



HAL
open science

Théorèmes du type Ingham et fonctions orthogonales positives

Florian Delage

► **To cite this version:**

Florian Delage. Théorèmes du type Ingham et fonctions orthogonales positives. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Strasbourg, 2016. Français. NNT : 2016STRAD031 . tel-01362505v2

HAL Id: tel-01362505

<https://theses.hal.science/tel-01362505v2>

Submitted on 26 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Florian Delage

**Théorèmes du type Ingham
et fonctions orthogonales positives**

Soutenue le 22 septembre 2016
devant la commission d'examen

Vilmos Komornik, directeur de thèse
Farid Ammar Khodja, rapporteur
Paola Loreti, rapporteur
Alain Haraux, examinateur
Michel Mehrenberger, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



Théorèmes du type Ingham et fonctions orthogonales positives

Florian Delage sous la direction de Vilmos Komornik¹

Soutenue le 22 septembre 2016

1. Université de Strasbourg IRMA

Table des matières

Remerciements	5
I Introduction	7
II Fonctions orthogonales positives	21
1 Contexte de l'étude	23
1.1 Expressions des fonctions orthogonales	24
1.1.1 Le cas $n = 2$	24
1.1.2 Le cas $n = 3$	25
1.2 Premiers résultats numériques	28
1.2.1 Valeurs numériques des coefficients $(a_j)_{j=0}^{(q-1)(r-1)}$ dans certains cas particuliers	29
1.2.2 Valeurs numériques des fonctions h_3 dans certains cas particuliers	31
2 Détermination de la suite des coefficients (a_j) définissant h_3 par calcul direct dans certains cas particuliers de périodes (T_1, T_2, T_3)	35
2.1 Détermination de la suite des coefficients (a_j) pour $r = 2$. . .	35
2.2 Détermination de la suite des coefficients (a_j) pour $r = 3$. . .	36
3 Etude de la fonction orthogonale h_3	41
3.1 Ecriture de h_3	41
3.2 Détermination de la suite des coefficients $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$	45
3.3 Etude du signe de h_3	52
4 Etude partielle des fonctions orthogonales h_n pour $n > 3$	57
4.1 Ecriture des fonctions h_n	57
4.1.1 Construction de h_4	57

4.1.2	Quelques résultats numériques pour la fonction ortho- gonale h_4	60
4.2	Résultats partiels sur le signe de h_4	66
III	Méthodes d’Ingham	71
5	Inégalité du type “Parseval” et application d’une méthode de A. Haraux	75
5.1	Cas de $(\omega_k)_{k=1}^\infty$ scalaire	76
5.2	Généralisation au cas de $(\omega_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^N$	81
6	Résultats vectoriels d’Ingham	85
6.1	Cas de vecteurs linéairement indépendants	85
6.2	Cas de vecteurs linéairement dépendants	93
A	Programmes informatiques utilisés	99
A.0.1	Calcul direct des coefficients (a_j)	99
A.0.2	Calcul de la fonction $h_2(t)$	100
A.0.3	Second calcul des coefficients (a_j)	100
A.0.4	Calcul des fonctions orthogonales $h_4(t)$ par la méthode des polynômes	101
	Bibliographie	106

Remerciements

A travers les différentes pérégrinations du travail de thèse, l'écriture des remerciements est un moment un peu spécial. Occasion de faire le point, de regarder dans le rétroviseur avec soulagement et une pointe de nostalgie et de témoigner de la gratitude envers toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à l'élaboration de cette thèse.

Je commencerai, évidemment, par remercier mon directeur Vilmos Kormornik qui est à l'origine de mon sujet et sans qui ce travail n'aurait certainement jamais abouti. Merci pour ta gentillesse, ta culture mathématique incroyable et tes précieux conseils, j'espère qu'on pourra encore travailler ensemble.

Merci aussi à Paola Loreti et Ammar-Khodja de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie naturellement Michel Mehrenberger et Alain Haraux pour avoir accepté de faire partie de mon jury, pour l'intérêt porté à mon travail et pour les remarques constructives et pertinentes qui ont, je l'espère, permis d'améliorer ce manuscrit.

Je tiens également à remercier Peter Mueller et Louis Deaett pour de précieux échanges numériques qui m'ont beaucoup aidé pour finaliser une question de la partie II.4 et Mohamad Maassarani pour une idée très élégante à propos de polynômes.

Ce travail étant en quelque sorte l'aboutissement de mon parcours scolaire et universitaire, je profite de l'occasion qui m'est offerte de remercier tous mes professeurs qui m'ont transmis, chacun à leur manière, la passion du savoir et de la curiosité bien au-delà des mathématiques.

Ce travail doit aussi beaucoup au cadre et confort offerts par l'UFR, l'IRMA et tout le personnel (même si je pars avant de pouvoir réellement profiter du nouveau patio). Je n'oublie pas non plus l'école doctorale parce qu'après tout, que serait une thèse de mathématiques sans une formation sur les risques de l'amiante...

Au-delà du côté technique et parfois un peu froid des mathématiques, ces années de travail ont été l'occasion de rencontrer et de côtoyer une brochette

de gens formidables. Je pense en premier lieu à mes co-bureau Alexandre, Nicolas, Amaury, Jérémy et Kim avec qui j'ai débattu, déconné, bu des hectolitres de café et partagé des goûts musicaux douteux. Et bien sûr à tous les autres, pour l'ambiance, les bières, les barbecues et toutes ces petites choses qui vont me manquer. Certains étaient déjà des amis, d'autres le sont devenus. Un grand merci, donc, à Philippe, Antoine, Audrey, Guillaume et Guillaume¹, Jérôme, Alix, Nicolas, Stéphane, Ranine, Amandine, Ambroise, Simon, Arthur, Nassima, Charlotte, Romain, Thomas, Lauriane, Vincent, Olivier, Elena, Auguste, Mohamad...

Je pense bien sûr aussi à tous ceux, hors du petit monde des maths, qui par leur présence et leurs encouragements m'ont soutenu durant ces quatre années. Je remercie donc ma famille, en premier lieu mes parents qui ont toujours été là pour moi. Ce travail est austère et risque de ne pas beaucoup vous parler, mais il vous doit beaucoup. Encore merci pour tout. J'ai aussi une pensée particulière pour mon petit frère et pour tous les moments passés tous les deux. Egaleme nt pour mes grands-parents et mes cousins qui ont tous à leur façon été présents au long de ce drôle de parcours. Merci à tous les autres, en particulier Marion, Pauline, Alexandre, Hélène, Loïc, Elise, Pierre, Margaux, Mathieu, Leïla, Yvan, Christophe et tous ceux que j'ai dû oublier.

Je ne vais pas m'éterniser mais je ne peux pas finir ces remerciements sans un petit mot pour la femme que j'aime et qui me fait l'honneur de partager ma vie. Notre histoire a débuté à peu près au moment où je commençais cette thèse, et si ces quatre années n'ont peut-être pas beaucoup apporté aux mathématiques, elles ont été merveilleuses pour moi. Merci pour tout mon amour, puissions-nous toujours être aussi heureux.

1. La liste peut paraître longue, mais il faut comprendre que la plupart des collègues doctorants ne liront que les remerciements et ça a déjà fait débat... S'il devait malgré tout manquer quelqu'un, ce serait bien évidemment involontaire.

Première partie

Introduction

Ce travail de thèse est constitué de deux parties relativement distinctes traitant toutes les deux du comportement de solutions d'équations aux dérivées partielles et de la théorie du contrôle. On s'intéressera dans un premier temps aux fonctions orthogonales positives puis à certains résultats de type "Ingham".

L'existence ou non de fonctions orthogonales positives à un sous-espace de fonctions quasi-périodiques a d'importantes implications en théorie du contrôle; en particulier pour l'étude du comportement oscillatoire des solutions d'équations de membranes vibrantes. Cazenave Haraux et Komornik ont obtenu de nombreux résultats sur ce sujet et on tentera ici de répondre à certaines questions restées ouvertes. On propose en particulier de clarifier la situation d'un sous-espace défini par trois périodes et on donnera quelques pistes de réflexion pour le cas de quatre périodes.

Dans les années 1970, D.L. Russell et plusieurs autres chercheurs ont résolu des problèmes de contrôle par des méthodes d'analyse harmoniques. Suivant des travaux importants de J.L Lions en 1986-1988, un grand nombre de chercheurs a appliqué la méthode des multiplicateurs pour établir des résultats plus généraux d'observabilité, de contrôlabilité et de stabilisation uniforme. Cependant cette méthode ne s'applique pas toujours, et la méthode des séries de Fourier non harmoniques a permis de traiter de tels cas. En particulier, A. Haraux (1989), puis C. Baiocchi, V. Komornik et P. Loreti (1999-2002) ont montré la puissance d'un théorème classique d'Ingham (1936) et de ses diverses généralisations dans ce domaine. En ce qui nous concerne, on s'intéressera ici au problème que pose la version vectorielle de ce théorème.

Fonctions orthogonales positives

On considère un nombre réel positif T et on note X_T l'espace vectoriel des fonctions L^2_{loc} , T -périodiques, de moyenne nulle. On identifiera souvent les fonctions de X_T avec leur restriction à l'intervalle $(0, T)$. En utilisant des propriétés élémentaires de la théorie de Fourier on sait que :

- X_T est engendré par la famille des fonctions $e^{2i\pi mt/T}$ où m décrit les entiers non nuls.
- X_T est le complément orthogonal de la fonction caractéristique h_1 de l'intervalle $(0, T)$ dans $L^2(0, T)$.

Dans ce cas, la fonction h_1 est strictement positive sur l'intervalle $(0, T)$.

On considère maintenant un nombre fini de réels positifs T_1, \dots, T_n et l'espace vectoriel $X := X_{T_1} + \dots + X_{T_n}$. Là aussi en généralisant certains résultats de [HK85] et [HK88] on peut rappeler les résultats suivants obtenus

dans [Kom87] :

- Il existe un réel positif T tel que X est dense dans $L^2(0, T')$ pour tout $0 < T' < T$ et qu'il n'est pas dense pour $T' > T$.
- X possède une codimension finie d dans $L^2(0, T)$ avec $1 \leq d \leq n$.

De plus, les valeurs de T et de d peuvent être données explicitement [Kom87] ; d représente le nombre maximal de périodes parmi T_1, \dots, T_n qui sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Ainsi, si tous les quotients T_i/T_j sont rationnels, alors $d=1$ et

$$\overline{X} = h_n^\perp \quad \text{dans} \quad L^2(0, T),$$

pour une fonction non nulle h_n bien choisie (déterminée à une constante multiplicative près, X étant par ailleurs invariant par conjugaisons complexes, h_n sera supposée, dans la suite, à valeur réelle).

Dans le cas $n > 1$, on peut se demander si l'on peut aussi choisir la fonction h_n strictement positive. Au-delà de son propre intérêt, la question de l'existence ou non d'une fonction orthogonale positive a d'importantes conséquences concernant les propriétés de certains systèmes oscillants (membranes, plaques, ...) voir par exemple [HK85], [Kom89a], [Kom90], [Kom89b], [HK91] et leurs références. Toujours dans [Kom87], on sait que l'on peut choisir h_2 strictement positive et que ce n'est pas le cas pour $n \geq 3$.

Plus précisément, il y a un exemple où est donnée une fonction h_3 supérieure ou égale à zéro (mais pas strictement positive) et pour $n \geq 4$, il y a un exemple de fonction qui prend, à la fois, des valeurs positives et négatives.

Exemple 1. Pour $(T_1, T_2, T_3) = (6, 10, 15)$ on obtient $T = 22$ et

$$h(t) = a_k \quad \text{pour} \quad k-1 < t < k \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, 22 \quad , \quad (1)$$

où la suite des a_k est donnée par :

$$1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 1.$$

Un des objectifs de ce travail de thèse sera de compléter les résultats déjà connus pour $n = 3$ (et partiellement pour $n = 4$). Ainsi, on prouvera que la fonction h_3 ne peut pas avoir à la fois des valeurs positives et négatives, on caractérisera aussi les triplets (T_1, T_2, T_3) pour lesquels h_3 est nulle sur des sous-intervalles de $(0, T)$ de longueur non nulle.

Afin d'exposer nos résultats, introduisons certaines notations que nous réutiliserons tout au long de la première partie. On utilisera $\langle a, b, c \rangle$ et $\langle a, b \rangle$ pour désigner respectivement les plus grand diviseurs communs des entiers a, b, c et a, b . Puisque les quotients T_i/T_j sont rationnels, on pourra supposer par changement d'échelle que ces périodes sont des entiers. En utilisant cette notation et d'après [Kom87] on a dans le cas de trois périodes

$$T := T_{123} = T_1 + T_2 + T_3 - \langle T_1, T_2 \rangle - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + \langle T_1, T_2, T_3 \rangle,$$

et h_3 est constante sur chaque intervalle de la forme

$$((j-1)\langle T_1, T_2, T_3 \rangle, j\langle T_1, T_2, T_3 \rangle), \quad j = 1, \dots, T/\langle T_1, T_2, T_3 \rangle.$$

Etant donné que T est optimal on sait que les valeurs de h_3 ne peuvent pas être nulles sur le premier et le dernier intervalle. Puisque l'on sera régulièrement amené à travailler avec des fonctions "en escalier", on adoptera les notations suivantes : Si on note $c_0, \dots, c_{T/\langle T_1, T_2, T_3 \rangle}$ les valeurs de h_3 sur les différents intervalles, on notera

$$h_3 \sim c_0, \dots, c_{T/\langle T_1, T_2, T_3 \rangle},$$

avec donc $c_0 \neq 0$ et $c_{T/\langle T_1, T_2, T_3 \rangle} \neq 0$.

Remarque 1. De plus, si plusieurs coefficients consécutifs c_j, c_{j+1}, \dots possèdent la même valeur on pourra utiliser une écriture sous forme de puissance. Par exemple si on considère la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1[\\ 2 & x \in [1, 2[\\ 1 & x \in [2, 4[\\ 3 & x \in [4, 7[\end{cases},$$

on notera

$$g(x) \sim 1211333 \sim 121^2 3^3.$$

Donnons maintenant notre résultat principal concernant les fonctions h_3 .

Théorème 1. *Soient T_1, T_2, T_3 trois entiers positifs tels que $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1$ et $h_3 \sim c_0, \dots, c_T$. On choisit h_3 telle que $c_0 > 0$. Alors*

-
1. $c_k \geq 0$ pour tout $i = 0, \dots, T$,
 2. au moins un des coefficients c_k est nul si et seulement si

$$1 < \langle T_i, T_j \rangle < T_i \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

Exemple 3.

- Pour $(T_1, T_2, T_3) = (26, 24, 9)$ on a $\langle 26, 9 \rangle = 1$ et
 $h_3 \sim 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 25, 25, 26,$
 $28, 29, 31, 32, 33, 34, 34, 34, 34, 33, 32, 31, 29, 28, 26, 25, 25, 22, 20,$
 $19, 17, 16, 14, 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 1$
 et donc $h_3 > 0$.
- Pour $(T_1, T_2, T_3) = (4, 8, 13)$ on a $\langle 4, 8 \rangle = 4$ et
 $h_3 \sim 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
 et donc à nouveau $h_3 > 0$.
- Par contre, dans le cas $(T_1, T_2, T_3) = (35, 21, 15)$ on a $\langle 35, 21 \rangle = 7,$
 $\langle 35, 15 \rangle = 5$ et $\langle 21, 15 \rangle = 3$. Ainsi on obtient $1 < \langle T_i, T_j \rangle < T_i$ pour
 tout $i \neq j$, et
 $h_3 \sim 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3,$
 $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1,$
 $0, 0, 1.$

La preuve de ce théorème reposera, entre autres, sur une représentation explicite de la fonction h_3 . Considérons trois entiers positifs T_1, T_2, T_3 tels que $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1$. On désigne par h_1 la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, T_1)$ et on pose

$$h_2(t) := \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle).$$

On obtient alors

Théorème 2. *Il existe trois entiers p, q, r et une suite de nombres réels $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1}$ telle que*

$$h_3(t) = \sum_{j=0}^{pqr-q-r+1} a_j h_2(t - j).$$

De plus, à une constante multiplicative près,

1. Si $q = 1$, alors $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1} = (a_j)_{j=0}^{pr-r}$ correspond au début de la séquence $(10^{r-1})^\infty$.

-
2. Si $r = 1$, alors $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1} = (a_j)_{j=0}^{pq-q}$ correspond au début de la séquence $(10^{q-1})^\infty$.
3. Si $q \geq 2$ et $r \geq 2$, alors $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1}$ est qr -périodique et correspond au début de la séquence

$$\sum_{l=0}^{+\infty} 0^{lq}(1, -1, 0^{r-2})^\infty = \sum_{j=0}^{+\infty} 0^{lr}(1, -1, 0^{q-2})^\infty.$$

Remarque 2. Dans le théorème précédent, et dans la suite de la thèse, on va utiliser les notations symboliques suivantes

$$10^{r-1} = 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-1},$$

$$(10^{r-1})^\infty = 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, \dots$$

de plus, on utilisera la sommation terme à terme, par exemple

Exemple 4.

$$\begin{aligned} (1, -1, 0^2)^\infty + 0^3(1, -1, 0^2)^\infty \\ &= (1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, -1, \dots) + (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, -1, \dots) \\ &= (1, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Enfin, on donnera deux propriétés qui traitent certains cas non couverts dans [Kom87] et [HK88] pour $n = 4$.

Proposition 1. *S'il existe deux sous-ensembles à trois éléments $\{T_1^1, T_2^1, T_3^1\}$, $\{T_1^2, T_2^2, T_3^2\}$ et deux sous-ensembles à deux éléments $\{T_1^3, T_2^3\}$ et $\{T_1^4, T_2^4\}$ de $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ tels que*

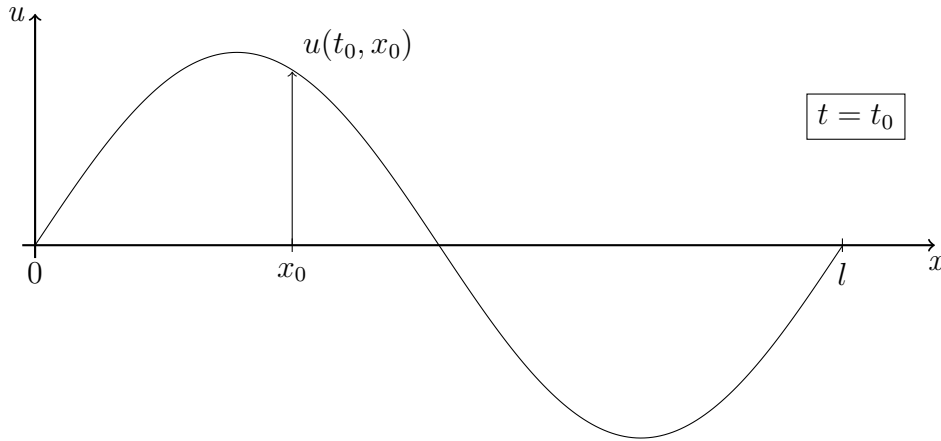
$$\langle T_1^1, T_2^1, T_3^1 \rangle = \langle T_1^3, T_2^3 \rangle \quad \text{et} \quad \langle T_1^2, T_2^2, T_3^2 \rangle = \langle T_1^4, T_2^4 \rangle, \quad (3)$$

alors la fonction orthogonale h_4 est positive ou nulle.

Proposition 2. *Soient quatre entiers deux à deux premiers entre eux tels que $1 < a < b < c < d$, on considère le quadruple $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (abc, bd, acd, bcd)$. Alors la fonction orthogonale h_4 associée change de signe sur l'intervalle $(0, T)$.*

Méthodes d’Ingham

Considérons le cas d’une corde vibrante de longueur l avec extrémités fixes (on supposera, pour simplifier, que $l = \pi$). On note $u(t, x)$ le déplacement transversal de la corde en fonction du temps t et de sa position x . On notera aussi les conditions initiales u_0 et u_1 dont on précisera la régularité par la suite.



