



HAL
open science

Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures

Mickaël Duval

► **To cite this version:**

Mickaël Duval. Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016. Français. NNT : 2016TOU30088 . tel-01361104v2

HAL Id: tel-01361104

<https://theses.hal.science/tel-01361104v2>

Submitted on 24 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par:

Université Toulouse 3 Paul Sabatier

Discipline ou spécialité:

Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux

Présentée par

Mickaël DUVAL

Sujet de la thèse:

Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures

Soutenue le 8 juillet 2016

Jury:

Anthony GRAVOUIL	Professeur, INSA Lyon	Président
Pedro DÍEZ	Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur
Patrick MASSIN	Ingénieur Chercheur, EDF R&D	Rapporteur
Patrick LABORDE	Professeur, Université Toulouse 3 Paul Sabatier	Examineur
Michel SALAÛN	Professeur, ISAE-SUPAERO	Directeur
Jean-Charles PASSIEUX	Maître de Conférence, INSA Toulouse	Co-directeur
Stéphane GUINARD	Ingénieur R&D, Airbus Group Innovations	Invité

École doctorale:

Mécanique, Énergétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche:

Institut Clément Ader – UMR CNRS 5312

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse Michel Salaün et Jean-Charles Passieux. Leur accompagnement tout au long de ces trois années, que ce soit au travers des nombreuses discussions scientifiques au laboratoire ou en sillonnant les routes ariégeoises à vélo, a constitué un ingrédient essentiel à la bonne conduite de cette thèse.

Un grand merci aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux de thèse, aussi bien Anthony Gravouil en le président, que Patrick Massin et Pedro Díez en se penchant de près sur mon manuscrit. Vos remarques ont été des plus constructives.

Je remercie aussi tout particulièrement Stéphane Guinard, à l'origine de ce grand projet, pour la confiance qu'il m'a accordé et son implication personnelle dans ce travail. Merci à Patrick Laborde et à Alexei Lozinski : les nombreux échanges que l'on a pu avoir ont été très enrichissants et ont fortement contribué à cette thèse. Merci à Nicolas Renon pour ses conseils avisés quant à l'utilisation du supercalculateur CALMIP, et à Mickaël Abbas et Ayaovi-Dzifa Kudawoo pour leur aide précieuse vis-à-vis de Code_Aster.

Je ne saurais que trop remercier l'ensemble des collègues et amis du laboratoire, qu'il serait beaucoup trop long d'énumérer, grâce à qui le quotidien a été si plaisant, et en particulier Jeep et Robin qui ont eu le courage et, je l'espère, le plaisir de partager mon bureau pendant tout ce temps.

Enfin, un grand merci à Élodie pour son soutien indéfectible tout au long de cette aventure.

Résumé

Le projet ANR ICARE, dans lequel s'inscrit cette thèse, vise au développement de méthodes pour l'analyse de structures complexes et de grande taille. Le défi scientifique consiste à investiguer des zones très localisées, mais potentiellement critiques vis-à-vis de la tenue mécanique d'ensemble. Classiquement, sont mis en œuvre aux échelles globale et locale des représentations, discrétisations, modèles de comportement et outils numériques adaptés à des besoins de simulation gradués en complexité. Le problème global est traité avec un code généraliste dans le cadre d'idéalisations topologiques (formulation plaque, simplification géométrique) et comportementale (homogénéisation); l'analyse locale quant à elle demande la mise en œuvre d'outils spécialisés (routines, codes dédiés) pour une représentation fidèle de la géométrie et du comportement.

L'objectif de cette thèse consiste à développer un outil efficace de couplage non-intrusif pour la simulation multi-échelles / multi-modèles en calcul de structures.

Les contraintes de non-intrusivité se traduisent par la non modification de l'opérateur de rigidité, de la connectivité et du solveur du modèle global, ce qui permet de travailler dans un environnement logiciel fermé.

Dans un premier temps, on propose une étude détaillée de l'algorithme de couplage global/local non-intrusif. Sur la base d'exemples et de cas-test représentatifs en calcul de structures (fissuration, plasticité, contact...), **on démontre l'efficacité et la flexibilité d'un tel couplage**. Aussi, **une analyse comparative de plusieurs outils d'optimisation** de l'algorithme est menée, et **le cas de patchs multiples en interaction** est traité.

Ensuite le concept de couplage non-intrusif est **étendu au cas de non-linéarités globales**, et une méthode de calcul parallèle par **décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire** est développée. **Cette méthode nous a permis de paralléliser un code industriel séquentiel sur un mésocentre de calcul intensif**.

Enfin, on applique la méthode de couplage au raffinement de maillage par patchs d'éléments finis. On propose un **estimateur d'erreur en résidu explicite** adapté au calcul de solutions multi-échelles *via* l'algorithme de couplage. Puis, sur la base de cet estimateur, on met en œuvre une **procédure non-intrusive de raffinement local** de maillage.

Au travers de ces travaux, **un outil logiciel de couplage non-intrusif a été mis au point**, basé sur l'échange de données entre différents codes de calcul (protocole *Message Passing Interface*). Les développements effectués sont intégrés dans une surcouche Python, dont le rôle est de coupler plusieurs instances de *Code_Aster*, le code d'analyse de structures développé par EDF R&D, lequel sera utilisé dans l'ensemble des travaux présentés.

Abstract

This PhD thesis, part of the ANR ICARE project, aims at developing methods for complex analysis of large scale structures. The scientific challenge is to investigate very localised areas, but potentially critical as of mechanical systems resilience. Classically, representation models, discretizations, mechanical behaviour models and numerical tools are used at both global and local scales for simulation needs of graduated complexity. Global problem is handled by a generic code with topology (plate formulation, geometric approximation...) and behaviour (homogenization) simplifications while local analysis needs implementation of specialized tools (routines, dedicated codes) for an accurate representation of the geometry and behaviour.

The main goal of this thesis is to develop an efficient non-intrusive coupling tool for multi-scale and multi-model structural analysis.

Constraints of non-intrusiveness result in the non-modification of the stiffness operator, connectivity and the global model solver, allowing to work in a closed source software environment.

First, we provide a detailed study of global/local non-intrusive coupling algorithm. Making use of several relevant examples (cracking, elastic-plastic behaviour, contact...), **we show the efficiency and the flexibility of such coupling method. A comparative analysis of several optimisation tools** is also carried on, and **the interacting multiple patches situation is handled.**

Then, non-intrusive coupling is **extended to globally non-linear cases**, and a **domain decomposition method with non-linear relocalization** is proposed. **Such methods allowed us to run a parallel computation using only sequential software, on a high performance computing cluster.**

Finally, we apply the coupling algorithm to mesh refinement with patches of finite elements. We develop an **explicit residual based error estimator** suitable for multi-scale solutions arising from the non-intrusive coupling, and apply it inside an error driven **local mesh refinement procedure.**

Through this work, **a software tool for non-intrusive coupling was developed**, based on data exchange between codes (*Message Passing Interface* protocol). Developments are integrated into a Python wrapper, whose role is to connect several instances of *Code_Aster*, the structural analysis code developed by EDF R&D, which will be used in the following work.

Table des matières

Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	viii
Introduction générale	3
I Le couplage non-intrusif en calcul de structures : prise en compte de défauts localisés et couplage de codes éléments finis	7
1 État de l’art sur les méthodes de calcul multi-échelles / multi-modèles	11
1.1 Méthodes basées sur l’utilisation de modèles multi-échelles	12
1.1.1 Méthodes d’homogénéisation	12
1.1.2 Méthodes d’enrichissement	12
1.1.3 Méthodes multigrilles	14
1.2 Méthodes basées sur le couplage de modèles	15
1.2.1 Méthodes de couplage faible	15
1.2.2 Méthodes de couplage fort	16
1.2.3 Couplage non-intrusif	19
2 Algorithme de couplage non-intrusif : une méthode flexible et universelle	21
2.1 Présentation de la méthode	22
2.1.1 Algorithme de couplage, formulation non-intrusive incrémentale . . .	22
2.1.2 Propriétés de convergence	29
2.2 Exemples numériques	33
2.2.1 Propagation de fissure	33
2.2.2 Modifications structurales, conditions aux bords	35
2.2.3 Gestion des patches multiples et interactions	38
2.3 Implémentation, caractéristiques techniques	42
2.3.1 Raccord de modèles éléments finis	42
2.3.2 Communications standardisées, couplage de codes et parallélisme . .	44
II Méthode de décomposition de domaine non-intrusive pour le calcul de structures non-linéaires de grandes dimensions	47
3 Le parallélisme en calcul de structures : un état de l’art	51

3.1	Méthodes de décomposition de domaine linéaires pour le calcul de structure	52
3.1.1	Approches primales et duales de la décomposition de domaine	52
3.1.2	Préconditionnement du problème d'interface, problème grossier	55
3.1.3	Méthodes mixtes	56
3.2	Extension des méthodes de décomposition de domaine aux problèmes non-linéaires	57
3.2.1	Méthodes Newton-Krylov-Schur	57
3.2.2	Stratégie de relocalisation non-linéaire	57
4	Décomposition de domaine non-intrusive pour le calcul non-linéaire	59
4.1	Présentation de l'algorithme de décomposition de domaine	60
4.1.1	Relocalisation non-linéaire à déplacement imposé	60
4.1.2	Problème d'interface – Approximation de l'opérateur tangent	61
4.1.3	Non-intrusivité de la méthode – utilisation de codes séquentiels fermés	62
4.2	Un exemple d'application : élastoplasticité	63
4.2.1	Présentation du cas test : porte-satellite en torsion	63
4.2.2	Propriétés de convergence	64
4.2.3	Déploiement sur le supercalculateur CALMIP	65
4.2.4	Temps de calcul – extensibilité	67
4.2.5	Stratégie incrémentale de la méthode de Newton globale	69
4.3	Non-linéarité géométrique	74
4.3.1	Présentation du cas-test	74
4.3.2	Résultats et propriétés de convergence	74
4.3.3	Limitations de la méthode – Perspectives d'évolution	76
III	Algorithme de couplage : contrôle de la solution et adaptation de maillage	81
5	Le contrôle de l'erreur en éléments finis	85
5.1	Estimateurs d'erreur globale	86
5.1.1	Estimation de l'erreur par lissage des contraintes	86
5.1.2	Estimation de l'erreur en résidu d'équilibre	87
5.1.3	Estimation de l'erreur en relation de comportement	89
5.2	Estimateurs d'erreur locale	89
5.2.1	Estimation de l'erreur de pollution	90
5.2.2	Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt	90
6	Raffinement de maillage non-intrusif : un estimateur d'erreur adapté à l'algorithme de couplage	93
6.1	Couplage non-intrusif et méthode du "patch"	94
6.1.1	Le problème de l'élasticité linéaire en dimension deux	94
6.1.2	La méthode du "patch"	95
6.1.3	Résolution non-intrusive	96
6.2	Estimateur <i>a posteriori</i> pour l'algorithme du "patch"	97
6.2.1	Opérateur d'interpolation et propriétés de base	98
6.2.2	Borne supérieure de l'erreur	99
6.3	Application au raffinement de maillage adaptatif	103

6.3.1	Un indicateur d'erreur local	104
6.3.2	Erreur de référence	106
6.3.3	Raffinement de maillage par patch d'éléments finis	106
6.3.4	Patches multiples et raffinement h - p	113
6.4	L'estimation d'erreur <i>a posteriori</i> comme critère d'arrêt	114
6.4.1	Erreur de convergence <i>versus</i> erreur éléments finis	114
6.4.2	Cas d'application	115
 Conclusion		 121
 Bibliographie		 123

Introduction générale

En ingénierie mécanique, le cycle de conception d'une structure comprend nécessairement des phases d'essais et de simulations numériques. Ces essais, nécessaires à la validation et à la certification de son comportement (tenue en fatigue, détermination de la charge critique...), représentent une part non négligeable de son coût de conception. Un enjeu industriel majeur est alors de réduire le nombre de ces essais en augmentant leur pertinence (*i.e.* être en mesure de valider la conception en un minimum d'essais). Pour cela, on se base sur la simulation pour concevoir *a priori* un premier prototype vérifiant les critères imposés par le cahier des charges. On parle d'essais numériques ou de *virtual testing*. Cela implique donc de disposer de moyens de calcul permettant des simulations toujours plus prédictives, *i.e.* représentatives de la situation réelle.

Cependant, en supposant que l'on dispose de modèles numériques représentatifs du comportement mécanique réel de la structure à toutes les échelles, leur utilisation pour la simulation de la structure dans son ensemble reste un problème majeur. En effet, si les moyens de calcul intensif disponibles à ce jour permettent de mener des simulations toujours plus ambitieuses, ils ont tout de même des limites. Il est en effet souvent impossible de conduire un calcul basé sur l'utilisation de modèles numériques complexes (*i.e.* tenant compte des phénomènes physiques en jeu jusqu'aux échelles les plus fines) à l'échelle de la structure : le coût de calcul dépasserait largement les moyens existants. Une solution est alors de localiser les modèles selon les besoins. Par exemple, si le comportement d'un alliage métallique ou d'un matériau composite doit être examiné de près autour d'une liaison boulonnée, on peut se satisfaire d'une étude simplifiée (*i.e.* modèles linéaires) dans les zones impliquant peu de contraintes mécaniques (ou thermiques...).

D'un point de vue pratique, la tendance actuelle est au couplage de modèles. L'idée est alors d'effectuer la simulation à l'échelle de la structure en utilisant des modèles simplifiés, couplés localement à des modèles plus complexes capables de représenter des détails structuraux ou des comportements non-linéaires. Cette stratégie permet alors d'effectuer des études sur des modèles de très grande dimension, ciblant l'effort de calcul sur les zones le nécessitant le plus.

Seulement, l'utilisation d'un modèle donné va souvent de pair avec l'utilisation d'un logiciel particulier (*e.g.* certains logiciels sont spécialisés dans le traitement des liaisons boulonnées dans les stratifiés, d'autres dans le calcul de la propagation de fissures...). Le couplage de modèles implique donc aussi un couplage de logiciels et/ou codes de calcul.

Les travaux de recherches qui sont présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans le cadre du projet ICARE (Interfaces généralisées et couplage non-intrusif, application de codes de recherche au sein de codes industriels pour l'analyse de structures fortement non-linéaires) supporté par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-12-MONU-0002) :

« *Le projet vise le développement de méthodes numériques pour simuler le comportement mécanique de structures complexes et de grande taille : il s'agit d'investiguer des détails structurels à des échelles localisées, sans remanier pour autant les outils usuels déployés à l'échelle globale (l'innovation réside dans le caractère non-intrusif de la méthode).*

Bien que des technologies numériques permettent déjà le raccord de différents modèles, ces technologies restent contraignantes, en particulier du point de vue industriel ; en effet, garantir des échanges entre une variété d'objets contraint la conception même de ces objets : doivent être anticipés la représentation topologique d'une zone d'échanges (interface), sa

discrétisation, l'extraction sur cette zone des quantités d'intérêt, et leur éventuel retraitement (cas d'un couplage coque / volume). Le couplage non-intrusif lève ce verrou scientifique et industriel, en proposant une forme innovante de communication entre les différents modèles, caractérisée par :

- *une minimisation des contraintes sur la topologie et le maillage du modèle global : le déploiement industriel est facilité, puisqu'aucune intervention n'est nécessaire sur la maquette globale ;*
- *une minimisation de la quantité d'échanges (optimisation du temps de calcul) ;*
- *une minimisation des développements spécifiques au code généraliste : les codes restent indépendants, en particulier en termes de maillages et de solveurs.*

La contrainte imposée est de s'interdire toute modification du code industriel généraliste traitant le problème global simplifié. Le prérequis est de ne pas modifier le solveur du code généraliste. En particulier, cela conduit à ne pas découper le maillage industriel. Une difficulté technique importante est que ceci empêche toute utilisation d'un calcul sur la zone complémentaire à celle ré-analysée, le maillage et le modèle de cette zone n'étant pas disponibles.

Une brique essentielle à la mise en œuvre de cette méthode est la gestion efficace de la communication entre les modèles local et global (interfaces). La contrainte imposée est de s'interdire toute modification du maillage utilisé dans la résolution du problème global simplifié. L'outil devra pouvoir aussi traiter les cas de discrétisation de modèles différents. »

Le consortium de ce projet est constitué de deux groupes industriels (Airbus Group Innovations et EDF R&D), trois partenaires académiques (GeM - École Centrale de Nantes, LMT - ENS Cachan, ICA/IMT - Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées) et une PME (DISTENE). Le laboratoire LAMCoS - INSA de Lyon est fortement associé au consortium et apporte une contribution significative.

Ce manuscrit s'articule autour de trois problématiques auxquelles le couplage non-intrusif apporte une réponse.

- La prise en compte de détails structurels ou de comportement locaux au sein d'un modèle global ne le permettant pas.

Dans ce contexte, si la notion de couplage non-intrusif n'est pas nouvelle [Whitcomb, 1991 ; Gendre *et al.*, 2009], à ce jour aucune étude exhaustive n'a encore été faite. Dans un premier temps, on explore alors le potentiel de la méthode au travers de son application à des problèmes variés : propagation de fissures, modification locale de la géométrie et des conditions aux limites, contact, gestion de patchs multiples en interaction. L'accent est mis sur la flexibilité du couplage : raccord de discrétisations incompatibles, communication entre les codes. Aussi, des méthodes d'accélération de la convergence (procédé itératif) existent à ce jour (Quasi-Newton, relaxation statique et dynamique, Aitken's Delta Squared), mais ont été proposées dans le cadre d'applications spécifiques (plasticité localisée notamment). On évalue alors comparativement leurs performances en fonction des situations modélisées afin d'obtenir une vision d'ensemble de leur propriétés respectives. On s'appuie aussi sur le développement d'un outil de couplage basé sur le logiciel *Code_Aster* (EDF R&D), et la mise au point d'un protocole de communication entre différents modèles *via* l'échange de données d'interface .

- Le traitement des problèmes non-linéaires de grande taille.

Dès lors que l'on dispose d'un modèle numérique donné, le seul moyen permettant le traitement de problèmes de grande taille est de faire appel au calcul parallèle. Dans le cas non-linéaire, des méthodes de décomposition de domaine à relocalisations non-linéaires ont été proposées [Cresta *et al.*, 2007 ; Pebrel *et al.*, 2008 ; Hinojosa *et al.*, 2014 ; Negrello *et al.*, 2016]. Si leur efficacité est clairement établie, elles n'en demeurent pas moins intrusives. En se basant sur l'algorithme de couplage dont est il question dans ce manuscrit, on est en mesure de proposer une méthode de calcul par décomposition de domaine à relocalisation non-linéaire dans une version non-intrusive, c'est-à-dire nécessitant uniquement l'utilisation de solveurs séquentiels sur chaque sous-domaine, et ce, sans y apporter de modification. Cette méthode a conduit à la parallélisation de la version séquentielle de *Code_Aster* sur le mésocentre de calcul intensif CALMIP.

- La problématique d'adaptation locale des maillages sous-jacents aux modèles globaux.

On a évoqué au début de cette introduction l'importance de la fidélité des modèles numériques. Cela passe certes par la fidélité des modèles de comportement mécanique, mais aussi par la qualité des discrétisations mises en jeu. S'il est difficile de construire *a priori* un maillage de très bonne qualité, il est dans certains cas plus abordable d'adapter un maillage existant. Cette procédure est néanmoins coûteuse, et ce d'autant plus que le maillage est complexe et de grande dimension. Le couplage non-intrusif permet dans ce cas une adaptation locale du maillage *via* l'introduction de patches éléments finis additionnels, sans toutefois nécessiter de modification du maillage global initial. On s'affranchit ainsi des étapes très intrusives de remaillage, qui sont d'autant plus complexes que les éléments utilisés le sont (maillages hexaédriques par exemple). Aussi, les procédures de raffinement de maillage prenant place dans le contexte de qualité de la solution numérique, le positionnement et l'adaptation du patch sont alors pilotés par un indicateur d'erreur *a posteriori* que l'on a développé dans ce but.

Première partie

Le couplage non-intrusif en calcul de structures : prise en compte de défauts localisés et couplage de codes éléments finis

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude et au développement d'une méthode de calcul innovante : le couplage non-intrusif. Cette méthode permet de prendre efficacement en compte un comportement local spécifique au sein d'un modèle pré-existant de façon non-intrusive vis-à-vis de ce dernier, c'est-à-dire sans y apporter de modification directe. Des modèles linéaires de grande taille pouvant facilement être traités, on peut alors concentrer l'effort de calcul sur l'analyse de la région dont le comportement mécanique (*a priori* non-linéaire) est plus complexe. En pratique, l'enjeu du couplage non-intrusif est double.

Beaucoup d'applications courantes en calcul de structures (*e.g.* propagation de fissures, inclusions, délaminage des composites...) mettent en jeu des phénomènes multi-échelles localisés. La prise en compte du comportement spécifique à ces phénomènes passe donc par l'utilisation d'un modèle adapté. Cependant lorsque le modèle en question est relativement complexe, son coût de calcul peut devenir rédhibitoire, surtout lors du traitement de problèmes de grande taille (cela est souvent le cas dans la plupart des applications industrielles).

Un des enjeux du couplage non-intrusif est d'apporter des solutions numériques qui tiennent compte de cette observation. L'objectif est alors de proposer une méthode globale/locale permettant de coupler des modèles intervenant à des échelles et à des niveaux de complexité différents. On pourra ainsi se contenter d'un modèle grossier et relativement simpliste sur l'ensemble de la structure considérée, et ne faire appel à un modèle fin et précis qu'au niveau de la zone d'intérêt, siège des phénomènes mécaniques complexes. Le concept de non-intrusivité de la méthode se traduit par le fait que la prise en compte du comportement local n'implique pas de modification du modèle global éventuellement pré-existant.

Aussi, l'utilisation d'un modèle numérique donné va de pair avec l'utilisation d'un logiciel donné. L'autre objectif majeur de la méthode est d'apporter une solution de couplage entre différents codes ou logiciels de manière non-intrusive, c'est-à-dire en s'adaptant aux éventuelles contraintes spécifiques à ces derniers. En effet, la plupart des logiciels industriels étant des produits commerciaux, leur code source est rarement libre d'accès, ce qui peut limiter leur interfaçage avec d'autres codes ou logiciels. Ces logiciels commerciaux sont toutefois souvent les seuls utilisables dans un contexte industriel pour lequel certification et robustesse sont des critères primordiaux. Cela limite bien sûr les possibilités de dissémination des outils de recherche amont (codes de calcul spécifiquement développés pour l'étude d'un phénomène donné) au sein d'études industrielles. L'objectif des méthodes de couplage non-intrusives est donc de permettre le couplage entre un logiciel commercial générique et un code de recherche spécialisé, en concordance avec les contraintes et pré-requis de ceux-ci.

Après un état de l'art des méthodes de calcul destinées à l'étude de problèmes multi-échelles / multi-modèles dans le Chapitre 1, on se concentrera sur le couplage non-intrusif, ses propriétés et ses applications dans le Chapitre 2.

État de l'art sur les méthodes de calcul multi-échelles / multi-modèles

Résumé

On dresse dans ce chapitre un état de l'art sur les méthodes de calcul multi-échelles et multi-modèles couramment utilisées en mécanique numérique. Bien que celui-ci ne puisse être exhaustif, on s'applique ici créer un cheminement logique vers les méthodes non-intrusives qui sont l'objet du présent manuscrit.

Sommaire

1.1 Méthodes basées sur l'utilisation de modèles multi-échelles . .	12
1.1.1 Méthodes d'homogénéisation	12
1.1.2 Méthodes d'enrichissement	12
1.1.3 Méthodes multigrilles	14
1.2 Méthodes basées sur le couplage de modèles	15
1.2.1 Méthodes de couplage faible	15
1.2.2 Méthodes de couplage fort	16
1.2.3 Couplage non-intrusif	19

1.1 Méthodes basées sur l'utilisation de modèles multi-échelles

1.1.1 Méthodes d'homogénéisation

L'objectif des méthodes d'homogénéisation est la prise en compte d'une microstructure dans le modèle de calcul mécanique à l'échelle macroscopique. Ces méthodes reposent sur une hypothèse de périodicité de l'échelle microscopique (*e.g.* prise en compte de la structure cristalline d'un métal par exemple).

Le principe des méthodes d'homogénéisation est d'intégrer la relation de comportement à l'échelle micro sur un volume élémentaire représentatif (VER) périodique avant de résoudre le problème à l'échelle macro.

Le comportement microscopique peut être pris en compte de manière analytique *via* un développement asymptotique par exemple [Devries *et al.*, 1989], ou encore de manière numérique en utilisant la méthode des éléments finis à l'échelle micro [Feyel et Chaboche, 2000]. Dans ce dernier cas, une procédure itérative permet le passage de l'échelle macro à l'échelle micro (localisation) et de l'échelle micro à l'échelle macro (homogénéisation) :

- la résolution d'un problème micro permet de calculer un champ de contrainte moyen sur le volume ω ($\sigma_M = \int_{\omega} \sigma_m d\omega$) qui est alors utilisé pour calculer l'opérateur tangent homogénéisé K_M à l'échelle macro
- la déformation aux points de Gauss issue de la résolution du problème macro est alors utilisée comme chargement des problèmes micro

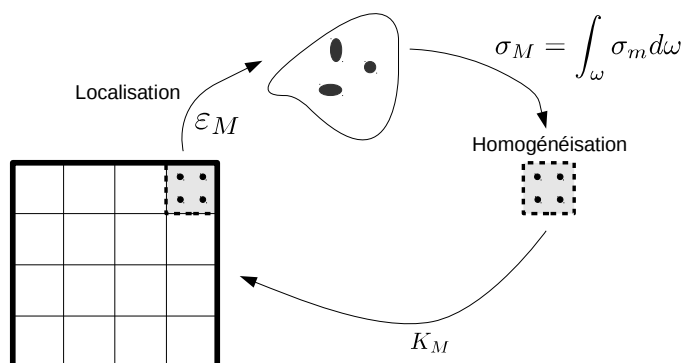


FIGURE 1.1 – Homogénéisation FE²

Les méthodes d'homogénéisation sont basées sur l'hypothèse de périodicité du domaine étudié, et sont donc particulièrement bien adaptées à la prise en compte de microstructures. Aussi, lorsque le caractère multi-échelle du modèle n'intervient pas au niveau du matériau, mais d'un phénomène localisé à l'échelle macro (par exemple dans le cas de la fissuration), on pourra utiliser des méthodes d'enrichissement local.

1.1.2 Méthodes d'enrichissement

Les méthodes d'enrichissement n'ont, quant à elles, pas vocation à la prise en compte de l'échelle micro au niveau du modèle de comportement mécanique, mais au niveau de la solution elle-même. L'objet de ces méthodes est d'enrichir la cinématique globale avec de l'information issue des calculs à l'échelle locale. On citera ici les méthodes d'enrichissement

hiérarchique micro/macro, les méthodes basées sur la partition de l'unité et les méthodes multigrilles.

1.1.2.1 Enrichissement multi-échelles micro/macro

Les méthodes d'enrichissement multi-échelles sont basées sur le principe des modèles micro/macro. L'objectif est de calculer la solution u comme une combinaison de la solution à l'échelle macro u^M et de la solution à l'échelle micro u^m , de sorte que $u = u^M + u^m$. Dans ce cas, la solution issue de l'échelle micro agit comme une correction sur la solution globale, tout en s'assurant de la continuité des quantités mécaniques à l'interface entre les échelles micro et macro [Ladevèze *et al.*, 2001 ; Guidault *et al.*, 2008].

Il existe une grande variété de méthodes d'enrichissement micro/macro. En effet, le modèle micro peut être résolu de manière entièrement analytique comme c'est le cas dans la Variational MultiScale Method [Hughes, 1995], ou encore en utilisant les éléments finis comme dans la Strong Coupling Method [Ibrahimbegović et Markovič, 2003]. Dans le premier cas, l'information issue de l'échelle micro sera condensée sur les interfaces au niveau macro, alors que, dans le second cas, c'est par le biais d'une procédure itérative que l'équilibre entre les échelles micro/macro sera atteint.

Aussi, lors du traitement de modèles fortement hétérogènes, le domaine macro peut être entièrement recouvert de modèles micro, comme c'est le cas dans la Dirichlet Projection Method [Zohdi *et al.*, 1996 ; Oden *et al.*, 1999].

1.1.2.2 Enrichissement basé sur la partition de l'unité

Dans le contexte des éléments finis, une autre possibilité pour enrichir une solution calculée à une échelle macroscopique est de directement enrichir l'espace d'approximation dans lequel la solution est recherchée. De telles méthodes reposent sur le fait qu'une base éléments finis $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ forme une partition de l'unité :

$$\sum_{i \in I} \varphi_i = 1 \quad (1.1)$$

Il est ainsi possible de représenter la solution éléments finis u_h sur une base de fonction données $\{\psi_j\}_{j \in J}$:

$$u_h = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_{ij} \varphi_i \psi_j \quad (1.2)$$

Cette méthode est connue sous le nom de Partition of Unity Method, PUM, [Melenk et Babuška, 1996].

Dans la même lignée, une méthode devenue aujourd'hui courante pour la prise en compte de discontinuités du champ de déplacement est la méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method, [Moës *et al.*, 1999]). Cette méthode a initialement été développée pour permettre la représentation et la propagation d'une fissure dans le cadre d'un calcul de structure en éléments finis. Il n'est plus nécessaire de mailler la fissure de manière conforme, ni d'avoir recours à des méthodes de remaillage très intrusives en pointe de fissure [Barsoum, 1974]. La discontinuité introduite par la fissure, ainsi que la singularité du champ de déplacement induite à sa pointe sont ici prises en compte directement par les fonctions de forme éléments finis :

$$u_h = \sum_{i \in I} a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H} b_i H \varphi_i + \sum_{i \in I_F} \sum_{j=1}^4 c_{ij} F_j \varphi_i \quad (1.3)$$

La base éléments finis initiale ($V = \{\varphi_i, i \in I\}$) est enrichie par plusieurs fonctions :

- des fonctions de type Heaviside H prenant en compte la discontinuité du déplacement à la traversée de la fissure (on enrichi alors les nœuds $i \in I_H$),
- des fonctions F , aux nombre de quatre, capables de prendre en compte la singularité de la solution en pointe de fissure (on enrichit alors les nœuds $i \in I_F$).

Sur le même principe, on citera la Generalized Finite Element Method (GFEM) [Strouboulis *et al.*, 2001 ; Duarte et Kim, 2008 ; Kim *et al.*, 2012]. Le principe de la GFEM est d'utiliser la partition de l'unité pour enrichir l'espace dans lequel on cherche la solution éléments finis. L'enrichissement peut se faire par des solutions issues de développements asymptotiques [Brancherie *et al.*, 2008] ou encore de solution éléments finis pré-calculées [Chahine *et al.*, 2008 ; Chahine *et al.*, 2009] par exemple.

1.1.3 Méthodes multigrilles

Les méthodes présentées précédemment sont capables de traiter des problèmes multi-échelles en agissant sur la correction d'une solution globale ou encore en enrichissant la base éléments finis dans laquelle celle-ci est calculée. Cependant, la nature multi-échelle d'un problème physique impacte également sa résolution lors de l'utilisation de certaines méthodes numériques itératives (*e.g.* les méthodes de type Krylov).

En effet, les méthodes itératives ont la particularité de rapidement capter les modes à hautes fréquences de la solution recherchée, alors que les modes à basses fréquences demanderont plus d'itérations avant d'être correctement approchés (on parle de la propriété de lissage de tels solveurs).

Pour pallier cela, l'idée des méthodes multigrilles [Briggs *et al.*, 2000 ; Rannou *et al.*, 2009 ; Passieux *et al.*, 2011 ; Gerstenberger et Tuminaro, 2013] est alors d'alterner l'utilisation de grilles (maillages éléments finis imbriqués) de finesses différentes lors de la résolution itérative du problème (on parle de méthode multigrille géométrique). On prend ici l'exemple d'un problème mécanique discrétisé sous l'équation $Ku = f$.

- Le problème est tout d'abord résolu de manière approchée sur la grille la plus fine par l'algorithme itératif considéré afin de capter les modes à hautes fréquences de la solution $u_h \approx K_h^{-1} f_h$.
- Après une étape de projection (restriction), la solution u_h est corrigée sur une grille plus grossière à partir de la donnée du résidu $r_h = f_h - K_h u_h$, de sorte que $e_{2h} \approx K_{2h}^{-1} r_h$.
- Selon la stratégie adoptée (V-cycle, W-cycle, ...), le procédé peut-être réitéré sur une grille encore plus grossière (la résolution sur la grille la plus grossière est effectuée de manière directe). Sinon, la correction est reportée par prolongement sur la grille plus fine $u_h := u_h + e_{2h}$.

Les méthodes multigrilles n'ont pas pour unique but de servir à la résolution de problèmes multi-échelles. Elles sont également employées à des fins d'accélération des solveurs itératifs (Gauss-Seidel, Jacobi, gradient conjugué...).

Les méthodes multigrilles géométriques impliquent la construction explicite de maillages de finesses différentes. On parlera de méthode multigrille algébrique lorsque la détermination des opérateurs de restriction et de projection se base sur l'analyse de la matrice de rigidité (et de la connectivité entre les degrés de liberté), sans nécessiter la construction de maillages physiques intermédiaires.

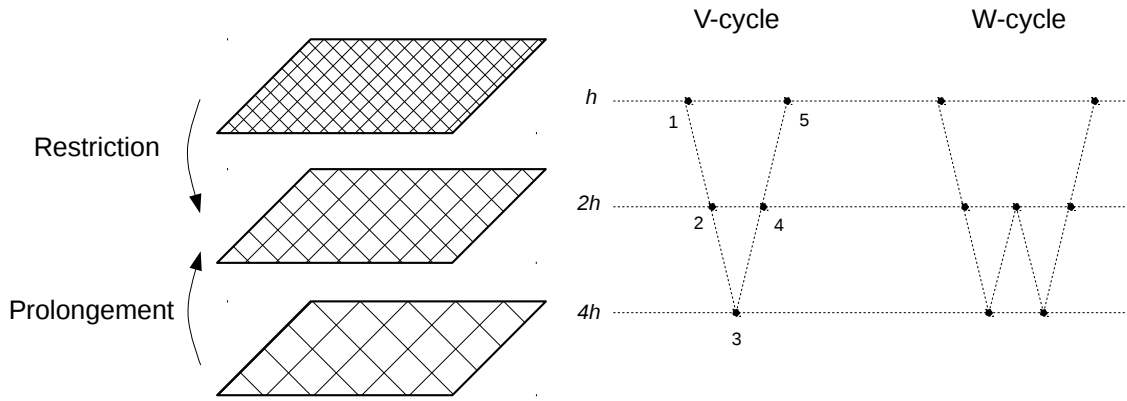


FIGURE 1.2 – Méthode multigrille – V-cycle et W-cycle

1.2 Méthodes basées sur le couplage de modèles

Les méthodes présentées précédemment ont un point commun : la prise en compte des différentes échelles se fait au sein d'un seul modèle. Pour des raisons pratiques (principalement le traitement de problèmes multi-échelles par des codes ou logiciels commerciaux) il peut être parfois plus simple d'utiliser des méthodes de couplage de modèles. Dans ce cas, chaque modèle est dédié au traitement d'une échelle qui lui est propre. L'interaction entre les différentes échelles est alors assurée par le couplage de ces modèles.

1.2.1 Méthodes de couplage faible

La méthode de couplage la plus fréquemment utilisées dans les bureaux d'études en calcul de structure est l'approche descendante (souvent appelée *submodelling*). Cette dernière est très présente dans les logiciels industriels. Le principe de l'analyse descendante est le suivant :

- Un calcul complet est effectué sur la structure dans son ensemble. Le plus souvent, le modèle est suffisamment précis pour capter les phénomènes globaux (*e.g.* modes de déformation à grande longueur d'onde), mais pas assez pour permettre la prise en compte de phénomènes localisés (*e.g.* concentration de contrainte, fissure...).
- Le résultat de l'analyse globale est utilisé pour imposer des conditions limites à une ou plusieurs analyses locales sur les zones d'intérêt pour lesquelles le modèle global n'est pas assez précis. Il peut s'agir des déplacements [Kelley, 1982] ou encore de la rigidité globale [Jara-Almonte et Knight, 1988].
- Une analyse fine est menée sur ces zones d'intérêt en utilisant un modèle adapté (maillage raffiné, comportement mécanique spécifique...).

Cette méthode présente l'avantage de concentrer l'effort de calcul sur les zones qui le nécessitent. Toutefois, elle est majoritairement réservée aux cas pour lesquels le détail local a peu ou pas d'influence à l'échelle globale sur le reste de la structure. En effet, comme leur nom l'indique, les méthodes descendantes ne permettent pas de faire remonter l'information locale à l'échelle supérieure. Cependant, dans certaines situations pratiques, la zone d'intérêt ne peut avoir qu'une faible influence sur l'échelle globale. C'est la raison pour laquelle cette méthode reste aujourd'hui très utilisée compte tenu de son rapport précision / coût de calcul.

1.2.2 Méthodes de couplage fort

Dans le cas où l'influence du modèle local s'étend au delà de son domaine de définition, on comprend aisément que les méthodes de couplage faible vont produire une solution plus ou moins erronée selon la situation [Cresta, 2008 ; Gendre, 2009]. Aussi, le seul moyen de construire une solution couplée exacte est de faire remonter l'information issue de la résolution du problème local au niveau global. C'est le principe des méthodes de couplage fort.

1.2.2.1 Méthodes directes de couplage

Ces méthodes tirent leur nom du fait que la prise en compte du couplage entre deux modèles se fait par le biais d'un calcul direct, *i.e.* sans faire appel à des procédés itératifs. On peut les classer en deux catégories principales :

- les méthodes de réanalyse structurale,
- les méthodes de condensation statique.

Le principe de la réanalyse structurale est de calculer la réponse d'une structure après une modification (souvent localisée) à partir de la connaissance de la réponse avant modification. La plupart du temps, la procédure consiste à évaluer la réponse du système initial sous différentes sollicitations élémentaires (au nombre de m par exemple) représentatives de la modification apportée à la structure. Cela revient ensuite à corriger l'opérateur de raideur initial par une matrice de rang m . Cette correction peut alors s'effectuer de manière non-intrusive vis-à-vis de l'opérateur au travers des formules de Sherman-Morrison et de Woodbury [Akgün *et al.*, 2001]. Par exemple, soit $\{U_i\}_{i=1..m}$ une famille de vecteurs construite à partir des réponses sous sollicitations élémentaires et $U = [U_1, \dots, U_m]$ alors on pourra calculer la réponse de la structure modifiée de manière non-intrusive (*i.e.* sans nécessiter l'assemblage et la factorisation du système modifié) :

$$(K + UU^T)^{-1} = K^{-1} - K^{-1}U(U^T K^{-1}U + I)^{-1}U^T K^{-1} \quad (1.4)$$

Les méthodes de réanalyse structurale sont donc basées sur une modification *a posteriori* de la solution, à l'opposé des méthodes de condensation statique. En effet, ces dernières sont basées sur la condensation *a priori* du modèle de la structure initiale (méthodes de Schur) sur une interface de couplage.

On prend l'exemple (*cf.* Fig 1.3) d'une structure occupant le domaine Ω , que l'on partitionne en une partie globale Ω_G et une partie locale Ω_L . On suppose la prise en compte d'un défaut localisé sur Ω_L . Même si la solution sur Ω_G peut être affectée par l'altération du modèle sur la zone locale, la représentation éléments finis du modèle défini sur Ω_G reste quant à elle toujours la même. Si le modèle défini sur Ω_L venait à évoluer ou à être modifié à de nombreuses reprises (par exemple lors d'une étude paramétrique), reconduire un calcul complet sur l'ensemble de la structure demanderait un surcoût important et inutile. La sous-structuration par condensation statique [Wyart *et al.*, 2008 ; Wyart *et al.*, 2009] apporte une solution à ce problème en permettant de construire un modèle représentant le comportement de la structure sur Ω_G en ne faisant intervenir que les degrés de liberté de l'interface Γ . On considère ici le cas d'un raccord en déplacement en partant du principe que le problème mécanique est formulé en variable primale.

$$\begin{bmatrix} K_G & C \\ C^T & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_G \\ F_L \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

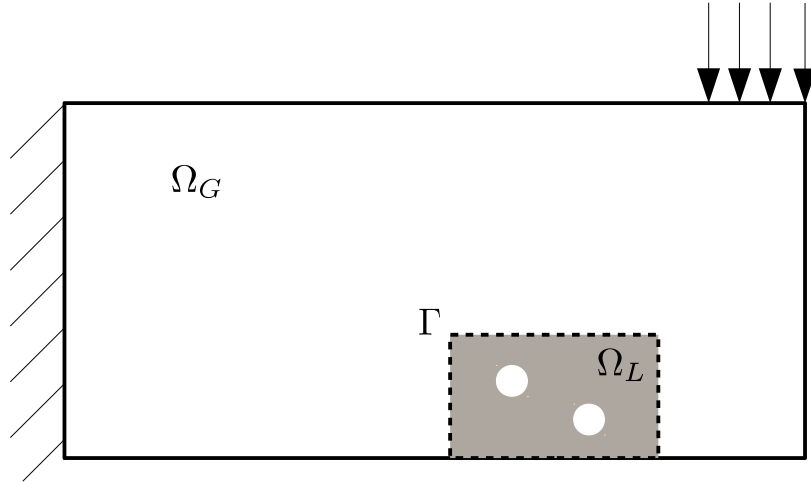


FIGURE 1.3 – Partition du domaine d'étude

Le modèle global $K_G U_G + C U_L = F_G$ peut être condensé de sorte à n'avoir à considérer que le déplacement d'interface. Les exposants i indiquent les degrés de libertés internes aux modèles, et les exposant b indiquent les degrés de liberté de l'interface.

$$\begin{bmatrix} K_G^{ii} & K_G^{ib} \\ K_G^{bi} & K_G^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G^i \\ U_G^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_G^i \\ -C^b U_L \end{bmatrix} \Rightarrow (K_G^{bb} - K_G^{bi} (K_G^{ii})^{-1} K_G^{ib}) U_G^b + C^b U_L = -K_G^{bi} (K_G^{ii})^{-1} F_G^i \quad (1.6)$$

Le complément de Schur de K_G , noté $S_G = K_G^{bb} - K_G^{bi} (K_G^{ii})^{-1} K_G^{ib}$ peut ainsi être utilisé pour substituer le modèle global dans Eq. (1.5).

$$\begin{bmatrix} S_G & C^b \\ (C^b)^\top & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G^b \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_G^{bi} (K_G^{ii})^{-1} F_G^i \\ F_L \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Dans le cadre évoqué ici, la condensation statique est utilisée comme une méthode de couplage visant à raccorder un modèle global figé à un modèle local détaillé et éventuellement modifiable. Parfois, cette méthode est également utilisée pour fournir un modèle éléments finis interfaçable sous forme de "boîte noire", pour protéger un secret industriel par exemple. En effet, la seule connaissance du complément de Schur permet une prise en compte exacte du modèle, sans pour autant avoir accès aux détails de ce dernier (géométrie, cas de chargement).

Dans le cadre d'une présentation générique et succincte des méthodes de couplage les plus utilisées à ce jour, on parle ici de condensation statique. Cependant, il est à noter que le procédé de sous-structuration de modèles en éléments finis est plus général, et peut également être utilisé en dynamique et en calcul modal notamment.

Aussi, rien n'interdit l'utilisation conjointe de la condensation statique avec d'autres méthodes de couplage, comme c'est le cas dans [Hirai *et al.*, 1984] qui combine la condensation statique avec la réanalyse structurale.

1.2.2.2 Méthodes itératives de couplage

Comme on vient de le voir, les méthodes directes de couplage impliquent un certain niveau d'interopérabilité des solveurs utilisés par chacun des modèles couplés. L'autre grande famille de méthodes de couplage couramment utilisées est celle des méthodes itératives : des

résolutions successives sont effectuées sur les différentes parties du modèle que l'on souhaite coupler.

Parmi les méthodes de couplage itératives courantes, on trouve celles basées sur la sous-structuration [Bjorstad et Widlund, 1986 ; Mao et Sun, 1991]. Comme cela a été présenté dans la section précédente, la structure peut-être partitionnée en sous-structures, l'idée étant alors de résoudre le problème d'interface, mais cette fois de manière itérative (par exemple *via* une méthode de Gradient Conjugué). Ce type de méthodes (qu'on pourra qualifier de Schur itératives) est particulièrement adapté au calcul parallèle par décomposition de domaine, *cf.* Partie II.

L'autre grande classe de méthodes itératives de couplage concerne les méthodes dites de Schwarz [Lions, 1987 ; Glowinski et Le Tallec, 1990 ; Gander, 2008].

La méthode de Schwarz alternée, historiquement la plus ancienne, propose de scinder le domaine d'étude en plusieurs domaines recouvrants. Il s'agit alors de résoudre le problème de manière alternée sur chacun des sous-domaines. Si on suppose un découpage du domaine en deux parties Ω_1 et Ω_2 , alors la résolution du problème selon la méthode de Schwarz alternée se fera de la façon suivante, *cf.* Eq. (1.8) :

$$\text{Schwarz alterné} \quad \begin{cases} K_1 U_1^{n+1} = F_1 \\ U_1^{n+1}|_{\Gamma} = U_2^n|_{\Gamma} \\ K_2 U_2^{n+1} = F_2 \\ U_2^{n+1}|_{\Gamma} = U_1^{n+1}|_{\Gamma} \end{cases} \quad (1.8)$$

Cette méthode suppose ainsi la résolution du problème sur chaque sous-domaine successivement. Avec l'avènement des ordinateurs à architecture distribuée est apparue la méthode de Schwarz parallèle, *cf.* Eq. (1.9). Dans ce cas, à chaque itération les problèmes par sous-domaine sont résolus de manière parallèle, afin de tirer partie du potentiel de tels moyens de calculs.

$$\text{Schwarz parallèle} \quad \begin{cases} K_1 U_1^{n+1} = F_1 \\ U_1^{n+1}|_{\Gamma} = U_2^n|_{\Gamma} \\ K_2 U_2^{n+1} = F_2 \\ U_2^{n+1}|_{\Gamma} = U_1^n|_{\Gamma} \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans le cas où l'on considère un découpage de la structure en deux sous-domaines, ces deux méthodes sont équivalentes puisque les séquences de solutions ainsi formées sont les mêmes sur Ω_1 ou Ω_2 . On parle aussi de méthode de Schwarz multiplicative pour la méthode alternée, et de méthode de Schwarz additive pour la méthode parallèle : la réécriture de ces méthodes sous la forme d'un point fixe fait apparaître une somme d'opérateurs, définis sur Ω_1 et Ω_2 respectivement, pour la méthode parallèle, et un produit pour la méthode alternée. Enfin, on finira en citant ici les méthodes de type "patch d'éléments finis" [Picasso *et al.*, 2008 ; Pironneau et Lozinski, 2011], généralement utilisées pour la résolution de problèmes multi-échelles. L'idée est de considérer la solution u comme la somme d'une contribution globale u_G et d'une contribution locale u_L apportée par le patch, de sorte que $u = u_G + u_L$. Comme pour les méthodes de Schwarz, différentes stratégies sont alors possibles pour l'imposition des conditions limites à chaque itération. L'intérêt principal d'une telle méthode est de pouvoir calculer une correction locale de manière flexible, *i.e.* rendre la définition du patch local indépendante des caractéristiques du modèle global.

Contrairement aux méthodes directes, les méthodes itératives ne nécessitent qu'une

faible interopérabilité entre les différents modèles (et donc solveurs) utilisés, ce qui en fait de très bons candidats pour le développement de méthodes non-intrusives.

1.2.2.3 Raccords entre différents modèles

Quelle que soit la méthode de couplage utilisée, il est nécessaire d'établir un raccord entre les différents modèles mis en jeu.

On distinguera deux types de raccord :

- Les raccords d'interface qui visent à établir des relations entre les quantités d'intérêt de part et d'autre de l'interface. On trouvera dans cette catégorie les méthodes de raccord faible comme la méthode "mortar" [Bernardi *et al.*, 1994 ; Belgacem, 1999 ; Bernardi *et al.*, 2005]. Le principe est d'imposer l'égalité des grandeurs (déplacement, effort) au sens faible, *i.e.* au travers d'une relation de dualité. Dans les cas qui seront traités dans ce manuscrit, l'égalité sera imposée au niveau du travail des efforts (produit scalaire L^2). Un tel raccord peut être utilisé au sein de méthodes de couplage fort pour conduire à des méthodes d'éléments finis hybrides.

On citera également la méthode de Nitsche [Hansbo et Hansbo, 2002 ; Becker *et al.*, 2003 ; Hansbo *et al.*, 2003 ; Fritz *et al.*, 2004 ; Massing *et al.*, 2012 ; Nguyen *et al.*, 2013] qui permet d'imposer une condition au bord de Dirichlet sous forme faible, par ajout d'un terme de travail supplémentaire dans la formulation variationnelle du problème.

- Les raccords en volume au travers d'une moyenne énergétique. Dans ce cas, la zone de raccord entre les différents modèles n'est plus une interface mais une zone de recouvrement : c'est la méthode Arlequin [Ben Dhia et Rateau, 2005 ; Ben Dhia *et al.*, 2008 ; Ben Dhia et Jamond, 2010].

Si un raccord en volume peut offrir une plus grande souplesse dans la définition de la zone de raccord, elle se révèle également beaucoup plus intrusive qu'une méthode de raccord d'interface. En effet, un raccord énergétique en volume implique la considération simultanée des grandeurs définies sur chacun des modèles. Un raccord d'interface nécessite quant à lui uniquement des échanges unidirectionnels indépendants entre les différents modèles (effort et déplacement dans les cas qui vont suivre).

