + .7 \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

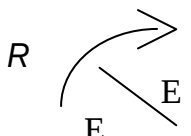
	Farine	Bouillie	Eau	Fruit
ω_1	1.0	0.3	0.7	0.7
ω_2	0.3	0.0	0.3	0.0
ω_3	0.3	0.7	0.3	0.0
ω_4	0.7	0.3	0.7	0.0
ω_5	0.7	0.3	0.0	0.7
ω_6	0.7	1.0	0.7	0.7
ω_7	0.3	0.7	1.0	0.7
ω_8	0.7	0.3	0.3	0.3
ω_9	0.0	0.3	0.7	0.3
ω_{10}	1.0	0.7	0.3	0.0

Tableau 5.7: Tableau de description flou.

5.4. Similarité et analyse différentielle.

5.4.1. Similarité.

L'idée de similarité est un concept essentiel dans la pensée des catégories. Il est parfois facile de cerner une ressemblance (ou une dissemblance) entre deux objets plutôt que de quantifier (ou qualifier) ces objets eux-mêmes. Sur le plan formel, une similarité entre deux éléments d'un ensemble E est une relation de ressemblance sur E : $\mu_R(a,b)$ est d'autant plus grand que la ressemblance entre a et b est forte (Tableau 5.8).



		b		
a		$\mu_R(a,b)$		

Tableau 5.8: Similarité

Soit Ω une population décrite par un ensemble J de modalités de variable floues. A la croisée de la ligne ω et de la colonne j , on a le réel $\mu_{\Omega_j}(\omega)$ qui mesure l'intensité de la réponse de l'individu ω à la modalité de question j . Nous construisons la matrice de similarité $J \times J$.

Si d est une distance sur J , une similarité s sur J s'obtient par la formule:

$$s(a,b) = d_{\max} - d(a,b) \quad \forall a,b \in J$$

où $d_{\max}$ est la distance maximale entre deux éléments de J .

La distance utilisée ici est celle du cardinal de la différence symétrique de Lukasiewicz. Elle est définie par:

$$d(a,b) = \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_b}(\omega)| \quad \forall a,b \in J$$

L'indice de similarité déduite de cette distance est donnée par:

$$s(a,b) = |\Omega| - \sum_{\omega \in \Omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_b}(\omega)| \quad \forall a,b \in J$$

Si l'on note ω un individu de la population et « $(a \leftrightarrow b)(\omega)$ » la proposition floue « si ω est 'a', alors il est 'b'; et si ω est 'b', alors il est 'a' ». Alors $s(a,b)$ est le cardinal de l'ensemble $\{\omega \in \Omega / \text{« (a} \leftrightarrow \text{b)(}\omega \text{) » vraie}\}$.

En effet, nous avons au chapitre 2 que l'opérateur de pseudo-division est un opérateur d'implication floue:

$$a|b = a \rightarrow b$$

$$a|b \wedge a|b = a \leftrightarrow b$$

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω . La différence de E par F, notée E-F, est définie par

$$\mu_{E-F}(\omega) = 1 - \mu_E(\omega) | \mu_F(\omega)$$

La différence symétrique de E et de F, noté $E \Delta F$ est définie par:

$$E \Delta F = (E-F) \cup (F-E)$$

De ces définitions, il vient que

$$E-F = \overline{E \rightarrow F}, \text{ avec } \mu_{E \rightarrow F}(\omega) = \mu_E(\omega) | \mu_F(\omega)$$

et

$$\begin{aligned} E \Delta F &= \overline{E \rightarrow F} \vee \overline{F \rightarrow E} \\ &= \overline{(E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)} \\ &= \overline{E \leftrightarrow F} \end{aligned}$$

Soit a, b deux modalités de variable floue, ' $\Omega_a \rightarrow \Omega_b$ ' équivaut à ' $a \rightarrow b$ '. D'où

$$\begin{aligned}
 s(a, b) &= |\Omega| - d(a, b) \\
 &= |\Omega| - |\Omega_a \Delta \Omega_b| \\
 &= |\overline{\Omega_a \Delta \Omega_b}| \\
 &\models |a \leftrightarrow b|
 \end{aligned}$$

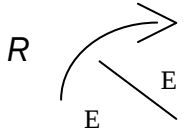
5.4.2. Analyse différentielle.

L'un des artifices pour analyser un tableau de similarités est de jouer sur l'ordonnancement des lignes et des colonnes en se demandant si l'aspect du tableau ne changerait pas simplement par le fait de regroupements. Pour ce faire, la méthode consiste à créer une ligne de marge (Total Col) dont le $j^{\text{ème}}$ terme est le total de la colonne j :

$$\text{Total Col } (x_j) = \sum_i \mu_R(x_i, x_j)$$

De même, on crée une colonne de marge (Total Lin) dont le $i^{\text{ème}}$ terme est le total de la ligne i :

$$\text{Total Lin } (x_i) = \sum_j \mu_R(x_i, x_j)$$



		x_j		Total Lin
x_i		$\mu_R(x_i, x_j)$		
Total Col				

Tableau 5.9: Similarité

A ce moment, la méthode consiste à regrouper les lignes et les colonnes, en faisant croître les totaux de chacune, de la plus grande valeur à la plus petite. Cette méthode s'appelle diagonalisation. Elle est également connue sous le nom d'analyse différentielle de Czekanowski. La diagonalisation ne se réalise pas tout le temps. Mais lorsqu'on peut diagonaliser un tableau, alors c'est qu'il y a un élément d'explication sous-jacent qui est précisément ce qu'on appelle facteur en analyse factorielle, un facteur commun qui régit les résultats de ce tableau. Plus précisément, on montre (Benzécri -1982) que lorsqu'il existe un ordre sur les lignes et les colonnes permettant de donner à la matrice de similarité une forme diagonale, cet ordre est fourni par le premier facteur issu de l'analyse des correspondances. Naturellement, il n'est pas question de faire une analyse des correspondances sur des données qui n'ont rien d'une structure de comptage. L'intérêt de l'analyse différentielle de Czekanowski est d'utiliser uniquement l'opération d'ordre, et donc parfaitement applicable aux données floues.

Nous avons vu au chapitre 2 qu'il y a plusieurs distances associées au cardinal de la différence symétrique. La formulation de ces distances dépend du choix de l'opérateur de conjonction utilisé pour définir la pseudo-division. Le choix de l'opérateur de Lukasiewicz est guidé par la lisibilité des formules et surtout la facilité de l'interprétation des résultats issus de l'analyse différentielle. Si l'on utilise des autres opérateurs autres que celui de Lukasiewicz, l'interprétation des formules et des résultats, bien que difficiles reste identique.

Nous donnons dans ce qui suit quelques formules sur la ressemblance entre modalité binaire et modalité floue. Pour faciliter la lecture des formules, nous utilisons la variable 'sexe' et ses deux modalités binaires 'homme' et 'femme'. Tous les résultats obtenus restent néanmoins vrais si l'on remplace 'sexe' par n'importe quelle autre variable binaire.

Soient H la modalité 'homme' et F la modalité 'femme'. Soit M une modalité de variable floue. Soient M^+ et M^- les modalités issues du dédoublement flou de la modalité M. On a les propriétés suivantes:

$$\text{i)- } s(H,M) = |F| + |M|_F - |M|_H \quad \text{et} \quad s(F,M) = |H| + |M|_H - |M|_F$$

preuve.

$$\begin{aligned} s(H,M) &= |\Omega| - \sum_{\omega \in \Omega} 1_H(\omega) \vee \mu_M(\omega) - 1_H(\omega) \wedge \mu_M(\omega) \\ &= |\Omega| - \sum_{\omega \in H} 1 - \mu_M(\omega) - \sum_{\omega \in F} \mu_M(\omega) \\ &= |\Omega| - |H| + \sum_{\omega \in H} \mu_M(\omega) - \sum_{\omega \in F} \mu_M(\omega) \\ &= |F| + |M|_F - |M|_H \end{aligned}$$

où $|M|_H$ (resp. $|M|_F$) est le cardinal de la modalité M calculé sur la sous-population des hommes (resp. femmes).

De même, on a

$$s(F,M) = |H| + |M|_H - |M|_F$$

$$\text{ii)- } s(H,M) + s(F,M) = |\Omega|$$

preuve.

$$\begin{aligned} s(H,M) + s(F,M) &= |F| + |M|_F - |M|_H + |H| + |M|_H - |M|_F \\ &= |F| + |H| \\ &= |\Omega| \end{aligned}$$

$$\text{iii)- } |M^+|_H - |M^-|_H = 2|M|_H - |H| \quad \text{et} \quad |M^-|_F - |M^+|_F = |F| - 2|M|_F$$

preuve.

$$\begin{aligned} |M^+|_H - |M^-|_H &= \sum_{\omega \in H} \mu_{M^+}(\omega) - \sum_{\omega \in H} \mu_{M^-}(\omega) \\ &= \sum_{\Omega} 1_H(2\mu_M - 1)1_{M>.5} - \sum_{\Omega} 1_H(1 - 2\mu_M)1_{M\leq.5} \\ &= \sum_{\Omega} 2\mu_M 1_H(1_{M>.5} + 1_{M\leq.5}) - \sum_{\Omega} 1_H(1_{M>.5} + 1_{M\leq.5}) \\ &= \sum_{\Omega} 2\mu_M 1_H - \sum_{\Omega} 1_H \quad (\text{car } 1_{M>.5} + 1_{M\leq.5} = 1) \\ &= 2|M|_H - |H| \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 |M^-|_F - |M^+|_F &= \sum_{\Omega} 1_F(1 - 2\mu_M)1_{M \leq .5} - \sum_{\Omega} 1_F(2\mu_M - 1)1_{M > .5} \\
 &= \sum_{\Omega} 1_F(1_{M \leq .5} + 1_{M > .5}) - \sum_{\Omega} 2\mu_M 1_F(1_{M \leq .5} + 1_{M > .5}) \\
 &= \sum_{\Omega} 1_F - \sum_{\Omega} 2\mu_M 1_F \\
 &= |F| - 2|M|_F
 \end{aligned}$$

$$\text{iv)- } s(H, M^+) + s(F, M^-) = 2s(H, M) \quad \text{et} \quad s(H, M^-) + s(F, M^+) = 2s(F, M)$$

preuve.

$$\begin{aligned}
 s(H, M^+) + s(F, M^-) &= |F| + |M^+|_H - |M^+|_F + |H| + |M^-|_F - |M^-|_H \\
 &= (|F| + |H|) + (|M^+|_H - |M^-|_F) + (|M^-|_F - |M^+|_H) \\
 &= |H| + |F| + 2|M|_H - |H| + |F| - 2|M|_F \\
 &= 2|F| + 2|M|_H - 2|M|_F \\
 &= 2s(H, M)
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 s(H, M^-) + s(F, M^+) &= |F| + |M^-|_H - |M^-|_F + |H| + |M^+|_F - |M^+|_H \\
 &= |H| + |F| + |H| - 2|M|_H + 2|M|_F - |F| \\
 &= 2|H| + 2|M|_F - 2|M|_H \\
 &= 2s(F, M)
 \end{aligned}$$

Les équations i) à iv) constituent une aide à l'interprétation de l'analyse différentielle. L'équation ii) montre que lorsque les populations d'hommes et de femmes sont fixées, $s(H, M)$ et $s(F, M)$ varient en sens contraire. Cela veut dire, quand $s(H, M)$ augmente, $s(F, M)$ diminue et réciproquement. Ce résultat est conforme à une certaine intuition car si les hommes sont proches de la modalité M , i.e. $s(H, M)$ élevé, alors les femmes en sont éloignées, i.e. $s(F, M)$ faible; Étant entendu que les hommes sont très éloignés des femmes, i.e. $s(H, F)=0$.

L'équation iv) montre que si $s(H, M)$ est fort alors $s(H, M^+) + s(F, M^-)$ est fort et $s(H, M^-) + s(F, M^+)$ faible. Cela indique que si la ressemblance des

hommes avec la modalité M est grande, alors la ressemblance des hommes à M+ et celle des femmes à M- est grande tandis que la ressemblance des hommes à M- et celle des femmes à M+ est petite. La Figure 5.12 schématise une telle interprétation. Il s'agit ici d'un tableau orienté, i.e. si on intervertit les lignes H et F ou les colonnes M+ et M-, l'analyse du tableau change.

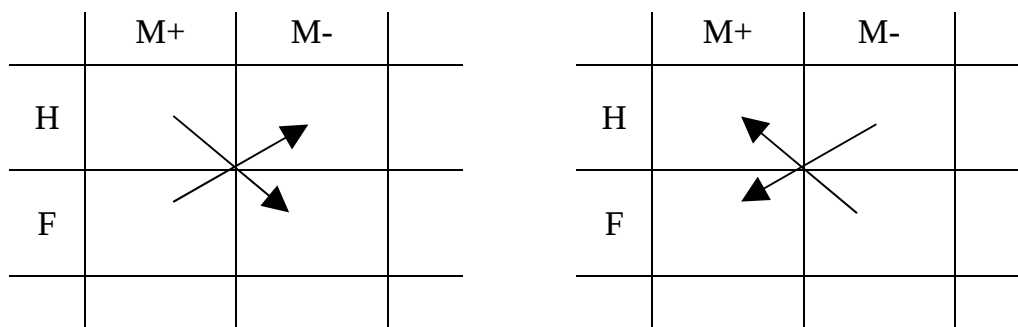


Figure 5.12: Tableau orienté.

Pour savoir si les hommes ont une appréciation de la modalité M différente de celle des femmes, nous introduisons l'indice de séparation $t(\text{sexe}, M)$ entre les modalités 'sexe' et M. Cette séparation est donnée par

$$t(\text{sexe}, M) = \frac{1}{2} [(s(H, M+) + s(F, M-)) - (s(H, M-) + s(F, M+))]$$

Pour que la séparation $t(\text{sexe}, M)$ soit nulle, il suffit qu'on ait une ressemblance horizontale, i.e. $s(H, M+) = s(H, M-)$ et $s(F, M+) = s(F, M-)$, ou une ressemblance verticale, i.e. $s(H, M+) = s(F, M+)$ et $s(H, M-) = s(F, M-)$ (Figure 5.13). Plus la séparation $t(\text{sexe}, M)$ est forte (en valeur absolue), plus les hommes diffèrent des femmes par leur appréciation de la modalité M, i.e. la modalité M sépare bien le sexe. Le signe de $t(\text{sexe}, M)$ donne le sens de la séparation (cf. infra).

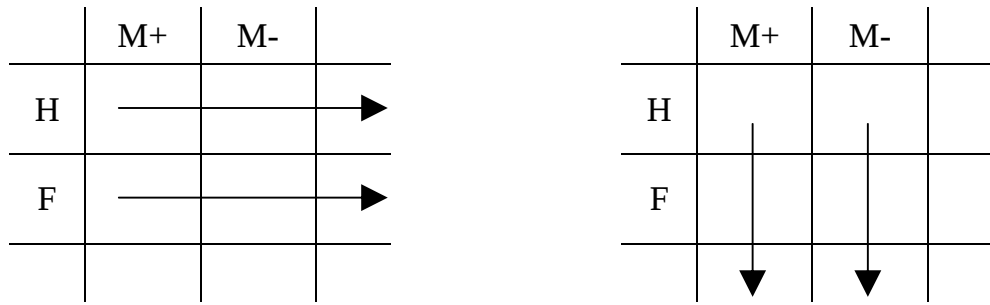


Figure 5.13: Ressemblances horizontale et verticale

On remarque immédiatement que $t(\text{sexe}, \text{sexe}) = |\Omega|$. C'est la plus grande valeur que puisse avoir la séparation entre deux modalités. Cela traduit le fait que les hommes ressemblent plus aux hommes qu'aux femmes. Ou encore que les femmes ressemblent plus aux femmes qu'aux hommes. Dans notre terminologie de l'analyse différentielle, nous traduisons cela en disant que « les hommes ont une appréciation du sexe différente de celle des femmes ».

Notons enfin que le maximum $|\Omega|$ n'est atteint que pour les modalités binaires et que $t(\text{sexe}, M)$ varie entre $-|\Omega|$ et $+|\Omega|$.

En effet, d'après ii) et iv), on a

$$\begin{aligned} t(\text{sexe}, M) &= s(H, M) - s(F, M) \\ &= 2s(H, M) - |\Omega| \end{aligned}$$

Comme $s(H, M)$ varie entre 0 et $|\Omega|$, $t(\text{sexe}, M)$ varie entre $-|\Omega|$ et $+|\Omega|$.

D'une façon plus générale, la séparation entre deux modalités floues a et b est donnée par

$$t(a, b) = \frac{1}{2} [(s(a^+, b^+) + s(a^-, b^-)) - (s(a^+, b^-) + s(a^-, b^+))]$$

On a les propriétés suivantes:

- $t(a, b) = t(b, a)$
- $|t(a, b)| \leq |\Omega|$.

Plus $|t(a,b)|$ est grand, mieux les modalités a et b sont séparées. Plus précisément, si $|t(a,b)|$ est grand, cela signifie que la réaction des individus face aux modalités a et b est positive. Autrement dit, un individu qui « est beaucoup 'a' » a tendance à « être beaucoup 'b' » et individu qui « est peu 'a' » a tendance à « être peu 'b' ». Cette interprétation tient au fait que $s(a+,b+)$ est le cardinal de l'ensemble des individus ω tels que « si ω est 'a+' alors il est 'b+', et si ω est 'b+' alors il est 'a+' » est vraie. De même, si $|t(a,b)|$ est petit, nous dirons que a et b sont mal séparés. Cela traduit le fait qu'un individu qui « est beaucoup 'a' » a tendance à « être peu 'b' » et individu qui « est peu 'a' » a tendance à « être beaucoup 'b' ». Le coefficient t donne le sens et l'intensité de la séparation:

- si $t(a,b) > 0$, la séparation est positive
- si $t(a,b) < 0$, la séparation est négative
- si $t(a,b) = 0$, la séparation est nulle

Si la diagonalisation de la matrice t de séparation est possible, alors on a une première approche d'une discrimination du tableau de données. Les modalités de variables floues sont ainsi classées sur une échelle. En haut de l'échelle, on retrouve les modalités ayant le plus fort pouvoir de séparation, et en bas de l'échelle, on a les modalités ayant un faible pouvoir de séparation. Notons enfin que la ligne (resp. colonne) de marge d'une matrice de séparation est la somme non signée de cette ligne (resp. colonne).

5.5. Application à la pédiatrie.

L'Organisation Mondiale de la Santé mène actuellement une série de campagnes en direction des pays du tiers monde. Une de ces campagnes vise à favoriser l'allaitement maternel exclusif jusqu'à l'âge de 6 mois. Malgré l'intensification de cette campagne, force est de constater que la plupart des femmes, particulièrement en Afrique, continuent à donner du lait artificiel à leur nourrissons. Des études antérieures ont été menées pour comprendre l'origine

d'un tel échec et expliquer pourquoi les femmes ne souhaitent pas allaiter au sein.

Une hypothèse a vu le jour pour expliquer cet échec. L'on s'est demandé si le personnel de santé est suffisamment formé et convaincu du bien fondé de l'allaitement maternel exclusif. C'est pour valider cette hypothèse qu'une équipe de pédiatres de Centre médico-social de Yaoundé au Cameroun a entrepris cette étude. Elle cherche à comprendre si le niveau de formation du personnel des services de pédiatrie est en rapport avec le taux d'allaitement maternel.

5.5.1. Les données.

5.5.1.1. La collecte des données.

L'enquête s'est déroulée d'octobre 95 à décembre 95 dans les principaux centres hospitaliers de la ville de Yaoundé. Il s'agit là d'une enquête pilote, volontairement limitée à la seule ville de Yaoundé. Le but de cette enquête est entre autres de tester l'efficacité d'un questionnaire flou.

La taille de l'échantillon de base est de 200. Les personnes interrogées sont les médecins et infirmiers des services de pédiatrie des hôpitaux de Yaoundé. Une pré-enquête sur un échantillon réduit à 15 personnes a été menée afin de s'assurer de la cohérence du questionnaire. Les enquêteurs sont des étudiants de la faculté de médecine de l'Université de Yaoundé. Le questionnaire qu'ils présentent au personnel de santé est rempli sur place si ces derniers disposent de suffisamment du temps. Mais dans la plupart des cas, ils laissent le questionnaire à remplir pour venir le récupérer quelques jours plus tard.

Le questionnaire, tel qu'il est présenté au personnel de santé est donné dans ce qui suit:

0. Sexe

0. Femme

1. Homme

1. Grade

0. Infirmière

1. Médecin, Sage-femme

2. Avez-vous une formation à l'allaitement maternel?

0. Non

1. Oui

3. Quelle est votre avis sur la question de l'allaitement maternel exclusif?

défavorable | très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très | bénéfique

4. Encouragez-vous la préparation à l'allaitement maternel avant la naissance?

décourage | bcp | assez | un peu | 0 | un peu | assez | bcp | encourage

5. Effet de l'allaitement maternel exclusif sur la survie de l'enfant?

dangereux | très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très | bénéfique

6. Conseillez-vous l'introduction vers le 2^{ème} mois

déconseillé | très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très | conseillé

des farines | | | | | | | |

de la bouillie | | | | | | | |

des jus de fruits | | | | | | | |

de l'eau | | | | | | | |

| | | | | | | |

7. Comment trouvez-vous les tétines et les biberons par rapport à la santé du bébé?

dangereux | très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très | bénéfique

8. Que pensez-vous du message de la suppression totale de l'eau avant 6 mois?

| très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très |

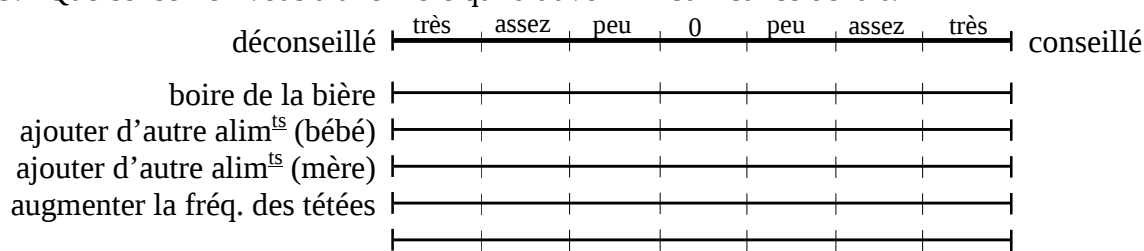
ambiguë | | | | | | | | clair

injustifié | | | | | | | | justifié

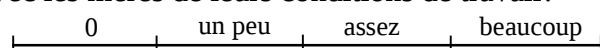
excessif | | | | | | | | modéré

| | | | | | | |

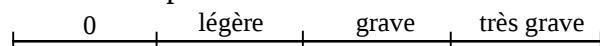
9. Que conseillez-vous à une mère qui dit avoir l'insuffisance de lait?