Le déplacement est régi par le système

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \mathbb{R} \times (0, l), \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in (0, l), \\ u_t(0, x) = u_1(x) & x \in (0, l). \end{cases} \quad (4)$$

Pour maintenir les extrémités de la corde fixes on doit y exercer une certaine force. On suppose qu’on peut mesurer cette force à l’extrémité gauche durant un intervalle de temps $0 \leq t \leq T$. Une question naturelle est alors de savoir si l’on peut en déduire les conditions initiales du système, autrement dit, savoir si la fonction

$$(u_0, u_1) \mapsto u_x(\cdot, 0)|_{(0, T)} \quad (5)$$

est injective. Cette question, relativement simple, peut se résoudre en utilisant les séries de Fourier. Précisons d’abord les espaces de fonctions utilisés afin que le problème (4) soit bien posé, on obtient alors [KL05] :

Proposition 3. *Pour toute fonction $u_0 \in H_0^1(0, l)$ et $u_1 \in L^2(0, l)$ le problème (4) possède une unique solution*

$$u \in C_b(\mathbb{R}, H_0^1(0, l)) \cap C_b^1(\mathbb{R}, L^2(0, l)),$$

donnée par la série

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k e^{ikt} + a_{-k} e^{-ikt}) \sin(kx),$$

avec des suites de coefficients $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(a_{-k})_{k=1}^{\infty}$ telles que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (|a_k|^2 + |a_{-k}|^2) < \infty.$$

Si $T \geq 2\pi$, alors la fonction (5) est injective, plus précisément, il existe des constantes $c_0, c_1 > 0$ telles que la solution du système (4) vérifie

$$c_0 (\|u_0\|_{H_0^1(0,\pi)}^2 + \|u_1\|_{L^2(0,\pi)}^2) \leq \int_0^T |u_x(t, 0)|^2 dt \leq c_1 (\|u_0\|_{H_0^1(0,\pi)}^2 + \|u_1\|_{L^2(0,\pi)}^2). \quad (6)$$

La démonstration de cette propriété s'obtient par un calcul explicite. En utilisant le fait que $\{\cos(kx), \sin(kx), k = 1, \dots\}$ forme un système orthogonal de $L^2(0, \pi)$ on montre que

$$\begin{aligned} \|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)}^2 &= \|u_0\|_{H_0^1(0,\pi)}^2 + \|u_1\|_{L^2(0,\pi)}^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (|a_k + a_{-k}|^2 + (|a_k - a_{-k}|^2)) \\ &= \pi \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (|a_k|^2 + |a_{-k}|^2). \end{aligned}$$

et que, pour un entier M positif on obtient

$$\|u_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0, 2M\pi)}^2 = \int_0^{2M\pi} |u_x(t, 0)|^2 dt = 2M (\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2).$$

On peut alors conclure par encadrement de l'intervalle d'intégration.

Si maintenant on modifie légèrement le système (4) il peut surgir des difficultés techniques non négligeables. Considérons, par exemple, le système modifié suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0 & \mathbb{R} \times (0, l), \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in (0, l), \\ u_t(0, x) = u_1(x) & x \in (0, l). \end{cases} \quad (7)$$

Cette fois, la solution de (7) est donnée par la série

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \sin(kx), \quad (8)$$

avec

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + 1}.$$

Dans cette configuration, les fonctions

$$\cos(\omega_k t) \quad \text{et} \quad \sin(\omega_k t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

ne sont plus orthogonales dans $L^2(0, T)$. On ne peut donc plus évaluer directement l'intégrale $\int_0^T |u_x(t, 0)|^2 dt$ en utilisant l'égalité de Parseval. Afin de pouvoir encore montrer (5), on va utiliser une variante de l'égalité de Parseval : le théorème d'Ingham [Ing36] qui améliore les premiers travaux de Wiener [Wie34] et Paley-Wiener [PRR34] sur la question.

Théorème 3. *Soit $\Omega := (\omega_k)_{k \in K}$ une famille de nombres réels qui vérifie une condition d'écartement uniforme, c'est-à-dire*

$$\gamma := \inf_{p \neq q} |\omega_p - \omega_q| > 0. \quad (9)$$

Soit I un intervalle borné tel que $|I| > 2\pi/\gamma$ alors, il existe deux constantes positives c_0 et c_1 telles que

$$c_0 \sum_{k \in K} |x_k|^2 \leq \int_I |x(t)|^2 dt \leq c_1 \sum_{k \in K} |x_k|^2, \quad (10)$$

pour toute fonction

$$x(t) = \sum_{k \in K} x_k e^{i\omega_k t}, \quad (11)$$

avec $(x_k)_{k \in K}$ une famille de nombres complexes de carrés sommables.

Remarque 3.

1. Dans la suite de ce travail, l'existence de deux constantes positives c_0 et c_1 telles qu'on ait l'inégalité (10) sera notée par la relation \asymp (on considère ces inégalités comme une équivalence de normes) c'est-à-dire :

$$\sum_{k \in K} |x_k|^2 \asymp \int_I |x(t)|^2 dt.$$

-
2. Dans le système (7) qui admet (8) comme solution, la famille Ω est donnée par $\Omega := \pm(\sqrt{k^2 + 1})_{k \in \mathbb{N}^*}$. Ainsi, pour $|I| > \frac{2\pi}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ on a bien l'équivalence des normes $\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)} \asymp \|u_x(\cdot, 0)\|_{L^2(I)}$.
 3. Soit $\Omega := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels qui vérifie une condition d'écartement uniforme, c'est-à-dire la condition (9). On note $D^+(\Omega)$ la densité de Pólya de l'espace Ω définie par :

$$D^+(\Omega) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n^+(\Omega, r)}{r}, \quad (12)$$

où $n^+(\Omega, r)$ représente le plus grand nombre de termes de la suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ contenus dans un intervalle de longueur r .

4. Dans ce théorème, la taille de l'intervalle I donne seulement une condition suffisante pour que l'estimation (10) soit vraie.

On peut donner une version plus fine de ce théorème qui va donner une condition sur la taille critique de l'intervalle I [Beu89] :

Théorème 4 (Beurling). *Soit $\Omega := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels qui vérifie la propriété d'écartement uniforme (9).*

1. Si $|I| > 2\pi D^+(\Omega)$ alors les estimations (10) sont valables.
2. Réciproquement, si les estimations (10) sont valables, alors $|I| \geq 2\pi D^+(\Omega)$.

On peut aussi citer un théorème dû à Haraux [Har89], que nous utiliserons dans la suite, qui affirme que l'on peut ajouter un nombre fini d'indices à la somme définissant la fonction $x(t)$ sans changer le temps critique d'observation. Plus précisément, on a

Théorème 5. *Soit $(\omega_k)_{k \in K}$ une famille de réels qui vérifie une condition d'écartement uniforme. Supposons que pour un ensemble fini $K_0 \subset K$ et un intervalle borné I_0 il existe deux constantes positives c_1, c_2 telles que pour*

$$x(t) = \sum_{k \in K \setminus K_0} x_k e^{i\omega_k t}$$

on a

$$c_1 \sum_{k \in K \setminus K_0} |x_k|^2 \leq \int_{I_0} |x(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{k \in K \setminus K_0} |x_k|^2. \quad (13)$$

Alors, pour tout intervalle I tel que $|I| > |I_0|$, il existe deux constantes positives c_3, c_4 telles que

$$c_3 \sum_{k \in K} |x_k|^2 \leq \int_{I_0} \left| \sum_{k \in K} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq c_4 \sum_{k \in K} |x_k|^2. \quad (14)$$

Remarque 4. En utilisant ce théorème, on peut améliorer le temps d'observation du système (7) plus précisément : pour I un intervalle borné tel que $|I| > 2\pi$, la solution (8) vérifie l'équivalence de normes

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)} \asymp \|u_x(\cdot, 0)\|_{L^2(I)}.$$

On peut aussi donner des versions vectorielles de ces théorèmes d'Ingham, on consultera entre autres [BKM10], [Meh05], [BKL02] ou [KL05]. Donnons, par exemple, une généralisation du théorème de Beurling en dimension d . On considère, comme précédemment, une suite de réels $\Omega := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ qui possède un écartement uniforme

$$\gamma := \inf_{p \neq q} |\omega_p - \omega_q| > 0. \quad (15)$$

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert complexe H de dimension d . On considère une fonction

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k U_k e^{i\omega_k t}, \quad (16)$$

avec $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes de carrés sommables.

Théorème 6. *Soit $\Omega := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels qui vérifie (15) et soit I un intervalle borné.*

- a) *Si $|I| > 2\pi D^+(\Omega)$, alors $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \asymp \int_I \|x(t)\|_H^2 dt$, avec $x(t)$ une fonction de la forme (16).*
- b) *Inversement, si on a une telle équivalence de normes, alors la longueur de l'intervalle I vérifie $|I| \geq 2\pi D^+(\Omega)/d$.*

Remarque 5. On peut montrer l'optimalité du Théorème 6 dans le sens suivant :

Proposition 4. *Soit $\Omega := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels qui vérifie (15) et soit I un intervalle borné. Considérons un réel $\frac{1}{d} \leq \alpha \leq 1$, alors il existe une famille de vecteurs unitaires $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de H telle que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \asymp \int_I \|x(t)\|_H^2 dt,$$

si $|I| > 2\pi\alpha D^+(\Omega)$ et que ce soit faux si $|I| < 2\pi\alpha D^+(\Omega)$.

Dans le cas de la dimension supérieure il apparaît donc un “espace” entre les deux conditions. En effet, si on fixe $d = 2$, alors si $|I| > 2\pi D^+(\Omega)$ on a l'équivalence des normes et inversement, si cette équivalence est vraie, alors la longueur de I vérifie $|I| \geq \pi D^+(\Omega)$. Que se passe-t-il pour $\pi D^+(\Omega) \leq |I| \leq 2\pi D^+(\Omega)$? Une question naturelle serait d'établir un lien entre certaines conditions sur la famille des vecteurs $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et le temps critique d'observation. Si une classification exhaustive nous semblait d'emblée trop ambitieuse nous avons pu obtenir les résultats suivants (qui seront détaillés dans la seconde partie de la thèse) :

Théorème 7. *On suppose qu'il existe des ensembles K_1, \dots, K_N et N vecteurs unitaires linéairement indépendants E_1, \dots, E_N de sorte que*

$$K = K_1 \dot{\bigcup} K_2 \dot{\bigcup} \dots \dot{\bigcup} K_N$$

et que

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in K_j}} U_k = E_j.$$

On suppose de plus que les ensembles $\Omega_j = \{\omega_k | k \in K_j\}$ possèdent un écartement uniforme, c'est-à-dire

$$\inf_{\substack{p \neq q \\ p, q \in K_j}} |\omega_p - \omega_q| = \gamma_j > 0, \quad \forall j = 1 \dots N.$$

Si on note D_j^+ les densités de Polya des ensembles Ω_j et si I est un intervalle tel que $|I| > 2\pi \max_j(D_j^+)$, alors

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \asymp \sum_{k \in K} |x_k|^2, \quad (17)$$

pour toutes familles $(x_k)_{k \in K}$ de nombres complexes de carrés sommables.

On verra qu'on peut aussi améliorer les estimations existantes dans le cas où la famille des vecteurs $(U_k)_{k \in K}$ est liée. On donnera aussi une inégalité du type “Parseval”, plus précisément :

Théorème 8. *Soit I un intervalle borné de longueur positive et un réel $\alpha > 4$. Alors, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que*

$$a_n \geq e^{-\alpha n \log n}, \quad (18)$$

pour n suffisamment grand et telle que, pour tout n , elle vérifie l'inégalité

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} \right|^2, \quad (19)$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Deuxième partie

Fonctions orthogonales positives

Chapitre 1

Contexte de l'étude

Dans l'introduction on a utilisé l'exemple 2, donné dans [Kom87], qui expose la fonction orthogonale h_4 associée au quadruplet $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (105, 70, 42, 30)$, donnée dans [Kom87]. Cette fonction a été calculée en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x_k + x_{k+105} = 2 & k = 1, \dots, 105 \\ x_k + x_{k+70} + x_{k+140} = 3 & k = 1, \dots, 70 \\ x_k + x_{k+42} + x_{k+84} + x_{k+126} = 5 & k = 1, \dots, 42 \\ x_k + x_{k+30} + x_{k+60} + x_{k+90} + x_{k+120} + x_{k+150} = 7, & k = 1, \dots, 30 \\ x_k = 0 & k = 163, 164, \dots \end{cases}$$

En effet, on vérifie que si $f \in X_{105}$, on a

$$\int_I h(t)f(t)dt = \int_a^{a+105} (h(t) + h(t+105))f(t)dt = 2 \int_a^{a+105} f(t)dt = 0.$$

De la même façon on aura

$$\int_I h(t)f(t)dt = 0 \quad \text{dès que} \quad f \in X_{70}, f \in X_{42} \text{ ou } f \in X_{30}.$$

Ainsi la fonction

$$h_4(t) \sim x_1 \dots x_{162} \in X_{30} + X_{42} + X_{70} + X_{105}.$$

Cette méthode est assez lourde en termes de calculs et ne nous a pas permis de traiter le cas général de trois ou quatre périodes (ici on est dans un cas particulier à savoir $(105, 70, 42, 30) = (7 \cdot 5 \cdot 3, 7 \cdot 5 \cdot 2, 7 \cdot 3 \cdot 2, 2 \cdot 5 \cdot 3)$). Elle ne nous a pas non plus permis d'obtenir des informations sur le signe de ces fonctions orthogonales. On va donc proposer une autre méthode de détermination de ces fonctions h_N .

1.1 Expressions des fonctions orthogonales

1.1.1 Le cas $n = 2$

On considère $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}$. On sait alors calculer la valeur T définie précédemment, à savoir

$$T := T_{12} = T_1 + T_2 - \langle T_1, T_2 \rangle.$$

On pose

$$h_2(t) = \sum_{j=0}^{(T_{12}-T_1)/\langle T_1, T_2 \rangle} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle) = \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle), \quad (1.1)$$

où h_1 est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, T_1]$.

Remarque 6. Si T_2 est un diviseur de T_1 , alors on a $X = X_{T_1}$, $T_{12} = T_1$ et donc simplement $h_2 = h_1$.

On obtient alors les propriétés suivantes :

Proposition 5.

- (a) L'espace $\overline{X_{T_1} + X_{T_2}}$ est engendré par les fonctions $(e^{2\pi i m t / T_1 T_2})$ où m est un entier non nul multiple de T_1 ou de T_2 .
- (b) $\overline{X_{T_1} + X_{T_2}} = h_2^\perp$ dans $L^2(0, T)$.
- (c) La fonction $h_2(t)$ est strictement positive sur $(0, T)$.

Démonstration. On déduit (a) des propriétés élémentaires des séries de Fourier. Le point (c) se déduit simplement des définitions des fonctions h_1 et h_2 .

Puisqu'on sait déjà que la fonction h_2 est unique à une constante multiplicative près, pour montrer la proposition (b) il suffit de vérifier que la fonction donnée par (1.1) vérifie les égalités

$$\int_0^T h_2(t) e^{2i\pi m t / T_1 T_2} dt = 0,$$

pour tout entier m non nul tel que m/T_1 ou m/T_2 soit un entier. En utilisant l'expression de h_2 on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T h_2(t) e^{2i\pi m t / T_1 T_2} dt &= \int_0^T \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle) e^{2i\pi m t / T_1 T_2} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} e^{2i\pi m j \langle T_1, T_2 \rangle / T_1 T_2} \int_0^T h_1(t) e^{2i\pi m t / T_1 T_2} dt. \end{aligned}$$

Si $k := m/T_2$ est un entier non nul, alors par définition de la fonction h_1 on a

$$\int_0^T h_1(t) e^{2i\pi mt/T_1 T_2} dt = \int_0^T h_1(t) e^{2i\pi kt/T_1} dt = 0.$$

Supposons maintenant que m/T_1 est un entier et que m/T_2 ne l'est pas. On a la relation

$$\frac{m}{T_2} = \frac{m \langle T_1, T_2 \rangle}{T_1 T_2} \cdot \frac{T_1}{\langle T_1, T_2 \rangle}.$$

Puisque $T_1/\langle T_1, T_2 \rangle$ est un entier mais que m/T_2 ne l'est pas, alors

$$r := \frac{m \langle T_1, T_2 \rangle}{T_1 T_2},$$

ne l'est pas non plus.

Puisque m/T_1 est un entier on obtient donc

$$\sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} e^{2irj\pi} = \frac{e^{2i\pi m/T_1} - 1}{e^{2ir\pi} - 1} = 0. \quad \square$$

1.1.2 Le cas $n = 3$

On considère $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{Z}$, on sait alors calculer la valeur de T définie précédemment, à savoir

$$T := T_{123} = T_1 + T_2 + T_3 - \langle T_1, T_2 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle - \langle T_1, T_3 \rangle + \langle T_1, T_2, T_3 \rangle.$$

On rappelle les propriétés suivantes :

Proposition 6.

1. L'espace $\overline{X_{T_1} + X_{T_2} + X_{T_3}}$ est engendré par les fonctions $(e^{2i\pi mt/T_1 \cdot T_2 \cdot T_3})$ où m est un entier non nul multiple de $T_1 T_2$ ou $T_1 T_3$ ou $T_2 T_3$.
2. $\overline{X_{T_1} + X_{T_2} + X_{T_3}} = h_3^\perp$ dans $L^2(0, T)$ pour une fonction h_3 correctement choisie.

Dans la suite de ce paragraphe, par changement d'échelle, on fera l'hypothèse

$$\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1.$$

On cherche la fonction orthogonale sous la forme suivante :

$$h_3(t) = \sum_{j=0}^{T_{123}-T_{12}} a_j h_2(t-j),$$

avec h_2 et T_{12} introduits dans la section précédente et avec une suite $(a_j)_{j=0}^{T_{123}-T_{12}}$ de nombres réels convenablement choisie (elle est uniquement déterminée si on fixe $a_0 = 1$). Le signe de la fonction h_3 dépend donc du signe de ces coefficients.

Si on veut vérifier le point (b) de la propriété précédente, la suite des coefficients $(a_j)_{j=0}^{T_{123}-T_{12}}$ doit être choisie telle que

$$\int h_3(t) e^{2i\pi mt/(T_1 T_2 T_3)} dt = 0, \quad (1.2)$$

pour tout entier m non nul tel qu'au moins une des fractions $m/T_1 T_2$, $m/T_1 T_3$ ou $m/T_2 T_3$, soit un entier. Il faut donc pouvoir montrer qu'une telle suite existe. Pour ce faire, commençons par réécrire et préciser l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned} & \int h_3(t) e^{2i\pi mt/(T_1 T_2 T_3)} dt \\ &= \sum_{j=0}^{T_3 - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + 1} a_j \int h_2(t - j) e^{2i\pi mt/(T_1 T_2 T_3)} dt \\ &= \sum_{j=0}^{T_3 - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + 1} a_j e^{2i\pi mj/(T_1 T_2 T_3)} \int h_2(t) e^{2i\pi mt/(T_1 T_2 T_3)} dt. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction h_2 , on observe que la dernière intégrale s'annule pour tous les entiers m non nuls tels que

$$\frac{m}{T_1 T_2 T_3} = \frac{kT_1}{T_1 T_2} \text{ ou } \frac{kT_2}{T_1 T_2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

donc pour m multiples de $T_1 T_3$ ou de $T_2 T_3$. Ainsi il est suffisant de choisir des coefficients $(a_j)_{j=0}^{T_{123}-T_{12}}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{T_3 - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + 1} a_j e^{2i\pi mj/(T_1 T_2 T_3)} = 0 \quad (1.3)$$

pour tout entier m multiple de $T_1 T_2$ tel que, ni $m/T_1 T_3$ ni $m/T_2 T_3$ ne soit entier.

Faisons quelques remarques afin de simplifier le problème :

Remarque 7.

1. En utilisant la périodicité des fonctions exponentielles, la relation (1.3) ne change pas si l'on ajoute à m un multiple de $T_1 T_2 T_3$. On pourra donc supposer, sans perte de généralité, que $0 < m < T_1 T_2 T_3$.