Malgré tous ces efforts, il apparaît parfois que les méthodes de calcul multi-échelles / multi-modèles ne puissent pas être utilisées en pratique. En effet, dans un contexte industriel, la plupart des simulations numériques s'effectuent en utilisant des logiciels commerciaux, qui ont été développés et certifiés pour des applications prédéfinies. Ainsi il n'est pas toujours aisé d'utiliser de tels logiciels pour mettre en œuvre un calcul multi-échelles / multi-modèles donné. De plus, le récent développement des supercalculateurs permet à présent d'effectuer des simulations très ambitieuses. Les pratiques actuelles consistent alors de plus en plus en souvent à coupler différents modèles plutôt que d'intégrer toutes les spécificités requises au sein d'un unique modèle.

1.2.3 Couplage non-intrusif

Si les méthodes présentées permettent de coupler différents modèles, il reste à traiter la problématique de l'intrusivité du couplage. En effet, si le couplage en question met en jeu plusieurs modèles traités par des logiciels différents, il ne paraît pas évident de pouvoir raccorder ces derniers entre eux.

Depuis quelques temps, une nouvelle classe de méthodes est en train d'émerger : le couplage

non-intrusif. Il permet de modifier localement un modèle éléments finis, sans pour autant avoir d'impact sur l'opérateur numérique correspondant [Whitcomb, 1991 ; Gendre *et al.*, 2009].

La principale conséquence de la non-intrusivité du couplage est alors la possibilité de pouvoir aisément interfacer plusieurs codes ou logiciels, puisque aucune modification de ces derniers n'est requise. De plus, on verra que l'algorithme peut se greffer facilement sur les entrées/sorties de la plupart des logiciels commerciaux.

Actuellement, la stratégie de couplage global/local non-intrusive est à l'étude pour de nombreuses et diverses applications.

On citera notamment son application à la propagation de fissure [Passieux *et al.*, 2013 ; Gupta *et al.*, 2012]. Dans ce cas, un couplage à deux niveaux est mis en œuvre au travers de méthodes multigrilles ou encore de la GFEM : un premier modèle est utilisé pour représenter le comportement global de la structure, un second pour prendre en compte la présence de la fissure.

Le couplage non-intrusif est également à l'étude dans le contexte d'un couplage déterministe/stochastique [Chevreuil *et al.*, 2013]. L'objectif est alors de prendre en compte des incertitudes localisées au sein d'un modèle global dont l'opérateur numérique correspondant est déterministe, et ce de manière non-intrusive. L'intérêt principal d'un tel couplage est sa capacité à représenter les effets stochastiques des modèles locaux incertains à l'échelle globale sans pour autant devoir modifier l'opérateur déterministe global.

Outre le couplage de modèles différents, la méthode non-intrusive peut aussi être utilisée dans le cadre d'un raccord de discrétisations différentes. Par exemple dans [Bouclier *et al.*, 2016] un raccord entre une discrétisation éléments finis classique (polynomial) et une discrétisation NURBS est proposé.

Pour finir, on citera le cas du raccord 2D/3D non-intrusif [Guguin *et al.*, 2014]. La stratégie développée vise au raccord d'un modèle global de type plaque avec un/des modèles locaux tridimensionnels dans les zones où la modélisation plaque n'est pas utilisable (*e.g.* liaisons boulonnées).

Au final, cette méthode flexible peut être appliquée à une large gamme de problèmes [Duval *et al.*, 2016], entre autre la propagation de fissure, l'élastoplasticité, le contact, la rupture de composites [Daghia et Ladevèze, 2012], voire même des analyses en dynamique transitoire [Bettinotti *et al.*, 2014 ; Chantrait *et al.*, 2014].

Algorithme de couplage non-intrusif : une méthode flexible et universelle

Résumé

On introduit dans ce chapitre l'algorithme de couplage global/local non-intrusif. Cette méthode permet de prendre en compte un comportement localisé au sein d'un modèle global, sans pour autant nécessiter de modification de l'opérateur numérique correspondant.

Les contributions apportées à cette méthode sont les suivantes :

- *Une analyse comparative des outils d'accélération de la convergence (Quasi-Newton et relaxation dynamique) sur une large famille de problèmes. Des exemples de calculs mécaniques illustrent l'application d'un tel couplage et démontrent sa flexibilité dans un contexte logiciel industriel.*
- *La mise au point d'un environnement de couplage basé sur la librairie Message Passing Interface avec Code_Aster, permettant ainsi un interfaçage simple et efficace des modèles utilisés.*

Ce chapitre a donné lieu à une publication dans la revue Archives of Computational Methods in Engineering (Volume 23, 2016).

Sommaire

2.1	Présentation de la méthode	22
2.1.1	Algorithme de couplage, formulation non-intrusive incrémentale	22
2.1.2	Propriétés de convergence	29
2.2	Exemples numériques	33
2.2.1	Propagation de fissure	33
2.2.2	Modifications structurales, conditions aux bords	35
2.2.3	Gestion des patches multiples et interactions	38
2.3	Implémentation, caractéristiques techniques	42
2.3.1	Raccord de modèles éléments finis	42
2.3.2	Communications standardisées, couplage de codes et parallélisme	44

2.1 Présentation de la méthode

2.1.1 Algorithme de couplage, formulation non-intrusive incrémentale

2.1.1.1 Problème et notations

On considère une structure homogène occupant le domaine spatial Ω . Des conditions aux limites de Dirichlet (déplacement u_D) sont imposées sur le bord Γ_D et des conditions aux limites de Neumann (effort surfacique f_N) sont appliquées sur le bord Γ_N . Un chargement volumique f_Ω est également appliqué sur l'ensemble du domaine Ω . On cherche alors à résoudre le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) : \min_{u \in \mathcal{U}} J(u) \quad (2.1)$$

Par soucis de simplicité et de clarté de la présentation, on considère dans un premier temps un modèle de comportement linéaire élastique (\mathbf{C} est ici le tenseur de Hooke et ε le tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations). On définit alors l'espace affine \mathcal{U} , l'espace vectoriel correspondant \mathcal{U}^0 et la fonction d'énergie potentielle élastique à minimiser J .

$$\mathcal{U} = \{u \in [H^1(\Omega)]^3, u|_{\Gamma_D} = u_D\} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{U}^0 = \{u \in [H^1(\Omega)]^3, u|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (2.3)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon(u(x)) : \varepsilon(u(x)) dx - \int_{\Gamma_N} f_N(x) \cdot u(x) dx - \int_{\Omega} f_\Omega(x) \cdot u(x) dx \quad (2.4)$$

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, on introduit le problème variationnel équivalent suivant :

$$u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}^0, a(u, v) = l(v) \quad (2.5)$$

avec les définitions suivantes de la forme bilinéaire a et linéaire l :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon(u(x)) : \varepsilon(v(x)) dx \quad (2.6)$$

$$l(v) = \int_{\Gamma_N} f_N(x) \cdot v(x) dx + \int_{\Omega} f_\Omega(x) \cdot v(x) dx \quad (2.7)$$

La mise en œuvre de la méthode passe par des étapes de maillage, d'assemblage (et éventuellement de factorisation) du système linéaire correspondant et de sa résolution. Considérons maintenant qu'un détail ou un défaut localisé soit manquant dans la modélisation initiale (une fissure, une inclusion...). Il est alors impossible d'utiliser le modèle sans adaptation préalable. Quand la localisation du défaut peut être amenée à évoluer (étude paramétrique, fissure...), l'adaptation du modèle sain initial peut se révéler relativement intrusive et coûteuse.

Une manière de traiter une telle situation est de se reposer sur une partition du domaine d'étude et de mettre en place un couplage entre différents modèles (un modèle pour la prise en compte du défaut local et un second pour le reste de la structure). Sans perte de généralité, on prend ici l'exemple d'un domaine fissuré (*cf.* Fig. 2.1). Le domaine Ω est alors partitionné en deux : une partie dite globale Ω_G et une partie dite locale Ω_L , qui partagent alors une interface commune notée Γ . Les bords de Dirichlet et de Neumann Γ_D et Γ_N sont également partitionnés de la manière suivante :

- $\Gamma_{D,G} = \Gamma_D \cap \partial\Omega_G$ et $\Gamma_{D,L} = \Gamma_D \cap \partial\Omega_L$

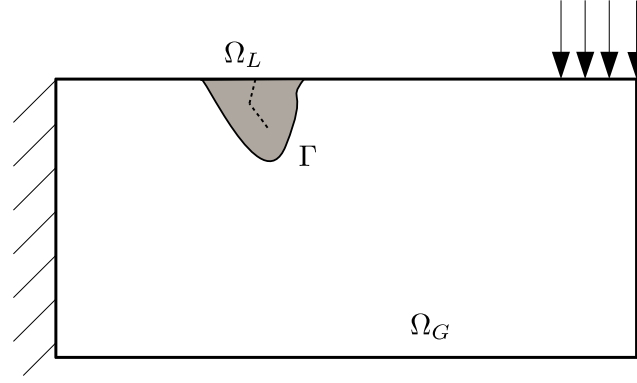


FIGURE 2.1 – Illustration de la situation : problème global/local

- $\Gamma_{N,G} = \Gamma_N \cap \partial\Omega_G$ et $\Gamma_{N,L} = \Gamma_N \cap \partial\Omega_L$

Afin de préciser le cadre variationnel dans lequel sont résolues les équations constitutives du problème de couplage global/local, on définit deux nouveaux espaces affines \mathcal{U}_G et \mathcal{U}_L (on notera \mathcal{U}_G^0 et \mathcal{U}_L^0 les espaces vectoriels correspondants).

$$\mathcal{U}_G = \{u \in [H^1(\Omega_G)]^3, u|_{\Gamma_{D,G}} = u_D\} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{U}_L = \{u \in [H^1(\Omega_L)]^3, u|_{\Gamma_{D,L}} = u_D\} \quad (2.9)$$

On introduit également $\mathcal{U}_\psi \subset L^2(\Gamma)$ l'espace fonctionnel des multiplicateurs de Lagrange qui seront utilisés pour effectuer le raccord. En effet, la continuité des déplacements et des efforts à l'interface sera imposée de manière faible *via* la méthode mortar [Bernardi *et al.*, 1994 ; Belgacem, 1999 ; Bernardi *et al.*, 2005 ; Gander et Japhet, 2013]. On obtient ainsi le problème couplé suivant :

$$\begin{aligned} u_G \in \mathcal{U}_G, \quad u_L \in \mathcal{U}_L, \quad \psi \in \mathcal{U}_\psi & \quad (2.10) \\ \forall v_G \in \mathcal{U}_G^0, \quad a_G(u_G, v_G) + b(\psi, v_G) = l_G(v_G) & \\ \forall v_L \in \mathcal{U}_L^0, \quad a_L(u_L, v_L) - b(\psi, v_L) = l_L(v_L) & \\ \forall \vartheta \in \mathcal{U}_\psi, \quad b(\vartheta, u_G - u_L) = 0 & \end{aligned}$$

avec les définitions ci-dessous.

$$a_G(u, v) = \int_{\Omega_G} \mathbf{C} \varepsilon(u(x)) : \varepsilon(v(x)) dx \quad (2.11)$$

$$a_L(u, v) = \int_{\Omega_L} \mathbf{C} \varepsilon(u(x)) : \varepsilon(v(x)) dx \quad (2.12)$$

$$l_G(v) = \int_{\Gamma_{N,G}} f_N(x) \cdot v(x) dx + \int_{\Omega_G} f_\Omega(x) \cdot v(x) dx \quad (2.13)$$

$$l_L(v) = \int_{\Gamma_{N,L}} f_N(x) \cdot v(x) dx + \int_{\Omega_L} f_\Omega(x) \cdot v(x) dx \quad (2.14)$$

$$b(\vartheta, u) = \int_{\Gamma} \vartheta(x) \cdot u(x) dx \quad (2.15)$$

Toujours en se basant sur l'exemple de la structure fissurée, il est possible d'utiliser un modèle éléments finis classique pour la partie globale, et un modèle éléments finis étendus (XFEM, [Moës *et al.*, 1999]) pour la partie locale fissurée. On définit alors φ_G , φ_L et φ_ψ les fonctions de base des espaces éléments finis correspondant respectivement à la discrétisation

de \mathcal{U}_G , \mathcal{U}_L and \mathcal{U}_ψ . On détaillera par la suite le choix de la discrétisation de l'espace des multiplicateurs de Lagrange, mais on peut d'ores et déjà noter le fait que la méthode mortar permet ici de coupler des maillages non-conformes sur l'interface Γ .

Considérons également les triangulations \mathcal{T}_G et \mathcal{T}_L respectives de Ω_G et Ω_L ainsi que leur restriction à Γ , $\mathcal{T}_{\Gamma,G}$ et $\mathcal{T}_{\Gamma,L}$. On notera n_G le nombre de degrés de liberté de \mathcal{T}_G et $n_{\Gamma,G}$ celui de $\mathcal{T}_{\Gamma,G}$. Aussi n_L et $n_{\Gamma,L}$ suivront la même définition sur le domaine local. Enfin, on notera $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi}$ la triangulation de l'interface correspondant à l'espace des multiplicateurs de Lagrange, et $n_{\Gamma,\psi}$ le nombre de ses degrés de liberté.

On définit alors les matrices relatives au problème Eq. (2.10) (matrices de raideur, matrices de couplage et vecteurs second membre).

— les matrices de raideur K_G ($n_G \times n_G$) et K_L ($n_L \times n_L$)

$$(K_G)_{ij} = \int_{\Omega_G} \mathbf{C} \varepsilon(\varphi_G^i(x)) : \varepsilon(\varphi_G^j(x)) dx \quad (2.16)$$

$$(K_L)_{ij} = \int_{\Omega_L} \mathbf{C} \varepsilon(\varphi_L^i(x)) : \varepsilon(\varphi_L^j(x)) dx \quad (2.17)$$

— les vecteurs de chargement externe F_G (n_G) et F_L (n_L)

$$(F_G)_j = \int_{\Gamma_{N,G}} f_N(x) \cdot \varphi_G^j(x) dx + \int_{\Omega_G} f_\Omega(x) \cdot \varphi_G^j(x) dx \quad (2.18)$$

$$(F_L)_j = \int_{\Gamma_{N,L}} f_N(x) \cdot \varphi_L^j(x) dx + \int_{\Omega_L} f_\Omega(x) \cdot \varphi_L^j(x) dx \quad (2.19)$$

— les matrices de couplage C_G ($n_{\Gamma,\psi} \times n_{\Gamma,G}$) et C_L ($n_{\Gamma,\psi} \times n_{\Gamma,L}$)

$$(C_G)_{ij} = \int_{\Gamma} \varphi_\psi^i \cdot \varphi_G^j dx \quad (2.20)$$

$$(C_L)_{ij} = \int_{\Gamma} \varphi_\psi^i \cdot \varphi_L^j dx \quad (2.21)$$

Si on devait utiliser un solveur monolithique pour calculer la solution du problème Eq. (2.10), le système linéaire résultant serait le suivant :

$$\begin{bmatrix} K_G & 0 & \underline{C}_G^\top \\ 0 & K_L & -\underline{C}_L^\top \\ \underline{C}_G & -\underline{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G \\ U_L \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_G \\ F_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Remarque : Afin d'alléger les notations, les opérateurs de restriction et de prolongement ne seront pas explicités. Les opérations de restriction seront alors notées avec $\cdot|$ et les opérations de prolongement avec $\underline{\cdot}$ chaque fois que cela sera nécessaire. Ces opérateurs de restriction et de prolongement ne sont en fait autres que des matrices booléennes qui transforment un objet de taille donnée (matrice ou vecteur) en un second de taille différente en sélectionnant certaines de ses valeurs ou en le complétant par des valeurs nulles.

Par exemple, on définit ici \underline{C}_G le prolongement de l'opérateur C_G de $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} \times \mathcal{T}_{\Gamma,G}$ vers $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} \times \mathcal{T}_G$. Ainsi \underline{C}_G est alors une matrice de taille $n_{\Gamma,\psi} \times n_G$, tous les coefficients ainsi ajoutés ayant été mis à zéro. On définit de la même manière \underline{C}_L , le prolongement de C_L de $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} \times \mathcal{T}_{\Gamma,L}$ vers $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} \times \mathcal{T}_L$.

Remarque : Il n'est pas aisé de déterminer une "bonne" base de discrétisation de l'espace des multiplicateurs de Lagrange \mathcal{U}_ψ [Wohlmuth, 2000 ; Wohlmuth, 2003]. Si la base

est mal choisie (*i.e.* si les conditions *inf-sup* ne sont pas respectées), l'opérateur mortar peut faire apparaître des modes de déplacement à énergie nulle. Par simplicité, l'espace de discrétisation du multiplicateur de Lagrange choisi correspond à la restriction de l'espace éléments finis local sur l'interface (*i.e.* $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} = \mathcal{T}_{\Gamma,L}$ et $\varphi_\psi = \varphi_L$ sur Γ). En effet, un tel choix produit une matrice C_L carrée inversible, de sorte qu'il ne sera pas nécessaire d'utiliser d'inverse généralisée lors du calcul des projections sur l'interface. Aucune instabilité n'a été observée dans l'ensemble des cas test traités avec ce choix d'espace de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange.

Bien sûr l'idée d'une telle partition du domaine Ω est de dissocier Ω_G et Ω_L lors du calcul. Une solution est d'utiliser un algorithme itératif de calcul global/local asymétrique, *i.e.* en résolvant alternativement un problème à déplacement imposés sur Ω_L et un problème à efforts imposés sur Ω_G jusqu'à convergence.

On définit alors les opérateurs de projection d'interface P et P^\top , respectivement de $\mathcal{T}_{\Gamma,G}$ vers $\mathcal{T}_{\Gamma,L}$ et de $\mathcal{T}_{\Gamma,L}$ vers $\mathcal{T}_{\Gamma,G}$, de sorte que $P = C_L^{-1}C_G$ et $P^\top = C_G^\top C_L^{-\top}$.

On introduit également $\Lambda_G = (K_G U_G - F_G)|_\Gamma$ et $\Lambda_L = (K_L U_L - F_L)|_\Gamma$, les forces de réaction globale et locale sur l'interface Γ .

Algorithme 1 : Algorithme de couplage global/local

Data : ϵ, Λ_L^0

$k = 0$

while $\eta > \epsilon$ **do**

Résolution du problème global (effort imposé)

$$K_G U_G^{k+1} = F_G - P^\top \Lambda_L^k$$

Résolution du problème local (déplacement imposé)

$$\begin{bmatrix} K_L & -C_L^\top \\ -C_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_L^{k+1} \\ \Psi^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ -C_L P U_G^{k+1}|_\Gamma \end{bmatrix}$$

Test de convergence

$$\eta = \|\Lambda_G^{k+1} + P^\top \Lambda_L^{k+1}\| / \sqrt{\|F_G\|^2 + \|F_L\|^2}$$

$k = k+1$

Result : U_G^k, U_L^k

Le critère d'arrêt utilisé ici est basé sur le résidu d'équilibre entre le domaine global et le domaine local sur l'interface.

Le couplage global/local est un outil efficace pour traiter les hétérogénéités d'un modèle à l'échelle locale. Néanmoins, cela nécessite la mise au point de deux nouveaux modèles distincts à chaque fois que l'on veut conduire un calcul pour un défaut local donné. Par exemple dans le cas de la fissuration locale, si la fissure se propage, le partitionnement global/local de la structure sera amené à évoluer. Une telle adaptation des modèles peut rapidement se révéler très coûteuse en temps (à la fois en termes de ressources humaines et informatiques). Il existe toutefois un moyen de conserver le modèle global inchangé lors de la prise en compte du détail local : le couplage non-intrusif [Whitcomb, 1991].

2.1.1.2 Méthode de couplage global/local non-intrusive

Le principe du couplage non-intrusif est de se reposer sur un modèle global pré-existant sur $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_{\tilde{G}}$ (cf. Fig. 2.2), sa triangulation \mathcal{T} et la matrice de raideur correspondante $K(n \times n)$.

On introduit alors $\mathcal{T}_{\tilde{G}}$ la triangulation de $\Omega_{\tilde{G}}$ et la matrice de raideur correspondante $K_{\tilde{G}}$

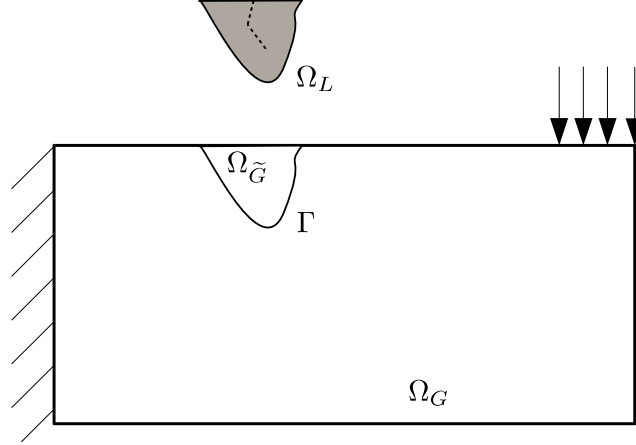


FIGURE 2.2 – Illustration de la situation : problème global/local non-intrusif

($n_{\tilde{G}} \times n_{\tilde{G}}$). Comme $\mathcal{T}_{\tilde{G}}$ est une partie de \mathcal{T} (i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_G \cup \mathcal{T}_{\tilde{G}}$), alors on a $\mathcal{T}_{\Gamma,G} = \mathcal{T}_{\Gamma,\tilde{G}}$. L'objectif est ici de remplacer le modèle global sur $\Omega_{\tilde{G}}$ par le modèle local sur Ω_L sans jamais modifier l'opérateur K défini sur Ω . En pratique, on pose U le prolongement de U_G à l'ensemble du domaine Ω , de sorte que $U|_{\Omega_G} = U_G$ et $U|_{\Omega_{\tilde{G}}} = U_{\tilde{G}}$.

Dans l'exemple de la structure fissurée, le prolongement du modèle global est effectué en se basant sur un modèle éléments finis standard, la fissure étant alors absente d'un tel prolongement.

On définit $F = \underline{F}_G + \underline{F}_{\tilde{G}}$ le vecteur chargement sur Ω . Ainsi, en appliquant la relation de Chasles sur Eq. (2.11), on obtient après discrétisation l'égalité suivante (qui sera utilisée pour adapter Alg. 1) :

$$KU = \underline{K}_G U + \underline{K}_{\tilde{G}} U \quad (2.23)$$

En utilisant cette égalité au niveau du calcul global, on peut ainsi obtenir une équation formulée sur le domaine Ω complet pour une itération k donnée, avec $\Lambda_{\tilde{G}}^k = (K_{\tilde{G}} U_{\tilde{G}}^k - F_{\tilde{G}})|_{\Gamma}$.

$$KU^{k+1} = F - \underline{P}^{\top} \Lambda_L^k + \Lambda_{\tilde{G}}^k \quad (2.24)$$

L'algorithme de couplage global/local peut ainsi être donné dans sa forme non-intrusive.

Algorithme 2 : Algorithme de couplage global/local non-intrusif

Data : $\epsilon, \Lambda_L^0, \Lambda_G^0$
 $k = 0$
while $\eta > \epsilon$ **do**
 Résolution du problème global
 $KU^{k+1} = F - \underline{P}^\top \Lambda_L^k + \underline{\Lambda}_G^k$
 Résolution du problème local

$$\begin{bmatrix} K_L & -\underline{C}_L^\top \\ -\underline{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_L^{k+1} \\ \Psi^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ -C_L P U^{k+1} \Big|_\Gamma \end{bmatrix}$$

 Test de convergence
 $\eta = \|\Lambda_G^{k+1} + P^\top \Lambda_L^{k+1}\| / \sqrt{\|F_G\|^2 + \|F_L\|^2}$
 $k = k+1$
Result : U^k, U_L^k

On peut noter que, grâce au prolongement du modèle global (*i.e.* la non-intrusivité du couplage), la matrice de raideur K sera assemblée et factorisée une seule et unique fois. Dans l'exemple de la fissure, même si celle-ci se propage, le modèle global restera inchangé. Le couplage fera uniquement intervenir des échanges d'efforts et de déplacements sur l'interface Γ (*cf.* Fig. 2.3). On remarquera également que le prolongement fictif sur $\Omega_{\tilde{G}}$ de la solution

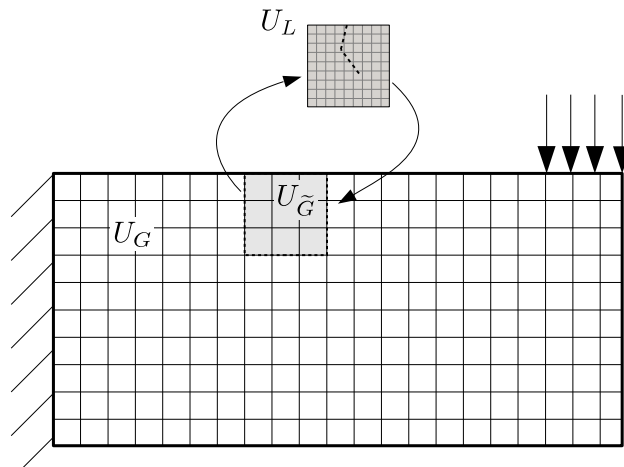


FIGURE 2.3 – Illustration de la situation : couplage non-intrusif

globale U n'a pas de sens physique, et que sa valeur dépendra uniquement de l'initialisation du couplage (*i.e.* les valeurs de Λ_L^0 et Λ_G^0). Néanmoins, étant donné que cette solution fictive est censée être remplacée par la solution du problème local, cela n'a aucune conséquence autre que son impact sur la convergence de l'algorithme (ce point sera détaillé par la suite). Le couplage non-intrusif présente ainsi plusieurs avantages :

- le maillage global sur Ω est inchangé (ainsi que la matrice de raideur globale K), ce qui s'avère intéressant pour l'analyse de structures de grandes dimensions (comportant un grand nombre de degrés de liberté),
- lorsque l'on souhaite prendre en compte un comportement local non-linéaire (cela sera le cas dans la plupart des exemples à venir), il est possible d'utiliser un solveur linéaire pour le modèle global (généralement de grande taille) et d'utiliser un solveur non-linéaire uniquement pour le modèle local (généralement de petite taille),
- la prise en compte du modèle local est effectuée par une correction du modèle global appliquée sous forme de second membre (effort d'interface), de sorte qu'il est ainsi

possible de coupler de manière non-intrusive plusieurs codes ou logiciels différents.

2.1.1.3 Formulation incrémentale – Correction globale

L'inconvénient principal de l'Algorithme 2 est sa faible vitesse de convergence. En fait, celle-ci va dépendre de l'écart de rigidité entre Ω_L et $\Omega_{\tilde{G}}$: plus l'écart est important, plus la convergence est lente. Selon le problème traité, cette propriété n'aura pas les mêmes conséquences. Par exemple, l'utilisation d'un modèle de plasticité [Gendre *et al.*, 2009 ; Liu *et al.*, 2014] modifie assez peu la rigidité locale. A l'inverse, la présence d'une fissure dans un modèle local, qui serait absente de la modélisation globale, fait apparaître un écart de raideur important, et ce d'autant plus que la fissure se propage. Pour pallier ce problème, des techniques d'accélération de convergence seront utilisées.

On se propose alors de reformuler l'algorithme de couplage non-intrusif sous forme incrémentale, mieux adaptée à l'application des techniques d'accélération et à l'étude de la convergence.

Pour cela, on aura besoin de l'équation d'équilibre du modèle global à l'itération k donnée par :

$$KU^k = F + \underline{\Lambda}_G^k + \underline{\Lambda}_{\tilde{G}}^k \quad (2.25)$$

Il est alors possible de reformuler Alg. 2 sous forme incrémentale en ajoutant le terme $-KU^k$ de part et d'autre de l'équation Eq. (2.24) posée sur le domaine global à l'itération k .

$$K(U^{k+1} - U^k) = F - \underline{P}^\top \underline{\Lambda}_L^k + \underline{\Lambda}_{\tilde{G}}^k - KU^k \quad (2.26)$$

Enfin, utiliser Eq. (2.25) dans Eq. (2.26) nous fournit la formulation suivante :

$$U^{k+1} = U^k - K^{-1}f(U^k) \quad (2.27)$$

où f est l'opérateur éléments finis qui permet d'obtenir le résidu d'équilibre entre Ω_G et Ω_L à partir du déplacement global U^k à l'itération k .

$$f(U^k) = \underline{\Lambda}_G^k + \underline{P}^\top \underline{\Lambda}_L^k \quad (2.28)$$

On remarquera que Eq. (2.27) correspond à la méthode de Newton modifiée pour la résolution de l'équation $f(U) = 0$ (on cherche à obtenir une solution vérifiant l'équilibre des efforts sur l'interface de couplage). En fait, on peut montrer que $K \approx \nabla f$.

On définit alors S_L et $S_{\tilde{G}}$, respectivement le complément de Schur primal (problème de Dirichlet à déplacement imposé sur Γ) du modèle local K_L et du modèle global (partie prolongée) $K_{\tilde{G}}$ [Gosselet et Rey, 2006]. On obtient ainsi les équations d'équilibre condensées sur l'interface Γ :

$$\Lambda_L = S_L P U|_\Gamma \quad (2.29)$$

$$\Lambda_{\tilde{G}} = S_{\tilde{G}} U|_\Gamma \quad (2.30)$$

On introduit ensuite $\Lambda_{\tilde{G}}$ dans Eq. (2.28).

$$f(U^k) = \underline{\Lambda}_G^k + \underline{P}^\top \underline{\Lambda}_L^k + \underline{\Lambda}_{\tilde{G}}^k - \underline{\Lambda}_{\tilde{G}}^k \quad (2.31)$$

De même *via* Eq. (2.25) on a $\underline{\Lambda}_G^k + \underline{\Lambda}_{\tilde{G}}^k = KU^k - F$. On obtient ainsi la formulation suivante pour la fonction de résidu d'interface f :

$$f(U^k) = KU^k - F + (\underline{P}^\top \underline{S}_L \underline{P} - \underline{S}_{\tilde{G}})U^k \quad (2.32)$$

On peut enfin donner l'expression de ∇f :

$$\nabla f = K + (\underline{P}^\top \underline{S}_L \underline{P} - \underline{S}_{\tilde{G}}) \quad (2.33)$$

On remarque alors que K est une bonne approximation de ∇f dès que l'écart entre les rigidités condensées sur l'interface des modèles global et local sont proches.

$$\|\nabla f - K\| = \|\underline{P}^\top \underline{S}_L \underline{P} - \underline{S}_{\tilde{G}}\| \quad (2.34)$$

En pratique dans le cas du domaine local fissuré (*cf.* Fig. 2.3), la matrice K est une assez mauvaise approximation de ∇f . Ainsi, la méthode Newton modifiée Eq. (2.27) nécessite un nombre d'itérations important pour converger, et ce d'autant plus que la fissure se propage (l'écart de rigidité augmente d'autant plus que la fissure est longue). De plus, dès que Ω_L est plus rigide que $\Omega_{\tilde{G}}$, l'algorithme diverge [Chevreuil *et al.*, 2013]. Dans la plupart des cas, il sera alors nécessaire d'utiliser des techniques d'accélération de la convergence (*a minima* ajouter une étape de relaxation) pour rendre exploitable un tel algorithme.

2.1.2 Propriétés de convergence

2.1.2.1 Méthode de relaxation

En pratique Eq. (2.27) est équivalente à un point fixe formulé sur l'équation $U^{k+1} = g(U^k)$ avec la définition de g suivante :

$$g(U) = U - K^{-1}f(U) \quad (2.35)$$

L'utilisation d'une méthode de relaxation (avec un paramètre ω bien choisi) procure la stabilité du schéma numérique nécessaire à la convergence de l'algorithme, même dans le cas où Ω_L est plus rigide que $\Omega_{\tilde{G}}$. Dans le cas présent, la mise en œuvre de la relaxation passe par un calcul en deux étapes pour chaque itération k . Une prédiction \bar{U}^{k+1} est calculée en utilisant la solution à l'itération précédente U^k , puis une correction est appliquée pour obtenir U^{k+1} .

$$\bar{U}^{k+1} = g(U^k) \quad (2.36)$$

$$U^{k+1} = \omega \bar{U}^{k+1} + (1 - \omega)U^k \quad (2.37)$$

Le paramètre de relaxation ω optimal peut être déterminé à partir de la connaissance des valeurs propres de l'opérateur d'itération [Chevreuil *et al.*, 2013]. Cependant, le calcul d'un tel coefficient de relaxation reste très coûteux.

2.1.2.2 Relaxation dynamique : Aitken's Delta Squared

Une autre possibilité est d'utiliser la relaxation dynamique, *i.e.* de calculer un nouveau paramètre de relaxation ω_k à chaque itération, en supposant que cette opération soit peu coûteuse.

$$\bar{U}^{k+1} = g(U^k) \quad (2.38)$$

$$U^{k+1} = \omega_k \bar{U}^{k+1} + (1 - \omega_k)U^k \quad (2.39)$$

La procédure de relaxation dynamique basée sur la formule Aitken's Delta Squared [Irons et Tuck, 1969 ; Küttler et Wall, 2008 ; Liu *et al.*, 2014] procure dans la plupart des cas une accélération certaine pour un coût de calcul négligeable.

On définit l'incrément de déplacement de prédiction δ de sorte que $\delta_{k+1} = (\bar{U}^{k+1} - U^k)|_{\Gamma}$. Le paramètre de relaxation ω est mis à jour de manière récursive avec la formule ci-dessous.

$$\omega_{k+1} = -\omega_k \frac{\delta_{k+1}^\top (\delta_{k+2} - \delta_{k+1})}{\|\delta_{k+2} - \delta_{k+1}\|^2} \quad (2.40)$$

Aucune relaxation n'est appliquée sur les deux premières itérations ($U^0 = \bar{U}^0$ et $U^1 = \bar{U}^1$) et la valeur initiale du paramètre de relaxation est arbitrairement fixée à $\omega_0 = 1$.

La procédure Aitken's Delta Squared n'implique qu'un très faible surcoût de calcul, et on verra par la suite qu'elle permet souvent d'améliorer sensiblement la vitesse de convergence de l'algorithme. De plus, l'implémentation de cette méthode est particulièrement aisée et ne nécessite aucun prérequis logiciel.

2.1.2.3 Accélération Quasi-Newton SR1

Une autre possibilité pour accélérer la convergence de l'algorithme est d'utiliser les méthodes de Quasi-Newton pour mettre à jour la matrice K . Par exemple, une mise à jour de rang un (Symmetric Rank One, SR1) permet d'approcher ∇f à moindre coût avec une grande efficacité [Conn *et al.*, 1991 ; Khalfan *et al.*, 1993 ; Kelley et Sachs, 1998 ; Nocedal et Wright, 2006 ; Gendre *et al.*, 2009 ; Khiyabani *et al.*, 2010].

On définit $d_k = U^{k+1} - U^k$ et $y_k = f(U^{k+1}) - f(U^k)$. A l'itération k on cherche à mettre à jour K_k vers K_{k+1} en utilisant la formule SR1, *via* une mise à jour de rang un vérifiant l'équation de la sécante :

$$K_{k+1} = K_k + \rho v v^\top \quad (2.41)$$

$$K_{k+1} d_k = y_k \quad (2.42)$$

Dans Eq. (2.41), v est un vecteur de même dimensions que U et $\rho = \pm 1$. Alors en injectant Eq. (2.41) dans Eq. (2.42) on obtient la relation suivante :

$$y_k - K_k d_k = \rho v v^\top d_k \quad (2.43)$$

Comme on le remarque avec Eq. (2.43), $y_k - K_k d_k$ et v sont colinéaires ($\rho v^\top d_k$ est un scalaire), ce qui garantit l'existence d'un réel α tel que v vérifie l'expression suivante :

$$v = \alpha (y_k - K_k d_k) \quad (2.44)$$

Ainsi, toujours grâce à Eq. (2.43), on a $d_k^\top (y_k - K_k d_k) = \rho d_k^\top v v^\top d_k$ ce qui nous donne :

$$\rho = \text{sgn}\{d_k^\top (y_k - K_k d_k)\} \quad (2.45)$$

puisque $v v^\top$ est une matrice semi-définie positive. Au final, la valeur de α est déduite en injectant Eq. (2.44) dans Eq. (2.43).

$$\alpha^2 = \frac{1}{|d_k^\top (y_k - K_k d_k)|} \quad (2.46)$$

Enfin, on retrouve l'équation de la mise à jour SR1 :

$$K_{k+1} = K_k + \frac{(y_k - K_k d_k)(y_k - K_k d_k)^\top}{d_k^\top (y_k - K_k d_k)} \quad (2.47)$$

Il est à noter que Eq. (2.27) peut être réécrite comme $K_k d_k = -f_k$, de sorte que Eq. (2.47) peut être donnée sous la forme simplifiée suivante, avec $f_k = f(U^k)$:

$$K_{k+1} = K_k + \frac{f_{k+1} f_{k+1}^\top}{d_k^\top f_{k+1}} \quad (2.48)$$

En définitive, grâce à la formule SR1, on obtient une approximation simple de la matrice tangente pour chaque itération k . Néanmoins, il ne faut pas oublier la contrainte de non-intrusivité de l'algorithme de couplage, *i.e.* de ne pas modifier l'opérateur K . On peut s'affranchir de cette contrainte en faisant usage de la formule Sherman-Morrison dans Eq. (2.48), ce qui nous laisse avec la relation suivante pour le calcul de $K_k^{-1} f$ à partir de la seule connaissance de $K_0^{-1} f$.

$$K_{k+1}^{-1} = K_k^{-1} - K_k^{-1} f_{k+1} \frac{f_{k+1}^\top K_k^{-1}}{f_{k+1}^\top (d_k + K_k^{-1} f_{k+1})} \quad (2.49)$$

Ci-dessous l'algorithme de calcul de la mise à jour SR1 non-intrusive [Gendre *et al.*, 2009].

Algorithme 3 : Correction global non-intrusive

Data : f_k

$i = 0$

Calculer $K_0^{-1} f_k$

while $i < k$ **do**

$$\left[\begin{array}{l} K_{i+1}^{-1} f_k = K_i^{-1} f_k - K_i^{-1} f_{i+1} \frac{f_{i+1}^\top K_i^{-1} f_k}{f_{i+1}^\top (d_i + K_i^{-1} f_{i+1})} \\ i = i + 1 \end{array} \right.$$

$d_k = -K_k^{-1} f_k$

Result : d_k

A l'itération k on suppose que $\{(f_i)_{i < k}\}$, $\{(d_i)_{i < k}\}$, $\{(K_i^{-1} f_{i+1})_{i < k-1}\}$ ont été calculés et stockés lors des précédentes itérations. Le surcoût de calcul engendré par la mise à jour SR1 non-intrusive reste faible tout en procurant une accélération de la convergence efficace (voir les exemples à suivre). En effet, comme on peut le voir dans Algorithme 3, pour une itération k donnée le solveur global n'est appelé qu'une seule fois (lors du calcul de $K_0^{-1} f_k$). Par la suite la détermination de la valeur de $K_k^{-1} f_k$ est faite de manière récursive et ne requiert que le calcul de produits scalaires sur l'interface Γ .

2.1.2.4 Influence de la géométrie du patch sur la vitesse de convergence

Dans l'exemple précédent, le patch est défini sur la région d'intérêt qui nécessite d'être traitée avec un modèle local (la zone fissurée). Néanmoins, aucun détail n'a encore été donné quant à la manière de définir le patch, ni quant à l'influence de sa géométrie sur la convergence.

En pratique il n'existe aucune règle générale sur la façon de définir le patch. Dans le cas de la propagation de fissure, on sélectionne simplement un nombre donné de couches d'éléments atour de la fissure au sein du maillage global. Les éléments ainsi retenus sont alors dupliqués

pour former le maillage local avant d'être raffinés selon les besoins du modèle local (*cf.* Fig. 2.4a et 2.4b).

Cependant, la taille et la géométrie du patch ont une influence sur la convergence de l'algorithme. En effet, comme cela a été montré précédemment, la vitesse de convergence dépend de l'écart de raideur entre le modèle global et le modèle local. On prend ici l'exemple d'une plaque fissurée en flexion trois points. L'algorithme de couplage non-intrusif est utilisé en considérant différents patches locaux pour une même situation (de une à dix couches d'éléments autour de la fissure), *cf.* Fig. 2.4. Dans cet exemple, le modèle global correspond

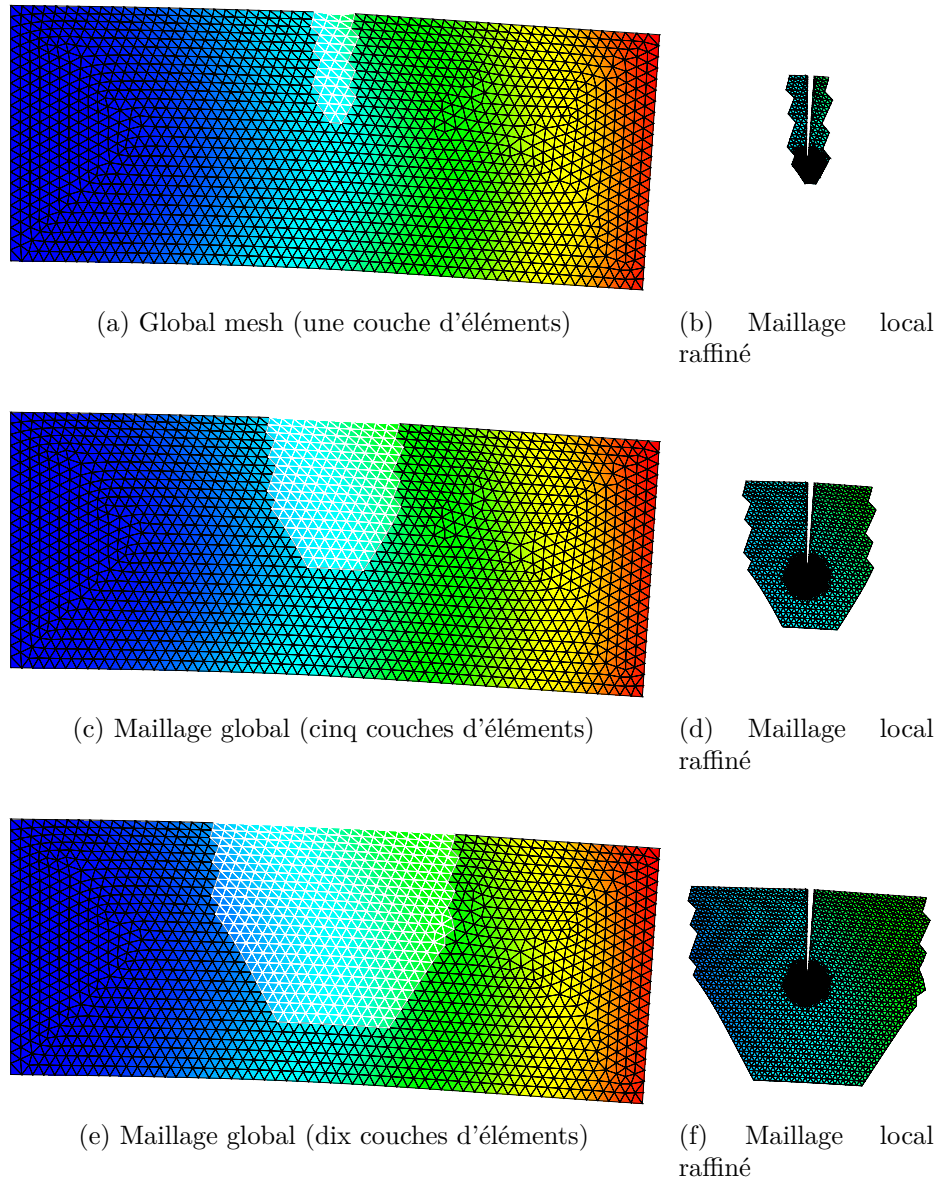


FIGURE 2.4 – Définition de la géométrie du patch par sélection des mailles globales

à la plaque saine (*i.e.* non fissurée) tandis que le modèle local contient la fissure. Plus le patch englobe d'éléments autour de la fissure, moins l'écart de raideur entre le modèle global et le modèle local sera important, et plus la convergence sera rapide (*cf.* Fig 2.5). Ce phénomène est présent quel que soit le type d'accélération utilisé (et sans accélération), même si la mise à jour Quasi-Newton permet de maintenir un nombre d'itérations presque indépendant de l'épaisseur du patch.

Cependant, il faut garder à l'esprit le fait que, plus le patch local est étendu, plus son calcul sera coûteux puisqu'il fera intervenir plus de degrés de liberté. Inversement, le patch local doit toutefois être suffisamment étendu pour permettre une prise en compte correcte du comportement local (enrichissement XFEM par exemple).

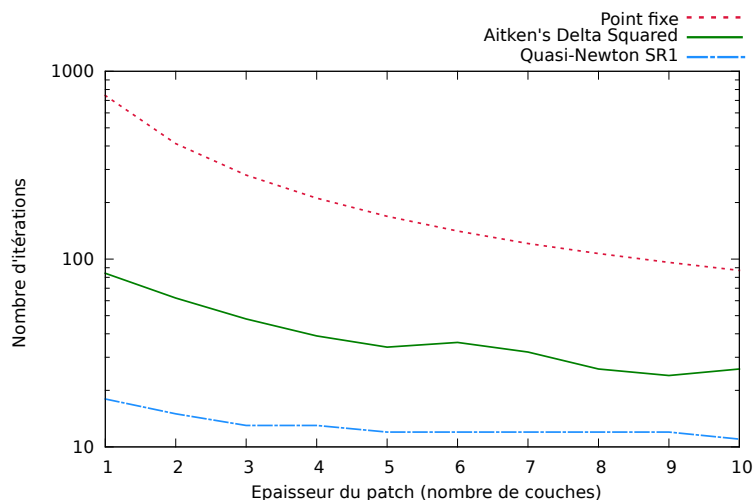


FIGURE 2.5 – Vitesse de convergence : influence de la géométrie du patch

2.2 Exemples numériques

2.2.1 Propagation de fissure

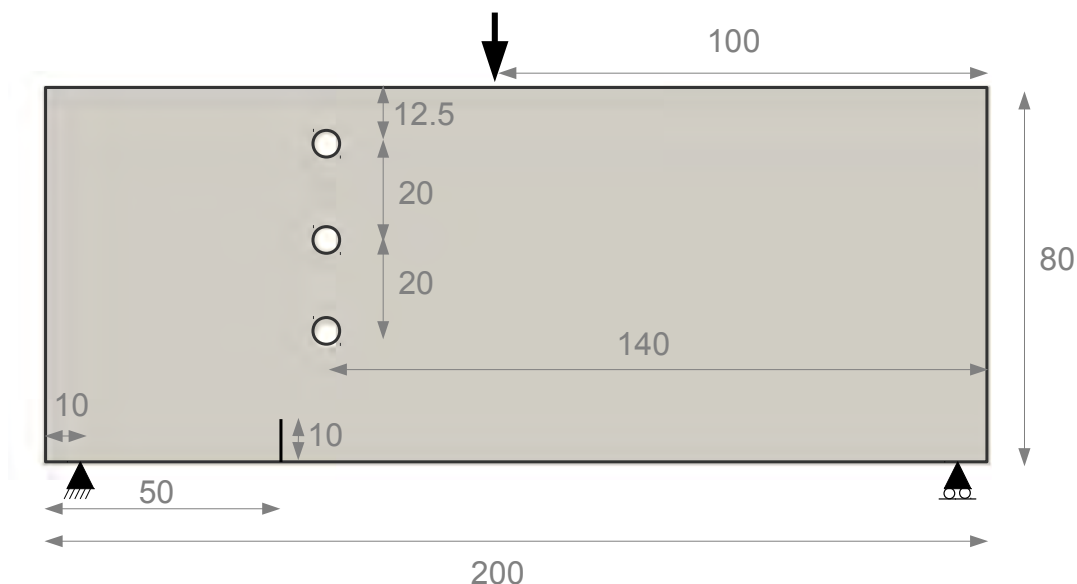


FIGURE 2.6 – Illustration du cas test

La propagation de fissure est l'exemple le plus évocateur d'un détail local conduisant à une redistribution d'efforts à l'échelle globale.

On considère une plaque rectangulaire ($200 \times 80 \text{ mm}$) en flexion trois points (force nodale

appliquée $F = 10 \text{ kN}$), ayant un comportement élastique linéaire ($E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$). Une fissure est initialement présente dans cette structure (*cf.* Fig. 2.6).

On s'intéresse alors à la propagation quasi-statique de cette fissure en utilisant l'algorithme de couplage non-intrusif. La propagation est faite sur vingt-cinq incréments de longueur $\Delta = 2 \text{ mm}$ (cette valeur est reliée à la taille des mailles locales en fond de fissure, h_{ct} , de sorte que $\Delta = 8h_{ct}$). Pour chaque incrément de propagation, l'angle de bifurcation est déterminé par la maximisation de la contrainte circonférentielle [Erdogan et Sih, 1963].