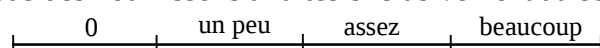
10. Parlez-vous avec les mères de leurs conditions de travail?



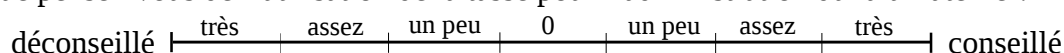
11. Avez-vous observé des complications liées à une alimentation maternelle exclusive pratiquée immédiatement après la naissance?



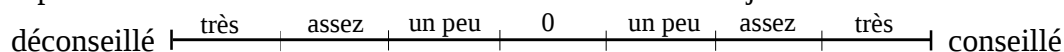
12. Connaissez-vous des nourrissons allaités exclusivement au sein jusqu'à 6 mois?



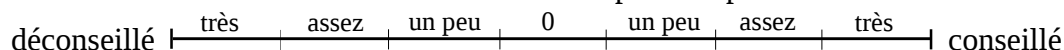
13. Que pensez-vous de l'utilisation de la tasse pour l'administration du lait maternel?



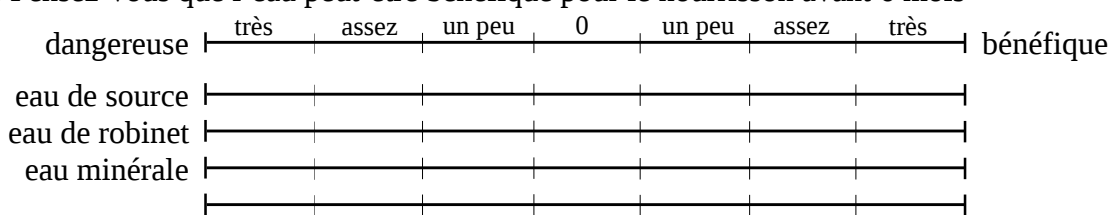
14. Que pensez-vous de l'allaitement maternel à la demande de jour comme de nuit?



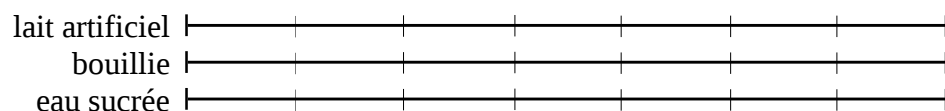
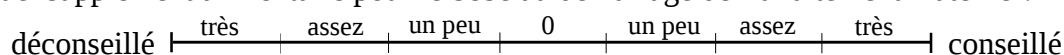
15. faut-il aider la mère à mettre son enfant en bonne position pour allaiter au sein?



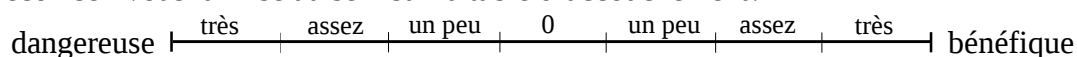
16. Pensez-vous que l'eau peut-être bénéfique pour le nourrisson avant 6 mois



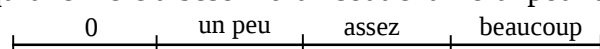
17. Quel supplément alimentaire pour le bébé au démarrage de l'allaitement maternel?



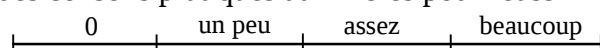
18. Préconisez-vous la mise au sein sur la table d'accouchement?



19. Pensez-vous qu'une mère a besoin d'un soutien moral pour allaiter?



20. Donnez-vous des conseils pratiques aux mères pour réussir l'allaitement?

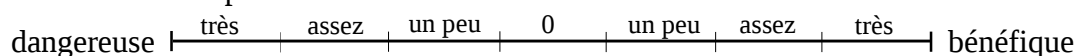


avant la naissance

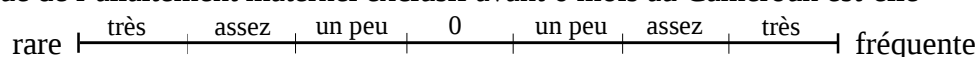
à la demande

cas de problèmes

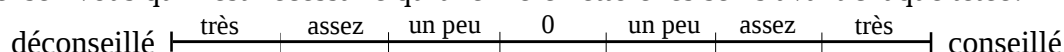
21. Préconisez-vous la présence de la mère et de l'enfant dans la même chambre?



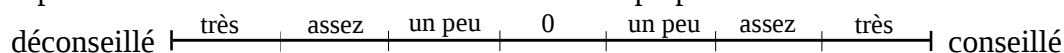
22. La pratique de l'allaitement maternel exclusif avant 6 mois au Cameroun est-elle



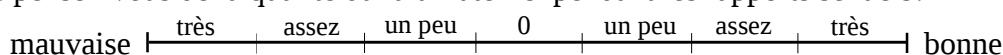
23. Pensez-vous qu'il est nécessaire qu'une mère nettoie les seins avant chaque tétée?



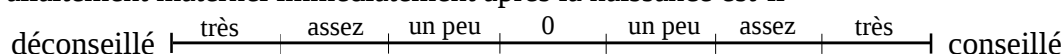
24. Que pensez-vous de l'examen et éventuellement la préparation des mamelons



25. Que pensez-vous de la qualité du lait maternel pendant les rapports sexuels?



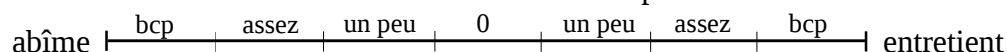
26. L'allaitement maternel immédiatement après la naissance est-il



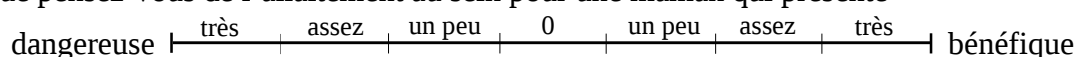
grossesse normale

césarienne

27. Quel est l'effet de l'allaitement au sein sur la tenue de la poitrine?



28. Que pensez-vous de l'allaitement au sein pour une maman qui présente



grossesse

VIH

tuberculose

diabète

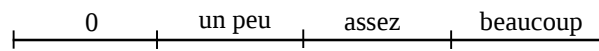
sypilis

abcès du sein

5.5.1.2. Codage des données.

Deux types de différentiels sémantiques sont utilisés dans le questionnaire: le différentiel simple et le différentiel symétrique.

Le différentiel sémantique simple est de la forme



Le codage des attributs est le suivant:

- ‘beaucoup’ est codé 1.0,
- ‘assez’ est codé 0.7,
- ‘un peu’ est codé 0.3,
- ‘0’ est codé 0.0

Cela signifie que si pour une question ‘j’ donnée, un individu ‘i’ coche par exemple la case ‘assez’, on marque à la croisée de la ligne ‘i’ et de la colonne ‘j’, le code 0.7. Le Tableau 5.10 illustre cette opération d’affectation.

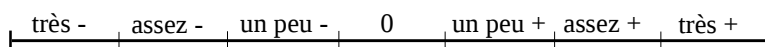
		Question j	
individu i		‘assez’	

⇓ Codage

		Question j	
individu i		.7	

Tableau 5.10: Codage et affectation

Le différentiel sémantique symétrique est de la forme



Le codage des attributs est le suivant:

- ‘très-’ est codé 0.0,
- ‘assez-’ est codé 0.2,
- ‘un peu-’ est codé 0.3,
- ‘0’ est codé 0.5,
- ‘un peu+’ est codé 0.7,
- ‘assez+’ est codé 0.8,
- ‘très+’ est codé 1.0

La valeur de référence 0.5 est traitée comme une position neutre. Cela signifie qu’une personne qui coche cette case est considérée comme n’ayant ni un avis favorable, ni un avis défavorable sur la question posée.

Les variables floues à différentiel déséquilibré sont supprimées de l’analyse. Nous disons que le différentiel d’une variable floue à une modalité est déséquilibré lorsqu’il existe un attribut dont les individus associés représentent plus de 50% de l’échantillon. Par exemple, à la question n° 24: « pensez-vous qu’il est nécessaire qu’une mère nettoie ses seins avant chaque tétée ? », 78% des personnes interrogées ont répondu que c’est « très » conseillé. Cela signifie que les 6 autres attributs ne pèsent en moyenne que pour 3.5% de l’échantillon. C’est cette différence de poids, 78 contre 3.5, qui déséquilibre le différentiel. L’éjection de l’analyse d’une telle variable a pour objet de conserver une possibilité de comparaisons intergroupe. Difficile de comparer en effet un groupe de 78 personnes avec un groupe de 4 personnes.

Nous avons également supprimé des analyses, les variables floues à plusieurs modalités lorsque toutes les modalités présentent un déséquilibre sur leurs différentiels. Si au moins une des modalités ne présente pas de déséquilibre, la variable est maintenue.

Finalement, 12 questions sont retenues pour les analyses. Elles sont données dans ce qui suit:

1. Groupe

Femme		Homme
Infirmière		Médecin
Non Formé		Formé

2. Conseillez-vous l'introduction vers le 2^{ème} mois

déconseillé | très | assez | un peu | 0 | un peu | assez | très | conseillé

des farines

de la bouillie

des jus de fruits

de l'eau

3. Que pensez-vous du message de la suppression totale de l'eau avant 6 mois?

très assez un peu 0 un peu assez très

ambiguë ———— clair
 injustifié ———— justifié
 excessif ———— modéré

4. Que conseillez-vous à une mère qui dit avoir l'insuffisance de lait?

déconseillé très assez peu 0 peu assez très conseillé

boire de la bière

ajouter d'autre alim^{ts} (bébé)

ajouter d'autre alim^{ts} (mère)

augmenter la fréq. des tétées

5. Parlez-vous avec les mères de leurs conditions de travail?

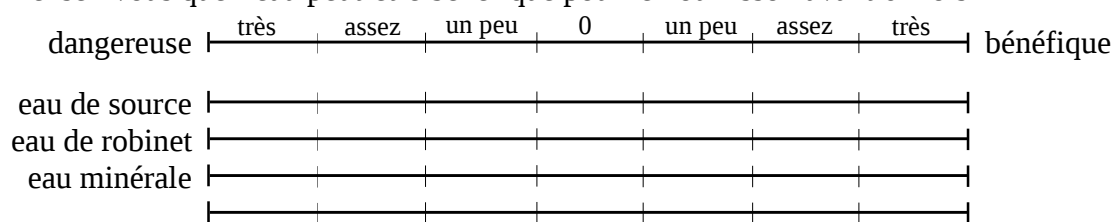
0 un peu assez beaucoup

6. Connaissez-vous des nourrissons allaités exclusivement au sein jusqu'à 6 mois?

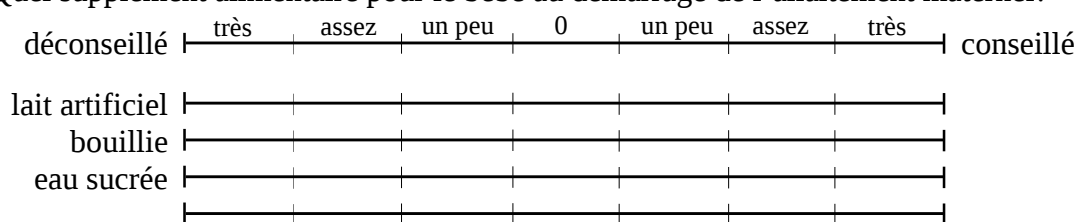
0 un peu assez beaucoup

7. Que pensez-vous de l'utilisation de la tasse pour l'administration du lait maternel?

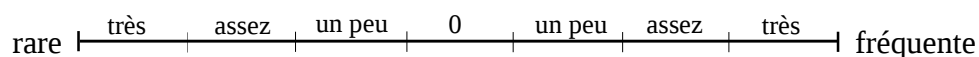
8. Pensez-vous que l'eau peut-être bénéfique pour le nourrisson avant 6 mois



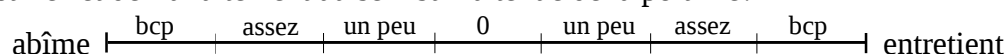
9. Quel supplément alimentaire pour le bébé au démarrage de l'allaitement maternel?



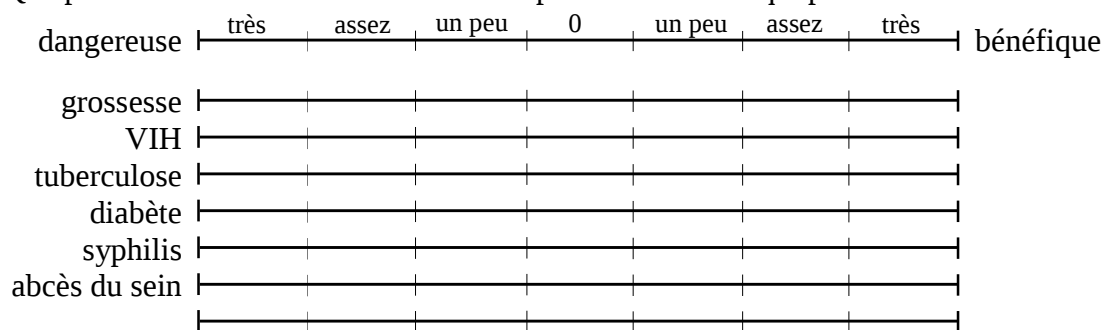
10. La pratique de l'allaitement maternel exclusif avant 6 mois au Cameroun est-elle



11. Quel est l'effet de l'allaitement au sein sur la tenue de la poitrine?



12. Que pensez-vous de l'allaitement au sein pour une maman qui présente



Le Tableau 5.11 donne la liste des identificateurs des variables et modalités de variables floues.

Variable . Modalité	Identificateur
1.1	SEXE
1.2	GRADE
1.3	FORMATION
2.1	FARINE
2.2	BOUILLIE
2.3	FRUIT
2.4	EAU
3.1	MESS_AMB
3.2	MESS_INJ
3.3	MESS_EXC
4.1	BIER
4.2	ALIM_BB
4.3	ALIM_MM
4.4	FREQ_TT
5.1	TRAVAIL
6.1	CON_LM
7.1	TASSE
8.1	SOURCE
8.2	ROBINET
8.3	MINERAL
9.1	SUP_LAIT
9.2	SUP_BOU
9.3	SUP_EAU
10.1	LM_RARE
11.1	POITRINE
12.1	LM_GROSS
12.2	LM_VIH
12.3	LM_TUBER
12.4	LM_DIAB
12.5	LM_SYPHI
12.6	LM_ABCES

Tableau 5.11: Liste des identificateurs.

Les modalités de toutes les variables de l'enquête sont dédoublées.

Les trois modalités de la variable de groupe 'SEXE', 'GRADE' et 'FORMATION' sont dédoublées sont chacune en deux modalités binaires.

'SEXE' est dédoublé en les modalités 'HOMME' et 'FEMME':

- 'HOMME' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est homme ou non.
- 'FEMME' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est une femme ou non.

'Grade' est dédoublé en les modalités 'MÉDECIN' et 'INFIRMIER':

- 'MÉDECIN' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est un médecin ou non.
- 'INFIRMIER' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est une infirmière ou non.

'FORMATION' est dédoublé en les modalités 'FORMÉ' et 'NON FORMÉ':

- 'FORMÉ' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est formée ou non.
- 'NON FORMÉ' prend les valeurs 1 ou 0 selon que la personne interrogée est non formée ou formée.

Si 'MOD' est une modalité autre que 'SEXE', 'GRADE', 'FORMATION', elle est dédoublée en 'MOD+' et 'MOD-' suivant la méthode donnée au § 5.1.4

- 'MOD+' indique que l'individu conseille 'MOD',
- 'MOD-' indique que l'individu déconseille 'MOD'.

Finalement, deux tableaux vont servir de base aux analyses: le tableau initial 161×12 ($\Omega \times J$) et le tableau dédoublé 161×24 ($\Omega \times (J^+ \oplus J)$). Le tableau initial figure in extenso en annexe.

5.5.2. L'analyse.

5.5.2.1. Sémantogramme.

Nous présentons ici quelques sémantogrammes parmi les plus parlants. La Figure 5.14 montre comment le personnel de santé apprécie le discours sur l'allaitement maternel exclusif jusqu'à 6 mois (question n° 3). Les avis sont assez partagés, et même tranchés. Il y a presque autant de personnes qui trouvent le discours clair, justifié ou modéré qu'il y en a qui le trouve ambiguë, injustifié ou excessif. De plus, l'intensité du choix est assez élevée puisque la zone floue (valeur de référence strictement inférieure à 1) est assez faible. Plus la zone sombre est grande (niveau de gris proche du noir), plus les positions sont tranchées. Si cette zone se trouve du côté bas de l'échelle, le choix est ferme et négatif. Si par contre elle se trouve du côté haut de l'échelle, le choix est ferme et positif.

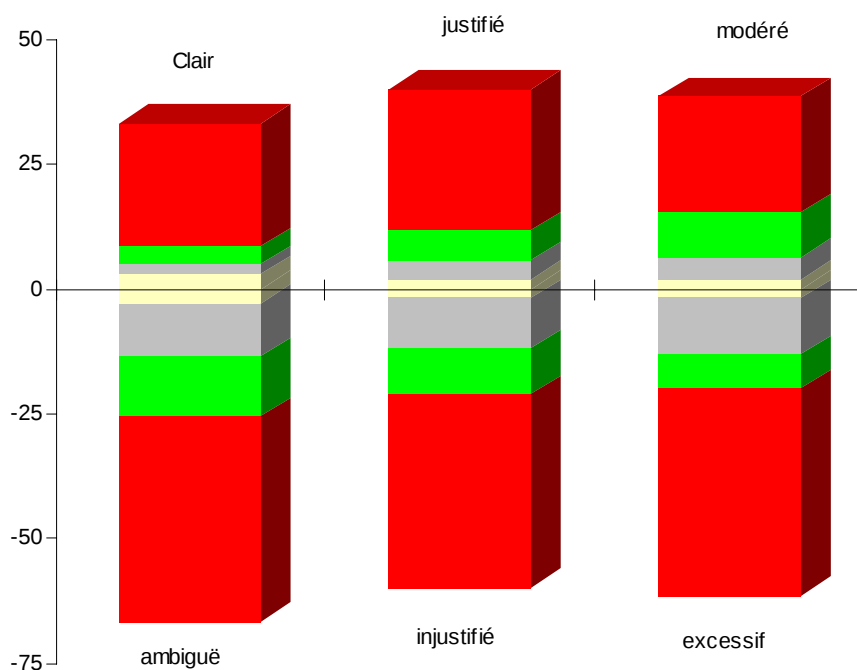


Figure 5.14: Discours sur l'allaitement maternel exclusif (question n° 3).

Les sémantogrammes suivants (Figure 5.15 et Figure 5.16) montrent certaines différences d'appréciations selon qu'on est médecin ou infirmier, formé ou non formé à l'allaitement maternel exclusif. Les médecins trouvent le message plutôt clair et justifié contrairement aux infirmières qui le trouvent ambiguë et injustifié. De l'autre côté, le personnel formé trouve le discours clair, justifier et modéré. Par contre, le personnel non formé le trouve plutôt ambiguë, injustifié et excessif.

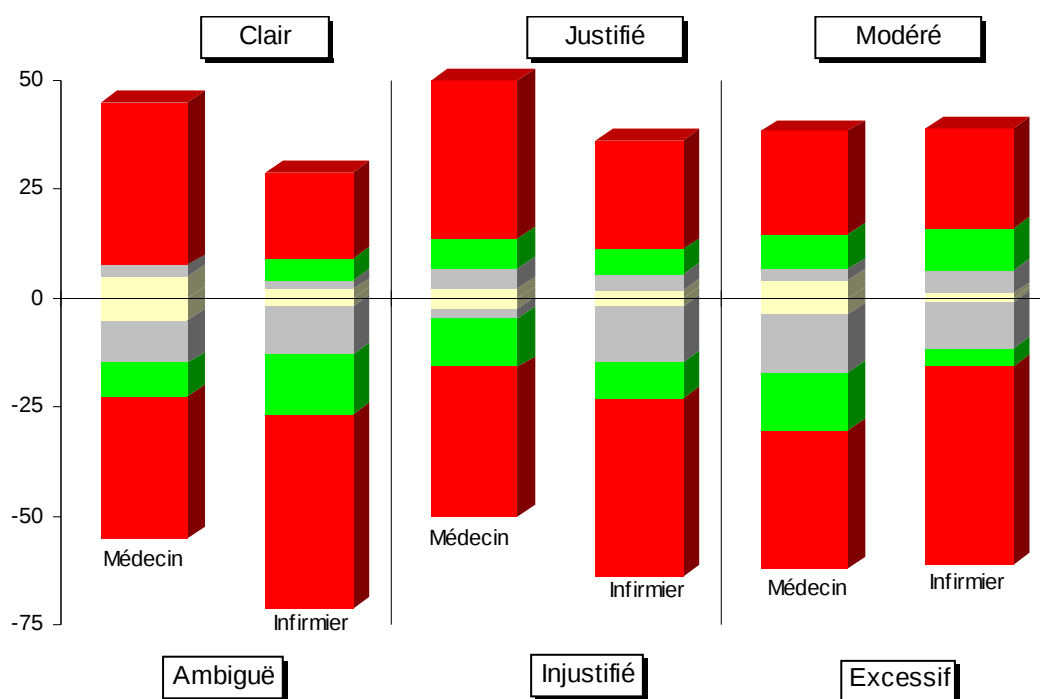


Figure 5.15: Discours sur l'allaitement maternel selon le grade (question n° 3).