2. Si T_3 est un diviseur des entiers T_1 ou T_2 alors $X = X_{T_1} + X_{T_2}$, $T_{123} = T_{12}$ et $h_3 = h_2$. Dans ce cas, h_3 est strictement positive sur $(0, T)$.
3. Si on a $\langle T_1, T_3 \rangle = \langle T_2, T_3 \rangle = 1$, alors on peut choisir $a_j = 1$ pour tout j , et à nouveau on obtient une fonction h_3 strictement positive sur $(0, T)$.

On pose $n := m/T_1T_2$ et on peut réécrire les conditions (1.3) de la façon suivante :

$$\sum_{j=0}^{T_3 - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + 1} a_j e^{2i\pi nj/T_3} = 0, \quad n \in N, \quad (1.4)$$

où N est un ensemble d'entiers n qui vérifient

$$0 < n < T_3, \quad \frac{nT_2}{T_3} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{nT_1}{T_3} \notin \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Prenons l'exemple suivant :

Exemple 5. On considère le triplet de périodes $(T_1, T_2, T_3) = (15, 10, 6)$. On est dans le cas où $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1$, d'autre part, on a aussi les résultats suivants

$$T_{12} = T_1 + T_2 - \langle T_1, T_2 \rangle = 20,$$

et

$$T_{123} = T_1 + T_2 + T_3 - \langle T_1, T_2 \rangle - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_3, T_2 \rangle + \langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 22.$$

Par définition on obtient

$$h_1(t) = \chi_{[0,15)} = 111111111111111 = 1^{15}.$$

En utilisant (1.1), la fonction h_2 est donnée par

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \sum_{j=0}^{(T_{12}-T_1)/\langle T_1, T_2 \rangle} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{(20-15)/5} h_1(t - 5j) \\ &= 1^{15}00000 + 000001^{15} = 1^5 2^{10} 1^5. \end{aligned}$$

Ensuite, pour déterminer la fonction h_3 , on commence par donner l'ensemble N . Celui-ci consiste en l'ensemble des entiers n qui vérifient (1.5), c'est-à-dire

$$0 < n < 6 \quad \text{tel que} \quad \frac{10n}{6} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{15n}{6} \notin \mathbb{Z}.$$

On trouve donc

$$N = \{1, 5\}.$$

Le système (1.4) s'écrit alors

$$\sum_{j=0}^{6-3-2+1} a_j e^{2i\pi n j/6} = \sum_{j=0}^2 a_j e^{2i\pi n j/6} = 0, \quad n \in N$$

ou encore

$$\begin{cases} 1 + a_1 e^{2i\pi/6} + a_2 e^{4i\pi/6} = 0 \\ 1 + a_1 e^{-2i\pi/6} + a_2 e^{-4i\pi/6} = 0. \end{cases}$$

On obtient une solution pour $a_1 = -1$ et $a_2 = 1$ et finalement

$$\begin{aligned} h_3(t) &\sim 1^5 2^{10} 1^5 00 - 01^5 2^{10} 1^5 0 + 001^5 2^{10} 1^5 \\ &\sim 10111212^8 1211101. \end{aligned}$$

Remarque 8.

1. On constate que cette dernière fonction n'est pas strictement positive, elle est nulle sur les intervalles $(1, 2)$ et $(20, 21)$. On peut se demander si la présence de ce zéro est fortuite ou si l'on peut généraliser cette propriété à des classes de périodes plus larges.
2. Ici on trouve une solution au système (1.4) mais à ce stade, il n'est pas démontré qu'il existe toujours une telle solution.

Pour faciliter l'étude et afin de comparer les résultats avec les calculs directs, nous nous sommes, dans un premier temps, intéressé au cas des triplets de périodes donnés sous la forme

$$(T_1, T_2, T_3) = (pq, pr, qr), \quad (1.6)$$

avec p, q, r trois nombres premiers.

On a alors réalisé de nombreux calculs numériques afin de mieux comprendre le comportement de la fonction h_3 . On donne quelques résultats dans la section suivante.

1.2 Premiers résultats numériques

On présente ici les calculs numériques de la suite des coefficients $(a_j)_{j=0}^{T_{123}-T_{12}}$ et les fonctions h_3 associées pour différents triplets donnés sous la forme (1.6). Pour de tels triplets on observe que

$$T_1 = pq \quad \text{avec} \quad h_1(t) = 1^{pq},$$

puis

$$T_{12} = pq + pr - p \quad \text{avec} \quad h_2(t) = \sum_{j=0}^{(r-1)} h_1(t - pj),$$

et finalement

$$T_{123} = T_{12} + (q-1)(r-1) \quad \text{avec} \quad h_3(t) = \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j h_2(t - j), \quad (1.7)$$

où les coefficients $(a_j)_{j=0}^{(q-1)(r-1)}$ vérifient le système suivant

$$\sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} e^{2i\pi n j / qr} a_j = 0, \quad n \in N, \quad (1.8)$$

avec N l'ensemble des entiers $0 < n < qr$ multiples de q mais pas de r .

Remarque 9. En particulier, on constate que la suite des coefficients $(a_j)_{j=0}^{(q-1)(r-1)}$ ne dépend pas de p .

1.2.1 Valeurs numériques des coefficients $(a_j)_{j=0}^{(q-1)(r-1)}$ dans certains cas particuliers

- Cas $(2, 3, p)$, c'est-à-dire correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (3p, 2p, 6)$:
1, -1, 1
- Cas $(2, 5, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (5p, 2p, 10)$:
1, -1, 1, -1, 1
- Cas $(2, 7, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (7p, 2p, 14)$:
1, -1, 1, -1, 1, -1, 1
- Cas $(3, 5, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (5p, 3p, 15)$:
1, -1, 0, 1, $\boxed{-1}$, 1, 0, -1, 1
- Cas $(3, 7, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (7p, 3p, 21)$:
1, -1, 0, 1, -1, 0, $\boxed{1}$, 0, -1, 1, 0, -1, 1
- Cas $(3, 11, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (11p, 3p, 33)$:
1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, $\boxed{1}$, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1

- Cas $(3, 13, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (13p, 3p, 39)$:
1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, $\boxed{1}$, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1
- Cas $(5, 7, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (7p, 5p, 35)$:
1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, $\boxed{1}$, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(5, 11, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (11p, 5p, 55)$:
1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, $\boxed{1}$, 0, 0, -1, 0, 1,
0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(5, 13, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (13p, 5p, 65)$:
1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, $\boxed{-1}$,
1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(5, 17, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (17p, 5p, 85)$:
1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, $\boxed{1}$,
-1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, $\boxed{1}$, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1,
0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(5, 23, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (23p, 5p, 115)$:
1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 1,
-1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, $\boxed{-1}$, 1, 0, -1, 1, -1,
1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0,
0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(7, 11, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (11p, 7p, 77)$:
1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1,
-1, 0, 1, 0, $\boxed{-1}$, 0, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0,
0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1
- Cas $(7, 13, p)$, i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (13p, 7p, 91)$:
1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1,
0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, $\boxed{-1}$, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 1,
0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1

Remarque 10.

1. On peut conjecturer que pour tous les triplets de nombres premiers de la forme $(2, q, p)$ correspondant aux triplets de périodes $(T_1, T_2, T_3) = (pq, 2p, 2q)$ les coefficients (a_j) sont de la forme

$$a_j = (-1)^i, \quad i = 0, \dots, (q-1).$$

1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1

– Cas (7, 13, 17), i.e. correspondant au triplet $(T_1, T_2, T_3) = (221, 119, 91)$:

1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,
 1, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2,
 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3,
 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 5, 5, 5,
 5, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 6, 5,
 6, 7, 6, 6, 7, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 7,
 7, 7, 7, 7, 7, 6, 7,
 7, 6, 7, 7,
 7, 7, 7, 7, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 6, 7, 6, 6, 6, 7, 6,
 6, 7, 6, 5, 6, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 6, 5,
 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 3,
 4, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2,
 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1,
 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 1

Remarque 11.

1. On observe une symétrie des coefficients, on peut donc conjecturer que la fonction h_3 est symétrique par rapport à son milieu (on le démontrera dans la suite).
2. On remarque que toutes les fonctions h_3 précédentes sont à valeurs positives ou nulles.
3. Elles possèdent toutes des valeurs nulles sur des intervalles de mesures strictement positives. Plus précisément, lorsqu'on regarde la fonction associée au triplet de nombres premiers (p, q, r) , elle semble commencer par un 1 suivi d'un bloc de zéros de longueur $(r - 1)$.

Chapitre 2

Détermination de la suite des coefficients (a_j) définissant h_3 par calcul direct dans certains cas particuliers de périodes (T_1, T_2, T_3)

Ici on continue à s'intéresser au cas d'un triplet de périodes sous la forme $(T_1, T_2, T_3) = (pq, pr, qr)$ avec p, q, r trois entiers premiers distincts. En particulier, on va donner une formule explicite pour la suite des coefficients (a_j) dans le cas où $r = 2$ et $r = 3$.

2.1 Détermination de la suite des coefficients (a_j) pour $r = 2$

On considère le cas $(T_1, T_2, T_3) = (pq, 2p, 2q)$, on rappelle que l'on obtient alors

$$T_{12} = pq + 2p - p = p(q + 1) \quad \text{avec} \quad h_2(t) = \sum_{j=0}^p h_1(t - j),$$

et

$$T_{123} = T_{12} + (q - 1) \quad \text{avec} \quad h_3(t) = \sum_{j=0}^{q-1} a_j h_2(t - j),$$

où les coefficients (a_j) vérifient le système suivant :

$$\sum_{j=0}^{q-1} a_j e^{\pi i m j / q} \quad m \in N, \quad (2.1)$$

N étant l'ensemble des entiers impairs n tels que n/q ne soit pas entier.

Proposition 7. *Le système (2.1) admet la suite $(a_j)_{j=0}^{q-1} = (-1)^j$ comme solution.*

Démonstration. Si l'on pose $A = e^{i\pi m/q}$, par un calcul direct on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q-1} e^{\pi i m j/q} a_j &= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j A^j \\ &= \frac{1 - (-A)^q}{1 - (-A)} \\ &= \frac{1 + A^q}{1 + A} = 0. \end{aligned}$$

Ici on a $1 + A \neq 0$ puisque $A = e^{i\pi m/q}$ et que n/q n'est pas un entier, de plus on a bien $1 + A^q = 0$ puisque $A^q = e^{i\pi m}$ et que m est un entier impair. \square

2.2 Détermination de la suite des coefficients (a_j) pour $r = 3$

On considère le cas de trois entiers premiers $(p, q, 3)$ qui correspondent au triplet de périodes $(T_1, T_2, T_3) = (pq, 3p, 3q)$, on obtient alors

$$T_{12} = pq + 3p - p = p(q + 2) \quad \text{avec} \quad h_2(t) = \sum_{j=0}^p h_1(t - j),$$

et

$$T_{123} = T_{12} + 2(q - 1) \quad \text{avec} \quad h_3(t) = \sum_{j=0}^{q-1} a_j h_2(t - j),$$

où les coefficients (a_j) vérifient le système suivant

$$\sum_{j=0}^{2q-2} a_j e^{2\pi i n j/3q} \quad n \in N, \quad (2.2)$$

où N est l'ensemble des entiers n tels que $n/3$ et n/q ne sont pas des entiers.

Définissons la suite des coefficients $(a_j)_{j=0}^{2q-2}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_0, \dots, a_{q-1} & \text{correspond à la suite } (1, -1, 0)^\infty = 1, -1, 0, 1, \dots \\ a_j = a_{2q-2-j} & \text{pour } j = 0, \dots, q-1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Proposition 8. Une telle suite (2.3) est une solution de (2.2).

Démonstration. Dans la formule définissant la suite $(a_j)_{j=0}^{2q-2}$, la position du coefficient médian $j = q - 1$ joue un grand rôle selon les valeurs de q modulo 3. Distinguons donc les deux cas suivants

$$q - 1 = 3k \quad \text{ou} \quad q - 1 = 3k + 1.$$

1. Le cas $q = 3k + 1$

Dans ce cas, la formule (2.3) peut se réécrire sous la forme

$$(a_j) = (1, -1, 0)^k, 1, (0, -1, 1)^k.$$

On pose $A = e^{2i\pi n/3q}$, on doit alors démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{j=0}^{2q-2} a_j e^{2\pi i n j / 3q} = \sum_{j=0}^{k-1} (A^{3j} - A^{3j+1} + A^{6k-3j} - A^{6k-3j-1}) + A^{3k} = 0.$$

On obtient donc quatre sommes de suites géométriques, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2q-2} a_j e^{2\pi i n j / 3q} &= \frac{A^{3k} - 1}{A^3 - 1} (1 - A) + \frac{A^{3k} - A^{6k}}{A^{-3} - 1} (1 - A^{-1}) + A^{3k} \\ &= \frac{A^{3k} - 1}{A^3 - 1} (1 - A) + \frac{A^{3k+2} - A^{6k+2}}{1 - A^3} (A - 1) + A^{3k} \\ &= -\frac{A - 1}{A^3 - 1} (A^{3k} - 1 + A^{3k+2} - A^{6k+2}) + A^{3k}. \end{aligned}$$

On a $A^{9k+3} = A^{3q} = e^{2i\pi n} = 1$, d'autre part, $A^{3k+1} = A^q = e^{2i\pi n/q} \neq 1$ car n est un entier et n/q n'est pas entier. Autrement dit, A^{3k+1} est une des deux racines cubiques de l'unité et donc

$$1 + A^{3k+1} + A^{6k+2} = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2q-2} a_j e^{2\pi i n j / 3q} &= -\frac{A - 1}{A^3 - 1} (A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2}) + A^{3k} \\ &= -\frac{A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2}}{1 + A + A^2} + A^{3k} \\ &= -A^{3k} + A^{3k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Le cas $q = 3k + 2$

Dans ce cas, la formule (2.3) peut se réécrire sous la forme

$$(a_j) = (1, -1, 0)^k, 1, -1, 1, (0, -1, 1)^k.$$

On pose $A = e^{2i\pi n/3q}$, on doit alors maintenant démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{j=0}^{k-1} (A^{3j} - A^{3j+1} + A^{6k+2-3j} - A^{6k+1-3j}) + A^{3k} - A^{3k+1} + A^{3k+2} = 0.$$

On obtient ici la somme de quatre suites géométriques, plus précisément

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} (A^{3j} - A^{3j+1} + A^{6k+2-3j} - A^{6k+1-3j}) \\ &= \frac{A^{3k} - 1}{A^3 - 1} (1 - A) + A^2 (1 - A^{-1}) \frac{A^{3k} - A^{6k}}{A^{-3} - 1} \\ &= \frac{A^{3k} - 1}{A^3 - 1} (1 - A) + (A - 1) \frac{A^{3k+4} - A^{6k+4}}{1 - A^3} \\ &= -\frac{A - 1}{A^3 - 1} (A^{3k} - 1 + A^{3k+4} - A^{6k+4}). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a

$$A^{9k+6} = A^{3q} = e^{2i\pi n} = 1 \quad \text{et} \quad A^{3k+2} = A^q = e^{2i\pi n/q} \neq 1,$$

puisque n est un entier mais que n/q ne l'est pas. Autrement dit, A^{3k+2} est une des racines cubiques de l'unité et donc

$$1 + A^{3k+2} + A^{6k+4} = 0.$$

En utilisant cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} (A^{3j} - A^{3j+1} + A^{6k+2-3j} - A^{6k+1-3j}) \\ &= -\frac{A - 1}{A^3 - 1} (A^{3k} + A^{3k+2} + A^{3k+4}) \\ &= -\frac{A^{3k} + A^{3k+2} + A^{3k+4}}{1 + A + A^2} \\ &= -A^{3k} + A^{3k+1} - A^{3k+2}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

□

Dans les deux démonstrations précédentes, on a travaillé modulo 2, respectivement modulo 3, afin d'expliciter la position du terme médian. La méthode est donc difficilement généralisable sans modification. Après de nouveaux essais numériques, on a pu comprendre la forme de la fonction h_3 dans le cas plus général d'un triplet $(T_1, T_2, T_3) = (pq, pr, qr)$. Enfin, par la suite, on a compris que la méthode mise en oeuvre pouvait aussi s'utiliser dans le cas général de trois périodes quelconques. Dans la partie suivante, on présentera donc la méthode générale d'étude de la fonction h_n pour $n = 3$.

Chapitre 3

Etude de la fonction orthogonale h_3

3.1 Ecriture de h_3

On rappelle qu'on cherche à exprimer la fonction orthogonale h_3 comme une combinaison linéaire de translations de la fonction h_2 , c'est-à-dire sous la forme

$$h_3(t) = \sum_{j=0}^{T_{123}-T_{12}} a_j h_2(t-j),$$

où la suite des coefficients $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions (1.4) et (1.5). Ainsi, si on pose $n := m/T_1 T_2$, la suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ doit vérifier le système suivant :

$$\sum_{j=0}^{T_3 - \langle T_1, T_3 \rangle - \langle T_2, T_3 \rangle + 1} a_j e^{2i\pi n j / T_3} = 0, \quad n \in N, \quad (3.1)$$

où N est un ensemble d'entiers n qui vérifient

$$0 < n < T_3, \quad \frac{nT_2}{T_3} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{nT_1}{T_3} \notin \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

On va réécrire ce système en introduisant les entiers

$$q := \langle T_1, T_3 \rangle \quad \text{et} \quad r := \langle T_2, T_3 \rangle. \quad (3.3)$$

On rappelle qu'on a supposé que $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1$, on a donc aussi $\langle q, r \rangle = 1$. On introduit l'entier p tel que

$$T_3 := pqr.$$

On introduit enfin les entiers α et β quotient de T_1 par q , respectivement, T_2 par r , c'est-à-dire,

$$T_1 = \alpha q \quad \text{et} \quad T_2 = \beta r.$$

On a alors

$$q = \langle T_1, T_3 \rangle = \langle \alpha q, pqr \rangle = q \langle \alpha, pr \rangle$$

et

$$r = \langle T_2, T_3 \rangle = \langle \beta r, pqr \rangle = r \langle \beta, pq \rangle.$$

On peut donc réécrire (3.1) et (3.2) sous la forme

$$\sum_{j=0}^{pqr-q-r+1} a_j e^{2i\pi nj/pqr} = 0, \quad n \in N, \quad (3.4)$$

où N est l'ensemble des entiers n qui vérifient

$$0 < n < pqr, \quad \frac{n\beta}{pq} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{n\alpha}{pr} \notin \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

De plus, on a $\langle q, r \rangle = \langle \alpha, pr \rangle = \langle \beta, pq \rangle = 1$, donc l'ensemble N peut se réécrire sous la forme

$$0 < n < pqr, \quad \frac{n}{pq} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{n}{pr} \notin \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Si l'on pose $A := e^{2i\pi n/pqr}$, les coefficients $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ doivent vérifier les équations suivantes :

$$\sum_{j=0}^{pqr-q-r+1} a_j A^j = 0. \quad (3.7)$$

Ainsi, pour finaliser la construction de la fonction orthogonale h_3 , on doit démontrer qu'une telle suite existe, c'est-à-dire prouver le lemme suivant :

Lemme 1. Il existe une suite de coefficients réels (a_j) qui vérifie les conditions (3.6) et (3.7).

Pour démontrer ce lemme, on va associer aux fonctions orthogonales h_1, h_2 et h_3 une suite de polynômes adaptés. En effet, d'après l'expression de ces dernières fonctions, on sait que ce sont des fonctions en escalier à valeurs entières sur des intervalles entiers. On réalise une association de la façon suivante, considérons une fonction en escalier

$$g(x) := x_k \quad \text{pour } x \in [k, k+1[\quad , \quad k \text{ un entier positif,} \quad (3.8)$$

on lui associe alors le polynôme

$$P = \sum_k x_k X^k.$$

Exemple 6. En utilisant les notations introduites en début du chapitre, on considère

$$g(x) \sim 100122142,$$

le polynôme associé P_g est donné par

$$P_g = 1 + X^3 + 2X^4 + 2X^5 + X^6 + 4X^7 + 2X^8.$$

Remarque 12. Si un polynôme P associé à une fonction g est à coefficients positifs, alors la fonction g est positive.