Le champ de déplacement issu du dernier incrément de propagation est illustré Fig. 2.7. On

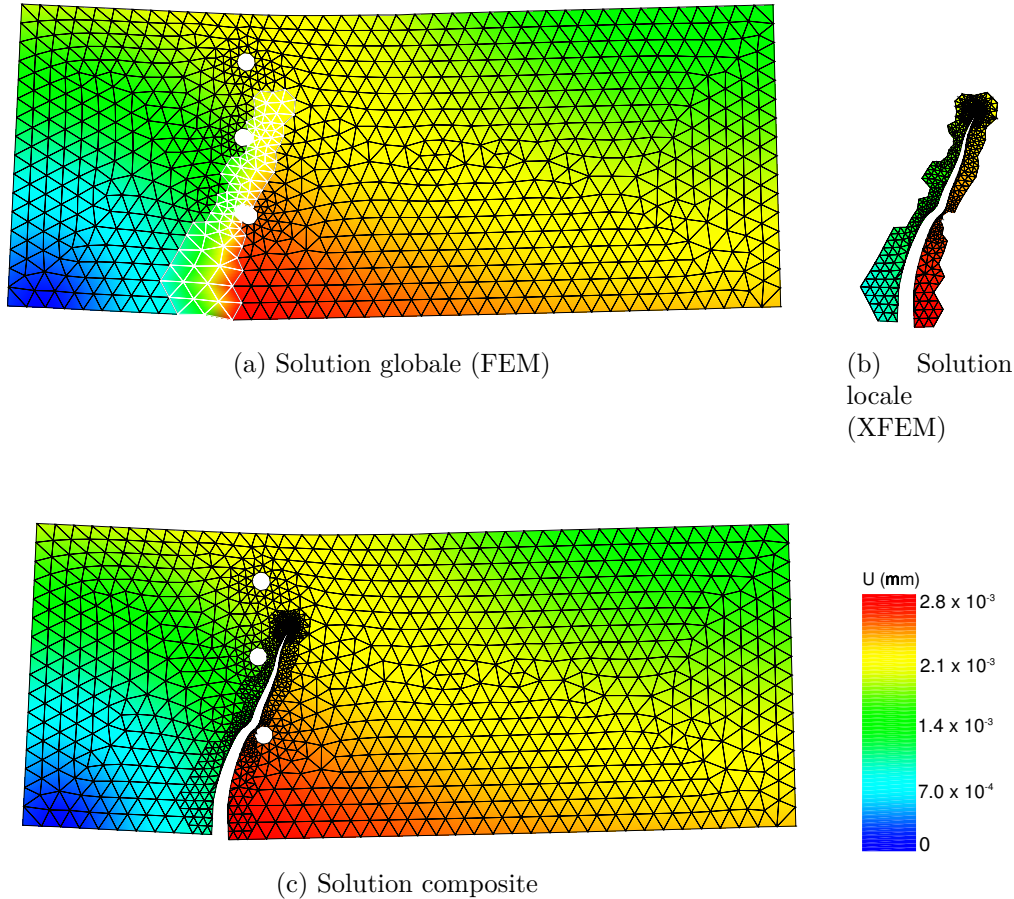


FIGURE 2.7 – Propagation de fissure non-intrusive (déformée $\times 2000$)

peut remarquer que le maillage global initial sur Ω (*cf.* Fig. 2.7a) n'est pas affecté par la présence ni la propagation de la fissure au sein du modèle local. Aussi, les maillages ne sont pas nécessairement conformes sur l'interface, ce qui permet une grande liberté dans la façon de raffiner le patch local.

Les accélérations Quasi-Newton SR1 et Aitken's Delta Squared ont été appliquées à l'algorithme de couplage, avec une tolérance sur le résidu relatif d'équilibre $\epsilon = 10^{-10}$ à chaque incrément de propagation.

Les propriétés de l'algorithme de couplage et des techniques d'accélération peuvent être observées sur cet exemple. Le premier graphe représente le lien entre la longueur de la fissure et le nombre d'itérations requis pour atteindre l'équilibre, et le second représente l'évolution du résidu au cours des itérations pour le quinzième incrément de propagation.

Deux observations importantes peuvent être faites. Premièrement, Fig. 2.9 illustre le fait que sans utiliser de méthode d'accélération, le nombre d'itérations requis pour atteindre la

tolérance fixée ϵ est fortement dépendant de la longueur de la fissure (*i.e.* l'écart de raideur entre le modèle local XFEM et le modèle global FEM, selon Eq. (2.34)). Aussi, l'accélération Quasi-Newton permet en grande partie de s'affranchir de ce phénomène puisque la raideur tangente du modèle global est mise à jour (de manière non-intrusive) *via* la correction SR1. Si on se concentre sur un incrément de propagation donné (ici le quinzième, *cf.* Fig. 2.8), on voit que les différentes méthodes produisent des résultats assez hétérogènes. Par exemple, le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la tolérance fixée sans accélération n'est clairement pas acceptable comparativement aux deux autres méthodes d'accélération. Sur cet exemple, on voit aussi que l'accélération Aitken's Delta Squared se révèle moins efficace que la mise à jour Quasi-Newton SR1.

Toutefois il est à noter que, dans cet exemple, la fissure divise presque la plaque en deux. Il n'est alors pas tout à fait raisonnable de parler de couplage "global/local". Dans les cas pratiques usuels, le patch local risque fort d'être beaucoup plus localisé en comparaison avec cet exemple. Cependant, rien n'interdit d'utiliser l'algorithme de couplage sur un tel cas critique, qui permet de surcroît de faire apparaître de manière claire les différences entre les méthodes d'accélération utilisées.

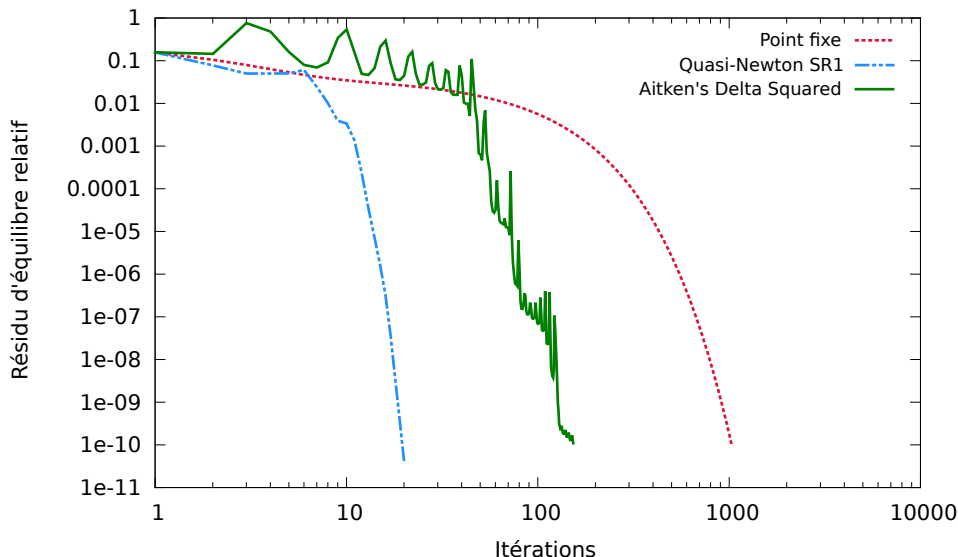
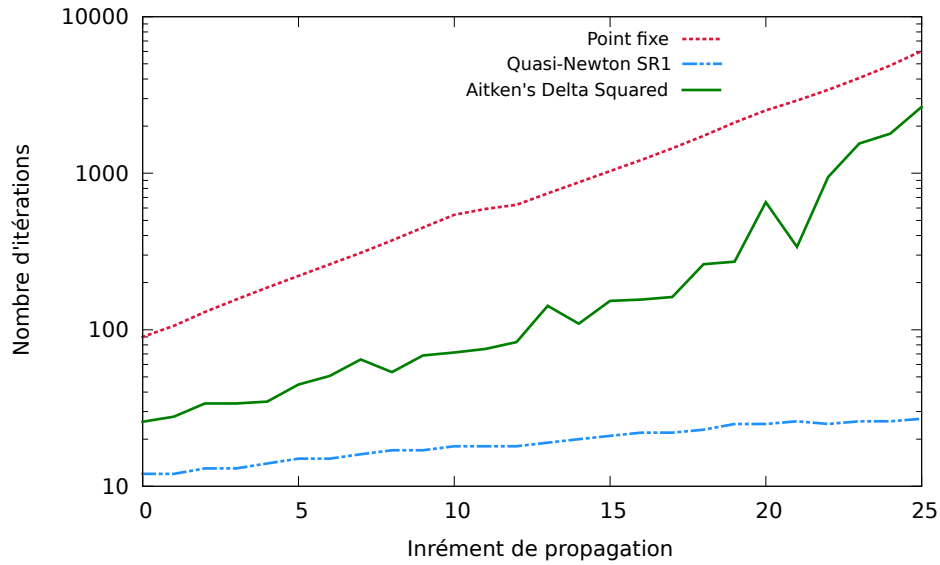


FIGURE 2.8 – Évolution du résidu (incrément 15/25)

2.2.2 Modifications structurales, conditions aux bords

Dans les exemples précédents, on a toujours considéré que le patch local était inclus dans le domaine global (*i.e.* $\Omega_L \subset \Omega$), et que le chargement externe (conditions de Neumann et de Dirichlet) était appliqué sur le domaine global Ω_G . En réalité, rien ne nous empêche de considérer un patch local ne respectant pas ces conditions. Dans l'exemple suivant (*cf.* Fig. 2.10) on considère un modèle global dont les conditions aux limites sont imposées de manière grossière. Ainsi deux patches locaux seront utilisés pour redéfinir localement la géométrie du domaine Ω et les conditions aux limites : le premier patch (à gauche) redéfinit les conditions aux bords de Dirichlet et le second (à droite) les conditions de Neumann. La conséquence majeure de l'utilisation du couplage non-intrusif dans ce cas est le fait que le modèle local sur Ω_L se substitue littéralement au modèle global sur $\Omega_{\tilde{G}}$, *i.e.* les

FIGURE 2.9 – Évolution du nombre d'itérations ($\epsilon = 10^{-10}$)

conditions aux limites appliquées au modèle global n'auront absolument aucun effet sur la solution composite à convergence. Aussi les patches locaux peuvent sans problème s'étendre au delà du domaine global, et les conditions limites appliquées à ceux-ci supplanteront celles appliquées au modèle global. En définitive, l'algorithme de couplage n'est autre qu'une recherche de l'équilibre d'interface entre un modèle défini sur Ω_G et un second défini sur Ω_L . Dans cet exemple, on considère la même plaque rectangulaire que dans les exemples

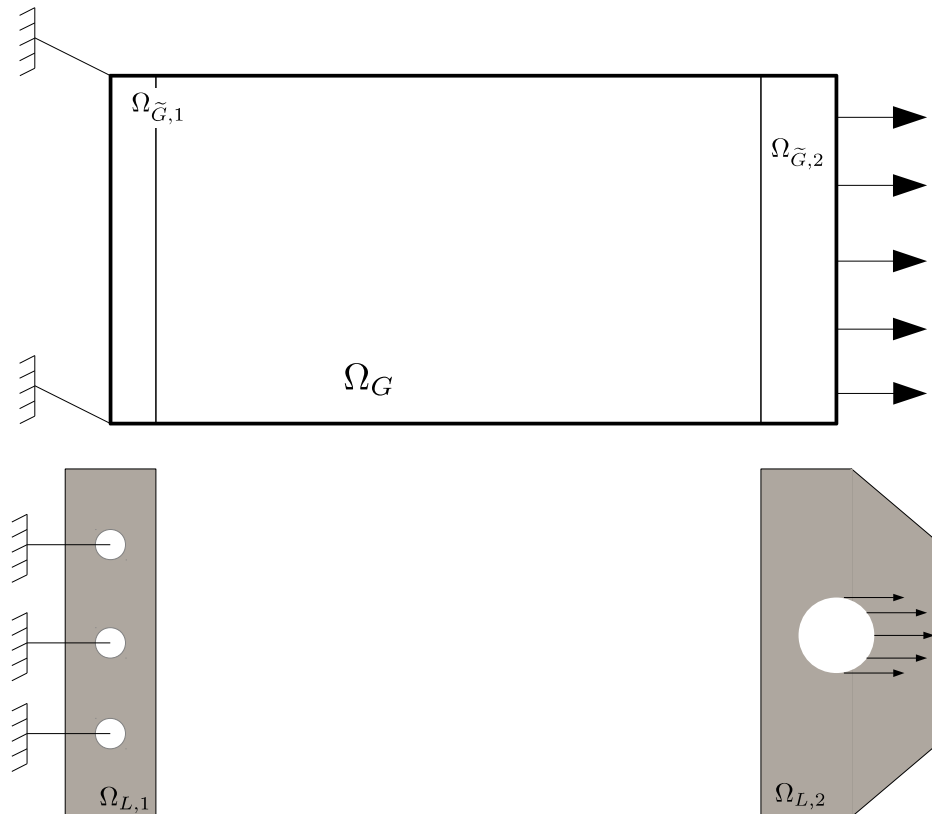


FIGURE 2.10 – Illustration du cas test

précédents, ainsi que les mêmes propriétés matériau pour le modèle global. Cependant la plaque est, cette fois-ci, chargée en traction uniforme ($P = 80 \text{ MPa}$).

Le modèle local a quant à lui un comportement élasto-plastique (plasticité linéaire, limite élastique $Re = 250 \text{ MPa}$ et module tangent $E_T = 40 \text{ GPa}$). Les conditions aux bords de Dirichlet locales sont définies par un encastrement du bord des trous contenus dans $\Omega_{L,1}$, et les conditions de Neumann sont définies par une traction uniforme appliquée sur le demi-bord droit du trou dans $\Omega_{L,2}$. La force résultante du chargement local est la même que celle du chargement global. Cette conditions n'est en aucun cas nécessaire, mais étant donné que le patch local est censé préciser les conditions aux limites globales grossières, un tel choix paraît naturel.

On peut voir Fig. 2.11 que la limite élastique du matériau est atteinte uniquement sur les

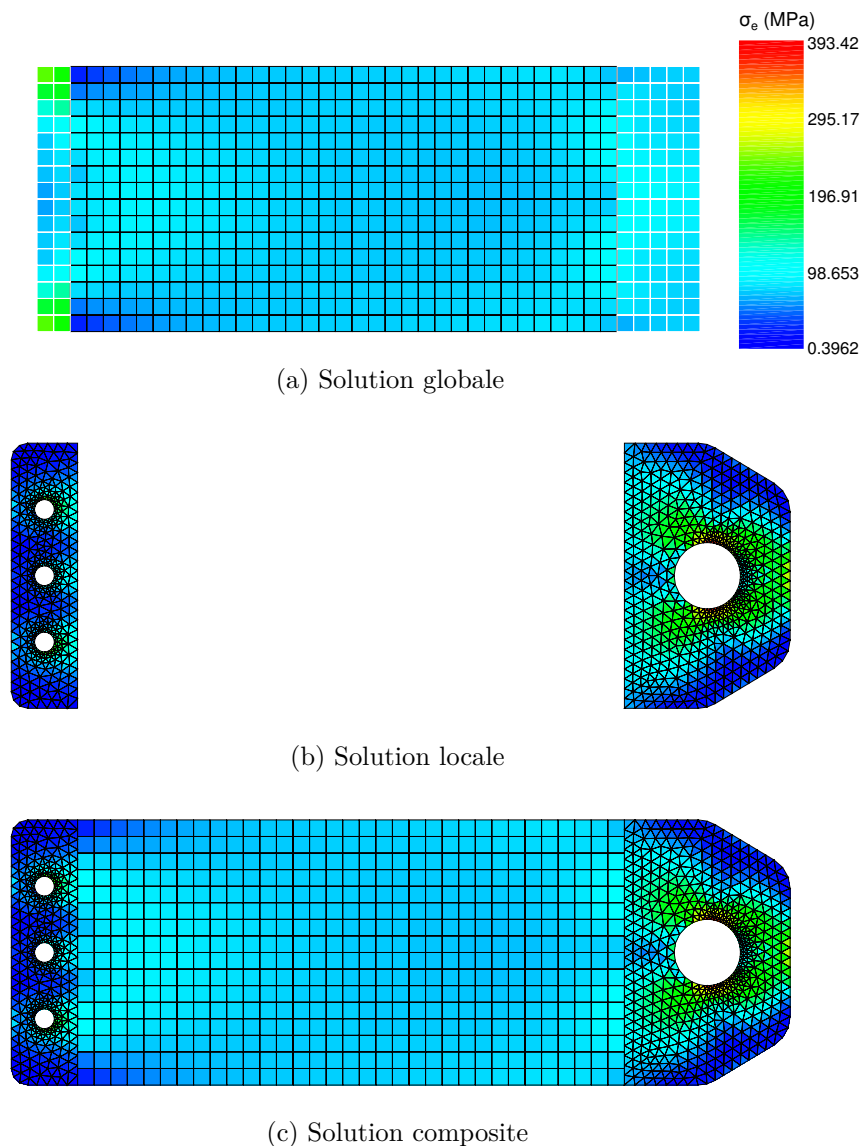


FIGURE 2.11 – Modification structurale – conditions limites (contrainte équivalente de Von Mises)

bords du trou présent dans le modèle local sur $\Omega_{L,2}$. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'étendre le modèle élasto-plastique en dehors de ce patch, ce qui rend la modélisation élastique du domaine global valide. Cependant, même si la contrainte équivalente de Von Mises dépassait

la limite élastique au sein du modèle global, la convergence du problème resterait garantie. La solution calculée serait bien sûr fautive, mais une telle situation est facile à déceler : on peut donc dans ce cas facilement vérifier si l'étendue du patch local est suffisante.

De plus, on peut voir Fig. 2.11 qu'il n'y a aucune restriction sur le choix des éléments (*e.g.* P1 / Q1) étant donné que le raccord d'interface se fait de manière faible avec la méthode mortar.

Dans cet exemple, on a délibérément forcé le domaine $\Omega_{L,1}$ à être plus rigide que le

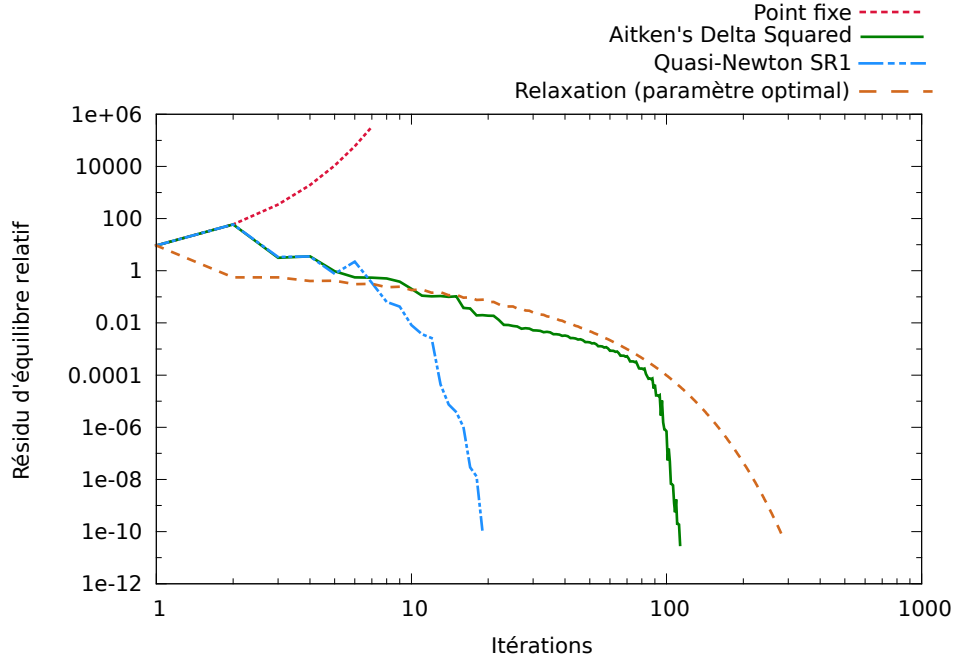


FIGURE 2.12 – Évolution du résidu

domaine global $\Omega_{\tilde{G},1}$ en encastrant les trois trous (*cf.* Fig. 2.10). Ce choix permet d'illustrer la non-convergence de l'algorithme de Newton modifié Algorithme 2 utilisé seul sans accélération (*cf.* Fig. 2.12).

Cependant, il est possible de recouvrer la stabilité de l'algorithme en utilisant de la relaxation à paramètre fixe ω [Chevreuil *et al.*, 2013]. On utilise ici la valeur optimale $\omega = 0,115$ déterminée de manière empirique. Toutefois, il est à noter que la relaxation dynamique Aitken's Delta Squared procure une convergence plus rapide, même si, sur cet exemple, la mise à jour Quasi-Newton SR1 reste la meilleure option. Cette observation est valable dès que le patch local affecte fortement le comportement mécanique de la structure globale, puisque cette dernière méthode permet d'approcher au mieux l'opérateur de raideur tangente.

De telles modifications géométriques non-intrusives rappellent les méthodes de domaine fictif [Hautefeuille *et al.*, 2012 ; Amdouni *et al.*, 2014]. Même si on se restreint au cas des interfaces géométriquement coïncidentes, il serait possible de traiter le cas d'interface quelconques moyennant un traitement spécifique de cette dernière [Bouclier *et al.*, 2016].

2.2.3 Gestion des patchs multiples et interactions

On a introduit dans l'exemple précédent une situation un peu particulière puisque le couplage s'effectuait entre un modèle global et deux modèles locaux. Il est en effet possible

d'étendre le concept de l'algorithme de couplage non-intrusif à un nombre quelconque de patches locaux.

On considère ici le cas d'une plaque multi-perforée soumise à un effort de traction uniforme ($P = 140 \text{ MPa}$), cf. Fig. 2.13.

Afin d'étendre le concept de couplage global au local au cas des patches multiples, on définit les objets suivants :

- Le domaine local unifié $\Omega_L = \cup_{i=1}^6 \Omega_{L,i}$
- Le domaine global fictif unifié $\Omega_{\tilde{G}} = \cup_{i=1}^6 \Omega_{\tilde{G},i}$
- Les interfaces locales $\Gamma = \cup_{i=1}^6 \Gamma_i$ avec $\Gamma_i = \partial\Omega_{\tilde{G},i} = \partial\Omega_{L,i}$
- L'interface globale $\Gamma_G = \partial\Omega_G \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_{\tilde{G}}$ telle que $\Gamma_G \subset \Gamma$

On peut remarquer que dès que les patches locaux ne partagent aucune interface commune (e.g. si on avait espacé les patches) alors $\Gamma_G = \Gamma$.

Pour cet exemple, on considère les mêmes propriétés matériau que précédemment : élasticité

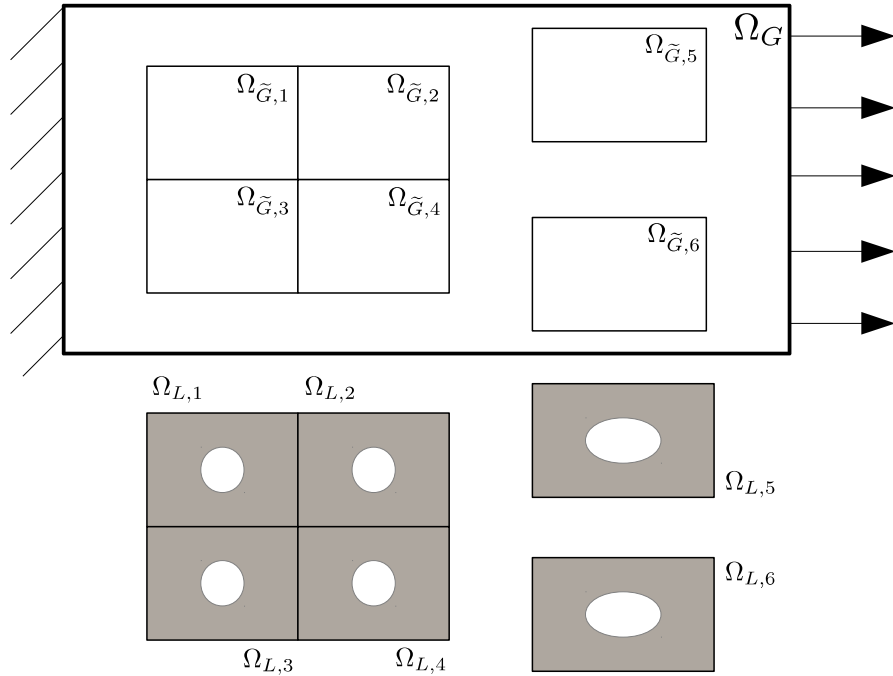


FIGURE 2.13 – Illustration du cas test

linéaire pour le domaine global non perforé $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_{\tilde{G}}$ et élasto-plasticité pour les domaines locaux perforés $(\Omega_{L,i})_{i \in \{1..6\}}$.

Aussi, on étend la définition de l'opérateur de projection P à chaque interface Γ_i , de sorte que $P_i = C_{L,i}^{-1} C_{G,i}$. On conserve également la définition de $\Lambda_G = (K_G U_G - F_G)|_{\Gamma_G}$ et de $\Lambda_{\tilde{G},i} = (K_{\tilde{G},i} U_{\tilde{G},i} - F_{\tilde{G},i})|_{\Gamma_i}$. Cependant, comme on considère un comportement élasto-plastique (i.e. non-linéaire) pour les patches locaux, les réactions locales s'écrivent alors $\Lambda_{L,i} = \zeta(U_{L,i}, F_{L,i}, \mathbf{X}_i)$ où ζ est l'opérateur non-linéaire qui calcule les forces de réaction sur l'interface à partir du déplacement $U_{L,i}$, du chargement $F_{L,i}$ et des variables internes \mathbf{X}_i . Ainsi, l'algorithme de couplage non-intrusif peut être formulé dans le cas de patches locaux multiples (\mathcal{K}_L est ici le modèle local non-linéaire).

Algorithme 4 : Algorithme de couplage global/local non-intrusif – Domaines locaux multiples

Data : $\epsilon, (\Lambda_{L,i}^0)_{i \in \{1..6\}}, (\Lambda_{\tilde{G},i}^0)_{i \in \{1..6\}}$
 $k = 0$
while $\eta > \epsilon$ **do**
 Résolution du problème global
 $KU^{k+1} = F + \sum_{i=1}^6 (-P_i^\top \Lambda_{L,i}^k + \Lambda_{\tilde{G},i}^k)$
 Résolution des problèmes locaux
 $U_{L,i}^{k+1} = \mathcal{K}_{L,i} \left(P_i U^{k+1} \Big|_{\Gamma_i}, F_{L,i}, \mathbf{X}_i \right) \quad \forall i \in \{1..6\}$
 Test de convergence
 $\eta = \|\Lambda_G^{k+1} + \sum_{i=1}^6 (P_i^\top \Lambda_{L,i}^{k+1})\| / \sqrt{\|F_G\|^2 + \sum_{i=1}^6 \|F_{L,i}\|^2}$
 $k = k+1$
Result : $U^k, (U_{L,i}^k)_{i \in \{1..6\}}$

Bien sûr, le problème peut là aussi être écrit sous forme incrémentale $U^{k+1} = U^k - K^{-1}f(U^k)$. Dans le cas où les modèles locaux sont non-linéaires, alors la fonction f le sera aussi.

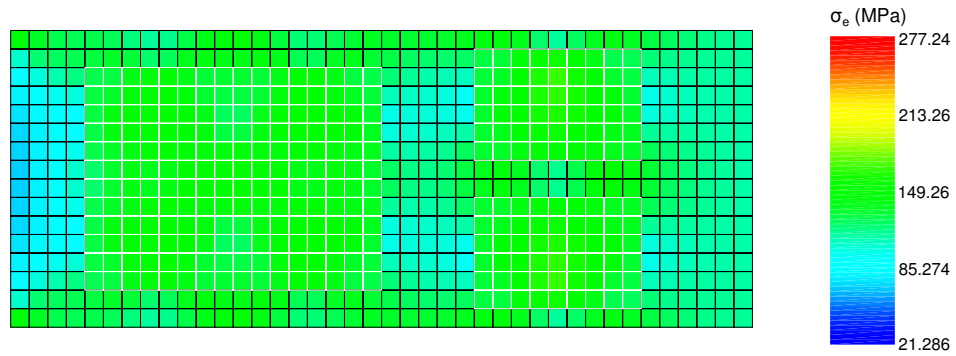
$$f(U^k) = \Lambda_G^k + \sum_{i=1}^6 (P_i^\top \Lambda_{L,i}^k) \quad (2.50)$$

On se souviendra ici du fait que la solution globale prolongée sur $\Omega_{\tilde{G}}$ n'a pas de sens physique et dépend uniquement de l'initialisation de l'algorithme. Les valeurs importantes de la contrainte sur ce domaine sont simplement la conséquence de l'équilibre recherché entre Ω_G et $\Omega_{\tilde{G}}$ avec les forces de réaction imposées sur Γ .

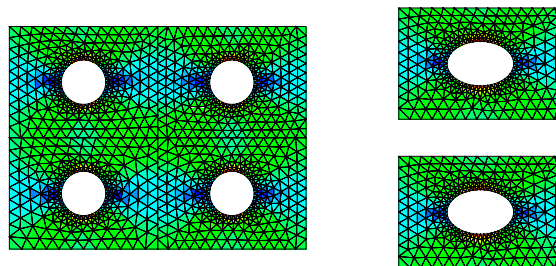
Cette fois aussi, on compare les accélérations Quasi-Newton et Aitken's Delta Squared sur cet exemple (*cf.* Fig. 2.15). En utilisant l'algorithme dans sa version standard (sans aucune accélération), seules quelques itérations sont nécessaires pour atteindre la précision voulue ($\epsilon = 10^{-10}$). Cependant, lorsque l'on utilise des modèles locaux non-linéaires, une réduction du nombre d'itérations est toujours la bienvenue, compte-tenu du coût de calcul potentiel de tels modèles. Dans le cas présent, les accélérations Quasi-Newton et Aitken's Delta Squared permettent de diviser environ par deux le nombre d'itérations pour la précision demandée par rapport à la méthode standard.

Toutefois, la mise en œuvre de la relaxation dynamique selon la formule Aitken Delta Squared est moins coûteuse que la mise à jour de l'opérateur tangent *via* la correction Quasi-Newton SR1. Dans le cas où l'écart de raideur entre le modèle global et le modèle local est faible, l'accélération Aitken's Delta Squared affiche une efficacité similaire à l'accélération SR1. Dans ce cas, on pourra préférer l'accélération Aitken's Delta Squared.

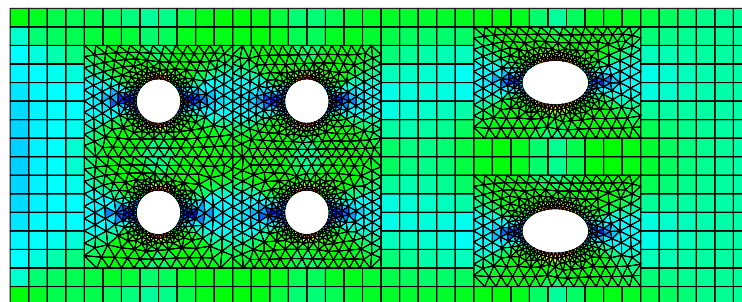
Remarque : On peut remarquer sur cet exemple que plusieurs patches partagent une interface commune. L'algorithme est conçu pour permettre l'échange d'information sur les interfaces entre le modèle global et chaque modèle local de manière indépendante, *i.e.* il n'y a jamais d'échange entre deux patches locaux. Lorsque les maillages ne sont pas conformes sur l'interface, le déplacement issu du calcul global est transféré aux modèles locaux en utilisant l'opérateur de projection mortar. Ainsi le maillage global (dont les mailles sont supposées plus grandes que celles des maillages locaux) agit comme un filtre passe-bas sur le champ de déplacement d'interface. On peut voir Fig. 2.14c que le maillage global est relativement grossier par rapport aux maillages locaux : le champ de déplacement est



(a) Solution globale



(b) Solution locale



(c) Solution composite

FIGURE 2.14 – Patches multiples (contrainte équivalente de Von Mises)

alors filtré sur les interfaces partagées entre $\Omega_{L,1}$, $\Omega_{L,2}$, $\Omega_{L,3}$ et $\Omega_{L,4}$, ce qui ne serait pas le cas si on avait utilisé un seul patch sur $\Omega_{L,1} \cup \Omega_{L,2} \cup \Omega_{L,3} \cup \Omega_{L,4}$ au lieu de quatre. Si le maillage global n'est pas assez fin à cet endroit, ou si le déplacement présente de trop fortes variations sur l'interface, alors la solution calculée risque de ne pas être pertinente du point de vue mécanique. Dans ce cas, il faudra envisager l'utilisation d'un patch unique plus étendu.

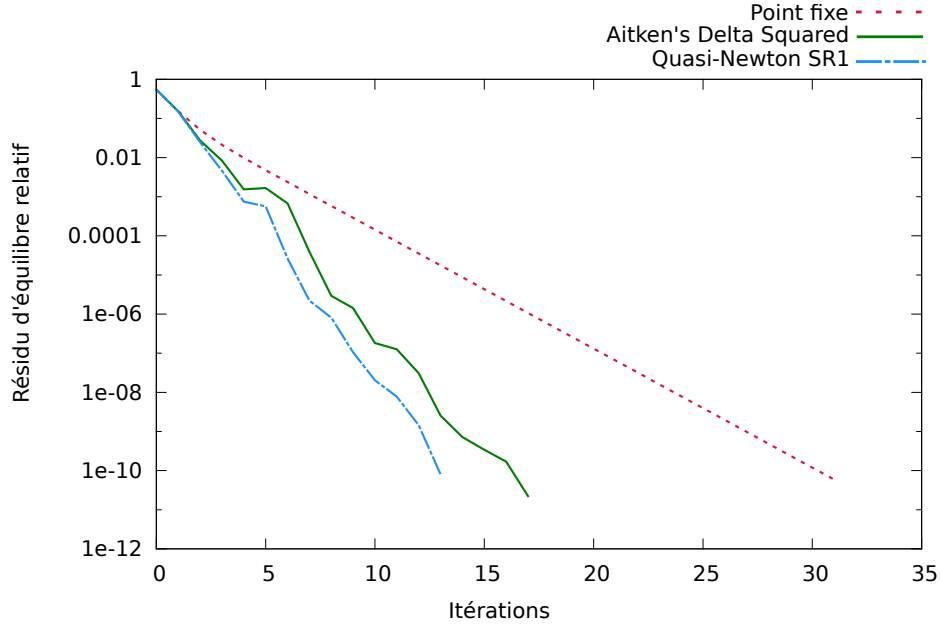


FIGURE 2.15 – Évolution du résidu

2.3 Implémentation, caractéristiques techniques

2.3.1 Raccord de modèles éléments finis

En pratique, l'algorithme présenté dans Algorithme 2 ne peut être utilisé comme tel lors de la résolution des problèmes locaux de manière non-intrusive, *i.e.* en se basant sur un code ou logiciel pour lequel aucune modification du solveur n'est possible. Par exemple, dans *Code_Aster*, la dualisation des conditions limites de Dirichlet s'effectue degré de liberté par degré de liberté et non pas de manière faible sur l'ensemble de l'interface comme cela est présenté dans Eq. (2.10). Si on note $D \in \mathbb{R}^{n_{\Gamma,L}}$ le vecteur contenant les valeurs du déplacement imposé sur chacun des degrés de liberté de l'interface Γ , et $C \in \mathcal{M}_{n_{\Gamma,L} \times n_L}(\mathbb{R})$, $C_{ij} = \delta_{ij}$ la matrice établissant la relation linéaire entre le vecteur solution U_L et le déplacement imposé D , alors le problème à résoudre est le suivant :

$$(K_L U_L - F_L)^\top V = 0, \quad \forall V \in \mathbb{R}^{n_L} \quad (2.51)$$

$$C U_L - D = 0 \quad (2.52)$$

La résolution de problème local s'écrira de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} K_L & C^\top \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_L \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ D \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

On voit donc que pour qu'il y ait équivalence entre Eq. (2.53) et la résolution locale dans Algorithme 2, il n'y a pas d'autre choix que de considérer $\mathcal{T}_{\Gamma,\psi} = \mathcal{T}_{\Gamma,L}$, *i.e.* $\varphi_\psi^i = \varphi_L^i, \forall i \in \mathcal{T}_{\Gamma,L}$. D'autre part, comme le déplacement imposé est fourni au code local sous forme d'un vecteur $D \in \mathbb{R}^{n_{\Gamma,L}}$, sa construction à partir du déplacement global U est un préalable nécessaire. Dans ce cas, on aura $D = P U|_\Gamma$.

Aussi, l'application du résidu d'équilibre au niveau global (*i.e.* l'étape de résolution globale dans Algorithme 2) nécessite de disposer d'un vecteur d'efforts généralisés exprimé

dans la base éléments finis globale (*i.e.* $\{\varphi_G^i\}_{i \in \mathcal{T}_{\Gamma,G}}$). Cependant, les forces de réaction généralisées calculées par *Code_Aster* au niveau local sont exprimées par rapport à la base éléments finis locale (*i.e.* $\{\varphi_L^i\}_{i \in \mathcal{T}_{\Gamma,L}}$). Leur application au niveau global dans Eq. (2.24) nécessite donc le calcul de $P^\top \Lambda_L = C_G^\top C_L^{-\top} \Lambda_L$.

On voit que la nécessité de l'inversion de C_L^\top est la conséquence directe de la dissociation des modèles global et local lors de la résolution (*i.e.* l'adaptation de Eq. (2.22) en Algorithme 2). L'inversibilité de C_L^\top est ici garantie par le fait que $\varphi_\psi^i = \varphi_L^i, \forall i \in \mathcal{T}_{\Gamma,L}$, la matrice C_L^\top étant alors symétrique définie positive dans ce cas.

Bien entendu, une telle contrainte réduit le champ des possibles en termes de choix de l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas où le problème eût été traité de manière monolithique, de nombreux choix auraient été possibles pour la mise en œuvre de la méthode mortar [Wohlmuth, 2000 ; Park et Felippa, 2000 ; Herry *et al.*, 2002 ; Wohlmuth, 2003 ; Brezzi et Marini, 2005], tant sur le choix des multiplicateurs que sur la construction des interfaces.

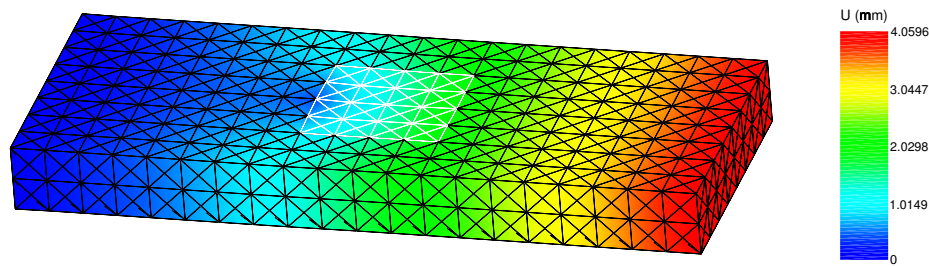
Un autre point important qui n'a pas encore été abordé jusqu'à présent concerne la construction des matrices C_G et C_L . En effet, selon la définition donnée dans Eq. (2.20–2.21) il est nécessaire de déterminer, pour deux fonctions de formes φ_G^i et φ_L^i données, l'intersection de leurs supports.

Pour les problèmes 2D, l'interface sera réduite à un ensemble de lignes brisées. Dans ce cas, le nombre d'éléments constitutifs de l'interface est souvent faible (comparativement au nombre d'éléments total), et le coût de calcul associé à la détermination de $\text{supp}(\varphi_G^i) \cap \text{supp}(\varphi_L^i)$ est négligeable puisqu'il s'agit de construire l'intersection entre deux segments de droite, d'autant plus que ceux-ci ne sont pas forcément dans le même plan.

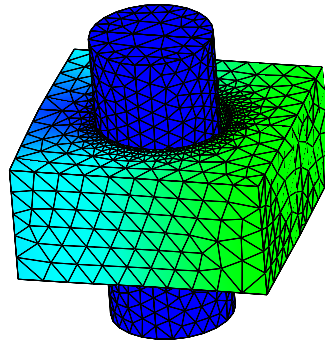
En 3D, le nombre d'éléments d'interface est sensiblement plus important (comparativement au nombre d'éléments total). De plus, la détermination de $\text{supp}(\varphi_G^i) \cap \text{supp}(\varphi_L^i)$ passe par le calcul de l'intersection de deux polygones (triangles ou quadrangles dans les cas les plus courants), opération largement plus coûteuse que dans le cas de segments de droites. Aussi, un algorithme naïf consisterait à parcourir l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}_{\Gamma,G}$, et, pour chacune d'elles, parcourir l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}_{\Gamma,L}$ afin de déterminer leur intersection. Un tel algorithme présenterait alors une complexité quadratique en $\mathcal{O}(n_{\Gamma,G} \times n_{\Gamma,L})$. En pratique, le coût de calcul se révèle prohibitif et rend une telle implémentation inutilisable.

Il est cependant possible de construire de telles matrices de mortars en utilisant un algorithme plus performant présentant une complexité linéaire [Gander et Japhet, 2013] en utilisant de l'information sur le voisinage des triangles au sein du maillage.

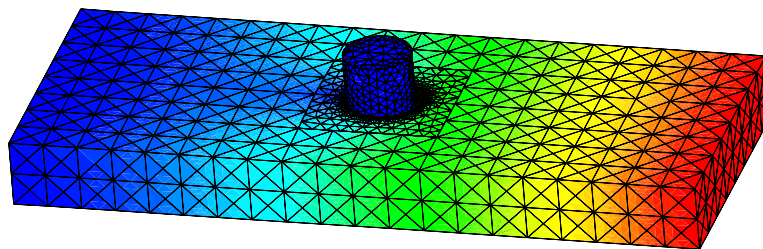
On montre ici l'exemple d'un raccord non-conforme de modèles tridimensionnels (*cf.* Fig. 2.16). Le modèle global est constitué d'un parallélépipède en traction uniforme et le modèle local présente une perforation dans laquelle vient se loger un cylindre rigide. Une relation de contact glissant est imposée entre la plaque et le cylindre au niveau du modèle local. L'interface entre le modèle global et le modèle local est donc ici surfacique et les discrétisations ne sont pas conformes (*cf.* Fig. 2.17).



(a) Solution globale



(b) Solution locale



(c) Solution composite

FIGURE 2.16 – Raccord de modèles 3D (déformée $\times 1$)

2.3.2 Communications standardisées, couplage de codes et parallélisme

Comme cela a déjà été évoqué précédemment, le couplage peut en pratique faire intervenir différents codes et/ou logiciels. Il est donc nécessaire de disposer d'un environnement de couplage adapté, *i.e.* permettant d'associer de manière non-intrusive plusieurs composants indépendants. Le choix qui a été fait pour réaliser l'ensemble des travaux présentés dans ce manuscrit repose sur une librairie bien connue dans le monde du calcul scientifique : la librairie MPI (Message Passing Interface). MPI est un protocole standardisé de communication majoritairement utilisé à des fins de calcul parallèle. Il permet en effet l'échange de messages entre plusieurs processus au travers d'un réseau. Le standard MPI supporte l'interopérabilité entre différents langages de programmation (C/C++, Fortran...) ce qui en fait un candidat idéal pour la mise en œuvre d'un couplage entre différents logiciels.

En pratique, de nombreux logiciels de calcul possèdent une API (Application Programming Interface) écrite dans un langage reconnu et couramment utilisé (C++, Python...), permettant ainsi de facilement les interfacier au travers de communications MPI (*cf.* Fig.

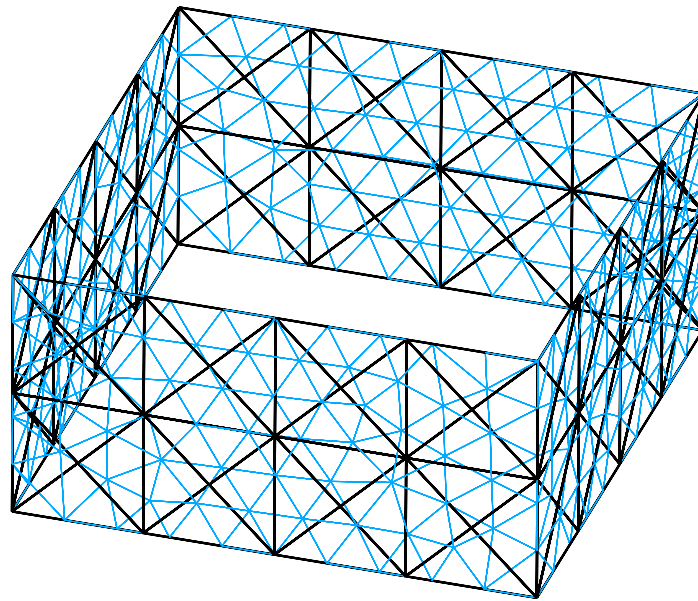


FIGURE 2.17 – Interface 3D non-conforme

2.18).

Dans le cas présent, les calculs mécaniques sont effectués par *Code_Aster* (le code d'analyse

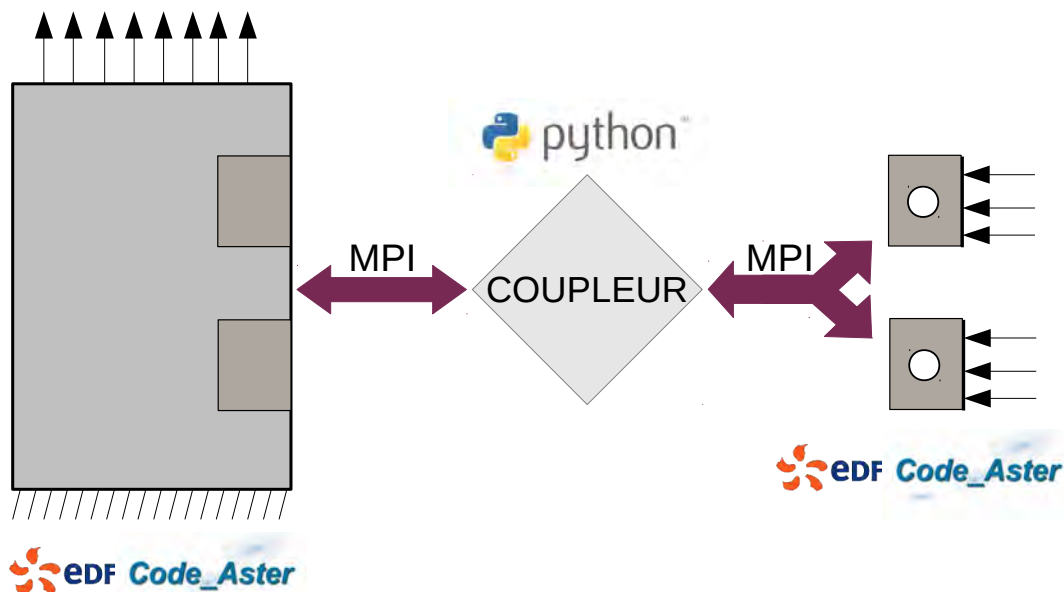


FIGURE 2.18 – Couplage de codes : MPI

de structure développé par EDF R&D [*Code_Aster*, 2016]) et un script Python permet de gérer le traitement des interfaces (projection mortar et renumérotation des degrés de liberté).

Ce type de procédé est couramment utilisé dès qu'il s'agit de coupler plusieurs logiciels, comme c'est le cas dans [*Chantrait et al.*, 2014] entre Z-set/Zébulon [*Z-set*, 2016] et Europlexus [*EPX*, 2016]. Des solutions logicielles de couplage sont également proposées par CWIPI (Coupling With Interpolation Parallel Interface, développé à l'ONERA [*CWIPI*, 2016]) ou encore OpenPALM (Projet d'Assimilation par Logiciel Multiméthodes, développé

par le CERFACS et l'ONERA [OpenPALM, 2016 ; Piacentini et The PALM Group, 2003 ; Buis *et al.*, 2006]).

Aussi, dans le cas du couplage non-intrusif dont il est question ici, chaque modèle local peut être traité de manière indépendante des autres, puisque seul le déplacement issu du modèle global à l'itération précédente est nécessaire à sa résolution. Cela veut dire qu'il est tout à fait possible d'effectuer de tels calculs locaux en parallèle. Ainsi, dans le dernier exemple (*cf.* Fig. 2.13), chacun des six patchs locaux présents a été traité par un processus de calcul différent.

Deuxième partie

Méthode de décomposition de domaine non-intrusive pour le calcul de structures non-linéaires de grandes dimensions

Dans cette partie, on s'intéresse à l'extension de la notion de couplage non-intrusif à la résolution parallèle de problèmes non-linéaires.

Lors de la résolution d'un problème par décomposition de domaine, l'objectif principal est de trouver l'état d'équilibre entre les sous-structures. La plupart des algorithmes reposent sur des procédés itératifs qui impliquent une forte interconnexion entre le traitement des équations constitutives du modèle et le solveur parallèle.

Même si ces méthodes sont particulièrement efficaces, cette imbrication entre modèle mécanique et résolution parallèle rend leur adaptation à des problèmes variés difficile, notamment dans le cadre de problèmes non-linéaires potentiellement complexes.

L'idée de l'algorithme de décomposition de domaine non-intrusif est alors de dissocier complètement les équations non-linéaires (modèle mécanique) de la couche de parallélisme.

À la manière de ce qui a été fait précédemment, un algorithme de type Quasi-Newton est utilisé, alternant entre résolutions locales non-linéaires (en parallèle) sur les sous-domaines et résolution d'un problème d'interface global linéaire.

Aucun calcul d'opérateur tangent n'est nécessaire sur les interfaces, et aucune modification des modèles et solveurs locaux n'est requise : la non-intrusivité de la méthode est préservée. Des applications peuvent alors être envisagées sur des problèmes pratiques d'ingénierie industrielle, en se basant sur des codes ou logiciels commerciaux, même si ceux-ci n'ont pas été conçus pour être utilisés en parallèle.

Cette méthode est appliquée sur des calcul tridimensionnels en non-linéaire matériau (élasto-plasticité à écrouissage isotrope non-linéaire) et géométrique (grands déplacements).

Après un état de l'art des méthodes de décomposition de domaine en calcul de structures dans le Chapitre 3, on se concentrera sur l'extension de la notion de couplage non-intrusif à la décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire dans le Chapitre 4.

Le parallélisme en calcul de structures : un état de l'art

Résumé

On dresse dans ce chapitre un état de l'art sur les méthodes de décomposition de domaine utilisées couramment en calcul de structures linéaires. Après avoir introduit la notion de sous-structuration, on présentera les différentes méthodes de calcul parallèle qui en découlent. On terminera ce chapitre par la présentation de leur extension aux problèmes non-linéaires.