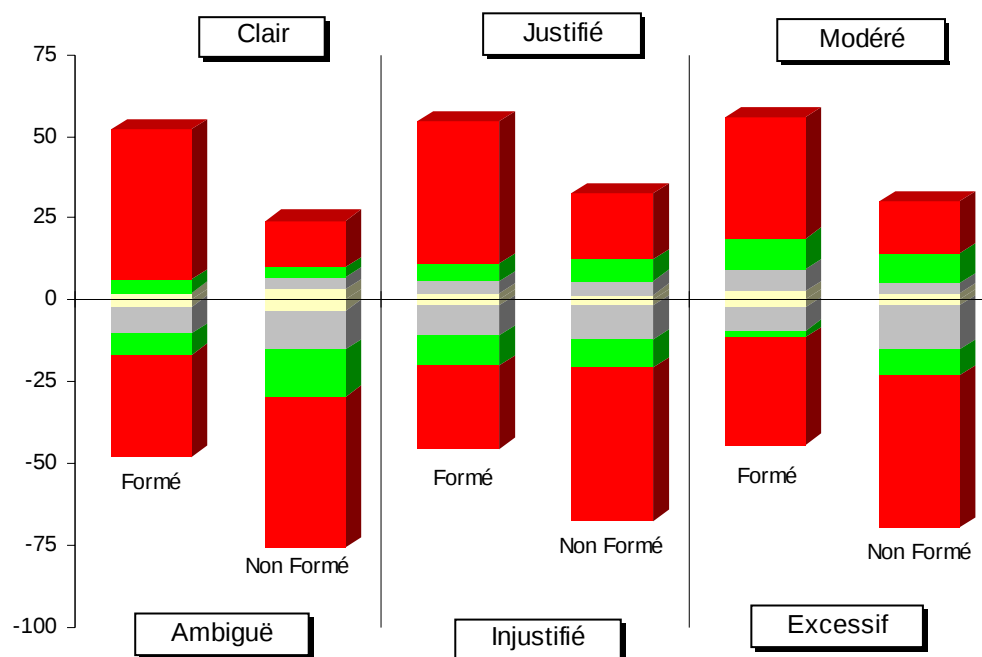


Figure 5.16: Discours sur l'allaitement maternel exclusif selon la formation (question n° 3)

L'introduction vers le 2^{ème} mois de certains produits dans l'alimentation du bébé (question n° 2) ne fait pas l'unanimité, sauf pour ce qui concerne la farine et la bouillie. Pour ces deux produits, le personnel de santé est plutôt contre (Figure 5.17). Les avis sont assez partagés quant à l'introduction des fruits et de l'eau. Par rapport aux infirmiers et au personnel non formé, les médecins et le personnel formé sont beaucoup plus réservés sur l'introduction de produits autres que le lait maternel dans l'alimentation des bébés (Figure 5.18 et Figure 5.19).

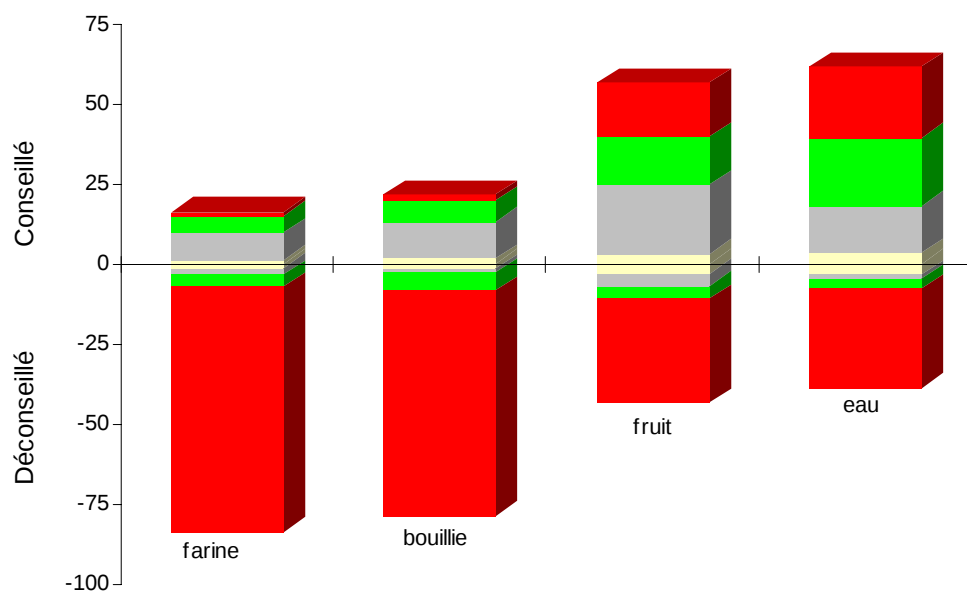


Figure 5.17: Introduction d'aliments vers le 2^{ème} mois (question n° 2).

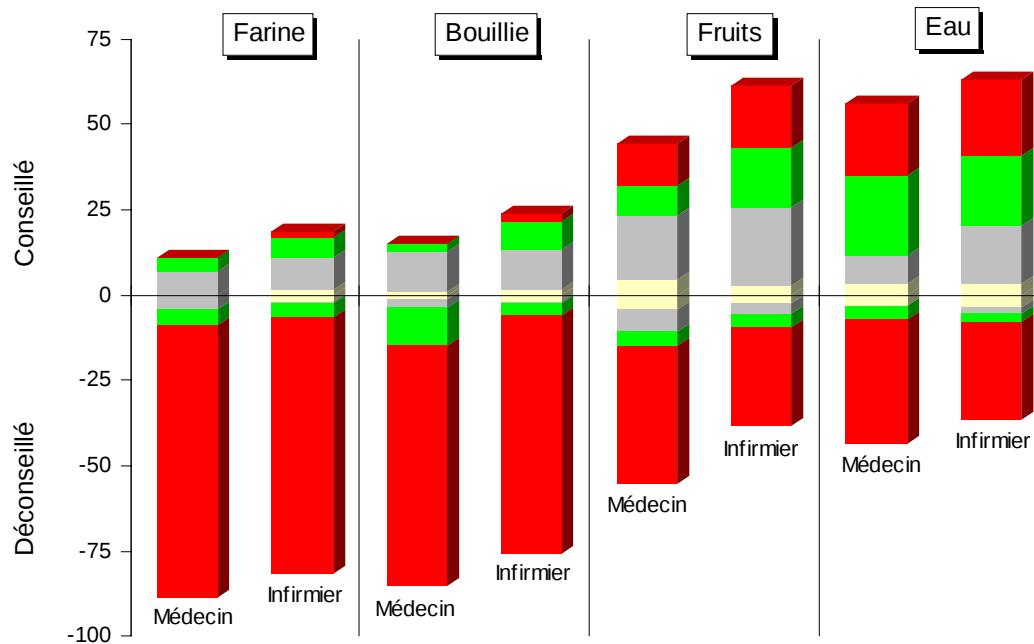


Figure 5.18: Introduction d'aliments vers le 2^{ème} mois selon le grade (question n° 3)

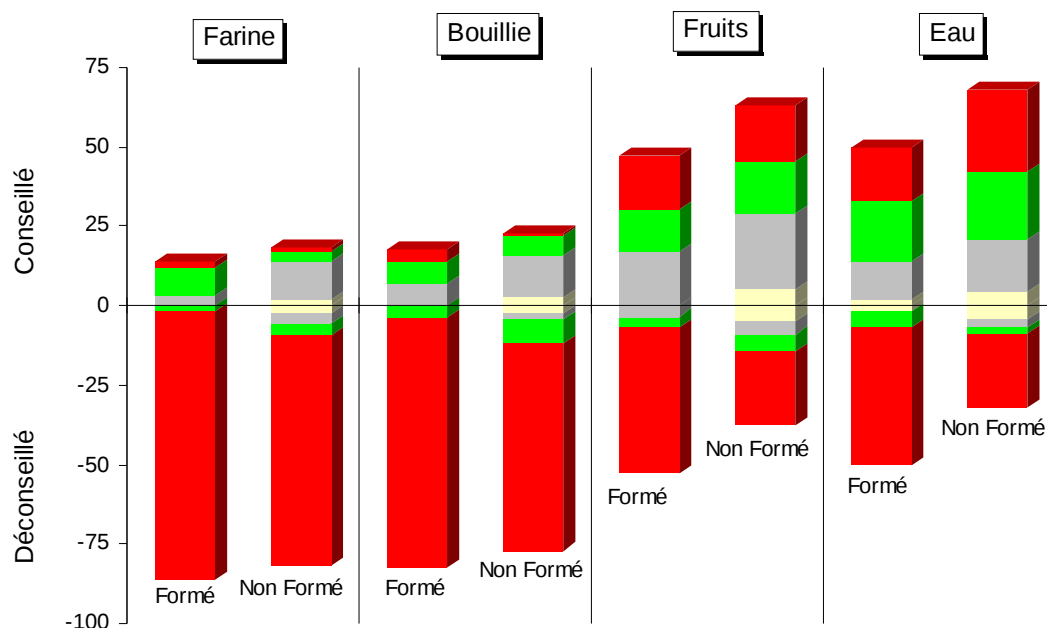


Figure 5.19: Introduction d'aliments vers le 2^{ème} mois selon la formation (question n° 3)

En cas d'insuffisance de lait (question n° 4), le personnel de santé est dans l'ensemble contre la prise de bière par la maman (Figure 5.20). Il faut dire que cette pratique est assez répandue au Cameroun, sans que personne ne puisse dire si en prenant de la bière, une maman augmente le débit de ses seins. Par contre, l'augmentation de la fréquence des tétées et la suralimentation de la maman sont fortement conseillées. Le personnel de santé reste partagé quant à l'ajout d'autres aliments à un bébé pour qui la maman a une insuffisance de lait. C'est essentiellement les hommes et le personnel non formé qui sont pour l'ajout d'autres aliments au bébé. Les femmes et le personnel formé restent en majorité contre (Figure 5.21, Figure 5.22 et Figure 5.23).

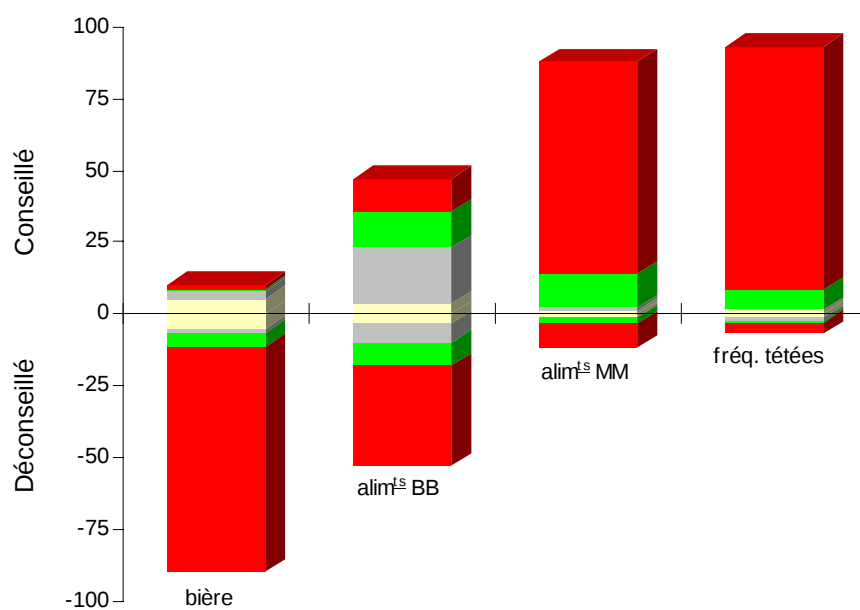


Figure 5.20: Conseils contre l'insuffisance de lait (question n° 4)

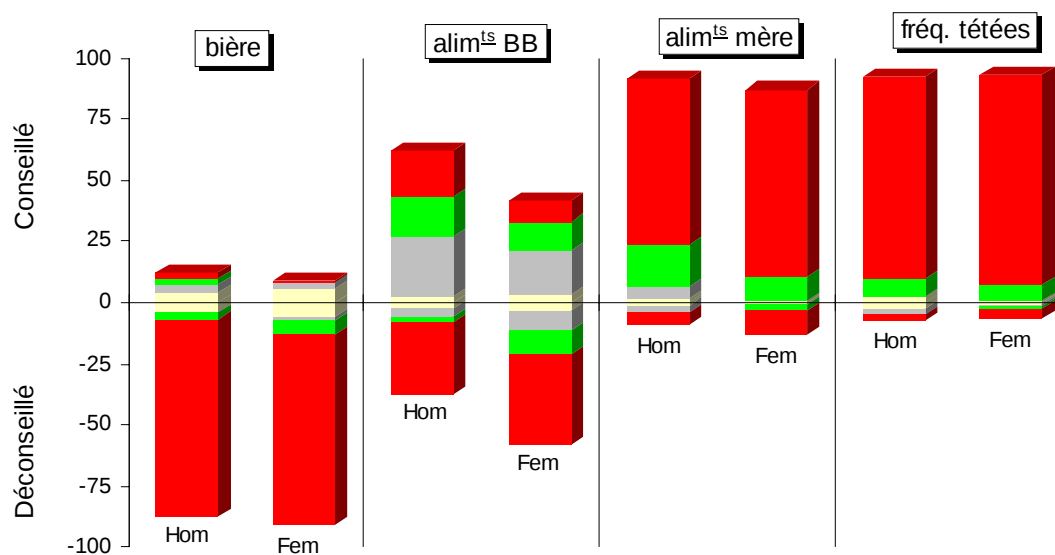


Figure 5.21: Conseils contre l'insuffisance de lait selon le sexe (question n° 4)

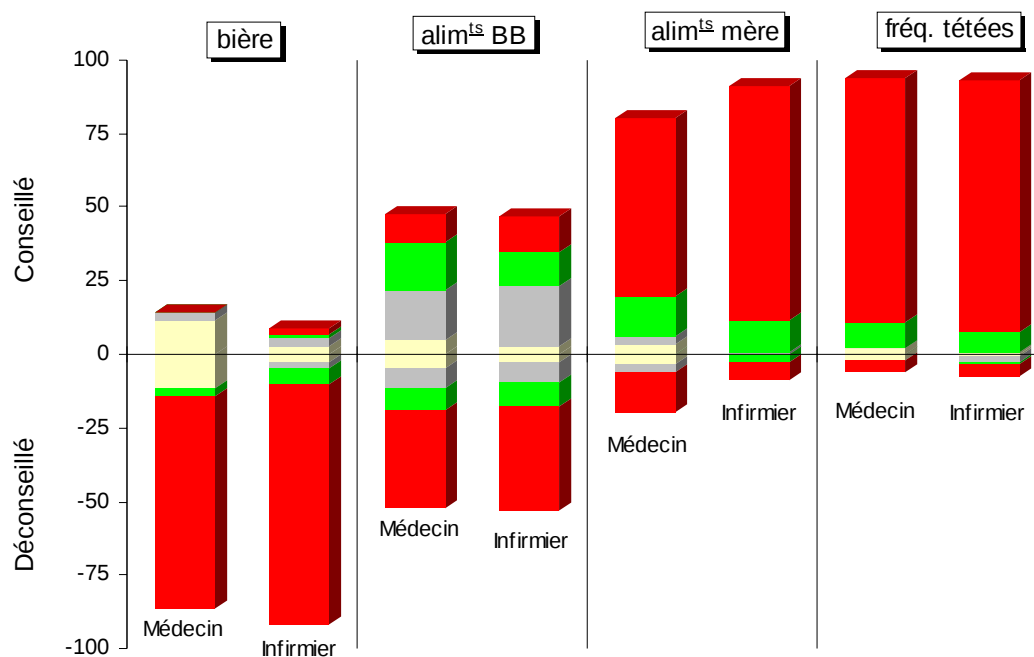


Figure 5.22: Conseils contre l'insuffisance de lait selon le grade (question n° 4)

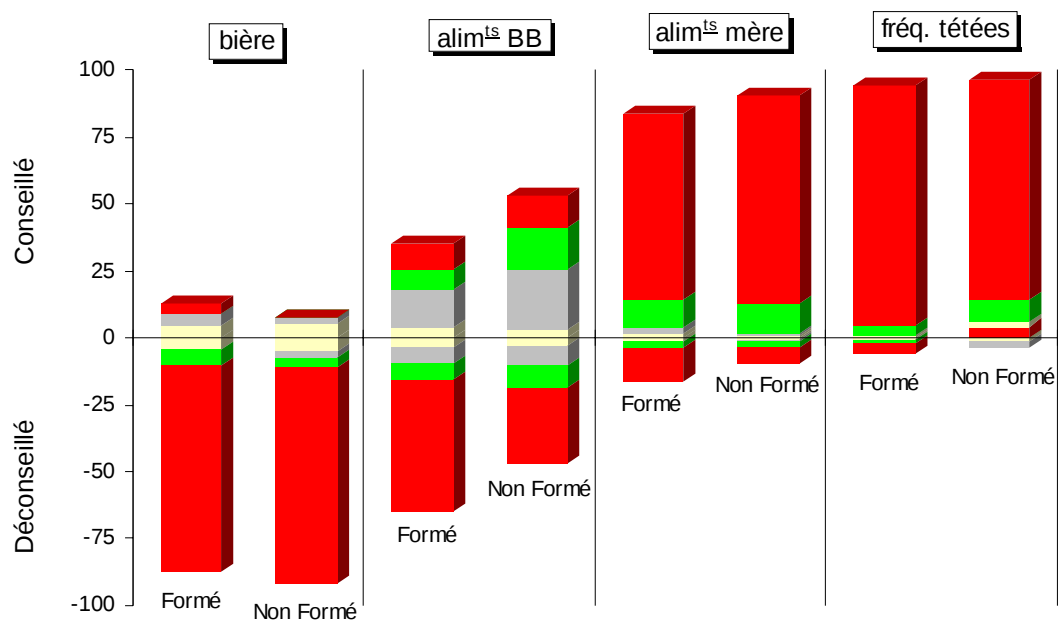


Figure 5.23: Conseils contre l'insuffisance de lait selon la formation (question n° 4)

Ces sémantogrammes donnent des indications sur la nature et l'intensité de la réaction des personnes et groupe de personnes. Mais ils ne disent rien sur ce qui différencie les uns des autres. Pour mieux comprendre la structure du tableau de données initiales, nous faisons une analyse différentielle du tableau des indices de similarité et de séparation.

5.5.2.2. Analyse différentielle.

Le Tableau 5.12 donne la diagonalisation de la matrice de similarité. Pour une meilleure lecture de ce tableau, les similarités sont ramenées à l'unité 9:

$$s(a,b) = -1 + \frac{|\Omega| - \sum_{\omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_b}(\omega)|}{|\Omega|} * 10$$

L'ordonnancement de lignes est des colonnes est totale. Cela suggère l'existence d'une structure sous-jacente dans notre tableau de donnée. Pour aller plus loin dans la compréhension de cette structure, nous faisons une analyse différentielle de la matrice de séparation $t(J \times G)$ où $G = \{\text{Sexe, Grade, Formation}\}$ est la variable de groupe et J l'ensemble des 12 variables retenues pour notre étude.

	SUP_LAIT	SUP_BOU	BIER	LM_VIH	BOUILLIE	SOURCE	LM_TUBER	ROBINET	FARINE	LM_ABCES	SUP_EAU	ALIM_BB	MESS_AMB	POITRINE	LM_DIAB	MESS_EXC	CON_LM	SEXE	FRUIT	GRADE	LM_RARE	MESS_INJ	TASSE	FORM	EAU	LM_SYPHI	LM_GROSS	MINERAL	TRAVAIL	ALIM_MM	FREQ_TT	Total Lin
SUP_LAIT	9	8	7	6	7	6	6	6	7	6	6	6	5	4	4	5	5	6	5	5	4	4	4	5	4	3	3	4	3	2	1	188
SUP_BOU	8	9	7	6	7	7	7	6	7	6	6	5	5	4	4	5	5	6	5	6	4	5	4	5	5	3	3	3	2	2	1	187
BIER	7	7	9	6	7	7	7	6	7	6	6	6	5	4	4	5	5	6	4	6	4	4	4	5	4	4	3	3	2	1	1	186
LM_VIH	6	6	6	9	6	5	7	5	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	5	4	5	5	3	3	3	2	186
BOUILLIE	7	7	7	6	9	6	6	6	8	6	6	6	5	4	4	5	5	6	6	5	4	4	4	5	5	3	3	4	3	2	1	186
SOURCE	6	7	7	5	6	9	6	7	7	6	6	6	4	4	4	4	5	6	6	5	5	4	4	5	5	3	3	4	3	2	2	186
LM_TUBER	6	7	7	7	6	6	9	6	6	7	5	5	5	5	5	5	5	6	4	6	4	5	4	5	4	5	4	3	2	1	1	186
ROBINET	6	6	6	5	6	7	6	9	6	5	6	6	4	5	4	4	5	5	6	5	5	4	4	4	6	4	4	5	4	3	2	185
FARINE	7	7	7	6	8	7	6	6	9	6	6	6	5	4	4	5	5	6	6	5	4	4	4	5	5	3	3	3	2	1	1	185
LM_ABCES	6	6	6	6	6	6	7	5	6	9	4	4	6	5	5	5	5	5	4	6	5	5	5	6	3	5	5	2	3	2	2	184
SUP_EAU	6	6	6	5	6	6	5	6	6	4	9	6	3	4	4	4	5	6	5	5	4	4	4	4	6	4	4	6	3	4	3	182
ALIM_BB	6	5	6	5	6	6	5	6	6	4	6	9	4	4	4	4	4	5	6	4	4	4	4	4	6	4	4	6	4	4	3	181
MESS_AMB	5	5	5	5	5	4	5	4	5	6	3	4	9	5	5	8	5	5	4	5	5	8	5	6	3	5	5	2	4	3	3	179
POITRINE	4	4	4	5	4	4	5	5	4	5	4	4	5	9	5	5	5	4	4	4	5	5	5	4	5	6	6	4	5	4	5	178
LM_DIAB	4	4	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5	5	9	5	4	4	4	5	4	5	6	4	4	7	6	4	5	5	5	178
MESS_EXC	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	4	4	8	5	5	9	5	5	4	5	5	7	5	5	3	5	5	2	4	3	3	177
CON_LM	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	4	5	9	5	4	4	7	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	176
SEXE	6	6	6	5	6	6	6	5	6	5	6	5	5	4	4	5	5	9	4	6	4	4	4	5	4	3	3	4	3	2	2	176
FRUIT	5	5	4	4	6	6	4	6	6	4	5	6	4	4	4	4	4	4	9	4	4	4	4	3	7	4	4	6	5	5	4	176
GRADE	5	6	6	5	5	5	6	5	5	6	5	4	5	4	5	5	4	6	4	9	4	5	4	5	4	4	4	3	2	2	2	175
LM_RARE	4	4	4	4	4	5	4	5	4	5	4	4	5	5	4	5	7	4	4	4	9	5	4	4	4	5	5	4	5	4	4	174
MESS_INJ	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	8	5	5	7	4	4	4	5	5	9	6	5	3	5	5	2	4	3	4	174
TASSE	4	4	4	5	4	4	4	4	4	5	4	4	5	5	6	5	4	4	4	4	4	6	9	5	3	5	5	4	5	4	4	173
FORM	5	5	5	5	5	5	5	4	5	6	4	4	6	4	4	5	4	5	3	5	4	5	5	9	3	4	4	3	3	3	3	171
EAU	4	5	4	4	5	5	4	6	5	3	6	6	3	5	4	3	4	4	7	4	4	3	3	3	9	4	4	7	5	5	4	171
LM_SYPHI	3	3	4	5	3	3	5	4	3	5	4	4	5	6	7	5	4	3	4	4	5	5	5	4	4	9	6	4	5	5	5	170
LM_GROSS	3	3	3	5	3	3	4	4	3	5	4	4	5	6	6	5	4	3	4	4	5	5	5	4	4	6	9	4	6	5	5	169
MINERAL	4	3	3	3	4	4	3	5	3	2	6	6	2	4	4	2	4	4	6	3	4	2	4	3	7	4	4	9	5	6	6	158
TRAVAIL	3	2	2	3	3	3	2	4	2	3	3	4	4	5	5	4	4	3	5	2	5	4	5	3	5	5	6	5	9	7	7	157
ALIM_MM	2	2	1	3	2	2	1	3	1	2	4	4	3	4	5	3	3	2	5	2	4	3	4	3	5	5	5	6	7	9	8	141
FREQ_TT	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	3	3	3	5	5	3	3	2	4	2	4	4	4	3	4	5	5	6	7	8	9	137
Total Col	188	187	186	186	186	186	186	185	185	184	182	181	179	178	178	177	176	176	176	175	174	174	173	171	171	170	169	158	157	141	137	

Tableau 5.12: Diagonalisation de la matrice de similarité.