Calculons les polynômes P_1, P_2 et P_3 associés aux fonctions h_1, h_2 et h_3 .

1. On a $h_1 = \chi_{[0, T_1]} = 1^{T_1}$, on obtient alors

$$P_1 = \sum_{k=0}^{T_1} X^k = \frac{1 - X^{T_1}}{1 - X}. \quad (3.9)$$

2. On rappelle que $h_2(t) = \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} h_1(t - j\langle T_1, T_2 \rangle)$. Soit P_1 le polynôme associé à la fonction h_1 et Q celui associé à la fonction $h_1(t - k)$ où k est un entier. On a alors la relation suivante

$$Q = X^k \cdot P.$$

Ainsi, pour le polynôme P_2 , on obtient

$$P_2 = \sum_{j=0}^{\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} - 1} X^{j\langle T_1, T_2 \rangle} \cdot P_1 = \frac{1 - X^{T_2}}{1 - X^{\langle T_1, T_2 \rangle}} \cdot \frac{1 - X^{T_1}}{1 - X}. \quad (3.10)$$

On va maintenant procéder de la même manière pour la fonction orthogonale h_3 . Par l'association d'un polynôme, on va construire une suite de coefficients qui vérifie les conditions requises.

Démonstration. On suppose qu'on peut écrire la fonction h_3 sous la forme

$$h_3 = \sum_{j=0}^{T_{123} - T_{12}} a_j h_2(t - j), \quad (3.11)$$

avec la suite (a_j) qui vérifie les conditions (3.6) et (3.7). On peut alors associer à la fonction orthogonale le polynôme

$$P_3(X) = \sum_{k=0}^{pqr - q - r + 1} a_k X^k P_2(X). \quad (3.12)$$

Définissons le polynôme Q tel que

$$Q(x) := \sum_{k=0}^{pqr-q-r+1} a_k X^k.$$

En utilisant les conditions (3.6) et (3.7), on obtient

$$Q(A) = 0 \quad \text{avec} \quad A = e^{2i\pi n/pqr}, \quad n \in N. \quad (3.13)$$

On rappelle que par définition de l'ensemble N on a

$$\frac{n}{pq} \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{n}{pr} \notin \mathbb{Z}.$$

Ainsi, A n'est pas une racine de l'équation $X^q = 1$ ou de $X^r = 1$, c'est-à-dire

$$A^{pqr} = 1, \quad A \neq 1, \quad A^q \neq 1, \quad A^r \neq 1. \quad (3.14)$$

On peut en déduire que

$$Q(X) = \frac{(1-X)(1-X^{pqr})}{(1-X^q)(1-X^r)},$$

et donc

$$P_3 = \frac{1-X^{pqr}}{1-X^q} \cdot \frac{1-X^{T_2}}{1-X^r} \cdot \frac{1-X^{T_1}}{1-X^{\langle T_1, T_2 \rangle}}. \quad (3.15)$$

Inversement, si l'on considère ce dernier polynôme et qu'on lui associe une fonction en escalier h_3 comme précédemment, cette fonction vérifie bien les propriétés (3.6) et (3.7). On a donc justifié l'écriture de h_3 sous la forme (3.11). \square

En utilisant cette association, on obtient aussi des informations sur le signe de la fonction orthogonale. On a par exemple la

Proposition 9. *La fonction h_3 est positive ou nulle.*

Démonstration. Si l'on considère deux entiers a, b tel que a divise b , alors on obtient facilement que le polynôme

$$\frac{1-X^b}{1-X^a} = 1 + X^a + X^{2a} + \dots + X^{b-a}$$

est à coefficients positifs ou nuls. Dans le cas présent, on sait que $T_2 = \beta r$ donc r divise T_2 . De la même façon, on sait que $\langle T_1, T_2 \rangle$ divise T_1 et q divise pqr . Ainsi, P_3 est un polynôme à coefficients positifs ou nuls et donc h_3 est positive ou nulle. \square

On obtient donc déjà une information sur le signe de la fonction orthogonale dans le cas $n = 3$. Par contre, il ne semble pas évident que l'on puisse caractériser, de cette façon, la stricte positivité de la fonction h_3 . Pour obtenir des informations plus complètes, on va s'intéresser directement aux valeurs explicites des coefficients $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

3.2 Détermination de la suite des coefficients

$$(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

Lorsqu'on observe les tests numériques de la sous-section (1.2.1), on remarque que la suite des $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ correspond "presque" à des troncatures "décalées" de la suite

$$(1, -1, 0^{r-2})^\infty.$$

Plus précisément, on obtient le résultat suivant :

On note $A := e^{2i\pi n/pqr}$ avec $n \in N$ l'ensemble donné par (3.7) et (3.6) où l'on fixe le premier terme $a_0 = 1$, on utilise les notations p, q, r introduites au début du chapitre c'est-à-dire (3.3) et (3.4).

Théorème 9.

- (a) Si $q = 1$, alors $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1} = (a_j)_{j=0}^{pr-r}$ correspond au début de la suite $(1, 0^{r-1})^\infty$.
- (b) Si $r = 1$, alors $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1} = (a_j)_{j=0}^{pq-q}$ correspond au début de la suite $(1, 0^{q-1})^\infty$.
- (c) Si $q \geq 2$ et $r \geq 2$, alors la suite $(a_j)_{j=0}^{pqr-q-r+1}$ est qr -périodique et correspond au début la suite

$$\sum_{l=0}^{+\infty} 0^{lq} (1, -1, 0^{r-2})^\infty = \sum_{l=0}^{+\infty} 0^{lr} (1, -1, 0^{q-2})^\infty. \quad (3.16)$$

Remarque 13. Pour la dernière propriété, lorsque l'on parle de suite "périodique" il faut comprendre : la restriction d'une fonction périodique à l'intervalle d'entiers considéré.

Exemple 7.

1. On considère $(T_1, T_2, T_3) = (2, 6, 9)$. Avec les notations (3.3) et (3.4) on obtient $q = 1$, $p = 3$ et $r = 3$. En utilisant un calcul direct, on trouve pour les $(a_j)_{j=0}^6$ la suite suivante :

$$1, 0, 0, 1, 0, 0, 1.$$

Cela correspond bien au début de la suite $(1, 0^{r-1})^\infty = (1, 0^2)^\infty$.

2. On considère $(T_1, T_2, T_3) = (6, 10, 15)$. Avec les notations (3.3) et (3.4) on obtient $q = 3$, $p = 1$ et $r = 5$. En utilisant un calcul direct, on trouve pour les $(a_j)_{j=0}^8$ la suite suivante :

$$1, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 1.$$

Cela correspond bien au début de la suite

$$\sum_{l=0}^{\infty} 0^{lq}(1, -1, 0^{r-2})^\infty = \sum_{l=0}^{\infty} 0^{3l}(1, -1, 0^3)^\infty.$$

En effet, si l'on considère seulement les neuf premiers termes de cette suite en sommant terme à terme on obtient :

$$(1, -1, 0, 0, 0)^\infty + 0, 0, 0, (1, -1, 0, 0, 0)^\infty + 0, 0, 0, 0, 0, 0, (1, -1, 0, 0, 0)^\infty.$$

Les premiers termes sont donc égaux à

$$(1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0) + (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0).$$

On retrouve bien

$$(a_j)_{j=0}^8 = 1, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 1.$$

Pour démontrer le Théorème 9 on va utiliser les trois lemmes suivants :

Lemme 2. Pour chaque $0 < j < qr$, la somme définissant le coefficient a_j contient au plus un terme 1 et au plus un terme -1 .

Lemme 3. Si on a $(q-1)(r-1) < j < qr$ alors $a_j = 0$.

Lemme 4. On a $a_{(q-1)(r-1)} = 1$.

Démonstration du lemme 2. Soit $0 < j_0 < qr$. Supposons que la somme qui définit le coefficient a_{j_0} contient plusieurs fois le terme 1, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$j_0 = l_1q + m_1r = l_2q + m_2r, \quad (3.17)$$

avec l_1, l_2, m_1, m_2 des entiers positifs tels que $(l_1, m_1) \neq (l_2, m_2)$. D'après l'égalité précédente on peut aussi écrire

$$(l_1 - l_2)q = (m_2 - m_1)r. \quad (3.18)$$

Puisque q et r sont premiers entre eux on sait que r est un diviseur de $(l_1 - l_2)$. De plus, puisque $j_0 \in \llbracket 0, qr - 1 \rrbracket = \{0, \dots, qr - 1\}$ alors $j_0 < qr$ et donc

$$0 < |l_1 - l_2| < r.$$

On obtient une contradiction et donc il y a au plus un coefficient 1 dans la somme définissant a_{j_0} .

On procède de la même façon pour prouver qu'il y a au plus un coefficient -1 dans la somme définissant a_{j_0} simplement en changeant j_0 par $j_0 - 1$ dans la preuve précédente. \square

Démonstration du lemme 3. Considérons le cas de $j < qr$. En utilisant le lemme précédent on sait qu'il existe au plus un terme 1 et un terme -1 dans la somme qui définit les coefficients a_j . Pour montrer que les a_j sont nuls, il est suffisant de montrer qu'il existe des entiers positifs l_1, l_2, m_1, m_2 tels que

$$j = l_1q + m_1r \quad \text{et} \quad j = l_2q + m_2r + 1 \quad \forall j \in \llbracket (q-1)(r-1) - 1, qr - 1 \rrbracket.$$

Considérons l'ensemble $\{j - lq, l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket\}$, puisque $l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$ et que $j \in \llbracket (q-1)(r-1) - 1, qr - 1 \rrbracket$ alors on obtient

$$j - lq \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \#\{j - lq, l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket\} = r.$$

De plus, pour $l_1 \neq l_2$ on a $(j - l_1q)$ et $(j - l_2q)$ qui sont différents modulo r . Ainsi, l'ensemble précédent est un système complet de résidus modulo r , plus particulièrement :

1. Il existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tel que $j - l_1q \equiv 0 \pmod{r}$ donc $j = l_1q + m_1r$.
2. Il existe $l_2 \in \mathbb{N}$ tel que $j - l_2q \equiv 1 \pmod{r}$ donc $j = l_2q + m_2r + 1$,

et donc $a_j = 0$. \square

Démonstration du lemme 4. Encore une fois, en utilisant le lemme 2, il est suffisant de montrer qu'il existe des entiers positifs l et m qui vérifient

$$lq + mr = (q-1)(r-1),$$

mais qu'il n'existe pas d'entiers l et m tels que

$$lq + mr + 1 = (q-1)(r-1).$$

Supposons au contraire qu'il n'existe pas d'entiers positifs l et m vérifiant $l + mr = (q - 1)(r - 1)$, alors r ne divise aucun des nombres de la forme

$$(q - 1)(r - 1) - lq \quad \text{avec } l = 0, \dots, r - 2.$$

De plus, on a aussi $(q - 1)(r - 1) - (r - 1)q = 1 - r$ qui n'est pas un multiple de r , ainsi r ne divise aucun des nombres de la forme

$$(q - 1)(r - 1) - lq, \quad \text{avec } l = 0, \dots, r - 1.$$

Mais ce n'est pas possible, puisque l'ensemble

$$\{(q - 1)(r - 1) - lq : l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket\},$$

est un système complet de résidus modulo r (puisque r et q sont premiers entre eux). Pour la seconde partie on remarque que l'ensemble

$$\{(q - 1)(r - 1) - lq : l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket\},$$

est un système complet de résidus modulo r . De plus, si $l = r - 1$, alors on a

$$(q - 1)(r - 1) - lq - 1 = -r,$$

qui est un multiple de r . Aucun des autres entiers n'est un diviseur de r et donc on a

$$(q - 1)(r - 1) - lq - 1 = mr \quad \text{pour } m \in \mathbb{N} \quad \text{si } l = 0, \dots, r - 2. \quad \square$$

On peut maintenant donner la démonstration du théorème.

Démonstration. Démontrons d'abord le point (a) (on procédera de la même façon pour le point (b)). On doit montrer que

$$\sum_{j=0}^{pr-1-r+1} a_j A^j = 0, \tag{3.19}$$

avec $(a_j)_{j=0}^{pr-r}$ qui correspond au début de la suite $(1, 0^{r-1})^\infty$.

On sait que $\frac{n}{pq} \notin \mathbb{Z}$ et que $A^{pqr} = 1$, alors

$$\sum_{j=0}^{pr-1-r+1} a_j A^j = \sum_{j=0}^{r(p-1)} a_j A^j = 1 + A^r + \dots + A^{(p-1)r} = \frac{1 - A^{pr}}{1 - A^r} = 0.$$

Donnons maintenant la démonstration du point (c).

Ici on a $A^{pqr} = (e^{2i\pi jn/pqr})^{pqr} = 1$. D'autre part

$$pqr - q - r + 1 = (p-1)qr + (q-1)(r-1),$$

et donc

$$\sum_{j=0}^{pr-1-r+1} a_j A^j = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=kqr}^{kqr+(q-1)(r-1)} a_j A^j + \sum_{j=(q-1)(r-1)+1}^{qr-1} a_j A^j. \quad (3.20)$$

En utilisant le lemme 3 et le fait que la suite des $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est qr -périodique, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{pr-1-r+1} a_j A^j &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=kqr}^{kqr+(q-1)(r-1)} a_j A^j \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_{j+kqr} A^{j+kqr} \\ &= \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} \sum_{k=0}^{p-1} a_j A^{j+kqr}. \end{aligned}$$

Différencions deux sous-cas :

1. Supposons que $A^{qr} \neq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_j A^{j+kqr} = \frac{A^{j+pqr} - A^j}{A^{qr} - 1} = 0,$$

et on obtient

$$\sum_{j=0}^{pqr-r-q+1} a_j A^j = 0.$$

2. Supposons maintenant que $A^{qr} = 1$, alors

$$\sum_{j=0}^{pr-1-r+1} a_j A^j = \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} \sum_{k=0}^{p-1} a_j A^{j+kqr} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j.$$

On doit maintenant étudier la somme

$$\sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j.$$

En utilisant le lemme 2 et le lemme 4 on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j &= \sum_{j=lq+rm}^{(q-1)(r-1)} A^j - \sum_{j=lq+rm+1}^{(q-1)(r-1)} A^j \\ &= A^{(q-1)(r-1)} + (1-A) \sum_{j=lq+rm}^{(q-1)(r-1)} A^j. \end{aligned}$$

On peut maintenant réécrire la dernière somme. Afin de simplifier l'expression pour chaque élément $l = -1, 0, 1, \dots, r-2$, on introduit m_l comme le plus petit entier positif qui vérifie

$$lq + mr \geq (q-1)(r-1).$$

Pour le coefficient $l = -1$ on a $m_l = m_{-1} = q$ puisque

$$-q + qr \geq (q-1)(r-1) \quad \text{et} \quad -q + (q-1)r < (q-1)(r-1).$$

On utilise maintenant cette notation, et en faisant la somme de séries géométriques on va obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j &= A^{(q-1)(r-1)} + (1-A) \sum_{j=lq+rm}^{(q-1)(r-1)} A^j \\ &= A^{(q-1)(r-1)} + (1-A) \sum_{j=0}^{r-2} \sum_{m=0}^{m_l-1} A^{lq+mr} \\ &= A^{(q-1)(r-1)} + \frac{1-A}{1-A^r} \sum_{l=0}^{r-2} (A^{lq} - A^{lq+m_l r}) \\ &= A^{(q-1)(r-1)} + \frac{(1-A)(1-A^{(r-1)q})}{(1-A^r)(1-A^q)} - \frac{1-A}{1-A^r} \sum_{l=0}^{r-2} A^{lq+m_l r}. \end{aligned}$$

Il reste à estimer la somme

$$\sum_{l=0}^{r-2} A^{lq+m_l r}.$$

Puisque q et r sont premiers entre eux, l'ensemble

$$\{lq + m_l r : l \in \llbracket -1, r-2 \rrbracket\},$$

est un système complet de résidus modulo r . De plus, on a

$$(q-1)(r-1) \leq lq + m_l r < (q-1)(r-1) + r.$$

Ainsi, en utilisant la définition de m_l on peut écrire

$$\{lq + m_l r : l \in \llbracket -1, r-2 \rrbracket\} = \{(q-1)(r-1) + k : k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket\}.$$

Puisque finalement on a aussi $-q + m_{-1}r = q(r-1)$, on obtient

$$\{lq + m_l r : l \in \llbracket 0, r-2 \rrbracket\} = \{(q-1)(r-1) + k : k \in \llbracket 0, r-2 \rrbracket\},$$

ainsi

$$\sum_{l=0}^{r-2} A^{lq+m_l r} = \sum_{k=0}^{r-2} A^{(q-1)(r-1)+k}. \quad (3.21)$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j &= A^{(q-1)(r-1)} + \frac{(1-A)(1-A^{(r-1)q})}{(1-A^r)(1-A^q)} - \\ &\quad \frac{1-A}{1-A^r} A^{(q-1)(r-1)} \frac{1-A^{r-1}}{1-A}. \end{aligned}$$

On va maintenant montrer que le membre de droite s'annule. En effet, en multipliant par $(1-A^r)(1-A^q)$ on obtient

$$\begin{aligned} A &:= (1-A^r)(1-A^q) \sum_{j=0}^{(q-1)(r-1)} a_j A^j \\ &= (1-A^r)(1-A^q) A^{(q-1)(r-1)} + (1-A)(1-A^{(r-1)q}) \\ &\quad - (1-A^{r-1})(1-A^q) A^{(q-1)(r-1)}. \end{aligned}$$

On combine les termes qui contiennent le terme $A^{(q-1)(r-1)}$ et en utilisant le fait que $A^{qr} = 1$, on peut simplifier l'expression de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A &= A^{(q-1)(r-1)}(1-A^q)(A^{r-1} - A^r) + (1-A)(1-A^{(r-1)q}) \\ &= A^{1-q-r}(1-A^q)A^{r-1}(1-A) + (1-A)(1-A^{-q}) \\ &= A^{-q}(1-A^q)(1-A) + (1-A)(1-A^{-q}) \\ &= (A^{-q} - 1)(1-A) + (1-A)(1-A^{-q}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La preuve est donc complète. □

3.3 Etude du signe de h_3

Afin de pouvoir donner un résultat concernant la stricte positivité de la fonction orthogonale h_3 , on va d'abord annoncer un résultat concernant la forme précise de la fonction h_2 . En effet, on a la propriété suivante :

Proposition 10. *Par symétrie, on peut considérer que T_1 est plus grand que T_2 . Dans le cas où T_2 n'est pas un diviseur de T_1 on obtient alors la forme explicite suivante pour la fonction orthogonale h_2 :*

$$h_2 \sim 1^d 2^d \dots \left(\frac{T_2}{d} - 1\right)^d \left(\frac{T_2}{d}\right)^{T_1 - T_2 + d} \left(\frac{T_2}{d} - 1\right)^d \dots 2^d 1^d, \quad (3.22)$$

où d est le plus grand diviseur commun de T_1 et T_2 .

Démonstration. Rappelons les expressions des fonctions h_1 et h_2 :

$$h_1(t) = \chi_{[0, T_1]} = 1^{T_1} \quad \text{et} \quad h_2(t) = \sum_{j=0}^{T_2/d-1} h_1(t - dj),$$

c'est-à-dire,

$$h_2(t) \sim 1^d 1^d \dots 1^d 0^d \dots + 0^d 1^d \dots 1^d 1^d 0^d \dots + \dots + 0^{(T_2/d-1)d} 1^d \dots 1^d \dots$$

On remarque que

$$\left(\frac{T_2}{d} - 1\right) d = T_2 - 1 < T_1. \quad (3.23)$$

On remarque aussi qu'il y a T_2/d termes dans la somme, ainsi le plus grand coefficient est donné par T_2/d et il est répété $T_1 - (T_2 - d)$ fois. On obtient donc bien

$$h_2(t) \sim 1^d 2^d \dots \left(\frac{T_2}{d}\right)^{T_1 - T_2 + d} \dots 2^d 1^d.$$

□

Exemple 8. Considérons le couple $(T_1, T_2) = (7, 4)$ on a alors $h_1 = 1^7$ et

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \sum_{j=0}^{4/1-1} h_1(t - j) \\ &\sim 1^7 000 + 01^7 00 + 001^7 0 + 0001^7 \\ &\sim 1234444321 \\ &\sim 1^1 2^1 3^1 4^{(7-4+1)} 3^1 2^1 1^1. \end{aligned}$$

On avait déjà remarqué que la fonction h_3 semblait symétrique par rapport à son milieu, on va le montrer.