Sommaire

3.1 Méthodes de décomposition de domaine linéaires pour le calcul de structure	52
3.1.1 Approches primales et duales de la décomposition de domaine . . .	52
3.1.2 Préconditionnement du problème d'interface, problème grossier . .	55
3.1.3 Méthodes mixtes	56
3.2 Extension des méthodes de décomposition de domaine aux problèmes non-linéaires	57
3.2.1 Méthodes Newton-Krylov-Schur	57
3.2.2 Stratégie de relocalisation non-linéaire	57

3.1 Méthodes de décomposition de domaine linéaires pour le calcul de structure

Dans cette section, on reprend le concept de sous-structuration déjà introduit dans le Chapitre 1, mais cette fois-ci dans le formalisme des méthodes de décomposition de domaine. Le principe de telles méthodes est en effet de considérer un découpage en sous-structures du domaines d'étude, et de résoudre un problème formulé sur l'interface ainsi formée entre les différents sous-domaines. Une revue plus détaillée des méthodes de décomposition de domaine pour le calcul de structures peut être trouvée dans [Gosselet et Rey, 2006].

3.1.1 Approches primales et duales de la décomposition de domaine

3.1.1.1 Complément de Schur, problème d'interface

Le principe de base des méthodes de décomposition de domaine repose sur la notion de complément de Schur (*i.e.* le principe de condensation statique). On considère que la structure d'étude occupe un domaine Ω qui est partitionné en N sous-domaines $\{\Omega^{(s)}\}_{s \in \{1..N\}}$. On considère alors un modèle éléments finis sur chacun de ces sous-domaines, et on note $\Gamma_{s,r}$ le bord de $\Omega^{(s)}$ en interface avec le bord de $\Omega^{(r)}$, *cf.* Fig. 3.1. Si on cherche à résoudre sur Ω le

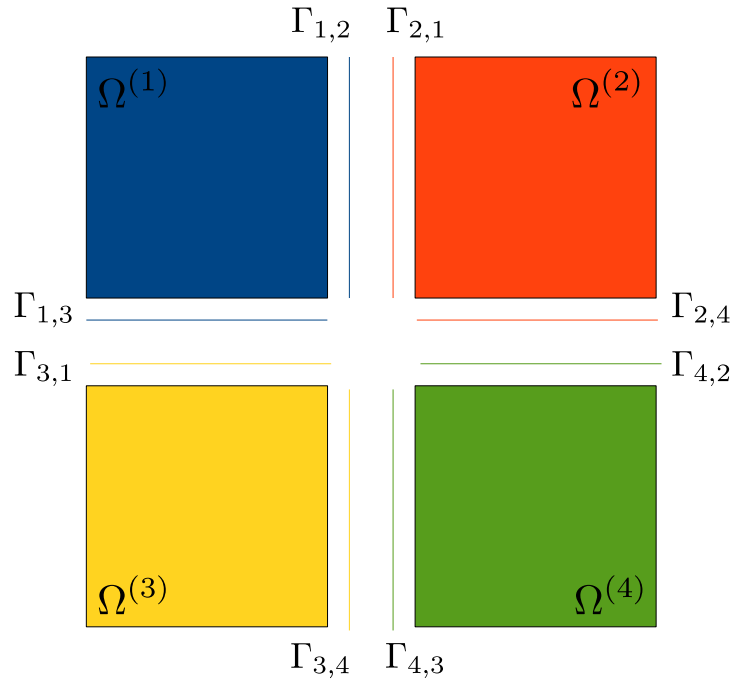


FIGURE 3.1 – Décomposition de domaine : sous-domaines et interfaces

problème $KU = F$, alors celui-ci peut se décomposer de la façon suivante, où $\Lambda^{(s)}$ représente l'effort de réaction du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ sur le reste de la structure.

$$K^{(s)}U^{(s)} = F^{(s)} + \Lambda^{(s)} \quad , \quad \forall s \in \{1..N\} \quad (3.1)$$

On introduit alors la notion de condensation du problème Eq. (3.1). Pour un sous-domaine (s) donné, l'indice i indique les degrés de libertés internes, et l'indice b indique les degrés de

liberté d'interface. En pratique, on a donc $\Lambda_i^{(s)} = 0$. En distinguant ainsi les degrés de liberté internes des degrés de liberté d'interface, l'équation $K^{(s)}U^{(s)} = F^{(s)} + \Lambda^{(s)}$ peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} \\ K_{bi}^{(s)} & K_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^{(s)} \\ U_b^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{(s)} \\ F_b^{(s)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_b^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Quelques manipulations algébriques plus tard, cela conduit à la forme condensée de l'équation, c'est-à-dire formulée uniquement sur les degrés de liberté de l'interface $\Gamma_s = \cup_{r=1}^N \Gamma_{s,r}$.

$$S_p^{(s)}U_b^{(s)} = L_b^{(s)} + \Lambda_b^{(s)} \quad (3.3)$$

L'opérateur $S_p^{(s)}$ est le complément de Schur primal de l'opérateur $K^{(s)}$ ainsi condensé sur l'interface. On a $S_p^{(s)} = K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)}(K_{ii}^{(s)})^{-1}K_{ib}^{(s)}$ et $L_b^{(s)} = F_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)}(K_{ii}^{(s)})^{-1}F_i^{(s)}$ le chargement externe condensé.

En d'autres termes, le complément de Schur primal est l'opérateur qui permet la détermination des efforts de réaction de la sous-structure considérée en réponse à un déplacement d'interface imposé.

L'équation $KU = F$ peut ainsi se décomposer sur la partition $\{\Omega^{(s)}\}_{s \in \{1..N\}}$ de façon à former un système d'équations faisant intervenir les formes condensées des problèmes par sous-structure.

$$S_p^{(s)}U_b^{(s)} = L_b^{(s)} + \Lambda_b^{(s)} \quad , \quad \forall s \in \{1..N\} \quad (3.4)$$

$$U_b^{(r)} = U_b^{(s)} \quad , \quad \forall r, s \in \{1..N\}, r \neq s, |\Gamma_{r,s}| > 0 \quad (3.5)$$

$$\sum_{s=1}^N A^{(s)}\Lambda_b^{(s)} = 0 \quad (3.6)$$

L'opérateur booléen d'assemblage $A^{(s)}$ est alors ici un opérateur de prolongement de Γ_s vers Γ .

Ainsi, ce système d'équations régit l'équilibre des efforts internes et externes pour chaque sous-domaine – Eq.(3.4) – et la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts sur les interfaces entre sous-domaines – Eq. (3.5) et Eq. (3.6).

3.1.1.2 Méthode primale

De manière équivalente, on peut aussi considérer l'équation condensée sur l'interface dans son ensemble ($\Gamma = \cup_{s=1}^N \Gamma_s$).

$$S_p U_b = L_b + \Lambda_b \quad (3.7)$$

Les quantités S_p , L_b et Λ_b sont définies de la manière suivante :

$$S_p = \sum_{s=1}^N A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)\top} \quad (3.8)$$

$$L_b = \sum_{s=1}^N A^{(s)} L_b^{(s)} \quad (3.9)$$

$$\Lambda_b = \sum_{s=1}^N A^{(s)} \Lambda_b^{(s)} \quad (3.10)$$

Notons que par Eq. (3.6), on a théoriquement $\Lambda_b = 0$.

Le point important d'une telle méthode de décomposition de domaine concerne la résolution

du problème d'interface décrit par Eq. (3.7). En effet, cette équation peut être formulée comme la somme des contributions des sous-domaines, *cf.* Eq. (3.12).

$$\sum_{s=1}^N A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)\top} U_b = \sum_{s=1}^N A^{(s)} L_b^{(s)} + A^{(s)} \Lambda_b^{(s)} \quad (3.11)$$

$$\iff \sum_{s=1}^N A^{(s)} S_p^{(s)} U_b^{(s)} = \sum_{s=1}^N A^{(s)} L_b^{(s)} + A^{(s)} \Lambda_b^{(s)} \quad (3.12)$$

Classiquement, des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires sont alors utilisées (méthodes de Krylov, *e.g.* la méthode du Gradient Conjugué). Aucune inversion des opérateurs de Schur n'est requise en pratique, et les opérations de produit matrice-vecteur peuvent ainsi être réalisées en parallèle. La décomposition de domaine primale (Balanced Domain Decomposition, BDD [Mandel, 1993]) revient donc à construire une suite de solutions par sous-domaine en imposant la continuité des déplacements aux interfaces, tout en convergeant vers une solution vérifiant l'équilibre des efforts. Autrement dit, dans le cadre de cette méthode primale, Eq. (3.5) sera toujours vérifiée au cours des itérations, alors que Eq. (3.6) ne le sera qu'à convergence.

3.1.1.3 Méthode duale

Dans le cas où on considère une sous-structure pour laquelle on chercherait le déplacement d'interface en réponse à un effort d'interface imposé, on peut utiliser la notion de complément de Schur dual.

$$U_b^{(s)} = S_d^{(s)} (L_b^{(s)} + \Lambda_b^{(s)}) + U_{Ker}^{(s)} \quad (3.13)$$

On a ici $S_d^{(s)} = (S_p^{(s)})^+$ et $U_{Ker}^{(s)} \in Ker(S_p^{(s)})$. Lorsqu'on considère une sous-structure uniquement chargée en effort sur son bord, la solution recherchée n'est pas unique et ne peut être déterminée qu'à un mouvement de corps rigide près. La matrice $S_p^{(s)}$ n'est alors pas inversible, d'où l'utilisation de la notion de pseudo inverse $(S_p^{(s)})^+$. La solution $U_b^{(s)}$ possède donc une composante $U_{Ker}^{(s)}$ appartenant au noyau de $S_p^{(s)}$. De plus, on cherche un effort d'interface tel que le chargement appliqué à la sous-structure ait un travail nul dans la base des mouvements de corps rigide, *i.e.* qui soit orthogonal au noyau de $S_p^{(s)}$.

$$U_{Ker}^{(s)\top} (L_b^{(s)} + \Lambda_b^{(s)}) = 0, \quad \forall U_{Ker}^{(s)} \in Ker(S_p^{(s)}) \quad (3.14)$$

Si on note $\mathcal{U}^{(s)}$ une base de $Ker(S_p^{(s)})$, alors on peut écrire $U_{Ker}^{(s)} = \mathcal{U}^{(s)} \alpha^{(s)}$ où $\alpha^{(s)}$ représente les coordonnées de $U_{Ker}^{(s)}$ dans la base $\mathcal{U}^{(s)}$. On peut ainsi reformuler Eq. (3.14) de la façon suivante :

$$\mathcal{U}^{(s)\top} (L_b^{(s)} + \Lambda_b^{(s)}) = 0 \quad (3.15)$$

On introduit à partir de maintenant l'opérateur booléen d'assemblage signé $\underline{A}^{(s)}$. Sa définition est la même que pour son homologue non signé, à la différence près qu'il impose un signe dépendant du côté de l'interface duquel on se trouve. Un tel opérateur permet notamment d'exprimer Eq. (3.5) sous la forme plus succincte.

$$\sum_{s=1}^N \underline{A}^{(s)} U_b^{(s)} = 0 \quad (3.16)$$

La prise en compte de la continuité des déplacements – Eq. (3.16) – dans Eq. (3.13) pour chaque sous-domaine permet de formuler l'équation d'interface duale suivante sur Γ .

$$S_d \Lambda_b + U_{Ker} = -S_d L_b \quad (3.17)$$

Dans le cas présent L_b et Λ_b suivent les mêmes définitions que dans Eq. (3.9) et Eq. (3.10) et S_d est défini de la façon suivante :

$$S_d = \sum_{s=1}^N \underline{A}^{(s)} S_d^{(s)} \underline{A}^{(s)\top} \quad (3.18)$$

On note $\mathcal{U} = [\underline{A}^{(1)} \mathcal{U}^{(1)}, \dots, \underline{A}^{(N)} \mathcal{U}^{(N)}]$ et $\alpha = [\alpha^{(1)\top}, \dots, \alpha^{(N)\top}]^\top$ de sorte que $U_{Ker} = \mathcal{U} \alpha$. Au final, le problème d'interface dual peut être écrit sous la forme d'un système matriciel vérifiant à la fois la continuité du déplacement aux interfaces, et la condition de travail nul du chargement.

$$\begin{bmatrix} S_d & \mathcal{U} \\ \mathcal{U}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_d L_b \\ -\mathcal{U}^\top L_b \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

De la même façon que pour la méthode BDD, un tel système sera résolu de manière itérative en parallèle. La décomposition de domaine duale (Finite Element Tearing and Interconnecting, FETI [Farhat et Roux, 1991]) revient donc à construire une suite de solutions par sous-domaine en imposant la continuité des efforts aux interfaces, tout en convergeant vers une solution vérifiant la continuité des déplacements.

3.1.2 Préconditionnement du problème d'interface, problème grossier

Les méthodes citées précédemment présentent des inconvénients parmi lesquels une faible extensibilité. En effet, la stratégie itérative de résolution du problème d'interface est basée sur une approche de type Krylov (Gradient Conjugué par exemple), donc sensible au conditionnement. Cependant, l'utilisation de préconditionneurs adaptés permet de grandement améliorer les performances de calcul. Classiquement, un préconditionneur efficace est obtenu par assemblage des contributions locales des compléments de Schur primaux ou duaux.

$$\tilde{S}_d^{-1} = \sum_{s=1}^N \underline{A}^{(s)} S_p^{(s)} \underline{A}^{(s)\top} \quad (3.20)$$

$$\tilde{S}_p^{-1} = \sum_{s=1}^N A^{(s)} S_d^{(s)} A^{(s)\top} \quad (3.21)$$

On parlera de préconditionneur de Neumann-Neumann pour \tilde{S}_d^{-1} (car les opérateurs $S_p^{(s)}$ correspondent à la résolution de problèmes de Neumann) et de préconditionneur de Dirichlet pour \tilde{S}_p^{-1} (car les opérateurs $S_d^{(s)}$ correspondent à la résolution de problèmes de Dirichlet). Dans la plupart des logiciels industriels, c'est une version "lumped" (on ne considère que les nœuds d'interface pour la construction du préconditionneur, *i.e.* la contribution de $K_{bb}^{(s)}$) ou "superlumped" (diagonale du préconditionneur "lumped") qui est utilisée pour des raisons de coût de calcul des préconditionneurs classiques. Aussi, des opérateurs de pondération peuvent aussi être greffés à de tels préconditionneurs, par exemple pour permettre la prise

en compte de l'hétérogénéité éventuelle des modèles considérés [Rixen et Farhat, 1999].

Dans sa version initiale, la méthode FETI ne proposait pas le traitement des mouvements de corps rigide, cf. Eq. (3.15). C'est l'introduction de ces déplacements de corps rigide (on parle de problème grossier) qui a apporté une plus grande flexibilité d'usage de la méthode, en permettant un découpage simplifié de la structure n'interdisant plus l'existence de sous-structures flottantes [Farhat et al., 1994]. La considération de modèles grossiers encore plus pertinents (e.g. par un traitement spécifique des coins des sous-domaines) dans FETI-DP [Farhat et al., 2001] et BDD-C [Dohrmann, 2003 ; Mandel et Dohrmann, 2003]) a permis de s'affranchir plus efficacement des problèmes de gestion des mouvements de corps rigide, et ainsi favoriser l'émergence de ces méthodes qui sont aujourd'hui parmi les plus utilisées en calcul de structure parallèle.

3.1.3 Méthodes mixtes

Les méthodes primales (BDD) et duales (FETI) reposent sur l'imposition d'un raccord en déplacement ou en effort des sous-structures. On impose alors dans ce cas des conditions de Dirichlet ou de Neumann aux interfaces, sur le bord des sous-domaines. Il est cependant possible de n'imposer aucune de ces deux conditions directement, mais de considérer une combinaison linéaire des deux *via* un raccord mixte (condition de Fourier-Robin) aux interfaces, cf. Eq. (3.22).

$$\left(\Lambda_b^{(s)} + \Lambda_b^{(r)}\right) + k^{(s)} \left(U_b^{(s)} - U_b^{(r)}\right) = 0 \quad , \quad \forall r, s \in \{1..N\}, r \neq s, |\Gamma_{r,s}| > 0 \quad (3.22)$$

L'opérateur $k^{(s)}$ présent dans la relation de Fourier-Robin est assimilable à une rigidité de l'interface Γ_s . La détermination de l'opérateur $k^{(s)}$ optimal fait intervenir le complément de Schur de la zone complémentaire de $\Omega^{(s)}$ (la sous-structure considérée). Son calcul est cependant inenvisageable en pratique : le coût de calcul serait beaucoup trop élevé.

On retrouve de tels raccord mixtes dans FETI-2LM [Roux, 2009] par exemple, associé à un traitement d'interfaces non-conformes par multiplicateurs de Lagrange.

Bien que hors du cadre des méthodes de type Krylov-Schur, on citera aussi la méthode LATIN (Large Time Increment Method, [Ladevèze, 1985 ; Ladevèze et al., 2001]) : dans le cas de cette méthode, les conditions de raccord sont introduites au travers de variables d'interfaces supplémentaires (notées $\hat{\cdot}$).

$$\left(\hat{\Lambda}_b^{(s)} - \Lambda_b^{(s)}\right) - k^{(s)} \left(\hat{U}_b^{(s)} - U_b^{(s)}\right) = 0 \quad (3.23)$$

$$\left(\hat{\Lambda}_b^{(r)} - \Lambda_b^{(r)}\right) - k^{(r)} \left(\hat{U}_b^{(r)} - U_b^{(r)}\right) = 0 \quad (3.24)$$

Les variables $\hat{\Lambda}_b^{(s)}$, $\hat{\Lambda}_b^{(r)}$, $\hat{U}_b^{(s)}$ et $\hat{U}_b^{(r)}$ désignent ainsi le traitement des interfaces comme une entité ayant son propre comportement mécanique, en sus des sous-domaines. Il est alors possible d'introduire les équations modélisant le comportement de l'interface $\Gamma_{s,r}$. Par exemple, dans le cas d'une interface parfaite, de telles équations s'écriront alors $\hat{\Lambda}_b^{(s)} + \hat{\Lambda}_b^{(r)} = 0$ et $\hat{U}_b^{(s)} = \hat{U}_b^{(r)}$.

On remarquera que ce genre de méthode est particulièrement adapté aux problèmes intrinsèquement sous-structurés (inclusions, assemblages, hétérogénéités...). La méthode LATIN a en effet été développée afin de traiter des problèmes aux interfaces non-linéaires (contact par exemple).

3.2 Extension des méthodes de décomposition de domaine aux problèmes non-linéaires

Les méthodes de décomposition de domaines détaillées ci-dessus sont particulièrement efficaces pour la résolution de problèmes linéaires. Cependant, de nombreuses simulations en calcul de structures font appel à des modélisations non-linéaires. On présente alors dans cette section les méthodes de calcul parallèles en non-linéaire, extensions des méthodes appliquées en linéaire.

3.2.1 Méthodes Newton-Krylov-Schur

La résolution des problèmes non-linéaires, que ce soit en calcul de structure ou dans d'autres domaines, fait souvent appel à la méthode de Newton-Raphson. Dans le cadre d'une étude non-linéaire de structure, l'application de la méthode de Newton consistera en un enchaînement de résolution de problèmes linéaires tangents (exacts ou approchés, *e.g.* sécants) sur l'ensemble de la structure. Il est alors possible de paralléliser la résolution de ces problèmes *via* une méthode de décomposition de domaine linéaire.

On parle alors de méthodes de type Newton-Krylov-Schur (NKS) : la résolution du problème non-linéaire est basée sur la méthode de Newton, la résolution des problèmes tangents linéaires fait intervenir un découpage en sous-domaine, et une résolution itérative du problème d'interface par des méthodes de type Krylov.

Cette méthode présente toutefois deux inconvénients majeurs :

- Le nombre de systèmes linéaires à résoudre consécutivement peut devenir élevé, d'autant plus qu'il y aura d'itérations dans la méthode de Newton, et d'autant plus que le découpage du trajet de chargement de la structure sera fin.

La résolution des systèmes linéaires étant généralement basée sur des méthodes spectrales, il est toutefois possible d'utiliser des stratégies de réutilisation des espaces de Krylov [Gosselet *et al.*, 2013] pour limiter le coût de calcul et ainsi réduire drastiquement le temps de résolution nécessaire.

- La linéarisation du problème à chaque itération de Newton, préalablement à la résolution du problème tangent, est une étape globale qui met en jeu l'ensemble des sous-domaines. Même si la non-linéarité est localisée sur un ou quelques sous-domaines seulement, c'est la structure dans son ensemble qui va être impactée (grand nombre d'itérations de Newton, incrémentation du chargement plus fine...).

Pour pallier ce potentiel déséquilibre en terme de répartition des non-linéarités, des préconditionneurs non-linéaires ont été mis en œuvre dans [Cai *et al.*, 2002 ; Cai et Keyes, 2002]. La procédure vise à remplacer le problème non-linéaire initial par un problème équivalent dont les non-linéarités seraient mieux réparties sur l'ensemble des sous-domaines.

3.2.2 Stratégie de relocalisation non-linéaire

Une approche permettant une meilleure prise en compte des phénomènes non-linéaires aux échelles locales a récemment émergée : il s'agit des méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire [Cresta *et al.*, 2007 ; Pebrel *et al.*, 2008 ; Barrière, 2014 ; Hinojosa *et al.*, 2014 ; Klawonn *et al.*, 2014 ; Negrello *et al.*, 2016]. Elles feront l'objet du début du prochain chapitre.

Il est montré que ces méthodes sont plus efficaces que la stratégie NKS dans le cas de

non-linéarités localisées : elles permettent en effet une concentration de l'effort de calcul sur les zones présentant un caractère non-linéaire, permettant de ce fait de réduire le nombre d'itérations de Newton globales.

Toutefois, l'inconvénient principal de telles méthodes est leur degré d'intrusivité. Jusqu'à présent, elles ont été implémentées au sein de codes de recherche adaptés pour des études académiques, mais leur extension à des cas industriels reste un enjeu majeur.

Décomposition de domaine non-intrusive pour le calcul non-linéaire

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'application du couplage non-intrusif au calcul parallèle par décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire.

On présente ses performances au travers d'un cas-test représentatif : l'étude du porte-satellites d'un train épicycloïdal en torsion au comportement mécanique élasto-plastique. On s'intéresse alors à l'extensibilité de l'algorithme à des fins de calcul intensif.

Aussi, on se penche sur l'application d'une telle méthode à des comportements non-linéaires géométriques. On montre alors les possibilités offertes par l'algorithme, mais aussi ses limites et les perspectives d'améliorations qui en découlent.

Sommaire

4.1	Présentation de l'algorithme de décomposition de domaine . . .	60
4.1.1	Relocalisation non-linéaire à déplacement imposé	60
4.1.2	Problème d'interface – Approximation de l'opérateur tangent . . .	61
4.1.3	Non-intrusivité de la méthode – utilisation de codes séquentiels fermés	62
4.2	Un exemple d'application : élastoplasticité	63
4.2.1	Présentation du cas test : porte-satellite en torsion	63
4.2.2	Propriétés de convergence	64
4.2.3	Déploiement sur le supercalculateur CALMIP	65
4.2.4	Temps de calcul – extensibilité	67
4.2.5	Stratégie incrémentale de la méthode de Newton globale	69
4.3	Non-linéarité géométrique	74
4.3.1	Présentation du cas-test	74
4.3.2	Résultats et propriétés de convergence	74
4.3.3	Limitations de la méthode – Perspectives d'évolution	76

4.1 Présentation de l'algorithme de décomposition de domaine

4.1.1 Relocalisation non-linéaire à déplacement imposé

On se propose à présent d'utiliser le couplage non-intrusif pour la résolution de problèmes non-linéaires en décomposition de domaine. L'idée est de considérer une partition de la structure globale, chacune des parties formant alors un modèle local. Le modèle global est donc ici entièrement recouvert par des patches locaux.

L'algorithme de couplage global/local non-intrusif est ensuite utilisé de la même façon que pour les exemples précédents :

- L'analyse globale linéaire (*e.g.* comportement élastique) est réalisée sur la structure complète, en la chargeant sur l'interface avec le résidu d'équilibre issu des calculs locaux précédents.
- Les analyses locales non-linéaires (*e.g.* comportement élastoplastique) sont réalisées sur chaque sous-domaine, en imposant le déplacement issu du calcul global précédent sur l'interface.

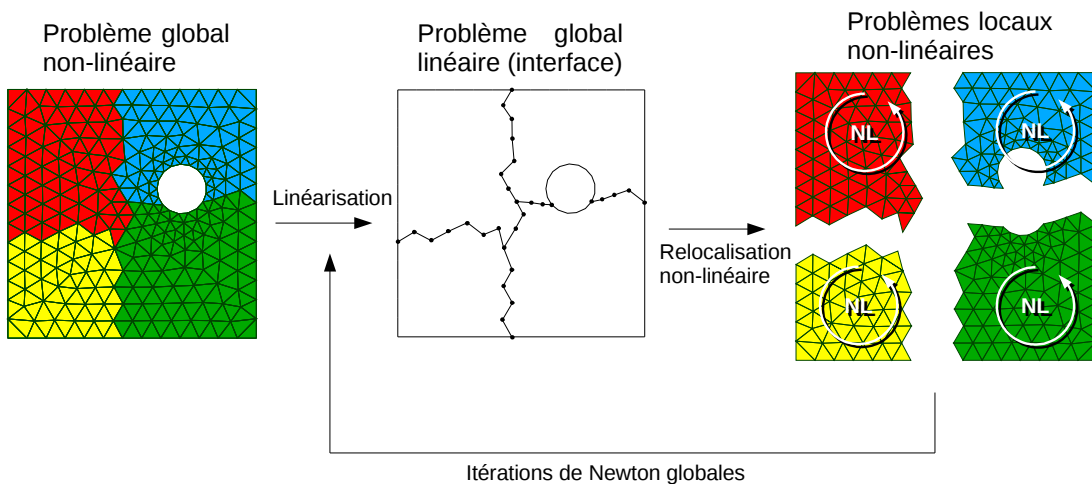


FIGURE 4.1 – Décomposition de domaine : relocalisation non-linéaire

En plus de son côté non-intrusif, cette méthode présente plusieurs autres avantages :

- Le problème global linéaire joue le rôle d'un problème physique grossier comme c'est le cas dans les méthodes FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001], BDD-C [Dohrmann, 2003], et la méthode multi-échelles LATIN [Ladevèze *et al.*, 2001]. Comme on le montrera dans les prochains exemples, ce problème grossier assure l'extensibilité de l'algorithme.
- Les non-linéarités sont confinées au sein de problèmes locaux indépendants, ce qui rend l'algorithme particulièrement efficace dans le cas de non-linéarités localisées [Cresta *et al.*, 2007 ; Pebrel *et al.*, 2008]. L'effort de calcul peut en effet être concentré sur le sous-domaine qui le nécessite.
- Quand la décomposition de domaine est utilisée en tant que solveur parallèle, les interfaces sont la plupart du temps conformes. Cependant rien n'empêche la considération d'interfaces non-conformes [Agouzal et Thomas, 1995 ; Park et Felippa, 2000 ; Herry *et al.*, 2002 ; Brezzi et Marini, 2005], surtout si on s'intéresse au traitement de modèles hétérogènes. Comme on l'a montré dans les chapitres

précédents, l'algorithme de couplage non-intrusif est entièrement compatible avec la non-conformité des interfaces.

- La méthode peut être vue comme une décomposition de domaine primale. De ce fait, aucun problème de sous-structure flottante ne se pose au niveau local.

4.1.2 Problème d'interface – Approximation de l'opérateur tangent

L'objectif de cette méthode de décomposition de domaine primale est d'équilibrer les efforts de réaction entre les sous-domaines. Autrement dit, on cherche le déplacement d'interface U_b qui vérifie l'équation suivante, $\mathcal{R}_{(s)}$ étant ici l'opérateur non-linéaire qui sert à déterminer les réactions d'interface Γ_s du sous-domaine (s) .

$$f(U_b) = \sum_{s=1}^N \mathcal{R}_{(s)}(U_b^{(s)}) = 0 \quad (4.1)$$

Cette équation peut être résolue avec la méthode de Newton selon le schéma itératif suivant.

$$U_b^{k+1} = U_b^k - \nabla f_{U_b^k}^{-1} \cdot f(U_b^k) \quad (4.2)$$

$$\nabla f_{U_b} = \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}_{(s)}}{\partial U} \quad (4.3)$$

L'expression du gradient de f fait intervenir la dérivée de chaque opérateur $\mathcal{R}_{(s)}$. Le calcul d'un tel opérateur tangent est donc une opération très coûteuse et relativement intrusive vis-à-vis du modèle non-linéaire considéré puisqu'elle nécessite de rentrer dans la technologie éléments finis propre à chaque logiciel utilisé.

Comme cela a déjà été fait dans les chapitres précédents, on va mettre en place une méthode de Quasi-Newton pour résoudre Eq. (4.1), et ainsi s'affranchir du calcul des opérateurs tangents. Les opérateurs tangents $\mathcal{R}_{(s)}$ sont alors approchés en linéarisant les modèles locaux autour de la solution initiale, nulle dans les exemples qui vont suivre. Cela revient à utiliser les compléments de Schur primaux $S_p^{(s)}$ des modèles linéaires (élastiques dans le cas présent), et les assembler (au sens des éléments finis) sur l'interface globale Γ .

$$\mathcal{R}_{(s)}(U_b^{(s)}) \approx S_p^{(s)} U_b^{(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{R}_{(s)}}{\partial U} \approx S_p^{(s)} \quad \Rightarrow \quad \nabla f \approx S_p \quad (4.4)$$

Cette linéarisation sert ainsi à initialiser l'opérateur de Quasi-Newton qui sera par la suite mis à jour grâce à la formule SR1.

$$U_b^{k+1} = U_b^k - (S_p^k)^{-1} f(U_b^k) \quad \text{avec} \quad S_p^0 = S_p \quad (4.5)$$

$$S_p^{k+1} = S_p^k + \frac{f(U_b^{k+1}) f(U_b^{k+1})^\top}{(U_b^{k+1} - U_b^k)^\top f(U_b^{k+1})} \quad (4.6)$$

On remarque que l'opérateur S_p correspond également au complément de Schur primal du modèle global linéarisé, par assemblage éléments finis.

En pratique, le calcul et l'inversion de cet opérateur est inenvisageable pour des raisons de coût de calcul. La résolution du problème pourrait donc être faite de manière itérative, par exemple avec l'algorithme du Gradient Conjugué, sans avoir à calculer S_p de manière

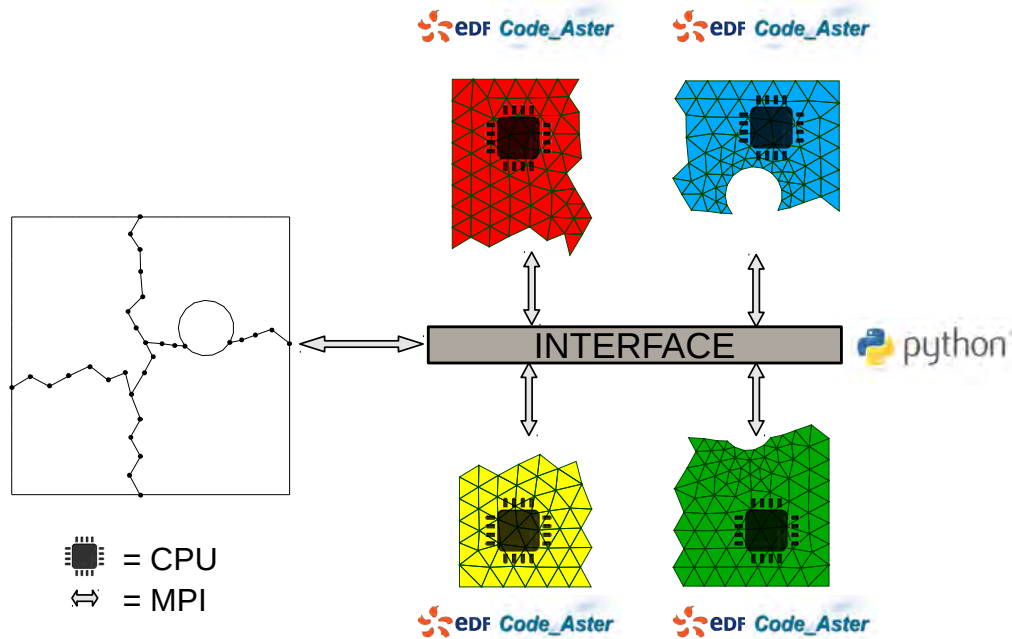
explicite. Dans les exemples qui suivent, le choix a été fait de remplacer le calcul $S_p^{-1}f(U_b)$ par l'évaluation du terme $(K^{-1}f(U_b))|_{\Gamma}$, comme cela a déjà été fait dans le cadre de l'algorithme de couplage global/local des chapitres précédents. Ici K correspond à la matrice de raideur de modèle global complet, sur l'ensemble de la structure. La résolution d'un tel système passe alors par une méthode directe, et la matrice n'est factorisée qu'une seule fois lors de l'initialisation de l'algorithme. Cette méthode présente un des coûts de calcul les moins élevés, mais nécessite le stockage d'une matrice de raideur définie sur l'ensemble du modèle. Tant que la taille du problème est telle que la mémoire disponible est suffisante, on opte pour cette méthode qui se révèle de plus la moins intrusive vis-à-vis de n'importe quel code ou logiciel éléments finis.

Comme cela sera montré par la suite, la capacité des machines actuelles permet d'adresser des problèmes à plusieurs millions de degrés de liberté avec les méthodes de résolution directes. Ceci étant, pour un problème de plus grande taille, rien n'interdit la résolution de $S_p^{-1}f(U_b)$ par une méthode itérative classique (*e.g.* BDD en s'appuyant sur le découpage existant de la structure).

4.1.3 Non-intrusivité de la méthode – utilisation de codes séquentiels fermés

Les méthodes de calcul parallèle à relocalisation non-linéaire [Cresta *et al.*, 2007 ; Pebrel *et al.*, 2008 ; Hinojosa *et al.*, 2014] sont basées sur une méthode de Newton exacte, comme présenté dans Eq. (4.2). Cependant, l'évaluation des opérateurs tangents locaux représente non seulement un coût de calcul non négligeable, mais est également très intrusive. Bien qu'efficaces et robustes, ces méthodes demandent un travail d'ingénierie important avant de pouvoir être utilisées sur un modèle non-linéaire au sein d'un logiciel donné.

La méthode proposée ici, en contrepartie de l'utilisation d'une méthode de Quasi-Newton au lieu de la méthode de Newton-Raphson classique, se veut non-intrusive vis-à-vis du code ou logiciel utilisé pour les calculs locaux non-linéaires. Autrement dit, les seuls pré-requis exigés au niveau du code local sont de pouvoir effectuer un calcul non-linéaire et d'en extraire les forces de réaction généralisées correspondant à un déplacement imposé sur le bord. La communication entre chaque sous-domaine et le modèle global (complet ou condensé sur l'interface) se fait *via* le protocole MPI. Il est important de remarquer (*cf.* Fig. 4.2) que toutes les communications se font entre le modèle global et chacun des sous-domaines locaux : aucune communication n'est effectuée en deux sous-domaines. Cela signifie que les codes ou logiciels utilisés pour les calculs non-linéaires ne sont en aucun cas parallélisés, le parallélisme prend place au niveau supérieur, celui du couplage. Autrement dit, cette méthode permet d'effectuer des calculs non-linéaires en parallèle en se reposant sur des codes séquentiels, facilitant ainsi grandement la mise en œuvre de l'algorithme dans un environnement contraint (logiciel commercial fermé par exemple).


 FIGURE 4.2 – Décomposition de domaine non-intrusive avec *Code_Aster*

4.2 Un exemple d'application : élastoplasticité

4.2.1 Présentation du cas test : porte-satellite en torsion

À titre d'exemple, on considère ici un porte satellites (train épicycloïdal) de diamètre $d = 155 \text{ mm}$. On applique un couple au niveau de l'axe central ($C = 690 \text{ kNm}$), et on encastre les axes des satellites (cf. Fig. 4.3).

L'élastoplasticité est prise en compte par un loi d'érouissage linéaire, et le chargement est appliqué en un seul incrément global. La limite élastique du matériau est fixée à 250 MPa . Ces hypothèses, volontairement simplificatrices, nous assurent une certaine homogénéité au niveau de la convergence locale lors de l'étape de localisation non-linéaire dans les sous-domaines. En effet, le matériau et le chargement choisis sont tels que chaque itération de l'algorithme de Newton global (couplage non-intrusif global/local) requiert un nombre d'itérations locales (algorithme de Newton pour la résolution du problème d'élastoplasticité) constant quels que soient l'itération globale et le sous-domaine considérés.

Bien que restrictives pour l'étude mécanique du système en question, ces hypothèses sont nécessaires pour permettre une évaluation rigoureuse de l'extensibilité de la méthode de décomposition de domaine. En effet, toute évaluation des performances parallèles de l'algorithme doit être la moins polluée possible par l'hétérogénéité des coûts de calcul entre différents sous-domaines et différentes itérations. Ces hypothèses seront levées par la suite dans les prochains cas test.

Le maillage (environ 70 000 degrés de liberté) est alors décomposé en douze parties (cf. Fig. 4.4). On applique alors l'algorithme de couplage non-intrusif, *i.e.* on alterne entre une résolution linéaire élastique sur le problème complet, et une résolution non-linéaire en élastoplasticité sur chacun des douze sous-domaines, en parallèle. Dans ce cas, les maillages locaux sont simplement des sous-ensembles du maillage global, de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser de raccord mortar puisque les interfaces sont conformes. Le champ de contrainte équivalente de Von Mises à convergence est illustré Fig. 4.5 pour un tel cas test.

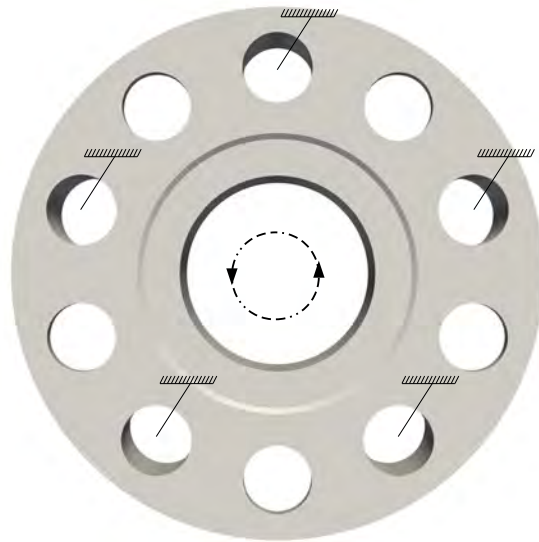


FIGURE 4.3 – Cas test : train épicycloïdal en torsion

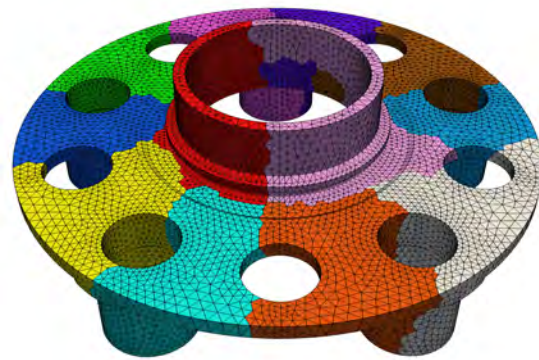


FIGURE 4.4 – Partition du maillage (douze sous-domaines)

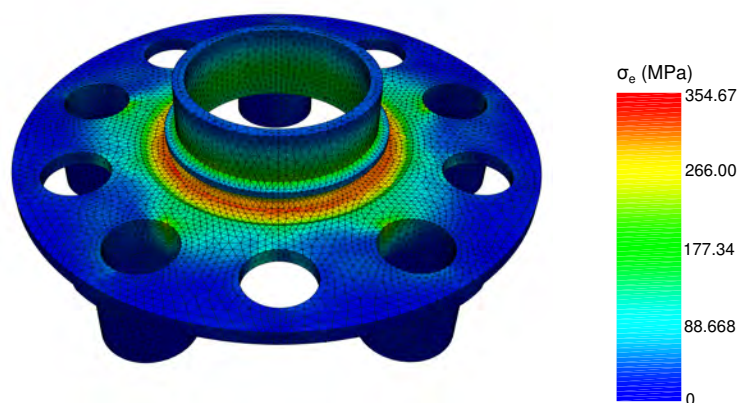


FIGURE 4.5 – Contrainte équivalente de Von Mises

4.2.2 Propriétés de convergence

Comme précédemment, les mêmes techniques d'accélération sont appliquées au cas présent, permettant d'obtenir les accélérations prévues (avec une tolérance relative sur le

résidu d'équilibre $\epsilon = 10^{-10}$, cf. Fig. 4.6). Comme prévu, les accélérations Quasi-Newton et Aitken's Delta Squared permettent une réduction significative du nombre d'itérations.

On s'intéresse alors à l'effet du nombre de sous-domaines sur la convergence. Le

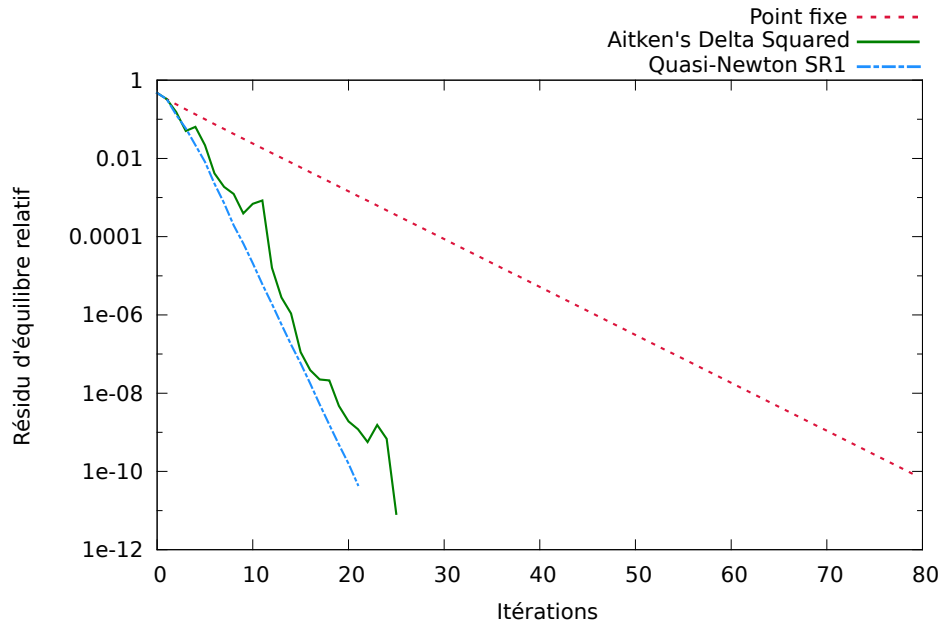


FIGURE 4.6 – Porte satellite en torsion : évolution du résidu (douze sous-domaines)

calcul présenté précédemment a été reconduit avec un nombre de sous-domaines allant de deux à soixante. On peut ainsi voir Fig. 4.7 que le nombre d'itérations requises pour atteindre la tolérance fixée ne dépend quasiment pas du nombre de sous-domaines lorsque l'on utilise la mise à jour Quasi-Newton SR1 ou l'accélération d'Aitken.

Comme dans le cas des méthodes de décomposition de domaine linéaires (FETI et BDD notamment), c'est la présence du problème global qui permet une propagation de l'information locale (issue des calculs non-linéaires) au niveau de la structure globale, procurant ainsi l'extensibilité observée.

4.2.3 Déploiement sur le supercalculateur CALMIP

Afin d'évaluer les performances parallèles de la méthode, on a effectué une campagne de calculs sur différents maillages et différents nombres de sous-domaines :

- Un premier maillage comportant cinq-cent-mille degrés de liberté, pour un nombre de sous-domaines allant de deux à trente-deux.
- Un second maillage comportant un million de degrés de liberté, pour un nombre de sous-domaines allant de deux à soixante-quatre.
- Un troisième et dernier maillage comportant deux millions de degrés de liberté, pour un nombre de sous-domaines allant de deux à cent vingt-huit.

Le modèle et le chargement considérés sont les mêmes que ceux décrits dans la section précédente.

Les calculs ont été réalisés sur le mésocentre de calcul de la région Midi-Pyrénées (CALMIP). Ses caractéristiques principales sont les suivantes :

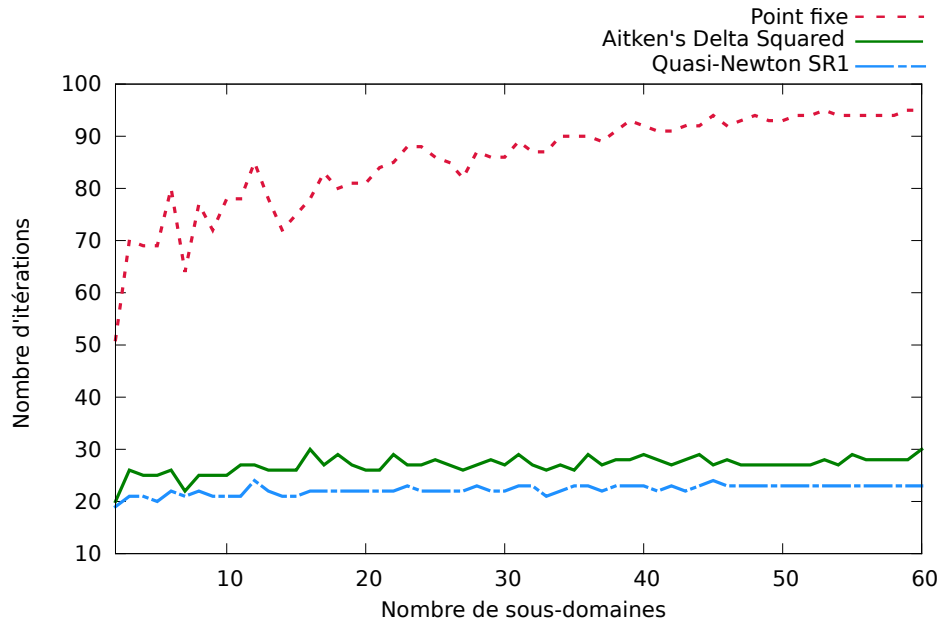


FIGURE 4.7 – Décomposition de domaine : extensibilité numérique

- Calculateur EOS classé 183^e au TOP 500 en juin 2014.
- Cluster Bullx DLC.
- 612 noeuds de calculs (processeurs Intel Ivybridge 2,8 GHz 10-cores) pour un total de 12240 cores.
- 20 cores / 64 GB RAM par nœud.
- Interconnexion "Infiniband Full Data Rate", topologie "fat-tree" sans facteur de blocage.

Un script *Bash* supervise le lancement des calculs. Le code global et les codes locaux sont démarrés de manière indépendante (plusieurs instances de *Code_Aster* cohabitent donc en même temps sur la machine), et leur interconnexion se fait sur le principe du mode clients (codes locaux) / serveur (code global) du protocole MPI.

Un nœud de calcul est réservé pour le modèle global, ce qui permet une parallélisation en mémoire partagée sur 20 cores lors de la factorisation de la matrice de raideur K . Un core est ensuite affecté à chaque sous-domaine, ainsi répartis sur les autres nœuds de calcul réservés.

Remarque : Il est important de noter que la parallélisation du calcul se fait *via* l'algorithme de couplage non-intrusif, au niveau de la surcouche Python. Seule une version séquentielle de *Code_Aster* est nécessaire pour mener à bien le calcul par décomposition de domaine.

Il n'est pas exclu de pouvoir mettre en place des méthodes de parallélisme hybride (*i.e.* paralléliser la résolution de chaque problème local non-linéaire) pour encore gagner en efficacité. Cependant, la parallélisation en mémoire partagée de la résolution des problèmes locaux s'avère actuellement peu efficace. En effet, seule l'étape de factorisation des matrices tangentes (de la méthode de Newton pour les calculs locaux non-linéaires) est parallélisée dans la version de *Code_Aster* utilisée sur le calculateur. Or cette étape représente au final une assez faible partie de l'ensemble du temps de calcul nécessaire à une itération de la méthode de Newton (le reste du temps étant occupé par l'intégration

des relations de comportement, la réactualisation de la configuration géométrique...). Un parallélisme hybride efficace nécessiterait l'utilisation d'un algorithme de calcul local non-linéaire distribué, par exemple en utilisant les bibliothèques MUMPS [MUMPS, 2016] ou PETSc [PETSc, 2016].

L'usage de ces bibliothèques permettrait la parallélisation d'un plus grand nombre d'étapes lors de la résolution des problèmes locaux. Cependant, elles requièrent l'utilisation d'une version distribuée de *Code_Aster*, ce qui est incompatible avec l'utilisation de MPI au niveau du superviseur Python (communications globales / locales). De plus, l'installation optimale (*i.e.* en exploitant au mieux les ressources matérielles au travers de compilateurs et de bibliothèques d'algèbre linéaire dédiés) de *Code_Aster* dans un environnement parallèle requiert des compétences d'ingénierie informatique avancées.