	SEXE	GRADE	FORM	Total Lin
BIER	40.7	39.9	25.2	105.8
ALIM_MM	-33.7	-41.4	-25.0	100.1
LM_TUBER	33.4	39.8	24.5	97.7
FREQ_TT	-42.1	-35.7	-19.5	97.3
SUP_BOU	38.8	33.5	24.9	97.2
SUP_LAIT	37.2	28.4	22.8	88.4
LM_ABCES	19.0	33.8	30.2	83.0
FARINE	37.8	25.2	13.1	76.1
SOURCE	36.8	25.8	10.6	73.2
BOUILLIE	36.2	23.2	13.0	72.4
TRAVAIL	-29.0	-31.0	-10.8	70.8
LM_VIH	21.9	23.3	22.1	67.3
MESS_AMB	11.2	23.4	30.9	65.5
MESS_EXC	14.3	10.6	25.8	50.7
SUP_EAU	30.6	17.0	1.9	49.5
MINERAL	-5.5	-19.9	-20.4	45.8
MESS_INJ	3.3	15.1	24.3	42.7
ROBINET	22.4	13.5	4.5	40.4
ALIM_BB	18.5	7.5	-7.9	33.9
LM_DIAB	0.3	26.2	7.3	33.8
EAU	4.9	-7.4	-16.9	29.2
TASSE	-8.4	7.3	12.3	28.0
FRUIT	6.4	-9.7	-11.9	28.0
CON_LM	14.8	5.0	6.0	25.8
LM_GROSS	-16.1	-0.4	7.5	24.0
LM_SYPHI	-12.5	1.8	0.3	14.6
LM_RARE	1.0	-3.0	5.3	9.3
POITRINE	-3.5	1.3	2.9	7.7
Total Col	580.3	550.1	427.8	

Tableau 5.13: Séparation des modalités par la variable de groupe.

Le Tableau 5.13 donne l'analyse différentielle de la matrice $t(J \times G)$ de séparations des modalités par le sexe, le grade et la formation. Les valeurs portées sur ce tableau sont des pourcentages:

$$s(a,b) = \frac{|\Omega| - \sum_{\omega} |\mu_{\Omega_a}(\omega) - \mu_{\Omega_b}(\omega)|}{|\Omega|} * 100$$

$$t(a,b) = \frac{1}{2} (s(a+,b+) + s(a-,b-) - s(a+,b-) - s(a-,b+))$$

Une lecture horizontale de ce tableau indique les modalités qui font unanimité et celle pour lesquelles les différences entre individus sont les plus prononcées. Ainsi, la modalité BIER (conseiller de la bière à une maman qui a une insuffisance de lait) est celle qui divise le plus le personnel médical. En bas de l'échelle, c'est sur la modalité POITRINE (effet de l'allaitement maternel sur la tenue de la poitrine) qu'il y a le plus unanimité, ou plutôt identité de vues.

En regardant la ligne de marge du Tableau 5.13, on voit qu'il n'y a pas beaucoup de différences entre les facteurs Sexe et Grade. Contrairement à ce que l'on pouvait attendre, le facteur Formation est le moins discriminant, les écarts les plus importants s'observant au niveau du facteur Sexe. Cela veut dire qu'il y a plus de différence d'appréciations ou de réponses entre hommes et femmes ou entre médecins et infirmiers qu'il y en a entre formés et non formés.

Pour mieux comprendre la notion d'indice de séparation, prenons par exemple le cas du couple de modalités (BIER,SEXE). La modalité SEXE est dédoublée en les modalités HOM et FEM. La modalité BIER est dédoublée en les modalités BIER+ (conseiller la bière) et BIER- (déconseiller la bière). Les indices de similarités s sont donnés par le Tableau 5.14: $s(\text{HOM}, \text{BIER+}) = 74.9$, etc. De ce tableau, on déduit l'indice de séparation t entre les modalités SEXE et BIER:

$$t(\text{SEXE}, \text{BIER}) = \frac{1}{2} (74.9 + 65.8 - 25.1 - 34.2)$$

$$= 40.7$$

	BIER+	BIER-	
HOM	74.9	34.2	
FEM	25.1	65.8	

Tableau 5.14: Indices de similarité

Lorsque nous disons que les modalités BIER et SEXE sont bien séparées, nous traduisons le fait que parmi les personnes qui conseillent à un degré ou à un autre la bière, les hommes ont plus tendance à le faire que les femmes. Et inversement, parmi les personnes qui déconseillent à un degré ou à un autre la bière, les femmes ont une tendance plus prononcée à le faire que les hommes. En d'autres termes, on retrouve plus les situations du type « si on est homme, alors on conseille la bière, et si on est femme on déconseille la bière » que des situations du type « si on est homme, alors on déconseille la bière, et si on est femme on conseille la bière ». Il s'agit ici d'implications de la logique floue qui ont été formalisées au §5.4.1.

Le Tableau 5.15 montre les modalités qui séparent le plus les hommes des femmes, les médecins des infirmières et les formés des non formés. Sur ce tableau et sur la colonne formation, on voit que le pouvoir de séparation des modalités liées au message sur la suppression totale de l'eau avant 6 mois est assez élevé. Cela traduit le fait que le personnel formé trouve ce message clair, justifié et modéré, tandis que le personnel non formé trouve le même message ambigu, injustifié et excessif. C'est sur ces questions là que les réponses du personnel formé diffèrent le plus de celles du personnel non formé. On peut poursuivre l'interprétation en parcourant les autres échelles de haut en bas et voir ainsi les modalités qui séparent le plus les différents groupes de populations.

	SEXE			GRADE			FORMATION
FREQ_TT	42.1		ALIM_MM	41.4		MESS_AMB	30.9
BIER	40.7		BIER	39.9		LM_ABCES	30.2
SUP_BOU	38.8		LM_TUBER	39.8		MESS_EXC	25.8
FARINE	37.8		FREQ_TT	35.7		BIER	25.2
SUP_LAIT	37.2		LM_ABCES	33.8		ALIM_MM	25.0
SOURCE	36.8		SUP_BOU	33.5		SUP_BOU	24.9
BOUILLIE	36.2		TRAVAIL	31.0		LM_TUBER	24.5
ALIM_MM	33.7		SUP_LAIT	28.4		MESS_INJ	24.3
LM_TUBER	33.4		LM_DIAB	26.2		SUP_LAIT	22.8
SUP_EAU	30.6		SOURCE	25.8		LM_VIH	22.1
TRAVAIL	29.0		FARINE	25.2		MINERAL	20.4
ROBINET	22.4		MESS_AMB	23.4		FREQ_TT	19.5
LM_VIH	21.9		LM_VIH	23.3		EAU	16.9
LM_ABCES	19.0		BOUILLIE	23.2		FARINE	13.1
ALIM_BB	18.5		MINERAL	19.9		BOUILLIE	13.0
LM_GROSS	16.1		SUP_EAU	17.0		TASSE	12.3
CON_LM	14.8		MESS_INJ	15.1		FRUIT	11.9
MESS_EXC	14.3		ROBINET	13.5		TRAVAIL	10.8
LM_SYPHI	12.5		MESS_EXC	10.6		SOURCE	10.6
MESS_AMB	11.2		FRUIT	9.7		ALIM_BB	7.9
TASSE	8.4		ALIM_BB	7.5		LM_GROSS	7.5
FRUIT	6.4		EAU	7.4		LM_DIAB	7.3
MINERAL	5.5		TASSE	7.3		CON_LM	6.0
EAU	4.9		CON_LM	5.0		LM_RARE	5.3
POITRINE	3.5		LM_RARE	3.0		ROBINET	4.5
MESS_INJ	3.3		LM_SYPHI	1.8		POITRINE	2.9
LM_RARE	1.0		POITRINE	1.3		SUP_EAU	1.9
LM_DIAB	0.3		LM_GROSS	0.4		LM_SYPHI	0.3

Tableau 5.15: Séparation des modalités selon le sexe, le grade et la formation.

Le Tableau 5.16 donne l'analyse différentielle du tableau des indices de séparation entre la variable de groupe et la variable n°2: « introduction d'aliments vers le 2^{ème} mois ». Une lecture verticale de ce tableau montre que les groupes de personnel se distinguent essentiellement par leurs réponses sur l'introduction des farines et de la bouillie. Par ailleurs, ces mêmes groupes se ressemblent par leurs réponses sur l'introduction des fruits et de l'eau. Autrement dit, pour la variable n° 2, c'est par leur point de vue sur l'introduction des farines et de la bouillie que les hommes se distinguent des femmes, les médecins des infirmières et les formés des non formés. Une lecture horizontale de ce tableau montre que le sexe est le facteur le plus discriminant. Cela traduit le fait que pour la variable « introduction d'aliments vers le 2^{ème} mois », les différences de réponses entre hommes et femmes sont plus importantes qu'entre formés et non formés.

	FARINE	BOUILLIE	EAU	FRUIT	Total Lin
SEXE	37.8	36.2	4.9	6.4	85.3
GRADE	25.2	23.2	-7.4	-9.7	65.5
FORMATION	13.1	13.0	-16.9	-11.9	54.9
Total Col	76.1	72.4	29.2	28.0	

Tableau 5.16: Séparation des groupes par l'introduction des aliments au 2^{ème} mois

Néanmoins, quelques nuances doivent être apportées à cette analyse. En effet, comme le montre la Figure 5.24, le facteur formation est le plus discriminant pour les modalités 'bouillie' et 'eau'. De plus, le pouvoir de séparation du facteur formation est négatif pour ces deux modalités. Cela traduit le fait que le personnel formé déconseille l'eau et les jus de fruit, contrairement au personnel non formé qui a tendance à les conseiller. Mais cette interprétation reste fragile, vu le faible pouvoir de séparation du facteur formation pour ces modalités (environ 28).

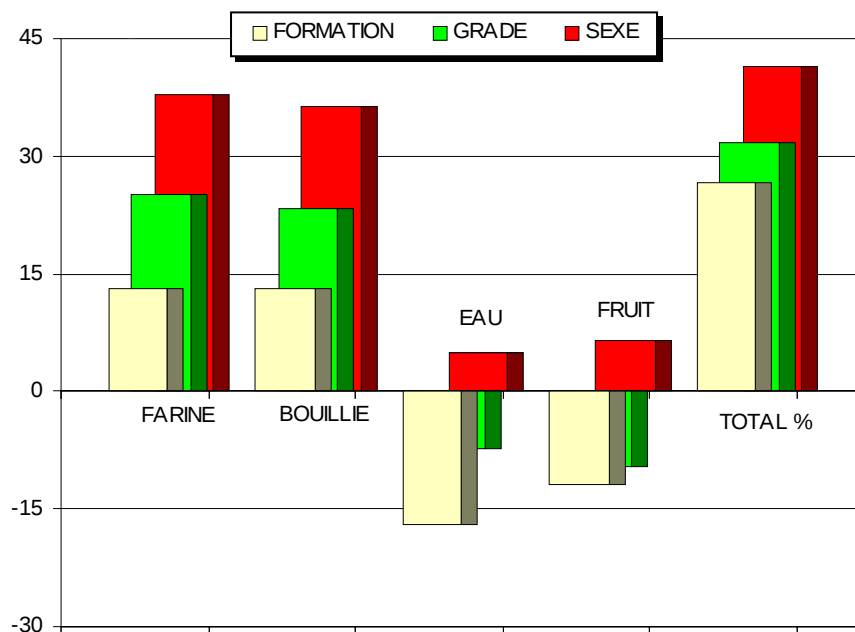


Figure 5.24: Séparation des groupes par l'introduction des aliments vers le 2^{ème} mois (question n°2)

Le Tableau 5.17 montre l'analyse différentielle du croisement de la variable de groupe par la variable « conseils en cas d'insuffisance de lait ». C'est les facteurs sexe et grade qui sont les plus séparateurs. Les modalités BIER, ALIM_MM et FREQ_TT sont les mieux séparées par le facteur de groupe.

	BIER	ALIM_MM	FREQ_TT	ALIM_BB	Total Lin
SEXE	40.7	-33.7	-42.1	18.5	135.0
GRADE	39.9	-41.4	-35.7	7.5	124.5
FORMATION	25.2	-25.0	-19.5	7.9	77.6
Total Col	105.8	100.1	97.3	33.9	

Tableau 5.17: Séparation des groupes par le message sur LM (question n° 3)

Sur la Figure 5.25, on voit que la modalité BIER est positivement séparée tandis que les deux autres modalités, ALIM_MM et FREQ_TT le sont négativement. Parmi les personnes qui conseillent la prise de bière pour palier à l'insuffisance de lait maternel, les hommes et les médecins y sont majoritaires.

Par opposition, les femmes et les infirmières ont plutôt tendance à déconseiller la prise de bière. La séparation négative des modalités ALIM_MM et FREQ_TT traduit le fait que parmi les personnes qui conseillent la suralimentation de la mère ou l'augmentation de la fréquence des tétées, c'est les femmes et les infirmières qui sont majoritaires.

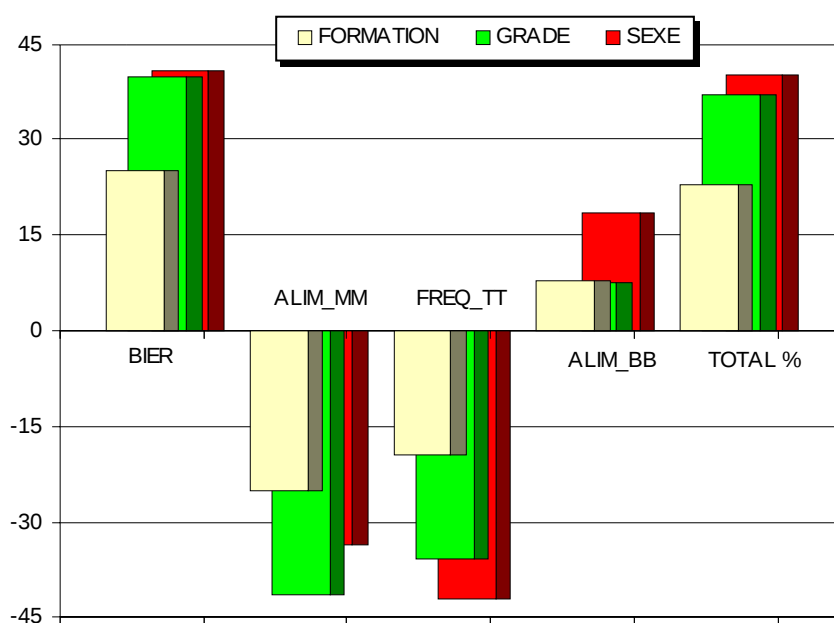


Figure 5.25: Séparation des groupes par les additifs contre l'insuffisance de lait (question n° 4).

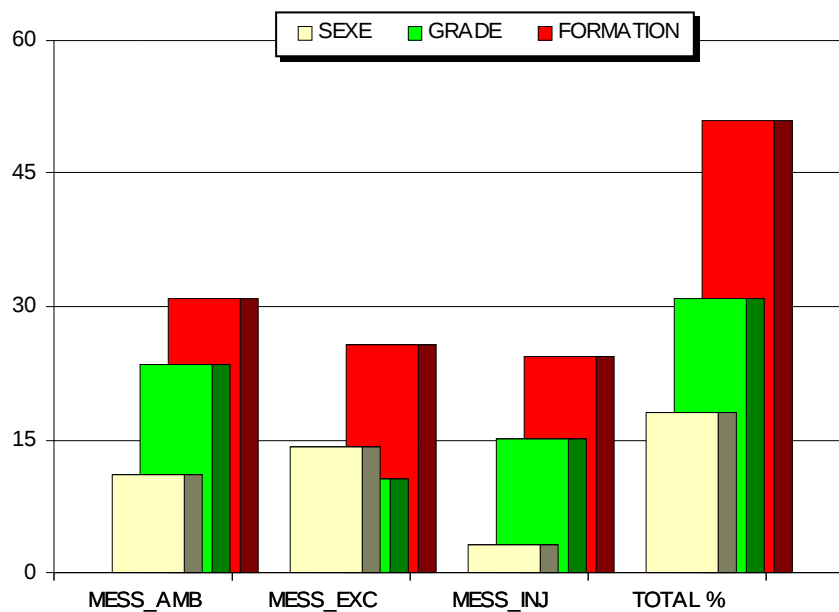


Figure 5.26: Séparation des groupes par le message sur l'allaitement maternel exclusif (question n° 3)

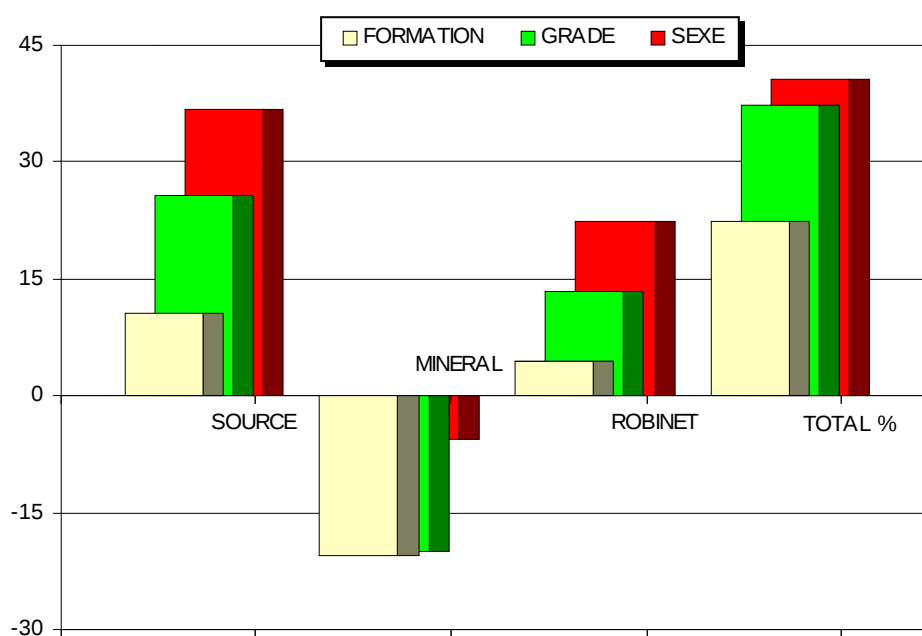


Figure 5.27: Séparation des groupes par le type d'eau autorisé (question n° 8)

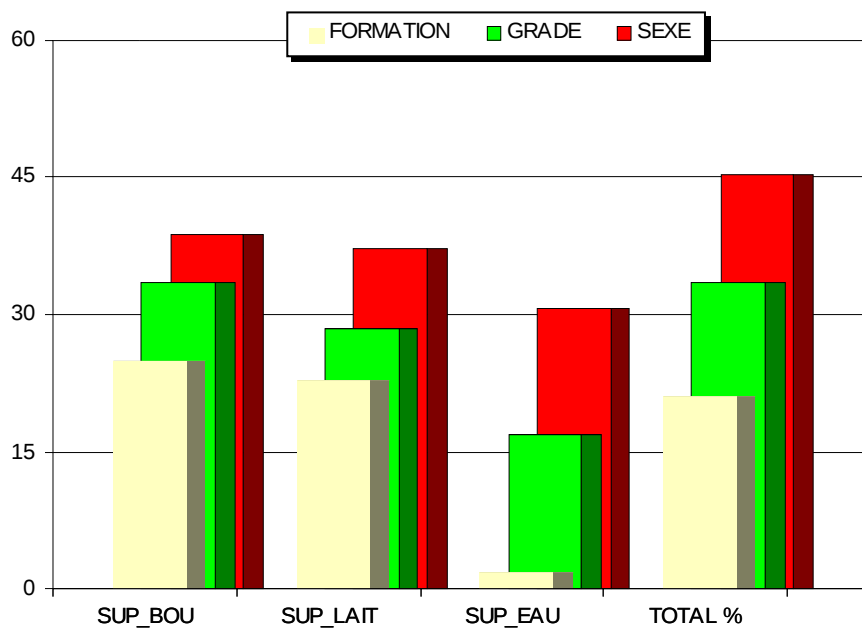


Figure 5.28: Séparation des groupes par le type supplément au début de l'allaitement maternel (question. n° 9)

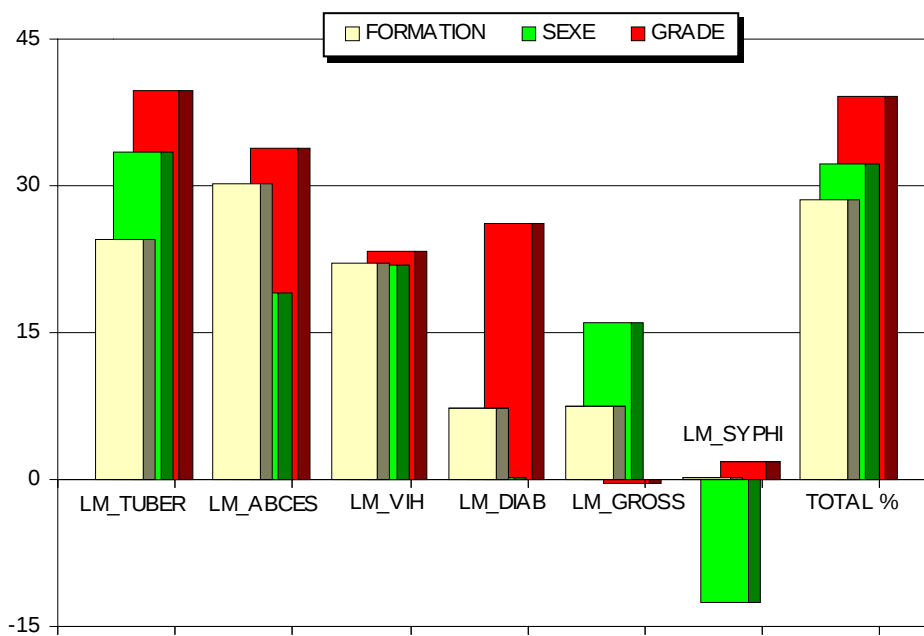


Figure 5.29: Séparation des groupes par le risque lait maternel pour une maman infectée (question n° 12)

Chapitre 6

6. Conclusion

Le travail que nous avons présenté ici propose une méthode générale d'analyse statistique des connaissances imprécises. Cette analyse se fait en plusieurs étapes:

- le recueil des données par un différentiel sémantique,
- la construction des tableaux d'association, de similarité et de séparation,
- l'élaboration de sémantogrammes associés à chaque tableau,
- l'analyse différentielle.