Proposition 11. *La fonction orthogonale h_3 est symétrique par rapport à son milieu.*

Démonstration. Considérons une fonction $f \in X = \overline{X_{T_1} + X_{T_2} + X_{T_3}}$, on a

$$\int_0^T h_3(t)f(t)dt = 0. \quad (3.24)$$

On pose $u = T - t$ et donc

$$\int_0^T h_3(T - u)f(T - u)du = 0.$$

Puisque cette fonction est unique à une constante multiplicative près, on doit avoir

$$h_3(T - u) = K \cdot h_3(u). \quad (3.25)$$

Pour évaluer la constante K on cherche la valeur de h_3 sur l'intervalle $[T - 1, T[$. On sait que

$$h_3(t) = \sum_{j=0}^{pr-q-r+1} a_j h_2(t - j),$$

le dernier terme de h_3 est donc donné par le dernier coefficient de

$$a_{pqr-q-r+1} h_2(t - pqr - q - r + 1).$$

D'après la propriété précédente, on sait que h_2 se termine par un 1, reste à évaluer $a_{pqr-q-r+1}$. Puisque la suite est qr -périodique on a :

$$a_{pqr-q-r+1} = a_{(p-1)qr+(q-1)(r-1)} = a_{(q-1)(r-1)} = 1.$$

Ainsi, on a $h_3(T) = 1$ donc $K = 1$. On a donc montré que $h_3(T - u) = h_3(u)$, la fonction est par conséquent bien symétrique par rapport à son milieu. \square

On sait déjà que h_3 est toujours positive ou nulle, précisons ce résultat pour caractériser la stricte positivité. On rappelle le théorème donné dans l'introduction avant de le démontrer.

Théorème 10. *Soient T_1, T_2, T_3 trois entiers positifs tels que $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle = 1$ et $h_3 \sim c_0, \dots, c_T$. On choisit h_3 telle que $c_0 > 0$. Alors*

1. $c_i \geq 0$ pour tout $i = 0, \dots, T$,

2. au moins un des coefficients c_i est nul si et seulement si

$$1 < \langle T_i, T_j \rangle < T_i \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

Démonstration.

1. En utilisant la symétrie de la fonction h_3 on va s'intéresser au cas où le triplet (T_1, T_2, T_3) vérifie

$$\langle T_1, T_3 \rangle = \min(T_1, T_3) = T_3,$$

c'est-à-dire que $T_1 = k \cdot T_3$. Dans ce cas, en utilisant les calculs précédents concernant h_3 , on sait que cette fonction est strictement positive (en effet ici on peut se ramener au cas de deux périodes).

2. On rappelle les notations des sections précédentes

$$q = \langle T_1, T_3 \rangle, \quad r = \langle T_2, T_3 \rangle, \quad T_3 = pqr.$$

On sait déjà que les fonctions orthogonales h_1 et h_2 sont strictement positives. Ici on va supposer, à permutation près, que $q = 1$. En utilisant le Théorème 9 on sait que

$$h_3 = \sum_{j=0}^{pr-r} a_j h_2(t-j),$$

avec la suite $(a_j)_{j=0}^{pr-r} = (1, 0^{r-1})^\infty$. Ces coefficients sont tous positifs ou nuls et la fonction h_2 est strictement positive. Dans ce cas, la fonction orthogonale h_3 est donc strictement positive.

On suppose maintenant que $\langle T_1, T_2 \rangle < \min(T_1, T_2)$ (on pourra supposer, par symétrie, que T_2 est supérieure à T_1). En particulier, on a

$$\frac{T_2}{\langle T_1, T_2 \rangle} \neq 1,$$

ainsi, en utilisant l'expression explicite de la fonction h_2 , on sait qu'il y a au moins deux termes différents dans h_2 , c'est-à-dire :

$$h_2(t) \sim 1^{\langle T_1, T_2 \rangle} 2^{\langle T_1, T_2 \rangle} \dots 2^{\langle T_1, T_2 \rangle} 1^{\langle T_1, T_2 \rangle}.$$

On peut écrire

$$h_3(t) = \sum_{j=0}^{pqr-q-r+1} a_j h_2(t-j),$$

on va aussi utiliser l'expression des coefficients a_j , puisque $\langle T_1, T_3 \rangle \neq 1$ et que $\langle T_2, T_3 \rangle \neq 1$ alors r et q sont strictement plus grands que 1 et donc les a_j sont donnés par le début de la suite

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} 0^{lq} (1, -1, 0^{r-2})^{+\infty}.$$

Si on note $d = \langle T_1, T_2 \rangle$ on peut écrire

$$\begin{aligned} h_3(t) &= \sum_{j=0}^{pqr-q-r+1} a_j h_2(t-j) \\ &\sim 1^d 2^d \cdots 2^d 1^d \quad (\times a_0 = 1) \\ &+ 01^d 2^d \cdots 2^d 1^d 0 \quad (\times a_1 = -1) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &\sim 10 \cdots \end{aligned}$$

Dans ce cas la fonction h_3 est nulle sur l'intervalle $[1, 2[$. □

Remarque 14. De la même façon, on peut montrer que le premier "bloc" de zéro est de taille $\min(q, r) - 1$.

Chapitre 4

Etude partielle des fonctions orthogonales h_n pour $n > 3$

4.1 Ecriture des fonctions h_n

On a précédemment défini la fonction h_3 comme une somme de translation de la fonction h_2 . De la même façon, on introduit la construction de la fonction orthogonale h_4 qui correspond à un quadruplet de périodes (T_1, T_2, T_3, T_4) .

4.1.1 Construction de h_4

Considérons, comme précédemment, le cas de quatre entiers positifs T_1, T_2, T_3, T_4 . On s'intéresse à l'espace

$$X := \overline{X_{T_1} + X_{T_2} + X_{T_3} + X_{T_4}}.$$

Ce dernier est engendré par la famille des fonctions $(e^{2i\pi mt/T_1 T_2 T_3 T_4})_{m \in \mathbb{Z}^*}$ où m est un entier non nul multiple de $T_1 T_2 T_3$ ou de $T_1 T_3 T_4$ ou de $T_2 T_3 T_4$ ou de $T_1 T_2 T_4$.

On cherche une fonction h_4 telle que

$$h_4^\perp = \overline{X_{T_1} + X_{T_2} + X_{T_3} + X_{T_4}}. \quad (4.1)$$

Plus précisément, on va chercher cette fonction sous la forme suivante :

$$h_4(t) = \sum_{j=0}^{\frac{T_1 T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_3}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}} a_j h_3(t - j \langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle), \quad (4.2)$$

avec une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de nombres réels convenablement choisie (uniquement déterminée si on fixe $a_0 = 1$). Cette fonction doit en outre vérifier

$$\int h_4(t) e^{\frac{2i\pi mt}{T_1 T_2 T_3 T_4}} dt = 0,$$

pour tous les entiers non nuls tels qu'une des fractions $m/T_1 T_2 T_3$, $m/T_1 T_2 T_4$, $m/T_1 T_3 T_4$ ou $m/T_2 T_3 T_4$ soit entière. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \int h_4(t) e^{\frac{2i\pi mt}{T_1 T_2 T_3 T_4}} dt &= \sum_{j=0}^{\frac{T_{1234} - T_{123}}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}} \int a_j h_3(t - j \langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle) e^{\frac{2i\pi mt}{T_1 T_2 T_3 T_4}} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{T_{1234} - T_{123}}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}} a_j e^{\frac{2i\pi m j \langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}{T_1 T_2 T_3 T_4}} \int h_3(t) e^{\frac{2i\pi mt}{T_1 T_2 T_3 T_4}} dt. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la fonction h_3 , l'intégrale précédente est nulle lorsque $m \neq 0$ et que $m/T_1 T_2 T_4$ ou $m/T_1 T_3 T_4$ ou $m/T_2 T_3 T_4$ est entier. Il suffit alors de choisir les coefficients $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{\frac{T_{1234} - T_{123}}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}} a_j e^{\frac{2i\pi m j \langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}{T_1 T_2 T_3 T_4}} = 0, \quad (4.3)$$

où $m/T_1 T_2 T_3 \in \mathbb{N}$ mais $m/T_1 T_2 T_4 \notin \mathbb{N}$, $m/T_1 T_3 T_4 \notin \mathbb{N}$ et $m/T_2 T_3 T_4 \notin \mathbb{N}$ avec de plus, $0 < m < \frac{T_1 T_2 T_3 T_4}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}$.

On note $n := \frac{m}{T_1 T_2 T_3}$, le système précédent (4.3) devient alors

$$\sum_{j=0}^{\frac{T_{1234} - T_{123}}{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}} a_j e^{\frac{2i\pi n j \langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle}{T_4}} = 0, \quad n \in N \quad (4.4)$$

où N est l'ensemble suivant

$$0 < n < T_4, \quad \frac{nT_3}{T_4} \notin \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \frac{nT_2}{T_4} \notin \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \frac{nT_1}{T_4} \notin \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Par un argument de changement d'échelles on peut à nouveau supposer que

$$\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle = 1.$$

Pour montrer qu'une suite de réels $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui vérifient ce système existe on utilise à nouveau la méthode des polynômes.

On cherche une fonction h_4 sous la forme (4.2), on lui associe donc un polynôme P_4 tel que

$$P_4 = \sum_{k=0}^{T_{1234}} a_k X^k P_3(X). \quad (4.6)$$

Avec P_3 le polynôme associé à la fonction orthogonale h_3 (ici, contrairement au cas de trois périodes, on ne peut plus supposer que T_1, T_2 et T_3 sont premières entre elles dans leur ensemble). On notera

$$Q_4 := \sum_{k=0}^{T_{1234}-T_{123}} a_k X^k.$$

On pose $A_n := e^{2i\pi n/T_4}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a $A_n^{T_4} = 1$, les nombres A_n sont donc des racines n -ièmes de l'unité. D'après les propriétés recherchées pour h_4 on veut que le polynôme Q_4 s'annule pour les A_n . On sait aussi que $nT_i/T_4 \notin \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, 2, 3$ donc $A_n^{T_i} \neq 1$, les A_n ne sont donc pas des racines T_i -ième de l'unité.

Si on note μ_n l'ensemble des racines n -ième de l'unité, on a comme racines de Q_4 les éléments

$$B := \mu_{T_4} - (\mu_{T_1} \cup \mu_{T_2} \cup \mu_{T_3}).$$

Si on veut calculer le nombre d'éléments de cet ensemble par une formule de crible, on obtient

$$\begin{aligned} \#(B) &= \#(\mu_{T_4}) - \#(\mu_{T_4} \cap \mu_{T_1}) - \#(\mu_{T_4} \cap \mu_{T_2}) - \#(\mu_{T_4} \cap \mu_{T_3}) \\ &\quad + \#(\mu_{T_1} \cap \mu_{T_2} \cap \mu_{T_4}) + \#(\mu_{T_1} \cap \mu_{T_3} \cap \mu_{T_4}) + \#(\mu_{T_2} \cap \mu_{T_3} \cap \mu_{T_4}) \\ &\quad - \#(\mu_{T_1} \cap \mu_{T_2} \cap \mu_{T_3} \cap \mu_{T_4}). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés élémentaires des racines de l'unité on sait que

$$\#(\mu_{T_1} \cap \mu_{T_2}) = \mu_{\langle T_1, T_2 \rangle}.$$

Ainsi

$$\#(\mu_{T_4} - (\mu_{T_1} \cup \mu_{T_2} \cup \mu_{T_3})) = T_{1234} - T_{123},$$

le nombre de racines correspond bien au degré de Q_4 . On peut donc donner le polynôme correspondant :

$$Q_4(X) = \frac{(1 - X^{T_4})(1 - X^{\langle T_1, T_2, T_4 \rangle})(1 - X^{\langle T_1, T_3, T_4 \rangle})(1 - X^{\langle T_2, T_3, T_4 \rangle})}{(1 - X^{\langle T_1, T_4 \rangle})(1 - X^{\langle T_2, T_4 \rangle})(1 - X^{\langle T_3, T_4 \rangle})(1 - X^{\langle T_1, T_2, T_3, T_4 \rangle})}. \quad (4.7)$$

Et finalement le polynôme P_4 est donné par :

$$P_4(X) = \frac{(1 - X^{T_1})(1 - X^{T_2})(1 - X^{T_3})(1 - X^{\langle T_1, T_2, T_3 \rangle})Q_4(X)}{(1 - X)(1 - X^{\langle T_1, T_2 \rangle})(1 - X^{\langle T_1, T_3 \rangle})(1 - X^{\langle T_2, T_3 \rangle})}. \quad (4.8)$$

Proposition 12. *La suite (a_j) correspondant aux coefficients du polynôme P_4 vérifie bien les conditions (4.4) et (4.5) et on peut donc écrire la fonction orthogonale h_4 sous la forme*

$$h_4(t) = \sum_{j=0}^{T_{1234}-T_{123}} a_j h_3(t-j). \quad (4.9)$$

Remarque 15. Dans le cas de l'étude d'un triplet de périodes (T_1, T_2, T_3) , on pouvait étudier le signe (en particulier le fait d'être positive ou nulle) de la fonction orthogonale h_3 par l'analyse des coefficients du polynôme P_3 . Ici l'étude du polynôme P_4 est un peu plus compliquée, en particulier on n'a pas réussi à en déduire que h_4 est positive ou ne l'est pas.

Donnons quelques observations numériques.

4.1.2 Quelques résultats numériques pour la fonction orthogonale h_4

- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (7, 6, 5, 4)$:
1, 3, 7, 13, 21, 30, 39, 46, 50, 50, 46, 39, 30, 21, 13, 7, 3, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (7, 6, 5, 2)$:
1, 3, 6, 10, 15, 20, 24, 26, 26, 24, 20, 15, 10, 6, 3, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (7, 5, 3, 2)$:
1, 4, 9, 15, 21, 26, 29, 29, 26, 21, 15, 9, 4, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (8, 7, 5, 3)$:
1, 4, 10, 19, 31, 45, 60, 74, 85, 91, 91, 85, 74, 60, 45, 31, 19, 10, 4, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (9, 6, 5, 4)$:
1, 2, 4, 7, 10, 13, 16, 18, 19, 19, 18, 16, 13, 10, 7, 4, 2, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (9, 8, 7, 3)$:
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 35, 41, 45, 47, 47, 45, 41, 35, 28, 21, 15, 10, 6, 3,
1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (9, 8, 7, 2)$:
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 35, 41, 45, 47, 47, 45, 41, 35, 28, 21, 15, 10, 6, 3,
1.

- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (9, 7, 5, 2)$:
1, 4, 9, 16, 25, 35, 45, 54, 61, 65, 65, 61, 54, 45, 35, 25, 16, 9, 4, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (12, 8, 7, 5)$:
1, 3, 6, 10, 16, 23, 31, 39, 47, 54, 60, 64, 66, 66, 64, 60, 54, 47, 39, 31,
23, 16, 10, 6, 3, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (12, 8, 7, 5)$:
1, 3, 6, 10, 16, 23, 31, 39, 47, 54, 60, 64, 66, 66, 64, 60, 54, 47, 39, 31,
23, 16, 10, 6, 3, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (12, 11, 10, 9)$:
1, 2, 4, 7, 11, 16, 23, 31, 41, 52, 64, 76, 88, 99, 109, 117, 123, 126, 126,
123, 117, 109, 99, 88, 76, 64, 52, 41, 31, 23, 16, 11, 7, 4, 2, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (15, 14, 12, 10)$:
1, 0, 2, 1, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 22, 22, 22,
21, 20, 19, 17, 16, 14, 12, 11, 8, 8, 5, 5, 3, 3, 1, 2, 0, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (33, 30, 25, 21)$:
1, 1, 1, 3, 3, 4, 7, 7, 9, 13, 14, 17, 22, 24, 28, 35, 38, 43, 52, 56, 63, 73,
78, 87, 98, 104, 114, 126, 133, 144, 156, 163, 175, 186, 193, 205, 214,
221, 232, 239, 245, 254, 259, 263, 270, 272, 274, 279, 277, 277, 279,
274, 272, 270, 263, 259, 254, 245, 239, 232, 221, 214, 205, 193, 186,
175, 163, 156, 144, 133, 126, 114, 104, 98, 87, 78, 73, 63, 56, 52, 43,
38, 35, 28, 24, 22, 17, 14, 13, 9, 7, 7, 4, 3, 3, 1, 1, 1.
- Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (45, 56, 97, 21)$:
1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 16, 20, 25, 31, 37, 44, 52, 61, 71, 82, 94, 107, 121,
136, 152, 169, 187, 206, 226, 247, 269, 292, 316, 341, 367, 394, 422,
451, 481, 512, 544, 577, 611, 646, 682, 719, 757, 796, 835, 875, 916,
957, 999, 1042, 1085, 1128, 1172, 1216, 1260, 1304, 1348, 1392, 1435,
1478, 1521, 1563, 1604, 1645, 1685, 1724, 1763, 1801, 1838, 1874,
1909, 1943, 1976, 2008, 2039, 2069, 2098, 2126, 2153, 2179, 2204,
2228, 2251, 2273, 2294, 2314, 2333, 2351, 2368, 2384, 2399, 2413,
2426, 2438, 2449, 2459, 2467, 2474, 2480, 2484, 2488, 2491, 2492,
2492, 2491, 2488, 2484, 2480, 2474, 2467, 2459, 2449, 2438, 2426,
2413, 2399, 2384, 2368, 2351, 2333, 2314, 2294, 2273, 2251, 2228,
2204, 2179, 2153, 2126, 2098, 2069, 2039, 2008, 1976, 1943, 1909,
1874, 1838, 1801, 1763, 1724, 1685, 1645, 1604, 1563, 1521, 1478,
1435, 1392, 1348, 1304, 1260, 1216, 1172, 1128, 1085, 1042, 999, 957,

916, 875, 835, 796, 757, 719, 682, 646, 611, 577, 544, 512, 481, 451,
422, 394, 367, 341, 316, 292, 269, 247, 226, 206, 187, 169, 152, 136,
121, 107, 94, 82, 71, 61, 52, 44, 37, 31, 25, 20, 16, 12, 9, 7, 5, 3, 2, 1.

– Fonction h_4 pour $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (24, 53, 78, 101)$:

1, 3, 7, 13, 22, 34, 50, 70, 95, 125, 161, 203, 252, 308, 372, 444, 525,
615, 715, 825, 946, 1078, 1222, 1378, 1547, 1729, 1925, 2135, 2360,
2600, 2856, 3128, 3417, 3723, 4046, 4386, 4743, 5117, 5508, 5916,
6341, 6783, 7242, 7718, 8211, 8721, 9248, 9792, 10353, 10931, 11526,
12138, 12767, 13412, 14073, 14749, 15440, 16145, 16864, 17596, 18341,
19098, 19867, 20647, 21438, 22239, 23050, 23870, 24699, 25536, 26381,
27233, 28092, 28957, 29828, 30704, 31585, 32470, 33358, 34248, 35139,
36030, 36920, 37808, 38693, 39574, 40450, 41321, 42186, 43045, 43897,
44742, 45579, 46408, 47228, 48039, 48840, 49631, 50411, 51180, 51937,
52681, 53411, 54126, 54825, 55507, 56171, 56816, 57441, 58045, 58627,
59186, 59722, 60234, 60722, 61185, 61623, 62035, 62421, 62780, 63112,
63416, 63692, 63939, 64157, 64345, 64503, 64630, 64726, 64790, 64822,
64822, 64790, 64726, 64630, 64503, 64345, 64157, 63939, 63692, 63416,
63112, 62780, 62421, 62035, 61623, 61185, 60722, 60234, 59722, 59186,
58627, 58045, 57441, 56816, 56171, 55507, 54825, 54126, 53411, 52681,
51937, 51180, 50411, 49631, 48840, 48039, 47228, 46408, 45579, 44742,
43897, 43045, 42186, 41321, 40450, 39574, 38693, 37808, 36920, 36030,
35139, 34248, 33358, 32470, 31585, 30704, 29828, 28957, 28092, 27233,
26381, 25536, 24699, 23870, 23050, 22239, 21438, 20647, 19867, 19098,
18341, 17596, 16864, 16145, 15440, 14749, 14073, 13412, 12767, 12138,
11526, 10931, 10353, 9792, 9248, 8721, 8211, 7718, 7242, 6783, 6341,
5916, 5508, 5117, 4743, 4386, 4046, 3723, 3417, 3128, 2856, 2600,
2360, 2135, 1925, 1729, 1547, 1378, 1222, 1078, 946, 825, 715, 615,
525, 444, 372, 308, 252, 203, 161, 125, 95, 70, 50, 34, 22, 13, 7, 3, 1.