4.2.4 Temps de calcul – extensibilité

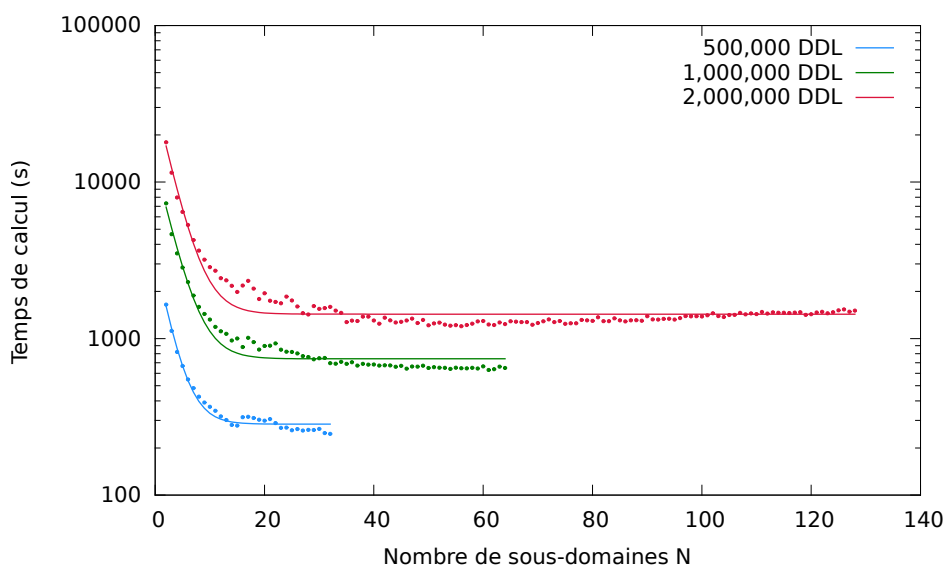


FIGURE 4.8 – Évolution du temps de calcul avec le nombre de sous-domaines

On voit que le temps de calcul décroît très rapidement avant d'atteindre un plateau, *cf.* Fig 4.8. Il peut en fait être décomposé en plusieurs contributions :

- Une contribution $\mathcal{T}_G(N)$ correspondant au temps de calcul du modèle global. Selon les choix effectués pour sa résolution, ce temps sera ou non dépendant du nombre de sous-domaines. Si on considère la résolution complète du modèle global $(K^{-1}f(U_b))|_{\Gamma}$ par une méthode directe, alors le temps de calcul global à chaque itération de l'algorithme sera celui de la résolution d'un système linéaire pré-factorisé (la factorisation de la matrice K n'est effectuée qu'une seule fois en amont de l'algorithme itératif). Si la résolution se fait sur le problème d'interface $S_p^{-1}f(U_b)$, la taille de l'opérateur S_p sera directement liée au nombre de degrés de liberté de l'interface et donc au nombre de sous-domaines.
- Une contribution $\mathcal{T}_L(N)$ correspondant au temps de calcul des problèmes locaux (en parallèle). Ce temps, pour un problème de taille donnée, est directement lié au nombre de sous-domaines. Idéalement, c'est cette phase qui concentre la majeure partie du temps de calcul complet requis.
- Une contribution $\mathcal{T}_C(N)$ correspondant au couplage entre le code global et les codes locaux. Cela comprend le temps de calcul nécessaire à l'extraction des quantité

d'interface (dans notre cas, leur récupération au niveau de la surcouche de couplage Python) et les temps de communication *via* le protocole MPI.

$$\mathcal{T}(N) = \mathcal{T}_G(N) + \mathcal{T}_L(N) + \mathcal{T}_C(N) \quad (4.7)$$

En pratique le temps de calcul local $\mathcal{T}_L(N)$ est d'autant plus faible que le nombre de sous-domaine augmente, alors que la contribution $\mathcal{T}_C(N)$, relative au couplage, va quant à elle augmenter (l'augmentation du nombre de sous-domaines implique l'augmentation du nombre de vecteurs d'interfaces à échanger). On finit ainsi par perdre l'extensibilité de la

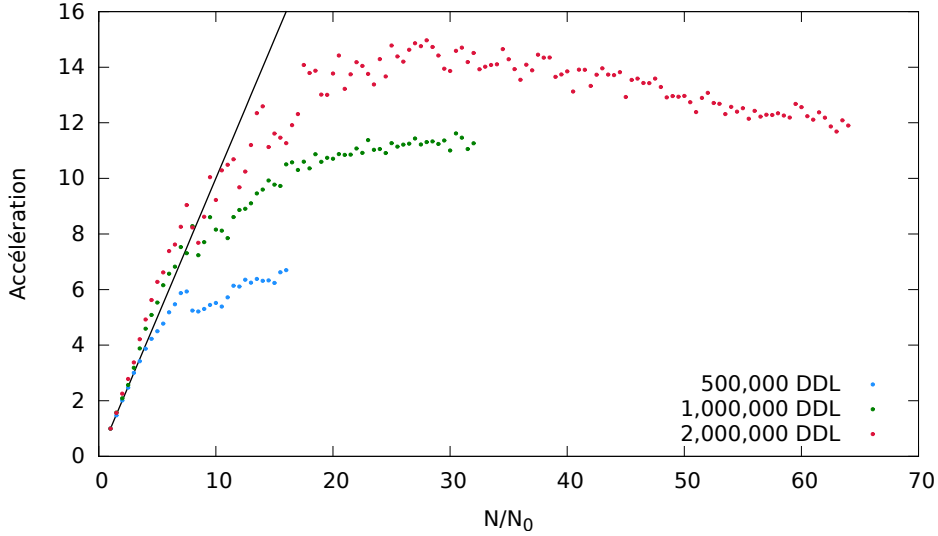


FIGURE 4.9 – Accélération relative

méthode dès lors que le nombre de sous-domaines devient trop grand (cette limite dépend bien sûr de la taille du problème). Les résultats présentés sont toutefois très encourageants, *cf.* Fig 4.9. En effet, pour évaluer l'extensibilité de l'algorithme, on s'intéresse à l'accélération procurée par celui-ci, définie par Eq. (4.8).

$$\mathcal{A}\left(\frac{N}{N_0}\right) = \frac{\mathcal{T}(N_0)}{\mathcal{T}(N)} \quad (4.8)$$

Cette accélération est donnée en fonction de N/N_0 , avec $N_0 = 2$ choisi comme référence pour le temps de calcul. Alors $\mathcal{A}(10)$ représente l'accélération procurée par l'algorithme si on multiplie par dix le nombre de sous-domaines, par rapport à la référence (deux sous-domaines).

Avec un modèle constitué d'environ deux millions de degrés de liberté, on observe une accélération proche de l'accélération idéale jusqu'à $N/N_0 \approx 10$. Pour ce modèle, en passant de deux à vingt sous-domaines, le temps de calcul est divisé par dix. Compte-tenu du modèle de comportement mécanique non-linéaire utilisé (élastoplasticité à écrouissage cinématique linéaire en petites déformations), les résultats avancés ici ne sont qu'une limite basse des performances que l'on peut attendre de l'algorithme proposé. En effet, en considérant un modèle de taille plus importante (plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté) et un comportement non-linéaire plus complexe, on peut s'attendre à être dans une situation pour laquelle la proportion de $\mathcal{T}_L(N)$ sera plus importante que dans la situation présente. Dans ce cas il sera alors possible d'augmenter encore le nombre de sous-domaines de manière efficace.

4.2.5 Stratégie incrémentale de la méthode de Newton globale

On vient précédemment de s'intéresser à la résolution d'un problème écrit sous la forme $f(U) = 0$. En général, la résolution d'un problème non-linéaire, surtout en calcul de structures, se fait souvent de manière incrémentale. Dans ce cas, le chargement est paramétré par une liste d'incrément $\{t_n\}$, et on résout alors une succession de problèmes $f_n(U_n, t_n) = 0$ avec :

$$U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \quad (4.9)$$

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t_n \quad (4.10)$$

À chaque instant t_n , cela revient donc à déterminer U_n à partir de la connaissance de U_{n-1} . Cette démarche incrémentale se révèle souvent indispensable pour pallier les difficultés de convergence de la méthode de Newton lorsque le chargement ou le modèle est complexe. Dans certains cas (*e.g.* chargement monotone lors d'un calcul en élastoplasticité avec écrouissage positif) un seul incrément de chargement peut suffire, comme cela a été le cas dans les exemples précédemment exposés.

4.2.5.1 Position du problème

Avant de s'intéresser à la stratégie incrémentale de l'algorithme de couplage, on décrit ici le cas d'étude utilisé.

On considère la structure introduite précédemment (porte-satellites), en modélisant cette fois-ci le comportement mécanique de manière plus réaliste. On utilise alors une loi d'écrouissage isotrope non-linéaire (*cf.* Fig. 4.10). La limite élastique est fixée à $Re = 900 \text{ MPa}$ et la contrainte maximale admissible à $Rm = 1200 \text{ MPa}$ pour 10% d'allongement. Le chargement appliqué reste le même, à savoir un encastrement des axes des satellites et un

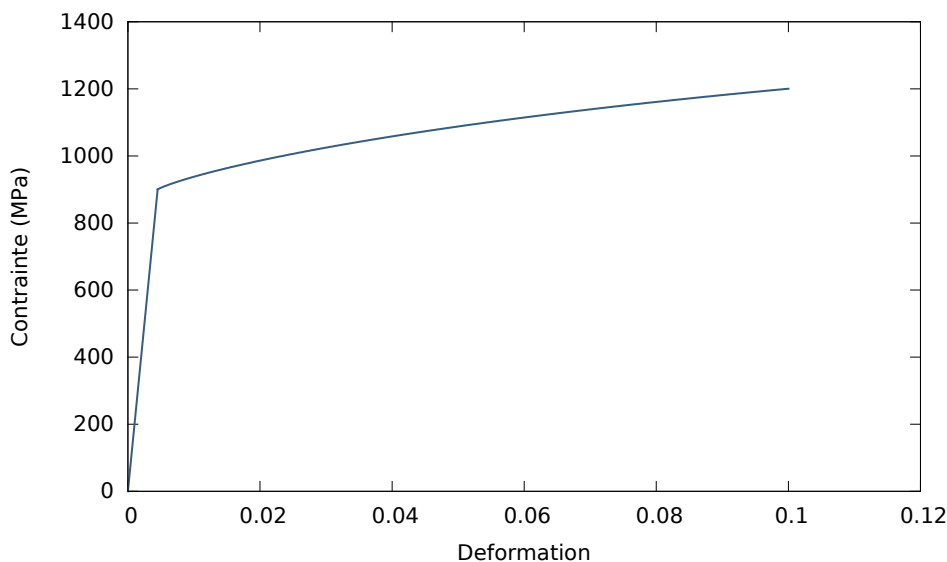


FIGURE 4.10 – Loi élastoplastique utilisée (écrouissage isotrope non-linéaire)

couple au niveau de l'axe central ($C = 2474 \text{ kNm}$). Cependant, le chargement est appliqué de manière incrémentale de sorte à constituer un cycle de charge/décharge quasi-statique (*cf.* Fig 4.11). Ce dernier est constitué de cinquante incrément de chargement.

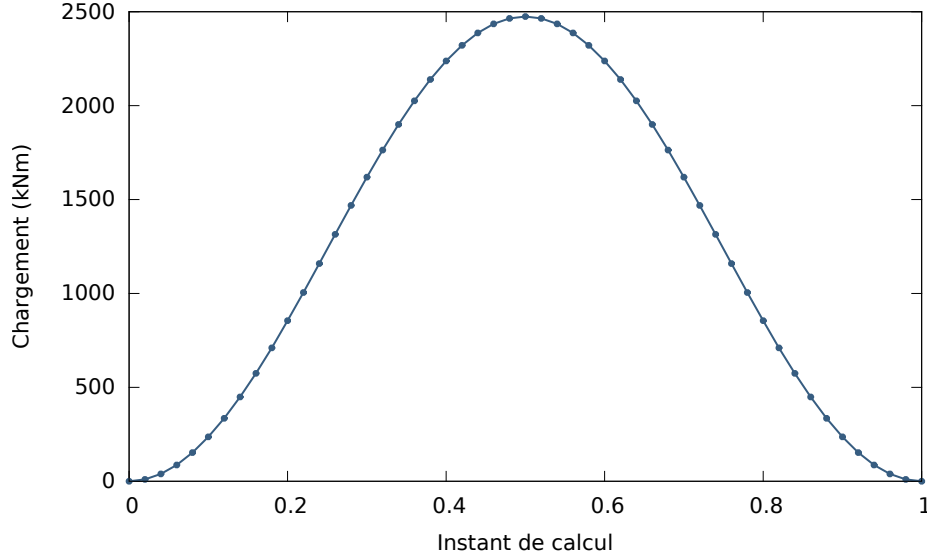


FIGURE 4.11 – Trajet de chargement appliqué

4.2.5.2 Incrémentation de la correction de Quasi-Newton

Comme on l'a évoqué précédemment, la démarche incrémentale de la méthode de Newton globale consiste à résoudre une succession de problèmes dont le chargement est paramétré par une liste d'instants t_n .

Ainsi, à l'instant t_n et connaissant U_{n-1} , on cherche ΔU_n tel que $f_n(U_{n-1} + \Delta U_n, t_n) = 0$. La résolution du problème passe donc par le calcul d'une suite $\{\Delta U_{n,k_n}\}_{k_n \geq 0}$ convergente vers ΔU_n et vérifiant l'équation suivante à chaque instant t_n .

$$U_{n,k_n+1} = U_{n-1} - K_{n,k_n}^{-1} f_n(U_{n,k_n}, t_n) \quad (4.11)$$

$$\Delta U_{n,k_n+1} = -K_{n,k_n}^{-1} f_n(U_{n,k_n}, t_n) \quad (4.12)$$

Si l'incrémentation du chargement est assez fine, alors la solution initiale U_{n-1} à l'instant t_{n-1} est suffisamment proche de la solution recherchée U_n pour permettre la convergence de l'algorithme de Newton ci-dessus.

Cependant, pour des raisons de performances et de non-intrusivité de la méthode (comme cela était déjà le cas précédemment), on a ici recours à la méthode de Quasi-Newton SR1. D'une itération à l'autre, la matrice tangente K_{n,k_n} est mise à jour via la procédure Symmetric Rank One. D'un incrément de chargement à l'autre, plusieurs stratégies de correction sont alors possibles.

- La première stratégie consiste à utiliser la méthode de Newton modifiée sans mise à jour de la matrice tangente initiale K . Pour chaque incrément et chaque itération, on conserve cette matrice inchangée (cf. Fig. 4.12).

$$K_{n,k_n} = K \quad (4.13)$$

Bien que dans certains cas (comme cela a été explicité dans le Chapitre 2) cette méthode puisse converger, elle conduit à un nombre d'itérations bien souvent inacceptable lorsque l'on traite des problèmes non-linéaires complexes.

- Une autre stratégie qui mène potentiellement à une convergence beaucoup plus rapide consiste à conserver l'ensemble des corrections de Quasi-Newton déterminées au cours

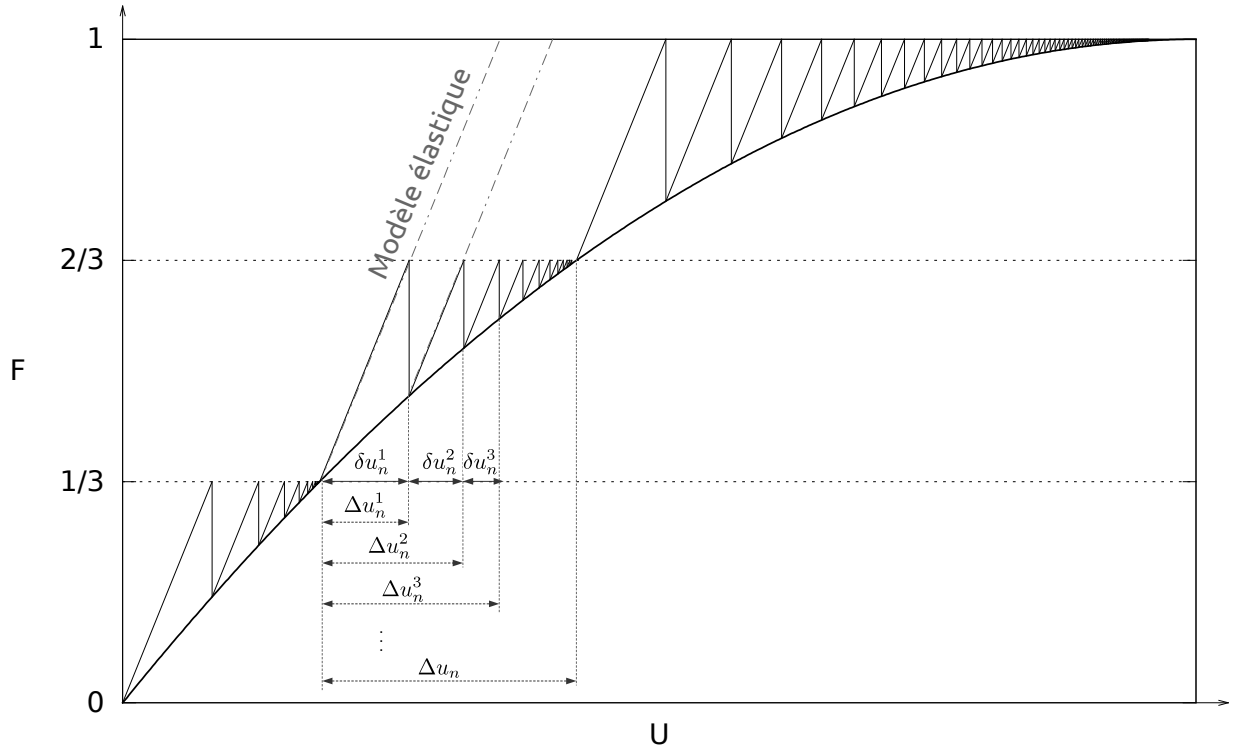


FIGURE 4.12 – Méthode de Newton modifiée (matrice élastique)

des instants de calcul précédents. Cela revient à initialiser le calcul d'un nouvel incrément par l'opérateur sécant issu de l'incrément précédent (cf. Fig. 4.13).

$$K_{n,k_n} = K + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f_{i,j+1} f_{i,j+1}^\top}{d_{i,j}^\top f_{i,j+1}} \quad (4.14)$$

Bien sûr, dans le cadre de son implémentation non-intrusive, cette stratégie implique un coût de calcul par itération plus élevé, ainsi qu'un encombrement mémoire plus important. Il est en effet nécessaire de stocker l'ensemble des corrections de rang un calculées pour toutes les itérations et tous les incréments, et les prendre en compte dans la boucle de calcul Algorithme 3. Néanmoins, cette stratégie permet d'approcher au mieux l'opérateur tangent ∇f .

- Une stratégie intermédiaire consiste à mettre en œuvre la stratégie de Quasi-Newton SR1 de construction de l'opérateur sécant à chaque incrément, de manière indépendante les uns des autres. En d'autres termes, à chaque incrément de chargement, on repart de la matrice élastique K pour initialiser la procédure de mise à jour de Quasi-Newton sécante (cf. Fig. 4.14). Le fait de ne pas conserver les corrections issues des incréments précédents conduit à une approximation dégradée de l'opérateur tangent ∇f , mais permet, en contrepartie, de limiter le surcoût en mémoire d'une telle méthode.

$$K_{n,k_n} = K + \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{f_{n,j+1} f_{n,j+1}^\top}{d_{n,j}^\top f_{n,j+1}} \quad (4.15)$$

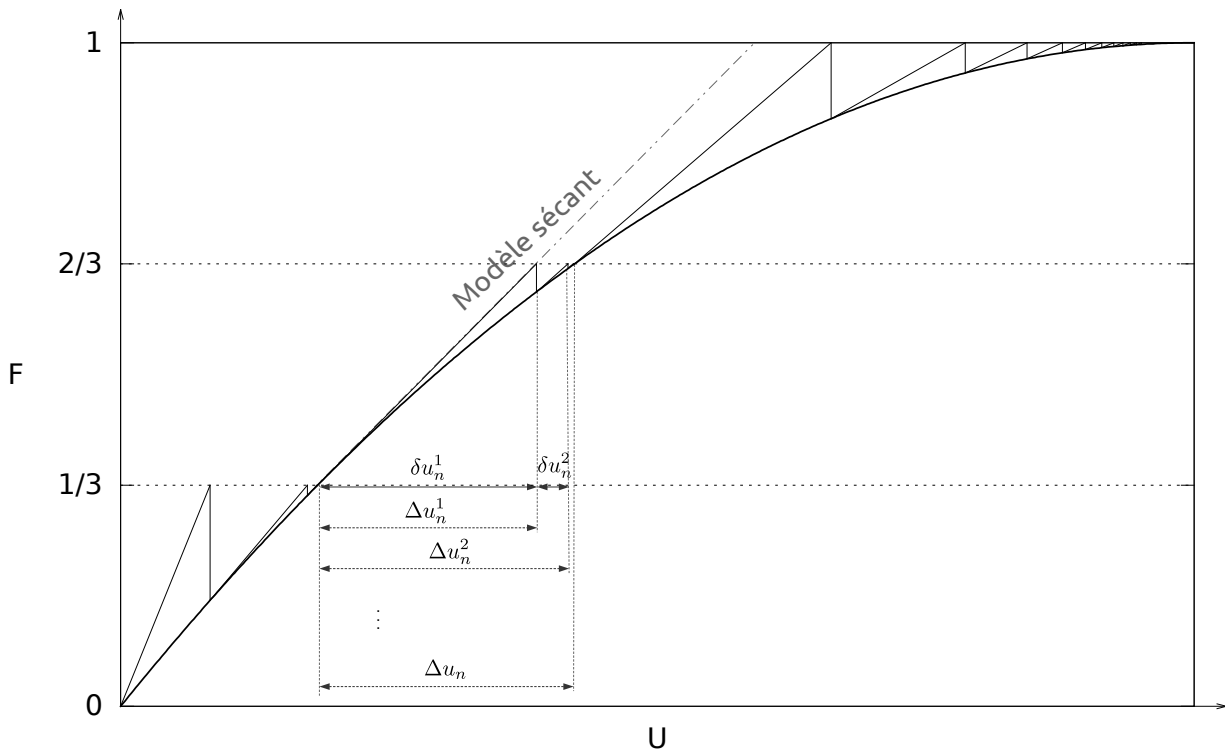


FIGURE 4.13 – Méthode de Quasi-Newton sécante

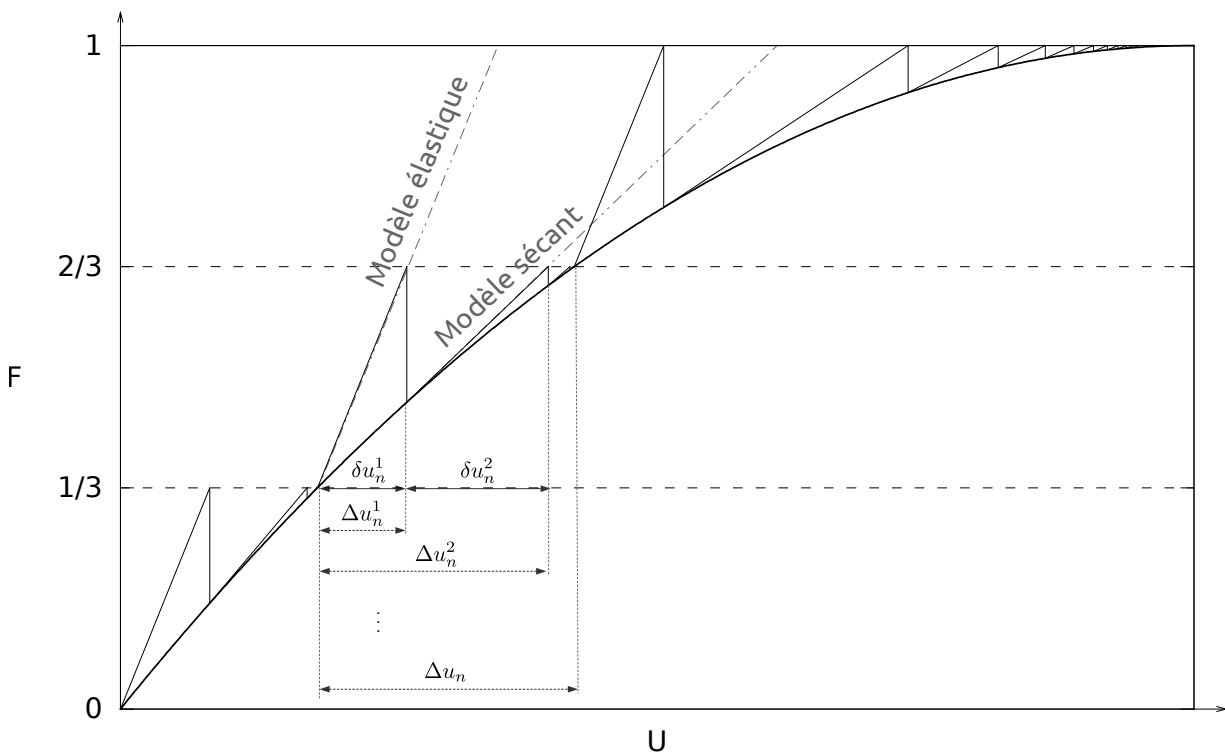


FIGURE 4.14 – Méthode de Quasi-Newton sécante – prédiction élastique

4.2.5.3 Résultats et analyse

L'application du chargement incrémental (cf. Fig. 4.11) conduit à l'apparition de trois phases d'évolution du système mécanique : une phase de déformation élastique (en début

de cycle de chargement) suivie par une phase de plastification de la structure. Après son retour élastique, la structure se trouve alors dans un état déformé irréversible. L'évolution des énergies mécaniques élastique et totale témoigne de ces observations (cf. Fig. 4.15). Tant

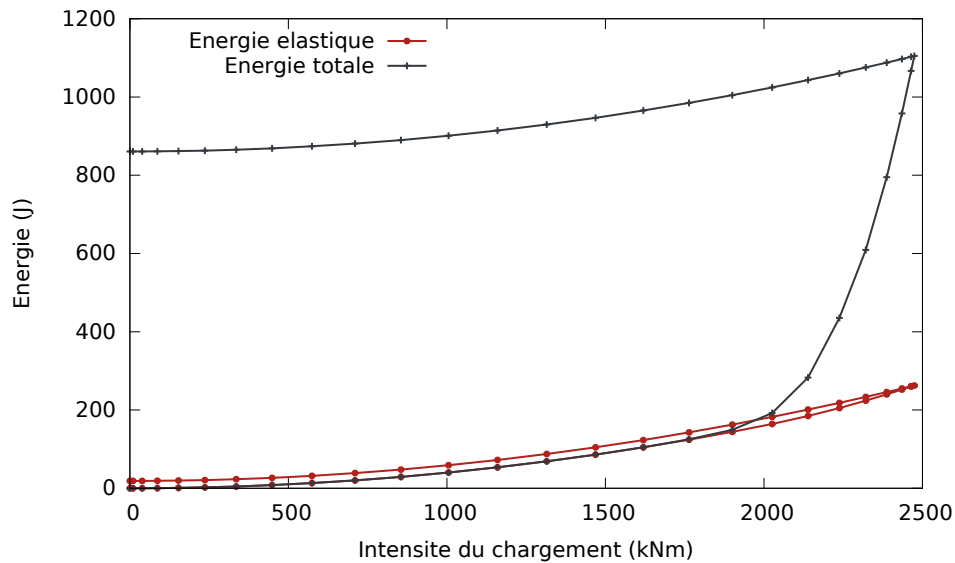


FIGURE 4.15 – Évolution de l'énergie mécanique

que le comportement de la structure reste dans le domaine élastique, l'opérateur tangent ∇f n'est autre que la matrice élastique K . Dans ce cas, la méthode de Newton modifiée Eq. (4.13) est exacte et converge en une seule itération. Dès que la limite élastique est dépassée, la structure plastifie et la matrice élastique doit être corrigée. On compare alors ici la correction SR1 partielle (cf. Eq. (4.15), remise à zéro à chaque incrément de chargement) et la correction SR1 totale (cf. Eq. (4.14), conservation de l'ensemble des corrections pour tous les incréments de chargement). En utilisant la stratégie de remise à zéro des corrections de Quasi-Newton

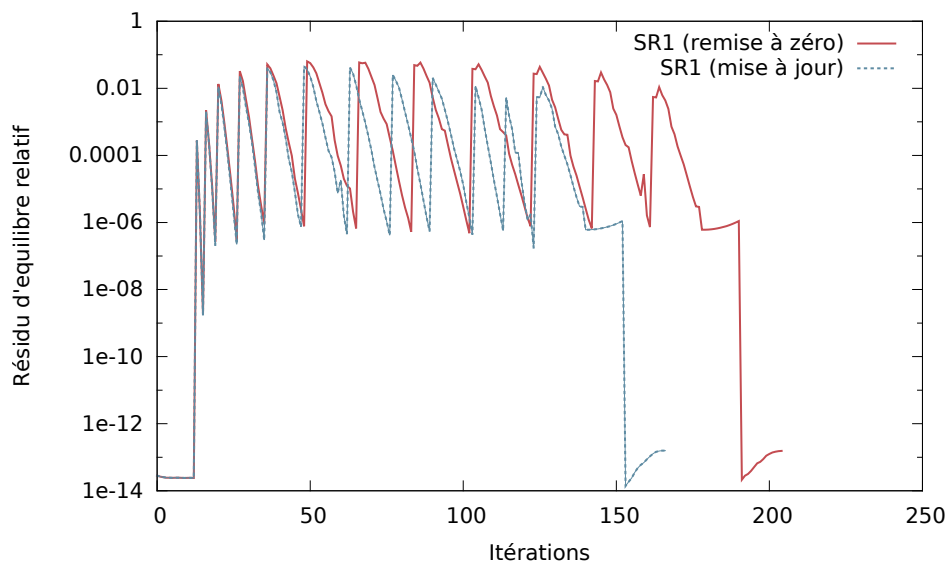


FIGURE 4.16 – Évolution du résidu de convergence

à chaque incrément, il faut en moyenne une vingtaine d'itération par incrément pour une

tolérance relative $\epsilon = 10^{-6}$ (pour la partie plastifiante du chargement). Le fait d'adopter la stratégie de conservation de l'ensemble des corrections SR1 permet de faire chuter ce nombre d'environ 25 %.

4.3 Non-linéarité géométrique

Dans les sections précédentes, on a considéré le raccord d'un modèle global linéaire avec un (ou plusieurs) modèle local non-linéaire. Dans le cadre d'une non-linéarité matériau de type élastoplastique à écrouissage positif, la relation effort-déplacement de la solution d'interface est convexe et monotone. Cette propriété garantit la convergence de la méthode de Newton modifiée présentée initialement, l'utilisation de la correction de Quasi-Newton n'étant alors utile qu'à des fins d'accélération de la convergence. Dès lors que cette condition n'est plus respectée (modèle local plus rigide par exemple), la méthode de Newton modifiée ne peut plus suffire à elle seule pour garantir la convergence. Les méthodes d'approximation de l'opérateur tangent (Quasi-Newton sécant SR1) ont alors été déployées pour passer outre cette limitation. Toutefois, il existe une classe de problèmes pour lesquels la situation se complexifie : c'est le cas des non-linéarités géométriques. En effet, dans ce cas, non seulement cela conduit à la perte de convexité de la relation effort-déplacement, mais cela fait aussi perdre l'unicité de la solution recherchée. On montre alors dans cette section que, moyennant des adaptations potentielles de l'algorithme, la méthode de décomposition de domaine (et le couplage non-intrusif d'une manière plus générale) peut tout de même être appliquée dans de telles situations.

4.3.1 Présentation du cas-test

On cherche ici à calculer la réponse d'une structure mince représentée par un modèle de coque massive [Legay et Combescure, 2003 ; Bouclier *et al.*, 2015]. La structure est maillée par des éléments SHB20, *i.e.* des éléments parallélépipédiques quadratiques à 20 nœuds. On se base sur une formulation non-linéaire en grands déplacements, tout en restant en petites déformations, du fait du caractère élancé de la structure. La structure d'étude (*benchmark* couramment utilisé pour le calcul de coques en non-linéaire géométrique [Sze *et al.*, 2004]) a les propriétés suivantes :

- Géométrie : longueur $l = 3,048 \text{ m}$, rayon $r = 1,016 \text{ m}$ et épaisseur $h = 0,03 \text{ m}$.
- Matériau : module d'Young $E = 2,0685 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Le demi-cylindre est encastré à l'une de ses extrémités, et une condition de symétrie est appliquée sur les bords latéraux. Le calcul étant effectué *via* l'algorithme parallèle à relocalisation non-linéaire, le maillage est ici découpé en huit sous-domaines (*cf.* Fig. 4.17). Par symétrie, seul un quart du cylindre est en pratique utilisé pour la calcul.

4.3.2 Résultats et propriétés de convergence

On fixe cette fois-ci la tolérance sur le résidu d'effort d'interface (en relatif) à $\epsilon = 10^{-3}$; une tolérance plus faible conduirait à un coût de calcul trop élevé, pour un gain de précision discutable. Le chargement, une force ponctuelle $P = 2000 \text{ N}$, est appliqué au point B au travers d'un trajet de chargement linéaire comprenant deux cents incréments. On utilise la stratégie de Quasi-Newton décrite dans Eq. (4.14), qui consiste à conserver l'ensemble des corrections de rang un préalablement calculées pour tous les incréments du trajet

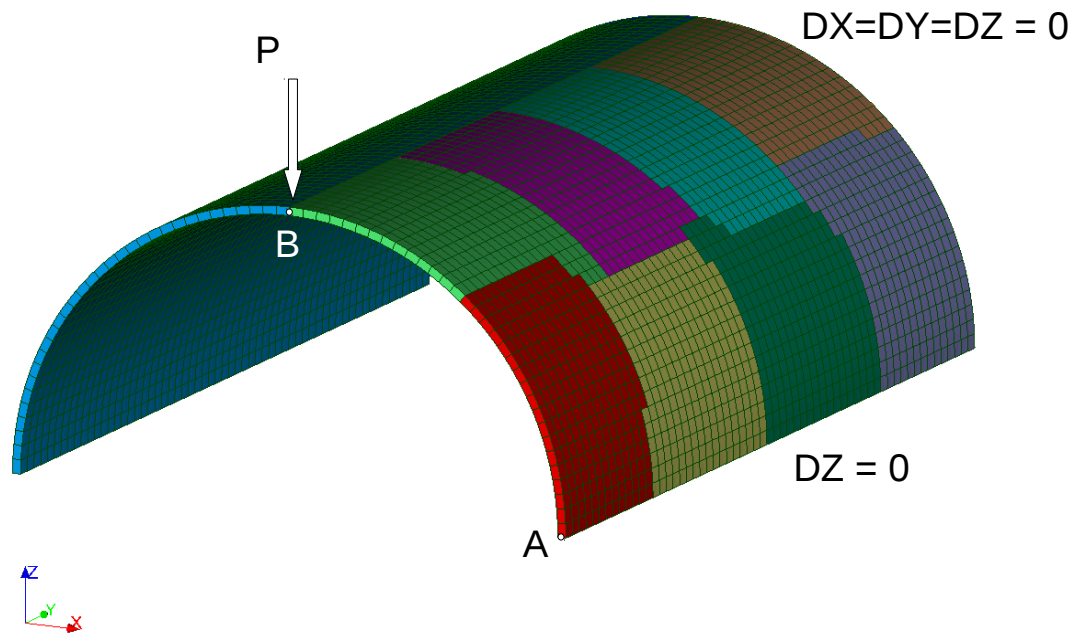


FIGURE 4.17 – Découpage du maillage (huit sous-domaines par quart de cylindre) et conditions aux limites

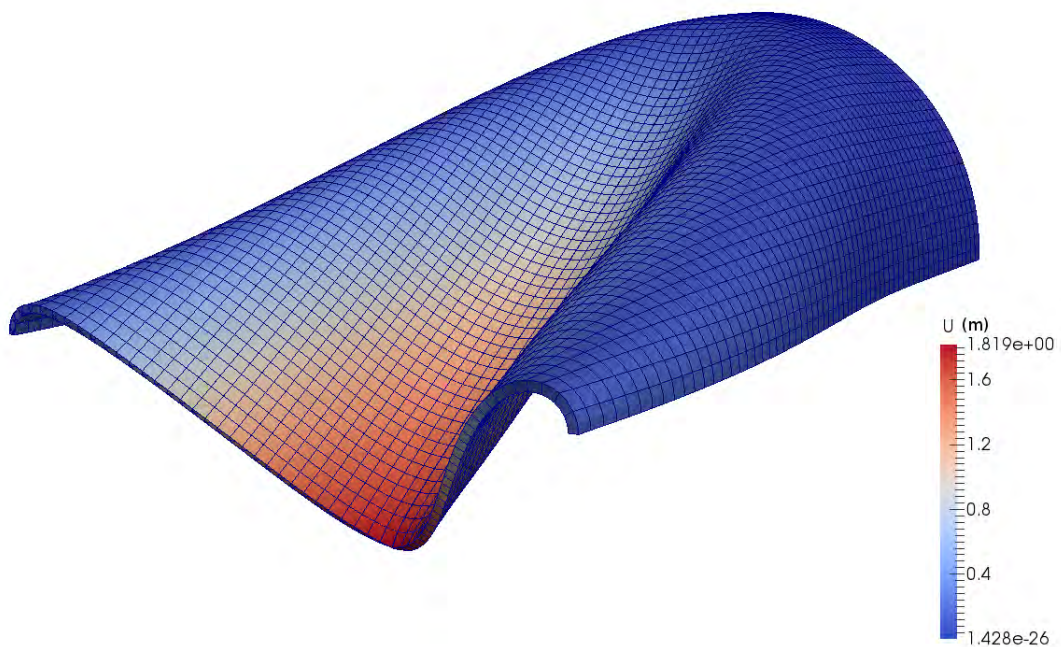


FIGURE 4.18 – Champ de déplacement (déformée $\times 1$)

de chargement. On visualise Fig. 4.18 l'allure déformée de la structure par le champ de déplacement final ainsi calculé. Aussi, on valide (*cf.* Fig. 4.19) la bonne correspondance

entre la solution calculée par l'algorithme de décomposition de domaine et une solution de référence [Sze *et al.*, 2004]. À ce stade, on observe clairement la différence entre la situation

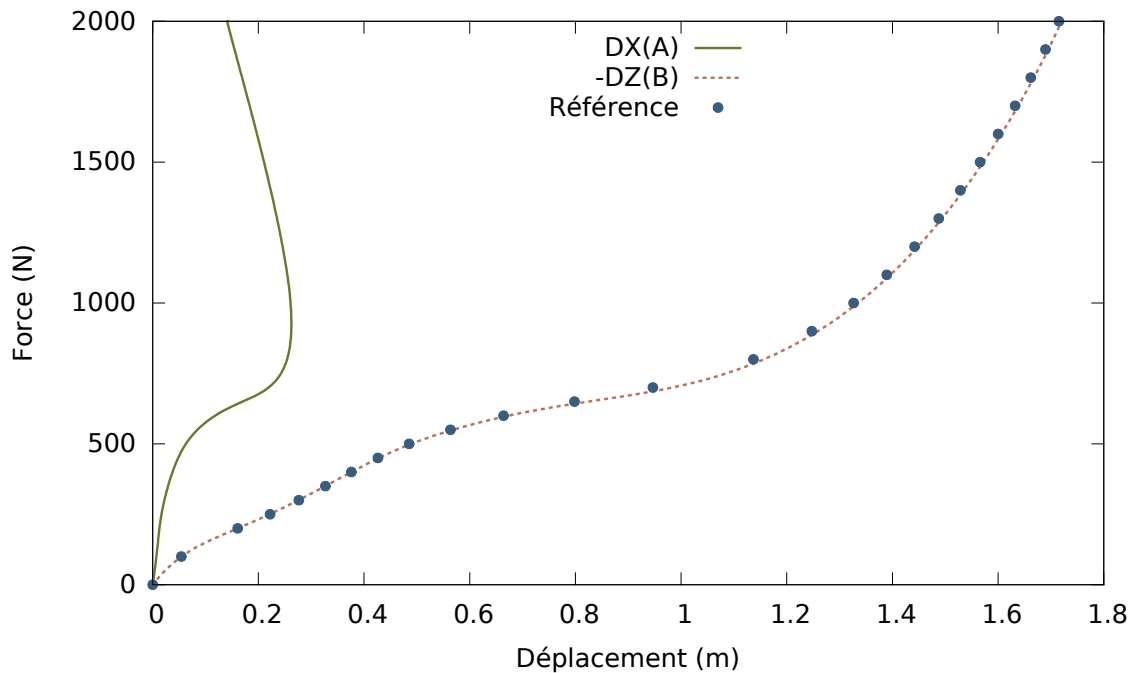


FIGURE 4.19 – Évolution du déplacement aux points A (selon X) et B (selon Z)

actuelle et les situations précédentes : la relation effort-déplacement (aux points A et B) n'est plus convexe, et présente même plusieurs points d'inflexion. Notons toutefois que la solution recherchée est stable : on ne se place pas ici dans le cadre d'une étude de flambage. Les courbes de la figure Fig. 4.20 représentent l'évolution du résidu d'équilibre relatif au cours des incréments de chargement successifs (d'où l'allure en dents de scie de la courbe) ainsi que l'évolution de l'intensité du chargement. L'axe des abscisses représente le nombre d'itérations globales cumulées au cours de l'incrémentation. On voit ainsi clairement apparaître un ralentissement de la convergence pour des valeurs du chargement comprises entre 550 N et 800 N environ, ce qui correspond au *snapback* mesuré au point A. Cette zone de ralentissement est matérialisée sur Fig. 4.20 par les lignes pointillées.

4.3.3 Limitations de la méthode – Perspectives d'évolution

Le cas test présenté ici met en évidence les limitations de l'algorithme de relocalisation non-linéaire tel qu'il est présenté dans ce manuscrit. En effet, deux problématiques principales apparaissent ici :

- La problématique du raccord des modèles.

Le fait de se baser sur un raccord à déplacement imposé introduit artificiellement une rigidité infinie de l'interface de couplage. Les problèmes traités en non-linéaire géométrique sont particulièrement sensibles aux conditions aux limites en déplacement, et pour un déplacement d'interface donné, la solution n'est pas toujours unique. Ainsi, le calcul non-linéaire mené sur une sous-structure a une certaine propension à diverger si les conditions aux limites de Dirichlet qui lui sont appliquées (en provenance du modèle global) sont trop éloignées de la solution recherchée.

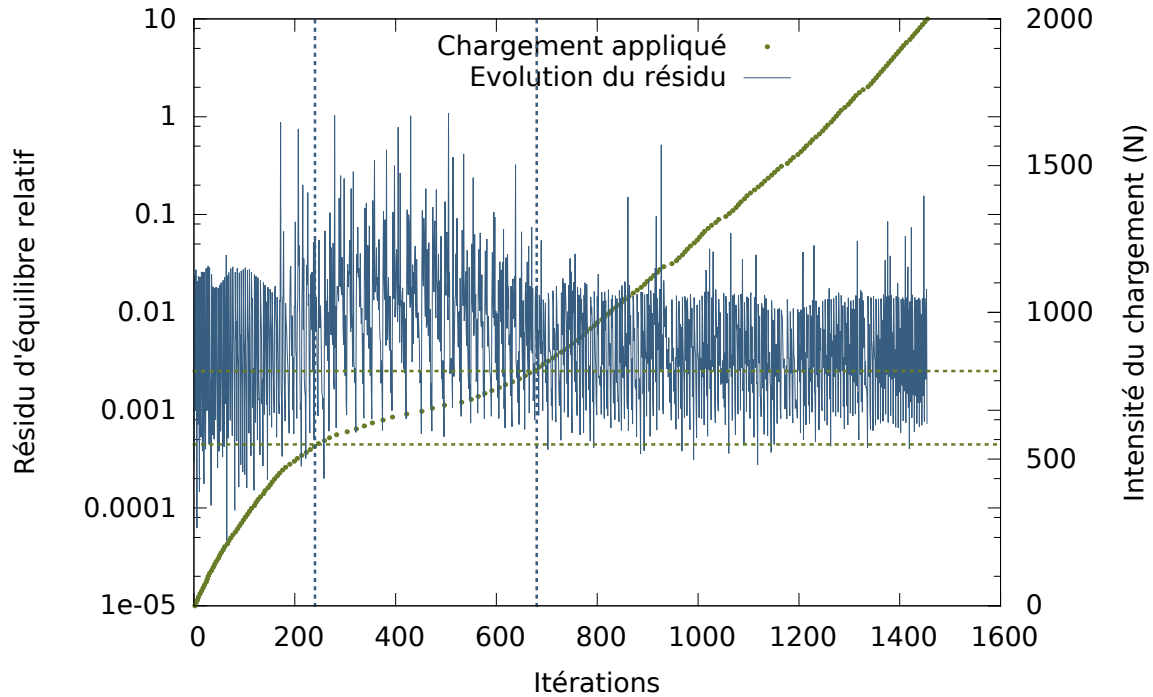


FIGURE 4.20 – Évolution du résidu d'équilibre au cours des itérations

— La problématique relative à l'algorithme itératif de couplage.

Dans la version actuellement implémentée, l'algorithme de couplage global/local repose sur une méthode de Quasi-Newton sécant (Symmetric Rank One). À chaque itération, la correction de Quasi-Newton ainsi calculée (mise à jour de la direction dans laquelle va être calculé l'incrément de déplacement correspondant au résidu d'interface donné) est prise en compte telle quelle, *cf.* Eq. (4.6), sans contrôle de la norme de l'incrément (recherche linéaire).

Ces deux aspects sont bien sûr liés l'un à l'autre. Par exemple, dans le cadre du suivi d'instabilités de flambage, pour une itération donnée, la solution calculée par sous-domaine peut bifurquer sur des modes différents d'une sous-structure à une autre. Le calcul des corrections de l'opérateur de Quasi-Newton sécant risque alors d'être réalisé à partir de solutions appartenant à des branches de bifurcations différentes, à la fois entre deux itérations successives et à l'interface entre deux sous-domaines voisins. Cela ne fera qu'alimenter les instabilités initiées intrinsèquement par le modèle.

Pour illustrer ce phénomène, on applique l'algorithme de décomposition de domaine à la simulation du flambage d'un panneau cylindrique raidi. Le panneau est encasté sur les bords, et un champ de pression uniforme est appliqué sur la peau extérieure. On visualise (*cf.* Fig. 4.21) l'évolution de la solution en déplacement au cours des vingt premières itérations, pour un chargement en pression d'amplitude $P = 1 \text{ MPa}$ appliqué en un seul incrément. On voit qu'au cours de ces itérations la solution oscille entre plusieurs modes de déformation de flambage. Ce n'est qu'à partir d'une vingtaine d'itérations que la solution se stabilise.

Actuellement, les pistes envisageables pour pallier les problèmes relatifs au non-linéaire géométrique et améliorer les performances et la robustesse de l'algorithme sont les suivantes.

— La mise en œuvre non-intrusive d'un raccord d'interface mixte :

L'utilisation d'un raccord mixte permettrait d'assouplir l'interface. Pour un

sous-domaine donné, cela permettrait d’approcher au plus près la rigidité du modèle non-linéaire sur la zone complémentaire. Si la stabilité et la vitesse de convergence de l’algorithme s’en verraient améliorées [Cresta *et al.*, 2007 ; Hinojosa *et al.*, 2014], reste la problématique du calcul de l’opérateur de raideur d’interface (coefficient de la relation de Fourier-Robin). En effet, un calcul optimal serait celui du complément de Schur de la zone complémentaire du sous-domaine considéré. La construction d’un tel opérateur s’avérerait coûteuse et potentiellement intrusive vis-à-vis du code de calcul utilisé. Toutefois, des solutions basées sur le calcul d’un complément de Schur approché sont proposées [Gendre *et al.*, 2011].

- L’ajout d’une étape de recherche linéaire au sein de l’algorithme itératif de Quasi-Newton :

Comme cela a été évoqué, aucune méthode de recherche linéaire n’est utilisée conjointement à l’algorithme de Newton. La mise en place d’une procédure de contrôle de la norme des incréments de déplacement d’interface contribuerait à améliorer la stabilité de l’algorithme et potentiellement sa vitesse de convergence. Des méthodes de recherche linéaire sont déjà présentes au niveau local (résolution des problèmes non-linéaires locaux par sous-domaine). Cependant, l’application de la recherche linéaire au niveau global n’apparaît pas triviale dans un contexte de calcul non-intrusif, et mériterait une étude spécifique.

- L’utilisation d’un pas de chargement adaptatif :

Conjointement à l’utilisation de la recherche linéaire au sein de l’algorithme de Newton global, une incrémentation adaptative du chargement permettrait une optimisation non négligeable des performances générales de la méthode.

Enfin, d’une manière générale, le traitement au niveau local d’une non-linéarité globale (*i.e.* non localisée) nécessiterait des échanges d’information supplémentaires (autres que de simples flux d’efforts et déplacements). Par exemple, dans le cadre du post-flambement, il serait intéressant de pouvoir transmettre de l’information entre différents sous-domaines concernant la bifurcation sur les différentes branches de solution au passage des instabilités. Cependant une telle chose est loin d’être aisée d’un point de vue théorique et pratique, de même qu’une mise en œuvre non-intrusive dans un logiciel industriel.