Nous avons également présenté des outils complémentaires qui peuvent avantageusement compléter la méthode générale. Ces méthodes offrent l'avantage de ne jamais complètement échapper à la maîtrise de l'utilisateur: ce n'est pas toujours le cas en statistique.

Les applications floues que nous avons présenté dans ce travail sont la base théorique de plusieurs notions importantes de la statistique floue. Les propriétés qui définissent les applications floues sont suffisamment pauvres pour permettre des développements riches.

Un des problèmes posés par les enquêtes statistiques est celui de la taille des échantillons: plus les questions sont nombreuses, plus il est nécessaire d'étudier des populations de taille toujours plus grande afin de saisir la structure des données. L'introduction de variables statistiques floues a l'avantage de réduire considérablement les données en évitant la multiplication des modalités. En effet, pour une variable statistique nette, un individu de la population est associé à une modalité et une seule. Lorsque cette condition ne peut pas être remplie, on procède généralement à un éclatement des modalités, d'où l'augmentation du nombre de variables. Les caractères flous ont cette particularité de permettre à un individu d'être associé à plus d'une modalité à la fois, d'où la réduction du nombre de variables, et par conséquent de la taille de l'échantillon.

La traduction en terme de sous-ensemble flou d'une modalité de variable facilite la manipulation des caractères flous et ouvre la voie à des développements futurs. Toutes les opérations sur les sous-ensembles flous peuvent ainsi être reportées sur les modalités de caractère flou. On peut par exemple calculer la distance entre deux modalités. Il suffit pour cela d'utiliser n'importe quelle distance sur l'ensemble des parties d'un ensemble. La distance du cardinal de la différence symétrique offre plusieurs avantages sur le plan pratique, en particulier lorsqu'il y a mélange de données binaires et de données floues. Pour des personnes qui utilisent des opérateurs très particuliers, il serait intéressant de démontrer l'existence d'une distance du cardinal de la différence symétrique associée à des opérateurs autres que ceux de Zadeh, de Goguen ou de Lukasiewicz.

D'autres directions de recherches pourraient être poursuivies, par exemple celle qui consiste à l'écriture d'un logiciel dédié à la statistique floue. Un tel logiciel prendrait en charge la saisie des données issues d'un différentiel sémantique, la création et la manipulation des différents tableaux de données, le codage floue, l'édition des sémantogrammes, et l'analyse différentielle. L'enquête pédiatrique que nous avons présenté ici est un exemple d'application de certaines méthodes développées dans notre travail. Il serait intéressant d'aller encore plus loin dans la pratique de la statistique floue en utilisant l'ensemble des outils théoriques que nous avons introduits.

C'est à ces problèmes que nous envisageons maintenant de travailler.

Chapitre 7

7. Annexe A: Théorie des treillis

La théorie des treillis est théorie majeure dont les développements mathématiques sont très riches. Nous exposons ici quelques notions de base de cette théorie. Ces notions sont principalement celles dont nous avons eu besoin dans notre travail. Pour plus de détails et pour toutes les démonstrations non fournies, le lecteur peut se référer à Birkhoff (1948), Dubreil & Lessieur (1953), Szász (1971).

7.1. Treillis.

7.1.1. Axiomatique.

7.1.1.1. Définition.

Soit E un ensemble muni de deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ appelées respectivement intersection et union. A tout couple (a,b) d'éléments de E , on associe les éléments $a \wedge b$ (intersection de a et de b) et $a \vee b$ (union de a et de b). L'ensemble E est appelé treillis si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées:

- i)- $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ $\forall a,b \in E$ (commutativité)
- ii)- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ $\forall a,b,c \in E$ (associativité)
- iii)- $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$ $\forall a,b \in E$ (absorption)

On note parfois $(E, \wedge, \vee)$ pour exprimer que E est un treillis pour les opérations $\wedge$ et $\vee$.

7.1.1.2. Remarque.

L'intersection $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ et l'union $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ sont définies par récurrence de la manière habituelle et notées respectivement $\bigwedge_{i=1}^n a_i$ et $\bigvee_{i=1}^n a_i$:

$$\begin{aligned} - \bigwedge_{i=1}^n a_i &= \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i \right) \wedge a_n \\ - \bigvee_{i=1}^n a_i &= \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \right) \vee a_n \end{aligned}$$

7.1.1.3. Théorème.

Soit E un treillis. Alors tous les éléments de E sont idempotents pour l'intersection et l'union:

$$\begin{aligned} - a \wedge a &= a \quad \forall a \in E \\ - a \vee a &= a \quad \forall a \in E \end{aligned}$$

preuve:

D'après la propriété d'absorption de l'union, on a

$$a = a \vee (a \wedge b) \quad \forall b \in E$$

d'où

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b))$$

en posant $x = a \wedge b$, on a

$$\begin{aligned} a \wedge a &= a \wedge (a \vee x) \\ &= a \quad (\text{absorption de l'intersection}) \end{aligned}$$

De même,

$$a = a \wedge (a \vee b) \quad \forall b \in E$$

ce entraîne

$$\begin{aligned} a \wedge a &= a \wedge (a \vee (a \wedge b)) \\ &= a \quad (\text{absorption de l'union}) \end{aligned}$$

7.1.1.4. Corollaire.

Soit E un treillis. Alors pour tout couple d'éléments (a,b) de E , on a :

$$- \quad a \wedge b = a \vee b \Leftrightarrow a = b.$$

preuve:

d'après le théorème 7.1.1.3,

$$a = b \Rightarrow a \wedge b = a = a \vee b$$

réciroquement, si $a \wedge b = a \vee b$, alors

$$a = a \vee (a \wedge b)$$

$$= a \vee (a \vee b)$$

$$= a \vee b$$

et

$$b = b \vee (b \wedge a)$$

$$= b \vee (b \vee a)$$

$$= b \vee a$$

D'où $a = b$.

7.1.1.5. Exemple.

Sur l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, notons $a \wedge b$ (resp. $a \vee b$) la plus petite (resp. grande) des deux valeurs a et b . Il est immédiat que l'ensemble $([0,1], \wedge, \vee)$ est un treillis. C'est ce treillis là qui est utilisé dans la théorie des sous-ensembles flous.

7.1.1.6. Exemple.

Considérons l'ensemble $P(E)$ des parties de l'ensemble E (y compris l'ensemble vide) muni de l'intersection et de la réunion des ensembles. L'ensemble $(P(E), \cap, \cup)$ est un treillis appelé treillis des parties de E .

7.1.1.7. Exemple.

Dans l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$, notons $f \wedge g$ (resp. $f \vee g$), la fonction qui à tout x de $[0,1]$, associe la plus petite (resp. grande) des valeurs $f(x)$ et $g(x)$. Les deux fonctions $f \wedge g$ et $f \vee g$ sont souvent appelées enveloppe inférieure et enveloppe supérieure. On voit aussitôt que les axiomes de treillis sont vérifiés pour les opérations $\wedge$ et $\vee$.

7.1.2. **Dualité.**

7.1.2.1. Définition.

Une proposition de la théorie des treillis est une assertion A (vraie ou fausse) dans laquelle, en plus de certains connecteurs logiques ($=$, $\forall$, $\exists$, ...) et de variables, seuls les symboles $\wedge$ et $\vee$ apparaissent.

7.1.2.2. Remarque.

En intervertissant les symboles $\wedge$ et $\vee$ dans l'assertion de la théorie des treillis A , on obtient encore une assertion de la théorie des treillis, appelée duale de A et notée $D(A)$. Il est clair que l'assertion duale de $D(A)$ est l'assertion A elle-même: $D(D(A)) = A$. En conséquence, la relation de dualité entre deux assertions est symétrique. C'est pour cela qu'on dit souvent de deux telles assertions qu'elles sont « duales » ou « mutuellement duales ».

Le procédé par lequel chacune des deux assertions duales peut se déduire l'une de l'autre (par échange des symboles $\wedge$ et $\vee$ dans la formulation des assertions) s'appelle transformation de l'assertion par dualité.

7.1.2.3. Principe de dualité.

La duale d'une proposition vraie pour la théorie des treillis est encore une proposition vraie de la théorie des treillis.

7.1.2.4. Théorème.

Soit E un treillis. Alors

$$- a \wedge b = b \Leftrightarrow a \vee b = a.$$

preuve.

$$\begin{aligned} a \wedge b = b &\Rightarrow a \vee b = a \vee (a \wedge b) \\ &= a \quad (\text{absorption}) \end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} a \vee b = a &\Rightarrow a \wedge b = b \wedge (a \vee b) \\ &= b \quad (\text{absorption}) \end{aligned}$$

7.1.2.5. Remarque.

Une conséquence directe du principe de dualité est que si $(E, \wedge, \vee)$ est un treillis, alors $(E, \vee, \wedge)$ est aussi un treillis appelé treillis dual de $(E, \wedge, \vee)$ et noté $D(E, \wedge, \vee)$. Il est clair que $D(D(E, \wedge, \vee)) = (E, \wedge, \vee)$.

Il peut arriver que $D(E, \wedge, \vee)$ soit isomorphe à $(E, \wedge, \vee)$. Dans ce cas, on dit que le treillis $(E, \wedge, \vee)$ est auto-dual. Autrement dit, un treillis $(E, \wedge, \vee)$ est auto-dual si et seulement s'il existe une bijection $\varphi: E \rightarrow E$ tel que:

- $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$
- $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$

7.1.2.6. Exemple.

Le treillis $([0,1], \wedge, \vee)$ où $\wedge$ (resp. $\vee$) est le minimum (resp. maximum) est auto-dual. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre la bijection $\varphi: E \rightarrow E$ définie par $\varphi(a) = 1 - a$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \varphi(a \wedge b) &= 1 - a \wedge b \\ &= (1 - a) \vee (1 - b) \\ &= \varphi(a) \vee \varphi(b) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\varphi(a \vee b) &= 1 - a \vee b \\
&= (1-a) \wedge (1-b) \\
&= \varphi(a) \wedge \varphi(b)
\end{aligned}$$

7.1.2.7. Exemple.

Le treillis $(P(E), \cap, \cup)$ des parties de E est auto-dual. Plus précisément, l'application φ qui, à toute partie de E , associe son complémentaire est une bijection de E sur lui-même: $\varphi(A) = \overline{A}$. Et on a

$$\begin{aligned}
\varphi(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} \\
&= \varphi(A) \cup \varphi(B)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\varphi(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \\
&= \varphi(A) \cap \varphi(B)
\end{aligned}$$

7.1.3. Ensemble ordonné.

7.1.3.1. Théorème.

Soit $(E, \wedge, \vee)$ un treillis. Alors la formule

$$- \quad a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

définit sur E , une relation d'ordre. Cette relation est appelée la relation d'ordre du treillis, ou plus simplement l'ordre du treillis $(E, \wedge, \vee)$.

On peut également obtenir l'ordre strict en posant $a < b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ et $a \neq b$

preuve:

i)- réflexivité.

$$a \leq a \Leftrightarrow a \wedge a = a \quad (\text{théorème 7.1.1.3})$$

ii)- antisymétrie.

$a \leq b$ et $b \leq a$ équivaut à dire que

$$a \wedge b = a \text{ et } b \wedge a = b.$$

Puisque l'opération $\wedge$ est commutative, on a finalement $a = b$.

iii)- transitivité.

$a \leq b$ et $b \leq c$ équivaut à dire que

$$a \wedge b = a \text{ et } b \wedge c = b$$

d'où

$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c \\ &= a \wedge (b \wedge c) \\ &= a \wedge b \\ &= a \end{aligned}$$

donc $a \leq c$.

7.1.3.2. Remarque.

Il est souvent utile de transformer par dualité, des propositions de la théorie des treillis faisant intervenir non seulement les opérations du treillis, mais aussi l'ordre du treillis. D'où la nécessité de connaître l'assertion duale de « $a \leq b$ ».

D'après le théorème 7.1.3.1, l'assertion « $a \leq b$ » équivaut à $a \wedge b = a$. Donc l'assertion duale de « $a \leq b$ », qu'on notera « $a \geq b$ », équivaut à $a \vee b = a$.

7.1.3.3. Théorème.

Soit $(E, \wedge, \vee)$ un treillis. Soit $\leq$ l'ordre du treillis E . Alors une partie finie $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de E admet une borne inférieure et une borne supérieure, à savoir

respectivement $\bigwedge_{i=1}^n a_i$ et $\bigvee_{i=1}^n a_i$.

preuve:

Il faut montrer que

$$\begin{aligned}
 - \bigwedge_{i=1}^n a_i &\leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq \bigvee_{i=1}^n a_i \\
 - u \leq a_1, a_2, \dots, a_n &\Rightarrow u \leq \bigwedge_{i=1}^n a_i \\
 - u \geq a_1, a_2, \dots, a_n &\Rightarrow u \geq \bigvee_{i=1}^n a_i.
 \end{aligned}$$

i)- $\forall k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned}
 \left(\bigwedge_{i=1}^n a_i \right) \wedge a_k &= a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{k-1} \wedge a_k \wedge a_{k+1} \wedge \dots \wedge a_n \\
 &= \bigwedge_{i=1}^n a_i
 \end{aligned}$$

D'où $\bigwedge_{i=1}^n a_i \leq a_k \quad \forall k \in [1, n]$.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)- } u \leq a_1, a_2, \dots, a_n &\Rightarrow u \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n a_i \right) = u \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \\
 &= u \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n \\
 &\dots \\
 &= u \wedge a_n \\
 &= u. \quad \text{D'où } u \leq \bigwedge_{i=1}^n a_i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)- } u \geq a_1, a_2, \dots, a_n &\Rightarrow u \vee \left(\bigvee_{i=1}^n a_i \right) = u \vee a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \\
 &= u \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_n \\
 &\dots \\
 &= u \vee a_n \\
 &= u. \quad \text{D'où } u \geq \bigvee_{i=1}^n a_i.
 \end{aligned}$$

7.1.3.4. Proposition.

Pour toute suite $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, a, b$ d'éléments d'un treillis E , si $a_i \leq b_i \forall i \in [1, n]$ alors

$$- \bigwedge_{i=1}^n a_i \leq \bigwedge_{i=1}^n b_i \text{ et } \bigvee_{i=1}^n a_i \leq \bigvee_{i=1}^n b_i$$

En particulier, si $a_i \leq b \forall i \in [1, n]$, alors $\bigvee_{i=1}^n a_i \leq b$.

Et si $b_i \geq a \forall i \in [1, n]$, alors $\bigwedge_{i=1}^n b_i \geq a$.

preuve:

conséquence immédiate du théorème 7.1.3.3.

7.1.4. **Diagramme de Hasse.**

7.1.4.1. Définition.

Soient a et b deux éléments d'un ensemble ordonné E . Les éléments a et b sont dits consécutifs, et on note $a < b$ si et seulement s'il n'existe aucun élément x de E tel que $a < x < b$. On dit aussi que a est couvert par b ou que b couvre a .

7.1.4.2. Définition.

Soit F un ensemble ordonné. Un élément a de F est dit maximal s'il n'existe aucun élément x de F tel que $x > a$. De même, un élément a de F est dit minimal s'il n'existe aucun élément x de F tel que $x < a$.

7.1.4.3. Construction.

Soit F un ensemble ordonné. Chaque élément de F est représenté par un point dans le plan (celui de la figure que l'on veut construire). Si deux éléments a et b sont tels que $a < b$, on convient de placer le point b au-dessus du point a . Si deux éléments a et b sont tels que b couvre a , on relie a et b par un segment. Le graphe ainsi obtenu est appelé graphe de l'ensemble F . Ce graphe est encore connu sous le nom de diagramme de Hasse.

7.1.4.4. Exemple.

Soit $F = \{a, b, c, d, e\}$ tel que $a < b$, $a < d$, $a < e$, $b < d$, $b < e$, $c < e$. Le graphe de F est donné par la Figure 7.1

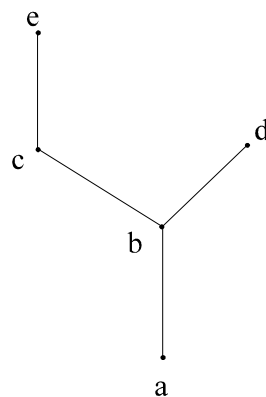


Figure 7.1: Diagramme de Hasse

7.1.4.5. Théorème.

Tout ensemble ordonné non vide et fini peut être représenté par un graphe.

7.1.4.6. Remarque.

Deux ensembles finis ordonnés peuvent être représentés par le même graphe si et seulement s'ils sont isomorphes.

Un treillis fini (étant un ensemble ordonné) est déterminé par son graphe, à un isomorphisme près. En général, les treillis finis sont donnés uniquement par leur graphe.

7.1.4.7. Remarque.

On peut trouver l'intersection et l'union de deux éléments a et b d'un treillis à partir de son graphe. En effet, d'après le théorème 7.1.3.1, on a $a \wedge b = \inf(a, b)$ et $a \vee b = \sup(a, b)$. Donc

- si $a \leq b$ alors $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$
- si $a \geq b$ alors $a \wedge b = b$ et $a \vee b = a$
- si a et b ne sont pas comparables, $a \wedge b$ est l'élément situé le plus haut parmi les éléments en dessous de a et de b , à partir duquel il est possible de monter à la fois vers a et vers b le long de segments joignant les points a et b . $a \vee b$ s'obtient par dualité à partir de $a \wedge b$.

7.1.4.8. Exemple.

Prenons l'exemple du graphe de la Figure 7.2. Il représente un treillis dans lequel les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont définies de la manière suivante: pour tout élément x du treillis, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = 0$, $x \wedge u = x$, $x \vee u = u$ et par le Tableau 7.1.

$\wedge$	a	b	c	d	e
a	a	0	a	a	0
b	0	b	0	b	b
c	a	0	c	a	0
d	a	b	a	d	b
e	0	b	0	b	e

$\vee$	a	b	c	d	e
a	a	d	c	d	u
b	d	b	u	d	e
c	c	u	c	u	u
d	d	d	u	d	u
e	u	c	u	u	e

Tableau 7.1

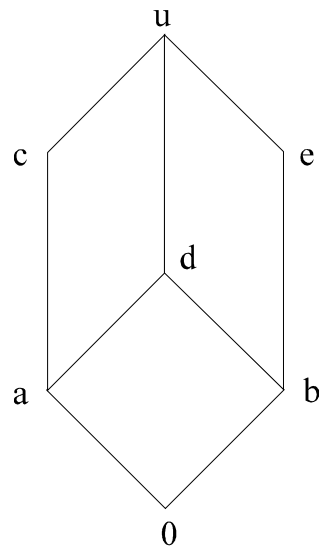


Figure 7.2

7.1.5. Bornes et compléments.

7.1.5.1. Définition.

Soit E un treillis. On appelle élément nul et on note 0 , un élément de E tel que pour tout $a \in E$, $0 \leq a$. On appelle élément universel et on note u , un élément de E tel que pour tout $a \in E$, $u \geq a$. Les éléments 0 et u sont appelés les bornes du treillis. Si les éléments 0 et u existent, on dira que le treillis E est borné.

7.1.5.2. Remarque.

Les bornes d'un treillis, si elles existent, sont uniques. De plus, ces bornes vérifient les relations suivantes:

- $0 \wedge a = 0$, $0 \vee a = a$
- $u \wedge a = a$, $u \vee a = u$

7.1.5.3. Définition.

Soit E un treillis borné. Soit a un élément de E . On appelle complément de a un élément de E noté $\bar{a}$ et satisfaisant à

$$- a \wedge \bar{a} = 0 \text{ et } a \vee \bar{a} = u.$$

La relation de complémentarité entre a et $\bar{a}$ est réciproque, c'est-à-dire a est le complément de $\bar{a}$. On dit aussi que a et $\bar{a}$ sont complémentaires.

7.1.5.4. Définition.

Un treillis borné dont tout élément admet au moins un complément est dit complémenté.

7.1.5.5. Définition.

– Soit E un treillis. Soient a et b deux éléments de E tels que $a \leq b$. Un élément x' satisfaisant à $x \wedge x' = a$ et $x \vee x' = b$ est appelé complément relatif de x par rapport à a et à b .

La relation entre x et x' est réciproque. On dit aussi que x et x' sont complémentaires par rapport à a et à b .

7.1.5.6. Définition.

Un treillis dans lequel tout élément admet un complément relatif par rapport à a et à b , quel que soit $a, b \in E$ tel que $a \leq b$, est dit relativement complémenté.

7.2. Treillis particuliers.

7.2.1. Treillis complets.

Soit I un ensemble fini ou infini. Soit $(E, \wedge, \vee)$ un treillis. Si $A = \{a_i\}_{i \in I}$ est un sous-ensemble de E , l'intersection (respectivement union) des éléments de A

est notée $\bigwedge_{i=1}^n a_i$ (respectivement $\bigvee_{i=1}^n a_i$)

7.2.1.1. Définition.

Si pour toute partie non vide A de E , l'intersection des éléments (resp. union) des éléments de E existe, on dit que E est complet pour l'intersection (resp. union). Un treillis complet pour l'intersection et l'union est dit complet.

7.2.1.2. Théorème.

Soit F un ensemble ordonné dont toute partie majorée admet une borne inférieure, alors toute partie non vide de F admet également une borne supérieure.

7.2.1.3. Corollaire.

Un treillis borné complet pour l'intersection, l'est aussi pour l'union.