Remarque 16. Ici les différentes périodes ont été choisies sans suivre un schéma particulier. On constate que toutes ces fonctions sont positives ou nulles et même, pour la plupart, strictement positives.

Regardons maintenant la forme de cette fonction orthogonale dans le cas particulier d'un quadruplet de périodes sous la forme suivante :

a, b, c, d quatre nombres premiers $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (abc, abd, acd, bcd)$

– Fonction h_4 pour $(a, b, c, d) = (7, 5, 3, 2)$ correspondant au quadruplet $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (105, 70, 42, 30)$:

1, 2, 2, 1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1,

1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 6, 5, 6, 7, 6, 6, 8, 7, 7, 8, 8, 7, 9, 8, 8, 9, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 9, 9, 8, 8, 9, 7, 8, 8, 7, 7, 8, 6, 6, 7, 6, 5, 6, 6, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0,

qui est bien positive ou nulle sur l'intervalle $(0, T)$.

D'après les résultats numériques de la section précédente, on a constaté que pour des périodes de la forme

$$(T_1, T_2, T_3, T_4) = (abc, abd, acd, bcd),$$

la fonction correspondante h_4 possède des coefficients négatifs. Démontrons le résultat suivant, un peu plus général

Proposition 14. *Soient $1 < a < b < c < d$, quatre entiers deux à deux premiers entre eux. On considère le quadruplet de période*

$$(T_1, T_2, T_3, T_4) = (abc, abd, acd, bcd),$$

alors la fonction orthogonale associée h_4 change de signe.

Démonstration. On rappelle que la fonction h_4 est déterminée par les coefficients du polynôme P_4 qui apparaît ici est sous la forme

$$P_4 = Q(X) \frac{(1 - X^{abc})(1 - X^{abd})(1 - X^{acd})(1 - X^{bcd})(1 - X^c)(1 - X^d)}{(1 - X^{ac})(1 - X^{ad})(1 - X^{bc})(1 - X^{bd})(1 - X^{cd})}, \quad (4.10)$$

avec $Q(X)$ donné par

$$Q(x) = \frac{(1 - X^a)(1 - X^b)}{(1 - X)(1 - X)} \frac{1}{1 - X^{ab}}.$$

On peut aussi représenter la fonction $P_4 = \sum_j a_j X^j$ de façon unique par sa série entière, i.e.

$$\begin{aligned} P_4(X) &= \frac{1 - X^a}{1 - X} \frac{1 - X^b}{1 - X} (1 - X^c)(1 - X^d)(1 - X^{abc})(1 - X^{abd})(1 - X^{acd}) \\ &\quad \cdot (1 - X^{bcd})(1 + X^{ab} + X^{2ab} + \dots)(1 + X^{ac} + X^{2ac} + \dots)(1 + X^{ad} + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + X^{bc} + \dots)(1 + X^{bd} + \dots)(1 + X^{cd} + \dots). \end{aligned}$$

On va montrer que P_4 possède au moins un coefficient négatif, plus précisément on démontrera le résultat suivant :

Lemme 5. Un des coefficients a_c ou a_{b+c-1} est strictement négatif.

Puisqu'on s'intéresse au terme d'ordre c et $b+c-1$ on peut "tronquer" la série entière à l'ordre $b+c$. Ainsi, on calcule modulo X^{b+c} , plus rigoureusement, on travaille dans l'anneau des séries formelles et l'on écrit les égalités modulo m^{b+c} où m est l'unique idéal maximal de $\mathbb{R}[[X]]$, c'est-à-dire, $m = X\mathbb{R}[[X]]$ (autrement dit l'ensemble des séries formelles à coefficients réels sans terme constant), on peut écrire

$$P_4(X) \equiv \frac{1-X^a}{1-X} \frac{1-X^b}{1-X} (1+X^{ab}+\dots)(1-X^c)(1-X^d) \pmod{X^{b+c}} \quad (4.11)$$

puisque ac, ad, bc, bd et cd sont strictement supérieurs à $b+c$. On note par ailleurs Q la série entière suivante

$$Q(X) := \sum_j b_j X^j := \frac{1-X^a}{1-X} \frac{1-X^b}{1-X} (1+X^{ab}+\dots). \quad (4.12)$$

Puisque $c+d > b+c$, on peut écrire

$$P_4(X) \equiv Q(X)(1-X^c-X^d) \pmod{X^{b+c}}$$

D'après cette dernière égalité, on obtient la relation suivante pour les coefficients de P_4

$$a_k = b_k - b_{k-c} - b_{k-d}. \quad (4.13)$$

Etudions plus précisément les coefficients de Q

$$\begin{aligned} Q(X) &= \frac{1-X^a}{1-X} \frac{1-X^b}{1-X} (1+X^{ab}+\dots) \\ &= (1+X+\dots+X^{a-1})(1+X+\dots+X^{b-1})(1+X^{ab}+\dots) \\ &:= A(X)B(X)(1+X^{ab}+\dots), \end{aligned}$$

avec

$$A(X)B(X) = \sum_{k=0}^{a-1} (k+1)X^k + \sum_{k=a}^{b-2} aX^k + \sum_{k=b-1}^{a+b-2} (a+b-1-k)X^k.$$

On constate que les coefficients de $Q(X)$ sont compris entre 0 et a , de plus, comme $a+b-2 < ab$, on a aussi

$b_k = a$, si et seulement si le reste de k modulo ab appartient à $\llbracket a-1, b-1 \rrbracket$.
 $b_k = 0$, si et seulement si le reste de k modulo ab appartient à $\llbracket a+b-1, ab-1 \rrbracket$.

Supposons par exemple que $a_{b+c-1} \geq 0$. D'après (4.13) on obtient

$$a_{b+c-1} = b_{b+c-1} - b_{b-1} - b_{b+c-d-1} \quad (4.14)$$

On a $b_{b-1} = a$ ainsi, $a_{b+c-1} = b_{b+c-1} - a - b_{b+c-d-1}$. Puisque $b_{b+c-1} \leq a$ et que $a_{b+c-1} \geq 0$, on doit avoir $b_{b+c-1} = a$.

On sait donc que le reste de $b+c-1$ modulo ab appartient à $\llbracket a-1, b-1 \rrbracket$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} b+c-1 &= kab + r \quad \text{avec} \quad a-1 \leq r \leq b-1 \\ c &= (k-1)ab + \underbrace{ab - b + 1 + r}_{r'} \quad \text{avec} \quad ab + a - b \leq r' \leq ab. \end{aligned}$$

Ainsi $r' \in \llbracket a+b-1, ab-1 \rrbracket$ ou $r' = ab$, or si $r' = ab$ alors $c = kab$ ce qui est impossible puisque a, b et c sont deux à deux premiers entre eux. On a donc $r' \in \llbracket a+b-1, ab-1 \rrbracket$ et $b_c = 0$. En utilisant à nouveau (4.13) on obtient

$$a_c = b_c - b_0 - b_{c-d} = 0 - 1 = -1. \quad (4.15)$$

Donc $a_c < 0$ ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 19. Dans la démonstration il n'est pas nécessaire que (a, b, c, d) soient premiers entre eux, on utilise juste le fait que c ne divise pas ab . Par contre, le fait qu'ils soient deux à deux premiers entre eux garantit par construction que P_4 est bien un polynôme. Autrement dit, si on considère quatre entiers $1 < a < b < c < d$ tels que c ne divise pas ab et tels que

$$P_4 = Q(X) \frac{(1 - X^{abc})(1 - X^{abd})(1 - X^{acd})(1 - X^{bcd})(1 - X^c)(1 - X^d)}{(1 - X^{ac})(1 - X^{ad})(1 - X^{bc})(1 - X^{bd})(1 - X^{cd})}, \quad (4.16)$$

avec $Q(X)$ donné par

$$Q(x) = \frac{(1 - X^a)(1 - X^b)}{(1 - X)(1 - X)} \frac{1}{1 - X^{ab}}.$$

Si de plus Q est un polynôme, alors P_4 possède au moins un coefficient négatif.

Troisième partie
Méthodes d'Ingham

Dans cette partie, on propose plusieurs résultats dans le domaine des méthodes d'Ingham. On présentera en particulier une inégalité du type "Parseval" (dans le cas scalaire et vectoriel) puis un nouveau résultat d'Ingham dans un cas vectoriel.

Chapitre 5

Inégalité du type “Parseval” et application d’une méthode de A. Haraux

On considère une suite de nombres réels $\Omega = (\omega_k)_{k=1}^{\infty}$ qui possède un écartement uniforme, c’est-à-dire

$$\gamma := \inf_{p \neq q} |\omega_p - \omega_q| > 0.$$

Soit I un intervalle borné tel que $|I| > 0$. Pour tout entier n il existe deux constantes positives a_n et b_n telles que :

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq b_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2, \quad (5.1)$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

En appliquant l’inégalité directe d’Ingham (Théorème 3), on constate que les constantes b_n peuvent être choisies indépendamment de l’entier n . En effet, il existe une constante b telle que, pour toutes familles de carrés sommables $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, on a l’estimation

$$\int_I \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq b \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Dans le cas où la longueur de I vérifie $|I| > 2\pi D^+(\Omega)$ on peut, de la même façon, choisir a_n indépendamment de l’entier n . Ainsi, il existe une

constante $a > 0$ telle que, pour toutes familles de carrés sommables $(x_k)_{k=1}^\infty$, on a l'estimation

$$a \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt.$$

D'autre part, d'après le théorème de Beurling (Théorème 4), dans le cas où $|I| < 2\pi D^+(\Omega)$, la suite a_n converge vers 0. Dans les deux sections qui suivent, on étudie la vitesse de décroissance de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5.1 Cas de $(\omega_k)_{k=1}^\infty$ scalaire

On se propose d'établir le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit I un intervalle borné de longueur positive et un réel $\alpha > 4$. Alors, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que*

$$a_n \geq e^{-\alpha n \log n}, \quad (5.2)$$

pour n suffisamment grand et telle que, pour tout n , elle vérifie l'inégalité

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} \right|^2, \quad (5.3)$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Pour la démonstration on introduit une suite d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de même centre que I qui vérifie

$$\frac{|I|}{2} < |I_1| < |I_2| < \dots < |I|.$$

On introduit aussi les nombres

$$\delta_n := \frac{|I_n| - |I_{n-1}|}{2},$$

qui vérifient

$$\delta_n \leq \frac{2}{\gamma} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \dots$$

On reviendra plus tard sur la "petitesse" nécessaire des nombres δ_n . On fixe aussi une constante positive b qui vérifie :

$$\int_I \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq b \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carrés sommables. On constate alors que

$$b \geq |I|. \quad (5.4)$$

Par construction de la suite des intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour démontrer le Théorème 11 il est suffisant de construire une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres positifs qui vérifie (5.2) (pour n assez grand) et qui vérifie

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_{I_n} \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt, \quad (5.5)$$

pour tout entier n et pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Remarque 20. Puisque, pour tout n , $I_n \subset I$, par définition de b on a

$$a_n \leq b.$$

Pour la démonstration du Théorème 11 on va donc construire une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence. On aura aussi besoin du lemme technique suivant :

Lemme 6. Soit $0 < x \leq 2$, alors pour $t \geq x$ et $t \leq -x$ on a

$$\left(1 - \frac{\sin(t)}{t} \right)^2 \geq \frac{x^4}{64}.$$

Démonstration. Si $x \leq |t| \leq 2$, alors il existe $\theta \in [-1, 1]$ tel que

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \theta \frac{t^5}{120},$$

et donc

$$1 - \frac{\sin(t)}{t} = \frac{t^2}{6} \left(1 - \theta \frac{t^2}{20} \right) \geq \frac{t^2}{6} \left(1 - \frac{4}{20} \right) \geq \frac{4t^2}{30} \geq \frac{4x^2}{30}.$$

Ainsi

$$\left(1 - \frac{\sin(t)}{t} \right)^2 \geq \frac{16x^4}{900} \geq \frac{x^4}{64}.$$

Pour $|t| \geq 2$ on a plus simplement

$$\left(1 - \frac{\sin(t)}{t} \right)^2 \geq \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{16}{64} \geq \frac{x^4}{64}.$$

□

Donnons maintenant la démonstration du Théorème 11.

Démonstration. Dans le cas $n = 1$, le membre de gauche de (5.5) devient $a_1|x_1|^2$. De plus, on a

$$\int_{I_1} |x_1 e^{i\omega_1 t}|^2 dt = \int_{I_1} |x_1|^2 dt = |I_1| \cdot |x_1|^2.$$

On peut donc choisir $a_1 = |I_1|$.

Supposons qu'on dispose maintenant de a_1, \dots, a_n qui vérifie les conditions (5.2) et (5.5). On note

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t}.$$

On introduit aussi la fonction

$$y(t) := x(t) - \frac{1}{2\delta_n} \int_{-\delta_n}^{+\delta_n} x(t+s) e^{-i\omega_n s} ds. \quad (5.6)$$

On a

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} - \frac{1}{2\delta_n} \int_{-\delta_n}^{+\delta_n} \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k(t+s)} e^{-i\omega_n s} ds \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} - \frac{1}{2\delta_n} \int_{-\delta_n}^{+\delta_n} \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} e^{is(\omega_k - \omega_n)} ds \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t} - \frac{1}{2\delta_n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k e^{i\omega_k t} \left[\frac{e^{is(\omega_k - \omega_n)}}{i(\omega_k - \omega_n)} \right]_{-\delta_n}^{+\delta_n} \right) + 2\delta_n x_n e^{i\omega_n t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k \left(1 - \frac{\sin(\delta_n(\omega_k - \omega_n))}{\delta_n(\omega_k - \omega_n)} \right) e^{i\omega_k t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k e^{i\omega_k t}. \end{aligned}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $y(t)$, on obtient

$$a_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |y_k|^2 \leq \int_{I_{n-1}} |y(t)|^2 dt.$$

En utilisant le lemme 6 on a donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^2 \leq \frac{64}{(\gamma\delta_n)^4} \sum_{k=1}^{n-1} |y_k|^2 \leq \frac{64}{a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \int_{I_{n-1}} |y(t)|^2 dt. \quad (5.7)$$

Montrons aussi que

$$\int_{I_{n-1}} |y(t)|^2 dt \leq 4 \int_{I_n} |x(t)|^2 dt. \quad (5.8)$$

En effet, d'après la définition de $y(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |y(t)|^2 &\leq 2|x(t)|^2 + 2\left|\frac{1}{2\delta_n} \int_{-\delta_n}^{+\delta_n} x(t+s)e^{-i\omega_n s} ds\right|^2 \\ &\leq 2|x(t)|^2 + \frac{1}{\delta_n} \int_{-\delta_n}^{+\delta_n} |x(t+s)|^2 ds \\ &\leq 2|x(t)|^2 + \frac{1}{\delta_n} \int_{t-\delta_n}^{t+\delta_n} |x(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Si on écrit $I_{n-1} = (a, b)$ et que l'on intègre $y(t)$ il suit

$$\begin{aligned} \int_a^b |y(t)|^2 dt &\leq \int_a^b 2|x(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta_n} \int_a^b \int_{t-\delta_n}^{t+\delta_n} |x(s)|^2 ds dt \\ &= 2 \int_a^b |x(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta_n} \int_{a-\delta_n}^{b+\delta_n} \int_{\max(a, s-\delta_n)}^{\min(b, s+\delta_n)} |x(s)|^2 dt ds \\ &\leq 2 \int_a^b |x(t)|^2 dt + 2 \int_{a-\delta_n}^{b+\delta_n} |x(s)|^2 ds \\ &\leq 4 \int_{a-\delta_n}^{b+\delta_n} |x(s)|^2 ds \\ &\leq 4 \int_{I_n} |x(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant (5.7) et (5.8) on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^2 \leq \frac{256}{a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \int_{I_n} |x(t)|^2 dt \quad (5.9)$$

La somme précédente donne une majoration de la somme des carrés des

modules de x_1, \dots, x_{n-1} . Il reste à estimer le terme $|x_n|^2$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
|x_n|^2 &= \frac{1}{|I_{n-1}|} \int_{I_{n-1}} \left| x(t) - \sum_{k=1}^{n-1} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \\
&\leq \frac{2}{|I_{n-1}|} \int_{I_{n-1}} |x(t)|^2 + \left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \\
&\leq \frac{2}{|I_{n-1}|} \int_{I_{n-1}} |x(t)|^2 dt + \frac{2b}{|I_{n-1}|} \sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^2 \\
&\leq \frac{2}{|I_{n-1}|} \int_{I_{n-1}} |x(t)|^2 dt + \frac{2b}{|I_{n-1}|} \cdot \frac{256}{a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \int_{I_n} |x(t)|^2 dt \\
&\leq \left(\frac{2}{|I_{n-1}|} + \frac{512b}{|I_{n-1}|a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \right) \int_{I_n} |x(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Finalement avec (5.9) on obtient

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \left(\frac{2}{|I_{n-1}|} + \frac{512b}{|I_{n-1}|a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} + \frac{256}{a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \right) \int_{I_n} |x(t)|^2 dt \quad (5.10)$$

Estimons le coefficient devant l'intégrale :

$$\frac{2a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4 + 512b + 256|I_{n-1}|}{a_{n-1}|I_{n-1}|(\gamma\delta_n)^4} \leq \frac{32b + 512b + 256b}{a_{n-1}(|I|/2)(\gamma\delta_n)^4} = \frac{1600b}{a_{n-1}|I|(\gamma\delta_n)^4}.$$

La condition sur les coefficients a_n est satisfaite si on pose

$$a_n := \frac{a_{n-1}|I|(\gamma\delta_n)^4}{1600b}.$$

Et donc

$$a_n = |I_1| \underbrace{\left(\frac{|I|\gamma^4}{1600b} \right)}_{\beta}^{n-1} \prod_{k=2}^n \delta_k^4.$$

On va maintenant s'intéresser plus spécifiquement aux nombres δ_n . Soit $\alpha > 4$, on pose un réel arbitraire $\eta \in]1, \alpha/4[$, on choisit ensuite un entier p suffisamment grand tel que que

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2(k+p)^{-\eta} < \frac{|I|}{2} \quad \text{et} \quad \forall k, \quad \gamma(k+p)^{-\eta} \leq 2.$$

On pose

$$\delta_k := (k+p)^{-\eta}.$$

Montrons que pour un tel choix des coefficients $(\delta_k)_{k=2}^n$ on a bien $a_n \geq e^{-\alpha n \ln(n)}$.

En effet

$$\ln(a_n) = \ln(|I_1|) + (n-1) \ln(\beta) - 4\eta \sum_{k=2}^n \ln(k+p) \geq c_1 + c_2 n - 4\eta n \ln(n+p),$$

avec des constantes c_1 et c_2 . Il est suffisant de montrer que

$$c_1 + c_2 n - 4\eta n \ln(n+p) \geq -\alpha n \ln(n),$$

ou de façon équivalente

$$\frac{c_1 + c_2 n - 4\eta n \ln(n+p)}{n \ln(n)} \geq -\alpha,$$

pour n suffisamment grand.