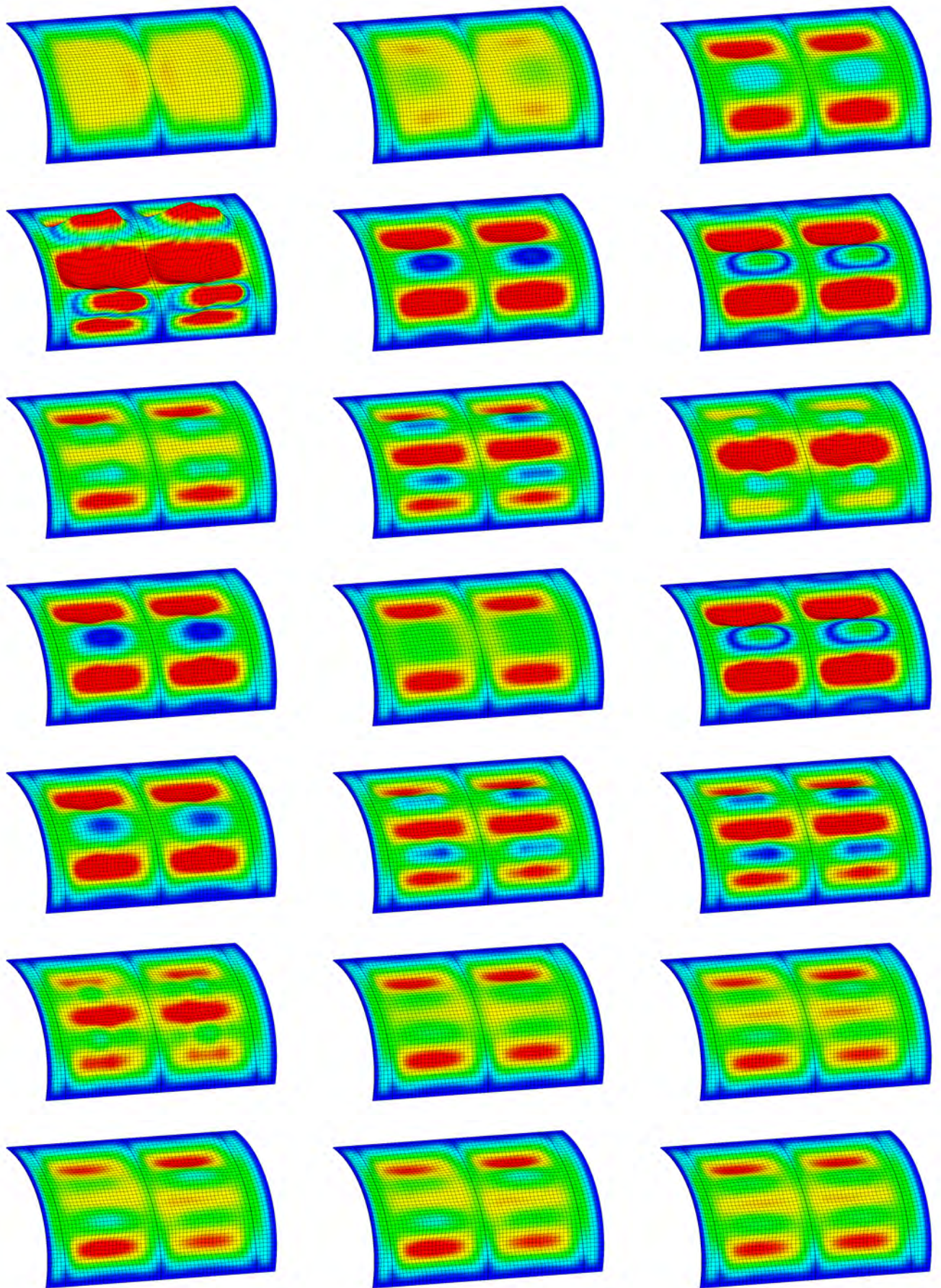


FIGURE 4.21 – Évolution de la solution au cours des itérations (déformée $\times 20$)

Troisième partie

Algorithme de couplage : contrôle de la solution et adaptation de maillage

Dans cette partie, on s'intéresse au raffinement de maillages par patches d'éléments finis. On sait en effet que, lors d'un calcul par éléments finis, la qualité d'une solution numérique dépend en partie de la qualité du maillage. Aussi, il est difficile de construire *a priori* un maillage optimal. Dans certains cas, c'est à partir de la solution numérique que l'on évalue la qualité du maillage vis-à-vis du modèle considéré, et des procédures d'adaptation de maillage *a posteriori* doivent alors être mises en œuvre selon l'objectif de qualité de la solution visé.

De telles procédures s'avèrent très coûteuses, notamment lorsqu'il s'agit de structures industrielles complexes, pour lesquelles la génération du maillage demande le savoir-faire de nombreux ingénieurs et nécessite un certain temps. On comprend bien que dans de tels cas, il est rarement envisageable de modifier directement le maillage qui est, de plus, souvent certifié. Toutefois, certaines études (pré-études, validation de nouveaux modèles...) peuvent bénéficier d'une procédure de raffinement de maillage.

Sur la base de l'algorithme de couplage non-intrusif, le raffinement sera alors effectué *via* l'utilisation d'un modèle local recouvrant la zone sur laquelle le maillage doit être adapté. Le pilotage du raffinement fera intervenir la mise en œuvre d'un estimateur d'erreur *a posteriori*, adapté au caractère multi-échelles des solutions issues de l'algorithme de couplage. La procédure sera illustrée par un exemple mécanique bidimensionnel dont on connaît la solution exacte. La qualité de l'estimation d'erreur sera ainsi évaluée.

Un bref état de l'art sur les méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori* sera dressé dans le Chapitre 5. Ensuite, après avoir présenté la construction de l'estimateur, on s'intéressera à la procédure de raffinement local dans le Chapitre 6.

Résumé

Ce chapitre a pour but de présenter un bref état de l'art sur le contrôle de l'erreur en éléments finis. On introduira les notions d'erreurs globale et locale au travers des différentes méthodes d'estimation a posteriori présentes à ce jour dans la littérature scientifique.

Sommaire

5.1	Estimateurs d'erreur globale	86
5.1.1	Estimation de l'erreur par lissage des contraintes	86
5.1.2	Estimation de l'erreur en résidu d'équilibre	87
5.1.3	Estimation de l'erreur en relation de comportement	89
5.2	Estimateurs d'erreur locale	89
5.2.1	Estimation de l'erreur de pollution	90
5.2.2	Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt	90

Le but de ce chapitre n'est pas de fournir une revue exhaustive de l'estimation d'erreur en simulation numérique, mais d'introduire le cadre dans lequel s'inscriront les travaux qui suivront (*cf.* Chapitre 6).

Les références sur le sujet sont nombreuses et des revues détaillées sur l'estimation d'erreur *a posteriori* peuvent être trouvées dans [Ainsworth et Craig, 1991 ; Verfürth, 1999 ; Ainsworth et Oden, 2000 ; Grätsch et Bathe, 2005 ; Ladevèze et Pelle, 2006].

Aussi, dans le cadre du couplage de modèles qui est le nôtre, plusieurs travaux se concentrent sur l'estimation d'erreur pour les discrétisations non-conformes [Destuynder et Métivet, 1998 ; Wohlmuth, 1999 ; Ainsworth *et al.*, 2007 ; Carstensen et Hu, 2007 ; Wang et Xu, 2011].

5.1 Estimateurs d'erreur globale

On considère le système suivant modélisant un problème mécanique en élasticité linéaire.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_0 \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \sigma(u) \cdot n &= g \text{ sur } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (5.1)$$

On suppose ce problème résolu sous forme variationnelle sur l'espace V avec une discrétisation éléments finis $V_h \subset V$.

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (5.2)$$

On appelle erreur globale la quantité $e_h = \|u_h - u\|_E$, où u est la solution exacte du problème dans V et $\|\cdot\|_E = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ la norme énergie. Dans le cadre de la mécanique linéaire, on pourra aussi calculer cette norme à partir de la solution en contrainte $e_h = \|\sigma_h - \sigma\|_{E'}$ par dualité de la relation contrainte-déformation. Il existe plusieurs méthodes d'estimation *a posteriori* de cette erreur, que l'on classe ici en trois catégories.

5.1.1 Estimation de l'erreur par lissage des contraintes

Le cadre théorique des problèmes elliptiques suppose une certaine régularité des solutions dans V . Cependant, après discrétisation sur V_h , la méthode des éléments finis en déplacement conduit au calcul de solutions telles que σ_h est discontinue à la traversée des éléments.

Le principe de l'estimation d'erreur par lissage des contraintes repose sur l'évaluation de ce défaut de régularité [Zienkiewicz et Zhu, 1987].

Historiquement, la méthode repose sur la construction d'un champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ de régularité supérieure à celle de σ_h , à partir de ce dernier (en pratique on construit un champ $\tilde{\sigma}_h$ continu).

$$\tilde{\sigma}_h = \operatorname{argmin}_{\tau \in V_h} \|\tau - \sigma_h\|_{E'} \quad (5.3)$$

Cela revient à construire un champ de contrainte par projection sur la base éléments finis continue V_h . Une fois la construction de ce champ faite, on peut donner une estimation de l'erreur $e_h = \|\sigma_h - \tilde{\sigma}_h\|_{E'}$. Cette méthode est souvent appelée ZZ1, du nom de ses

auteurs. De par sa grande simplicité d'implémentation et son très faible coût de calcul, cette méthode est très souvent utilisée en première approximation de l'estimation de l'erreur dans les logiciels de calcul par éléments finis.

Cet estimateur a toutefois une fiabilité assez faible (sous-estimation de l'erreur dans certains cas), raison pour laquelle de nouvelles techniques de construction de $\tilde{\sigma}_h$ ont ensuite vu le jour.

La construction du champ de contrainte peut ainsi être faite par "patch" [Zienkiewicz et Zhu, 1992a ; Zienkiewicz et Zhu, 1992b ; Carstensen et Funken, 2001]. Au lieu de construire $\tilde{\sigma}_h$ de manière globale comme dans Eq. (5.3), la méthode ZZ2 propose une nouvelle façon de déterminer ses valeurs nodales.

Pour un nœud i donné, la détermination de $\tilde{\sigma}_{h,i}$ se fait à partir des valeurs de σ_h au sein du "patch" défini comme le support de la fonction de forme éléments finis définie au nœud i .

$$\tilde{\sigma}_{h,i} = \underset{\tau \in V_h|_{\text{supp}(\varphi_i)}}{\text{argmin}} \|\tau - \sigma_h\|_{E'(\text{supp}(\varphi_i))} \quad (5.4)$$

Le calcul de $\tilde{\sigma}_h$ est ensuite réalisé à partir des valeurs $\tilde{\sigma}_{h,i}$ par une moyenne pondérée. Selon les points d'intégration utilisés pour le calcul de $\|\tau - \sigma_h\|_{E'(\text{supp}(\varphi_i))}$, l'ordre de convergence et la qualité de l'estimation sera variable (Superconvergent Patch Recovery, SPR).

Par la suite, des variantes de cette méthode ont été proposées pour la construction de la contrainte lissée [Díez *et al.*, 2007 ; Nadal *et al.*, 2015 ; Bush *et al.*, 2015]. Il s'agit alors d'ajouter des contraintes supplémentaires sur $\tilde{\sigma}_{h,i}$, notamment la vérification de l'équilibre local sur les patches $\text{supp}(\varphi_i)$.

5.1.2 Estimation de l'erreur en résidu d'équilibre

Une autre façon d'évaluer l'erreur commise lors de la résolution numérique de Eq. (5.2) est d'utiliser l'équation des résidus.

$$a(e_h, v) = l(v) - a(u, v) = \mathcal{R}_h(v), \quad \forall v \in V \quad (5.5)$$

En particulier, on a $\|e_h\|_E^2 = \mathcal{R}_h(e_h)$. Le principe des estimateurs en résidu d'équilibre est de fournir une estimation de $\mathcal{R}_h(e_h)$ (bornes de l'erreur).

On présente ici les estimateurs d'erreur en résidu explicites et implicites.

5.1.2.1 Estimateurs explicites

Ces estimateurs font appels à l'évaluation des résidus d'effort volumique par élément et les sauts de contrainte normale à la traversée des éléments. En utilisant quelques propriétés mathématiques qui seront détaillées dans le Chapitre 6, on peut déterminer une borne supérieure de l'erreur globale e_h [Babuvška et Rheinboldt, 1978 ; Babuška et Miller, 1987 ; Kelly *et al.*, 1983].

$$\|e_h\|_E \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \text{div } \sigma_h\|_{0,T}^2 + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_h} h_\epsilon \|\llbracket \sigma_h \cdot n_\epsilon \rrbracket\|_{0,\epsilon}^2 \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

Un tel calcul fait intervenir les résidus d'effort $\|f + \text{div } \sigma_h\|_{0,T}$ sur chaque élément T du maillage \mathcal{T}_h , et les sauts de contrainte $\|\llbracket \sigma_h \cdot n_\epsilon \rrbracket\|_{0,\epsilon}$ sur les arrêtes $\epsilon \in \mathcal{E}_h$.

Comme pour les estimateurs par lissage des contraintes, le coût de calcul d'une estimation

en résidu explicite est faible par rapport au calcul de la solution u_h . Cependant, l'évaluation de la constante C de majoration de l'erreur reste un problème complexe, ce qui empêche une estimation précise de l'erreur globale.

5.1.2.2 Estimateurs implicites

Afin de permettre une évaluation plus précise de l'erreur en résidu, une solution consiste à résoudre des problèmes locaux auxiliaires formulés sur l'équation des résidus, *i.e.* résoudre Eq. (5.5) sur chacun des patchs formés par le support des fonctions de forme définies à chaque nœud du maillage [Babuška et Rheinboldt, 1978], *cf.* Fig 5.1.

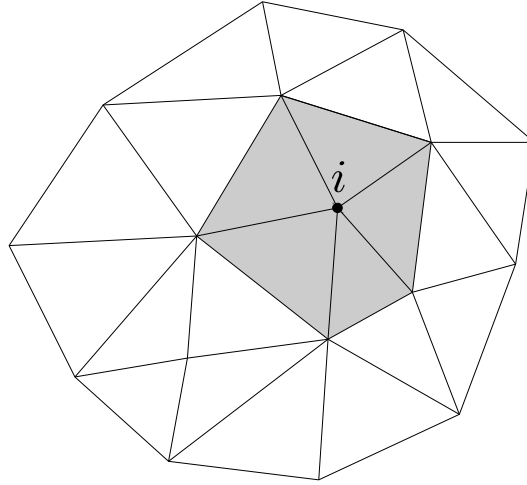


FIGURE 5.1 – Patch local

Le problème Eq. (5.7) est alors résolu en utilisant une discrétisation de V plus riche que pour V_h , en sous-découpant les éléments et/ou en augmentant le degré d'approximation sur le patch. L'erreur globale peut alors être estimée au travers de la somme des contributions locales. A ce stade, la difficulté porte sur le type de conditions aux limites à appliquer au bord des patchs (blocage des mouvements de corps rigide). En pratique, différentes techniques sont alors possibles, comme l'imposition d'une condition de Dirichlet homogène sur une partie de la frontière du patch.

$$a(e_{h,i}, v) = \mathcal{R}_h(v), \quad \forall v \in V \quad (5.7)$$

Aussi, le choix des conditions aux limites appliquées aux patchs locaux doit respecter l'équilibre des chargements entre patchs adjacents.

Une autre approche, reposant sur la propriété de partition de l'unité de la base éléments finis V_h , permet de construire le résidu d'erreur e_h sur l'ensemble du maillage.

$$a(e_{h,i}, v) = \mathcal{R}_h(\varphi_i v), \quad \forall v \in V \quad (5.8)$$

$$e_h = \sum_i e_{h,i} \quad (5.9)$$

On s'affranchit ainsi de l'équilibrage des chargements sur les bords du patch [Díez *et al.*, 2004 ; Parés *et al.*, 2006 ; Cottreau *et al.*, 2009] et, moyennant de légères adaptations, la construction de la fonction d'erreur e_h peut permettre l'estimation d'une borne inférieure

de l'erreur.

Suivant la même idée, des estimations d'erreur implicites nécessitant la résolution de problèmes auxiliaires formulés par élément ont également été proposées. Dans ce cas, afin d'assurer l'existence d'une solution, il est nécessaire d'imposer des conditions limites adaptées [Díez *et al.*, 1998 ; Díez *et al.*, 2003], ou de s'appuyer sur un espace de discrétisation ne contenant pas de mouvements de corps rigides [Demkowicz *et al.*, 1984 ; Bank et Weiser, 1985].

5.1.3 Estimation de l'erreur en relation de comportement

La dernière méthode d'estimation de l'erreur globale dont on parlera dans ce chapitre concerne l'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Leguillon, 1983 ; Ladevèze, 2005]. Son principe repose sur l'évaluation du non-respect de la relation de comportement $\sigma = \mathbf{C} \varepsilon$, au travers du calcul d'un couple de solutions $(\tilde{u}_h, \tilde{\sigma}_h)$ admissibles. Si on considère le problème Eq. (5.1), alors on définira l'espace des déplacements admissibles et l'espace des contraintes admissibles de la façon suivante :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ u \in H^1(\Omega) , u = u_0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \quad (5.10)$$

$$\mathcal{S}_{ad} = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega) , \operatorname{div} \sigma + f = 0 \text{ sur } \Omega , \sigma \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \right\} \quad (5.11)$$

La plupart du temps, le problème Eq. (5.1) est résolu *via* une formulation primale (en déplacements), le champ u_h alors calculé est donc admissible, *i.e.* $u_h \in \mathcal{U}_{ad}$ de sorte que $\tilde{u}_h = u_h$. Cependant, le champ de contrainte σ_h n'est généralement pas admissible, *i.e.* $\sigma_h \notin \mathcal{S}_{ad}$, et il faut alors construire $\tilde{\sigma}_h \in \mathcal{S}_{ad}$.

L'erreur en relation de comportement est alors donnée par $\tilde{e}_h = \|\tilde{\sigma}_h - \mathbf{C}\varepsilon(\tilde{u}_h)\|_{E'}$.

On peut la relier à l'erreur globale $e_h = \|u - u_h\|_E$ par la relation de Prager-Synge [Prager et Synge, 1947] suivante :

$$\|\tilde{\sigma}_h - \mathbf{C}\varepsilon(\tilde{u}_h)\|_{E'}^2 = \|u - u_h\|_E^2 + \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{E'}^2 \quad (5.12)$$

L'erreur en relation de comportement conduit donc à une majoration de l'erreur globale. On voit aussi que plus le champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ est proche de la solution exacte σ , plus l'estimation est précise. Moyennant quelques manipulations algébriques supplémentaires, une borne inférieure de l'erreur peut aussi être donnée [Gallimard, 2009].

Toute la difficulté de l'évaluation de l'erreur en relation de comportement réside dans la construction du champ de contrainte admissible $\tilde{\sigma}$ [Pled et Chamoin, 2011]. C'est cette difficulté associée au coût de calcul de $\tilde{\sigma}$ qui freine l'utilisation de cet estimateur dans les cas industriels pratiques.

5.2 Estimateurs d'erreur locale

L'estimation d'erreur globale fournit une évaluation de la qualité globale de la solution, c'est-à-dire dans son ensemble. Cependant, pour des besoins pratiques en calcul de structures, on est plus souvent amené à déterminer l'erreur locale, *i.e.* l'erreur commise lors du calcul sur une zone d'intérêt ciblée (zone de concentration de contrainte, zone critique en terme de

tenue mécanique...). Pour ce faire, on peut alors faire appel aux méthodes d'estimation de l'erreur locale.

5.2.1 Estimation de l'erreur de pollution

Le concept d'erreur de pollution [Babuška *et al.*, 1994 ; Babuška *et al.*, 1995 ; Babuška *et al.*, 1997] part du principe que la qualité de la solution sur une zone d'intérêt localisée Λ dépend de la solution sur l'ensemble du domaine Ω , et non pas uniquement sur Λ . En d'autres termes, il ne suffit pas de raffiner le maillage sur Λ pour améliorer la précision du calcul, car on ne prendrait alors pas en compte l'influence du reste du modèle sur la zone d'intérêt.

L'évaluation des apports respectifs de la zone d'intérêt Λ et de son complémentaire $\Omega \setminus \Lambda$ passe alors par la séparation de leurs contributions dans l'équation des résidus Eq. (5.5). Le résidu est alors scindé en plusieurs termes.

$$a(e_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Lambda)} \mathcal{R}_{h,T}(v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega \setminus \Lambda)} \mathcal{R}_{h,T}(v), \quad \forall v \in V \quad (5.13)$$

On peut alors représenter e_h comme la somme de deux contributions.

$$a(e_h^{loc}, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Lambda)} \mathcal{R}_{h,T}(v), \quad \forall v \in V \quad (5.14)$$

$$a(e_h^{pol}, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega \setminus \Lambda)} \mathcal{R}_{h,T}(v), \quad \forall v \in V \quad (5.15)$$

La construction des termes $\mathcal{R}_{h,T}$ et la résolution des problèmes Eq. (5.14) et Eq. (5.15) constituent le point clé de la méthode [Oden et Feng, 1996].

On distinguera alors e_h^{loc} , l'erreur locale ne dépendant que de la valeur des résidus sur la zone d'intérêt (*i.e.* sur Λ), et e_h^{pol} , l'erreur de pollution ne dépendant que de la valeur des résidus en dehors de la zone d'intérêt (*i.e.* sur $\Omega \setminus \Lambda$).

Si on s'intéresse à l'erreur sur la zone d'intérêt, on a $e_h|_{\Lambda} = e_h^{loc}|_{\Lambda} + e_h^{pol}|_{\Lambda}$. Bien sûr, selon les problèmes étudiés en pratique, il est fréquent que l'erreur de pollution soit négligeable devant l'erreur locale si le maillage a été préalablement adapté à la situation modélisée [Huerta et Díez, 2000].

5.2.2 Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt

Les estimateurs présentés précédemment permettent d'évaluer la qualité de la solution en norme énergie, *i.e.* vis-à-vis de l'énergie associée à l'erreur commise. Il peut cependant être plus pertinent de considérer des grandeurs représentatives d'un critère mécanique donné, par exemple la contrainte σ_{xy} moyenne sur un domaine Λ . Un tel opérateur \mathcal{Q} est appelé extracteur [Strouboulis *et al.*, 2000].

$$\mathcal{Q}(u) = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} \sigma_{xy} \, d\Lambda \quad (5.16)$$

On appelle alors $\mathcal{Q}(u)$ la quantité d'intérêt sur laquelle on veut évaluer l'erreur [Oden et Prudhomme, 2001 ; Prudhomme *et al.*, 2003 ; Chamoïn et Ladevèze, 2009]. L'estimation de l'erreur passe alors par la résolution d'un problème adjoint, similaire au problème initial à

la différence près que le chargement est alors ici la quantité d'intérêt [Paraschivoiu *et al.*, 1997 ; Cirak et Ramm, 1998].

$$a(w, v) = \mathcal{Q}(v), \quad \forall v \in V \quad (5.17)$$

Bien entendu, ce problème ne pourra être résolu de manière exacte. La plupart du temps il est résolu de manière approchée en se basant sur la même discrétisation que pour le problème initial Eq. (5.2).

$$a(w_h, v_h) = \mathcal{Q}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (5.18)$$

En combinant Eq. 5.17 et Eq. 5.18 avec $v = u$ et $v_h = u_h$, on peut alors évaluer l'erreur e_h sur la quantité d'intérêt \mathcal{Q} de sorte que, avec $\mathcal{Q}(e_h) = \mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_h)$.

$$\mathcal{Q}(e_h) = a(w - w_h, u - u_h) \quad (5.19)$$

On pourra alors estimer l'erreur sur la quantité d'intérêt par un produit des erreurs globales du problème initial et du problème adjoint, estimées via une procédure globale comme présenté dans la section précédente.

$$|\mathcal{Q}(e_h)| = |a(w - w_h, u - u_h)| \leq \|w - w_h\|_E \|u - u_h\|_E \quad (5.20)$$

Raffinement de maillage non-intrusif : un estimateur d'erreur adapté à l'algorithme de couplage

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse au raffinement non-intrusif de maillage éléments finis. Après un bref rappel de l'algorithme de couplage non-intrusif dans un formalisme propre à la méthode du "patch", on propose un estimateur d'erreur en résidu explicite adapté au traitement de solutions multi-échelles issues du couplage. On définit ensuite une stratégie d'utilisation de cet estimateur et son application au raffinement adaptatif de maillage.

Le travail présenté dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Alexei Lozinski (Laboratoire de Mathématiques de Besançon).

Sommaire

6.1	Couplage non-intrusif et méthode du "patch"	94
6.1.1	Le problème de l'élasticité linéaire en dimension deux	94
6.1.2	La méthode du "patch"	95
6.1.3	Résolution non-intrusive	96
6.2	Estimateur <i>a posteriori</i> pour l'algorithme du "patch"	97
6.2.1	Opérateur d'interpolation et propriétés de base	98
6.2.2	Borne supérieure de l'erreur	99
6.3	Application au raffinement de maillage adaptatif	103
6.3.1	Un indicateur d'erreur local	104
6.3.2	Erreur de référence	106
6.3.3	Raffinement de maillage par patch d'éléments finis	106
6.3.4	Patches multiples et raffinement <i>h-p</i>	113
6.4	L'estimation d'erreur <i>a posteriori</i> comme critère d'arrêt	114
6.4.1	Erreur de convergence <i>versus</i> erreur éléments finis	114
6.4.2	Cas d'application	115

6.1 Couplage non-intrusif et méthode du "patch"

Afin que ce volet "estimation d'erreur et raffinement de maillage" puisse être consulté de manière indépendante des autres parties, on réintroduit parfois brièvement certaines notions relatives à la méthode de couplage non-intrusif présentée dans la Partie I, dans un formalisme adapté à ce qui va suivre.

6.1.1 Le problème de l'élasticité linéaire en dimension deux

Soit Ω un domaine polygonal borné de \mathbb{R}^2 et $\partial\Omega$ sa frontière. On scinde cette dernière en deux parties disjointes $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$. Le corps solide qui occupe le domaine Ω est supposé fixé sur $\partial\Omega_D$. Il est également soumis à un champ d'effort surfacique, noté $f = (f_1, f_2)$, et un flux d'effort sur le bord $\partial\Omega_N$, noté $g = (g_1, g_2)$. Ainsi, sous l'action de ces forces, le solide est déformé et le champ de déplacement, noté $u = (u_1, u_2)$, est solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \sigma(u) \cdot n &= g \text{ sur } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (6.1)$$

Ici n est la normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$, et $\sigma(u)$ est le tenseur des contraintes, lié au champ de déplacement par la loi de Hooke, écrite (avec la convention de sommation sur les indices répétés, i, j, k, l ayant pour valeur 1 ou 2) :

$$\sigma_{ij}(u) = R_{ijkl} \gamma_{kl}(u)$$

où R_{ijkl} est le tenseur des rigidités et $\gamma_{kl}(u) = \frac{1}{2} (\partial_k u_l + \partial_l u_k)$ le tenseur des déformations linéarisées.

On introduit à présent l'espace des déplacements admissibles.

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2) / v_i \in H^1(\Omega) ; v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\} \quad (6.2)$$

Alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \gamma_{ij}(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\partial\Omega_N} g_i v_i$$

ou de façon équivalente, en introduisant la loi de Hooke :

$$\begin{cases} u \in V, \forall v \in V : \\ a(u, v) \equiv \int_{\Omega} R_{ijkl} \gamma_{kl}(u) \gamma_{ij}(v) = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\partial\Omega_N} g_i v_i \end{cases} \quad (6.3)$$

Puisque le tenseur des rigidités est supposé vérifier la propriété de symétrie $R_{ijkl} = R_{klij}$, alors la forme bilinéaire a est symétrique : $a(u, v) = a(v, u)$.

On rappelle enfin que si Ω est un sous-ensemble ouvert et borné, si $\partial\Omega_D$ est de mesure strictement positive et si le tenseur des rigidités vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $R_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout indice i, j, k et l ,
- (2) il existe une constante strictement positive C telle que, pour tout tenseur symétrique τ : $R_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \geq C \tau_{ij} \tau_{ij}$,

alors il existe une unique solution $u \in V$ au problème variationnel Eq. (6.3). De plus,

$v \mapsto \sqrt{a(v, v)}$ est une norme sur V , appelée norme énergie, qui est équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{1, \Omega}$, et à la semi-norme $|\cdot|_{1, \Omega}$ par l'inégalité de Poincaré généralisée. Ces résultats peuvent alors être regroupés comme suit :

$$\alpha |v|_{1, \Omega} \leq \alpha \|v\|_{1, \Omega} \leq \sqrt{a(v, v)} \leq \beta |v|_{1, \Omega} \leq \beta \|v\|_{1, \Omega}, \quad \forall v \in V \quad (6.4)$$

où $0 < \alpha \leq \beta$.

6.1.2 La méthode du "patch"

La méthode du "patch" est à présent appliquée au problème présenté ci-dessus. Cela signifie que deux maillages sont alors définis : \mathcal{T}_H est la triangulation de Ω et \mathcal{T}_h la triangulation de Λ qui est un sous-domaine de Ω , également supposé polygonal (cf. Fig. 6.1). On introduit alors les espaces éléments finis suivants :

$$\begin{cases} V_H &= \{v_H \in [C(\Omega)]^2 / v_H|_T \in (P_1)^2, \forall T \in \mathcal{T}_H; v_H|_{\partial\Omega_D} = 0\} \\ V_h &= \{v_h \in [C(\Lambda)]^2 / v_h|_t \in (P_1)^2, \forall t \in \mathcal{T}_h; v_h|_{\partial\Lambda \cap \partial\Omega_D} = 0\} \\ M_h &= V_h|_{\Gamma} \end{cases}$$

où $C(\Omega)$ et $C(\Lambda)$ sont les espaces des fonctions continues sur Ω et Λ respectivement, et P_1 l'espace des polynômes de degré un. De plus, $\Gamma = \partial\Lambda \setminus \partial\Omega$ représente l'interface entre Λ et $\Omega \setminus \Lambda$, et M_h est alors l'espace des multiplicateurs de Lagrange sur Γ . Notons que, dans ce qui va suivre, on considère le cas de maillages imbriqués, *i.e.* on suppose que \mathcal{T}_h est construite par subdivision des éléments de \mathcal{T}_H appartenant à Λ .

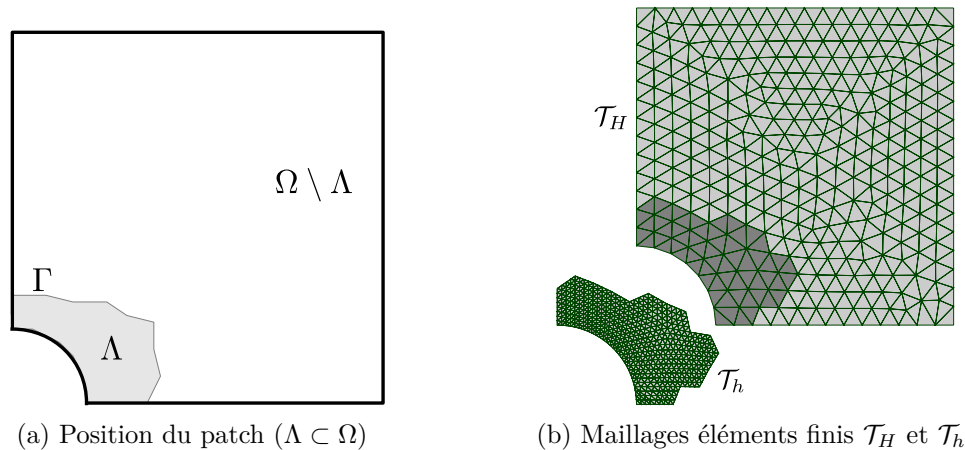


FIGURE 6.1 – Position du patch et maillages

À convergence, la méthode du "patch" fournit les solutions $u_H \in V_H$, $u_h \in V_h$ et $\lambda_h \in M_h$ telles que

$$\int_{\Omega \setminus \Lambda} \sigma(u_H) : \gamma(v_H) + \int_{\Gamma} \lambda_h \cdot v_H = \int_{\Omega \setminus \Lambda} f \cdot v_H, \quad \forall v_H \in V_H \quad (6.5)$$

$$\int_{\Lambda} \sigma(u_h) : \gamma(v_h) - \int_{\Gamma} \lambda_h \cdot v_h = \int_{\Lambda} f \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.6)$$

$$\int_{\Gamma} \mu_h \cdot (u_H - u_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in M_h \quad (6.7)$$

Remarque 1 Pour alléger les expressions (tous les termes de bord impliquant g devraient être scindés sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_N \setminus \partial\Omega$), dans la suite, le flux d'effort g sera considéré nul, sans que cela soit restrictif dans la pratique. De plus, $v \cdot w$ représente le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 et on définit $\sigma : \gamma = \sigma_{ij} \gamma_{ij}$.

Sachant que l'on considère des maillages imbriqués, et avec la définition de M_h , il est facile de voir que le multiplicateur de Lagrange peut être éliminé du système. En effet, Eq. (6.7) est équivalente à $u_H = u_h$ on Γ . Ainsi, si on regroupe u_H et u_h sous la notation u_{Hh} , de sorte que $u_{Hh} = u_H$ sur $\Omega \setminus \bar{\Lambda}$ et $u_{Hh} = u_h$ sur Λ , alors u_{Hh} appartient à l'espace V_{Hh} défini de la façon suivante :

$$V_{Hh} = \{v \in [C(\Omega)]^2 / v = v_H \text{ sur } \Omega \setminus \bar{\Lambda}, v = v_h \text{ sur } \Lambda \text{ avec } v_H \in V_H \text{ et } v_h \in V_h\}$$

En additionnant Eq. (6.5) et Eq. (6.6), le problème peut être réécrit en fonction de u_{Hh} seulement. Trouver $u_{Hh} \in V_{Hh}$ tel que :

$$a(u_{Hh}, v_{Hh}) = \int_{\Omega} f \cdot v_{Hh}, \quad \forall v_{Hh} \in V_{Hh} \quad (6.8)$$

où $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \gamma(v)$.

Sachant que l'espace de discrétisation éléments finis considéré est conforme, *i.e.* $V_{Hh} \subset V$ (cf. Eq. (6.2)), sous les hypothèses classiques sur les maillages (régularité des maillages, famille affine de triangulations), l'estimation d'erreur *a priori* suivante peut être établie avec le lemme de Céa.

Théorème 2 Eq. (6.8) admet une unique solution $u_{Hh} \in V_{Hh}$. Si la solution exacte u de Eq. (6.1) appartient à $H^2(\Omega)$, on a de plus l'estimation d'erreur *a priori* suivante :

$$\|u_{Hh} - u\|_{1,\Omega} \leq C \left(H |u|_{2,\Omega \setminus \bar{\Lambda}} + h |u|_{2,\Lambda} \right) \quad (6.9)$$

avec une constante C indépendante de H , h et u .

Le système Eq. (6.5–6.7) définit un problème couplé impliquant à la fois u_H et u_h . Ainsi, modifier la définition de la géométrie de Λ aura pour conséquence de modifier Eq. (6.5) et (6.6). Aussi, dans le cas où Ω est un domaine de grande dimension et/ou maillé finement, l'assemblage et la factorisation de la matrice de raideur sera une opération très coûteuse en temps CPU. De plus, si la localisation du patch Λ vient à être modifiée plusieurs fois (par exemple en optimisation de forme, propagation de fissure...), la matrice de raideur le sera aussi, ce qui n'est numériquement pas optimal. Afin de pouvoir conserver l'opérateur global inchangé sur Ω , on utilise l'algorithme de couplage non-intrusif. On présente à nouveau cet algorithme, ici dans un formalisme continu adapté au développement de l'estimateur d'erreur qui sera l'objet de la prochaine section.

6.1.3 Résolution non-intrusive

Au lieu de définir Eq. (6.5) sur $\Omega \setminus \Lambda$, on préfère résoudre Eq. (6.5) et Eq. (6.6) sur Ω et Λ respectivement, *via* l'algorithme de couplage non-intrusif, de sorte que u_H et u_h soient en équilibre sur Γ .

Pour ce faire, le terme $\int_{\Lambda} \sigma(u_H) : \gamma(v_H)$ est ajouté de part et d'autre dans Eq. (6.5), ce qui permet d'étendre l'équation sur le domaine Ω complet par la relation de Chasles.

Ensuite, le système Eq. (6.5–6.7) ainsi modifié est résolu de manière itérative, en partant d'une solution initiale u_H^0 , selon les relations suivantes :

$$\int_{\Omega} \sigma(u_H^{n+1}) : \gamma(v_H) = \int_{\Omega \setminus \Lambda} f \cdot v_H - \int_{\Gamma} \lambda_h^n \cdot v_H + \int_{\Lambda} \sigma(u_H^n) : \gamma(v_H) , \quad \forall v_H \in V_H \quad (6.10)$$

$$\int_{\Lambda} \sigma(u_h^n) : \gamma(v_h) = \int_{\Lambda} f \cdot v_h + \int_{\Gamma} \lambda_h^n \cdot v_h , \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.11)$$

$$\int_{\Gamma} \mu_h \cdot (u_H^n - u_h^n) = 0 , \quad \forall \mu_h \in M_h \quad (6.12)$$

On réécrit alors Eq. (6.10) sous une forme incrémentale en ajoutant $-\int_{\Omega} \sigma(u_H^n) : \gamma(v_H)$ de part et d'autre, ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} \sigma(u_H^{n+1} - u_H^n) : \gamma(v_H) = \int_{\Omega \setminus \Lambda} f \cdot v_H - \int_{\Gamma} \lambda_h^n \cdot v_H - \int_{\Omega \setminus \Lambda} \sigma(u_H^n) : \gamma(v_H) , \quad \forall v_H \in V_H$$

où de façon équivalente

$$\mathcal{K}(u_H^{n+1} - u_H^n , v_H) = -\mathcal{R}(u_H^n , v_H) , \quad \forall v_H \in V_H \quad (6.13)$$

avec les définitions suivantes de \mathcal{K} et \mathcal{R}

$$\begin{cases} \mathcal{K}(u_H^{n+1} - u_H^n , v_H) &= \int_{\Omega} \sigma(u_H^{n+1} - u_H^n) : \gamma(v_H) \\ \mathcal{R}(u_H^n , v_H) &= \int_{\Omega \setminus \Lambda} \sigma(u_H^n) : \gamma(v_H) - \int_{\Omega \setminus \Lambda} f \cdot v_H + \int_{\Gamma} \lambda_h^n \cdot v_H \end{cases}$$

De manière non-intrusive, la méthode du "patch" consiste à résoudre Eq. (6.13) itérativement, ce qui requiert bien sûr la résolution de Eq. (6.11 - 6.12) à chaque itération afin de déterminer λ_h^n .

Étant donné que ce problème est résolu par la méthode des éléments finis, on introduit \mathbf{K} et \mathbf{R} , les opérateurs discrets correspondant à \mathcal{K} et \mathcal{R} respectivement. Comme on l'a déjà vu précédemment, l'algorithme est assimilable à une méthode de point fixe pour la résolution de l'équation $\mathbf{R}(\mathbf{u}_H) = 0$, avec

$$\mathbf{u}_H^{n+1} = \mathbf{u}_H^n - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{u}_H^n) \quad (6.14)$$

Dans le contexte de l'analyse de structures (on fait ici l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire), l'opérateur \mathbf{K} n'est autre que la matrice de raideur du modèle global sur Ω , et l'opérateur \mathbf{R} correspond au résidu d'effort généralisé entre le modèle global et le modèle local sur l'interface Γ .

Naturellement, la résolution au niveau global de Eq. (6.14) requiert uniquement l'évaluation des efforts de réaction d'interface, et implique uniquement la résolution d'un système linéaire à chaque itération. Par son caractère non-intrusif, la méthode du "patch" n'implique aucune modification du modèle global (opérateur de rigidité \mathbf{K}) au cours des itérations.

Sous certaines conditions (le patch ne doit pas être plus rigide que le modèle global sur Λ , ce qui sera toujours vérifié dans les applications de raffinement de maillage), cet algorithme converge vers (u_H, u_h) , solution de Eq. (6.5–6.7), cf. [Chevreuil *et al.*, 2013].

6.2 Estimateur *a posteriori* pour l'algorithme du "patch"

Comme on l'a vu précédemment, l'algorithme de couplage non-intrusif permet le positionnement d'un modèle local raffiné au sein d'un modèle global donné. Néanmoins, on

a toujours besoin d'un critère de décision sur l'emplacement et la taille du patch à définir. On rappelle que l'objectif est de conduire une analyse de structure sur un maillage adapté de sorte à ce que le calcul fournisse une précision donnée sur l'ensemble du maillage. On utilisera alors l'estimation d'erreur *a posteriori* pour évaluer la qualité de la solution et décider quelle partie du maillage doit être adaptée.

Au final, on choisit d'implémenter un estimateur d'erreur explicite en résidu. Ainsi, en suivant la stratégie de couplage non-intrusif, l'estimation de cette erreur ne doit pas impliquer de modification du modèle global existant, et ne doit pas nécessiter la résolution de problèmes additionnels.

Bien sûr, cet estimateur ne fournira pas des bornes de l'erreur aussi précises que peuvent le faire d'autres estimateurs (cf. Chapitre 5), mais permettra de construire des cartes d'erreur dont la distribution sera suffisamment précise vis-à-vis de l'application visée, et ce pour un coût de calcul négligeable.

6.2.1 Opérateur d'interpolation et propriétés de base

Avant de construire un estimateur d'erreur *a posteriori*, on a besoin d'un opérateur d'interpolation approprié sur l'espace V_{Hh} , ainsi que d'hypothèses sur le maillage.

Soit T un élément de \mathcal{T}_H (on suppose les mêmes propriétés pour \mathcal{T}_h). On note h_T le diamètre de T et ρ_T le diamètre de la plus grosse boule inscrite dans T . Aussi, on suppose le maillage régulier (au sens classique) : il existe une constante strictement positive C telle que $\frac{h_T}{\rho_T} \leq C$ pour tout T . Dès que les éléments sont tous des triangles, ou qu'ils forment une famille de triangulation affine équivalente, aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire. Cependant, si des éléments quadrangulaires sont utilisés, cette dernière considération n'est plus valide.

Dans ce cas, on fait une hypothèse de régularité sur la forme des éléments (cf. [Matthies et Tobiska, 2002]) : cela impose que la distorsion d'un parallélogramme en quadrangle est uniformément bornée, et garantit que la transformation entre un élément donné et l'élément de référence est bijective.

On rappelle que l'on utilise des polynômes de degré un pour la définition des espaces éléments finis (degré total inférieur ou égal à un pour les triangles, degré par coordonnée inférieur ou égal à un pour les quadrangles).

On introduit aussi plusieurs notations et conventions. Les lettres capitales ($H, T, E...$) désigneront les quantités relatives au maillage global, \mathcal{T}_H , et les lettres minuscules ($h, t, e...$) désigneront les quantités relatives au maillage local \mathcal{T}_h . De plus le symbole \preceq signifie que l'inégalité correspondante est définie à une constante multiplicative près qui ne dépend que de la régularité du maillage.

À présent, on rappelle quelques propriétés de l'opérateur d'interpolation de Scott-Zhang $I_H : V \rightarrow V_H$ [Scott et Zhang, 1990], qui s'étend aux quadrangles sous certaines hypothèses de régularités [Heuveline et Schieweck, 2007].

Pour tout $v \in V$,

$$\|v - I_H v\|_{0,T} \preceq H_T |v|_{1,\omega_T}, \quad |v - I_H v|_{1,T} \preceq |v|_{1,\omega_T}, \quad \|v - I_H v\|_{0,E} \preceq \sqrt{H_E} |v|_{1,\omega_E} \quad (6.15)$$

pour tout élément $T \in \mathcal{T}_H$ et toute arête $E \in \mathcal{E}_H$, où \mathcal{E}_H est l'ensemble des arêtes du maillage \mathcal{T}_H , H_T le diamètre de l'élément T et H_E celui de l'arête E . Aussi, ω_T (resp. ω_E) désigne l'union des voisins de T (resp. E) dans \mathcal{T}_H . En suivant la construction de [Scott et Zhang,

1990], on peut voir qu'on a une certaine liberté dans le choix de ω_T et ω_E . En particulier, on peut supposer que si $T \subset \Omega \setminus \Lambda$, alors $\omega_T \subset \Omega \setminus \Lambda$, et de même pour ω_E . Cela signifie que si T touche l'interface Γ , alors on peut choisir ω_T de sorte qu'il contienne uniquement des voisins de T qui sont à l'extérieur de Λ . Autrement, ω_T est défini comme l'union de tous les éléments voisins de T . On rappelle que I_H est un projecteur, *i.e.* $I_H v_H = v_H$ pour tout $v_H \in V_H$.

De la même façon, il existe un opérateur d'interpolation $I_h : V(\Lambda) \rightarrow V_h$, avec $V(\Lambda) = \{v \in H^1(\Lambda) / v|_{\partial\Omega_D \cap \partial\Lambda} = 0\}$. Enfin, on a pour tout $v \in V(\Lambda)$:

$$\|v - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t |v|_{1,\omega_t} \quad , \quad |v - I_h v|_{1,t} \preceq |v|_{1,\omega_t} \quad , \quad \|v - I_h v\|_{0,e} \preceq \sqrt{h_e} |v|_{1,\omega_e} \quad (6.16)$$

pour tout élément $t \in \mathcal{T}_h$ et pour toute arête $e \in \mathcal{E}_h$, où \mathcal{E}_h est l'ensemble des arêtes de \mathcal{T}_h , h_t le diamètre de l'élément t et h_e celui de l'arête e . Cette fois encore, on a une certaine liberté dans la construction de I_h . En particulier, il peut être construit de sorte que $(I_h v)|_\Gamma$ ne dépende que de la trace de v sur Γ . Ainsi, pour tout arête du bord de \mathcal{T}_h située sur Γ

$$\|v - I_h v\|_{0,e} \preceq \|v\|_{0,\gamma_e}$$

où γ_e est l'union de toutes les arêtes du bord de \mathcal{T}_h située sur Γ et qui partagent un sommet avec e .

On définit également l'opérateur d'interpolation combiné $I_{Hh} : V \rightarrow V_{Hh}$. Pour tout $v \in V$, $I_{Hh}v$ est l'élément de V_{Hh} qui prend les valeurs suivantes aux nœuds des deux maillages

$$I_{Hh}v(x) = \begin{cases} I_H v(x) & \text{si } x \text{ est un nœud du maillage } \mathcal{T}_H \text{ en dehors } \bar{\Lambda} \text{ ou sur } \Gamma \\ I_h v(x) & \text{si } x \text{ est un nœud du maillage } \mathcal{T}_h \text{ à l'intérieur de } \Lambda \text{ ou sur } \partial\Lambda \cap \partial\Omega \end{cases}$$

On notera que le terme "nœud" de \mathcal{T}_H (*resp.* \mathcal{T}_h) fait ici référence à tous les points d'interpolation utilisés pour la définition de l'espace V_H (*resp.* V_h), et pas seulement aux sommets du maillage, de sorte que $I_{Hh}v$ est bien défini par ses valeurs aux nœuds.

6.2.2 Borne supérieure de l'erreur

Les relations Eq. (6.15) et Eq. (6.16) donnent des estimations d'erreur pour les fonctions dont le support est contenu respectivement dans $\Omega \setminus \Lambda$ et Λ . Cependant, la définition de l'opérateur d'interpolation I_{Hh} implique d'étudier plus précisément le cas d'une fonction dont le support est contenu dans $\bar{\Lambda}$ et touche la frontière Γ . C'est l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 3 *Soit $v \in H^1(\Omega)$ et t un élément du maillage \mathcal{T}_h qui touche Γ , *i.e.* dont au moins un sommet est sur Γ . Alors on a*

$$\|v - I_{Hh}v\|_{0,t} \preceq h_t |v|_{1,\omega_t} + h_t^{1/2} \|v - I_H v\|_{0,\partial\omega_t \cap \Gamma} \quad (6.17)$$

où ω_t est l'union de tous les éléments de \mathcal{T}_h qui partagent au moins un nœud avec t .

De la même manière, soit e une arête interne du maillage \mathcal{T}_h qui touche Γ , *i.e.* dont une extrémité est sur Γ . Alors on a

$$\|v - I_{Hh}v\|_{0,e} \preceq h_e^{1/2} |v|_{1,\omega_e} + \|v - I_H v\|_{0,\partial\omega_e \cap \Gamma} \quad (6.18)$$

où ω_e est l'union de tous les éléments de \mathcal{T}_h qui partagent au moins un nœud avec e .

Démonstration. Soit $v_h = I_{Hh}v|_{\Lambda}$.

• On commence par l'inégalité Eq. (6.17). Quand un élément de t touche Γ , deux cas de figures peuvent se présenter :

1. t a une arête, que l'on note \tilde{e} , appartenant à Γ . Alors tous les nœuds de t qui ne sont pas sur \tilde{e} sont des nœuds internes du maillage \mathcal{T}_h et, par conséquent, $v_h - I_h v$ s'annule en ces nœuds. Aussi, sur t , $v_h - I_h v$ est un polynôme du premier degré qui ne dépend que des valeurs prises sur les nœuds de \tilde{e} . Ainsi, en considérant le *scaling* et l'équivalence des normes (espace de dimension finie), on peut écrire :

$$\|v_h - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t^{1/2} \|v_h - I_h v\|_{0,\tilde{e}}$$

Puis, en se basant sur le fait que I_h est un projecteur sur V_h et en considérant l'interpolation sur le bord des éléments, on obtient

$$\|v_h - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t^{1/2} \|I_h(v_h - v)\|_{0,\tilde{e}} \preceq h_t^{1/2} \|v_h - v\|_{0,\gamma_{\tilde{e}}}$$

2. t a un unique sommet, que l'on note x , appartenant à Γ . Puisque $v_h - I_h v$ s'annule sur tous les nœuds de \mathcal{T}_h à l'exception de x , on obtient cette fois encore par *scaling*

$$\|v_h - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t |(v_h - I_h v)(x)|$$

Soit \tilde{e} une arête de \mathcal{T}_h contenant x et appartenant à Γ . Pour tout $w_h \in V_h$, l'inégalité inverse nous donne

$$|w_h(x)| \preceq h_t^{-1/2} \|w_h\|_{0,\tilde{e}}$$

En prenant $w_h = v_h - I_h v$ et en suivant un raisonnement similaire au précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \|v_h - I_h v\|_{0,t} &\preceq h_t |(v_h - I_h v)(x)| \preceq h_t^{1/2} \|v_h - I_h v\|_{0,\tilde{e}} \\ &= h_t^{1/2} \|I_h(v_h - v)\|_{0,\tilde{e}} \preceq h_t^{1/2} \|v_h - v\|_{0,\gamma_{\tilde{e}}} \end{aligned}$$

Au final, puisque $\gamma_{\tilde{e}} \subset (\partial\omega_t \cap \Gamma)$, dans les deux cas, on a

$$\|v_h - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t^{1/2} \|v_h - v\|_{0,\partial\omega_t \cap \Gamma}$$

et on conclut en utilisant l'inégalité triangulaire et l'interpolation mentionnée ci-dessus

$$\|v - v_h\|_{0,t} \leq \|v - I_h v\|_{0,t} + \|v_h - I_h v\|_{0,t} \preceq h_t |v|_{1,\omega_t} + h_t^{1/2} \|v_h - v\|_{0,\partial\omega_t \cap \Gamma}$$

ce qui est équivalent à Eq. (6.17) puisque $v_h = I_{Hh}v$ sur Λ et $v_h = I_H v$ sur Γ .