7.2.1.4. Définition.

On dit qu'un ensemble F satisfait à la condition de la chaîne ascendante (resp. descendante) si et seulement si toute suite strictement croissante (resp. décroissante) d'éléments de F est finie.

7.2.1.5. Théorème.

Un treillis satisfaisant à la fois à la condition de la chaîne ascendante et à la condition de la chaîne descendante est complet.

7.2.2. Treillis modulaires.

7.2.2.1. Définition.

Un treillis E est dit modulaire si et seulement si pour trois éléments a, b, c quelconque, on a $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Cette condition exprime une propriété de distributivité liant les deux opérations du treillis, mais seulement pour des éléments particuliers. En effet, elle s'écrit sous l'une des formes

- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ si $a \leq c$
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ si $a \geq c$

Dans un treillis quelconque, on a

- $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

En effet $a \leq a \vee b$ et $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ impliquent $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b$. D'autre part, $a \leq c$ et $b \wedge c \leq c$ impliquent $a \vee (b \wedge c) \leq c$. D'où $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

7.2.2.2. Exemple.

Le treillis représenté par la Figure 7.3 est modulaire.

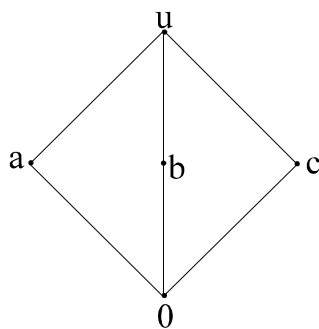


Figure 7.3: Treillis modulaire

7.2.2.3. Théorème.

Pour qu'un treillis E soit modulaire, il faut et il suffit que pour tout triplet (a,b,c) d'éléments de E , on ait

$$- a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

preuve.

Si E est modulaire, alors

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

et par la suite,

$$a \leq a \vee c \Rightarrow a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Réciproquement, si $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, alors $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ lorsque $a \leq c$ puisque cette dernière relation implique $a \vee c = c$.

7.2.2.4. Propriété.

Un treillis modulaire satisfait à la condition suivante:

$$- a \succ a \wedge b \Leftrightarrow b \succ a \vee b$$

7.2.2.5. Définition.

On appelle valuation dans un treillis $(E, \wedge, \vee)$, toute application $v: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$- v(a) + v(b) = v(a \wedge b) + v(a \vee b)$$

Un treillis muni d'une valuation est appelé treillis valué.

On appelle treillis métrique, un treillis valué tel que

$$- a < b \Rightarrow v(a) < v(b)$$

Cette condition signifie que $v(a) = v(b)$ implique $a = b$ dès que a et b sont comparables.

7.2.2.6. Théorème.

Tout treillis modulaire est métrique.

7.2.2.7. Remarque.

L'expression treillis métrique est justifiée par le fait que les éléments d'un tel treillis sont les points d'un espace métrique. Les axiomes de la distance sont vérifiés si l'on pose:

$$- d(a,b) = v(a \vee b) + v(a \wedge b)$$

7.2.3. **Treillis distributif.**

7.2.3.1. Définition.

On appelle treillis distributif, un treillis satisfaisant à la condition suivante:

$$- a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Cette condition exprime le fait que l'intersection est distributive par rapport à l'union

7.2.3.2. Proposition.

Si un treillis E est distributif, alors $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, et réciproquement.

preuve:

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge c) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

La réciproque s'obtient par dualité.

7.2.3.3. Exemple.

Le Treillis de la Figure 7.4 est distributif.

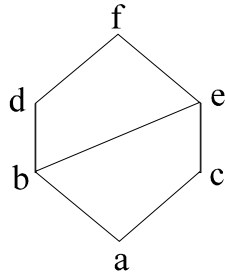


Figure 7.4: Treillis distributif

7.2.3.4. Proposition.

Un treillis E est distributif si et seulement si pour tout triplet (a,b,c) d'éléments de E , $a \wedge c = b \wedge c$ et $a \vee c = b \vee c$ entraînent $a = b$.

Cette condition peut être considérée comme une règle de simplification faisant intervenir les deux opérations $\wedge$ et $\vee$.

preuve:

$$\begin{aligned}
 a &= a \vee (a \wedge c) \\
 &= a \vee (b \wedge c) \\
 &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
 &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \\
 &= b \vee (a \wedge c) \\
 &= b \vee (b \wedge c) \\
 &= b
 \end{aligned}$$

Réciproquement, la condition « $a \wedge c = b \wedge c$ et $a \vee c = b \vee c \Rightarrow a = b$ » entraîne la modularité. En posant

$$\begin{aligned}
 x &= (a \vee b) \wedge (c \vee (a \wedge b)) = ((a \vee b) \wedge c) \vee (a \wedge b) \text{ et } y = (b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c)) = \\
 &= ((b \vee c) \wedge a) \vee (b \wedge c)
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} b \wedge x &= b \wedge (a \vee b) \wedge (c \vee (a \wedge b)) \\ &= b \wedge (c \vee (a \wedge b)) \\ &= (b \wedge c) \vee (a \wedge b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \wedge y &= b \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c)) \\ &= b \wedge (a \vee (b \wedge c)) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

D'où $b \wedge x = b \wedge y$.

De même, par dualité, on a $b \vee x = b \vee y$, et donc $x = y$.

Si l'on écrit $a \wedge x = a \wedge y$ en tenant compte des expressions de x et de y , on a

$$\begin{aligned} a \wedge x &= a \wedge (a \vee b) \wedge (c \vee (a \wedge b)) \\ &= a \wedge (c \vee (a \wedge b)) \\ &= (a \wedge c) \vee (a \wedge b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge y &= a \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c)) \\ &= a \wedge (b \vee c) \end{aligned}$$

On obtient donc $(a \wedge c) \vee (a \wedge b) = a \wedge (b \vee c)$.

7.2.3.5. Théorème.

Dans un treillis distributif, les compléments, quand ils existent, sont uniques.

7.2.3.6. Définition.

Un treillis distributif avec un élément nul et un élément unité dans lequel tout élément admet un complément est appelé treillis de Boole.

7.2.3.7. Exemple.

Le treillis de la Figure 7.5 est un treillis de Boole.

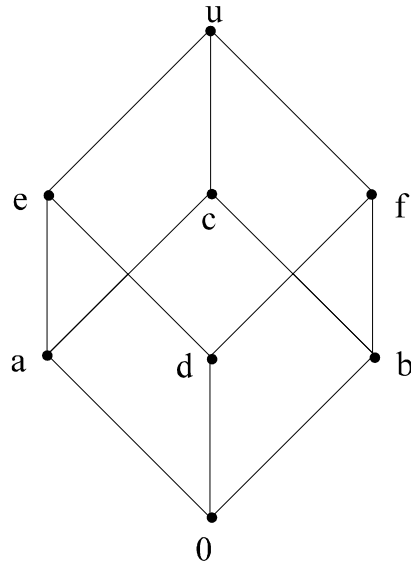


Figure 7.5: Treillis de Boole

7.2.3.8. Théorème.

Soient a et b deux éléments d'un treillis distributif borné. Si a et b ont des compléments, il en est de même de $a \wedge b$ et de $a \vee b$. Plus précisément,

- $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
- et
- $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

Ces deux équations sont connues sous le nom de lois de De Morgan.

preuve:

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) &= ((a \wedge b) \wedge \bar{a}) \vee ((a \wedge b) \wedge \bar{b}) \\
 &= (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \\
 &= 0 \vee 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee (a \wedge b) &= ((\bar{a} \vee \bar{b}) \vee a) \wedge ((\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b) \\
&= (\bar{a} \vee \bar{b} \vee a) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee b) \\
&= u \wedge u \\
&= u
\end{aligned}$$

On obtient $a \vee b$ par dualité.

7.2.3.9. Corollaire.

Soient a et b deux éléments d'un treillis distributif borné. Si a et b ont des compléments et $a \leq b$, alors $\bar{a} \geq \bar{b}$.

preuve:

$$\begin{aligned}
a \leq b &\Rightarrow a \wedge b = a \\
&\Rightarrow \overline{a \wedge b} = \bar{a} \\
&\Rightarrow \bar{a} \vee \bar{b} = \bar{a}
\end{aligned}$$

Et par la suite

$$\begin{aligned}
\bar{b} &= \bar{b} \wedge (\bar{b} \vee \bar{a}) \\
&= \bar{b} \wedge \bar{a}
\end{aligned}$$

D'où

$$\bar{a} \geq \bar{b}$$

7.2.3.10. Définition.

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles, chacun totalement ordonné par une relation $\leq$. Alors l'ensemble produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est ordonné et forme un treillis appelé treillis vectoriel. La relation d'ordre de ce treillis est la relation de domination définie par:

$$- a \leq b \Leftrightarrow a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n; \text{ avec } a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ et } b = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

7.2.3.11. Exemple.

Le treillis dont le graphe est donné par la Figure 7.6 est un treillis vectoriel, avec $E_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ et $E_2=\{b_1,b_2,b_3\}$. Sur cette figure, 11 représente (a_1,b_1) , 12 représente (a_1,b_2) , ainsi de suite.

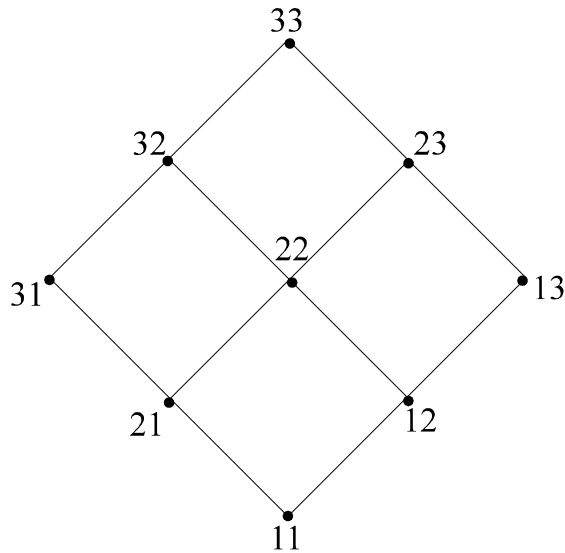


Figure 7.6: Treillis vectoriel

7.3. Groupoïde.

7.3.1. Treillis multiplicatif.

7.3.1.1. Définition.

On appelle treillis multiplicatif ou groupoïde réticulé, et on note $(E, \wedge, \vee, *)$, un treillis $(E, \wedge, \vee)$ dans lequel on a défini une troisième opération, appelée multiplication, notée $*$ et qui satisfait aux conditions suivantes:

- $a*b = b*a$ (commutativité)
- $a*(b*c) = (a*b)*c$ (associativité)
- $a*(b \wedge c) = a*b \wedge a*c$ (distributivité de $*$ par rapport à $\wedge$)
- $a*(b \vee c) = a*b \vee a*c$ (distributivité de $*$ par rapport à $\vee$)

7.3.1.2. Proposition.

Dans un treillis multiplicatif, la multiplication est isotone par rapport à la relation d'ordre du treillis, i.e. pour tout triplet (a,b,c) ,

$$- a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c$$

preuve:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a \wedge b = a \\ &\Rightarrow a * c = (a \wedge b) * c = a * c \wedge b * c \\ &\Rightarrow a * c \leq b * c \end{aligned}$$

7.3.1.3. Remarque.

La distributivité de la multiplication par rapport à l'intersection et à l'union entraîne la distributivité de la multiplication par rapport à toute intersection ou union finie, i.e.

$$\begin{aligned} - a * (\bigwedge_{i=1}^n a_i) &= \bigwedge_{i=1}^n (a * a_i) \\ - a * (\bigvee_{i=1}^n a_i) &= \bigvee_{i=1}^n (a * a_i) \end{aligned}$$

7.3.1.4. Proposition.

Soit $(E, \wedge, \vee, *)$ un treillis multiplicatif. Alors pour tout couple d'éléments (a,b) de E , on a:

$$- (a \wedge b) * (a \vee b) = a * b$$

preuve.

$$\begin{aligned} (a \wedge b) * (a \vee b) &= (a * (a \wedge b)) \vee (b * (a \wedge b)) \\ &\leq a * b \end{aligned}$$

D'autre part,

$$a \leq a \vee b \Rightarrow a * b \leq b * (a \vee b)$$

et

$$b \leq a \vee b \Rightarrow a * b \leq a * (a \vee b)$$

Ces deux inéquations donnent

$$a*b \leq (a*(a \vee b)) \wedge (b*(a \vee b)) = (a \wedge b)*(a \vee b)$$

$$\text{D'où } (a \wedge b)*(a \vee b) = a*b$$

7.3.1.5. Définition.

Soit $(E, \wedge, \vee, *)$ un treillis multiplicatif. On appelle élément unité, un élément noté 1 tel que

$$- a*1 = a \quad \forall a \in E.$$

On appelle élément zéro, un élément noté 0 tel que

$$- a \geq 0 \text{ et } a*0 = 0 \quad \forall a \in E.$$

7.3.1.6. Définition.

Soit $(E, \wedge, \vee, *)$ un treillis multiplicatif ayant un élément unité. On appelle élément entier, un élément inférieur ou égale à 1. On appelle élément positif, un élément supérieur ou égal à 1

Dans un treillis multiplicatif ayant un élément unité, on peut associer à tout élément a , les éléments $a^+ = a \vee 1$ et $a^- = a \wedge 1$. Par définition, a^+ est positif et a^- est entier.

7.3.1.7. Proposition.

Dans un treillis multiplicatif ayant un élément unité, tout élément est produit d'un élément positif et d'un élément entier. Plus précisément, pour tout élément a du treillis, on a

$$- a = a^+ * a^-$$

preuve:

$$\begin{aligned} a^+ * a^- &= (a \vee 1) * (a \wedge 1) \\ &= a * 1 \\ &= a \end{aligned}$$

7.3.1.8. Remarque.

Un élément zéro, lorsqu'il existe, est aussi un élément nul du treillis. En effet,

$$0 \leq a \Rightarrow a \wedge 0 = 0$$

et

$$a \vee 0 = a \vee (a \wedge 0) = a$$

Par ailleurs, un élément unité, lorsqu'il existe, est unique. En effet, s'il existe deux éléments unités 1 et 1', alors

$$a * 1 = a \quad \forall a \in E \quad \text{et} \quad a * 1' = a \quad \forall a \in E$$

D'où

$$1' * 1 = 1' \quad \text{et} \quad 1 * 1' = 1$$

Donc $1 = 1'$.

7.3.1.9. Exemple.

Considérons l'ensemble E des fonctions réelles strictement positives, définies sur le segment $[0,1]$ et ordonné par $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$. On pose $(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$, $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$ et $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Alors l'ensemble $(E, \wedge, \vee, *)$ ainsi définit a une structure de treillis multiplicatif.

7.3.1.10. Définition.

Dans un treillis multiplicatif avec élément unité 1, on dit que deux éléments a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a \vee b = 1$.

7.3.1.11. Théorème.

Si deux éléments a et b d'un treillis multiplicatif sont premiers entre eux, alors $a \wedge b = a * b$

preuve:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a \wedge b) * 1 \\ &= (a \wedge b) * (a \vee b) \\ &= a * b \end{aligned}$$

7.3.1.12. Théorème.

Dans un treillis multiplicatif, si a et b sont premiers entre eux et si c est entier, alors $a * c = b \Rightarrow c = b$.

preuve.

$$\begin{aligned} c &= (a \vee b) * c \\ &= a * c \vee b * c \\ &= b \vee b * c \\ &= b * 1 \vee b * c \\ &= b * (c \vee 1) \\ &= b \end{aligned}$$

7.3.1.13. Théorème.

Soient a , b et c trois éléments d'un treillis multiplicatif. On suppose que a et b d'une part, a et c d'autre part, sont premiers entre eux. Alors a et $b * c$ d'une part, a et $a \wedge c$ d'autre part sont premiers entre eux.

preuve.

On a $a \vee (b * c) \leq 1$ car a, b et c sont entiers.

Or $(a \vee b) * (a \vee c) = 1 = a^2 \vee (a * c) \vee (a * b) \vee (b * c)$

Et comme $a^2 \leq a$, $a * c \leq a$, $a * b \leq a$, on a $1 \leq a \vee (b * c)$

d'où $a \vee (b * c) = 1$.

D'autre part, on sait que $b * c \leq b \wedge c$,

on a donc $a \vee (b * c) = 1 \leq a \vee (b \wedge c)$.

Mais a et $b \wedge c$ sont entiers, cela entraîne $1 \geq a \vee (b \wedge c)$

D'où $a \vee (b \wedge c) = 1$.

7.3.2. Groupoïde résiduel réticulé.

7.3.2.1. Définition.

Soient a et b deux éléments d'un treillis multiplicatif. On appelle résiduel de b par rapport à a , et on note $a|b$, le plus grand élément t , s'il existe, tel que $a*t \leq b$.

Un treillis multiplicatif dans lequel les résiduels existent pour tout couple d'éléments s'appelle treillis multiplicatif résidué.

7.3.2.2. Propriétés.

Dans un treillis multiplicatif résidué, on a les propriétés suivantes:

- i)- $a \leq b \Rightarrow c|a \leq c|b$
- ii)- $a \leq b \Rightarrow a|c \geq b|c$
- iii)- S'il existe un élément c tel que $b = a*c$, alors $a*(a|b) = b$
- iv)- $b \leq a|(a*b)$
- v)- $a|(b|c) = (a*b)|c$
- vi)- $a \leq (a|b)|b$
- vii)- $a|b = ((a|b)|b)|b$

preuve:

- i)- on a par définition, $c*(c|a) \leq a$
or $a \leq b$, donc $c*(c|a) \leq b$
d'où $c|a \leq c|b$
- ii)- on a $b*(b|c) \leq c$.
de $a \leq b$, il résulte que $a*(b|c) \leq b*(b|c) \leq c$
d'où $b|c \leq a|c$
- iii)- Par définition du résiduel, $a*(a|b) \leq b$

d'autre part,

$$\begin{aligned} a*c = b &\Rightarrow c \leq a|b \\ &\Rightarrow a*c \leq a*(a|b) \\ &\Rightarrow b \leq a*(a|b) \end{aligned}$$

d'où légalité $b = a*(a|b)$.

iv)- Par définition, $a|(a*b) = \max(a*t \leq a*b)$

or $a*b \leq a*b$, d'où $b \leq a|(a*b)$

v)- Posons $A = \{x \in E / a*t \leq b|c\}$ et $B = \{x \in E / a*b*t \leq c\}$

alors les ensembles E et F ont les mêmes éléments, et donc la même borne supérieure.

En effet,

$$\begin{aligned} u \in E &\Rightarrow a*u \leq b|c \\ &\Rightarrow a*b*u \leq b*b|c \leq c \\ &\Rightarrow u \in F \end{aligned}$$

réciroquement,

$$\begin{aligned} u \in F &\Rightarrow a*b*u \leq c \\ &\Rightarrow a*u \leq b|c \\ &\Rightarrow u \in E \end{aligned}$$

vi)- On a

$$\begin{aligned} a*b \leq b &\Rightarrow b \leq a|b \\ &\Rightarrow b \leq (a|b)|b \end{aligned}$$

vii)- D'après la propriété (ii), d'une part

$$a \leq (a|b)|b \Rightarrow a|b \leq ((a|b)|b)|b$$

d'autre part, en posant $a^* = a|b$ dans la propriété (vi), on a $a|b \leq ((a|b)|b)|b$

d'où l'égalité, $a|b = ((a|b)|b)|b$

7.3.2.3. Théorème.

Dans un treillis multiplicatif résidué, on a

$$- x = (x|b)|b \Leftrightarrow \exists a \text{ tel que } x = a|b$$

preuve:

D'après la propriété (vii), la condition est suffisante. Elle est évidemment nécessaire car si $x = (x|b)|b$, en posant $a = (x|b)$, on a $a|b = (x|b)|b = x$.

7.3.2.4. Propriétés.

Soient a, y_1 et y_2 trois éléments d'un treillis multiplicatif résidué. Alors

$$- a|(y_1 \wedge y_2) = (a|y_1) \wedge (a|y_2)$$

Et si le treillis est complet, on a

$$- a|(\bigwedge_{i \in I} y_i) = \bigwedge_{i \in I} (a|y_i)$$

où y_i est un élément quelconque d'un sous-ensemble du treillis indicé par I .

preuve:

$$\text{Posons } q = a|(\bigwedge_{i \in I} y_i) \text{ et } r = \bigwedge_{i \in I} (a|y_i).$$

La relation $a*q \leq \bigwedge_{i \in I} y_i$ entraîne $a*q \leq y_i$ pour tout $i \in I$,

donc $q \leq a|y_i$ pour tout $i \in I$,

et par la suite, $q \leq \bigwedge_{i \in I} (a|y_i) = r$.

Inversement,

de $r = \bigwedge_{i \in I} (a|y_i)$, résulte $r \leq a|y_i$ pour tout $i \in I$, i.e. $a*r \leq a*(a|y_i) \leq y_i \quad \forall i \in I$

Donc $a*r \leq \bigwedge_{i \in I} y_i$, et par la suite, $r \leq a|\bigwedge_{i \in I} y_i$

D'où $q = r$.

7.3.2.5. Propriété.

Soit x_1, x_2 et b trois éléments d'un treillis multiplicatif résidué. Alors

$$- (x_1 \vee x_2) | b = (x_1 | b) \wedge (x_2 | b)$$

Et si le treillis est complet, on a

$$- (\bigvee_{i \in I} x_i) | b = \bigwedge_{i \in I} (x_i | b)$$

où x_i est un élément quelconque d'un sous-ensemble du treillis indicé par I .

preuve:

$$\text{Posons } q = (\bigvee_{i \in I} x_i) | b \text{ et } r = \bigwedge_{i \in I} (x_i | b).$$

$$\text{On a } q * (\bigvee_{i \in I} x_i) \leq b,$$

et en particulier, $x_i * q \leq b$, i.e. $q \leq x_i | b \quad \forall i \in I$,

$$\text{donc } q \leq \bigwedge_{i \in I} (x_i | b) = r$$

Réciproquement, on a pour tout $i \in I$, $r \leq x_i | b$,

ce qui implique $x_i * r \leq b$ et par la suite $\bigvee_{i \in I} (x_i * r) \leq b$,

d'où en vertu de la distributivité, $(\bigvee_{i \in I} x_i) * r \leq b$

c'est à dire $r \leq (\bigvee_{i \in I} x_i) | b = q$.

Chapitre 8

8. Annexe b: Tableau de données

Toutes les valeurs de référence ont été multipliées par 10.