Or, le membre de gauche converge vers $-4\eta > -\alpha$, ce qui termine la démonstration. \square

5.2 Généralisation au cas de $(\omega_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^N$

Dans ce paragraphe, on cherche à donner une version vectorielle de ce dernier résultat, c'est-à-dire à obtenir une estimation pour des fonctions de la forme

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}^N,$$

où $(\omega_k)_{k=1}^\infty$ est une famille de vecteurs dans \mathbb{R}^N qui possède un écartement uniforme, c'est-à-dire

$$\gamma := \inf_{p \neq q} \|\omega_p - \omega_q\| > 0.$$

On se propose donc de démontrer le théorème suivant :

Théorème 12. *Soit B_R une boule euclidienne de rayon R incluse dans \mathbb{R}^N et un réel $\alpha > 4$. Alors, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres positifs telle que*

$$a_n \geq e^{-\alpha n \ln(n)} \tag{5.11}$$

pour n suffisamment grand et telle que, pour tout n , elle vérifie l'inégalité

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_{B_R} \left\| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k \cdot t} \right\|^2 dt, \tag{5.12}$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Comme dans le cas précédent, on va introduire une suite de boules de même centre que B_R de rayon $(R_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ avec

$$\frac{R}{2} < R_1 < R_2 < \dots < R.$$

On introduit aussi les nombres

$$\delta_n := \frac{R_n - R_{n-1}}{2},$$

qui vérifient

$$\delta_n \leq \frac{2}{\gamma} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \dots$$

Remarque 21. On va introduire le volume des boules B_{R_n} . Si V_δ représente le volume de la boule euclidienne B_δ de dimension N , on sait qu'on a

$$V_\delta^N := V_\delta = \frac{\pi^{N/2} \delta^N}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Comme dans le cas scalaire, on va utiliser l'inégalité d'Ingham (dans le cas vectoriel cf Théorème 6). Ainsi, il existe une constante b positive qui vérifie :

$$\int_{B_R} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k \cdot t} \right\|^2 dt \leq b \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carrés sommables. On constate alors que

$$b \geq V_R.$$

Là aussi, par construction de la suite des boules B_{R_i} , il est suffisant de construire une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs qui vérifie (5.11) pour n assez grand et qui vérifie

$$a_n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \int_{B_{R_n}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k \cdot t} \right\|^2 dt, \quad (5.13)$$

pour tout entier n et pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

La démonstration du Théorème 12 sera très proche de celle du cas scalaire. On se permettra donc d'omettre un certain nombre de points techniques pour mettre plus en relief les quelques aspects nouveaux. On va, comme précédemment, construire la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ par récurrence. On aura aussi besoin du lemme technique suivant :

Lemme 7. Soit $0 < x \leq 2$. Si $\max_{j=1 \dots N} |t_j| \geq x$ alors

$$\left(1 - \prod_{j=1}^N \frac{\sin(t_j)}{t_j}\right)^2 \geq \frac{x^4}{64}$$

Démonstration. S'il existe un indice k tel que $x \leq |t_k| \leq 2$, alors

$$1 - \prod_{j=1}^N \frac{\sin(t_j)}{t_j} \geq 1 - \left| \frac{\sin(t_k)}{t_k} \right| = 1 - \frac{\sin(t_k)}{t_k} \geq \frac{4x^2}{30}.$$

D'après les estimations dans le cas scalaire ($N = 1$), s'il existe k tel que $|t_k| \geq 2$, alors

$$1 - \prod_{j=1}^N \frac{\sin(t_j)}{t_j} \geq 1 - \left| \frac{\sin(t_k)}{t_k} \right| \geq 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{x^2}{8}.$$

□

Démonstration. Dans le cas $n = 1$ on a

$$\int_{B_{R_1}} \|x_1 e^{i\omega_1 \cdot t}\|^2 dt = |x_1|^2 \int_{B_{R_1}} 1 dt = |x_1|^2 V_{R_1}.$$

On peut donc choisir $a_1 = V_{R_1}$. Supposons qu'on dispose maintenant de a_1, \dots, a_n qui vérifie les conditions requises. On note

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k \cdot t},$$

et on introduit aussi la fonction

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{V_{\delta_n}} \int_{B_{\delta_n}} x(t+s) e^{-i\omega_n \cdot s} ds \quad (5.14)$$

Un calcul similaire au précédent nous donne

$$y(t) = \sum_{k=1}^n x_k \left(1 - \frac{1}{V_{\delta_n}} \int_{B_{\delta_n}} e^{is(\omega_k - \omega_n)} ds\right) e^{i\omega_k \cdot t} := \sum_{k=1}^{n-1} y_k e^{i\omega_k \cdot t}. \quad (5.15)$$

On va minorer ces coefficients y_k . Pour cela, on va estimer l'intégrale. On se place dans le cas où $B_{\delta_n} = [-\delta_n, \delta_n]^N$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{\delta_n}} \int_{B_{\delta_n}} e^{-is(\omega_k - \omega_n)} ds &= \frac{1}{V_{\delta_n}} \frac{e^{i(\omega_k^1 - \omega_n^1)\delta_n} - e^{-i(\omega_k^1 - \omega_n^1)\delta_n}}{i(\omega_k^1 - \omega_n^1)} \cdots \frac{e^{i(\omega_k^N - \omega_n^N)\delta_n} - e^{-i(\omega_k^N - \omega_n^N)\delta_n}}{i(\omega_k^N - \omega_n^N)} \\ &= \frac{2^N}{V_{\delta_n}} \frac{1}{\prod_{j=1}^N (\omega_k^j - \omega_n^j)} \sin(\delta_n(\omega_k^1 - \omega_n^1)) \cdots \sin(\delta_n(\omega_k^N - \omega_n^N)) \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $y(t)$, on obtient

$$a_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |y_k|^2 \leq \int_{B_{R_{n-1}}} |y(t)|^2 dt.$$

Et donc en appliquant le lemme 7 avec $t_j := (\omega_k^j - \omega_n^j)\delta_n$ on obtient à nouveau

$$\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^2 \leq \frac{64}{(\gamma\delta_n)^4} \sum_{k=1}^{n-1} |y_k|^2 \leq \frac{4d}{a_{n-1}(\gamma\delta_n)^4} \int_{B_{R_n}} |x(t)|^2 dt.$$

On poursuit de la même façon que dans le cas scalaire et on trouve pour les coefficients a_n :

$$a_n = |V_{R_1}| \left(\frac{V_R \gamma^4}{1600b} \right)^{n-1} \prod_{k=2}^n \delta_k^4,$$

et l'on choisit δ_n suffisamment petit pour que la suite a_n vérifie les conditions requises. \square

Chapitre 6

Quelques résultats vectoriels pour les théorèmes d’Ingham

6.1 Cas de vecteurs linéairement indépendants

On constate dans les Théorème 3 et Théorème 6 que lorsque la dimension de H augmente il apparaît un “espace” entre les deux conditions. On peut alors se demander ce qu’il se passe dans cette “zone intermédiaire”, c’est-à-dire trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur la famille des vecteurs U_k pour améliorer l’optimalité du temps d’observation.

Plus précisément, on considère $(\omega_k)_{k \in K}$ une famille de nombres réels et une famille $(U_k)_{k \in K}$ de vecteurs unitaires d’un espace de Hilbert H de dimension finie n . On cherche une condition suffisante telle que

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \asymp \sum_{k \in K} |x_k|^2, \quad (6.1)$$

pour toute famille $(x_k)_{k \in K}$ de nombres complexes de carrés sommables et où I est un intervalle borné. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 13. *On suppose qu’il existe des ensembles K_1, \dots, K_N et N vecteurs unitaires linéairement indépendants E_1, \dots, E_N de sorte que*

$$K = K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K_N$$

et que

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in K_j}} U_k = E_j.$$

On suppose de plus que les ensembles $\Omega_j = \{\omega_k | k \in K_j\}$ possèdent un écartement uniforme, c'est-à-dire

$$\inf_{\substack{p \neq q \\ p, q \in K_j}} |\omega_p - \omega_q| = \gamma_j > 0, \quad \forall j = 1 \dots N.$$

Si l'on note D_j^+ les densités de Pólya des ensembles Ω_j et si I est un intervalle tel que $|I| > 2\pi \max_j(D_j^+)$, alors

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \asymp \sum_{k \in K} |x_k|^2, \quad (6.2)$$

pour toute famille $(x_k)_{k \in K}$ de nombres complexes de carrés sommables.

Démonstration. Commençons par montrer l'inégalité directe, c'est-à-dire qu'il existe une constante α qui dépend uniquement des $(\omega_k)_{k \in K}$ et de I telle que

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \leq \alpha \sup_{k \in K} \|U_k\|^2 \sum_{k \in K} |x_k|^2, \quad (6.3)$$

pour toute famille (x_k) de carrés sommables (ici $(U_k)_{k \in K}$ peut être une famille arbitraire de vecteurs bornés de H). En effet, on a

$$\left\| \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 \leq N \sum_{j=1}^N \left\| \sum_{k \in K_j} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2.$$

Pour montrer (6.3) il est donc suffisant de prouver que

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K_j} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \leq \alpha_j \sum_{k \in K_j} |x_k|^2. \quad (6.4)$$

Si l'on écrit les vecteurs $(U_k)_{k \in K}$ dans une base orthonormale $(A_i)_{i=1, \dots, n}$,

c'est-à-dire $U_k = \sum_{i=1}^n a_i^k A_i$, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_I \left\| \sum_{k \in K_j} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt &= \int_I \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} a_i^k \right|^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_I \left| \sum_{k \in K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \end{aligned}$$

Il reste à justifier que pour un intervalle I suffisamment "petit", il existe une constante c_j (qui dépend uniquement de γ_j et de I) telle que

$$\int_I \left| \sum_{k \in K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq c_j \sum_{k \in K_j} |x_k|^2. \quad (6.5)$$

L'inégalité (6.5) découle simplement de l'inégalité directe d'Ingham. On rappelle néanmoins la démonstration donnée dans [KL05].

Par un changement de variables, on peut supposer que $\gamma_j = \pi$. On introduit alors $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) := \begin{cases} \cos(x) & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (6.6)$$

On considère maintenant la transformée de Fourier de cette dernière fonction

$$\mathcal{F}(F) := f(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) e^{-itx} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(tx) dx.$$

Ainsi $f(t) > 0$ et elle possède une borne inférieure sur l'intervalle $[-1, 1]$. On introduit maintenant le produit de convolution de F avec elle-même, c'est-à-dire la fonction G

$$G := F \star F.$$

C'est une fonction continue qui s'annule hors de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Si l'on introduit la transformée de Fourier de cette dernière fonction, on peut écrire

$$\mathcal{F}(G) := g(t) = \mathcal{F}(F \star F) = f(t)^2.$$

Cette fonction $g(t)$ est positive, continue, et on peut la majorer par une constante k sur l'intervalle $[-1, 1]$. En utilisant cette borne et la transformée de Fourier inverse, on peut écrire

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^1 \left| \sum_{K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left| \sum_{K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \\ &= 2\pi \sum_{p, q \in K_j} G(\omega_p - \omega_q) (a_i^p x_p) \overline{(a_i^q x_q)}. \end{aligned}$$

Puisque la suite $\Omega := (\omega_k)_{k \in K_j}$ vérifie la condition d'écartement uniforme on a

$$|\omega_p - \omega_q| \geq \pi \text{ lorsque } i \neq j,$$

ainsi, d'après la définition de G , on a $G(\omega_p - \omega_q) = 0$ et donc

$$k \int_{-1}^1 \left| \sum_{K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq 2\pi G(0) \sum_{k \in K_j} |x_k a_i^k|^2.$$

Cette inégalité reste valable pour des intervalles translatés de $[-1, 1]$. On recouvre alors l'intervalle I par N copies de cet intervalle translaté et on obtient

$$\begin{aligned} \int_I \left| \sum_{K_j} (a_i^k x_k) e^{i\omega_k t} \right|^2 dt &\leq \frac{2N\pi G(0)}{k} \sum_{k \in K} |x_k a_i^k|^2 \\ &\leq \frac{2N\pi G(0)}{k} \sup_{k \in K_j} |a_i^k|^2 \sum_{k \in K_j} |x_k|^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre bien l'inégalité (6.5).

Finalement on obtient l'inégalité (6.3) en écrivant

$$\begin{aligned} \int_I \left\| \sum_{K_j} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt &\leq \sum_{i=1}^n c_j \sum_{k \in K_j} |x_k|^2 \\ &\leq \delta_j \sum_{k \in K_j} |x_k|^2. \end{aligned}$$

Démontrons l'inégalité inverse, c'est-à-dire qu'il existe une constante β positive qui dépend uniquement de la suite $(\omega_k)_{k \in K}$ et de I telle que

$$\beta \sum_K |x_k|^2 \leq \int_I \left\| \sum_K x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt. \quad (6.7)$$

Si l'on note :

$$x(t) = \sum_K x_k U_k e^{i\omega_k t},$$

on peut tout d'abord écrire que

$$\begin{aligned} \int_I \|x(t)\|^2 dt &= \int_I \left\| \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right) E_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right) (U_k - E_i) \right\|^2 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_I \left\| \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right) E_j \right\|^2 dt - \int_I \left\| \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right) (U_k - E_i) \right\|^2 dt. \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs E_1, \dots, E_N sont linéairement indépendants, il existe une constante $\mu > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{j=1}^N w_j E_j \right\|^2 \geq \mu \sum_{j=1}^N |w_j|^2, \quad \forall w_1, \dots, w_N \in \mathbb{C}. \quad (6.8)$$

Ainsi, d'après les deux résultats précédents, on a

$$\int_I \|x(t)\|^2 dt \geq \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \int_I \left| \sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt - \int_I \left\| \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right) (U_k - E_j) \right\|^2 dt.$$

En appliquant l'inégalité directe précédemment démontrée on obtient

$$\int_I \|x(t)\|^2 dt \geq \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \int_I \left| \sum_{k \in K_j} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt - \alpha \left(\max_{j=1, \dots, N} \sup_{K_j} \|U_k - E_j\|^2 \right) \sum_{k \in K} |x_k|^2.$$

Puisque $|I| > 2\pi \max(D_j^+)$ d'après l'inégalité inverse de (Théorème 6), il existe une constante $d > 0$ qui ne dépend que de la suite (ω_k) et de l'intervalle I telle que

$$\int_I \|x(t)\|^2 dt \geq \left(\frac{\mu d}{2} - \alpha \left(\max_{j=1, \dots, N} \sup_{K_j} \|U_k - E_j\|^2 \right) \right) \sum_{k \in K} |x_k|^2. \quad (6.9)$$

Par hypothèse on sait que

$$\lim_{\substack{k \in K_j \\ k \rightarrow +\infty}} U_k = E_j.$$

Ainsi, il existe un sous-ensemble fini de K noté K' tel que

$$\max_j \sup_{k \in K_j \setminus K'} \|U_k - E_j\|^2 < \frac{d\mu}{4\alpha}.$$

On a donc montré que

$$\int_I \left\| \sum_{K \setminus K'} x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \geq \frac{d\mu}{4} \sum_{K \setminus K'} |x_k|^2. \quad (6.10)$$

Pour terminer la démonstration on a besoin "d'ajouter" un nombre fini de termes dans la sommation tout en conservant l'équivalence des normes. Pour cela, on utilise le résultat de A. Haraux [Har89] suivant (adapté au cas vectoriel) :

Proposition 15. *On considère un ensemble fini K_0 d'indices, $(w_k)_{k \in K}$ une famille de nombres réels qui vérifie une condition d'écartement uniforme et $(U_k)_{k \in K}$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert H . On suppose que pour un intervalle I_0 on a l'équivalence*

$$\int_{I_0} \left\| \sum_{k \in K \setminus K_0} x_k e^{iw_k t} U_k \right\|_H^2 \asymp \sum_{k \in K \setminus K_0} |x_k|^2. \quad (6.11)$$

Alors, pour un intervalle I tel que $|I| > |I_0|$, on a aussi l'équivalence de normes pour tout l'ensemble d'indice K , plus précisément on obtient

$$\int_I \left\| \sum_{k \in K} x_k e^{iw_k t} U_k \right\|_H^2 \asymp \sum_{k \in K} |x_k|^2. \quad (6.12)$$

On redonne ici la démonstration.

En raisonnant par récurrence, on peut supposer que K_0 possède un unique élément k_0 . On peut aussi, par translation, et donc sans perte de généralité, supposer que $w_{k_0} = 0$ et que $k_0 = 0$.

On pose

$$x(t) := \sum_{k \in K} U_k x_k e^{iw_k t},$$

et donc

$$x(t) - x_0 = \sum_{K - \{0\}} U_k x_k e^{iw_k t}.$$

En utilisant l'hypothèse (6.11) pour la fonction $x(t) - x_0$, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \int_{I_0} \|x(t)\|_H^2 dt &= \int_{I_0} \|x_0 + x(t) - x_0\|_H^2 dt \\ &\leq \int_{I_0} 2\|x_0\|_H^2 + 2\|x(t) - x_0\|_H^2 dt \\ &\leq 2|I_0| \cdot \|x_0\|_H^2 + 2c_1 \sum_{k \neq 0} |x_k|^2. \end{aligned}$$

Si I est un intervalle borné dont la longueur vérifie $|I| \geq |I_0|$, on peut le recouvrir par N translatés de l'intervalle I_0 , ainsi

$$\int_I \|x(t)\|_H^2 dt \leq \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \|x(t)\|_H^2 dt \leq N \cdot \max(2|I_0|, 2c_1) \sum_{k \in K} |x_k|^2,$$

et donc

$$\int_I \|x(t)\|_H^2 dt \leq c_2 \sum_K |x_k|^2,$$

avec $c_2 := N \cdot \max(2|I_0|, 2c_1)$.

Pour la seconde majoration, on fixe un intervalle (a, b) translaté de I_0 et une constante $\delta > 0$ telle que $(a - \delta, b + \delta) \subset I$. On introduit aussi la fonction $y(t)$ définie par

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} x(t+s) ds. \quad (6.13)$$

On peut alors mener le calcul suivant

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} x(t+s) ds \\ &= \sum_{k \neq 0} U_k x_k e^{iw_k t} - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_{k \neq 0} U_k x_k e^{iw_k t} ds + x_0 U_0 e^{iw_0 t} - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} x_0 U_0 e^{iw_0(t+s)} ds \\ &= \sum_{k \neq 0} U_k x_k e^{iw_k t} - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_{k \neq 0} U_k x_k e^{iw_k(t+s)} ds \\ &= \sum_{k \neq 0} U_k x_k e^{iw_k t} - \frac{1}{2\delta} \sum_{k \neq 0} U_k x_k \left(\frac{e^{iw_k \delta} - e^{-iw_k \delta}}{iw_k} \right) \\ &= \sum_{k \neq 0} x_k U_k e^{iw_k t} \left(1 - \frac{\sin(w_k \delta)}{w_k \delta} \right) \\ &= \sum_{k \neq 0} y_k e^{iw_k t} U_k x_k. \end{aligned}$$

Ici, d'après l'étude de la fonction $\left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right)$ et d'après le fait que $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie la propriété d'écartement uniforme, on a

$$y_k = \left(1 - \frac{\sin(w_k \delta)}{w_k \delta} \right) > 0.$$

On pose alors

$$\epsilon := \inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\sin(w_k \delta)}{w_k \delta} \right).$$

Ainsi on a

$$\sum_{k \neq 0} |x_k|^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k \neq 0} |y_k x_k|^2.$$

Par application de l'hypothèse du théorème on a

$$\sum_{k \neq 0} |y_k x_k|^2 \leq c_3 \int_a^b \|y(t)\|_H^2 dt,$$

ainsi

$$\sum_{k \neq 0} |x_k|^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k \neq 0} |y_k x_k|^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2 c_3} \int_a^b \|y(t)\|_H^2 dt.$$

En utilisant l'expression de la fonction $y(t)$ on obtient par ailleurs

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_H^2 &= 2\|x(t)\|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \|x(t+s)\|^2 ds \\ &= 2\|x(t)\|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \|x(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

En intégrant alors cette fonction sur l'intervalle (a, b) on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \|y(t)\|^2 dt &\leq 2 \int_a^b \|x(t)\|^2 dt + \frac{1}{\delta} \int_a^b \int_{t-\delta}^{t+\delta} \|x(s)\|^2 ds dt \\ &\leq 2 \int_a^b \|x(t)\|^2 dt + 2 \int_{a-\delta}^{b+\delta} \|x(t)\|^2 dt \\ &\leq 4 \int_I \|x(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

En combinant ces deux derniers résultats on obtient alors

$$c_4 \sum_{k \neq 0} |x_k|^2 \leq \int_I \|x(t)\|^2 dt. \tag{6.14}$$

Pour évaluer maintenant le terme x_0 on peut écrire

$$\begin{aligned} |x_0| &= \frac{1}{|I|} \int_I \|x_0\|_H^2 dt \\ &\leq \frac{2}{|I|} \int_I \|x(t)\|_H^2 dt + \frac{2}{|I|} \int_I \left\| \sum_{k \neq 0} x_k U_k e^{i w_k t} \right\|^2 dt \\ &\leq \frac{2}{|I|} \int_I \|x(t)\|_H^2 dt + c_5 \sum_{k \neq 0} |x_k|^2 \\ &\leq c_6 \int_I \|x(t)\|_H^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\sum_{k \in K} |x_k|^2 \leq \int_I \|x(t)\|_H^2 dt, \quad (6.15)$$

ce qui démontre la proposition (15). On l'utilise alors pour montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\int_I \left\| \sum_K x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \geq c_2 \sum_K |x_k|^2. \quad (6.16)$$

On a donc bien montré que

$$\int_I \left\| \sum_K x_k U_k e^{i\omega_k t} \right\|^2 dt \asymp \sum_K |x_k|^2. \quad (6.17)$$

□

Remarque 22.