• On s'intéresse maintenant à la démonstration de Eq. (6.18). Soit e une arête interne de \mathcal{T}_h qui touche Γ . Alors une extrémité de e , que l'on note x , appartient à Γ tandis que l'autre est à l'intérieur de Λ . Puisque $v_h - I_h v = 0$ pour tous les nœuds de \mathcal{T}_h à l'exception de x , on obtient encore par *scaling*

$$\|v_h - I_h v\|_{0,e} \preceq h_e^{1/2} |(v_h - I_h v)(x)|$$

En utilisant l'inégalité inverse comme dans la preuve précédente, on conclut :

$$\|v_h - I_h v\|_{0,e} \preceq \|v_h - I_h v\|_{0,\tilde{e}} = \|I_h(v_h - v)\|_{0,\tilde{e}} \preceq \|v_h - v\|_{0,\gamma_{\tilde{e}}}$$

où \tilde{e} est une arête de \mathcal{T}_h qui contient x et qui appartient à Γ . Au final, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\|v - v_h\|_{0,e} \leq \|v - I_h v\|_{0,e} + \|v_h - I_h v\|_{0,e} \leq h_e^{1/2} |v|_{1,\omega_e} + \|v_h - v\|_{0,\gamma_{\tilde{e}}}$$

ce qui implique Eq. (6.18) puisque $v_h = I_{Hh}v$ sur Λ et $v_h = I_H v$ sur Γ . ■

Soit $\mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)$ (*resp.* $\mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)$) l'union des éléments de \mathcal{T}_H (*resp.* des arêtes de \mathcal{E}_H) qui sont à l'extérieur de Λ , *i.e.* $\mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)$ contient toutes les arêtes de Γ . De plus, soit \mathcal{T}_h^b et \mathcal{E}_h^b respectivement les ensembles d'éléments et d'arêtes interface de \mathcal{T}_h qui touchent Γ . Avec ces notations, on a l'estimation d'erreur suivante.

Proposition 4 *Sous les hypothèses de régularité du maillage, rappelées en début de section, u est la solution de Eq. (6.1) et u_{Hh} la solution de Eq. (6.8). On a*

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}\|_E \leq \frac{\Theta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} & \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)} H_T^2 \|f + \operatorname{div} \sigma(u_H)\|_{0,T}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)} H_E \|\sigma(u_H) \cdot n_E\|_{0,E}^2 \right. \\ & + \sum_{t \in \mathcal{T}_h} h_t^2 \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \\ & \left. + \sum_{t \in \mathcal{T}_h^b} H_{E,t} h_t \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} H_{E,e} \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

où $\|\cdot\|_E = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ est la norme énergie et $[w \cdot n_\varepsilon]$ est le saut du champ de tenseur w le long de l'arête ε selon la normale n_ε choisie. De plus, $H_{E,t}$ et $H_{E,e}$ représentent la taille maximale des éléments de \mathcal{T}_H auxquels t et e sont rattachés. On rappelle aussi que le symbole \leq exprime une inégalité à une constante multiplicative près ne dépendant que de la régularité du maillage.

Remarque 5 *Quand une arête ε appartient à $\partial\Omega_N$, le saut normal $[w \cdot n_\varepsilon]$ n'a aucun sens. On s'autorise à conserver la même notation dans ce cas, le "saut" étant calculé entre le champ défini sur Ω (ou Λ) et la condition au bord de Neumann. De la même façon, dès qu'une arête ε appartient au bord de Dirichlet $\partial\Omega_D$, il n'y a pas de saut normal sur cette arête et le terme correspondant doit être ignoré.*

Démonstration. Soit $w = u - u_{Hh}$. Par la propriété d'orthogonalité de Galerkin, on a pour tout $w_{Hh} \in V_{Hh}$

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}\|_E^2 &= a(u - u_{Hh}, w) = a(u - u_{Hh}, w - w_{Hh}) = \int_{\Omega} \sigma(u - u_{Hh}) : \gamma(w - w_{Hh}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)} \int_T \sigma(u - u_H) : \gamma(w - w_H) + \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \int_t \sigma(u - u_h) : \gamma(w - w_h) \end{aligned}$$

Une intégration par partie sur tous les éléments nous donne

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}\|_E^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)} \int_T (f + \operatorname{div} \sigma(u_H)) \cdot (w - w_H) \pm \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)} \int_E [\sigma(u_H) \cdot n_E] (w - w_H) \\ &+ \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \int_t (f + \operatorname{div} \sigma(u_h)) \cdot (w - w_h) \pm \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e [\sigma(u_h) \cdot n_e] (w - w_h) \end{aligned}$$

Le signe présent devant les intégrales sur les arêtes dépend du choix de la normale à celles-ci. Pour être tout-à-fait rigoureux, il faudrait définir les normales de façon "unique". Mais on verra que ce choix est sans conséquence sur les estimations qui vont suivre. C'est pourquoi on ne précise pas l'orientation de n_ε . Ainsi, en posant $w_{Hh} = I_{Hh}w$ et en utilisant les interpolations Eq. (6.15–6.18) appropriées pour les éléments et arêtes, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}\|_E^2 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)} \|f + \operatorname{div} \sigma(u_H)\|_{0,T} H_T |w|_{1, \omega_T} + \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)} \|[\sigma(u_H) \cdot n_E]\|_{0,E} \sqrt{H_E} |w|_{1, \omega_E} \\ &+ \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t} h_t |w|_{1, \omega_t} + \sum_{t \in \mathcal{T}_h^b} \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t} \sqrt{h_t} \|w - I_H w\|_{0, \partial \omega_t \cap \Gamma} \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|[\sigma(u_h) \cdot n_e]\|_{0,e} \sqrt{h_e} |w|_{1, \omega_e} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} \|[\sigma(u_h) \cdot n_e]\|_{0,e} \|w - I_H w\|_{0, \partial \omega_e \cap \Gamma} \end{aligned}$$

Rappelons que \mathcal{T}_h^b est l'ensemble des éléments du maillage \mathcal{T}_h qui touchent Γ . On partitionne cet ensemble de la manière suivante. On introduit $\mathcal{E}_H(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes $E \in \mathcal{E}_H$ qui sont sur Γ , et on cherche à avoir $\mathcal{T}_h^b = \cup_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} \mathcal{T}_h^b(E)$, où $\{\mathcal{T}_h^b(E)\}_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)}$ sont des ensembles disjoints d'éléments de \mathcal{T}_h ayant au moins un sommet sur E .

Ainsi, soit t un élément de \mathcal{T}_h^b . Dire que t touche Γ signifie que t a une unique arête ou sommet sur Γ . Étant donné que \mathcal{T}_h est construit par subdivision des éléments de \mathcal{T}_H appartenant à Λ , si c'est une arête (on la note e), il existe une unique arête $E_0 \in \mathcal{E}_H(\Gamma)$ telle que $e \subset E_0$ et on pose alors $t \in \mathcal{T}_h^b(E_0)$. Si t a un sommet (on le note x) sur Γ , deux cas de figure sont possibles. Première possibilité : il existe une unique arête $E_0 \in \mathcal{E}_H(\Gamma)$ telle que $x \in E_0$ et on pose alors $t \in \mathcal{T}_h^b(E_0)$. Seconde possibilité : x est l'extrémité de deux arêtes $\mathcal{E}_H(\Gamma)$, *i.e.* $\{x\} = E_1 \cap E_2$, et on choisit alors la plus longue (disons E_i) et on pose $t \in \mathcal{T}_h^b(E_i)$ (si les deux arêtes ont la même longueur, on choisit la première).

Alors, en utilisant une fois de plus Eq. (6.15), on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in \mathcal{T}_h^b} \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t} \sqrt{h_t} \|w - I_H w\|_{0, \partial \omega_t \cap \Gamma} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} \sum_{t \in \mathcal{T}_h^b(E)} \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t} \sqrt{h_t} \|w - I_H w\|_{0, \partial \omega_t \cap \Gamma} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} \left(\sum_{t \in \mathcal{T}_h^b(E)} h_t \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \|w - I_H w\|_{0,E} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} \left(\sum_{t \in \mathcal{T}_h^b(E)} H_E h_t \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 \right)^{1/2} |w|_{1, \omega_E} \\ &\leq \left(\sum_{t \in \mathcal{T}_h^b} H_{E,t} h_t \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 \right)^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} (|w|_{1, \omega_E}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

De la même façon, on peut écrire $\mathcal{E}_h^b = \cup_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} \mathcal{E}_h^b(E)$, où $\{\mathcal{E}_h^b(E)\}_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)}$ sont des ensembles disjoints d'arêtes de \mathcal{E}_h qui ont au moins un sommet sur E . En suivant le même raisonnement, avec Eq. (6.15), on a

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} \|[\sigma(u_h) \cdot n_e]\|_{0,e} \|w - I_H w\|_{0, \partial \omega_e \cap \Gamma} \leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} H_{E,e} \|[\sigma(u_h) \cdot n_e]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Gamma)} (|w|_{1, \omega_E}^2)^{1/2}$$

En regroupant tous les termes, on obtient

$$\|u - u_{Hh}\|_E^2 \preceq \left(\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)} H_T^2 \|f + \operatorname{div} \sigma(u_H)\|_{0,T}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H(\Omega \setminus \Lambda)} H_E \|\sigma(u_H) \cdot n_E\|_{0,E}^2 \\ & + \sum_{t \in \mathcal{T}_h} h_t^2 \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{t \in \mathcal{T}_h^b} H_{E,t} h_t \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} H_{E,e} \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \end{aligned} \right)^{1/2} |w|_{1,\Omega}$$

et ainsi Eq. (6.19) puisque $|\cdot|_{1,\Omega}$ et $\|\cdot\|_E$ sont deux normes équivalentes (cf. Eq. (6.4)). ■

6.3 Application au raffinement de maillage adaptatif

On rappelle que l'objectif principal du travail présenté est de proposer une méthode non-intrusive de raffinement local de maillage. En effet, même si des algorithmes de remaillage très efficaces existent [Alliez *et al.*, 2003 ; Bois *et al.*, 2012], de telles procédures restent complexes et coûteuses. De plus, le raffinement local de maillages quadrangulaires [Sandhu *et al.*, 1995 ; Woodbury *et al.*, 2011] est une tâche encore plus complexe que dans le cas de triangulations. Un moyen d'éviter les difficultés liées au remaillage consiste à utiliser des éléments finis non conformes, et autoriser la présence de nœuds "flottants". Ainsi, il est possible de raffinement localement un maillage sans se soucier de la conformité des éléments, au prix d'une complexité plus grande (*e.g.* en utilisant la méthode *mortar* [Bernardi *et Maday*, 2000]).

Dans cette section, on explique comment l'algorithme de couplage peut être utilisé dans le cadre du remaillage local de manière non-intrusive.

Pour cela, on considère le cas-test de la plaque perforée (perforation circulaire de rayon a) infinie sous tension uniforme (d'intensité T_∞). Lors des simulations numériques, on étudiera uniquement un quart de la plaque (cf. Fig. 6.2). Les conditions aux limites sont alors représentées par des symétries et un déplacement imposé issu de la solution analytique du problème.

$$\begin{cases} u_x(r, \theta) = \frac{T_\infty a}{8\mu} \left[\frac{r}{a} (\kappa + 1) \cos \theta + \frac{2a}{r} \left((1 + \kappa) \cos \theta + \cos 3\theta \right) - \frac{2a^3}{r^3} \cos 3\theta \right] \\ u_y(r, \theta) = \frac{T_\infty a}{8\mu} \left[\frac{r}{a} (\kappa - 3) \sin \theta + \frac{2a}{r} \left((1 - \kappa) \sin \theta + \sin 3\theta \right) - \frac{2a^3}{r^3} \sin 3\theta \right] \end{cases}$$

avec $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

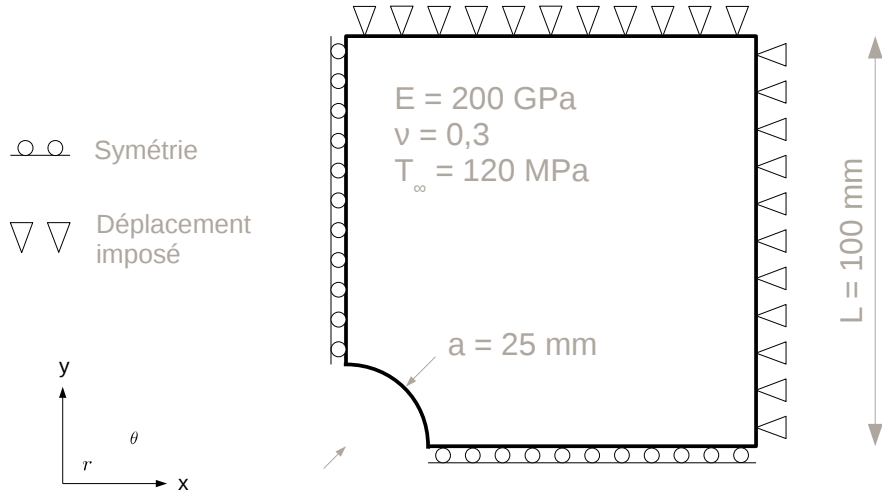


FIGURE 6.2 – Illustration du cas-test

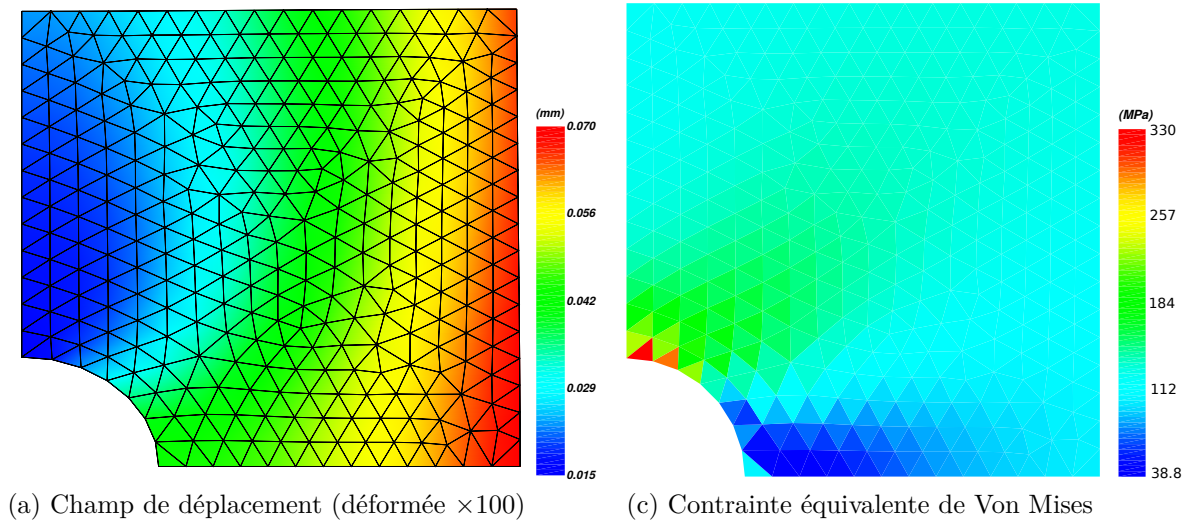


FIGURE 6.3 – Solution du cas-test (maillage grossier)

6.3.1 Un indicateur d'erreur local

Afin d'utiliser l'estimateur d'erreur introduit précédemment à des fins de pilotage du raffinement de maillage [Verfürth, 1994 ; Cirak et Ramm, 1998], on doit d'abord construire un indicateur d'erreur local, *i.e.* une carte d'erreur fournissant une valeur scalaire sur chaque élément du maillage. Afin de rester consistant, la somme quadratique de tous les indicateurs élémentaires θ_T doit être égale à la valeur de l'estimation globale Θ , *cf.* Eq. (6.19).

$$\Theta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda) \cup \mathcal{T}_h} \theta_T^2 \right)^{1/2}$$

Ainsi, les indicateurs élémentaires sont définis de la façon suivante. Pour le maillage $\mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda)$

$$\theta_T = \left(H_T^2 \|f + \operatorname{div}\sigma(u_H)\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T} H_E \|\sigma(u_H) \cdot n_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda) \quad (6.20)$$

où E est une arête de la frontière ∂T de l'élément T . Pour le maillage \mathcal{T}_h on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = \left(h_t^2 \|f + \operatorname{div}\sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial t} h_e \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } t \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_h^b \\ \theta_t = \left(h_t^2 \|f + \operatorname{div}\sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial t} h_e \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \right. \\ \quad \left. + H_{E,t} h_t \|f + \operatorname{div}\sigma(u_h)\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^b \cap \partial t} H_{E,e} \|\sigma(u_h) \cdot n_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } t \in \mathcal{T}_h^b \end{array} \right. \quad (6.21)$$

où e est une arête de la frontière ∂t de l'élément t .

Remarque 6 Un coefficient $\frac{1}{2}$ apparaît en facteur des termes relatifs aux arêtes car la plupart appartiennent à deux éléments. Toutefois, on rappelle que si une arête se situe sur le bord $\partial\Omega_N$, la définition du saut normal n'a plus de sens et il doit alors être calculé entre le champ défini sur Ω (ou Λ) et la condition de Neumann. Dans ce cas, le coefficient $\frac{1}{2}$ doit être omis. Enfin, quand une arête appartient au bord de Dirichlet, il n'y a pas de saut normal et le terme correspondant doit être ignoré.

La carte d'erreur construite à partir de Eq. (6.20-6.21) sera ensuite utilisée pour adapter le maillage du patch si nécessaire. Puisque le maillage et la solution sont multi-échelles, l'indicateur d'erreur le sera aussi. Aussi, une carte d'erreur absolue paraît mal adaptée à l'analyse de telles situations, du fait de la pondération des indicateurs d'erreur locaux par la taille de éléments. On propose alors d'utiliser à la place l'indicateur d'erreur relatif suivant :

$$\widehat{\theta}_T = \frac{\theta_T}{\sqrt{\operatorname{mes}(T)}} \quad (6.22)$$

où $\operatorname{mes}(T)$ est la mesure (*i.e.* ici la surface) de l'élément T . On obtient alors un indicateur d'erreur relatif adapté au caractère multi-échelles du problème.

Une autre possibilité permettant de tenir compte des différences d'échelle est de collecter les indicateurs locaux sur le maillage global, de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall T \in \mathcal{T}_H(\Omega \setminus \Lambda) \quad , \quad \widetilde{\theta}_T = \theta_T \\ \forall T \in \mathcal{T}_H(\Lambda) \quad , \quad \widetilde{\theta}_T = \left(\sum_{t \in \mathcal{T}_h, t \subset T} \theta_t^2 \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (6.23)$$

En fin de compte, l'indicateur $\widehat{\theta}_T$ est fait pour évaluer l'erreur sur chaque maillage de raffinement différent (et donc la qualité d'un tel maillage), alors que l'indicateur θ_T est prévu pour permettre une comparaison sur la base du maillage initial.

6.3.2 Erreur de référence

Afin d'évaluer les performances de cet indicateur d'erreur en résidu explicite, on fait une comparaison avec un indicateur basé sur l'erreur vraie $\|u - u_{Hh}\|_{E,T}$. Il est aussi possible de calculer les indicateurs d'erreur absolue et relative correspondant θ_T^{ref} et $\widehat{\theta}_T^{ref}$:

$$\begin{cases} \theta_T^{ref} &= \|u - u_{Hh}\|_{E,T} \\ \widehat{\theta}_T^{ref} &= \frac{\theta_T^{ref}}{\sqrt{mes(T)}} \end{cases}$$

Enfin, dans le but de fournir une comparaison pertinente entre les deux cartes d'erreur correspondant à $\widehat{\theta}_T$ et $\widehat{\theta}_T^{ref}$, on normalise les résultats par le norme infinie de chaque champ.

$$\|\widehat{\Theta}\|_\infty = \max_{T \in \mathcal{T}_H \cup \mathcal{T}_h} \widehat{\theta}_T \quad , \quad \|\widehat{\Theta}^{ref}\|_\infty = \max_{T \in \mathcal{T}_H \cup \mathcal{T}_h} \widehat{\theta}_T^{ref}$$

Étant donné que l'on réalise la triangulation d'un domaine polygonal, on introduit une erreur d'approximation de la géométrie au bord du trou, cette dernière fera donc partie de l'erreur de discrétisation.

On définit enfin l'indice d'efficacité comme le rapport entre l'erreur en résidu et l'erreur de référence normées, *i.e.* $\frac{\widehat{\theta}_T}{\widehat{\theta}_T^{ref}} \times \frac{\|\widehat{\Theta}^{ref}\|_\infty}{\|\widehat{\Theta}\|_\infty}$.

6.3.3 Raffinement de maillage par patch d'éléments finis

A partir d'un maillage initial mono-échelle sur Ω , l'indicateur d'erreur Eq. (6.20) est utilisé pour construire une carte d'erreur, et ainsi déterminer la zone de patch potentielle [Rezzonico *et al.*, 2007].

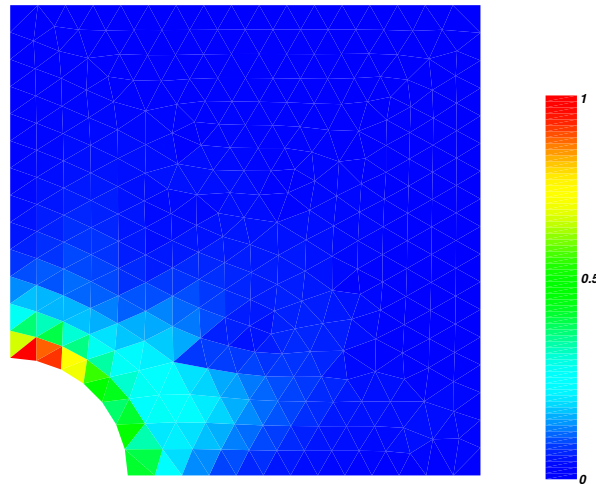


FIGURE 6.4 – Erreur relative en résidu sur le maillage initial

Pour une tolérance ϵ donnée, le patch Λ sera défini comme l'union des éléments de \mathcal{T}_H dont la valeur de l'indicateur d'erreur θ_T est supérieure à ϵ .

$$\Lambda = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_H, \theta_T > \epsilon} T$$

Le maillage du patch est alors uniformément raffiné par subdivision de ses éléments (*cf.* Fig. 6.5).

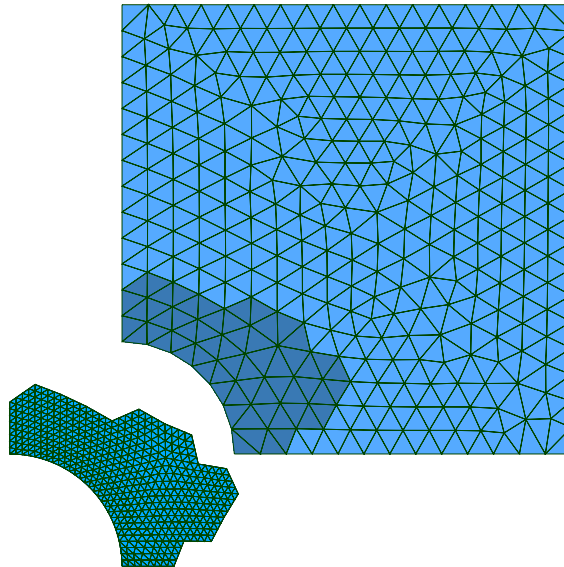


FIGURE 6.5 – Patch d'éléments finis uniformément raffiné

En pratique, on peut ne se soucier que de l'interface, et garantir le fait que les maillages sont imbriqués uniquement sur Γ , *i.e.* $V_H|_{\Gamma} \subset V_h|_{\Gamma}$. On notera que le raffinement par patch permet également de modifier localement la géométrie du modèle, par exemple en déplaçant les nœuds afin d'approcher au mieux la courbure du trou présent dans la plaque (*cf.* Fig. 6.5). L'algorithme Eq. (6.13) est ensuite appliqué, avec les maillages \mathcal{T}_H sur Ω et \mathcal{T}_h sur Λ . Cela conduit au calcul de la solution multi-échelle (u_H, u_h) du problème Eq. (6.5–6.7), *cf.* Fig. 6.6. Un nouveau calcul d'erreur peut à nouveau être mené, cette fois sur la solution multi-échelle avec Eq. (6.20-6.21). Par exemple, Fig. 6.7 et Fig. 6.8 illustrent les cartes d'erreur pour plusieurs raffinement successifs. Le patch est raffiné uniformément quatre fois (à chaque fois un triangle est sous-découpé en quatre autres).

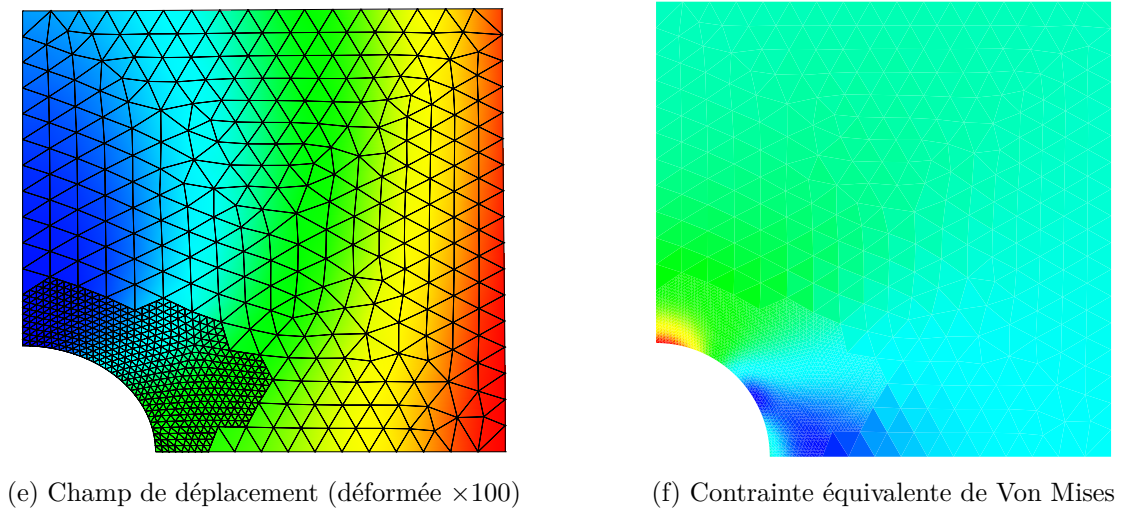
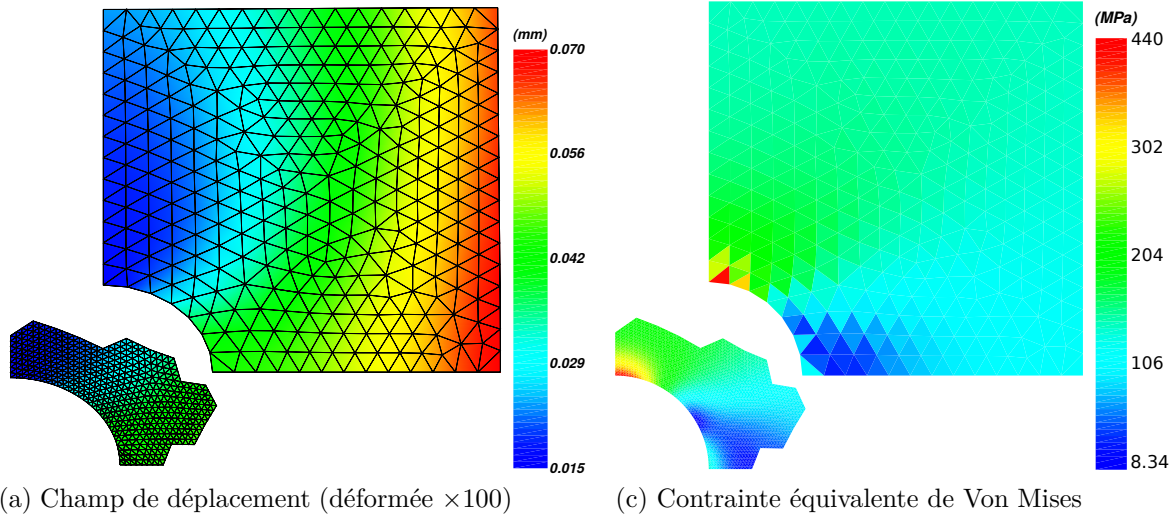


FIGURE 6.6 – Solution du cas-test avec patch uniformément raffiné

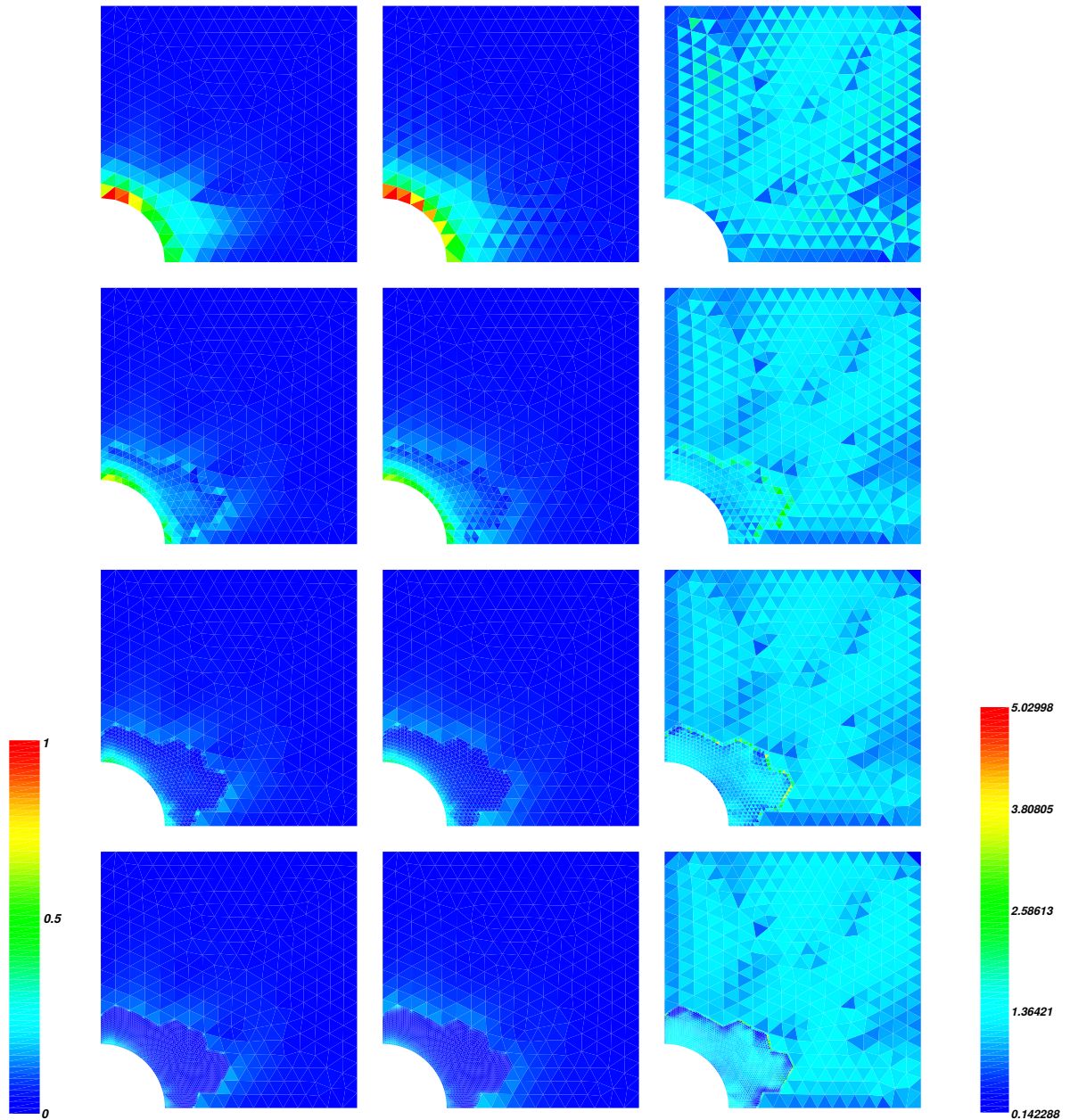


FIGURE 6.7 – Erreur en résidu relatif pour les patches uniformément raffinés : erreur en résidu $\hat{\theta}_T$ (6.22) - erreur de référence $\hat{\theta}_T^{ref}$ - indice d'efficacité

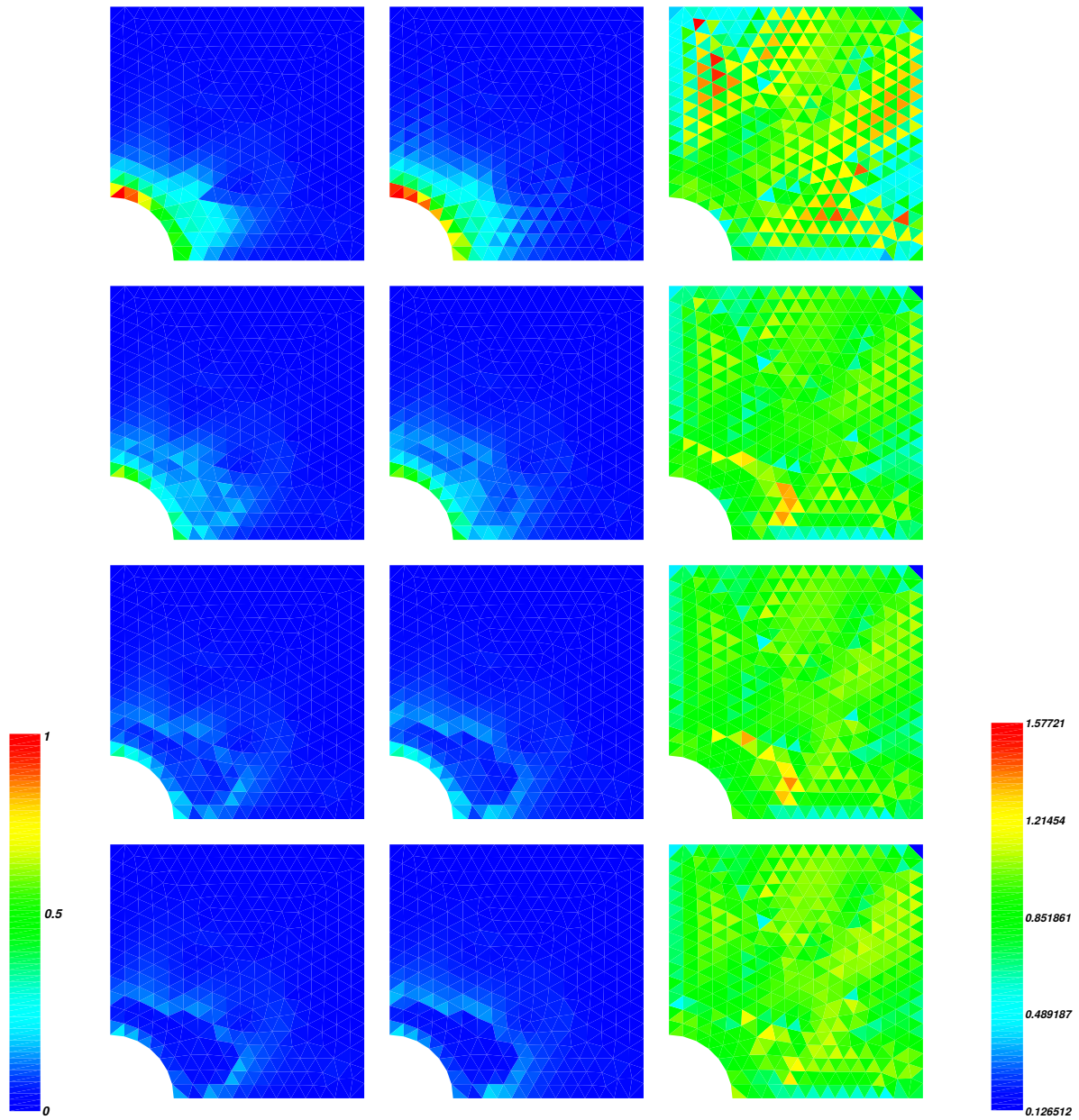


FIGURE 6.8 – Erreur en résidu relatif pour les patches uniformément raffinés : erreur en résidu $\tilde{\theta}_T$ (6.23) - erreur de référence $\tilde{\theta}_T^{ref}$ - indice d'efficacité

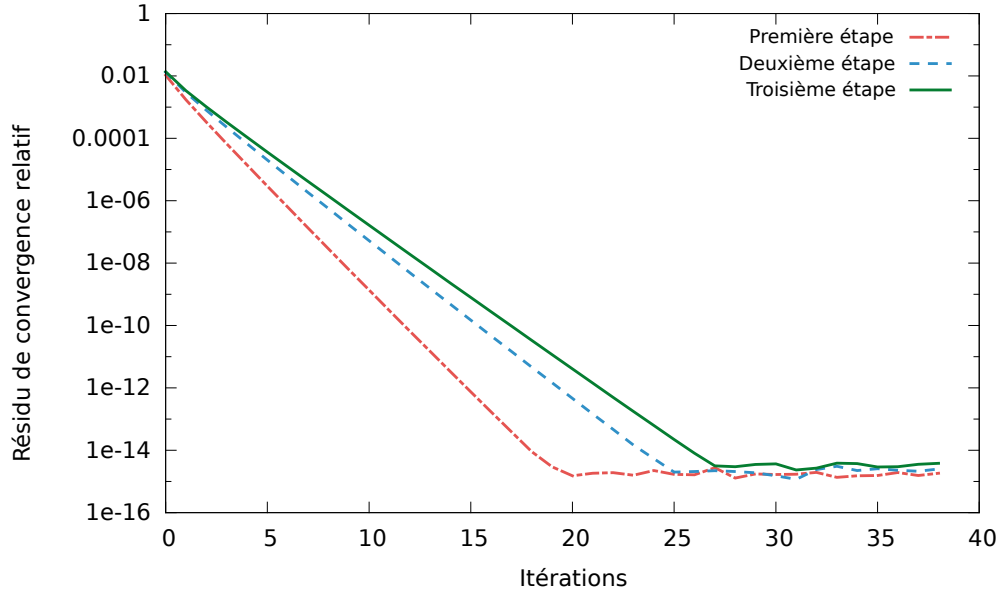


FIGURE 6.9 – Évolution du résidu de convergence pour chaque étape de raffinement

On peut voir Fig. 6.9 l'évolution du résidu de convergence au cours des itérations de l'algorithme. Selon la finesse du patch, vingt-cinq itérations environ sont suffisantes pour atteindre la précision machine (en pratique, seules quelques itérations sont requises pour atteindre une précision acceptable, comme on le verra dans la prochaine section). De plus, plus le patch est grossier, plus la convergence est rapide. Ce phénomène est dû à l'écart de raideur entre le modèle global et le patch, *cf.* [Duval *et al.*, 2016]. Si U est la solution exacte et $\mathbf{R}(u_H^n)$ le résidu de convergence défini dans Eq. (6.14), le résidu relatif est défini par

$$\epsilon^n = \frac{\|\mathbf{R}(u_H^n)\|_2}{\|KU\|_2} \quad (6.24)$$

On a donné des exemples dans lesquels le patch était uniformément raffiné, afin de simplifier la présentation. Néanmoins, rien n'interdit un raffinement non-uniforme à l'intérieur du patch, *cf.* Fig. 6.10.

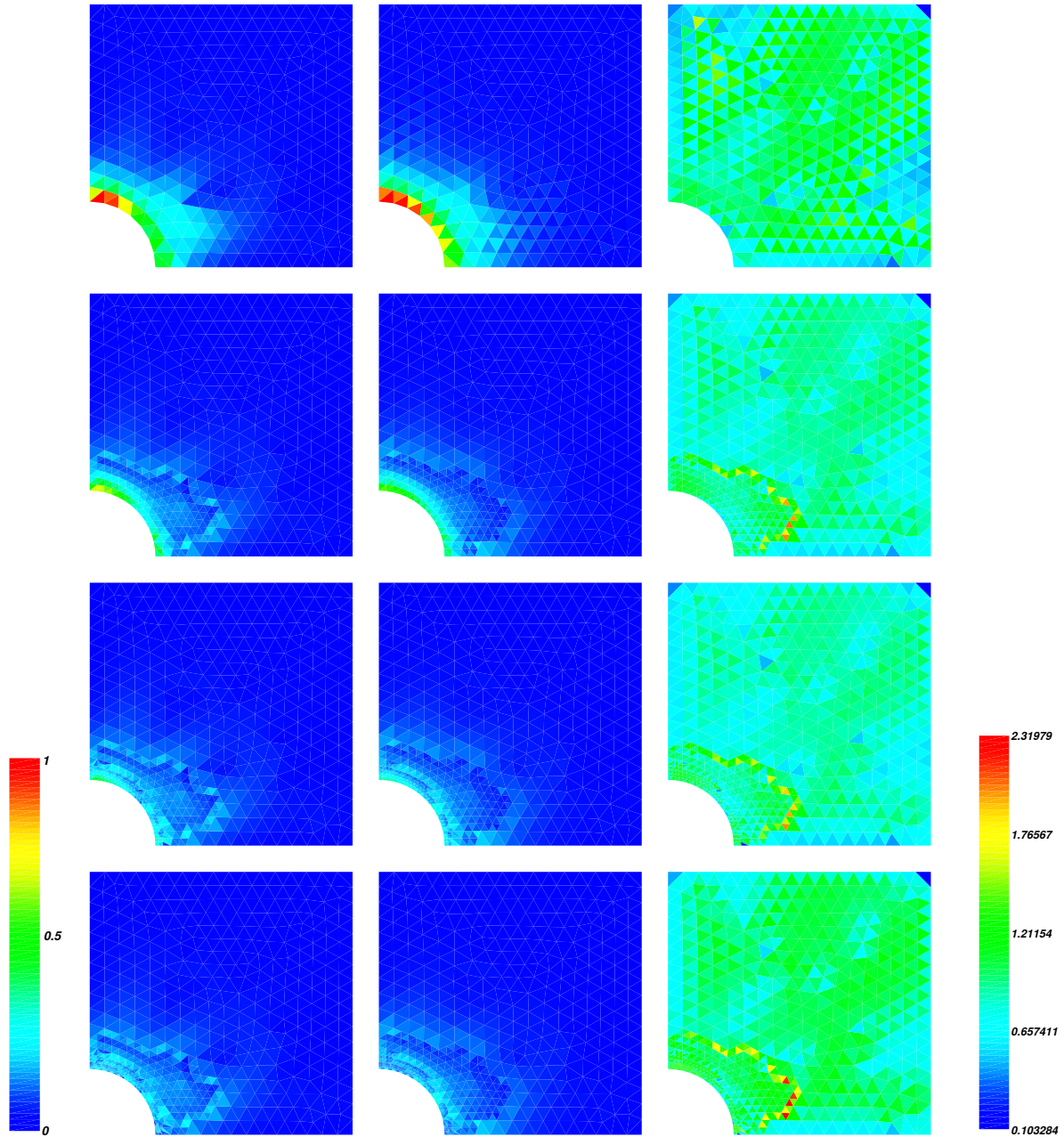


FIGURE 6.10 – Erreur en résidu relatif pour les patches non-uniformément raffinés : erreur en résidu $\hat{\theta}_T$ - erreur de référence $\hat{\theta}_T^{ref}$ - indice d'efficacité

Au final, on peut résumer ces résultats en quelques mots :

- Une bonne correspondance entre les indicateurs d'erreur relative (estimée et exacte). Dans le cadre du raffinement de maillage, on s'intéresse plus à la carte d'erreur locale (*i.e.* la répartition de l'erreur) qu'à la valeur de l'erreur absolue globale.
- Une faible dispersion de l'indice d'efficacité sur l'ensemble du maillage éléments finis.
- Un outil simple, efficace et peu coûteux de pilotage du raffinement de maillage local de manière non-intrusive.

6.3.4 Patchs multiples et raffinement h - p

L'algorithme de couplage non-intrusif appliqué au raffinement de maillage apporte une grande liberté dans le choix du raccord (non-conforme) entre le modèle global et le patch. Dans l'exemple suivant (*cf.* Fig. 6.11), la méthode *mortar* est utilisée pour raccorder des éléments de tailles et de degrés différents : le maillage global est formé d'éléments $Q1$ alors que le patch est composé d'éléments $Q2$ de taille inférieure. Un tel raccord facilite ainsi le raffinement local de maillages quadrangulaires, ce qui n'est pas chose aisée si on souhaite conserver la conformité des éléments.

Aussi, il serait tout à fait possible de mélanger différents types d'éléments, par exemple si on voulait coupler un patch maillé en triangles avec un modèle global maillé en quadrangles, et ce sans aucune difficulté. Notons aussi qu'un tel raffinement local par patch peut aussi s'insérer dans un contexte plus général que celui des éléments finis standards, par exemple dans le contexte de l'analyse isogéométrique [Ruess *et al.*, 2014 ; Chemin *et al.*, 2015 ; Bouclier *et al.*, 2016]. Dans ce cas, un couplage entre maillages éléments finis classiques et NURBS peut être envisagé.

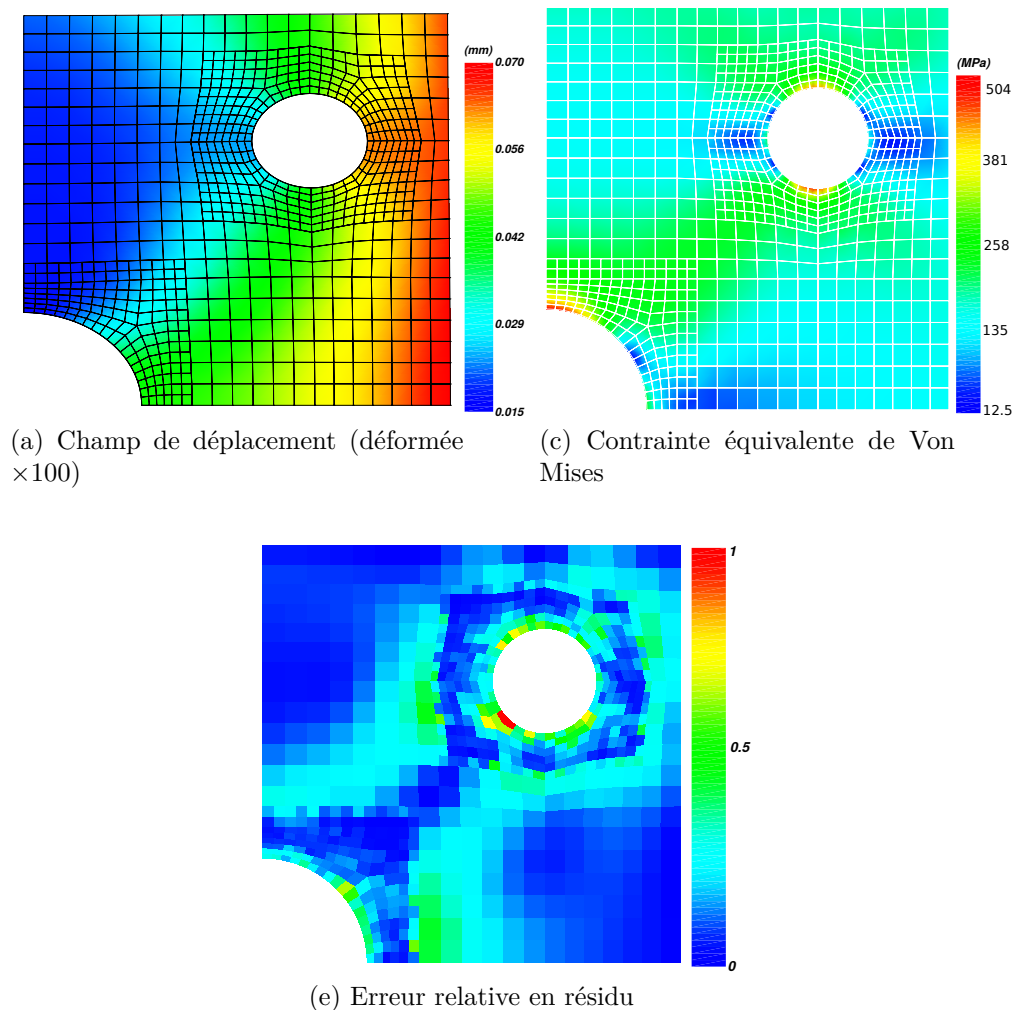


FIGURE 6.11 – Raffinement h - p avec patchs multiples

6.4 L'estimation d'erreur *a posteriori* comme critère d'arrêt

Dans les sections précédentes, on s'est concentré sur le raffinement de maillage local. Pour chaque exemple, le calcul a été réalisé avec l'algorithme itératif de couplage non-intrusif, et les résultats présentés concernaient la solution à convergence (à la précision machine) de Eq. (6.10–6.12).

Bien sûr, la qualité de la solution calculée peut être jugée acceptable avant qu'une telle précision soit atteinte. Il est en effet inutile de poursuivre les itérations dès que l'on a atteint une précision telle que l'erreur de couplage est inférieure à l'erreur éléments finis sur l'ensemble du modèle.

Dans certains contextes (calcul haute performance par exemple) la notion de contrôle de la convergence par l'erreur éléments finis peut apporter des gains non négligeables en termes de performance de calcul [Parret-Fréaud *et al.*, 2010 ; Rey *et al.*, 2014b ; Rey *et al.*, 2014a].