Num	SEXE	GRADE	FORMATION	FARINE	BOUILLIE	FRUIT	EAU	MESS AMB	MESS INJ	MESS EXC	BIER	ALIM BB	ALIM MM	FREQ TT	TRAVAIL
1	0	0	10	7	7	2	10		0		5	2	10	10	7
2	10	10	10	0	0	0	2		8				10	10	10
3	0	10	0	0	0	0	7	3			0	0	0	10	3
4	0	0	0	7	7	10	5		0		5	10	10	10	3
5	0	0	0	8	3	8	8	0	0	0	0	8	10	10	10
6	0	0	0	0	0	3	7	2	7	8	0	0	10	10	7
7	0	10	10	0	0	7	7	3			0	10	10	10	10
8	0	0	0	7	7	7	8	8	10	10	0	7	10	10	
9	10	0	0	0	0	5	5	3			0		10	10	7
10	10	0	0	0	0	0	0	2	2	10	0	8	8	10	10
11	10	0	0			10	10		0		0	10	10	0	3
12	0	0	0		7	10	10			0		10		10	10
13	0	0	10	0	0	10	10	0	0	0	10	0	10	10	10
14	0	0	0	0	0	7	8	0	0	0	0	0	10	10	10
15	0	10	10	0	0	0	0	10	10				10	10	7
16	0	0	10	0	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	10
17	0	0	0	0	0	3	8	2	2	2	0	2	10	10	7
18	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	8	10	8	0
19	0	10	10	0	0	0	0	10	10	7	0	0	0	10	0
20	0	0	10	2	8	8	2	0	8	7	0	7	10	10	10
21	0	0	0	7	0	5	7	0	0	0	0	3	2	5	3
22	0	0	0	0	8	8	7	8	10	8	0	0	10	10	10
23	0	0	0	5	7	5	8	3	3	7	0	7	10	10	10
24	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	5	5	0	0	10
25	0	0	0	0	0	7	7	0	10	0	0	10	10	10	7
26	0	0	10	0	0	8	5	5	7	7	0	2	10	10	10
27	0	10	10	0	0	7	5	10	10	5	0	0	10	10	7
28	10	0	10	8	10	8	8	8	8	8	0	10	10	10	10
29	0	0	0		8	7			8				10	10	10
30	10	0	10		7	10	10		0		7	8			7
31	10	10	0	0	0	8	10		0			10			7
32	0	10	10			10	8			8				10	7
33	0	0	0	8	8	10	10	0	0	0	0	7	10	10	7
34	0	0	0	0	0	7	7	0	0	0	0	7	10	10	7
35	0	0	0	0	0	8	0	10	10	10	0	0	10	10	10
36	0	10	0	0	0	7	0	10	10	10	0	0	10	10	7
37	0	0	0	0	0	7	0	10	10	10	0	0	10	10	7
38	0	0	0	0	0	7	0	2	3	3	0	2	10	10	10
39	0	0	0	0	0	0	0	10	0	10	0	0	10	10	10
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10

Num	CON LM	TASSE	SOURCE	ROBINET	MINERAL	SUP LAIT	SUP BOU	SUP EAU	LM RARE	POITRINE	LM GROSS	LM VIH	LM TUBER	LM DIAB	LM SYPHI	LM ABCES
1	3	0	0	10	7	5	0	10	0	0	0	10	10	10	10	0
2	7	2			7			8	7	7	7	7	8	10	8	0
3	7	0	0	3	7	5	5	5	10		5	0	0	5	0	5
4	10	7	2	3	10	10	0	10	8	0		3	0	2	5	2
5	7	8	5	8	10	5	5	10	2	8	2	0	0	3	7	0
6	0	0	0	2	8	0	0	8	0	3	8	3	2	10	10	0
7	7	8	7	10	7	0	0	0	7	10	8	7	0	7	7	7
8	10	3	0	0	10	0	0	10	8	7	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	2	5	0	0	0	0	5		0	0	5	5	5
10	3	7	0	7	10	10	0	8	8	8	3	3	0	8	8	2
11	10	0			10			0	10	0			0			0
12	0	0	10	10	10	10			0	0	0	0	0	0	0	0
13	7	10	10	0	0	0	0	0	10	0		0			5	
14	10	0	10	10	10				10	10	0					
15	3		0	0	0	0	0	0	3	5						
16	0		0	8	10	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0
17	0	8	0	2	7	2	2	5	10	10	7	0	0	8	10	0
18	0	2	0	0	8	0	0	10	7	3	0	0	0	3	3	0
19	3	10	5	5	5	0	0	0	0	10	5	0	0	5	5	10
20	0	10	0	2	7	7	0	8	0	3	2	0	0	0	0	0
21	10	3	5	5	10	0	0	0	7	3	7	2	2	2	3	3
22	3	10	0	0	10	0	0	0	8	10	2	0	0	5	5	0
23	3	3	7			0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0
24	10	10	3	7	7	0	0	0	10	10	7	0	0	0	0	0
25	3	5	0	0	10	0	0	7	8	2		0	0	10	10	0
26	0	2	0	0	7	5	5	5	8	3	5		0	2	5	0
27	3	10	5	5	5	0	0	0	7	3	10	2	3	10	10	10
28	10		3	7	10	8	0	8	10	3	0	0	0	3	7	0
29	3	0			7			7	2	3	3	0	0	0	0	0
30	10	0	10	10	10			7	10	5		0	0	3	5	0
31	10	0	10	10	7	0	0	10	10	8	0	0	8	8	8	0
32	10	3			10	10	10		10	8	0		0			0
33	0	0	0	2	10	0	0	3	0	7	3	7	2	10	10	2
34	0	3	0	8	8	0	0	0	0	7	7	8	0	0	7	0
35	3	10	0	0	0	0	0	0	2	3	3	3	0	2	8	2
36	10	10	0	0	0	0	0	0	3	8	10	5	0	10	10	3
37	0	2	0	0	0	0	0	0	0	10	3	3	8	8	8	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	3	2	2	3	2	2
39	7	10	2	2	2	0	0	0	8	8	10	10	0	10	10	10
40	0	5	0	0	0	10	10	10	0	7	7	0	0	0	10	0

Num	SEXE	GRADE	FORMATION	FARINE	BOUILLIE	FRUIT	EAU	MESS AMB	MESS INJ	MESS EXC	BIER	ALIM BB	ALIM MM	FREQ TT	TRAVAIL
41	0	10	0	0	0	8	0	0	0	0	7	7	10	10	10
42	0	0	10	0	0	0	7	8	10	0	2	0	10	10	7
43	0	0	0	2	7	8	10	0	0	0	0	2	10	10	10
44	0	0	0	7	8	10	10	3	8	8	0	8	0	10	10
45	0	0	10	0	0	0	0	2	2	2	0	0	10	10	10
46	0	0	0	5	5	7	7	3	3	3	0	3	10	10	7
47	0	0	0	0	0	0	0	10	10	8	2	5	10	10	10
48	0	0	0	8	0	2	10	0	0	0	0	3	10	10	7
49	0	0	10	0	0	0	0	0			0	0	0	10	3
50	0	0	0	7	0	7	7	0			3		0	0	3
51	0	10	10	0	0	0	0		10					10	3
52	0	0	10	0	0	7	7		0		0	0	10	10	7
53	10	0	10	0	2	2	8	2	3	0	2	7	8	10	10
54	10	0	0	2	2	10	10	3	2	7	0	7	10	3	3
55	0	0	10	0	0	0	7	0	3		7	8	10	10	10
56	0	0	0	0	0	3	8	2	0	10		0	10	10	7
57	0	0	10	0	0	7	10	0	2	0	0		10	8	7
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	10	10	10
59	10	0	10	0	0	8	8	0			0	0	7	10	3
60	0	0	0		8	8	7		0		3	10	8	10	3
61	0	10	0	0	0	0	8	0	0	8		0		10	7
62	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	10	10	7
63	0	0	10	0	0	7	7	0	0	0	0	0	10	10	7
64	0	0	0	0	0	10	10	0	0	0	0	7	10	10	10
65	0	0	0	0	0	2	8	0	0	0	0	2	10	10	10
66	0	10	0	0	0	7	10	0	0	0	0	3	10	10	10
67	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	10	10	7
68	10	10	10	8		8	8		2		0		10	10	7
69	0	10	10	0	0	0	0	3	3	0	0	0	10	10	7
70	0	0	0		7	7	7	2	0	0		7	8	8	7
71	0	0	0	10	10	10	10		2			10	10	10	10
72	10	10	10	8	7	10	10		0			7	10	10	7
73	10	0	0	0	0	10	10	0			0	0	10	10	
74	10	10	10	0	0	0	10		0		0	7	10	10	10
75	0	0	0	7	7	8	10	0	0	0	0	2	10	8	0
76	10	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	10	10	7
77	10	0	10	0	0	7	0	10	10	10	0	0	10	10	7
78	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	5	10	5	10	10
79	10	10	10	0	0	3	0	10	10	10	0	0	0	10	
80	0	0	10	0	2	7	8	5	5	5	0	7	10	10	7

Num	CON LM	TASSE	SOURCE	ROBINET	MINERAL	SUP LAIT	SUP BOU	SUP EAU	LM RARE	POITRINE	LM GROSS	LM VIH	LM TUBER	LM DIAB	LM SYPHI	LM ABCES
41	0	7	0	0	7	3	0	3	2	5	3	0	0	7	10	0
42	3	0							0	10	10	0	0	0	0	0
43	10	0	0	0	0	0	0	0	10	10	7	0	0	0	0	0
44	0	3	0	2	10	3	7	2	0	2	8	0	0	2	0	2
45	10	10	0	0	10	5	5	5	10	10	10	0	0	0	0	2
46	10	0	8	8	8	5	5	5	8	3	2	0	0	0	0	0
47	10	3	0	0	0	0	0	0	10	10	0	0	0	7	8	0
48	0	3	0	0	10	0	0	0		8	8	2	0	7	7	0
49	0	10	0	0	5	5	5	5	0	5	10	2	8	10	10	10
50	0	10	3	8	8	0	0	10	8	10	10	0	0	0	0	8
51	3	7	0	2	3	0	0	0	8	3	10	0	0	10	10	10
52	3	3	8	2	10	0	7	8	8	8	0	0	0	0	0	0
53	3	0	2	0	10	0	2	10	8	10	10	10	0	2	10	0
54	7	7	0	2	8	0	0	8	2	2	3	0	0	2	2	0
55	0	8	0	8	10	0	0	7	7		10	10	0	10	10	0
56	0	0	2	3	8	0	0	8	0	3	8	0	0	0	2	0
57	0	0	0	0	10	8	8	3	0	3	7	0	0	7	8	0
58	10	2	0	0	10	8	0	0	7	0	10	0	0	10	10	0
59	0	0	0	2	8	0	0	8	8	7	3	0	0	0	0	0
60	10	8	2	3	10	10	7	7	8	3	0	0	0	2	2	10
61	10	0	0	8	8	0	0	0	10	10		0	0	0	8	0
62	10	0	3	7	8	0	0	0	10	10	0	7	0	0	8	0
63	10	0	0	7	10	2	0	7	10	3	10	10	0	3	8	7
64	0	8	7	0	10	0	0	8	0	2	2	7	2	10	10	0
65	0	10	0	2	8	0	0	0	0	8	10	10	5	10	10	2
66	0	3	0	2	10	0	0	10	0	7	10	2	2	10	10	0
67	10	0	8	8	8	0	0	0	10	10	0	0	0	0	8	0
68	0	8			10		10		0	8	0		0			0
69	3	8	0	0	7	0	0	0	8	7	7	7	7	7	7	7
70	10	0	10	10	10	0	0	0	7	7	0	0	0	0	0	0
71	0	0							0	3			0	0		3
72	0	0			10		0		0	10		2	2		2	2
73	10	0	0	0	10	0	7	7	7	7	7	0	3	5	5	0
74	10	0	0	3	10	0	0	0	10	5	3	0	0			2
75	3	0		7	10	0	0		3	2	8	0	0	5	5	0
76	0	0	0	0	10	0	0	0	2	10	7	0	0	0	10	0
77	0	10	3	3	7	0	0	0	2	10	10	10	2	10	10	0
78	3	8	0	2	5	5	5	5	7	3	5	0	2	5	5	5
79	0	10	0	0	2	0	0	0	7	5	10	2	10	10	10	10
80	10	3	10	10	10		2	8	8	2	5	5	0	5	0	2

Num	SEXE	GRADE	FORMATION	FARINE	BOUILLIE	FRUIT	EAU	MESS AMB	MESS INJ	MESS EXC	BIER	ALIM BB	ALIM MM	FREQ TT	TRAVAIL
81	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	0	0	8	10	10
82	0	10	0	0	7	10	8	0	0	0	0	8	10	10	3
83	0	10	10	0		3	2	0	0	0	0	3	10	10	7
84	10	10	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	8	10	10
85	0	10	0	2	2	3	8	7	8	3	0	7	10	10	10
86	0	10		0	0	7	8	2	2	2	2	2	8	8	3
87	10	10	0	0	2	2	8	5	5	5	0	2	8	10	0
88	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	7	7	10	10	7
89	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	5	5	0	0	3
90	0	0	10	0	0	7	7	3	3	3	0	3	10	10	10
91	10	10	0	3	8	2	10	0	0	2	0	8	8	5	10
92	10	0		0	0	0	0	0	0	10	8	10	10	10	7
93	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	0	3	8	10	10
94	0	0	10	0	0	10	0	10	10	10	0	0	10	10	10
95	0	0	10	0	0	0	7	10	3	3	5	5	10	10	10
96	10	10	0	3	3	10	10	0	0	0	5	7	10	10	3
97	10	10	10	0	0	0	0	10	10	3	0	0	10	10	10
98	10	0	0	0	5	10	7	2	3	3	0	10	10	10	7
99	10	10	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
100	0	0	0	5	5	7	5		3	2			2	0	3
101	0	10	0	7	7	8	8	0	0	0	5	8	8	10	3
102	0	0	0	0	0	7	10	3	3	3	0	7	10	10	3
103	0	10	0	0	2	10	10	2	2	2	0	7	10	10	10
104	10	10	0	2	2	5	7	2	2	2	5	8	7	8	3
105	10	0	10	0	0	10	10	0	0	0	10	10	10	10	10
106	0	0		2	7	0	8		5			7	10		7
107	10	0	10	0	0	10	10		0				10	10	10
108	10	0	10	10	10	10	10	0	10	0	0	7	10	10	3
109	10	0	10	0	0	0	0		0				10	10	3
110	10	0	10	7	8	10	8	2	2	0	0	8	10	8	7
111	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	0	7	10	10	10
112	0	0	10	8	8	8		3	5	0	0	0	0	10	10
113	0	10	0	0	0	5	8	0	2	2	5	2	10	10	7
114	0	10	10	0	0	0	0	10	10	8	5	5	5	0	3
115	0	0	10	0	0	7	8	0	0	0	0	2	8	10	10
116	10	0	0	0	0	0	0	0	3	8	0	0	10	10	7
117	10	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	8	10	7
118	0	0	0	0	0	7	7	0	0	0	2	5	10	10	10
119	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	5	8	10	10	10
120	0	0	0	0	0	7	0	2	10	0	5	7	10	10	10

Num	CON LM	TASSE	SOURCE	ROBINET	MINERAL	SUP LAIT	SUP BOU	SUP EAU	LM RARE	POITRINE	LM GROSS	LM VIH	LM TUBER	LM DIAB	LM SYPHI	LM ABCES
81	7	10	0	0	0	0	0	0	2	5	8	5	0	10	10	10
82	3		10	10	10	0	0	8	10	2	10	0	0	8	0	0
83	7	10	8	0	8	8	10	8	7	8	7	7	8	10	10	8
84	3	8	0	0	0	0	0	0	8	5	8	0	2	3	2	8
85	3	10	0	0	8	0	0	7	3	7	10	2	0	0	8	2
86	0	0	7	7	8	5	5	8	2	3	10	0	10	10	10	10
87	10	10	8	5	10	0	2	7	7	5	5	2	2	7	0	0
88	3	0	0	0	3	0	0	10	3	3	10	5	2	10	10	0
89	0	8	0	2	10	0	0	0	3	3	8	0	0	8	8	0
90	0	10	0	0	7	0	0	0	10	5	10	0	10	10	10	10
91	7	8	7	0	10	3	0	10	2	2	0	0	0	8	5	0
92	7	0	10	10	10	7	7	10	8	3	10	0	0	5	5	0
93	3	10	0	0	0	0	0	0	3	7	10	3	0	8	8	5
94	10	8	0	0	0	0	0	0	7	0	10	5	0	10	10	3
95	3	7	2	3	7	5	5	5	10	8	5	8	5	5	10	5
96	0	10	10	5	10	10	10	10	0	5	5	5	10	10	10	3
97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	10	5	0	10	10	0
98	10	7	7	8	10	0	5	10	8	2	2	0	0	2	2	2
99	3	10	0	0	0	0	0	0	3	5	10	5	0	10	10	7
100	0	0	0	2	10	0	0	7	5	2	3	0	0	3	3	0
101	10		0	3	10	5	10	10	10	3	5	5	2	10	10	0
102	0	5	0	2	7	0	7	0	2	0	0	0	0	3	0	0
103	0	10	0	8	10	0	0	8	2	2	10	0	0	10	0	0
104	0	0	0	0	10	5	0	10	2	3	2	3	2	5	5	0
105	10	0	10	0	10	10		10	10	0	0	0	0	0	0	0
106	7	2	2	2	8	7	2	5	8	3	7	7	3	3	8	2
107	10	5			10			10	10	5	10	0	0	5	10	0
108	0	7	0	2	10	7	0	10	2	7	2	0	0	0	0	0
109	3	0			10	0	0	0	10	0	2	0	0	0	0	0
110	0	5	2	3	10	2	2	7	8	5	3	2	0	2	2	0
111	10	0	3	5	7	7	10	0	10	8	7	0	0	0	0	0
112	0	7	8	8	10	0	0	0	0	5	10	0	0	5	0	2
113	0	2			8	2	0	3	7	8	8	0	5	5	5	0
114	7	8	0	0	0	5	5	5	10		3	5	0	5	0	3
115	0	7	7	8	10	0	0	0	2	5	10	0	0	5	10	3
116	10	7	0	0	5	0	0	0	10	5	8	5	10	10	10	0
117	10	8	0	5	5	0	0	5	8	8	8	8	0	8	8	0
118	3	5	0	8	8	0	0	5	0	5	8	10	10	10	10	0
119	0	8	7	7	10	0	0	0	0	8	8	0	0	8	8	5
120	7	8	7	7	7	0	0	0	8	2	3	0	0	3	10	3

Num	SEXE	GRADE	FORMATION	FARINE	BOUILLIE	FRUIT	EAU	MESS AMB	MESS INJ	MESS EXC	BIER	ALIM BB	ALIM MM	FREQ TT	TRAVAIL
121	0	0	0	0	0	7	8	0	0	0	0	7	10	3	10
122	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	0	10	0
123	0	10	0	7	2	7	7	5	8	5	0	8	10	8	3
124	0	0	0	5	5	5	5	0	0	0	0	10	10	10	7
125	0	0	0	0	0	0	0	5	0	7	0	8	10	10	7
126	10	10	0	0	0	7	8	5	7	3	5	7	5	10	10
127	0	0	0	0	0	7	7	0	10	3	0	8	10	10	3
128	0	0	0	0	0	5	5	3	8	3	0	5	10	10	7
129	0	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	0	10	10
130	10	10	0	0	5	7	8	0	0	0	0	5	10	10	10
131	0	10	0	0	0	5	5	10	10	0	0	0	10	10	10
132	10	10	0		7	7	10	5	7	3		5	10	5	10
133	10	10	0	0	0	5	5	3	5	3	0	0	0	10	7
134	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	8	7
135	10	0	10	0	7	8	8	0	7		0	7	10	10	10
136	0	0	0	0	0	8	10	2	3	0	0	3	8	10	10
137	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
138	0	0	0	7	7	8	10	3	3	0	0	7	8	10	10
139	10	0	0	0	0	8	3	7	8	3	0	3	10	10	10
140	0	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
141	0	0	0	0	0	7	2	0	10	0	0	8	10	10	7
142	0	0	0	0	0	0	8	2	0	0	2	7	10	10	10
143	10	0	0	7	7	8	8	8	7	8	0	7	8	8	7
144	0	0	10	8	8	8	8	0	0	8	2	8	8	10	7
145	0	0	0	0	0	7	8	0	0	0	0	0	10	10	10
146	0	0	10	0	0	7	8	0	2	0	0	5	10	5	7
147	0	0	0	3	2	8	5	7	10	8	0	2	10	10	7
148	0	0	0	0	0	8	0	10	10	10	0	0	10	10	10
149	0	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	2	2	10
150	0	0	0	0	0	8	8	0	0	0	0	3	8	10	7
151	0	0	0	0	0	10	0	2	2	2	0	7	10	10	10
152	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
153	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	0	10	10	10	10
154	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	7
155	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	0	0	10	10	10
156	0	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
157	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10
158	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	3	10	0
159	10	10	0	7	0	10	10	0	0	0	0	10	10	10	10
160	0	10	0	0	7	0	10	0	0	0	5	8	10	8	7
161	0	0	10	0	0	0	0	10	10	10	0	0	10	10	7

Num	CON LM	TASSE	SOURCE	ROBINET	MINERAL	SUP LAIT	SUP BOU	SUP EAU	LM RARE	POITRINE	LM GROSS	LM VIH	LM TUBER	LM DIAB	LM SYPHI	LM ABCES
121	0	2	7	7	8	0	0	7		3	3	5	5	5	5	0
122	10	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	
123	0	0	7	0	8	3	0	8	2	5	8	5	0	8	8	0
124	10	0	10	10	10	8	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
125	3	0	0	0	8	7	0	0	10	0	8	0	0	0	0	0
126	7	3	7	3	10	2	2	10	7	5	5	2	2	5		3
127	0	8	8	8	8	0	0	7	7	5	0	0	5	8	8	8
128	0	10				0	0	3	2	5	5	0	0	8	8	8
129	3	10	0	0	0	0	0	0	3	10	10	0	10	10	10	10
130	0	7	0	0	10	0	0	7	0	5	7	3	3	10	3	0
131	0	7	0	2	3	5	5	5		5	5	0	5	10	10	0
132	0	8				0	0	0	5	2	0	0	0	5	5	0
133	7	3	5	8	10	5	0	5	3	2	8	5	2	10	8	0
134	7	8	0	0	7	2	2	7	8	3	8	8	0	0	8	0
135	10	7			8		7	10	0	3	7	0	0	5	0	0
136	0	3	0	2	10	0	0	0	0	2	7	0	0	8	8	0
137	7	10	0	0	3	0	0	0	7	7	10	3	0	10	10	5
138	0	10	0	0	10	0	0	7	2	3	10	5	2	2	5	5
139	3	5	0	0	8	0	0	0	7	5	3	2	2	2	5	8
140	3	10	0	0	0	0	0	0	7	8	10	3	3	10	10	0
141	0	8	0	0	10	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0
142	0	8	0	3	8	0	0	0	0	8	10	2	0	8	5	0
143	3	0	7	7	7	0	0	7	7	8	8	0	0	2	0	0
144	0	5	0	0	10	0	0	2	0	8	0	0	5	2	5	0
145	0	10	0	2	10	0	0	0	3	3	3	0	0	0	5	5
146	0	5	0	2	10	0	0	7	0	3	8	0	0	0	0	0
147	0	8	0	7	5	0	0	0	7	3	10	10	0	10	8	0
148	7	10	0	0	0	0	0	0	8	7	8	2	0	8	8	3
149	10	10	0	0	0	0	0	0	8	8	8	5	0	0	10	7
150	3	2			8	0	0	0	5	3	8	7	7	10	10	0
151	0	8	3	3	10	0	0	0	0	5	10	8	2	2	10	0
152	10	8	0	0	0	0	0	0	7	8	7	0	0	0	8	2
153	3	10	3	3	3	0	0	0	8	5	10	10	0	5	5	0
154	3	3	0	0	0	0	0	0	8	7	8	0	0	0	0	0
155	7	10	0	0	0	0	0	0	10	7	8	2	0	8	10	7
156	10	10	0	0	0	0	0	0	8	7	10	8	7	8	8	7
157	7	3	0	0	0	0	0	0	8	5	8	0	0	0	8	8
158	7	5	2	2	10	2	0	8	8	3	8	2	5	5	5	2
159	3	7	10	7	10	3	3	10	0	8		0	0	8	8	0
160	3	2	0	2	10	0	0	10	8	3	8	2	8	10	0	0
161	10	10	0	0	0	0	0	0	7	8	10	0	0	10	10	0

Chapitre 9

9. Bibliographie.

- ARRAY J.-P. & DURU G. (1982) : *Fuzzy pretopological structures and formation of coalitions*.
IFAC Conference, Theory and Application of Digital Control, New Delhi, 459-463.
- ARRAY J.-P. ,DURU G., ZIGHED (1990) : *Analyse des données multidimensionnelles (3 tomes)*.
Éditions Alexandre Lacassagne, Lyon.
- BELMANDT Z. (1993) : *Manuel de prétopologie et ses applications*.
Hermès, Paris.
- BENASSENI J. (1986) : *Stabilité de l'analyse en composante principales par rapport à une perturbation des données*.
Revue de Statistique Appliquée, XXXV, 3, 49-64.
- BENER A. (1982) : *Décompositions des interactions dans une correspondance multiple*.
Les Cahiers de l'Analyse des Données, VII, 1, 25-32.
- BENVENUTI P. & VIVONA D. (1990) : *A general information for fuzzy sets*.
Lecture notes in computer science, 521, 307-316.
- BENZÉCRI J.-P. & HAMOUDA I. (1983) : *Information de Shannon et décomposition des interactions dans une correspondance multiple*.
Les Cahiers de l'Analyse de Données, VIII, 1, 11-18.
- BENZÉCRI J.-P. (1977) : *Histoire et préhistoire de l'analyse des données*.
Les Cahiers de l'Analyse de Données, II, 1, 9-40.

- BENZÉCRI J.-P. (1977) : *Sur l'analyse des tableaux binaires associés à une correspondance multiple.*
Les Cahiers de l'Analyse des Données, II, 1, 55-71.
- BENZÉCRI J.-P. (1980) : *Pratique de l'analyse des données (2 tomes).*
Dunod, Paris.
- BENZÉCRI J.-P. (1982) : *L'analyse des données. (2 tomes)*
Dunod, Paris.
- BEZDEK J & HARRIS J. (1978) : *Fuzzy partitions and relations; an axiomatic basic for clustering.*
Fuzzy Sets and Systems, 1, 111-127.
- BIRKHOFF G. (1948) : *Lattice theory.*
American Mathematical Society, New York.
- BOUCHON-MENIER B. (1993) : *La logique floue.*
Presses Universitaires de France, Paris.
- BOURSIN J.-L. & DURU G. (1995) : *Statistique.*
Vuibert, Paris.
- BOURSIN J.-L. (1986) : *Les structures du hasard: Les probabilités et leurs usages.*
Éditions du Seuil, Paris.
- CAILLIEZ F. & PAGES J.-P. PAGES (1976) : *Introduction à l'analyse des données.*
SMASH, Paris.

- CAUSSINUS H. & De FALGUEROLLES A. (1987) : *Tableaux carrés: modélisation et méthodes factorielles.*
Revue de Statistique Appliquée, XXXV, 3, 35-52.
- CAZES P. (1980) : *L'analyse de certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs: Généralisation des propriétés rencontrées dans l'analyse des correspondances multiples.*
Les Cahiers de l'Analyse des Données, V, 4, 387-403.
- CAZES P. (1990) : *Codage d'une variable continue en vue de l'analyse des correspondances.*
Revue de Statistique Appliquée, XXXVIII, 3, 35-51.
- CHAVANCE M. & AMIEL-LEBIGRE F. (1975) : *Sur le codage des données en analyse factorielle des correspondances: Application à un questionnaire.*
Revue de Statistique Appliquée, XXIII, 1, 65-78.
- CHIFFLET R. & GERIN P. (1993) : *Essai de définition de la structure de la qualité de la vie à l'aide de techniques d'analyse de données.*
Revue de Statistique Appliquée, XLI, 1, 5-35.
- CHOLAKIAN V. (1983) : *Sur l'information associée aux différents tableaux binaires issus d'un tableau ternaire.*
Les Cahiers de l'Analyse des Données, VIII, 1, 7-9.
- DARÓCZY Z. (1970) : *Generalized information functions.*
Information and Control, 16, 36-51.
- De LUCA A. & TERMINI S. (1972) : *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory.*
Information and Control, 20, 301-312.

- De LUCA A. & TERMINI S. (1972) : *Algebrai properties of fuzzy sets.*
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 40, 373-386.
- DEFAYS D. (1976) : *Relations floues et analyse hiérarchique des questionnaires.*
Mathématiques et Sciences Humaines, 55, 55-60.
- DENIAU C. & OPPENHEIM G. (1979) : *Effet de l'affinement d'une partition sur les valeurs propres issues d'un tableau de correspondance.*
Les Cahiers de l'Analyse des Données, IV, 3, 289-297.
- DENIMAL J. (1994) : *Analyse des interactions entre k partitions prises 2 à 2: Théorie et application en biologie.*
Revue de Statistique Appliquée, XLII, 1, 19-40.
- DIDAY E. & LEMAIRE J. (1982) : *Éléments d'analyse de données.*
Dunod, Paris.
- DREWNIAK J. (1984) : *Fuzzy relation equations and inequalities*
Fuzzy Sets and Systems, 14, 237-247.
- DUBOIS D. & PRADE H. (1980) : *A theorem on implications defined from triangular norms.*
Stochastica, VIII, 3, 267-279.
- DUBOIS D. & PRADE H. (1980) : *New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators*
Symposium on fuzzy sets: theory and application to policy analysis and information systems, Durham, 59-75.

- DUBOIS D. & PRADE H. (1987) : *Properties of measures of information in evidence and possibility theories.*
Fuzzy Sets and Systems, 24, 161-182.
- DUBOIS D. & PRADE H. (1988) : *Théorie des possibilités.*
Masson, Paris-Milan-Barcelone-Mexico.
- DUBREIL-JACOTIN M.-L. & LESSIEUR L. (1953) : *Théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.*
Gauthier-Villars, Paris.
- DUGUÉ D. (1966) : *Compte-rendu de l'école d'été de l'OTOAN-1965 sur les méthodes combinatoires en théorie de l'information et du codage.*
Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 15, 81-90.
- DUJET C. (1982) : *Separation and information in the setting of fuzzy sets.*
IFAC Conference: Theory and Application of Digital Control, New Delhi.
- DURU G. & J.-P. ARRAY (1976) : *Introduction à la théorie des espaces multiflous.*
Document de Travail de la Faculté de Droit et de Sciences Économiques de Besancon.
- DURU G. (1994) : *Analyses et évaluation en économie de la santé.*
Éditions Hermès, Paris.
- ESCOFIER B. & LEROUX B. : (1975) : *Étude des questionnaires par l'analyse des correspondances; modification du codage des questions ou de leur nombre et stabilité de l'analyse.*
Mathématique et Sciences Humaines, 49, 5-27.

- ESCOFIER B. (1972) : *Étude de trois problèmes de stabilité en analyse factorielle.*
Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, XXI, 3-4, 48.
- FORTET R. & KAMBOUZIA M. (1976) : *Ensembles aléatoires et ensembles flous.*
Publications Économétriques, IX, 1, 1-23.
- GALLEGO F.-J. (1982) : *Codage flou en analyse des données.*
Les Cahiers de l'Analyse des Données, VII, 4, 413-430.
- GENTILHOMME Y. : *Les ensembles flous en linguistiques.*
Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquée, Bucarest, 47-65.
- GOGUEN J.-A. (1967) : *L -Fuzzy Sets.*
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 145-174.
- GOGUEN J.-A. (1969) : *The logic of inexact concept*
Syntheses, 19, 325-373.
- GWÉT H. (1997) : *Fuzzy Questionnaire and Differential Analysis, an Application in Pediatrics.*
Health and System Science, Vol. 1, N° 1, 39-55
- GWÉT H. (1997) : *Normalized Conditional Possibility Distribution and Informational Connection between Fuzzy Variables.*
International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System, Vol. 5, N° 2, 177-198

- GWÉT H. (1997) : *Allaitement maternel exclusif et personnel de santé au Cameroun: évaluation qualitative par la logique floue*
Les Cahiers de la Santé, à paraître
- GWÉT H. (1997) : *Generalized Tchebytchev Distance and Fuzzy Statistical Description*
International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System, à paraître
- HENRY p. & DURU G. (1993) : *La migraine en France: Étude épidémiologique, impact socio-économique et qualité de vie.*
John Libbey Eurotext, Paris.
- HIGASHI M. & KLIR G. (1982) : *On measures of fuzziness and fuzzy complements.*
International Journal of General Systems, 8, 169-180.
- HIGASHI M. & KLIR G. (1982): *Measures of uncertainty and information based on possibility distributions.*
International Journal of General Systems, 9, 43-58.
- HIROTA K. (1981) : *Concepts of probabilistic sets.*
Fuzzy Sets and Systems, 5, 31-46.
- HISDAL E. (1978) : *Conditional possibilities independence and noninteraction.*
Fuzzy Sets and Systems, 1, 283-297.
- JAMBU M. (1978) : *Classification automatique pour l'analyse des données: Méthodes et programmes.*
Bordas, Paris.

JOSHI D. (1959) : *L'information en statistique mathématique et dans la théorie des communications.*

Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, VIII, 2, 86-99.

KALMANSON D. (1973) : *Recherche cardio-vasculaire et théorie des ensembles flous; pour une politique d'ouverture de la recherche médicale.*

Nouvelle Presse Médicale, 2, 2757-2760.

KAMPÉ de FÉRIET J. (1970) : *Mesure l'information fournie par un événement*
Colloque interne du CNRS, Paris

KAMPÉ De FÉRIET J. (1980) : *Une interprétation des mesures de plausibilité et de crédibilité au sens de G. Shafer et de la fonction d'appartenance définissant un ensemble flou au sens de L. Zadeh.*

Publication de l'IRMA, Lille, II, 6, 2.

KANDEL A. & BYATT W. (1978) *Fuzzy sets, fuzzy algebra and fuzzy statistics.*
Proceedings of the IEEE, 68, 1619-1639.

KANDEL A. & YELOWITZ L. (1974) : *Fuzzy chains.*

IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 4, 472-475.

KAUFMANN A. (1975) : *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: Application à la linguistique, à la logique et à la sémantique.*

Masson, Paris.

KAUFMANN A. (1975) : *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: Application à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, aux choix des critères.*

Masson, Paris.

- KAUFMANN A. (1977) : *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: compléments et nouvelles applications.*
Masson, Paris
- KAUFMANN A. (1977) : *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: Éléments théoriques de base.*
Masson, Paris.
- KAUFMANN A. (1987) : *Les expertons.*
Hermes, Paris-Londres-Lausanne.
- KLEMENT E. (1980) : *Fuzzy σ -algebras and fuzzy measurable functions.*
Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 83-93.
- KLEMENT E. (1982) : *Construction of fuzzy σ -algebras using triangular norms.*
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 85, 543-565.
- KLIR G. & MARIANO M. (1987) : *On the uniqueness of possibilistic measure of uncertainty and information*
Fuzzy Sets and Systems, 24, 197-219.
- LEBART L. & MORINEAU A. (1977) : *Techniques de la description statistique.*
Dunod, Paris
- LEBART L. & MORINEAU A. (1982) : *Traitement des données statistiques: Méthodes et programmes.*
Seconde édition, Dunod, Paris
- LERMAN I.-C. (1979) : *Croisement de classifications floues.*
Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, XXIV, 1-2, 13-46.

LERMAN I.-C. (1983) : *Association entre variables qualitatives ordinales nettes ou floues.*

Publication Interne N° 191, Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires, Rennes.

LERMAN I.-C. (1984) : *Justification et validité statistique d'une échelle $[0,1]$ de fréquence mathématique pour une structure de proximité sur un ensemble de variables observées.*

Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, XXIX, 3-4, 27-57.

LERMAN I.-C. (1987) : *Maximisation de l'association entre deux variables qualitatives ordinales.*

Mathématiques et Sciences Humaines, 100, 49-56.

LING C. (1965) : *Representation of associative functions.*

Publication Math. Debrecen, 12, 189-212.

LOWEN R. (1983) : *On $(R(L, \oplus))$.*

Fuzzy Sets and Systems, 10, 203-209.

MOLES A. (1990) : *Les sciences de l'imprécis.*

Édition du Seuil, Paris.

NAKACHE J.-P. (1973) : *Influence du codage des données en analyse factorielle des correspondances; étude d'un exemple pratique médical.*

Revue de Statistique Appliquée, XXI, 2, 57-70.

NGUYEN H. (1974) : *Sur les mesures d'information de type Inf.*

Lecture Notes in Mathematics, 398, 62-75.

- NGUYEN H. (1975) : *Information fonctionnelle et ensembles flous*.
Séminaire sur les questionnaires, Université de Paris VI, 129-140.
- NGUYEN H. (1978) : *On conditional possibility distributions*.
Fuzzy Sets and Systems, 24, 299-309.
- OSWALD J. (1972) : *Essai sur la théorie de l'information*.
Revue de Statistique Appliquée, 20, 1.
- PONASSE D. (1978) : *Algèbres floues et algèbres de Lukasiewicz*.
Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Bucarest, XXIII, 1, 103-111.
- POTTIER P. (1994) : *Mesures de la liaison entre deux variables qualitatives; relation entre un coefficient de corrélation et le χ^2* .
Revue de Statistique Appliquée, XLII, 1, 41-61.
- PURI M.-L. & RALESCU D (1982) : *A possibility measure is not a fuzzy measure*.
Fuzzy Sets and Systems, 7, 311-314.
- PURI M.-L. & RALESCU D. (1985) : *The concept of 0 Normality for Fuzzy Random Variables*.
Ann. Proba. , 13, 1373-1379
- PURI M.-L. & RALESCU D. (1986) : *Fuzzy Random Variables*.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114, 409-422.
- RAMER A. (1989) : *Conditional possibility measures*.
Cybernetics and Systems, 20, 233-247.

- RAMER A. (1990) : *Information theory based on fuzzy possibilistic rules.*
Lectures Notes in Computer Science, 521, 317-326.
- RAMER A. (1990) : *Structure of possibilistic information metrics and distances: properties.*
International Journal of General Systems, 17, 21-32.
- RUSPINI E. (1970) : *Numerical methods for fuzzy clustering.*
Information Sciences, 2, 319-350.
- SANCHEZ E. (1984): *Solution of fuzzy equations with extended operations.*
Fuzzy Sets and Systems, 12, 237-248.
- SANCHEZ E. (1976): *Resolution of composite fuzzy relation equation*
Information and Control, 30, 38-48.
- SAPORTA G. (1975) : *Dépendance et codage de deux variables aléatoires.*
Revue de Statistique Appliquée, XXIII, 1, 43-63.
- SZÁSZ G. (1971) : *Théorie des treillis.*
Dunod, Paris.
- TERANO T. & SUGENO M. (1975) : *Conditional fuzzy measures and their applications.*
US-Japan Seminar, Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes, 151-170, Berkeley CA.
- VOLLE M. (1993) : *Analyse des données.*
3ème édition, Economica, Paris.

- WEBER S. (1983) : *A general concept of fuzzy connectives, negations and implication based on t-norms and t-conorms*
Fuzzy Sets and Systems, 11, 115-134.
- YAGER R. (1980) : *On a general class of fuzzy connectives.*
Fuzzy Sets and Systems, 4, 235-242.
- YAGER R. (1982) : *Measuring tranquility and anxiety in decision making: Application of fuzzy sets.*
International Journal of General Systems, 8, 3, 139-146.
- YAGER R. (1982) : *Some procedures for selecting fuzzy set-theoretic operators.*
International Journal of General Systems, 8, 2, 115-124.
- YAGLOM A.-M. (1959) : *Probabilité et information.*
Dunod
- ZADEH L. (1965) : *Fuzzy Sets.*
Information and Control, 8, 338-353.
- ZADEH L. (1971) : *Similarity relations and fuzzy orderings.*
Information Sciences, 3, 177-200.
- ZADEH L. (1975) : *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning.*
Information Sciences, Part 1, 8, 199-249; Part 2, 8, 301-357; Part 3, 9, 43-80.
- ZADEH L. (1978) : *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.*
Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

CHAPITRE 10

10. Index



A

Abraham Molles	163
Absorption de l'intersection.....	220
Absorption de l'union	220
Affectation	108
Allaitement maternel exclusif	186
Analyse différentielle.....	204
Appartenance floue	23
Appartenance nette	21
Application floue	15, 87
Application nette.....	14, 84, 85
Assertion duale	222
Association floue	151, 154
Association nette.....	152, 154

B

Benvenuti	138
Benzécri	181
Birkhoff.....	219
Burt	110

C

Codage disjonctif complet	13
Composition max-min	90
Conditionnement.....	65, 140
Conjonction.....	44
Contingence	110
Correspondance ensembliste.....	12
Correspondance floue	12
Correspondance possibiliste	12, 120

Correspondance probabiliste.....	12
Correspondance statistique	12
Coupe	87
Czekanowski	181

D

De Luca	49
De Morgan	143
Dédoublément binaire	161
Dédoublément flou	161
Dépendance informationnelle	144
Descripteur	37, 115
Description floue.....	112
Description nette	108
Diagonalisation	181
Diagramme de Hasse	227
Différence	78
Différence symétrique.....	81, 101, 173, 179
Différentiel continu	156
Différentiel déséquilibré	192
Différentiel flou	156
Différentiel sémantique.....	14, 156
Différentiel simple	158, 191
Différentiel symétrique	158, 191
Disjonction.....	44
Dissemblance	178
Distance de Tchebychev	99, 101
Distance du cardinal de la différence symétrique.....	105
Distance entre sous-ensembles flous	172
Dualité	222
Dubreil	219

Dubreil-Jacotin.....	50
----------------------	----

E

Echelle analogique	156
Évaluation qualitative	118
Évaluation quantitative	109
Extension cylindrique	92

F

Facteur de normalisation.....	68
Fonction d'appartenance.....	21
Fonctions d'appartenance Booléennes	23

G

Goguen.....	51
Groupeïde	240
Groupeïde résiduel réticulé.....	245

H

Hamming.....	18, 32, 99
Hasse	227
Higashi	31
Hisdal	65

I

Image floue	89, 95, 96
Image nette.....	86
Indice de flou	31
Indice de précision	30
Indice de similarité.....	179
Information	132

Information de Shannon.....	19, 132
Information de type Inf.....	143
Information de type M.....	137
Information généralisée	134
Information possibiliste	132
Information T-composable.....	135
Informations vagues.....	16

K

Kampé de Fériet.....	19
Kampé De Fériet.....	132
Kaufmann.....	31
Klir	31

L

Langage flou	35
Langage parallèle	35
Lessieur	219
Ling	45
Lukasiewicz	48, 51, 179

M

Mesure de possibilité	62
Mesure floue	25, 62
Minkowski	18
Modificateur linguistique.....	38

N

Nguyen.....	65, 67
Niveaux de gris	163
Non-contradiction	28

Normalisation.....	159
--------------------	-----

O

Observation floue.....	117
OMS.....	186
Opérateur archimédien.....	46
Opérateur binaire	43
Opérateur de compression	39
Opérateur de conditionnement.....	40
Opérateur de conjonction.....	44
Opérateur de dilatation.....	40
Opérateur de maximisation.....	52
Opérateur de minimisation.....	52
Opérateur de négation.....	38, 55
Opérateur de normalisation.....	39
Opérateur flou	43, 155
Opérateur idempotent	46
Opérateur unaire	43
Opération d'affectation.....	14, 108
Opérations de Boole.....	152

P

Pleinement significatif	36
Possibilité conditionnelle normalisée	68
Possibilité uniforme	64
Principe d'extension	89
Principe de dualité	43, 222
Propriété d'absorption.....	220
Proximité.....	111, 127
Pseudo-complément relatif	49
Pseudo-division.....	49

Pseudo-soustraction	49
---------------------------	----

Q

Questionnaire flou.....	155
-------------------------	-----

R

Relation floue.....	32
Ressemblance.....	178
Ressemblance horizontale.....	184
Ressemblance verticale.....	184

S

Sanchez	51
Sémantogramme	163, 197
Sémantogramme bipolaire	165
Séparation des modalités	206
Séparation négative	186
Séparation nulle	186
Séparation positive.....	186
Shannon.....	18, 132
Sheffer.....	49
Signification.....	35, 115
Similarité.....	178
Somme probabiliste	47
Szãsz	219

T

Tableau de description flou.....	13, 158
Tableau normalisé.....	160
Tchebytchev.....	99
Tiers exclu.....	28

Treillis	219
Treillis complets	232
Treillis de Boole.....	152
Treillis distributif	235
Treillis modulaires	233
Treillis multiplicatif	100, 240

V

Valeurs de références.....	157
Variable statistique floue	112
Volle.....	18

W

Weber.....	55
Wiener.....	132

Y

Yager.....	30, 48
------------	--------

Z

Zadeh.....	38, 46
------------	--------