1. La condition sur la longueur de l'intervalle I dans le Théorème 13 est optimale, plus précisément, si on a "équivalence des normes", alors $|I| > \max_{j=1 \dots N} (D^+(\Omega_j))$ (on déduit cette propriété de l'optimalité de la taille de l'intervalle d'intégration dans le cas scalaire).
2. En particulier, on peut en déduire le cas suivant ; on considère la suite de vecteurs $(U_k)_{k \in K}$ telle que

$$U_{2k} = U_0 \quad \text{et} \quad U_{2k+1} = U_1.$$

Soit $(\omega_k)_{k \in K}$ une famille de réels qui vérifie la condition d'écartement uniforme, on note

$$\Omega_0 := \{\omega_{2k} | k \in K\} \quad \text{et} \quad \Omega_1 := \{\omega_{2k+1} | k \in K\}.$$

Soit I un intervalle non dégénéré et une fonction $x(t) = \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t}$, pour une famille de nombres complexes $(x_k)_{k \in K}$ de carrés sommables.

Si $|I| \geq 2\pi \max(D^+(\Omega_0), D^+(\Omega_1))$ alors $\int_I |x(t)|^2 dt \asymp \sum |x_k|^2$.

6.2 Cas de vecteurs linéairement dépendants

On peut aussi améliorer les estimations existantes dans le cas d'une famille de vecteurs $(U_k)_{k \in K}$ liée. On identifie \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} et on note U_0, U_1 et U_2 les

vecteurs qui correspondent à $1, e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$. On considère maintenant la fonction suivante :

$$x(t) = \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{avec } U_k := U_i, \quad i = k \pmod{3}. \quad (6.18)$$

Evidemment ici la famille $(U_k)_K$ est liée puisque, $U_0 + U_1 + U_2 = 1$. On pose :

$$\Omega_j := \{\omega_{3k+j} : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad f_j(t) := \sum_{k \in K} x_{3k+j} e^{i\omega_{3k+j} t}.$$

On peut écrire

$$x(t) = \sum_{k \in K} x_k U_k e^{i\omega_k t} = U_0 \cdot f_0 + U_1 \cdot f_1 - U_0 \cdot f_2 - U_1 \cdot f_2. \quad (6.19)$$

En estimant la norme de $x(t)$ on obtient

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_H^2 &= |(f_0 - f_2)^2 + 2(f_0 - f_2)(f_1 - f_2)U_0 \cdot U_1 + (f_1 - f_2)^2| \\ &= |(f_0 - f_2)^2 - (f_0 - f_2)(f_1 - f_2) + (f_1 - f_2)^2| \\ &\leq \frac{3}{2}(|f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}(|f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2) \leq \|x(t)\|_H^2 \leq \frac{3}{2}(|f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2). \quad (6.20)$$

Donnons la propriété principale :

Proposition 16. *Supposons que $\Omega_0, \Omega_1 \cup \Omega_2$ possèdent des écarts uniformes et soit I un intervalle borné qui vérifie*

$$|I| > 2\pi \max \{D^+(\Omega_0), D^+(\Omega_1 \cup \Omega_2)\}.$$

Alors

$$\int_I |f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 dt \asymp \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.21)$$

Remarque 23.

1. Puisque $\Omega_1 \cup \Omega_2$ possède un écartement uniforme, alors nécessairement Ω_1 et Ω_2 possèdent tous deux des écarts uniformes.
2. On peut obtenir une autre condition suffisante en échangeant les rôles de Ω_0 et de Ω_2 .

3. En choisissant deux des fonctions f_0, f_1, f_2 comme des fonctions nulles, la relation (6.21) implique que

$$\int_I |f_j|^2 dt \asymp \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k+j}|^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

Ainsi, pour la validité de la relation (6.21), il est nécessaire que chacun des espaces Ω_0, Ω_1 et Ω_2 possède des écarts uniformes et que

$$|I| > 2\pi \max\{D^+(\Omega_0), D^+(\Omega_1), D^+(\Omega_2)\}.$$

Démonstration. On va procéder en quatre étapes.

Première étape. On applique l'inégalité de Young de sorte que

$$\int_I |f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 dt \leq \int_I 2|f_0|^2 + 4|f_1|^2 + 2|f_2|^2 dt.$$

Puisque chacun des espaces Ω_0, Ω_1 et Ω_2 possède des écarts uniformes, on peut appliquer les inégalités directes. Il existe alors une constante positive c_1 telle que

$$\int_I |f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 dt \leq c_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.22)$$

Seconde étape. Puisque $|I| > 2\pi D^+(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ en utilisant l'inégalité d'observation du théorème d'Ingham on sait qu'il existe une constante positive c_2 telle que

$$c_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k+1}|^2 + |c_{3k+2}|^2 \leq \int_I |f_1 - f_2|^2 dt. \quad (6.23)$$

Troisième étape. Puisque $|I| > 2\pi D^+(\Omega_0)$ on sait, en utilisant l'inégalité d'observation d'Ingham pour Ω_0 , qu'il existe une constante positive c_3 telle que

$$\begin{aligned} c_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k}|^2 &\leq \int_I |f_0|^2 dt = \int_I |f_0 - f_2 + f_2|^2 dt \\ &\leq \int_I 2|f_0 - f_2|^2 + 2|f_2|^2 dt. \end{aligned}$$

En appliquant (6.22) avec $f_0 = f_1 = 0$ on a

$$\int_I |f_2|^2 dt \leq c_4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k+2}|^2. \quad (6.24)$$

De plus, si on applique (6.23)

$$\int_I |f_2|^2 dt \leq \frac{c_4}{c_2} \int_I |f_1 - f_2|^2 dt,$$

et donc il existe une constante c_5 positive telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k}|^2 \leq c_5 \int_I |f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 dt. \quad (6.25)$$

Quatrième étape. En regroupant les inégalités (6.23) et (6.25), on peut affirmer qu'il existe bien une constante positive d telle que

$$d \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{3k}|^2 + |c_{3k+1}|^2 + |c_{3k+2}|^2 \leq \int_I |f_0 - f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 dt. \quad (6.26)$$

On a donc bien démontré l'inégalité inverse.

□

Ainsi, en combinant (6.20) et la proposition 16 pour un intervalle I tel que $|I| > 2\pi \max\{D^+(\Omega_0), D^+(\Omega_1), D^+(\Omega_2)\}$, on a

$$\int_I \|x(t)\|_H^2 dt \asymp \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.27)$$

Il est toujours frustrant “d’abandonner” un sujet avec le sentiment que l’on pourrait en tirer un peu plus, mais c’est aussi excitant de voir comment de nouvelles questions surgissent dans un domaine où, il y a encore quelques années, je ne m’étais jamais aventuré. Bien évidemment ce travail ne prétend pas à l’exhaustivité et il reste de nombreux problèmes à traiter aussi bien pour l’étude du cas vectoriel des théorèmes de type Ingham que pour les questions concernant les fonctions orthogonales positives.

Pour la première partie de la thèse, il faudrait pouvoir mener la même étude que pour le cas $n = 3$ dans le cas général. On pourrait dans un premier temps essayer de généraliser les résultats obtenus dans le cas $n = 4$, en particulier pour les quadruplets de la forme $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (abc, bd, acd, bcd)$.

Il reste aussi de nombreuses interrogations dans la seconde partie. Comme nous le présentions dès le commencement du travail de thèse, nous n’avons pas pu obtenir une condition nécessaire et suffisante sur la famille (U_n) qui donnerait le temps critique optimal dans le cas vectoriel d’Ingham. Tout résultat qui généraliserait le cas d’indépendance linéaire (traité ici) serait donc le bienvenu. On a pu aussi améliorer le temps critique dans le cas d’un exemple particulier (cf. dernier exemple traité) sans pour autant réussir à généraliser. A nouveau, une étude plus poussée nous semble donc souhaitable.

Annexe A

Programmes informatiques utilisés

On donne ici les méthodes de calcul employées pour donner les coefficients définissant les fonctions orthogonales et leurs valeurs (cf paragraphe (3.3)). On a ici utilisé le logiciel *Maple 18* afin de mener les calculs.

A.0.1 Calcul direct des coefficients (a_j)

On donne ici un programme qui traite le cas d'un triplet de périodes $(T_1, T_2, T_3) = (bc, ac, ab)$ en utilisant non pas la méthode exposée dans ce travail, mais la méthode originale donnée dans [Kom87].

```
> ortho := proc(a,b,c)
local T1, T2, T3, T, Tlim, c1, c2, c3, eq1, eq2, eq3, eq4, s ;
T1 := b.c ;
T2 := a.c ;
T3 := a.b ;
T := T1 + T2 +
T3 - igcd(T1, T2) - igcd(T1, T3) - igcd(T2, T3) + igcd(T1, T2, T3) ;
c1 := floor( $\frac{T}{T1}$ ) ;
c2 := floor( $\frac{T}{T2}$ ) ;
c3 := floor( $\frac{T}{T3}$ ) ;
Tlim := max((c1+1)*T1, (c2+1)*T2, (c3+1)*T3) ;
eq1 := seq( $\sum_{i=0}^{c1} x[k + i * T1] = a, k = 1 \dots T1$ ) ;
```

```

eq2 :=seq(∑i=0c2 x[k + i * T2] = b, k = 1...T2) ;
eq3 :=seq(∑i=0c3 x[k + i * T3] = c, k = 1...T3) ;
eq4 :=seq(x[k] = 0, k = (T + 1) ... Tlim) ;
s :=solve({eq1, eq2, eq3, eq4 }, {seq(x[j], j = 1...Tlim) });
return s ;
end proc ;

```

A.0.2 Calcul de la fonction $h_2(t)$

On donne ici le programme permettant d'évaluer les fonctions $h_2(t)$.

```

> h2 :=proc(T1,T2)
local T,s,L,i ;
T :=T1+T2-igcd(T1,T2) ;
s :=(T-T1)/(igcd(T1,T2)) ;
L := [seq(1,i = 1...T1), seq(0, k = 1...(T-T1))] ;
for i from 1 to s do
L := L+[seq(0, k = 1...i * igcd(T1,T2)), seq(1,i = 1...T1), seq(0,
k = 1 ... T-T1-i*igcd(T1, T2))] ;
od ;
return L,T,s ;
end proc ;

```

A.0.3 Second calcul des coefficients (a_j)

Donnons la méthode de calcul pour obtenir les coefficients (a_j) (utilisant trois sous-programmes pour évaluer les temps critiques et les listes d'entiers).

```

> T := proc (T1, T2, T3)
local i ;
i := T1+T2+T3-igcd(T1, T2)-igcd(T2, T3)-igcd(T1, T3)+igcd(T1,
T2, T3) ;
return i ;
end proc ;

```

```

> TT := proc (T1, T2)
local i;
i := T1+T2-igcd(T1, T2);
return i;
end proc;

```

```

> liste := proc (T1, T2, T3)
local a, b, k, L;
L := NULL;
for k from 1 to T1-1 do
a := evalb(whattype((k*T2*T3)/((T1*T3)) = 'integer');
b := evalb(whattype((k*T2*T3)/((T1*T2)) = 'integer');
if a = false and b = false then L := L, k;
end if;
end do;
return [L];
end proc;

```

```

> ortho2 := proc (T1, T2, T3)
local s, L, i, res, eq;
s := T(T3, T2, T1)-TT(T3, T2);
L := liste(T1, T2, T3);
for i from 1 to s do
eq[i] := evalf(1 +  $\sum_{k=1}^s a[k]e^{2*I*Pi*L[i]*k/T1}$ , k = 1...s)) = 0;
end do;
res := solve({seq(eq[i], i = 1...s)}, {seq(a[i], i = 1...s)});
return evalf(res,1), s;
end proc;

```

A.0.4 Calcul des fonctions orthogonales $h_4(t)$ par la méthode des polynômes

On donne d'abord le programme qui calcule la fonction orthogonale h_4 associée à un quadruplet (T_1, T_2, T_3, T_4) en utilisant la méthode des polynômes, puis le programme qui teste les quadruplets donnant des fonctions

qui changent de signe. Enfin, on présente le programme qui traite spécifiquement les cas des quadruplets de la forme (abc, bd, acd, bcd) .

```

> ortho4 :=proc(T1,T2,T3,T4)
local L,i,T,P,PP,A,Q;
L :=NULL;
L :=L,1;
T := T1+T2+T3+T4-igcd(T1, T4)-igcd(T2, T4)-igcd(T3,
T4)-igcd(T1, T2)-igcd(T1, T3)-igcd(T2, T3)+igcd(T1, T2,
T3)+igcd(T1, T2, T4)+igcd(T1, T3, T4)+igcd(T2, T3, T4)-igcd(T1,
T2, T3, T4);
Q :=(1-XT4)*(1-XT3)*(1-XT2)*(1-XT1)/(1-X)*(1-X))*(1-Xigcd(T1,T2));
P :=Q*(1-Xigcd(T1,T2,T4))*(1-Xigcd(T1,T3,T4))*(1-Xigcd(T2,T3,T4))*(1-Xigcd(T1,T2,T3))/
(1-Xigcd(T1,T4))*(1-Xigcd(T2,T4))*(1-Xigcd(T3,T4))*(1-Xigcd(T1,T3))*(1-Xigcd(T2,T3));
PP := expand(simplify(P))
for i from 1 to T do
L :=L,coeff(PP,X,i);
od;
return L;
end proc;

```

```

> test :=proc(n,N)
local i,a,b,c,d,roll; roll :=rand(1...N);
for i from1 to n do
a :=roll();
b :=roll();
c :=roll();
d :=roll();
if evalb(SelectFirst(type, [ortho4(a, b, c, d)], negative) =
NULL) = false then print([a, b, c, d]);
end if;
od;
end proc;

```

```

> test2 :=proc(n,N)
local i,a,b,c,d,roll;
roll :=rand(1...N);

```

```
for i from 1 to n do
a := ithprime(roll());
b := ithprime(roll());
c := ithprime(roll());
d := ithprime(roll());
if evalb(a ≠ b) and evalb(a ≠ c) and evalb(a ≠ d) and evalb(c ≠ b)
and evalb(b ≠ d) and evalb(c ≠ d) then
print(a*b*c, a*b*d, a*c*d, b*c*d, [a, b, c, d])
if evalb(SelectFirst(type, [ortho4(a*b*c, a*b*d, a*c*d,
b*c*d)], negative) = NULL) = false then print('negatif') else
print('positif');
end if;
end if;
od;
end proc;
```

Bibliographie

- [Beu89] A. Beurling. *The collected works of Arne Beurling. Vol. 2.* Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. Harmonic analysis, Edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer.
- [BKL02] C. Baiocchi, V. Komornik, and P. Loreti. Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions. *Acta Math. Hungar.*, 97(1-2) :55–95, 2002.
- [BKM10] A. Barhoumi, V. Komornik, and M. Mehrenberger. A vectorial Ingham-Beurling type theorem. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 53 :17–32, 2010.
- [GR96] K. Gröchenig and H. Razafinjatovo. On Landau’s necessary density conditions for sampling and interpolation of band-limited functions. *J. London Math. Soc. (2)*, 54(3) :557–565, 1996.
- [Har89] A. Haraux. Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d’une plaque rectangulaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 68(4) :457–465 (1990), 1989.
- [HK85] A. Haraux and V. Komornik. Oscillations of anharmonic Fourier series and the wave equation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(4) :57–77, 1985.
- [HK88] A. Haraux and V. Komornik. Oscillations in the wave equation. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, Vol. VIII (Paris, 1984–1985)*, volume 166 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 110–119. Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.
- [HK91] A. Haraux and V. Komornik. On the vibrations of rectangular plates. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 119(1-2) :47–62, 1991.
- [Ing36] A. E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Math. Z.*, 41(1) :367–379, 1936.
- [IS83] A. Iserles and G. Strang. The optimal accuracy of difference schemes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(2) :779–803, 1983.


-
- [Jaf88] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(14) :759–762, 1988.
- [KL05] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier series in control theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Kom87] V. Komornik. Density theorems for almost periodic functions : a Hilbert space approach. *J. Math. Anal. Appl.*, 122(2) :538–554, 1987.
- [Kom89a] V. Komornik. On the vibrations of a square membrane. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 111(1-2) :13–20, 1989.
- [Kom89b] V. Komornik. On the vibrations of solid balls. *Acta Math. Hungar.*, 54(3-4) :309–317, 1989.
- [Kom90] V. Komornik. On the vibrations of a spherical membrane. *Houston J. Math.*, 16(2) :187–193, 1990.
- [LM08] P. Loreti and M. Mehrenberger. An Ingham type proof for a two-grid observability theorem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 14(3) :604–631, 2008.
- [Lor05] P. Loreti. On some gap theorems. In *European women in mathematics—Marseille 2003*, volume 135 of *CWI Tract*, pages 39–45. Centrum Wisk. Inform., Amsterdam, 2005.
- [LV97] P. Loreti and V. Valente. Partial exact controllability for spherical membranes. *SIAM J. Control Optim.*, 35(2) :641–653, 1997.
- [Meh05] M. Mehrenberger. Critical length for a Beurling type theorem. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 8(1) :251–258, 2005.
- [Meh09] M. Mehrenberger. An Ingham type proof for the boundary observability of a $N - d$ wave equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(1-2) :63–68, 2009.
- [PRR34] R. E. A. C. Paley, W. C. Randels, and M. F. Roszkopf. On the summation of Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40(2) :69–74, 1934.
- [Wie34] N. Wiener. A class of gap theorems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2)*, 3(3-4) :367–372, 1934.

Le travail de la thèse est constitué de deux parties indépendantes traitant toutes les deux du comportement de solutions d'équations différentielles partielles. On s'intéressera dans un premier temps aux fonctions orthogonales positives à certains espaces puis à quelques résultats de type "Ingham".

L'existence ou non de fonctions orthogonales positives à certains espaces de fonctions quasi-périodiques a d'importantes implications, en particulier pour l'étude du comportement oscillatoire des solutions d'équations de membranes vibrantes. On se propose ici de clarifier la situation d'un sous-espace défini par trois périodes et de donner des pistes de réflexion pour le cas de quatre périodes ou plus.


On peut utiliser les séries de Fourier non harmoniques pour résoudre certains problèmes de contrôle en utilisant des variantes du théorème d'Ingham. On s'intéressera spécifiquement ici aux problèmes que pose la version vectorielle de ce théorème.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
 Université de Strasbourg et CNRS
 7 Rue René Descartes
 67 084 STRASBOURG CEDEX



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Tél. 03 68 85 01 29
 Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr



Institut de Recherche
 Mathématique Avancée

IRMA 2016/004
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01362505>

ISSN 0755-3390