6.4.1 Erreur de convergence *versus* erreur éléments finis

Puisque la solution de Eq. (6.8) est obtenue par l'intermédiaire de l'algorithme itératif Eq. (6.10)–(6.12), à l'itération n on dispose d'une approximation de la solution $u_{Hh}^n \in V_{Hh}$ telle que $u_{Hh}^n = u_H^n$ en dehors de Λ et $u_{Hh}^n = u_h^n$ sur Λ , avec u_h^n vérifiant

$$\int_{\Lambda} \sigma(u_h^n) : \gamma(v_h) = \int_{\Lambda} f \cdot v_h + \int_{\Gamma} \lambda_h^n \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_h.$$

On introduit alors l'espace M_H , espace de trace de V_H sur Γ . On définit $\lambda_H^n \in M_H$ tel que

$$\int_{\Omega \setminus \Lambda} \sigma(u_H^n) : \gamma(v_H) - \int_{\Omega \setminus \Lambda} f \cdot v_H = \int_{\Gamma} \lambda_H^n \cdot v_H, \quad \forall v_H \in V_H.$$

Ici $\int_{\Gamma} \lambda_H^n \cdot v_H$ représente les efforts de réaction généralisés du domaine $\Omega \setminus \Lambda$ sur l'interface Γ . Alors, si on pose $\lambda_{Hh}^n = \lambda_H^n + \lambda_h^n$, additionner les deux équations précédentes conduit à :

$$a(u_{Hh}^n, v_{Hh}) = \int_{\Omega} f \cdot v_{Hh} + \int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot v_{Hh}, \quad \forall v_{Hh} \in V_{Hh} \quad (6.25)$$

On démontre alors le résultat suivant.

Proposition 7 *Soit u la solution de Eq. (6.1) et u_{Hh}^n la solution construite à l'itération n de l'algorithme Eq. (6.10–6.12). Sous les hypothèses de la Proposition 4, on a*

$$\|u - u_{Hh}^n\|_E \preceq \frac{\Theta(u_{Hh}^n) + \Theta_n}{\alpha} \quad (6.26)$$

où $\Theta(u_{Hh}^n)$ est donné par Eq. (6.19) mais calculé avec u_{Hh}^n au lieu de u_{Hh} et

$$\Theta_n = C_{\gamma} \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} \frac{1}{H_x} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \phi_x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\mathcal{N}_H(\Gamma)$ est l'ensemble des nœuds du maillage global situés sur l'interface Γ ; de plus, pour tout $x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)$, ϕ_x est la fonction de forme de V_H au nœud x et H_x représente la taille du maillage au nœud x , i.e. la longueur d'une arête de \mathcal{T}_H adjacente à x .

Démonstration. Soit $w = u - u_{Hh}^n$. Alors, avec Eq. (6.25), on a pour tout $w_{Hh} \in V_{Hh}$

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}^n\|_E^2 &= a(u - u_{Hh}^n, w) = a(u - u_{Hh}^n, w - w_{Hh}) - \int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot w_{Hh} \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u - u_{Hh}^n) : \gamma(w - w_{Hh}) - \int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot w_{Hh} \end{aligned}$$

Maintenant, on pose $w_{Hh} = I_{Hh}w$. En suivant la preuve de la Proposition 4, on peut borner le premier terme par $\Theta(u_{Hh}^n) |w|_{1,\Omega}$ avec la définition de $\Theta(u_{Hh}^n)$ donnée par Eq. (6.19).

Pour le second terme, on remarque tout d'abord que $w_{Hh} = w_H = \sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} w_H(x) \phi_x$ sur

Γ . Alors, en utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation de Scott-Zhang, on peut poser $w_H(x) = I_H w(x)$, pour tout $x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)$, de telle manière que ce terme soit calculé comme une moyenne pondérée de w sur les arêtes adjacentes à x et appartenant à Γ . Aussi, on a par inégalité inverse :

$$|w_H(x)| \preceq \frac{\|w\|_{0,E}}{\sqrt{H_x}}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot w_{Hh} \right| &= \left| \sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} w_H(x) \int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot \phi_x \right| \\ &\leq \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} \frac{1}{H_x} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot \phi_x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} H_x w_H^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\preceq \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} \frac{1}{H_x} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot \phi_x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{0,\Gamma} \\ &\preceq C_{\gamma} \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_H(\Gamma)} \frac{1}{H_x} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{Hh}^n \cdot \phi_x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de trace (avec la constante C_{γ}). Cela conduit à l'estimation souhaitée puisque $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et $\|\cdot\|_E$ sont des normes équivalentes, cf. Eq. (6.4). ■

Remarque 8 Dans le cas unidimensionnel, on montre que la constante de trace est reliée au diamètre du domaine considéré. Par extension, on pose $C_{\gamma} = \text{diam}(\Omega)$. Même si ce résultat ne peut être démontré en dimension supérieure, on remarque une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux qui vont suivre.

6.4.2 Cas d'application

Afin d'illustrer la situation, on considère un cas-test similaire aux précédents. En plus du raffinement, le patch redéfinit également la géométrie du domaine Λ , cf. Fig. 6.12. En effet, au sein du modèle global on remplace le trou par une inclusion rigide, dont le module d'Young est cent fois plus grand que pour le reste de modèle sur Ω . Le perforation de la plaque n'est alors prise en compte qu'au travers du patch local. Au final, la situation ne sera pas différente de la précédente (cf. Fig. 6.1), car à convergence la solution de Eq. (6.10–6.12) vérifie Eq. (6.5–6.7). Comme Eq. (6.5) est définie sur $\Omega \setminus \Lambda$, la solution globale u_H sur Λ n'est qu'une prolongation fictive qui n'a aucun sens physique et dont la valeur à convergence ne dépend que de l'initialisation de l'algorithme.

Comblé ainsi le trou par une inclusion rigide conduit à une augmentation du nombre d'itérations. Ce choix a en effet été fait pour permettre une lecture facilitée des résultats : dans la situation précédente, la convergence était trop rapide et le nombre d'itérations trop faible pour permettre une comparaison entre erreur de convergence et erreur éléments finis.

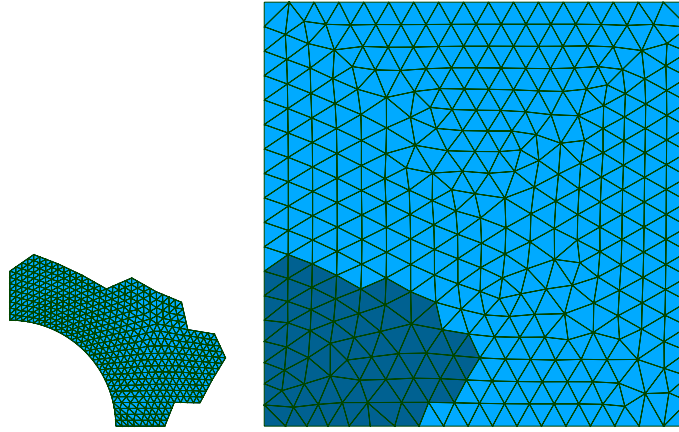


FIGURE 6.12 – Patch uniformément raffiné avec modification géométrique

On se concentre à présent sur les propriétés de convergence. Comme on l'a déjà montré, le procédé itératif Eq. (6.14) peut être vu comme une méthode de Newton (aussi appelée méthode de la corde), *cf.* [Kelley, 2003]. Ainsi, l'estimation de l'erreur de convergence doit vérifier $\Theta_{n+1} \leq c \Theta_n$, avec $c \in [0, 1]$. On retrouve la convergence linéaire que l'on peut attendre de cette méthode itérative (*cf.* Fig. 6.13, avec $c \approx 0.685$).

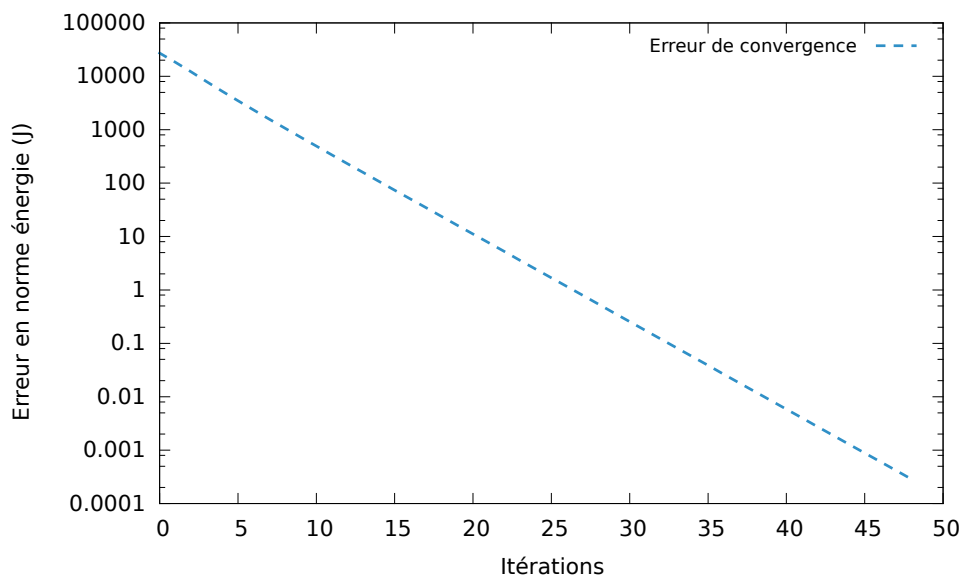


FIGURE 6.13 – Évolution de l'erreur de convergence Θ_n

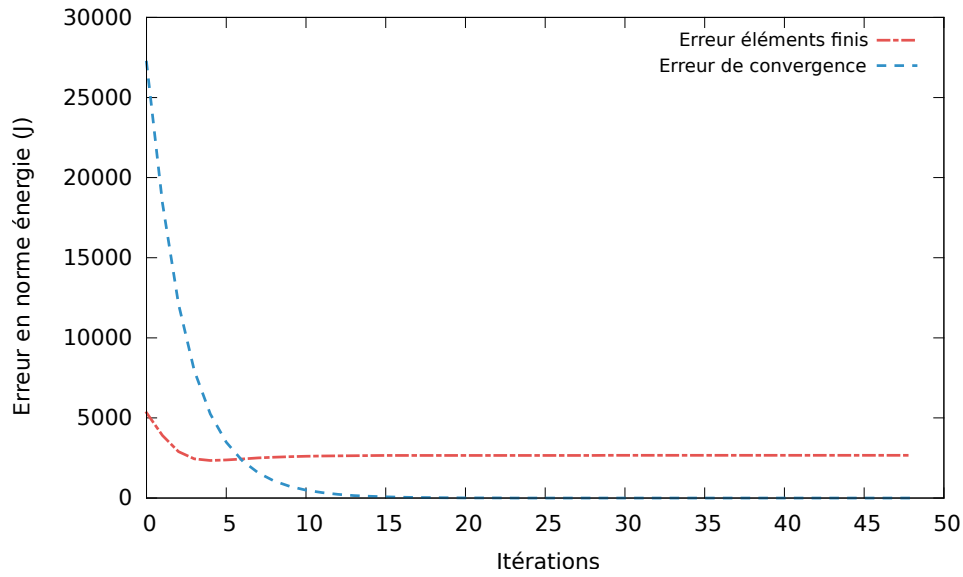


FIGURE 6.14 – Évolution de l'erreur de convergence Θ_n et de l'erreur éléments finis $\Theta(u_{Hh}^n)$

Par conséquent, un critère intelligent d'arrêt des itérations consiste à comparer l'erreur de convergence Θ_n à l'erreur éléments finis $\Theta(u_{Hh}^n)$. En effet, à un moment, on aura $\Theta_n \ll \Theta(u_{Hh}^n)$. Par exemple, on peut décider que la solution u_{Hh}^n calculée à l'itération n sera acceptable dès que l'erreur de convergence représentera un faible pourcentage de l'erreur totale (cf. Fig. 6.14). Par exemple, dans le cas présent, on voit qu'après une dizaine d'itérations seulement, l'erreur de convergence Θ_n est inférieure à un pour cent de l'erreur totale $\Theta(u_{Hh}^n) + \Theta_n$.

Enfin, on compare l'erreur estimée $\Theta(u_{Hh}^n) + \Theta_n$ et l'erreur de référence Θ^{ref} , cf. Fig. 6.15. On peut alors voir que la relation Eq. (6.26) se vérifie avec une bonne précision au cours des itérations (on notera le fait que $\|u\|_E \approx 28 \text{ kJ}$).

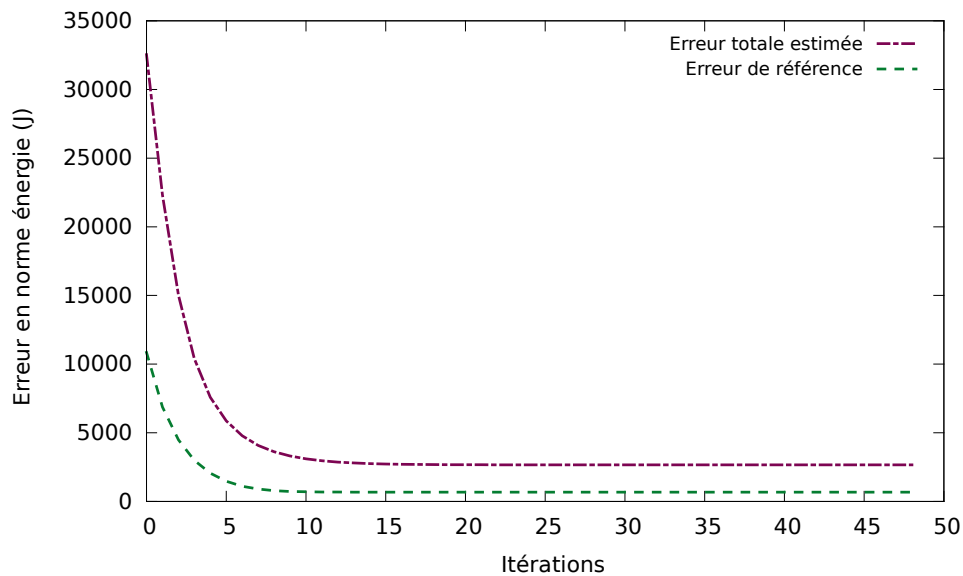


FIGURE 6.15 – Évolution de l'erreur totale estimée $\Theta(u_{Hh}^n) + \Theta_n$ et de l'erreur de référence Θ^{ref}

Conclusion

Au travers du travail de recherche présenté dans ce manuscrit, on a réalisé une étude détaillée de l'algorithme de couplage non-intrusif. Cet algorithme permet de prendre en compte des détails structurels localisés au sein d'un modèle éléments finis existant, sans nécessiter de modification de l'opérateur numérique correspondant. On a aussi exploré des pistes d'amélioration de l'algorithme (Quasi-Newton, relaxation statique et dynamique, Aitken's Delta Squared) : on a montré les avantages relatifs de ces deux méthodes, accélération de la convergence et faible coût de calcul. On a également étendu le champ d'application de la méthode de couplage à des situations diverses au travers d'exemples représentatifs des besoins industriels en matière de simulation : propagation de fissure, redéfinition des conditions aux limites, modifications géométriques, contact glissant... De plus, on a mis au point une implémentation flexible et efficace de la méthode de couplage, basée sur des communications standardisées (MPI). On dispose ainsi d'un environnement de couplage universel qui permet notamment la considération de patchs multiples (éventuellement en interaction) et le traitement d'interfaces incompatibles. Dans un second temps, on a proposé une nouvelle méthode de décomposition de domaine basée sur l'algorithme de couplage non-intrusif, destinée à la résolution de problèmes non-linéaires de grande dimension, et on a montré sa bonne extensibilité. Cette méthode a plusieurs avantages :

- la possibilité d'utiliser des logiciels commerciaux grâce à la propriété de non-intrusivité de l'algorithme ;
- la parallélisation de codes séquentiels permet un accès au calcul intensif avec des outils génériques, et ouvre la voie du calcul haute performance au plus grand nombre ;
- la présence naturelle d'un modèle global, jouant le rôle de modèle grossier, et permettant de s'affranchir de la problématique des sous-structures flottantes ;
- la possibilité de traiter des interfaces éventuellement non-conformes, simplifiant ainsi la modélisation du problème ;
- l'algorithme implique une localisation des non-linéarités, permettant ainsi une réduction globale du nombre d'itérations du solveur non-linéaire.

Enfin, après avoir construit un estimateur d'erreur en résidus explicite adapté au post-traitement de solutions multi-échelles, on a proposé une méthode de raffinement de maillage non-intrusive par patchs d'éléments finis. Cette méthode permet de passer outre le coût classique de telles procédures, et leur difficulté d'application dans certaines situations (raffinement local de maillages quadrangulaires ou hexaédriques, raccords de discrétisations différentes, raffinement h - p local). On a aussi développé un outil de contrôle de la convergence basé sur l'erreur éléments finis, permettant de fournir un critère d'arrêt des itérations pragmatique, et ce afin de réduire le coût de calcul global de la procédure de couplage.

On entrevoit toutefois plusieurs pistes d'amélioration :

- Le développement d'un raccord mixte sur les interfaces, de manière non-intrusive, c'est-à-dire sans avoir recours à la construction explicite d'opérateurs internes aux codes de calculs utilisés (compléments de Schur notamment). Actuellement les méthodes de décomposition de domaine à relocalisation non-linéaire montrent de très bonnes performances avec de tels raccords, mais elles nécessitent l'extraction d'opérateurs éléments finis relatifs aux modèles sous-jacents, ce qui se révèle fortement intrusif. Une certaine intrication entre logiciel de calcul éléments finis et algorithme de couplage peut alors toujours être nécessaire.
- La mise en place d'une procédure de recherche linéaire associée au calcul des

corrections de Quasi-Newton pourrait également être bénéfique à la convergence de la méthode. Aussi, un post-traitement supplémentaire des termes correctifs de l'opérateur tangent (corrections SR1 successives) permettrait une optimisation de l'encombrement mémoire. Il apparaît en effet inutile de conserver l'ensemble des corrections calculées au cours de itérations, et une procédure de tri sélectif (par exemple basée sur des notions relatives aux méthodes de réduction de modèle) permettrait alors de considérablement réduire la taille de la base des corrections, tout en conservant une bonne approximation de l'opérateur tangent.

- Le traitement de raccords d'interfaces non-linéaires dans le contexte non-intrusif. On a ici toujours considéré un raccord parfait entre le modèle global et la zone de patch, mais des situations existent pour lesquelles l'interface peut jouer un rôle physique : surface de contact, interface cohésive... En plus de permettre une résolution plus aisée de tels problèmes, disposer d'une méthode dans laquelle les raccords entre modèles ont un sens physique faciliterait aussi les étapes de construction de ces derniers.

L'objectif principal de ce projet de recherche ayant été le développement d'un outil de couplage destiné à faciliter l'interaction des codes de calcul industriels et académiques, rien de tout ce qui est présenté n'aurait pu être mené à terme sans une collaboration permanente avec les différents acteurs concernés. En particulier, le développement de l'outil logiciel de couplage s'est fait en lien étroit avec EDF R&D, et bénéficie aujourd'hui à la dissémination de modélisations complexes au sein d'études industrielles avancées.

De même, le contexte des développements effectués (traitement des comportements non-linéaires, modèles d'études) s'inscrit en grande partie dans les problématiques relatives aux études aéronautiques telles qu'elles peuvent être rencontrées par Airbus Group Innovations.

Ces derniers ont donc considérablement contribué à la pertinence des recherches menées vis-à-vis de l'objectif visé.

Enfin, les calculs effectués dans le contexte du traitement de modèles non-linéaires de grande taille ont été conduits grâce au support de la plateforme de calcul intensif CALMIP (Mésocentre de calcul de la région Midi-Pyrénées).

Bibliographie

- [Agouzal et Thomas, 1995] AGOUZAL, A. et THOMAS, J.-M. (1995). Une méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 29:749–764.
- [Ainsworth et Craig, 1991] AINSWORTH, M. et CRAIG, A. (1991). A posteriori error estimators in the finite element method. *Numerische Mathematik*, 60(1):429–463.
- [Ainsworth et al., 2007] AINSWORTH, M., DEMKOWICZ, L. et KIM, C.-W. (2007). Analysis of the equilibrated residual method for a posteriori error estimation on meshes with hanging nodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37–40): 3493–3507.
- [Ainsworth et Oden, 2000] AINSWORTH, M. et ODEN, J. T. (2000). *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.
- [Akgün et al., 2001] AKGÜN, M. A., GARCELON, J. H. et HAFTKA, R. T. (2001). Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the Sherman–Morrison–Woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1587–1606.
- [Alliez et al., 2003] ALLIEZ, P., COHEN-STEINER, D., DEVILLERS, O., LÉVY, B. et DESBRUN, M. (2003). Anisotropic polygonal remeshing. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3):485–493.
- [Amdouni et al., 2014] AMDOUNI, S., MOAKHER, M. et RENARD, Y. (2014). A local projection stabilization of fictitious domain method for elliptic boundary value problems. *Applied Numerical Mathematics*, 76:60–75.
- [Babuvška et Rheinboldt, 1978] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1978). Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(4):736–754.
- [Babuška et Miller, 1987] BABUŠKA, I. et MILLER, A. (1987). A feedback finite element method with a posteriori error estimation : Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(1):1–40.
- [Babuška et Rheinboldt, 1978] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615.
- [Babuška et al., 1997] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., GANGARAJ, S. et UPADHYAY, C. (1997). Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1–2):1–37.
- [Babuška et al., 1994] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., MATHUR, A. et UPADHYAY, C. (1994). Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17(4):273–321.

- [Babuška *et al.*, 1995] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., UPADHYAY, C. S. et GANGARAJ, S. K. (1995). A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(24):4207–4235.
- [Bank et Weiser, 1985] BANK, R. E. et WEISER, A. (1985). Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301.
- [Barrière, 2014] BARRIÈRE, L. (2014). *Stratégies de calcul intensif pour la simulation du post-flambement local des grandes structures composites raidies aéronautiques*. PhD Thesis, INSA de Toulouse.
- [Barsoum, 1974] BARSOUM, R. S. (1974). Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4):603–605.
- [Becker *et al.*, 2003] BECKER, R., HANSBO, P. et STENBERG, R. (2003). A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(02):209–225.
- [Belgacem, 1999] BELGACEM, F. B. (1999). The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84(2):173–197.
- [Ben Dhia *et al.*, 2008] BEN DHIA, H., ELKHODJA, N. et ROUX, F.-X. (2008). Multimodeling of multi-altered structures in the Arlequin framework : Solution with a Domain-Decomposition solver. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5–7):969–980.
- [Ben Dhia et Jamond, 2010] BEN DHIA, H. et JAMOND, O. (2010). On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21):1403–1414.
- [Ben Dhia et Rateau, 2005] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2005). The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11):1442–1462.
- [Bernardi et Maday, 2000] BERNARDI, C. et MADAY, Y. (2000). Mesh adaptivity in finite elements using the mortar method. *Revue européenne des éléments finis*, 9(4):451–465.
- [Bernardi *et al.*, 1994] BERNARDI, C., MADAY, Y. et PATERA, A. T. (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition : the Mortar element method. *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar XI, H. Brezis and J.L. Lions (Eds.)*, pages 13–51.
- [Bernardi *et al.*, 2005] BERNARDI, C., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2005). Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitteilungen*, 28(2):97–123.
- [Bettinotti *et al.*, 2014] BETTINOTTI, O., ALLIX, O. et MALHERBE, B. (2014). A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics. *Computational Mechanics*, 53(4):561–574.
- [Bjorstad et Widlund, 1986] BJORSTAD, P. E. et WIDLUND, O. B. (1986). Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(6):1097–1120.
- [Bois *et al.*, 2012] BOIS, R., FORTIN, M. et FORTIN, A. (2012). A fully optimal anisotropic mesh adaptation method based on a hierarchical error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209–212:12–27.

- [Bouclier *et al.*, 2015] BOUCLIER, R., ELGUEDJ, T. et COMBESURE, A. (2015). An isogeometric locking-free NURBS-based solid-shell element for geometrically nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(10):774–808.
- [Bouclier *et al.*, 2016] BOUCLIER, R., PASSIEUX, J. C. et SALAÜN, M. (2016). Local enrichment of NURBS patches using a non-intrusive coupling strategy : Geometric details, local refinement, inclusion, fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300:1–26.
- [Brancherie *et al.*, 2008] BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., VIAL, G. et VILLON, P. (2008). Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5-7):613–624.
- [Brezzi et Marini, 2005] BREZZI, F. et MARINI, L. D. (2005). The three-field formulation for elasticity problems. *GAMM-Mitteilungen*, 28(1):124–153.
- [Briggs *et al.*, 2000] BRIGGS, W., HENSON, V. et MCCORMICK, S. (2000). *A Multigrid Tutorial, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Buis *et al.*, 2006] BUIS, S., PIACENTINI, A. et DÉCLAT, D. (2006). PALM : a computational framework for assembling high-performance computing applications. *Concurrency and Computation : Practice and Experience*, 18(2):231–245.
- [Bush *et al.*, 2015] BUSH, L., DENG, Q. et GINTING, V. (2015). A locally conservative stress recovery technique for continuous Galerkin FEM in linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 286:354–372.
- [Cai et Keyes, 2002] CAI, X.-C. et KEYES, D. E. (2002). Nonlinearly preconditioned inexact newton algorithms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(1):183–200.
- [Cai *et al.*, 2002] CAI, X.-C., KEYES, D. E. et MARCINKOWSKI, L. (2002). Non-linear additive schwarz preconditioners and application in computational fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(12):1463–1470.
- [Carstensen et Funken, 2001] CARSTENSEN, C. et FUNKEN, S. A. (2001). Averaging technique for FE – a posteriori error control in elasticity. Part I : Conforming FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(18–19):2483–2498.
- [Carstensen et Hu, 2007] CARSTENSEN, C. et HU, J. (2007). A unifying theory of a posteriori error control for nonconforming finite element methods. *Numerische Mathematik*, 107(3):473–502.
- [Chahine *et al.*, 2008] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2008). Spider-XFEM, an extended finite element variant for partially unknown crack-tip displacement. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5-7):625–636.
- [Chahine *et al.*, 2009] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2009). A reduced basis enrichment for the eXtended finite element method. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 4(01):88–105.
- [Chamoin et Ladevèze, 2009] CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2009). Strict and practical bounds through a non-intrusive and goal-oriented error estimation method for linear viscoelasticity problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(4):251–262.
- [Chantrait *et al.*, 2014] CHANTRAIT, T., RANNOU, J. et GRAVOUIL, A. (2014). Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86:23–33.

- [Chemin *et al.*, 2015] CHEMIN, A., ELGUEDJ, T. et GRAVOUIL, A. (2015). Isogeometric local h-refinement strategy based on multigrids. *Finite Elements in Analysis and Design*, 100:77–90.
- [Chevreuil *et al.*, 2013] CHEVREUIL, M., NOUY, A. et SAFATLY, E. (2013). A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255:255–274.
- [Cirak et Ramm, 1998] CIRAK, F. et RAMM, E. (1998). A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156(1–4):351–362.
- [Code_Aster, 2016] Code_Aster (2016). Code_Aster. *Électricité de France*, <http://www.code-aster.org>.
- [Conn *et al.*, 1991] CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (1991). Convergence of quasi-Newton matrices generated by the symmetric rank one update. *Mathematical Programming*, 50(1-3):177–195.
- [Cottreanu *et al.*, 2009] COTTEREAU, R., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2009). Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, 44(4):533–547.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. PhD Thesis, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446.
- [CWIPI, 2016] CWIPI (2016). CWIPI : Coupling with interpolation parallel interface. *Office National d’Etudes et de Recherches Aéronautiques*, <http://sites.onera.fr/cwipi/>.
- [Daghia et Ladevèze, 2012] DAGHIA, F. et LADEVÈZE, P. (2012). A micro-meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates. *Composite Structures*, 94(12):3644–3653.
- [Demkowicz *et al.*, 1984] DEMKOWICZ, L., ODEN, J. et STROUBOULIS, T. (1984). Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part i : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2):217–251.
- [Destuynder et Métivet, 1998] DESTUYNDER, P. et MÉTIVET, B. (1998). Explicit Error Bounds for a Nonconforming Finite Element Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(5):2099–2115.
- [Devries *et al.*, 1989] DEVRIES, F., DUMONTET, H., DUVAUT, G. et LENE, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(2):285–298.
- [Díez *et al.*, 1998] DÍEZ, P., EGOZCUE, J. J. et HUERTA, A. (1998). A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1–4):141–157.
- [Díez *et al.*, 2003] DÍEZ, P., PARÉS, N. et HUERTA, A. (2003). Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10):1465–1488.

- [Díez *et al.*, 2004] DÍEZ, P., PARÉS, N. et HUERTA, A. (2004). Accurate upper and lower error bounds by solving flux-free local problems in «stars». *Revue européenne des éléments finis*, 13(5-6-7):497–507.
- [Díez *et al.*, 2007] DÍEZ, P., RÓDENAS, J. J. et ZIENKIEWICZ, O. C. (2007). Equilibrated patch recovery error estimates : simple and accurate upper bounds of the error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2075–2098.
- [Dohrmann, 2003] DOHRMANN, C. (2003). A Preconditioner for Substructuring Based on Constrained Energy Minimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(1):246–258.
- [Duarte et Kim, 2008] DUARTE, C. A. et KIM, D. J. (2008). Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6–8):487–504.
- [Duval *et al.*, 2016] DUVAL, M., PASSIEUX, J.-C., SALAÜN, M. et GUINARD, S. (2016). Non-intrusive coupling : Recent advances and scalable nonlinear domain decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23(1):17–38.
- [EPX, 2016] EPX (2016). Europlexus. *Commissariat à l'Énergie Atomique, Commission Européenne - Joint Research Center*, <http://europlexus.jrc.ec.europa.eu/>.
- [Erdogan et Sih, 1963] ERDOGAN, F. et SIH, G. C. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):519–525.
- [Farhat *et al.*, 2001] FARHAT, C., LESOINNE, M., LETALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : a dual–primal unified FETI method – Part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1523–1544.
- [Farhat *et al.*, 1994] FARHAT, C., MANDEL, J. et ROUX, F. X. (1994). Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3–4):365–385.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3–4):309–330.
- [Fritz *et al.*, 2004] FRITZ, A., HÜEBER, S. et WOHLMUTH, B. (2004). A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity. *Calcolo*, 41(3):115–137.
- [Gallimard, 2009] GALLIMARD, L. (2009). A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4):460–482.
- [Gander, 2008] GANDER, M. J. (2008). Schwarz Methods over the Course of Time. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31:228–255.
- [Gander et Japhet, 2013] GANDER, M. J. et JAPHET, C. (2013). Algorithm 932 : PANG : Software for Nonmatching Grid Projections in 2D and 3D with Linear Complexity. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 40(1):1–25.
- [Gendre, 2009] GENDRE, L. (2009). *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*. PhD Thesis, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.

- [Gendre *et al.*, 2011] GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(9):889–905.
- [Gendre *et al.*, 2009] GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- [Gerstenberger et Tuminaro, 2013] GERSTENBERGER, A. et TUMINARO, R. S. (2013). An algebraic multigrid approach to solve extended finite element method based fracture problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(3):248–272.
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwartz alternating method. *Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, SIAM*, 23:224–231.
- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(4):515–572.
- [Gosselet *et al.*, 2013] GOSSELET, P., REY, C. et PEBREL, J. (2013). Total and selective reuse of Krylov subspaces for the resolution of sequences of nonlinear structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(1):60–83.
- [Grätsch et Bathe, 2005] GRÄTSCH, T. et BATHE, K.-J. (2005). A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers & Structures*, 83(4-5):235–265.
- [Guguin *et al.*, 2014] GUGUIN, G., ALLIX, O., GOSSELET, P. et GUINARD, S. (2014). Nonintrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5):324–343.
- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P.-A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399.
- [Gupta *et al.*, 2012] GUPTA, P., PEREIRA, J., KIM, D.-J., DUARTE, C. et EASON, T. (2012). Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 90:41–64.
- [Hansbo et Hansbo, 2002] HANSBO, A. et HANSBO, P. (2002). An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(47-48):5537–5552.
- [Hansbo *et al.*, 2003] HANSBO, A., HANSBO, P. et LARSON, M. G. (2003). A finite element method on composite grids based on Nitsche’s method. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(03):495–514.
- [Hautefeuille *et al.*, 2012] HAUTEFEUILLE, M., ANNAVAPU, C. et DOLBOW, J. E. (2012). Robust imposition of Dirichlet boundary conditions on embedded surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(1):40–64.
- [Herry *et al.*, 2002] HERRY, B., DI VALENTIN, L. et COMBESURE, A. (2002). An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(8):973–1003.
- [Heuveline et Schieweck, 2007] HEUVELINE, V. et SCHIEWECK, F. (2007). H^1 -interpolation on quadrilateral and hexahedral meshes with hanging nodes. *Computing*, 80(3):203–220.

- [Hinojosa *et al.*, 2014] HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P.-A. et CRESTA, P. (2014). Domain decomposition methods with nonlinear localization for the buckling and post-buckling analyses of large structures. *Advances in Engineering Software*, 70:13–24.
- [Hirai *et al.*, 1984] HIRAI, I., WANG, B. P. et PILKEY, W. D. (1984). An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9):1671–1683.
- [Huerta et Díez, 2000] HUERTA, A. et DÍEZ, P. (2000). Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1–3):21–41.
- [Hughes, 1995] HUGHES, T. J. R. (1995). Multiscale phenomena : Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1–4):387–401.
- [Ibrahimbegović et Marković, 2003] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et MARKOVIČ, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28–30):3089–3107.
- [Irons et Tuck, 1969] IRONS, B. M. et TUCK, R. C. (1969). A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3):275–277.
- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness/force SBSF method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7):1567–1578.
- [Kelley, 2003] KELLEY, C. (2003). *Solving Nonlinear Equations with Newton’s Method*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Kelley et Sachs, 1998] KELLEY, C. T. et SACHS, E. W. (1998). Local Convergence of the Symmetric Rank-One Iteration. *Computational Optimization and Applications*, 9(1):43–63.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. S. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*.
- [Kelly *et al.*, 1983] KELLY, D. W., DE S. R. GAGO, J. P., ZIENKIEWICZ, O. C. et BABUSKA, I. (1983). A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : Part I – error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(11):1593–1619.
- [Khalfan *et al.*, 1993] KHALFAN, H. F., BYRD, R. H. et SCHNABEL, R. B. (1993). A Theoretical and Experimental Study of the Symmetric Rank-One Update. *SIAM Journal on Optimization*, 3(1):1–24.
- [Khiyabani *et al.*, 2010] KHIYABANI, F. M., HASSAN, M. A. et LEONG, W. J. (2010). Convergence of Symmetric Rank-One method based on Modified Quasi-Newton equation. *Journal of Mathematics Research*, 2(3):97–102.
- [Kim *et al.*, 2012] KIM, D.-J., DUARTE, C. A. et PROENCA, S. P. (2012). A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. *Computational Mechanics*, 50(5):563–578.

- [Klawonn *et al.*, 2014] KLAWONN, A., LANSER, M. et RHEINBACH, O. (2014). Nonlinear FETI-DP and BDDC methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(2):737–765.
- [Küttler et Wall, 2008] KÜTTLER, U. et WALL, W. A. (2008). Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1):61–72.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 300(2):41–44.
- [Ladevèze, 2005] LADEVÈZE, P. (2005). *Adaptive Finite Elements in Linear and Nonlinear Solid and Structural Mechanics*, chapitre Constitutive Relation Error Estimators and Adaptivity in Structural Engineering, pages 257–319. Springer Vienna, Vienna.
- [Ladevèze et Leguillon, 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. (1983). Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509.
- [Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1–2):121–138.
- [Ladevèze et Pelle, 2006] LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (2006). *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer New York.
- [Legay et Combescure, 2003] LEGAY, A. et COMBESCURE, A. (2003). Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1299–1322.
- [Lions, 1987] LIONS, P.-L. (1987). On the Schwarz method. *In Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Paris, France. R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Périaux (Eds.).
- [Liu *et al.*, 2014] LIU, Y. J., SUN, Q. et FAN, X. L. (2014). A non-intrusive global/local algorithm with non-matching interface : Derivation and numerical validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 277:81–103.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing Domain Decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:233–241.
- [Mandel et Dohrmann, 2003] MANDEL, J. et DOHRMANN, C. R. (2003). Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 10(7):639–659.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1): 29–43.
- [Massing *et al.*, 2012] MASSING, A., LARSON, M. G. et LOGG, A. (2012). Efficient implementation of finite element methods on non-matching and overlapping meshes in 3D. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(1):23–47.
- [Matthies et Tobiska, 2002] MATTHIES, G. et TOBISKA, L. (2002). The inf-sup condition for the mapped $Q_k - P_{k-1}^{disc}$ element in arbitrary space dimensions. *Computing*, 69(2):119–139.
- [Melenk et Babuška, 1996] MELENK, J. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4):289–314.

- [Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150.
- [MUMPS, 2016] MUMPS (2016). MUMPS : a MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver. *CERFACS, CNRS, ENSEEIHT-INPT, INRIA*, <http://mumps.enseeiht.fr/>.
- [Nadal *et al.*, 2015] NADAL, E., DÍEZ, P., RÓDENAS, J. J., TUR, M. et FUENMAYOR, F. J. (2015). A recovery-explicit error estimator in energy norm for linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 287:172–190.
- [Negrello *et al.*, 2016] NEGRELLO, C., GOSSELET, P., REY, C. et PEBREL, J. (2016). Substructured formulations of nonlinear structure problems – influence of the interface condition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [Nguyen *et al.*, 2013] NGUYEN, V. P., KERFRIDEN, P., CLAUS, S. et BORDAS, S. P.-A. (2013). Nitsche’s method for mixed dimensional analysis : conforming and non-conforming continuum-beam and continuum-plate coupling. *arXiv preprint*.
- [Nocedal et Wright, 2006] NOCEDAL, J. et WRIGHT, S. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2nd edition édition.
- [Oden et Feng, 1996] ODEN, J. et FENG, Y. (1996). Local and pollution error estimation for finite element approximations of elliptic boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74(1–2):245 – 293.
- [Oden et Prudhomme, 2001] ODEN, J. et PRUDHOMME, S. (2001). Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(5–6):735–756.
- [Oden *et al.*, 1999] ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOËS, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1–4):3–25.
- [OpenPALM, 2016] OpenPALM (2016). OpenPALM : Projet d’assimilation par logiciel multiméthodes. *Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul scientifique, Office National d’Etudes et de Recherches Aérospatiales*, http://www.cerfacs.fr/globc/PALM_WEB/.
- [Paraschivoiu *et al.*, 1997] PARASCHIVOIU, M., PERAIRE, J. et PATERA, A. T. (1997). A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1–4):289 – 312. Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- [Park et Felippa, 2000] PARK, K. C. et FELIPPA, C. A. (2000). A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1–3):395–418.
- [Parret-Fréaud *et al.*, 2010] PARRET-FRÉAUD, A., REY, C., GOSSELET, P. et FEYEL, F. (2010). Fast estimation of discretization error for FE problems solved by domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49–52): 3315–3323.
- [Parés *et al.*, 2006] PARÉS, N., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2006). Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4–6):297–323.
- [Passieux *et al.*, 2011] PASSIEUX, J. C., GRAVOUIL, A., RÉTHORÉ, J. et BAIETTO, M. C. (2011). Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale

- concurrent multigrid XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(13):1648–1666.
- [Passieux *et al.*, 2013] PASSIEUX, J.-C., RÉTHORÉ, J., GRAVOUIL, A. et BAIETTO, M.-C. (2013). Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid XFEM solver. *Computational Mechanics*, 52(6):1381–1393.
- [Pebrel *et al.*, 2008] PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3):251–262.
- [PETSc, 2016] PETSc (2016). Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation. Argonne National Laboratory, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [Piacentini et The PALM Group, 2003] PIACENTINI, A. et THE PALM GROUP (2003). PALM : A dynamic parallel coupler. *Lecture Notes in Computer Science*, 2565:479–492.
- [Picasso *et al.*, 2008] PICASSO, M., RAPPAZ, J. et REZZONICO, V. (2008). Multiscale algorithm with patches of finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(6):477–491.
- [Pironneau et Lozinski, 2011] PIRONNEAU, O. P. et LOZINSKI, A. (2011). Numerical Zoom for localized Multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27: 197–207.
- [Pled et Chamoin, 2011] PLED, F. et CHAMOIN, L. (2011). An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses. *Computational Mechanics*, 49(3):357–378.
- [Prager et Synge, 1947] PRAGER, W. et SYNGE, J.-L. (1947). Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(3):241–269.
- [Prudhomme *et al.*, 2003] PRUDHOMME, S., ODEN, J. T., WESTERMANN, T., BASS, J. et BOTKIN, M. E. (2003). Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(8):1193–1224.
- [Rannou *et al.*, 2009] RANNOU, J., GRAVOUIL, A. et BAÏETTO-DUBOURG, M. C. (2009). A local multigrid XFEM strategy for 3D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(4):581–600.
- [Rey *et al.*, 2014a] REY, V., GOSSELET, P. et REY, C. (2014a). Study of the strong prolongation equation for the construction of statically admissible stress fields : Implementation and optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268:82–104.
- [Rey *et al.*, 2014b] REY, V., REY, C. et GOSSELET, P. (2014b). A strict error bound with separated contributions of the discretization and of the iterative solver in non-overlapping domain decomposition methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270:293–303.
- [Rezzonico *et al.*, 2007] REZZONICO, V., LOZINSKI, A., PICASSO, M., RAPPAZ, J. et WAGNER, J. (2007). Multiscale algorithm with patches of finite elements. *Mathematics and Computers in Simulation*, 76(1–3):181–187.
- [Rixen et Farhat, 1999] RIXEN, D. J. et FARHAT, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4):489–516.

- [Roux, 2009] ROUX, F.-X. (2009). A FETI-2LM method for non-matching grids. *In Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, numéro 70 de Lecture Notes in Computational Science and Engineering, pages 121–128. Springer Berlin Heidelberg.
- [Ruess *et al.*, 2014] RUESS, M., SCHILLINGER, D., ÖZCAN, A. I. et RANK, E. (2014). Weak coupling for isogeometric analysis of non-matching and trimmed multi-patch geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269:46–71.
- [Sandhu *et al.*, 1995] SANDHU, J. S., MENANDRO, F. C. M., LIEBOWITZ, H. et MOYER JR, E. T. (1995). Hierarchical mesh adaptation of 2D quadrilateral elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 50(5–6):727–735.
- [Scott et Zhang, 1990] SCOTT, L. R. et ZHANG, S. (1990). Finite Element Interpolation of Nonsmooth Functions Satisfying Boundary Conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190):483–493.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I., DATTA, D., COPPS, K. et GANGARAJ, S. (2000). A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I : A posteriori estimation of the error in the von Mises stress and the stress intensity factor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):261–294.
- [Strouboulis *et al.*, 2001] STROUBOULIS, T., COPPS, K. et BABUŠKA, I. (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32–33):4081–4193.
- [Sze *et al.*, 2004] SZE, K., LIU, X. et LO, S. (2004). Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(11):1551–1569.
- [Verfürth, 1994] VERFÜRTH, R. (1994). A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50(1–3):67–83.
- [Verfürth, 1999] VERFÜRTH, R. (1999). A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1–4):419–440.
- [Wang et Xu, 2011] WANG, F. et XU, X. (2011). Some new residual-based a posteriori error estimators for the mortar finite element methods. *Numerische Mathematik*, 120(3):543–571.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures*, 40(4):1027–1031.
- [Wohlmuth, 1999] WOHLMUTH, B. I. (1999). A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. *Numerische Mathematik*, 84(1):143–171.
- [Wohlmuth, 2000] WOHLMUTH, B. I. (2000). A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):989–1012.
- [Wohlmuth, 2003] WOHLMUTH, B. I. (2003). A Comparison of Dual Lagrange Multiplier Spaces for Mortar Finite Element Discretizations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(6):995–1012.
- [Woodbury *et al.*, 2011] WOODBURY, A. C., SHEPHERD, J. F., STATEN, M. L. et BENZLEY, S. E. (2011). Localized coarsening of conforming all-hexahedral meshes. *Engineering with Computers*, 27(1):95–104.

- [Wyart *et al.*, 2009] WYART, E., COULON, D., PARDOEN, T., REMACLE, J. et LANI, F. (2009). Application of the substructured finite element/extended finite element method (s-FE/XFE) to the analysis of cracks in aircraft thin walled structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(1):44–58.
- [Wyart *et al.*, 2008] WYART, E., DUFLOT, M., COULON, D., MARTINY, P., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2008). Substructuring FE–XFE approaches applied to three-dimensional crack propagation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2):626–638.
- [Z-set, 2016] Z-set (2016). Z-set/zébulon. Mines PARITECH, Office National d’Etudes et de Recherches Aéropatiales, NW Numerics & Modeling, <http://www.zset-software.com/products/zebulon/>.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992a] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992b] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382.
- [Zohdi *et al.*, 1996] ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1–4):273–298.

TITLE : Contribution of non-intrusive coupling in nonlinear structural mechanics

ABSTRACT : This PhD thesis, part of the ANR ICARE project, aims at developing methods for complex analysis of large scale structures. The scientific challenge is to investigate very localised areas, but potentially critical as of mechanical systems resilience. Classically, representation models, discretizations, mechanical behaviour models and numerical tools are used at both global and local scales for simulation needs of graduated complexity. Global problem is handled by a generic code with topology (plate formulation, geometric approximation...) and behaviour (homogenization) simplifications while local analysis needs implementation of specialized tools (routines, dedicated codes) for an accurate representation of the geometry and behaviour. The main goal of this thesis is to develop an efficient non-intrusive coupling tool for multi-scale and multi-model structural analysis. Constraints of non-intrusiveness result in the non-modification of the stiffness operator, connectivity and the global model solver, allowing to work in a closed source software environment. First, we provide a detailed study of global/local non-intrusive coupling algorithm. Making use of several relevant examples (cracking, elastic-plastic behaviour, contact...), **we show the efficiency and the flexibility of such coupling method. A comparative analysis of several optimisation tools** is also carried on, and **the interacting multiple patches situation is handled**. Then, non-intrusive coupling is **extended to globally non-linear cases**, and a **domain decomposition method with non-linear relocation** is proposed. **Such methods allowed us to run a parallel computation using only sequential software, on a high performance computing cluster**. Finally, we apply the coupling algorithm to mesh refinement with patches of finite elements. We develop an **explicit residual based error estimator** suitable for multi-scale solutions arising from the non-intrusive coupling, and apply it inside an error driven **local mesh refinement procedure**. Through this work, **a software tool for non-intrusive coupling was developed**, based on data exchange between codes (*Message Passing Interface* protocol). Developments are integrated into a Python wrapper, whose role is to connect several instances of *Code_Aster*, the structural analysis code developed by EDF R&D, which will be used in the following work.

AUTEUR : Mickaël Duval

TITRE : Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures

DIRECTEURS DE THÈSE : Michel Salaün & Jean-Charles Passieux

LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : Espace Clément Ader – 08/07/2016

RÉSUMÉ : Le projet ANR ICARE, dans lequel s'inscrit cette thèse, vise au développement de méthodes pour l'analyse de structures complexes et de grande taille. Le défi scientifique consiste à investiguer des zones très localisées, mais potentiellement critiques vis-à-vis de la tenue mécanique d'ensemble. Classiquement, sont mis en œuvre aux échelles globale et locale des représentations, discrétisations, modèles de comportement et outils numériques adaptés à des besoins de simulation gradués en complexité. Le problème global est traité avec un code généraliste dans le cadre d'idéalisations topologiques (formulation plaque, simplification géométrique) et comportementale (homogénéisation) ; l'analyse locale quant à elle demande la mise en œuvre d'outils spécialisés (routines, codes dédiés) pour une représentation fidèle de la géométrie et du comportement. L'objectif de cette thèse consiste à développer un outil efficace de couplage non-intrusif pour la simulation multi-échelles / multi-modèles en calcul de structures. Les contraintes de non-intrusivité se traduisent par la non modification de l'opérateur de rigidité, de la connectivité et du solveur du modèle global, ce qui permet de travailler dans un environnement logiciel fermé. Dans un premier temps, on propose une étude détaillée de l'algorithme de couplage global/local non-intrusif. Sur la base d'exemples et de cas-test représentatifs en calcul de structures (fissuration, plasticité, contact...), **on démontre l'efficacité et la flexibilité d'un tel couplage**. Aussi, **une analyse comparative de plusieurs outils d'optimisation** de l'algorithme est menée, et **le cas de patches multiples en interaction** est traité. Ensuite le concept de couplage non-intrusif est **étendu au cas de non-linéarités globales**, et une méthode de calcul parallèle par **décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire** est développée. **Cette méthode nous a permis de paralléliser un code industriel séquentiel sur un mésocentre de calcul intensif**. Enfin, on applique la méthode de couplage au raffinement de maillage par patches d'éléments finis. On propose un **estimateur d'erreur en résidu explicite** adapté au calcul de solutions multi-échelles *via* l'algorithme de couplage. Puis, sur la base de cet estimateur, on met en œuvre une **procédure non-intrusive de raffinement local** de maillage. Au travers de ces travaux, **un outil logiciel de couplage non-intrusif a été mis au point**, basé sur l'échange de données entre différents codes de calcul (protocole *Message Passing Interface*). Les développements effectués sont intégrés dans une surcouche Python, dont le rôle est de coupler plusieurs instances de *Code_Aster*, le code d'analyse de structures développé par EDF R&D, lequel sera utilisé dans l'ensemble des travaux présentés.

MOTS-CLÉS : Éléments finis, Couplage non-intrusif, Décomposition de domaine, Adaptation de maillage, Estimation d'erreur

DISCIPLINE ADMINISTRATIVE : Génie mécanique, mécanique des matériaux

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE : Institut Clément Ader
– UMR CNRS 5312, Espace Clément Ader, 3 rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse